

621.8

С32

С. В. СЕРЕНСЕН,
И. М. ТЕТЕЛЬБАУМ, Н. И. ПРИГОРОВСКИЙ

*Динамическая
прочность*
В МАШИНОСТРОЕНИИ

М А Ш Г И З

1945

621.8
С32

19 ДЕП

Акад. С. В. СЕРЕНСЕН, доц. И. М. ТЕТЕЛЬБАУМ,
проф. Н. И. ПРИГОРОВСКИЙ

ИЗДАНО 19.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

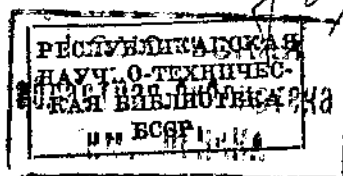
ВТОРОЕ ПЕРЕРАБОТАННОЕ ИЗДАНИЕ

под редакцией
акад. АН УССР С. В. СЕРЕНСЕНА

74/41
20625

12297

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ



НКТМ, СССР
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1945

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
16	1-я сверху	(распределение массы также полагаем сосредоточенным),	(распределенные массы также полагаем приведенными к сосредоточенным)	Авт.
22	Табл. 2	ωr_0	ωr_0	
95	15-я снизу	$J\ddot{\theta}$	$P\ddot{\theta}$	
148	6-я сверху	$\overline{EJ_0}$	$\overline{EJ_0}$	
180	Формула (190)	$\tau_{r\max}$	$\tau_{\max}$	
203	23-я сверху	QS	QS	
246	3-я снизу	$\frac{y_0}{r} \cdot F(r \pm y)^2$	$\frac{y_0}{r} F(r \pm y)^2$	Авт
249	19-я сверху	Сборник	Инженерный сборник	
250	11-я "	(271)	(231)	
253	19-я снизу	(272)	(232)	
272	Фиг. 256	(283)	(243)	
288	Табл. 39	[10]	[9]	
293	Табл. 42 и 7-я строка снизу	Δ_{σ}	$1 - \Delta_{\sigma}$	
296	2-я снизу	$a_K \text{ кгс.м}^2$	$a_K \text{ кгм/см}^2$	
299	6-я снизу	(286)	(246)	
300	7-я "	$= 0,2 \left(\frac{5,3 \cdot 360}{2800} \right)^2 + \dots$	$= \left(\frac{5,3 \cdot 360}{2800} \right)^2 + \dots$	
301	Формула (255)	σ_{-1}	σ_{-1}	
303	3-я сверху	(256)	(246)	
304	8-я снизу	K_{σ}	K_{σ}	
		$T_{\min} = P \frac{c}{c_1 + c_2}$	$T_{\min} = P \frac{c_2}{c_1 + c_2}$	
		$\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}}$	$\frac{\sigma_{-1z}}{K_{\sigma}}$	

В предлагаемом пособии изложен расчет на колебания и прочность типичных деталей машин, приведены важнейшие данные о механических характеристиках материалов, о концентрации напряжений и другие сведения для динамических расчетов.

Пособие предназначается для конструкторов, расчетчиков и учащихся.

Редактор В. В. Ржавинский

Технический редактор Е. Д. Гракова

Сдано в произ. 6/VI 1944 г. Подписано в печ. 4/VII 1945 г. Кол. печ. л. 20 ^{1/2} + 1 вкл.		
Уч.-изд. 28,5 л.	Тираж 8.000	Зак. № 1044
Л. 02965	Формат бум. 60 × 92 ^{1/16}	Цена 28 р., пер. 2 р.

1-я типография Машгизз, Ленинград, ул. Моисеенко, д. 10

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Прочность при действии динамических нагрузок, кратко именуемая „динамическая прочность“, приобретает все большее значение при расчете и проектировании деталей быстроходных и напряженных машин. Освоение новых конструкций и усовершенствование существующих, внедрение новых материалов и технологии изготовления требуют широкого использования современных методов расчета и опытных данных о прочности.

Обеспечение прочности деталей связано: а) с надежным определением действующих усилий и устранением опасных колебательных состояний; б) с назначением конструктивных очертаний, дающих целесообразное распределение напряжений и использование материалов; в) с применением расчетов, отражающих механические свойства, форму и динамическую напряженность. Применительно к этим основным вопросам сформирован материал настоящего издания. В пяти главах первого раздела даны методы вибрационных расчетов, позволяющие определять опасные для прочности колебательные состояния и усилия, возникающие при этом в деталях. В главах VI и VII второго раздела представлены данные по определению напряжений в зависимости от способа загрузки и очертаний детали, а также в связи с концентрацией напряжений. В главах VIII, IX и X третьего раздела даны методы расчета на прочность и соответствующие опытные данные о механических свойствах.

За прошедший со времени первого издания период использование современных приемов оценки динамической прочности нашло значительное распространение в практике работы конструкторских бюро. Однако и в настоящее время опытных данных по прочности, необходимых для расчета, имеется совершенно недостаточно, особенно применительно к нашим материалам и технологии. В этом отношении настоящее издание не получило существенного пополнения.

Предлагаемые в пособии методы еще далеки от безусловной достоверности, они должны подтверждаться опытом систематического применения к деталям определенного типа, а также результатами экспериментальных исследований и конструкторских работ. Но и в настоящее

время использование этих методов будет способствовать более правильной оценке при конструировании важнейших факторов, влияющих на прочность.

Ряд специальных вопросов динамической прочности (например расчет турбинных лопаток, воздушных винтов, деталей электрических машин) не затронут пособием, которое охватывает главным образом общие методы и данные, могущие найти применение в различных областях при конструировании динамически напряженных деталей.

Первый раздел пособия составлен И. М. Тетельбаумом, второй—Н. И. Пригоровским, третий—С. В. Серенсенем, им же осуществлено редактирование всего пособия.

При составлении пособия использованы материалы первого издания, а также ряд новых литературных источников и результаты работ научно-исследовательских институтов.

С. СЕРЕНСЕН

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ВИБРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ

§ 1. Кинематика колебательного движения

Вибрациями называются периодические движения, при которых перемещения весьма малы по сравнению с размерами рассматриваемых систем или представляют собой малые отклонения от установившегося движения. Так как даже малые деформации могут быть связаны с возникновением опасных напряжений в материале, вибрационные расчеты в машиностроении производятся главным образом для обеспечения динамической прочности.

При гармоническом колебательном движении перемещение определяется выражением

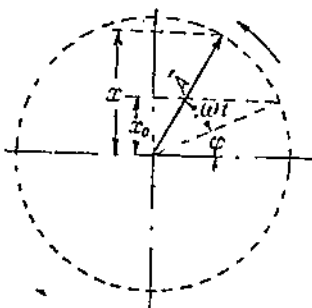
$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где A — амплитуда гармонического колебания в см для поступательных и в радианах для угловых перемещений;

t — время в секундах;

φ — фазовый угол в радианах, определяемый начальными условиями движения или общим началом отсчета для ряда сопоставляемых движений;

ω — круговая частота колебания, сек⁻¹;



Фиг. 1. Векторная диаграмма гармонического колебания.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} N, \quad (2)$$

причем f — частота, т. е. число колебаний в секунду, кол/сек (герц);

T — период колебания в секундах;

N — число колебаний в минуту, кол/мин.

В геометрическом изображении (фиг. 1) перемещение x соответствует проекции вектора A , вращающегося с угловой скоростью ω , на вертикальную ось. Здесь x_0 соответствует началу движения, $t = 0$.

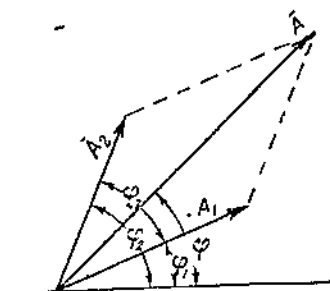
Сумма гармонических колебаний одинаковой частоты и направления представляет собой гармоническое колебание той же частоты. Амплитуда результирующего колебания A , как показано на фиг. 2, представляет геометрическую сумму амплитуд составляющих колебаний A_1 и A_2 , т. е.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_{12}}, \quad (3)$$

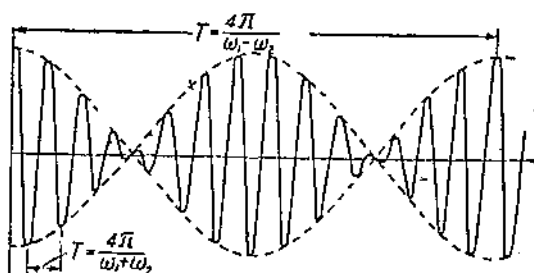
где φ_{12} — сдвиг фаз между составляющими.

Представление о характере движения при сложении гармонических колебаний одного направления, но различных частот ω_1 и ω_2 можно получить из векторной диаграммы фиг. 2, предположив, что векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с различными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Если частоты ω_1 и ω_2 мало различаются между собой, то расхождение векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ происходит весьма медленно и результирующее движение можно охарактеризовать как гармоническое колебание с периодически изменяющейся амплитудой — так называемое биение (см. фиг. 3 для $A_1 = A_2$).

В общем случае наложения гармонических колебаний различных частот получаем полигармоническое периодическое движение. Обратная задача нахождения гармонических составляющих данного периодического движения или любой другой периодически изменяющейся величины составляет предмет гармонического анализа [7], [8]¹. Удобный практический способ анализа предложен Ципперером [34], который для счет-



Фиг. 2. Сложение гармонических колебаний.



Фиг. 3. Биение при сложении двух гармонических колебаний равных амплитуд.

ной работы применяет специальные шаблоны. Для гармонического анализа также успешно применяются механические и электрические приборы — анализаторы [9], [10], [31].

Если данная точка принимает участие в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, но различного направления, то движение в общем случае происходит по эллиптической траектории. В частном случае, когда сдвиг фаз составляющих колебаний равен нулю, траектория превращается в прямую линию. Если сдвиг фаз двух взаимно перпендикулярных колебаний равных амплитуд составляет 90° , траектория представляет собой окружность.

При сложении гармонических колебаний различной частоты траектории результирующего движения представляют сложные замкнутые кривые, так называемые *кривые Лиссажу*.

Колебательное движение может иметь затухающий характер, как, например, показано на фиг. 4. Величина затухания характеризуется логарифмическим декрементом затухания δ , представляющим натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через один период.

¹ Цифры в квадратных скобках указывают номер источника в списке литературы, помещенном в конце гл. V.

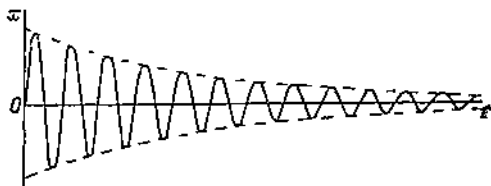
Если затухающее колебание подчиняется закону

$$x = ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

где $\alpha = \text{const}$, то декремент в процессе колебания является постоянной величиной:

$$\delta = \ln e^{\alpha T} = \alpha T = 2\pi \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{f}. \quad (5)$$

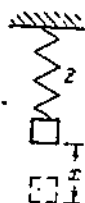
В некоторых случаях колебательный процесс имеет нарастающую амплитуду. Тогда коэффициент α в формуле (4) приобретет знак плюс, а увеличение амплитуды будет характеризоваться логарифмическим инкрементом нарастания колебаний.



Фиг. 4. Затухающее колебание.

§ 2. Основные зависимости для линейных систем

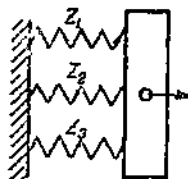
Схема простейшей упругой колебательной системы дана на фиг. 5. При отклонении массы m от положения равновесия упругая связь создает восстанавливающую силу. В линейной системе масса m постоянна,



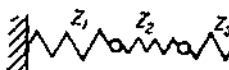
Фиг. 5. Схема простейшей колебательной системы.



$$Z = Z_1 + Z_2 \quad \text{Параллельное соединение}$$



$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad \text{Параллельное соединение}$$



$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} \quad \text{Последовательное соединение}$$



$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_3}} \quad \text{Смешанное соединение}$$

Фиг. 6. Соединение упругих элементов.

а восстанавливающая сила P пропорциональна деформации x упругой связи:

$$P = Zx = \frac{1}{e_z} x \text{ кг}, \quad (6)$$

где Z — жесткость в кг/см;
 e_z — податливость в см/кг.

На фиг. 6 показаны различные способы соединения упругих элементов.

Дифференциальное уравнение движения массы m (фиг. 5) при отсутствии внешних переменных сил, т. е. для свободных колебаний, имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + Zx = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) показывает, что масса m будет совершать гармоническое колебательное движение:

$$x = x_0 \cos \omega_{r0} t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega_{r0} t = a \sin (\omega_{r0} t + \varphi), \quad (8)$$

где x_0 — перемещение в см в начале движения;

v_0 — скорость в см/сек в начале движения;

ω_{r0} — круговая частота собственных колебаний, равная

$$\omega_{r0} = \sqrt{\frac{Z}{m}} \text{ сек}^{-1}. \quad (9)$$

Амплитуда свободных колебаний

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_{r0}^2}}. \quad (10)$$

Фазовый угол

$$\varphi = \arctg \frac{x_0 \omega_{r0}}{v_0}. \quad (11)$$

Значение круговой частоты собственных колебаний ω_{r0} может быть найдено также путем рассмотрения энергетической стороны процесса колебаний. При амплитудном отклонении от положения равновесия скорость, а следовательно, и запас кинетической энергии равны нулю. Запас потенциальной энергии при этом составляет

$$\Pi_{\max} = \frac{Za^2}{2}. \quad (12a)$$

При прохождении положения равновесия запас потенциальной энергии равен нулю, скорость равна $v = \omega_{r0} a$, запас кинетической энергии составляет

$$T_{\max} = \frac{m \omega_{r0}^2 a^2}{2}. \quad (12b)$$

Так как в рассматриваемом режиме свободных колебаний отсутствует как рассеяние энергии, так и подвод ее со стороны, то $\Pi_{\max} = T_{\max}$, откуда легко получить значение ω_{r0} , совпадающее с значением из выражения (9). Эти же соображения положены в основание энергетических методов определения частот собственных колебаний сложных систем, пользование которыми показано в гл. III.

Если в упругой системе (фиг. 5) действует также сила сопротивления, то свободные колебания имеют затухающий характер. В линейных системах сопротивление пропорционально скорости. Дифференциальное уравнение имеет при этом вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + K \frac{dx}{dt} + Zx = 0, \quad (13)$$

где K — демпфирующая сила, отнесенная к единице скорости, в кгсм⁻¹сек.

Решение уравнения (13) при малых сопротивлениях будет

$$x = e^{-\alpha t} (x_0 \cos \omega_r t + \frac{v_0 + x_0 \alpha}{\omega_r} \sin \omega_r t) = a e^{-\alpha t} \sin (\omega_r t + \varphi). \quad (14)$$

Обозначения в формуле (14) соответствуют принятым в выражениях (4) и (8). Круговая частота собственных колебаний

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \text{ сек}^{-1}, \quad (15)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Z}{m}}; \quad \alpha = \frac{K}{2m}.$$

Декремент затухания

$$\delta = 2\pi \frac{\alpha}{\omega_r} = 2\pi \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (16)$$

При очень малых сопротивлениях $\alpha \ll \omega_0$ можно принимать $\omega_r \approx \omega_0$. Для декрементов $\delta \leq 0,3$ ошибка не превышает $0,5\%$.

При очень больших сопротивлениях $\alpha \geq \omega_0$ движение теряет колебательный характер и становится аperiodическим

Рассеяние энергии ΔW за один период колебаний, отнесенное к запасу энергии в начале данного периода, составляет:

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - e^{-2\delta}. \quad (17)$$

При малых значениях δ можно приближенно принимать

$$\frac{\Delta W}{W} \approx 2\delta. \quad (17a)$$

Если к массе m в упругой системе (фиг. 5) приложена внешняя возбуждающая сила, изменяющаяся по периодическому закону $Q \sin \omega t$, то система совершает вынужденные колебания. При наличии сопротивления, пропорционального скорости, дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + K \frac{dx}{dt} + Zx = Q \sin \omega t. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) будет

$$x = C e^{-\alpha t} \sin (\omega_r t + \varphi) + A \sin (\omega t - \psi), \quad (19)$$

где значения ω_r и α те же, что и в формуле (15).

Первый член выражения (19) представляет затухающие свободные колебания, начальная амплитуда которых C и фазовый угол φ определяются начальными условиями движения. Второй член (19) представляет вынужденные колебания, имеющие частоту возбуждающей силы. Вынужденные колебания будут продолжаться все время действия гармонической возбуждающей силы. Поэтому при наличии сопротивления в формуле (19) обычно принимают во внимание лишь второй член при рассмотрении длительных режимов вынужденных колебаний, а первый член полагают полностью исчезнувшим. Сдвиг фаз между перемещением и действующей силой при вынужденных колебаниях равен:

$$\psi = \arctg \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (20)$$

Амплитуда вынужденных колебаний определяется по формуле

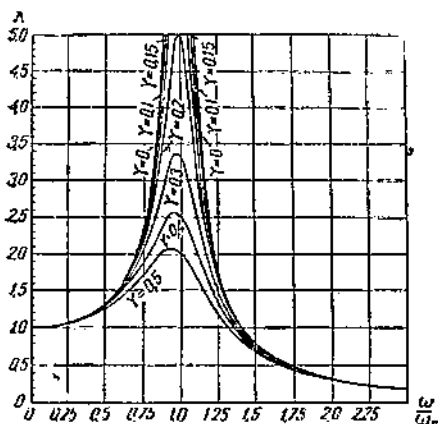
$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2}} = \lambda A_0, \quad (21)$$

где A_0 — статическая деформация от силы, равной амплитуде возбуждающей силы, т. е. $A_0 = \frac{Q}{Z}$;

ω — круговая частота вынужденных колебаний; $\omega_{r0} = \sqrt{\frac{Z}{m}}$;

γ — коэффициент демпфирования (сопротивления, затухания, заглушения);

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\omega_{r0}} = \frac{\delta}{\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}}. \quad (21a)$$



Фиг. 7. Зависимость коэффициента усиления от степени резонансности при постоянной амплитуде возбуждающей силы.

длении частот ω и ω_{r0} имеют место условия резонанса. При этом перемещение

$$x = \frac{A_0 \omega t}{2} \sin \omega t, \quad (22)$$

т. е. при продолжительном воздействии периодической возбуждающей силы амплитуда колебаний со временем неограниченно возрастает.

В непосредственной близости от резонанса величину амплитуды вынужденных колебаний ограничивает лишь затухание системы. В области, сравнительно далекой от резонанса, величина затухания почти не оказывает влияния на амплитуды. Исходя из этого, при практических расчетах вместо построения точной резонансной кривой с учетом затухания часто ограничиваются рассмотрением двух предельных режимов:

- 1) вынужденных нерезонансных колебаний при отсутствии затухания;
- 2) резонансных колебаний для данного затухания.

Для первого режима формула (21) принимает вид:

$$A = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2}; \quad (23a)$$

для второго режима:

$$A = \frac{A_0}{\gamma}. \quad (23б)$$

На практике часто требуется устранение или ослабление вибраций. Как видно из изложенного, этого можно достигнуть путем соответствующего изменения параметров динамической системы (массы, жесткости), приводящего к изменению частоты собственных колебаний, а следовательно, и степени резонансности, или путем введения соответствующего демпфирования.

Устранить вибрации основной рассматриваемой системы можно также путем присоединения к ней динамического демпфера, представляющего собой колебательную систему малых размеров, имеющую частоту собственных колебаний, равную частоте возбуждающей силы.

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с динамическим демпфером (фиг. 8) имеют вид:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + Zx - Z_0(x_0 - x) &= Q \cos \omega t; \\ m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} + Z_0(x_0 - x) &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где m и Z — масса и жесткость основной колебательной системы; m_0, Z_0 — то же для динамического демпфера.

Отсюда перемещение массы m основной системы составит

$$x = \frac{Z_0 - m_0 \omega^2}{(Z + Z_0 - m \omega^2)(Z_0 - m_0 \omega^2) - Z_0^2} Q \cos \omega t, \quad (25)$$

а перемещение массы демпфера

$$x_0 = \frac{Z_0}{(Z + Z_0 - m \omega^2)(Z_0 - m_0 \omega^2) - Z_0^2} Q \cos \omega t. \quad (26)$$

Чтобы устранить вибрации массы m , т. е. добиться $x=0$, необходимо выполнить условие настройки демпфера $\omega = \sqrt{\frac{Z_0}{m_0}}$. При этом перемещение массы демпфера составит

$$x_0 = -\frac{Q}{Z_0} \cos \omega t. \quad (26a)$$

Минимальные размеры демпфера определяются допускаемой амплитудой перемещения и прочностью его упругого элемента. Следует подчеркнуть, что подобный динамический демпфер может устранить вибрации лишь при какой-либо одной заданной частоте возбуждения.

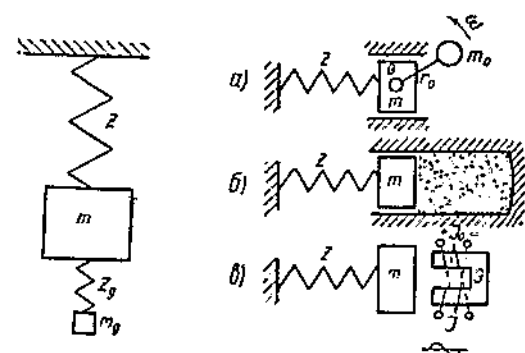
Если на линейную систему действует периодическая сила полигармонического состава, то общее перемещение получается в результате наложения перемещений от действия всех гармонических составляющих данной силы в отдельности. Каждая гармоническая составляющая воз-

буждающей силы будет восприниматься колебательной системой по-разному, так как будет иметь свою определенную степень резонансности, а следовательно, соответствующую ей степень усиления по сравнению со статическими условиями. Для ряда составляющих высших частот по сравнению с резонансной будет иметь место, наоборот, уменьшение динамических амплитуд. Основным динамический эффект следует обычно ожидать от тех гармонических составляющих периодической силы, частоты которых близки к резонансным, т. е. для так называемых около-резонансных гармонических.

Рассмотрим на примере колебательной системы фиг. 5 типичные случаи приложения периодических возбуждающих сил:

1. Возбуждающая сила приложена непосредственно к массе системы (фиг. 9):

а) Периодическое возбуждение создается за счет сил инерции неуравновешенных движущихся частей машины, как, например, показано



Фиг. 8. Система с динамическим демпфером.

Фиг. 9. Способы приложения периодических возбуждающих сил.

на фиг. 9, а, где при вращении неуравновешенной массы m_0 , реакция в точке закрепления O меняет направление и дает синусоидально изменяющуюся составляющую в направлении колебания. Если сосредоточенная масса системы m значительно больше, чем m_0 , систему можно считать линейной. Подобные устройства также используются в качестве так называемых инерционных вибраторов для искусственного возбуждения колебаний при испытаниях (гл. V, §1).

Амплитуда возбуждающей силы составляет

$$Q = m_0 r_0 \omega^2$$

(обозначения — на фиг. 9, а), причем ω сек $^{-1}$ — круговая частота возбуждающей силы, равная угловой скорости вращения массы m_0 .

Если амплитуда возбуждающей силы изменяется, как в данном случае, пропорционально квадрату частоты, т. е. $Q = k\omega^2$, то форма резонансных кривых видоизменяется. Обозначив $\frac{k}{m} = h$, получим для амплитуды вынужденных колебаний выражение

$$A = \lambda_1 h,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2}}. \quad (27)$$

На фиг. 10 даны кривые значений λ_1 в зависимости от $\frac{\omega}{\omega_{r0}}$ для различных значений γ .

б) Периодическое возбуждение создается за счет давления газов или паров (фиг. 9, б), как это, в сочетании с силами инерции, имеет место в поршневых двигателях и компрессорах. Подобное возбуждение является причиной возникновения крутильных колебаний валов поршневых двигателей (см. гл. II).

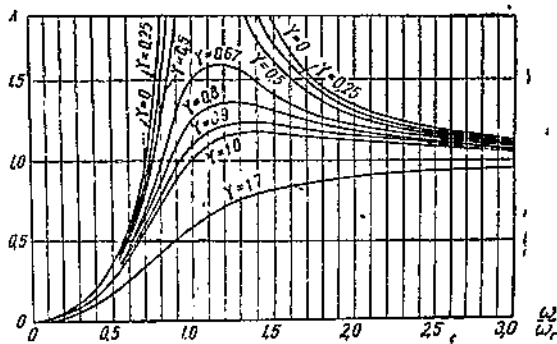
в) Периодическое возбуждение создается за счет электромагнитного воздействия (фиг. 9, в), для чего через обмотку электромагнита пропускается переменный ток. При действии одной лишь обмотки переменного тока возбуждающая сила будет пропорциональна квадрату силы тока, т. е. составит:

$$Q = kI^2 \sin^2 \omega t = \text{const} + \frac{1}{2} k_1 I^2 \cos 2\omega t. \quad (28)$$

Таким образом, периодическое возбуждение будет иметь двойную частоту по сравнению с частотой переменного тока. Кроме того, между величинами силы тока и возбуждающей силы будет существовать не прямая, а квадратичная зависимость.

Если на переменное магнитное поле наложить сильное постоянное магнитное поле при помощи дополнительной обмотки постоянного тока I_0 , т. е. создать так называемую поляризацию, то возбуждающая сила составит

$$\begin{aligned} Q &= (k_1 I_0 + \\ &+ k_2 I \sin \omega t)^2 \approx k_1^2 I_0^2 + \\ &+ 2k_1 k_2 I_0 I \sin \omega t = \\ &= \text{const} + \\ &+ n_2 I \sin \omega t. \quad (286) \end{aligned}$$



Фиг. 10. Зависимость коэффициента усиления от степени резонансности при амплитуде возбуждающей силы, изменяющейся пропорционально квадрату частоты.

В этом случае периодическое возбуждение приблизительно пропорционально силе переменного тока и будет иметь одинаковую с ним частоту.

2. Возбуждающая сила передается через упругую связь (фиг. 11):

а) Вынужденные колебания возбуждаются путем периодического принудительного перемещения закрепленного конца упругого элемента системы, например при помощи кривошипного механизма (фиг. 11, а). Если перемещение происходит по закону $x_1 = r \sin \omega t$, то возбуждающая сила

$$Q = Zr \sin \omega t.$$

б) Возбуждающая сила передается (фиг. 11, б) через дополнительную упругую связь, имеющую жесткость Z_g . Если перемещение конца дополнительной связи происходит по закону $x_1 = r \sin \omega t$, то возбуждающая сила составит

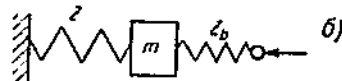
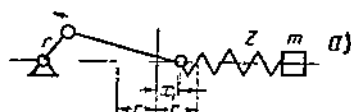
$$Q = Z_g r \sin \omega t.$$

Частота собственных колебаний основной системы изменится благодаря введению дополнительной упругой связи и составит

$$\omega_r = \sqrt{\frac{Z + Z_a}{m}}$$

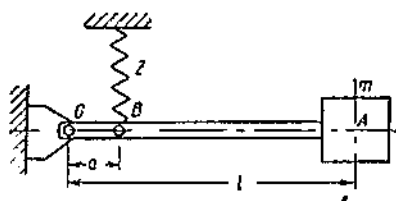
Таблица 1

Крутильные колебания		Поперечные и продольные колебания	
Угловое перемещение φ	рад.	Линейное перемещение x	см
Момент силы M	кгсм	Сила Q	кг
Момент инерции массы θ	кгсмсек ²	Масса m	кгсм ⁻¹ сек ²
Жесткость C	кгсм	Жесткость Z	кгсм ⁻¹
Податливость $e_c = \frac{1}{C}$	кг ⁻¹ см ⁻¹	Податливость $e_z = \frac{1}{Z}$	кг ⁻¹ см
Сопротивление, отнесенное к единичной угловой скорости S	кгсмсек	Сопротивление, отнесенное к единичной линейной скорости K	кгсм ⁻¹ сек
Круговая частота собственных колебаний $\omega_{r0} = \sqrt{\frac{C}{\theta}}$	сек ⁻¹	Круговая частота собственных колебаний $\omega_{r0} = \sqrt{\frac{Z}{m}}$	сек ⁻¹



Фиг. 11. Способы приложения периодических возбуждающих сил.

Все выведенные в данном параграфе соотношения равным образом справедливы как для колебательных



Фиг. 12. Рычажный маятник.

систем с поступательным перемещением (продольные и поперечные колебания), так и для систем с вращательным перемещением (крутильные колебания). В табл. 1 показано взаимное соответствие величин для обоих видов колебаний, и таким образом, если в расчетных формулах для одного рода колебаний заменить все величины соответствующими им для другого рода колебаний, то получатся расчетные формулы для последнего.

Часто одну и ту же колебательную систему можно одинаково просто выразить при помощи как вращательных, так и поступательных перемещений. На фиг. 12 дана, например, схема так называемого рычажного маятника.

Для малых перемещений этой системы могут быть приняты следующие две расчетные схемы:

1) масса m совершает крутильные колебания вокруг шарнира O , причем пружина создает некоторую крутильную жесткость;

2) пружина, жесткостью Z , совершает продольные колебания, будучи нагружена некоторой эквивалентной массой на конце.

Определим жесткость системы при расчете по первой схеме. При перемещении массы m на угол φ возникает восстанавливающий момент

$$M = Z \varphi a^2,$$

откуда жесткость

$$C = \frac{M}{\varphi} = Z a^2.$$

Момент инерции массы m (массой стержня пренебрегаем) равен

$$\theta = m l^2,$$

отсюда круговая частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{\theta}} = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{Z}{m}} \text{ сек}^{-1}.$$

При расчете по второй схеме находим, что эквивалентная масса в точке B составляет

$$m_2 = \frac{\theta}{a^2} = \frac{l^2}{a^2} m.$$

Приходим к тому же результату:

$$\omega = \sqrt{\frac{Z}{m_2}} = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{Z}{m}} \text{ сек}^{-1}.$$

Выше в данном параграфе рассматривались простейшие колебательные системы, имеющие одну степень свободы, т. е. такие, перемещение которых определяется лишь одной величиной.

Числом степеней свободы системы называется число независимых координат, определяющих ее положение.

Частоты собственных колебаний упругих систем с несколькими степенями свободы, как то: рамных систем и балок, в которых распределенные массы приведены к сосредоточенным, а также прямых и коленчатых валов при подобном же приведении определяются, исходя из следующих предпосылок.

Статический расчет стержневых систем производится в строительной механике методом сил или методом деформаций.

В основе метода сил положена каноническая система уравнений вида:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \Psi_1 + \delta_{12} \Psi_2 + \delta_{13} \Psi_3 + \dots + \delta_{1n} \Psi_n + \psi_1 &= 0; \\ \delta_{21} \Psi_1 + \delta_{22} \Psi_2 + \delta_{23} \Psi_3 + \dots + \delta_{2n} \Psi_n + \psi_2 &= 0; \\ \delta_{n1} \Psi_1 + \delta_{n2} \Psi_2 + \delta_{n3} \Psi_3 + \dots + \delta_{nn} \Psi_n + \psi_n &= 0, \end{aligned} \quad (28a)$$

где Ψ_i — обобщенные силы, приложенные к рассматриваемой системе; δ_{ik} — коэффициенты (числа) влияния для сил, определяемые известными методами строительной механики; ψ_i — обобщенные перемещения точек системы.

При свободных колебаниях действующими силами для линейных перемещений являются силы инерции сосредоточенных масс системы

(распределение массы также полагаем сосредоточенным), т. е. при перемещении точек приложения масс по закону

$$\psi_i = A_i \sin(\omega t + \gamma)$$

получаем значение силы, приложенной в точке i :

$$\Psi_i = m_i \omega^2 A_i \sin(\omega t + \gamma). \quad (28б)$$

Подставив (28б) в (28а), получим преобразованную систему:

$$\begin{aligned} (\delta_{11} m_1 \omega^2 - 1) A_1 + \delta_{12} m_2 \omega^2 A_2 + \delta_{13} m_3 \omega^2 A_3 + \dots + \delta_{1n} m_n \omega^2 A_n &= 0; \\ \delta_{21} m_1 \omega^2 A_1 + (\delta_{22} m_2 \omega^2 - 1) A_2 + \delta_{23} m_3 \omega^2 A_3 + \dots + \delta_{2n} m_n \omega^2 A_n &= 0; \\ \delta_{n1} m_1 \omega^2 A_1 + \delta_{n2} m_2 \omega^2 A_2 + \delta_{n3} m_3 \omega^2 A_3 + \dots + (\delta_{nn} m_n \omega^2 - 1) A_n &= 0. \end{aligned} \quad (28в)$$

Резонансные частоты определяются из условия, что амплитуды колебаний масс A_i удовлетворяют ненулевым значениям.

Для этого необходимо, чтобы детерминант системы обратился в нуль. Уравнение (28г), соответствующее этому условию, называется вектовым уравнением или уравнением частот.

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \delta_{12} m_2 \omega^2 & \dots & \delta_{1n} m_n \omega^2 \\ \delta_{21} m_1 \omega^2 & \delta_{22} m_2 \omega^2 - 1 & \dots & \delta_{2n} m_n \omega^2 \\ \delta_{n1} m_1 \omega^2 & \delta_{n2} m_2 \omega^2 & \dots & \delta_{nn} m_n \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (28г)$$

где δ_{ik} — коэффициенты (числа) влияния для сил, определяемые для данной упругой системы (балки, ферма и пр.) методами строительной механики; m_i — массы, сосредоточенные в точках $1 \dots n$.

Уравнение (28г) может быть приведено к виду:

$$1 - K_1 \omega^2 + K_2 \omega^4 - K_3 \omega^6 + \dots + (-1)^n K_n \omega^{2n} = 0, \quad (28д)$$

где

$$K_1 = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii};$$

$$K_2 = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} \end{vmatrix}; \quad (28е)$$

$$K_3 = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_i m_j m_k \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} & \delta_{ik} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} & \delta_{jk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & \delta_{kk} \end{vmatrix}, \quad (28ж)$$

и т. д.

Определение частот собственных колебаний сводится, таким образом, к нахождению корней уравнений (28г) или (28д).

Исходя из метода деформаций, уравнение частот можно выразить также при помощи коэффициентов (чисел) влияния для перемещений β_{ik} упругой системы:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega^2 m_1 & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \omega^2 m_2 & \dots & \beta_{2n} \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} - \omega^2 m_n \end{vmatrix} = 0. \quad (28з)$$

Уравнение в форме (28г) более удобно для определения частот собственных изгибных колебаний балок и рам с сосредоточенными массами, а в форме (28з) — для определения частот собственных кру-

тильных колебаний валов (см. гл. II) или продольных колебаний сложных систем из пружин и стержней, несущих сосредоточенные массы.

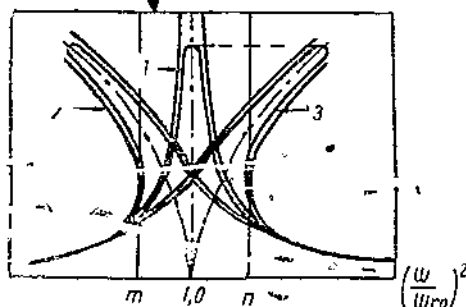
§ 3. Колебания нелинейных систем

Колебания систем, у которых упругий элемент имеет нелинейную характеристику, т. е. отсутствует прямая пропорциональность между восстанавливающей силой и перемещением, называются *псевдогармоническими*.

Колебания систем, параметры которых, а именно жесткость или масса, не являются постоянными и представляют периодические функции времени, называются *квазигармоническими*.

Если упругий элемент колебательной системы имеет нелинейную характеристику, то в зависимости от ее формы резонансные кривые при псевдогармонических колебаниях приобретают вид, как на фиг. 13. Здесь кривые 1

соответствуют линейной характеристике, т. е. постоянной жесткости системы. Кривые 2 соответствуют так называемой „мягкой“ характеристике, т. е. уменьшению жесткости при увеличении амплитуды, а кривые 3 — так называемой „жесткой“ характеристике, т. е. увеличению жесткости с амплитудой. За пределами зоны, ограниченной на фиг. 13 ординатами m



Фиг. 13. Резонансные кривые при псевдогармонических колебаниях.

и n , каждой данной частоте возбуждающей силы соответствуют три различных значения амплитуд, среднее из которых неустойчиво и, следовательно, совершенно не проявляется на практике. Что касается относительной устойчивости двух других значений амплитуды, то при имеющих место в обычных условиях работы небольших нарушениях режима системы весьма вероятен срыв колебаний с больших амплитуд на малые. При очень плавном изменении частоты возбуждающей силы или момента может иметь место „затягивание“ на большие амплитуды.

Пользуясь методами нелинейной механики, автор данного раздела установил непосредственную простую аналитическую зависимость между нелинейной характеристикой упругого элемента системы и формой резонансной кривой.

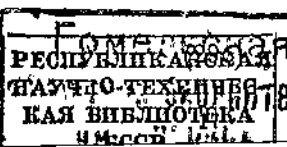
Пусть характеристика упругой связи, например муфты, выражается функцией вида:

$$M(\varphi) = C(\varphi + a\varphi^3 + b\varphi^5 + c\varphi^7 + d\varphi^9 + e\varphi^{11} + f\varphi^{13} + \dots), \quad (29a)$$

причем нелинейная часть (29a) мала.

Тогда амплитуда колебаний приближенно составит

$$A = \frac{A_{ac}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2B + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$



где A_{0c} — статическая угловая деформация, соответствующая приложенной амплитуде возбуждающего момента при линейной жесткости C ; ω_{r0} — круговая частота резонансных колебаний при линейной жесткости C ;

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot bA^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot dA^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot fA^6 + \dots \quad (29в)$$

Сопоставляя выражения (29а) и (29в), нетрудно установить закон образования коэффициентов ряда B . Четные степени разложения $M(\varphi)$, указывающие на несимметричность характеристики при положительных и отрицательных перемещениях, в первом приближении не оказывают влияния на величину B , приводя лишь к смещению рабочей точки характеристики. Поэтому целесообразно, предварительно исключив эти члены разложения, „симметризовать“ характеристику. Ординаты последней будут равны полусумме абсолютных значений ординат положительной и отрицательной ветвей, соответствующих данному абсолютному перемещению.

Точность формулы (29б) уменьшается с увеличением B , а также при частоте возбуждающего момента $\omega \rightarrow 0$.

Построение резонансной кривой псевдогармонических колебаний проще всего осуществить, задаваясь значениями амплитуды A и вычисляя соответствующие им значения $\frac{\omega}{\omega_{r0}}$. Для этого выражению (29б) придается вид:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2 = 1 + 2B \pm \sqrt{\frac{A_{0c}^2}{A^2} - \gamma^2 (1 + 2B)}. \quad (29г)$$

При выводе формулы (29г) из выражения (29б) пренебрегаем величиной γ^2 по сравнению с единицей, что обычно не вносит сколько-нибудь заметной ошибки.

Для линейной системы при $B = 0$ построение резонансной кривой можно представить следующим образом. Проводим вертикальную ось, соответствующую значению $\left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2 = 1$, и для разных значений амплитуды A откладываем по обе стороны от этой оси значения квадратного корня из выражения (29г). Для нелинейной системы порядок построения сохраняется, но ось „искривляется“ в соответствии с зависимостью:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{r0}}\right)^2 = 1 + 2B. \quad (29д)$$

При малых B отсюда вытекает также простой способ приближенной оценки искажения резонансных кривых в зависимости от характеристики упругой связи. Представив выражение (29а) как функцию от A и исключив четные степени путем симметризации положительной и отрицательной ветвей, получим:

$$M(A) = C(A + bA^3 + dA^5 + fA^7 + \dots), \quad (29е)$$

откуда

$$\frac{M(A)}{CA} - 1 = bA^2 + dA^4 + fA^6 + \dots \quad (29ж)$$

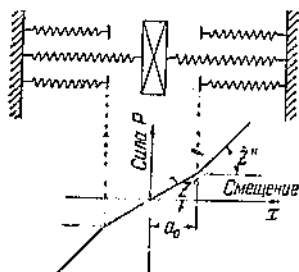
Правая часть выражения (29ж) отличается от B лишь численными коэффициентами, величина которых для первых трех членов разложения:

находится в пределах от 0,375 до 0,274. Приближенно уравнение „искривленной оси“ (29д) для параболической характеристики примет вид:

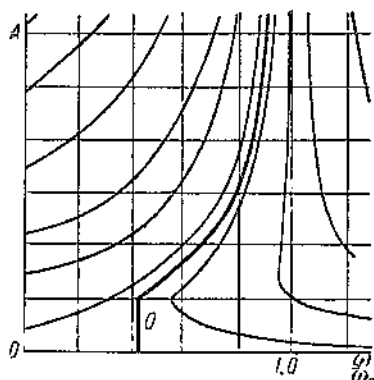
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + 0,65 \left(\frac{M(A) - CA}{CA}\right). \quad (29з)$$

Таким образом, для приближенного построения резонансной кривой псевдогармонических колебаний достаточно обычную резонансную кривую линейной системы частотой ω_0 перенести параллельно оси абсцисс и расположить относительно „искривленной оси“ (29д) или (29з).

Кроме рассмотренных выше параболических характеристик упругой связи, значительный практический интерес представляют ломаные характеристики фиг. 14, применяющиеся в упругих муфтах авиационных двигателей. Частными случаями этого типа характеристик является слу-



Фиг. 14. Ломаные характеристики упругих элементов.



Фиг. 15. Резонансные кривые при ломаных характеристиках [11].

чай зазора и предварительной затяжки. Резонансные кривые при ломаных характеристиках изображены на фиг. 15, причем уравнение „искривленной оси“ имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 &= 1 + \frac{2}{\pi} \frac{(Z' - Z'')}{Z''} \left[\arcsin \frac{a_0}{A} + \frac{a_0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{A}\right)^2} \right] \approx \\ &\approx 1 + \frac{4}{\pi} \frac{(Z' - Z'')}{Z''} \cdot \frac{a_0}{A}, \end{aligned} \quad (30)$$

где Z' и Z'' — жесткости участков ломаной характеристики;

a_0 — полная деформация первого линейного участка $\omega_2^2 = \frac{Z''}{m}$.

Приближенное выражение для „искривленной оси“ в формуле (30) будет тем точнее, чем амплитуда $A > a_0$. При $\frac{A}{a_0} > 4$ расхождение обоих приведенных выражений менее 1%.

На фиг. 16 изображены резонансные кривые для характеристики с зазором; по кривым можно оценить влияние зазора на частоту собственных колебаний в различных случаях.

Большой практический интерес представляют квазигармонические колебания, выражаемые дифференциальным уравнением Матье:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 (1 - 2\alpha \cos 2\omega t) x = 0. \quad (31)$$

К уравнениям такого вида приводятся вращающиеся системы с переменным по обороту моментом инерции, что, например, имеет место для кривошипно-шатунных механизмов, или переменной по обороту жесткостью, как, например, вращающиеся валы или роторы циклически несимметричного сечения.

В первом случае значения параметров уравнения (31) применительно к крутильным колебаниям составят

$$\alpha = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{4\theta_{\text{средн}}}; \quad (31a)$$

$$\omega_0^2 = \frac{C}{\theta_{\text{средн}}}, \quad (31б)$$

где $\theta_{\text{средн}} = \frac{\theta_{\max} + \theta_{\min}}{2}$ — средний момент инерции массы, кгсмсек²;

C — крутильная жесткость системы, кгсм.

Во втором случае

$$\alpha = \frac{Z_{\max} - Z_{\min}}{4Z_{\text{средн}}}; \quad (31в)$$

$$\omega_0^2 = \frac{Z_{\text{средн}}}{m}, \quad (31г)$$

где $Z_{\text{средн}} = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2}$ —

среднее значение изгибной жесткости ротора, кгсм⁻¹;

m — масса ротора, кгсм⁻¹сек².

Анализ показывает, что при определенных

частотах изменения параметра для подобных систем возникают условия образования отдельных резонансных состояний и целых резонансных областей. Наиболее широкой является область резонансных частот первого порядка. Приблизительно, для $\alpha \ll 1$ граничные частоты этой области определяются формулой (32):

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 \pm \alpha}. \quad (32)$$

Другие условия соответствуют кратным значениям от ω , т. е. $\omega_p = n\omega$. Для четных значений n образование критических зон не имеет места, а для нечетных значений n , кроме первой, они столь узки, что практически их можно считать соответствующими лишь одному значению частоты.

§ 4. Демпфирование вибраций

В § 2 рассматривалось влияние линейного сопротивления, пропорционального скорости. Такого рода зависимость справедлива для так называемого вязкого сопротивления жидкой и газообразной среды при не слишком больших скоростях, а также для электрического демпфирования и пр.

При рассмотрении малых колебаний, налагающихся на установившееся движение, например, на вращение вала при крутильных колебаниях, можно

привести к линейному сопротивлению и сопротивления, подчиняющиеся более сложным зависимостям от скорости. Пусть сопротивление в данном элементе представляет собой некоторую сложную функцию абсолютной угловой скорости $F(\Omega)$. При наличии крутильных колебаний

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega = \Omega_0 + \Sigma \omega_n A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \quad (33)$$

где Ω_0 — средняя угловая скорость вращения вала;

ω_n — круговые частоты составляющих крутильных колебаний;

A_n — угловые амплитуды составляющих крутильных колебаний.

При малых амплитудах колебания $\Delta\Omega \ll \Omega_0$. Разлагая функцию сопротивления $F(\Omega)$ в ряд Тейлора по малому параметру $\Delta\Omega$ и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получаем:

$$F(\Omega) = F(\Omega_0) + \Delta\Omega \frac{F'(\Omega_0)}{1!} + \dots \quad (34)$$

Таким образом, если выделить лишь рассмотрение режима крутильных колебаний, то коэффициент сопротивления, пропорционального угловой скорости колебаний, составит:

$$S = F'(\Omega_0). \quad (35)$$

Если $F(\Omega) = k\Omega^z$, то для малых колебаний

$$S = zk\Omega^{z-1}. \quad (35a)$$

Чем меньше будут амплитуды колебаний, тем большую степень достоверности будет иметь допущение о постоянстве коэффициента демпфирования. Это положение, однако, правильно лишь в той мере, в какой будет справедливо разложение по формуле (34). Линеаризация некоторых видов сопротивлений в предположении постоянства коэффициента сопротивления не может иметь места. Если линеаризация и производится для упрощения расчетов, например, из условия равенства работ за один период, то обязательно в предположении, что коэффициент линейного сопротивления представляет собой переменную величину, в общем случае функцию частоты и амплитуды колебаний.

Из сопротивлений, подчиняющихся нелинейным закономерностям, наибольшее значение в вибрационных расчетах имеют так называемое сопротивление постоянного (сухого, „кулоновского“) трения и рассеяние энергии в материале.

Постоянное трение направлено всегда в сторону, противоположную движению, вследствие чего уравнение движения приобретает форму, соответствующую разрывным колебаниям. Для свободных колебаний уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Zx = \pm F_0 \quad (36)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \pm \omega_0^2 \xi, \quad (36a)$$

где F_0 — сила трения; $\xi = \frac{F_0}{Z}$; знак плюс при $\frac{dx}{dt} < 0$, минус при $\frac{dx}{dt} > 0$.

Демпфирование колебаний

Свободные колебания	Демпфирование колебаний			Рассеяние энергии в материале	
	Вязкое трение	Сухое трение			
Потеря энергии за один период	$\Delta W = \pi f a^2 \omega_0$	$\Delta W = 4 F_0 a$		$\Delta W = p_2 a^2$	$\Delta W = p_2 a^2$
Общий запас энергии	$W = \frac{1}{2} Z a^2$	$W = \frac{1}{2} Z a^2$		$W = \frac{1}{2} Z a^2$	$W = \frac{1}{2} Z a^2$
Декремент затухания	$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{2\pi a}{\omega r_0} = \pi \gamma$	$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{4 F_0}{Z a} = \frac{4\beta}{a} \neq \text{const}$		$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{p_2}{Z} a \neq \text{const}$	$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{p_2}{Z} a \neq \text{const}$
Амплитуда колебаний	$A = \frac{A_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega r_0})^2]^2 + (\frac{\gamma}{Z})^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega r_0})^2]^2 + \gamma^2 (\frac{\omega}{\omega r_0})^2}}$	$A = \frac{A_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega r_0})^2]^2 + (\frac{4 F_0}{\pi A_0 Z})^2}} = \pm \frac{A_0 \sqrt{1 - (\frac{4 F_0}{\pi A_0 Z})^2}}{1 - (\frac{\omega}{\omega r_0})^2}$		$A = \frac{A_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega r_0})^2]^2 + (\frac{p_2}{\pi Z})^2}}$	$A = \frac{A_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega r_0})^2]^2 + (\frac{p_2 A}{\pi Z})^2}}$
Коэффициент усиления в резонансе	$\lambda_r = \frac{1}{\gamma}$	$\lambda_r = \infty$		$\lambda_r = \frac{\pi Z}{p_2}$	$\lambda_r = \sqrt{\frac{\pi Z}{p_2 A_0}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{p_2 A_0}{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p_2 A}{\pi k}}}$

Анализ уравнения (36) показывает, что период колебаний системы с постоянным трением не отличается от периода колебаний той же системы при отсутствии трения. Амплитуда колебаний за каждый период убывает на величину 4β , т. е. в арифметической прогрессии. При достижении амплитуд, меньших, чем β , движение прекращается.

Большое значение в расчетах валов двигателей внутреннего сгорания, а также при анализе колебаний турболопаток и некоторых других деталей имеют так называемые потери на внутреннее трение в материале. Поскольку энергия при переменном деформировании теряется не на преодоление трения, а на пластическое деформирование, следует правильно этот вид потерь называть рассеянием энергии при вибрациях или потерями на гистерезис, так как при этом появляется петля гистерезиса, площадь которой соответствует потерям энергии за один цикл. Рассеяние энергии за один период является функцией амплитуды деформации a вида

$$\Delta W = p a^m \frac{\text{кгсм}}{\text{см}^3}, \quad (37)$$

где параметры p и m характеризуют материал.

При этом в общем случае декремент затухания не остается постоянным, а зависит от амплитуды. В соответствии с формулой (17а),

$$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{p}{Z} a^{m-2} \neq \text{const}. \quad (38)$$

Отсюда следует, что убывание амплитуды при свободных колебаниях будет происходить пропорционально $m-1$ степени ее абсолютной величины.

Значение m для различных металлов находится в пределах от 2 до 3,5.

Для стали, по данным Лунца, $m=3,17$, по данным Рауэрта $m=2,8$, по данным Люнса $m=2,3$.

Для упрощения математического анализа обычно рассматриваются идеализированные случаи:

$$m=2 \text{ и } m=3.$$

Для рассматриваемой детали в целом рассеяние энергии в материале является величиной, интегрально зависящей от распределения напряжений в детали при колебаниях, так же как и величина ее общего запаса энергии.

В табл. 2 даны основные формулы для различных видов сопротивлений, составленные в предположении, что декременты затухания невелики ($\delta < 0,3$).

Принятые здесь обозначения соответствуют формулам (21), (36), (37).

§ 5. Переходные режимы

В расчетах на прочность часто бывает необходимым определение усилий, возникающих при переходных или устанавливающихся процессах вследствие неперiodических воздействий, подчиняющихся самым разнообразным закономерностям.

Наиболее совершенным методом решения таких задач является операционное исчисление Хевисайда, которое приобрело большое значение в области электротехники. В рамках данного параграфа за недостатком

места, нет возможности изложить содержание этого метода. Здесь ограничимся лишь рассмотрением ряда частных примеров, иллюстрирующих случаи неустановившихся режимов, что имеет целью показать способы решения простых задач такого рода. Изложение основ операционного исчисления применительно к расчетам на прочность дано в книге А.И. Лурье [16].

При рассмотрении переходного состояния упругой системы с одной степенью свободы перемещение в самом общем случае может быть найдено для любого момента времени интегрированием по формуле (39):

$$x = x_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_r t + \frac{v_0 + \frac{x_0 \alpha}{\omega_r}}{\omega_r} e^{-\alpha t} \sin \omega_r t + \\ + \frac{1}{\omega_{r0}} \int_0^t \frac{F(t_1)}{m} e^{-\alpha(t-t_1)} \sin \omega_{r0}(t-t_1) dt_1, \quad (39)$$

где $F(t)$ — закон изменения возбуждающей силы во времени, а все остальные обозначения соответствуют формулам (4), (8) и (14).

Покажем применение формулы (39) для случая, когда к системе без затухания ($\alpha = 0$), находившейся в покое ($x_0 = 0$; $v_0 = 0$), в момент $t = 0$ внезапно прилагается постоянная сила F . В соответствии с формулой (39):

$$x = \frac{1}{\omega_{r0}} \int_0^t \frac{F}{m} \sin \omega_{r0}(t-t_1) dt_1 = \frac{F}{Z} (1 - \cos \omega_{r0} t) = a_{cm} (1 - \cos \omega_{r0} t). \quad (39a)$$

Таким образом, при внезапном приложении силы F наибольшая деформация (а следовательно и напряжения в упругой связи) в два раза более статической a_{cm} и наступает через половину периода собственных колебаний.

Чрезвычайно важный вид переходных режимов, а именно — прохождение через резонансную зону при различной скорости изменения частоты возбуждения, был изучен Льюисом [17]. Им также была использована формула (39), причем

$$F(t) = Q \cos(h\tau + \varphi). \quad (39б)$$

Движение представляет собой вибрацию переменной частоты с резко изменяющимися амплитудами отдельных циклов.

На фиг. 17 показаны значения коэффициента нарастания амплитуды λ (т. е. отношения амплитуды упругой силы к амплитуде возбуждающей силы) в зависимости от $\frac{\omega}{\omega_0}$ (т. е. отношения мгновенной частоты возбуждающей силы к частоте собственных колебаний) при разных скоростях прохождения резонансной зоны, характеризующихся количеством периодов q , прошедших от начала движения до достижения резонанса. Коэффициент затухания γ здесь принят равным 0,05. Рассмотрение фиг. 17 показывает, что с увеличением скорости изменения частоты резонансный пик снижается.

На практике имеют место самые разнообразные законы изменения возбуждающих сил. Приведем несколько примеров использования формулы (39) из области электросиловых установок. Динамические перегрузки здесь обычно возникают при резком увеличении силы тока, так

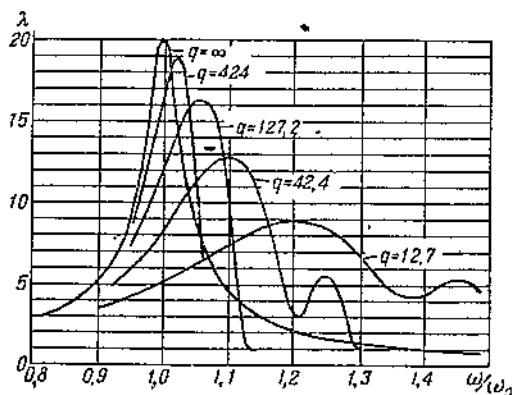
называемых „сверхтоках“, появляющихся при аварийном состоянии электрической системы — коротком замыкании в ней, а иногда вследствие тяжелых условий пуска моторных агрегатов.

При непосредственном включении короткозамкнутого асинхронного мотора в сеть вначале пусковой момент имеет пульсирующий характер:

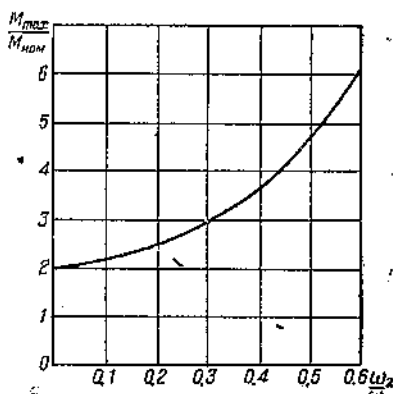
$$M(t) = M_{\text{ном}} [1 - ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t} \cos(\omega t + \varphi_1) + c \cos(\omega t + \varphi_2)], \quad (39b)$$

где $M_{\text{ном}}$ — номинальный пусковой момент в начале пуска;

ω — круговая частота переменного тока, а остальные параметры определяются электрическими характеристиками мотора и сети. Так как этот пульсирующий момент воздействует на упругую систему, состоящую из массы ротора мотора, массы приводимого объекта и промежуточного упругого звена — вала (или, например, какой-либо передачи), то в зависимости от значения частоты собственных колебаний этой системы могут



Фиг. 17. Резонансные кривые при прохождении резонансной зоны для различных скоростей повышения частоты [17].

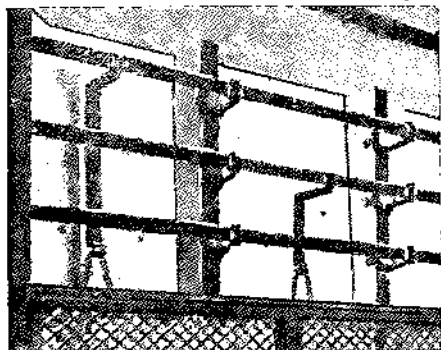


Фиг. 18. Закручивающие моменты в валопроводе асинхронного двигателя при пуске [18].

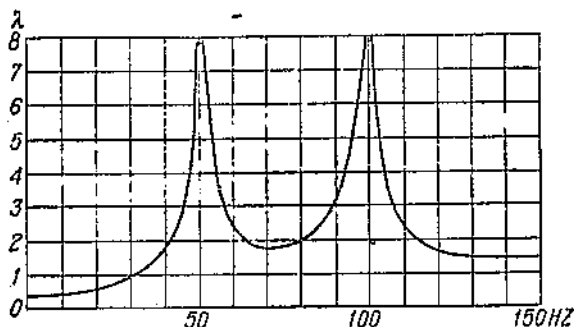
возникнуть значительные напряжения в валопроводе. Особенно опасным является совпадение частоты собственных колебаний системы с круговой частотой переменного тока. Однако и в нерезонансной зоне, как видно из фиг. 18, переходной момент на валу может в 5—6 раз превысить номинальный пусковой момент. Здесь приведено отношение максимального переходного закручивающего момента на валу к номинальному моменту в начале пуска $\frac{M_{\text{max}}}{M_{\text{ном}}}$ в зависимости от соотношения между частотой

собственных колебаний и частотой переменного тока $\frac{\omega}{\omega_0}$.

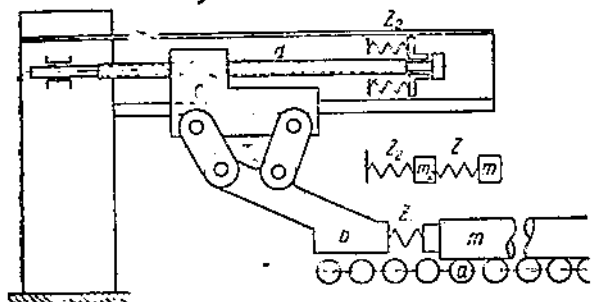
Если учесть, что некоторые типы привода, например привод рольганга прокатных станов, часто тысячи раз в сутки подвергаются пуску или реверсированию, то становится очевидным влияние переходных процессов подобного рода на динамическую прочность. Приведенные результаты получены [18] путем интегрирования по формуле (39), приспособленной для случая крутильных колебаний.



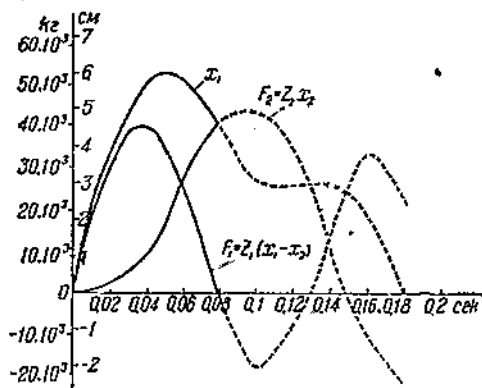
Фиг. 19 а. Шины электрических распределительных устройств.



Фиг. 196. Резонансные кривые для шин распределительных устройств при коротких замыканиях [19].



Фиг. 20а. Схема формшотоса прокатного стана,



Фиг. 20б. Кривые изменения усилий в буферах форштосса [20].

Значения моментоз, закручивающих вал в переходной режиме $M_{дин}$, полученные в результате интегрирования, представляют собой сложную функцию времени вида:

$$M_{дин} = M_{ном} [1 + \beta_1 e^{-\lambda_1 t} + \beta_2 e^{-\lambda_2 t} \sin(\omega t + \gamma_2) + \beta_3 \sin(\omega t + \gamma_3) + \beta_4 \sin(\omega t + \gamma_4)], \quad (39r)$$

максимальные значения которой даны на фиг. 18.

Значительные кратковременные перегрузки вала могут возникнуть при резком торможении турбогенераторов вследствие короткого замыкания в электрической цепи. Эта задача решается точно так же, как и предыдущая, интегрированием по формуле (39), причем туда подставляется переходной момент торможения турбогенератора при коротком замыкании в сети, определяемый электротехническими соображениями.

Для распределения энергии в установках высокого напряжения применяются медные, алюминиевые или железные шины, смонтированные на фарфоровых изоляторах и с механической точки зрения представляющие собой многоопорные балки (фиг. 19а). При коротком замыкании между шинами возникает усилие по закону:

$$F(t) = k(e^{-\omega t} - \cos \omega t)^2, \quad (39d)$$

где ω — круговая частота переменного тока в сети.

Величина динамической деформации и напряжения в материале шин может значительно превысить статическую, вычисленную по максимальному значению возбуждающей силы. На фиг. 19б для этого случая дана зависимость коэффициента динамичности λ от соотношения между частотой собственных колебаний шины и частотой переменного тока. Последняя обычно составляет 50 пер/сек. Поэтому, если частота собственных колебаний близка к 100 пер/сек или 50 пер/сек, возможно разрушение шин, что наблюдается на практике.

Другой, часто встречающийся вид расчета переходных процессов применяется для определения динамических усилий в различного рода буферах, откатниках и пр. Здесь также весьма эффективным является применение методов, предназначенных для колебательных систем, хотя в большинстве случаев продолжительность всего процесса составляет лишь часть одного периода колебаний.

Так, например, на фиг. 20а дана схема форштосса прокатного стана, предназначенного для остановки движущейся по рольгангу a болванки m_1 . Амортизация удара производится двумя группами буферов. Одна из них Z_1 расположена в лобовой части форштосса, вторая Z_2 — между поступательно перемещающимся механизмом форштосса c , предназначенным для подъема упора b при пропуске болванки и перемещения его вдоль ходового винта d , и стационарной частью.

В динамическом отношении с момента удара болванки до ее отделения форштосс представляет собой систему с двумя степенями свободы, изображенную на фиг. 20а (справа), где в массу m_1 включается масса болванки. Дифференциальные уравнения движения такой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + Z_1 (x_1 - x_2) &= 0; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Z_2 x_2 - Z_1 (x_1 - x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где x_1 и x_2 — перемещения соответствующих масс.

Решая систему (40), получаем, что:

$$x_1 = \frac{v_0 (\omega_1^2 - \omega'^2)}{\omega' (\omega'^2 - \omega'^2)} \sin \omega' t + \frac{v_0 (\omega_1^2 - \omega'^2)}{\omega'' (\omega''^2 - \omega'^2)} \sin \omega'' t; \quad (40a)$$

$$x_2 = \frac{v_0 \omega_1^2 \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2}}{\omega' (\omega'^2 - \omega'^2)} \sin \omega' t + \frac{v_0 \omega_1^2 \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2}}{\omega'' (\omega''^2 - \omega'^2)} \sin \omega'' t,$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\kappa^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}{2(1 - \kappa^2)};$$

$$\omega_1^2 = \frac{Z_1}{m_1}; \quad \omega_2^2 = \frac{Z_2}{m_1 + m_2}; \quad \kappa^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2};$$

v_0 — начальная скорость болванки.

На фиг. 20б показаны полученные по формулам (40а) для конкретной конструкции форштосса кривые изменения усилий в буферах, а также перемещения болванки в процессе работы форштосса. Из фиг. 20б видно, что буфера нагружаются не одновременно и нарастание усилия в верхнем буфере (кривая F_2) запаздывает по отношению к нижнему буферу (кривая F_1). Эти особенности протекания переходных процессов в механических системах со многими степенями свободы не всегда учитываются на практике.

ГЛАВА II

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Определение моментов инерции масс системы

Момент инерции массы цилиндрического участка вала

$$\theta = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{32} l d^4 \text{ кгсмсек}^2, \quad (41)$$

где γ — удельный вес, кг/см^3 ;
 $g = 981$ — ускорение силы тяжести, см/сек^2 ;
 l — длина участка вала, см ;
 d — диаметр участка вала, см .

Величина $l d^4$ может быть определена при помощи номограммы (фиг. 21).

Моменты инерции некоторых правильных геометрических тел могут быть определены по фиг. 22 и 23:

$$\theta_x = \frac{W}{g} K_x^2 \text{ кгсмсек}^2, \quad (42a)$$

где θ_x — момент инерции относительно оси x , кгсмсек^2 ;

W — вес тела, кг ;

K_x — радиус инерции, см ;

γ — удельный вес, кг/см^3 ;

$g = 981$ — ускорение силы тяжести, см/сек^2 ;

a, b, c, d, D, L, R — линейные размеры по фиг. 22 и 23, см .

Моменты инерции элементов, не поддающиеся определению по указанным выше данным, могут быть получены графическими методами. Применение одного из таких методов показано на нижеследующем примере определения момента инерции щеки колена вала поршневого двигателя.

Как показано на фиг. 24, *а* и *б*, проводим из центра вала ряд цилиндрических сечений и определяем аналитически их площади. По полученным значениям площадей, отложенных для соответствующих радиусов, строим кривую *I* (24, *в*). Затем производим графическое умножение ординат этой кривой на квадрат отношения соответствующих им радиусов к любому выбранному радиусу *R*, причем получаем кривую *II* (фиг. 24, *в*). Порядок построения для точки *а* показан на фиг. 24, *в* при помощи стрелок. Измерив площадь *F*, ограниченную кривой *II* и осью абсцисс, получим, с учетом масштаба чертежа значение момента инерции по формуле

$$I = \frac{\gamma}{g} R^2 F, \quad (426)$$

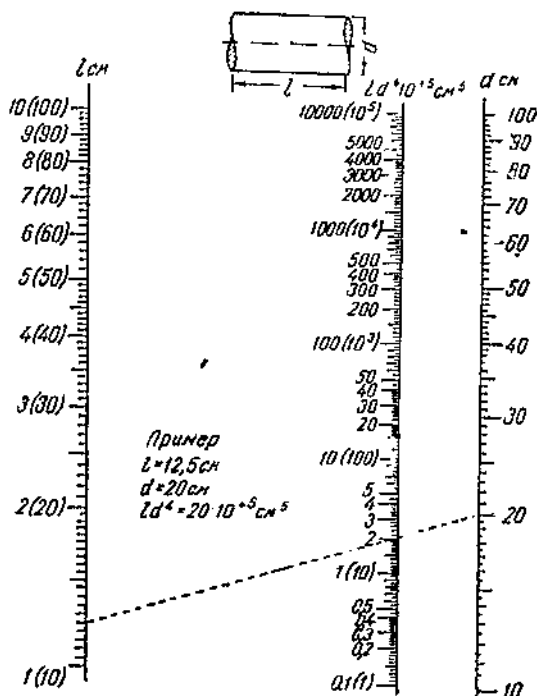
где, кроме обозначений, приведенных в тексте, γ — удельный вес, g — ускорение силы тяжести.

В подобных случаях целесообразно на практике производить определение моментов инерции опытным путем, например, методом качаний. Так, в частности, обычно определяются моменты инерции воздушных винтов, шатунов и пр.

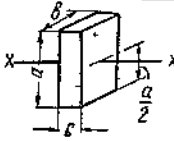
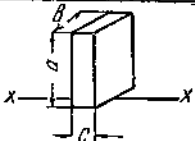
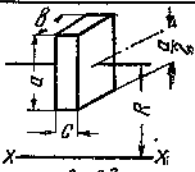
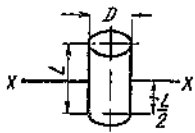
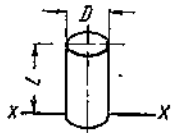
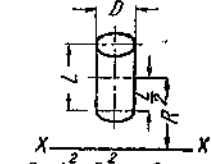
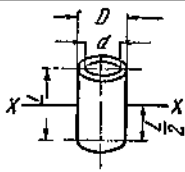
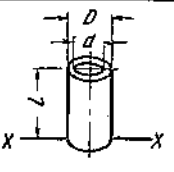
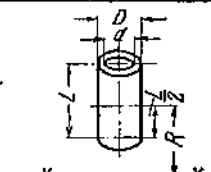
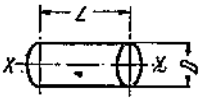
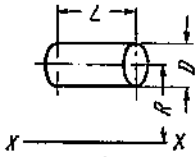
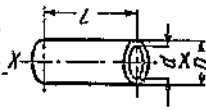
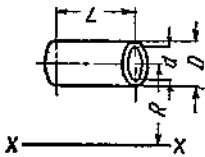
Моменты инерции θ_x относительно оси, проходящей через центр тяжести, можно определить, подвесив тело при помощи троса и придав ему малые крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса. Период колебаний связан с моментом инерции известной зависимостью:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_x}{C}} \text{ сек.} \quad (43a)$$

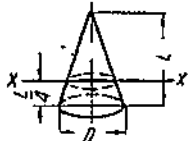
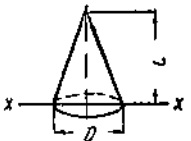
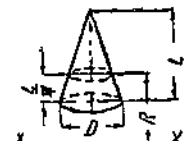
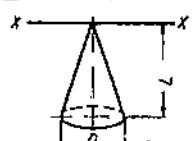
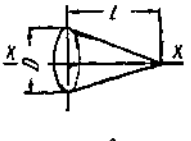
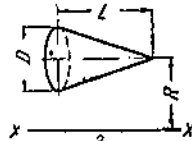
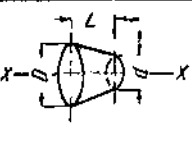
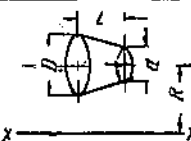
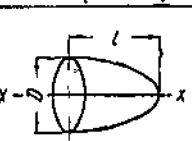
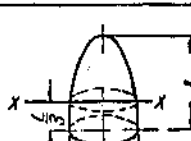
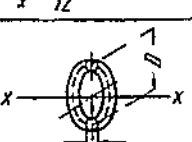
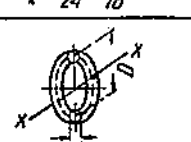
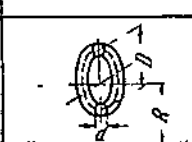
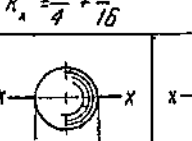
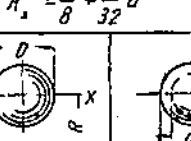
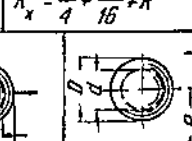
Чтобы исключить значение неизвестной жесткости *C*, производится второй опыт, при котором к испытуемому телу симметрично прикрепляются две равные дополнительные массы, величина которых *m* и расстояние



Фиг. 21. Номограмма для определения величины $l d^4$ по Терских [21]; цифры в скобках соответствуют диапазону длин участка вала 10–100 см

Параллелепипед $W = \gamma(a b c)$	 $K_x^2 = \frac{a^2 + b^2}{12}$	 $K_x^2 = \frac{4a^2 + b^2}{12}$	 $K_{x_0}^2 = \frac{a^2 + b^2}{12} + R^2$
Цилиндр $W = \frac{\pi}{4} D^2 L \gamma$	 $K_x^2 = \frac{L^2}{12} + \frac{D^2}{16}$	 $K_x^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{D^2}{16}$	 $K_x^2 = \frac{L^2}{12} + \frac{D^2}{16} + R^2$
Полый цилиндр $W = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) L \gamma$	 $K_x^2 = \frac{L^2}{12} + \frac{(D^2 + d^2)}{16}$	 $K_{x_0}^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{(D^2 + d^2)}{16}$	 $K_x^2 = \frac{L^2}{12} + \frac{(D^2 + d^2)}{16} + R^2$
Цилиндр $W = \frac{\pi}{4} D^2 L \gamma$	 $K_x^2 = \frac{D^2}{8}$	 $K_x^2 = \frac{D^2}{8} + R^2$	
Полый цилиндр $W = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) L \gamma$	 $K_x^2 = \frac{(D^2 + d^2)}{8}$	 $K_{x_0}^2 = \frac{(D^2 + d^2)}{8} + R^2$	

Фиг. 22. Моменты инерции правильных геометрических тел.

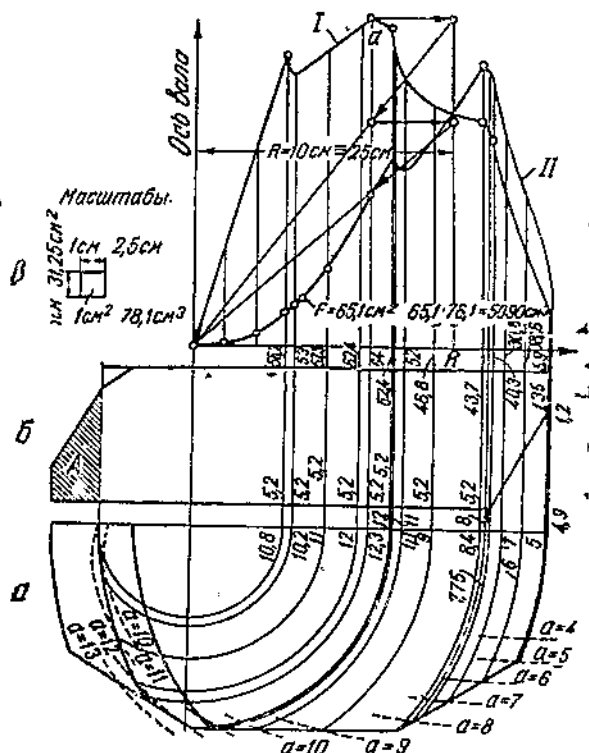
Конус $W = \frac{\pi}{12} D^2 L \gamma$  $K_x^2 = \frac{3(L^2 + D^2)}{80}$	 $K_x^2 = \frac{(8L^2 + 3D^2)}{80}$	 $K_x^2 = \frac{3(L^2 + D^2)}{80} + R^2$
Конус $W = \frac{\pi}{12} D^2 L \gamma$  $K_x^2 = \frac{(48L^2 + 3D^2)}{80}$	 $K_x^2 = \frac{3D^2}{40}$	 $K_x^2 = \frac{3D^2}{40} + R^2$
Усечен конус $W = \frac{\pi}{12} L \gamma (D^2 + Dd + d^2)$  $K_x^2 = \frac{3}{40} \left(\frac{D^5 - d^5}{D^3 - d^3} \right)$	 $K_x^2 = \frac{3}{40} \left(\frac{D^5 - d^5}{D^3 - d^3} \right) + R^2$	
Параболоид $W = \frac{\pi}{8} D^2 L \gamma$  $K_x^2 = \frac{D^2}{12}$	 $K_x^2 = \frac{D^2}{24} + \frac{L^2}{18}$	
Тор $W = \frac{\pi^2}{4} D d^2 \gamma$  $K_x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{3d^2}{16}$	 $K_x^2 = \frac{D^2}{8} + \frac{5}{32} d^2$	 $K_x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{3d^2}{16} + R^2$
Шар $W = \frac{\pi}{6} D^3 \gamma \text{ (сплошной)}$ $W = \frac{\pi}{6} (D^3 - d^3) \gamma \text{ (полый)}$  $K_x^2 = \frac{D^2}{10}$	 $K_x^2 = \frac{D^2}{10} + R^2$	 $K_x^2 = \frac{1}{10} \left(\frac{D^5 - d^5}{D^3 - d^3} \right) + R^2$

Фиг. 23. Моменты инерции правильных геометрических тел (продолжение).

до оси вращения R известны. Определив экспериментально периоды колебаний при первом и втором опытах T_1 и T_2 , получим, что

$$\theta_x = \frac{2\pi R^2 T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \text{ кгсмсек}^2. \quad (436)$$

При другом способе определения θ_x предварительно находится положение центра тяжести, а затем данное тело какой-либо точкой подвешивается или опирается на призмы так, чтобы оно могло свободно



Фиг. 24. Графическое определение момента инерции половины щеки коленчатого вала; порядок построения показан при помощи стрелок для точки a .

колебаться, как физический маятник. При этом должно быть точно измерено расстояние от оси качаний до центра тяжести l , вес тела W и период колебаний T :

$$\theta_x = \frac{T^2 l Q}{4\pi^2} \cdot \frac{W}{g} \text{ л}^2 \text{ кгсмсек}^2. \quad (43в)$$

Если центр тяжести тела совпадает с осью вращения, как, например, у роторов электрических машин, то, как видно из фиг. 25а, на шейки ротора надеваются подвески, снабженные опорными призмами, соответственно сдвинутыми для получения l относительно оси вала.

Третий способ экспериментального определения заключается в том, что тело подвешивается при помощи двух тросов одинаковой длины,

которые располагаются симметрично относительно вертикальной оси колебаний, как показано на фиг. 256. Период крутильных колебаний такой системы относительно вертикальной оси составит

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{IK^2}{ga^2}} \text{ сек.}, \quad (43г)$$

где l — длина троса;

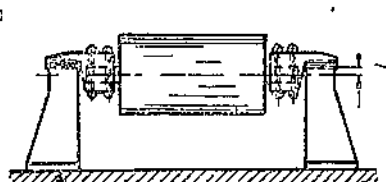
a — расстояние от каждого из тросов до оси вращения;

g — ускорение силы тяжести;

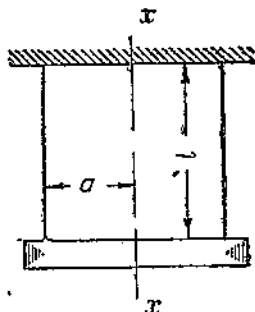
K — радиус инерции.

Отсюда нетрудно определить K , а следовательно, и θ_x по формуле (42а).

Следует отметить, что зависимость (43г) сохраняется также при большем числе тросов и более удобно тела могут быть, например, подвешены на трех тросах.



Фиг. 25а. Экспериментальное определение момента инерции ротора при помощи специальных подвесок.



Фиг. 25б. Экспериментальное определение момента инерции тела при помощи двойного подвеса.

Среднее значение момента инерции масс кривошипно-шатунного механизма за оборот

$$\theta = \theta_k + \left[m_{ш1} + \frac{1}{2} (m_{ш2} + m_n) \left(1 + \frac{R^2}{4L^2} \right) \right] R^2, \quad (44)$$

где θ_k — момент инерции колена;

$m_{ш1}$ — часть массы шатуна, отнесенная к цапфе кривошипа;

$m_{ш2}$ — часть массы шатуна, отнесенная к центру пальца поршня или крейцкопфа;

m_n — масса поршня;

R — радиус колена;

L — длина шатуна (между центрами цапф).

$$m_{ш1} = \frac{\theta_{ш}}{L^2}, \quad (45)$$

$$m_{ш2} = m_{ш} - \frac{\theta_{ш}}{L^2}, \quad (46)$$

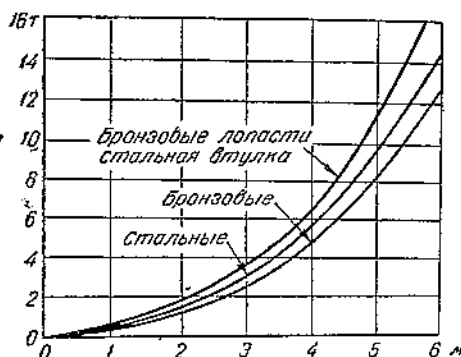
где $m_{ш}$ — масса шатуна;

$\theta_{ш}$ — момент инерции шатуна относительно центра пальца поршня или крейцкопфа.

По Толле, при величине отношения $\frac{S}{L} = 0,35$ (что, например, соответствует шатунам тихоходных двигателей), где S — расстояние от центра

тяжести шатуна до цапфы кривошипа, L — длина шатуна, получается:

$$\begin{aligned}\theta_{ш} &= 0,6 m_{ш} L^2; \\ m_{ш1} &= 0,6^{\frac{2}{3}} m_{ш}; \\ m_{ш2} &= 0,4 m_{ш}.\end{aligned}$$



Фиг. 26а. Вес четырехлопастных гребных винтов в m в зависимости от диаметра в m по Кер-Вильсону [37].

При $\frac{S}{L} = 0,5$

$$m_{ш1} = \frac{1}{3} m_{ш};$$

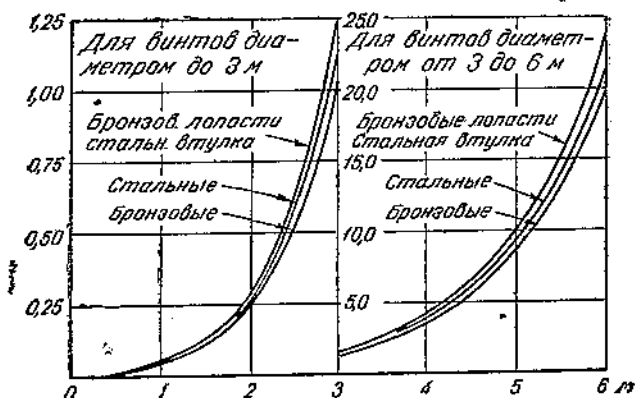
$$m_{ш2} = \frac{2}{3} m_{ш}.$$

Если принять, что $\frac{R^2}{4L^2}$ мало, то

$$\theta = \theta_k + 0,5 R^2 \left(\frac{W_n}{g} + \frac{W_{ш}}{1g} + \frac{\theta_{ш}}{L^2} \right) \text{ кг.м.сек}^2, \quad (47)$$

где W_n — вес поршня, $кг$;
 $W_{ш}$ — вес шатуна, $кг$;

$g = 981 \text{ см/сек}^2$ — ускорение силы тяжести;
 $\theta_k, \theta_{ш}$ в $кг.м.сек}^2$; R, L в $см$.



Фиг. 26б. Значения WK^2 в $м^3$ для гребных винтов в зависимости от диаметра в $м$ по Кер-Вильсону [37].

Момент инерции гребного винта

$$\theta = k \frac{WK^2}{g} \text{ кг.м.сек}^2. \quad (48)$$

Приведенная формула отличается от формулы (42а) наличием поправочного коэффициента k , учитывающего массу увлекаемой винтом воды.

По данным В. К. Житомирского, для танкеров:

	<i>k</i>
Стальной четырехлопастный винт	1,35
Бронзовый " " " " " " " " " " " "	1,30
Стальной трехлопастный винт " " " " " "	1,45
Бронзовый " " " " " " " " " " " "	1,40

По данным английских источников, $k = 1,25 - 1,30$.

На фиг. 26а приведены кривые весов (в *т*) четырехлопастных стальных и бронзовых гребных винтов в зависимости от диаметра (в *м*).

На фиг. 266 приведены для тех же гребных винтов кривые значений WK^2 в $мл^2$ в зависимости от диаметра (в $м$).

Моменты инерции электрических машин приводятся в каталогах заводов-изготовителей.

В табл. 3 даны некоторые значения маховых моментов в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ для синхронных трехфазных машин по данным ХЭМЗ им. Сталина.

Таблица 3

Т и п	Мощность кВА	Число об/мин	4WK ² кг.м ²	Т и п	Мощность кВА	Число об/мин	4WK ² кг.м ²
MC315—7/4	145	1500	19,5	MC319—4 16	130	375	266
MC317—7/4	350	1500	58	MC321—6/16	300	375	555
MC317—4/6	150	1000	56	MC322—7/16	600	375	1855
MC317—8/6	310	1000	92	MC323—7/16	970	375	4000
MC319—8/6	600	1000	234	MC321—4/20	150	300	415
MC321—8/6	1050	1000	595	MC322—5/20	300	300	1220
MC317—5/6	140	750	74	MC323—6/20	600	300	3100
MC319—6/8	350	750	263	MC324—5/20	1050	300	8960
MC321—7/8	610	750	570	MC322—6,24	300	250	1485
MC322—7/8	1100	750	1160	MC323—7,24	640	250	3600
MC317—6/10	125	600	84	MC324—6/24	1000	250	8670
MC319—6/10	320	600	270	MC323—3/32	190	187	2300
MC321—8/10	625	600	665	MC323—6/32	340	187	3500
MC322—8/10	1000	600	1580	MC324—6/32	630	187	8780
MC319—4/12	170	500	239	MC324—8/32	850	187	11080
MC321—5/12	330	500	405	MC324—3/48	180	125	5130
MC322—6/12	650	500	1380	MC324—6/48	310	125	8400
MC323—6/12	1156	500	3100				

§ 2. Определение податливости элементов системы

Податливость участка вала

$$e = \frac{32}{\pi G} \cdot K_i \cdot \frac{1}{d^4} \kappa^2 \kappa^2 c M^{-1}, \quad (49)$$

где G — модуль упругости при сдвиге, кг/см^2 ;

l — длина участка вала, см;

d — диаметр участка вала, см;

K_i — коэффициент, значения которого для различных случаев приведены ниже.

Величина $\frac{l}{d^4}$ может быть определена при помощи номограммы (фиг. 27).

Значения коэффициента K_f :

1. Для сплошного цилиндрического вала $K=1$,
2. Для полого цилиндрического вала

$$K_u = \frac{1}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}, \quad (50a)$$

где d_1 — диаметр сверления, см.

Значения K_u могут быть определены по номограмме (фиг. 28).

3. Для сплошного конического вала

$$K_{\kappa.cd} = \left(1 + \frac{c}{100}\right) K_{\kappa d} = \left(1 + \frac{c}{100}\right) \left[\frac{1}{3} \frac{d}{d_1} \left(1 + \frac{d}{d_1} + \frac{d^2}{d_1^2}\right)\right], \quad (50б)$$

если в формулу (49) подставляется больший диаметр конического участка, и

$$K_{\kappa.cd1} = \left(1 + \frac{c}{100}\right) K_{\kappa d_1} = \left(1 + \frac{c}{100}\right) \left[\frac{1}{3} \frac{d_1}{d} \left(1 + \frac{d_1}{d} + \frac{d_1^2}{d^2}\right)\right]', \quad (50в)$$

если в формулу (49) подставляется меньший диаметр конического участка.

Здесь d — больший диаметр конического участка, см;

d_1 — меньший диаметр конического участка;

c — поправочный коэффициент, учитывающий по данным лаборатории ДВС ВТИ (С. С. Зиманенко, В. К. Житомирский) влияние отношений $\frac{l}{d}$ и $\frac{d}{d_1}$ на податливость конического перехода; коэффициент c может быть определен при помощи номограммы (фиг. 29);

K_{κ} — теоретический коэффициент, значение которого приведено в формулах (50б) и (50в) и может быть найдено при помощи номограммы (фиг. 28).

При пользовании номограммой (фиг. 28) необходимо иметь в виду, что, исходя из условий построения, коэффициент K_{κ} приведен к диаметру d_1 , который для этого случая и должен быть подставлен в формулу (49).

Для конического вала с цилиндрическим сверлением

$$K_{\kappa.u} \approx K_{\kappa.c} \cdot K_u, \quad (50г)$$

где $K_{\kappa.c}$ — коэффициент для сплошного конического вала тех же размеров;

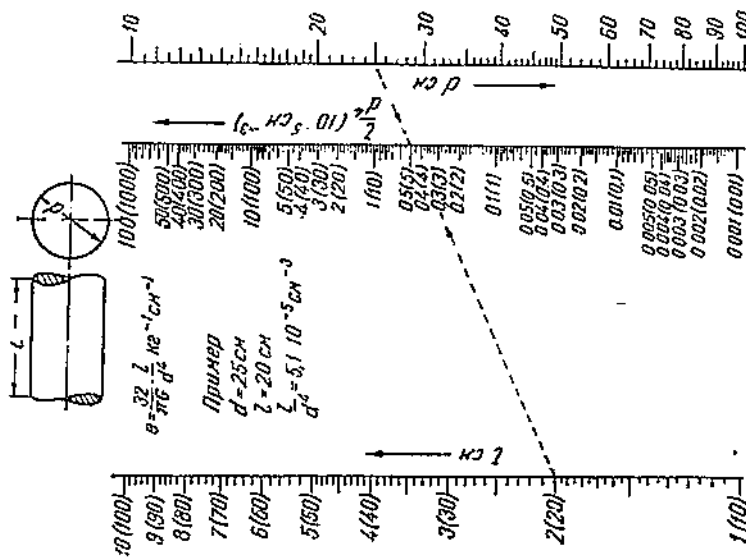
K_u — коэффициент для полого цилиндрического вала с наружным диаметром, равным меньшему диаметру конического вала d_1 .

4. Для вала, ослабленного шпоночными канавками,

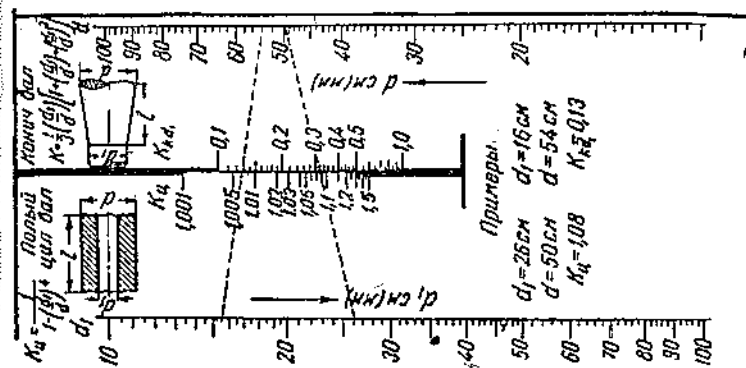
$$K_u = \frac{1}{\left(1 - \frac{nh}{d}\right)^4} \approx \frac{1}{1 - \frac{4nh}{d}}, \quad (50д)$$

где h — глубина шпоночной канавки, см;

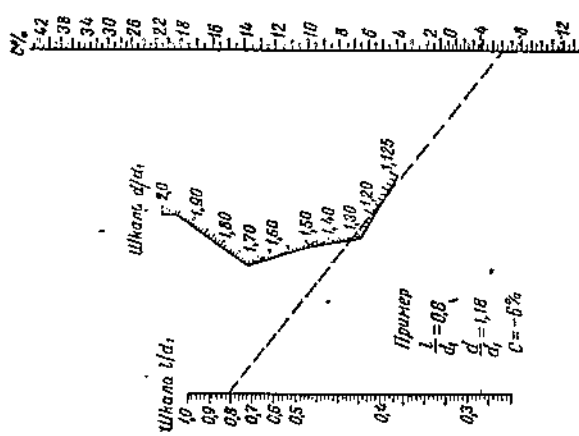
n — коэффициент, зависящий от числа и расположения шпонок.



Фиг. 27. Номограмма для определения величины i/d_1 по Терских [21]; цифры в скобках соответствуют диапазону длин участка вала 10 — 100 см.



Фиг. 28. Номограмма для определения поправочных коэффициентов K_k и K_{k2} по Терских [21]; при использовании номограммы для валов $d < 10$ см размеры выражаются в мм.



Фиг. 29. Номограмма для определения поправочного коэффициента c (выражен в %) по Зинаненко и Жигонирскому [23].

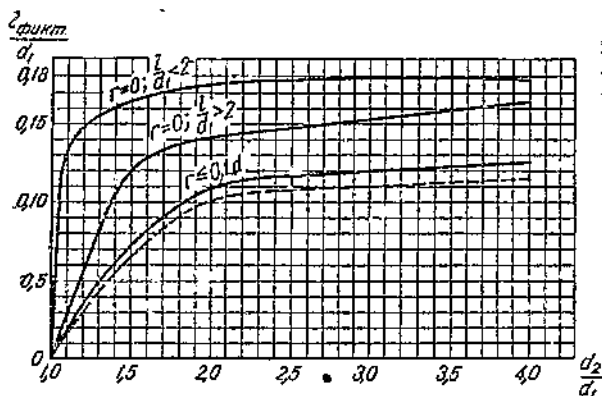
По данным лаборатории ДВС ВТИ:

Для одной врезной шпонки	0,5
Для двух равных шпонок под углом 90°	1,0
Для двух равных шпонок под углом 180°	1,2
Для двух тангенциальных шпонок под углом 120°	0,4

Податливость фланцевого соединения принимается равной податливости цилиндрического вала, длина которого равна суммарной толщине фланцев, а диаметр равен диаметру осевой окружности фланцевых болтов.

Податливость ступенчатого перехода — дополнительная податливость в месте изменения диаметра валов (на которую должна быть увеличена сумма податливостей обоих сопряженных участков вала), определяется:

$$e = \frac{32}{\pi G} \chi \kappa_2^{-1} \text{ см}^{-1}, \quad (51)$$



Фиг. 30. Кривые податливости ступенчатых переходов по данным ДВС ВТИ и по Портеру [23].

где

$$\chi = \lambda \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right) \text{ см}^{-3} = \frac{l_{\text{факт}}}{d_1^4} \text{ см}^{-3}, \quad (51a)$$

d_1 — меньший диаметр, см;

d_2 — больший диаметр, см;

λ — фиктивное приращение длины вала диаметром d_1 и укорочение вала диаметром d_2 ;

$l_{\text{факт}}$ — фиктивная длина вала диаметром d_1 , эквивалентная податливости перехода.

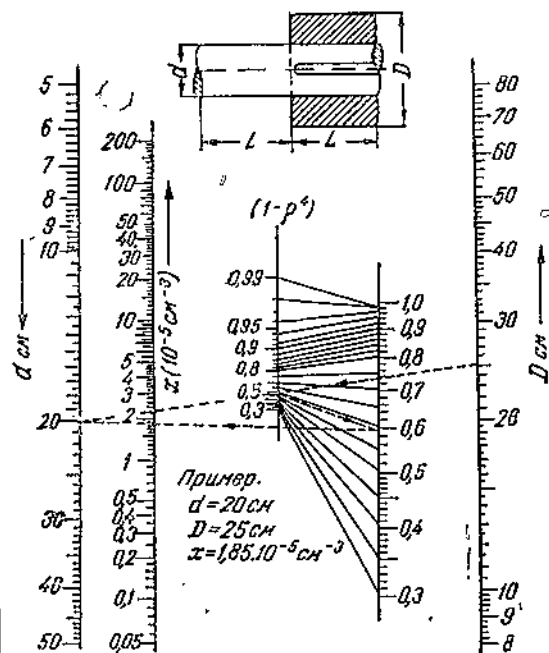
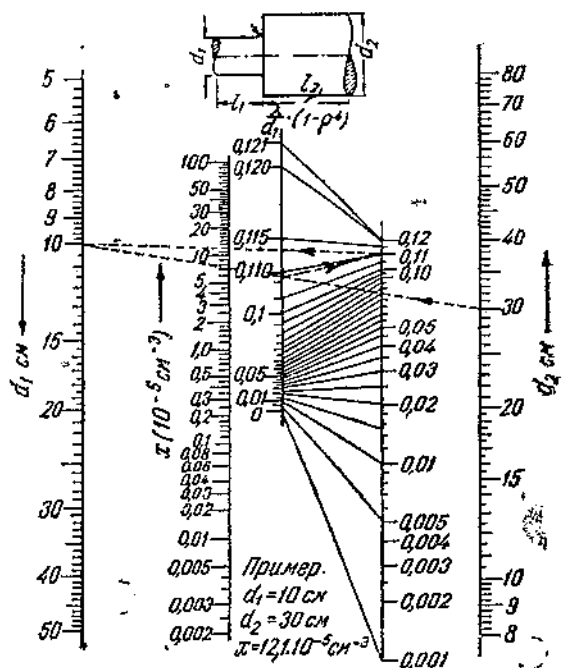
На фиг. 30 изображены найденные опытным путем зависимости

$$\frac{l_{\text{факт}}}{d_1} = f\left(\frac{d_2}{d_1}\right).$$

Сплошные кривые построены по данным лаборатории ДВС ВТИ (С. С. Зиманенко, В. К. Житомирский), причем нижняя кривая относится к переходам с закруглениями, радиус которых $r \leq 0,1 d_1$, средняя — к переходам без закруглений $r = 0$ и длиной утолщенной части больше $2 d_1$, а верхняя — к переходам с $r = 0$ и длиной утолщенной части меньше $2 d_1$.

Фиг. 31. Номограмма для определения податливости ступенчатого перехода по

Терских [21].

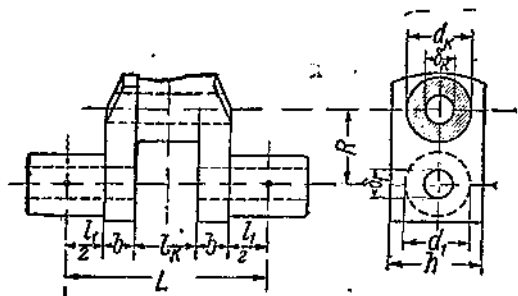


Фиг. 32. Номограмма для определения податливости перехода от вала к ступице по Терских [21].

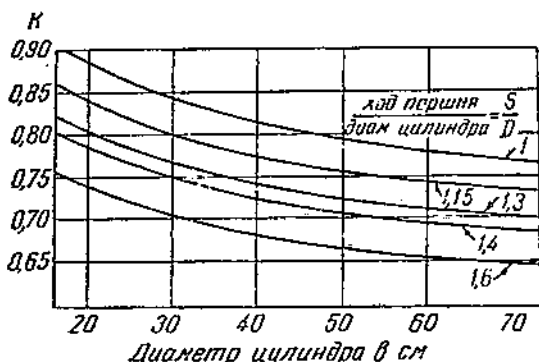
Пунктирная кривая построена по данным опытов Портера при $r \leq 0,1$. На фиг. 31 дана номограмма, позволяющая определить по данным Портера значение χ . Здесь $\rho = \frac{d_1}{d_2}$.

Податливость перехода от вала к ступице определяется, как и в предыдущем случае. Значение отношения $\frac{\lambda}{d}$, где d — диаметр вала, принимается:

По данным лаборатории ДВС ВТИ (С. С. Зиманенко, В. К. Житомирский):	
для обычной посадки	0,33
для прессовой посадки	0,25
По данным фирмы MAN	0,25
По данным фирмы Зульцер	0,33



Фиг. 33а. Эскиз колена вала.



Фиг. 33б. Диаграмма для определения коэффициента K по Зеельману в зависимости от диаметра цилиндра в (см) для различных отношений хода поршня к диаметру цилиндра

На фиг. 32 дана номограмма, позволяющая определить значение χ при $\frac{\lambda}{d} = 0,25$. Здесь $\rho = \frac{d}{D}$, где D — диаметр ступицы.

Податливость колена вала по Зеельману

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l_1 + 0,9b}{d_1^4 - d_1^4} + \left(\frac{l_k + 0,9b}{d_k^4 - d_k^4} + \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{R}{bh^3} \right) K \right] \text{кг}^{-1} \text{см}^{-1}, \quad (52)$$

где все линейные размеры (в см) обозначены по фиг. 33а;
 K — эмпирический коэффициент, определяемый по фиг. 33б;
 G — модуль упругости при сдвиге, кг/см^2 ;
 E — модуль упругости при растяжении, кг/см^2 .

Податливость колена вала по Картеру

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l_1 + 0,8b}{d_1^4 - \delta_1^4} + \frac{0,75 l_k}{d_k^4 - \delta_k^4} + 1,5 \frac{R}{bh^3} \right] \kappa z^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (53)$$

Обозначения те же, что и приведенные выше.

На фиг. 34 показаны для различных конструкций коленчатых валов вычисленные по формуле (53) соотношения действительных и эквивалентных длин.

По С. П. Тимошенко при свободном перемещении шеек

$$e_c = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l_1 + 0,9b}{d_1^4 - \delta_1^4} + \frac{l_k + 0,9b}{d_k^4 - \delta_k^4} + \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{R}{bh^3} \right] \kappa z^{-1} \text{ см}^{-1}; \quad (54a)$$

при полном защемлении шеек

$$e_8 = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{l_1 + 0,9b}{d_1^4 - \delta_1^4} + \left(\frac{l_k + 0,9b}{d_k^4 - \delta_k^4} \right) \left(1 - \frac{R}{q} \right) + \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{R}{bh^3} \left(1 - \frac{R}{2q} \right) \right] \kappa z^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (54b)$$

Если обозначить действительную податливость через e , то $e_3 < e < e_c$ здесь

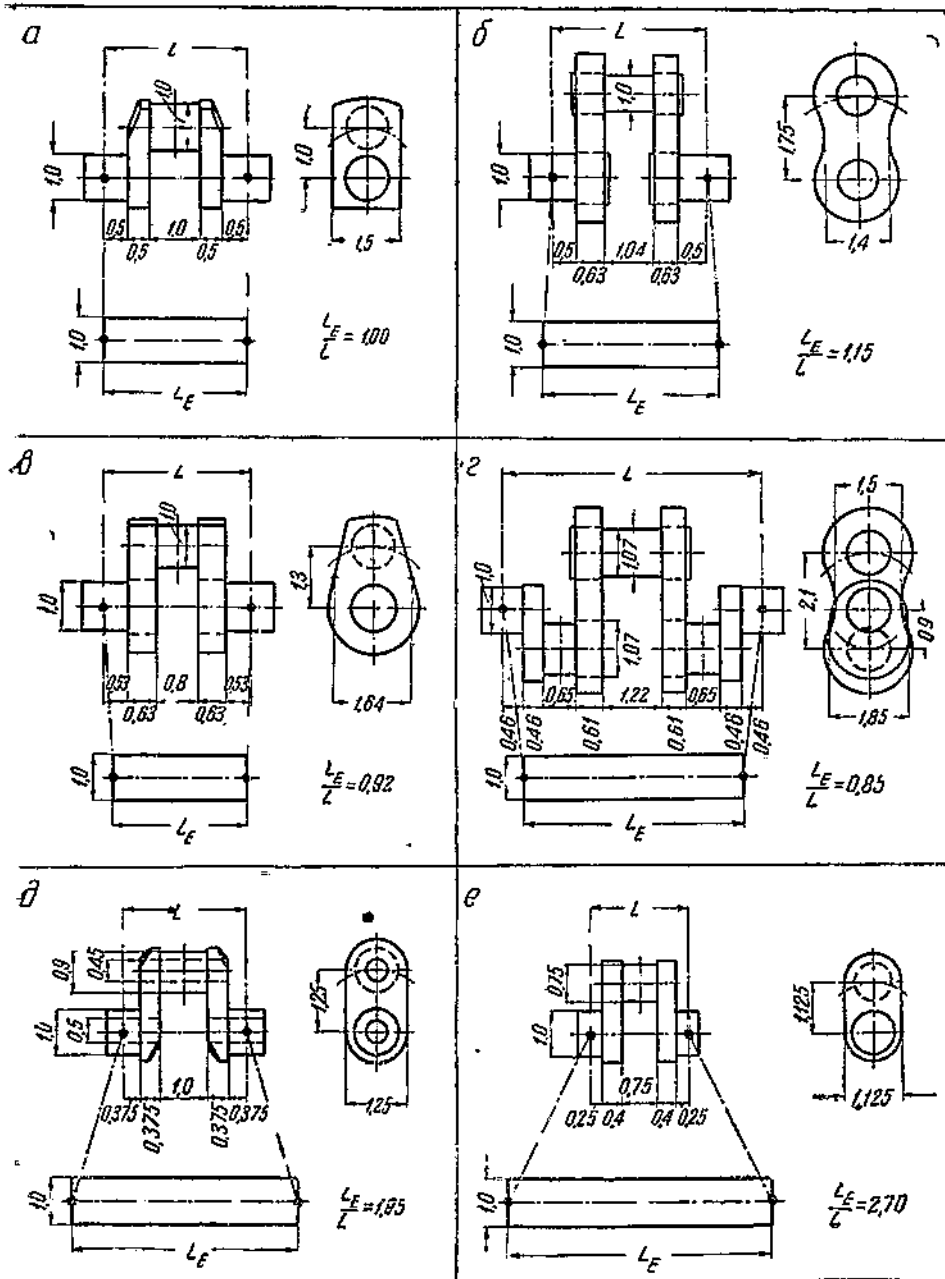
$$q = \frac{\frac{0,9(l_k + b)^2(h^2 + b^2)R}{h^3 b^3 G} + \frac{16l_k R^3}{\pi G(d_k^4 - \delta_k^4)} + \frac{8l_k^3}{3\pi E(d_k^4 - \delta_k^4)}}{\frac{16l_k R}{\pi G(d_k^4 - \delta_k^4)} + \frac{6R^2}{bh^3 E}} + \frac{\frac{4R^3}{bh^3 E} + \frac{1,2}{G} \left[\frac{2l_k}{\pi(d_k^3 - \delta_k^3)} + \frac{R}{bh} \right]}{\frac{16l_k R}{\pi G(d_k^4 - \delta_k^4)} + \frac{6R^2}{bh^3 E}}. \quad (54b)$$

Обозначения те же, что и выше.

Для введения в систему дополнительных податливостей используются различные конструктивные приемы, например, установка упругих муфт, подпружинивание венцов зубчатых колес в редукторных передачах, упругие втулки для пропеллеров в авиационных моторах и т. д.

Величина податливости находится в подобных случаях непосредственно по характеристике закрутки $M = f(\varphi)$, т. е. зависимости угла закрутки от вращающего момента, которая может быть как линейной, так и нелинейной. Следует отметить, что учет дополнительных податливостей для обычных редукторных передач и других сложных элементов должен производиться на основании подобных же характеристик, полученных опытным путем.

При определении податливостей экспериментальным путем схема опыта в каждом отдельном случае диктуется видом детали и располагаемыми средствами — проще всего, когда имеется возможность использования лабораторных машин для испытания материалов. Измерение силы тогда производит динамометр машины. Если при определении жесткости к концам детали приделываются рычаги, которые создают нагружающий момент, необходимо предусмотреть, чтобы при измерении углового перемещения учитывалось лишь скручивание детали, а не изгиб рычагов,



Фиг. 34. Соотношения действительной длины колен вала L и эквивалентной ему по жесткости длины цилиндрического вала L_E того же диаметра для различных конструкций коленчатых валов по Картеру (37); размеры — в относительных величинах.

что всегда нетрудно осуществить. При малой жесткости деталей нагрузку можно осуществлять грузами, прикладывая их непосредственно или при помощи рычажной передачи.

Построение характеристики $M = f(\varphi)$ необходимо производить по нескольким точкам. Даже при заведомо линейной характеристике, но при наличии некоторого зазора единичный опыт мог бы привести к существенной ошибке. Действительно, предположим, что в первом замере перемещению φ_1 соответствует момент M_1 (фиг. 35). Ограничившись лишь одним измерением, мы нашли бы, что жесткость элемента равна $C_1 = \frac{M_1}{\varphi_1}$. Произведя несколько замеров при наличии зазора OB , можно убедиться в том, что действительная жесткость элемента равна $C_2 = \frac{M_1}{\varphi_1 - \varphi_0}$ и может быть значительно больше, чем C_1 .

На фиг. 36, $a—ж$ на примерах некоторых конструкций упругих муфт показаны различные способы получения сосредоточенных податливостей.

Жесткость ременной передачи (фиг. 37), приведенная к валу A , составляет:

$$C = \frac{r_A^2 F E}{l}, \quad (55)$$

где r_A — радиус шкива A , см;
 F — площадь сечения ремня, см²,
 l — длина ведущей части, см,
 E — модуль упругости ремня, кг/см².

В установках с синхронными электрическими машинами иногда необходимо бывает принимать во внимание жесткость электромагнитного звена системы, которое учитывает сдвиг магнитной оси ротора от движущейся синхронно с ней оси результирующего потока или, иначе говоря, сдвиг вектора электродвижущей силы от вектора, обратного вектору напряжения на шинах. Указанная жесткость выражается через синхронизирующий момент, соответствующий отклонению в один механический радиан, и определяется по формуле:

$$C_s = 0,49 \cdot 10^3 \frac{2p \cdot P_e}{n \operatorname{tg} \theta_r} \text{ кгсм}, \quad (56)$$

где n — число оборотов в минуту;

$2p$ — число полюсов; при нормальной частоте 50 периодов в секунду

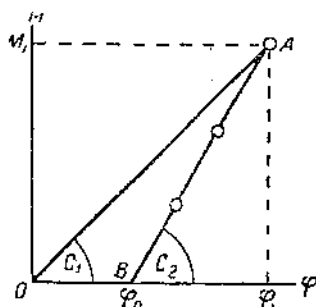
$$2p = \frac{6000}{n};$$

P_e — эффективный момент на валу в синхронных *квт* (равный эффективной мощности на валу в *квт*);

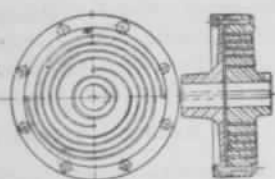
θ_r — угол сдвига между вектором электродвижущей силы и вектором, обратным вектору напряжения на шинах (выраженный в электрических градусах), который соответствует мощности P_e .

При полной нагрузке машины для заданного $\cos \varphi$ и при значениях $\cos \varphi$ выше номинальных тангенс угла θ_r определяется по его синусу из формулы

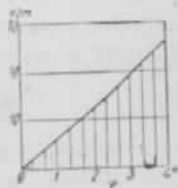
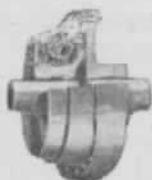
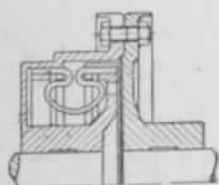
$$\sin \theta_r = \frac{\cos \varphi}{\mu_m}, \quad (56a)$$



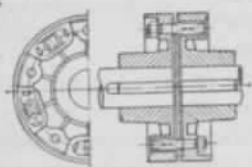
Фиг. 35. Определение жесткости.



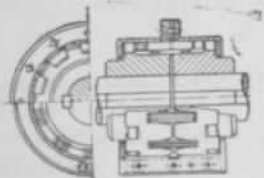
a



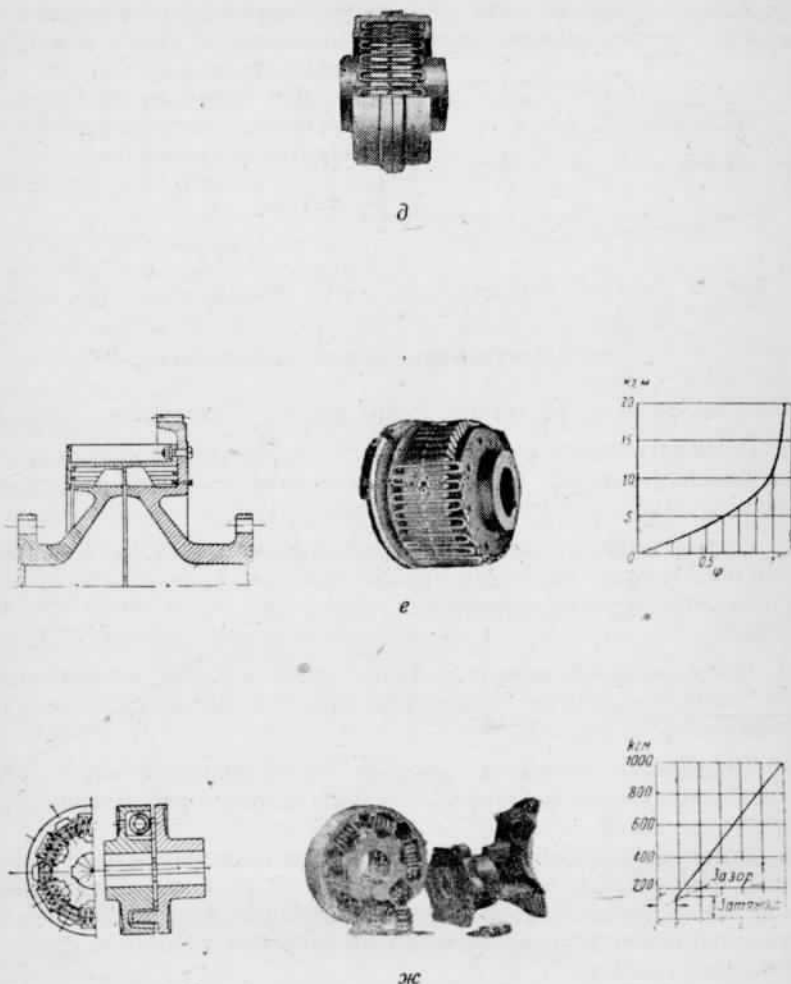
b



c



d

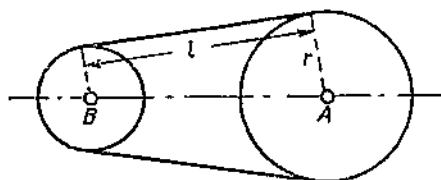


Фиг. 36. Конструкции и характеристики закрутки упругих муфт [39]:

а — муфта со спиральными пружинами конструкции Маркус (Maschinenfabrik Rheinland, Köln—Ehrenfeld); б — муфта с торсионными пружинами (J.M. Voith, Heidenheim); в — муфта с резиновыми или кожаными буферами (Vogel & Schlegel, Dresden); г — муфта Элькард (Eisenverk Wülfel, Hannover — Wülfel); число пакетов б — 12; д — муфта с пружинящими стержнями (Crofts Ltd. Bradford, Engl); е — муфта Бибби (Kaisermann, G.M.B.H. Düsseldorf); жс — муфта с цилиндрическими тангенциальными пружинами (Peniger Maschinenfabrik)

где φ — угол сдвига фаз между током статора и приложенным напряжением. Для машин, данные которых приведены в табл. 3, номинальные $\cos \varphi$ составляют: при $n=1500$ об/мин $\cos \varphi=0,9$, при $n \leq 1000$ об/мин $\cos \varphi=0,8$; μ_m — условная кратность опрокидывающего момента, выражающая отношение наибольшей возможной без выпадения из синхронизма активной мощности в кВт к номинальной мощности в кВа.

Для генераторов $\mu_m = j_c$ — кратности установившегося тока короткого замыкания.



Фиг. 37. Ременная передача.

При

$n = 1500$ об/мин	$\mu_m \approx 1,5 \div 1,9$
$n = 1000-375$ об/мин	$\mu_m \approx 1,8 \div 2,2$
$n = 300-125$ об/мин	$\mu_m \approx 2,3 \div 2,7$

§ 3. Составление расчетной схемы

При составлении расчетной схемы вводятся следующие допущения:

1. Сосредоточенные массы считаются приложенными при укреплении их на фланцах к торцу фланца, при соединении с помощью ступиц — к среднему сечению ступиц или плоскости спиц.

2. Суммирование податливостей отдельных элементов валопровода на участках между сосредоточенными массами производится с учетом податливостей переходов от одних диаметров к другим и переходов к ступице.

3. Распределенный момент инерции участка валопровода заменяется двумя сосредоточенными моментами инерции половинной величины, приложенными на концах.

4. Приведение моментов инерции распределенных масс длинных участков валопровода (например, гребных валов), приближенно производится следующим образом.

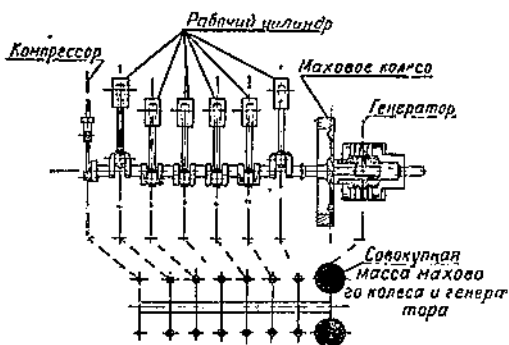
К каждой из сосредоточенных масс, ограничивающих рассматриваемый участок, прибавляется одна треть момента инерции его части, расположенной между данной массой и узлом колебаний. Расположение узла на участке определяется предварительно из расчета упрощенной схемы рассматриваемой системы.

Если задачей расчета является определение высших частот собственных колебаний (например двухузловых и выше колебаний системы двигатель — гребной вал — винт) и нахождение формы упругой линии очень длинного участка вала, то указанный выше способ учета может привести к значительным ошибкам даже в том случае, когда распределенный момент инерции длинного валопровода весьма мал по сравнению с моментами инерции сосредоточенных масс системы. Данному вопросу посвящена отдельная статья автора [28].

Для простейших систем с длинными валопроводами можно воспользоваться методами расчета, изложенными в § 1 гл. IV, учитывая эквивалентность систем крутильных и продольных колебаний (стр. 118).

Введение в расчет механической системы дополнительной степени свободы, соответствующей электрическому звену, может потребоваться в тех случаях, когда синхронизирующий момент C_s , вычисленный в соответствии с § 2, окажется соизмеримым с некоторыми механическими жесткостями системы или при расчете качаний синхронных машин.

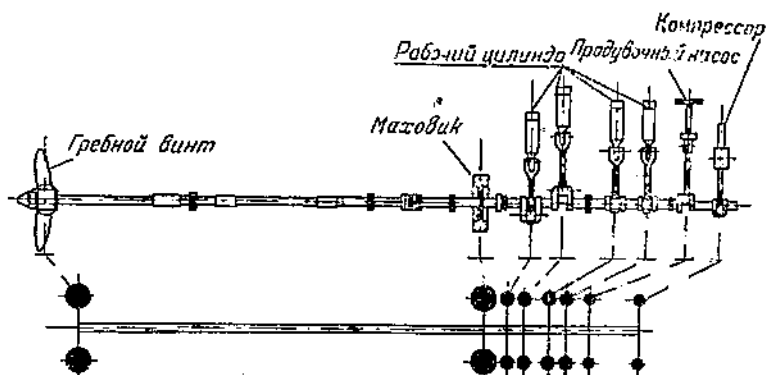
При этом для синхронных машин, работающих на достаточно мощную сеть (в которых пренебрегаем реакцией агрегатов с неравномерным моментом вращения и полагаем неизменными напряжение и частоту), можно считать, что в расчетной схеме за моментом инерции ротора синхронной машины расположена податливость $\frac{1}{C_s}$, после которой сосредоточена очень большая масса, т. е. имеется узел колебаний.



Фиг. 38а. Эскиз и эквивалентная расчетная схема дизельгенераторной установки.

Расчетная схема изображается, как показано на фиг. 38а и 38б; на первой показана установка дизель-генератора, а на второй — судовая установка.

Моменты инерции Θ_i выражаются в кгсмсек^2 или в $\text{кгсек}^2 \cdot \text{см}^2$, как массы, приведенные к определенному радиусу.



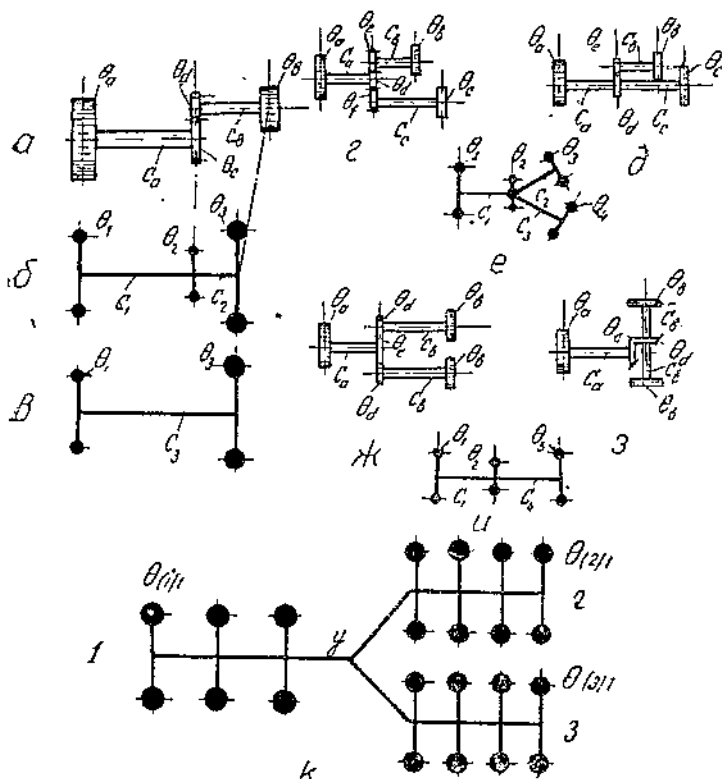
Фиг. 38б. Эскиз и эквивалентная расчетная схема судовой установки.

Податливости элементов e_i выражаются в $\text{кг}^{-1}\text{см}^{-1}$ или как эквивалентные длины цилиндрического вала определенного радиуса. Вместо податливостей могут быть указаны жесткости $C_i = \frac{1}{e_i} \text{кгсм}$.

В некоторых случаях моменты инерции и податливости (или жесткости) выражаются в относительных величинах, т. е. как отношения к выбранным единичным значениям момента инерции и податливости (жесткости).

Приведение систем с зубчатыми передачами
(фиг. 39)

1. Для системы, показанной на фиг. 39, а, получаем эквивалентную схему (фиг. 39, б), в которой



Фиг. 39. Расчетные схемы системы с зубчатыми передачами.

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \Theta_a; \\ \Theta_2 &= \Theta_c + \Theta_a \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ \Theta_3 &= \Theta_b \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ C_1 &= C_a; \\ C_2 &= C_b \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (57a)$$

где Θ_i и C_i — моменты инерции и жесткости в соответствии с обозначениями на чертеже;

n_a и n_b — числа оборотов в минуту валов a и b .

При $\Theta_2 = 0$ приходим к схеме, показанной на фиг. 39, а.

2. Для системы фиг. 39,г получаем схему фиг. 39,е, приведенную к валу a с числом оборотов n_a в которой

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_a; \\ \theta_2 &= \theta_a + \theta_e \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2 + \theta_f \left(\frac{n_c}{n_a} \right)^2; \\ \theta_3 &= \theta_b \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ \theta_4 &= \theta_c \left(\frac{n_c}{n_a} \right)^2; \\ C_1 &= C_a; \\ C_2 &= C_b \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ C_3 &= C_c \left(\frac{n_c}{n_a} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (57б)$$

3. Для системы фиг. 39,д получаем схему фиг. 39,е, в которой

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_a; \\ \theta_2 &= \theta_a + \theta_e \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ \theta_3 &= \theta_b \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ \theta_4 &= \theta_c; \\ C_1 &= C_a; \\ C_2 &= C_b \left(\frac{n_b}{n_a} \right)^2; \\ C_3 &= C_c. \end{aligned} \right\} \quad (57в)$$

4. Симметричные системы (фиг. 39,ж и 39,з) приводятся к рядной схеме (фиг. 39,и).

5. Более сложные случаи систем с зубчатыми передачами приводят к разветвленным схемам, состоящим из нескольких сопряженных рядных ветвей, как показано на фиг. 39,к.

§ 4. Определение частот собственных колебаний линейных систем с помощью уравнений частот

Задача определения частот собственных крутильных колебаний для рядных систем вида, показанных на фиг. 38,а и 38,б, сводится к решению приведенного ниже уравнения частот с количеством корней, равным числу степеней свободы системы:

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{C_{12}}{-\omega^2 \theta_1} \right]; -C_{12} & ; & 0 & ; & \dots \\ -C_{12}; \left[\frac{C_{12} + C_{23}}{-\omega^2 \theta_2} \right]; +C_{23} & ; & \dots & & \\ 0; -C_{23} & ; & \left[\frac{C_{23} + C_{34}}{-\omega^2 \theta_3} \right] & ; & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (58)$$

Для разветвленной системы, изображенной на фиг. 39,е, уравнение частот может быть представлено в форме следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{C_1}{-\omega_r^2 \theta_1} \right]; & -C_1 & ; & 0 & ; & 0 \\ -C_1 & ; & \left[\frac{C_1 + C_2}{C_3 - \omega_r^2 \theta_2} \right]; & -C_2 & ; & -C_3 \\ 0 & ; & -C_2 & ; & \left[\frac{C_2}{-\omega_r^2 \theta_3} \right]; & 0 \\ 0 & ; & -C_3 & ; & 0 & ; & \left[\frac{C_3}{-\omega_r^2 \theta_4} \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (59)$$

То же уравнение в обычной форме (определитель разделен на величину $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 / \omega_r^2$):

$$\begin{aligned} & (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - \omega_r^2 \left[\frac{(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)\theta_1}{C_1} + \frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4)\theta_3}{C_2} + \right. \\ & \left. + \frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\theta_4}{C_3} \right] + \omega_r^4 \left[\frac{\theta_1\theta_3(\theta_2 + \theta_4)}{C_1 C_2} + \frac{\theta_3\theta_4(\theta_1 + \theta_2)}{C_2 C_3} + \right. \\ & \left. + \frac{\theta_1\theta_4(\theta_2 + \theta_3)}{C_1 C_3} \right] - \omega_r^6 \frac{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}{C_1 C_2 C_3} = 0. \end{aligned} \quad (59a)$$

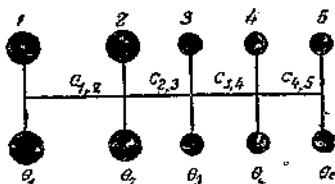
Решение уравнений частот может быть произведено любыми способами численного решения алгебраических уравнений. При пользовании способом Грэффе-Энке [см. например (7)] необходимо помнить, что нас обычно интересуют наименьшие значения частот, в то время как указанный способ удобен для определения наибольших корней уравнения. Таким образом, при пользовании этим способом необходимо введение новой переменной $\frac{1}{\omega_r^2}$.

Определение частот собственных колебаний путем решения уравнений частот обычно является целесообразным для систем с небольшим числом степеней свободы.

§ 5. Определение частот собственных колебаний методом последовательных приближений

Определение частот собственных крутильных колебаний путем последовательных приближений производится по методу Толле. При этом получаются не только значения частот, но и соответствующие им формы упругой линии закрутки валопровода.

Применение метода Толле показано ниже — на примере расчета системы из пяти масс, изображенной на фиг. 40. Расчет сведен в табл. 4, где i — порядковый номер массы; θ_i — моменты инерции масс системы, кгсмсек^2 ; $C_{i(i+1)}$ — жесткости участков валопровода, кгсм ; ω — расчетная



Фиг. 40. Расчетная схема системы из пяти масс.

круговая частота крутильных колебаний, $1/\text{сек}$; α_i — относительная амплитуда угла закрутки; R — остаточный момент, кгсм .

Для расчета по методу Толле прежде всего задаемся приближенным значением собственной частоты искомого порядка, используя решения упрощенных схем.

Параметры системы		0-е приближение $\omega^2 = 1,7 \cdot 10^4$		1-е приближение $\omega^2 = 2,4 \cdot 10^4$		2-е приближение $\omega^2 = 2,1 \cdot 10^4$		Примечание
i	θ_i кг/см ^{сек} ²	a_i	$-a_i \theta_i \omega^2$	a_i	$-a_i \theta_i \omega^2$	a_i	$-a_i \theta_i \omega^2$	Обозначения величин для четных строк таблицы
$i(i+1)$	$\frac{1}{C_i(i+1)} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{м}^{-1}$	$a_{i+1} - a_i = \frac{-\sum_{j=1}^i a_j \theta_j \omega^2}{C_i(i+1)}$	$-\sum_{j=1}^i a_j \theta_j \omega^2$	$a_{i+1} - a_i = \frac{-\sum_{j=1}^i a_j \theta_j \omega^2}{C_i(i+1)}$	$-\sum_{j=1}^i a_j \theta_j \omega^2$	$a_{i+1} - a_i = \frac{-\sum_{j=1}^i a_j \theta_j \omega^2}{C_i(i+1)}$	$-\sum_{j=1}^i a_j \theta_j \omega^2$	Обозначения величин для четных строк таблицы
1	15	$\begin{matrix} \rightarrow \\ 1,0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \rightarrow \\ -25,5 \cdot 10^4 \end{matrix}$	1,0	$-36,0 \cdot 10^4$	$\begin{matrix} \rightarrow \\ 1,0 \end{matrix}$	$-31,5 \cdot 10^4$	Последовательность вычислений показана стрелками
1,2	$5,10 \cdot 10^{-6}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -1,275 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -25,5 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-1,80	$-36,0 \cdot 10^4$	-1,575	$-31,5 \cdot 10^4$	
2	10	$\begin{matrix} \rightarrow \\ -0,275 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \rightarrow \\ 4,68 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-0,80	$19,2 \cdot 10^4$	-0,575	$12,07 \cdot 10^4$	
2,3	$3,03 \cdot 10^{-6}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -0,631 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -20,82 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-0,51	$-16,8 \cdot 10^4$	-0,588	$-19,43 \cdot 10^4$	
3	2	$\begin{matrix} \rightarrow \\ -0,906 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \rightarrow \\ 3,08 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-0,31	$6,29 \cdot 10^4$	-1,163	$4,78 \cdot 10^4$	
3,4	$4,10 \cdot 10^{-6}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -0,710 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -17,74 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-0,42	$-10,51 \cdot 10^4$	-0,588	$-14,65 \cdot 10^4$	
4	2	$\begin{matrix} \rightarrow \\ -1,616 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \rightarrow \\ 5,50 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-1,73	$8,30 \cdot 10^4$	-1,749	$7,84 \cdot 10^4$	
4,5	$4,10 \cdot 10^{-6}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -0,490 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \leftarrow \\ -12,24 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-0,088	$-2,21 \cdot 10^4$	-0,292	$-7,30 \cdot 10^4$	
5	2	$\begin{matrix} \rightarrow \\ -2,106 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \rightarrow \\ 7,16 \cdot 10^4 \end{matrix}$	-1,818	$8,72 \cdot 10^4$	-2,041	$8,57 \cdot 10^4$	
		$R = -5,07 \cdot 10^4$		$R =$	$6,51 \cdot 10^4$	$R =$	$1,27 \cdot 10^4$	

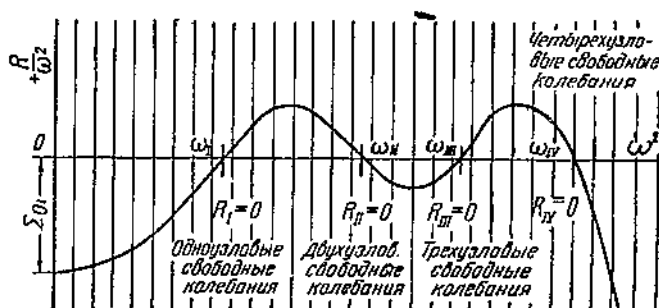
Для нашего примера приближенное значение основной частоты собственных колебаний получаем, объединив массы, θ_2 , θ_3 , θ_4 и θ_5 в одну, приложенную в их общем центре тяжести, и решив полученную систему из двух масс по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{II}(\theta_I + \theta_{II})}{\theta_I \theta_{II}}}.$$

Находим таким образом значение $\omega^2 = 1,70 \cdot 10^4$.

Задавшись единичной амплитудой закрутки первой массы $\alpha_1 = 1$, определяем последовательно по стрелкам в таблице значения величин в строках 1 и 1,2 и получаем относительную амплитуду второй массы α_2 . Исходя из последней, в результате определения величин в строках 2 и 2,3 получаем значения α_3 и т. д.

В конце расчета получаем значение R остаточного момента сил инерции; последнее при частоте свободных колебаний должно быть равно нулю.



Фиг. 41. Диаграмма остаточных моментов по Толле.

Процесс интерполяции при нахождении точных значений частот собственных колебаний облегчается путем построения диаграммы остаточных моментов, в котором невязка $\frac{R}{\omega^2}$ изображается как $\frac{R}{\omega^2} = f(\omega^2)$. Подобная диаграмма схематически дана на фиг. 41. Как видно из чертежа, кривая $\frac{R}{\omega^2} = f(\omega^2)$ образует ряд пересечений с осью абсцисс, соответствующих значениям частот собственных колебаний. Для выяснения вида кривой можно производить расчет с помощью логарифмической линейки, а около точных значений искомых частот — более точно, например на арифмометре.

Нахождение последовательных приближений можно производить и чисто аналитическим путем, пользуясь методом Зехтинга [40].

Последующее приближение находится по формуле

$$\omega^2 = \frac{\sum_0^n C_{(i-1)}(\alpha_i - \alpha_{i-1})^2}{\sum_0^n \theta_i \alpha_i^2}, \quad (60)$$

в которую подставляются данные из расчета по Толле для предыдущего приближения.

Для приводимого примера получаем по Зехтингу:

$$\omega_1^2 = \frac{6,38 \cdot 10^6}{26,8} = 2,38 \cdot 10^4 \approx 2,4 \cdot 10^4;$$

$$\omega_2^2 = \frac{7,78 \cdot 10^5}{37,42} = 2,08 \cdot 10^4 \approx 2,1 \cdot 10^4;$$

$$\omega_3^2 = \frac{7,17 \cdot 10^5}{35,47} = 2,02 \cdot 10^4;$$

$$\omega_2 \approx \omega_3.$$

Таким образом, значение основной частоты собственных колебаний системы определено с практически достаточной точностью в результате трех приближений.

Метод Толле применим и для расчета разветвленных систем (фиг. 39,к). Пусть, например, необходимо определить частоту собственных колебаний разветвленной системы, имеющей n рядных ветвей, сопряженных в точке y .

Производим для каждой из ветвей системы [(1), (2), (3) ... (n)] расчет в табличной форме, как показано выше, залаваясь единичными относительными амплитудами углов закрутки для крайних масс ($\theta_{(1)}$; $\theta_{(2)}$; $\theta_{(3)}$... $\theta_{(n)}$):

$$a_{(1)y} = a_{(2)y} = a_{(3)y} = \dots = a_{(n)y} = 1.$$

В результате для принятой расчетной частоты получаем значения относительных амплитуд в точке сопряжения $y[a_{(1)y}; a_{(2)y}; a_{(3)y} \dots a_{(n)y}]$ и значения остаточных моментов $R_{(1)}; R_{(2)}; R_{(3)} \dots R_{(n)}$. Принятая частота ω будет соответствовать частоте собственных колебаний системы в том случае, если выполнено условие:

$$\sum_{(1)}^n \frac{R_{(i)}}{a_{(i)y}} = 0. \quad (61)$$

§ 6. Номограммы и приближенные формулы для систем рядных моторов

Приближенные формулы В. Дмитриевского

Для системы четырехколенного вала (фиг. 42) число собственных одноузловых колебаний в минуту N_c составит

$$N_c = 9,55 \sqrt{\frac{C_2}{\theta_2} \cdot \frac{\left(1 + 3,706 \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}{\left(3,706 \frac{C_2}{C_1} + 4,564\right)}} \quad \text{при } \frac{C_2}{C_k} < 1,766; \quad (62a)$$

$$N_c = 9,55 \sqrt{\frac{C_2}{\theta_2} \cdot \frac{\left(1 + 3,866 \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}{\left(3,866 \frac{C_2}{C_1} + 4,268\right)}} \quad \text{при } \frac{C_2}{C_k} > 1,766. \quad (62b)$$

Для системы шестиколennого вала (фиг. 43) число собственных колебаний в минуту N_c составит

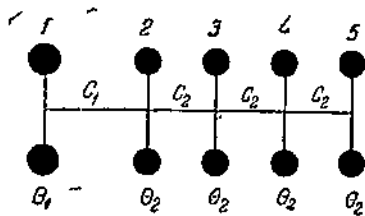
$$N_c = 9,55 \sqrt{\frac{C_2}{\theta_2} \cdot \frac{\left(1 + 5,225 \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}{\left(5,225 \frac{C_2}{C_1} + 12,05\right)}} \quad \text{при } \frac{C_2}{C_h} < 2; \quad (62a)$$

$$N_c = 9,55 \sqrt{\frac{C_3}{\theta_2} \cdot \frac{\left(1 + 5,525 \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}{\left(5,525 \frac{C_2}{C_1} + 11,45\right)}} \quad \text{при } \frac{C_2}{C_h} > 2, \quad (62r)$$

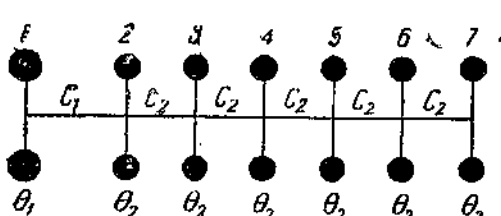
где θ_1 и θ_2 — моменты инерции;

C_1 и C_2 — жесткости элементов, указанные на фиг. 42 и 43;

C_h — жесткость участка вала между сосредоточенной массой первого колена и узлом колебаний.



Фиг. 42. Расчетная схема системы четырехколенного вала.



Фиг. 43. Расчетная схема системы шестиколennого вала.

Номограммы и формулы С. В. Серенсена и И. М. Тетельбаума

По номограмме (фиг. 44) можно определить значения основной частоты колебаний ω_1 и частоты первого обертона ω_1 для системы шестиколennого вала. Здесь в соответствии с обозначениями фиг. 43

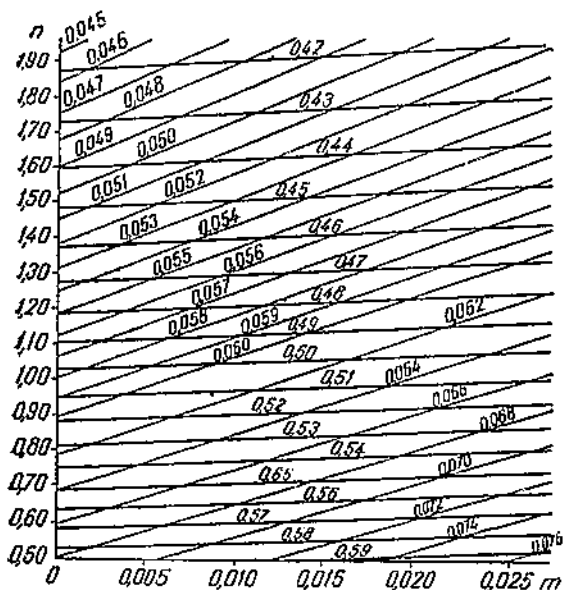
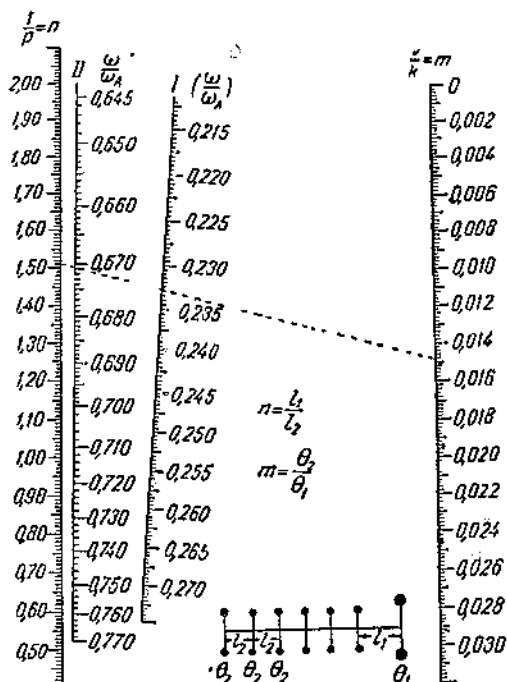
$$\omega_A = \sqrt{\frac{C_2}{\theta_2}}; \quad m = \frac{\theta_2}{\theta_1}; \quad n = \frac{C_2}{C_1}.$$

Значения тех же частот могут быть определены по фиг. 45, на которой в координатах m и n даны семейства прямых, соответствующих указанным на них значениям $\left(\frac{\omega}{\omega_A}\right)^2$. Одно семейство, построенное для диапазона значений $\left(\frac{\omega}{\omega_A}\right)^2$ от 0,045 до 0,076, соответствует основному тону колебаний, а другое, построенное для $\left(\frac{\omega}{\omega_A}\right)$ от 0,42 до 0,58, соответствует первому обертому.

В интервалах значений $n = 0,5 \div 2$ и $m = 0 \div 0,03$ (соответствующих, например, валам рядных авиамоторов без редукторов и муфт) можно для определения частоты основных колебаний системы шестиколennого вала применить формулу

$$\frac{\omega_1}{\omega_A} = \sqrt[4]{0,01 (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu})}, \quad (63a)$$

Фиг. 44. Номограмма для определения первых двух частот собственных колебаний системы шестиколennого вала по Серпенсену и Тетельбауму [27].



Фиг. 45. График для определения первых двух частот собственных колебаний системы шестиколennого вала по Серпенсену и Тетельбауму [27]

где

$$\lambda_1 = \frac{25,79m + 4,657}{37,60m + 6,473};$$

$$\mu_1 = \frac{30,64m + 3,428 - n}{37,60m + 6,473}.$$

Для определения частоты первого обертона можно применить формулу

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_A} = \sqrt[4]{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - \mu_1}}, \quad (63б)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{4,62m + 11,774}{10,86m + 29,203};$$

$$\mu_1 = \frac{3,48m + 5,069 - n}{10,86m + 29,203}.$$

В интервалах значений $n = 0,8 \cdot 10^4 \div 2 \cdot 10^4$; $m = 0 \div 0,05$ (соответствующих, например, наличию муфт весьма малой жесткости или подпружиниванию венцов зубчаток редуктора) можно для определения частоты основных колебаний системы шестиколennого вала применить формулу

$$\frac{\omega_I}{\omega_A} = \sqrt[4]{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - \mu_2}}, \quad (63в)$$

где

$$\lambda_2 = \frac{1}{n} (0,0857 n + 0,5m + 0,214);$$

$$\mu_2 = \frac{1 + 6m}{35n}.$$

Номограмма В. Терских

Номограмма (фиг. 46) позволяет произвести определение числа собственных одно- и двухузловых колебаний для системы рядного многоцилиндрового двигателя (до 12 цилиндров) с одной массой перед ним (например компрессор) и двумя массами за ним (например маховик и гребной винт или маховик и генератор).

Способ пользования номограммой показан в приведенном ниже примере определения чисел собственных колебаний для системы, показанной на фиг. 47.

Порядок определения следующий:

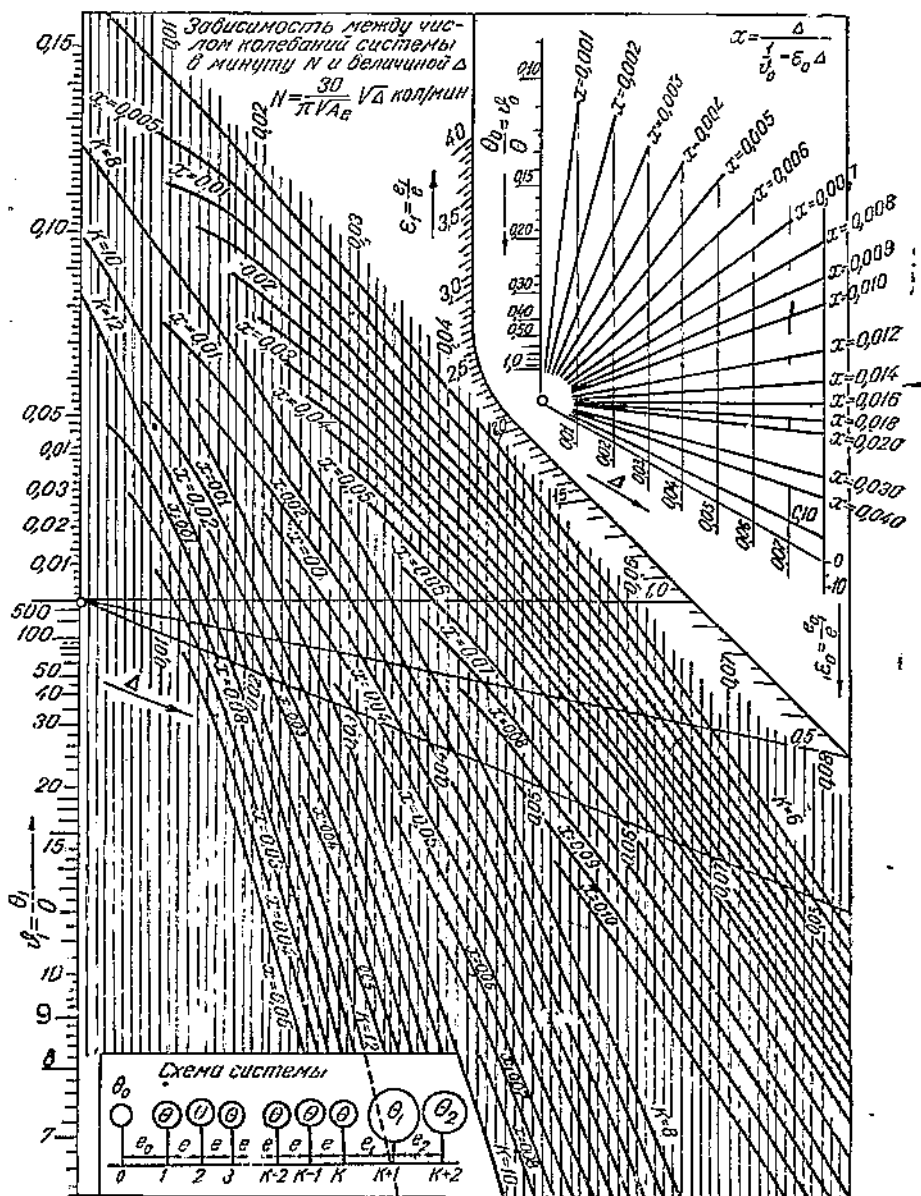
1. Приводим систему с абсолютными значениями параметров θ_i , кгсмсек² и e_i , кгс⁻¹см⁻¹ к относительной системе с параметрами ϑ_i и ε_i ,

где
$$\varepsilon_i = \frac{e_i}{e}; \quad \vartheta_i = \frac{\theta_i}{\theta_0}.$$

В качестве единичных значений для системы (фиг. 47) принимаем

$$\theta = 200 \text{ кгсмсек}^2, \quad e = 20 \cdot 10^{-10} \text{ кгс}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

2. В случае, если массы ϑ_0 перед двигателем нет или ею можно пренебречь, можно выбрать непосредственно по основной номограмме

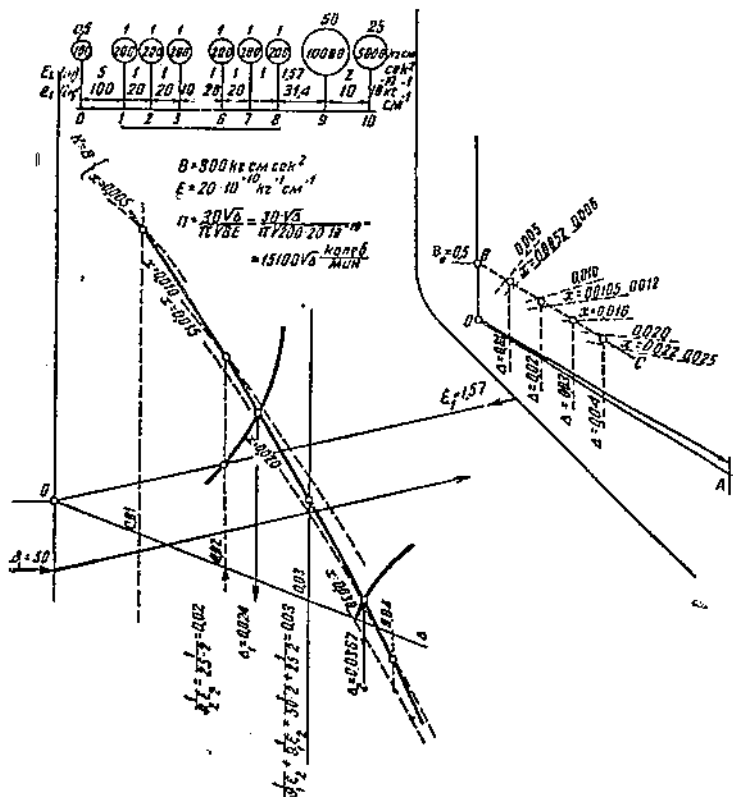


Фиг. 46. Номограмма для определения первых двух частот собственных колебаний системы рядного двигателя с одной массой перед и двумя массами за ней по Терских [22].

кривую, соответствующую данному числу цилиндров K . В данном примере $K=8$.

При наличии же массы θ_0 необходимо определять координаты точек кривой, соответствующей данному числу цилиндров K , следующим образом (построение показано на фиг. 47):

а) фиксируем на шкале ε_0 вспомогательной номограммы точку A (соответствующую $\varepsilon_0=5$), а на шкале ϑ — точку B (соответствующую $\vartheta=0,5$);



Фиг. 47. Построение к примеру пользования номограммой Терских и расчетная схема примера.

б) проводим луч OA и параллельную ему линию BC ;

в) определяем на прямой BC значения x , соответствующие различным значениям Δ :

$\Delta = 0,01$	0,02	0,03	0,04
$x = 0,0052$	0,0105	0,016	0,022;

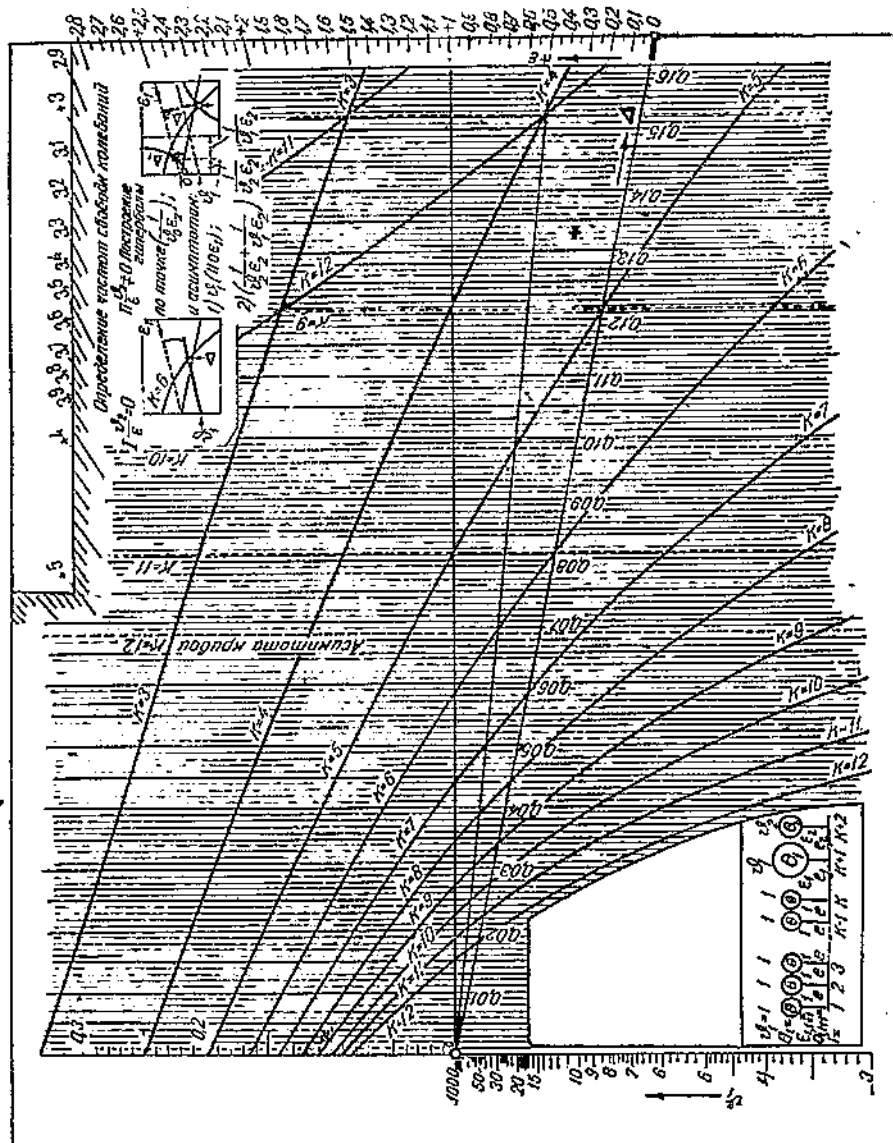
г) фиксируем на основной номограмме точки, найденные для кривой $K=8$ с учетом массы θ_0 по пункту в, и проводим через них искомую кривую.

Отсюда определяем числа собственных колебаний системы по формуле:

$$N = \frac{30 \sqrt{\Delta}}{\pi \sqrt{\theta_e}} \text{ кол/мин} = \frac{30 \sqrt{\Delta}}{\pi \sqrt{200 \cdot 20 \cdot 10^{-10}}} = 15 100 \sqrt{\Delta} \text{ кол/мин};$$

$$N_1 = 15 100 \sqrt{\Delta_1} = 2 340 \text{ кол/мин};$$

$$N_2 = 15 100 \sqrt{\Delta_2} = 2 890 \text{ кол/мин}.$$



Фиг. 49. Номограмма для определения первых двух частот собственных колебаний системы рядного двигателя с двумя массами за ним по Терских [21].

На фиг. 49 дана номограмма с более широким диапазоном входящих в нее величин, по сравнению с номограммой на фиг. 26, для систем, в которых масса θ_0 отсутствует или ею можно пренебречь.

§ 7. Определение возбуждающих моментов

Возбудителями крутильных колебаний являются главным образом моменты от сил давления пара или газа в цилиндрах двигателей и воздуха в цилиндрах компрессоров, а также от сил инерции поступательно движущихся частей кривошипных механизмов.

Гармонические крутящие моменты от сил давления пара, газа или воздуха определяются на основании диаграммы тангенциальных сил путем разложения кривой обычными методами гармонического анализа на составляющие ряда Фурье:

$$M = \frac{M_0}{2} + M_1 \sin(\Omega t + \varphi_1) + M_2 \sin(2\Omega t + \varphi_2) + \dots + M_v \sin(v\Omega t + \varphi_v) + \dots, \quad (64)$$

где Ω — угловая скорость вращения вала;

v — порядок гармонической составляющей;

M_v — амплитуда гармонической составляющей;

φ_v — фазовый угол гармонической составляющей.

Здесь

$$\Omega = \frac{\pi n}{30},$$

где n — число оборотов вала в минуту;

$$v = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{N}{n},$$

где ω и N — соответственно частота и число колебаний в минуту данной гармонической составляющей. В четырехтактных двигателях основной период колебаний соответствует двум оборотам вала, что приводит для принятого выше определения v к появлению $1/2, 1 1/2, 2 1/2$ и т. д. порядков. В некоторых работах порядки гармонических составляющих выражаются по отношению к основному периоду и, таким образом, обозначаются только целыми числами.

На фиг. 50 показаны результаты подобного разложения для четырехтактного двигателя внутреннего сгорания. Необходимо отметить, что для правильного нахождения высших гармоник, которые бывают нужны в расчете амплитуд, желательно подразделять диаграмму тангенциальных сил на 96 участков.

Ниже приведены данные гармонического анализа для различных типов двигателей. При этом значения амплитуд гармонических составляющих выражены либо через гармонические коэффициенты C_v , представляющие давления на 1 см² поверхности поршня, либо в процентах c_v от среднего индикаторного давления p_i . Таким образом

$$M_{(v)} = C_v \frac{\pi D^2}{4} \cdot R = \frac{c_v p_i}{100} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot R \text{ кгсм}, \quad (65)$$

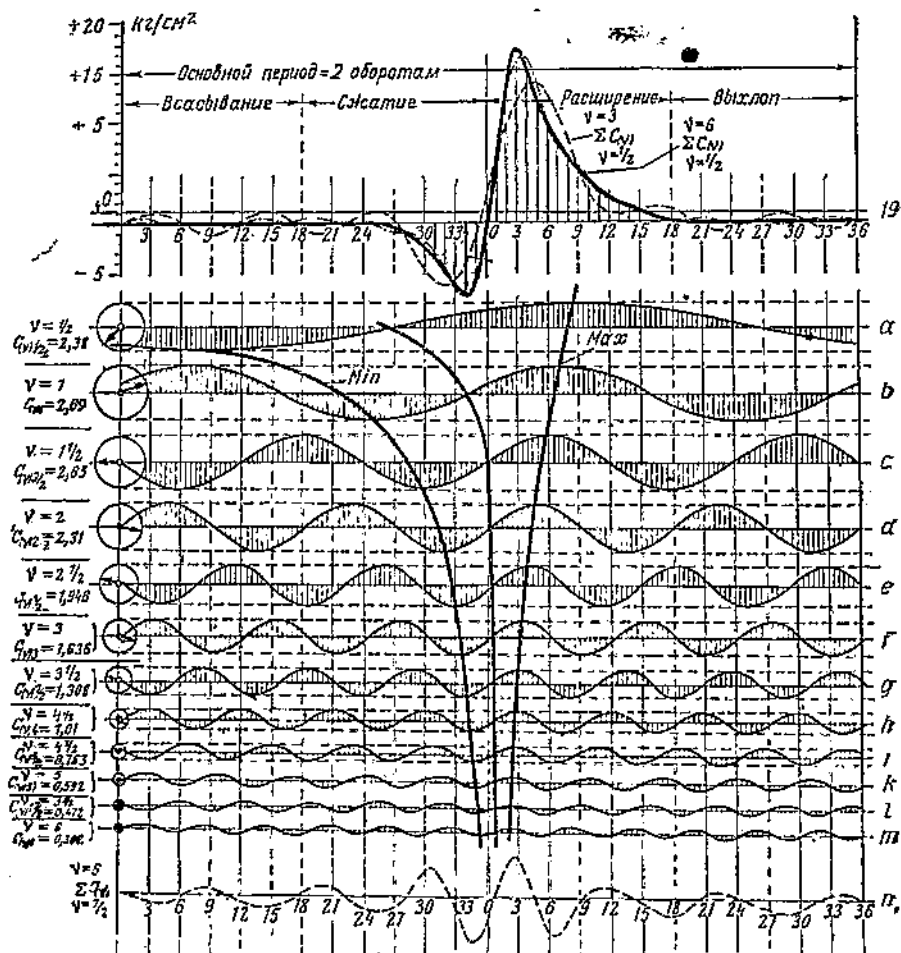
где D — диаметр поршня, см;

R — радиус кривошипа, см.

В каждом отдельном случае определения амплитуд крутильных колебаний необходимо учитывать зависимость значений p_i , а следовательно, и значений C_v , от изменения числа оборотов двигателя.

Для авиационных и судовых установок с гребными винтами будет например, существовать отношение

$$\frac{p_{i1}}{p_{i2}} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (66)$$



Фиг. 50. Разложение кривой тангенциальных сил на гармонические составляющие для цилиндра четырехтактного двигателя внутреннего сгорания.

На фиг. 51 и в табл. 5 для рядного авиамотора даны значения c_v в $\%$ для гармонических различных порядков. Соответствующие им фазовые углы φ_v также даны в таблице наряду со значениями составляющих гармонических коэффициентов a_v и b_v , где

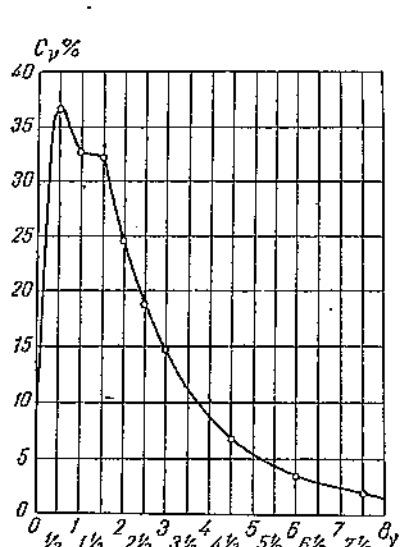
$$c_v \sin(v\Omega t + \varphi_v) = a_v \cos v\Omega t + b_v \sin v\Omega t.$$

Приведенные данные для авиамотора следует рассматривать лишь как ориентировочные. Определению гармонического состава возбуждающих моментов от сил давления газов в авиамоторах посвящена работа

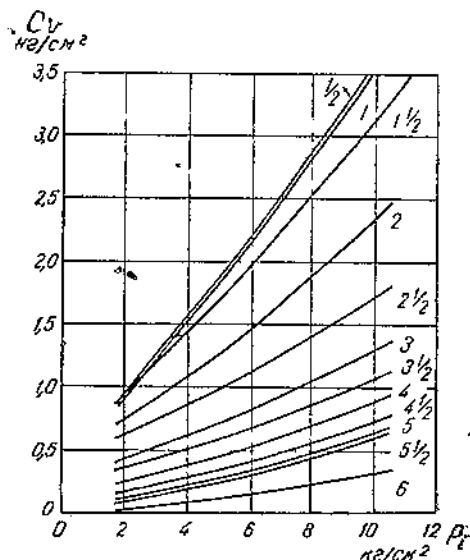
Таблица 5

γ	c_v %	φ	a_v %	b_v %
0,5	36,6	235°25'	15,0	29,0
1	32,6	27°20'		
1,5	32,2	182°30'		
2	24,5	353°20'	-2,82	24,3
2,5	18,8	165°35'		
3	14,8	342°00'	-4,58	14,1
4,5	6,76	141°15'		
6	3,53	312°15'	-2,62	2,38
7,5	1,98	123°40'		

И. Ш. Неймана [32], в которой показана возможность определения гармонических коэффициентов до 9-го порядка в зависимости от степени сжатия, отношения радиуса кривошипа к радиусу шатуна, давления конца сжатия и давления вспышки.



Фиг. 51. Значения гармонических коэффициентов сил давления газов (в %) для рядного авиадвигателя BMW-6 A.



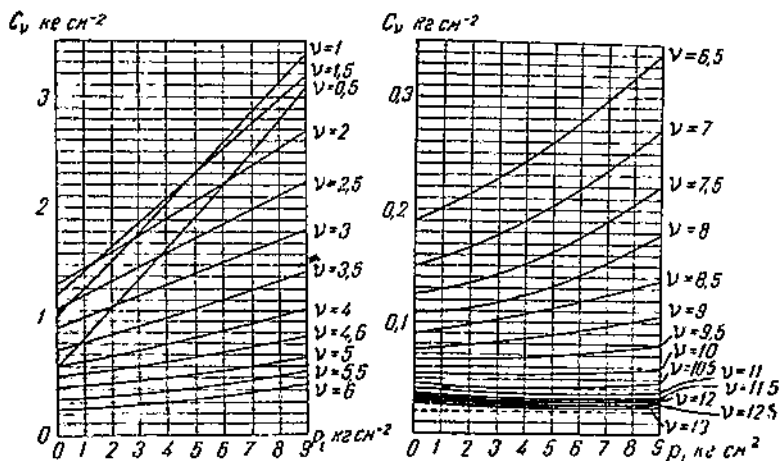
Фиг. 52. Значения гармонических коэффициентов сил давления газов в кг/см^2 в зависимости от среднего индикаторного давления p_i кг/см^2 для четырехтактного бензинового двигателя [37].

На фиг. 52 дана (по данным Кер-Вильсона) зависимость гармонических коэффициентов C_v кг/см^2 от среднего индикаторного давления для бензинового четырехтактного двигателя простого действия.

В табл. 6 для того же двигателя даны значения c_v^0 , φ_v , а также значения составляющих гармонических коэффициентов a_v^0 и b_v^0 . Последние, как и в предыдущем случае, приведены лишь для тех гармонических, для которых необходимо учитывать также составляющую от сил инерции.

ν	c_ν %	φ_ν	a_ν %	b_ν %
0,5	35,7	51°7'		
1	36,4	19°19'	12,0	34,2
1,5	32,2	356°47'		
2	23,8	345°58'	-5,76	23,1
2,5	17,5	335°46'		
3	13,2	331°56'	-6,18	11,6
3,5	10,8	321°6'		
4	8,7	307°28'	-6,92	5,3
4,5	7,10	296°27'		
5	6,16	288°33'	-5,84	1,96
5,5	5,60	282°14'		
6	3,035	287°43'	-2,89	0,92

На фиг. 53 дана зависимость $C_\nu = f(p_i)$ для дизелей по данным Терских, а на фиг. 54 — та же зависимость по данным Льюнса.



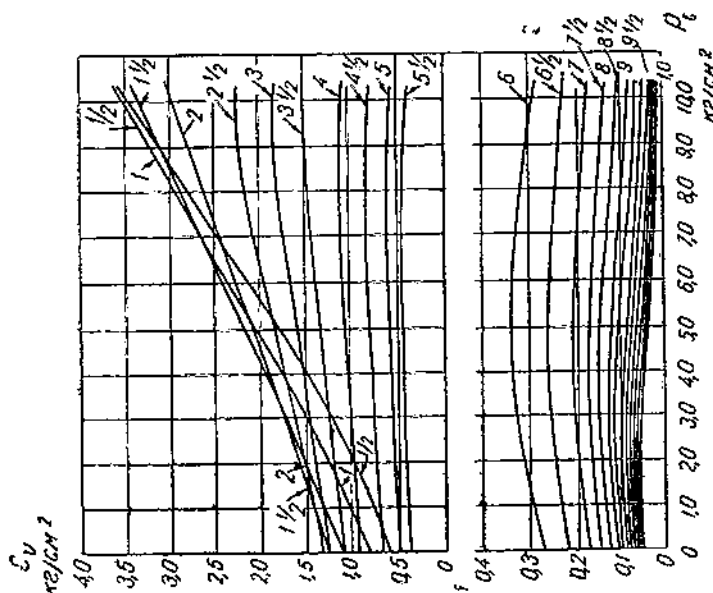
Фиг. 53. Значения гармонических коэффициентов сил давления газов в кг/см^2 в зависимости от среднего индикаторного давления p_i кг/см^2 для дизелей по Терских [21].

На фиг. 55 дан график, позволяющий определять для дизелей в зависимости от p_i , значения составляющих гармонических коэффициентов A_ν и B_ν , выраженных в кг/см^2 .

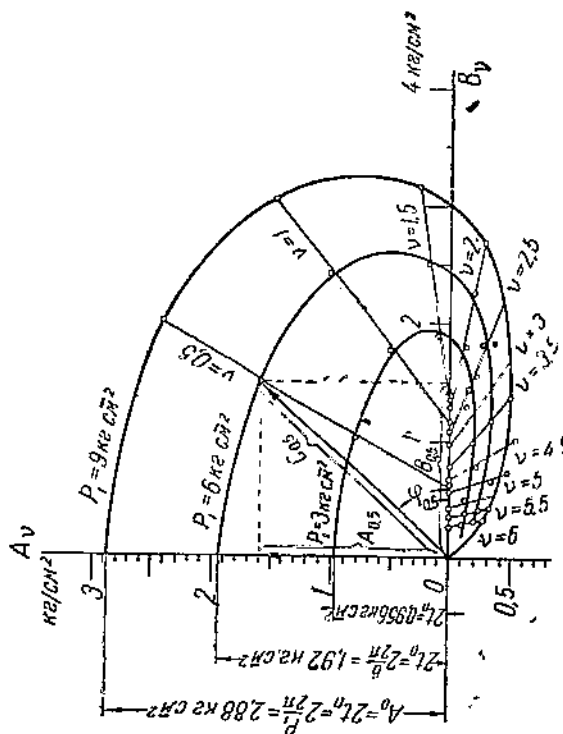
В дополнение к сказанному приводим (табл. 7) значения гармонических коэффициентов в процентах от среднего индикаторного давления при полной нагрузке, которые могут быть приняты для различных типов двигателей при отсутствии данных гармонического анализа. Следует отметить, что для паровой машины тройного расширения здесь принято соотношение давлений $1:1/3:1/9$.

Гармонические крутящие моменты от сил инерции поступательно движущихся масс

$$M_{(n)} = T_\nu (m R^2 \Omega^2) \text{ кгсм}, \quad (67)$$



Фиг. 54. Значения гармонических коэффициентов сия давления газов в кг/см^2 в зависимости от среднего индикаторного давления по Льюису [37].



фиг. 55. Векторная диаграмма составляющих гармонических коэффициентов сил давления газов для дизеля по Терских [21]. Начальные фазы векторов приняты по отношению к в. м. т. при процессе расширения. Вращение векторов против часовой стрелки. На диаграмме в качестве примера показано нахождение гармонической составляющей $v = \frac{1}{2}$ при $p_i = 6 \text{ кг/см}^2$.

где T , — гармонический коэффициент от сил инерции;
 m — масса возвратно движущихся частей, т. е. поршня и части шатуна, в соответствии с § 1, кгсек²/см⁻¹;
 R — радиус кривошипа, см;
 Ω — угловая скорость вращения вала, сек⁻¹.

Таблица 7

Порядок гармонической составляющей	Двигатели внутреннего сгорания					Паровые машины тройного расширения		
	четырехтактные		двухтактные			цилиндр высокого давления	цилиндр среднего давления	цилиндр низкого давления
	простого действия	двойного действия	простого действия		двойного действия			
			однопоршневые	с оппозитными поршнями				
0,5	± 40	± 55	—	—	—	—	—	—
1	40	6	± 80	± 160	± 12	± 15	± 5	± 1,5
1,5	40	55	—	—	—	—	—	—
2	35	70	70	140	140	75	25	7,5
2,5	30	40	—	—	—	—	—	—
3	25	10	50	100	20	12	4	1,3
3,5	20	25	—	—	—	—	—	—
4	15	30	30	60	60	9	3	1,0
4,5	10	15	—	—	—	—	—	—
5	8	7	16	32	14	4	1,3	0,4
5,5	6	9	—	—	—	—	—	—
6	4,5	9	9	18	18	3	1,0	0,3
6,5	3,5	5,2	—	—	—	—	—	—
7	3,0	2,0	6	12	4	1,5	0,5	0,15
7,5	2,5	3,7	—	—	—	—	—	—
8	2,0	4,0	4	8	8	1,0	0,3	0,10
8,5	1,5	2,2	—	—	—	—	—	—
9	1,0	1,0	2	4	2	—	—	—
9,5	0,8	1,2	—	—	—	—	—	—
10	0,7	1,4	1,4	2,8	2,8	—	—	—
10,5	0,6	0,9	—	—	—	—	—	—
11	0,5	0,5	1,0	2,0	1,0	—	—	—
11,5	0,4	0,6	—	—	—	—	—	—
12	0,3	0,6	1,2	1,2	—	—	—	—

Основной период периодического крутящего момента от сил инерции соответствует одному обороту вала. Следовательно, составляющие от сил инерции будут содержаться лишь в гармонических тех порядков, которые выражаются целыми числами.

При расчете достаточно учитывать гармонические 1-го, 2-го, 3-го и 4-го порядков, причем суммарный момент от сил инерции выражается лишь через синусные составляющие.

Таким образом

$$M_{(T)} = M_{(T)1} \sin \Omega t + M_{(T)2} \sin 2\Omega t + M_{(T)3} \sin 3\Omega t + \\ + M_{(T)4} \sin 4\Omega t. \quad (68)$$

Значения гармонических коэффициентов следующие:

$$T_1 = 0,25 \frac{R}{L}; \quad (69a)$$

$$T_2 = -0,50; \quad (69б)$$

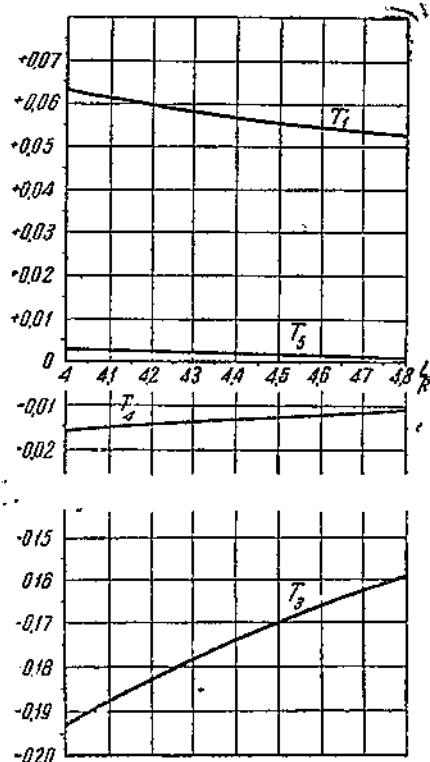
$$T_3 = -0,75 \frac{R}{L}; \quad (69в)$$

$$T_4 = -0,25 \left(\frac{R}{L}\right)^2, \quad (69г)$$

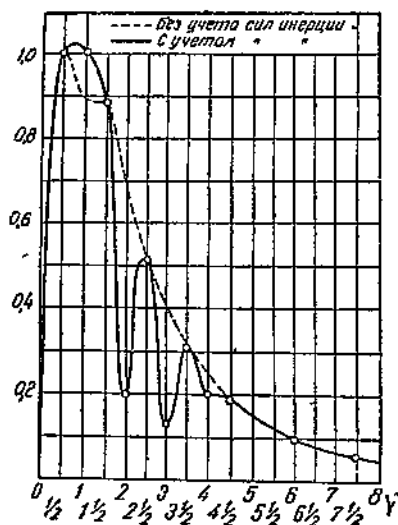
где R — радиус кривошипа, см;
 L — длина шатуна, см.

Для разных значений отношения $\frac{L}{R}$ гармонические коэффициенты могут быть определены по фиг. 56.

Гармонические крутящие моменты от сил инерции поступательно движущихся масс геометрически складываются с моментами от сил давления



Фиг. 56. Значения гармонических коэффициентов от сил инерции [21].



Фиг. 57. Относительные величины суммарных гармонических моментов различных порядков для авиамотора BMW-6A. За единицу принят суммарный гармонический момент 1,2-го порядка.

газов соответствующих порядков. Последние при этом удобно выражать при помощи составляющих a_v и b_v , т. е. через косинусные и синусные компоненты (обозначения см. выше):

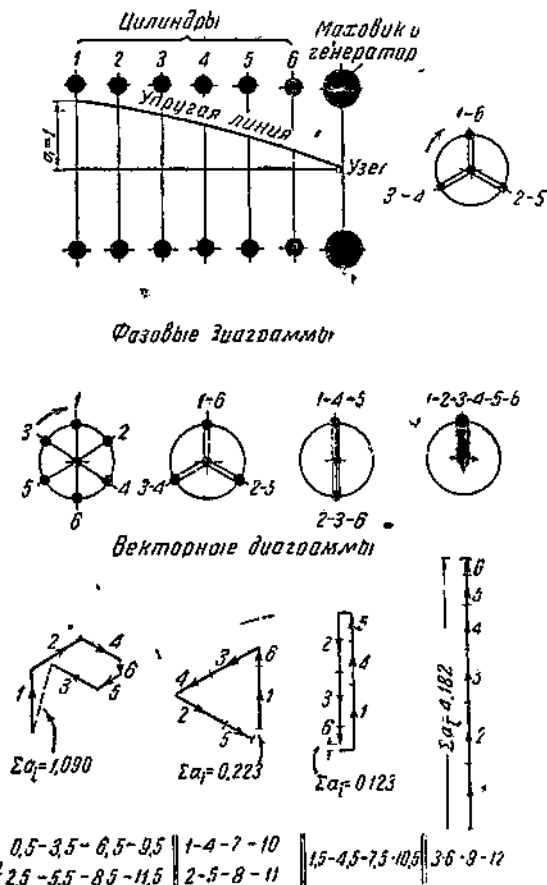
$$M_{(a)v} = \frac{a_v p_1}{100} \cdot \frac{\pi D^3}{4} R \text{ кгсм}; \quad (70a)$$

$$M_{(b)v} = \frac{b_v p_1}{100} \cdot \frac{\pi D^3}{4} R \text{ кгсм}. \quad (70б)$$

Гармонические моменты $M_{(7)}$, совпадают по фазе с составляющими $M_{(6)}$.

На фиг. 57 в относительных величинах даны результаты такого сложения для рядного авиадвигателя, составляющие сил давления газов которого даны на фиг. 51.

При учете совместного действия нескольких однотипных цилиндров моменты одинакового порядка, приложенные к разным цилиндрам, чаще всего принимаются равными между собой.



Фиг. 58. Фазовые и векторные диаграммы для системы шестичилиндрового четырехтактного двигателя. Порядок вспышек: 1—3—5—6—4—2.

Сдвиг фаз между гармоническими одного и того же порядка в разных цилиндрах двигателя внутреннего сгорания определяется путем построения фазовых диаграмм. Вид фазовых диаграмм существенно зависит от порядка чередования вспышек.

Рассмотрим построение фазовых диаграмм на примере дизельгенераторной установки, имеющей шестиколенный вал (фиг. 58), у которого соответственно совпадают направления кривошипов 1-го и 6-го, 3-го и 4-го, 2-го, 5-го цилиндров.

Для фазовой диаграммы гармонических 1-го порядка расположение векторов, представляющих собой амплитуды моментов, совпадает с расположением кривошипов. Такой же вид будут иметь здесь фазовые диаграммы для гармонических моментов порядков 4, 7, 10, . . . , $1 + 3i$ и для порядков 2, 5, 8, . . . , $2 + 3i$ (но при обратном чередовании векторов, так как $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ = -120^\circ$).

Для половинной гармоники с периодом в два оборота вала сдвигу фаз между вспышками в данном случае соответствует угол $120^\circ \cdot \frac{1}{2} = 60^\circ$; подобные же фазовые диаграммы получим для гармонических порядков $3\frac{1}{2}$; $6\frac{1}{2}$; $9\frac{1}{2}$, . . . , а также для порядков $2\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{2}$; $8\frac{1}{2}$; $11\frac{1}{2}$, . . . Как видно из фиг. 59, порядок чередования вспышек имеет при этом существенное значение.

Для гармоник порядков $1\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}$, . . . векторы располагаются под углом $120^\circ \cdot 1\frac{1}{2} = 180^\circ$. Из фиг. 59 видно, как в зависимости от изменения порядка чередования вспышек меняется направление отдельных векторов.

Для порядков, равных и кратных трем, сдвиг фаз между вспышками соответствует углам, равным или кратным $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, т. е. все векторы совпадают.

Гармонические порядков, для которых векторы всех цилиндров совпадают, называются сильными, или мажорными; остальные гармонические носят название слабых, или минорных.

В звездообразных моторах с одним кривошипом гармонические одного порядка для различных цилиндров могут быть заменены равнодействующей, причем минорные гармонические взаимно ослабляются или уничтожаются.

В рядных моторах гармонические моменты приложены в разных точках вала, имеющих различные амплитуды колебаний.

Для подобных случаев при расчете амплитуд колебаний необходимо определение величины $\Sigma \bar{M}_i a_i$ по Льюису, где $\bar{M}_i$ — вектор гармонического момента рассматриваемого порядка, приложенного к i -й массе, a_i — относительная амплитуда колебаний i -й массы.

Относительные амплитуды принимают в соответствии с § 5, исходя из предположения, что формы упругой линии вынужденных и свободных колебаний совпадают. Амплитуда колебаний для первой массы принимается равной единице.

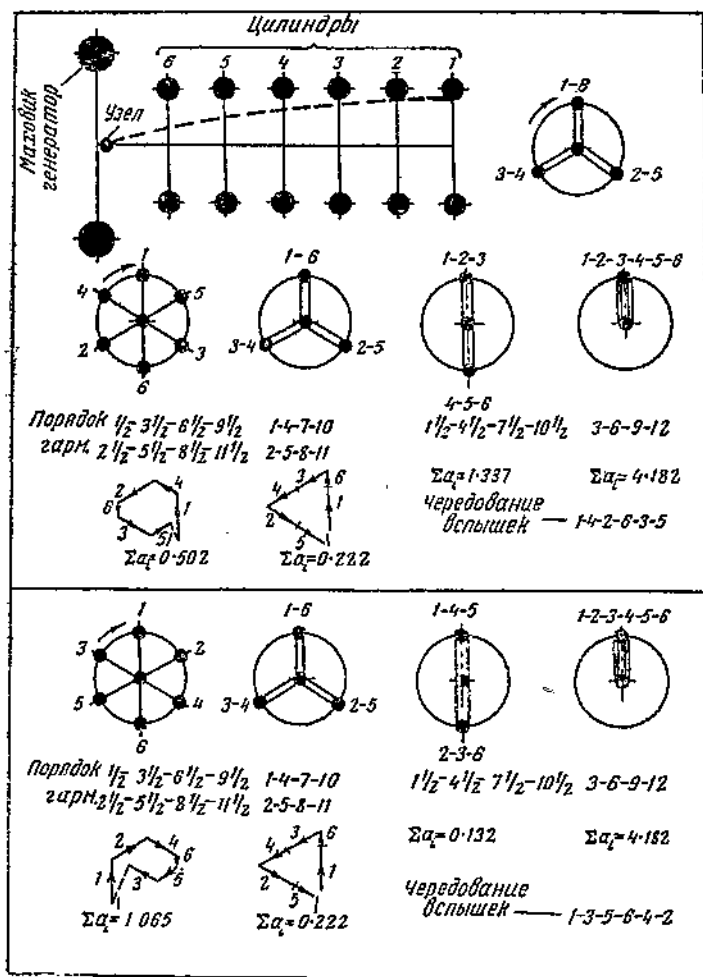
Для рядных моторов с однотипными цилиндрами геометрическая сумма $\Sigma \bar{M}_i a_i = M_i \Sigma \bar{a}_i$, где $\bar{a}_i$ — векторы, равные по величине относительным амплитудам упругой линии закрутки вала и совпадающие по направлению с приложенными в данных точках векторами моментов. Геометрическая сумма $\Sigma \bar{a}_i$ определяется, как показано для примеров шестиколennого вала на фиг. 58 и 59, путем построения многоугольника векторов.

Как видно из фиг. 59, изменение порядка чередования вспышек для ряда минорных гармонических влечет за собой значительное изменение $\Sigma \bar{a}_i$.

Необходимо также учитывать возможное расхождение значений моментов для отдельных цилиндров, что особенно существенно при расчете слабых гармонических. В некоторых случаях оно может, например, достигать 5% для стационарных дизелей и 20% для авиационных двигателей. В компрессорах сильное влияние на режим возбуждающих моментов оказывает регулировка производительности, в особенности отключение отдельных цилиндров.

В судовых установках периодический возбуждающий момент может создаваться также гребным винтом, вследствие прохождения лопастей

вблизи руля или других устройств, искажающих поле давлений вокруг лопасти. По данным [4] периодическое изменение крутящего момента винта составляет величину порядка 7,5% от полного значения момента, что делает актуальным расчет крутильных колебаний и для судовых установок с турбинным приводом. Аналогичными источниками возбуждения могут явиться и некоторые воздухоудные устройства.



а — для дизельгенераторной установки.
Фиг. 59а, б. Влияние порядка чередования вспышек на вид векторных

§ 8. Определение амплитуд вынужденных колебаний

Для системы с одной степенью свободы амплитуда вынужденных крутильных колебаний определяется по формуле

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2}} = \lambda A_0, \quad (71)$$

Вводим понятие об „амплитуде равновесия“, аналогичной статической деформации одномассовой системы и представляющей закрутку для точки, относительная амплитуда которой принята равной единице, т. е. обычно для свободного конца вала двигателя

$$A_0 = \frac{\sum \bar{M}_i a_i}{\omega_r^2 \sum \theta_i a_i^2} \quad (72)$$

Для рядных моторов

$$A_0 = \frac{M_r \sum \bar{a}_i}{\omega_r^2 \sum \theta_i a_i^2} \quad (73)$$

где M_r — амплитуда у гармонической возбуждающего момента для одного колена рядного двигателя;

$\sum \bar{a}_i$ — векториальная сумма относительных амплитуд, определяемая в соответствии с изложенным в § 7;

$\sum \theta_i a_i^2$ — эффективный момент инерции системы, отнесенный к свободному концу вала двигателя, представляющий произведение моментов инерции масс на квадраты относительных амплитуд, определенные в соответствии с изложенным в § 5.

Форму вынужденных колебаний принимаем совпадающей с формой свободных колебаний. Амплитуда свободного конца вала при вынужденных колебаниях определяется по формуле (71), в которую подставляется значение A_0 из формул (72) и (73).

При этом коэффициент усиления λ для зоны, далекой от резонанса ($\frac{\omega}{\omega_r} < 0,75$ и $\frac{\omega}{\omega_r} > 1,25$), может приниматься равным

$$\lambda = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2} \quad (74)$$

Для резонансных колебаний

$$\lambda_r = \frac{1}{\gamma} = \frac{\omega_r \sum \theta_i a_i^2}{\sum S_d a_d^2} \quad (75)$$

где, кроме ранее встречавшихся обозначений, S_d — демпфирующие моменты, приложенные к элементам системы, отнесенные к единице угловой скорости, кгсмсек;

a_d — относительные амплитуды точек приложения демпфирующих моментов.

Если демпфирующие моменты отнесены к коленам рядного двигателя и приняты равными, то

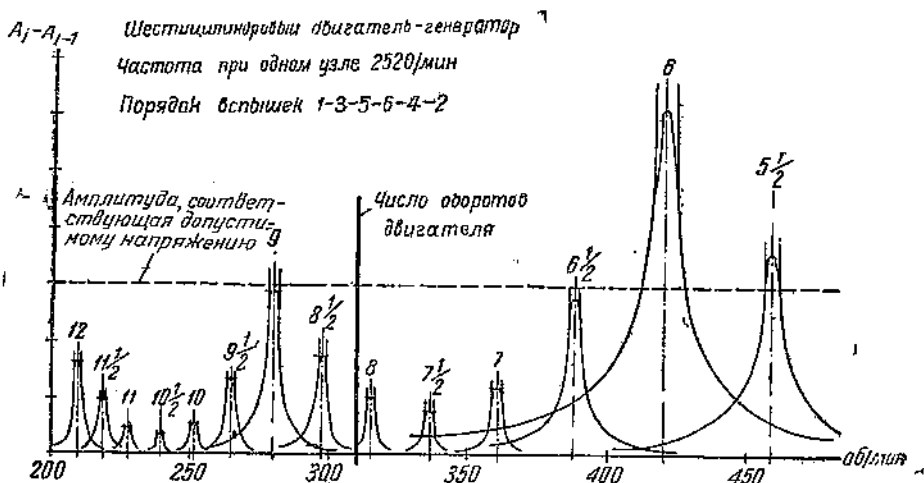
$$\sum S_d a_d^2 = S_d \sum a_d^2,$$

где a_d — относительные амплитуды для всех колен.

Действительная амплитуда резонансных колебаний, соответствующая единичной относительной амплитуде упругой линии закрутки вала,

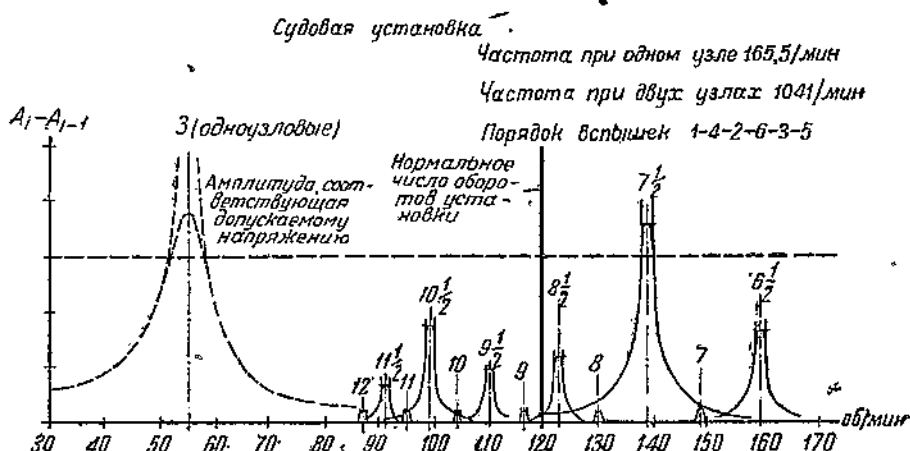
$$A_1 = \lambda_r A_0 = \frac{\omega_r \sum \theta_i a_i^2}{\sum S_d a_d^2} \cdot \frac{\sum \bar{M}_i a_i}{\omega_r^2 \sum \theta_i a_i^2} = \frac{\sum \bar{M}_i a_i}{\omega_r \sum S_d a_d^2} \quad (76)$$

В § 9 для различных случаев указаны способы определения демпфирующих моментов, по которым можно найти коэффициенты усиления в соответствии с формулой (75).



Фиг. 60. Запретные зоны установки двигатель—генератор.

На основании коэффициентов усиления можно, применив формулы данного параграфа и зная форму (т. е. относительные ординаты) упругой линии валопровода, построить графики абсолютных амплитуд закрутки наиболее напряженного участка валопровода или максимальных напряжений в этом участке.



Фиг. 61. Запретные зоны судовой установки.

— Подобные графики даны на фиг. 60 и 61. По оси абсцисс отложены числа оборотов установки в минуту, а по оси ординат — значения абсолютных углов закрутки $A_i - A_{i-1}$ для наиболее напряженного участка валопровода ($i-1$), i . На вертикальных осях указаны порядки гармоник

ческих, попадающих в резонанс при данном числе оборотов, называемом „критическим“. Если провести горизонталь, соответствующую амплитуде закрутки для допустимого напряжения, то на пересечении с кривыми амплитуд получим пределы оборотов, в которых будут появляться недопустимые напряжения в материале. Определенные таким образом пределы оборотов позволяют оценить „запретные зоны“ чисел оборотов.

Необходимо отметить, что расчетные методы определения действительных величин ординат упругой линии закрутки вала и напряжений в нем являются весьма ориентировочными как вследствие неизученности вопроса об определении затуханий в элементах системы, так и вследствие наличия в расчетах ряда упрощающих допущений. Применение их полезно в качестве предварительных расчетов и дает возможность правильно оценить относительный эффект отдельных гармонических в связи с гармоническим составом возбуждающих моментов.

Значительно надежнее изложенные выше методы определения круговых частот собственных колебаний системы и форм упругой линии закрутки валопровода.

Для достоверного определения действительных ординат упругой линии закрутки вала и напряжений в нем следует базироваться на данных торсиографирования установки.

Предварительно по методу Толле производится определение частот собственных крутильных колебаний и относительных ординат упругих линий закрутки вала, соответствующих критическим, находящимся в пределах интересующей нас зоны чисел оборотов. Обычно бывает необходимо определить лишь одно-, двух- и трехузловые формы.

Затем по соотношению абсолютной и относительной амплитуды в месте торсиографирования производится перерасчет всех относительных ординат упругой линии закрутки вала. При этом желательно иметь возможность проверить полученную расчетным путем форму упругой линии, для чего торсиографирование следует производить по крайней мере в двух точках системы. Кроме того, необходимо обратить серьезное внимание на выбор мест торсиографирования, по возможности избегая участков системы, для которых форма упругой линии при расчете по Толле будет менее достоверной и устойчивой.

§ 9. Демпфирование крутильных колебаний

Заглушающие сопротивления в элементах рассматриваемых систем являются следствием самых различных причин и подчиняются самым разнообразным, еще мало изученным закономерностям. Таким образом, в настоящее время может идти речь лишь о весьма приближенном учете сопротивлений, причем имеются два пути: 1) пользование коэффициентами демпфирования, суммарно учитывающими потери в системе; 2) выявление основных видов потерь, характерных для системы при данной форме колебания.

Приводимые ниже значения коэффициентов, суммарно учитывающих затухание для двигателей, определенные в предположении, что сопротивление пропорционально скорости, значительно различаются между собой.

Действительно:

По Гольеру для дизелей 550—3000 л. с.	0,0136—0,008
По Видлеру " " 550—3000 л. с.	0,0079—0,0048
По Гейгеру для 30 двигателей (двух- и четырехтактных простого и двойного действия, от 110—1500 об/мин, крейцкопфных и тронковых и т.п.)	0,015 —0,0015
По Штиглицу — авиамотор	0,0023
По Плюнке — мотор автомобильный	0,0025

Приведенные коэффициенты выражены в $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{\text{см/сек}}$ и равны силе заглушающих сопротивлений, приложенной к кривошипу и отнесенной к 1 см² поверхности поршня и единичной скорости цапфы кривошипа.

Чтобы перейти от приведенных выше коэффициентов к демпфирующим моментам, отнесенным к цилиндрам рядного мотора S_d , которые входят в формулу (75), необходимо эти коэффициенты умножить на площадь поршня и квадрат радиуса кривошипа.

Приведенные данные заставляют в основном предпочитать второй путь, прибегая к первому лишь в тех случаях, когда в системе отсутствуют достаточно ясно выраженные основные виды потерь, поддающиеся расчету. При этом суммарные коэффициенты в каждом случае должны определяться по опытным данным для систем, сходных по конструкции и форме упругой линии.

В табл. 8 для тяжелых двигателей приведено примерное распределение относительных величин различных потерь в резонансе по опытам Гейгера.

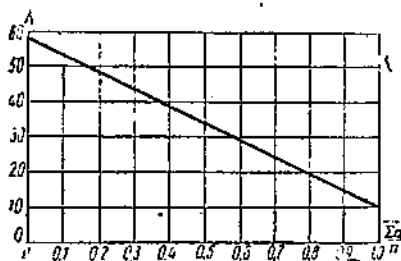
Таблица 8
Относительные величины различных видов потерь в резонансе в процентах

Наименование потерь	Восьмицилиндровый двойного действия, двухтактный		Восьмицилиндровый простого действия, четырехтактный	
	Порядок гармонической		Порядок гармонической	
	4-й	8-й	4-й	8-й
Кажущееся демпфирование (влияние переменности масс)	5,4	19,0	7,4	19,8
Трение в направляющих крейцкопфа	1,7	8,4	3,1	9,8
" в цапфах крейцкопфа	0,07	1,0	0,2	0,7
" в мотылевой шейке	1,9	14,2	1,8	8,3
" в коренной шейке	1,4	7,1	2,0	9,1
Добавочное трение в цапфах от перекоса, вызванного изгибом колена	0,2	1,2	~ 2,0	8,0
Удары в цапфах	1,4	5,7	1,0	2,8
Удары в направляющих крейцкопфа	0,5	6,0	2,5	24,0
Трение о воздух	0,01	0,03	~ 0	~ 0
Внутреннее трение вала (гистерезис)	62,0	35,3	~ 64,0	~ 16,0
Внутреннее трение в шатунном механизме	~ 6,0	~ 2,0	~ 5,0	~ 1,5
Внутреннее трение в станине	~ 6,0	~ 2,0	~ 5,0	~ 1,5
Итого	~ 86,5	~ 102,0	~ 94,0	~ 101,0

Различие в балансах потерь для гармонических 4-го и 8-го порядков происходит здесь вследствие того, что в первом случае получаются значительно большие амплитуды колебаний и напряжения в материале, чем во втором. Ограничение больших амплитуд колебаний происходит в основном за счет потерь внутреннего трения в материале валопровода, достигающих 62—64% в общем балансе потерь. Следовательно, для решения интересующего нас вопроса о том, возникают ли в системе опасные величины напряжений, для тяжелых двигателей можно принимать во внимание лишь потери внутреннего трения. Недоучет остальных видов потерь приводит к некоторому увеличению запасов прочности. Наиболее преувеличенными будут амплитуды малых колебаний.

Исходя из сказанного выше, например, для случаев одноузловых колебаний системы двигатель — генератор, двухузловых колебаний системы двигатель — гребной вал — винт и т. д., обычно в расчете принимают во внимание лишь потери внутреннего трения.

Для легких двигателей с малым объемом валопровода потери на гистерезис невелики. С другой стороны, существенное влияние оказывают остальные виды потерь — эксплуатационное состояние мотора, смазка, предшествовавшая переборке мотора, и т. п. Учитывая также, что область применения легких двигателей значительно более специализирована, чем область применения тяже-



Фиг. 62. Коэффициенты усиления по Шеннону.

лых, здесь уместно ориентироваться на первый из указанных выше путей.

По Шеннону, в двигателях энергия при колебаниях рассеивается главным образом в масляном слое шеек кривошипов и коренных подшипников. Затухание зависит от формы упругой линии, причем суммарный коэффициент усиления при резонансе может быть определен из фиг. 62 как функция от среднего значения относительных амплитуд цилиндров двигателя $\Sigma a/n$, где Σa — алгебраическая сумма относительных амплитуд отдельных цилиндров с учетом знаков, а n — количество цилиндров двигателя. При построении зависимости для суммарных коэффициентов Шеннон обработал большое количество опытных данных из работ различных авторов для различных типов двигателей. Потери на внутреннее трение в материале валопровода в исследованных им случаях были незначительны.

Таким образом, если расчет, произведенный на основе потерь внутреннего трения, привел бы к очень большому значению коэффициента усиления, то это означало бы, что гистерезисные потери в данном случае малы по сравнению с другими видами потерь, и при отсутствии более точных данных для сходных систем здесь целесообразнее воспользоваться данными Шеннона.

Приводим вероятные пределы для коэффициентов усиления λ разных типов двигателей, выведенные нами на основании сводки опытов различных авторов, которая приведена в работе Шеннона (табл. 9).

В ряде случаев основным видом потерь в системе являются потери, сосредоточенные в отдельных элементах системы, имеющих при данной

форме колебаний значительные амплитуды. Например, для одноузловых колебаний системы двигатель — гребной вал — винт основными потерями являются потери в гребном винте, имеющем при этом значительную амплитуду, тогда как при двухузловых колебаниях той же системы потерями в винте, имеющем малую амплитуду, можно пренебречь.

Таблица 9

Ниже приведены методы учета демпфирующего действия различных элементов системы.

Кажущееся демпфирование, приводящее к ограничению амплитуды колебаний вследствие неравномерности хода двигателя на протяжении одного оборота, учитывается по формуле Манси, согласно которой коэффициент усиления при резонансе

$$\lambda_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{2} + \gamma^2}}, \quad (77)$$

Тип двигателя	λ	Форма упругой линии
Легкие быстроходные двигатели внутреннего сгорания (авиационные и автомобильные)	10 ÷ 30	Узел колебаний — вне поршневой группы (фиг. 59, а)
Тяжелые двигатели внутреннего сгорания (стационарные и судовые)	20 ÷ 40	То же
То же	30 ÷ 70	Узел колебаний — в пределах поршневой группы (фиг. 59, б)
Паровые машины	10 ÷ 20	Узел колебаний — вне поршневой группы (фиг. 59, а)

где γ — коэффициент демпфирования;

δ — коэффициент неравномерности хода двигателя;

$\delta = \frac{\text{максимальная скорость} - \text{минимальная скорость}}{\text{средняя скорость}}$

В формуле (77), позволяющей определить общий коэффициент усиления с учетом неравномерности хода, γ представляет величину, обратную общему коэффициенту усиления без учета неравномерности хода — $1/\lambda_r$, найденному, например, по формулам (75), (83) или принятому по Шенону и т. д.

Для судовых установок, работающих обычно с $\delta = \frac{1}{25} \div \frac{1}{40}$, учет кажущегося демпфирования может существенно влиять на результаты расчета. Для установок с электрическими генераторами при малых степенях неравномерности $\delta = 1/180 \div 1/300$ поправка вследствие кажущегося демпфирования обычно незначительна.

Успокоительный эффект от механической или электрической нагрузки в общем случае можно вывести, представив зависимость между вращающим моментом и угловой скоростью в виде

$$M = c\Omega^z, \quad (78)$$

где c и z — приблизительно постоянные величины.

Тогда демпфирующий момент, отнесенный к единице угловой скорости, будет

$$S = \frac{dM}{d\Omega} = zc\Omega^{z-1} = \frac{zM}{\Omega} \text{ кгсм/сек.} \quad (79)$$

Если $z=1$, а $M=c\Omega$, то

$$S=c=\frac{M}{\Omega}=\frac{71\,620\cdot30}{\pi\cdot0,736}\cdot\frac{P_e}{n^2}\text{ кгсмсек} = 9,3\cdot10^5\frac{P_e}{n^2}\text{ кгсмсек}, \quad (79a)$$

где P_e — эффективная мощность на валу, *квт*;

n — число оборотов в минуту.

Если $z=2$ и $M=c\Omega^2$, что, например, может иметь место в центробежных вентиляторах и воздушодувках, то для малых колебаний скорости, возникающих при крутильных колебаниях, можно принять демпфирующий момент, отнесенный к единице угловой скорости, приблизительно постоянным и равным

$$S=2\cdot9,3\cdot10^5\frac{P_e}{n^2}\text{ кгсмсек}. \quad (79б)$$

Для гребных винтов при малых колебаниях и постоянной скорости судна можно в грузовых судах принимать по Кер-Вильсону:

$$z=3,5; M=c\Omega^{3,5}; S=3,5\cdot9,3\cdot10^5\frac{P_e}{n^2}\text{ кгсмсек}. \quad (79a)$$

Другие авторы [4] указывают для гребных винтов $z=2-3$, причем полученный по формуле (79) демпфирующий момент должен быть удвоен вследствие различия характеристики (78) для работы винта при постоянной скорости и при колебаниях.

Для синхронной машины, снабженной успокоительной клеткой и работающей параллельно с сетью, демпфирующий момент при заскальзывании на 1 рад/сек, т. е. отнесенный к единице угловой скорости, составляет

$$S=9,3\cdot\frac{100}{5}\cdot10^5 m_f \frac{P_e}{n^2}\text{ кгсмсек}, \quad (80)$$

где P_e — эффективная мощность на валу, *квт*;

n — число оборотов в минуту;

m_f — отношение входного момента (при скольжении $5^0_{,0}$) к эффективному. При нормальном выполнении клетки m_f может быть принято равным 0,65.

Коэффициент демпфирования для генератора постоянного тока, работающего на внешнюю нагрузку, равен

$$S=9,3\cdot10^5\frac{P_e}{n^2}\cdot\frac{E}{(E-E_c)}\text{ кгсмсек}, \quad (81)$$

где E — э. д. с. генератора в вольтах;

E_c — противо-э. д. с. приемников, например моторов или аккумуляторной батареи, в вольтах;

$E-E_c$ — потеря напряжения в активном сопротивлении цепи генератора (если генератор работает только на осветительную нагрузку, $E_c=0$).

Формула (81) применима и к генератору переменного тока, работающему отдельно на внешнее сопротивление, т. е. при отсутствии параллельной работы.

Потери внутреннего трения в материале валопровода подчиняются весьма сложным закономерностям, использование которых при расчете амплитуд чрезвычайно затруднительно.

С точки зрения простоты расчета было бы удобно получить зависимость, приводящую к решению линейного дифференциального уравнения.

т. е. при которой сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости. Однако, так как потери на гистерезис за один период не зависят от частоты колебаний, т. е. от скорости деформации, а являются функцией амплитуды деформации или соответствующего ей напряжения в материале, точный учет затухания приводит к нелинейным уравнениям.

При вынужденных колебаниях с небольшим затуханием применим приведенный ниже приближенный способ расчета, позволяющий обойти трудности, связанные с необходимостью решения нелинейных дифференциальных уравнений. При расчете пользуемся расчетной схемой Кер-Вильсона. Демпфирующий момент определяется аналогично методу Льюнса, исходя из расчета работы внутренних потерь в материале валопровода, на основании опытов Дори.

Расчет резонансных амплитуд по схеме Кер-Вильсона производится следующим образом.

Определяется так называемое „напряжение равновесия“:

$$\tau_0 = \frac{C_{i(i+1)}(a_{i+1} - a_i) A_0}{\frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \frac{\delta^4}{d^4}\right)} \text{ кг/см}^2, \quad (82)$$

где $C_{i(i+1)}(a_{i+1} - a_i)$ — упругий момент, соответствующий узловому участку упругой линии закрутки вала;

$i(i+1)$ — находится по табл. 4 расчета по Толле (§ 5);

A_0 — амплитуда равновесия [формулы (72) и (73)];

d — внешний диаметр вала, см;

δ — диаметр сверления для полого вала, см.

Коэффициент усиления при резонансе

Таблица 10.

$$\lambda_r = \frac{k}{\sqrt{\tau_0}}, \quad (83)$$

где k — коэффициент, характеризующий свойства материала, значения которого даны в табл. 10.

Напряжение в материале узлового участка валопровода

$$\tau = \lambda_r \tau_0 = k \sqrt{\tau_0} \text{ кг/см}^2. \quad (84)$$

Сорт стали	Временное сопротивление кг/см ²	$\tau_{кр}$ кг/см ²	k
Углеродистая, C = 0,21%, C = 0,30%	4700 5800	950 1100	200 290
Никелевая, Ni = 3%, Хромоникелевая, Ni = 3,42%, Cr = 0,85%	7400 9450	1850 2300	330 560
Хромованадиевая, Cr = 1,38%, V = 0,17%	8500	1750	720

Для пользования значениями k из табл. 10 необходимо, чтобы значения τ были меньше приведенных в ней значений $\tau_{кр}$.

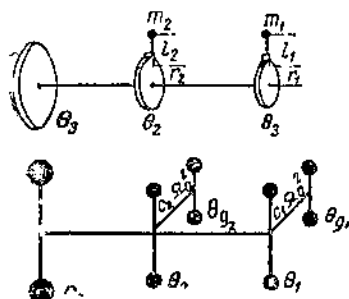
В § 2 гл. I были отмечены основные принципы устранения или ослабления вибрации. Укажем на некоторые особенности применения их к крутильным колебаниям, в связи с тем, что последние обычно накладываются на вращательное движение вала.

Введение дополнительного демпфирования производится следующим образом. Вместе с основной системой вращается маховик, увлекаемый в движение лишь силами трения, иногда в сочетании с весьма слабыми пружинами. В установившемся режиме маховик будет вращаться равно-

мерно, и если основная система вследствие крутильных колебаний вращается неравномерно, то между ней и маховиком возникают силы сопротивления, создающие демпфирование. Подобный демпфер крутильных колебаний, использующий сухое трение, предложен фирмой Ланчестер. Фирмой Юнкерс применяется демпфер вязкого трения, в котором тот же эффект создается благодаря продавливанию масла из одной полости в другую, через отверстия в лопатках.

Из мероприятий, приводящих к радикальному изменению динамической схемы системы, следует отметить установку упругих муфт, гидромуфт и индукционных муфт. Применение нелинейных упругих муфт (фиг. 36а, г, е) для срыва колебаний показано в § 3 гл. I.

Гидромуфты (турбомуфты) состоят из механически не связанных между собой ведущего и ведомого роторов, работающих соответственно по принципу центробежного насоса и турбины, причем передача вращающего момента происходит при помощи циркулирующей жидкости. Подобная муфта разделяет валопровод на две самостоятельные системы, так что если источник возбуждения крутильных колебаний имеется лишь в одной, то другая совершенно изолируется.



Фиг. 63. Динамическая схема системы с маятниковыми демпферами.

Аналогичное разделение системы происходит и в случае применения индукционных муфт. Здесь ведущая часть имеет обмотку постоянного тока, создающую магнитное поле, которое, пересекая ведомую часть, снабженную короткозамкнутой обмоткой, увлекает ее за собой с небольшим скольжением.

В качестве динамических демпферов для крутильных колебаний широкое применение получили так называемые маятниковые демпферы.

Если установка работает с переменным числом оборотов, причем с изменением числа оборотов меняется и частота возбуждения (судовые двигатели, авиамоторы и пр.), то обычный динамический демпфер, имеющий неизменную частоту собственных колебаний, не достигает цели. Маятниковый демпфер Сарацин-Тейлора обладает тем свойством, что его частота собственных колебаний изменяется прямо пропорционально изменению числа оборотов, и он, таким образом, «снимает» заданную гармоническую составляющую возбуждения во всем диапазоне рабочих оборотов установки. Частота собственных колебаний маятникового демпфера равна

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{r-l}{l}}, \quad (85)$$

где Ω — угловая скорость вращения вала, сек⁻¹;

r — расстояние от оси вала до точки подвеса маятника, см;

l — приведенная длина маятника, см.

Формула (85) подобна известному выражению для частоты собственных колебаний маятника в поле земного тяготения. Колебания маятникового демпфера происходят в поле центробежных сил. Частота колебаний не зависит от массы маятника; последняя определяется лишь допустимой амплитудой перемещения демпфера.

Примером удачного применения маятниковых демпферов является конструкция Чилтона, в которой в качестве демпферов использованы подвижные противовесы. Благодаря двойному подвесу здесь удастся получить весьма малую приведенную длину маятников.

Введение маятниковых демпферов в рядные системы приводит, как показано на фиг. 63, к разветвленным динамическим схемам. Эквивалентная жесткость демпфера при изменении числа оборотов вала изменяется пропорционально Ω^2 . При настройке демпфера на заданную частоту колебаний в месте его установки образуется узел.

Вопросам конструкции и применения демпферов крутильных колебаний посвящена книга Ю. А. Гонпа [33].

ГЛАВА III

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Определение частот собственных колебаний невесомой балки с сосредоточенными массами

Для невесомой балки, несущей одну сосредоточенную массу (фиг. 64), круговая частота собственных колебаний составляет

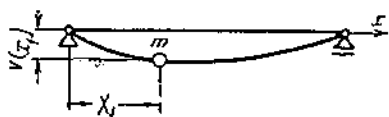
$$\omega = \sqrt{\frac{Z}{m}}, \quad (86)$$

где m — масса, сосредоточенная в точке x_1 , $\text{кгсм}^{-1}\text{сек}^2$;

Z — жесткость балки, измеряемая силой, которая, будучи приложена к точке x_1 , вызовет в этой точке прогиб, равный единице кг/см .

Формула (86) будет справедлива при любом осуществлении опор балки, которая принята невесомой, т. е. в которой силами инерции распределенной массы можно пренебречь по сравнению с силой инерции сосредоточенной массы. Применение формулы (86) дает надежные результаты при соотношениях между сосредоточенной массой m и распределенной массой μL :

$$\frac{m}{\mu L} > 8.$$



Фиг. 64. Невесомая балка с сосредоточенной массой m в точке x_1 .

Жесткость балки Z находится при этом из рассмотрения условий статического изгиба. Наиболее типичные случаи расчета балок по формуле (86) даны на фиг. 65.

Формула (86) может быть преобразована следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{Z}{m} = \frac{\frac{W}{v_{cm}}}{\frac{W}{g}} = \frac{g}{v_{cm}}, \quad (87)$$

где W — вес сосредоточенной массы m , кг ;

g — ускорение силы тяжести, см/сек^2 ;

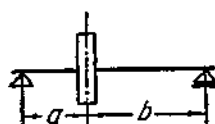
v_{cm} — статический прогиб в точке расположения сосредоточенной массы под действием ее веса, см .

Отсюда число колебаний в минуту составит

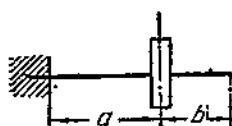
$$N = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{v_{cm}}} \approx \frac{300}{\sqrt{v_{cm}}} \quad (87a)$$

Первая круговая частота собственных колебаний сложной системы состоящей из невесомой балки, несущей несколько сосредоточенных масс, может быть приближенно (с преувеличением) найдена по формуле (88), предложенной Дункарлеем для определения первых критических скоростей валов:

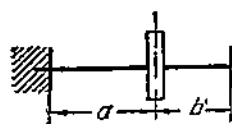
$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots \quad (88)$$



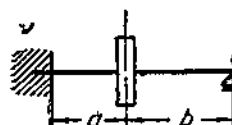
$$\omega^2 = \frac{EJ}{m} \frac{3(a+b)^3}{a^2 b^2}$$



$$\omega^2 = \frac{EJ}{m} \frac{3}{a^3}$$



$$\omega^2 = \frac{EJ}{m} \frac{3(a+b)^3}{a^2 b^2}$$



$$\omega^2 = \frac{EJ}{m} \frac{[2(a+b)^3]}{a^3 b^2 (3a+4b)}$$

Фиг. 65. Формулы расчета частот собственных колебаний невесомой балки с сосредоточенной массой.

где ω_i — круговые частоты собственных колебаний балки, несущей только одну массу m_i ($i = 1, 2, 3, \dots$).

В соответствии с формулой (87) первая круговая частота такой системы может быть выражена формулой

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\Sigma v_{cm1}} \quad (89)$$

где v_{cm1} — статический прогиб в точке расположения массы i под действием ее веса для балки, несущей только одну указанную массу.

На фиг. 66 приведена номограмма, позволяющая определить первое число собственных колебаний в минуту, соответствующее первой критической скорости для невесомого вала, несущего ряд сосредоточенных масс:

$$N_1 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\Sigma v_{cm1}}} \quad (89a)$$

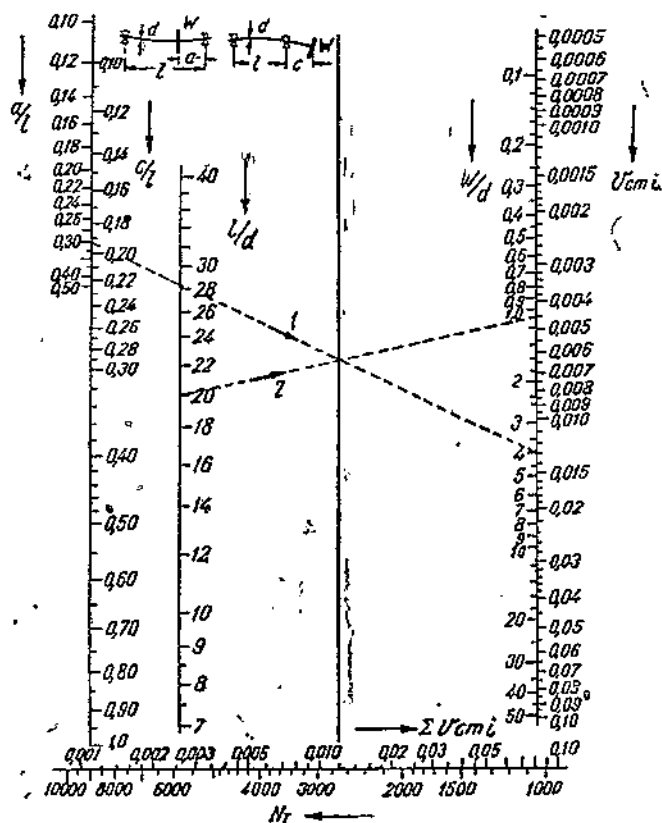
На фиг. 66 кроме обозначений, встречавшихся выше,

d — диаметр вала, см;

l, a, c — размеры, определяющие относительное положение сосредоточенной массы i .

Способ пользования номограммой поясняется примером, сведенным в табл. 11. Для каждой массы вала (фиг. 67) по вертикальным шкалам номограммы определяем прогибы v_i . Затем суммируем их и по нижней горизонтальной шкале находим значение N_1 .

Применение указанного выше способа определения первой частоты собственных колебаний систем с несколькими сосредоточенными массами приводит к правильным результатам, если форма колебаний для каждой



Фиг. 66. Номограмма для определения первого числа собственных колебаний в минуту (первой критической скорости) невесомого вала, несущего несколько сосредоточенных масс по Гольба [49].

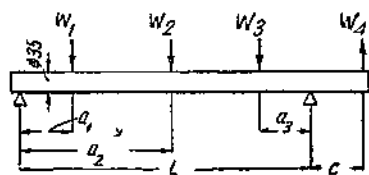
Таблица 11

№ массы	W кг	m кг·см ⁻¹ ·сек ²	$\frac{a}{l}$	$\frac{c}{l}$	$\frac{W}{d}$ кг/см	$\frac{l}{d}$	v_{cm1} см
1	1,36	0,00139	0,173	—	0,389	14,85	0,000845
2	20,2	0,0206	0,500	—	5,87	14,85	0,00383
3	1,36	0,00139	0,173	—	0,389	14,85	0,000845
4	8,0	0,00815	—	0,154	2,28	14,85	0,000663

$\sum v_{cm1} = 0,00618$,
откуда $N_f \approx 3800$ кол/мин.

из составляющих одномассных систем [формула (88)] близка к первой форме колебаний всей системы.

В тех случаях, когда для валов станков, центрифуг и других приводов необходимо определение частот собственных колебаний выше первой,



Фиг. 67. Схема вала к примеру пользования номограммой на фиг. 66.

особенно целесообразным является применение метода А. Н. Крылова [44].

Приведенные выше формулы естественно не учитывают влияние побочных факторов: инерции вращения масс, продольных сил, приложенных статически, гироскопического эффекта при определении критических скоростей и т. д. Учету влияния этих факторов посвящен § 6 данной главы.

§ 2. Формулы частот собственных колебаний для типичных балок постоянного сечения

Расчету круговых частот собственных колебаний конструкций из стержней постоянного сечения посвящен следующий параграф.

Здесь мы приведем результаты подобных расчетов для типичных случаев балок постоянного сечения.

Круговая частота собственных колебаний порядка k определяется для балок с равномерно распределенной массой по формуле

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad (90)$$

где E — модуль упругости, кг/см^2 ;

J — момент инерции поперечного сечения балок, см^4 ;

l — длина балки, см ;

μ — масса единицы длины балки, $\text{кг.сек}^2/\text{см}$;

λ_k — параметр для собственных колебаний порядка k , значения которого для разных случаев приведены ниже.

1. Для жестко заделанной консоли с сосредоточенной массой m на конце, зависимость $\lambda_1 = f\left(\frac{m}{\mu l}\right)$ для первой частоты приведена на фиг. 68. Кривая, относящаяся к данному случаю, отмечена схематическим изображением балки. Отношение $\frac{m}{\mu l}$ обозначено α .

Более точно значение λ_1 для первой круговой частоты собственных колебаний может быть определено из формул:

при $\lambda_1 \ll 1,0$:

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{3,00}{\alpha + \frac{1}{3}}}, \quad (91a)$$

при $1 < \lambda_1 < 1,875$

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{4,5}{\alpha + 0,363}}. \quad (91b)$$

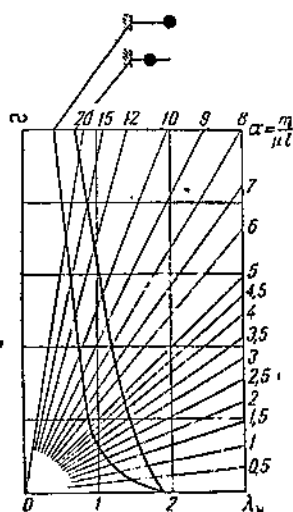
Для жестко заделанной консоли с сосредоточенной массой m посредине зависимость $\lambda_1 = f(\alpha)$ также приведена для первой частоты на фиг. 68.

Значение λ_1 может быть в этом случае определено для первой частоты по формуле

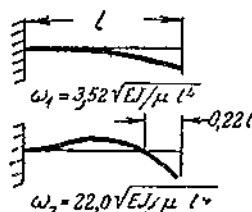
$$\lambda_1 = 2 \sqrt[4]{\frac{18,4 + 8,8x}{1 + 3,43x}} - \sqrt{\left(\frac{18,4 + 8,8x}{1 + 3,43x}\right)^2 - \frac{26,4}{1 + 3,43x}} \quad (92)$$

При отсутствии сосредоточенной массы $\alpha = 0$ (фиг. 69) значения λ для первых трех частот собственных колебаний консоли равны:

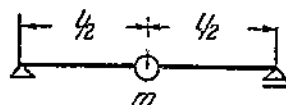
$$\lambda_{01} = 1,875; \lambda_{02} = 4,694; \lambda_{03} = 7,855.$$



Фиг. 68. Зависимость λ от α для консоли с сосредоточенной массой на конце и консоли с сосредоточенной массой посредине. Значения λ отсчитываются по оси абсцисс, значения α — по радиусам [48].



Фиг. 69. Консоль постоянного сечения.



Фиг. 70. Двухопорная балка постоянного сечения с сосредоточенной массой m посредине пролета.

2. Для двухопорной балки (фиг. 70) с сосредоточенной массой по середине пролета на фиг. 71 дана зависимость $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{01}}\right)^2 = f\left(\frac{m}{\mu l}\right)$ для основной частоты.

При отсутствии сосредоточенной массы значения λ_0 для частот собственных колебаний равны

$$\lambda_{01} = \pi; \lambda_{02} = 2\pi; \lambda_{03} = 3\pi; \lambda_{0n} = n\pi.$$

3. Для балки с жестко закрепленными концами (фиг. 72) и балки со свободными концами (фиг. 73)

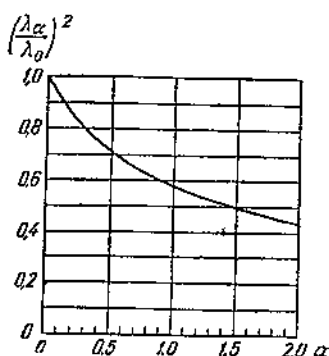
$$\lambda_{01} = 4,73; \lambda_{02} = 7,853; \lambda_{03} = 10,996.$$

4. Для балки с одним жестко закрепленным и другим опертым концом (фиг. 74)

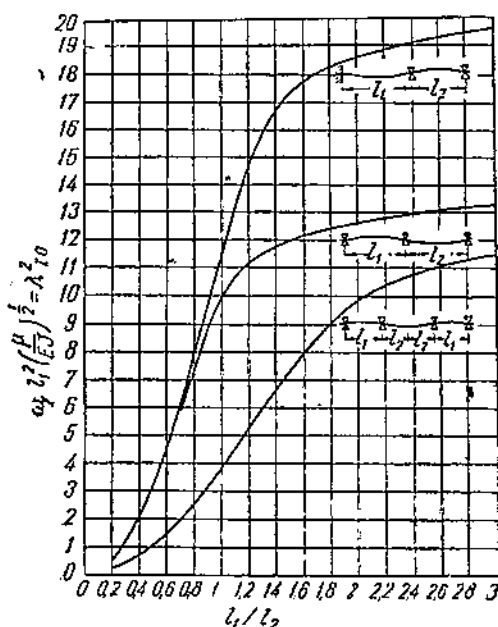
$$\lambda_{01} = 3,927; \lambda_{02} = 7,069; \lambda_{03} = 10,21.$$

5. Значения λ_{01} для первой частоты многоопорных балок и валов постоянного сечения могут быть получены из фиг. 75, на которой изображена зависимость λ_{01}^2 для различных соотношений размеров пролетов l_1 и l_2 . Необходимо отметить, что λ_{01} приведено здесь к длине l_1 , т. е.

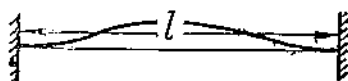
$$\omega_1 = \frac{\lambda_{01}^2}{l_1} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$



Фиг. 71. Зависимость $\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$ от α для основной частоты собственных колебаний двухопорной балки постоянного сечения с массой посредине [42].



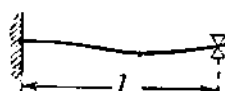
Фиг. 75. Зависимость $\lambda_{01}^2 = \omega_1^2 l_1^3 \left(\frac{\mu}{EJ}\right)^{-1}$ от l_1/l_2 для двухпролетных балок постоянного сечения [49].



Фиг. 72. Балка постоянного сечения с жестко закрепленными концами.



Фиг. 73. Балка постоянного сечения со свободными концами.



Фиг. 74. Балка постоянного сечения с одним жестко закрепленным и другим открытым концом.

3. Определение частот собственных колебаний конструкций из стержней постоянного сечения

Для исследования частот собственных колебаний конструкций из стержней постоянного сечения может быть использован метод В. Прагера, К. Гогенемзера и Ф. Вальткинга [42], излагаемый ниже.

Для каждого стержня постоянного сечения, входящего в конструкцию и расположенного между точками $k-1$ и k , составляется уравнение

$$\begin{aligned} e_{k-1}^r f_{k-1}^r [e_k^l f_k^l D(\lambda_k) - e_k^l A'(\lambda_k) + f_k^l B(\lambda_k) + E(\lambda_k)] + \\ + e_{k-1}^r [e_k^l f_k^l A(\lambda_k) - e_k^l S(\lambda_k) - f_k^l C(\lambda_k) + A(\lambda_k)] - \\ - f_{k-1}^r [e_k^l f_k^l B(\lambda_k) + e_k^l C(\lambda_k) - f_k^l S(\lambda_k) + B(\lambda_k)] + \\ + e_k^l f_k^l E(\lambda_k) - e_k^l A(\lambda_k) + f_k^l B(\lambda_k) + D(\lambda_k) = 0, \end{aligned} \quad (93)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \operatorname{ch} \lambda \cdot \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cdot \cos \lambda; & S(\lambda) &= 2 \operatorname{sh} \lambda \cdot \lambda \sin \lambda; \\ B(\lambda) &= \operatorname{ch} \lambda \cdot \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cdot \cos \lambda; & D(\lambda) &= \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda - 1; \\ C(\lambda) &= 2 \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda; & E(\lambda) &= \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda + 1. \end{aligned}$$

Значения указанных трансцендентных функций в пределах от $\lambda=0$ до $\lambda=10,0$ приведены в табл. 12¹, e_{k-1}^r , f_{k-1}^r , e_k^l , f_k^l — вспомогательные величины, характеризующие условия сопряжения рассматриваемого стержня с системой в точках $k-1$ и k . Верхние индексы r и l показывают, что величины относятся соответственно к правому и левому участкам по отношению к точке сопряжения. Аналогично этому индексы o и u соответствуют верхним и нижним участкам:

$$e = \frac{v''}{pv'}; \quad (93a)$$

$$f = \frac{v'''}{p^2 v}, \quad (93b)$$

где v — прогиб, а v' , v'' и v''' — соответственно его 1-я, 2-я и 3-я производные;

$$p = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EJ}} \text{ (обозначения для } \mu, \omega, E, J \text{ — те же, что и в § 2); } \lambda = pl.$$

Таким образом для изгибающего момента и перерезывающей силы получаем следующие выражения:

$$M = -EJv'' = -pEJv'e = -\frac{\mu l^3}{\lambda^3} \cdot \omega^2 v'e; \quad (94)$$

$$Q = -EJv''' = -p^3 EJvf = -\frac{\mu l^4}{\lambda^4} \cdot \omega^2 vf. \quad (95)$$

Значения e и f для концов стержня и точек симметрии, а также соотношения между ними для сопряженных в одной точке участков, приведены на фиг. 76 и 77.

¹ Подробная таблица этих функций дана в работе [42].

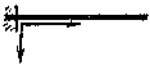
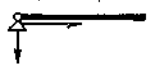
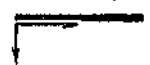
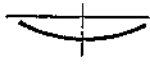
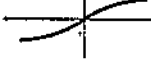
λ	$A(\lambda)$	$B(\lambda)$	$C(\lambda)$	$S(\lambda)$	$D(\lambda)$	$E(\lambda)$
1	2	3	4	5	6	7
0,50	0,00000	0,00000	2,00000	0,00000	0,00000	2,00000
0,10	0,20000	0,00067	1,99997	0,02000	— 0,00002	1,99998
0,20	0,39998	0,00533	1,99947	0,08000	— 0,00027	1,99973
0,30	0,59984	0,01800	1,99730	0,17998	— 0,00135	1,99865
0,40	0,79932	0,04266	1,99147	0,31991	— 0,00427	1,99573
0,50	0,99792	0,08331	1,97917	0,49965	— 0,01042	1,98958
0,60	1,19482	0,14391	1,95681	0,71896	— 0,02159	1,97841
0,70	1,38880	0,22841	1,92001	0,97739	— 0,03999	1,96001
0,80	1,57817	0,34067	1,86860	1,27418	— 0,06820	1,93180
0,90	1,76067	0,48448	1,78164	1,60820	— 0,10918	1,89082
1,00	1,93342	0,66349	1,66746	1,97780	— 0,16627	1,83373
1,10	2,09284	0,88115	1,51367	2,38068	— 0,24317	1,75683
1,20	2,23457	1,14064	1,31221	2,81375	— 0,34389	1,65611
1,30	2,35341	1,44478	1,05443	3,27298	— 0,47278	1,52722
1,40	2,44327	1,79593	0,73116	3,75319	— 0,63442	1,36558
1,50	2,49714	2,19590	0,33281	4,24789	— 0,83360	1,16640
1,60	2,50700	2,64573	0,15052	4,74911	— 1,07526	0,92474
1,70	2,46393	3,14556	— 0,72883	5,24716	— 1,36441	0,63559
1,80	2,35774	3,69467	— 1,41205	5,73046	— 1,70602	0,29398
1,90	2,17764	4,29076	— 2,20983	6,18533	— 2,10492	— 0,10492
2,00	1,91165	4,93026	— 3,13125	6,59579	— 2,56563	— 0,56563
2,10	1,54699	5,60783	— 4,18448	6,94341	— 3,09224	— 1,09224
2,20	1,07013	6,31615	— 5,37644	7,20711	— 3,68822	— 1,68822
2,30	0,46690	7,04566	— 6,71236	7,36304	— 4,35618	— 2,35618
2,40	— 0,27725	7,78428	— 8,19532	7,38447	— 5,09766	— 3,09766
2,50	— 1,17708	8,51709	— 9,82569	7,24176	— 5,91284	— 3,91284
2,60	— 2,24721	9,22807	— 11,60057	6,90229	— 6,80028	— 4,80028
2,70	— 3,50179	9,89891	— 13,51311	6,33058	— 7,75655	— 5,75655
2,80	— 4,95404	10,48317	— 15,55181	5,48839	— 8,77591	— 6,77591
2,90	— 6,61580	10,97711	— 17,69976	4,33499	— 9,84988	— 7,84988
3,00	— 8,49687	11,33837	— 19,93382	2,82745	— 10,96691	— 8,96691
3,10	— 10,60443	11,52931	— 22,22376	0,92113	— 12,11188	— 10,11188
3,20	— 12,94222	11,50778	— 24,53139	— 1,42969	— 13,26569	— 11,26569
3,30	— 15,50974	11,22702	— 26,80960	— 4,27103	— 14,40480	— 12,40480
3,40	— 28,30128	10,63569	— 29,00150	— 7,64853	— 15,50075	— 13,50075
3,50	— 21,30492	9,67799	— 31,03947	— 11,60575	— 16,51973	— 14,51973
3,60	— 24,50142	8,29386	— 32,84428	— 16,18338	— 17,42214	— 15,42214
3,70	— 37,86297	6,41942	— 34,32433	— 21,41734	— 18,16216	— 16,16216
3,80	— 31,35198	3,98752	— 35,37489	— 27,33708	— 18,68744	— 16,68744
3,90	— 34,91970	0,92844	— 35,87753	— 33,96341	— 18,93876	— 16,93876
4,00	— 38,50482	— 2,82906	— 35,69970	— 41,30615	— 18,84985	— 16,84985
4,10	— 42,03177	— 7,35626	— 34,69457	— 49,36091	— 18,34728	— 16,34728
4,20	— 45,41080	— 12,72446	— 32,70105	— 58,10912	— 17,35052	— 15,35052
4,30	— 58,53352	— 19,00015	— 29,54425	— 67,50881	— 15,77213	— 13,77213
4,40	— 51,27463	— 26,24587	— 25,03630	— 77,49713	— 13,51815	— 11,51815
4,50	— 53,48910	— 34,51621	— 18,97757	— 87,98360	— 10,48879	— 8,48879
4,60	— 55,01147	— 43,85518	— 11,15854	— 98,84668	— 6,57927	— 4,57927
4,70	— 55,65491	— 54,29292	— 1,36221	— 109,92964	— 1,68111	— 0,31889
4,80	— 55,21063	— 65,84195	— 10,63276	— 121,03618	4,31638	6,31638
4,90	— 53,44768	— 78,49300	25,04809	— 131,92604	11,52405	13,52405
5,00	— 50,11308	— 92,21037	42,10111	— 142,31052	20,05056	22,05056

Таблица 12 (продолжение)

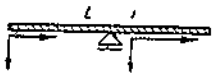
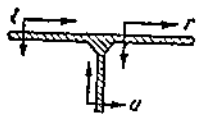
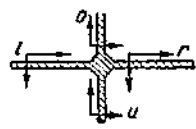
λ	$A(\lambda)$	$B(\lambda)$	$C(\lambda)$	$S(\lambda)$	$D(\lambda)$	$E(\lambda)$
1	2	3	4	5	6	7
5,10	-44,93220	-106,92652	61,99893	-151,84743	29,99947	31,99947
5,20	-37,61210	-122,53858	84,93165	-160,14093	41,46583	43,46583
5,30	-27,83957	-138,89839	111,06435	-166,72965	54,53218	56,53218
5,40	-15,28815	-155,81036	140,52794	-171,09153	69,26397	71,26397
5,50	0,37999	-173,02289	173,40867	-172,63714	85,70434	87,70434
5,60	19,50856	-190,22206	209,73636	-170,70883	103,86818	105,86818
5,70	42,44092	-207,02472	249,47123	-164,58011	123,73552	125,73552
5,80	69,51236	-222,97166	292,48939	-153,45649	145,24469	147,24469
5,90	101,04091	-237,52093	338,56692	-136,47797	168,28346	170,28346
6,00	137,31651	-250,04146	387,36272	-112,72356	192,68136	194,68130
6,10	178,58835	-259,80732	438,40008	-81,21816	218,20004	220,20004
6,20	225,05037	-265,99277	491,04719	-40,94205	244,52359	246,52359
6,30	276,82475	-267,66834	544,49675	9,15635	271,24838	273,24838
6,40	333,94326	-263,79851	597,74507	70,14437	297,87253	299,87253
6,50	396,32660	-253,24102	649,57056	143,08494	323,78528	325,78528
6,60	463,76155	-234,74857	698,51270	229,01214	348,25635	350,25635
6,70	535,87600	-206,97308	742,85132	328,90194	370,42566	372,42566
6,80	612,11205	-168,47317	780,58716	443,63778	389,29358	391,29358
6,90	691,69715	-117,72541	809,42422	573,97056	403,71211	405,71211
7,00	773,61370	-53,13982	826,75490	720,47268	412,37745	414,37745
7,10	856,56727	26,91981	829,64858	883,48588	413,82429	415,82429
7,20	938,95388	124,10986	814,84492	1053,06256	406,42246	408,42246
7,30	1018,82700	240,07484	778,75286	1258,90070	388,37643	390,37643
7,40	1093,86467	376,40833	717,45886	1470,27190	357,72843	359,72843
7,50	1161,33771	534,60655	626,73154	1695,94322	312,36577	314,36577
7,60	1218,07993	716,01367	502,06652	1934,09264	250,03826	252,03826
7,70	1260,46129	921,75849	338,70292	2182,21888	168,35146	170,35146
7,80	1284,36548	1152,68180	131,68372	2437,04646	64,84186	66,84186
7,90	1285,17325	1409,25395	-124,08074	2694,42646	-63,04037	-61,04037
8,00	1257,75313	1691,48257	-433,72954	2949,23504	-217,86477	-215,86477
8,10	1196,46148	1998,80984	-802,24852	3195,27072	-402,17426	-400,17426
8,20	1095,15378	2329,99968	-1234,84608	3425,15296	-618,42304	-616,42304
8,30	947,26964	2683,01492	-1735,80548	3630,22412	-868,50274	-866,90274
8,40	745,62369	3054,93487	-2309,31142	3800,55818	-1555,55571	-1553,65571
8,50	482,81526	3441,56448	-2958,74946	3924,37942	-1480,37473	-1478,37473
8,60	151,20953	3837,78565	-3686,57638	3988,99490	-1844,28819	-1842,28819
8,70	-257,15689	4236,90309	-4494,06022	3979,74598	-2248,03011	-2246,03011
8,80	-750,25269	4630,73615	-5380,98908	3880,48320	-2691,49454	-2689,49454
8,90	-1335,93810	5009,40984	-6345,34817	3673,47160	-3173,67409	-3171,67409
9,00	-2021,76707	5361,19779	-7382,96510	3339,43062	-3692,48255	-3690,48255
9,10	-2814,75248	5672,37176	-8487,12446	2857,61920	-4244,56223	-4244,56223
9,20	-3721,09103	5927,06129	-9648,15324	2205,97022	-4825,07662	-4823,07662
9,30	-4745,84735	6107,13223	-10852,97976	1261,28486	-5427,48988	-5425,48988
9,40	-5892,58762	6192,08240	-12084,67018	299,49478	-6043,33509	-6041,33509
9,50	-7162,97299	6153,97455	-13321,94768	1003,99844	-6661,97384	-6659,97384
9,60	-8556,29895	5982,40209	-14538,70116	2573,69684	-7270,35058	-7268,35058
9,70	-10068,98761	5634,50443	-15703,49214	4424,48314	-7852,74607	-7850,74607
9,80	-11694,03059	5085,03943	-16779,07012	6608,99112	-8390,53506	-8388,53506
9,90	-13420,38445	4301,52457	-17721,90910	9118,85982	-8861,95455	-8859,95455
10,00	-15232,32136	3249,45894	-18481,78038	11982,86236	-9241,89019	-9239,89019

Положительные направления указаны стрелками.
Здесь, кроме обозначений встречавшихся ранее,

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\mu}{J}}.$$

Опоры	Заделка	Шарнирн. опора	Свободн. конец
			
	$v = \infty \quad f = \infty$	$v = 0, \quad f = \infty$	$v = 0, \quad f = 0$
Точки симметрии	Симметр форма колебаний 	Антисимметр форма колебаний 	
	$v = \infty, \quad f = 0$	$v = 0, \quad f = \infty$	

Фиг. 76. Условия на опорах и в точках симметрии.

Способ соединения	Условия сопряжения	Уравнения сопряжения
Промежуточная опора 	$v_l = v_r = 0$ $v_l' = v_r'$ $M_l = M_r$	$f_l = f_r = \infty$ $\left. \begin{aligned} &(\kappa J e)_l = (\kappa J e)_r \end{aligned} \right\}$
Шарнир 	$M_l = M_r = 0$ $v_l = v_r$ $Q_l = Q_r$	$I_l = I_r = 0$ $\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\mu}{\kappa} f\right)_l = \left(\frac{\mu}{\kappa} f\right)_r \end{aligned} \right\}$
Неподвижный узел рамы 	$v_u = v_l = v_r = 0$ $v_u' = v_l' = v_r'$ $M_u + M_l = M_r$	$f_u = f_l = f_r = \infty$ $\left. \begin{aligned} &(\kappa J e)_u + (\kappa J e)_l = \\ &= (\kappa J e)_r \end{aligned} \right\}$
Неподвижный узел рамы 	$v_u = v_0 = v_l = v_r = 0$ $v_u' = v_0' = v_l' = v_r'$ $M_u + M_l = M_0 + M_r$	$f_u = f_0 = f_l = f_r = \infty$ $\left. \begin{aligned} &(\kappa J e)_u + (\kappa J e)_l = \\ &= (\kappa J e)_0 + (\kappa J e)_r \end{aligned} \right\}$

Фиг. 77. Условия в точках сопряжения участков.

Написав для каждого стержня его уравнение в соответствии с формулой (93), исключаем вспомогательные величины, пользуясь данными фиг. 77, а также формулами (94) и (95). Если в каком-либо уравнении окажутся бесконечно большие члены разных порядков, то необходимо учитывать лишь члены высшего порядка. В результате получаем уравнение частоты, в которое входят лишь функции от λ_k всех стержней конструкции.

Приводим уравнение частоты к параметрам какого-либо стержня системы, например k . Для этого параметры других стержней, например стержня n , приводятся по формуле

$$\lambda_n = \lambda_k \frac{\gamma_n}{\gamma_k} \cdot \frac{l_n}{l_k}. \quad (96)$$

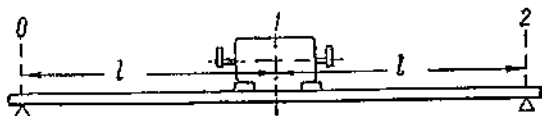
Затем подбором по таблицам функций λ определяем корни уравнения частот $\lambda_{k1} < \lambda_{k2} < \dots < \lambda_{kn}$.

Частоты собственных колебаний находятся по формуле (90):

$$\omega_i = \frac{\lambda_{ki}^2}{l_k^2} \sqrt{\frac{EJ_k}{\mu_k}}.$$

Применение изложенного выше покажем на примерах, почти дословно заимствованных у авторов рассматриваемого метода.

1. Определить низшую частоту двухопорной балки (фиг. 78), на которой установлен вибратор (сосредоточенная масса по середине пролета), при различных соотношениях сосредоточенной и распределенной массы $\alpha = \frac{m}{2\mu l}$.



Фиг. 78. Эскиз балки к примеру 1.

В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением одной половины (0,1) стержня. Кроме f_1 , все вспомогательные величины непосредственно известны, так как по фиг. 70 $l_0 = 0$, $f_0 = \infty$ и из условия симметрии $v_1' = 0$ по формуле (93а) получим $e_1 = \infty$.

Амплитуда Q_1 перерезывающей силы непосредственно слева от сосредоточенной массы по формуле (95) будет

$$Q_1 = -\frac{\mu l \omega^2}{\lambda} v_1 f_1.$$

Амплитуда $2Q_1$ перерезывающих сил в сечениях, примыкающих слева и справа к сосредоточенной массе (сила считается положительной, если она направлена по положительному направлению v_1), должна быть равна произведению из величины этой массы на амплитуду $-\omega^2 v_1$ ее ускорения. Следовательно, имеем

$$2Q_1 = -\frac{2\mu l \omega^2}{\lambda} v_1 f_1 = m \omega^2 v_1$$

или

$$f_1 = -\alpha \lambda.$$

При указанных выше значениях вспомогательных величин основное уравнение для участка стержня (0,1) примет вид

$$f_1 B(\lambda) + C(\lambda) = 0,$$

и получим уравнение частот:

$$\frac{C(\lambda)}{\lambda B(\lambda)} = \alpha.$$

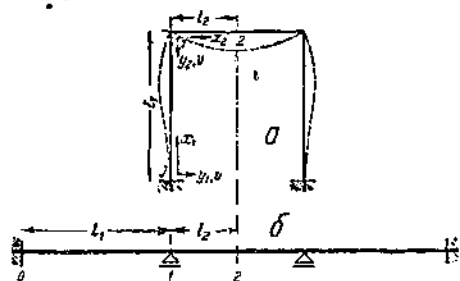
На фиг. 71 дана построенная по уравнению частот зависимость:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 = f(\alpha)$$

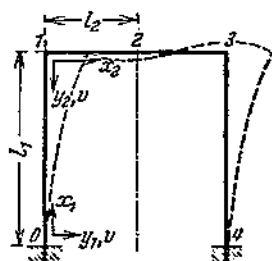
(обозначения — см. § 2).

При сравнении уравнения частот с данными § 2, необходимо помнить, что в примере длина балки принята равной $2l$.

2. Определить частоты симметричных собственных колебаний симметричной рамы (фундаментная рама, у которой обе стойки жестко заделаны, фиг. 79, а).



Фиг. 79. Схема фундаментной рамы к примеру 2 расчета симметричных колебаний.



Фиг. 80. Схема фундаментной рамы к примеру 3 расчета антисимметричных колебаний.

Если не учитывать сжатия стойки, как это и делается обычно, то при симметричных формах колебаний углы рамы будут неподвижными. Поэтому, так как речь идет о симметричных формах колебаний, вместо рамы (фиг. 79, а) можно рассматривать систему, показанную на фиг. 79, б. Все вспомогательные величины, кроме e_1^I и e_1^I , непосредственно известны, а именно: по фиг. 76 $e_0 = f_0 = \infty$ и $e_2 = \infty$; $f_2 = 0$; по фиг. 77 $f_1^I = f_1^I = \infty$.

Для составления условий сопряжения на опоре воспользуемся фиг. 77; получим:

$$x_1 J_1 e_1^I = x_2 J_2 e_1^I.$$

Основные уравнения для обоих участков балки будут,

$$e_1^I D(\lambda_1) + B(\lambda_1) = 0; -e_1^I A(\lambda_2) - C(\lambda_2) = 0.$$

Отсюда получим уравнение частот

$$x_1 J_1 \frac{B(\lambda_1)}{D(\lambda_1)} = x_2 J_2 \frac{C(\lambda_2)}{A(\lambda_2)};$$

Заменив λ_2 через λ_1 , по формуле (96), решаем полученное уравнение частот графическим путем, пользуясь прилагаемыми таблицами трансцендентных функций.

3. Для рамы предыдущего примера составим уравнение частот антисимметричных (горизонтальных) собственных колебаний. При несжимае-

мости стоек $v_1^r = 0$ (фиг. 80). Вспомогательные величины, которые непосредственно определяются, имеют следующие значения: по фиг. 76

$$e_0 = f_0 = \infty; e_2 = 0; f_2 = \infty;$$

$$v_1^r = 0 \quad f_1^r = \infty.$$

Так как непосредственно слева и справа от точки I изгибающие моменты, а также углы наклона линии изгиба с положительным направлением оси стержня равны между собой, то условие сопряжения будет иметь вид

$$x_1 J_1 e_1'' = x_2 J_2 e_1^r.$$

Так как ригель предполагаем также несжимаемым, то все точки его будут иметь одинаковую амплитуду v_1'' горизонтальных смещений. Амплитуда горизонтальной силы, передаваемой со стойки $(0, I)$ на ригель по (95), будет

$$Q_1'' = - \frac{\mu_1 l_1 \omega^2}{\lambda_1} v_1'' f_1''.$$

Вследствие антисимметрии формы колебаний горизонтальная сила, передаваемая на ригель со стойки $(3, 4)$, в любой момент времени равна по величине и направлению горизонтальной силе, передаваемой на ригель со стойки $(0, I)$. Сумма амплитуд горизонтальных сил, передаваемых со стоек на ригель (они считаются положительными, если действуют по положительному направлению v_1''), должна быть равна произведению массы ригеля $2\mu_2 l_2$ и амплитуды $-\omega^2 v_1''$ его горизонтального ускорения.

$$-2Q_1'' = + \frac{2\mu_1 l_1 \omega^2}{\lambda_1} v_1'' f_1'' = -2\mu_2 l_2 \omega^2 v_1''$$

или

$$f_1'' = - \frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} \lambda_1.$$

Основные уравнения для обоих участков $(0, I)$ и $(I, 2)$ будут:
 $e_1'' f_1'' D(\lambda_1) - e_1'' A(\lambda_1) + f_1'' B(\lambda_1) + E(\lambda_1) = 0; e_1^r B(\lambda_2) + S(\lambda_2) = 0.$

Подставив найденное выше значение f_1'' и применив уравнение сопряжения для точки I , получим уравнение частот:

$$x_1 J_1 \frac{\frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} \lambda_1 B(\lambda_1) - E(\lambda_1)}{\frac{\mu_2 l_2}{\mu_1 l_1} D(\lambda_1) + A(\lambda_1)} = x_2 J_2 \frac{S(\lambda_2)}{B(\lambda_2)},$$

которое может быть решено так же, как и в предыдущем примере.

§ 4. Энергетические методы определения частот собственных колебаний стержней и критических скоростей валов переменного сечения

Для определения круговых частот собственных колебаний стержней и критических скоростей валов переменного сечения может быть применен приближенный энергетический метод Рейлея. К более точному определению частот собственных колебаний, которое достигается путем расчета по методу Ритца, обычно не приходится прибегать.

Первая круговая частота собственных колебаний стержня или вала переменного сечения определяется по формуле

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\int_0^l P(x) v(x) dx}{\int_0^l \mu(x) v^2(x) dx}}, \quad (97)$$

где $v(x)$ — ординаты прогибов упругой линии стержня в см под действием статически приложенной распределенной нагрузки $P(x)$ в кг/см;

μ — линейная масса стержня кгсек²/см².

Приближение по приведенной формуле будет тем большим, чем ближе совпадает форма полученной статической упругой линии изгиба с формой упругой линии собственных колебаний.

Хорошее совпадение для определения первой частоты собственных колебаний дает упругая линия от равномерно распределенной нагрузки $P(x) = \text{const}$ или от нагрузки собственного веса. Можно исходить также из упругой линии изгиба от сосредоточенных сил. Однако точность расчета в этом случае будет зависеть от рационального выбора места расположения последних. При сосредоточенных силах в конце консолей и середине двухопорных пролетов ошибка в определении первой частоты собственных колебаний, как и для ранее указанных видов нагрузки, не превышает обычно 2%. При этом расчетная формула для консоли будет иметь, например, следующий вид:

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{P(l) v(l)}{\int_0^l \mu(x) v^2(x) dx}}, \quad (97a)$$

где $P(l)$ и $v(l)$ — соответственно статическая сила и прогиб на конце консоли.

Если кроме распределенной массы имеется также ряд сосредоточенных масс m_i , то в знаменателе формулы (97a) под корнем прибавляется член $\sum_0^n v^2(x_i) m_i$, где $v(x_i)$ — ординаты упругой линии для точек, в которых расположены соответствующие массы m_i .

Для консоли с сосредоточенной массой m_l на конце

$$\omega \leq \sqrt{\frac{P(l) v(l)}{\int_0^l \mu(x) v^2(x) dx + m_l v^2(l)}}. \quad (97b)$$

При определении упругой линии для многоопорных балок необходимо в смежных пролетах изменять знак распределенной нагрузки или сосредоточенных сил.

Определение статических упругих линий производится по обычным методам расчета строительной механики, изложение которых, как и описание способов приближенного интегрирования, выходит за рамки настоящей работы.

В качестве примера применения различных форм статической упругой линии рассмотрим определение первой частоты собственных колебаний консольного стержня с переменным по длине моментом инерции.

Данные расчета стержня приведены в табл. 13.

Таблица 13

$\frac{x}{l}$	$\frac{\mu_x}{\mu_0}$	$\frac{J_0}{J_x}$	D_p	$\frac{\mu_x}{\mu_0} D^2_p$	D_p	$\frac{\mu_x}{\mu_0} D^2_p$
0,0	1,000	1,000	0,000	0,0000	0,000	0,0000
0,1	0,950	1,115	0,005	0,0000	0,002	0,0000
0,2	0,895	1,250	0,020	0,0004	0,009	0,0001
0,3	0,841	1,412	0,045	0,0017	0,020	0,0003
0,4	0,790	1,608	0,080	0,0051	0,035	0,0010
0,5	0,735	1,847	0,124	0,0113	0,051	0,0019
0,6	0,683	2,143	0,178	0,0216	0,071	0,0035
0,7	0,630	2,516	0,241	0,0366	0,093	0,0055
0,8	0,578	2,996	0,310	0,0555	0,115	0,0077
0,9	0,525	3,626	0,386	0,0782	0,138	0,0100
1,0	0,473	4,477	0,465	0,1024	0,162	0,0124

J_0/J_x — отношение момента инерции сечения в месте заделки к моменту инерции сечения

l — длина консольного стержня;

μ_x/μ_0 — отношение погонной массы стержня x к погонной массе в месте заделки;

$v_{p(x)} = \frac{J_0^3}{EJ_0} D_{p(x)}$ — ординаты статической упругой линии от сосредоточенной силы;

$v_{p(x)} = \frac{p l^4}{EJ_0} D_{p(x)}$ — ординаты статической упругой линии от равномерно распределенной нагрузки.

Величины функций D в зависимости от $\frac{x}{l}$ приведены для 10 точек упругой линии.

Определение интегралов в формулах (97) и (97а) здесь производим численным путем, пользуясь формулой трапеций. В данном примере при 10 участках

$$\int_0^l \frac{\mu_x}{\mu_0} D^2_{p(x)} dx = \frac{l}{10} \left[\frac{D^2_{(0)}}{2} + \frac{\mu_{(0,1)}}{\mu_0} D^2_{(0,1)} + \frac{\mu_{(0,2)}}{\mu_0} D^2_{(0,2)} + \frac{\mu_{(0,3)}}{\mu_0} D^2_{(0,3)} + \dots + \frac{\mu_{(l)}}{\mu_0} \frac{D^2_{(l)}}{2} \right] = \frac{l}{10} \sum D^2,$$

аналогично

$$\int_0^l D_{(x)} dx = \frac{l}{10} \sum D.$$

Из табл. 13 получаем:

$$\sum D_p^2 = 0,2616; \quad \sum D_p = 0,615; \quad \sum D_p^2 = 0,0362.$$

В случае применения в данном примере упругой линии от сосредоточенной силы, приложенной на конце,

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{P \frac{PJ_0}{EJ_0} D_P(l)}{\mu_0 \left(\frac{PJ_0}{EJ_0}\right)^2 \frac{l}{10} \sum D_P^2}}, \quad (97\text{в})$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega_1 &\leq \sqrt{\frac{10 D_P(l)}{\sum D_P^2}} \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}; \\ \omega_1 &\leq \frac{4,21}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}. \end{aligned}$$

В случае пользования упругой линией от равномерно распределенной нагрузки для того же примера получаем:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\leq \sqrt{\frac{\frac{p^2 l^4}{EJ_0} \cdot \frac{1}{10} \sum D_P}{\mu_0 \left(\frac{p l^4}{EJ_0}\right)^2 \cdot \frac{l}{10} \sum D_P^2}}, \quad (97\text{г}) \\ \omega_1 &\leq \sqrt{\frac{\sum D_P}{\sum D_P^2}} \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}; \\ \omega_1 &\leq \frac{4,12}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}}. \end{aligned}$$

Как видим, расхождение в результатах получилось малое.

Другой вариант энергетического метода приближенного расчета частоты собственных колебаний стержней и валов переменного сечения заключается в том, что вместо определения статической упругой линии, как это произведено выше, задаются формой собственных колебаний системы, аналогичной рассматриваемой по условиям закрепления и сопряжения, но имеющей стержни постоянного сечения и равномерно распределенную массу.

При этом круговая частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\int_0^l EJ_{(x)} v''^2(x) dx}{\int_0^l \mu_{(x)} v^2(x) dx + \sum_1^n m_i v^2(x_i)}}, \quad (98)$$

где, кроме величин, встречающихся в данном параграфе,

E — модуль упругости, кг/см²;

$J_{(x)}$ — моменты инерции сечений, см⁴;

$v_{(x)}$ — ординаты упругой линии колебаний аналогичной системы с постоянными сечениями и равномерно распределенной массой;

$v''_{(x)}$ — вторая производная от $v_{(x)}$.

Формы колебаний двухопорной балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой (фиг. 81) представляют собой синусоиды:

$$v_k(x) = v_l \sin k\pi \frac{x}{l},$$

причем $k=1, 2, \dots, \infty$ или, принимая v_l равным единице, имеем

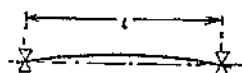
$$v_k(x) = \sin k\pi \frac{x}{l}.$$

Первые три формы собственных колебаний жестко заделанного стержня постоянного сечения приведены в относительных величинах и даны в табл. 14, из которой могут быть также получены необходимые при расчете значения вторых производных.

Интегрирование при пользовании формулой (98) в общем случае можно производить так же, как и при пользовании формулой (97).

Применение формулы (98) целесообразно в тех случаях, когда нет заранее определенной статической упругой линии изгиба.

Пользуясь указанным методом, С. А. Тумаркин [46] получил простые расчетные формулы и графики для определения первых частот собственных колебаний и критических скоростей (без учета гироскопического эффекта) для опертых на концах валов, состоящих из трех (конических и цилиндрических) участков.



Фиг. 81. Схема двухопорной балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой.

Таблица 14

$\frac{x}{l}$	$\lambda = 1,875104$ $\lambda^2 = 3,516015$		$\lambda = 4,094091$ $\lambda^2 = 22,034490$		$\lambda = 7,854757$ $\lambda^2 = 61,967207$	
	$\frac{v_1}{l}$	$\frac{v_1''}{l}$	$\frac{v_2}{l}$	$\frac{v_2''}{l}$	$\frac{v_3}{l}$	$\frac{v_3''}{l}$
0,00	0,00000	7,0321	0,00000	44,069	0,00000	123,394
0,05	0,00860	6,5481	0,07215	33,067	0,13407	75,082
0,10	0,03854	6,0644	0,18130	23,168	0,45599	+28,187
0,15	0,07518	5,5872	0,37357	12,853	0,84960	-14,292
0,20	0,12774	5,1016	0,60211	+ 3,086	1,20901	-48,725
0,25	0,19453	4,6253	0,83452	- 5,949	1,44899	-71,748
0,30	0,27297	4,1550	1,05237	-13,975	1,51246	-81,123
0,35	0,36175	3,6933	1,23536	-20,722	1,37613	-76,264
0,40	0,45976	3,2427	1,36694	-25,978	1,05185	-58,445
0,45	0,56590	2,8063	1,43393	-29,580	0,58349	-30,761
0,50	0,67905	2,3875	1,42733	-31,450	+0,03937	+ 2,430
0,55	0,79817	1,9897	1,34247	-31,596	-0,49358	35,999
0,60	0,92227	1,6165	1,17895	-30,120	-0,94752	64,896
0,65	1,05042	1,2719	0,94044	-27,221	-1,23611	85,654
0,70	1,18175	0,9598	0,63421	-23,188	-1,31486	93,314
0,75	1,31549	0,6841	+0,26997	-18,388	-1,16289	89,339
0,80	1,45096	0,4492	-0,14006	-13,267	-0,78974	74,592
0,85	1,58907	0,2643	-0,58331	- 8,320	-0,23166	52,419
0,90	1,72481	0,1180	-1,05146	- 3,995	+0,45637	28,133
0,95	1,86238	0,0303	-1,50070	- 1,590	1,21695	8,273
1,00	2,00000	0,0000	-2,00000	- 0,000	2,00000	0,000

Принимая в качестве формы колебаний синусоиду, нетрудно вывести по формуле (98) путем точного интегрирования, что

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{l^3} E g S}{\gamma T + \frac{1}{l} \sum_0^n W_i v_i^2}}, \quad (99)$$

где E — модуль упругости, кг/см²;

g — ускорение силы тяжести, см/сек²;

γ — удельный вес материала вала, кг/см³;

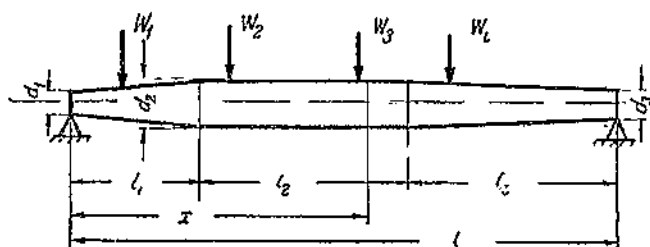
W_i — вес сосредоточенных масс, кг;

l — общая длина вала, см;

F — поперечное сечение вала, см²,

J — момент инерции сечения вала, см⁴;

$$S = \int_0^l F v^2 dx; \quad T = \int_0^l J v^2 d \frac{x}{l}.$$



Фиг. 82. Эскиз вала.

Для вала из трех участков длиной соответственно l_1 , l_2 и l_3 (фиг. 82)

$$S = S_1 + S_2 + S_3;$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Введем обозначения:

$$\chi_1 = \frac{l_1}{l}; \quad \chi_3 = \frac{l_1 + l_2}{l}.$$

Если вал состоит только из цилиндрических участков:

$$S_1 = F_1 \int_0^{\chi_1} v^2 d \frac{x}{l} = F_1 \Theta_{\chi_1};$$

$$S_2 = F_2 \int_{\chi_1}^{\chi_2} v^2 d \frac{x}{l} = F_2 [\Theta_{\chi_2} - \Theta_{\chi_1}] \text{ и т. д.}$$

Аналогично $T_1 = J_1 \Theta_{\chi_1}$, $T_2 = J_2 [\Theta_{\chi_2} - \Theta_{\chi_1}]$ и т. д.

Зависимость Θ от χ дана на фиг. 83.

Для примера (фиг. 83) найдем критическое число оборотов вала двухступенчатого вентилятора. Для каждого из крайних участков вала $F_1 = 113,1 \text{ см}^2$, $J_1 = 1018 \text{ см}^4$. По фиг. 83 при $\chi_1 = 0,25$ $\Theta_{\chi_1} = 0,046$. Отсюда

$$S_1 = 113,1 \cdot 0,046 = 5,21;$$

$$T_1 = 1018 \cdot 0,046 = 46,8.$$

Для среднего участка вала $F_2 = 153,9 \text{ см}^2$; $J_2 = 1886 \text{ см}^4$. $\Theta_{\chi_2} = 0,0454 - 0,046 = 0,408$, откуда $J_2 = 62,8$, а $T_2 = 770$. Таким образом,

$$S = 2 \cdot 5,21 + 62,8 = 73,2;$$

$$S = 2 \cdot 46,8 + 770 = 864.$$

В силу симметричного расположения сосредоточенных масс

$$\frac{1}{I} \sum W_i v_i^2 = 2 \frac{1}{I} W v^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{200} \cdot 400 \cdot 0,853^2 = 2,91,$$

где

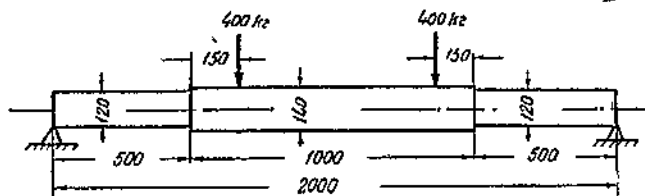
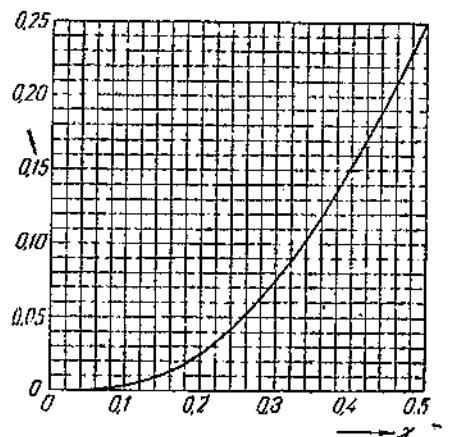
$$v = \sin \pi \frac{x_w}{l} = \sin \left(\pi \cdot \frac{650}{2000} \right) = 0,853.$$

Критическая угловая скорость по формуле (99) составит:

Фиг. 83. Зависимость Θ от χ по Тумаркину [46].

$$\omega_{kp} \approx \frac{\pi^2}{200^2} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 981 \cdot 864}{0,00785 \cdot 73,2 + 2,91}} = 177 \frac{1}{\text{сек}},$$

что соответствует 1690 об/мин.



Фиг. 84. Эскиз вала к примеру.

Если вал имеет конические участки по краям, то

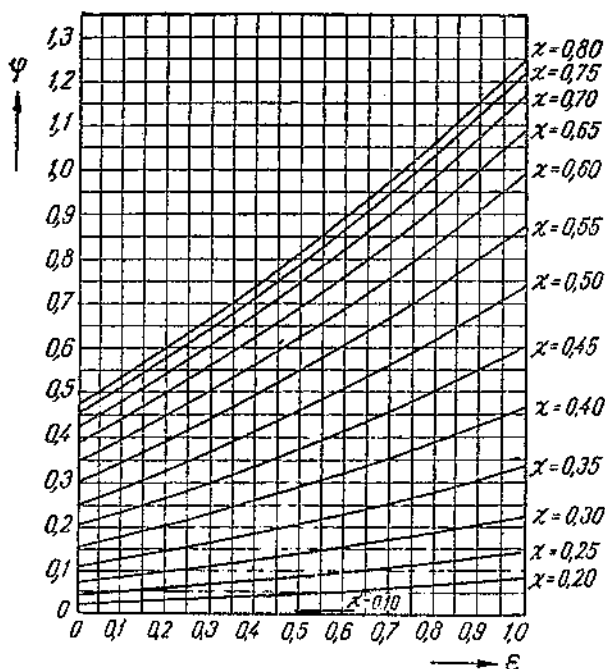
$$S_1 = F_1 \varphi(\chi_1; \epsilon_1), \quad T_1 = J_1 \psi(\chi_1; \epsilon_1),$$

где F_1 и J_1 — площадь и момент инерции наименьшего сечения конического участка (d_1);

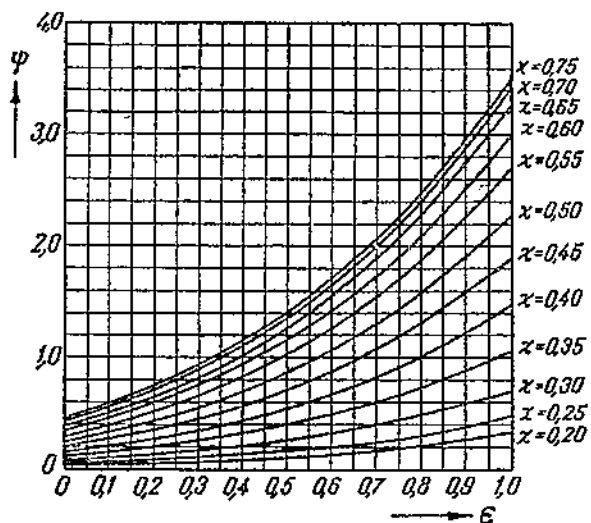
$$\epsilon = \frac{d_2 - d_1}{d_1};$$

$d_2 > d_1$ — диаметры крайних сечений участка.

Зависимости φ от χ , ϵ и ψ от χ , ϵ даны на фиг. 85 и 86.



Фиг. 85. Зависимость ψ от χ и ϵ по Тумаркину [46].

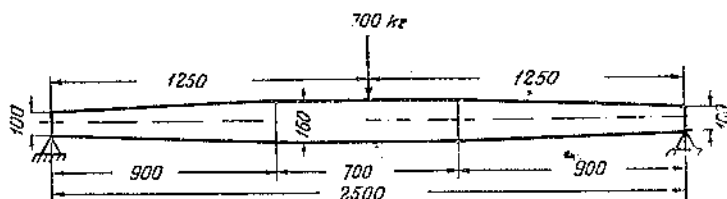


Фиг. 86. Зависимость ψ от χ и ϵ по Тумаркину [46].

В качестве примера вала с коническими участками рассмотрим вал дымососа (фиг. 87).

Для обоих конических участков в силу симметрии получим одинаковые значения всех величин.

$$F_1 = 78,5 \text{ см}^2; J_1 = 491 \text{ см}^4; \\ e_1 = 0,6; \chi_1 = 0,36.$$



Фиг. 87. Эскиз вала к примеру.

Из фиг. 85 и 86 находим: $\varphi = 0,25$; $\psi = 0,53$. Таким образом

$$S_1 = 78,5 \cdot 0,25 = 19,6 = S_3;$$

$$T_1 = 491 \cdot 0,53 = 260 = T_3.$$

Дальнейшее решение производится, как и в предыдущем примере.

§ 5. Методы последовательных приближений для определения критических скоростей валов переменного сечения. Определение оборотов

Решение вопроса о нахождении частот собственных колебаний и критических скоростей при помощи энергетического метода дано без учета влияния побочных факторов в предыдущем параграфе.

Учитывая, что одной из наиболее важных задач настоящего раздела является определение критических скоростей валов, в этом параграфе помещаем ряд методов последовательных приближений и некоторые дополнительные соображения по данному вопросу, которые могут быть использованы и для различных случаев расчета поперечных колебаний. Вопросы влияния побочных факторов на частоты собственных колебаний и критические скорости будут рассмотрены в § 6.

Рассмотрим расчет первой критической скорости по методу Стодола для двухопорного вала переменного сечения, несущего ряд нагрузок (фиг. 88).

Прежде всего производится построение статической упругой линии вала от действия сил веса, для чего обычно пользуются графическим способом Мора. Затем, задавшись какой-нибудь угловой скоростью вращения вала ω_0 , определяют центробежные силы масс системы.

Для массы i центробежная сила

$$F_i = m_i \varphi_b \omega_0^2 \text{ кг},$$

где m_i — масса, $\text{кгсм}^{-1}\text{сек}$;

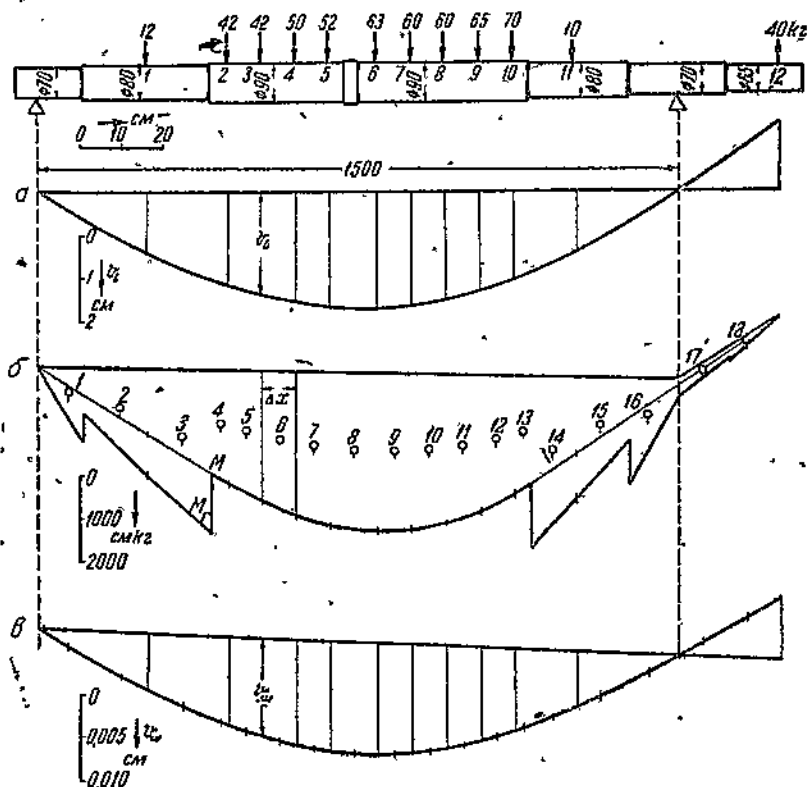
φ_b — ордината упругой линии изгиба от веса, см ;

ω_0 — угловая скорость вала, задаваемая обычно числом, кратным десяти; в данном примере принимается $\omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$.

После этого производится построение упругой линии от центробежных сил при помощи того же способа Мора. Если форма полученной таким образом упругой линии близка к форме упругой линии от сил веса, т. е. последняя близко совпадает с формой основных колебаний, то первая критическая скорость определится по формуле

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{v_b}{v_\omega}\right)_{cp}}, \quad (100)$$

где $\left(\frac{v_b}{v_\omega}\right)_{cp}$ — среднее значение из близких между собой отношений ординат упругих линий v_b и v_ω для ряда точек вала.



Фиг. 88. К примеру расчета первой критической скорости двухопорного вала по методу Стодола.

a — статическая упругая линия; *б* — эпюра изгибающих моментов; *в* — упругая линия от центробежных сил.

Как видно из табл. 15, для данного примера среднее значение отношения $\left(\frac{v_b}{v_\omega}\right) = 209,5$, причем отклонение от него для отдельных точек не превышает 2,5%. Таким образом, здесь

$$\omega_1 = 10 \sqrt{209,5} = 144,5 \text{ сек}^{-1}.$$

Если бы расхождение между заданной и полученной упругими линиями получилось значительным, то следовало бы, приняв полученную упругую

Таблица 15

№ массы	W_i кг	m кгсм ⁻¹ сек ²	J см ⁴	v_b см	F_i кг	v_ω см	$\frac{v_b}{v_\omega}$	Отклоне- ние от $\left(\frac{v_b}{v_\omega}\right)_{cp}$ %
1	12	0,0122	201	1,42	1,73	0,00675	210,5	0,5
2	42	0,0429	322	2,14	9,2	0,0103	208	-0,7
3	42	0,0429	322	2,35	10,1	0,0114	206	-1,6
4	50	0,0510	322	2,52	12,85	0,0122	206,3	-1,5
5	52	0,0530	322	2,63	13,9	0,0127	207	-1,2
6	63	0,0642	322	2,65	17	0,0128	207	-1,2
7	60	0,0612	322	2,60	15,9	0,0124	209,2	0
8	60	0,0612	322	2,47	15,1	0,0118	209,2	0
9	65	0,0662	322	2,27	15,1	0,0108	210	0
10	70	0,0714	322	2,00	14,3	0,00945	212	+1
11	10	0,0102	201	1,35	1,4	0,0063	214	+2
12	40	0,0408	87,6	-1,55	6,3	0,0072	215	+2,5

Примечание. $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см²
 $\omega_0 = 10$ сек⁻¹.

Средн. $\frac{2514}{12} = 209,5$.

линию за исходную, повторить расчет в описанной выше последовательности, т. е. прибегнуть, таким образом, к методу последовательных приближений.

При нахождении частот собственных колебаний и критических скоростей путем последовательных приближений весьма целесообразно пользоваться так называемым способом φ^2 Граммеля, по которому следующее приближение для частоты собственных колебаний или критической скорости находится по данным предыдущего приближения по формуле

$$\omega^2 = \frac{\sum m_i v_{i(n-1)}^2}{\sum m_i v_{i(n)} v_{i(n-1)}}, \quad (101)$$

где m_i — масса i системы кгсм⁻¹сек²;

$v_{i(n-1)}$ — ординаты упругой линии, которой предварительно задаемся в расчете при первом приближении, или получаем из расчета предыдущего приближения;

$v_{i(n)}$ — ординаты упругой линии от центробежных сил или сил инерции, подсчитанной по заданной упругой линии $v_{i(n-1)}$ при $\omega_0 = 1$ сек⁻¹.

Если ординаты упругой линии от центробежных сил $v_{i(n)}$ определять при некоторой угловой скорости $\omega_0 \neq 1$ сек⁻¹, то формула (101) примет вид:

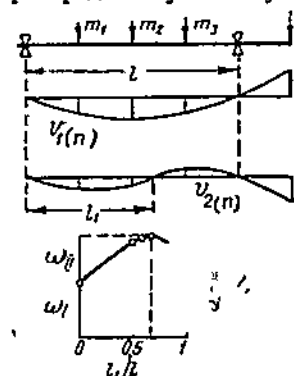
$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{\sum m_i v_{i(n-1)}^2}{\sum m_i v_{i(n)} v_{i(n-1)}}. \quad (101a)$$

Из формулы (101a) не трудно получить формулу (100) как предельный случай при совпадении заданной и полученной форм упругих линий.

Подобным же образом поступаем при определении первых критических скоростей многоопорных валов.

Как и в предыдущем случае, задаемся упругой линией изгиба, которая удовлетворяла бы граничным условиям на опорах и приближалась к первой форме свободных колебаний.

Для этого можно воспользоваться упругой линией статического изгиба от сил веса, принимая последние противоположно направленными в смежных пролетах. Получение ее требует, однако, дополнительной работы. С достаточным приближением можно задаваться, как указывалось в § 4, упругими линиями систем, аналогичных рассматриваемой, с точки зрения условий закрепления на опорах и сопряжения отдельных пролетов, но имеющих для отдельных пролетов постоянное сечение и равномерно распределенную массу. Эти упругие линии часто могут быть найдены значительно проще.



Фиг. 89. Изменение частоты собственных колебаний вала постоянного сечения в зависимости от положения узла.

Если же положение узловых точек неизвестно, то необходимо прежде всего задаться их расположением.

Если же положение узловых точек неизвестно, то необходимо прежде всего задаться их расположением.

Следуя К. Гогенемзер, принимаем следующий критерий: „если к заданной системе присоединить n добавочных опор, то основная частота этой видоизмененной системы будет при изменении положения опор иметь абсолютный максимум при совпадении их с узлами n -го обертона и этот максимум совпадает с частотой n -го обертона первоначальной системы“.

В качестве примера рассмотрим вал постоянного сечения (фиг. 89). При расположении дополнительной опоры непосредственно у левой основной опоры ($l_1 = 0$) первая частота собственных колебаний вала будет ω_1 , а форма колебаний будет иметь вид, обозначенный на фиг. 89 $v_{1(n)}$. При различных положениях дополнительной опоры между основными первая частота собственных колебаний вала будет изменяться в зависимости от отношения $\frac{l_1}{l}$, причем при увеличении этого отношения от нуля частота собственных колебаний увеличивается до некоторого максимума, после чего начинает уменьшаться. Максимальная величина частоты соответствует первому обертому или второй критической скорости вала,

а величина I_1 , при которой она получается, соответствует расположению узла колебаний.

Как видно из фиг. 89, небольшая ошибка в оценке места расположения узла приводит лишь к ничтожной погрешности в определении частоты или критической скорости. Следует подчеркнуть, что ошибка всегда будет в сторону преуменьшения второй критической скорости. Таким образом для валов, работающих в диапазоне „надкритических“ скоростей, т.е. между первой и второй критической скоростями, действительный частотный запас будет всегда больше расчетного, полученного при приближенном определении расположения узла колебаний.

Чтобы сразу выбрать положение дополнительной опоры возможно ближе к узлу, следует руководствоваться также тем соображением, что опорная реакция в ней должна быть равна нулю. Для простоты при этом можно считать, что вал нагружен не центробежными силами, а равномерно распределенной нагрузкой, претерпевающей разрыв и меняющей направление в месте установки дополнительной опоры.

Для приближенного определения высших частот собственных колебаний или высших критических скоростей стержней и валов переменного сечения без сосредоточенных масс может быть также применена формула

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{\left[\int_0^l \sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}} dx \right]^2}, \quad (102)$$

где λ — определяется по § 2 для стержня постоянного сечения, аналогичного рассматриваемому по условиям закрепления.

С увеличением порядка собственного колебания k точность формулы (102) будет возрастать. Как указывают Гогенемзер и Прагер, точность ее практически достаточна уже для второй частоты собственных колебаний.

В заключение настоящего параграфа укажем, что между рабочей угловой скоростью валов Ω и критической скоростью ω должно быть следующее соотношение:

- 1) при работе в „докритической“ зоне: $\omega_I \geq 1,3 \Omega$;
- 2) при работе в „надкритической“ зоне: $1,4 \omega_I < \Omega < 0,7 \omega_{II}$.

§ 6. Влияние побочных факторов на частоты собственных колебаний стержней и критические скорости валов

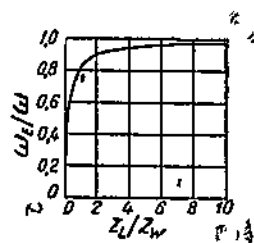
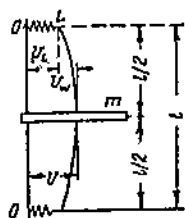
В предыдущем изложении не рассматривался вопрос о влиянии ряда побочных факторов на частоту собственных колебаний стержней и критическую скорость валов. В данном параграфе приводим для наиболее важных случаев соответствующие поправки к рассмотренным выше методам расчета или показываем ограничения, которые наличие данных факторов налагает на применимость изложенных методов расчета.

Выше мы принимали, что опоры являются абсолютно жесткими. Чтобы оценить погрешность, приносимую этим допущением, рассмотрим систему, данную на фиг. 90.

Если жесткости обеих опор в плоскости колебаний равны между собой и составляют каждая Z_L , а жесткость балки, определенная в соответствии с §1, Z_w , то суммарная жесткость равна

$$\frac{1}{\frac{1}{Z_w} + \frac{1}{2Z_L}}$$

Таким образом, поправка, учитывающая жесткость опор к частоте собственных поперечных колебаний, определенной без учета этой жесткости, составит:



Фиг. 90. Схема системы к примеру учета жесткости опор.

Фиг. 91. Поправка на жесткость опор.

$$\frac{\omega_L}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{Z_w}{2Z_L}}} \quad (103)$$

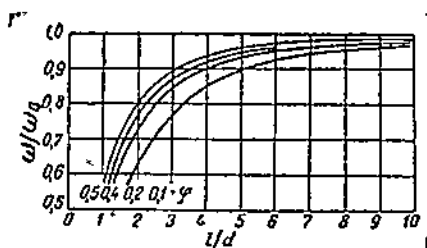
Зависимость (103) дана на фиг. 91.

В предыдущих параграфах не было принято во внимание также влияние поперечных сил. Такое допущение будет справедливо для стержней, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной.

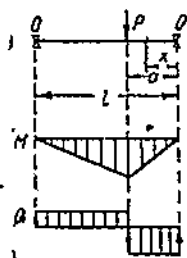
На фиг. 92 для круглого вала постоянного сечения (фиг. 93) дана зависимость

$$\frac{\omega_q}{\omega} = f\left(\frac{l}{d}\right)$$

при различных значениях φ , где $\frac{\omega_q}{\omega}$ — отношение частоты собственных колебаний, определенной с учетом поперечных сил, к частоте, опреде-



Фиг. 92. Поправка на влияние поперечных сил.



Фиг. 93. Схема системы к примеру учета влияния поперечных сил.

ленной без учета последних; $\frac{l}{d}$ — отношение длины к диаметру вала; $\varphi = \frac{a}{2}$ — отношение соответствующих размеров по фиг. 93, характеризующее расположение сосредоточенной массы.

При определении частот собственных колебаний высших порядков, когда между узловыми поперечными сечениями заключаются сравнительно

небольшие участки, учет влияния поперечных сил может иметь существенное значение и для длинных стержней.

Влияние статически приложенной продольной силы на первую частоту собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega_{np} = \omega \sqrt{1 + N}, \quad (104)$$

где ω_{np} — низшая частота собственных колебаний при наличии продольной силы;

ω — низшая частота собственных колебаний при отсутствии продольной силы;

N — отношение продольной силы к критической силе для продольного изгиба в плоскости колебания. При растягивающей силе N положительно.

Момент от сил инерции, вращения какой-либо массы системы, возникающей благодаря повороту сечений при поперечных колебаниях; может быть выражен следующим образом:

$$M_i = -\theta_i \omega^2 \beta_i, \quad (105)$$

где θ_i — экваториальный момент инерции массы i вокруг оси поворота, кгсмсек^2 ;

ω — круговая частота колебаний, сек^{-1} ;

β_i — амплитуда угла поворота, принимаемая для малых колебаний равной первой производной амплитуды прогиба.

Знак минус показывает, что момент в данном случае увеличивает изгиб, т.е. понижает частоту собственных колебаний. Поправочный коэффициент, представляющий отношение частоты собственных колебаний при учете инерции вращения к частоте собственных колебаний, определенной без учета инерции вращения, равен:

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{\int_0^l \theta(x) v'(x)^2 dx + \sum_0^n \theta_i v'^2(x_i)}{\int_0^l \mu(x) v(x)^2 dx + \sum_n m_i v(x_i)^2}}}, \quad (106)$$

где, кроме встречающихся выше в § 4 обозначений, θ_i — моменты инерции сосредоточенных масс относительно оси поворота, кгсмсек^2 ; $\theta_{(x)}$ — момент инерции распределенной массы стержня на единицу длины, кг/сек^2 ; $v'_{(x)}$ — для малых колебаний может быть принято равным амплитуде угла поворота сечения x .

Так как в формулу (106) входят значения не только ординат упругой линии, но и углов поворота, то для правильного учета влияния инерции вращения следует обращать большое внимание на необходимость хорошего совпадения принятой упругой линии с формой собственных колебаний. При этом форма колебаний будет, благодаря наличию изгибающих моментов от сил инерции вращения масс, отличаться от формы свободных колебаний, определенной в предположении, что инерция вращения отсутствует. Для обычных случаев можно, однако, пользоваться последней, так как инерция вращения сказывается незначительно.

Гироскопический момент какой-либо массы вращающегося вала, возникающий благодаря отклонению оси вращения, выражается следующим образом:

$$M_i = (\theta_{pi} - \theta_i) \omega^2 \beta_i, \quad (107)$$

где θ_{pi} — полярный момент инерции массы i относительно оси вращения, кгсмсек², остальные обозначения те же, что и в формуле (105).

Формула (107) относится к случаю положительной прецессии (Gleichlauf), т. е. когда угловая скорость плоскости изогнутого вала равна по величине и совпадает по направлению с угловой скоростью вала, что обычно имеет место при разгоне от нуля до критической скорости. Так как $\theta_{pi} > \theta_i$, гироскопический момент в данном случае

уменьшает изгиб вала, т. е. повышает критическую скорость. Получающиеся при этом эпюры моментов показаны для простейшего примера (фиг. 94).

В некоторых случаях, при наличии возбуждающих сил соответствующей частоты, может иметь место отрицательная прецессия (Gegenlauf), т. е. вращение плоскости изогнутого вала с угловой скоростью, равной по величине, но противоположной по направлению угловой скорости вала.

При этом гироскопический момент какой-либо массы выразится:

$$M_i = -(\theta_{pi} + \theta_i) \omega^2 \beta_i, \quad (107a)$$

где обозначения те же, что и в формулах (105) и (107). Знак минус показывает, что в данном случае гироскопический эффект понижает критическую скорость вала.

Фиг. 94. Влияние гироскопического эффекта на форму эпюры моментов.

Формулы (107) и (107a) можно записать несколько иначе, введя в них величину $q = \frac{\theta_p}{\theta_i}$. При этом, например, для положительной прецессии получим:

$$M_i = \theta_i (q_i - 1) \omega^2 \beta_i. \quad (107б)$$

Для цилиндрических сплошных дисков

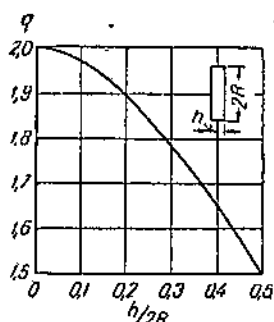
$$\begin{aligned} \theta_p &= \frac{mR^2}{2}, \\ \theta &= \frac{m(3R^2 + h^2)}{12}, \end{aligned}$$

где m — масса диска, кгсек²/см;
 R — радиус диска, см;
 h — толщина диска, см.

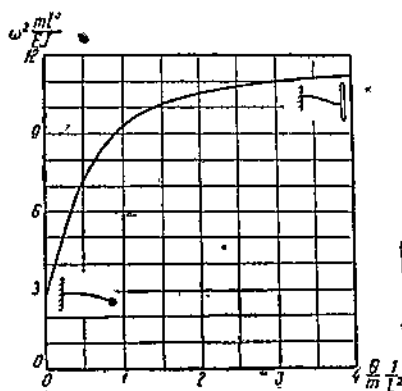
На фиг. 95 дана зависимость q от $\frac{h}{2R}$, из рассмотрения которой видно, что для тонких дисков значение q приближается к двум. В этом случае гироскопический момент при положительной прецессии будет:

$$M_l = \theta_l \omega^2 \beta_l. \quad (107в)$$

На фиг. 96 показано влияние гироскопического эффекта на критическую скорость консольного вала, несущего на одном конце диск массой m и имеющего на другом два близко расположенных подшипника, которые могут рассматриваться, как жесткая заделка. На конец вала действует сила $P = m\omega^2 v_l$ и гироскопический момент $M = \theta\omega^2 v_l$,



Фиг. 95. Зависимость q от $\frac{h}{2R}$ для цилиндрических сплошных дисков.



Фиг. 96. Зависимость $\omega^2 \frac{ml^3}{EJ}$ от $\frac{0}{m} \cdot \frac{1}{l^2}$ для консольного вала.

где v_l — амплитуда отклонения конца консоли. По оси абсцисс (фиг. 96) отложено отношение $\frac{0}{m} \cdot \frac{1}{l^2}$, где l — длина консоли, а по оси ординат — величина, пропорциональная квадрату критической скорости $\omega^2 \frac{ml^3}{EJ}$. Как видно из фиг. 96, критическая скорость может здесь в пределе возрасти в два раза.

Поправочный коэффициент, учитывающий влияние гироскопического эффекта, напоминает формулу (106). При положительной прецессии

$$\frac{\omega_\theta}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{\sum_0^n \theta_i (q_i - 1) v_i'^2(x_i)} + \int_0^l f_0(x) v_1'^2(x) dx}{\sum_0^n m_i v_i^2(x_i) + \int_0^l \mu(x) v(x)^2 dx}}. \quad (107г)$$

При отрицательной прецессии

$$\frac{\omega_\theta}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{\sum_0^n \theta_i (q_i + 1) v_i'^2(x_i)} + 3 \int_0^l f_0(x) v_1'^2(x) dx}{\sum_0^n m_i v_i^2(x_i) + \int_0^l \mu(x) v(x)^2 dx}}. \quad (107д)$$

Обозначения в формулах (107г) и (107д) те же, что и в формулах (106) и (107). Замечания, сделанные выше по поводу формулы (106), остаются в силе.

Выше мы полагали, что экваториальные моменты инерции θ , данной массы l равны между собой. Имеется ряд случаев, когда экваториальные моменты инерции неодинаковы (двухлопастные пропеллеры, роторы синхронных машин и т. д.). При этом вместо определенного значения критической скорости, вследствие гироскопического эффекта, получаем целую зону скоростей, при которых движение будет неустойчиво. Наибольшая и наименьшая критические скорости, ограничивающие эту зону, определяются путем нахождения поправок по формулам (107г) и (107д) соответственно по наименьшему и наибольшему экваториальным моментам инерции.

В заключение укажем также, что увеличение жесткости валов вследствие наличия ступиц может значительно повысить критическую скорость. Учет влияния ступиц, надетых на вал в горячем состоянии, может быть ориентировочно произведен путем рассмотрения их как участков вала увеличенного диаметра. Для уточнения требуются опытные данные.

§ 7. Мембраны, пластинки, диски, кольца

Мембрана — идеально гибкая однородная пластинка, равномерно натянутая по контуру.

Круговая частота собственных колебаний мембраны равна

$$\omega = a \sqrt{\frac{p}{m}} \text{ сек}^{-1}, \quad (108)$$

где p — напряжение на единицу периметра в кг/см; m — масса мембраны в кгсек²/см.

Значения постоянной a для круглой мембраны приведены в ниже следующей таблице, где n — число узловых диаметров, а s — число узловых окружностей.

$\begin{matrix} n \\ s \end{matrix}$	0	1	2	3
1	4,261	6,792	9,102	11,306
2	9,784	12,436	14,919	17,299
3	15,339	18,031	20,596	23,072
4	20,901	23,614	26,225	28,756

Для основной частоты собственных колебаний мембран других конфигураций значения a составляют:

Конфигурация мембраны	a
Квадрат	4,443
Квадрант (четверть круга)	4,551
Сектор 60°	4,616
Прямоугольник с отношением сторон 3:2	4,624
Равносторонний треугольник	4,774
Полукруг	4,803
Прямоугольник с отношением сторон 2:1	4,967
Прямоугольник с отношением сторон 3:1	5,736

Круговая частота собственных колебаний пластинки равна:

$$\omega = A \sqrt{\frac{D}{\mu}} \text{ сек}^{-1}, \quad (108a)$$

где μ — масса единицы площади, в $\text{кгсек}^2/\text{см}^2$; D — жесткость пластинки

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ кгсм}, \quad (108б)$$

причем E — модуль упругости в кг/см^2 ; h — толщина пластинки в см ;

ν — коэффициент Пуассона (при определении α ниже принято $\nu = 0,3$).

Для прямоугольной пластинки с опертыми краями

$$A = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right), \quad (108в)$$

где a и b — размеры пластинки в см ; l и k — целые числа, характеризующие форму колебаний (для основной частоты $l = k = 1$).

Для круглой пластинки радиусом r в см

$$A = \frac{\alpha}{r^2}. \quad (108г)$$

При защемленном контуре значения α составляют (n — число узловых диаметров, s — число узловых окружностей):

$s \backslash n$	0	1	2
1	10,21	21,22	84,84
2	39,78	—	—
3	88,90	—	—

Для свободной круглой пластинки значения α составляют:

$s \backslash n$	0	1	2	3
1	—	—	5,251	12,23
2	9,076	20,52	35,24	52,91
3	38,52	59,86	—	—

Для круглой пластинки, защемленной в центре (диск), при формах колебаний, имеющих узловые диаметры, значения α те же, что и для подобных им форм свободной пластинки. Низшей форме колебаний диска (вонтичной $s = 0, n = 0$) соответствует $\alpha = 3,75$.

Частота собственных колебаний вращающегося диска ω_{sp} возрастает за счёт эффекта центробежных сил:

$$\omega_{sp} = \sqrt{\omega^2 + B\Omega^2} \text{ сек}^{-1}, \quad (108д)$$

где ω — круговая частота собственных колебаний диска из формулы (108 а); Ω — угловая скорость вращения диска в сек^{-1} . Значения B для диска постоянной толщины приведены в таблице:

$s \backslash n$	0	1	2	3
0	0	1	2,35	4,05

Для однородного кольца круговая частота изгибных колебаний в его плоскости составляет

$$\omega_i = \frac{i(i^2 - 1)}{\sqrt{1 + \beta}} \sqrt{\frac{EJ}{\rho R^4}} \text{ сек}^{-1}, \quad (108 \text{ е})$$

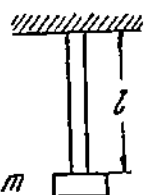
где i — целое число, характеризующее форму колебаний (основной частоте соответствует $i=2$); R — радиус кольца, в см ; ρ — масса единицы длины кольца, $\text{кгсек}^2/\text{см}$; EJ — жесткость на изгиб, кгсм^2 . Подставляя в уравнение (108 е) значения $i=3$; $i=4$, ..., получаем частоты обертонов.

ГЛАВА VI

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Определение частот собственных продольных колебаний стержней

Для определения частоты собственных продольных колебаний стержня (фиг. 97а), закрепленного одним концом и несущего на другом конце сосредоточенную массу, по сравнению с которой собственной массой стержня можно пренебречь, справедлива формула



$$\omega = \sqrt{\frac{Z}{m}} \text{ сек}^{-1}, \quad (109)$$

где m — масса, сосредоточенная на конце стержня, $\text{кгсек}^2/\text{см}$;

Z — жесткость стержня, измеряющаяся силой, которая, будучи приложена к незакрепленному концу стержня, вызовет деформацию, равную единице, кг/см . Формула (109) может быть преобразована в (109 а):

Фиг. 97а. Стержень с массой на конце.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}} \text{ см}}} \text{ сек}^{-1}, \quad (109 \text{ а})$$

где g — ускорение силы тяжести, см/сек^2 ;

$v_{\text{ст}} \text{ см}$ — статическая деформация в точке расположения сосредоточенной массы под действием ее веса, см .

Отсюда число колебаний в минуту составляет

$$N = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}} \text{ см}}} \approx \frac{300}{\sqrt{v_{\text{ст}} \text{ см}}}. \quad (109 \text{ б})$$

Определение частот собственных продольных колебаний призматического стержня, заделанного одним концом и несущего на другом конце сосредоточенную массу, с учетом распределенной массы может быть произведено по формуле

$$\omega = \frac{\beta}{l} \sqrt{\frac{E \cdot g}{\gamma}} \text{ сек}^{-1}, \quad (110)$$

где E — модуль упругости материала стержня при растяжении, кг/см^2 ;
 g — ускорение силы тяжести, см/сек^2 ;
 γ — удельный вес материала стержня, кг/см^3 ;
 l — длина стержня, см ;
 β — корни уравнения (111);

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\alpha}. \quad (111)$$

где α — отношение массы, сосредоточенной на конце стержня, к массе стержня.

Решение уравнения (111) удобнее всего производить графическим путем. Для нахождения наименьшего корня уравнения — β_1 , соответствующего основной частоте колебаний системы, можно непосредственно воспользоваться данными табл. 16.

Таблица 16

$\frac{1}{\alpha}$	β_1	$\frac{1}{\alpha}$	β_1	$\frac{1}{\alpha}$	β_1	$\frac{1}{\alpha}$	β_1
0,01	0,10	0,60	0,70	2,0	1,11	8,0	1,40
0,05	0,22	0,70	0,75	3,0	1,20	9,0	1,41
0,10	0,32	0,80	0,79	4,0	1,27	10,0	1,42
0,20	0,43	0,90	0,82	5,0	1,32	15,0	1,47
0,30	0,52	1,00	0,86	6,0	1,37	20,0	1,53
0,40	0,59	1,50	0,98	7,0	1,39	∞	1,57
0,50	0,65						

Формулу (110) для ряда случаев удобно преобразовать следующим образом:

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{g}{v_{c.ст}}}, \quad (112)$$

где $v_{c.ст}$ — статическая деформация стержня под действием его веса, приложенного целиком к незакрепленному концу, на котором расположена сосредоточенная масса. Если масса стержня меньше, чем масса, сосредоточенная на конце, то для определения основной частоты колебаний системы с большой точностью может быть применена формула

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{v_{np}}}, \quad (113)$$

где $v_{np} = v_{x.ст} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)$ — статическая деформация в точке расположения сосредоточенной массы под действием веса этой массы и $\frac{1}{3}$ веса самого стержня, приложенного там же.

Для стержня, несущего на одном конце сосредоточенную массу и имеющего второй конец свободным, частоты собственных продольных колебаний определяются по формуле (110) или (112). При этом для каждого случая значения β находятся путем решения уравнения

$$\operatorname{tg} \beta + \beta z = 0. \quad (114)$$

Уравнение (114) так же, как (111), удобнее всего решать графически.

В общем случае стержня, несущего на концах сосредоточенные массы m_1 и m_2 , частоты собственных продольных колебаний определяются по формуле (110) или (112), причем значения β находятся путем решения уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \beta}{\alpha_1 \alpha_2 \beta^2 - 1}, \quad (115)$$

где α_1 и α_2 — соответственно отношения сосредоточенных масс m_1 и m_2 к распределенной массе стержня.

Определение частот собственных продольных колебаний призматического стержня, не несущего сосредоточенных масс, может быть произведено в зависимости от условий закрепления на концах по следующим формулам, представляющим частные случаи применения формулы (115).

Для стержня с обоими свободными концами или с обоими закрепленными концами

$$\omega_i = \frac{\pi i}{l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = \pi i \sqrt{\frac{g}{v_{с.см.}}}; \quad (116)$$

для стержня с одним свободным и другим закрепленным концом

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = \frac{(2i-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{v_{с.см.}}}, \quad (117)$$

где i — целое число, соответствующее порядку колебания, остальные обозначения те же, что и в формулах (110) и (112).

Приведенные в данном параграфе формулы выведены в предположении, что боковыми деформациями можно пренебречь.

§ 2. Определение частот собственных продольных колебаний витых пружин

Частота собственных колебаний длинных витых пружин может быть с практически достаточной точностью определена по формулам предыдущего параграфа. При этом имеется в виду, что отдельные витки пружины не приходят в соприкосновение, а также не сказывается влияние заделки концевых витков.

Для пружины (фиг. 976), закрепленной одним концом и несущей на другом сосредоточенную массу, по сравнению с которой собственной массой можно пренебречь, справедливы формулы (109), (109а) и (109б). При пользовании этими формулами жесткость определяется обычными методами сопротивления материалов.

Например для цилиндрических пружин из круглой проволоки жесткость может быть определена по формуле

$$Z = \frac{G \pi d^4}{32 R^2 l}, \quad (118)$$

где G — модуль упругости при сдвиге, кг/см^2 ;

d — диаметр прутка (проволоки), см ;

R — радиус витка пружины, см ;

l — длина прутка (проволоки), см .

Определение частот собственных продольных колебаний цилиндрической пружины с учетом массы в зависимости от условий на концах ее может быть произведено по формулам (112), (116) и (117). При этом β определяется, как и в предыдущем параграфе, из уравнений (111), (114) и (115).

Большой практический интерес представляет определение основной частоты собственных колебаний в том случае, когда пружина зажата с обеих сторон. Из формул (112) и (118) можно вывести выражение основной частоты собственных колебаний для цилиндрических пружин из круглой проволоки

$$\omega = 22,2 \frac{d}{i D^2} \sqrt{\frac{G}{\gamma}} \text{ сек}^{-1}, \quad (119a)$$

где d — диаметр прутка (проволоки), см ;

D — диаметр витка, см ;

i — число витков, см ;

G — модуль упругости при сдвиге, кг/см^2 ;

γ — удельный вес, кг/см^3 .

Для стальных пружин из (119a) число собственных колебаний в минуту составляет

$$N_1 = 2148 \cdot 10^3 \frac{d}{i D^2}. \quad (119b)$$

Определение N_1 для стальных пружин может быть произведено при помощи номограммы фиг. 98.

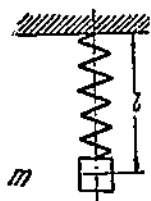
Для пружины, закрепленной одним концом и несущей сосредоточенную массу в другом, основная частота продольных колебаний может быть определена по формуле (113) с достаточной точностью, если сосредоточенная масса равна или больше массы пружины.

Входящая в формулу (113) величина $v_{пр}$ определяется по формуле

$$v_{пр} = v_{м.ст} \left(1 + \frac{\xi}{\alpha} \right), \quad (120a)$$

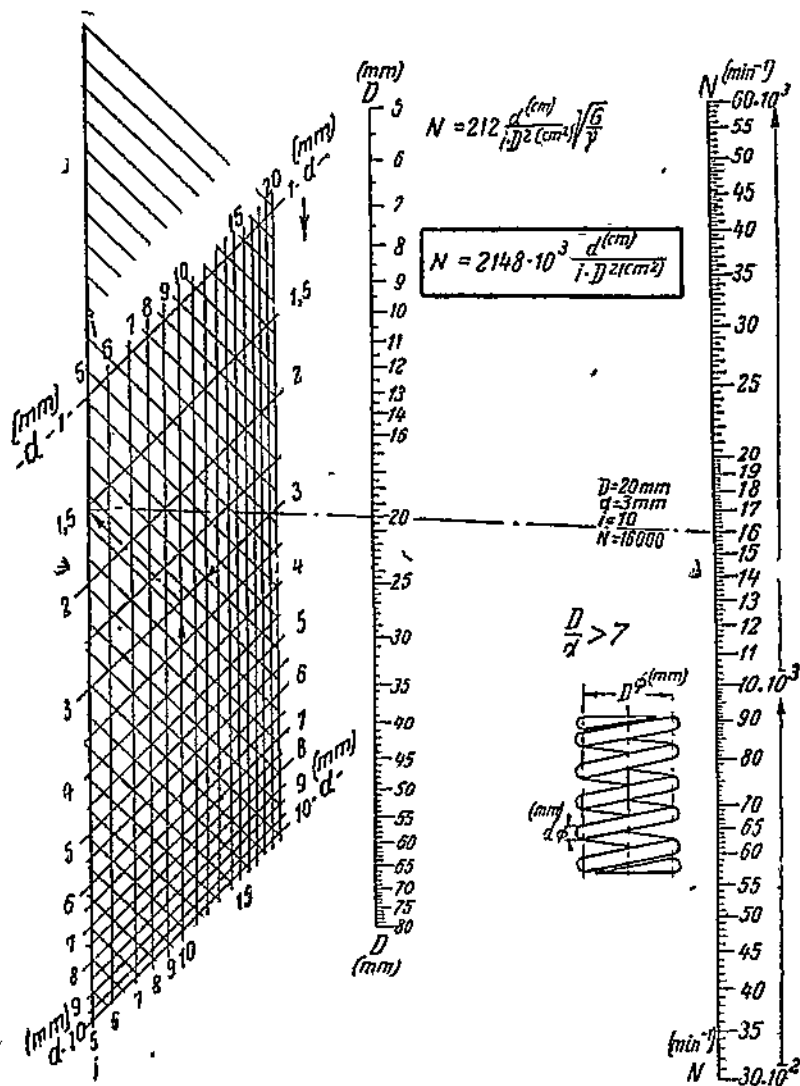
где $v_{м.ст}$ — статическая деформация пружины в точке расположения сосредоточенной массы под действием ее веса, см ;

α — отношение массы, сосредоточенной на конце пружины, к массе пружины;



Фиг. 976. Пружина с массой на конце.

ξ — коэффициент приведенной массы пружины, учитывающий, какая часть распределенной массы пружины должна быть приложена к массе, сосредоточенной на конце; для цилиндрической пружины



Фиг. 98. Номограмма для определения числа колебаний в минуту цилиндрических стальных пружин [52].

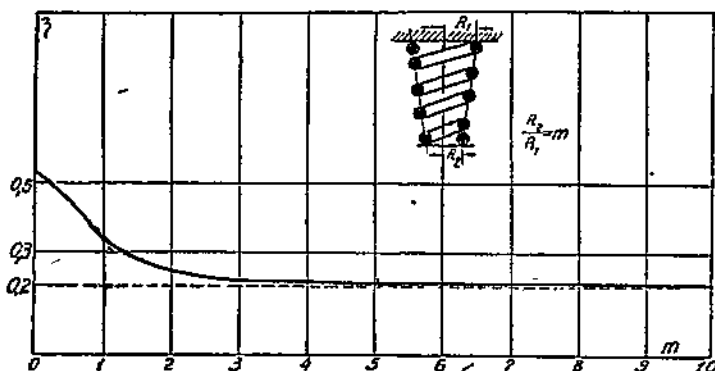
$\xi = \frac{1}{3}$, т. е. $v_{пр} = v_{м.ст} \left(1 + \frac{1}{3\xi}\right)$ так же, как и для призматического стержня.

Для конической пружины, проекцией которой является архимедова спираль, коэффициент приведенной массы зависит от соотношения радиусов

пружины у места закрепления R_1 и у сосредоточенной массы R_2 . По Пономареву и Шершевскому:

$$\xi = \frac{3m^{10} - 10m^6 + 15m^2 - 8}{15(m^2 - 1)(m^4 - 1)^2}, \quad (1206)$$

где $m = \frac{R_2}{R_1}$. Зависимость $\xi = f(m)$ приведена на фиг. 99.



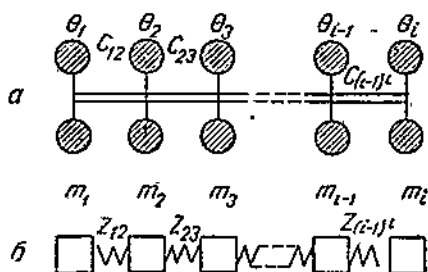
Фиг. 99. Приведенная масса конической пружины [51].

Выше мы рассматривали лишь продольные колебания пружины с сосредоточенной массой на конце. Определим частоту крутильных колебаний сосредоточенной массы вокруг оси пружины. При малом угле подъема пружины, что имеет обычно место, оба вида колебаний могут рассматриваться раздельно. Соотношение частот собственных продольных ω_n и крутильных ω_k колебаний массы составляет:

$$\frac{\omega_n}{\omega_k} = \frac{K}{R} \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}, \quad (121)$$

где K — радиус инерции сосредоточенной массы относительно оси пружины;

R — радиус витков пружины;
 ν — коэффициент Пуассона для материала пружины.



Фиг. 100. Эквивалентные системы продольных и крутильных колебаний.

Для определения частот собственных продольных колебаний сложных систем из пружин и стержней могут быть применены методы расчета, приведенные в § 3—6 гл. II. Например аналогом схемы расчета крутильных колебаний (фиг. 100, а) служит схема расчета продольных колебаний (фиг. 100, б), в которой сосредоточенные массы m_i кгсек²/см соответствуют моментам инерции θ_i кгсмсек², а аксиальные жесткости Z_i кг/см соответствуют жесткостям при кручении C_i кгсм (см. табл. 1).

Определение частот собственных крутильных колебаний длинного валопровода при различных условиях закрепления его концов и различных соотношениях моментов инерции масс, сосредоточенных на

его концах, производится аналогично определению частот собственных продольных колебаний по формулам (110), (111), (114) и (115).

При этом формуле (110) соответствует формула (122):

$$\alpha = \frac{\beta}{l} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}, \quad (122)$$

где G — модуль упругости материала валопровода при сдвиге, кг/см^2 ;

l — длина вала, см ;

β — корень уравнения, определяемый из формул (111), (114) или (115) в зависимости от условий на концах валопровода. В данном случае α — отношение момента инерции массы, сосредоточенной на конце валопровода, к моменту инерции массы валопровода; остальные обозначения формулы (122) такие же, как и в формуле (110).

ГЛАВА V

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИМЕНЕНИИ К ВИБРАЦИОННЫМ РАСЧЕТАМ

§ 1. Механическое моделирование

Вибрационные расчеты часто бывают сопряжены с весьма громоздкими вычислениями, требующими большой затраты времени. Трудоемкость работы еще более возрастает, если в результате первых расчетов требуется изменение параметров рассматриваемой системы или применение демпфирующих устройств, что влечет за собой необходимость неоднократных перерасчетов. К тому же часто невозможно облегчить расчет за счет упрощения динамической схемы или введения некоторых допущений, так как при этом возникают существенные ошибки. Для нелинейных задач трудности численного решения являются часто еще более непреодолимыми.

Радикальным способом облегчения вибрационных расчетов является способ моделирования исходной системы, при котором вычисления заменяются непосредственными измерениями на специальных моделях. Такие модели в особенности должны себя оправдать при решении специализированных задач, связанных с массовыми вибрационными расчетами в той или иной области машиностроения, а в первую очередь — в моторостроении. Следует подчеркнуть, что моделирование рассматривается лишь как средство упрощения расчетов, а отнюдь не противопоставляется экспериментальному исследованию реальной системы и не может его заменить.

Рассмотрим вопрос о применении механических моделей для замены вибрационных расчетов. При составлении динамических моделей механических колебательных систем отсутствует необходимость в таком подборе параметров, при котором соблюдалось бы равенство частот собственных колебаний исходной системы и модели. Чтобы все формы колебаний обеих систем были в точности подобны, необходимо лишь обеспечить одинаковые соотношения между соответствующими элементами, а именно:

1. Массы или моменты инерции масс всех элементов исходной системы должны относиться между собой, как соответствующие массы или мо-

менты инерции масс модели. В ряде случаев исходная система с поступательным перемещением может отображаться моделью, имеющей вращательные перемещения, и наоборот. Таким образом:

$$m_1 : m_2 : m_3 : \dots : m_n \rightarrow m_{1\text{мод}} : m_{2\text{мод}} : m_{3\text{мод}} : \dots : m_{n\text{мод}} \quad (123)$$

$$\theta_1 : \theta_2 : \theta_3 : \dots : \theta_n \rightarrow \theta_{1\text{мод}} : \theta_{2\text{мод}} : \theta_{3\text{мод}} : \dots : \theta_{n\text{мод}}.$$

2. Жесткости всех элементов исходной системы должны относиться между собой как соответствующие жесткости элементов модели:

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : \dots : Z_n \rightarrow Z_{1\text{мод}} : Z_{2\text{мод}} : Z_{3\text{мод}} : \dots : Z_{n\text{мод}} \quad (124)$$

$$C_1 : C_2 : C_3 : \dots : C_n \rightarrow C_{1\text{мод}} : C_{2\text{мод}} : C_{3\text{мод}} : \dots : C_{n\text{мод}}.$$

Отсюда нетрудно получить соотношение частот исходной системы и модели. Например для случая крутильных колебаний получим:

$$p = \frac{\omega}{\omega_{\text{мод}}} = \sqrt{\frac{\theta_{1\text{мод}} C_1}{C_{1\text{мод}} \theta_1}}. \quad (125)$$

Соотношение механических сопротивлений при этом будет:

$$\frac{S_1}{S_{1\text{мод}}} = p \frac{\theta_1}{\theta_{1\text{мод}}}. \quad (126)$$

Соотношение между закручивающими моментами и угловыми перемещениями

$$\frac{M_1}{\varphi_1} : \frac{M_{1\text{мод}}}{\varphi_{1\text{мод}}} = C_1 : C_{1\text{мод}}. \quad (127)$$

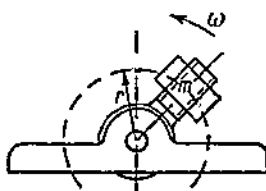
Аналогичные зависимости справедливы и для колебательных систем, имеющих поступательные перемещения.

Возможность выбора частоты моделирования во многих случаях значительно облегчает исследование исходной динамической системы по сравнению с непосредственным экспериментальным исследованием.

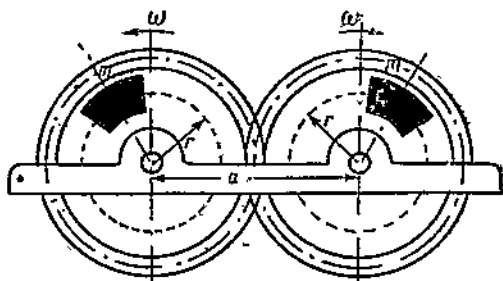
Путем рационального подбора параметров модели можно получить интересные нас формы колебаний при значительно меньшей величине усилий и значительно большей величине перемещений, чем при колебаниях реальной системы, что упрощает испытательную установку и увеличивает точность измерений. При конструировании механических моделей предел уменьшения жесткостей элементов системы определяется лишь необходимостью обеспечить их прочность. Диапазон частот моделирования определяется также конструкцией возбуждающих устройств.

Простейший способ гармонического возбуждения основан на использовании центробежных сил неуравновешенных вращающихся масс. Если неуравновешенная масса m , расположенная на расстоянии r от оси (фиг. 101), вращается с угловой скоростью ω , то проекция силы инерции на вертикальную ось равна $m r \omega^2 \cos \omega t$, а на горизонтальную ось $m r \omega^2 \sin \omega t$. Конструкция, на которой установлен подобный возбудитель, испытывает моногармоническое возбуждение одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для создания возбуждающей силы, действующей только в одном направлении, соединяются два одинаковых возбудителя указанного выше типа, вращающиеся в противоположные стороны (с оди-

наковой скоростью и фазовым углом). Подобное соединение можно осуществить, например, при помощи зубчатого зацепления, как показано на фиг. 102. Здесь вертикальные составляющие суммируются и создают пульсирующую силу $F = 2mr\omega^2 \cos \omega t$, а горизонтальные составляющие уравниваются. При сдвиге фаз на 180° (фиг. 103) возбудитель развивает вибромомент $M = amr\omega^2 \cos \omega t$, не нагружая конструкцию поперечными силами. Передача вращения производится от электромотора при



Фиг. 101. Схема простейшего центробежного возбудителя.



Фиг. 102. Схема однокомпонентного возбудителя.

помощи гибкого вала или ременной передачи, податливость которых должна быть во много раз больше податливости элементов исследуемой системы.

Существенный недостаток описанных выше центробежных возбудителей заключается в том, что амплитуда возбуждающей силы не остается

постоянной во всем диапазоне частот возбуждения, а изменяется пропорционально квадрату частоты. Вследствие этого происходит изменение формы резонансных кривых; при непрерывном изменении частоты в место кривых фиг. 7 получаются резонансные кривые фиг. 10.

Указанный недостаток можно было бы устранить,

изменяя вместе с частотой также и эксцентриситет неуравновешенных масс, что, однако, связано с значительным усложнением конструкции. В осуществляемых конструкциях изменение эксцентриситета требует остановки возбудителя. Достоинствами описанных возбудителей являются простота и надежность конструкции.

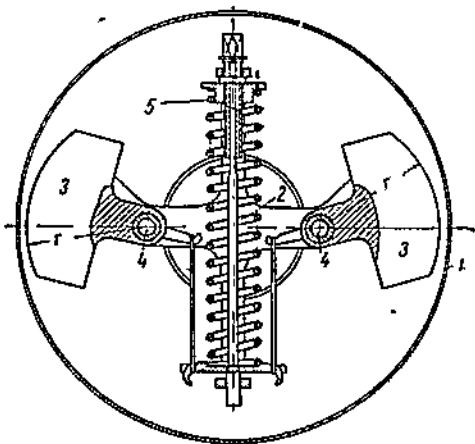
Ниже описан возбудитель Юнкерса, обладающий постоянством амплитуды возбуждения в большом диапазоне частот.

Одна из конструкций возбудителей подобного рода схематически показана на фиг. 104.

Корпус возбудителя 1 вращается вокруг центральной оси 2, через которую периодическое возбуждение передается исследуемой системе.

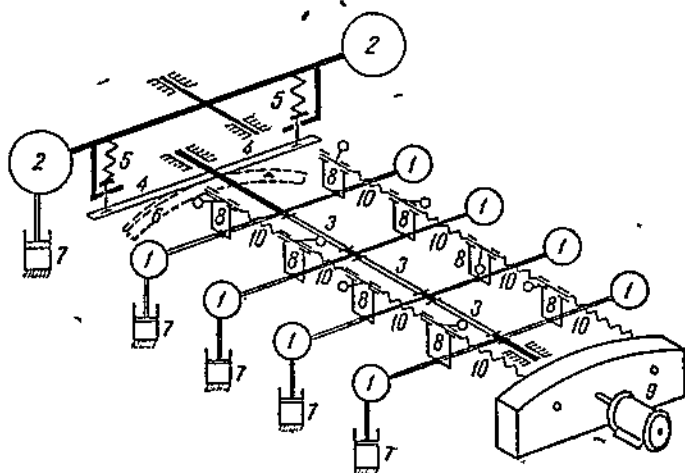
Грузы 3 поворачиваются вокруг осей 4, соединенных с корпусом, причем система рычагов обеспечивает их одновременный поворот на один и тот же угол.

Возникающие при вращении корпуса центробежные силы стремятся развести грузы, чему препятствует пружина 5. Для каждой скорости вращения возбудителя имеет место определенное положение равновесия грузов и соответствующая ему деформация пружины. Реакция деформированной пружины передается на центральную ось корпуса и создает периодическое возбуждение. При значительной величине предварительной затяжки пружины и сравнительно малой ее жесткости величина сжимающей силы при расхождении грузов мало изменяется, а, следовательно, амплитуда возбуждения становится практически постоянной в широком диапазоне чисел оборотов.



Фиг. 104. Схема возбудителя Юнкерс.

Недостатки, возбудителя Юнкерс заключаются в том, что он представляет собой упругую систему. При значительных амплитудах колебания исследуемой системы нарушается моногармоничность возбужде-



Фиг. 105. Механическая модель крутильных колебаний авиационного двигателя с нелинейной муфтой.

ния, — помимо основной, появляются гармонические тройной частоты. Кроме того, упругая система возбудителя может сама совершать резонансные колебания, устранение которых в области низких частот представляет затруднения. Возбудители Юнкерса по сравнению с обычными инерционными возбудителями имеют также значительно больший мертвый

вес, что ограничивает возможности выбора масс модели колебательной системы.

В качестве примера рассмотрим схему моделирования крутильных колебаний валопровода рядного авиационного двигателя, снабженного нелинейной муфтой (фиг. 105). Здесь элементы 1 воспроизводят моменты инерции масс двигателя, элемент 2 — момент инерции массы винта. Линейные жесткости участков коленчатого вала соответствуют жесткости участков вала 2. Нелинейная муфта моделируется таким образом, что обеспечена возможность изменения ее характеристики. Ломаные характеристики получаются путем комбинирования плоских пружин 4 и спиральных пружин 5 с предварительной затяжкой. Параболические характеристики могут быть созданы путем установки специально профилированных направляющих 6, изменяющих по заданному закону свободную длину пружин 4, при угловых перемещениях. Для введения демпфирования служат демпферы вязкого трения 7. Возбуждение колебаний осуществляется инерционными возбудителями 8, которые благодаря взаимному смещению масс воспроизводят также сдвиг фаз между отдельными компонентами. Показаны две группы возбудителей для одновременного возбуждения двух гармонических составляющих. Привод каждой группы осуществляется через коробку скоростей от мотора постоянного тока 9 с широкой регулировкой оборотов при помощи гибких валов 10. Запись частот и амплитуд колебаний модели может быть осуществлена любым из известных методов.

В модели предусматривается широкая регулировка моментов инерции масс системы, дающая возможность в необходимых пределах варьировать условия задач, подлежащих разрешению.

Другим примером является определение критических скоростей на модели вала. Законы подобия изложены в Hütte, т. I, „Механика подобия или теория моделей“ [8].

§ 2. Электрическое моделирование

Еще более эффективное облегчение вибрационных расчетов и динамических исследований достигается при помощи электрического моделирования. Замена громоздких вычислений измерениями электрических величин в специальных расчетных схемах вполне себя оправдала в различных областях техники [58], [59].

Использование электромоделирования является насущно необходимым и в области вибрационных расчетов, в особенности для таких трудоемких работ, как, например, расчет вынужденных колебаний систем со многими степенями свободы при полигармоническом возбуждении. Для этого имеются следующие предпосылки:

1. Для заданной линейной механической системы можно подобрать электрическую аналогию — модель в виде колебательного контура из емкостей и индуктивностей, соответствующих податливостям и массам (или моментам инерции масс) системы.

2. В модели возможно осуществить непосредственное воспроизведение электрических импульсов, имеющих форму заданных импульсов возбуждающих сил (или моментов), действующих на механическую систему, и таким образом устранить необходимость разложения на гармонические составляющие с последующим обратным сведением результатов воздействия на систему каждой отдельной составляющей.

3. Возможно осуществить при помощи осциллографа непосредственное измерение и регистрацию всего процесса изменения усилий или перемещений во времени, выраженных в электрических единицах, и получение расчетных виброграмм (торсиограмм).

Теория электромеханических аналогий, основанная на формальном сходстве математического аппарата, описывающего динамические процессы в механике и электротехнике, получила значительную разработку главным образом в связи с развитием электроакустики. Здесь, однако, все внимание уделялось внедрению в область механики электротехнических методов аналитического исследования, в особенности для переходных процессов [53].

Рассмотрим основные положения теории электромеханических аналогий.

Если в дифференциальном уравнении вынужденных колебаний механической системы (фиг. 106, а) принять в качестве переменной скорость

$v = \frac{dx}{dt}$, получим:

$$m \frac{dv}{dt} + Kv + Z \int v dt = \sum_1^n Q_v \cos(\nu \omega t + \gamma_v). \quad (128)$$

В соответствии с принципом подобия дифференциальных уравнений механики и электродинамики существуют две системы электромеханических аналогий.

При первой системе аналогий имеет место следующее соответствие величин, показанное как для механических систем с поступательным движением (продольные и поперечные колебания), так и для систем с вращательным движением (крутильные колебания):

сила Q (момент M)	напряжение U
скорость v (угловая скорость Ω)	сила тока i
масса m (момент инерции массы θ)	индуктивность L
податливость $e_z = \frac{1}{Z}$; (e_c)	емкость C
сопротивление K ; (S)	сопротивление R

Уравнению (128) в эквивалентной электрической цепи (фиг. 106, б) соответствует:

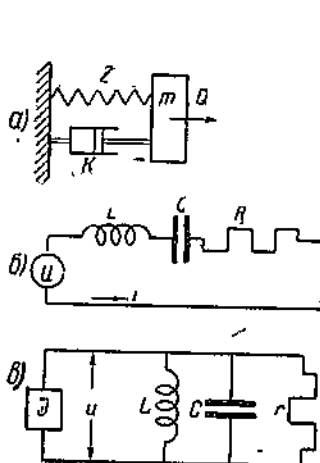
$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = \sum_1^n U_v \cos(\nu \omega t + \gamma_v). \quad (128a)$$

При второй системе аналогий получается обратное соответствие величин:

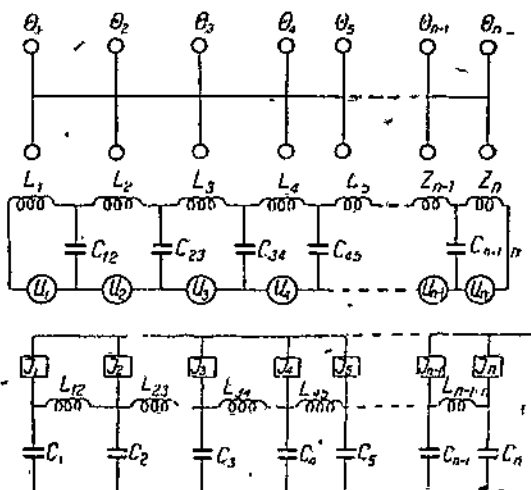
сила Q (момент M)	сила тока I
скорость v (угловая скорость ω)	напряжение u
масса m (момент инерции массы θ)	емкость C
податливость $e_z = \frac{1}{Z}$; (e_c)	индуктивность L
сопротивление K ; (S)	проводимость $\frac{1}{r}$

Уравнению (128) в эквивалентной электрической цепи (Фиг. 106,б) соответствует:

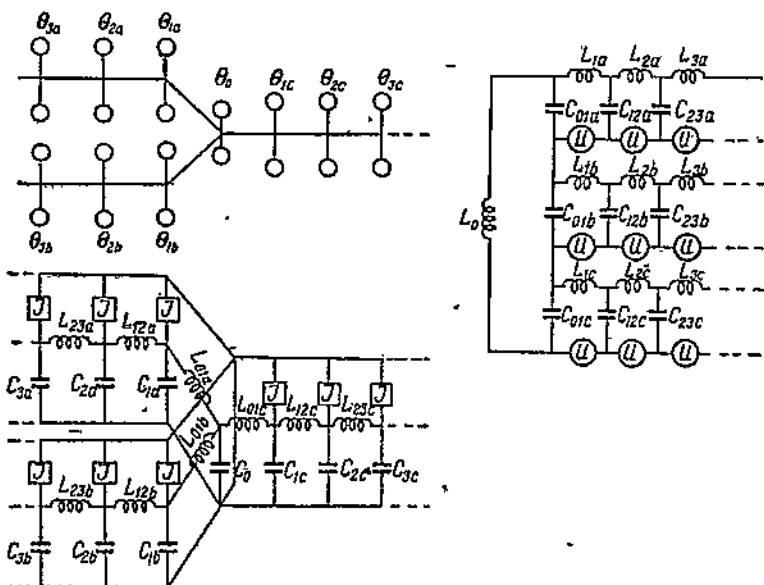
$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{r} u + \frac{1}{L} \int u dt = \sum_1^n I_j \cos(\gamma \omega t + \gamma_j). \quad (1286)$$



Фиг. 106. Электромеханические аналогии для системы с одной степенью свободы.



Фиг. 107. Электромеханические аналогии для системы рядного двигателя.



Фиг. 108. Электромеханические аналогии для разветвленной системы.

В качестве примеров моделирования более сложных механических систем приводим на фиг. 107 электрические аналогии динамической

системы крутильных колебаний валопровода рядного двигателя (например авиационного или судового), а на фиг. 108 — аналогии для подобной же „разветвленной“ системы. Здесь электрические схемы *а* отвечают первой, а схемы *б* — второй системе аналогий.

Касаясь электромеханического моделирования нелинейных систем, особенно необходимого в связи с изучением их в условиях полигармонического возбуждения, укажем, что, например, сопротивление сухого трения воссоздается путем включения газотропов [55]. При псевдогармонических колебаниях моделирование нелинейных упругих элементов (например муфт) возможно по второй системе аналогий за счет использования нелинейных свойств ферромагнитных материалов. Изменение формы характеристики достижимо путем комбинирования нелинейного элемента из дросселей с сердечниками различных материалов и насыщения.

При составлении электрических моделей, так же как и для механических моделей (§ 1), нет необходимости в таком подборе параметров, при котором соблюдалось бы равенство частот собственных колебаний исходной механической системы и электрической модели. Чтобы все формы колебаний обеих систем были в точности подобны, необходимо обеспечить лишь одинаковые соотношения между соответственными элементами. Так, при первой системе электромеханических аналогий требуется следующее:

1. Индуктивности всех элементов модели должны относиться между собой, как соответствующие массы (моменты инерции масс) исходной системы:

$$L_1 : L_2 : L_3 : \dots : L_n = m_1 : m_2 : m_3 : \dots : m_n. \quad (129)$$

2. Емкости всех элементов модели должны относиться между собой как соответствующие податливости исходной системы:

$$C_1 : C_2 : C_3 : \dots : C_n = e_1 : e_2 : e_3 : \dots : e_n. \quad (130)$$

Соотношение частот обеих систем составит

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 e_1}{L_1 C_1}}. \quad (131)$$

Таким образом, пересчет частот производится по формуле (131). Помимо основных соотношений (129) и (130), из сопоставления дифференциальных уравнений обеих систем получаем зависимость, связывающую механические сопротивления R_l с электрическими,

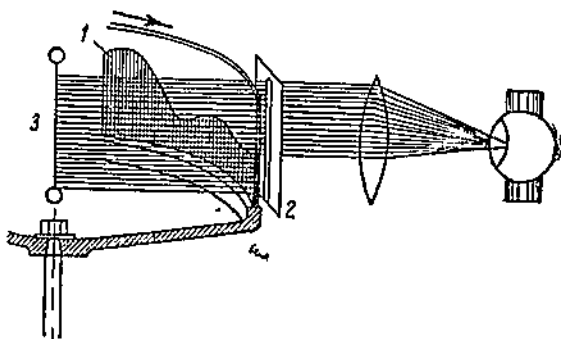
$$\frac{R_l}{K_l} = \frac{\omega_2 L_l}{\omega m_l} = \text{const.} \quad (132)$$

Задавая механический масштаб электрических напряжений, соответствующих возбуждающим силам или моментам, в этом масштабе получим значения динамических упругих сил (или моментов) во всех элементах системы.

Аналогичные зависимости имеют место и при второй системе электромеханических аналогий.

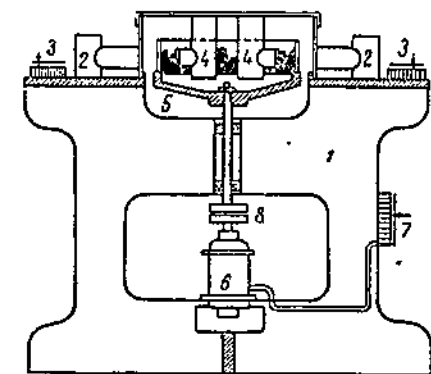
усилителями низкой частоты, имеющими в необходимом диапазоне частот практически малые амплитудные и фазовые искажения. Чтобы не изменить параметры элементов электрической модели, фотоусилители включаются через выходные трансформаторы 6 (фиг. 110) с коэффициентами трансформации, обеспечивающими малое сопротивление их в модели.

Процесс изменения упругих моментов в элементах валопровода, выраженных в электрических единицах через напряжения на конденсаторах модели, записывается осциллографом 5 (фиг. 110), производящим также контроль формы импульсов напряжения, воспроизводящих внешние моменты. Подключение измерительного устройства к различным ячейкам модели



Фиг. 111. Схема действия датчика возбуждающих сил.

производится при помощи штепсельного переключателя 3. От измерительного устройства требуется весьма высокое входное сопротивление для того, чтобы избежать внесения искажений в параметры модели за счет его включения.



Фиг. 112. Механическая конструкция датчика:

1 — сварная рама; 2 — осветительные устройства; 3 — реостаты освещения; 4 — фотоэлементы; 5 — барабан с вращающейся диаграммой; 6 — мотор; 7 — реостат мотора; 8 — маховик регулируемой массы.

Оптико-механическая часть датчика (фиг. 112) монтируется на сварной станине. Все фотоэлементы имеют здесь индивидуальные осветительные системы, размещаемые в данной конструкции снаружи прозрачного барабана, выполненного из плексигласа. Подвижная ширма имеет вид сильно увеличенной фонограммы кинозвукозаписи и изготовляется на киноплёнке, путем фоторепродукции чертежа большого масштаба.

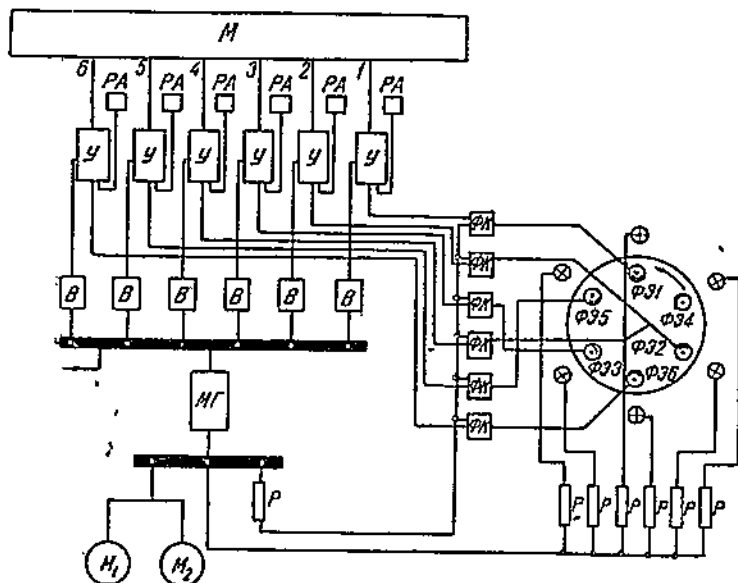
Привод подвижной ширмы принят постоянного тока с широкой регулировкой оборотов. Для исследования режимов прохождения через резонанс можно осуществить плавное изменение чисел оборотов датчика при помощи моторного привода реостата возбуждения. Для изменения времени выбега может быть также

предусмотрен маховик с регулируемой массой.

На фиг. 113 дана скелетная схема электрической части датчика тангенциальных усилий. Фотоэлементы $\Phi Э$ подключены на входе фотоскадов $\Phi К$, размещенных непосредственно в датчике. Для промежуточного и конечного усилия служат усилители $У$, у которых регулировка величины напряжения, подаваемого на модель $М$, т. е. масштаба

диаграммы тангенциальных усилий, достигается при помощи регуляторов амплитуды PA или при помощи изменения накала лампы осветителя. Мощность усилительных устройств и напряжения на выходе того же порядка, что и у звуковоспроизводящей аппаратуры. К шинам переменного тока подключены выпрямительные устройства усилителей B , а также мотор-генератор $МГ$, предназначенный для питания приводного мотора датчика $М_1$, мотора реостата возбуждения $М_2$ и осветительного устройства.

Для определения частот и форм собственных колебаний вместо фотоэлектрического датчика может быть использовано моногармоническое



Фиг. 113. Скелетная электрическая схема расчетного стенда.

возбуждение от генератора (лампового или электромагнитного) с широким диапазоном изменения частот, а в качестве измерительного устройства применен катодный вольтметр.

Выбор частот моделирования производится в результате совместной оценки ряда факторов.

Диапазон частот колебаний механических систем, представляющий практический интерес при вибрационных расчетах, находится в области значительно более низких частот, чем это имеет место в акустике и в электротехнике слабых токов. Поэтому при построении электрических моделей для действительных частот значения емкостей и индуктивностей элементов оказываются весьма значительными, что может препятствовать практическому осуществлению как конденсаторов, так и в особенности дросселей модели.

Таким образом, для упрощения элементов электрической модели целесообразно возможно большее повышение частоты моделирования. Повышение частоты моделирования необходимо и для того, чтобы условия резонанса проявились в модели не менее резко, чем в механической системе. Для получения в модели соответствующих коэффициентов нараста-

ния амплитуды нужно, чтобы для каждого дросселя отношение индуктивного сопротивления к активному было достаточно велико. Очевидно, что при больших частотах моделирования этого добиться гораздо легче. Повышение частот моделирования дает большие преимущества также в части конструирования усилительных устройств с необходимой частотной и фазовой характеристиками.

Ограничение повышения частоты моделирования прежде всего обуславливается необходимостью обеспечения надежной и спокойной работы механической части датчика тангенциальных усилий, связано с выбором измерительных устройств и, кроме того, дает преимущества в части уменьшения паразитных влияний.

Совокупность поставленных условий в рассмотренном выше примере стенда для расчета крутильных колебаний привела к необходимости увеличить частоты моделирования в 10 раз по сравнению с действительными, что соответствует диапазону 80—3500 Hz, т. е. звуковым частотам. При этом величина емкости наиболее податливого элемента модели не превышает нескольких микрофарад, а величины индуктивности дросселей модели находятся в пределах от нескольких сотых долей до нескольких генри. Приведенные значения индуктивностей показывают, что для дросселей модели целесообразно применение сердечников высокой проницаемости. В пределах предъявляемых технических требований осуществление подобных дросселей стабильной индуктивности является вполне доступным благодаря применению прессованных сердечников и новых магнитных материалов. С некоторыми ограничениями возможно применение и катушек самоиндукции без железа.

В качестве измерительного устройства используется катодный осциллограф.

Повышение частоты возбуждения, при умеренном числе оборотов датчика, в случае необходимости, может быть достигнуто путем размещения по окружности барабана датчика нескольких одинаковых циклов диаграммы.

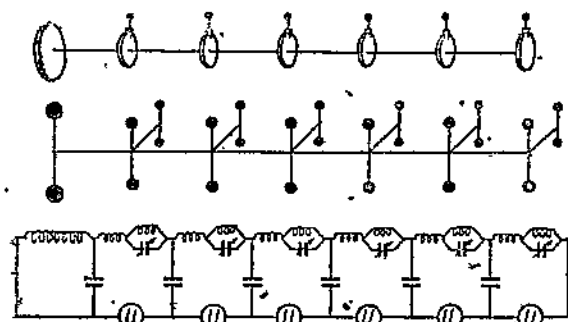
В осуществленной конструкции датчика длина одного цикла диаграммы — 90 мм, высота — 25 мм. Число оборотов датчика при размещении семи циклов диаграммы по окружности — до 2500 в минуту.

Эксперименты автора показали, что частоты собственных колебаний воспроизводятся с точностью до 1—1,5%, а амплитуды в основном с точностью до 10—15%, причем указанные результаты могли быть еще значительно улучшены при более прецизионной аппаратуре.

В заключение укажем на возможности моделирования как демпферов трения — при помощи реостатов и т. д., так и динамических демпферов, например маятниковых.

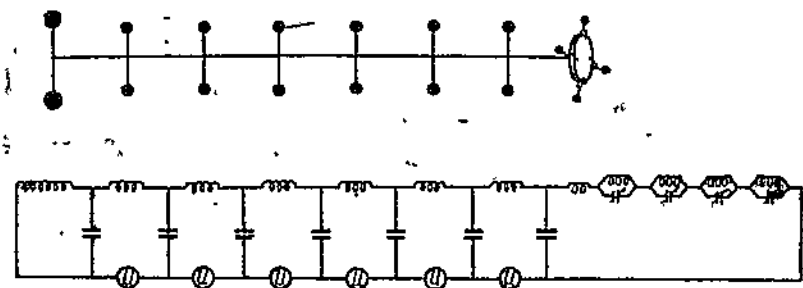
Для системы с демпферами на фиг. 114 приведена электрическая схема, соответствующая первой системе аналогий. Подобная же схема дана на фиг. 115 для двигателя с фланцевым демпфером, настроенным на гармонические четырех порядков. Вследствие того, что частота собственных колебаний маятникового демпфера изменяется пропорционально квадрату числа оборотов двигателя, благодаря изменению восстанавливающей силы, емкости конденсаторов, заменяющих податливость демпферов, будут постоянными лишь для каждого данного числа оборотов двигателя. С изменением числа оборотов n емкости должны быть изменены обратно пропорционально n^2 .

Из рассмотрения замещающих схем фиг. 114 и 115 видно, что динамический демпфер в электрических схемах замещается электрическим фильтром — „пробкой“, полностью задерживающим одну избранную гармоническую составляющую и пропускающим остальные с тем или иным изменением их величины (фиг. 116).



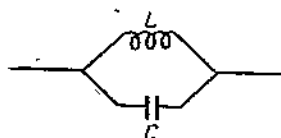
Фиг. 114. Электрическая модель вала с маятниковыми демпферами.

Подключая электрическую схему, соответствующую демпферу, в разные ячейки модели, можно по показаниям измерительного устройства оценить эффект установки демпфера, не производя при этом аналитических перерасчетов.



Фиг. 115. Электрическая модель вала двигателя с фланцевым демпфером.

Совершенно очевидно, что благодаря применению расчетного стенда, помимо расчета конкретных динамических систем, создаются также большие возможности для постановки целого ряда исследований, требующих многократного изменения соотношений параметров и бывших недоступными вследствие громоздкости вычислений.



Фиг. 116. Электрическая схема динамического демпфера.

Как видно из вышеизложенного, возможность создания расчетных устройств на базе аппаратуры, прочно освоенной в технике слабых токов, открывает в настоящее время новые перспективы для динамических исследований и вибрационных расчетов в машиностроении.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Крылов А. К., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах, Л. 1932.
2. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, Л. 1934.
3. Лойдянский Л. Г. и Лурье А. И., Теоретическая механика, т. III, Л. 1934.
4. Ден-Гартог Д. П., Теория колебаний, М. 1942.
5. Hori W., Technische Schwingungslehre, 1922.
6. Geiger J., Mechanische Schwingungen und ihre Messung, 1927.
7. Справочное руководство по машиностроению, т. I. Математика. Под ред. В. М. Майзеля, 1937.
8. Hütte, т. I, изд. 16, 1936, М.

Отдельные вопросы

9. Bekesy, Über die photoelektrische Fourier-Analyse eines gegebenen Kurvenzuges, ENT. 1937, H. 5.
10. Montgomery, An Optical Harmonic Analyzer, Bell Syst. Techn. Journ., 1938, № 3.
11. Лурье и Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков, „Прикл. математ. и механика“, 1938, в. 3.
12. Бондаренко Г. В., Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний, 1936.
13. Андронов и Хайкин, Теория колебаний, ч. I, 1927.
14. Давиденков Н. Н., Обзор о рассеянии энергии при вибрациях, „Журнал технической физики“, 1938, в. 6.
15. Kimball A. L., Friction and Damping in Vibrations, Journ. of Appl. Mech., 1941, № 1.
16. Лурье А. И., Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, М. 1938.
17. Lewis F. M., Vibration During Acceleration Through a Critical Speed, Trans. of ASME, 1932, № 23.
18. Wahl A. M., Transient Torques in Induction Motor Drives, Journ. of Appl. Mech., 1941, № 1.
19. Зингерман А., К вопросу о механическом расчете шин, „Электричество“, 1932, № 14.
20. Тетельбаум И. М., Определение динамических усилий в форшотсах прокатных станов. Отчет Ин-та стр. механики АН УССР, 1939.

Крутильные колебания

21. Терских В. П., Крутильные колебания силовых установок, кн. I, Л. 1940; см. также Расчет на крутильные колебания установки двигателя 42 ВМК-6 на тепловозе „В. Молотов“, „Транспортное машиностроение“, 1936, № 2.
22. Терских В. П., Определение частот собственных крутильных колебаний дизельных установок, Труды Всесоюзной дизельной конференции, 1935.
23. Зиманенко С. С., Новые исследования податливости элементов вала, „Дизелестроение“ 1936, № 1.
24. Гудков-Беляков, Исследование экспериментальных формул для приведения длины коленчатого вала, „Дизелестроение“ 1933, № 2.
25. Житомирский В. К., Напряжения от колебаний в судовых валах, „Дизелестроение“, 1937, № 4.
26. Житомирский В. К., Крутильные колебания валов двигателей, „Дизелестроение“, 1937, № 2.
27. Серенсен С. В. и Тетельбаум И. М., Номограммы и формулы для расчета частот собственных крутильных колебаний коленчатых валов рядных моторов, „Техника воздушного флота“, 1934, № 5.
28. Тетельбаум И. М., Анализ крутильных колебаний установок с длинными валопроводами, „Вестник инженеров и техников“, 1938, № 9.
29. Нейман И. Ш., Динамика и расчет на прочность авиационных моторов, Справочник, ч. I, 1933.

30. Крутильные колебания коленчатых валов, Сборник переводных работ под ред. И. Ш. Неймана.
31. Нейман И. Ш., Динамика авиационных двигателей, М. 1940.
32. Нейман И. Ш., ЦИАМ. Сборник № 3, 1937.
33. Гопп Ю. А., Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей, Харьков 1938.
34. Лурье И. А., Крутильные колебания в дизельных установках, Л. 1940.
35. Stieglitz A., Beeinflussung der Drehschwingungen durch pendelnde Massen, Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung, 1938, B. 11, S. 169.
36. Shannon J. F., Damping Influences in Torsional Oscillation, Proceedings IME, Vol. 131, 1935.
37. Ker Wilson W., Practical Solution of Torsional Vibration Problems, 1935.
38. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 1921.
39. Altmann F., Drehfedernde Kupplungen, VDI, 1936, № 9.
40. Söchting F., Zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Wellenleitungen, ATZ, 1937, № 10.
41. Geiger J., Dämpfung bei Drehschwingungen von Motoren, VDI, 1934, № 46.

Поперечные колебания

42. Гогенемзер К. и Прагер В., Динамика сооружений, 1936.
43. Бернштейн С. А., Основы динамики сооружений, М., 1941.
44. Крылов А. Н., Об определении критических скоростей вращающегося вала, 1932.
45. Луиц Е. Б., О поперечных колебаниях валов, 1935.
46. Тумаркин С. А., Критическое число оборотов валов с коническими участками, Технические заметки ЦАГИ № 155, 1937.
47. Зильберман А. и Ривовш У., Приближенный подсчет критического числа оборотов турбинного вала, "Советское котлотурбостроение", 1936, № 6.
48. Тетельбаум И. М., Определение максимальных напряжений в вибрирующих консольных образцах, несущих сосредоточенную массу, "Журнал технической физики", т. 8, вып. 11, 1938.
49. Holba J., Berechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von geraden Wellen, 1936.
50. Stodola A., Die Dampfmaschinen, 6 Aufl., 1924.

Продольные колебания

51. Пономарев С. Д., Расчет и конструкция витых пружин, 1938.
52. Konstruktionstafeln, ATZ, 1937, № 9.

Моделирование

53. Харкевич А. А., Теория электроакустических аппаратов, М. 1940.
54. Den Hartog J. P., The Use of Models in Vibrations Research, Tr. ASME, 1932.
55. Skilling H. H., Electric Analogs for Difficult Problems. El. Eng., № 9 1931.
56. Mc Donald G. G., Torsional Vibration Analysis by Models, Engineer № 4301, 1938.
57. Kettenacker L., Untersuchung mechanischer Schwinggebilde mittels elektrischer Ersatzschaltungen, Forschung auf d. gebiete d. Ingenieurwesens, 1934, № 2.
58. Nickle C.-A., Oscillographic Solution of Electromechanical Systems, Trans. AIEE, 6, 1925.
59. Гутенмахер Л. И., Электрическое моделирование, М., 1943.
60. Тетельбаум И. М., Вибрационный расчет валов авиационных, судовых и других поршневых двигателей путем электромеханического моделирования (Отчеты Института строительной механики АН УССР и ЦИАМ им. Баранова, 1942—1944).

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕТАЛЯХ МАШИН

ГЛАВА VI

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Напряженное состояние в точках детали [1, 2, 3]

Типы напряженного состояния. Закон взаимности напряжений

При исследовании напряжений в какой-либо точке A детали (фиг. 117) в этой точке плоскостями, параллельными плоскостям xu , xz , yz , выделяется элементарная призма.

Так как размеры выделенного элемента предполагаются бесконечно-малыми, то по каждой из его граней действуют постоянные напряжения. Полные напряжения p_x , p_y , p_z , приходящиеся на каждую грань, заменяются составляющими:

$$\begin{array}{llll} p_x & . & . & . & . & . & \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz}; \\ p_y & . & . & . & . & . & \sigma_y, & \tau_{yz}, & \tau_{yx}; \\ p_z & . & . & . & . & . & \sigma_z, & \tau_{zx}, & \tau_{zy}. \end{array}$$

Первый индекс обозначает направление нормали к площадке, на которую действует рассматриваемое напряжение, а второй индекс, — направление, которому параллельно это напряжение. Полные касательные напряжения τ_x , τ_y , τ_z по каждой из граней равны геометрической сумме составляющих:

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \tau_y = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{yx}^2}; \quad \tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}.$$

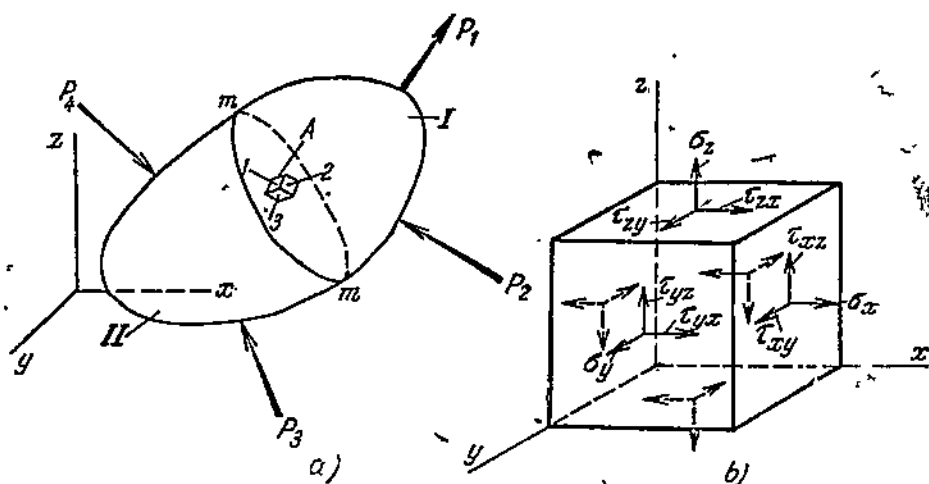
Правило знаков для нормальных напряжений следующее: если нормальное напряжение действует в направлении внешней нормали, т. е. от материала (растяжение), то оно считается положительным.

Выбор знака для касательных напряжений связывается с направлением координатных осей: если внешняя нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси, то составляющие по координатным осям касательного напряжения считаются положительными, когда они направлены в положительном направлении параллельной им координатной оси.

В соответствии с этим на фиг. 117 все составляющие напряжений — положительные.

В каждой точке всегда можно найти три взаимно перпендикулярные площадки, по которым касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются главными в рассматриваемой точке. По каждой из этих площадок действуют только нормальные напряжения, называемые главными напряжениями, а их направления называются главными нап्रा-

влениями в рассматриваемой точке. Главные направления образуют некоторые углы с осями координат x, y, z , зависящие от координат рассматриваемой точки.

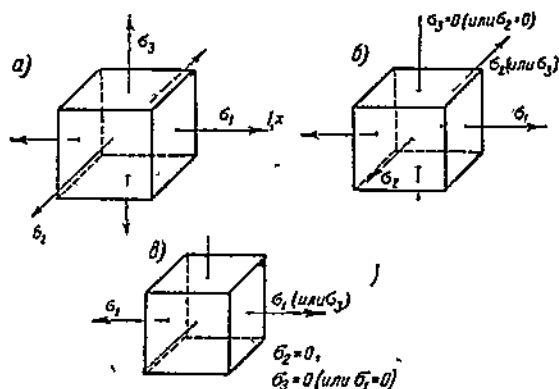


Фиг. 117. Элемент детали, выделенный координатными плоскостями.

Главные напряжения обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем большее (с учетом знака) главное напряжение обозначается σ_1 , а меньшее (с учетом знака) — σ_3 . Таким образом, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Если ни одно из главных напряжений не равно нулю (фиг. 118, а), то напряженное состояние в рассматриваемой точке называется объемным или трехосным напряженным состоянием.

В большинстве внутренних точек и точек на поверхности детали в местах контакта деталей имеет место объемное напряженное состояние.



Фиг. 118. Типы напряженного состояния:

а — объемное напряженное состояние; б — плоское напряженное состояние; в — линейное напряженное состояние.

действующее напряжение по любой наклонной площадке в рассматриваемой точке параллельно одной и той же плоскости, в которой действуют два главных напряжения, не равные нулю. Плоское напряженное состояние получается во всех точках детали, имеющей форму пластинки постоянной толщины и нагруженной в срединной плоскости пластинки, а также в точках ненагруженной поверхности детали пространственной формы.

Если из трех главных напряжений два равны нулю (фиг. 118, в), то получается линейное напряженное состояние. Равнодействующее напряжение по любой наклонной площадке параллельно одной и той же прямой, по которой действует главное напряжение, не равно нулю.

Если не равно нулю главное напряжение — растягивающее, то оно обозначается σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Если оно сжимающее, то оно обозначается σ_3 и $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Линейное напряженное состояние получается в точках растягиваемой полосы и в волокнах балки при чистом изгибе.

В отдельных изолированных внутренних точках детали пространственной формы может иметь место плоское или линейное напряженное состояние.

Участки детали, имеющие во всех точках одни и те же напряжения, называются участками с однородным напряженным состоянием.

Зная главные напряжения, можно определить нормальные и касательные напряжения для любой наклонной площадки в рассматриваемой точке. И наоборот, зная все напряжения по любым трем площадкам в данной точке, можно определить в этой точке главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и их направление (см. пп. 2, 3, 4 этого параграфа).

Основная зависимость между напряжениями в двух наклонных друг к другу площадках 1 и 2 в рассматриваемой точке формулируется так: проекция на нормаль n_2 к площадке 2 полного напряжения p_1 , действующего на площадку 1, равна проекции на нормаль n_1 к площадке 1 полного напряжения p_2 , действующего на площадку 2:

$$\text{пр.}_{(n_2)} p_1 = \text{пр.}_{(n_1)} p_2 \quad (133)$$

(закон взаимности напряжений).

В частном случае, если площадка 1 перпендикулярна к площадке 2 и пересечение этих площадок происходит по ребру O , то, как следствие из формулы (133), составляющая τ касательного напряжения, действующего по первой площадке, перпендикулярна к ребру O , равна составляющей τ' касательного напряжения, действующего по второй площадке, перпендикулярной к тому же ребру O :

$$\tau' = -\tau \quad (133')$$

(закон взаимности касательных напряжений).

Из знаков этих напряжений следует, что если напряжение τ направлено к ребру O , то и напряжение τ' направлено к ребру O , и наоборот.

На основании формулы (133') для касательных напряжений по координатным площадкам (фиг. 117) следует, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Следовательно, в общем случае напряженное состояние в рассматриваемой точке полностью определяется шестью величинами:

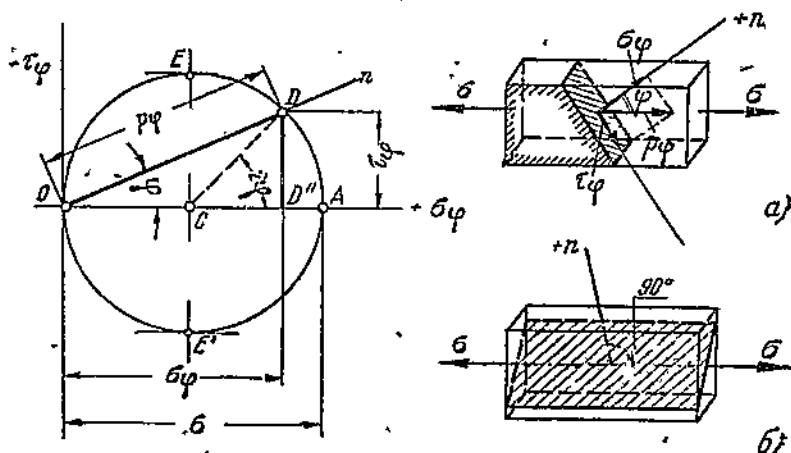
$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

или тремя величинами главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и тремя углами для их направлений.

Элемент фиг. 119 находится в линейном напряженном состоянии. Главными площадками являются поперечная площадка, перпендикулярная к направлению σ , и любая пара взаимно перпендикулярных площадок, параллельных направлению σ .

Любая наклонная площадка, нормаль n к которой образует с направлением главного напряжения σ угол φ , имеет одинаковые по направлению с σ равномерно в сечении распределенные напряжения p_φ . На основании формулы (133) проекция σ на нормаль к площадке с наклоном φ равна проекции p_φ на нормаль главной площадки с напряжением σ :

$$p_\varphi = \sigma_\varphi \cdot \cos \varphi.$$



Фиг. 119. Круг Мора для линейного напряженного состояния.

Отсюда нормальная и касательная составляющие полного напряжения p_φ выражаются так (фиг. 119):

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= p_\varphi \cdot \cos \varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi); \\ \tau_\varphi &= p_\varphi \cdot \sin \varphi = \sigma \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (134)$$

При этом

$$\sigma_\varphi + \sigma_{\varphi+\pi/2} = \sigma; \quad \tau_\varphi = -\tau_{\varphi+\pi/2}. \quad (134')$$

Вычисление σ_φ и τ_φ по формулам (134) может быть заменено графическим построением круга Мора, уравнение которого

$$\left(\sigma_\varphi - \frac{1}{2}\sigma\right)^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{1}{2}\sigma\right)^2 = R^2 \quad (134'')$$

получается исключением φ из уравнений (134).

Если рассматривать σ_φ и τ_φ как абсциссу и ординату в плоскости координат $(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$, то уравнение (134'') будет определять собой окружность радиуса $R = \frac{1}{2} \sigma$, центр которой смещен от начала координат в положительном направлении оси σ_φ на величину $\frac{\sigma}{2}$.

Вычерчивание круга Мора выполняется так (фиг. 119). Проводятся взаимно перпендикулярные оси σ_φ и τ_φ , и от начала координат по оси σ_φ откладывается в некотором масштабе (1 см чертежа равен $m \text{ кг/см}^2$) отрезок, равный $\frac{\sigma}{2}$. Из конца этого отрезка, как из центра, проводят окружность радиуса $R = \frac{\sigma}{2}$. Эта окружность касается оси τ_φ в начале координат O .

На основании уравнения (134) можно видеть, что точка D , лежащая на окружности, дает две координаты:

$$\overline{OD} = \sigma_\varphi \text{ и } D''D = \tau_\varphi, \quad (135)$$

определяющие собой напряжения по площадке с углом $\varphi = \angle DOA$. Центральный угол $\angle DCA$, соответствующий точке D , равен 2φ .

Отрезок $\overline{OD}$ дает величину полного напряжения по площадке φ :

$$\overline{OD} = R_\varphi = \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \tau_\varphi^2}. \quad (135')$$

Положение площадки φ в рассматриваемом элементе, соответствующей точке D на круге Мора, определяется нормалью n , которая проводится параллельно прямой OD .

Наибольшие и наименьшие касательные напряжения в элементе с линейным напряженным состоянием получаются при $\varphi = \pm 45^\circ$ и равны:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \overline{CE} = +\frac{\sigma}{2}; \\ \tau_{\min} &= \overline{CE'} = -\frac{\sigma}{2}. \end{aligned} \quad (135'')$$

По любой площадке, параллельной направлению σ (фиг. 119, б), напряжение равно нулю.

Круг Мора может быть вычерчен как по заданному σ , как это сделано на фиг. 119 (прямое построение), так и по заданным σ_φ , τ_φ и $\sigma_\varphi + \tau_\varphi$, $\tau_\varphi + \tau_\varphi = -\tau_\varphi$ (обратное построение, которым определяются главные напряжения). Обратное построение дано на фиг. 122.

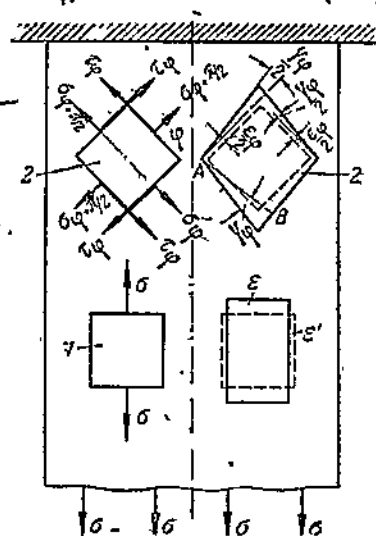
Деформация в элементе с линейным напряженным состоянием показана на фиг. 120.

Для элемента I (фиг. 120), выделенного по главным площадкам, относительные линейные деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}, \quad (136)$$

где E — модуль продольной упругости (модуль Юнга).

Поперечная деформация ε' получается по всем направлениям, перпендикулярным к σ .



Фиг. 120. Деформация при линейном напряженном состоянии: 1 — элемент, выделенный по главным площадкам; 2 — элемент, выделенный по касательным площадкам.

По граням элемента 2 (фиг. 120) действуют нормальные и касательные напряжения, определяемые уравнениями (134). В первой части фиг. 120 показана деформация этого элемента.

Относительные линейные деформации

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \mu \cdot \sigma_{\varphi + \pi/2}); \quad \varepsilon_{\varphi + \pi/2} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi + \pi/2} - \mu \cdot \sigma_{\varphi}), \quad (136')$$

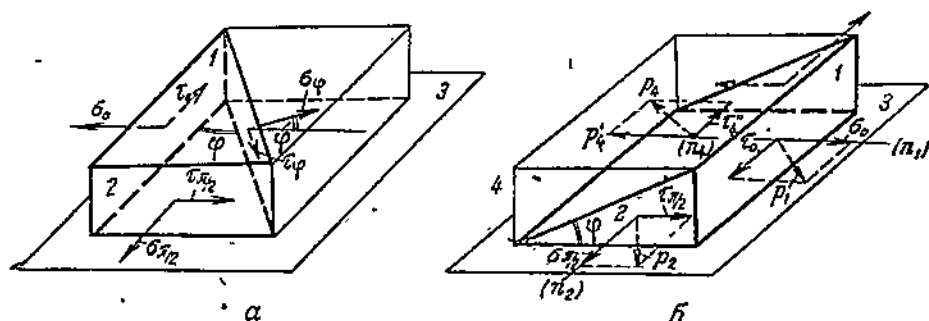
Относительный сдвиг (изменение прямого угла между гранями элемента)

$$\gamma_{\varphi} = \frac{\tau_{\varphi}}{G}, \quad (136'')$$

где G — модуль сдвига.

Плоское напряженное состояние

В случае плоского напряженного состояния по одной из площадок напряжения равны нулю (площадка 3 на фиг. 121). По двум взаимно-



Фиг. 121. Наклонные площадки в элементе с плоским напряженным состоянием.

перпендикулярным площадкам 1 и 2, перпендикулярным к площадке 3, свободной от напряжения, в общем случае действуют нормальные и касательные напряжения, обозначенные на фиг. 121 соответственно σ_0 , τ_0 и $\sigma_{\pi/2}$, $\tau_{\pi/2} = -\tau_0$.

Для площадки, перпендикулярной к площадке 3 и имеющей нормаль под углом φ к направлению σ_0 , на основании уравнения (134) нормальные и касательные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \frac{1}{2} (\sigma_0 + \sigma_{\pi/2}) + \frac{1}{2} (\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}) \cdot \cos 2\varphi - \tau_0 \cdot \sin 2\varphi; \\ \tau_{\varphi} &= \frac{1}{2} (\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}) \cdot \sin 2\varphi + \tau_0 \cdot \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (137)$$

Формулы (137) для напряжений по наклонным площадкам упрощаются, если исходные напряжения σ_0 и $\sigma_{\pi/2}$ являются главными напряжениями σ_1 и σ_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi_0; \\ \tau_{\varphi} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\varphi_0. \end{aligned} \quad (137')$$

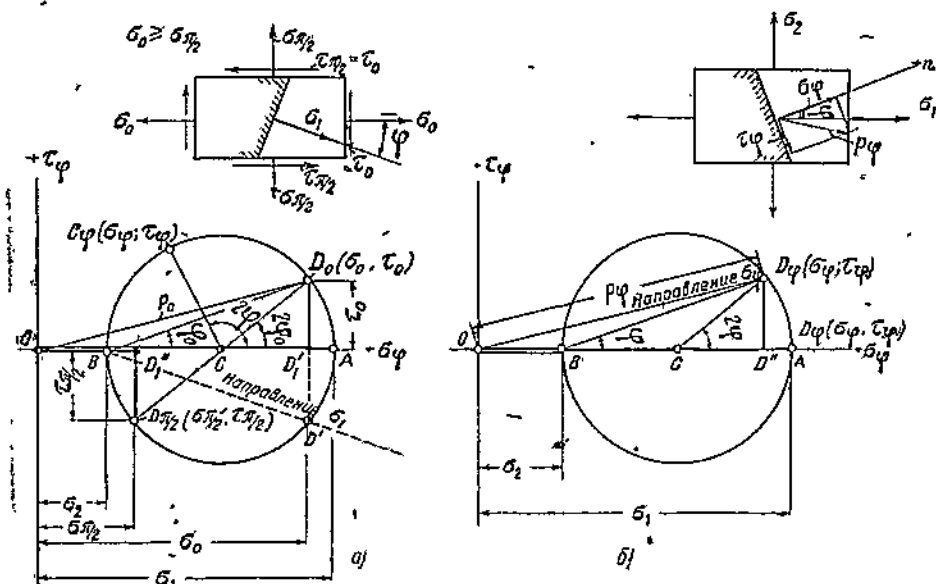
Здесь φ_0 — угол между направлениями нормалей к главной площадке σ_1 и к рассматриваемой наклонной площадке.

Если зависимости (137) для σ_φ и τ_φ представлять графически, то каждой площадке φ будет соответствовать точка в координатной плоскости $(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$, лежащая на окружности:

$$\left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_{\pi/2}) \right]^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}}{2} \right)^2 + \tau_0^2 = R^2.$$

Для вычерчивания круга Мора по заданным σ_0 , τ_0 , $\sigma_{\pi/2}$, $\tau_{\pi/2} = -\tau_0$ от начала координат в положительном направлении оси σ_φ откладывается отрезок, равный $\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_{\pi/2})$, и из полученной точки, как из центра, проводится окружность радиуса R .

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}}{2} \right)^2 + \tau_0^2}.$$



Фиг. 122. Круг Мора при плоском напряженном состоянии для площадок, перпендикулярных к площадке, свободной от напряжений:
а—обратное построение; б—прямое построение.

Чтобы при этом не подсчитывать величину радиуса R , проще поступать так (фиг. 122, а). Отложить отрезки

$$\overline{OD_1'} = \sigma_0; \overline{D_1'D_0} = \tau_0 \text{ и } \overline{OD_1''} = \sigma_{\pi/2}; \overline{D_1''D_{\pi/2}} = \tau_{\pi/2}. \quad (138)$$

Этим будут получены точки D_0 и $D_{\pi/2}$, соответствующие заданным площадкам с напряжениями σ_0 , τ_0 и $\sigma_{\pi/2}$, $\tau_{\pi/2}$. Прямая $D_0D_{\pi/2}$ пересекает ось σ_φ в центре C окружности. Из этой точки, как из центра, через точку D_0 проводят окружность, которая при этом пройдет через точку $D_{\pi/2}$.

Точка C_φ , лежащая на окружности, имеет координаты σ_φ и τ_φ , равные напряжениям по площадке с нормалью под углом φ к направлению σ_0 .

Если при этом ось σ_φ проведена параллельно большему из напряжений σ_0 или $\sigma_{\pi/2}$ (на фиг. 122, а предположено, что $\sigma_0 > \sigma_{\pi/2}$), то напря-

вление, большего из главных напряжений в рассматриваемом элементе получается непосредственно графически так:

Продолжением прямой $D_0 D_1'$ получается в пересечении с окружностью точка D' , симметричная по отношению оси σ_φ точке D_0 , и через точку D' и левую точку B окружности проводится прямая BD' , симметричная с прямой BD_0 . Ее направление и дает направление большего главного напряжения σ_1 .

Все приводимые ниже зависимости для напряжений наглядно вытекают из круга Мора.

Величины главных напряжений определяются по масштабу отрезками $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ круга Мора или вычисляются по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \overline{OC} \pm R = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_{\pi/2}) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}}{2}\right)^2 + \tau_0^2}. \quad (139)$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

$$\tau_{\max, \min} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}}{2}\right)^2 + \tau_0^2}. \quad (139')$$

Наклон φ_0 нормалей к главным площадкам с направлением $\sigma_0 > \sigma_{\pi/2}$ находится на основании формулы

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\overline{D_1' D_0}}{\overline{CD_1'}} = \frac{2\tau_0}{\sigma_0 - \sigma_{\pi/2}}. \quad (139'')$$

Формула (139'') определяет два угла φ_0' и φ_0'' для нормалей к обеим главным площадкам, отличные на 90° , так что $\varphi_0'' = \varphi_0' + \frac{\pi}{2}$.

Сумма нормальных напряжений по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ для заданного элемента постоянна

$$\sigma_\varphi + \sigma_{\varphi + \pi/2} = 2 \cdot \overline{OC} = \sigma_0 + \sigma_{\pi/2} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const.} \quad (139''')$$

Построение фиг. 122, а является обратным построением: по напряжениям в наклонных площадках находятся главные напряжения.

Прямое построение круга Мора по заданным главным напряжениям дано на фиг. 122, б. При этом ось σ_φ выбирается параллельно большему из главных напряжений $\sigma_1 > \sigma_2$.

По площадке 4 (фиг. 121, б), наклоненной к площадке 3, свободной от напряжений под углом ψ , действует полное напряжение p_4 , параллельное площадке 3 (это следует из условия равновесия призмы на фиг. 121, б, обведенной толстыми линиями).

Для определения составляющих p_4' и τ_4'' следует основную зависимость (133) применить два раза — один раз к площадкам 4 и 1, а другой раз — к площадкам 4 и 2:

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_{(n_1)} p_1 &= \operatorname{pr}_{(n_1)} p_4, \text{ т. е. } p_4' = \sigma_0 \cdot \sin \psi; \\ \operatorname{pr}_{(n_2)} p_2 &= \operatorname{pr}_{(n_2)} p_4, \text{ т. е. } \tau_4'' = \tau_{\pi/2} \cdot \sin \psi = \tau_0 \cdot \sin \psi. \end{aligned}$$

Следовательно, p_4 имеет то же направление, что и p_1 и равно

$$p_4 = p_1 \cdot \sin \psi.$$

Нормальное напряжение по площадке 4 равно

$$\sigma_4 = p_4' \cdot \sin \psi = \sigma_0 \cdot \sin^2 \psi. \quad (140)$$

Если ограничиться площадками, имеющими $\psi = \frac{\pi}{2}$, то по кругу (σ_1, σ_2) для площадок $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{2})$

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (141')$$

Следовательно, при одинаковых знаках обоих главных напряжений наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом $\pm \frac{\pi}{4}$ к площадке, свободной от напряжений.

Наибольшая относительная линейная деформация при плоском напряженном состоянии происходит по направлению большего главного напряжения:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2). \quad (142)$$

Поперечная деформация ϵ' в направлении, перпендикулярном к площадке, свободной от напряжений, равна

$$\epsilon' = -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (142')$$

Объемное напряженное состояние

В случае объемного напряженного состояния ни одно из главных напряжений не равно нулю.

По закону наложения объемное напряженное состояние

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

можно рассматривать как сумму двух напряженных состояний I и II:

$$\begin{aligned} I & \dots (\sigma_x - \sigma_3), (\sigma_y - \sigma_3), (\sigma_z - \sigma_3), \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}; \\ II & \dots \sigma_3, \sigma_3, \sigma_3, 0, 0, 0. \end{aligned} \quad (143)$$

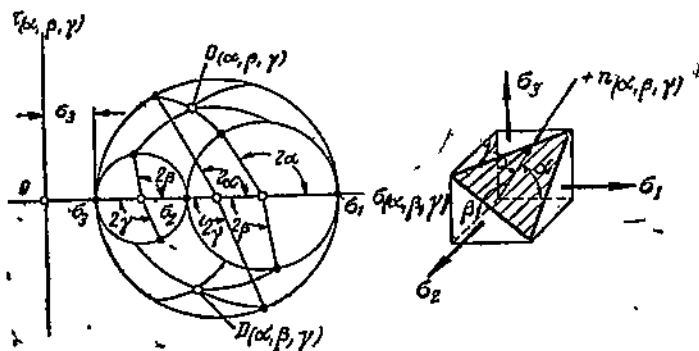
Для напряженного состояния II все главные напряжения равны σ_3 , любая площадка является главной, и касательные напряжения вовсе отсутствуют. Частица материала находится в условиях всестороннего равномерного сжатия (гидростатическое давление) или растяжения.

Напряженное состояние I отличается от заданного $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ только тем, что нормальное напряжение на каждой площадке уменьшено на величину σ_3 . Все касательные напряжения остались без изменения. На главной площадке, имевшей в заданном напряженном состоянии напряжение σ_3 , при напряженном состоянии I напряжение равно нулю. Следовательно, напряженное состояние I является плоским напряженным состоянием, причем площадка, свободная от напряжений, совпадает с площадкой, где действовало σ_3 , а направления σ_1 и σ_2 в заданном напряженном состоянии совпадают с направлениями главных напряжений состояния I.

Этим можно воспользоваться для графического представления заданного объемного напряженного состояния. Плоское напряженное состояние I, в котором главные напряжения равны $(\sigma_1 - \sigma_3), (\sigma_2 - \sigma_3)$, представляются тремя кругами, пересекающимися ось σ в точках 0, $(\sigma_1 - \sigma_3)$, $(\sigma_2 - \sigma_3)$. Так как по всем площадкам в заданном объемном, напряжен-

ном состоянии все нормальные напряжения больше на величину σ_3 , то необходимо координатную ось τ_x отнести влево на величину σ_3 . Объемное напряженное состояние будет представляться точками, заключенными между кругами (фиг. 124).

Если положение наклонной площадки, для которой необходимо определить напряжения, задано углами α, β, γ ее нормали с направлениями главных напряжений, то угол γ будет совпадать с углом ψ , который площадка (ϕ, ψ) образовывала с плоскостью, свободной от напряжений. Поэтому круг для всех площадок с заданным углом γ вычерчивается как круг на фиг. 123 для заданного угла ψ_0 . Аналогично проводятся два круга с заданными α и β . Точка $D(\alpha, \beta, \gamma)$ (фиг. 124) получается как точка пересечения трех таких кругов, из которых один является контрольным. Так как при этом получаются две точки $D(\alpha, \beta, \gamma)$, то из построения знак найденного касательного напряжения $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$ определить нельзя.



Фиг. 124. Круги Мора для объемного напряженного состояния. Прямое построение.

Верхним и нижним точкам трех кругов (фиг. 124) соответствуют шесть площадок в элементе, по которым касательные напряжения имеют экстремум:

$$\tau'_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau''_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau'''_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \quad (144)$$

Сами площадки идут параллельно одному из главных напряжений и пересекают два другие под углом 45° .

Если заданы напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ по координатным площадкам, то главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 находятся как корни уравнения третьей степени относительно σ :

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma^2 + (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{zx}^2 + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) \cdot \sigma - (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2) = 0. \quad (145)$$

В случае объемного напряженного состояния, в отличие от линейного и плоского, графическое определение главных напряжений по заданным напряжениям в наклонных площадках невозможно, так как эта задача связана с решением кубического уравнения (145).

Наибольшие относительные продольные деформации ε_1 получаются в направлении σ_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (145')$$

где E — модуль продольной упругости;

μ — коэффициент Пуассона.

Относительный сдвиг в какой-либо плоскости определяется величинами касательных напряжений в этой плоскости. Например в координатной плоскости xy

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (146)$$

где G — модуль сдвига.

Напряжения через относительные деформации выражаются по формулам:

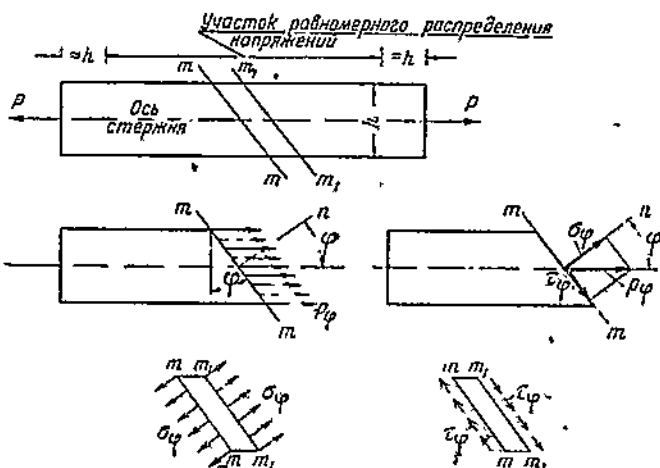
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]; \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (147)$$

(закон Гука).

§ 2. Напряжения в прямых стержнях [1, 2; 3]

Центральное растяжение или сжатие

При растяжении или сжатии силами P прямого стержня по его оси в сечениях, достаточно удаленных от места приложения нагрузки (фиг. 125),



Фиг. 125. Напряжения при простом растяжении (или сжатии).

получается равномерное распределение нормальных напряжений σ по поперечному сечению

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (148)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня.

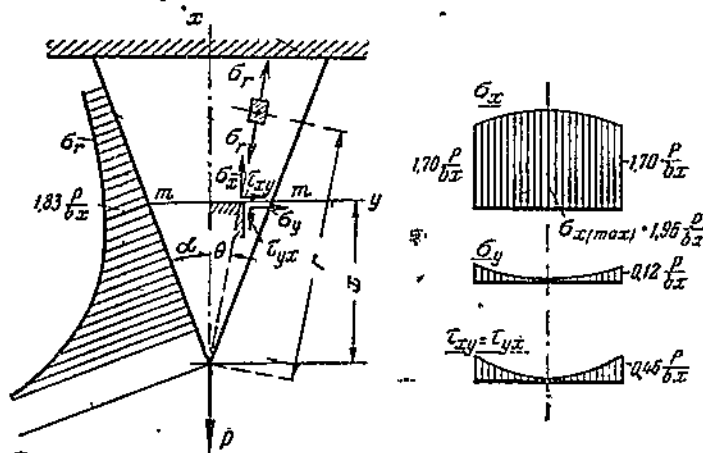
При приложении силы P в одной точке торца стержня на расстоянии, равном ширине h стержня, отклонение от равномерного распределения напряжений незначительно (принцип Сен-Венана) и не превосходит 3% . Расчет напряжений в местах приложения силы см. § 5 гл VI.

Если стержень имеет ослабления отверстием, выточкой и т. п., то при центральном приложении силы для ослабленного сечения вычисляется среднее напряжение:

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{netto}}}, \quad (148')$$

где F_{netto} — полезная (ослабленная) площадь поперечного сечения.

В любой точке стержня на участке равномерного распределения напряжений имеет место однородное линейное напряженное состояние.



Фиг. 126. Напряжения при растяжении клина.

По площадкам, наклоненным под углом φ к поперечному сечению, равнодействующие напряжения p_φ распределяются также равномерно. В соответствии с формулами (134)

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{P}{F} \cos^2 \varphi; \\ \tau_\varphi &= \frac{1}{2} \frac{P}{F} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (149)$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения получаются по площадкам, наклоненным под углом $\pm 45^\circ$ к оси стержня:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma}{2}. \quad (149')$$

Для оценки распределения напряжений в стержне с плавно меняющимся поперечным сечением следует воспользоваться формулами для напряжений в клине постоянной толщины b (фиг. 126) [1]. Распределение напряжений в клине оказывается чисто радиальным, т. е. любой элемент, взятый в радиальном направлении, находится в линейном напряженном состоянии.

$$\sigma_r = k \frac{P \cdot \cos \theta}{b \cdot r} \quad (150)$$

Коэффициент k зависит от наклона граней клина:

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

На основании формул (134) для точек поперечного сечения x

$$\sigma_x = \sigma_r \cdot \cos^2 \theta = k \frac{P \cdot \cos^4 \theta}{b \cdot x};$$

$$\sigma_y = \sigma_r \cdot \sin^2 \theta = k \frac{P \cdot \sin^2 \theta}{4b \cdot x};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_r \sin 2\theta = k \frac{P \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin 2\theta}{2b \cdot x}.$$

Распределение напряжений σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ в сечении x и напряжений σ_r по длине ребра клина для $\alpha = 15^\circ$ показано на эпюрах фиг. 126 (масштаб эпюры σ_r взят в два раза меньшим, чем для других эпюр).

Нормальные напряжения σ_x по поперечному сечению достигают максимума на оси стержня и имеют минимум при $\theta = \alpha$. Разность между наибольшими и наименьшими значениями σ_x в сечении возрастает с увеличением α . При $\alpha = 15^\circ$ эта разность составляет $13,5\%$ от среднего напряжения, получаемого делением силы P на площадь F поперечного сечения по $m-m$.

Аналогичный результат получается для конического стержня. Распределение напряжений в сечении приближается к равномерному по мере уменьшения угла конусности.

Резкое (неплавное) изменение размера поперечного сечения приводит к еще большей неравномерности распределения напряжений и вызывает так называемую концентрацию напряжений. Расчет наибольших напряжений в местах концентраций делается в зависимости от соотношения размеров в местах концентрации и величин среднего напряжения, вычисляемого по формулам (148) или (148') (см. гл. VII).

Чистый срез

В поперечном сечении детали получается чистый срез (срез без изгиба), если в этом сечении возникают лишь касательные напряжения, и нормальные напряжения в поперечном сечении равны нулю (ими можно пренебречь). Примерами деталей, рассчитываемых на чистый срез, являются болты, заклепки, шпонки и т. п.

Касательные напряжения τ при чистом срезе считаются равномерно распределенными по поперечному сечению, так что

$$\tau = \frac{Q}{F}, \quad (151)$$

где Q — сила среза (перерезывающая сила);

F — площадь поперечного сечения детали, воспринимающая силу среза.

Сила среза Q может составлять лишь часть всей нагрузки P , воспринимаемой соединением.

На участке между сечениями $m-m$ и $m'-m'$ (фиг. 127) действуют по поперечным и перпендикулярным к ним долевым сечениям болта лишь касательные напряжения:

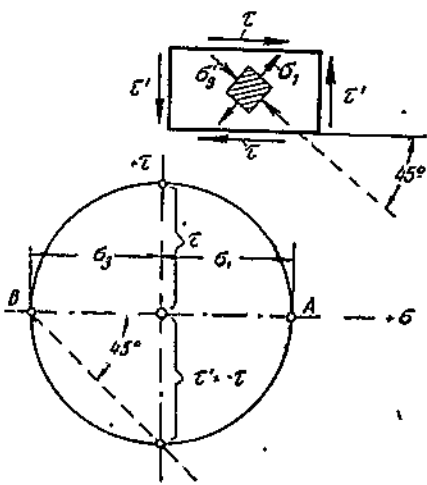
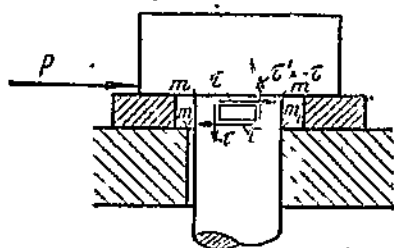
$$\tau = \tau' = \frac{Q}{F},$$

где F — площадь поперечного болта.

Напряжения* по другим площадкам, перпендикулярным к плоскости чертежа, определяются при помощи круга Мора. В площадках, наклоненных под углом $\pm 45^\circ$ к площадкам чистого среза, действуют наибольшие и наименьшие нормальные напряжения σ_1 и σ_3 , а площадка элемента, лежащая в плоскости чертежа, соответствует главному напряжению σ_2 :

$$\sigma_{1,3} = \pm \tau = \pm \frac{Q}{F};$$

$$\sigma_2 = 0. \quad (151')$$



Фиг. 127. Напряжения при срезе.

Кручение

Если поперечное сечение скручиваемого вала — круг постоянного диаметра, то поперечные сечения остаются при деформации плоскими, а радиусы — прямыми. Любая пара поперечных сечений, взятых на одинаковых расстояниях, между собой поворачивается друг по отношению к другу на одинаковые углы, и при малости деформаций расстояние между сечениями не меняется.

В таком случае в поперечном сечении действуют только касательные напряжения, вычисляемые по формуле

$$\tau_p = \frac{M_{кр}}{J_p} \cdot \rho. \quad (152)$$

Здесь τ_p — величина касательного напряжения, действующего на площадку поперечного сечения в расстоянии ρ от оси стержня;

$M_{кр}$ — скручивающий момент в рассматриваемом сечении.

Полярный момент инерции сечения вычисляется по формулам: для сплошного вала круглого сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4; \quad (152')$$

для полого вала круглого сечения

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} [1 - \alpha^4] \approx 0,1 \cdot D^4 [1 - \alpha^4], \quad (152'')$$

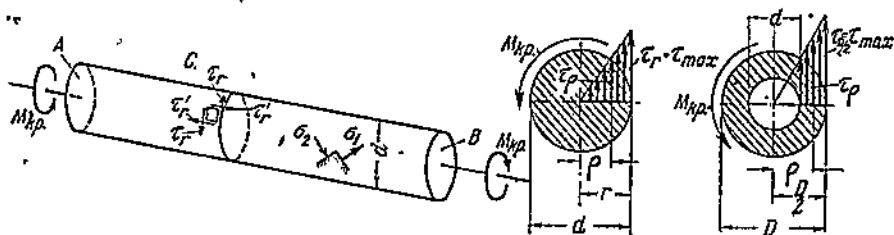
где $\alpha = \frac{d}{D}$ — отношение внутреннего и наружного диаметров.

В крайних точках сечения получаются наибольшие касательные напряжения: для сплошного вала круглого сечения (при $\rho = \frac{d}{2}$)

$$\tau_{r\max} = \tau_r = \frac{M_{кр}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{кр}}{W_p}; \quad (153)$$

для полого вала круглого сечения (при $\rho = \frac{D}{2}$)

$$\tau_{\max} = \tau_r = \frac{M_{кр}}{I_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (153')$$



Фиг. 128. Напряжения при скручивании стержня круглого сечения.

При этом полярный момент сопротивления:
для сплошного вала

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3;$$

для полого вала

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} [1 - \alpha^4] \approx 0,2 D^3 [1 - \alpha^4].$$

Момент кручения $M_{кр}$ в рассматриваемом сечении может подсчитываться через мощность N , передаваемую данным сечением вала, и число n оборотов вала

$$M_{кр} = 71620 \frac{N}{n}; \quad (154)$$

здесь N в л. с.; n — число оборотов в минуту; $M_{кр}$ — в кгс см.

В точке C (фиг. 128) вала, лежащей на поверхности, может быть выделен элемент, находящийся в условиях чистого сдвига (см. фиг. 127), так что главные напряжения в этих точках равны

$$\sigma_{1,3} = \pm \tau_{\max} = \pm \frac{M_{кр}}{W_p}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (155)$$

Главные напряжения σ_1 и σ_3 действуют по площадкам, расположенным под углом 45° к оси вала и перпендикулярным к поверхности вала в рассматриваемой точке.

Если скручивается стержень некруглого сечения, то в связи с искривлением при деформации радиусов и поперечных сечений формула (152) оказывается неприменимой.

Теоретические решения в случае скручиваемого стержня некруглого сечения имеются лишь для сечений эллиптического, прямоугольного, ослабленного пазом или канавками простейших форм, треугольного, сечений в виде правильного многоугольника и некоторых других форм [1, 4]. Расчетные формулы для наибольших напряжений и углов закручивания в этих случаях приведены в табл. 17.

Для оценки напряжений в сечениях сложной формы применяется метод аналогии. По методу мембранной аналогии распределение касательных напряжений τ в сечении скручиваемого призматического стержня сопоставляется с деформацией тонкой мембраны (пленки), натянутой на плоском контуре, имеющем форму контура сечения и подвергнутой одностороннему равномерному давлению (фиг. 129):

1. Удвоенный объем, заключенный между поверхностью мембраны и плоскостью ее контура, численно равен крутящему моменту.

2. Касательная $t-t$ (фиг. 129) в любой точке к горизонтالي изогнутой мембраны даст направление касательного напряжения в соответствующей точке сечения.

3. Тангенс наибольшего угла α наклона касательной к поверхности мембраны численно равен величине τ в соответствующей точке сечения стержня.

При этом прогибы в пленке предполагаются достаточно малыми.

В случае трубчатого сечения внутренний и внешний контуры пленки располагаются в разных горизонтальных плоскостях на расстоянии δ . Если толщина h стенки трубы (фиг. 130, а) мала, то кривизной мембраны можно пренебречь, т. е. линии ab можно рассматривать как прямые и, следовательно, напряжения τ по толщине стенки можно считать равномерно распределенными:

$$\tau = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{h}.$$

Удвоенный объем под пленкой равен

$$2 \cdot F \cdot \delta = M_{кр},$$

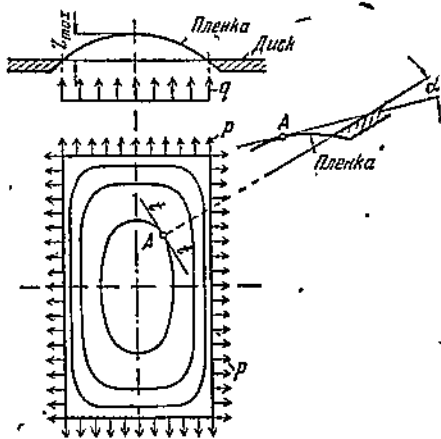
откуда

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2Fh}, \quad (156)$$

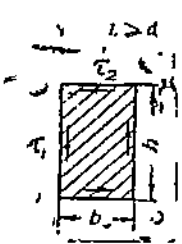
здесь F — площадь, ограниченная осевой линией стенки.

Формула (156) достаточно точна при малой толщине h стенки, если изменение в толщине h плавное и если нет в сечении входящих углов.

Учет концентрации напряжений во входящих углах см. гл. VII.



Фиг. 129. Мембранная аналогия (для прямоугольного сечения).

Форма сечения	Напряжения τ	Угол закручивания φ
1. Прямоугольник 	$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{k_1 h b^2}; \quad \tau_2 = \frac{M_{кр}}{k_2 h b^2},$ где k_1 и k_2 — из приведенной ниже таблицы в зависимости от $\frac{h}{b}$. Для наибольшего напряжения τ можно применять приближенную формулу $\tau_1 = \frac{M_{кр}}{h b^2} \left[3 + 1,8 \frac{b}{h} \right]$	$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{k G \cdot h b^3}.$ Жесткость на кручение $C = k G \cdot h b^3$

$\frac{h}{b}$	1,00 (кв.др.)	1,20	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	8,00	10,00	∞ (полоса)
k_1	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
k_2	0,208	0,235	0,269	0,291	0,309	0,336	0,355	0,378	0,392	0,402	0,414	0,421	...
k	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333

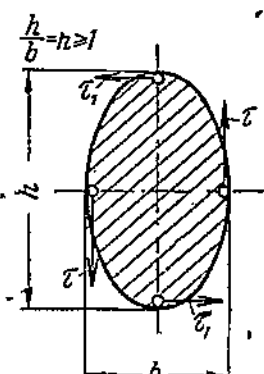
2. Эллипс 	$\tau = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi b^3 \cdot n}$ $\tau_1 = \frac{\tau}{n}$	$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot \frac{\pi}{16} \frac{n^3}{n^2 + 1} b^4}$

Таблица 17 (продолжение)

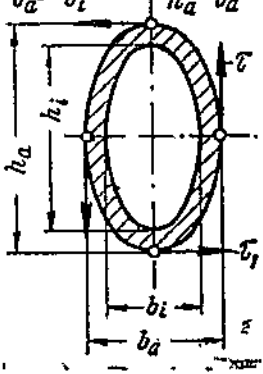
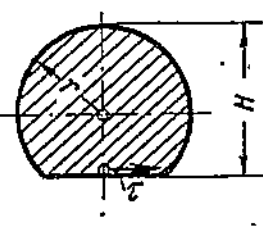
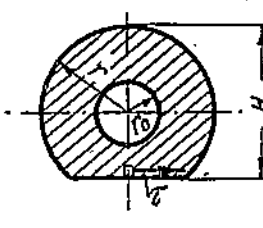
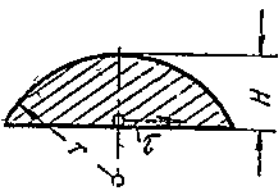
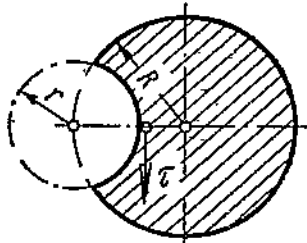
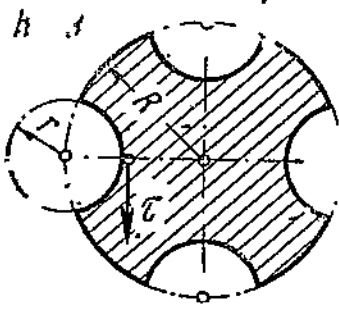
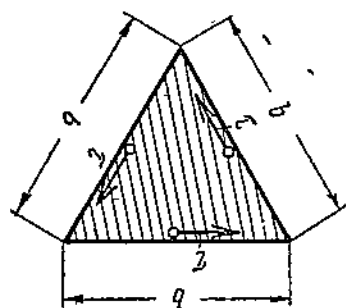
3. Полый эллипс $\frac{h_a}{b_a} = \frac{h_i}{b_i} = h \gg 1, \quad \frac{h_i}{h_a} = \frac{b_i}{b_a} = \alpha$ 	$\tau = \frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot n \cdot b_a^3 (1 - \alpha^4)}$ $\tau_1 = \frac{\tau}{n}$ Для круга $n = 1$		$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot \frac{\pi}{16} \frac{n^3}{n^2 + 1} b_a^4 (1 - \alpha^4)}$
Форма сечения	Предел применения формул	Наибольшее напряжение τ	Угол закручивания φ
4. Вал с лыской 	$\frac{H}{r} \text{ от } 1$ до 2	$\frac{0,15 \frac{H}{r} + 0,7}{1,3 \frac{H}{r} - 1} \cdot \frac{M_{кр}}{r^3}$	$\frac{M_{кр} \cdot l}{\left(1,3 \frac{H}{r} - 1\right) \cdot G \cdot r^4}$
5. Полый вал с лыской 	$\frac{r}{r_0} = 2;$ $\frac{H}{r} = \frac{7}{4}$	$1,43 \frac{M_{кр}}{r^3}$	$\frac{M_{кр} \cdot l}{1,18 \cdot G \cdot r^4}$

Таблица 17 (продолжение)

Форма сечения	Предел применения формул для	Наибольшее напряжение τ	Угол закручивания φ																														
6. Круговой сегмент 	$\frac{r}{H}$ от 4 до 1	$2,86 \frac{M_{кр}}{r^3} \left(\frac{r}{H}\right)^{2,82}$	$\frac{M_{кр} \cdot l}{0,296 \cdot r^4 \cdot G} \left(\frac{r}{H}\right)^{3,35}$																														
7. Круглый вал с пазом 	$\tau = k_1 \frac{M_{кр}}{R^3}$		$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot k R^4}$																														
		<table><tr><td>$\frac{r}{R}$</td><td>0</td><td>0,05</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,6</td><td>0,8</td><td>1,0</td><td>1,5</td></tr><tr><td>k_1</td><td>0,64</td><td>1,25</td><td>1,22</td><td>1,23</td><td>1,31</td><td>1,52</td><td>1,91</td><td>2,63</td><td>7,14</td></tr><tr><td>k</td><td>1,57</td><td>1,56</td><td>1,56</td><td>1,46</td><td>1,22</td><td>0,92</td><td>0,63</td><td>0,38</td><td>0,07</td></tr></table>	$\frac{r}{R}$	0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	k_1	0,64	1,25	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14	k	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07	
$\frac{r}{R}$	0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5																								
k_1	0,64	1,25	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14																								
k	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07																								
8. Круглый вал с четырьмя канавками (трефы прокатных станов) 	$\tau = 1,77 \frac{M_{кр}}{R^3}$		$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{0,703 \cdot G R^4}$																														

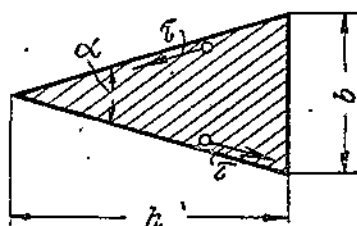
9. Равносторонний треугольник



$$\tau = \frac{M_{кр}}{0,05 \cdot b^3}$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot \frac{b^4}{46,19}}$$

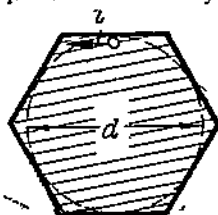
10. Равнобедренный треугольник



$$\tau = \frac{M_{кр}}{\frac{1}{12} h^3 - 0,105 \cdot b^3}$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot b \left(\frac{1}{12} h^3 - 0,105 b^3 \right)}$$

11. Правильный шестиугольник

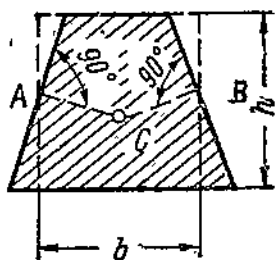


$$\tau = \frac{M_{кр}}{0,217 \cdot F \cdot d}$$

F — площадь сечения;
 d — диаметр вписанного в сечение круга

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{0,133 \cdot G F d^2}$$

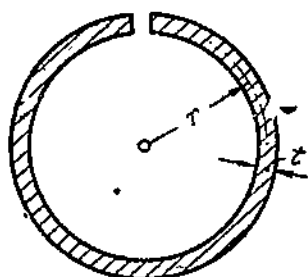
12. Равнобокая трапеция



C — центр тяжести;
 CA и CB — перпендикуляры на боковые стороны трапеции

Наибольшее напряжение τ находится, как для прямоугольника с размерами b и h

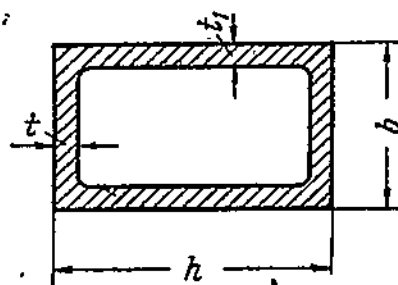
φ находится, как для стержня прямоугольного сечения с размерами b и h

13. Тонкостенная труба
с прорезью

$$\tau = \frac{M_{кр}(6\pi r + 1,8t)}{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot t^3}$$

$$\varphi = \frac{3M_{кр} \cdot l}{2\pi G r t^3}$$

14. Коробчатое сечение



$$\tau = \frac{M_{кр}}{2t(h-t)(b-t)}$$

$$\varphi = \frac{ht + bt_1 - t^2 - t_1^2}{2t \cdot t_1 (h-t)^2 (b-t_1)^2} \cdot \frac{M_{кр} l}{G}$$

15. Сечение прокатных балок



Составлены из прямоугольников
размерами $b \cdot h$,

где $\frac{h}{b} \geq 6$.

Наибольшее касательное напряжение в середине прямоугольника с наибольшей толщиной $b_{\max}$

$$\tau = \frac{3M_{кр} \cdot b_{\max}}{\eta \Sigma (hb^3)}$$

(если не принимать во внимание концентрации напряжений, см. гл. VII)

Значения η (по Фейллу)

$I \eta \approx 1,30$; $\square \eta \approx 1,00$;

$L \eta \leq 1,30$;
 $\eta \leq 1,00$;

$+\eta \approx 1,17$.

Жесткость
на кручение

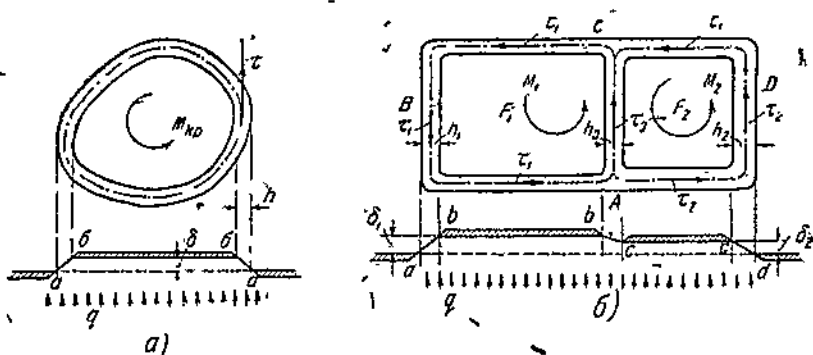
$$C = \frac{1}{3} G \cdot \eta \Sigma (hb^3)$$

$$\varphi = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot l}{G \eta \Sigma (hb^3)}$$

Формулы для сечений 13, 14, 15 табл. 17 составлены методом аналогии и для сечений 4, 5, 6 получены экспериментально по этому методу.

Одна промежуточная стенка делает сечение двусвязным (фиг. 130, б). На основании метода мембранной аналогии и рассматривая условия деформации [6], можно получить:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= M_{кр} \frac{h_2 \cdot s_2 \cdot F_1 + h_2 \cdot s_3 (F_1 + F_2)}{2 [h_1 \cdot h_3 \cdot s_2 \cdot F_1^2 + h_2 \cdot h_3 \cdot s_1 \cdot F_2^2 + h_1 \cdot h_2 \cdot s_3 (F_1 + F_2)^2]} ; \\ \tau_2 &= M_{кр} \frac{h_2 \cdot s_1 \cdot F_1 + h_1 \cdot s_3 (F_1 + F_2)}{2 [h_1 \cdot h_3 \cdot s_2 \cdot F_1^2 + h_2 \cdot h_3 \cdot s_1 \cdot F_2^2 + h_1 \cdot h_2 \cdot s_3 (F_1 + F_2)^2]} ; \\ \tau_3 &= M_{кр} \frac{h_1 \cdot s_2 \cdot F_1 - h_2 \cdot s_1 \cdot F_2}{2 [h_1 \cdot h_3 \cdot s_2 \cdot F_1^2 + h_2 \cdot h_3 \cdot s_1 \cdot F_2^2 + h_1 \cdot h_2 \cdot s_3 (F_1 + F_2)^2]} .\end{aligned}\quad (157)$$



Фиг. 130. Применение мембранной аналогии к тонкостенным стержням:
а — с одновязным контуром; б — с двусвязным контуром.

Здесь h_1, h_2, h_3 — толщины, постоянные на протяжении участков стенки ABC, ADC и AC ;

τ_1, τ_2, τ_3 — напряжения, постоянные по этим участкам;

s_1, s_2, s_3 — длины осевых линий этих участков;

$M_{кр}$ — момент кручения, приложенный ко всему сечению;

F_1 и F_2 — площади, ограниченные осевыми линиями стенки.

Если стенка AC расположена на оси симметрии, причем $h_1 = h_2$, то из последнего уравнения следует, что $\tau_3 = 0$.

Расчет для других случаев скручивания см. [6].

Если возможность коробления одного или нескольких поперечных сечений при скручивании стержня стеснена связями (стесненное кручение), то величина собственно момента кручения $M_{кр}$, вводимого в предыдущие формулы для подсчета напряжений τ , может оказаться меньше величины внешнего момента M_z , действующего по отношению к оси стержня. Однако это уменьшение будет сопровождаться возникновением дополнительных сил среза и нормальных напряжений. Стесненное кручение должно приниматься во внимание при таких сечениях, как двутавровое или корытное, если, высота балки и ширина полки не малы по отношению к длине балки.

Для случая, приведенного на фиг. 131, внешний момент M_z в сечении x уравнивается частично касательными напряжениями от скручивания моментом M_z' и частично касательными силами, связанными

с изгибом полки и дающими момент $M_t'' = Q \cdot h$ (см. [2] Тимошенко, ч. I, стр. 256):

$$M_t = M_t' + M_t''.$$

В месте заделки при $x=0$

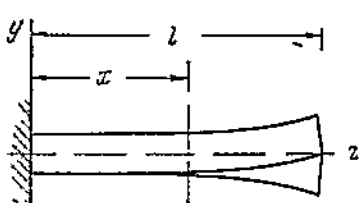
$$M_t' = 0 \text{ и } Q = \frac{M_t}{h}$$

и изгибающий момент $M_{\max}$ в полке для закрепленного конца балки оказывается максимальным:

$$M_{\max} = \frac{a}{h} M_t \cdot \operatorname{th} \frac{l}{a},$$

где $a = h \sqrt{\frac{D}{2C}}$. Здесь C — жесткость балки на кручение, D — жесткость полки на изгиб.

При a малом по сравнению с l (длинная балка),



так что

$$\operatorname{th} \frac{l}{a} = 1,$$

$$M_{\max} \approx M_t \cdot \frac{a}{h}. \quad (158')$$

При l , малом по сравнению с a (короткая балка),

$$\operatorname{th} \frac{l}{a} \approx \frac{l}{a},$$

так что

$$M_{\max} \approx M_t \cdot \frac{l}{h}. \quad (158'')$$

Для другого конца при $x=l$ собственно скручивающий момент M_t' достигает максимума:

$$M_{kr} = M_t' = M_t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{a}} \right). \quad (159)$$

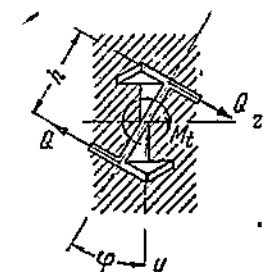
Если l велико по сравнению с h , то

$$M_{kr} \approx M_t. \quad (159')$$

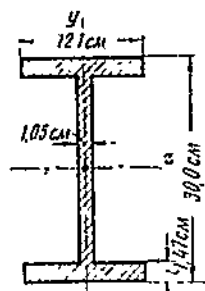
Пример. Для двутавра № 30 (фиг. 132), принимая $I_y = 366 \text{ см}^4$, $C = 1,30 \frac{1}{3}$ ($27,1 \cdot 1,05^3 + 2 \cdot 12,1 \cdot 1,45^3$). $G = 45,0 \cdot G$ (см. табл. 17). $D \approx \frac{1}{2} 336 E$.

Считая момент инерции стенки по отношению к оси y малым и полагая $\frac{E}{G} = 2,6$, получаем:

$$a = h \sqrt{\frac{D}{2C}} = 2,30 \cdot h.$$



Фиг. 131. Кручение двутавра.



Фиг. 132. Сечение двутавра (к примеру).

Если двутавровая балка нагружена по фиг. 131, то наибольший изгибающий момент по отношению к оси y в каждой из полок

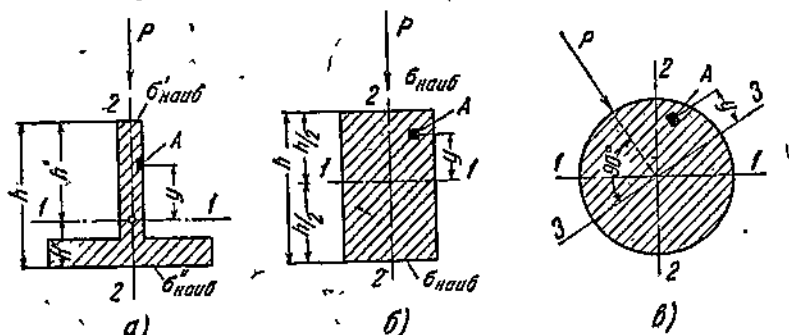
$$M_{\max} = \frac{a \cdot M_t}{h} = 2,3 M_t,$$

т. е. в 2,3 раза больше внешнего приложенного момента M_t .

При этом предполагается, что длина балки достаточно велика. В большинстве случаев это можно сделать, так как уже при $\frac{l}{a} = 2$, т. е. для сечения на фиг. 132 при $l = 5,2 \cdot h$, величина $\tanh \frac{l}{a} = 0,96$ и получаемая ошибка при таком предположении составляет всего лишь 4% .

Плоский поперечный изгиб

Плоский поперечный изгиб происходит, если плоскость действия изгибающего момента в рассматриваемом поперечном сечении совпадает с главной центральной осью сечения (с главной плоскостью бруса)



Фиг. 133. Случай прямого изгиба.

(фиг. 133, а, б, в). Перпендикулярная к ней вторая главная ось сечения, по отношению к которой действует изгибающий момент, является нейтральной линией. Наклон главных центральных осей по отношению к контурным линиям сечения находится по методам, применяемым при расчетах моментов инерции сечения [2, 3].

Если поперечное сечение симметричное, то ось симметрии и перпендикулярная к ней линия, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными осями 1 и 2 сечения. В частности для круга и квадрата любая центральная ось 3 (фиг. 133, в) является главной осью сечения.

Если плоскость действия поперечной нагрузки, дающей изгибающий момент M , совпадает с осью симметрии сечения, то в точке A на площадке поперечного сечения действует нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{M}{I} y, \quad (160)$$

где M — изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки по отношению к главной оси сечения;

I — момент инерции сечения по отношению к этой оси;

y — расстояние точки A сечения от этой оси.

По одну сторону от нейтральной линии получаются растягивающие, а по другую — сжимающие напряжения.

Наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{\text{наиб}}$ возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, т. е. вдоль крайних волокон балки:

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{M}{I} \cdot y_{\text{наиб.}}$$

Если расстояния от нейтральной линии до крайних сжатых и растянутых волокон между собой не равны (фиг. 133), то расчет напряжений в этих волокнах ведется отдельно:

$$\begin{aligned}\sigma'_{\text{наиб}} &= \frac{M}{I} h' = \frac{M}{W'}; \\ \sigma''_{\text{наиб}} &= \frac{M}{I} h'' = \frac{M}{W''}.\end{aligned}\tag{161}$$

Значения $\frac{I}{h'} = W'$ и $\frac{I}{h''} = W''$ называются моментами сопротивления сечения для растягиваемой или сжатой стороны балки. В формулах (161) знак напряжения ставится в соответствии с направлением изгибающего момента M .

Если $h' = h'' = h/2$, то $W' = W'' = W$. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения по величине равны между собой и вычисляются по формуле

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M}{W}.\tag{162}$$

Для сечений, не имеющих оси симметрии, в случае, когда плоскость действия изгибающего момента совпадает с главной центральной осью сечения, также применяются формулы (160), (161) и (162). Однако при этом необходимо учитывать дополнительные напряжения, связанные с возникновением момента кручения (подробнее см. п. 6 этого параграфа).

Поперечная сила Q дает в сечении неравномерно распределенные касательные напряжения.

В случае прямоугольного сечения поперечная сила, совпадающая с осью симметрии сечения, вызывает в точках сечения на расстоянии y от нейтральной линии касательные напряжения, определяемые по формуле

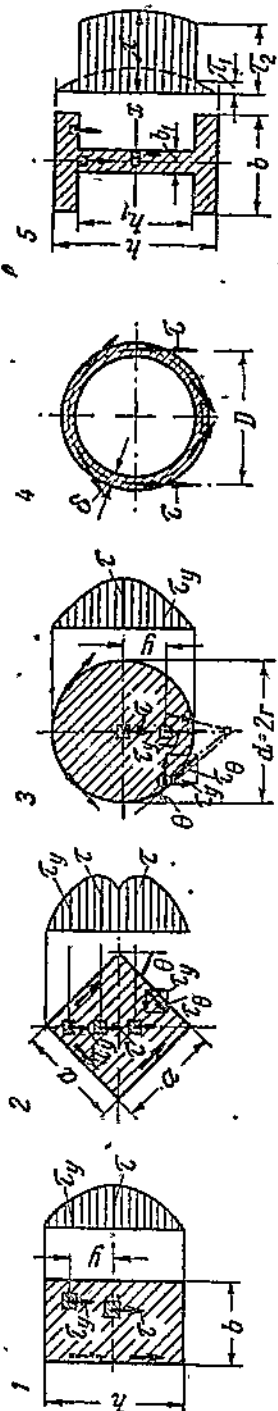
$$\tau_y = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b},\tag{163}$$

где I — момент инерции всего сечения относительно нейтральной линии;
 b — ширина сечения;

S — статический момент по отношению к нейтральной линии части сечения, отсекаемой прямой, параллельной нейтральной линии и проведенной от нее на расстоянии y .

Эти напряжения направлены параллельно силе Q и одинаковы по всей ширине сечения.

Если сечение имеет ось симметрии, по которой направлена сила Q , но ограничено криволинейным контуром (например, круг



Фиг. 134. Напряжения, вызываемые поперечной силой при изгибе, для сечений:

1—прямоугольного

$$\tau_y = \frac{6Q}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]; \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh};$$

2—квадратного, поставленного на ребро,

$$\tau_y = \frac{\sqrt{2}Q}{a^3} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{a} y - 4 \left(\frac{y}{a} \right)^3 \right]; \quad \tau = 1,591 \cdot \frac{Q}{a^3};$$

3—круглого

$$\tau_y = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^3} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2}; \quad \tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^3};$$

4—кольцевого тонкостенного

$$\tau_x = 2 \frac{Q}{\pi D \cdot \delta};$$

5—двутаврового

$$\tau_1 = \frac{Q}{b_1 I_x} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right];$$

$$\tau_2 = \frac{Q}{b_1 I_x} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right];$$

$$\tau = \frac{Q}{b_1 I_x} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right];$$

I_x —момент инерции двутавра по отношению к нейтральной линии x .

или эллипс), то у контура сечения касательное напряжение, действующее в плоскости поперечного сечения, направлено параллельно контуру и вычисляется по формуле

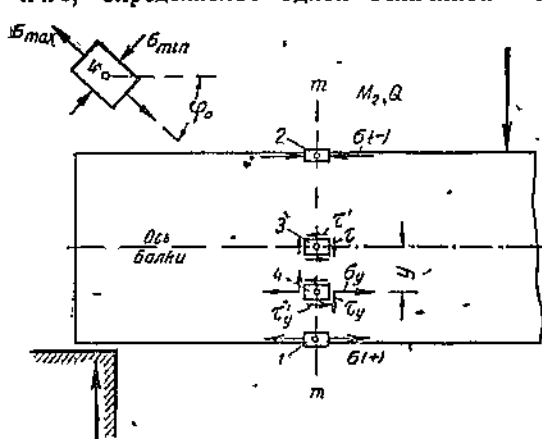
$$\tau_0 = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b \cdot \cos \theta}, \quad (163')$$

где θ — наклон касательной к контуру в рассматриваемой точке по отношению к направлению силы Q ; обозначения других величин те же, что и в формуле (163).

Распределение напряжений τ для основных форм сечений, получаемых в соответствии с формулами (163) и (163'), приведено на фиг. 134.

В точках балки (фиг. 135), расположенных в различных местах по высоте сечения, возникают два типа напряженных состояний.

В точках 1 и 2 получается линейное напряженное состояние, определяемое одной величиной — значением нормального напряжения σ , вычисляемого по



Фиг. 135. Напряженные состояния в различных точках балки. M и Q берутся из эпюр.

напряженного состояния, определяемый величинами напряжений σ_y и τ_y , которые вычисляются по формулам (160) и (163).

В точке 4 балки (фиг. 135) главные площадки расположены следующим образом. По площадке, совпадающей с плоскостью балки (с плоскостью чертежа фиг. 135), напряжения равны нулю; это — одна главная площадка, и главное напряжение по этой площадке равно нулю. Две другие главные площадки перпендикулярны к плоскости балки. Нормали к этим площадкам с осью балки и плоскостью поперечного сечения образуют угол ϕ_0 . По одной из этих площадок действует растягивающее, а по другой — сжимающее напряжения, поэтому первое из этих главных напряжений обозначается σ_1 , а второе — σ_2 .

Для точки 4 балки (фиг. 135) главные напряжения равны

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 + 4 \cdot \tau_y^2}; \quad \sigma_2 = 0 \quad (164)$$

[на основании формулы (139)].

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

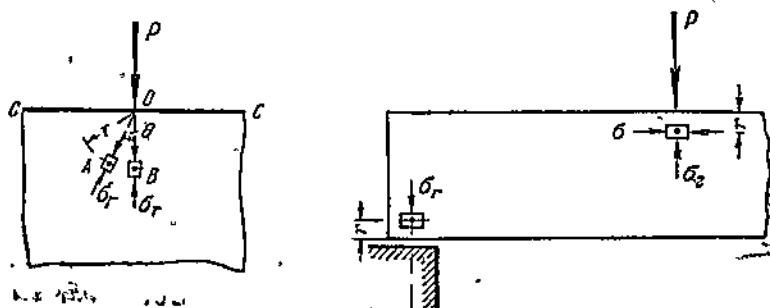
$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 + 4 \cdot \tau_y^2}. \quad (165)$$

Наклон φ_0 с осью балки нормали к одной из главных площадок определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_y}{\sigma_y}. \quad (166)$$

Формула (166) для значения $2\varphi_0$ дает два угла, отличные друг от друга на 180° , т. е. определяет направление нормалей к обеим взаимно перпендикулярным главным площадкам 1 и 2.

В точках балки, расположенных на небольших расстояниях от мест приложения внешних нагрузок и реакций, вызываются дополнительные к получаемым по формулам (160) и (163) местные напряжения. Дополнительные местные напряжения, возникающие на некоторой глубине r от грани балки прямоугольного сечения, можно оценить, как на-



Фиг. 136. Местные напряжения σ_r

пряжения, получаемые в пластинке (фиг. 136), ограниченной с одной стороны гранью CC (упругая полуплоскость). При действии силы P на полуплоскость в точке A (фиг. 136) возникает радиальное напряжение

$$\sigma_r = \frac{2P \cdot \cos \theta}{\pi b \cdot r}. \quad (167)$$

Величина b берется равной ширине балки. В точке B , лежащей на линии действия сосредоточенной нагрузки,

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi b r}.$$

Для $r=0$ эта формула дает $\sigma_r = \infty$. Поэтому для вычисления местных напряжений, получаемых непосредственно в местах давления, необходимо в зависимости от условий контакта деталей пользоваться формулами § 5 гл. VI.

Определения напряжений в коротких балках с учетом местных деформаций по методу Кармана см. [6].

Если балка имеет переменное сечение, то формулы, полученные для призматических стержней, могут рассматриваться лишь как приближенные.

В балке на фиг. 137, имеющей форму клина постоянной толщины b , распределение напряжений оказывается чисто радиальным (фиг. 126) [1]:

$$\sigma_r = k \frac{P \cdot \cos \theta}{b \cdot r},$$

где $k = - \frac{2}{2\alpha - \sin 2\alpha}$.

Величины нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении определяются по формулам:

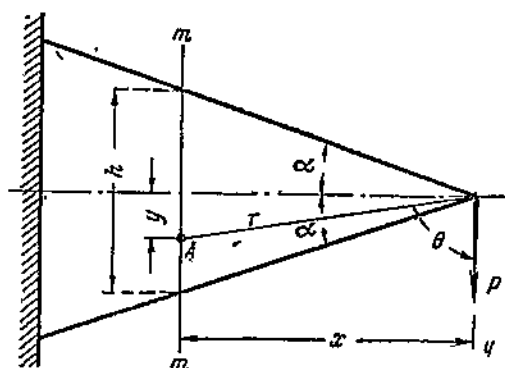
$$\sigma_x = - \frac{M}{I} y \cdot \frac{4}{3} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \sin^4 \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha};$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{F} \frac{16y^2}{h^2} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \sin^4 \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha},$$

где $I = \frac{bh^3}{12}$; $F = bh$; $M = P \cdot x$; h — высота рассматриваемого поперечного сечения.

Наибольшие нормальные и касательные напряжения при $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ определяются по формулам:

$$\sigma_{x(\max, \min)} = \pm \beta \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2}; \quad \tau_{\max, \min} = \pm \gamma \frac{P}{F}.$$



Фиг. 137. Изгиб клина.

Значения β и γ для некоторых величин α приведены в табл. 18.

Из этих данных следует, что при малых α наибольшие нормальные напряжения мало отличаются от напряжений, определяемых по формулам для призматических стержней. Наибольшие касательные напряжения почти вдвое больше, чем в призматическом бруссе, и возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси

точках. Таким образом, для тех случаев, когда в балках касательные напряжения несущественны по сравнению с нормальными, можно для

Таблица 18

α	5°	10°	15°	20°
β	1,00	0,97	0,95	0,91
γ	3,00	2,91	2,84	2,72

плавно изменяющихся поперечных сечений применять формулы для напряжений призматических стержней,

При резком изменении поперечных сечений по длине стержня имеет место значительная концентрация напряжений. Расчет концентрации напряжений см. гл. VII.

Если ось балки криволинейная, то формулы (160), (161) и (162) для нормальных напряжений применимы с достаточной точностью лишь для малой степени искривления оси. Полученная ошибка зависит от отношения радиуса R_0 искривления оси к высоте h сечения балки.

При $\frac{R_0}{h} \geq 10$ получаемая при расчете по формулам для прямого бруса ошибка не превосходит 3%, и при $\frac{R_0}{h} \geq 4$ — не превосходит 9%.

Ограничения в применении указанных выше формул к расчету напряжений при изгибе сводятся к следующим:

а) При угле наклона между противоположными гранями балки, находящимися в растянутой и сжатой зонах, равном 75° , следует ожидать ошибку в вычислениях напряжений порядка 5% (переменность сечения). При резких изменениях в контуре балки в расчетную формулу для напряжений следует вводить коэффициент концентрации (см. гл. VII).

б) В случае кривого бруса при отношении радиуса R_0 искривления оси бруса к высоте h сечения $\frac{R_0}{h} \leq 6$ ошибка в вычислении при применении формул для прямого бруса соответственно $\geq 5\%$ (см. § 3 гл. VI).

в) Приведенные выше формулы достаточно точны при достаточной длине l бруса по отношению к высоте h сечения $\frac{l}{h} \geq$ от 3 до 6 (в зависимости от способа приложения нагрузки) и для сечений, удаленных от места приложения нагрузки.

Если эти условия не выполняются, то для получения решения с необходимой точностью рекомендуется применять поляризационно-оптический метод исследования напряжений [7].

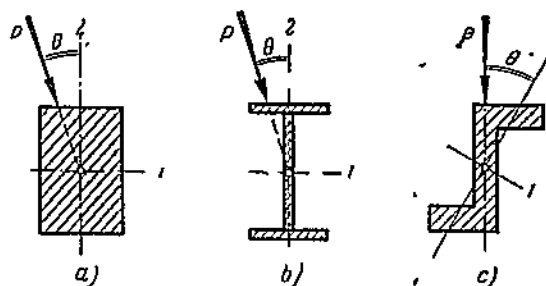
Косой изгиб

Если плоскость действия изгибающего момента M не совпадает с главной центральной осью поперечного сечения (фиг. 138, а, б, в), то составляющие по отношению к главным осям 1 и 2 сечения моменты и поперечные силы соответственно равны:

$$\begin{aligned} M_1 &= M \cdot \cos \theta; \\ Q_1 &= Q \cdot \sin \theta; \\ M_2 &= M \cdot \sin \theta; \\ Q_2 &= Q \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (167)$$

Отдельно от каждой из этих составляющих определяются по формулам (160) и (163) напряжения в поперечном сечении.

Нормальные напряжения, получаемые в отдельных точках по величинам моментов M_1 и M_2 , складываются алгебраически, а касательные напряжения — геометрически.



Фиг. 138. Случай косоуго изгиба.

Для полного нормального напряжения в поперечном сечении при косом изгибе получается формула:

$$\sigma = \pm \frac{M_1}{I_1} y_2 \pm \frac{M_2}{I_2} y_1 \quad (168)$$

Здесь I_1 и I_2 — моменты инерции сечения по отношению к главным осям 1 и 2.

Знаки каждого из слагаемых принимаются в зависимости от того, растяжение или сжатие в рассматриваемой точке, которое вызывает каждый из моментов M_1 и M_2 .

Распределение суммарных нормальных напряжений в поперечном сечении подчинено закону плоскости, т. е. для точек сечения, лежащих на прямой EF (фиг. 139), получается прямолинейный закон распределения напряжений. Нейтральная линия при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения и не перпендикулярна к плоскости действия суммарного изгибающего момента M .

Наклон нейтральной линии к главной осям 1 находится из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{I_1}{I_2} \operatorname{tg} \theta. \quad (168')$$

Нормальное напряжение в точке A поперечного сечения пропорционально расстоянию u этой точки от нейтральной линии.

Прогиб балки происходит в направлении, перпендикулярном к нейтральной линии. Полный прогиб f находится как геометрическая сумма прогибов f_1 и f_2 , вызываемых нагрузками в главных плоскостях 1 и 2 бруса.

Центр изгиба

При расчете напряжений, вызываемых поперечными нагрузками, необходимо учитывать положение плоскости действия поперечной силы по отношению к главным плоскостям бруса.

Если в поперечном сечении действует только изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю, то возникает лишь нормальное напряжение, определяемое по формуле (160). Если в поперечном сечении, кроме изгибающего момента, действует и перерезывающая сила, то изгиб балки может сопровождаться скручиванием. Скручивающий момент отсутствует, если плоскость действия поперечной нагрузки проходит через точку C (фиг. 140), называемую центром изгиба.

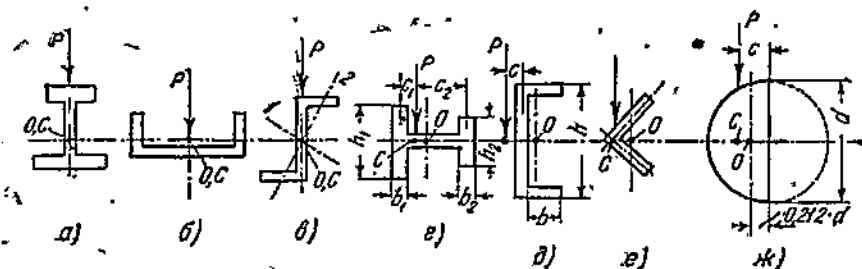
Центр изгиба для симметричных сечений лежит на оси симметрии сечения. Если, как показано на фиг. 140, a и b , плоскость действия нагрузки совпадает с плоскостью симметрии сечения, то напряжения определяются по формулам (160) и (163), а напряжения, соответствующие моменту кручения, в сечении отсутствуют.

Для Z-образного сечения (фиг. 140, а) поперечная нагрузка, лежащая в плоскости стенки, скручивания не вызывает. При расчете напряжений, вызываемых такой нагрузкой, необходимо нагрузку разложить на составляющие по главным плоскостям 1 и 2 (косой изгиб).

Положение центра изгиба S для двутаврового сечения (фиг. 140, з) определяется расстоянием c_1 или c_2 от центров тяжести сечений полков. Для определения этих расстояний полки рассматриваются как отдельные балки (жесткость стенки не учитывается). Для изгиба двутавровой балки без поворота сечения у оси балки необходимо, чтобы поперечная нагрузка распределялась по полкам в отношении их жесткостей на изгиб. Таким образом,

$$\frac{c_1'}{c_2} = \frac{I''}{I'} \approx \frac{b_2 h_2^3}{b_1 h_1^3}, \quad (169)$$

где I' и I'' — моменты инерции сечений левого и правого пояса (фиг. 140, з) по отношению к нейтральной линии, совпадающей с осью симметрии сечения.



Фиг. 140. Положение центра изгиба.

Положение центра изгиба корытного сечения (фиг. 140, д) определяется расстоянием c от центра тяжести O сечения:

$$c = \frac{k^2 b^2 t}{4I}; \quad (170)$$

здесь I — момент инерции сечения по отношению к нейтральной линии, совпадающей с осью симметрии. Это расстояние, приближенно можно принять от середины стенки.

В случае равнобокого или неравнобокого угольника (фиг. 140, а) центр изгиба S совпадает с точкой пересечения средних линий полков.

Положение центра изгиба может быть найдено с достаточной точностью расчетным путем для сечения любой формы, в том числе и несимметричного, если только толщина стенок настолько мала, что распределение касательных напряжений в стенке по ее толщине может быть принято равномерным [8].

Для поперечных сечений, имеющих все размеры одного и того же порядка, положение центра изгиба расчетным путем найдено лишь для небольшого числа случаев [1, 9]. Например, для сечения в виде полукруга (фиг. 140, ж)

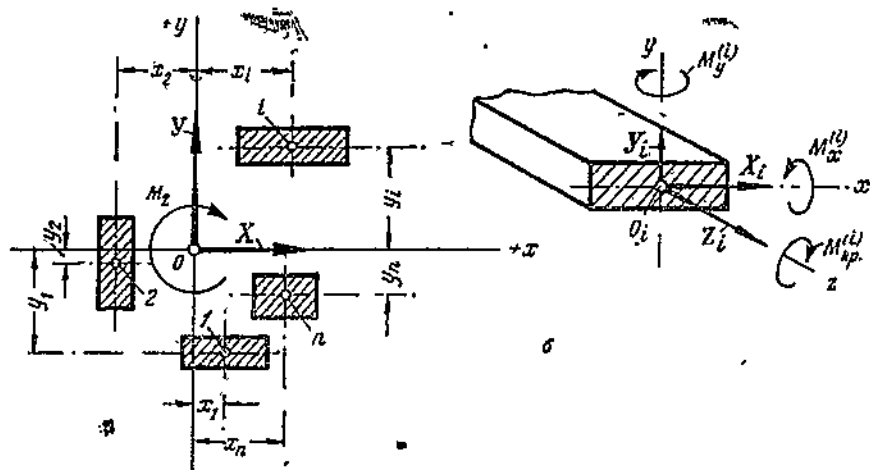
$$c = \frac{4}{15\pi} \frac{3 + 4\mu}{1 + \mu} d,$$

где μ — коэффициент Пуассона материала балки.

Если брус состоит из n параллельных стержней, жестко соединенных между собой по концам и имеющих свободную длину l , то положение центра изгиба такого составного бруса определится в зависимости от жесткостей отдельных стержней и их взаимного положения. Координаты x_0, y_0 центра изгиба по отношению к центральным осям x, y сечения, составленного из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат [10]:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\sum y_l I_{y_l}^{(l)}}{\sum I_{y_l}^{(l)}}; \\ x_0 &= \frac{\sum x_l I_{x_l}^{(l)}}{\sum I_{x_l}^{(l)}}, \end{aligned} \quad (172)$$

где $I_{y_l}^{(l)}$ и $I_{x_l}^{(l)}$ — моменты инерции прямоугольника l по отношению к его центральным осям (y_l) и (x_l); y_l и x_l — координаты его центра тяжести по отношению к осям x и y всего сечения (фиг. 141, а).



Фиг. 141. Сечение составного бруса.

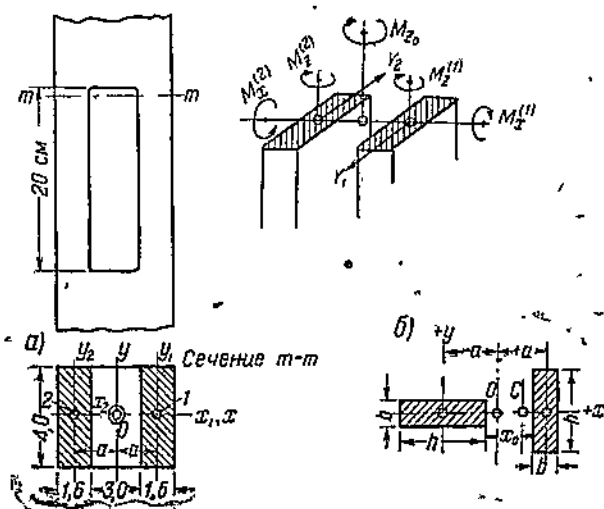
Если в месте жесткого соединения этих полос внешние нагрузки по отношению к осям x, y, z дают усилия X, Y, Z и моменты M_x, M_y, M_z , то для подсчета усилий и моментов в этом же сечении, но для отдельной полосы l (фиг. 141, б) существуют формулы:

$$\begin{aligned} X_l &= \frac{I_{y_l}^{(l)}}{\sum I_{y_l}^{(l)}} \cdot X + (y_l - y_0) \frac{I_{y_l}^{(l)} M_{z_0}}{\sum I_{y_l}^{(l)} M_{z_0}}; \\ Z_l &= \frac{F^{(l)}}{\sum F^{(l)}} Z + \frac{F^{(l)}}{\sum I_{y_l}^{(l)} + \sum x_l^2 F^{(l)}} x_l \left(M_y - X \cdot \frac{l}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{F^{(l)}}{\sum I_{x_l}^{(l)} + \sum y_l^2 F^{(l)}} y_l \left(M_x + Y \cdot \frac{l}{2} \right); \end{aligned}$$

$$M_{x_i}^{(i)} = \frac{I_{x_i}^{(i)}}{\sum I_{x_i}^{(i)} + \sum y_i^2 F^{(i)}} \left(M_x + \frac{l}{2} Y \right) - \frac{I_{x_i}^{(i)}}{\sum I_{x_i}^{(i)}} \frac{l}{2} Y +$$

$$+ \frac{I_{x_i}^{(i)} (x_i - x_0) \cdot \frac{l}{2} \cdot M_{z_0}}{\frac{G}{E} \frac{l^2}{12} \sum (k h b^3)_i - \left[y_0 \sum y_i I_{y_i}^{(i)} + x_0 \sum x_i I_{x_i}^{(i)} - \sum y_i^2 I_{y_i}^{(i)} - \sum x_i^2 I_{x_i}^{(i)} \right]};$$

$$M_{y_i}^{(i)} = \frac{\frac{G}{E} \frac{l^2}{12} (k h b^3)_i \cdot M_{z_0}}{\frac{G}{E} \frac{l^2}{12} \sum (k h b^3)_i - \left[y_0 \sum y_i I_{y_i}^{(i)} + x_0 \sum x_i I_{x_i}^{(i)} - \sum y_i^2 I_{y_i}^{(i)} - \sum x_i^2 I_{x_i}^{(i)} \right]} \cdot (173)$$



Фиг. 142. Размеры составного бруса (к примеру).

Аналогично записываются формулы для усилий Y и $M_{y_i}^{(i)}$ для стержня i .

Правило знаков указано на фиг. 141, где даны положительные направления осей и действующих усилий.

В этих формулах h_i и $b_i \leq h_i$ — размеры сечения прямоугольника i , k — коэффициент, зависящий от соотношения этих размеров (табл. 17), $\frac{G}{E}$ — отношение модуля сдвига к модулю продольной упругости.

Формулы (173) можно применять как приближенные при любой форме составляющих сечений.

Пример. Скручиваемый моментом $M_{z_0} = 5400$ кгсм стержень (фиг. 142) сечением $3,2 \times 4,0$ см, имеющий продольную прорезь длиной $l = 20$ см, на участке прорези работает в условиях составного бруса, для которого применимы формулы (173).

Имеем:

$$x_1 = +a; \quad x_2 = -a; \quad y_1 = y_2 = 0; \quad b_1 = 1,6 \text{ см}; \quad h_1 = 4,0 \text{ см},$$

Координаты центра изгиба по формуле (172): $x_0 = y_0 = 0$.

Вводя в формулы (173) для упрощения вместо абсолютных значений жесткостей их относительные величины, полагая $I_{x_1}^{(1)} = 1$, получим

$$I_{y_1}^{(1)} = \frac{b^2}{h^2}; \quad \frac{G}{E} (k h b^3)_1 = \frac{9}{2} k \frac{b^2}{h^2}; \quad F^{(1)} = F^{(2)} = \frac{12}{h^2} (c m^{-2});$$

$$\sum I_{x_1}^{(i)} = 2; \quad \sum I_{y_1}^{(i)} = 2 \frac{b^2}{h^2}; \quad \frac{G}{E} \sum (k h b^3)_i = 9 \cdot k \cdot \frac{b^2}{h^2}; \quad \sum F_i = \frac{24}{h^2} (c m^{-2});$$

$$\sum y_i \cdot I_{y_1}^{(i)} = \sum x_i I_{x_1}^{(i)} = 0; \quad \sum y_i^2 I_{y_1}^{(i)} + \sum x_i^2 I_{x_1}^{(i)} = 2a^2.$$

Подставляя эти значения в формулы (173), получим:

$$X^{(1)} = X^{(2)} = 0; \quad Z^{(1)} = Z^{(2)} = 0; \quad M_{y_1}^{(1)} = M_{y_2}^{(2)} = 0;$$

$$Y^{(1)} = -Y^{(2)} = -\frac{a \cdot M_{z_0}}{\frac{3}{4} k l^2 \frac{b^2}{h^2} + 2a^2} = -554 \text{ кг};$$

$$M_{x_1}^{(1)} = -M_{x_2}^{(2)} = -Y^{(1)} \cdot \frac{l}{2} = 5540 \text{ кгсм};$$

$$M_{k_p}^{(1)} = M_{k_p}^{(2)} = \frac{3k \frac{b^2}{h^2}}{6k \frac{b^2}{h^2} + 16 \frac{a^2}{l^2}} M_{z_0} = 1430 \text{ кгсм}.$$

Если сечение 2 будет повернуто на 90° (фиг. 142, б), то центр кручения сместится в сторону сечения 1 на

$$x_0 = \frac{\sum x_i I_{x_1}^{(i)}}{\sum I_{x_1}^{(i)}} = \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2} a = 0,72 \cdot a,$$

и усилия в сечениях 1 и 2 соответственно формулам (173) изменятся.

Сложное сопротивление

В общем случае действия нагрузок в поперечном сечении детали (фиг. 143) могут действовать шесть внутренних усилий:

$$N, Q_1, Q_2; \quad M_{k_p}, M_1 \text{ и } M_2.$$

Для определения этих усилий в рассматриваемом сечении проводят три оси сечения: оси 1 и 2, проходящие через центр тяжести поперечного сечения и являющиеся главными осями сечения; ось O , перпендикулярную к плоскости рассматриваемого сечения и проходящую через центр изгиба сечения. В случае сечений с двумя осями симметрии (см. п. 6) центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

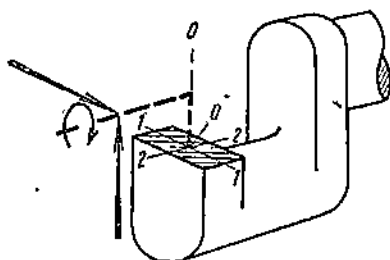
Продольное усилие N , вызывающее равномерное растяжение или сжатие в сечении (см. п. 1 этого параграфа), равняется сумме проекций на ось O нагрузок, приложенных к детали по одну сторону (например, слева) от рассматриваемого сечения. Момент кручения M_{k_p} равен сумме моментов сил по отношению к этой оси.

Поперечные силы Q_1 и Q_2 равны проекциям соответственно на ось 1 и 2 нагрузок, приложенных к детали по одну сторону (например, слева) от рассматриваемого сечения.

Изгибающие моменты M_1 и M_2 равны, суммам моментов этих сил соответственно по отношению к осям 1 и 2.

Для каждого из этих усилий в отдельности определяются при помощи приведенных выше формул вызываемые ими напряжения.

В случае прямоугольного сечения распределение напряжений в сечении для каждого из этих усилий показано на фиг. 144. Таким образом, усилия N , M_1 и M_2 вызывают в точках сечения нормальные напряжения σ_N , σ_{M_1} и σ_{M_2} , а усилия $M_{кр}$, Q_1 и Q_2 — касательные напряжения $\tau_{M_{кр}}$, τ_{Q_1} и τ_{Q_2} . Полное нормальное напряжение $\sigma_{сумм}$ в какой-либо точке сечения будет равняться алгебраической сумме нормальных напряжений, а полное касательное напряжение $\tau_{сумм}$ должно подсчитываться как геометрическая сумма (по правилу параллелограмма). Таким образом,

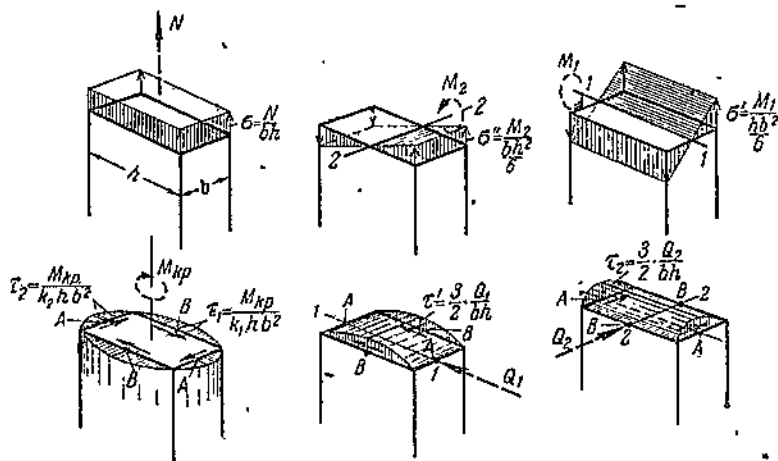


Фиг. 143. Положение осей сечения 0, 1, 2 для определения усилий N , $M_{кр}$; Q_1 ; $M_{1изг}$; Q_2 ; $M_{2изг}$.

$$\sigma_{сумм} = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_1} \pm \sigma_{M_2}; \quad (174)$$

для точки A прямоугольного сечения

$$\tau_{сумм}^{(A)} = \pm \tau_{M_{кр}}^{(A)} \pm \tau_{Q_2}^{(A)}; \quad (174')$$



Фиг. 144. Эпюры напряжений в прямоугольном сечении при сложном сопротивлении.

для точки B прямоугольного сечения

$$\tau_{сумм}^{(B)} = \pm \tau_{M_{кр}}^{(B)} \pm \tau_{Q_1}^{(B)}. \quad (174'')$$

В углах прямоугольного сечения $\tau_{сумм} = 0$. Знак выбирается в зависимости от направления действующих усилий и положения рассматриваемой точки в сечении.

В любой точке поперечного сечения на фиг. 144 получается плоское

напряженное состояние. Для точки, лежащей на контуре сечения (фиг. 145), главные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{\text{сумм}}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\text{сумм}}^2 + 4\tau_{\text{сумм}}^2}, \quad (175)$$

$$\sigma_3 = 0,$$

где $\sigma_{\text{сумм}}$ и $\tau_{\text{сумм}}$ подсчитываются по формулам (174) и (174') или (174'').

Если сечение круглое (сплошное или полое), то центральные взаимно перпендикулярные оси 1 и 2 могут быть для подсчета усилий ориентированы любым образом (косой изгиб отсутствует), и после вычисления M_1 и M_2 находится суммарный изгибающий момент:

$$M_{\text{сумм. изг}} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

В случае изгиба, кручения и продольной силы опасной точкой круглого сечения обычно является точка, наиболее удаленная от нейтральной оси, по отношению к которой действует $M_{\text{сумм. изг.}}$

Фиг. 145. Суммарные напряжения при сложном сопротивлении бруса.

Для этой точки $\tau_Q = \tau_Q = 0$, так что

$$\sigma_{\text{сумм}} = \pm \sigma_N \pm M_{\text{сумм. изг}} = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_{\text{сумм. изг}}}{W};$$

$$\tau_{\text{сумм}} = \tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p};$$

здесь F — площадь поперечного сечения; W_p и $W = 2 \cdot W_p$ — полярный и осевой моменты сопротивления круглого сечения (сплошного или полого).

Таким образом, главные напряжения в этой точке

$$\sigma_{1,2} = \frac{0,5 \left(\pm \frac{W}{F} N \pm M_{\text{сумм. изг}} \right) \pm 0,5 \sqrt{\left(\pm \frac{W}{F} N \pm M_{\text{сумм. изг}} \right)^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W}, \quad (176)$$

$$\sigma_3 = 0$$

(сечение круглое сплошное или полое при изгибе, кручении и продольной силе).

Если в случае круглого сечения плоскость действия суммарного изгибающего момента не совпадает с плоскостью действия поперечной силы, то наибольшие напряжения следует искать путем проверки по нескольким точкам сечения, например, в точках на концах диаметров сечения, лежащих в плоскости суммарного изгибающего момента и в плоскости действия поперечной силы.

Если в случае круглого сечения величина поперечной силы незначительна, то достаточно рассмотреть точки сечения, лежащие в плоскости действия суммарного изгибающего момента.

Если продольная сила отсутствует и действуют момент кручения и момент изгиба, то

$$\sigma_{1,2} = \frac{\pm 0,5 M_{\text{сумм. изг}} \pm 0,5 \sqrt{M_{\text{сумм. изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W}; \quad (177)$$

$$\sigma_2 = 0$$

(изгиб и кручение, сечение круглое сплошное или полое).

Осевой момент сопротивления вычисляется по формуле: для сплошного сечения диаметра d .

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3;$$

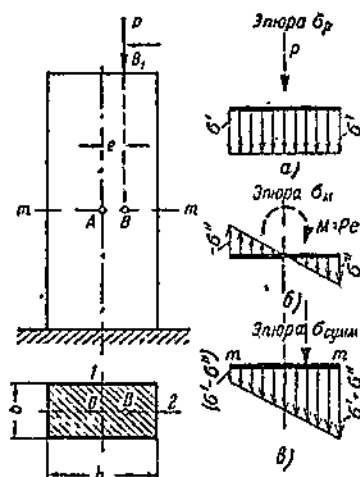
для полого сечения с отношением $\alpha = \frac{d}{D}$ внутреннего диаметра к наружному

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^3 (1 - \alpha^4).$$

Расчет относительных деформаций в точках бруса при сложном сопротивлении может быть сделан по величинам напряжений согласно § 1 гл. VI.

Если сложное сопротивление бруса возникает в связи с внецентренным действием продольной силы, то, в поперечном сечении будут возникать лишь нормальные напряжения. Если внецентренная сила имеет эксцентриситет e лишь по отношению главной оси I (фиг. 146), то нормальные напряжения в сечении подсчитываются путем сложения эпюры напряжений $\sigma' = \pm \frac{P}{F}$ с эпюрой напряжений $\sigma'' = \pm \frac{M}{J} y$.

Изгибающий момент $M = P \cdot e$.



Фиг. 146. Внецентренное сжатие.

В крайних волокнах прямоугольного сечения

$$\sigma_{\text{сумм}} = \pm \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6 \cdot e}{h} \right) \quad (178)$$

и круглого сечения диаметром d

$$\sigma_{\text{сумм}} = \pm \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \left(1 + \frac{8 \cdot e}{d} \right). \quad (178')$$

§ 3. Напряжения в толстостенных цилиндрах и кривых брусках [1,2]

Толстостенные цилиндры

Если круглый цилиндр, имеющий стенки постоянной толщины, подвергается равномерно распределенному внутреннему и наружному давлению (задача Ляме), то возникающие при этом деформации симметричны относительно оси цилиндра.

На грани элемента $m_1 m_2 m_3$ (фиг. 147), расположенного на расстоянии r от оси цилиндра, действуют только нормальные напряжения σ_r (радиальное напряжение) и σ_t (тангенциальное напряжение), вычисляемые по формулам:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 \cdot q_1 - r_2^2 \cdot q_0}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(q_1 - q_0) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}; \quad (179)$$

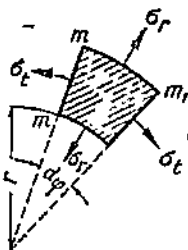
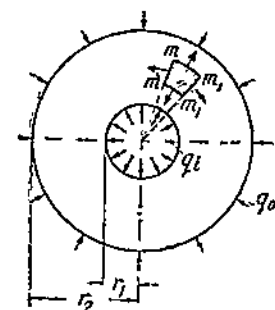
$$\sigma_t = \frac{r_1^2 \cdot q_1 + r_2^2 \cdot q_0}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(q_1 - q_0) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Наибольшее касательное напряжение в плоскости поперечного сечения трубы

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{(q_1 - q_0) r_1^2 \cdot r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}; \quad (179')$$

здесь r_1 и r_2 — внутренний и наружный радиусы трубы; q_1 и q_0 — внутреннее и наружное давление.

Наибольшие радиальные напряжения σ_r в зависимости от величин q_1 и q_0 оказываются максимальными в точках $r = r_1$ или $r = r_2$, где они имеют величину соответственно $\sigma_{r=r_1} = -q_1$ или $\sigma_{r=r_2} = -q_0$. Для промежуточных точек стенки величина σ_r не выходит из пределов $-q_1$ и $-q_0$.



Фиг. 147. Главные напряжения в стенках толстостенной трубы при внутреннем и наружном давлении.

Наибольшими напряжениями в толстостенной трубе являются тангенциальные напряжения σ_t , которые в зависимости от величин q_1 и q_0 достигают максимума при $r = r_1$ или $r = r_2$, т. е. в точках контура трубы.

На основании второй формулы (179) для $r = r_1$

$$\sigma_t = k \cdot q_1 - (k + 1) \cdot q_0 \quad (180)$$

и для $r = r_2$

$$\sigma_t = (k - 1) \cdot q_1 - k \cdot q_0. \quad (180')$$

Здесь коэффициент

$$k = \frac{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

может быть взят из графика фиг. 148 в зависимости от $\frac{r_1}{r_2}$.

Для стенок, имеющих малую толщину $\delta = r_2 - r_1$, напряжение по толщине стенки при равномерных давлениях q_1 и q_0 можно считать одинаковым по толщине:

$$\sigma_t = \frac{q_1 \cdot r_1 - q_0 \cdot r_2}{\delta}. \quad (181)$$

Ошибка в вычислении наибольшего тангенциального напряжения по уравнению (181) зависит от отношения $\frac{r_1}{r_2}$ и от относительных значений q_1 и q_0 .

Если $q_0 = 0$, то при $\frac{r_1}{r_2} = 0,95; 0,90; 0,80$ действительное наибольшее напряжение соответственно на 2,7%, 6%, 14% больше вычисляемых по формуле (181). Ошибка быстро возрастает по мере уменьшения $\frac{r_1}{r_2}$. Если $q_1 = 0$, то ошибка равняется произведению указанных выше величин (в процентах)

на отношение $\frac{r_1}{r_2}$.

Если имеется наружное давление q_0 и внутреннее отверстие отсутствует (сплошной диск), то во всех точках

$$\sigma_r = \sigma_t = -q_0. \quad (182)$$

Если имеется внутреннее отверстие и диаметр его приближается к нулю, то на контуре этого отверстия величина σ_t приближается к величине

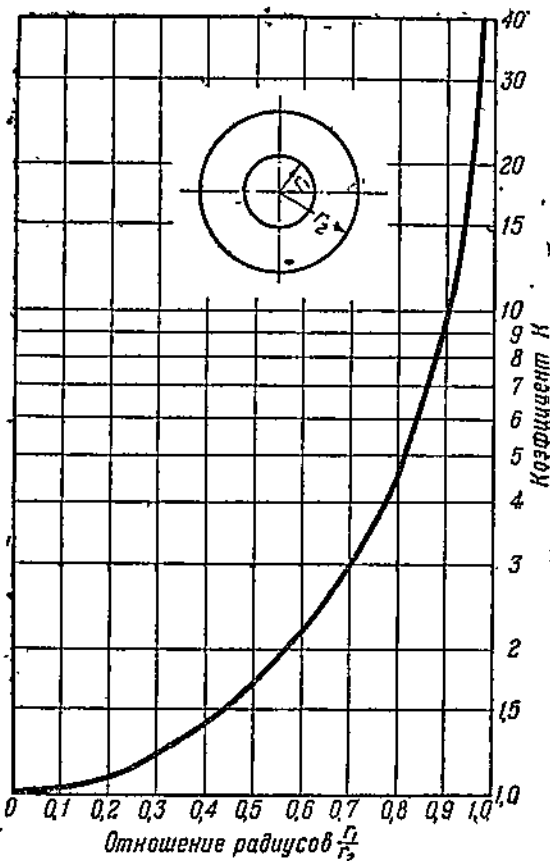
$$\sigma_t = 2 \cdot q_0. \quad (183)$$

Сумма главных напряжений

$$\sigma_t + \sigma_r = (k - 1) \cdot q_1 - (k + 1) \cdot q_0 \quad (184)$$

и деформации ϵ_z всех элементов трубы в направлении оси цилиндра остаются постоянными:

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} [(k - 1) \cdot q_1 - (k + 1) \cdot q_0]. \quad (185)$$



Фиг. 148. Значения k в зависимости от $\frac{r_1}{r_2}$ (толстостенная труба с внутренним и наружным давлением).
К формулам (180), (181), (183) и (184)

Если внутреннее отверстие цилиндра выполнено с эксцентриситетом, то при наличии внутреннего давления q_1 наибольшее тангенциальное напряжение возникает у внутреннего контура трубы, в месте наименьшей толщины стенки:

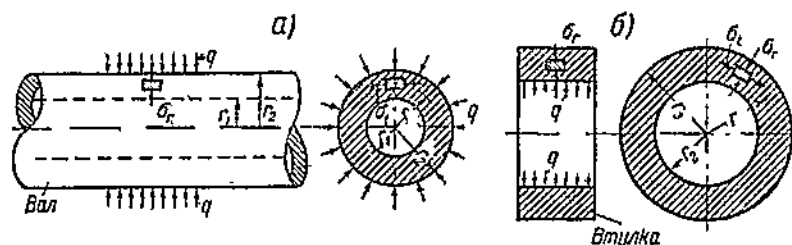
$$\sigma_{(наиб)} = \frac{1 + (3 - \beta^2) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \beta^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4}{\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \left[1 - \beta^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]} \cdot q_1 \quad (186)$$

(при $\frac{e}{r_1} \leq \frac{1}{2}$).

$$\text{Здесь } \beta = 1 + \frac{e}{r_1}.$$

Влияние эксцентриситета в толстостенных цилиндрах невелико. Например, при $\frac{e}{r_1} = 0,1$ и $\frac{r_1}{r_2} = 0,5$ увеличение напряжений σ_t составляет около 50%. В тонкостенных цилиндрах отношение увеличения напряжения к напряжению при отсутствии эксцентриситета приблизительно равно

$$\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 (\beta^2 - 1)}{1 - \beta^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}.$$



Фиг. 149. Обозначения контактных давлений и напряжений при напрессовках.

Напряжения, получаемые при напрессовке в составных цилиндрах, находятся при помощи формулы для радиальных перемещений u_r точек цилиндра:

$$u_r = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 \cdot q_1 - r_2^2 q_0}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2 (q_1 - q_0)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot r}. \quad (187)$$

Если разность между внешним диаметром внутреннего цилиндра и внутренним диаметром наружного цилиндра в ненапряженном состоянии, отнесенная к величине $2b$, обозначена δ (натяг), то при напрессовке этих цилиндров с напряжениями в пределах упругости по поверхности их соприкосновения получаются давления

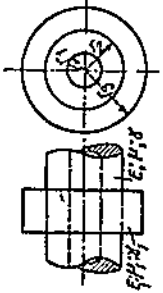
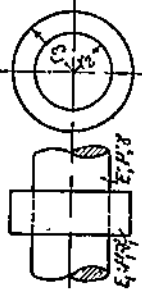
$$q = E \cdot \delta \frac{(r_2^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)}{2r_2^2(r_3^2 - r_1^2)}. \quad (188)$$

Здесь r_1 — внутренний радиус внутреннего цилиндра, а r_3 — наружный радиус наружного цилиндра, E — модуль продольной упругости, одинаковый для материалов обоих цилиндров.

По давлению q с помощью формул (179), (180) и (180') находят напряжения, вызванные напрессовкой.

Если составной цилиндр подвергается внутреннему давлению, то напряжения, вызываемые этим давлением, находятся, как в цилиндре со сплошными стенками толщиной $(r_3 - r_1)$, и алгебраически складываются с напряжениями от напрессовки.

Напряжения в полом вале и насаженной на него втулке обозначены на фиг. 149. Если для приближенного расчета не учитывать, что

Тип деталей, соединяемых натягом	Материал вала и втулки	Величина контактного давления	Уменьшение δ_1 величины натяга, вызываемое центробежными силами
	Различный материал	$q = \frac{1}{E_1} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu_1 \right] + \frac{1}{E} \left[\frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} - \mu \right]$	$\delta_1 = \frac{v_1^2}{64g} \left\{ \frac{\gamma_1}{E_1} \left[(3 + \mu_1) + (1 - \mu_1) \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] - \right.$ $\left. - \frac{\gamma}{E} \left[(3 + \mu) \frac{r_1^2}{r_3^2} + (1 - \mu) \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] \right\}$
	Одинаковый	$q = \frac{E \cdot \delta \cdot (r_3^2 - r_2^2) (r_2^2 - r_1^2)}{2 r_3^2 (r_3^2 - r_1^2)}$	$\delta_1 = \frac{v_1^2 \gamma}{64g} \frac{3 + \mu}{E} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_3^2} \right)$
	Различный материал	$q = \frac{1}{E_1} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu_1 \right] + \left[\frac{1 - \mu}{E} \right]$	$\delta_1 = \frac{v_1^2}{64g} \left\{ \frac{\gamma_1}{E_1} \left[(3 + \mu_1) + (1 - \mu_1) \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] - \right.$ $\left. - \frac{\gamma}{E} (1 - \mu) \frac{r_3^2}{r_2^2} \right\}$
	Одинаковый	$q = \frac{E \cdot \delta (r_3^2 - r_2^2)}{2 r_3^2}$	$\delta_1 = \frac{v_1^2 \gamma}{64g} \left(\frac{3 + \mu}{E} \right)$

выступающие из-под втулки части вала оказывают сопротивление деформации сжатия, т. е. предположить, что втулка и вал имеют одинаковую длину, то величина контактного давления q будет определяться по формулам табл. 19.

Здесь δ — величина натяга на единицу наружного диаметра. При вращении вала получается уменьшение расчетной величины δ на некоторую величину δ_1 , вызываемое деформациями от центробежных сил. Величины δ_1 даны в табл. 19, где v — скорость на наружной поверхности радиуса r_0 втулки, γ — вес единицы объема материала, $g = 981 \text{ см/сек}^2$ — ускорение силы тяжести. По найденной величине натяга q наибольшие напряжения в точках вала и втулки подсчитываются по формулам (180), (180'), (182), (183').

В точках вала у концов втулки получается концентрация напряжения (см. гл. VII), которая особенно увеличивается при изгибе вала.

Расчет напряжений, вызываемых изменением температуры в стенках цилиндра, см. [11].

Кривые брусья

Симметричное сечение любой формы

(приближенное решение)

а) Чистый изгиб. При изгибе кривого бруса с симметричным сечением любой формы в плоскости его кривизны следует применить приближенное решение, полученное в предположении, что поперечные сечения бруса остаются при изгибе плоскими. Радиальные напряжения равны нулю.

Тангенциальные напряжения σ_t распределяются по высоте сечения по гиперболическому закону:

$$\sigma_t = -\frac{M}{S} \cdot \frac{y}{r+y}; \quad (189)$$

здесь M — изгибающий момент по отношению к оси, проходящей через центр тяжести сечения;

y — расстояние от нейтральной линии до точки сечения, в которой определяется напряжение σ_t (считая y положительным от центра кривизны);

$r = (R_0 - y_0)$ — величина расстояния от центра кривизны до нейтральной линии при изгибе, R_0 — радиус кривизны оси бруса;

$S = F \cdot y_0$ — статический момент площадки F поперечного сечения по отношению к нейтральной линии.

Момент M считается положительным, если кривой брус разгибается.

Нейтральная линия при чистом изгибе в кривом брус не проходит через центр тяжести сечения, а смещается в сторону центра искривления бруса на величину y_0 . Расстояние y_0 зависит от формы сечения и отношения $\frac{R_0}{c}$ радиуса R_0 кривизны оси бруса, проходящей по центрам тяжести поперечных сечений, и расстояния c от центра тяжести сечения до крайних внутренних волокон. Значения y_0 находятся по табл. 20.

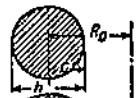
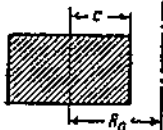
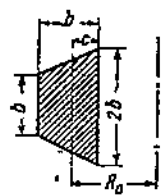
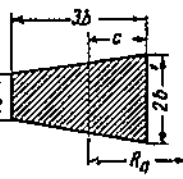
Поперечное сечение	$\frac{R_0}{c}$	Значения K		U_0
		внутренние волокна	наружные волокна	
1  2 	1.2	3.41	0.54	$0.224R_0$
	1.4	2.40	0.60	$0.151R_0$
	1.6	1.96	0.65	$0.108R_0$
	1.8	1.75	0.68	$0.084R_0$
	2.0	1.62	0.71	$0.069R_0$
	3.0	1.33	0.79	$0.030R_0$
	4.0	1.23	0.84	$0.016R_0$
	6.0	1.14	0.89	$0.0070R_0$
	8.0	1.10	0.91	$0.0039R_0$
	10.0	1.08	0.93	$0.0025R_0$
3 	1.2	2.89	0.57	$0.305R_0$
	1.4	2.13	0.63	$0.204R_0$
	1.6	1.79	0.67	$0.149R_0$
	1.8	1.63	0.70	$0.112R_0$
	2.0	1.52	0.73	$0.090R_0$
	3.0	1.30	0.81	$0.041R_0$
	4.0	1.20	0.85	$0.021R_0$
	6.0	1.12	0.90	$0.0093R_0$
	8.0	1.09	0.92	$0.0052R_0$
	10.0	1.07	0.94	$0.0033R_0$
4 	1.2	3.01	0.54	$0.336R_0$
	1.4	2.18	0.60	$0.229R_0$
	1.6	1.87	0.65	$0.168R_0$
	1.8	1.69	0.68	$0.128R_0$
	2.0	1.58	0.71	$0.102R_0$
	3.0	1.33	0.80	$0.046R_0$
	4.0	1.23	0.84	$0.024R_0$
	6.0	1.13	0.88	$0.011R_0$
	8.0	1.10	0.91	$0.0060R_0$
	10.0	1.08	0.93	$0.0039R_0$
5 	1.2	3.09	0.56	$0.336R_0$
	1.4	2.25	0.62	$0.229R_0$
	1.6	1.91	0.66	$0.168R_0$
	1.8	1.73	0.70	$0.128R_0$
	2.0	1.61	0.73	$0.102R_0$
	3.0	1.37	0.81	$0.046R_0$
	4.0	1.26	0.86	$0.024R_0$
	6.0	1.17	0.91	$0.011R_0$
	8.0	1.13	0.94	$0.0060R_0$
	10.0	1.11	0.95	$0.0039R_0$

Таблица 20 (продолжение)

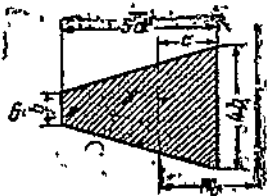
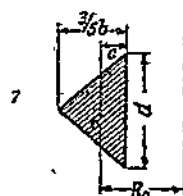
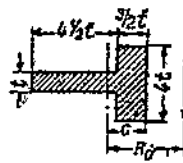
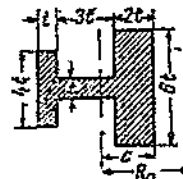
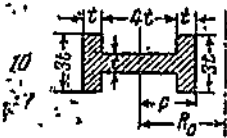
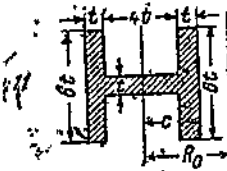
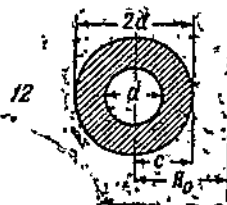
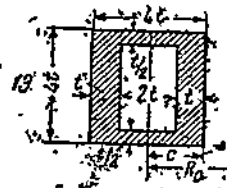
Поперечное сечение	$\frac{R_0}{c}$	Значения K		Y_0
		внутренние волокна	наружные волокна	
	1.2	3.14	0.52	$0.352R_0$
	1.4	2.29	0.54	$0.243R_0$
	1.6	1.93	0.62	$0.179R_0$
	1.8	1.74	0.65	$0.138R_0$
	2.0	1.61	0.68	$0.110R_0$
	3.0	1.34	0.76	$0.050R_0$
	4.0	1.24	0.82	$0.028R_0$
	6.0	1.15	0.87	$0.012R_0$
	8.0	1.12	0.91	$0.0060R_0$
	10.0	1.12	0.93	$0.0039R_0$
	1.2	3.26	0.44	$0.361R_0$
	1.4	2.39	0.50	$0.251R_0$
	1.6	1.99	0.54	$0.186R_0$
	1.8	1.78	0.57	$0.144R_0$
	2.0	1.66	0.60	$0.116R_0$
	3.0	1.37	0.70	$0.052R_0$
	4.0	1.27	0.75	$0.029R_0$
	6.0	1.16	0.82	$0.013R_0$
	8.0	1.12	0.86	$0.0060R_0$
	10.0	1.09	0.88	$0.0039R_0$
	1.2	3.63	0.58	$0.418R_0$
	1.4	2.54	0.63	$0.299R_0$
	1.6	2.14	0.67	$0.229R_0$
	1.8	1.89	0.70	$0.183R_0$
	2.0	1.73	0.72	$0.149R_0$
	3.0	1.41	0.79	$0.069R_0$
	4.0	1.29	0.83	$0.040R_0$
	6.0	1.18	0.88	$0.018R_0$
	8.0	1.13	0.91	$0.010R_0$
	10.0	1.10	0.92	$0.0065R_0$
	1.2	3.55	0.67	$0.409R_0$
	1.4	2.48	0.72	$0.292R_0$
	1.6	2.07	0.76	$0.224R_0$
	1.8	1.83	0.78	$0.178R_0$
	2.0	1.69	0.80	$0.144R_0$
	3.0	1.38	0.86	$0.067R_0$
	4.0	1.26	0.89	$0.038R_0$
	6.0	1.15	0.92	$0.018R_0$
	8.0	1.10	0.94	$0.010R_0$
	10.0	1.08	0.95	$0.0065R_0$

Таблица 20 (продолжение)

Поперечное сечение	$\frac{R_0}{c}$	Значения K		γ_0
		внутренние волокна	$\frac{2\pi c}{\pi R_0}$ наружные волокна	
	1.2	2.52	0.67	$0.408R_0$
	1.4	1.90	0.71	$0.285R_0$
	1.6	1.63	0.75	$0.208R_0$
	1.8	1.50	0.77	$0.160R_0$
	2.0	1.41	0.79	$0.127R_0$
	3.0	1.23	0.86	$0.058R_0$
	4.0	1.16	0.89	$0.030R_0$
	6.0	1.10	0.92	$0.013R_0$
	8.0	1.07	0.94	$0.0078R_0$
	10.0	1.05	0.95	$0.0048R_0$
	1.2	2.37	0.73	$0.453R_0$
	1.4	1.79	0.77	$0.319R_0$
	1.6	1.56	0.79	$0.236R_0$
	1.8	1.44	0.81	$0.133R_0$
	2.0	1.36	0.83	$0.147R_0$
	3.0	1.19	0.88	$0.067R_0$
	4.0	1.13	0.91	$0.036R_0$
	6.0	1.08	0.94	$0.016R_0$
	8.0	1.06	0.95	$0.0089R_0$
	10.0	1.05	0.96	$0.0057R_0$
	1.2	3.28	0.58	$0.269R_0$
	1.4	2.31	0.64	$0.182R_0$
	1.6	1.89	0.68	$0.134R_0$
	1.8	1.70	0.71	$0.104R_0$
	2.0	1.57	0.73	$0.083R_0$
	3.0	1.31	0.81	$0.038R_0$
	4.0	1.21	0.85	$0.020R_0$
	6.0	1.13	0.90	$0.0087R_0$
	8.0	1.10	0.92	$0.0049R_0$
	10.0	1.07	0.93	$0.0031R_0$
	1.2	2.63	0.68	$0.399R_0$
	1.4	1.97	0.73	$0.280R_0$
	1.6	1.66	0.76	$0.205R_0$
	1.8	1.51	0.78	$0.159R_0$
	2.0	1.43	0.80	$0.127R_0$
	3.0	1.23	0.86	$0.058R_0$
	4.0	1.15	0.89	$0.031R_0$
	6.0	1.09	0.92	$0.014R_0$
	8.0	1.07	0.94	$0.0076R_0$
	10.0	1.06	0.95	$0.0048R_0$

Для подсчета тангенциальных напряжений в крайних волокнах формула (188), дающая гиперболический закон распределения напряжений, приводится к следующему виду:

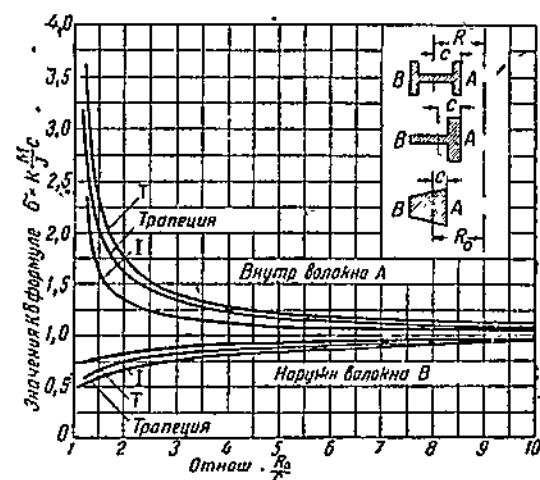
$$\sigma_t = \pm K \frac{M}{J} c \quad (189')$$

(для $r=r_1$ и $r=r_2$).

Значения K даны в табл. 20 в зависимости от формы сечения кривого бруса и отношения $\frac{R_0}{c}$.

На фиг. 150 даны графики этих величин для отношения $\frac{R_0}{c}$ до 10 для трех основных форм сечений.

Изгибающий момент M подсчитывается по отношению к оси, проходящей через центр тяжести сечения.



Фиг. 150. Значения K в зависимости от $\frac{R_0}{c}$ для внутренних и наружных волокон кривого бруса.

зывает в поперечном сечении кривого напряжения τ , определяемые по формуле (163) для прямого бруса, в которой J следует заменить $\frac{y_0 F(r \pm y)^2}{r}$:

$$\tau = \frac{QS}{\frac{y_0}{r} \cdot F(r \pm y)^2} \quad (190)$$

Точное решение для кривого бруса прямоугольного сечения

а) Чистый изгиб. Согласно точной теории (решение Головина) при чистом изгибе кривого бруса постоянного прямоугольного сечения моментами M , действующими в плоскости осевой линии бруса, возникают тангенциальные и радиальные напряжения:

б) Изгиб с продольной силой. Если, кроме изгибающего момента, действует продольная сила N , равная проекции на касательную к оси бруса нагрузок, расположенных по одну сторону от сечения, то полное напряжение в сечении находится по формуле

$$\sigma_t = \pm \frac{N}{F} \pm K \frac{M}{J} c, \quad (189'')$$

где F — площадь поперечного сечения.

в) Напряжения, вызываемые поперечной силой. Если, кроме N и M , в поперечном сечении действует перерезывающая сила Q , то она вызывает в поперечном сечении кривого бруса касательные напряжения

$$\sigma_t = \frac{6M}{bh^2} K \left[\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) m - (1 - k^2) \ln \frac{r}{r_1} \right]; \quad (191)$$

$$\sigma_r = \frac{6M}{bh^2} K \left[\left(1 + \frac{r_1^2}{r} \right) m - (1 - k^2) \left(1 + \ln \frac{r}{r_1} \right) \right]$$

(точное решение),

где $k = \frac{r_1}{r_2}$, $m = -\ln k$,

$$K = \frac{2(1 - k^2)^2}{3[(1 - k^2)^2 - (2mk)^2]},$$

причем $1 \geq K \geq 0$.

Момент M считается положительным, если он разгибает кривой брус.

Распределение напряжений σ_t и σ_r при $k = 0,4$ приведено на фиг. 151; для сравнения дана эпюра напряжений σ_t , полученная по формуле $\sigma = \frac{M}{I}$ у для прямого бруса.

Тангенциальное напряжение σ_t имеет наибольшую величину на внутренних волокнах при $r = r_1$.

Радиальные напряжения σ_r дают при положительном моменте равнодействующую в радиальном направлении, стремящуюся отделить продольные волокна, и являются растягивающими (положительными) напряжениями. Это напряжение достигает максимума возле нейтрального слоя, где $\sigma_t = 0$. Максимум $(\sigma_r)_{\max}$ всегда меньше, чем $(\sigma_t)_{\max}$. Например, при $\frac{r_2}{r_1} = 1,3$; $(\sigma_r)_{\max} = 0,60 (\sigma_t)_{\max}$; при $\frac{r_2}{r_1} = 2$ $(\sigma_r)_{\max} = 0,138 (\sigma_t)_{\max}$; при $\frac{r_2}{r_1} = 3$ $(\sigma_r)_{\max} = 0,193 (\sigma_t)_{\max}$.

Наибольшие напряжения σ_t в кривом брус, достигающие максимума при $r = r_1$ и $r = r_2$, на основании первой из формул (191) могут подсчитываться по формулам:

при $r = r_1$ (для внутренних волокон)

$$\sigma_t = \frac{6M}{bh^2} \cdot K_1,$$

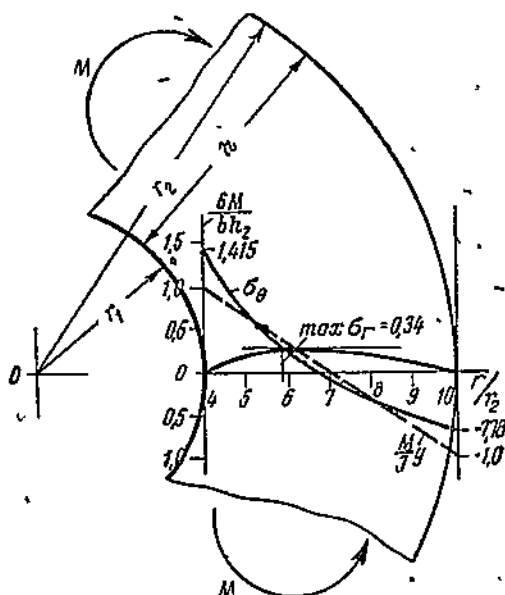
при $r = r_2$ (для наружных волокон)

$$\sigma_t = \frac{6M}{bh^2} \cdot K_2,$$

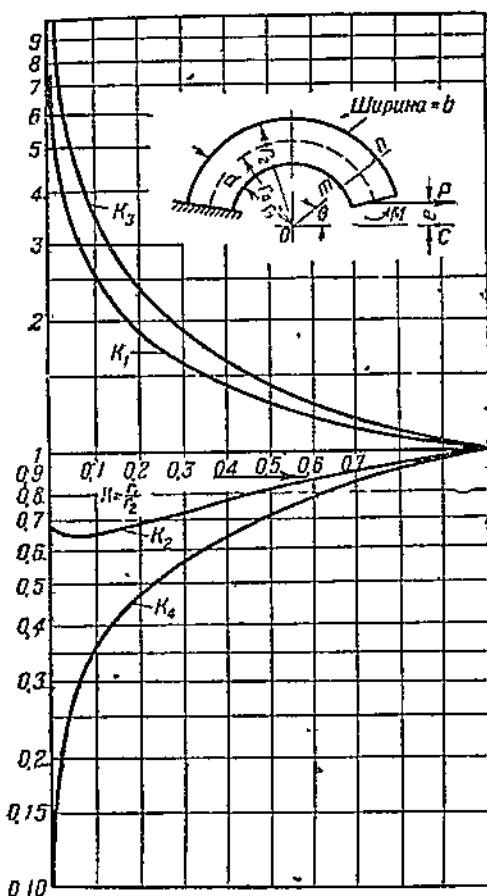
где

$$K_1 = [2m - (1 - k^2)] \cdot K;$$

$$K_2 = [(1 - k^2) - 2mk^2] \cdot K.$$



Фиг. 151. Распределение напряжений при чистом изгибе кривого бруса прямоугольного сечения (точное решение). Ширина сечений— b ; $k = 0,4$.



Фиг. 152. Значения K_1, K_2, K_3, K_4 для изгиба кривого бруса прямоугольного сечения (точное решение).

на 17%, при $\frac{R_0}{h} = 4$ равна 9,2% и при $\frac{R_0}{h} = 10$ равна 3,2%.

Множители K_1 и K_2 являются поправочными коэффициентами для кривого бруса в формуле

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{6M}{bh^2}$$

для напряжений в крайних волокнах прямого бруса.

Коэффициенты K_1 и K_2 даны на графике фиг. 152 в зависимости от отношения $\frac{r_1}{r_2} = k$.

Для значений k больше 0,85 (при $r_1 = 6h$) поправка не превосходит 5%. При k меньше 0,05 величина $K_1 = \frac{2}{3} \cdot (2m - 1)$ и в пределе равна $\frac{2}{3}$.

В табл. 21 приводится сопоставление тангенциальных напряжений в крайних волокнах кривого бруса прямоугольного сечения, подсчитанных тремя методами для одинаковых значений $\frac{M}{r_1^2}$.

Из табл. 21 видно, что расчет тангенциальных напряжений по формулам (189) и (189') дает очень точные результаты.

Ошибка в определении наибольших напряжений в кривом брус, исходя из линейного закона, при $\frac{R_0}{h} = 2$ равна

Таблица 21

$\frac{r_2}{r_1}$	Линейное распределение напряжений (формула для прямого бруса)	Гиперболический закон распределения напряжений	Точное решение
1,3	$\pm 100\%$	$+109,2\%; -91,3\%$	$+109,6\%; -91,8\%$
2,0	$\pm 9\%$	$+11,6\%; -7,3\%$	$+11,7\%; -7,4\%$
3,0	$\pm 2,2\%$	$+3,4\%; -1,6\%$	$+3,5\%; -1,7\%$

б) Изгиб с продольной силой. При действии на кривой брус прямоугольного сечения силы P и момента M , приложенных, как указано на фиг. 152, расчет наибольших тангенциальных напряжений σ_t следует вести по формулам:

при $r=r_1$

$$\sigma_t = \frac{6}{bh^3} [K_1 (M - P \cdot e) + K_3 \cdot P \cdot r_0 \cdot \sin \theta];$$

при $r=r_2$

$$\sigma_t = -\frac{6}{bh^3} [K_2 (M - P \cdot e) + K_4 \cdot P \cdot r_0 \sin \theta], \quad \left. \vphantom{\frac{6}{bh^3}} \right\} \quad (191')$$

где e — расстояние между линией действия силы и осью OC , проведенной через центр O кривизны параллельно этой линии; θ — угол между осью OC и плоскостью поперечного сечения, в котором определяются напряжения.

$$\text{Значения } K_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(1-k)^3}{k[(1+k^2)m - (1-k^2)]}$$

и $K_4 = k \cdot K_3$ берутся по графику фиг. 152.

Если сечение кривого бруса прямоугольное, то по точной теории касательные напряжения, вызванные поперечной силой в точке сечения на расстоянии r от центра кривизны бруса,

$$\tau = -\frac{Q}{m} \left[r + \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r^3} - \frac{1}{r} (r_1^2 + r_2^2) \right], \quad (191'')$$

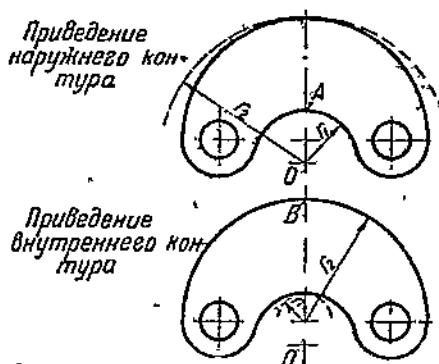
где $m = r_1^2 - r_2^2 + (r_1^2 + r_2^2) \ln \frac{r_2}{r_1}$ (при ширине бруса = 1).

Частные случаи

а) Если внутренний и внешний контуры очерчены эксцентричными кривыми, то для расчета напряжений следует внутренний и внешний контуры кривого бруса привести к одному центру, как указано на фиг. 153. Для определения напряжений во внутренней точке A следует привести наружный контур, а для определения напряжений в точке B на наружном контуре следует привести внутренний контур.

б) Расчет тангенциальных напряжений в круглом диске постоянной толщины b с отверстием (плоское кольцо), сжимаемым по диаметру силами P , может быть сделан по формуле

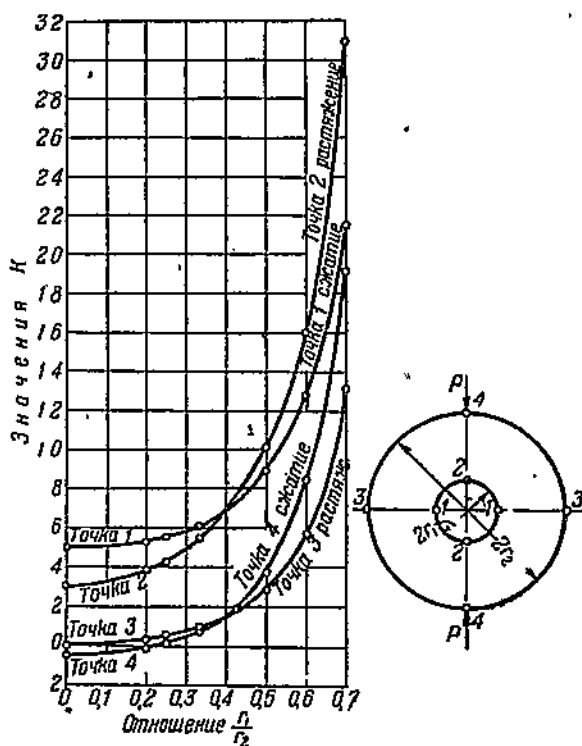
$$\sigma_t = k \frac{2P}{\pi \cdot b}.$$



Фиг. 153. Кривой брус, ограниченный эксцентричными контурами.

Коэффициент k для расчета напряжений в точках 1, 2, 3, 4 берется по графику фиг. 154 в зависимости от отношения $\frac{r_1}{r_2}$. Радиальные напряжения равны нулю, исключая точки диска под силами P , где действуют местные напряжения.

в) Если внешняя нагрузка приложена не в плоскости оси кривого бруса, то возникают, кроме изгибающих моментов, и моменты кручения (см. Тимошенко „Сопrotивление материалов“, ч. II, § 15). Расчет напряжений ведется по формулам сложного сопротивления (см. § 2, п. 7 этой главы).



Фиг. 154. Значения K в зависимости от $\frac{r_1}{r_2}$.

§ 4. Напряжения в пружинах

Цилиндрические винтовые пружины

Скручивающий момент $M_{кр} = P \cdot \frac{D}{2}$ в проволоке круглого сечения цилиндрической винтовой пружины вызывает касательные напряжения

$$\tau = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi d^3} \quad (192)$$

и дает осадку

$$f = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot l}{G \cdot d^4} \quad (193)$$

где P — усилие в пружине;
 D — средний диаметр витка;
 d — диаметр проволоки;
 l — число витков;
 G — модуль сдвига.

Для цилиндрических пружин из проволоки прямоугольного сечения

$$\tau = \frac{PD}{2k_1 \cdot hb^2} \quad (194)$$

и

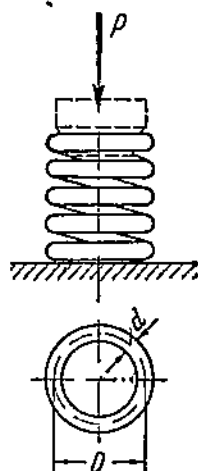
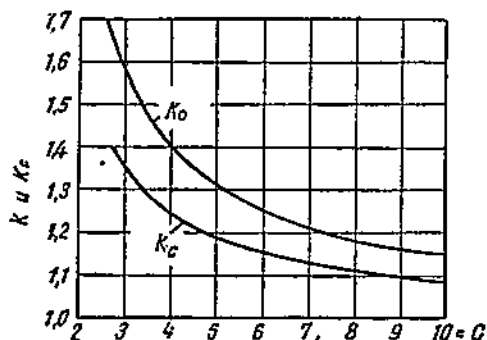
$$f = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{PD^3 \cdot l}{G \cdot k h b^3}, \quad (195)$$

где коэффициенты k_1 и k берутся из табл. 17 в зависимости от отношения $\frac{h}{b} \gg 1$ размеров поперечного сечения проволоки пружины.

Приведённые формулы достаточно точны при больших значениях $\frac{D}{d} = C \ll 10$.

При меньших значениях C в формулы (192) и (194') вводится поправочный коэффициент K_0 (12), так что для цилиндрических пружин из проволоки круглого сечения

$$\tau = K_0 \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi d^3} \quad (192')$$



Фиг. 155. Кривые Валя величин K_0 и K_c для цилиндрической винтовой пружины.

и из проволоки прямоугольного сечения

$$\tau = K_0 \frac{P \cdot D}{2k_1 h b^2} \quad (194')$$

Поправочный коэффициент $K_0 = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} \quad (196)$

Коэффициент K_0 может быть представлен как произведение двух множителей:

$$K_0 = K_s \cdot K_c,$$

где K_s — коэффициент, учитывающий напряжения от перерезывающей силы $Q = P$;

K_c — коэффициент, учитывающий увеличение напряжений, вызванное кривизной проволоки;

$$K_s = 1 + \frac{0,5}{C}; \quad K_c = \frac{K_0}{1 + \frac{0,5}{C}}.$$

Значения коэффициентов K_0 и K_c даны на графике фиг. 155 для проволоки круглого и квадратного сечений в зависимости от отношения

среднего диаметра пружины к размеру поперечного сечения (d или $h=b$).

Формулы (192') и (194') дают точность в пределах 1% при $C \geq 3$ и при наклоне витка $\alpha \leq 14^\circ$.

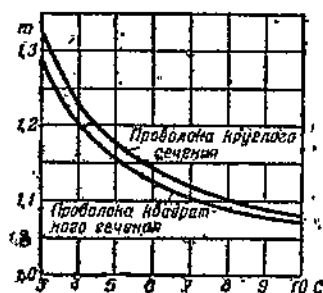
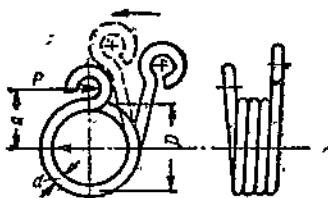
Спиральная пружина, работающая на изгиб

Напряжения изгиба вычисляются по формуле (фиг. 156)

$$\sigma = m \frac{M_{изг}}{\frac{\pi d^3}{32}} \quad (197)$$

(для круглого сечения проволоки) или

$$\sigma = m \frac{M_{изг}}{\frac{b^3}{6}}$$



Фиг. 156. Кривые Ваяля величин m для спиральной пружины.

(для квадратного сечения $b \times b$ проволоки). Изгибающий момент

$$M_{изг} = P \cdot a. \quad (197')$$

Поправочный коэффициент m зависит от кривизны проволоки и берется по графику фиг. 156 в зависимости от отношения $C = \frac{D}{d}$ среднего диаметра пружины к диаметру d или радиусу $b = \frac{h}{2}$ квадратного сечения проволоки.

Пружины Бельвилля

Расчетные формулы для напряжений в пружине Бельвилля составляются в предположении, что меридиональное сечение пружины, показанное на фиг. 157, не меняет формы при действии нагрузки P , а поворачивается на некоторый угол ψ .

Обозначая через P полную нагрузку и принимая остальные размеры по фиг. 157, а, имеем [13]:

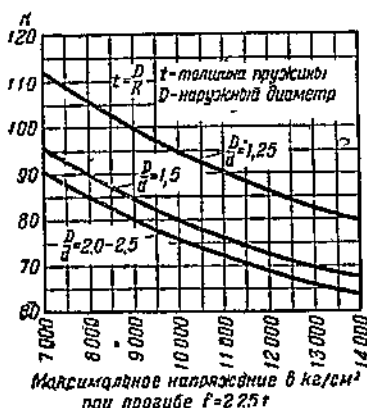
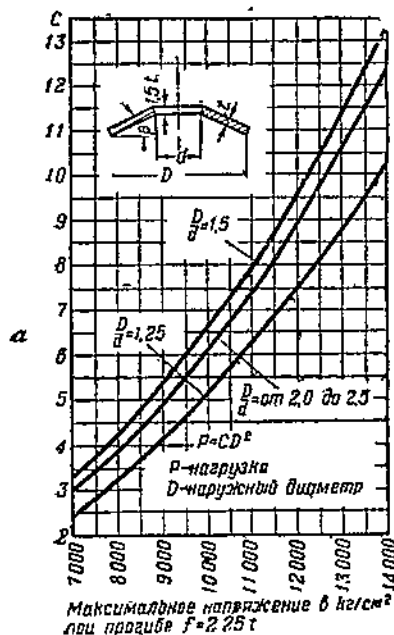
$$P = 3,46 \cdot E \cdot t \cdot \psi \left[\left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \left(\beta - \psi \right) \left(\frac{D+d}{2} - \frac{D-d}{\ln \frac{D}{d}} \right) + \frac{t^2 \ln \frac{D}{d}}{3(D-d)} \right];$$

$$\sigma_{t(max)} = 1,1 \cdot E \cdot \psi \left[\left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \frac{D-d-d \ln \frac{D}{d}}{d \ln \frac{a}{b}} + \frac{t}{d} \right], \quad (198)$$

где E — модуль продольной упругости материала пружины.

Расчет пружины может вестись по графикам фиг. 157, а и б, построенным для $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ [14].

Пример. Пружина Бельвилля имеет $D = 15,0 \text{ см}$, $d = 10,0 \text{ см}$, $\frac{D}{d} = 1,5$. Принимая для статической нагрузки допускаемое напряжение равным $13\,000 \text{ кг/см}^2$, по графику фиг. 157, а и б получаем полную нагрузку $P = C \cdot D^2 = 3400 \text{ кг}$ и толщину пружины $t = \frac{D}{k} = \frac{15,0}{70} = 0,21 \text{ см}$. Прогиб $f = 2,25 \cdot t = 2,25 \cdot 0,21 = 0,47 \text{ см}$.



Фиг. 157. Кривые Воля для расчета пружин Бельвилля.

§ 5. Контактные напряжения

Сосредоточенное давление [1]

При определении напряжений в точках, расположенных от места контакта на расстоянии больше $1\frac{1}{2}$ —2 размера площади контакта, нагрузку можно рассматривать как сосредоточенную.

Если сосредоточенная нагрузка P приложена к пластинке толщиной b (фиг. 158), ограниченной сверху прямолинейным краем AB и имеющей вниз бесконечно большие размеры (бесконечная полуплоскость), то распределение напряжений оказывается чисто радиальным (линейное напряженное состояние с главными напряжениями σ_r в направлении радиуса):

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi \cdot b} \cdot \frac{\cos \theta}{r}. \quad (199)$$

При этом предполагается, что нагрузка P распределена равномерно по линии на толщине b .

Все точки круга диаметра $d = \frac{r}{\cos \theta}$, касательного к прямой AB

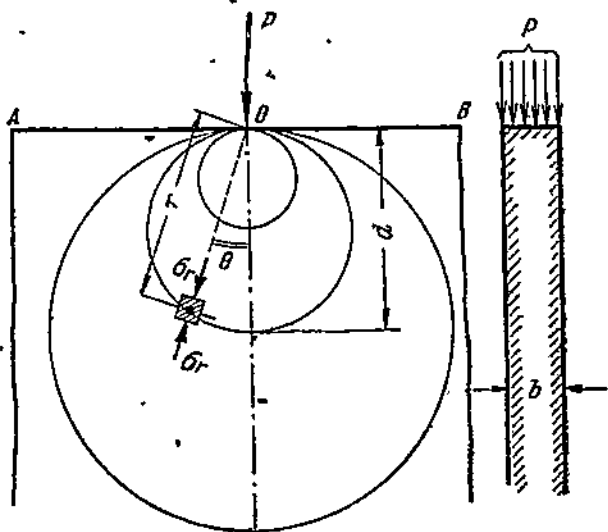
в точке O приложения нагрузки, имеют одну и ту же величину радиальных напряжений:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi b} \cdot \frac{1}{d} = \text{const.} \quad (199')$$

Точки этих кругов (за исключением точки O) образуют систему линий равных напряжений (круги Буссинеска).

Напряжения по площадкам, параллельным плоскости чертежа фиг. 158, равны нулю.

Если сосредоточенная сила, приложенная в точке O (фиг. 158), направлена по горизонтали вдоль контура AB , то напряжения определяются по формуле (199), но угол θ отсчитывается от направления OB .



Фиг. 158. Упругая полуплоскость.

Если в точке O между прямыми AO и BO образуется угол 2α (клин), то расчет напряжений может быть выполнен для нагрузки P , имеющей любое направление и приложенной к острию клина, по формулам (150) и (166').

Если опорные связи полубесконечной площадки (фиг. 158) таковы, что точки, лежащие на оси x , не имеют бокового перемещения и точка, лежащая на этой оси на расстоянии d от начала координат O , не имеет вертикального перемещения, то вертикальное перемещение точек, лежащих на оси x , равно

$$v = \frac{2P}{\pi \cdot E \cdot b} \ln \frac{d}{r}. \quad (200)$$

Для края пластинки при тех же условиях вертикальное перемещение

$$v = \frac{2P}{\pi E b} \ln \frac{d}{r} - \frac{1+\mu}{\pi} \cdot \frac{P}{E b}, \quad (200')$$

горизонтальное перемещение

$$u = -\frac{(1-\mu)P}{2E b}$$

(постоянное и направлено к началу координат).

Если плоскость $z=0$ (фиг. 159) является гранью полубесконечного сплошного тела и на эту плоскость действует сосредоточенная сила P по оси Z , то напряжения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\mu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} \right] - 3r^2 \cdot z (r^2+z^2)^{-3/2} \right\}; \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2+z^2)^{-3/2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\mu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2+z^2)^{-1/2} + z (r^2+z^2)^{-3/2} \right]; \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} r \cdot z^2 (r^2+z^2)^{-3/2}.\end{aligned}\quad (201)$$

Здесь σ_θ — нормальное напряжение по площадке, совпадающей с плоскостями, в которых расположена сила P . Для точек любой сферической поверхности диаметра d , касательной к плоскости $z=0$ в точке приложения силы P , полное напряжение по горизонтальным площадкам постоянно и равно

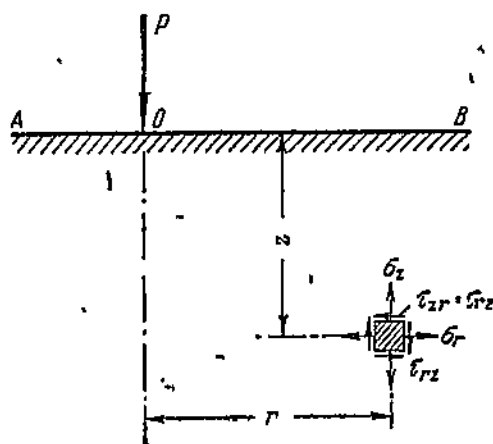
$$p_z = \frac{3P}{2\pi d^2}.$$

Для граничной плоскости $z=0$ перемещения получаются равными: в направлении радиуса

$$u = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu) \cdot P}{2\pi E \cdot r}; \quad (201')$$

по вертикали

$$w = \frac{(1-\mu^2) \cdot P}{\pi E r}. \quad (201'')$$



Фиг. 159. Упругое полупространство.

Контактные напряжения в цилиндрах

а) Цилиндры с параллельными осями [15]

Давление в месте контакта двух соприкасающихся цилиндров определяется по закону эллипса по ширине площадки контакта, как показано на фиг. 160, и остается постоянным по длине цилиндров.

Эллиптический закон распределения давлений был получен Герцем при следующих допущениях:

- 1) материал соприкасающихся деталей следует закону Гука;
- 2) линейные размеры поверхности касания (в плоскости радиусов цилиндров) малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся деталей;

3) сжимающая сила нормальна к середине соприкасающихся поверхностей;

4) давления, распределенные по поверхности касания, нормальны к этой поверхности.

Если размер площадки контакта в плоскости радиусов цилиндров обозначен $2a$ и длина площадки равна длине b цилиндров, то при эллиптическом законе распределения давлений

$$q_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P}{a \cdot b}, \quad (202)$$

где P — величина всей нагрузки;

q_0 — наибольшее давление, получаемое в середине площадки контакта двух цилиндров.

При известных q_0 , P , a , b (определение q_0 и a см. ниже) напряжения в точках цилиндра, лежащих на линии давления P , могут определяться в предположении наличия прямого края (по малости линейного размера поверхности касания) по формулам:

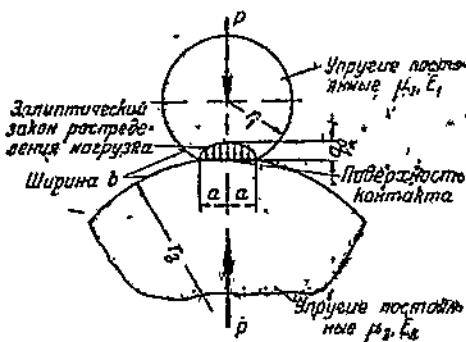
$$\sigma_x = - \left[\frac{a^2 + 2y^2}{a \sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{2y}{a} \right] \cdot q_0;$$

$$\sigma_y = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot q_0; \quad (202')$$

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y) = - 2\mu \frac{\sqrt{a^2 + y^2} - y}{a} q_0; \quad \tau_{xy} = 0$$

(плоская деформация).

Здесь σ_x и σ_y — нормальные напряжения по вертикальной и горизонтальной площадкам, перпендикулярным к плоскости чертежа фиг. 160; σ_z — нормальное напряжение по площадке, лежащей в плоскости чертежа, действующее параллельно оси цилиндра; y — расстояние рассматриваемой точки от поверхности контакта. Напряжения σ_x , σ_y , σ_z являются главными напряжениями.



Фиг. 160. Сжатие катков.

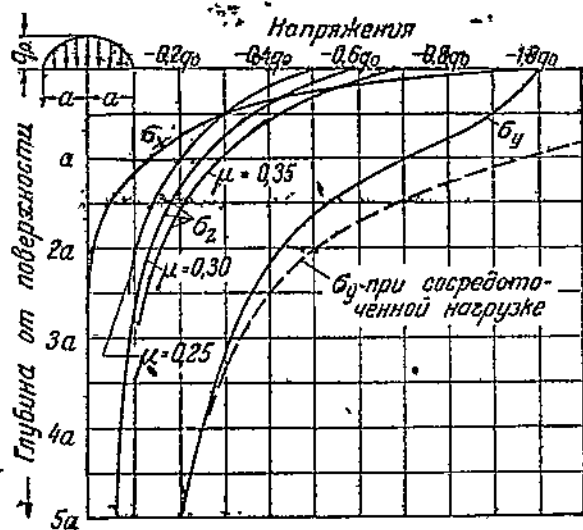
Значения σ_x , σ_y , σ_z , получаемые по формулам (202'), на фиг. 161 даны графически. Величины σ_x зависят от коэффициента Пуассона и даны для трех значений $\mu = 0,25; 0,30; 0,35$.

На фиг. 162 дан график удвоенных величин наибольших касательных напряжений.

$$Q_{xy} = 2\tau'_{\max} = \sigma_x - \sigma_y = \frac{2y}{a} \left[1 - \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] \cdot q_0;$$

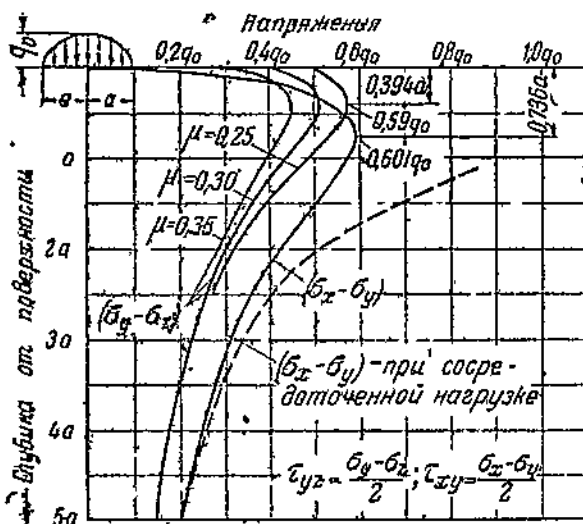
$$Q_{yz} = 2 \cdot \tau''_{\max} = \sigma_y - \sigma_z = \frac{(1 - 2\mu) a^2 + 2\mu \cdot y (\sqrt{a^2 + y^2} - y)}{a \sqrt{a^2 + y^2}} \cdot q_0.$$

Величины Q_{xz} , значительно меньшие Q_{xy} и Q_{yz} , на фиг. 162 не показаны.



Фиг. 161. Распределение главных напряжений по линии давления

σ_y — вертикальное главное напряжение; σ_x — горизонтальное главное напряжение; σ_z — главные напряжения вдоль длины цилиндра.



Фиг. 162. Величины удвоенных наибольших касательных напряжений по линии давления.

Величина наибольшего давления q_0 по площадке соприкасания цилиндров (плоская деформация) на основании теории Герца вычисляется по формуле

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\beta \cdot P}{\pi N b}}, \quad (203)$$

где $\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$;

$$N = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \quad (203')$$

(фиг. 160).

Если q_0 найдено, то размер $2a$ площадки контакта находится из формулы

$$a = \frac{N}{\beta} q_0 \text{ или } a = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P}{b \cdot q_0}. \quad (203'')$$

Полагаем $r_1 \gg r_2$. Если один из цилиндров — плоскость, то $\frac{1}{r_2} = 0$ и $\beta = \frac{1}{2} r_1$. Если один из роликов представляет собой цилиндрическую впадину, то для него $r_2 < 0$.

При контакте цилиндров наибольшее касательное напряжение может (фиг. 162) вычисляться по формуле

$$\tau_{\max} = 0,30 \cdot q_0 \quad (204)$$

и получается в точках, расположенных на глубине

$$y_0 = 0,786 a. \quad (204')$$

Расчетные формулы для контакта цилиндров даны на номограммах фиг. 163 и 164. Эти номограммы построены для $\mu = 0,30$; изменение величины μ в пределах от 0,25 до 0,35 может дать изменение в величинах q_0 и a не более чем на $\pm 1,7\%$.

Соединение шкал в номограмме фиг. 163 делается в порядке номеров шкал.

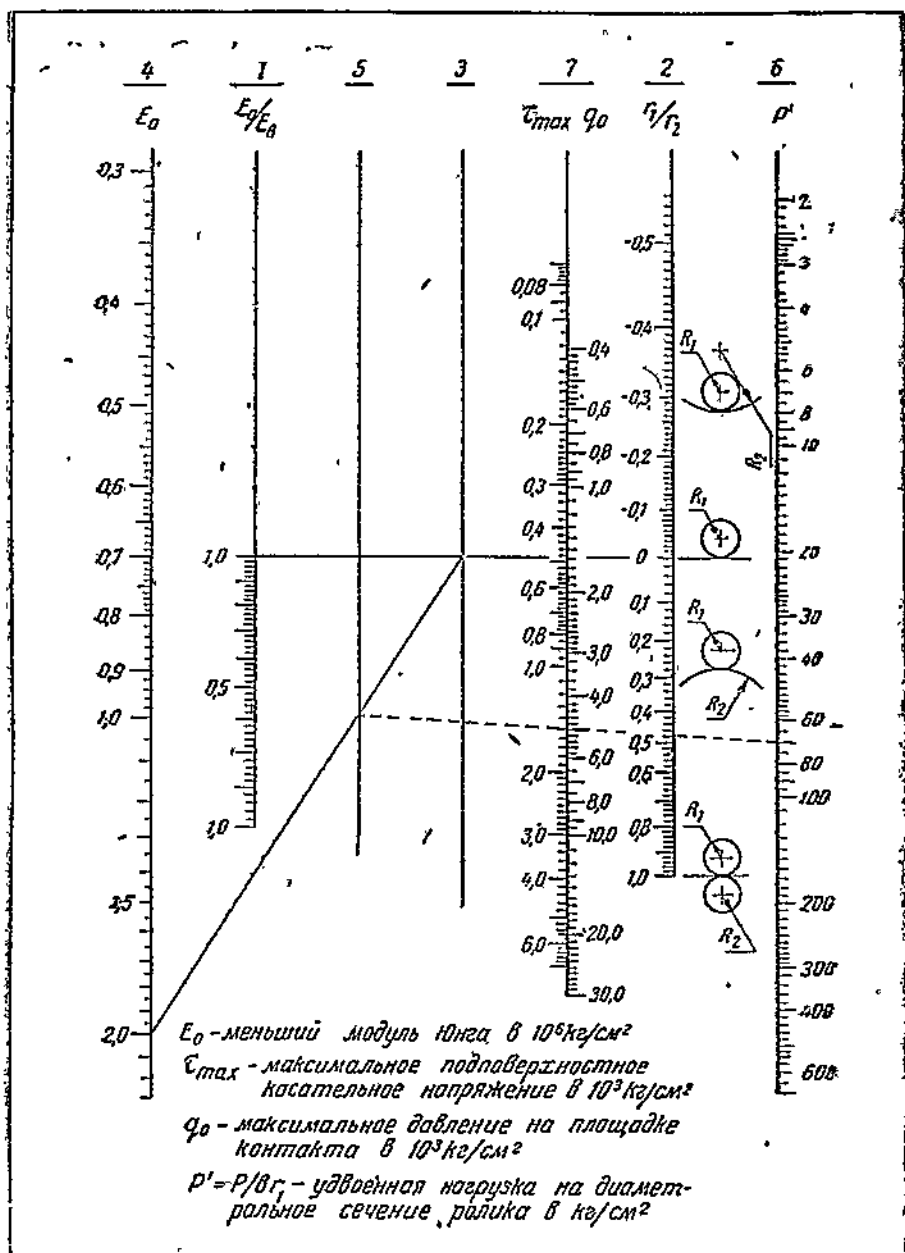
Пример. Модуль упругости материала обеих деталей одинаковый: $E_a = E_b = 2,0 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$; $\frac{E_a}{E_b} = 1$. Радиус одного цилиндра 10 см; вторая деталь ограничена плоскостью: $r_1 = 10 \text{ см}$; $r_2 = \infty$; $\frac{r_1}{r_2} = 0$. Длина цилиндра $b = 300 \text{ см}$. Полное давление $P = 21\,000 \text{ кг}$.

Отсюда удвоенное давление, отнесенное к диаметральному сечению меньшего цилиндра,

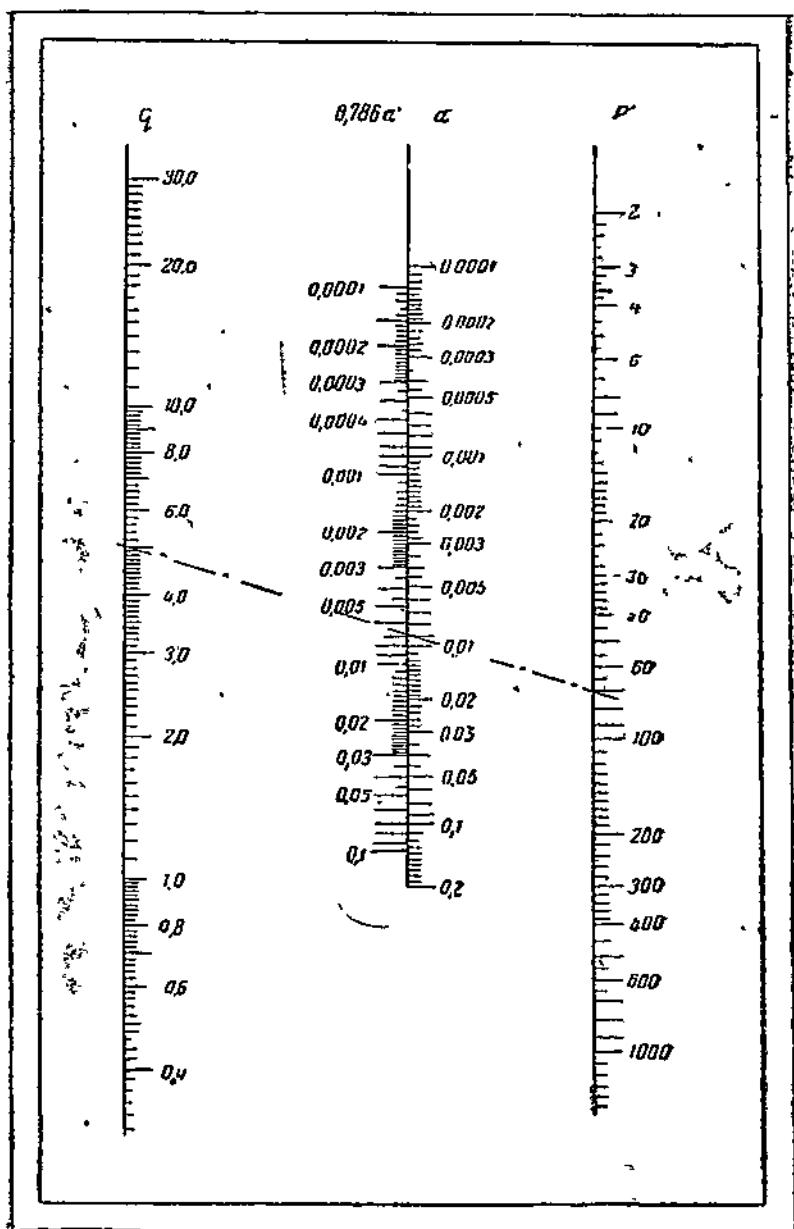
$$p_1 = \frac{P}{b \cdot r_1} = \frac{21\,000}{30 \cdot 10} = 70 \text{ кг/см}^2.$$

Соединяем точку $\frac{E_a}{E_b} = 1$ на шкале 1 с точкой $\frac{r_1}{r_2} = 0$ шкалы 2, а

точку немой шкалы 3 соединяем прямой с точкой $\frac{E_a}{10^4} = 2,0 \text{ кг/см}^2$ шкалы 4. Точку пересечения этой прямой с немой шкалой 5 соединяем с точкой $p_1 = 70 \text{ кг/см}^2$ шкалы 6. На шкале 7 отсчитываем наибольшее давление в месте контакта $q_0 = 5,0 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$ и наибольшее подповерхностное касательное напряжение $\tau_{\max} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$.



Фиг. 163. Контакт деталей по цилиндрическим поверхностям с параллельными осями.



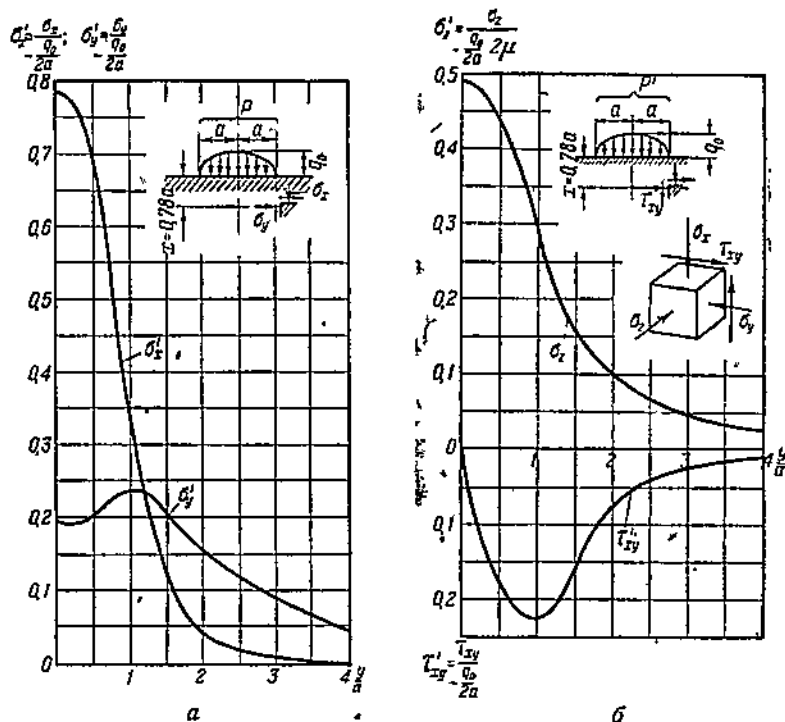
Фиг. 164. Ширина площадки контакта $2a = 2a'r$. Глубина области наибольшего касательного напряжения равна $0,786a'r_1$.

По номограмме фиг. 164 для $\frac{q_0}{10^3} = 5,0$ и $p' = 70 \text{ кг/см}^2$ находим $a' = 0,0090$ и $0,786 \ a' = 0,007$.

Отсюда ширина площадки контакта $2a = 2 \cdot 0,0090 \cdot 30 = 0,54 \text{ см}$. Глубина области наибольших касательных напряжений $y_0 = 0,007 \cdot 30 = 0,21 \text{ см}$.

Подробный анализ напряжений — см. [15].

На фиг. 165 построены графики напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} и σ_z в зависимости от величины q_0 и a для различных значений x при $y = 0,78 a$ (в точках $\tau_{\max}$). Эти графики являются линиями влияния при перекатывании цилиндра для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} и σ_z в точке, имеющей $\tau_{\max}$.



Фиг 165. Линии влияния для напряжений в точках наибольшего касательного напряжения.

Величина λ сближения точек обоих цилиндров, удаленных от мест контакта (например осей цилиндров), получаемого в связи с деформациями при контакте, вычисляется по формуле [16]:

$$\lambda = N \frac{P}{\pi b} \ln \frac{4e}{a}, \quad (205)$$

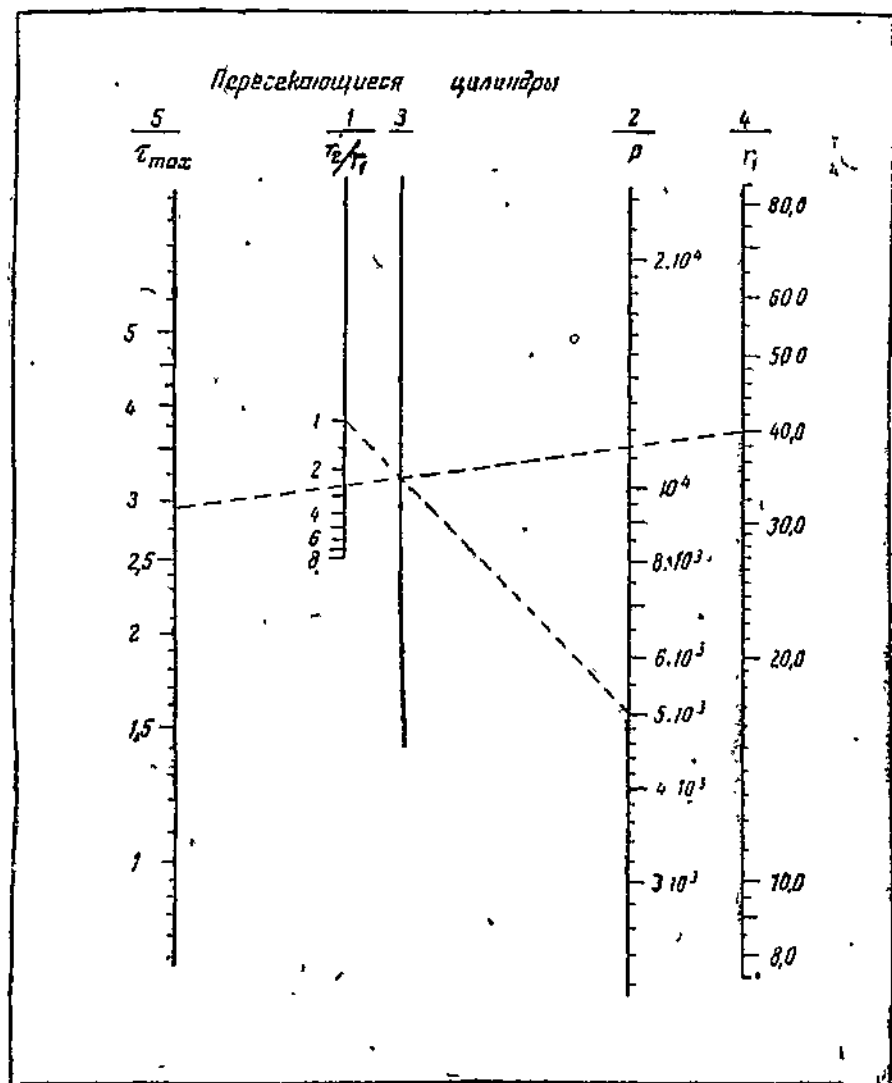
где $e = 2,718$ — основание натуральных логарифмов; обозначение прочих величин дано выше.

В случае контакта вала с опорой радиусы цилиндрических поверхностей почти равны и теория Герца не применима — см. [17].

б) Цилиндры с осями, пересекающимися под прямым углом.

Площадка соприкосновения получается в форме эллипса.

Большая полуось a эллипса площадки контакта располагается параллельно оси цилиндра с меньшим радиусом (при одинаковых материалах обоих цилиндров).



Фиг. 166. Пересекающиеся цилиндры:

r_1 — радиус меньшего ватка в см; P — нагрузка на ваток в кг; $\tau_{\max}$ — наибольшее надповерхностное касательное напряжение в 10^3 кг/см²; $E = 2,1 \cdot 10^5$ кг/см²; $\mu = 0,25$.

Величина полуосей a и b эллипса площадки контакта и величина наибольшего давления q_0 в месте контакта находятся, как для контакта двух деталей с любой формой поверхностей (см. п. 3 этого параграфа). При этом для цилиндра 1 берутся радиусы кривизны поверхности r_1 .

(радиус поперечного сечения цилиндра) и $r_1'' = \infty$ и для цилиндра 2 соответственно $r_2' = \infty$ и r_2'' .

Наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max}$ для цилиндров, имеющих радиусы r_1 и r_2 , $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см² и $\mu = 0,25$ можно находить при помощи номограммы фиг. 166, построенной по формуле [16]:

$$\tau_{\max} = 1175 \frac{P^{1/2}}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{0,271} \cdot r_1^{3/2}} \text{ кг/см}^2,$$

где $r_2 \geq r_1$.

Пример. Стальные детали соприкасаются по цилиндрическим поверхностям со скрепляющимися осями, имеющими одинаковые радиусы $r_1 = r_2 = 40$ см. Общая нагрузка $P = 5000$ кг. Соединяя точки шкал фиг. 166, находим $\tau_{\max} = 2900$ кг/см².

Контакт между двумя соприкасающимися телами

а) Детали ограничены сферическими поверхностями

При контакте двух деталей, ограниченных сферическими поверхностями, площадка контакта получается в виде круга радиуса a . Распределение давлений происходит по полушару. Наибольшее давление в центре площадки контакта

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi \cdot a^2}, \quad (206)$$

где P — полное давление.

Радиус площадки контакта двух шаров

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{N \cdot r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} P}, \quad (206')$$

и сближение шаров (можно принять как сближение центров шаров), получаемое в связи с деформациями при контакте,

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \frac{N^2 (r_1 + r_2)}{r_1 \cdot r_2} \cdot P^2}. \quad (206'')$$

Здесь r_1 и r_2 — радиусы шаров и $N = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}$, где μ_1, μ_2 и E_1, E_2 — коэффициенты Пуассона и модули продольной упругости материала шаров.

Если оба шара имеют материал с равными модулями упругости E и коэффициент Пуассона для них $\mu = 0,3$, то

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{P}{E}}; \quad \lambda = 1,23 \sqrt[3]{\frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot \frac{P^2}{E^2}} \quad (207)$$

и наибольшее давление контакта

$$q_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 \cdot r_2^2} \cdot \frac{P}{E^2}}. \quad (207')$$

Если шар радиуса r вдавливается в плоскость и материал обоих тел имеет одинаковые упругие свойства, то, полагая $r_2 = \infty$, получим

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{r \cdot P}{E}}; \quad (208)$$

$$\lambda = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 \cdot r}};$$

$$q_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{E^2 \cdot P}{r^2}}.$$

Приведенные зависимости даны на номограммах фиг. 167 и 168. Порядок соединения прямыми соответствующих отметок на шкалах указан номерами шкал.

Если площадь контакта — окружность, как при сжатии двух шаров, то наибольшие сжимающие напряжения получаются в центре поверхности контакта и направлены по линии давления:

$$\sigma_z = q_0. \quad (209)$$

Два другие главные напряжения в этой точке равны между собой и действуют в плоскости контакта:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1 + 2\mu}{\mu} \cdot q_0. \quad (209')$$

Наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max}$ возникают в точке, лежащей на оси z на глубине, равной примерно половине радиуса поверхности касания ($z_0 \approx 0,5 a$) и равно при $\mu = 0,3$

$$\tau_{\max} = 0,31 \cdot q_0. \quad (210)$$

Наибольшие растягивающие напряжения возникают по окружности поверхности касания и равны

$$\sigma_r = \frac{1 - 2\mu}{3} q_0. \quad (211)$$

Другое главное напряжение в этих точках направлено по касательной к контуру площадки касания, равно радиальному напряжению σ_r , но имеет обратный знак. Следовательно, в этих точках получается чистый сдвиг и

$$\tau_{\max} = \frac{1 - 2\mu}{3} \cdot q_0. \quad (211')$$

б) Общий случай давления между двумя соприкасающимися телами

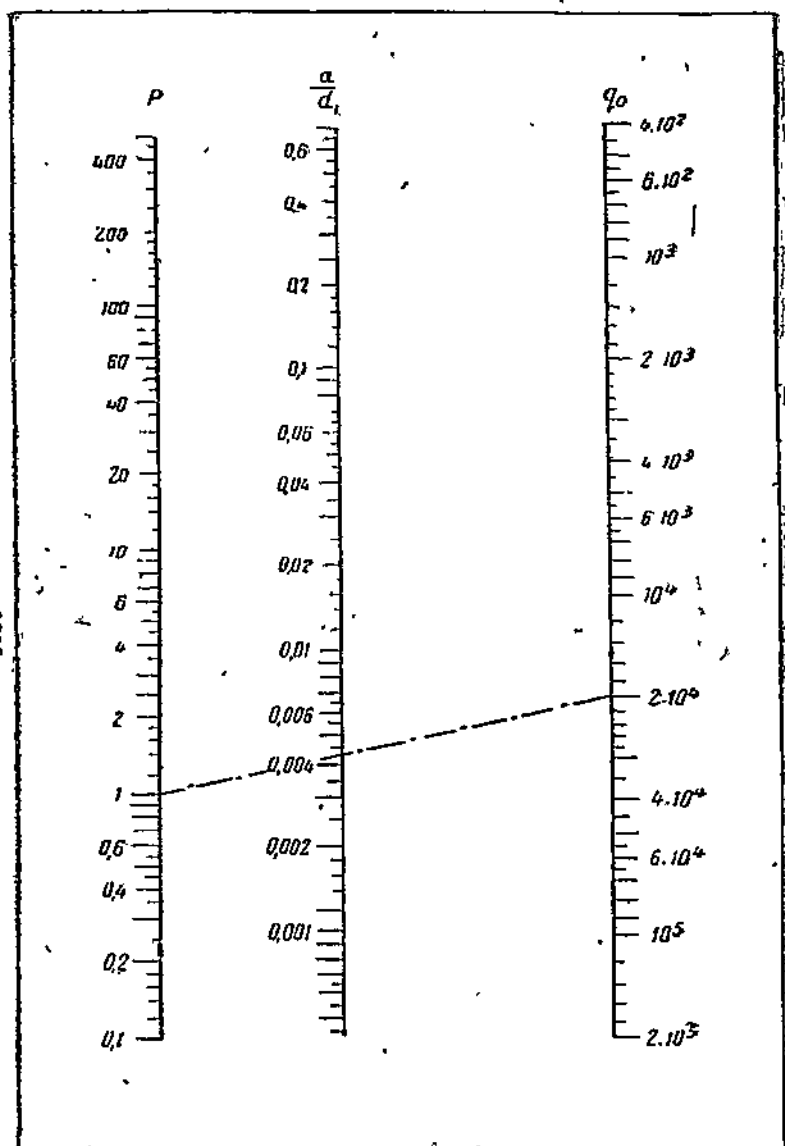
В общем случае форма поверхности каждой детали определяется главной кривизной в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: для детали 1

$$\frac{1}{r_1} \text{ и } \frac{1}{r_1'},$$

для детали 2

$$\frac{1}{r_2} \text{ и } \frac{1}{r_2'}.$$

Угол между плоскостями, проведенными нормально к общей плоскости касания и заключающими в себе радиусы кривизны r_1 и r_2 , обозначается φ .



Фиг. 168. Радиус площадки контакта a по отношению к диаметру меньшего шара.

Площадка касания получается в общем случае в виде эллипса с полуосями

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{m}{n} \cdot P} \text{ и } b = \beta \sqrt[3]{\frac{m}{n} \cdot P}; \quad (212)$$

здесь P — общая сжимающая сила;

$$m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'}}$$

$$n = \frac{4E}{3(1-\mu^2)}$$

Упругие характеристики материалов обеих деталей предположены одинаковыми.

Таблица 22

θ°	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
α	3,778	2,731	2,397	2,136	1,928	1,754	1,611	1,488	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
β	0,408	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,769	0,802	0,846	0,893	0,944	1,000

Коэффициенты α и β берутся из табл. 22, причем значение угла θ° вычисляется по уравнению

$$\cos \theta = \frac{B}{A},$$

где $A = \frac{2}{m}$;

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) \cos 2\varphi}.$$

Для промежуточных значений θ , не приведенных в табл. 22, делается линейная интерполяция.

По известным величинам a и b полуосей эллипса площадки касания определяется наибольшее давление q_0 в центре площадки контакта

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab},$$

где P — полное давление.

Если принять оси x и y соответственно по полуосям a и b площадки контакта, то главные напряжения в центре площадки контакта равны

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2\mu \cdot q_0 - (1 - 2\mu) \frac{b}{a+b} q_0; \\ \sigma_y &= -2\mu \cdot q_0 - (1 - 2\mu) \frac{a}{a+b} q_0; \\ \sigma_z &= -q_0. \end{aligned} \quad (213)$$

На концах осей эллипса площадки контакта растягивающее напряжение в радиальном направлении равно сжимающему напряжению, действующему по касательной к эллипсу.

На конце большой полуоси

$$\sigma_z = 0; \sigma_x = -\sigma_y = -(1 - 2\mu) \cdot q_0 \frac{\beta}{e^2} \left[1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arctg} e \right]$$

(опасная точка).

На конце малой полуоси

$$\sigma_z = 0; \sigma_x = -\sigma_y = -(1 - 2\mu) q_0 \cdot \frac{\beta}{e^2} \left[1 - \frac{\beta}{e} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta} \right];$$

здесь $\beta = \frac{b}{a}$ и эксцентриситет эллипса $e = \sqrt{1 - \beta^2}$.

Эти напряжения являются главными напряжениями в этих точках. Таким образом, в этих точках имеет место чистый сдвиг и наибольшее касательное напряжение:

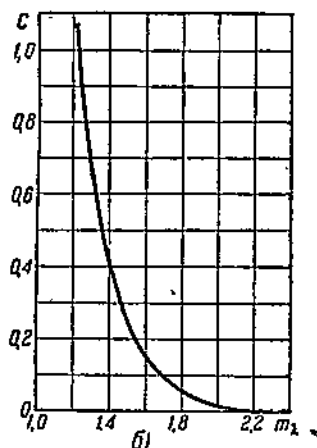
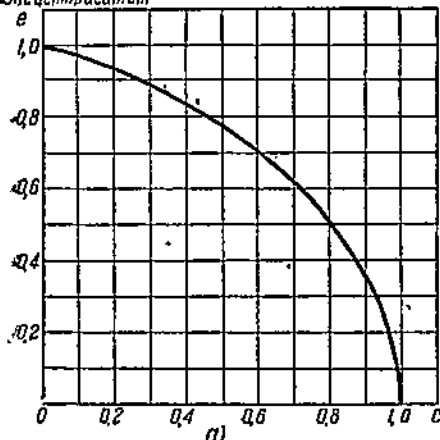
на конце большой полуоси

$$\tau_{\max} = (1 - 2\mu) \cdot q_0 \cdot \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{e} \operatorname{arctg} e - 1 \right); \quad (213')$$

на конце малой полуоси

$$\tau_{\max} = (1 - 2\mu) q_0 \cdot \frac{\beta}{e^2} \left(1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta} \right). \quad (213'')$$

Эксцентриситет



Фиг. 169. Значения C и m_k для расчета величины сближения деталей в общем случае контакта.

Эти наибольшие касательные напряжения возрастают по мере увеличения эксцентриситета эллипса, т. е. по мере приближения эллипса к вытянутой полосе (соприкосновение цилиндров). При $e < 0,89$ наибольшее $\tau_{\max}$ получается в конце большой полуоси, а при $e > 0,89$ — в центре эллипса давления.

Если рассматривать точки внутри детали, то наибольшее касательное напряжение получится в точке, лежащей на линии давления на глубине z_0 от $0,50 \cdot b$ до $0,78b$, где b — наименьшая полуось эллипса. Величина этого напряжения может вычисляться приближенно по формуле

$$\tau_{\max} = 0,6 \cdot q_0. \quad (213''')$$

Величина сближения деталей 1 и 2 (точек деталей 1 и 2, удаленных от мест контакта), получаемая в связи с деформациями при контакте, вычисляется по формуле

$$\lambda = m_{\lambda}' \sqrt[3]{\frac{r_2' - r_1'}{r_2' \cdot r_1'} \cdot \frac{P^2}{E^2}}, \quad (214)$$

где главные радиусы $r_1' > r_1$ (для детали 1) и $r_2' > r_2$ (для детали 2).

При этом предполагается, что материал обеих деталей одинаков и имеет модуль продольной упругости E и коэффициент Пуассона μ .

В формуле (214)

$$m_{\lambda}' = m_{\lambda} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1-\mu}{0,91}\right)^2}.$$

Величина m_{λ} берется по графику фиг. 169, а в зависимости от величины C , которая в свою очередь зависит от эксцентриситета e эллипса площадки контакта и может быть взята по графику фиг. 169, б.

Подробнее расчет напряжений и деформаций при контакте — см. [16].

Влияние формы поверхности деталей — см. [18].

Распределение напряжений в случае жесткого „штампа“ с круглым, эллиптическим и прямоугольным контуром — см. [19].

Влияние сил трения при контакте — см. [20].

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Тимошенко С. П., Теория упругости.
2. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, ч. I и II, ОНТИ, 1934.
3. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1940.
4. Динник А. Н., Кручение, ОНТИ, 1938.
5. Енгадычев, Сборник Института механики АН СССР, т. I, вып. II, 1941.
6. Серенсен С. В., Основы технической теории упругости, 1934.
7. Пригоровский Н. И., „Вестник инженеров и техников“ № 2, 1933 и сборник „Исследования машин“ Института машиностроения АН СССР, 1943.
8. Власов В. З., Расчет тонкостенных балок, 1937.
9. Проктор Г. Э., О центре изгиба, Приложение в книге Фенпаль „Сила и деформация“, т. 2, ОНТИ, 1936.
10. Пригоровский Н. И., Сборник ВИСХОМ „Теория, проектирование, и производство с.-х. машин“, т. VI, 1941.
11. Лебедев Н. Н., Температурные напряжения в теории упругости, ОНТИ, 1937.
12. Wahl, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 1928, p. 147.
13. Ailmen, Lazlo, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 1936, p. 305.
14. Wahl, Machine Design, 1941, Oct., p. 59.
15. Ortol, Machine Design, 1941, Febr.-nov.
16. Беляев Н. М., Сборник статей „Инженерные сооружения и строительная механика“, 1924.
17. Штаерман, Доклады Академии наук СССР (ДАН), т. XXIX, № 3 (1940).
18. Thomas, Hoersch, Univ. Illinois, Bull. 1930, vol. XXVII, № 46.
19. Штаерман, ДАН, т. XXXI № 8 (1941); т. XXXVIII, № 7 (1943).
20. Абрамов, ДАН, XXVI, (1939), № 8.
Лурье, ДАН, XXVIII (1940), № 2.
Горбунов-Посадов, ДАН (1939), № 5.
21. Леонов М. Я., журн. „Прикладная математика и механика 1939 и 1940“.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Основные понятия

По действующим нагрузкам в поперечных сечениях детали напряжения обычно вычисляются последующим формулам сопротивления материалов.

1) Растяжение или сжатие силой P .

Нормальное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma_n = \frac{P}{F}, \quad (215)$$

где F — площадь поперечного сечения нетто (т. е. с учетом ослабления отверстиями, выкружками и пр.).

2) Поперечный изгиб моментом $M_{изз}$.

Нормальное напряжение в крайних волокнах для сечения, в котором действует изгибающий момент $M_{изз}$,

$$\sigma_n = \frac{M_{изз}}{W_{изз}}, \quad (216)$$

где $W_{изз}$ — момент сопротивления сечения нетто для рассматриваемого крайнего волокна.

При определении напряжений изгиба в кривых стержнях с соотношением радиуса кривизны к высоте сечения < 5 применяются формулы кривого бруса (см. стр. 176)

$$\sigma_n = \frac{M_{изз} \cdot h}{S \cdot (r \pm h)}, \quad (216')$$

где h — расстояние от нейтральной линии до рассматриваемого волокна;
 r — радиус кривизны нейтрального слоя;

S — статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

3) Скручивание моментом $M_{кр}$ стержня круглого поперечного сечения.

Касательные напряжения в крайних точках сечения

$$\tau_n = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \quad (217)$$

где $W_{кр}$ — полярный момент сопротивления сечения нетто.

При определении напряжений от скручивания в стержнях некруглого поперечного сечения пользуются расчетными формулами, относящимися к данному типу сечения.

Напряжения, вычисленные по приведенным выше формулам сопротивления материалов, называются номинальными.

В деталях, имеющих резкие изменения контура, действительное напряжение отличается от номинального в связи с перераспределением напряжений, возникающих в этих местах. Перераспределение напряжений в зонах резкого изменения контура продольного или поперечного сечения детали носит местный характер и вызывает увеличение напряжений на поверхности. Это явление называется концентрацией напряжений.

Максимальные напряжения, возникающие в зонах концентрации, обозначаются $\sigma_{\max}$ и соответственно $\tau_{\max}$.

Отношение максимальных напряжений, вызванных концентрацией, к номинальным напряжениям в тех же точках детали называется коэффициентом концентрации напряжений.

Коэффициент концентрации нормальных напряжений обозначается

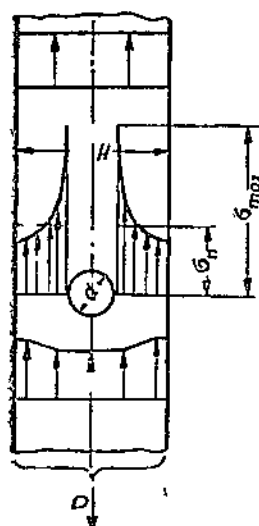
$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad (218)$$

Коэффициент концентрации касательных напряжений обозначается

$$\alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} \quad (218')$$

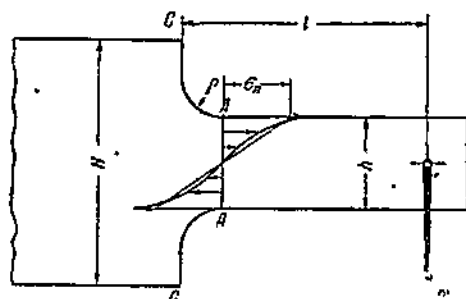
На фиг. 170 показано распределение напряжений в плоском растягиваемом стержне. Номинальное напряжение в поперечном сечении стержня, ослабленном отверстием, составляет

$$\sigma_n = \frac{P}{(H-d)b}$$



и отложено на графике распределения напряжений в ослабленном сечении. График действительного распределения напряжений получен экспериментально.

Максимальные напряжения согласно графику



Фиг. 170. Распределение напряжений в растягиваемом стержне с центральным отверстием.

Фиг. 171. Распределение нормальных напряжений в сечении по краю галтели при изгибе.

отвечают точкам, расположенным по краям отверстия — по концам диаметра, перпендикулярного направлению действия растягивающей силы P . Из условия равновесия внешних и внутренних сил очевидно, что площадь эпюры действительных напряжений равна площади прямоугольника, ограниченного сверху прямой с ординатой, равной номинальному напряжению σ_n .

Максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ в точке концентрации равно

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\sigma} \sigma_n,$$

где коэффициент концентрации $\alpha_{\sigma} > 1$ и зависит от отношения $\frac{d}{H}$.

На фиг. 171 показано распределение напряжений в плоском изгибаемом брус с резким изменением высоты сечения при сопряжении частей по круговой галтели радиусом r .

Номинальное напряжение вычисляется для места сопряжения по сечению части бруса с меньшей высотой h :

$$\sigma_n = \frac{P \cdot l}{\frac{h^3}{6}}$$

Номинальные напряжения согласно элементарной теории изгиба распределяются в сечении CC , по прямолинейному закону.

Максимальное напряжение возникает в точках A у начала сопряжения круговой галтели с прямолинейным участком балки высотой h .

На фиг. 171 показаны прямолинейная эпюра номинальных напряжений, определяемых по формулам сопротивления материалов, и криволинейная эпюра действительных напряжений, получаемая экспериментально. Статические моменты площадей, ограниченных каждой из этих эпюр, равны между собой.

Максимальное напряжение в точке A на контуре

$$\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \cdot \sigma_n,$$

где коэффициент концентрации $\alpha_\sigma > 1$ и зависит от соотношения $\frac{r}{h}$ и $\frac{H}{h}$.

На фиг. 172 даны величины касательных напряжений τ , возникающих в поперечном сечении скручиваемого вала с круговой выточкой.

Фиг. 172. Распределение касательных напряжений в поперечном сечении по кольцевой выточке при кручении.

Пунктирная линия дает касательные номинальные напряжения, величина которых согласно элементарной теории сопротивления материалов пропорциональна расстояниям их точек приложения от центра сечения вала. Сплошной линией показано действительное распределение этих касательных напряжений.

Номинальное напряжение в крайней точке ослабленного сечения вычисляется по формуле

$$\tau_n = \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot d^3}.$$

Максимальное напряжение $\tau_{\max}$, возникающее по дну кольцевой выточки во всех точках окружности ослабленного сечения, равно

$$\tau_{\max} = \alpha_\tau \cdot \tau_n.$$

Коэффициент концентрации $\alpha_\tau > 1$ и зависит от отношения $\frac{r}{d}$ и $\frac{D}{d}$.

Из условия равновесия внешних и внутренних сил моменты площадей эпюр действительных и номинальных напряжений по отношению к оси вала равны между собой.

Кроме коэффициентов концентрации, напряженное состояние детали характеризуется эпюрами распределения напряжений в поперечном сечении и вдоль контурных линий.

При построении эпюр распределения напряжений вдоль контура детали откладываются по нормальям к контуру ординаты эпюры, пропорциональные напряжениям, для которых эпюры строятся.

Действительное распределение напряжений в деталях и коэффициенты концентрации определяются или экспериментальным методом или с помощью решений теории упругости. При этом во всех случаях предполагается, что материал детали деформируется в пределах упругости, является однородным и изотропным. В связи с этим полученные таким путем коэффициенты концентрации могут быть использованы в расчете лишь с учетом особенностей поведения реального металла в зонах концентрации при действии тех или иных нагрузок.

§ 2. Концентрация напряжений в местах сопряжения галтелями

а) Плоский стержень с сопряжением частей по круговой галтели при растяжении или сжатии и при поперечном изгибе.

На фиг. 173 а даны графики для коэффициентов концентрации α_s при растяжении или сжатии. В правой верхней части графика указан способ нагружения плоского стержня и даны обозначения его размеров. В нижней части графика дана эпюра распределения напряжений по контуру одного из соотношений размеров.

Значения коэффициентов концентрации даны на графике в зависимости от отношения $\frac{p}{h}$ для ряда значений $\frac{H}{h}$.

Для значений $\frac{H}{h}$, промежуточных между теми, для которых приведены кривые, следует применять линейную интерполяцию.

Пример. Дана полоса $H = 100$ мм; $h = 70$ мм; $p = 15$ мм.

$$\text{Имеем } \frac{H}{h} = \frac{100}{70} = 1,43; \frac{p}{h} = \frac{15}{70} = 0,21.$$

Для $\frac{p}{h} = 0,21$ имеем по графику при $\frac{H}{h} = 1,20$ $\alpha_s = 1,48$; при $\frac{H}{h} = 1,50$ $\alpha_s = 1,67$.

Интерполируя, имеем для $\frac{H}{h} = 1,43$:

$$\alpha_s = 1,48 + \frac{1,67 - 1,48}{1,50 - 1,20} \cdot (1,43 - 1,20) = 1,48 + 0,15 = 1,63,$$

или округленно $\alpha_s = 1,65$.

На фиг. 173, б даны графики коэффициентов концентрации α_s при поперечном изгибе [1].

Значения коэффициентов концентрации α_s даны на графике в зависимости от отношения $\frac{p}{h}$ для ряда значений $\frac{H}{h}$.

Пользоваться диаграммой следует так же, как и диаграммой фиг. 173 а.

б) Стержень круглого поперечного сечения с сопряжением частей по круговой галтели при растяжении или сжатии и при поперечном изгибе.

В этом случае за отсутствием прямых опытных данных можно пользоваться данными, полученными для плоских стержней, применяя формулу пересчета [2]:

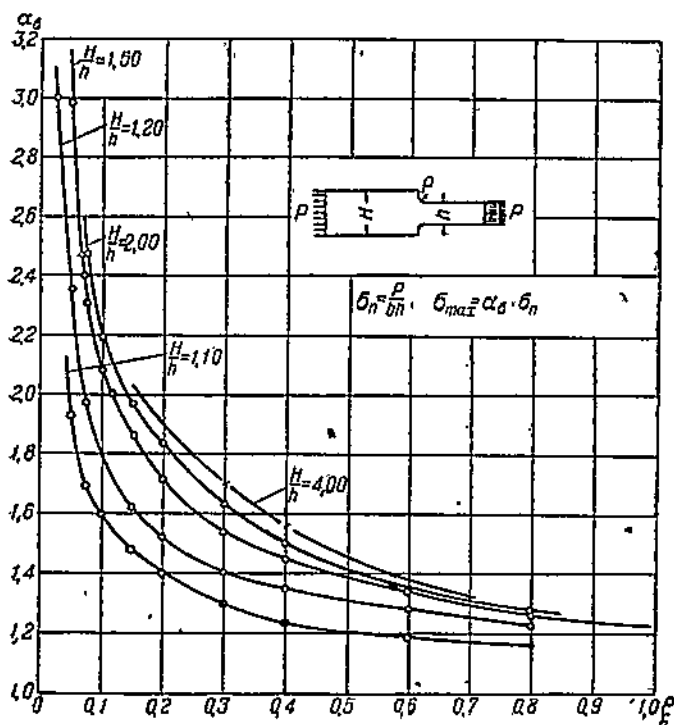
$$\alpha_{\text{круг}} = 0,75 \cdot \alpha_{\text{пл}} + 0,25 \quad (\text{формула Криша}); \quad (219)$$

здесь $\alpha_{\text{круг}}$ — искомый коэффициент концентрации для стержня круглого поперечного сечения;

$\alpha_{\text{пл}}$ — коэффициент концентрации для соответствующего плоского стержня;

Соответствующим по концентрации плоским стержнем является плоский, имеющий отношение размеров, равное отношению размеров в стержне круглого поперечного сечения, т. е.

$$\frac{H}{h} = \frac{D}{d}; \quad \frac{\rho}{H} = \frac{\rho}{d}.$$



Фиг. 173 а. Данные поляризационно-оптического исследования на бакелитовых моделях (Фрохт)
(плоский стержень при растяжении или сжатии)

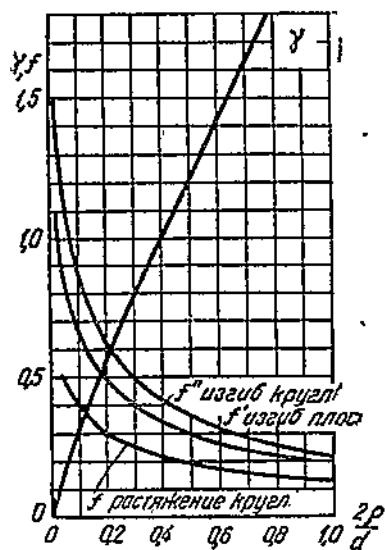
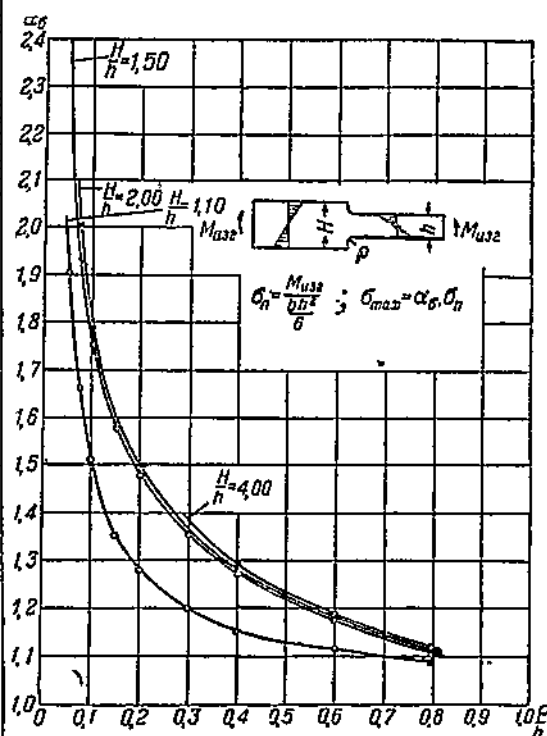
Здесь D и d — диаметры поперечных сечений сопрягаемых участков вала круглого сечения;

ρ — радиус галтели их сопряжения.

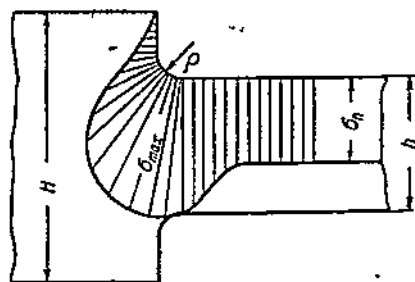
Вместо формулы (219) можно применить зависимость

$$\alpha_{\text{круг}} = \frac{\alpha_{\text{пл}}}{1 + 2ef}, \quad (219')$$

где $e = (\alpha_{\text{пл}} - 1)\gamma$. Коэффициенты γ и f определяются по фиг. 174 в зависимости от кривизны выточки [3].

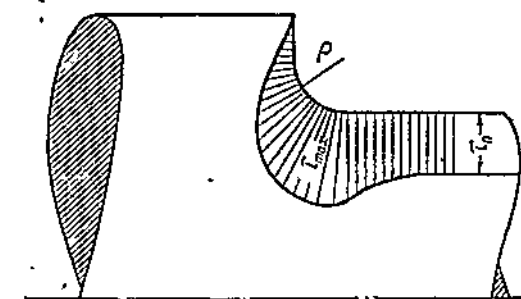
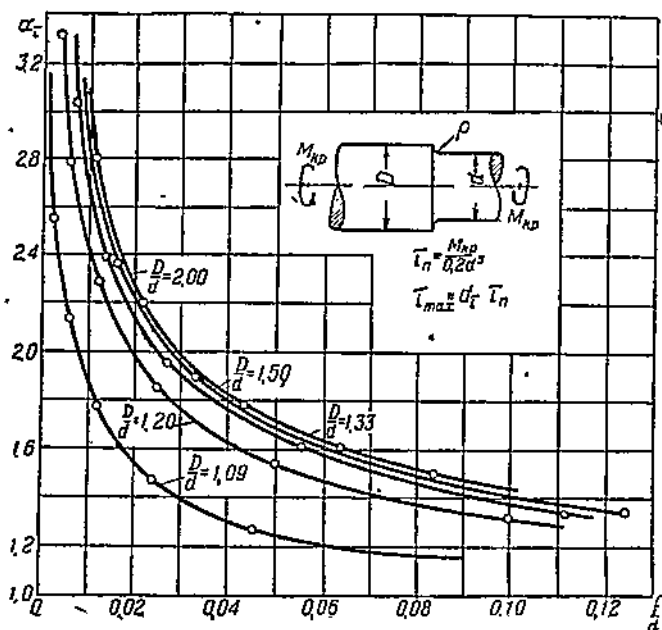


Фиг. 174. Коэффициенты для пересчета коэффициентов концентрации для стержней круглого сечения (по Н. Афанасьеву).



Фиг. 173 б. Данные поляризационно-оптического исследования на бакелитовых моделях (Фрохт)
(плоский стержень при чистом изгибе).

в) Стержень круглого поперечного сечения с сопряжением частей по круговой галтели при скручивании.



Фиг. 175. Результаты, полученные измерениями на электрической модели (Якобсен).

На фиг. 175 даны графики коэффициентов концентрации α_c при кручении [4]. В нижней части графика дана эпюра распределения касательных напряжений по контуру продольного сечения вала.

Значения коэффициентов концентрации даны в зависимости от отношения ρ/a для нескольких значений D/a . Для значений D/a , промежуточных между приведенными на графике, делается линейная интерполяция.

§ 3. Концентрация напряжений в местах надрезов и выточек

а) Плоский стержень с надрезом полукруглой формы при растяжении или сжатии и при поперечном изгибе. На фиг. 176 даны графики коэффициентов концентрации α_σ при растяжении или сжатии [1]. Из правой верхней части графика, где указаны обозначения размеров стержня, видно, что надрез имеет две параллельные грани, перпендикулярные к длине стержня и скругленные полукругом радиуса ρ . Таким образом, ширина надреза равна 2ρ .

Значения коэффициентов концентрации даны на графике в зависимости от отношения $\frac{\rho}{h}$ для ряда значений $\frac{H}{h}$. Для значений $\frac{H}{h}$, промежу-

точных между теми, для которых приведены кривые, следует применять линейную интерполяцию, как это было показано для графика фиг. 173.

На фиг. 177 даны графики коэффициентов концентрации α_σ при поперечном изгибе [1]. Значения коэффициентов концентрации α_σ даны в зависимости от $\frac{\rho}{h}$ для ряда значений $\frac{H}{h}$. Использование графика производится аналогично.

б) Стержень круглого поперечного сечения с кольцевым надрезом полукруглой формы при растяжении или сжатии и при поперечном изгибе.

В этом случае из-за отсутствия прямых опытных данных следует применять формулу пересчета [2]:

$$\alpha_{\text{круг}} = 0,75 \cdot \alpha_{\text{пл}} + 0,25 \text{ (формула Криша);}$$

здесь $\alpha_{\text{круг}}$ — коэффициент концентрации для стержня круглого поперечного сечения;

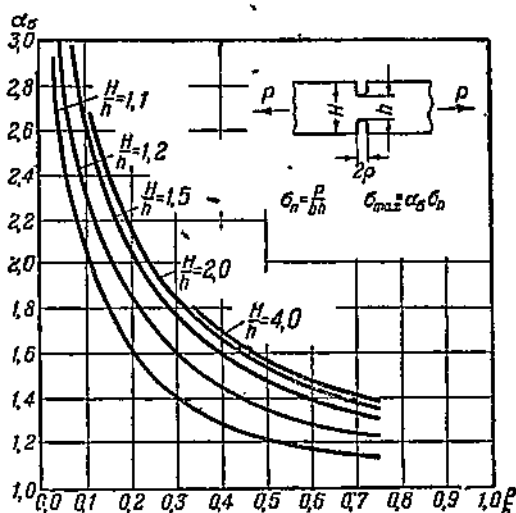
$\alpha_{\text{пл}}$ — коэффициент концентрации для соответствующего плоского стержня.

Соответствующий по конфигурации плоский стержень имеет форму продольного сечения рассматриваемого стержня круглого сечения.

Пересчет коэффициента концентрации $\alpha_{\text{пл}}$ на $\alpha_{\text{круг}}$ может быть сделан также по формуле (219').

в) Стержень круглого поперечного сечения, имеющий кольцевой надрез полукруглой формы, при скручивании.

На фиг. 178 даны графики коэффициентов концентрации α_τ при кручении [5].

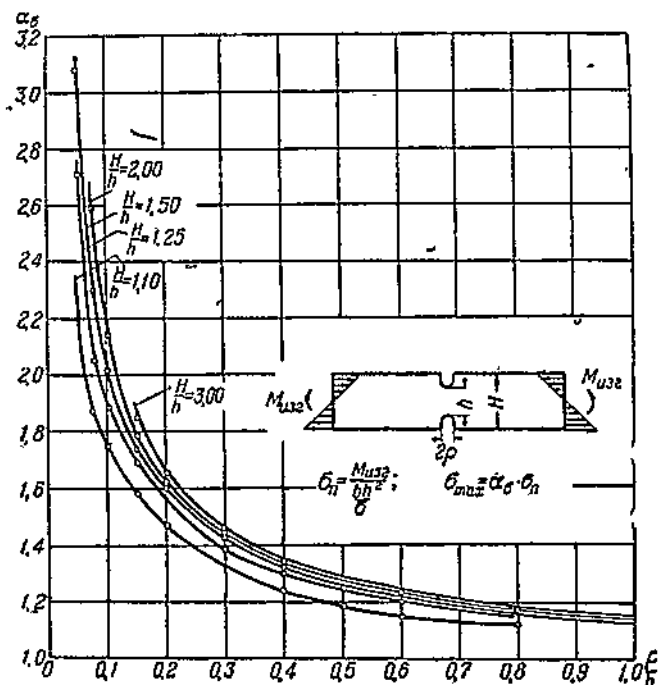


Фиг. 176. Данные поляризационно-оптических исследований на бакелитовых моделях (Фрохт).

Значения коэффициентов концентрации даны в зависимости от отношения $\frac{P}{d}$ для нескольких значений $\frac{D}{d}$. Для значений $\frac{D}{d}$, промежуточных между приведенными на графике, делается линейная интерполяция.

г) Плоский стержень с остроугольным надрезом (треугольный надрез) при растяжении или сжатии и при поперечном изгибе.

На фиг. 179 даны графики коэффициентов концентрации α_s для двух форм одностороннего надреза [5].



Фиг. 177. Данные поляризационно-оптических исследований на бакелитовых моделях (Фрохт).

Для плоского стержня с односторонним неглубоким надрезом, имеющим форму, как на фиг. 179, σ_n коэффициент концентрации может быть вычислен по формуле [6]:

$$\alpha_s = 1 + 2 \sqrt{\frac{t}{r}}. \quad (220)$$

При пользовании этой формулой номинальное напряжение должно вычисляться по полной площади поперечного сечения, т. е.

$$\sigma_n = \frac{P}{b \cdot H}.$$

Для плоского стержня с треугольным односторонним надрезом при изгибе значения коэффициентов концентрации α_s в зависимости от угла β надреза даны на фиг. 180 [6]. При этом отношение $\frac{t}{H} = 0,139$. Эти значения коэффициентов концентрации были получены для малых радиусов

кругления в основании надреза. Коэффициенты концентрации, приведенные на графике фиг. 180, в сильной степени зависят от радиуса скругления в основании надреза. Конструктору может быть рекомендовано применение увеличенного радиуса скругления, как это показано в левой части фиг. 180.

д) Круглый стержень с надрезами при растяжении или сжатии.

Для формы поверхности нарезанного растягиваемого стержня, приведенной на фиг. 181, значения коэффициентов концентрации получены теоретически Нейбером [7]. Коэффициент концентрации в этом случае вычисляется по формуле

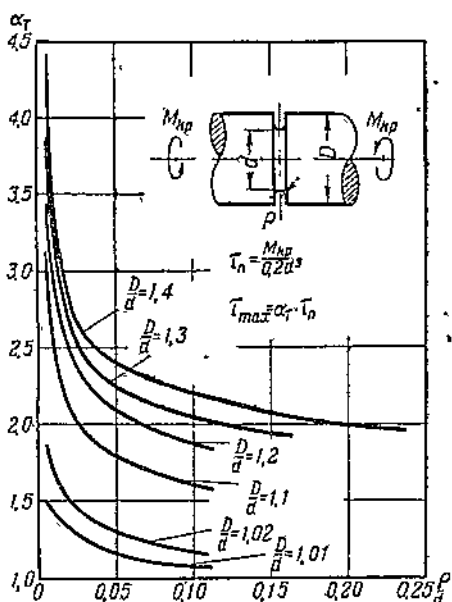
$$\alpha_s = 1 + 2 \sqrt{\gamma \frac{t}{\rho}}, \quad (220')$$

где $\frac{t}{\rho}$ — отношение глубины t нарезки к радиусу ρ закругления впадин нарезки; коэффициент γ , зависящий от отношения $\frac{b}{t}$ шага b к глубине t нарезки, определяется по графику фиг. 181.

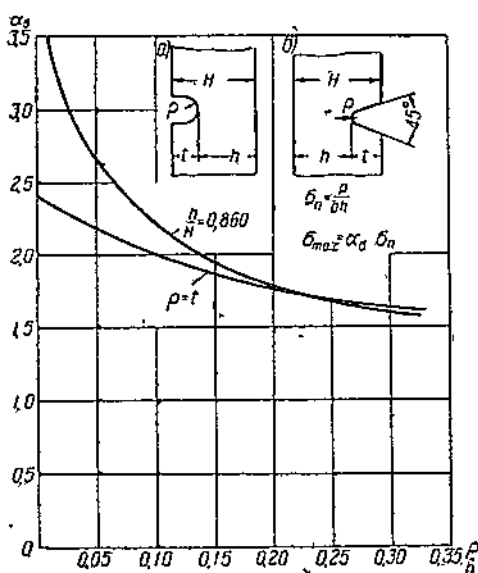
Оптические измерения Кокера и Бауда, выполненные на плоских моделях, дают для обычных форм нарезки величину α_s от 2 до 3, причем большие значения α_s относятся к нарезкам на меньших диаметрах болтов.

е) Скручивание стержня круглого поперечного сечения, нарезанного по поверхности.

При форме поверхности нарезки скручиваемого стержня, приведенной на фиг. 181, значения коэффициентов концентрации получены теоретически Нейбером [7].



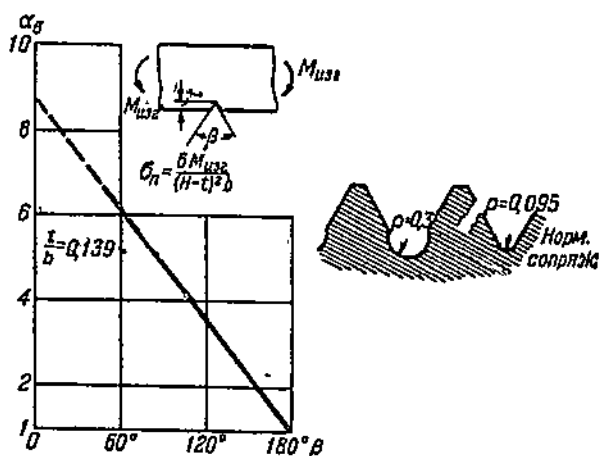
Фиг. 178. Результаты, полученные измерениями на электрической модели (Тум, Бауц).



Фиг. 179. Данные, полученные тензометрированием (Фишер) и поляризационно-оптическими измерениями (Армбрюстер).

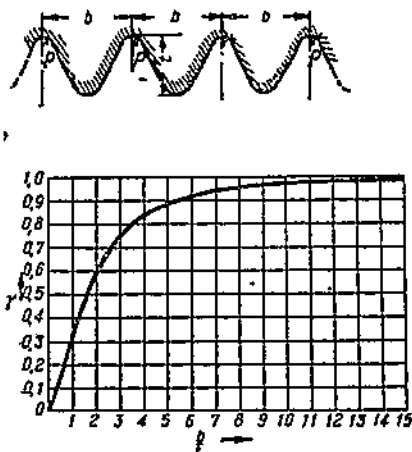
Коэффициент концентрации для этого случая вычисляется по формуле

$$\alpha_z = 1 + \sqrt{\gamma \cdot \frac{t}{\rho}},$$



Фиг. 180. Зависимость коэффициента концентрации α_z от угла β для острого надреза (по данным тензометрирования Фишера).

где $\frac{t}{\rho}$ — отношение глубины нарезки к радиусу закругления впадины нарезки; коэффициент γ , зависящий от отношения $\frac{b}{t}$, определяется по графику фиг. 181.



Фиг. 181. Влияние формы и глубины нарезки (по расчетным данным Нейбера).

Модель по схемам 2 и 3 соответствует ступице, снабженной разгружающей выточкой; схема 4 соответствует ступице с закругленным внутренним краем.

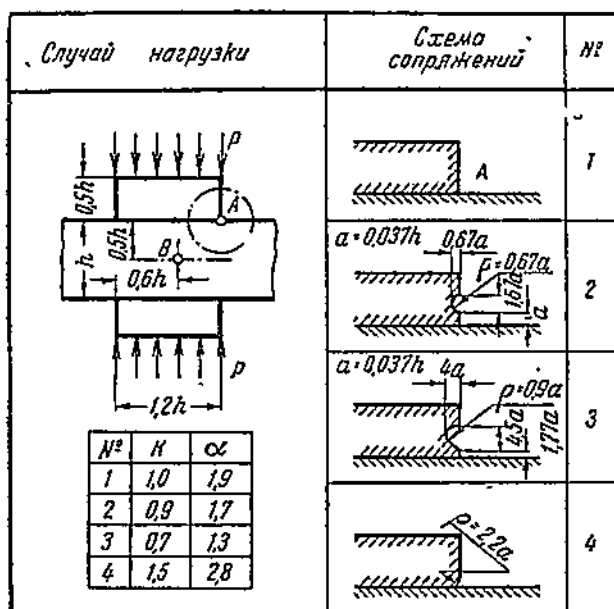
§ 4. Концентрация напряжений в валах с напрессованными деталями

Концентрация напряжений в валах при напрессованных деталях, вызванная самым натягом без изгиба, может быть лишь оценена по данным поляризационно-оптических испытаний на плоских моделях.

На фиг. 182 даны формы выреза в плоской модели ступицы, напрессованной на гладкий вал. Приведенные схемы плоских моделей соответствуют формам, получаемым в продольном сечении гладкого вала с напрессованной деталью.

Модель по схеме 1 соответствует острому внутреннему краю ступицы.

Значения коэффициента K дают относительные величины напряжений $\tau_{\max}$ в точке A плоской модели, соответствующей, валу.



Фиг. 182. Влияние формы выреза ступицы (для плоской модели по поляризационно-оптическим измерениям Пригоровского).

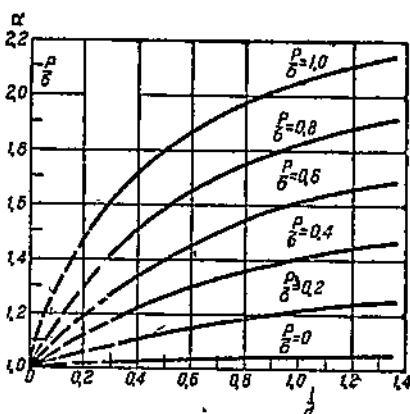
Для определения абсолютной величины $\tau_{\max}$ в этой точке плоской модели необходимо номинальное давление p , приходящееся на единицу толщины модели, умножить на значения α , приведенные на фиг. 182 [8]:

$$(A) \tau_{\max} = \alpha \cdot p.$$

На фиг. 182 даны значения коэффициентов концентрации α , отвечающие приведенным типам ступиц. Эти коэффициенты позволяют определить максимальные касательные напряжения, возникающие в вале под действием нормальных давлений p напрессованной на вал детали:

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{p}.$$

На фиг. 183 даны значения коэффициентов концентрации для напряжений в вале в сечении по краю ступицы от нагиба при наличии напрессовки. Коэффициенты даны в зависимости от отношения длины l ступицы к диаметру d вала и для разных отношений нормальных давлений p к номинальным напря-



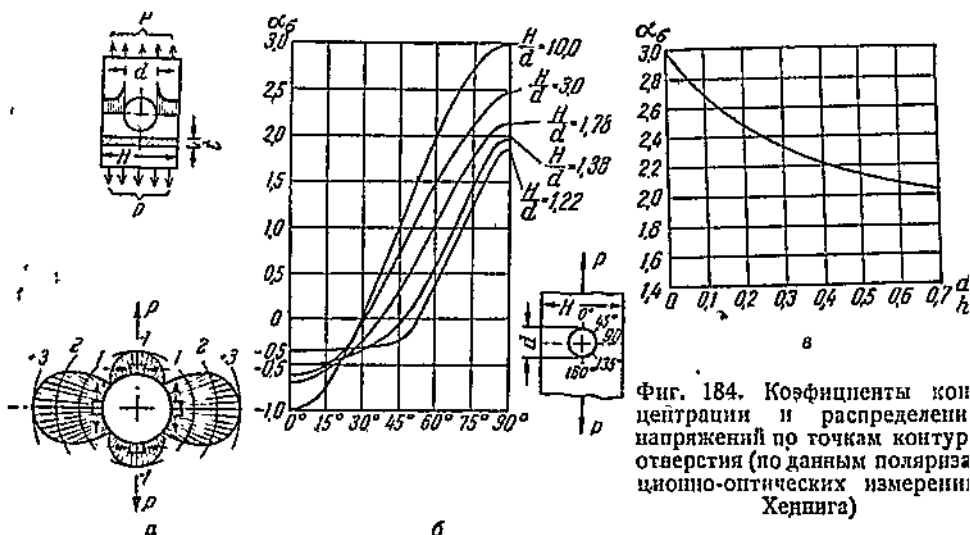
Фиг. 183. Изгиб вала при наличии напрессованной детали (поляризационно-оптические измерения и измерения поперечной деформации Петерсона и Вая).

жениям изгиба с [9]. Край ступицы острый. Приведенные значения коэффициентов получены поляризационно-оптическим методом для плоской модели.

§ 5. Концентрация напряжений возле поперечных отверстий

а) Растяжение и изгиб стержня с отверстием

При наличии круглого отверстия в стержне при растяжении наибольшие напряжения возникают у края отверстия по концам диаметра, расположенного перпендикулярно к направлению нагрузки.



Фиг. 184. Коэффициенты концентрации и распределения напряжений по точкам контур отверстия (по данным поляризационно-оптических измерений Хеннига)

На фиг. 184,а показано распределение нормальных напряжений, действующих вдоль контура отверстия, для точек, лежащих на контуре. На фиг. 184,б даны кривые растяжения нормальных напряжений при различных отношениях $\frac{d}{H}$ диаметра отверстия к ширине стержня.

Значения коэффициентов концентрации даны на фиг. 184,в в зависимости от отношения диаметра отверстия к ширине стержня [10].

Если круглое отверстие находится не на оси стержня, то значения наибольших напряжений следует вычислять с помощью графика фиг. 185. Значения коэффициента концентрации, получаемые для точки III по графику меньше нуля, показывают, что в соответствующих случаях в точке III возникают при растяжении полосы, сжимающие напряжения.

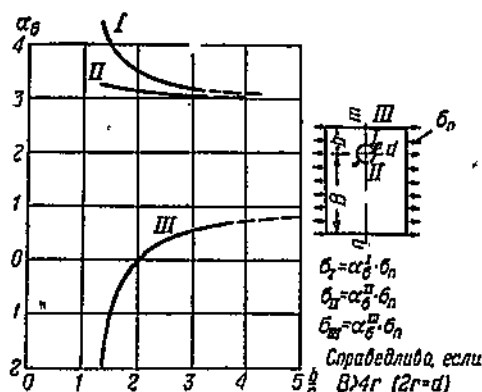
Концентрация напряжения в плоском стержне с эллиптическим поперечным отверстием в зависимости от отношения полуосей эллипса дана на фиг. 186 [11]. Данные фигуры соответствуют случаю, когда размеры отверстия малы по сравнению с шириной стержня ($\frac{H}{2a} \gg 10$).

Если отверстие имеет некруглую форму, то коэффициент концентрации может быть найден как для отверстия эллиптического, имеющего по концам диаметра, расположенного перпендикулярно к направлению

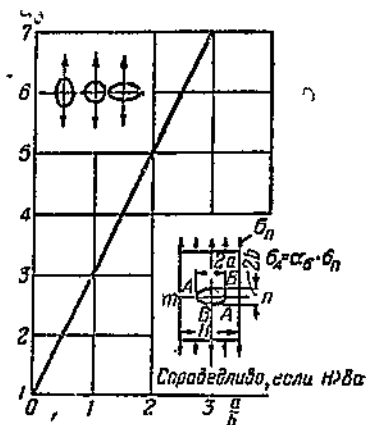
нагрузки, тот же радиус кривизны, что и в заданном отверстии. Это иллюстрируется фиг. 187. В соответствии с этим ось эллипса, расположенная в направлении нагрузки, определяется по формуле

$$b = \sqrt{a \cdot \rho}, \quad (221)$$

где a — ширина отверстия; ρ — радиус его кривизны по концам.



Фиг. 185. Нецентральное круглое отверстие в растягиваемой полосе (по данным Тимошенко).



Фиг. 186. Влияние электрического отверстия в растягиваемой полосе (по данным Инглиса).

Для случая изгиба плоского стержня с поперечным отверстием, расположенным по оси балки, коэффициент концентрации для напряжений на контуре отверстия определяется по графику фиг. 188. При этом нормальное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \frac{M_{изг} \cdot y_A}{J_x},$$

где y_A — расстояние от оси балки до точки A , в которой определяется концентрация напряжения;

J_x — момент инерции поперечного сечения нетто по отношению к нейтральной линии.

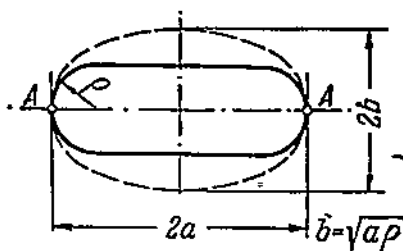
Значения коэффициентов концентрации, приведенные на графике фиг. 188, могут быть с достаточной точностью использованы при условии, что диаметр отверстия мал по сравнению с высотой балки ($d \leq \frac{1}{3} H$).

Если отверстие расположено не по оси балки, то коэффициент концентрации может определяться по следующим формулам [12]:

В точке A (фиг. 187)

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{b+h} \left[\left(b+h \right) + \frac{b+h}{m} \right], \quad (222)$$

где $m = \frac{a}{b}$.



Фиг. 187. Определение эквивалентного эллиптического отверстия.

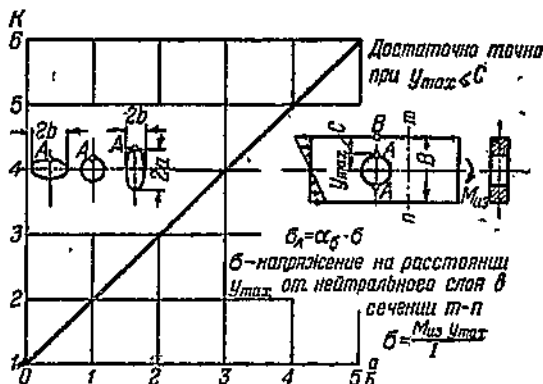
В случае круглого отверстия, т. е. при $a = b$,

$$\alpha_z = \frac{1}{b + \frac{1}{2}h} (2b + \frac{1}{2}3h). \quad (222')$$

При применении этих формул номинальное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \frac{M_{изг} (h + \frac{b}{2})}{J_z},$$

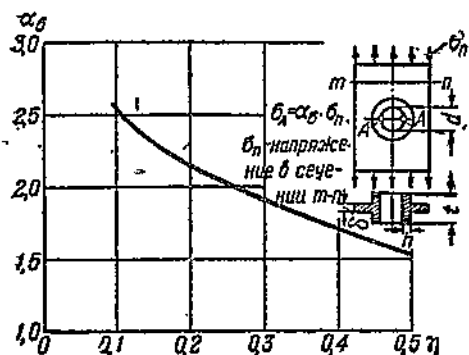
где J_z — момент инерции сечения нетто по отношению к нейтральной линии.



Фиг. 188. Влияние отверстия в балке.

В точке B

$$\alpha_z = \frac{1}{h - b} \left[(h - b) + \frac{2h - b}{m} \right], \quad (222'')$$



и для круглого отверстия, т. е. при $a = b$,

$$\alpha_z = \frac{1}{h - b} (3h - 2b). \quad (222''')$$

Номинальное напряжение вычисляется для точки B, лежащей на расстоянии $(h - b)$ от оси балки,

$$\sigma_n = \frac{M_{изг} \cdot (h - b)}{J_z}.$$

В точке C

$$\alpha_\sigma = 1.0.$$

Фиг. 189. Стержень с отверстием, усиленный подкрепляющим кольцом (по Тимошенко).

Эти формулы достаточно точны, если между точкой A и верхним краем балки имеется расстояние не меньше одной четверти высоты сечения.

Если отверстие в растянутом плоском стержне усилено подкрепляющим кольцом, как показано на фиг. 189, то коэффициент концентрации

определяется по графику на этой же фигуре в зависимости от величины [13,14]

$$\eta = \frac{(t - \delta) \cdot h}{\delta \cdot d},$$

т. е. в зависимости от отношения площади сечения подкрепляющего кольца к площади отверстия.

При ослаблении плоского стержня квадратным отверстием согласно фиг. 190,а коэффициент концентрации α_z составит [14]

$$\alpha_z = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (\text{формула Инглиса}), \quad (223)$$

где $2a$ — диагональ квадрата;

ρ — радиус закругления угла.

При расположении отверстия согласно фиг. 190,б коэффициент концентрации α_z составляет

$$\alpha_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left(1 + \frac{\sqrt{2a + 2\rho}}{\sqrt{a - \rho}} \right) \quad (\text{формула Инглиса}). \quad (223')$$

Последние две формулы достаточно точны в интервале

$$0 < \frac{2a}{H} < 0,5.$$

Если плоская балка имеет прорезь по одной из форм, показанных на фиг. 190,в, с центром прорези на нейтральной оси, то наибольшая концентрация напряжений получается в точке I, в середине или в начале закругления. Для определения наибольшего напряжения по контуру выреза следует пользоваться данными фиг. 190,в [16].

Номинальное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \frac{M_{изг}}{J} \cdot y_{\max}.$$

Напряжения в точках I, II, III равны вычисленному таким образом номинальному напряжению, умноженному на соответствующий коэффициент α_z , взятый из таблицы фиг. 190,в.

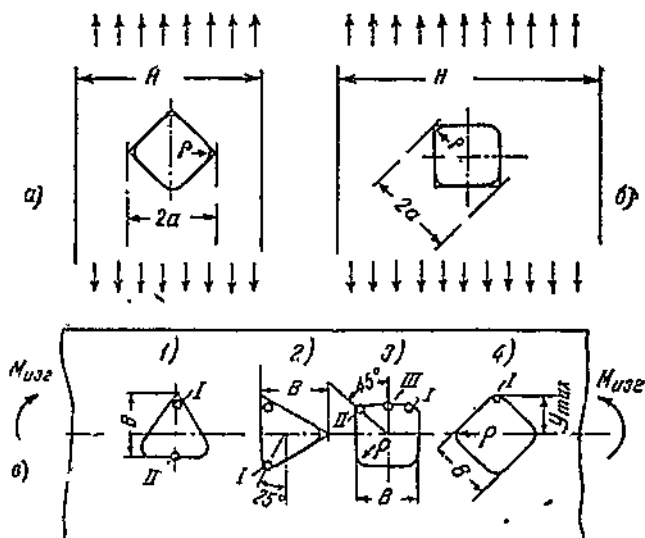
Чтобы получить наибольшее облегчение балки и не превысить наибольшего нормального напряжения в крайних волокнах балки, следует наметить наибольший размер отверстия из условия

$$y_{\max} = \frac{H}{2 \cdot \alpha_z},$$

где H — высота балки;

α_z — соответствующий коэффициент концентрации.

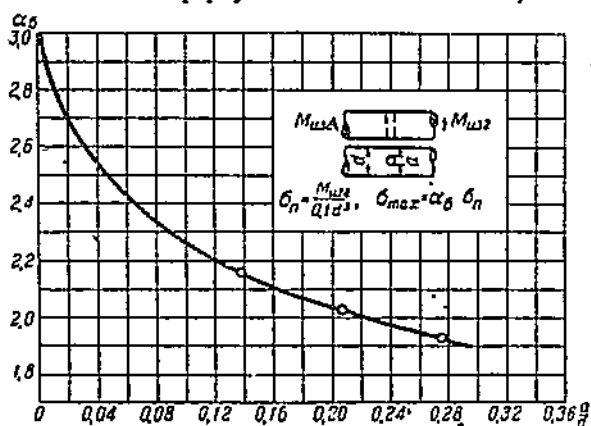
При изгибе стержня круглого поперечного сечения, имеющего поперечное круглое отверстие, расположенное, как показано на фиг. 191, наибольшие напряжения возникают у края отверстия, в точках, лежащих на концах диаметра, перпендикулярного к направлению оси стержня. Величины коэффициентов концентрации даны на графике фиг. 191 в зависимости отношения $\frac{a}{d}$ — диаметра a отверстия к диаметру d поперечного сечения вала. При этом номинальное напряжение следует вычислять исходя из сечения нетто.



Значения α_σ					
		1	2	3	4
$S =$		0,059B	0,059B	0,128B	0,128B
Точки	I	4,40	3,5	1,63	3,3
	II	1,12	—	1,32	—
	III	—	—	0,60	—

Достаточно точно, если $C \geq y_{\max}$.

Фиг. 190. Квадратное и треугольное отверстие (по расчетным формулам Инглиса и Наймана).

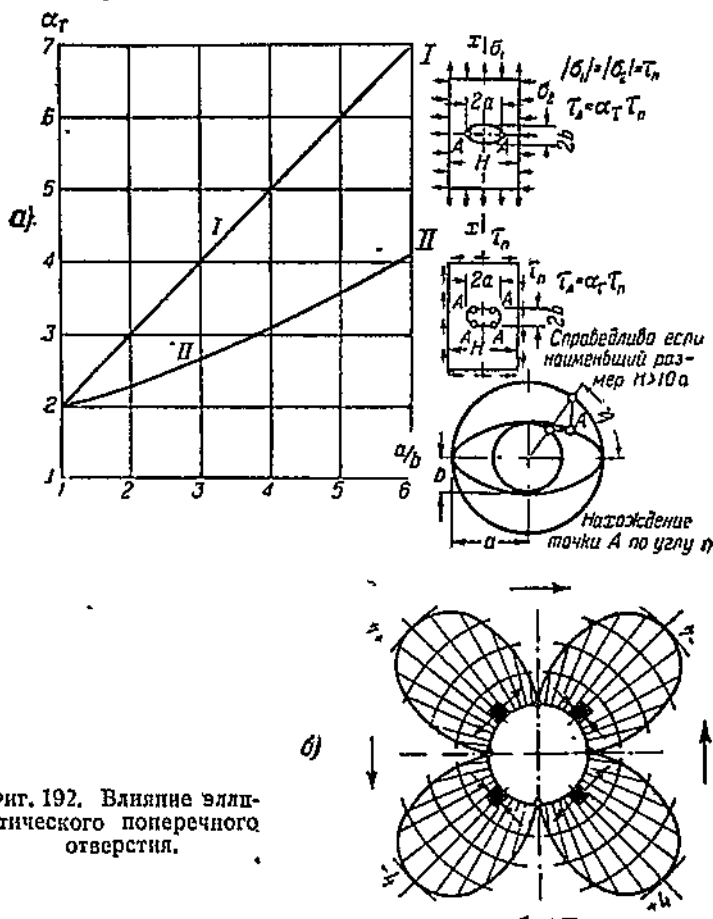


Фиг. 191. Влияние поперечного отверстия в стержне круглого сечения при изгибе (по данным тензометрирования Петерсона и Валя).

2.6) Скручивание вала, имеющего поперечное отверстие

Теоретические и экспериментальные данные для определения коэффициентов концентрации при большой величине отношения диаметра a отверстия к диаметру d вала отсутствуют.

Если $\frac{a}{d} \leq \frac{1}{5}$, то коэффициент концентрации находят, исходя из пред-



Фиг. 192. Влияние эллиптического поперечного отверстия.

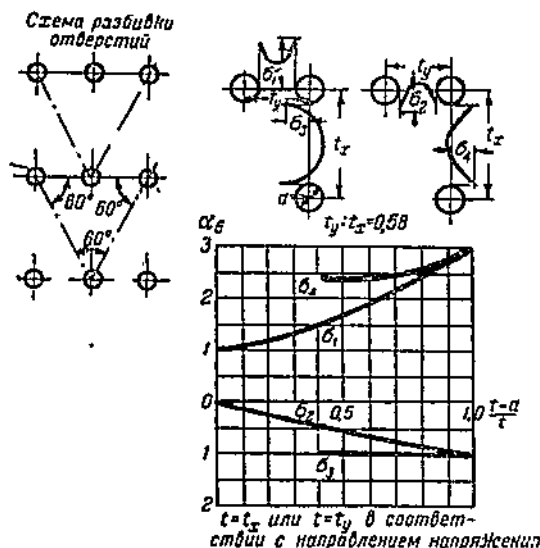
положения, что в плоском поле напряжений, которые возникают в точках, расположенных на поверхности вала, вызывается перераспределение напряжений в связи с наличием отверстия малого диаметра. В этих точках главные растягивающие и сжимающие напряжения σ_1 и σ_2 направлены под углом $\pm 45^\circ$ к оси вала и равны по величине номинальному касательному напряжению

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_n = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}.$$

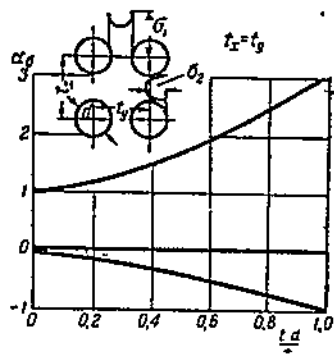
Поэтому коэффициент концентрации для вала, имеющего поперечное отверстие малого диаметра, может определяться как в полосе с отверстием, растягиваемой и сжимаемой по двум взаимно перпендикулярным направлениям, равными по величине напряжениями σ_1 и σ_2 .

Для этого случая коэффициент концентрации при круглом отверстии равен $\alpha_c = 2$. Если отверстие имеет эллиптическую форму, то коэффициент концентрации находится по графику фиг. 192 в зависимости от отношения $\frac{a}{b}$ полуосей эллипсов.

Прямой I (фиг. 192) следует пользоваться, если полуоси эллипса поперечного отверстия эллиптической формы расположены под углом 45° к оси вала. Кривой II (фиг. 192) следует пользоваться, если поперечное эллиптическое отверстие расположено большей полуосью вдоль оси вала или вдоль поперечного сечения вала.



Фиг. 193. Концентрация напряжений возле отверстий котельной решетки (по данным Зибеля).



Фиг. 194. Концентрация напряжений возле отверстий котельной решетки (по данным Зибеля).

Наибольшее напряжение возникает в точках А поперечного отверстия вала и вычисляется с помощью графика фиг. 192 по формуле

$$\tau_{\max} = \alpha_c \cdot \frac{M_{кр}}{W_{кр}}.$$

Полярный момент сопротивления берется для полного сечения.

в) Концентрации напряжений в листе с большим числом круглых поперечных отверстий

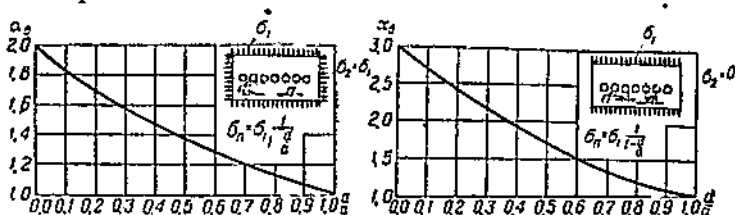
Если в листе имеется большое число круглых отверстий (котельная решетка) с разметкой их центров по равностороннему треугольнику, то коэффициент концентрации находится по графику фиг. 193. Максимально-возможный коэффициент концентрации в этом случае составляет $\alpha_c = 3,0$.

Для разметки центров отверстий по квадрату значения коэффициентов концентрации даны на графике фиг. 194.

Значения коэффициентов концентрации в обоих графиках даны в зависимости от отношения $\frac{t-d}{t}$, где t — шаг отверстий, d — их диаметр.

На фиг. 195 даны значения коэффициентов концентрации в случае рядного расположения круглых отверстий [18]. При этом расчет номиналь-

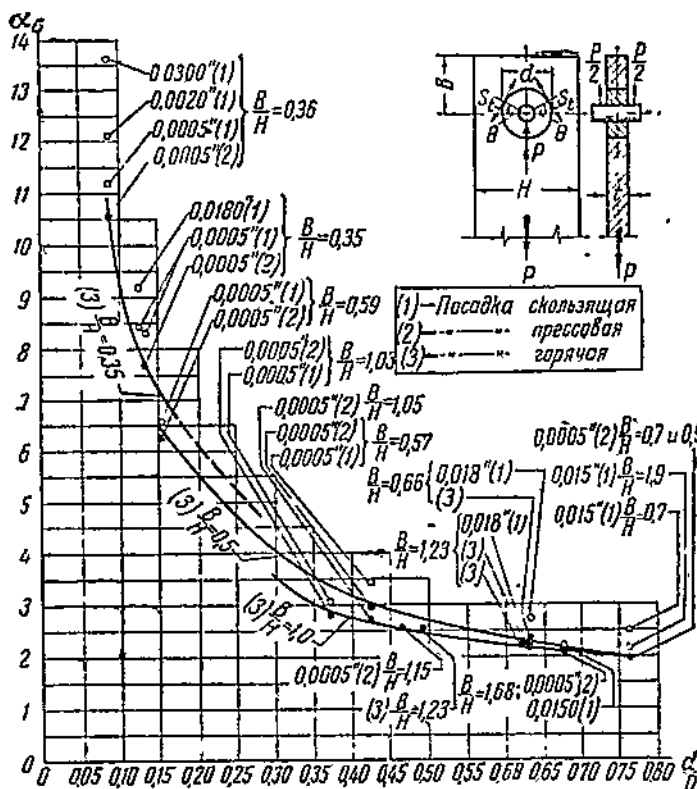
ных напряжений делается с учетом ослабления листа отверстиями, как указано на фиг. 195.



Фиг. 195. Концентрация напряжений в листе с рядным расположением отверстий (по расчетным данным Хьютера).

§ 6. Концентрация напряжений в проушинах

Если растягивающее усилие P концом полосы передается на валик, который входит в отверстие полосы, то наибольшие растягивающие напряжения σ_1 возникают на контуре отверстия, как показано на фиг. 144.



Фиг. 196. Концентрация напряжений в конце растягиваемой полосы, закрепленной болтом (по поляризационно-оптическим измерениям Фрохта).

Значения коэффициентов концентрации α_s даны на графике фиг. 196 в зависимости от отношения $\frac{d}{H}$ диаметра отверстия к ширине полосы.

[19]. Значения α даны для нескольких отношений $\frac{B}{H}$ длины конца полосы за отверстием к ширине полосы.

Кроме того, на графике фиг. 196 приведены данные для нескольких отдельных случаев посадки валика в отверстие модели.

Наибольшее растягивающее напряжение

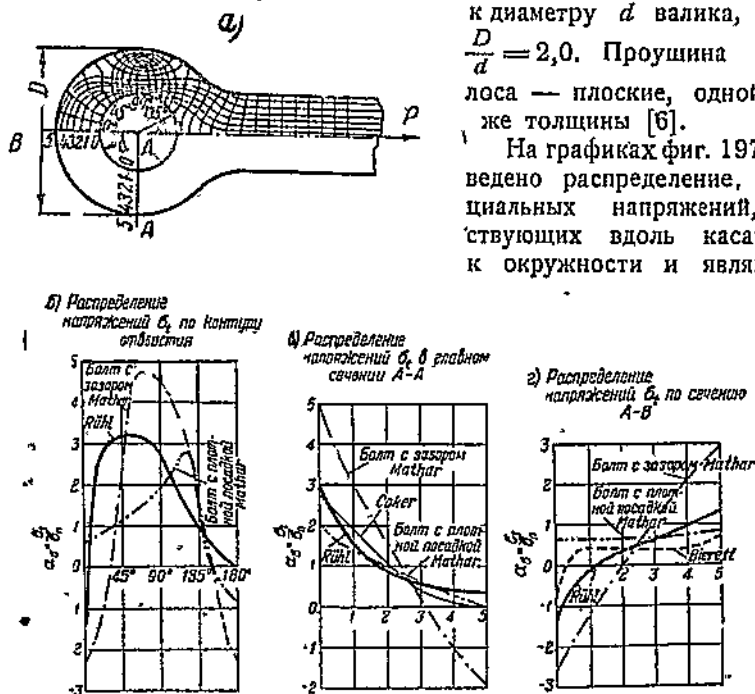
$$\sigma_1 = \alpha \cdot \sigma_n$$

где

$$\sigma_n = \frac{P}{(H-a) \cdot b}$$

На фиг. 197 приведены данные нескольких исследований распределения напряжений в проушине при отношении диаметра D проушины к диаметру d валика, равном $\frac{D}{d} = 2,0$. Прουшина и полоса — плоские, одной и той же толщины [6].

На графиках фиг. 197, а приведено распределение тангенциальных напряжений, действующих вдоль касательной к окружности и являющихся



Фиг. 197. Распределение напряжений в проушине.

наибольшими для проушины. На фиг. 197, б дано распределение этих напряжений вдоль контура отверстия, на фиг. 197, в — по поперечному сечению проушины, перпендикулярному к направлению силы, и на фиг. 197, г — распределение напряжений по поперечному сечению проушины, взятому по линии действия силы. Напряжения равны коэффициенту, взятому по графику, умноженному на значение номинального напряжения, вычисляемого по формуле

$$\sigma_n = \frac{P}{(D-d) \cdot b}$$

здесь P — усилие в тяге, а b — ширины проушины и тяги.

Кривые даны при наличии зазора между пальцем и проушиной и при плотной посадке. Данные приводятся по исследованиям нескольких авторов [6].

Для тонкостенных проушин приводимые данные неприемлемы.

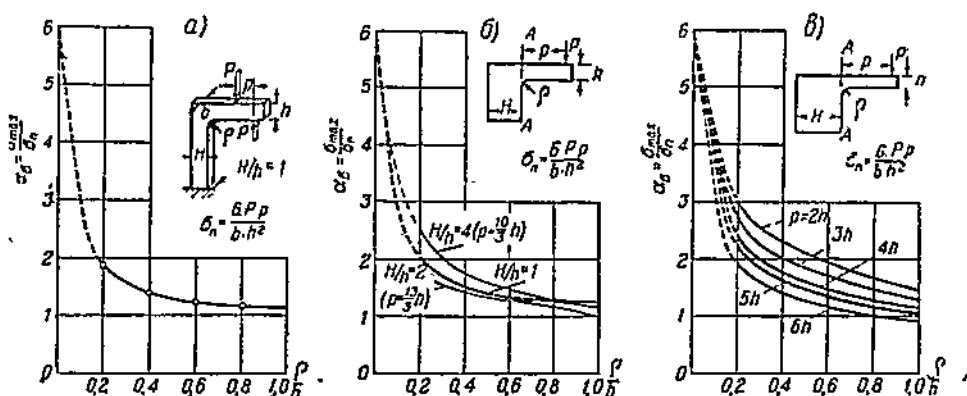
§ 7. Концентрация напряжений во входящих углах

а) Входящие углы при сопряжении концов плоских стержней (жесткий угол)

На фиг. 198 [6] даны графики для коэффициентов концентрации α_σ в случае чистого изгиба и при изгибе с поперечной силой. Номинальное напряжение σ_n вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \frac{M_{изг}}{bh^2},$$

где b — толщина плоских стержней.



Фиг. 198. Концентрация напряжений при сопряжении концов плоских стержней (по данным поляризационно-оптических измерений Виддерия, Кеттенакера и Курцхальса).

График фиг. 198, а получен для случая чистого изгиба с моментом $M_{изг} = P \cdot r$. Высота сечения обоих концов стержней одна и та же и равна h .

Графики фиг. 198, б и 198, в получены для изгиба с поперечной силой. Расчет номинальных напряжений делается для сечения А—А, где действует изгибающий момент $M_{изг} = P \cdot r$. Максимальное напряжение возникает на криволинейном контуре входящего угла и равно

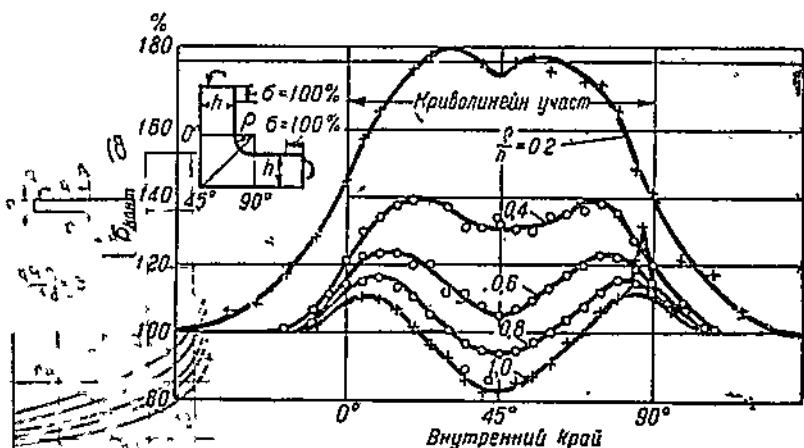
$$\sigma_{max} = \alpha_\sigma \cdot \sigma_n.$$

Графики фиг. 198, б получены для трех значений $\frac{H}{h} = 1; 2; 4$, так что наибольшие напряжения возникают по конусу стержня, имеющего высоту сечения h .

Графики фиг. 198, в получены для отношения $\frac{H}{h} = 4$ при нескольких отношениях $\frac{P}{h}$ — плеча силы к высоте опасного сечения.

по графику фиг. 198 для чистого изгиба и одному из графиков для изгиба с поперечной силой, отвечающему одному из значений $\frac{P}{h}$, можно получить, применяя пропорциональный пересчет, величину коэффициента концентрации α_s для любого заданного отношения $\frac{P}{h}$.

Распределение нормальных напряжений по криволинейному контуру входящего угла (внутреннего края) в случае чистого изгиба дано на фиг. 199 для нескольких значений $\frac{P}{h}$. Значения напряжений выражены в процентах от номинального напряжения, равного наибольшему напряжению в крайних волокнах в сечении, достаточно удаленном от места закругления.



Фиг. 199. Распределение напряжений по криволинейному контуру входящего угла (по поляризационно-оптическим измерениям Виддерна).

Из графиков фиг. 199, наибольшие напряжения возникают в двух точках криволинейного контура, лежащих на радиусах, наклоненных к поперечным сечениям под углом от 10 до 35° в зависимости от величины $\frac{P}{h}$.

Входящие углы у основания зуба

При давлении на зуб в основании зуба со стороны приложенной нагрузки возникают растягивающие напряжения, а со стороны противоположной нагрузки, — напряжения сжатия.

Если противоположные грани зуба между собой параллельны ($\beta = 0$) и сосредоточенное давление P направлено по нормали к грани зуба ($\varphi = 90^\circ$) и грань зуба перпендикулярна к грани основания зуба ($\alpha = 0$), то коэффициент концентрации для растягивающих напряжений может быть взят по графику фиг. 200 [20]. Значения коэффициентов концентрации α_s даны в зависимости от отношения $\frac{P}{r}$ — радиуса закругления в основании зуба к ширине зуба для нескольких значений $\frac{h}{r}$, т. е. отношений расчетного

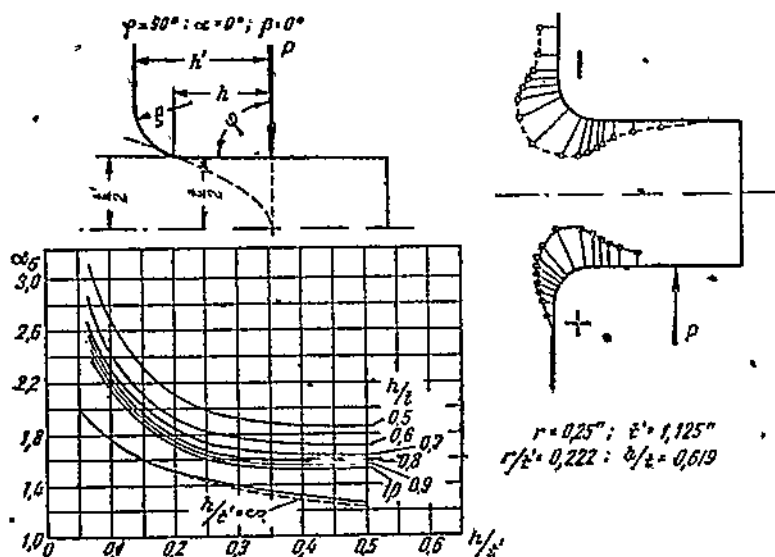
плеча силы P к расчетной ширине зуба. Нижняя кривая для $\frac{h}{t} = \infty$ дает значения коэффициентов концентрации при чистом изгибе.

Расчетное плечо h силы P и расчетная ширина t зуба определяются путем вчерчивания в профиль зуба квадратной параболы с вершиной в точке пересечения линий действия силы со средней линией зуба. Точки касания этой параболы с профилем зуба определяют величины h и t .

Наибольшее напряжение в основании зуба

$$\sigma_{\max} = \alpha_s \cdot \frac{P \cdot h}{b \cdot \frac{t^2}{6}},$$

где b — толщина зуба, а P — полное давление на зуб.



Фиг. 200. Концентрация напряжений во входящем углу зуба (по поляризационно-оптическим измерениям Долана).

Изменение коэффициента концентрации для растягивающих напряжений в зависимости от угла β при разных $\frac{h}{t}$ и при $\frac{P}{t} = 0,225$ дано на графике фиг. 201.

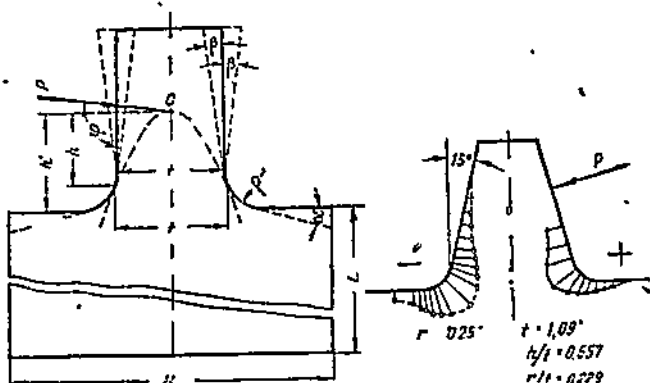
Обозначения углов φ , β и α даны на схеме в этой фигуре. Номинальное напряжение при пользовании этим графиком должно вычисляться по формуле

$$\sigma_n = \frac{P \cdot h}{b \cdot \frac{t^2}{6}}.$$

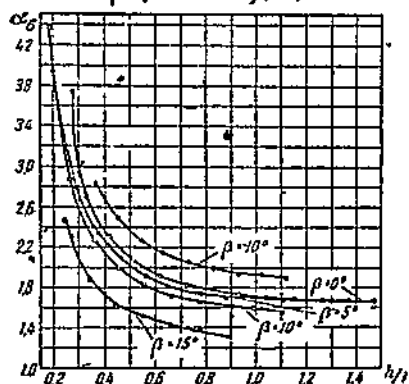
Эпюры растягивающих и сжимающих напряжений для отношения размеров $\frac{P}{t} = 0,229$ и $\frac{h}{t} = 0,557$ даны в правой части фиг. 200.

Значения коэффициентов концентрации α_s в зависимости от $\frac{h}{t}$ для нескольких отношений $\frac{P}{t}$ при $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$ даны на графике фиг. 202.

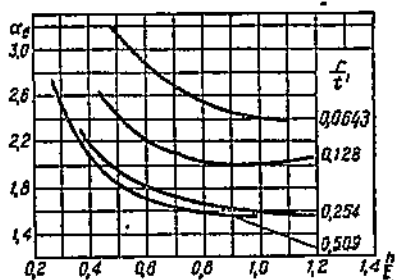
Значения коэффициентов концентрации для сжимающих напряжений, возникающих на другой стороне зуба, не приводятся, так как расчет зуба в шестернях и звездочках ведется по напряжениям растяжения.



$\varphi = 50^\circ$ $\alpha = 0^\circ$ $r/t = 0.225$



Фиг. 201. Концентрация напряжений во входящем углу зуба (по поляризационно-оптическим измерениям Долана)



Фиг. 202. Концентрация напряжений во входящем углу зуба (по поляризационно-оптическим измерениям Долана).

§ 8. Концентрация напряжений, вызываемая входящими углами в поперечном сечении скручиваемого стержня и аксиальными отверстиями

а) Вал круглого сечения со шпоночным пазом

При наличии шпоночного паза в скручиваемом вале круглого поперечного сечения возникает концентрация касательных напряжений в поперечном сечении.

Для шпонки круглого сечения диаметром 2ρ при отношении радиуса выреза к диаметру вала $\frac{\rho}{d} \leq 0,2$ коэффициент концентрации составляет

$$\alpha_\tau \approx 2,0.$$

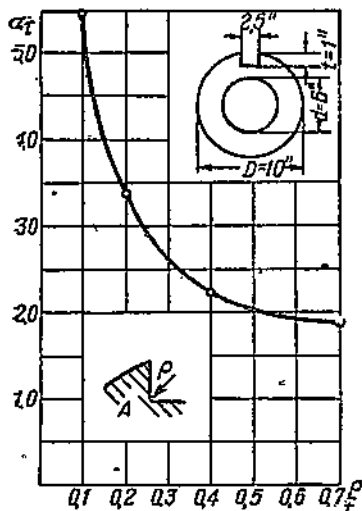
Для шпоночной канавки прямоугольного сечения значения коэффициентов концентрации α_t приведены на фиг. 203 [21].

Значения α_t даны в зависимости от отношения радиуса закругления входящего угла к глубине шпоночной канавки. При этом отношение ширины шпоночной канавки к ее глубине равно 2,5, а отношение глубины шпоночной канавки к диаметру D вала равно 0,1. Приведенные данные получены для полого вала с отношением диаметров $\frac{D}{d} = 1,7$.

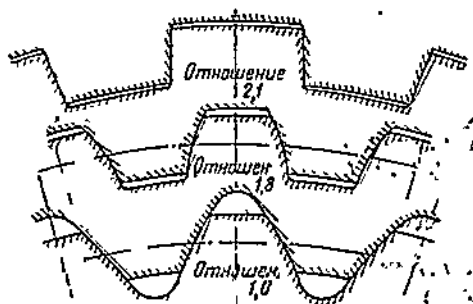
Номинальное напряжение вычисляется без учета ослабления сечения шпоночной канавкой.

График фиг. 203 может быть использован также и для оценки концентрации касательных напряжений в сечении скручиваемого вала, имеющего шлицевые пазы.

На фиг. 204 приведены три формы шлицевых пазов отношения наибольших касательных напряжений, вызываемых в поперечных сечениях моментами кручения, причем наибольшее касательное напряжение в шлицевых пазах эвольвентного профиля принято за единицу.



Фиг. 203. Концентрация напряжений во входящем углу вала со шлицем при кручении (по измерениям Тейлора на пленке по методу мембранной аналогии).



Фиг. 204. Форма сопоставляемых профилей сечения скручиваемого вала со шлицами.

Для эвольвентного профиля коэффициент концентрации может быть принят равным $\alpha_t \approx 1,2 \div 1,5$. В соответствии с этим в первом случае фиг. 204: $\alpha_t \approx 2,5 \div 3,2$ и во втором случае $\alpha_t \approx 2,2 \div 2,7$.

б) Прокатные профили и стержни с тонкими стенками

При расчете напряжений, возникающих в прокатном профиле при скручивании стержня, сечение можно рассматривать составленным из n прямоугольников. Наибольшие напряжения в прямоугольном сечении возникают в серединах длинных сторон в прямоугольнике, имеющем большую толщину $b_{\max}$.

Способ вычисления этого напряжения был приведен в гл. VI, табл. 17.

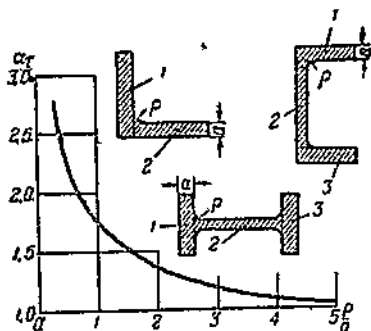
Вычисленное по этой формуле τ следует рассматривать как номинальное касательное напряжение. Наибольшее напряжение концентрации возникает во входящем угле профиля, скругленном радиусом r в месте

сопряжения прямоугольника шириной $b_{\max}$ с другим прямоугольником. Величина коэффициента концентрации может быть вычислена по формуле [22]

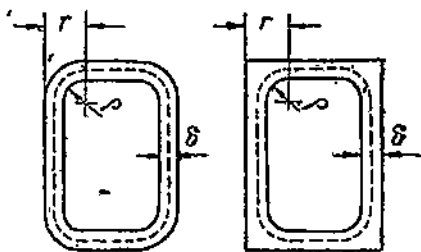
$$\alpha_r = 1,74 \sqrt[3]{\frac{b_{\max}}{\rho}} \quad (\text{формула Треффца}). \quad (224)$$

Наибольшее напряжение в месте концентрации равно произведению α_r на величину τ_r , вычисляемую по табл. 17 гл. VI.

На фиг. 205 дается график, в котором по вертикали отложены значения α_r , вычисленные по формуле Треффца. В правой части фиг. 205 приведена примерная разбивка профилей на составляющие прямоугольники.



Фиг. 205. Значения коэффициентов концентрации для толстостенных стержней, вычисленных по формуле Треффца.



Фиг. 206. Сечения трубчатых стержней.

Если поперечное сечение скручиваемого стержня — трубчатое с малой толщиной стенки, то номинальное напряжение следует вычислять по формуле

$$\tau_n = \frac{M_{кр}}{2 \cdot F \cdot \delta} \quad (\text{см. гл. VI})$$

Коэффициент концентрации может быть вычислен для этого случая по формуле

$$\alpha_r = \left[\frac{\delta}{\rho} \frac{1 - \frac{S}{4F}(r+\rho)}{\ln \frac{r}{\rho}} + \frac{S \cdot \rho}{2 \cdot F} \right] \quad (\text{формула Тимошенко}); \quad (225)$$

здесь S — длина осевой линии сечения; размеры ρ , r и δ указаны на фиг. 206.

в) Продольные отверстия в валё круглого сечения, работающем на кручение

Если продольное сверление вала имеет малый диаметр δ по сравнению с диаметром вала d ($\frac{\delta}{d} \leq \frac{1}{10}$), то коэффициент концентрации в этом случае

$$\alpha_r = 2,0.$$

Номинальное напряжение должно вычисляться по формуле

$$\tau_n = \frac{M_{кр}}{J_{кр}} \cdot r,$$

где r — расстояние от оси вала до внешнего края отверстия; $J_{кр}$ — полярный момент инерции сечения вала без учета ослабления продольным отверстием.

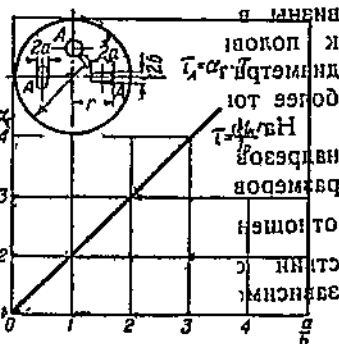
Если продольное отверстие имеет эллиптическую форму, то наибольшее касательное напряжение в сечении возникает в точке A . Значения коэффициентов концентрации α , находясь по графику фиг. 207 в зависимости от отношения $\frac{a}{b}$ полуосей эллипса.

Из рассмотрения графика следует, что при расположении большей оси эллипса по радиусу возникает значительно большая концентрация напряжения, чем в случае круглого отверстия или когда по радиусу располагается меньшая ось эллипса.

При пользовании графиком фиг. 207 номинальное напряжение вычисляется без учета ослабления сечения.

График фиг. 207 применим при

$$\frac{2a}{d} \leq \frac{1}{10}.$$



Фиг. 207. Концентрация напряжений возле продольных отверстий скручиваемого вала (по Тимошенко).

§ 9. Концентрация напряжений у гиперболических и эллиптических надрезов и отверстий (по Нейберу) [7]

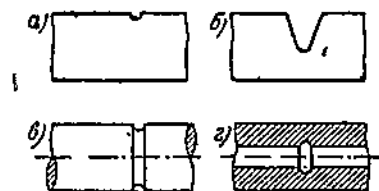
Для плоских стержней и стержней, имеющих круглое поперечное сечение (в том числе полых), надрезы, выточки и отверстия определенного профиля, Нейбер, применяя методы теории упругости, дает величины коэффициентов концентрации и распределение напряжений по сечению или вдоль контура.

Основные формы надрезов показаны на фиг. 208.

На фиг. 208, a — мелкий надрез в плоском стержне.

На фиг. 208, b — глубокий надрез в плоском стержне.

На фиг. 208, $в$ — внешний кольцевой надрез на стержне круглого поперечного сечения.



Фиг. 208. Форма надрезов и отверстий, рассматриваемых Нейбером.

Из фиг. 208, $г$ приведен внутренний кольцевой надрез на стержне круглого поперечного сечения.

В соответствии с системой координат, принятой Нейбером, профиль надреза — гиперболический, профиль отверстий — эллиптический.

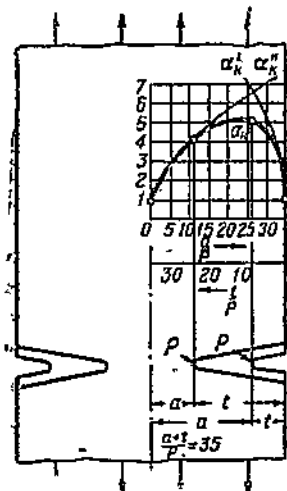
Коэффициенты концентрации для мелкого надреза обозначаются α'_k , для глубокого надреза α''_k . Для мелкого надреза любой промежуточной

глубины коэффициент концентрации α_k определяется из интерполяционной зависимости

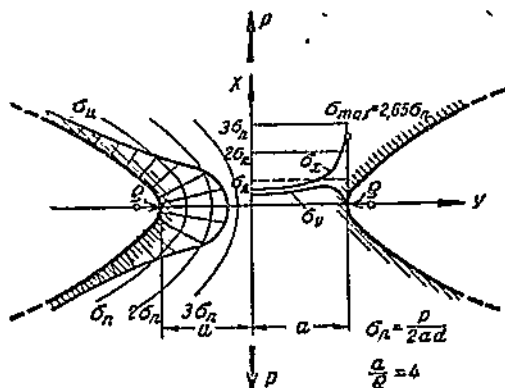
$$\frac{1}{(\alpha_k - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_k^I - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_k^{II} - 1)^2} \quad (226)$$

Коэффициенты концентрации для мелких надрезов определяются в зависимости от отношения радиуса ρ кривизны в основании надреза к глубине t надреза. Для глубоких надрезов коэффициент концентрации определяется в зависимости от отношения радиуса ρ , кривизны в основании надреза к половине толщины или диаметра a стержня в наиболее тонком месте.

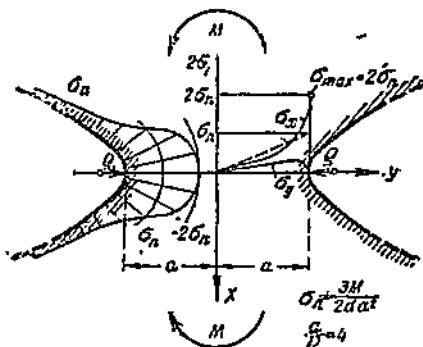
На фиг. 209 даны схема надрезов и обозначения размеров, а также кривая α_k от отношений $\frac{t}{\rho}$ и $\frac{a}{\rho}$ в соответствии с вышеприведенной зависимостью.



Фиг. 209. Значения коэффициентов концентрации, получаемые по формуле Нейбера при переходе от мелких надрезов к глубоким.



Фиг. 210. Распределение напряжений, получаемых по Нейберу.



Фиг. 211. Распределение напряжений, получаемых по Нейберу.

Типы кривых распределения напряжений по поперечному сечению и вдоль контура для основных форм и случаев нагрузки приведены на следующих фигурах:

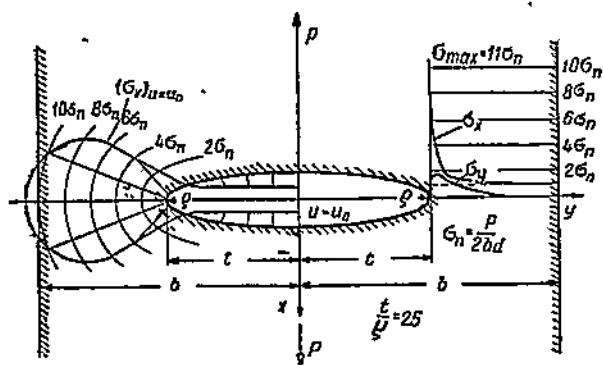
Фиг. 210 получена для случая растяжения плоского стержня с глубоким надрезом при $\frac{a}{\rho} = 4$. Номинальное напряжение

$$\sigma_n = \frac{P}{2ad}$$

где d — толщина стержня, $2a$ — размер в ослабленном сечении. Эпюра напряжений σ_n , начерченная слева, дает распределение растягивающих напряжений, направленных вдоль контура. Эпюры σ_x и σ_y дают растягивающие напряжения для точек, расположенных по наименьшему поперечному сечению, направленных соответственно в направлении x и y .

На фиг. 211 для случая чистого изгиба стержня с глубоким надрезом такой же формы даны кривые распределения напряжений. Номинальное напряжение у основания надреза вычисляется по формуле поперечного изгиба

$$\sigma_n = \frac{M}{\frac{d(2a)^2}{6}}.$$



Фиг. 212. Распределение напряжений, получаемых по Нейберу.

На фиг. 212 для плоского стержня с эллиптическим отверстием даны кривые распределений напряжений вдоль контура и для точек поперечного сечения по отверстию для случая растяжения силой P .

Отношение $\frac{t}{P} = 25$. Номинальные напряжения вычисляются по сечению брутто

$$\sigma_n = \frac{P}{2bd}.$$

Обозначения напряжений — те же.

На фиг. 213 для той же формы, которая была рассмотрена на фиг. 212, приведены эпюры нормальных напряжений при чистом изгибе. Номинальные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_n = \frac{3 \cdot M_{изг} \cdot t}{2d \cdot b^3}.$$

Для определения коэффициентов концентрации применительно к различным формам стержней и случаев нагрузки составлены номограммы, приведенные на фиг. 214 (см. вклейку в конце книги).

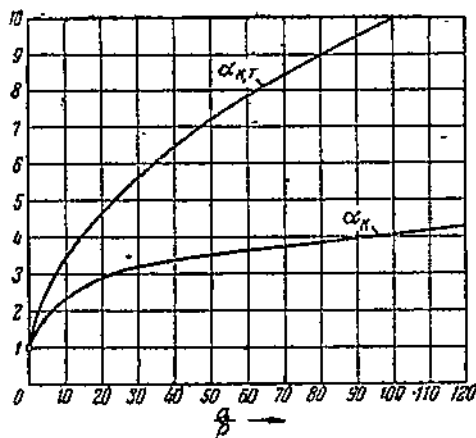
С левой стороны дана таблица типов стержней, величин номинальных напряжений с указанием номеров кривых и шкал, по которым производится определение коэффициентов концентрации α_k и α_k' на основании номограмм. Пользование номограммами поясняется следующими примерами.

На номограмме фиг. 214, а делаются такие же построения, что и в предыдущем примере. Через точку $\sqrt{\frac{a}{\rho}} = 1,80$ проводится вертикаль до пересечения с кривой 5; от точки пересечения — горизонталь до пересечения с осью ординат, из последней точки пересечения проводится наклонная прямая в точку $\sqrt{\frac{r}{\rho}} = 3,00$ на шкале в левой части номограммы. Радиус окружности с центром в Q касательной к этой наклонной прямой дает величину вспомогательного коэффициента $\alpha_x' = 3,6$, соответствующего $r \rightarrow \infty$.

Шкала для этих коэффициентов нанесена по оси абсцисс налево в номограмме фиг. 214, б.

Для получения α_{σ} , соответствующего заданному r , по этой номограмме от точки $\sqrt{\frac{r}{\rho}} = 2,50$ проводится вертикаль до пересечения

Фиг. 215. Сопоставление теоретических коэффициентов концентрации и получаемых с учетом упругой чувствительности к надрезу (по Нейберу).



с кривой 2, от точки пересечения проводится горизонталь до пересечения с осью ординат. Последняя точка пересечения соединяется прямой с точкой α_x' на левой части оси абсцисс. Радиус окружности, касательной к этой наклонной прямой, дает величину искомого коэффициента концентрации $\alpha_x = 2,08 \approx 2,1$.

При использовании коэффициентов концентрации, получаемых по формулам и номограммам Нейбера, следует иметь в виду, что с увеличением относительной кривизны надреза или отверстия величины коэффициентов концентрации, получаемых по этим данным, начинают все больше расходиться с действительными величинами, получаемыми для стальных стержней.

Для иллюстрации на фиг. 215 представлены кривые коэффициентов концентрации в круглом стержне с глубоким надрезом. Коэффициенты $\alpha_{k, \pi}$ получены непосредственно по номограмме Нейбера. Коэффициенты α_k получены Нейбером путем пересчета с учетом характеристики упругой чувствительности к концентрации для стали. Вопрос правильной оценки α_k при высоких значениях коэффициентов концентрации остается дискуссионным, так что приведенные на фиг. 215 кривые сопоставления коэффициентов концентрации следует рассматривать как ориентировочные, требующие проверки и уточнения.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. M. Frocht, Journ. of Applied Mechanics, 1935, № 2.
2. Thum, Federn, Spannungszustand und Bruchausbildung, 1939.
3. Афанасьев, Журнал технической физики, т. VI, вып. 7.
4. Jacobsen, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 1925, vol. 47, p. 619.
5. Thum, Zeitschr. V. D. I., 1935, S. 1303.
6. Lehr, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, 1934.
7. Neuber, Kerbspannungslehre, 1937.
8. Пригоровский, Сборник Института машиноведения АН СССР, 1944. Прочность деталей машин (в печати).
9. Peterson, Wahl, Journ. App. Mechanics, 1935, p. 15.
10. Hennig, Forschung auf d. Gebiete d. Ingen.-Wes., 1933, № 2.
11. Лихарев, Концентрация напряжений в деталях машин изд МВТУ, 1940.
12. Савиц, Вестник инженеров и техников, № 11, 1937.
13. Roark, Eng.-stat. Univ. Wis. Bull., 1938.
14. Тимошенко. Сопротивление материалов. ч. II.
15. Juglis, Engineering, 1913, vol. 93, p. 413.
16. Нейман, Труды ЦАГИ, вып. 313, 1937.
17. Siebel, Kopf, Forschungsheft, 369, VDI, 1934.
18. Journ. App. Mechanics, 1942, № 1.
19. Frocht, Hill, Journ. App. Mechanics 1940, vol. 7, № 1.
20. Dolan, Journ. App. Physics, 1941, № 8.
21. Griffith, Taylor, Tech. Repf. Adv. Comm. Aeronautics, 1917—1918, pp. 910, 938.
22. Серенсен, Основы технической теории упругости.

III. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

ГЛАВА VIII

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

§ 1. Основные понятия

При статическом действии напряжений характеристиками, используемыми в расчете, являются:

а) предел упругости σ_e — напряжение, при котором остаточные деформации впервые достигают некоторой малой величины, характеризующей определенным допуском (например 0,001, 0,005%);

б) предел текучести σ_s — нормальное напряжение, при котором остаточные деформации удлинения достигают 0,2%;

в) временное сопротивление разрыву (предел прочности на растяжение) σ_b — напряжение, отвечающее наибольшей нагрузке, отнесенное к исходной площади поперечного сечения;

г) временное сопротивление сжатию (предел прочности на сжатие) σ_{bd} — напряжение, отвечающее наибольшей нагрузке, предшествовавшей разрушению образца;

д) предел текучести τ_s — касательное напряжение, при котором остаточные удлинения достигают 0,2%;

е) предел прочности при кручении τ_b — касательное напряжение (вычисленное по обычным формулам), при котором происходит скручивание образца (сопровождающееся разрушением).

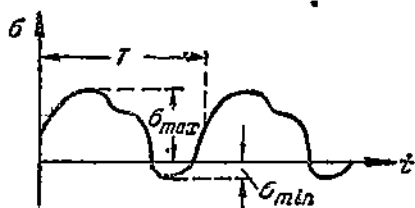
Переменные напряжения характеризуются периодическим изменением их величины во времени. Полный период изменения напряжений во времени называется циклом. На фиг. 216 дан пример циклического изменения напряжений, т. е. полный период изменения напряжений, соответствующий одному циклу. Цикл напряжений характеризуется следующими величинами:

а) верхний предел цикла σ_{max} — наибольшее по алгебраической величине напряжение в цикле;

б) нижний предел цикла σ_{min} — наименьшее по алгебраической величине напряжение в цикле;

в) среднее напряжение цикла σ_m — полусумма верхнего и нижнего пределов в цикле;

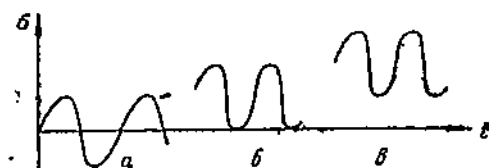
г) амплитуда цикла σ_v — полуразность верхнего и нижнего пределов в цикле;



Фиг. 216. Циклическое изменение напряжений.

д) коэффициент асимметрии цикла r — отношение наименьшего напряжения цикла к наибольшему, взятое с алгебраическим знаком.

Цикл называется симметричным, если верхний и нижний пределы одинаковы по величине, но противоположны по знаку; для него $r = -1$. Цикл называется асимметричным, если имеет неодинаковые по величине пределы. Если напряжения изменяются от нуля до максимума, то $r = 0$.



Фиг. 217. Формы циклов изменений напряжений.

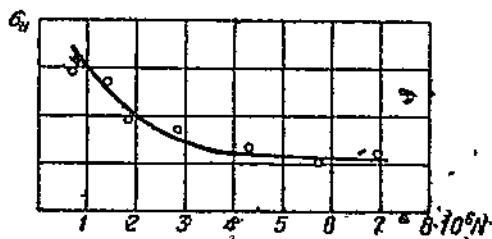
а — симметричный цикл $r = -1$; б — цикл изменения напряжений при $r = 0$; в — цикл изменения напряжений при $r > 0$.

На фиг. 217, а дана диаграмма изменения напряжений при симметричном цикле, на фиг. 217, б — при изменении напряжений от нуля до максимума, на фиг. 217, в — при изменении напряжений с положительным коэффициентом асимметрии.

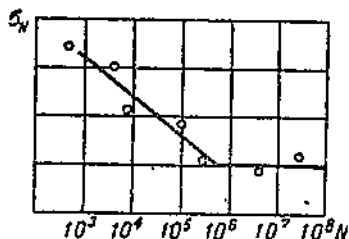
При действии переменных напряжений основными характеристиками, используемыми в расчете, являются:

а) предел усталости при симметричном цикле σ_{-1} — то наибольшее значение верхнего предела цикла, при котором еще не происходит разрушения от усталости после определенного весьма значительного числа циклов, называемого базисом (для сталей — 10^7 циклов, для цветных металлов — до $50 \cdot 10^7$ циклов);

б) предел усталости при цикле от нуля до максимума σ_0 — то наибольшее значение верхнего предела цикла, при котором еще не происходит



а Фиг. 218. Кривые усталости.



б

разрушения от усталости после определенного весьма значительного числа циклов (базиса) изменения напряжений от нуля до максимума;

в) предел усталости при изменении напряжений с асимметричным циклом σ_r — наибольшее значение верхнего предела цикла, определяемого так же, как в двух предыдущих случаях;

г) ограниченный предел усталости σ_{rN} — наибольшее значение верхнего предела напряжений цикла с коэффициентом асимметрии r , после повторения которого в течение N раз еще не происходит разрушения;

д) кривая, дающая зависимость между верхним пределом цикла и числом повторений напряжений до разрушения, называется кривой усталости. По оси ординат откладываются напряжения, по оси абсцисс — соответствующее им число циклов. Характер кривой в прямоугольных координатах показан на фиг. 218, а, в полулогарифмических — на фиг. 218, б.

Кривая усталости одновременно представляет собой изменение ограниченных пределов усталости в зависимости от числа циклов. Кривая усталости материала получается путем испытания до разрушения серии образцов, каждый из которых испытывается при определенной величине максимального напряжения цикла.

§ 2. Факторы, влияющие на прочность

При действии переменных напряжений на условия прочности влияют следующие основные факторы:

- а) концентрация напряжений;
- б) абсолютные размеры детали;
- в) макро- и микроструктура;
- г) качество поверхности и обработка поверхностного слоя;
- д) коррозия и повышенные температуры.

Концентрация напряжений уменьшает предел усталости. Предел усталости при наличии концентрации напряжений обозначается σ_{rk} и соответственно τ_{rk} .

Эффективным коэффициентом концентрации напряжений K_σ называется отношение предела усталости при симметричном цикле без концентрации к пределу усталости при симметричном цикле с концентрацией

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}} \quad (227)$$

и соответственно

$$K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}} \quad (227')$$

Эффективный коэффициент концентрации зависит от распределения напряжений, материала детали и ее абсолютных размеров. Чем больше коэффициент концентрации, отвечающий распределению напряжений в пределах упругости α_σ или α_τ , тем больше K_σ и соответственно K_τ . Для приблизительного определения K через α могут быть использованы зависимости:

$$\begin{aligned} K_\sigma &= 1 + q(\alpha_\sigma - 1); \\ K_\tau &= 1 + q(\alpha_\tau - 1), \end{aligned} \quad (228)$$

где q — коэффициент чувствительности материала, изменяющийся в пределах от 0 до 1.

Значение эффективных коэффициентов концентрации K_σ в зависимости от α_σ и абсолютных размеров могут приближенно вычисляться по выражению

$$K_\sigma = \frac{K_{\sigma A}}{1 - \left(1 - \frac{K_{\sigma A}}{K_{\sigma K}}\right) \left(\frac{D-d}{D_K-d}\right)^m} \quad (229)$$

где $K_{\sigma A}$ — эффективный коэффициент концентрации на лабораторном образце диаметром d соответствующей конфигурации;

$K_{\sigma K}$ — наибольшая величина эффективного коэффициента концентрации, соответствующая D_K , $K_{\sigma K} \approx \alpha_K$;

D — размер детали в сечении, где определяется концентрация;

D_K — размер детали, начиная с которого прекращается заметное влияние масштабного фактора, для сталей повышенной твердости и для больших K_σ $D_K = 50 - 100$ мм, для сталей средней твердости и малых концентраций $D_K = 100 - 250$ мм;

m — показатель; $m = 0,5 - 0,7$.

Влияние концентрации напряжений на прочность оценивают в ряде источников коэффициентами чувствительности к концентрации. Этот коэффициент характеризует относительное изменение предела усталости под влиянием концентрации напряжений, он составляет

$$\Delta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_{-1k}}{\sigma_{-1}} \quad (230)$$

и соответственно

$$\Delta_{\tau} = \frac{\tau_{-1} - \tau_{-1k}}{\tau_{-1}}.$$

Между коэффициентом Δ и эффективным коэффициентом концентрации существуют зависимости:

$$K_{\sigma} = \frac{1}{1 - \Delta_{\sigma}};$$

$$K_{\tau} = \frac{1}{1 - \Delta_{\tau}}.$$

Величины эффективных коэффициентов концентрации K и чувствительности Δ зависят от металла, его структуры и термической обработки.

Для мягких, крупнозернистых сталей эти коэффициенты меньше, для сталей повышенной твердости и мелкозернистых — больше. С повышением структурной неоднородности металла уменьшается его чувствительность к концентрации напряжений, это свойственно чугунам и ряду легких сплавов.

При действии напряжений с асимметричным циклом концентрация сказывается на амплитудах циклов, причем это влияние близко к тому, которое имеет место для амплитуд напряжений, обладающих симметричным циклом.

С увеличением абсолютных размеров уменьшаются пределы усталости. Это изменение предела усталости характеризуется отношением ε предела усталости σ_{-1} при данных размерах поперечного сечения к пределу усталости того же материала, полученному на обычных лабораторных образцах σ_{-1A} :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1A}}.$$

Эта величина устанавливается экспериментально в зависимости от размеров сечения. Она зависит от материала, термической и поверхностной обработки, а также от типа напряженного состояния (растяжение — сжатие, изгиб, кручение). При асимметричных циклах изменения напряжений абсолютные размеры сказываются в основном на амплитуде напряжений.

Направление волокон в поковках влияет на величину пределов усталости и эффективность концентрации напряжений в зависимости от степени загрязнения неметаллическими включениями, степени уковки и других макроструктурных особенностей.

Качество поверхности и способ ее окончательной обработки непосредственно влияют на предел усталости. Чем ниже качество поверхности, тем ниже оказывается предел усталости. Это снижение более резко выражено в сталях высокой твердости и прочности, слабее — в мягких сталях. Применение химико-термических (цементация, азотизация

и др.) и механических (наклеп) процессов, упрочняющих поверхность, ослабляет влияние качества поверхности. В литых необработанных изделиях на характеристиках утомляемости сказывается наличие и свойства литевой корки.

Влияние качества и свойства поверхности на предел усталости σ_{-1} характеризуется снижением последнего по отношению к пределу усталости σ_{-1_2} при высоком качестве поверхности (полировка, суперфиниш). Коэффициент поверхностной чувствительности составляет

$$\Delta_{\sigma}^n = \frac{\sigma_{-1_2} - \sigma_{-1}}{\sigma_{-1_2}}$$

и соответственно

$$\Delta_{\tau}^n = \frac{\tau_{-1_2} - \tau_{-1}}{\tau_{-1_2}}.$$

Коррозия и повышенные температуры снижают предел усталости. С увеличением прочности стали возрастает влияние коррозии. В легких сплавах это влияние оказывается еще более выраженным. Изменение пределов усталости характеризуется коэффициентом чувствительности

$$\Delta_{\sigma}^k = \frac{\sigma_{-1_2} - \sigma_{-1}}{\sigma_{-1_2}};$$

$$\Delta_{\tau}^k = \frac{\tau_{-1_2} - \tau_{-1}}{\tau_{-1_2}},$$

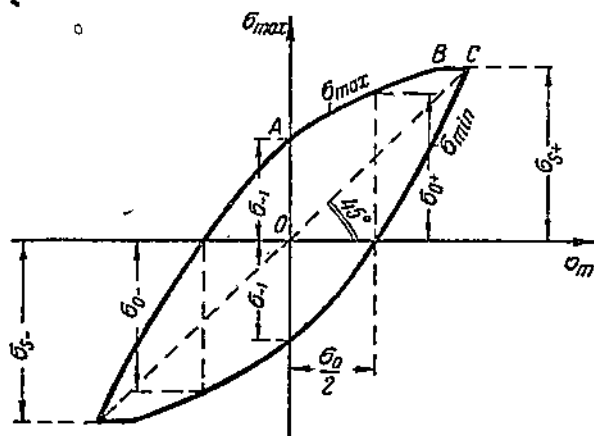
где σ_{-1_2} и τ_{-1_2} — пределы усталости при отсутствии коррозии; σ_{-1} и τ_{-1} — пределы усталости при действии коррозии. При переменных напряжениях с асимметричным циклом влияние качества поверхности и коррозии сказывается главным образом на амплитуде, так же как и концентрация напряжений. Данные о факторах, влияющих на прочность, изложены в гл. IX.

§ 3. Прочность при действии переменных напряжений с асимметричным циклом

В зависимости от асимметрии цикла и знака среднего напряжения цикла предельные напряжения определяются либо из условий усталостных разрушений, либо из условий возникающих пластических деформаций, а для хрупких материалов или при соответствующих напряженных состояниях — из условий статического разрушения.

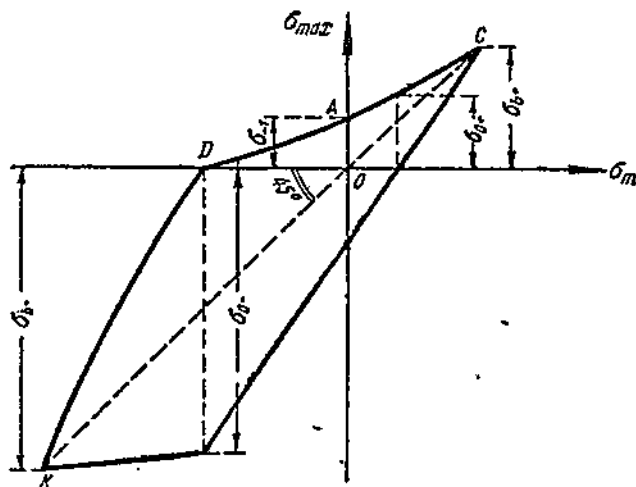
Прочность материала при различной асимметрии цикла изменения напряжений характеризуется диаграммой Смита. На фиг. 219 дан тип диаграммы Смита для пластичного материала при растяжении — сжатии. По оси абсцисс откладывается среднее напряжение цикла σ_m , по оси ординат — максимальное и минимальное напряжения цикла $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$. Пока максимальные напряжения остаются меньше предела текучести, то их величина ограничивается кривой АВ, отвечающей пределам усталости при асимметричных циклах. Когда максимальные напряжения достигают предела текучести, то при дальнейшем увеличении асимметрии цикла максимальные напряжения принимаются неизменными и равными

пределу текучести. Диаграмма Смита в этом месте ограничивается прямой BC . Точка A соответствует симметричному циклу и ее ордината равна пределу усталости при симметричном цикле σ_{-1} . В области сжимающих средних напряжений цикла для пластичных металлов диаграмма Смита имеет симметричную форму относительно области растяжения.



Фиг. 219. Диаграмма Смита для пластичного материала.

На фиг. 220 дан тип диаграммы Смита для хрупкого материала (серого чугуна). В области растяжения диаграмма ограничивается кривой АС, отвечающей усталостным разрушениям, а точка С соответствует

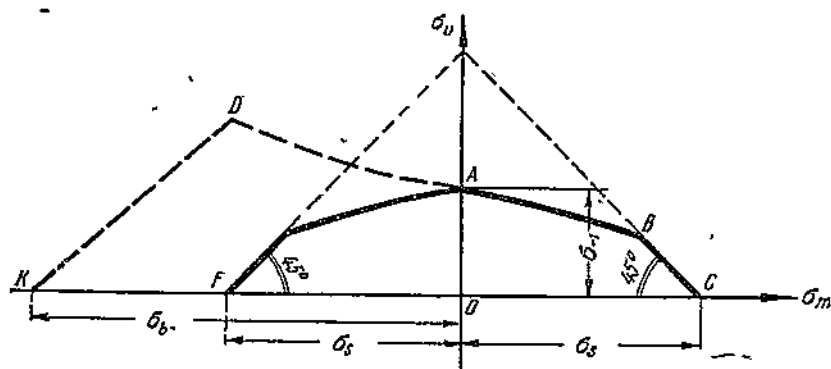


Фиг. 220. Диаграмма Смита для хрупкого материала.

разрушению от статического разрыва. В области сжимающих средних напряжений цикла амплитуды цикла (представляющие собой отрезки ординат между кривой, ограничивающей диаграмму, и осью ее, проведенной под углом 45° к осям координат) продолжает увеличиваться на всем протяжении кривой AD . Лишь при некоторых значениях средних

сжимающих напряжений цикла начинается уменьшение амплитуд и диаграмма Смита заканчивается в точке K , соответствующей статическому разрушению при сжатии.

Другим способом изображения характеристик прочности является диаграмма Хей (фиг. 221). По оси абсцисс откладывается среднее напряжение цикла σ_m ; по оси ординат — амплитуда напряжений цикла σ_v .

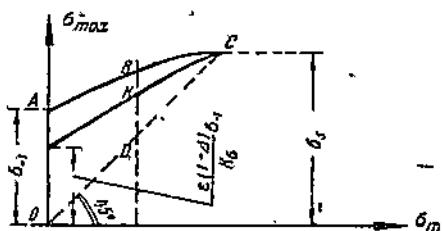


Фиг. 221. Диаграмма Хей.

Так же, как на диаграмме Смита, кривая изменения предельных амплитуд состоит из двух ветвей — AB , отвечающей усталостным разрушениям, и BC , отвечающей пределу текучести. Точка C соответствует статическому растяжению, точка F — статическому сжатию. Для пластичных материалов кривая в области растягивающих и сжимающих средних напряжений симметрична. Для материалов, хрупких в области сжимающих средних напряжений, амплитуда напряжений с ростом последних сначала возрастает (до точки D), потом уменьшается, и точка K соответствует условиям разрушения при статическом сжатии.

Концентрация напряжений, масштабный фактор, влияние качества поверхности и коррозии сказываются на амплитуде напряжений цикла. Поэтому на диаграммах Смита и Хей эти факторы относятся к амплитудам напряжений, которые умножаются на величину

$$\frac{\varepsilon(1-\Delta)}{K_\sigma},$$



Фиг. 222. Диаграмма Смита при наличии концентрации напряжений.

где K_σ — эффективный коэффициент концентрации;

ε — масштабный фактор;

Δ — коэффициент поверхностной чувствительности.

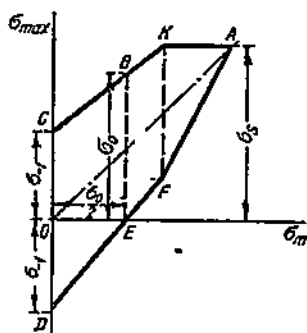
На фиг. 222 показано изменение диаграммы Смита в результате влияния упомянутых выше факторов. Отношение амплитуд диаграммы,

отражающей влияние снижающих факторов к амплитудам на диаграмме для исходного металла, составляет

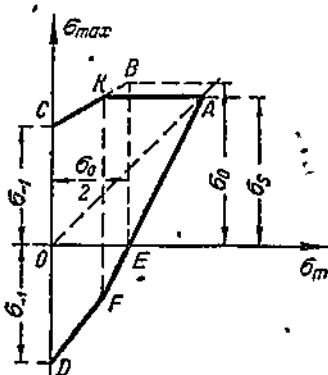
$$\frac{KD}{DB} = \frac{\varepsilon(1-\Delta)}{K_a}.$$

При отсутствии экспериментальной диаграммы Смита, характеризующей зависимость $\sigma_{\max}$, σ_m эта диаграмма может быть приближенно построена по механическим характеристикам: предел усталости при симметричном цикле σ_{-1} , предел усталости при цикле изменения напряжений от нуля до максимума σ_0 , предел текучести σ_s или для хрупких материалов временное сопротивление σ_b .

Построение показано на фиг. 223. В прямоугольных координатах $\sigma_{\max}$, σ_m наносится точка A с координатами $\sigma_{\max} = \sigma_m = \sigma_s$ (или σ_b для хрупкого материала), точка B с координатами $\sigma_m = \frac{\sigma_0}{2}$ и $\sigma_{\max} = \sigma_0$, точка C , для которой $\sigma_m = 0$ и $\sigma_{\max} = \sigma_{-1}$, точка D , для которой $\sigma_m = 0$ и $\sigma_{\min} = \sigma_{-1}$, точка E , для которой $\sigma_m = \frac{\sigma_0}{2}$, $\sigma_{\min} = 0$.



Фиг. 223 Построение схематизированной диаграммы Смита.



Фиг. 224. Схематизированная диаграмма Смита для сталей мягкой и средней твердости.

Через точку A проводится горизонтальная линия, через точки C и B проводится прямая до пересечения в точке K с этой горизонталью. Через точки D и E проводится прямая до пересечения в точке F с вертикалью, проведенной через точку K . Точка F соединяется с точкой A и этим заканчивается построение диаграммы.

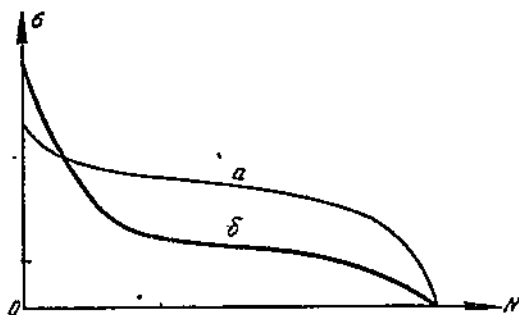
Если $\sigma_0 > \sigma_s$ (для мягких и средней твердости конструкционных сталей встречается такое соотношение), то диаграмма строится в таком же порядке, как показано на фиг. 224. В этом случае точка B оказывается вне диаграммы, которая ограничивается относительно низкими величинами пределов текучести.

Описанное построение применимо главным образом для сталей. Цветным металлам и чугунам могут быть свойственны диаграммы Смита, отличающиеся своими очертаниями (например вогнутый характер); для них желательно использование непосредственно опытных данных.

§ 4. Прочность при неустановившихся режимах переменных напряжений

При неустановившемся режиме переменных напряжений величина последних с течением времени меняется. Это изменение может являться следствием случайных изменений в величине действующих на деталь сил (например в ходовых частях автомобиля), тогда напряженность в течение времени может быть охарактеризована кривой статистической частоты возникающих в детали напряжений. На такой кривой по оси ординат откладывается величина максимального напряжения цикла, по оси абсцисс — общее количество повторений циклов с максимальным напряжением данной величины или больших ее. На фиг. 225 дана такая диаграмма для двух типов неустановившихся режимов. Кривая *a* соответствует режиму со сравнительно небольшими изменениями величины напряжений в течение всего времени работы детали. Кривая *б*, наоборот, отвечает режиму с резким изменением величины напряжений, когда деталь претерпевает большие, но не длительно действующие перегрузки, а остальное время подвергается действию относительно небольших напряжений.

Напряжения больше средней величины далее названы перегрузочными, меньше средней величины — недогрузочными.



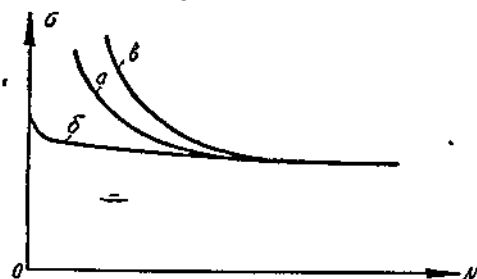
Фиг. 225. Суммарные кривые статистической частоты.

Если перегрузочные напряжения многократно сменяются недогрузочными, то прочность характеризуется кривой усталости. Для обеспечения прочности необходимо, чтобы кривая статистической частоты возникающих напряжений не пересекала бы кривой усталости, и в местах их сближения отношение ординат кривой усталости к кривой частоты напряжений, соответствующих одному и тому же числу циклов, должно равняться запасу прочности.

Если перегрузочные напряжения концентрируются на одном отрезке времени работы детали или на весьма ограниченном их числе, то прочность характеризуется кривой повреждения. Кривая повреждения по методу Френча определяется путем испытания серии образцов на двух уровнях напряжений. Сначала образец подвергается действию определенного числа циклов напряжений, больших предела усталости. Потом этот же образец испытывается при напряжении, равном пределу усталости. Если он поврежден действовавшей на него перегрузкой, то при испытании на напряжении, равном пределу усталости, он не выдержит числа циклов, характеризующего этот предел усталости. Если образец не поврежден, то он не разрушится при испытании на напряжениях, равных пределу усталости. Подвергая несколько образцов действию перегрузочных напряжений с различным числом циклов, устанавливают, при каком числе циклов действия данного перегрузочного напряжения возникает повреждение. В результате выполнения такого эксперимента

для нескольких величин перегрузочных напряжений устанавливается кривая опасных перегрузок Френча.

На фиг. 226 даны типы кривых повреждения одновременно с кривой усталости. Кривая *a* свойственна материалам, слабо повреждающимся перегрузками, кривая *б* — материалам, повреждающимся даже весьма незначительными перегрузками. Если кривая повреждений приближается к кривой усталости *в* или совпадает с ней, то такой материал перегрузками не повреждается. Область между кривой усталости и кривой повреждения является зоной опасных перегрузок. При сосредоточенном во времени характере перегрузок последние не должны попадать в зону опасных перегрузок. Концентрация напряжений приближает кривую опасных перегрузок к кривой усталости и уменьшает зону опасных перегрузок [1].



Фиг. 226. Кривая усталости и кривые повреждения (по Френчу)

§ 5. Определение запасов прочности

При установившихся режимах действия переменных напряжений запасы прочности определяются по пределам усталости.

Для линейных напряженных состояний (или близких к нему), к которым относятся растяжение и сжатие центральное и эксцентричное, изгиб плоский и косой, а также для кручения запас прочности определяется по соответствующему пределу усталости. При длительном установившемся режиме действия переменных напряжений запас прочности выразится так [2]:

для нормальных напряжений

$$n_s = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_m + \sigma_v \frac{K_\sigma}{1-\Delta}}, \quad (231)$$

где $\sigma_{\max}$ — верхний предел цикла действующих напряжений с учетом влияния концентрации и других факторов;

σ_r — предел усталости для коэффициента асимметрии, свойственного действующим напряжениям;

K_σ — эффективный коэффициент концентрации;

σ_v — как было обозначено ранее, коэффициент, характеризующий влияние на прочность абсолютных размеров;

Δ — коэффициент, характеризующий влияние качества поверхности и других технологических факторов.

При расчете бывают известны номинальные напряжения, действующие в детали $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_v$. Для определения предела усталости σ_r , который следует ввести в расчеты запаса прочности по приведенной выше формуле (271), следует использовать диаграмму Смита, экспериментальную или построенную по основным характеристикам, согласно § 3. Из начала координат диаграммы следует провести луч под углом β

к оси σ_m , как показано на фиг. 227, причем β определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \beta = 1 + \frac{K_\sigma}{\varepsilon(1-\Delta)} \frac{\sigma_v}{\sigma_m}. \quad (232)$$

Этот луч отсекает на диаграмме некоторую ординату σ_r .

Если принять за основу расчета схематизированную диаграмму Смита, очерченную прямыми линиями, то запас прочности может быть вычислен без непосредственного использования диаграммы.

Для асимметрии цикла номинальных напряжений, при которой

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_m} > \frac{\varepsilon(1-\Delta)}{K_\sigma} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{ms}} - 1 \right),$$

где σ_{ms} — среднее напряжение, при котором диаграмма делает перелом, запас прочности определяется из выражения

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon(1-\Delta)} \sigma_v + \psi \sigma_m}, \quad (233)$$

где

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

Для асимметрии цикла номинальных напряжений, при которой

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_m} < \frac{\varepsilon(1-\Delta)}{K_\sigma} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{ms}} - 1 \right),$$

запас прочности определяется из выражения

$$n = \frac{\sigma_s}{\sigma_m + \frac{K_\sigma}{\varepsilon(1-\Delta)} \sigma_v}. \quad (234)$$

Для случая действия касательных напряжений

$$\tau_{\max} = \tau_m + \tau_v$$

выражения для запасов прочности и способ их вычисления совершенно аналогичны.

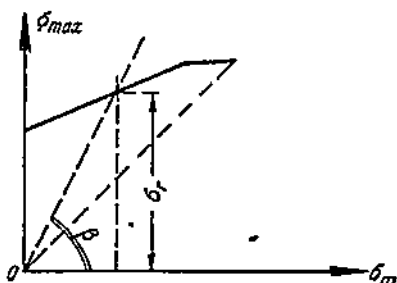
Для

$$\frac{\tau_v}{\tau_m} > \frac{\varepsilon(1-\Delta)}{K_\tau} \left(\frac{\tau_s}{\tau_{ms}} - 1 \right),$$

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon(1-\Delta)} \tau_v + \psi \tau_m}, \quad (235)$$

где

$$\psi = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_{-1}}.$$



Фиг. 227. Определение предела усталости при асимметричном цикле.

Для

$$\frac{\tau_v}{\tau_m} < \frac{\varepsilon(1-\Delta)}{K_\tau} \left(\frac{\tau_s}{\tau_{ms}} - 1 \right),$$

$$n = \frac{\tau_s}{\tau_m + \frac{K_\tau}{\varepsilon(1-\Delta)} \tau_v}. \quad (236)$$

При неслучайном действии переменных напряжений установившегося режима (когда общее число циклов действия напряжений меньше числа циклов, принимаемых за базу для определения предела усталости) запас прочности определяется по ограниченным пределам усталости σ_{rN} и τ_{rN} соответствующим общему числу повторений напряжений.

В случае действия нормальных напряжений

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{rN}}{\sigma_m + \frac{K_\sigma}{\varepsilon(1-\Delta)} \tau_v}, \quad (237)$$

где σ_{rN} — ограниченный предел усталости — определяется по диаграмме Смита для определенного числа циклов.

Такая диаграмма строится по ограниченным пределам усталости при симметричном цикле и при цикле изменения напряжений от нуля до максимума. Эта же диаграмма может быть получена экспериментально, путем испытания образцов при одном и том же среднем напряжении, но с различной амплитудой переменных. Получаемая при этом кривая усталости дает ординаты диаграмм Смита для данного σ_m но различного количества циклов.

В случае действия касательных напряжений

$$n_\tau = \frac{\tau_{rN}}{\tau_m + \frac{K_\tau}{\varepsilon(1-\Delta)} \tau_v}. \quad (238)$$

Для неустановившегося режима действия переменных напряжений с сосредоточенными во времени перегрузками, запасы прочности определяются по пределам опасных перегрузок, обозначаемых далее σ'_{rN} и τ'_{rN} .

Для нормальных напряжений запас прочности составляет:

$$n_\sigma = \frac{\sigma'_{rN}}{\sigma_m + \frac{K_\sigma}{\varepsilon(1-\Delta)} \tau_v}; \quad (239)$$

для касательных

$$n_\tau = \frac{\tau'_{rN}}{\tau_m + \frac{K_\tau}{\varepsilon(1-\Delta)} \tau_v}. \quad (240)$$

Величины σ'_{rN} и τ'_{rN} устанавливаются по экспериментальным диаграммам опасных перегрузок.

В некоторых случаях бывает известен предел усталости при изменении напряжений от нуля до максимума σ_0 или τ_0 (а не при симме-

тричном цикле σ_{-1} , τ_{-1}). Тогда запасы прочности могут быть вычислены [3] на основе линейной зависимости — верхних пределов цикла от среднего напряжения цикла. Запас прочности в этом случае составит:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n_\sigma} &= \frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \frac{K_\sigma}{\varepsilon(1-\Delta)} \frac{\sigma_v}{\sigma_0} \left(2 - \frac{\sigma_0}{\sigma_s} \right); \\ \frac{1}{n_\tau} &= \frac{\tau_m}{\tau_s} + \frac{K_\tau}{\varepsilon(1-\Delta)} \frac{\tau_v}{\tau_0} \left(2 - \frac{\tau_0}{\tau_s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Для сложного напряженного состояния наиболее часто встречающимся случаем расчета является одновременное действие изгиба и кручения. Нормальные и касательные номинальные напряжения, определяемые при расчете в зависимости от внешних усилий и размеров детали, составляют:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_v; \\ \tau_{\max} &= \tau_m + \tau_v. \end{aligned}$$

Влияние концентрации напряжений и других факторов на прочность относится отдельно к каждому из компонентов. Соответствующие коэффициенты отличаются индексами σ и τ .

Если для материала известны диаграммы Смита при действии нормальных и при действии касательных напряжений, то для вычисления запаса прочности прежде всего определяют соответствующие ординаты диаграммы σ_r и τ_r , пользуясь выражением (272) для угла наклона луча, отсекающего на диаграмме искомую ординату σ_r или τ_r . Для нормальных напряжений угол составляет

$$\operatorname{tg} \beta = 1 + \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma(1-\Delta_\sigma)} \frac{\sigma_v}{\sigma_m};$$

для касательных напряжений

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 + \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau(1-\Delta_\tau)} \frac{\tau_v}{\tau_m}.$$

После определения по диаграммам σ_r и τ_r запас прочности вычисляется по выражению [2]:

$$\frac{1}{n^2} = \left[\frac{\sigma_m + \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma(1-\Delta_\sigma)} \sigma_v}{\sigma_r} \right]^2 + \left[\frac{\tau_m + \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau(1-\Delta_\tau)} \tau_v}{\tau_r} \right]^2. \quad (242)$$

Если воспользоваться схематизированными диаграммами Смита, характеризующимися пределами усталости σ_{-1} и τ_{-1} , пределами текучести σ_s и τ_s , а также коэффициентами ψ_σ и ψ_τ , где

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \text{ и } \psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0},$$

то запас прочности вычисляется по выражению

$$\frac{1}{n^2} = \left[\frac{\psi_\sigma \sigma_m + \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma(1-\Delta_\sigma)} \sigma_v}{\sigma_{-1}} \right]^2 + \left[\frac{\psi_\tau \tau_m + \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau(1-\Delta_\tau)} \tau_v}{\tau_{-1}} \right]^2. \quad (243)$$

Это выражение справедливо для асимметрии цикла, при которой

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_m} > \frac{\epsilon_\sigma (1 - \Delta_\sigma)}{K_\sigma} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{ms}} - 1 \right);$$

$$\frac{\tau_v}{\tau_m} > \frac{\epsilon_\tau (1 - \Delta_\tau)}{K_\tau} \left(\frac{\tau_s}{\tau_{ms}} - 1 \right).$$

При большей степени асимметрии запас прочности определяется по выражению

$$\frac{1}{n^2} = \left[\frac{\sigma_m + \frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma (1 - \Delta_\sigma)} \sigma_v}{\sigma_s} \right]^2 + \left[\frac{\tau_m + \frac{K_\tau}{\epsilon_\tau (1 - \Delta_\tau)} \tau_v}{\tau_s} \right]^2. \quad (244)$$

Для случая не длитель ного действия переменных напряжений установившегося режима запас прочности определяется по тем же выражениям, но в качестве пределов усталости используются ограниченные пределы усталости σ_{rN} и τ_{rN} , соответствующие общему числу циклов повторения каждого из компонентов. В этом случае выражение (283) преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{n^2} = \left[\frac{\psi_\sigma \sigma_m + \frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma (1 - \Delta_\sigma)} \sigma_v}{\sigma_{-1,N}} \right]^2 + \left[\frac{\psi_\tau \tau_m + \frac{K_\tau}{\epsilon_\tau (1 - \Delta_\tau)} \tau_v}{\tau_{-1,N}} \right]^2, \quad (245)$$

т. е. пределы усталости σ_{-1} и τ_{-1} заменяются ограниченными пределами усталости при симметричном цикле $\sigma_{-1,N}$ и $\tau_{-1,N}$.

Если напряжения σ и τ изменяются не в одной фазе, то при определении запаса прочности предполагается их синфазное действие.

При расчетах на одновременное действие изгиба и кручения в качестве предела усталости по нормальным напряжениям принимается предел усталости при изгибе. При действии растяжения и кручения за предел усталости по нормальным напряжениям принимается предел усталости при растяжении — сжатии.

При отсутствии данных по диаграммам Смита запасы прочности могут определяться по формулам типа Зодерберга [4] (с некоторыми поправками):

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left[\left(1 + \frac{\epsilon_\sigma (1 - \Delta_\sigma)}{K_\sigma} \frac{\sigma_m}{\sigma_v} \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_s} \right) K_\sigma \sigma_v \right]^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{\epsilon_\tau (1 - \Delta_\tau)}{K_\tau} \frac{\tau_m}{\tau_v} \frac{\tau_{-1}}{\tau_s} \right) K_\tau \tau_v \right]^2}}. \quad (246)$$

Если переменное напряженное состояние удобно охарактеризовать главными напряжениями:

$$\sigma_1 = \sigma_{1v} + \sigma_{1m} \text{ и } \sigma_3 = \sigma_{3v} + \sigma_{3m}$$

(например для случая расчета толстостенных труб, подверженных пульсирующему внутреннему давлению), то запас прочности определяется по формуле [5]:

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{\sigma_{1m} + \sigma_{3m}}{\sigma_s} + \frac{\sigma_{1v} + \sigma_{3v}}{\sigma_{-1}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_s}{\tau_s} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{1v}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_s} \right) \left(\frac{\sigma_{3v}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{3m}}{\sigma_s} \right). \quad (247)$$

В общем случае плоского напряженного состояния, заданного тремя компонентами напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_{xv} + \sigma_{xm}; \sigma_y = \sigma_{yv} + \sigma_{ym}; \sigma_{xy} = \tau_{xv} + \tau_{xm};$$

запас прочности определяется по выражению

$$\frac{1}{n^2} = \left[\left(\frac{\sigma_{xv}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_s} \right) + \left(\frac{\sigma_{yv}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{ym}}{\sigma_s} \right) \right]^2 - \left(\frac{\sigma_s}{\tau_s} \right)^2 \left[\left(\frac{\sigma_{xv}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{xm}}{\sigma_s} \right) \left(\frac{\sigma_{yv}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{ym}}{\sigma_s} \right) \right] + \left(\frac{\tau_{xv}}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_{xm}}{\tau_s} \right)^2. \quad (248)$$

Для материалов, склонных к хрупкому разрушению при обычных типах напряженного состояния (в частности чугунов), с лучшими результатами может быть использована формула [6]:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\tau_r} \frac{\lambda}{2} \left(\sigma_{\max} + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \right), \quad (249)$$

где

$$\lambda = 2 \frac{\tau_r}{\sigma_r} - 1;$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \frac{K_\sigma}{(1 - \Delta_\sigma) \varepsilon_\sigma} \sigma_v; \quad \tau_{\max} = \tau_m + \frac{K_\tau}{(1 - \Delta_\tau) \varepsilon_\tau} \tau_v;$$

τ_r — верхняя граница напряжений цикла, соответствующая коэффициенту асимметрии касательных напряжений;

σ_r — верхняя граница напряжений цикла, соответствующая коэффициенту асимметрии нормальных напряжений.

В зависимости от знака средних напряжений цикла должна быть использована соответствующая часть диаграммы Смита, которая для хрупких материалов бывает большей частью несимметричной для области растягивающих и сжимающих средних напряжений.

§ 6. Определение допускаемых напряжений

При расчете типизированных деталей на прочность практикуется в ряде случаев использование не запасов прочности, а допускаемых напряжений. Допускаемыми напряжениями являются те наибольшие номинальные напряжения, при действии которых деталь может надежно работать. Эти напряжения должны устанавливаться в зависимости от механических характеристик материала и факторов, влияющих на прочность.

При любой асимметрии цикла допускаемые напряжения могут быть определены из диаграммы Смита. Если отношение амплитуды цикла к среднему напряжению цикла составляет $\frac{\sigma_v}{\sigma_m}$, то на диаграмме Смита из начала координат следует провести, согласно § 5, луч под углом β :

$$\operatorname{tg} \beta = 1 + \frac{K_\sigma}{\varepsilon(1 - \Delta)} \frac{\sigma_v}{\sigma_m};$$

все коэффициенты имеют прежние значения.

Этот луч отсекает на диаграмме ординату σ_r максимального напряжения цикла. Допускаемое напряжение в зависимости от σ_r составит

$$R = \frac{\sigma_r}{n}, \quad (250)$$

где запас прочности n принимается в зависимости от ряда факторов, как показано в § 7.

и напряжений, однородность механических свойств материала, не предусмотренные расчетом возможные перегрузки и т. д. В связи с этим величины самих запасов прочности устанавливаются на основе практики конструирования, доводки и эксплуатации машин и являются, как правило, результатом длительного наблюдения за работой машин или экспериментального изучения прочности их деталей.

Чем менее точным является определение нагрузок и напряжений, чем менее однородным является материал, чем ответственнее деталь, тем выше принимается величина запаса прочности. При повышенной точности расчета, при высоком уровне технологических процессов и качества материала, при квалифицированном обслуживании во время эксплуатации запасы прочности имеют меньшие значения.

В зависимости от степени полноты учета различных факторов, влияющих на прочность, от точности расчета усилий и напряжений, величины запасов прочности по литературным данным могут быть приняты следующие:

1. По Зодербергу [4] для наиболее благоприятных случаев в смысле возможности точного определения нагрузок и напряжений, а также при однородном материале считается возможным допускать минимальные значения запасов прочности $n = 1,3$.

В противоположном случае, когда нагрузка и напряжения достаточно точно не известны и деталь имеет сложную форму, предлагаются повышенные запасы прочности $n = 3-4$.

В средних, наиболее часто встречающихся, условиях $n = 1,5-3$. Эти коэффициенты соответствуют методу расчета прочности по Зодербергу (линейная зависимость для асимметричных циклов, гипотеза прочности Мора), причем абсолютные размеры не учитываются.

2. По Леру [8], для расчета валов на изгиб с учетом влияния концентрации напряжений и абсолютных размеров (данные § 1 гл. IX) запас прочности предлагается (только как предварительный) $n = 1,3$.

3. По Бреннеру [10], при расчете по пределу текучести и пределу усталости запас прочности может быть принят $n = 1,35$.

4. По данным ЦИАМ [10] запас прочности коленчатых валов современных авиационных моторов, определенный по способу, изложенному в § 2, с учетом концентрации напряжений и влияния абсолютных размеров на прочность составляет от 1,3 до 3,0.

5. По Ретшеру [7] запасы прочности принимаются в соответствии с тремя основными режимами нагрузки: I — нагрузка статическая, расчет по пределу текучести; II — нагрузка переменная от нуля до максимума, расчет по пределу усталости σ_0 ; III — переменная нагрузка по симметричному циклу, расчет по пределу усталости σ_{-1} , концентрация напряжений не принимается во внимание; влияние абсолютных размеров детали не оговаривается: $n_I = 1,4$; $n_{II} = 1,9$; $n_{III} = 2,4$. Запас прочности принимается равным 1,4 для мягких, пластичных сталей с $\frac{\sigma_s}{\sigma_b} \approx 0,5$. Для более твердых сталей этот запас увеличивается: при $\frac{\sigma_s}{\sigma_b} = 0,7$ до 1,6, для $\frac{\sigma_s}{\sigma_b} = 0,9$ до 1,8.

6. По Боку [11] для режима нагрузки (статическая) запас прочности по отношению к пределу текучести принимается $n_I = 1,5-2,0$; для II и III режимов нагрузки $n_{II} = n_{III} = 2,0$, причем для случая III рас-

Наибольшие допускаемые напряжения на растяжение по Боку (Maschinenbau, 1930, S. 638—639)

Металл	σ_b , кг/мм ²	σ_s , кг/мм ²	σ_{-1} , кг/мм ²	$\Delta\sigma$	Допускаемое напряжение для случаев нагрузок, кг/мм ²		
					I	II	III
Сталь мягкая углеродистая	34—42	19—23	17—21	0,20	1100—1200	900—1200	750—950
Сталь с 0,25% С отожженная	42	24	21	0,20	1200—1400	1000—1300	850—1050
То же, улучшенная	47	28	23	0,20	1400—1650	1200—1500	900—1150
Сталь с 0,35% С отожженная	50	28	24	0,22	1400—1650	1150—1500	900—1200
То же, улучшенная	55	33	26	0,22	1650—1900	1300—1700	1000—1300
Сталь с 0,45% С отожженная	60	34	27	0,23	1700—2000	1300—1750	1050—1350
То же, улучшенная	65	39	30	0,25	1850—2150	1500—2000	1100—1500
Сталь с 0,60% С отожженная	70	40	32	0,25	2000—2350	1600—2100	1200—1600
То же, улучшенная	75	45	35	0,30	2250—2600	1600—2300	1250—1750
Хромоникелевая сталь, улучшенная вязкая	65—75	49—52	35	0,25	2100—2400	1700—2300	1300—1750
То же, улучшенная твердая	75—85	52—60	39	0,30	2600—3000	1750—2500	1350—1900
Хромоникелевая сталь, улучшенная вязкая	75—90	56—67	43	0,25	2800—3300	2000—2600	1500—2000
То же, улучшенная твердая	90—105	67—79	50	0,35	3300—3800	2300—3300	1600—2500

Хромоникелевая сталь	90	54	41	0,30	2700—3000	1900—2700	1500—2100
То же, улучшенная вязкая	100—110	80—88	53	0,35	3200—4000	2300—3500	1750—2700
То же, улучшенная твердая	110—130	100—115	57	0,45	3600—4500	2000—3700	1850—2850
Стальное литье, отожженное	45	27	20	—	1300	700—1000	550—800
То же	60	37	25	—	1800	850—1200	700—1000
Чугун серый	12	—	7	0	400	350	280
Чугун специальный	25	—	14	0	800	700	560
Медь электролитическая, отожженная	22,4	4,4	9	0,22	220	—	—
Бронза	32	—	16	—	800	560—800	450—640
Латунь (60% Cu) отожженная	48	—	15,5	—	1200	520—750	420—600
Латунь (72% Cu) отожженная	34	11	14	0	500	700	560
Дуралюмин отожженный	26	22	10	0,33	900	450—650	350—500
То же, облагороженный	47	38	12	0	1600	800	600
Силерон	52	38	11	0,31	1600	500—700	400—550
Латунь облагороженный	32	19	10	—	1000	650	500
Силумин	17,5	—	4	—	300	170—250	150—200
Электрон мягкий	31	—	11	0,1	1000	600—700	500—550

При действии переменных нагрузок в расчете должна учитываться концентрация напряжений,

чет ведется по пределу усталости при симметричном цикле σ_{-1} ; для случая II — по пределу усталости σ_0 принимается $\sigma_0 = 1,3 \div 1,5 \sigma_{-1}$; концентрация напряжений принимается во внимание при расчете; влияние абсолютных размеров не оговаривается.

7. По Баху [12], запас прочности $n = 2 \div 3$; при различных режимах нагрузки принимается соотношение пределов прочности: $\sigma_{+1} : \sigma_0 : \sigma_{-1} = 3 : 2 : 1$.

Ретшером [7], в американском машиностроительном справочнике [13] и по схеме проф. Одингга [14] предлагается запас прочности определять как произведение коэффициентов, отражающих влияние отдельных факторов: $n = n_1 n_2 n_3 \dots$. Для коэффициентов $n_1, n_2, \dots$ приводятся данные в указанных выше источниках.

Вопрос о выборе наиболее подходящих для данной детали величин запасов прочности должен решаться путем учета основных вышеперечисленных факторов, по возможно полным данным о механических свойствах материала (в частности, при действии динамических нагрузок) и в связи с применением наиболее эффективных способов расчета.

Приведенные выше величины запасов прочности должны служить лишь для ориентировки и могут использоваться с надлежащей осмотрительностью. Наиболее надежные данные о необходимых величинах запасов прочности должны быть извлечены из результатов испытания деталей на прочность в условиях, близких к эксплуатационным, а также из систематизированного опыта конструкторских бюро, использовавших в своей работе современные методы расчета и данные о материалах.

Из этого, однако, не следует, что можно ограничиваться условными и схематизированными способами расчета прочности (не отражающими формы детали, режима нагрузки, свойств динамической прочности) и соответствующими запасами прочности, установленными путем ряда проверочных расчетов существующих деталей.

Такой условный расчет не позволяет оценить важнейших факторов влияния на прочность, а тем самым правильно ориентироваться в средствах увеличения прочности, целесообразного оформления детали и использования механических свойств металла.

Расчет запаса прочности обычно является расчетом проверочным, когда при уже известных размерах детали и действующих нагрузках может быть определена величина n , так как в такой расчет входит ряд данных о конфигурации и нагрузках на деталь, которые могут быть определены лишь после того, как деталь будет сконструирована.

Для расчетов прочности находят также применение таблицы допускаемых напряжений. Такие таблицы устанавливаются по механическим свойствам металла, приняв определенные коэффициенты запаса прочности, уже не дифференцированные в зависимости от характера детали, особенностей ее технологии и специфических требований, к ней предъявляемых. Более новыми таблицами допускаемых напряжений в машиностроении являются табл. 23 (по Боку) и табл. 24 (по Ретшеру). В таблице Бока, кроме цифр допускаемых напряжений, приводятся величины $\Delta\sigma$ — коэффициента чувствительности к концентрации для надрыва лабораторного типа (заостренного). Допускаемые напряжения даны для трех

Наибольшие допускаемые напряжения на растяжение для различных материалов (по Ретшеру, Maschinenbau, 1931, S. 80)

Материал	σ_b кг/мм ²	σ_s кг/мм ²	σ_{-1b} кг/мм ²	Случаи нагрузок*		
				I	II	III
				Допускаемые напряжения кг/мм ²		
Сталь кованая	37	20,4	18	$\frac{20,4}{1,4} = 14,6$	11,8	$\frac{18}{2} = 9^{**}$
	50	27,5	22	$\frac{27,5}{1,4} = 19,6$	15,3	$\frac{22}{2} = 11$
	70	42	30	$\frac{42}{1,5} = 28$	21,5	$\frac{30}{2} = 15$
Стальное литье	38	21	16	$\frac{21}{1,4} = 15$	11,5	$\frac{16}{2} = 8$
	60	33	24	$\frac{33}{1,6} = 20,6$	16,3	$\frac{24}{2} = 12$
Чугун обыкновенный	14	—	4,5	$\frac{14}{3} = 4,7$	3,50	$\frac{4,5}{2} = 2,25$
	$\sigma_{из} = 28$	—	8,2	$\frac{28}{3} = 9,3$	6,70	$\frac{8,2}{2} = 4,1$
Чугун высоко- сортный	26	—	9	$\frac{26}{3} = 8,7$	6,60	$\frac{9}{2} = 4,5$
	$\sigma_{из} = 46$	—	14	$\frac{46}{3} = 15,3$	11,20	$\frac{14}{2} = 7$
Латунь (Си 67%) литая		(10)	(6)	$(\frac{10}{1,7} = 5,9)$	4,5	$(\frac{6}{2} = 3)$
Латунь (Си 59%) отожженная		(15)	12	$\frac{15}{1,6} = 9,4$	(7,7)	$\frac{12}{2} = 6$
Латунь волоченая		(29)	18	$\frac{29}{1,8} = 16,1$	(12,6)	$\frac{18}{2} = 9$

* Цифры в скобках должны использоваться осторожно.

** При действии переменных нагрузок в расчете должно учитываться влияние концентрации напряжений.

основных режимов нагрузки: I — статической, II — изменяющейся от нуля до максимума, III — изменяющейся по симметричному циклу. Данные, приведенные в таблице Бока, оцениваются как тяготеющие к верхним пределам и не всегда применимы.

В табл. 24 запасы прочности при статической нагрузке для сталей принимаются 1,4÷1,6; для цветных металлов — 1,6÷1,8, для чугуна — 3. Запас прочности при переменной нагрузке по симметричному циклу принят в таблице равным 2, при этом при расчете должно приниматься во внимание влияние концентрации напряжений (цифры

Таблица 25

Допускаемые напряжения для валов при переменном изгибе по Леру, кг/см^2 (симметричный цикл)

		Сталь углеродистая		Сталь CrNi	Сталь CrNiW
	$\sigma_b, \text{кг/мм}^2$	45	65	80	120
	$\sigma_s, \text{кг/мм}^2$	25	36	56	100
p/d	$d, \text{мм}$	$\sigma_{доп}$	$\sigma_{доп}$	$\sigma_{доп}$	$\sigma_{доп}$
0	30	550	650	750	1000
	60	500	550	600	820
	100	430	500	550	750
0,05	30	750	900	1050	1570
	60	620	730	900	1300
	100	550	670	800	1150
0,1	30	900	1100	1300	1950
	60	750	920	1100	1600
	100	680	850	1000	1450
0,3	30	1300	1700	2000	3050
	60	1070	1400	1700	2550
	100	970	1270	1550	2300

в скобках должны использоваться осторожно, видимо, как недостаточно обоснованные). Допускаемые напряжения при переменной нагрузке от нуля до максимума (II случай) принимаются как средние между напряжениями I и III случаев.

Лером [8] применительно к расчету валов составлена табл. 25 допускаемых напряжений, отражающая результаты соответствующих опытных работ по определению пределов усталости моделей валов. Данные таблицы рекомендуются Лером как предварительные.

Для определения допускаемых напряжений при асимметричных циклах используется диаграмма Смита согласно § 6 или Хей [15].

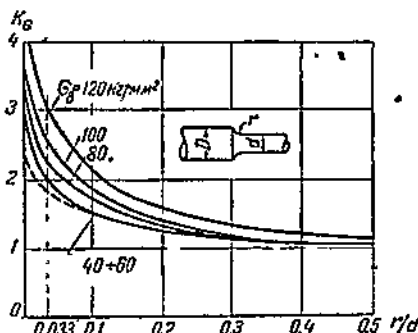
ДАННЫЕ К РАСЧЕТУ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

§ 1. Влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров]

Эффективные коэффициенты концентраций (при изгибе симметричный цикл изменения напряжений) для валов со ступенчатым изменением диаметра от D к d и переходными галтелями по четверти окружности радиуса r даны на фиг. 229. Значения K_σ даны в зависимости от $\frac{r}{d}$ для различных временных сопротивлений стали. Эти коэффициенты получены путем испытания на усталость моделей $\frac{D}{d} = \frac{60}{30}$ мм, номинальные напряжения принимаются по сечению меньшего диаметра.

Таблица 26

$\sigma_b, \text{кг/мм}^2$	37	43	59	82
$\sigma_s, \text{кг/мм}^2$	25	21	36	75
$\sigma_{-1b}, \text{кг/мм}^2$	17	19	24	37
	k_σ	k_σ	k_σ	k_σ
Форма 1	1,9	1,73	1,85	2,5
Форма 2	2,45	2,4	3,2	4,35



Фиг. 229. Эффективные коэффициенты концентрации для валов с буртом переменного сечения, при изгибе (по Леру).

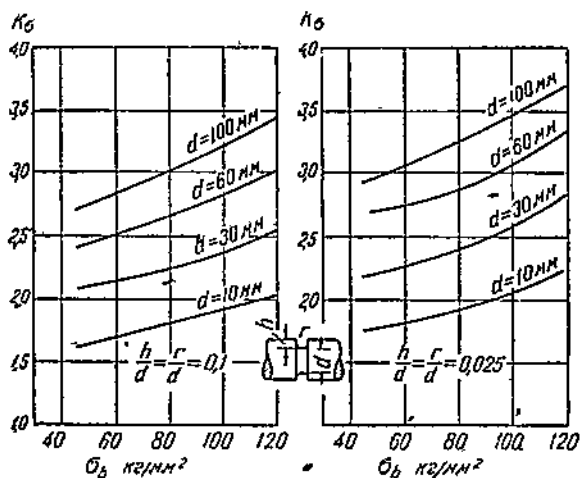
Для валов с кольцевой выточкой полукруглого профиля значения K_σ , полученного таким же образом, в зависимости от временного сопротивления даны на фиг. 230. Номинальные напряжения принимаются по наименьшему сечению, соответствующему дну выточки.

Значения K_σ при наличии шпоночных пазов и насаженной на вал детали, согласно фиг. 231, даны в табл. 26 [8]. За номинальные напряжения принимаются напряжения по сечению брутто. При наличии поперечного отверстия значения K_σ в зависимости от σ_b приведены на фиг. 232. Номинальные напряжения отнесены к сечению нетто. Максимальные напряжения возникают в точках I—I.

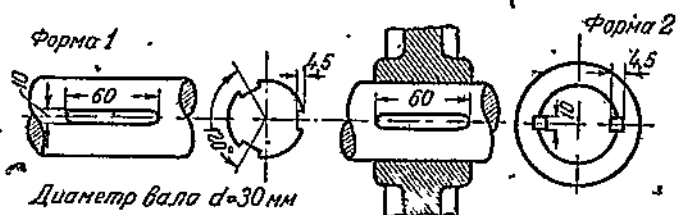
Значение K_σ при изгибе для стержней с поперечным отверстием в зависимости от отношения диаметра отверстия к диаметру образца $\frac{d}{D}$ (при $D = 7,52$ мм) даны на фиг. 233 для нескольких временных сопротивлений (по Керберу и Хемпелю).

Значения K при наличии напессованных по фиг. 234 на вал деталей даны на фиг. 235 в зависимости от σ_b для ступицы обычной и пружинящей конструкции.

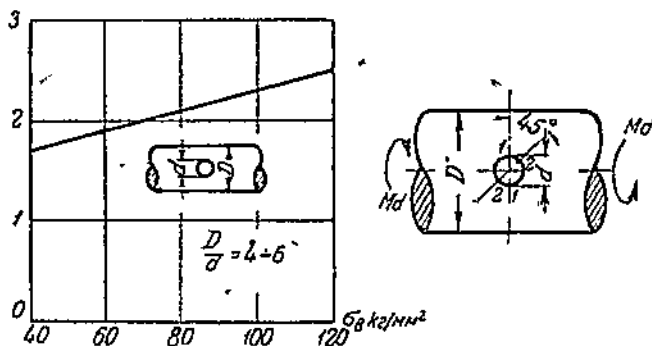
Значения K при посадке на вал нагретых подшипников качения даны в табл. 27; данные получены для вала диаметром 60 мм. Приведенные выше данные относятся к валам диаметром 30—100 мм.



Фиг. 230. Эффективные коэффициенты концентрации для валов с канавкой переменного сечения при изгибе (по Леру).



Фиг. 231. Типы соединений с валом.



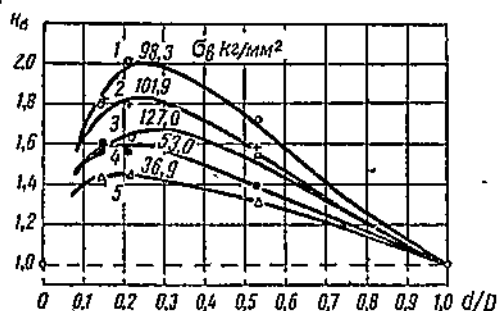
Фиг. 232. Эффективные коэффициенты концентрации для вала с поперечным отверстием при изгибе и кручении (по Леру).

В табл. 28 даны значения K_σ , полученные при испытании на изгиб при вращении моделей валов из стали 35 со ступенчатым переходом

Таблица 27

$\sigma_b, \text{кг/мм}^2$	Полированная поверхность	Накатанная поверхность
42	1,18	
65	2,15	1,38
75	1,23	
100	3,30	1,75

и с напрессованными кольцами [16]. В конструкции *в* применены разгружающие выточки, значительно снижающие влияние концентрации напря-

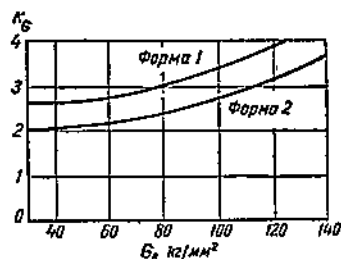


Фиг. 233. Эффективные коэффициенты концентрации для образцов ($D = 7,52 \text{ мм}$) с поперечным отверстием в зависимости от отношения диаметра отверстия к диаметру образца.

1, 2, 3—хромоникелевые стали; 4—углеродистая сталь, 0,21%С; 5—углеродистая сталь 0,11%С (по Керберу, и Хенпелю).



Фиг. 234. Типы прессовых посадок ступиц.



Фиг. 235. Эффективные коэффициенты концентрации для вала с насаженными деталями (по Леру).

жений; еще большее повышение прочности получается при введении усиления сечения вала.

Таблица 28

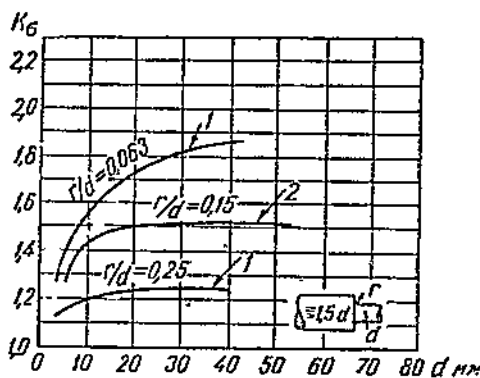
а	б	в	г
$d = 40 \text{ мм}$ $D = 52 \text{ мм}$ $\rho/d = 1/40; 1/10; 1/5$ $K_\sigma = 2,40; 1,45; 1,10$	$d = 40 \text{ мм}$ $D = 80 \text{ мм}$ $1,9$	$d = 40 \text{ мм}$ $D = 80 \text{ мм}$ $1,35$	$d_1 = 38 \text{ мм}$ $d = 40 \text{ мм}$ $\rho = 20 \text{ мм}$ $1,05$

Для валов и стержней меньших диаметров значения K_t оказываются меньшими. Характер этого уменьшения показан на фиг. 236 для ступенчатого изменения диаметра: 1 — для углеродистой стали с 0,45% С; $\sigma_s = 23$, $\sigma_b = 53$ кг/мм²; 2 — для никельмолибденовой стали с 0,42% С; 2,96% Ni; 0,38% Mo; $\sigma_s = 32$, $\sigma_b = 63$ кг/мм². На фиг. 237 показаны для тех же сталей изменения K_t для поперечного отверстия.

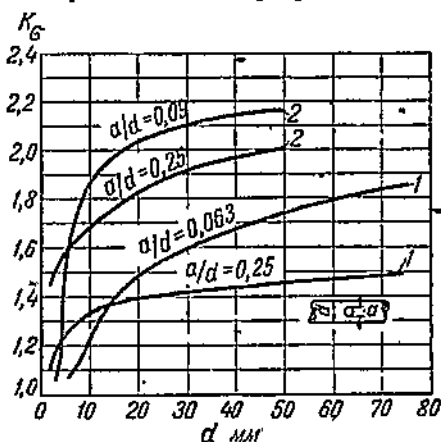
Эффективные коэффициенты концентрации при кручении. Для валов со ступенчатым изменением диаметра при значениях $K_t > 2$ можно приближенно определять K_t по отношению:

$$K_t = 0,6 + 0,8 K_s.$$

Для валов с поперечным отверстием значения $K_t = K_s$ даны на фиг. 232 в зависимости от временного сопротивления на разрыв стали.



Фиг. 236. Влияние размеров сечения на эффективный коэффициент концентрации при изгибе (по Петерсону).



Фиг. 237. Влияние размеров сечения на эффективный коэффициент концентрации при изгибе (по Петерсону).

Для хромоникельвольфрамовой стали $\sigma_b = 92$ кг/мм², $\sigma_s = 78$ кг/мм², величины K_t для бурта (кривая 1), для шпоночного паза (кривая 2), для поперечного отверстия (кривая 3) даны на фиг. 238 в зависимости от диаметра вала [17].

Эффективные коэффициенты концентрации при растяжении—сжатии. Для поперечных отверстий в плоских стержнях ($B/d = 3 \div 4$, где B — ширина стержня, d — диаметр отверстия):

углеродистая сталь $\sigma_b = 37 - 60$ кг/мм ²	$K_t = 1,7 - 1,5$;
строительная сталь $\sigma_b = 59$ кг/мм ²	$K_t = 1,5 - 1,7$;
рессорная сталь $\sigma_b = 97$ кг/мм ²	$K_t = 1,3 - 1,4$.

Для круглых стержней с нарезкой при передаче нагрузки на него через гайку K_t составляет [18]:

	Углеродистая сталь	Легированная сталь
резьба Витворта	3,6—3,8	4,2—4,4
резьба метрическая	4,8—5,0	5,5—5,8

(получено на образцах диаметром $1/4$).

Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений $\Delta_0 = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_{-1K}}{\sigma_{-1}}$

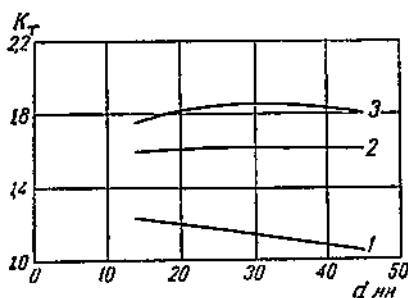
№ п/п	Материал	Приблизительно соответствующие марки сталей, применяемых в СССР	Химический состав, %							Механические характеристики						Примечание	
			C	Si	Mn	P+S	Cu	Ni	Cr	σ_b	σ_s	δ_0	σ_{-10}	σ_{-1K}	Δ_2		
1	St 37 (0,19% C)	ОСТ 10	0,10	0,17	0,93	—	—	—	—	—	36	25	25	17	14	0,18	1. Lefr; кольцевой V-образный надрез глубиной 0,1 мм, радиус закругления $r = 0,05$ мм, $\alpha_s = 3,25$
2	St 42, 11	ГУТАП 1010	0,21	0,20	0,76	—	—	—	—	—	45	28	23	21	17	0,19	
3	St 70, 11	ОСТ 20	0,56	0,30	0,91	—	—	—	—	—	73	48	18	36	26,2	0,23	
4	VGN 15	ОСТ 50	0,38	0,21	0,76	—	—	1,70	0,80	—	75	49	—	36	25	0,31	
5	VGN 25	40XH	0,25	0,37	0,46	—	—	2,90	0,80	—	163	140	7	65	26	0,60	
6	CrSi рессорная сталь	20/XH4A	0,65	1,50	0,65	—	—	—	0,80	—	160	140	6	76	29	0,62	
7	CrVa сталь	—	0,37	0,35	0,97	—	—	—	1,05	0,27	100	84	13	42	28	0,34	
8	VGN 25	—	0,33	0,25	0,63	—	—	2,50	1,10	—	120	103	10	56	29	0,48	
9	CrMo сталь	—	0,53	0,41	0,45	—	—	—	1,21	0,3	102	96	10	48	25	0,48	
10	V2A (аустенитная сталь)	—	0,10	0,20	0,26	—	0,04	0,49	14,5	—	75	49	15	38	30	0,21	
11	Дуралюмин	—	—	0,3	0,5	—	4,0	0,5	—	—	40	23	15	14	13	0,07	
12	Электрон	—	—	—	—	—	—	4,5	—	Zn 4,5	36	20	14	13	12	0,08	
13	Латаль	—	—	0,2	—	—	4,0	—	—	—	32	18	14	11	9,5	0,14	
14	Силумин	—	—	13,0	—	—	—	—	—	—	17,5	12	4,5	4,5	4,5	0,0	
15	Латунь	—	—	—	—	—	70	—	—	Zn 30	38	25	20	18	16	0,11	
16	Красная медь	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22	6,5	50	9,0	7,5	Отожженная	
17	Никелевая бронза	—	Al 1,5	—	—	—	—	34	—	—	49	25	36	18	16		0,17
18	Серый чугун	—	3,2	1,2	0,5	—	—	—	—	—	12	—	—	7	7	0,0	
19	Специальный чугун (Ge-14)	—	3,0	1,9	0,6	—	—	—	—	—	17	—	—	—	9	0,1	
20	Специальный чугун (Ge-24)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25	—	—	—	14	0,0	
21	St 46	ОСТ 30	0,35	0,24	0,73	—	—	—	—	—	55	34	20	26	20	0,23	
22	CrNiMo сталь	25XHBA	0,30	0,12	0,46	—	—	4,15	1,10	W 1,2	120	105	10	56	28	0,50	

Чувствительность материалов к концентрации напряжений характеризуется величинами Δ_σ и Δ_τ (§ 2). В табл. 29 приведены данные по Δ_σ для ряда конструкционных металлов [19], при V-образном надрезе типа Лера (угол при вершине 60° , радиус закругления $\rho = 0,05$ мм), соответствующем коэффициенту концентрации $\alpha_\tau = 3,25$. Некоторые данные получены при наличии бурта ($\alpha_\sigma = 2,95$).

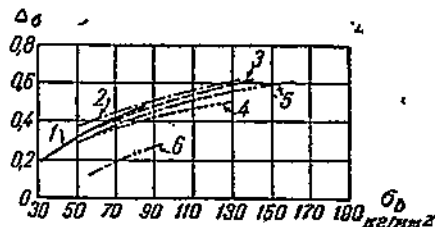
Для сталей с ростом временного сопротивления чувствительность к концентрации обычно увеличивается. Это увеличение характеризуется фиг. 239, из которой можно заимствовать приближенные значения Δ_σ для сталей с известным σ_b .

Для величины Δ_τ опытных данных почти нет, и приблизительно ее можно принимать

$$\Delta_\tau = 0,6 \Delta_\sigma.$$



Фиг. 238. Влияние размеров сечения на эффективный коэффициент концентрации при кручении (по Майлендеру).



Фиг. 239. Чувствительность к концентрации напряжений в зависимости от временного сопротивления на растяжение (по Майлендеру):

1—нелегированные стали; 2—марганцевые и кремнистые стали; 3—никелевые стали; 4—хромистые стали; 5—хромоникелевые стали; 6—аустенитовые стали.

В тех случаях, когда нет опытных данных для K_σ или K_τ применительно к данной конфигурации, приближенные их значения могут вычисляться по выражениям (228):

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1);$$

$$K_\tau = 1 + q(\alpha_\tau - 1),$$

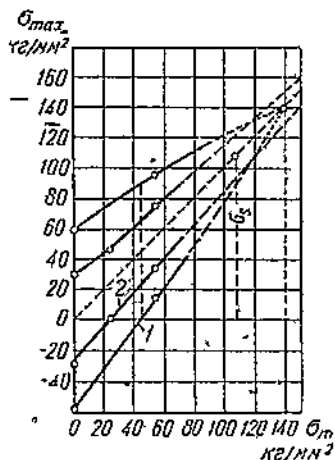
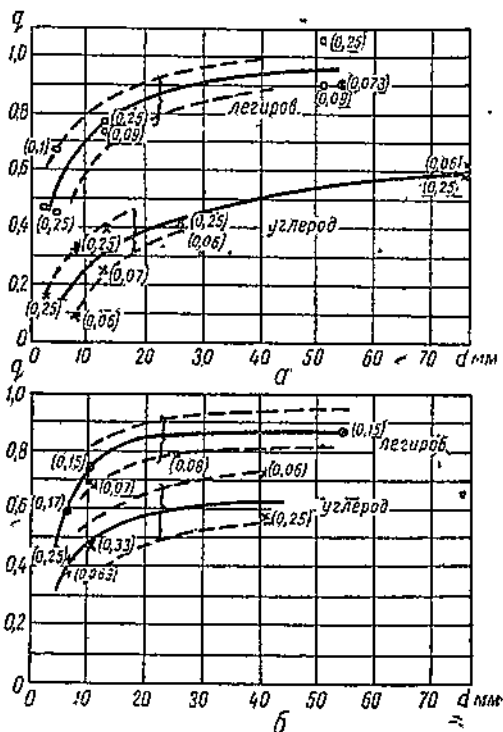
где q — коэффициент чувствительности металла.

Следует принимать для конструкционных сталей [4] $q = 0,6 \div 0,8$; меньшие значения соответствуют сталям средней прочности, большие — сталям высокой прочности.

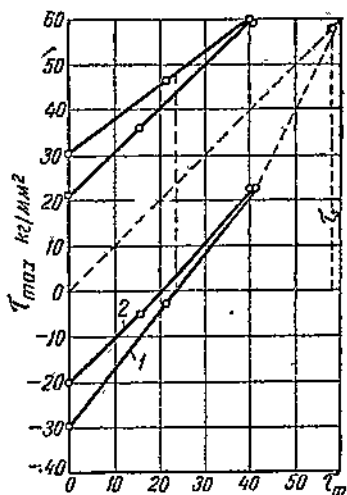
Коэффициент q согласно ряду опытных данных растет с увеличением абсолютных размеров сечения стержня. На фиг. 240 приведены соответствующие данные по опытам Петерсона [20]; a — для поперечного отверстия, b — для переходной галтели.

Концентрация напряжений изменяет характер диаграмм Смита, так как снижаются величины амплитуд переменной нагрузки и увеличиваются значения статических номинальных напряжений, при которых возникает текучесть. На фиг. 241 приведены такие диаграммы для хромоникельмарганцевой стали (0,30% C, 1,25% Mn, 0,6 Cr, 3,5% Ni), $\sigma_b = 116$ кг/мм², $\sigma_s = 109$ кг/мм², $\sigma_{-1} = 59$ кг/мм²; кривая 1 — без концентрации напряжений, кривая 2 — при наличии концентрации напряжений (с коэффициентом концентрации, равным 2). На фиг. 242

Фиг. 240. Зависимость коэффициента чувствительности металла от абсолютных размеров сечения (по Петерсону).

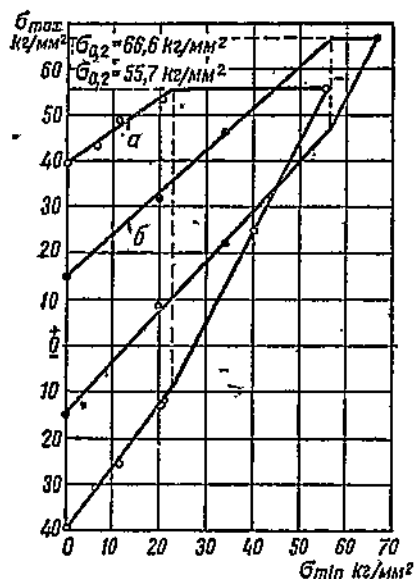


Фиг. 241. Диаграмма σ_{max} , σ_m при изгибе для хромоникель-марганцевой стали (по Бухману).



Фиг. 242. Диаграмма τ_{max} , τ_m при кручении для хромоникель-марганцевой стали (по Бухману).

дана диаграмма этой же стали при кручении. На фиг. 243 даны диаграммы для рессорной стали при растяжении—сжатии на гладких образцах (а) и образцах с поперечным отверстием (б). При использовании таких диаграмм обычно принимается, что концентрация напряжений снижает только амплитуду знакопеременных напряжений, поэтому эффект последней относится только к этой части напряжений.



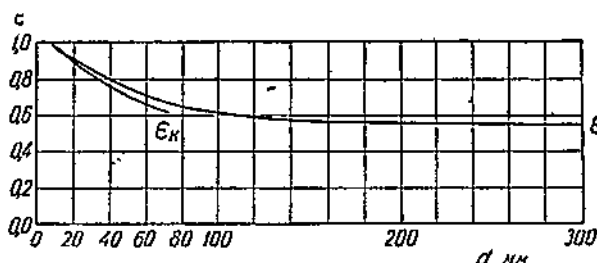
Фиг. 243. Диаграмма $\sigma_{\max}$, σ_m при растяжении—сжатии для рессорной стали с временным сопротивлением $\sigma_b = 88-90$ кг/мм² (по Помпу и Хемпелю).

меров на величину коэффициента концентрации напряжения, можно рекомендовать для оценки изменения предела усталости при наличии

Увеличение абсолютных размеров сечений уменьшает предел усталости гладких валов при изгибе и при кручении. Это уменьшение характеризуется фиг. 244, на которой дано уменьшение в зависимости от диаметра, предела выносливости при изгибе ϵ_u и кручении ϵ_k причем предел усталости при $d = 10$ мм принят за единицу. Значения ϵ , приведенные на диаграмме, следует считать за нижний предел значений, свойственный обычно легированным сталям. Углеродистым сталям соответствуют большие значения $\epsilon \geq 0,7$.

Эффективность концентрации напряжений возрастает с увеличением абсолютных размеров, как это видно на фиг. 236 и 237.

Ввиду отсутствия надежных данных по влиянию абсолютных раз-



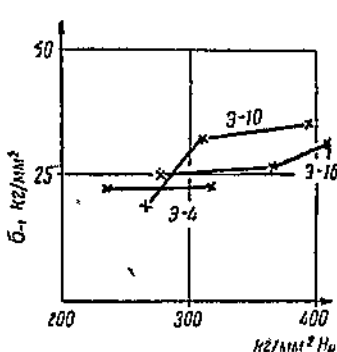
Фиг. 244. Диаграмма уменьшения пределов выносливости валов при изгибе ϵ_u и кручении ϵ_k в зависимости от размеров сечения (по Леру и Майлендеру).

концентрации напряжения, в зависимости от абсолютных размеров, пользоваться кривыми фиг. 244, не учитывая отдельно влияния абсолютных размеров на величину коэффициента концентрации, либо использовать формулу (229) § 2, гл VIII.

§ 2. Влияние термической обработки, уковки и структуры на прочность при переменных нагрузках

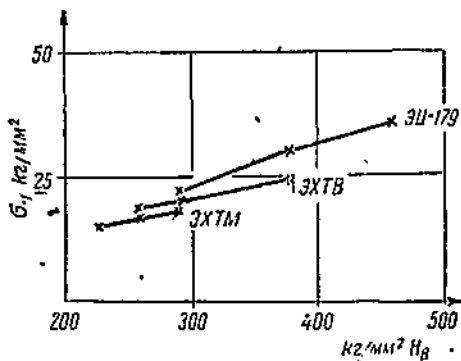
Основным фактором термической обработки, влияющим на предел усталости конструкционных улучшаемых сталей и чувствительность к концентрации напряжений, является температура отпуска. С повышением температуры отпуска предел усталости и чувствительность к концентрации обычно уменьшаются. Однако в этом отношении имеются исключения.

На фиг. 245 и 246 даны диаграммы зависимости предела усталости при изгибе σ_{-1} от твердости в связи с различными температурами отпуска для шести конструкционных сталей союзного производства. Температуры закалки взяты рекомендованные спецификацией завода.



Фиг. 245. Пределы усталости при изгибе в зависимости от твердости стали.

Сталь Э-4: 0,19% С, 3,2% Ni, 0,70% Cr; закалка при $t=880^\circ$;
сталь Э-10: 0,34% С, 3,16% Ni, 1,22% Cr; закалка при $t=820^\circ$;
сталь Э-16: 0,15% С, 4,24% Ni, 1,54% Cr, 0,98% W; закалка при $t=850^\circ$ (по данным автора).



Фиг. 246. Пределы усталости при изгибе в зависимости от твердости стали.

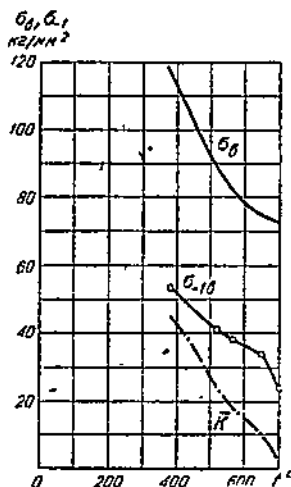
Сталь ЭХТМ: 0,27% С, 0,95% Cr, 0,18% Ni; закалка при $t=880^\circ$;
сталь ЭХТВ: 0,3% С, 1,15% Cr, 0,27% Ni; закалка при $t=880^\circ$;
сталь хромансиль (ЭИ-179): 0,32% С, 1,2% Si, 1,08% Mn, 0,91% Cr, 0,16% Ni; закалка при $t=850^\circ$.

Эти зависимости получены испытаниями образцов чистым изгибом при вращении. Образцы имели диаметр $d=16$ мм.

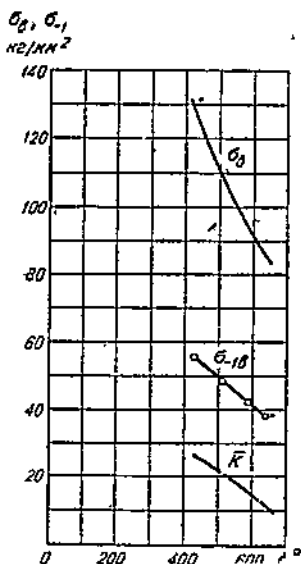
На фиг. 247—249 даны диаграммы зависимости σ_b , σ_{-1} и K_σ от температуры отпуска по данным Шмидта [21] для трех марок стали. Эти результаты получены испытанием плоских образцов сечением $15 \times 4,5$ мм на вибрационной машине MAN. Надрез на широкой стороне для создания концентрации напряжений осуществлялся V-образного типа глубиной 0,5 мм при угле 60° и радиусе на дне 0,25 мм.

Влияние температур отпуска на пределы усталости и чувствительность к концентрации значительно меньше, чем на временное сопротивление, предел текучести и удельную ударную вязкость.

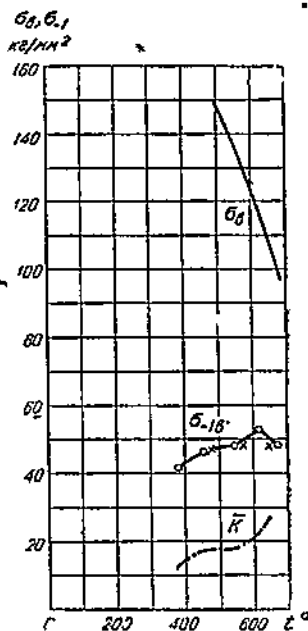
Изменение степени уковки стали незначительно отражается на статической прочности и ударной вязкости стали вдоль волокон, но увеличение степени уковки приводит к существенному уменьшению ударной вязкости поперек волокон. На фиг. 250 показано изменение α_k



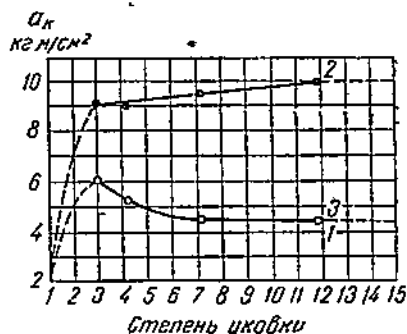
Фиг. 247. Углеродистая сталь состава 0,42% С, 0,16% Si, 0,74% Mn; закалка при $t = 800^\circ$ в воде.



Фиг. 249. Хромоникелевая сталь состава 0,35% С; 0,30% Si; 0,66% Mn; 3,75% Ni; 0,70% Cr; закалка при $t = 830^\circ$ в масле.

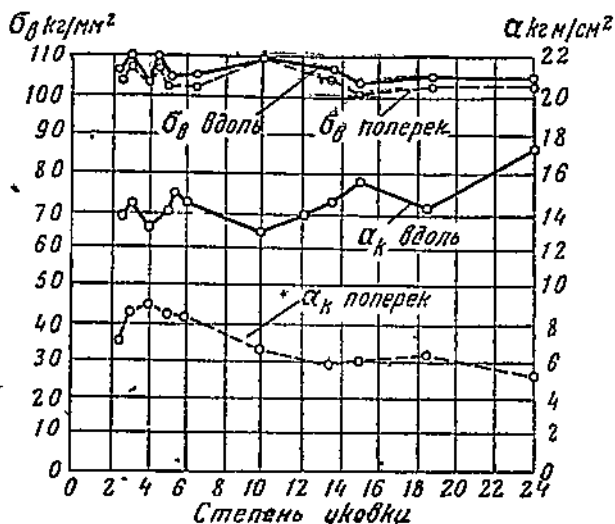


Фиг. 248. Хромомолибденовая сталь состава 0,50% С, 0,30% Si, 0,63% Mn, 1,00% Cr, 0,29% Mo; закалка при $t = 860^\circ$ в масле.



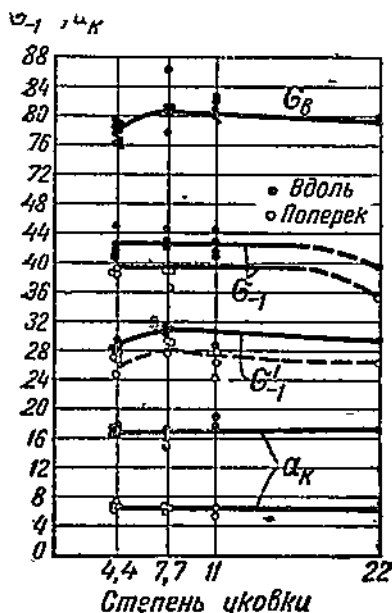
Фиг. 250. Влияние степени уковки на ударную вязкость стали Э-16 (по Б. Шейнину).

в зависимости от степени уковки для стали 18 ХНВА: кривая 1 поперек волокон, кривая 2—вдоль волокон [22]. На фиг. 251 такие же



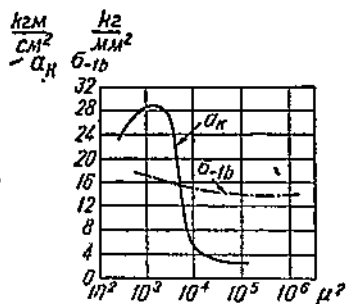
Фиг. 251. Влияние степени уковки на механическую характеристику стали Э-18 (по Н. Корнееву).

данные приведены для стали Э-18 [23] одновременно с кривой изменения временного сопротивления. На фиг. 252 приведены по данным



Фиг. 252. Влияние степени уковки на механические характеристики хромо-никель-молибденовой стали (по Шмидту).

Шмидта значения σ_b , σ_{-1} , σ'_{-1} и α_k для хромо-никель-молибденовой стали (0,27% С, 0,20% Si, 0,53% Mn, 0,85% Cr, 3,18% Ni, 0,32% Mo) в зависимости от степени уковки. Предел усталости, как и σ_b , изменяется со степенью уковки весьма незначительно. Для этой стали остается неизменной также ударная вязкость.



Фиг. 253. Влияние размеров зерна на предел усталости и ударную вязкость мягкой углеродистой стали (по Худременту).

Направление волокон влияет на предел усталости. Поперек волокон предел усталости меньше, чем вдоль волокон: для сталей сред-

ней прочности—на 10—15% и для сталей высокой прочности—на 20—30%.

Влияние концентрации напряжений поперек волокон меньше.

Микроструктура связана с прочностью стали под переменной нагрузкой. Характерное отношение $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}$ находится по данным Казо в связи с структурой [24].

Тип структуры	Углеродистые стали	Специальные стали
Феррит	0,57—0,63	—
Перлит	0,38—0,41	—
Аустенит	—	0,35—0,46
Мартенсит	0,25	0,25—0,47
Осмондит	0,56	0,57—0,60

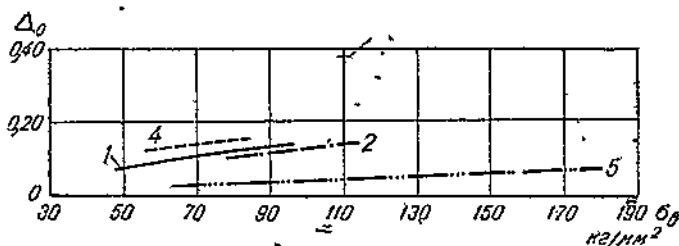
Осмондитная структура дает более высокие относительные величины предела усталости.

С увеличением зерна стали предел усталости уменьшается, однако в значительно меньшей степени, чем ударная вязкость.

На фиг. 253 дана диаграмма [25] зависимости σ_{-1b} и a_k от площади зерна для мягкой стали.

§ 3. Влияние обработки поверхности, коррозии и температуры на усталость

Чистота механической обработки поверхности отражается на усталости металлов под переменными нагрузками, причем тем больше, чем чувствительнее металл к концентрации напряжений. Величины коэффициентов поверхностной чувствительности Δ_0 для шлифованной поверхности в зависимости от σ_b даны на фиг. 254.



Фиг. 254.— Коэффициент поверхностной чувствительности в зависимости от временного сопротивления при растяжении (по Майлендеру).

1—для нелегированных сталей; 2—для марганцевых и кремнистых сталей; 3—для хромистых сталей; 4—для хромистых сталей; 5—для хромоникелевых сталей.

Величины Δ_0 могут также определяться по коэффициенту чувствительности к концентрации Δ_s при остром надрезе типа Лера-Лудвика, а именно $\Delta_0 = \eta \Delta_s$, где η по Леру [26] составляет

Состояние поверхности

Шлифовкаждачным полотном	0,0—0,1
Обдирка	0,4—0,6
Опиловка напильником	0,3—0,4
Окалина, прокатная пленка	0,8—1,2
Повреждение от удара зубилом	0,3—0,5

Цветные металлы и чугуны мало чувствительны к концентрации и к обработке поверхности и для них можно считать $\Delta_0 = 0$.

Коррозия поверхности является фактором, сильно влияющим на выносливость металла под переменными нагрузками.

Величины коэффициентов чувствительности к коррозии для ряда конструкционных металлов при знакопеременном изгибе даны в табл. 30.

Таблица 30

Стали	C%	Si%	Mn%		Состояние	σ_b	σ_s	Δ_k	Среды
Углеродистая сталь . . .	0,10	0,17	0,93	—	Отожженная	36	25	0,35	Вода
Cr—V " . . .	0,45	0,28	1,00	—		65	40	0,50	"
Cr—V " . . .	0,37	0,35	0,97	Cr 1,05 V 0,27	Улучшенная	100	84	0,64	"
Cr—V " . . .	0,54	0,25	0,82	Cr 1,1 V 0,25	"	145	115	0,79	"
Cr—Ni " . . .	0,15	0,23	0,50	Cr 0,8 Ni 3,5	"	93	74	0,63	"
Cr—Mo " . . .	0,53	0,41	0,45	Cr 1,21 Mo 0,3	"	102	96	0,66	"
Cr—NiW " . . .	—	—	—	—	"	161	130	0,82	"
Нержавеющая сталь V2A	—	—	—	—	Отожженная	67,6	28,2	0,54	"
Стадное литье	—	—	—	—	—	11,6	—	0,36	"
Чугун серый	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Медистая строительная сталь	—	—	—	—	—	48,6	34,1	0,53	"
Алюминий	—	—	—	—	—	9,8	5,5	0,40	Мор- ская вода
Дуралюмин	—	—	—	—	Улучшен.	40	23	0,50	То же
Склерон	—	—	—	—	"	57	48	0,54	"
Силумин	—	—	—	—	Отливка	19,6	8,4	0,25	"
Электрон	—	—	—	—	Отожжен.	29	13	0,68	"
Латунь	—	—	—	—	Отожжен.	34	11	0,07	"

У конструкционных сталей с увеличением временного сопротивления и предела усталости чувствительность к коррозии увеличивается. Это характеризуется фиг. 255, где даны пределы усталости σ_{-1} , σ'_{-1} (при коррозии) в зависимости от σ_b .

Коэффициенты чувствительности к разным состояниям поверхности в зависимости от σ_b даны на фиг. 256 [27].

Для случая переменного кручения можно приближенно принимать $\Delta_{kc} = 0,6 \Delta_{ks}$.

Разрушающее напряжение при наличии коррозии непрерывно уменьшается с увеличением количества циклов повторения нагрузки, поэтому пределы усталости при коррозии являются обычно условными для данного числа циклов. Приведенные в таблицах значения пределов усталости обычно определялись для 10 миллионов повторения нагрузки.

При действии коррозии увеличение частоты изменения нагрузки несколько понижает предел усталости (при одинаковой общей длительности испытания).

Защитные против коррозии покрытия повышают предел усталости.

Углеродистая сталь 0,47%

Полировка	
Гальваническая оцинковка	($\delta = 0,003$ мм)
Шерардизация	($\delta = 0,05$ мм)
Кадмирование	($\delta = 0,006$ мм)

Углеродистая сталь 0,70%

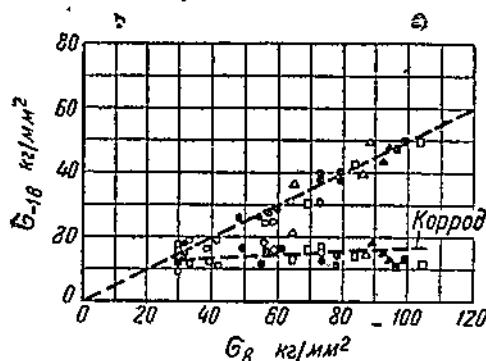
Полировка	
Шерардизация	($\delta = 0,05$ мм)
Кадмирование	($\delta = 0,02 - 0,03$ мм)

Без коррозии С коррозией

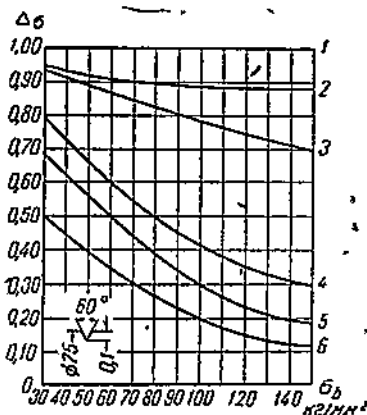
σ_{-1} кг/мм ²	σ_{-1} кг/мм ²
43	14
43	43
31	31
32	32
35	21
29	29
29	29

Цементация и нитрирование повышают предел усталости, уменьшают чувствительность к концентрации напряжений и к дефектам обработки поверхности.

Для стали с 0,20% С при толщине цементированного слоя, равного 0,2 диаметра, при малых образцах увеличение предела усталости установлено в пределах 36—37%. При уменьше-



Фиг. 255. Пределы усталости при коррозии и без коррозии в зависимости от временного сопротивления при растяжении (по Майлендеру).



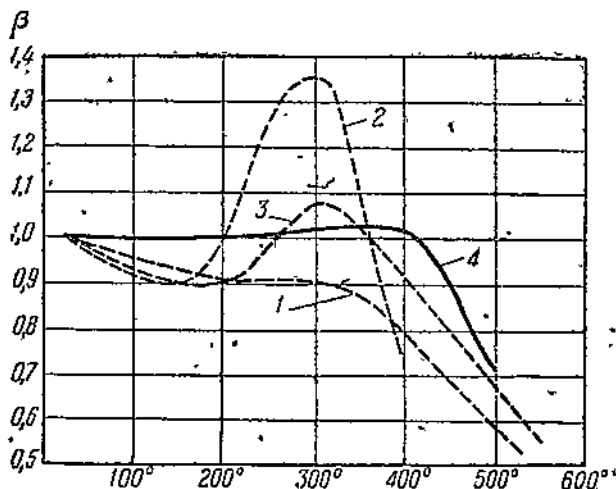
Фиг. 256. Коэффициенты поверхностной чувствительности в зависимости от временного сопротивления при растяжении (по данным VDI)

1—для полированной поверхности; 2—для шлифованной поверхности; 3—для обработанной резцом поверхности; 4—для прокатной плети (нижние значения); 5—для поверхности, корродированной в подопроводной воде; 6—для поверхности, корродированной в морской воде.

нии толщины слоя по отношению к диаметру эффект повышения прочности уменьшается. В результате нитрирования поверхности предел усталости повышается на 15—30% на гладких образцах, а также почти полностью устраняется влияние концентрации напряжений.

В применении к деталям реальных размеров не принято учитывать повышение предела усталости от цементации или нитрирования, тем более, что им обычно подвергаются только трущиеся поверхности, но не зоны концентрации напряжений. Прочность детали оценивается по прочности металла сердечника. Поверхностный наклеп применяется как средство к увеличению предела усталости деталей. В табл. 31 приведены данные об уменьшении эффективного коэффициента концентрации в результате поверхностного наклепа (вальцовка галтелей, обжимание штемпелем поперечных отверстий).

Сталь	$\frac{D}{mm}$	$\frac{p}{d}$	$\frac{d}{D}$	K_a	K_r	K_s	K_t	Форма
1) 0,12% C, 0,34% Si, 0,55% Mn; $\sigma_B = 41 \text{ кг/мм}^2$ $\sigma_S = 27,5 \text{ кг/мм}^2$	17	0,10 0,052 0,052	0,84 0,91 0,91	Без наклепа 1,75 2,14 —	— — 1,51	С на- клепом 0,85 0,98 —	1,03	Канавка
2) 0,45% C, 0,28% Si, 1% Mn; $\sigma_B = 65 \text{ кг/мм}^2$ $\sigma_S = 40 \text{ кг/мм}^2$	14	0,042	0,84	1,87	—	1,08		
3) 0,15% C, 0,23% Si, 0,50% Mn, 0,80% Cr, 3,50% Ni	14	0,042	0,84	1,87	2,57	—	1,28	Бурт
4) 0,24% C, 0,22% Si, 0,91% Mn	14	0,042	0,84	1,87	1,67	—	1,25	
5) 0,12% C, 0,34% Si	20	—	0,19	1,58	1,67	—	1,17 0,82	Поперечное отверстие
6) 0,53% Mn; $\sigma_B = 41 \text{ кг/мм}^2$ $\sigma_S = 27,5 \text{ кг/мм}^2$	16	—	0,16	—	1,57	—	1,24 1,08	



Фиг. 257. Влияние температуры на предел усталости.

На валах с сечениями больших абсолютных размеров (25—50 мм) для углеродистой конструкционной стали (0,50% C) увеличение предела усталости за счет накатки поверхности было достигнуто на 25—30% [28].

Материал	Химический состав металла, %						Предел усталости образца		Отношение $\sigma_{-1b}/\sigma'_{-1b}$	
							гладкого σ_{-1b}	надрезанного σ'_{-1b}		
							+27° C	-40° C	+27° C	-40° C
Сталь рельсовая	C — 0,72	Mn — 0,75	P — 0,03	S — 0,023	Si — 0,15		42,9	51,3	21	28,8
То же	C — 0,75	Mn — 0,76	P — 0,024	S — 0,029	Si — 0,19		42,9	50,5	21	26
Дуралюмин	Cu — 3,2	Al — 95,5	Fe — 0,3	Mg — 0,7	Si — 0,3		11,9	14,8	6,3	9,1
Латунь	Cu — 62	Zn — 35	Pb — 3,0				18,3	19,0	11,9	12,3
Серый чугун	C — 3,25	Mn — 0,6	P — 0,46	S — 0,096	Si — 1,1		6,3	8,1	7,0	9,5
Серый чугун (механил)	C — 3,07	Mn — 0,9	P — 0,15	S — 0,08	Si — 1,26		14,8	16,22	14,0	15,42
Сталь холоднокатаная	—	—	—	—	—		38,6	45,6	21	24,6

¹ σ'_{-1b} — предел усталости при изгибе на надрезанных образцах; надрез выполнен в виде кольцевой канавки круглого профиля с радиусом закругления $R = 0,01''$.

² Цифры пределов усталости при $t = -29^\circ \text{C}$.

С увеличением давления на накатывающий ролик эффект повышения предела усталости возрастал. Оптимальные режимы накатки еще не вырабатаны.

Влияние повышенных температур [29] на предел усталости характеризуется фиг. 257. На этой диаграмме по оси ординат отложен коэффициент β , характеризующий отношение предела усталости при определенной температуре к пределу усталости при нормальной температуре. При 300° и выше начинается падение пределов усталости на 15—20% на каждые 100° повышения температуры. Влияние низких температур на предел усталости материалов при знакопеременном изгибе характеризуется также данными табл. 32.

С понижением температуры [30] пределы усталости повышаются. На фиг. 258 дана диаграмма относительного увеличения предела усталости (по отношению к пределам при 20°) с понижением температуры. Эффективность концентрации напряжений со снижением температуры уменьшается (табл. 32).

Необходимо помнить, что понижение температуры для железных сплавов резко отражается на их ударной хрупкости.

§ 4. Характеристика прочности материалов

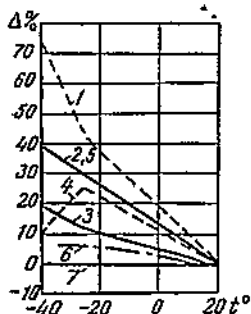
Для расчета деталей машин необходимы характеристики прочности при статических и переменных напряжениях. Кроме того, для оценки надежности деталей при действии усилий ударного характера существенное значение имеют характеристики ударной вязкости.

Методика определения характеристик статической прочности и ударной вязкости унифицирована, и приводимые далее данные по этим характеристикам получены общепринятыми методами испытаний.

Методика определения характеристик прочности при переменных напряжениях (пределов усталости, кривых усталости, диаграммы Смита и др.) не унифицирована, и при использовании данных, приводимых в литературе и в настоящем пособии, следует иметь в виду ряд факторов, могущих влиять на результаты испытаний.

Частота перемен нагрузки при испытании прочности переменными напряжениями гладких образцов с незначительной концентрацией напряжений не влияет на прочность металла до значений частоты 1000 герц, т. е. 60 000 в минуту. При наличии значительной концентрации напряжений, а также при воздействии коррозии с увеличением частоты увеличивается эффект концентрации и коррозии.

Абсолютные размеры образцов существенно отражаются на пределах усталости. С увеличением размеров сечения предел усталости при изгибе и кручении уменьшается, причем особенно резкое падение наблюдается в области диаметров от 5 до 15 мм. Для ослабления влияния размеров на результаты испытания на усталость последние желательно производить на образцах диаметром более 15—20 мм. При использовании для деталей результатов испытаний на усталость, проведенных на малых образцах,



Фиг. 258. Влияние пониженных температур на предел усталости.

следует учитывать влияние абсолютных размеров и ряд других обстоятельств (см. подробнее § 1).

Способ выемки и обработки образцов имеет существенное значение для результатов испытания на усталость. Образцы должны выниматься холодной резкой, места и направления выемки из поковки, отливки или готовой детали должны соответствовать зонам и направлениям наибольшей напряженности. Образцы, вынутые поперек волокон поковки, как правило, дают более низкие пределы усталости (см. подробнее § 2).

Степень чистоты окончательной обработки поверхностей наиболее напряженных мест образца или испытываемой детали должна соответствовать требуемой при изготовлении деталей в нормальных производственных условиях. Если для сравнимости результатов нужно исключить по возможности влияние обработки поверхности на усталость, то поверхность образцов должна либо шлифоваться камнем зернистостью не ниже 80, либо полироваться.

Ускоренные методы определения пределов усталости могут быть использованы для получения предварительных и приблизительных результатов на гладких образцах преимущественно железных сплавов. При наличии концентрации напряжений, коррозии и других факторов, вызывающих местное ослабление, ускоренные методы пока неприменимы. Способы и оборудование для ускоренного определения пределов выносливости изложены в ряде литературных источников [14, 30].

Приводимые в табл. 33—37 величины пределов усталости получены при испытаниях лабораторных образцов небольших сечений (диаметром 5—12 мм). Это следует иметь в виду при использовании данных таблиц. Одновременно с пределами усталости приведены статические характеристики, химический состав и термическая обработка металла. В таблицах приняты следующие обозначения:

- σ_s — предел текучести при растяжении, кг/мм²;
- σ_b — предел текучести при изгибе, кг/мм²;
- τ_s — предел текучести при кручении, кг/мм²;
- σ_b — временное сопротивление при растяжении, кг/мм²;
- δ_5 — относительное удлинение на $l=5d$;
- δ_{10} — относительное удлинение на $l=10d$;
- ψ — относительное сужение шейки;
- H_B — твердость по Бринеллю ($P=3000$ кг, $d=10$ мм);
- a_k — удельная ударная вязкость по Менаже, кг м/см²;
- σ_{-1} — предел усталости при изгибе, кг/мм²;
- σ_{-1z} — предел усталости при растяжении — сжатии, кг/мм²;
- τ_{-1} — предел усталости при кручении, кг/мм².

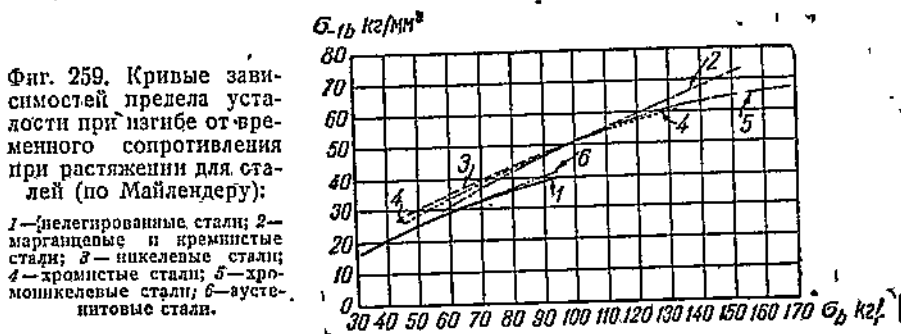
Марки сталей приняты по ОСТ 7124, по спецификации завода «Электросталь» и ГУТАП.

Приведенные величины характеристик даны либо по наименьшим значениям, либо с указанием интервала их изменения. Часть из них подобрана по данным для аналогичных зарубежных марок в соответствии с указаниями примечаний.

В табл. 33 (см. вклейку) приведены данные для углеродистых и легированных сталей; в табл. 34 приведены те же данные по опытам союзных лабораторий; в табл. 35 — для цветных сплавов; в табл. 36 — для чугуна; в табл. 37 — для древесины и в табл. 38 — для пластмасс.

Данные для энергетического предела усталости при повторных ударах не приводятся, ввиду того, что в зависимости от конструкции копра и формы образца получается большое различие в результатах, поэтому данные таких испытаний преимущественно используются как сравнительные.

При использовании данных по пределам усталости для чугуна следует иметь в виду, что данные табл. 36 соответствуют образцам с удаленной механической обработкой корки. Наличие корки снижает предел усталости на 20—35%. При использовании данных для литых цветных сплавов следует учитывать, что пределы усталости, полученные на отдельно отлитых образцах, на 15—30% выше, чем эти же пределы, полученные на образцах, вынутых из отливок.



Для приблизительного определения пределов усталости могут быть использованы экспериментальные зависимости между ними и характеристиками статической прочности для определенных типов металлов.

Эмпирические формулы Херольда [19] связывают между собой предел усталости сталей при изгибе σ_{-1} и временное сопротивление при растяжении σ_b :

углеродистые стали

$$\sigma_{-1} = 0,9 \sigma_b - 0,003 \sigma_b^2;$$

никелевые стали (30% Ni)

$$\sigma_{-1} = 1,04 \sigma_b - 0,0077 \sigma_b^2;$$

хромистые стали

$$\sigma_{-1} = 0,88 \sigma_b - 0,0043 \sigma_b^2;$$

хромоникелевая сталь (0,27—0,35% C, 3,5% Ni, 0,75% Cr);

$$\sigma_{-1} = 0,77 \sigma_b - 0,0036 \sigma_b^2;$$

хромоникелевая сталь (0,3—0,4% C, 4,5% Ni, 1,3% Cr);

$$\sigma_{-1} = 0,86 \sigma_b - 0,0046 \sigma_b^2;$$

марганцевые стали

$$\sigma_{-1} = 0,60 \sigma_b - 0,002 \sigma_b^2.$$

(252)

Обнаруживаемое в области высокого временного сопротивления снижение предела усталости стали, вычисленного по формуле Херольда, обычно соответствует мартенситной структуре стали, реже встречающейся в конструкционных сталях.

По данным Майлендера на фиг. 259 даны средние кривые зависимости σ_{-1b} от σ_b для ряда сталей.

Прочность сталей при переменной нагрузке

Марка стали			Термо- обработка		σ_s	σ_b	H_B	a_k	σ_{-1b}	σ_{-1s}
По спецификации завода	Завод-изготовитель	Марка по ОСТ	t° закали	t° отпуск	$кг/мм^2$	$кг/мм^2$	$кг/мм^2$	$кг/мм^2$	$кг/мм^2$	$кг/мм^2$
		ОСТ 7123	Нормализация	—	18	32—42		9	16,0	13,0
		10	То же	—	20	35—45		9	17,0	13,5
		15	"	—	22	40—50		9	18,0	15,0
		20	"	—	24	43—55		7	19,0	16,0
		25	"	—	26	48—60		7	20,0	17,0
		30	"	—	28	52—65		6	21,5	18,0
		35	"	—	30	57—70		6	23,0	19,0
		40	"	—	32	60—75		6	25,0	21,0
		45	"	—	34	63—80		6	27,0	22,0
		50	"	—						
		ОСТ 7124								
Э-4	Завод "Электро- сталь"	20 ХНЗА	820	500	65	745	238	16,0	34,5	34,0
Э-20		—	1000	200	—	191	510	4,6	56,0	60,0
ЭХТВ		40ХФА	880	650	89	98	258	12,2	38,0	44,0
ЭХТМ		30ХМА	880	560	72,8	85	260	16,3	37,5	38,0
Э35ХМЮА		35ХМЮА	930	600	102	114	333	11,0	52,0	—
Хроман- сил		30ХГСА	890	450	100	115	380	3,8	52,0	53,5
3312	Завод "Красный Октябрь"	—	900	200	95	130	356	9,2	48,0	—
18ХМГ		—	870/820	200	105	119	361	7,9	44,0	63,0
40СХ		—	950	600	85,8	103	297	12,4	45,0	53,0
ХНВ	Хромансил	—	850	575	98	109	330	13,8	39	—
ХМАЗ		30ХГСА	880	425	91,7	117	346	6,3	43	—
ХН1		35ХМЮА	950	650	82,9	101	284	11,0	37	—
		12ХНЗА	860	190	107,6	138	403	9,5	45	—
Ст. 5		—	—	—	28,4	52,5	—	—	22,5	21,7

Примечание. Обозначения, принятые в этой таблице, даны на стр. 276.

по данным испытаний лабораторий СССР

$\frac{\sigma_{-1}}{k\sigma_b}$	$\frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_b}$	$\frac{\sigma_{-1z}}{\sigma_{-1b}}$	$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1b}}$	Форма образца и машина, на которой производились испытания	Примечание
8,0 8,5 10,0 11,0 12,0 13,0 14,0 15,0 16,0	0,50/0,38 0,48/0,38 0,45/0,36 0,44/0,35 0,42/0,34 0,41/0,33 0,40/0,33 0,42/0,33 0,43/0,34	0,81 0,80 0,83 0,84 0,85 0,84 0,83 0,84 0,81	0,5 0,5 0,55 0,58 0,6 0,61 0,59 0,6 0,59	Сведений автором не приведено	По данным проф. Оди́нга, „Металлург“, 1937, № 9/10
23,5 34,0 27,0 23,0 — 24,5 — 27,0 27,0	0,46 0,29 0,39 0,44 0,46 0,45 0,37 0,37 0,44	0,98 1,07 1,15 1,01 — 1,03 — — 1,22	0,68 0,60 0,71 0,61 — 0,47 — 0,61 0,60	Величины σ_{-1b} определены на круглых образцах диаметром 16 мм на машине всестороннего чистого изгиба при вращении (частота 3000 в мин.) Величины σ_{-1z} определены на круглых образцах диаметром 5 мм на высокочастотной машине Шенк (частота 30 000 в мин.). Величины τ_{-1} определены на круглых образцах диаметром 14 мм на машине Лозенгаузен (частота 3000 в мин.)	По данным испытаний Института строительной механики Академии наук СССР для отдельных плавок [31]
— — — —	0,36 0,37 0,36 0,33	— — — —	— — — —	Величина σ_{-1b} получена на плоских образцах для испытания на переменный изгиб в одной плоскости. Сечение образца 6×15 мм. Машина Шенк для повторного кручения с приспособлением для изгиба (частота 3000 в мин.). Пределы усталости σ_{-1b} меньше, чем в предыдущей группе, где они получены на круглых образцах при вращении	Ишж.С.Л. Жуков, „Техника воздушного флота“, 1938, № 7 для отдельных плавок
11	0,43	0,96	0,49		По данным ЦНИИТМАШ

№ по пор.	Материал	Цветные сплавы								
		Химический состав, %								
		Si	Mn	Ni	Al	Mg	Cu	Fe	Zn	Sn
1	Чистый алюминий .	—	—	—	99,5	—	—	—	—	—
2	Алюминий катаный .	0,15	—	—	Остальное	—	0,12	0,49	—	—
3	Дуралюмин	0,47	0,52	—	93,74	—	4,12	0,51	—	—
4	"	0,34	0,62	—	Остальное	0,42	4,28	0,54	—	—
5	"	0,3	0,5	—	То же	0,5	4,0	0,3	—	—
6	" 681В	0,3	—	—	"	0,5	4,0	—	—	—
7	Лауталь	2	—	—	"	—	4,0	—	—	—
8	"	2	—	—	"	—	4,0	—	—	—
9	Склерон	0,5	0,5	—	"	—	3,0	—	12	—
10	"	0,5	0,5	—	"	—	3,0	—	—	—
11	Силумин	13	—	—	87	—	—	—	—	—
12	Электрон	—	—	—	—	Остаток	—	—	4,5	—
13	"	—	—	—	—	—	—	—	4,5	—
14	Электролитическая медь	—	—	—	—	—	99,95	—	—	—
15	Латунь М5-70	—	—	—	—	—	70	—	30	6,0
16	То же	—	—	—	—	—	70	—	30	—
17	Ковкая бронза	—	—	—	—	—	Остальное	—	—	—
18	Никелевая бронза	—	34	—	1,5	—	—	—	—	—

По Худременту и Майлендеру [34], предел усталости при изгибе может приблизительно определяться в зависимости от временного сопротивления и предела текучести по формуле

$$\sigma_{-1} = \sigma_b \left[0,25 \left(1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_b} \right) + \frac{5}{\sigma_b} \right], \quad (253)$$

однако получаемые результаты не оказываются более точными, чем определяемые по эмпирическим зависимостям только от временного сопротивления.

Для цветных сплавов отношение $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}$ оказывается ниже, чем для сталей, и составляет:

для электролитической меди	} 0,4—0,3
" латуни	
" бронзы	
" дуралюмина и электрона	0,4—0,25
" чугуна	0,5—0,4
" стального литья	0,4—0,3

Наибольшее количество опытных данных имеется для пределов усталости при изгибе σ_{-1} . Пределы усталости при других напряженных со-

Механические характеристики								Примечание
Термообработка	Статические и механические							
	σ_b	σ_s	$\delta^0/\%$	σ_{-1b}	τ_{-1}	$\frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_b}$	$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1b}}$	
Отожженный . .	9,8	5,5	24	5,0	3,0	0,51	0,6	Lehr, Spar- wirtschaft, 1931 Moog, Kommers Mc Adam Lehr
В состоянии по- ставки	15,9	8	—	7,4	—	0,47	—	
Отожженный . .	20,7	10,0	—	7,7	—	0,37	—	
Закаленный . . .	43,3	11,3	—	11,3	—	0,26	—	
Отожженный . .	27	12	18	12	6,5	0,45	0,54	То же " " " " " " " " " " " " "
Улучшенный . .	40	23	15	14	8,0	0,35	0,57	
Отожженный . .	19	9	19	9	5,0	0,47	0,56	
Улучшенный . .	32	18	14	11	7,0	0,34	0,64	
Неулучшенный .	51	37	15	10	6,5	0,20	0,65	
Закаленный . .	57	48	13	13	7,5	0,23	0,58	
Литье	17,5	12	4,5	4,5	2,5	0,26	0,56	
Литой	17	13	4,5	6,5	3,0	0,38	0,46	
Улучшенный . .	36	20	14	13	8,5	0,36	0,62	
Отожженная . .	22	6,5	50	9,0	4,5	0,41	0,50	
"	31	11	45	15	8,5	0,43	0,57	
Холоднокатаная .	38	25	20	18	10	0,47	0,56	
Прокатанная . .	57	43	21	13	7,5	0,23	0,58	
Отожженная . . .	49	25	36	18	10	0,37	0,56	

гояниях можно определять приближенно по следующим соотношениям (кроме чугуна):

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} = 0,6; \quad \frac{\sigma_{-1z}}{\sigma_{-1}} = 0,7$$

три более совершенном испытании на растяжение — сжатие эта величина ближе к 0,9), где σ_{-1z} — предел усталости при растяжении — сжатии.

Отклонения от этих соотношений для отдельных металлов могут достигать 15—20%.

Для чугуна отношение $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}}$ составляет 0,9 — 0,75.

Прочность материалов при различной степени асимметрии нагрузки характеризуется диаграммами верхнего предела цикла $\sigma_{\max}$ (Смита) или амплитуды цикла σ_a (Хей) в зависимости от среднего напряжения цикла σ_m . Такие диаграммы устанавливаются опытным путем обычно на образцах небольших сечений (диаметром 5 — 10 мм). В области больших значений σ_m условия прочности определяются образованием пластических деформаций, поэтому кривые в этих областях обычно ограничиваются пределом текучести соответствующим напряженным состоянием (изгиб σ_{yb} , растяжение σ_s , кручение τ_s). Ниже приводятся [27] диаграммы $\sigma_{\max}$, σ_m для ряда сталей и легких металлов, построенные по наименьшим значениям, полученным из результатов ряда лабораторных опы-

№ по пор.	Материал	Серый чугун											
		Химический состав, %						Механические характеристики					
		$C_{общ}$	$C_{связ}$	Si	Mn	P	S	σ_b	H_B	σ_{-1b}	τ_{-1}	$\frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_b}$	$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1b}}$
1	Серый чугун . .	3,3	—	2,33	0,50	—	—	11,6	—	6,0	4,5	0,52	0,75
2	Серый "чугун . .	3,13	—	1,08	0,9	—	—	19,0	—	9,0	7,5	0,47	0,83
3	Серый "чугун (центробежное литье)	3,56	0,84	1,42	0,32	0,75	0,06	18,3	162	8,4	—	0,46	—
4	Серый чугун . .	3,44	0,68	1,10	0,62	0,51	0,09	22,2	148	7,7	—	0,35	—
5	Серый "чугун . .	3,35	0,57	1,10	0,59	0,51	0,09	17,8	132	6,3	—	0,36	—
6	Серый чугун специальный	2,94	—	2,0	1,07	—	—	24,8	—	12,0	9	0,53	0,75
7	Серый чугун высококачественный	2,90	—	1,2	0,9	0,23	—	34,5	—	13,5	—	0,39	—
8	Серый чугун . .	—	—	—	—	—	—	21	—	9,0	—	0,43	—
9	Серый "чугун . .	—	—	—	—	—	—	27	—	11,5	—	0,43	—
10	Серый "чугун (центробежное литье)	—	—	—	—	—	—	45	—	18	—	0,40	—

Таблица 37

Пределы усталости древесных пород
(при влажности 10—14% частота испытаний 600—1500 циклов
в мин., базис: $N=20 \cdot 10^6$ циклов)

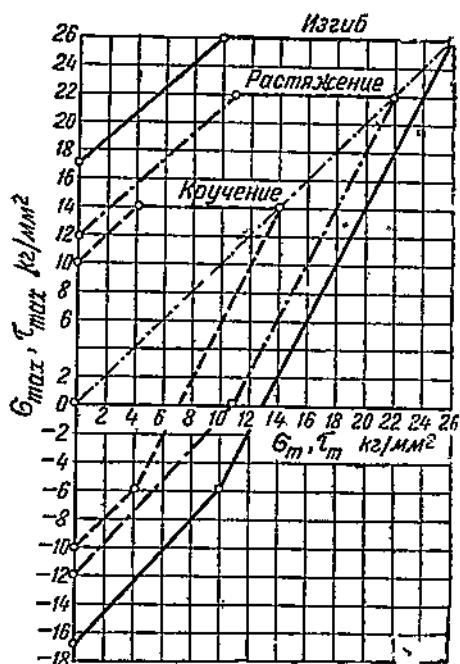
По данным Института строительной механики АН УССР [32]

Породы	Удельный вес	Временное сопротивление при статическом изгибе в радиальном направлении, $кг/мм^2$	Предел усталости на круглом образце диаметром 16 мм, $кг/мм^2$	Предел усталости на плоском образце 10×40 мм, $кг/мм^2$
Граб	0,70	13,8	3,0	Танг. 3,1 Рад. 2,5 Танг. 3,8 Рад. 3,0
Дуб	0,75	11,7	4,1	
Клен	0,62	12,1	3,3	
Липа	0,42	6,71	2,0	
Орех	0,55	9,68	2,3	
Тис	0,63	10,9	2,8	Танг. 3,6 Рад. 2,4
Сосна	0,55	8,26	2,8	
Осокорь . .	0,45	8,51	1,7	
Береза . . .	0,54	11,9	3,1	
Тополь . . .	0,43	7,58	2,5	
Ясень	0,63	13,0	2,8	
Ольха	0,43	9,85	1,8	

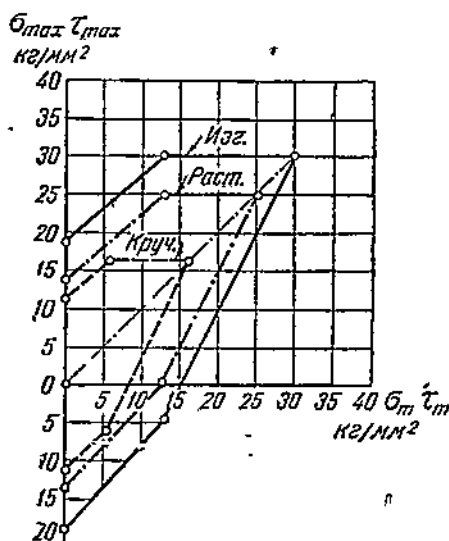
Таблица 38
Пределы усталости пластмасс [33]

Тип пластмасс	Удель- ный вес	Времен- ное со- против- ление кг/мм ²	Предел усталости при изгибе кг/мм ²	Источник
Чистая искусственная смола	1,25—1,35	2,6—3,0	0,8—1,0	Кремер
Смола с тканью	1,3—1,5	7,0	2,5	"
Смола с бумагой	1,4	12,4	5,0	"
Текстолит		5,0	<2,0	Козлов
22ТЗ (ЦИАМ)		12,5	8,5	"

тов (в отдельных случаях металл может иметь на 30—40% большую прочность, и при необходимости полностью использовать свойства дан-ного металла нужно произвести его всестороннее испытание).



Фиг. 260. Углеродистая сталь.
 $\sigma_b = 37$ кг/мм²; $\sigma_s = 22$ кг/мм²; C—0,12%;
Si—0,1%; Mn—0,40% [17].

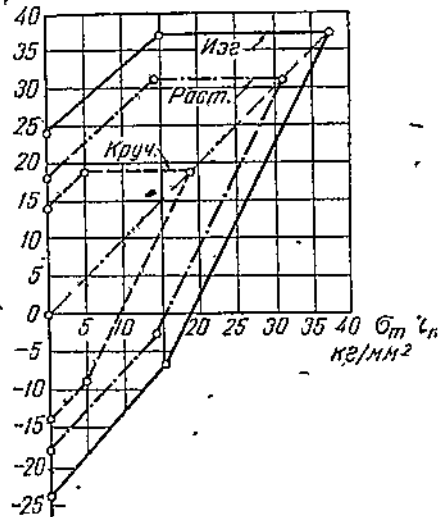


Фиг. 261. Углеродистая сталь.
 $\sigma_b = 45$ кг/мм², $\sigma_s = 25$ кг/мм²;
C—0,25%; Si—0,2%; Mn—0,60%.

На фиг. 260—268 даны диаграммы σ_{max} , σ_m для конструкционных сталей.

На фиг. 269—272 даны диаграммы σ_{max} , σ_m для ряда металлов по данным зарубежных лабораторий.

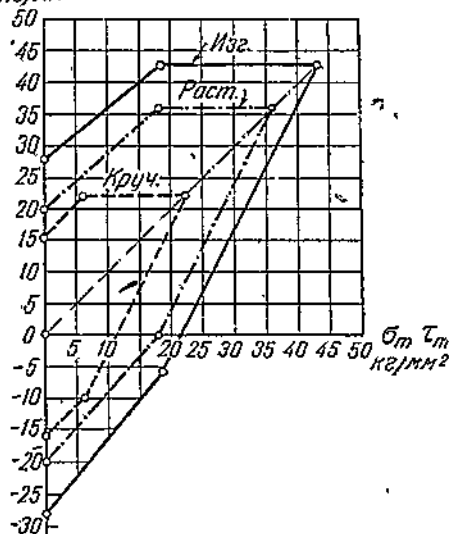
$\sigma_{\max} \tau_{\max}$
кг/мм²



Фиг. 262. Углеродистая сталь.

$\sigma_b = 55$ кг/мм², $\sigma_s = 31$ кг/мм²;
C—0,35%; Si—0,75%; Mn—0,70%.

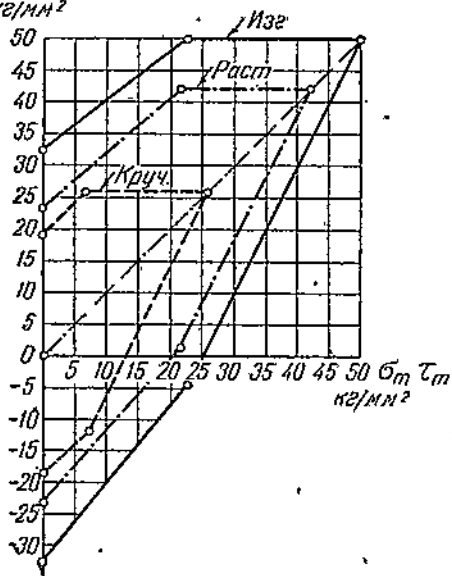
$\sigma_{\max} \tau_{\max}$
кг/мм²



Фиг. 263. Углеродистая сталь.

$\sigma_b = 65$ кг/мм², $\sigma_s = 36$ кг/мм²;
C—0,45%; Si—0,3%; Mn—0,70%.

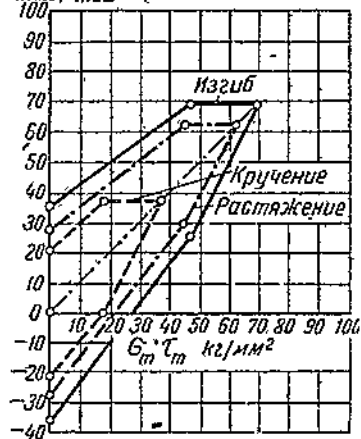
$\sigma_{\max} \tau_{\max}$
кг/мм²



Фиг. 264. Углеродистая сталь.

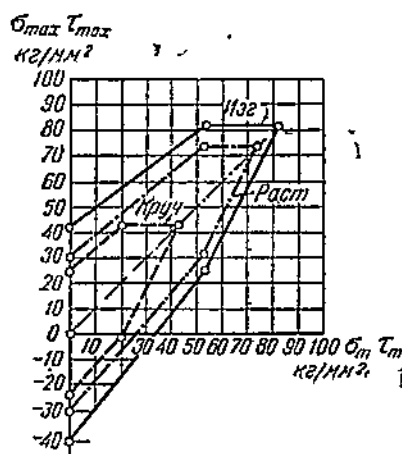
$\sigma_b = 75$ кг/мм², $\sigma_s = 42$ кг/мм²;
C—0,6%; Si—0,4%; Mn—0,70%.

$\sigma_{\max} \tau_{\max}$ кг/мм²



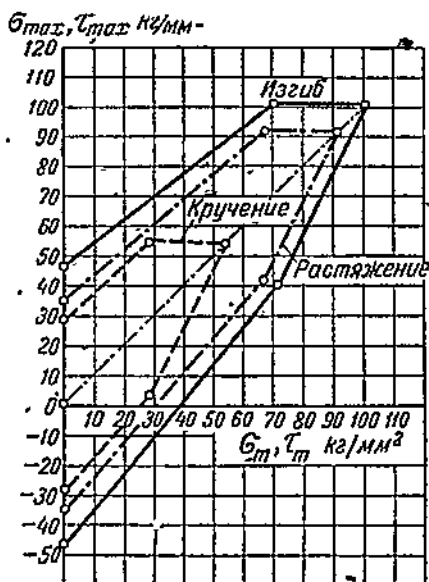
Фиг. 265. Хромоникелевая сталь.

$\sigma_b = 83$ кг/мм², $\sigma_s = 62$ кг/мм²;
C—0,23%; Ni—3,5%; Cr—0,75%.



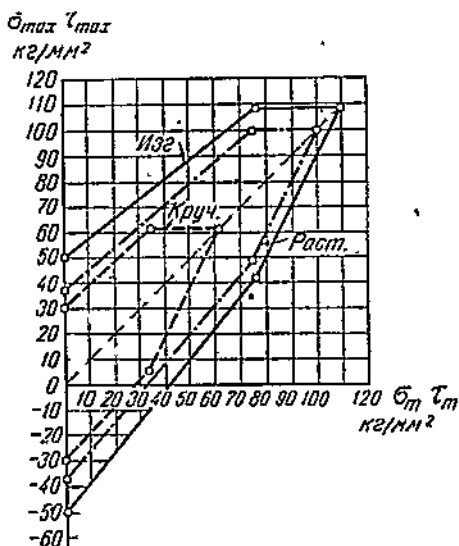
Фиг. 266. Хромоникелевая сталь.

$\sigma_b = 98 \text{ кг/мм}^2$; $\sigma_s = 73 \text{ кг/мм}^2$;
C — 0,27—0,35%; Ni — 3,5%; Cr — 0,75%.



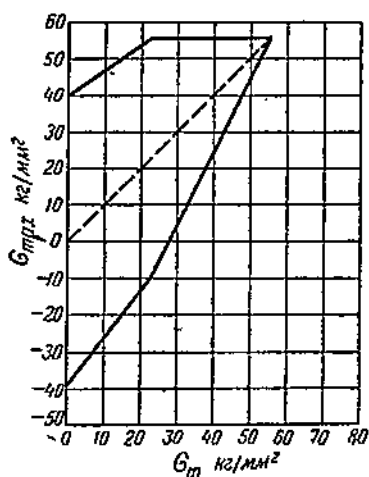
Фиг. 267. Хромоникелевая сталь.

$\sigma_b = 115 \text{ кг/мм}^2$; $\sigma_s = 92 \text{ кг/мм}^2$;
C — 0,35%; Ni — 4,5%; Cr — 1,3%.



Фиг. 268. Хромоникельвольфрамовая сталь.

$\sigma_b = 120 \text{ кг/мм}^2$; $\sigma_s = 100 \text{ кг/мм}^2$;
C — 0,4%; Ni — 4,0%; Cr — 1,1%.

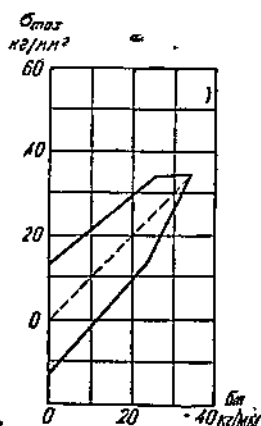


Фиг. 269. Диаграмма $\sigma_{\max}$, σ_m при изгибе для рессорной стали.

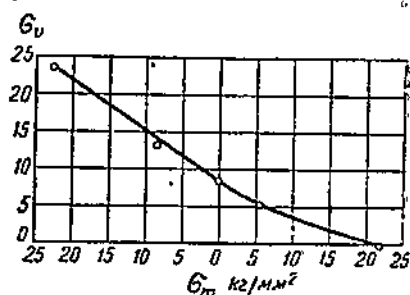
$\sigma_b = 96 \text{ кг/мм}^2$; $\sigma_s = 66 \text{ кг/мм}^2$;
C — 0,47%; Si — 0,38%; Mn — 1,75%
(по данным Помпа).

Характерной величиной для прочности при асимметричных циклах является предел усталости σ_0 и τ_0 при изменении напряжений от нуля до максимума. Отношение $\frac{\sigma_0}{\sigma_{-1}}$ для сталей колеблется в пределах

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{-1}} = 1,4-1,6;$$



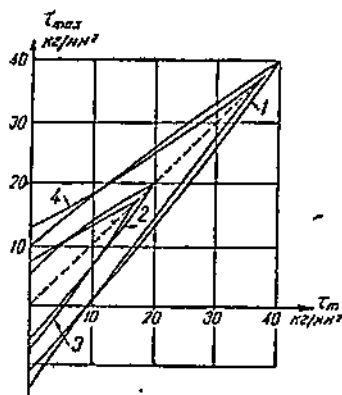
Фиг. 270. Дуралюмин $\sigma_b = 59 \text{ кг/мм}^2$; $\delta_{10} = 19\%$ (по данным американских лабораторий).



Фиг. 271. Диаграмма σ_0, σ_m для чугуна при растяжении-сжатии (по Коммерсу).

для чугуна

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{-1}} = 1,2-1,5.$$



Фиг. 272. Диаграммы $\tau_{\max}, \tau_m$ 1—для латуни; 2—для γ -силумина; 3—для серого чугуна; 4—для качественного чугуна (по Лудвигу).

Отношение $\frac{\tau_0}{\tau_{-1}}$ для сталей составляет

$$\frac{\tau_0}{\tau_{-1}} = 1,7-2,0;$$

для цветных сплавов

$$\frac{\tau_0}{\tau_{-1}} = 1,4-2,0.$$

В случае действия на деталь быстро нарастающих нагрузок ударного характера возможно появление хрупкости. При хрупком разрушении прочность определяется сопротивлением материала на отрыв при отсутствии заметных пластических деформаций; это сопротивление также называют хрупкой прочностью. Благодаря трудности определения этой характеристики и действительных напряжений, возникающих при ударе, запас прочности при ударных нагрузках обычно не определяют и ограничиваются оценкой возможности хрупкого разрушения материала [38]. Для этого определяют характеристики ударной вязкости металла путем испытания на ударное разрушение надрезанных образцов, чаще всего на изгиб, при помощи маятниковых копров. При таких испытаниях определяется энергия, затрачиваемая на разрушение металла при определенной форме и размерах образца (методика испытаний на удар описана в соответствующей литературе и регламентирована в ряде отраслей техническими условиями). Характеристиками вязкости являются:

а) удельная ударная вязкость, т. е. энергия излома, отнесенная к рабочему поперечному сечению образца, обозначается α_k ;

б) критическая температура хрупкости t_k , т. е. температура, выше которой материал (при определенном типе напряженного состояния и определенной скорости деформирования) разрушается вязким образом, а ниже разрушается хрупко.

Критическая температура хрупкости определяется путем серийного испытания образцов на удар при различных температурах. Кривая зависимости α_k от температуры для сталей имеет спад в критической области. По этому спаду и определяется t_k .

Для оценки склонности к ударной хрупкости может определяться [35] температурный запас вязкости

$$n_t = \frac{T_o - T_k}{T_o},$$

где T_k — критическая температура хрупкости в абсолютных градусах;

T_o — температура, при которой работает металл в детали в абсолютных градусах.

Хрупкость является не только свойством металла, работающего в определенных механических условиях, но также связана с влиянием термической обработки и последующих процессов в металле. Явление тепловой хрупкости заключается в возникновении хрупкости в результате длительного выдерживания стали при повышенных температурах. При этом заметно уменьшается α_k , остальные механические характеристики остаются неизменными.

Явление хрупкости отпуска заключается в способности некоторых типов сталей становиться хрупкими при медленном охлаждении от температуры отпуска.

На величину ударной вязкости сталей влияет ряд технологических факторов. Поперек волокон поковки ударная вязкость меньше, чем вдоль волокон, на 20—50%. Увеличение зерна в сталях снижает ударную вязкость, особенно углеродистых сталей. Повышение содержания углерода понижает ударную вязкость, а повышение никеля действует противоположно.

Величины ударной вязкости для конструкционных сталей даны в табл. 39.

Сталь качественная, конструкционная, легированная
(ОСТ 7124)

Таблица 39

Марка	Химический состав, %						Физико-механические характ.					Термообработка		
	C	Si	Mn	$\Sigma S + P$	Ni	Cr	Mo	σ_s кг/мм ²	σ_b кг/мм ²	ψ , %	δ_5 мм	Закалка	Отпуск	Среда
15ХА	$\frac{0,12}{0,20}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,30}{0,60}$	0,060	$\leq 0,30$	$\frac{0,70}{1,0}$	—	40	60	55	10	860—780	200	Масло
38ХА	$\frac{0,34}{0,42}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,50}{0,80}$	0,060	$\leq 0,30$	$\frac{0,80}{1,10}$	—	80	95	50	9	860	580	"
30ХМА	$\frac{0,25}{0,35}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,40}{0,70}$	0,060	$\leq 0,30$	$\frac{0,80}{1,10}$	$\frac{0,15}{0,25}$	75	95	50	9	860	580	"
12ХН2А	$\leq 0,17$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,30}{0,60}$	0,060	$\frac{1,50}{2,00}$	$\frac{0,60}{0,90}$	—	45	70	50	10	860—780	200	"
2ХН3А	$\leq 0,17$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,25}{0,55}$	0,060	$\frac{2,75}{3,25}$	$\frac{0,60}{0,90}$	—	60	85	50	9	860—780	200	"
20ХН3А	$\frac{0,15}{0,25}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,30}{0,60}$	0,060	$\frac{2,75}{3,25}$	$\frac{0,60}{0,90}$	—	70	85	55	9	820	520	"
18ХНВА	$\frac{0,15}{0,22}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,25}{0,55}$	0,060	$\frac{4,10}{4,60}$	$\frac{1,35}{1,65}$	$\frac{W 0,8}{Al 1,20}$	80	115	45	9	950—850	200	Воздух
35Х10А	$\frac{0,30}{0,40}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,30}{0,60}$	0,060	$\leq 0,50$	$\frac{1,35}{1,65}$	$\frac{Al 0,75}{Al 1,75}$	65	90	50	8	950	650	Масло
35ХМ10А	$\frac{0,35}{0,38}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,30}{0,60}$	0,060	$\leq 0,50$	$\frac{1,35}{1,65}$	$\frac{Al 0,75}{Al 1,25}$	85	100	50	9	950	650	"

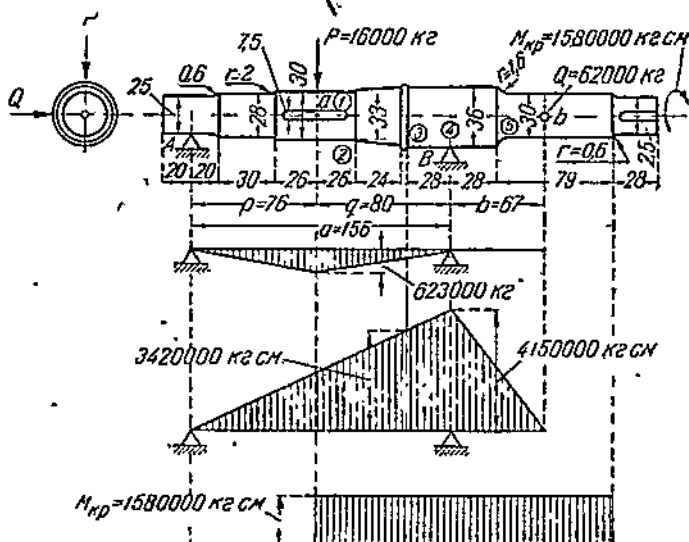
Примечание. Верхняя и нижняя цифры характеризуют пределы соответствующих величин.

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

(Примеры)

§ 1. Расчет валов прямых и коленчатых

При расчете валов прежде всего в зависимости от внешних нагрузок производится определение внутренних усилий, т. е. изгибающих и крутящих моментов, для сечений вала, в котором должны быть определены запасы прочности. Эти сечения выбираются в местах действия наибольших изгибающих и крутящих моментов и в местах повышенной концентрации напряжений. Если вал, по условиям размещения на опорах, является статически неопределимым, то производится предварительно определение лишних неизвестных.



Фиг. 273. Схема вала редуктора ножниц.

После вычисления изгибающих и крутящих моментов, действующих на вал, устанавливаются его положения, дающие экстремальные напряжения. В соответствующих точках определяются среднее и амплитудное значения напряжений в зонах концентрации.

В соответствии с очертаниями вала находят величины эффективных коэффициентов концентрации напряжений (данные гл. IX), а также подбирают механические характеристики, необходимые для расчета. Последним этапом расчета является определение запасов прочности по соответствующим формулам (данные гл. VIII).

Расчет вала редуктора ножниц для резки болванок

На фиг. 273 дана схема редукторного вала ножниц.

В процессе резки металла нагрузки на вал меняются. В табл. 40 даны значения сил P , Q и момента $M_{кр}$ в зависимости от угла φ поворота эксцентрикового вала ножниц.

Таблица 40

φ	P кг	Q кг	$M_{кр}$ кг.см
77	0	0	0
80	13 650	53 000	1 350 000
85	15 700	61 000	1 550 000
90	16 000	62 000	1 580 000
95	14 400	55 700	1 420 000
100	10 200	39 700	1 010 000

Положение эксцентрикового вала $\varphi = 77^\circ$ соответствует концу холодного вала ножниц (до начала резки), и нагрузки на вал могут быть приняты для этого положения равными нулю.

Из табл. 40 видно, что наибольшая нагрузка вала будет при $\varphi = 90^\circ$.

Определение реакции опор и изгибающих моментов

Ввиду того, что силы, действующие на вал, не лежат в одной плоскости, определяем реакции опор и изгибающие моменты отдельно в вертикальной плоскости v и в горизонтальной плоскости h (фиг. 274):

вертикальная плоскость:

$$A_v = \frac{Pq}{a} = 16\,000 \frac{80}{156} = 8200 \text{ кг};$$

$$B_v = P - A_v = 16\,000 - 8200 = 7800 \text{ кг};$$

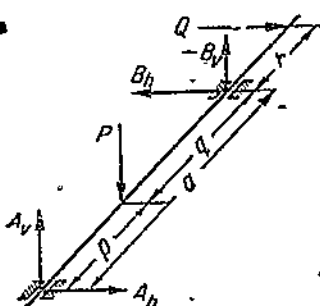
изгибающий момент от силы P

$$B_v = A_v p = 8200 \cdot 76 = 623\,000 \text{ кг.см};$$

горизонтальная плоскость:

$$A_h = Q \frac{b}{a} = 62\,000 \frac{67}{156} = 26\,600 \text{ кг};$$

$$B_h = Q - A_h = 62\,000 - 26\,600 = 35\,400 \text{ кг};$$



Фиг. 274. Схема сил, действующих на вал.

изгибающий момент на опоре B

$$M_h = Qb = 62\,000 \cdot 67 = 4\,150\,000 \text{ кг.см}.$$

Направление реакции показано на фиг. 274.

Эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях даны на фиг. 273.

На фиг. 273 снизу дана эпюра скручивающих моментов.

Выбор сечений и точек сечений для расчета запасов прочности

Рассматривая эпюры изгибающих и скручивающего моментов и принимая во внимание конфигурацию вала, заключаем, что запас прочности следует рассчитывать: в сечении 4 (фиг. 273), где имеет место максимальный изгибающий момент, в сечениях 2, 3 и 5, где имеют место концентрации напряжений в галтелях; в сечении 1, где достаточно велик изгибающий момент и имеется концентрация напряжения от шпонки.

На фиг. 275 показано сечение *I* вала.

Наибольшая концентрация напряжения от изгиба будет иметь место в точке *n*, от кручения — в точке *m*.

Расчет напряжений и их режима

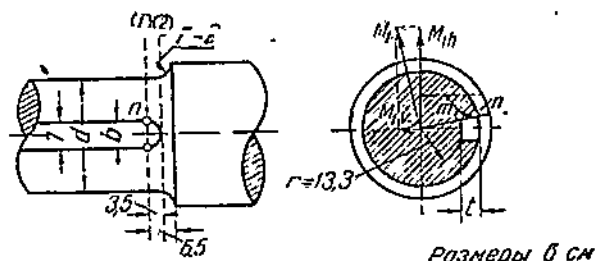
Изгибающий момент в сечении *I* (фиг. 273 и 275) в вертикальной плоскости:

$M_{1v} = A_{1v} 95,5 - P \cdot 19,5 = 8200 \cdot 95,5 - 16\,000 \cdot 19,5 = 471\,000 \text{ кгс.см.}$
в горизонтальной плоскости:

$$M_{1h} = A_{1h} 95,5 = 26\,600 \cdot 95,5 = 2\,540\,000 \text{ кгс.см.}$$

Суммарный изгибающий момент:

$$M_1 = \sqrt{M_{1v}^2 + M_{1h}^2} = \sqrt{471\,000^2 + 2\,540\,000^2} = 2\,580\,000 \text{ кгс.см.}$$



Фиг. 275. Схема определения опасных точек.

При расчете напряжений изгиба в точках *m* и *n* принимаем, что точки *m* и *n* лежат в плоскости действия суммарного момента (для данного случая).

В тех случаях, когда точки *m* и *n* не лежат в плоскости действия суммарного изгибающего момента, необходимо определить проекцию суммарного изгибающего момента на плоскость, проходящую через ось вала и точки *m* и *n*, и затем вести расчет напряжений.

Напряжение изгиба в точке *n* составит:

$$\sigma_n = \frac{M_1}{W} = \frac{2\,580\,000 \cdot 42}{3,14 \cdot 30^3} = 976 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение изгиба в точке *m* составит:

$$\sigma_m = \frac{M_1 r}{J} = \frac{2\,580\,000 \cdot 13,3}{\frac{3,14 \cdot 30^4}{64}} = 865 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение кручения в точке *n* равно нулю.

При определении напряжений в точке *m* от кручения, согласно фиг. 275 при $b = 70 \text{ мм}$, $t = 18 \text{ мм}$:

$$J_{p\text{netto}} = \frac{\pi \frac{30^4}{32}}{1 + 0,4 \cdot \frac{7,5}{30} + 0,7 \cdot \frac{1,8}{30}} = 69\,700 \text{ см}^4.$$

Соответствующие напряжения составят:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} d}{2 J_{p \text{ netto}}} = \frac{1\,580\,000 \cdot 30}{2 \cdot 69\,700} = 340 \text{ кг/см}^2.$$

Для точки n получаем:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{976}{2} = 488 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = 0;$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{976}{2} = 488 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = 0.$$

Рассчитывая аналогично напряжения в остальных сечениях вала, получим напряжения, приведенные в табл. 41.

Таблица 41

Сечение вала	Точка сечения	Изгиб		Кручение		σ_m кг/см ²	σ_v кг/см ²	τ_m кг/см ²	τ_v кг/см ²
		$\sigma_{\max}$ кг/см ²	$\sigma_{\min}$ кг/см ²	$\tau_{\max}$ кг/см ²	$\tau_{\min}$ кг/см ²				
1	$\left\{ \begin{array}{l} m \\ n \end{array} \right.$	865	0	340	0	433	433	170	170
2	—	976	0	0	0	488	488	0	0
3	—	1000	0	298	0	500	500	149	149
4	—	750	0	172	0	375	375	86	86
5	—	906	0	172	0	453	453	86	86
6	—	888	0	298	0	444	444	149	149

Определение коэффициентов концентрации напряжений

В точке 1 по табл. 26 для формы 1 K_σ может быть принято равным 1,85. Напряжения кручений в точке n равны нулю.

В точке m сечения 1 по данным фиг. 238 K_τ может быть принято равным 1,5.

Ввиду отсутствия данных о концентрации напряжений изгиба в точке m принимаем в этой точке, как и для точки n , $K_\sigma = 1,85$.

В сечении 2 коэффициент K_σ определяем по данным фиг. 229. Для данной стали $\sigma_b = 60 \text{ кг/мм}^2$ и $\frac{r}{d} = \frac{20}{300} = 0,067$ получим $K_\sigma = 1,6$.

Для кручения для $\frac{r}{d} = 0,067$ и $\frac{d}{D} = 0,9$ следует принять $\alpha_\tau = 1,5$.

Соответствующий эффективный коэффициент концентрации напряжений при $q = 0,7$ составит:

$$K_\tau = 1 + 0,7 (1,5 - 1) \approx 1,35.$$

В сечении 3 по фиг. 229 при $\frac{r}{d} = 0,061$ $\frac{d}{D} \approx 0,9$ $K_\sigma = 1,6$.

По фиг. 175 получим $\alpha_\tau = 1,6$;

$$K_\tau = 1 + q (\alpha_\tau - 1) = 1 + 0,7 (1,6 - 1) = 1,4.$$

Аналогично для сечения 5 при $\frac{d}{D} = 0,83$, $\frac{r}{d} = 0,053$ по фиг. 229, $K_\sigma = 1,8$ и $K_\tau = 1,5$.

Для Ст. 45 имеем:

$$\sigma_b = 6000 \text{ кг/см}^2; \sigma_s = 3200 \text{ кг/см}^2; \tau_s = 2200 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{-1} = 2800 \text{ кг/см}^2; \tau_{-1} = 1600 \text{ кг/см}^2 \text{ (по табл. 33)}.$$

Учитывая диаметр вала $d = 300 \text{ мм}$ и выше по [фиг. 244, необходимые пределы усталости для всех сечений вала

$$\sigma'_{-1} = \sigma_{-1} \cdot 0,6 = 1620 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau'_{-1} = \tau_{-1} \cdot 0,6 = 960 \text{ кг/см}^2.$$

Определяем запасы прочности по формуле (246).

Сечение I, точка n

По выражениям к формуле (246)

$$u_s = 1 + \frac{\tau_m \sigma'_{-1}}{K_\sigma \tau_v \sigma_s} = 1;$$

$$u_z = 1 + \frac{\sigma_m \sigma'_{-1}}{K_\sigma \sigma_v \sigma_s} = 1 + \frac{488 \cdot 1680}{1,85 \cdot 488 \cdot 3200} = 1,27.$$

По формуле (246)

$$n = \frac{\sigma'_{-1}}{\sqrt{(u_z K_\sigma \sigma_v)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 (u_s K_\tau \tau_v)^2}} =$$

$$= \frac{1680}{\sqrt{(1,27 \cdot 1,85 \cdot 488)^2 + 0}} = 1,40.$$

Сечение I, точка m

По выражениям к формуле (246)

$$u_s = 1 + \frac{\tau_m \sigma'_{-1}}{K_\tau \tau_v \sigma_s} = 1 + \frac{170 \cdot 1680}{1,5 \cdot 170 \cdot 3200} = 1,35;$$

$$u_z = 1 + \frac{\sigma_m \sigma'_{-1}}{K_\sigma \sigma_v \sigma_s} = 1 + \frac{433 \cdot 1680}{1,85 \cdot 433 \cdot 3200} = 1,27.$$

По формуле (286)

$$n = \frac{\sigma'_{-1}}{\sqrt{(u_z K_\sigma \sigma_v)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 (u_s K_\tau \tau_v)^2}} =$$

$$= \frac{1680}{\sqrt{(1,27 \cdot 1,85 \cdot 433)^2 + \left(\frac{1680}{960}\right)^2 (1,35 \cdot 1,5 \cdot 170)^2}} = 1,39.$$

Рассчитывая аналогично для остальных сечений вала, получим запасы прочности, данные в табл. 42.

Определяем запас прочности того же вала по диаграммам Смита согласно гл. VIII и формуле (242).

Таблица 42

Сечение вала	Точка сечений	Запас прочности по формуле (286)
1	$\begin{cases} m \\ n \end{cases}$	1,39
2	—	1,40
3	—	1,41
4	—	1,91
5	—	2,26
		1,40

Для Ст. 45 диаграммам Смирта свойственны коэффициенты при изгибе $\psi_\sigma = 0,2$, при кручении $\psi_\tau = 0,1$.

Принимая приведенные выше коэффициенты концентрации и масштабного фактора, получаем для сечения 5:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = \frac{1,8}{0,6} = 3,0; \quad \varphi_\tau = \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5.$$

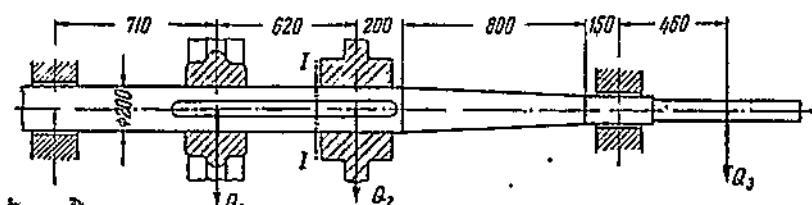
Запас прочности составит:

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{\psi_\sigma \sigma_m + \varphi_\sigma \sigma_v}{\sigma - 1} \right)^2 + \left(\frac{\psi_\tau \tau_m + \varphi_\tau \tau_v}{\tau - 1} \right)^2 = \\ = \left(\frac{0,2 \cdot 444 + 3 \cdot 444}{2800} \right)^2 + \left(\frac{0,1 \cdot 149 + 2,5 \cdot 149}{1600} \right)^2,$$

откуда $n = 1,8$.

Расчет приставного вала дизельной установки

На фиг. 276 дана схема приставного вала; на него насажены маховик, ротор генератора и ротор возбuditеля.



Фиг. 276. Схема горизонтального вала для дизеля.

Вес маховика $Q_1 = 4500$ кг, вес ротора генератора $Q_2 = 3180$ кг и вес ротора возбuditеля $Q_3 = 250$ кг.

Мощность дизеля 600 л. с. Угловая скорость вращения приставного вала $n = 300$ об/мин. Вал выполнен из Ст. 45.

Определение реакций опор изгибающих и крутящего моментов

Опорные реакции:

$$A = \frac{4500 \cdot 177 + 3180 \cdot 115 - 250 \cdot 46}{248} = 4650 \text{ кг};$$

$$B = 4500 + 3180 + 250 - 4650 = 3280 \text{ кг}.$$

Изгибающие моменты:

под силой Q_1

$$M_1 = 4650 \cdot 71 = 330\,000 \text{ кгсм};$$

под силой Q_2

$$M_2 = 4650 \cdot 133 - 4500 \cdot 62 = 340\,000 \text{ кгсм};$$

под опорой B

$$M_3 = 250 \cdot 46 = 11\,500 \text{ кгсм}.$$

Крутящий момент:

$$M_{кр} = 71\,620 \frac{N}{n} = 71\,620 \frac{600}{300} = 143\,200 \text{ кгсм.}$$

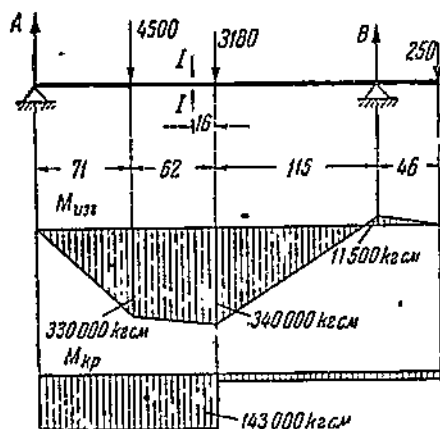
На фиг. 277 даны эпюры изгибающего и крутящего моментов.

Установление опасного сечения и подсчет номинальных напряжений

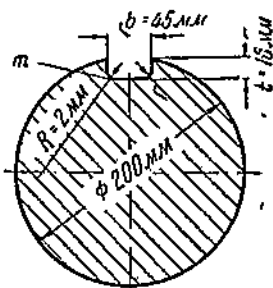
Как видно из фиг. 277, опасным местом вала является участок между маховиком и ротором генератора. В пределах этого участка, как видно из фигуры, проходит шпоночная канавка. Размеры канавки даны на фиг. 278. За опасное сечение участка может быть принято сечение I—I, совпадающее с торцевой плоскостью втулки ротора генератора.

Изгибающий момент в опасном сечении

$$M = 4650 \cdot 117 - 4500 \cdot 46 = 338\,000 \text{ кгсм.}$$



Фиг. 277. Эпюры моментов для приставного вала.



Фиг. 278. Сечение приставного вала

Наиболее напряженной точкой опасного сечения является точка *m*. Напряжения изгиба в этой точке

$$\sigma_v = \frac{Mr}{J} = \frac{338\,000 \cdot 8,4}{\frac{\pi \cdot 20^4}{64}} = 360 \text{ кг/см}^2.$$

При определении напряжений от кручения согласно фиг. 278

$$J_{\text{netto}} = \frac{\pi \frac{r^4}{32}}{1 + 0,4 \frac{b}{d} + 0,7 \frac{t}{d}} = \frac{\frac{\pi \cdot 20^4}{32}}{1 + 0,4 \frac{4,5}{20} + 0,7 \frac{1,6}{20}} = 13\,800 \text{ см}^4.$$

Соответствующее напряжение

$$\tau_m = \frac{M_{кр} d}{2J_{\text{netto}}} = \frac{143\,200 \cdot 20}{2 \cdot 13\,800} = 104 \text{ кг/см}^2.$$

С помощью торснографирования было установлено, что в опасном участке возникают касательные напряжения от крутильных колебаний (при номинальных оборотах двигателя)

$$\tau_v = 250 \text{ кг/см}^2.$$

Определение концентрации напряжений

В точке m сечения по фиг. 231 и табл. 26 для формы 2 эффективный коэффициент концентрации может быть принят равным

$$K_\sigma = 3,2.$$

В этой же точке по данным фиг. 238 гл. IX эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_\tau = 1,5.$$

Расчет запаса прочности.

Для Ст. 45 имеем: $\sigma_b = 6000 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_s = 3200 \text{ кг/см}^2$; $\tau_s = 2200 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{-1} = 2800 \text{ кг/см}^2$; $\tau_{-1} = 1600 \text{ кг/см}^2$ по табл. 33.

Учитывая большие абсолютные размеры вала (диаметр 200 мм), по данным Лера и Майлендера

$$\begin{aligned}\sigma'_{-1} &= 0,6 \cdot 2800 = 1620 \text{ кг/см}^2; \\ \tau'_{-1} &= 0,6 \cdot 1600 = 960 \text{ кг/см}^2.\end{aligned}$$

По выражениям к формуле (246) гл. VIII

$$u_s = 1 + \frac{\tau_m \sigma'_{-1}}{K_\tau \tau_v \sigma_s} = 1 + \frac{104 \cdot 1600}{1,5 \cdot 250 \cdot 3200} = 1,14;$$

$$u_z = 1 + \frac{\sigma_m \sigma'_{-1}}{K_\sigma \sigma_v \sigma_s} = 1.$$

По формуле (246) гл. VIII

$$\begin{aligned}n &= \frac{\sigma'_{-1}}{\sqrt{(u_z K_\sigma \sigma_v)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 (u_s K_\tau \tau_v)^2}} = \\ &= \frac{1620}{\sqrt{(3,2 \cdot 360)^2 + \left(\frac{1620}{960}\right)^2 (1,14 \cdot 1,5 \cdot 250)^2}} = 1,40.\end{aligned}$$

Определяем запас прочности по диаграммам Смита согласно гл. VIII § 5. Для Ст. 45 принимаем те же, что и в предыдущем примере, величины характеристик прочности и формы диаграммы (ψ), получаем для сечения I—I:

$$\varphi_\sigma = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = \frac{3,2}{0,6} = 5,3 \quad \varphi_\tau = \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5.$$

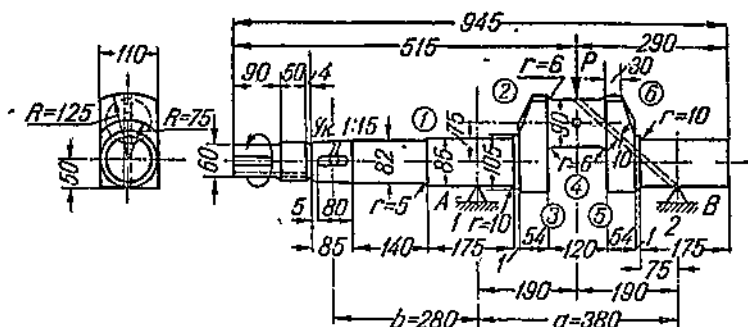
Запас прочности составит:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2} &= \left(\frac{\psi_\sigma \sigma_m + \varphi_\sigma \sigma_v}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \left(\frac{\psi_\tau \tau_m + \varphi_\tau \tau_v}{\tau_{-1}} \right)^2 = \\ &= 0,2 \left(\frac{5,3 \cdot 360}{2800} \right)^2 + \left(\frac{0,1 \cdot 104 + 2,5 \cdot 250}{1600} \right)^2; \\ n &= 1,6.\end{aligned}$$

Расчет коленчатого вала компрессора

На фиг. 279 дан конструктивный чертеж одноколенчатого вала компрессора. Число оборотов вала в минуту $n = 400$. Вал выполнен из Ст. 35. Значение сил Z и T меняются при вращении вала.

Величины сил Z и T в зависимости от угла φ поворота вала даны в табл. 43.



Фиг. 279. Схема сил, действующих на вал.

Направление усилий, указанное на фиг. 280, принимается за положительное.

Размеры на фиг. 280 имеют следующие значения:

$a = 38$ см	$n_3 = 10,3$ см	$m_1 = 10,3$ см
$n_1 = 27,7$ "	$d = 8,5$ "	$m_2 = 19,0$ "
$n_2 = 19,0$ "	$d_z = 9,0$ "	$m_3 = 27,7$ "
$l_z = 8,7$ "	$r = 7,5$ "	$l_{2,0} = 6,0$ "

Таблица 43

φ°	Z , кг	T , кг	G , кг	φ°	Z , кг	T , кг	G , кг
0	— 632	0	450	200	— 1256	+ 280	450
20	— 594	+ 40	450	220	— 1114	+ 528	450
40	— 510	+ 22	450	240	— 912	+ 735	450
60	— 438	— 84	450	250	— 652	+ 950	450
80	— 440	— 252	450	280	— 266	+ 1240	450
100	— 560	— 420	450	300	+ 468	+ 1862	450
120	— 778	— 504	450	320	+ 2680	+ 2892	450
140	— 1030	— 458	450	340	+ 4326	+ 1922	450
160	— 1234	— 272	450	360	+ 5860/— 632	0	450
180	— 1312	— 0	450				

Размеры щеки вала (фиг. 280) $u = 5,4$; $v = 11$ см; соответственно

$$J_I = \frac{uv^3}{12} = \frac{5,4 \cdot 11^3}{12} = 500 \text{ см}^4;$$

$$J_{II} = \frac{vu^3}{12} = \frac{11 \cdot 5,4^3}{12} = 144 \text{ см}^4.$$

Момент инерции сечения шатунной шейки:

$$J_z = \frac{\pi d_z^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 9^4}{64} = 322 \text{ см}^4.$$

Сечения, в которых следует проверить запас прочности, даны на фиг. 280 в кружках. Для примера приводим расчет прочности вала в сечении 4 по середине шатунной шейки.

Согласно табл. 43 максимальное и минимальное напряжения изгиба у отверстия для смазки шатунной шейки соответственно будут при положениях вала $\varphi = 360^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$.

Расчет напряжений кручения ведем в положении вала $\varphi = 320^\circ$ и $\varphi = 120^\circ$, так как в этих положениях вала сила T имеет предельные положительные и отрицательные значения.

Положение вала $\varphi = 360^\circ$.

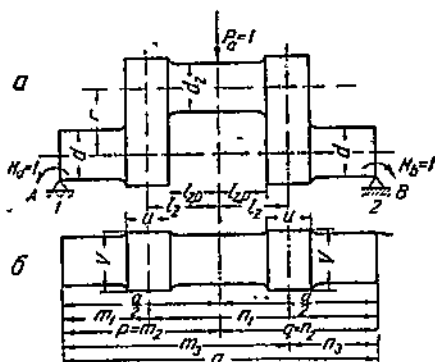
На основании данных табл. 43 и фиг. 281 получим:

$$A_v = \frac{G(a+b)}{a} = \frac{450(38+28)}{38} = 782 \text{ кг};$$

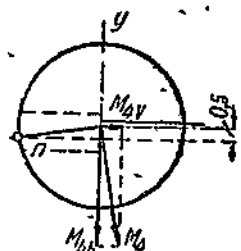
$$B_v = G - A_v = 450 - 782 = -332 \text{ кг};$$

$$A_h = \frac{Z}{2} = \frac{5860}{2} = -2930 \text{ кг};$$

$$B_h = Z + A_h = -2930 \text{ кг}.$$



Фиг. 280. Схема коленчатого вала компрессора.



Фиг. 281. Схема определения опасных точек.

Изгибающие моменты в сечении 4 составят:
в вертикальной плоскости

$$M_{1v} = B_v \frac{a}{2} = 332 \frac{38}{2} = 6310 \text{ кгсм};$$

в горизонтальной плоскости

$$M_{1h} = B_h \frac{a}{2} = 2930 \frac{38}{2} = 55700 \text{ кгсм}.$$

Напряжение от изгиба в точке n у края отверстия составит:

$$\sigma_{n\max} = \frac{M_{1h}}{\pi d^3} + \frac{M_{1v} 0,5}{\pi d^4} = \frac{55700 \cdot 32}{3,14 \cdot 9^3} + \frac{6310 \cdot 0,5 \cdot 64}{3,14 \cdot 9^4} = 788 \text{ кг/см}^2 \text{ (сжатие)}.$$

Напряжение от кручения в точке n равно нулю.

Положение вала $\varphi = 180^\circ$.

По выражениям

$$A_v = \frac{G(a+b)}{a} = \frac{450(38+28)}{38} = 782 \text{ кг};$$

$$B_v = G - A_v = 450 - 782 = -332 \text{ кг};$$

$$A_h = \frac{Z}{2} = \frac{1312}{2} = 656 \text{ кг};$$

$$B_h = Z - A_h = -656 \text{ кг}.$$

Изгибающие моменты в сечении 4 составят:
в вертикальной плоскости

$$M_{4v} = B_v \frac{a}{2} = 332 \frac{38}{2} = 6310 \text{ кгсм};$$

в горизонтальной плоскости

$$M_{4h} = B_h \frac{a}{2} = 656 \frac{38}{2} = 12450 \text{ кгсм}.$$

Таблица 44

Сечение вала	$\sigma_{\max}$ кг/см ²	$\sigma_{\min}$ кг/см ²	$\tau_{\max}$ кг/см ²	$\tau_{\min}$ кг/см ²	σ_m кг/см ²	σ_v кг/см ²	τ_m кг/см ²	τ_v кг/см ²
1	-150	150	200	-34,9	0	150	82,5	117,5
2	-358	144	180	-31,4	107	251	74,3	105,7
3	567	-144	892	-25,4	212	356	31,9	57,3
4, точка n	-788	184	0	0	486	302	0	0
5	562	-132,5	89,2	-25,4	214,8	347,3	31,9	57,3
6	318	76,3	0	0	120,8	197,1	0	0

Напряжение от изгиба в точке n составит:

$$\sigma_{n\min} = \frac{M_{4h}}{\pi d^3} + \frac{M_{4v} 0,5}{\pi d^3} = \frac{12450 \cdot 32}{3,14 \cdot 9^3} + \frac{6310 \cdot 0,5 \cdot 64}{3,14 \cdot 9^3} = 184 \text{ кг/см}^2 \text{ (растяжение)}.$$

Напряжение от кручения в точке n равно нулю.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{n\max} + \sigma_{n\min}}{2} = \frac{788 + 184}{2} = 486 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{n\max} - \sigma_{n\min}}{2} = \frac{788 - 184}{2} = 302 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_m = \tau_v = 0.$$

Аналогично ведется расчет напряжений в остальных сечениях вала.

Значения напряжений σ_m , σ_v , τ_m и τ_v сведены в табл. 44.

Вал выполнен из Ст. 35.

По табл. 33 принимаем:

$$\sigma_b = 6000 \text{ кг/см}^2; \sigma_s = 2800 \text{ кг/см}^2; \sigma_{-1} = 2400 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_s = 1900 \text{ кг/см}^2; \tau_{-1} = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Учитывая абсолютные размеры сечения вала, при расчете запасов прочности принимаем пределы усталости на основании фиг. 244 равными:

$$\sigma'_{-1} = 0,60 \quad \sigma_{-1} = 0,60 \cdot 2400 = 1490 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau'_{-1} = 0,60 \quad \tau_{-1} = 0,60 \cdot 1400 = 840 \text{ кг/см}^2.$$

Определение коэффициентов концентрации напряжения

Сечения 1 для галтели при $\frac{r}{d} = \frac{5}{82} = 0,061$ (по фиг. 229).

$$K_\sigma = 1,6.$$

Согласно фиг. 175 при $\frac{d}{D} = \frac{82}{85} = 0,97$ $\alpha_\tau = 1,4$;

при $q = 0,7$ $K_\tau = 1 + q(\alpha_\tau - 1) = 1 + 0,7(1,4 - 1) = 1,3$.

Сечения 2 и 6 согласно гл. VII § 7 при $\frac{r}{d} = \frac{10}{85} = 0,12$ $\alpha_\sigma = 2,7$.

При $\frac{d}{D} = \frac{85}{105} = 0,81$ и $\frac{r}{d} = 0,12$ получим:

$$\alpha_\tau = 2,5;$$

при $q = 0,7$ получим:

$$K_\sigma = 1 + 0,7(2,7 - 1) = 2,4;$$

$$K_\tau = 1 + 0,7(2,5 - 1) = 2,0.$$

Таблица 45

Сечение вала	K_σ	K_τ
1	1,6	1,3
2	2,2	2,0
3	3,1	1,6
4	1,8	—
5	3,1	1,6
6	2,2	2,0

Таблица 46

Сечение вала	Запас прочности по формуле (246)
1	3,52
2	1,96
3	1,21
4	1,86
5	1,23
6	3,38

Сечения 3 и 5 согласно гл. VII § 7 при $\frac{r}{d} = \frac{6}{90} = 0,067$ $\alpha_\sigma = 4,0$.

Согласно гл. VII § 2 фиг. 175 при $\frac{d}{D} = \frac{90}{110} = 0,82$ $\frac{r}{d} = 0,067$ получим:
 $\alpha_\tau = 1,8$;

$$K_\sigma = 1 + 0,7(4 - 1) = 3,1; K_\tau = 1 + 0,7(1,8 - 1) = 1,6.$$

Сечение 4 согласно фиг. 232 можно принять

$$K_\sigma = 1,8.$$

Значения коэффициентов концентрации сведены в табл. 45.

Определение запасов прочности

По выражениям (286) для края отверстия сечения вала 4 на основании табл. 44 и 45 получим:

$$u_z = 1 + \frac{\sigma_m \sigma' - 1}{K_\sigma \sigma_\sigma \sigma_s} = 1 + \frac{486 \cdot 1490}{1,8 \cdot 302 \cdot 2800} = 1,48.$$

По формуле (246) запас прочности составит:

$$n = \frac{\sigma' - 1}{\sqrt{(u_z K_\sigma \sigma_\sigma)^2 + 0}} = \frac{\sigma' - 1}{u_z K_\sigma \sigma_\sigma} = \frac{1490}{1,476 \cdot 1,8 \cdot 302} = 1,86.$$

Рассчитывая аналогично в остальных сечениях вала, получим запасы прочности, данные в табл. 46.

§ 2. Расчет прочности болтовых соединений

Определение нагрузок, действующих на болт

Принятые обозначения:

- d см — диаметр болта (наружный диаметр нарезки);
- d_1 см — внутренний диаметр нарезки;
- d_{cm} см — диаметр стержня болта;
- d_2 см — диаметр бурта на стержне болта;
- s_1 и s_2 см — толщина фланцев соединяемых частей;
- s_d см — длина (толщина) бурта на стержне;
- a см — диаметр опорной поверхности гайки и головки болта;
- P кг — внешняя переменная сила, разъединяющая соединенные болтами части;
- T кг — растягивающее болт усилие от первоначальной затяжки болта;
- P_z кг — добавочное усилие, растягивающее болт, возникающее под действием силы P ;
- c_1 — жесткость болта;
- c_2 — жесткость соединяемых частей;
- $M_{кр}$ — крутящий момент, возникающий вследствие трения между нарезкой болта и гайкой при первоначальной затяжке болта.

Определение усилий, растягивающих болт

Жесткость болта определяется по формуле

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_{11}} + \dots + \frac{1}{c_m} = \sum \frac{1}{c_i}, \quad (254)$$

$$c_i = \frac{E_1 F_i}{l_i}.$$

где

Здесь E_1 — модуль упругости материала болта при растяжении, кг/см²;
 F_i — площадь поперечного сечения рассматриваемого участка болта, см²;
 l_i — длина участка, см.

Жесткость соединяемых частей при конструкции соединения по фиг. 282 определяется по формуле

$$c_2 = \frac{E_2 F_2}{s_1 + s_2}, \quad (255)$$

где E_2 — модуль упругости материала фланцев при сжатии, кг/см²;
 F_2 — площадь поперечного сечения полого цилиндра, имеющего внешний диаметр D_n и внутренний диаметр d_2 (фиг. 282), см².

Площадь F_2 может быть определена следующим способом, дающим результаты, удовлетворительно отвечающие данным опытов.

За жесткость части фланца, соответствующую болту, принимается жесткость полого цилиндра с наружным диаметром D_n и внутренним диаметром, равным диаметру отверстия в соединяемых частях. Тогда площадь F_2 равна

$$F_2 = \frac{\pi}{4} (D_n^2 - d_2^2) \text{ см}^2, \quad (256)$$

$$D_n = a + \frac{s_1 + s_2}{2} \text{ см}. \quad (257)$$

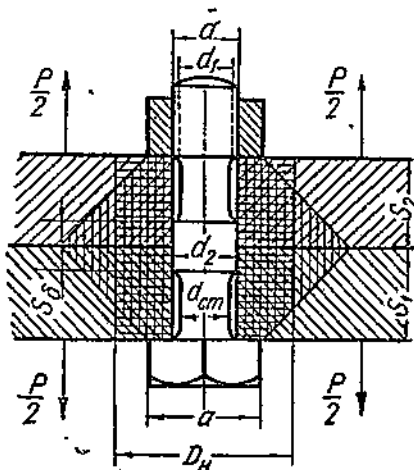
В случае, если между соединяемыми фланцами проложена упругая прокладка (фиг. 283), общая жесткость соединяемых частей определится из формулы

$$\frac{1}{c_3} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_n},$$

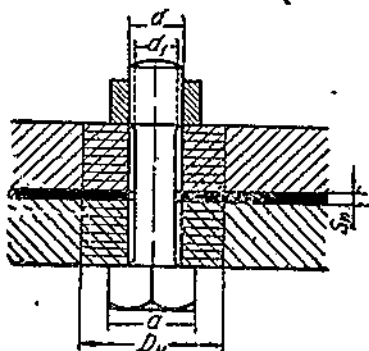
где c_2 — жесткость фланцев, определенная по формуле (255);

c_n — жесткость прокладки, определяется, по формуле

$$c_n = \frac{E_n F_2}{S_n}.$$



Фиг. 282. Схема соединения бол-
том.



Фиг. 283. Схема соединения бол-
том с прокладкой.

Приближенные значения модулей упругости при сжатии различных материалов приведены в табл. 47.

Таблица 47

Материал	Модуль упругости при сжатии, кг/см ²
Сталь углеродистая и легированная . . .	210 · 10 ⁴ —220 · 10 ⁴
Латунь	85 · 10 ⁴ —95 · 10 ⁴
Красная медь	11,5 · 10 ⁴
Свинец	5,1 · 10 ⁴
Олово	40 · 10 ⁴
Цинк прокатанный	96 · 10 ⁴

График зависимости модуля упругости E кг/мм² чугуна от временного сопротивления при растяжении дан на фиг. 284 (по данным Майлендера) [36].

Жесткость соединяемых частей может быть определена расчетным путем лишь в случае более или менее простых форм соединяемых частей. В более сложных случаях (например, соединение крышки шатуна с шатуном) жесткость c_2 должна быть найдена экспериментально.

Минимальная растягивающая сила от первоначальной затяжки болта, отвечающая условию, чтобы соединяемые части были прижаты друг

к другу во все время действия наибольшей нагрузки цикла, определяется по формуле

$$T_{\min} = P \frac{c}{c_1 + c_2} \quad (258)$$

В случае, если усилие затяжки болта T равно $T_{\min}$, сила, с которой соединяемые части прижаты друг к другу, при изменении внешней силы от нуля до значения P , изменяется от 0 до значения $T_{\min}$. Во избежание удара соединяемых частей и имея также в виду, что в ряде случаев при этом не обеспечивается плотность соединения (крышка парового цилиндра, автоклава и т. п.), сила T дается значение, большее $T_{\min}$

$$T = \alpha T_{\min}, \quad \alpha = 1,2 \div 1,5. \quad (259)$$

Добавочное переменное растягивающее усилие P_z , действующее на болт и возникающее под действием силы P , определяется по формуле

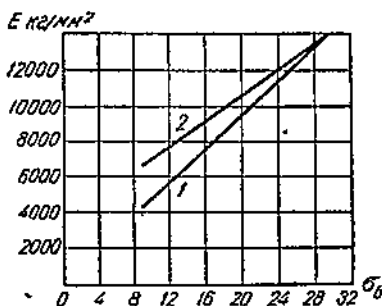
$$P_z = P \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \quad (260)$$

Если внешняя сила изменяется от $P = P_1$ до $P = P_2$, то добавочное переменное усилие, действующее на болт, изменяется в пределах от

$$P_{z1} = P_1 \frac{c_1}{c_1 + c_2} \text{ кг} \quad (261)$$

до

$$P_{z2} = P_2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} \text{ кг}. \quad (262)$$



Фиг. 284. Диаграмма модулей упругости для чугуна:

1 — модуль упругости серого чугуна при растяжении; 2 — модуль упругости серого чугуна при сжатии.

Определение момента, закручивающего болт

Момент, закручивающий болт при затяжке и возникающий вследствие трения между гайкой и болтом, зависит от величины усилия предварительной затяжки T , диаметра болта, системы нарезки, состояния поверхностей нарезки болта и гайки и смазки поверхностей трения.

Величина $M_{кр}$ находится из уравнения

$$M_{кр} = \beta T d \text{ кгсм}. \quad (263)$$

Значение коэффициента β для треугольной крепежной нарезки можно принять:

- $\beta = 0,1$ при хорошо смазанных гайках и гладкой поверхности нарезки;
- $\beta = 0,12$ при несмазанных ¹ гайках и гладкой поверхности нарезки;
- $\beta = 0,13-0,15$ при хорошо смазанных гайках и негладкой ² поверхности нарезки;
- $\beta = 0,18-0,20$ при несмазанных гайках и негладкой поверхности нарезки.

¹ При практически сухих поверхностях трения, но без тщательного удаления масляных частиц, например промыванием спиртом.

² Гладкая поверхность нарезки у новых болтов при повторных затягиваниях быстро изнашивается. Поэтому, в случае, когда в условиях работы болты подвергаются подтягиванию, при расчете болтовых соединений следует выбирать коэффициент β , соответствующий случаю нарезки с негладкой поверхностью.

Влияние неравномерности распределения напряжений на прочность болтов

Значение K_σ — эффективного коэффициента концентрации напряжений при знакопеременных нагрузках — может быть взято из табл. 48, составленной на основании опытов, при которых болт был поставлен в условия, аналогичные условиям его работы в болтовых соединениях, т. е. K_σ учитывает не только влияние на предел усталости концентрации напряжений от растяжения-сжатия, но также и местные напряжения, возникающие в витках нарезки в местах передачи усилий на гайку.

Приведенные в табл. 48 значения K_σ относятся к нарезанной винтовой резьбе. В случае, если резьба образована накаткой или обкатана после черновой нарезки, значение K_σ понижается по сравнению с данными табл. 48.

Таблица 48

3. Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений при знакопеременной нагрузке

Нарезка	Материал болта	
	углеродистая сталь	легированная термическая обработанная сталь
Витворта	3,6—3,8	4,2—4,4
Метрическая	4,8—5,0	5,5—5,8

Понижение значения K_σ для накатанной нарезки в зависимости от свойств стали и термической обработки в процентах от значения K_σ табл. 48 равно:

углеродистой стали на	14—18%
легированной вязкой стали	20—24%
легированной закаленной стали	30—40%

Необходимо отметить, что термическая обработка болта после накатки резьбы при этом не предусматривается.

Диаграмма Смита (фиг. 285) иллюстрирует влияние концентрации напряжений на прочность болта при действии переменных нагрузок. По оси абсцисс отложены значения постоянной части напряжений цикла σ_m , а по оси ординат — значения максимальных напряжений цикла σ_{max} .

Точка 1 — предельное значение напряжений при знакопеременной нагрузке при симметричном цикле нагрузки ($\sigma_m = 0$) при гладком образце; ордината точки 1 соответствует пределу усталости σ_{-1} ; точка 1 соответствует пределу усталости для образца с нарезкой $\frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}$.

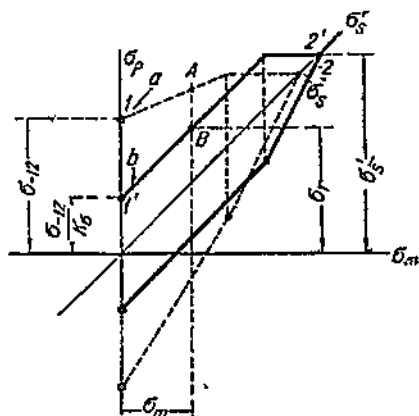
Точка 2 — сопротивление при статической нагрузке для гладкого образца (соответствует значению предела текучести σ_s); точка 2 — соответствует пределу текучести σ_s' для образца с нарезкой. Линия *a* представляет прямую пределов прочности для гладкого образца при различной асимметрии циклов нагрузки; линия *b* то же для образца с нарезкой.

Предел прочности для нарезанного стержня при действии напряжений по асимметричному циклу может быть принят равным:

$$(\sigma_{\max})_K = \sigma_m + \frac{\sigma - 1\epsilon}{K_\sigma} \quad (264)$$

Неравномерное распределение напряжений в болтах наблюдается также в местах сопряжений стержня болта с головкой, а также при сопряжениях различных диаметров при наличии буртов или выточек. Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений, возникающих в этих местах болтов (фиг. 286, $a—z$), могут быть взяты по фиг. 229. В ответственных соединениях следует конструировать болты таким образом, чтобы радиусы закруглений были не меньше

$$\begin{aligned} \text{или} \quad r &= 0,2 d \\ r &= 0,4 r. \end{aligned}$$



Фиг. 285. Диаграмма σ_p, σ_m для болта.

Определение запасов прочности ¹

При расчете запасов прочности болтов исходными напряжениями являются номинальные нормальные напряжения в поперечном ослабленном сечении от постоянных нагрузок σ_m , номинальные нормальные напряжения от знакопеременных нагрузок σ_v и нормальные касательные напряжения от постоянных нагрузок τ_m . Если напряжения в рассматриваемом сечении изменяются от значения $\sigma_{\max}$ до значения $\sigma_{\min}$, то постоянная часть напряжения σ_m и переменная σ_v составят:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_v = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Номинальные напряжения от растяжения определяются из выражения

$$\sigma = \frac{P}{F},$$

где P —растягивающее усилие, действующее вдоль болта;

F —площадь поперечного сечения болта в рассматриваемом сечении.

Номинальное напряжение от кручения болта определяется из выражения

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{кр}},$$

где $M_{кр}$ —крутящий момент в рассматриваемом сечении болта;

$W_{кр}$ —момент сопротивления кручению данного сечения.

При определении запасов прочности болтов выбираются такие сечения болтов, в которых напряжения достигают максимальных значений. Такими сечениями являются имеющие наименьшие площади и моменты сопротивления, а также сечения с наибольшей концентрацией напряжений.

¹ Приведенный способ определения запаса прочности не учитывает влияния ползучести металла при повышенных температурах (крип), которая существенно отражается на напряженности болтов, а также не учитывает влияния на прочность коррозии.

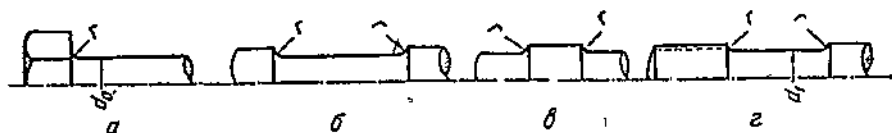
Запас прочности определяется по формуле

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{\sigma_{\max}}{(\sigma_{\max})_K} \right)^2 + \left(\frac{\tau_0}{\tau_s} \right)^2. \quad (265)$$

Здесь $\sigma_{\max}$ составляет

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_v;$$

$$(\sigma_{\max})_K = \sigma_m + \frac{\sigma_{-1z}}{K_\sigma}.$$

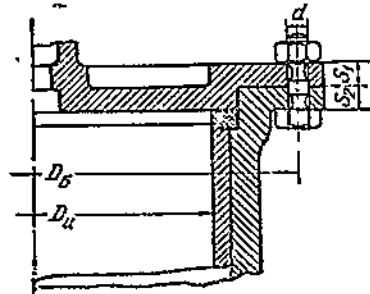


Фиг. 286. Схема переходных галтелей.

Числовые примеры

Расчет болтового соединения крышки цилиндра паровой машины

Технические данные для расчета (фиг. 287) одноцилиндровой машины: диаметр цилиндра $D_H = 360$ мм; толщина фланцев $s_1 = s_2 = 30$ мм; диаметр окружности болтов $D_6 = 500$ мм; число болтов $i = 12$; давление пара при впуске $p_1 = 13$ атм; давление пара при выпуске $p_2 = 1,1$ атм.



Фиг. 287. Схема болтового соединения крышки цилиндра.

Предварительное определение размеров болтов

В качестве материала выбираем углеродистую сталь по ОСТ 35. Усилие давления пара на крышку цилиндра, отнесенное к одному болту и умноженное на коэффициент запаса по натягу 1,25, равно:

$$P_1 = 1,25 \frac{\pi D_H^2}{4i} p_1 = \frac{1,25 \pi \cdot 360^2 \cdot 12}{4 \cdot 12} = 1270 \text{ кг.}$$

Внутренний диаметр нарезки находим по формуле

$$d_1 = \sqrt{\frac{4P_1}{\pi R_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1270}{\pi \cdot 350}} = 2,15 \text{ см.}$$

Принимая болты с нормальной метрической резьбой (ОСТ 32), находим размеры нарезанной части $d = 27$ мм, $d_1 = 22,83$ мм, площадь поперечного сечения по внутреннему диаметру резьбы $F_1 = 4,09$ см². Выбираем диаметр стержня болта: $d_{cm} = 0,9d_1 \approx 2,0$ см, площадь сечения стержня $F_{cm} = 3,14$ см².

Определение нагрузки, действующей на болт

Конструкция болта соответствует фиг. 282. Диаметр бурта, равный диаметру отверстия в фланцах, принимаем равным $d_2 = 2,8$ см. Длину бурта принимаем равной $s_6 = 2,0$ см. Площадь поперечного сечения болта равна $F_6 = 6,15$ см². Жесткость болта определяем по формуле (254)

$$\frac{1}{c_1} = \sum \frac{1}{c_i} = \frac{2}{c_{ст}} + \frac{1}{c_6}.$$

Длина участков болта: стержень $20 + 20$ мм, бурт 20 мм. Жесткость отдельных участков болта:

$$c_{ст} = \frac{EF_{ст}}{l_{ст}} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,14}{2} = 3,3 \cdot 10^8 \text{ кгс/см};$$

$$c_6 = \frac{EF_6}{l_6} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 6,15}{2} = 5,45 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}.$$

Жесткость болта находим:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{2}{3,3 \cdot 10^8} + \frac{1}{5,45 \cdot 10^6},$$

откуда $c_1 = 1,32 \cdot 10^6$.

Жесткость соединяемых частей определим по формуле (255)

$$c_2 = \frac{E_2 F_2}{s_1 + s_2}.$$

Принимаем диаметр опорной поверхности гайки и головки равным $a = 4,4$ см, тогда

$$D_H = a + \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{3,0 + 3,0}{2} + 4,4 = 7,4 \text{ см};$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4} (D_H^2 - d_2^2) = \frac{\pi}{4} (7,4^2 - 2,8^2) = 33,7 \text{ см}^2.$$

Принимая для материала фланцев (серый чугун) модуль упругости при сжатии $E_2 = 1 \cdot 10^6$ кгс/см², находим

$$c_2 = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 33,7}{3 + 3} = 5,61 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}.$$

Минимальное усилие необходимой первоначальной затяжки болта определяется по формуле (258):

$$T_{\min} = P \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \text{ где } P = \frac{\pi D_H^2}{4l} (p_1 - 1) = \frac{\pi \cdot 36^2}{4 \cdot 12} \cdot 12 = 1020 \text{ кг};$$

$$T_{\min} = 1020 \frac{5,61 \cdot 10^6}{1,32 \cdot 10^6 + 5,61 \cdot 10^6} = 820 \text{ кг}.$$

Учитывая необходимость достижения плотности соединения при максимальном давлении пара в цилиндре, принимаем

$$T = 1,4 \cdot 820 = 1150 \text{ кг (принято } \alpha = 1,4).$$

Добавочное переменное усилие, растягивающее болт и изменяющееся в данном случае от 0 до значения $+P_z$, находим по формуле (260)

$$P_z = P \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 1020 \frac{1,32 \cdot 10^6}{(1,32 + 5,61) \cdot 10^6} = 190 \text{ кг}.$$

Момент, закручивающий болт, определяется по формуле (263).

Рассчитываемое соединение следует отнести к таким, у которых подтяжка болтов производится, поэтому останавливаемся на коэффициенте β для случая болтов с негладкой поверхностью резьбы. При смазанных болтах принимаем $\beta = 0,15$, тогда

$$M_{кр} = 0,15 \cdot 1150 \cdot 2,7 = 460 \text{ кгсм.}$$

Определение напряжений в нарезанной части болта

Номинальное напряжение в сечении d_1 болта под действием силы T

$$\sigma_{\text{min}} = \frac{T}{F_1} = \frac{1150}{4,09} = 281 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение от добавочной силы P_z :

$$2\sigma_d = \frac{P_z}{F_1} = \frac{190}{4,09} = 46,5 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное номинальное напряжение в сечении d_1 :

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{min}} + 2\sigma_d = 281 + 46,5 = 327,5 \text{ кг/см}^2.$$

Постоянную часть номинального напряжения в сечении болта находим по формуле

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{327,5 + 281}{2} = 304 \text{ кг/см}^2.$$

Переменная часть этого напряжения составляет:

$$\sigma_v = 23,3 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение от кручения болта составляет:

$$\tau_m = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \quad W_{кр} = \frac{\pi d_1^3}{16} = 2,34 \text{ см}^3,$$

$$\tau_m = \frac{466}{2,34} = 200 \text{ кг/см}^2.$$

Определение запаса прочности болта в нарезке

Для материала болта по табл. 33 находим:

$$\sigma_s = 2800 \text{ кг/см}^2, \quad \tau_s = 1900 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_{-1z} = 1700 - 2200 \text{ кг/см}^2.$$

Принимаем $\sigma_{-1z} = 1900 \text{ кг/см}^2$. Значение предела прочности при переменной нагрузке

$$(\sigma_{\text{max}})_K = \sigma_m + \frac{\sigma_{-1z}}{K_\sigma}$$

Для Ст. 35 и метрической нарезки по табл. 48 $K_\sigma = 4,8$. Тогда

$$(\sigma_{\text{max}})_K = 304 + \frac{1900}{4,8} = 304 + 396 = 700 \text{ кг/см}^2.$$

Запас прочности находим по формуле (265)

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{\sigma_{\max}}{(\sigma_{\max})_K} \right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_s} \right)^2 = \left(\frac{328}{700} \right)^2 + \left(\frac{200}{1900} \right)^2,$$

откуда $n = 2,1$.

Определение запаса прочности болта в месте перехода стержня в головку

Номинальное напряжение растяжения в стержне от силы T

$$\sigma_{\min} = \frac{T}{F_{cm}} = 366 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение от добавочной силы P_z

$$2\sigma_v = 60,5 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное номинальное напряжение растяжения

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} + 2\sigma_v = 366 + 60,5 = 426,5 \text{ кг/см}^2.$$

Постоянная часть номинального напряжения

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{426,5 + 366}{2} = 396 \text{ кг/см}^2.$$

Переменная часть

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 30,3 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение от кручения стержня

$$\tau_m = 297 \text{ кг/см}^2.$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений в месте перехода стержня болта в головку при радиусе закругления галтели в этом месте $\rho = 0,2d_{cm}$ (по фиг. 229 $K_\sigma = 1,2 - 1,4$). Предел прочности при растягивающей нагрузке

$$(\sigma_{\max})_K = \sigma_m + \frac{\sigma_v K_\sigma}{1,4} = 396 + \frac{1900}{1,4} = 1752 \text{ кг/см}^2.$$

Запас прочности болта в месте перехода стержня в головку

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{427}{1752} \right)^2 + \left(\frac{297}{1900} \right)^2,$$

откуда $n = 3,45$.

В случае, если переходные галтели имеют радиус $\rho = 0,05d$ и коэффициент концентрации $K_\sigma = 1,8$, то

$$(\sigma_{\max})_K = 396 + \frac{1900}{1,8} = 1456 \text{ кг/см}^2$$

и запас прочности болта в месте перехода стержня в головку из выражения

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{427}{1456} \right)^2 + \left(\frac{297}{1900} \right)^2$$

составит $n = 2,9$.

Диаметр резьбы болтов $d = \frac{1''}{2}$. Резьба Витворта. Наибольшую силу инерции, приходящейся на один болт болтового соединения, находим из выражения

$$P = \frac{(m + m_1) \omega^2 \cdot (1 + \lambda) R}{2} = \frac{0,714 \left(\frac{\pi \cdot 1100}{30} \right)^2 \cdot 1,22 \cdot 0,0635}{2}.$$

Здесь $m + m_1 = 0,714 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}$ — масса поршня и шатуна; $\omega = \frac{\pi \cdot 1100}{30}$ — угловая скорость коленчатого вала; $r = 0,0635 \text{ м}$ — радиус кривошипа; $1 + \lambda = 1,22$; λ — отношение радиуса кривошипа R к длине шатуна.

Отношение жесткости болта к жесткости соединяемых частей оцениваем равным [37]

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{1,5}.$$

Минимальное усилие предварительной затяжки

$$T_{\min} = P \frac{c_2}{c_1 + c_2} = 222 \text{ кг}.$$

Принимаем усилие затяжки равным

$$T = 1,5 T_{\min} = 1,5 \cdot 222 = 333 \text{ кг}.$$

Добавочное усилие P_z , изменяющееся от 0 до P_z , равно

$$P_z = P \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 370 \frac{1}{2,5} = 148 \text{ кг}.$$

Момент, закручивающий болт при затяжке,

$$M_{кр} = f T d = 0,15 \cdot 333 \cdot 1,27 = 63,3 \text{ кгсм}.$$

Номинальное напряжение в сечении нарезанной части болта от действия силы T

$$\sigma_{\min} = \frac{4T}{\pi d^2_1} = \frac{333}{0,784} = 425 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение в нарезке от действия силы P_z

$$2\sigma_v = \frac{148}{0,784} = 189 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное напряжение в болте в сечении d_1

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} + 2\sigma_v = 425 + 189 = 614 \text{ кг/см}^2.$$

Постоянная часть номинального напряжения

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{614 + 425}{2} = 520 \text{ кг/см}^2.$$

Знакопеременная часть

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 94,5 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение от кручения болта

$$W_{кр} = 0,196 \text{ см}^2, \quad \tau_m = \frac{63,3}{0,196} = 323 \text{ кг/см}^2.$$

Выбираем в качестве материала болтов сталь ГУТАП 5140, термически обработанную; по табл. 33 находим:

$$\sigma_b = 90 \div 100 \text{ кг/мм}^2, \quad \sigma_s = 75 \text{ кг/мм}^2, \quad \tau_s = 39 \text{ кг/мм}^2, \\ \sigma_{1z} = 27 \div 30 \text{ кг/мм}^2.$$

Значение K_σ для этой стали при резьбе Витворта по табл. 48

$$K_\sigma = 4,2.$$

Тогда

$$(\sigma_{\max})_k = \sigma_m + \frac{\sigma_{1z}}{K_\sigma} = 520 + \frac{2800}{4,2} = 1185 \text{ кг/см}^2.$$

Запас прочности в нарезанной части находим по формуле (265)

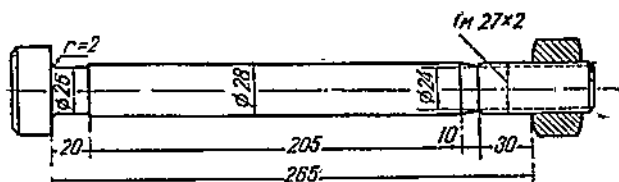
$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{\sigma_{\max}}{(\sigma_{\max})_k} \right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_s} \right)^2 = \left(\frac{614}{1185} \right)^2 + \left(\frac{323}{3900} \right)^2,$$

откуда $n = 1,92$.

Проверочный расчет болтового соединения малой (поршневой) головки шатуна двухтактного дизеля

Данные для расчета

Диаметр цилиндра двигателя $D = 510 \text{ мм}$; ход поршня $H = 500 \text{ мм}$; число оборотов $n = 300 \text{ об/мин}$; давление вспышки $p = 50 \text{ атм}$; вес поступательно-движущихся частей (без шатуна) $G = 425 \text{ кг}$; длина шатуна $L = 1080 \text{ мм}$; радиус кривошипа $R = 275 \text{ мм}$; размеры болтов



Фиг. 288. Схема болта шатунной головки дизеля.

по фиг. 288. Крышка крепится с телом шатуна четырьмя болтами. Резьба метрическая М 27·2, $d = 27 \text{ мм}$; $d_1 = 24,22 \text{ мм}$; $r = 2 \text{ мм}$; $d_{\text{ст}} = 25,7 \text{ мм} \approx 26 \text{ мм}$.

Действующие на болт нагрузки

Находим отношение радиуса кривошипа к длине шатуна

$$\lambda = \frac{R}{L} = \frac{1}{4}.$$

Окружная скорость на кривошипе

$$v = \frac{\pi n R}{30} = \frac{\pi \cdot 0,275 \cdot 300}{30} = 8,65 \text{ м/сек.}$$

Максимальное ускорение поступательно-движущихся масс

$$a_{\max} = r\omega^2(1 + \lambda) = \frac{v^2}{R}(1 + \lambda) = 340 \text{ м/сек}^2.$$

Сила инерции поступательно-движущихся масс, воспринимаемая четырьмя болтами,

$$P_1 = \frac{G}{g} a_{\max} = \frac{425}{9,81} 340 = 14\,750 \text{ кг.}$$

Усилие, действующее на один болт,

$$P = \frac{P_1}{4} = 3688 \text{ кг.}$$

Жесткость участков болта, имеющих диаметр $d = 26 \text{ мм}$,

$$F = 5,3 \text{ см}^2, l = 20 + 10 = 30 \text{ мм};$$

$$c_a = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5,3}{3} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ кгс/см.}$$

Жесткость участка болта, имеющего диаметр $d = 28 \text{ мм}$,

$$F = 6,15 \text{ см}^2, l = 205 \text{ мм};$$

$$c_b = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 6,15}{20,5} = 0,63 \cdot 10^6 \text{ кгс/см.}$$

Жесткость нарезанного участка, имеющего диаметр $d = 25,7 \text{ мм}$,

$$F = 5,2 \text{ см}^2, l = 30 \text{ мм};$$

$$c_r = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5,2}{3} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ кгс/см};$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{3,7} \cdot 10^{-6} + \frac{1}{0,63} 10^{-6} + \frac{1}{3,6} \cdot 10^{-6} = 2,16 \cdot 10^{-6},$$

откуда $c_1 = 0,463 \cdot 10^6$.

Жесткость соединяемых частей (головки шатуна и крышки) оцениваем величиной $c_2 = 1,4c_1 = 0,65 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}$.

Минимально необходимое усилие первоначальной затяжки болта

$$T_{\min} = \frac{c_2}{c_1 + c_2} P = 2160 \text{ кг.}$$

Принимая усилие первоначальной затяжки $T = 1,4 \cdot 2160 = 3020 \text{ кг}$ (что соответствует напряжению, отнесенному к сечению d_1) определим:

$$\sigma_{\min} = \frac{3020}{4,63} = 655 \text{ кг/см}^2;$$

напряжение лежит в рекомендуемых пределах: $600\text{—}700 \text{ кг/см}^2$.

Величина переменной силы, действующей на болт,

$$P_z = P \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 3688 \cdot 0,417 = 1540 \text{ кг.}$$

Момент, закручивающий болт,

$$M_{kn} = 0,15 \cdot 3020 \cdot 2,7 = 1225 \text{ кгс/см.}$$

Определение номинальных напряжений в нарезанной части болта.

Номинальное напряжение в сечении d_1 от действия силы T

$$\sigma_{\min} = \frac{T}{4,63} = \frac{3020}{4,63} = 655 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение от действия силы P_z

$$2\sigma_v = \frac{1540}{4,63} = 334 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное номинальное напряжение в этом сечении

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} + 2\sigma_v = 655 + 334 = 989 \text{ кг/см}^2.$$

Постоянная часть номинального напряжения равна

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 822 \text{ кг/см}^2.$$

Знакопеременная часть равна

$$\sigma_v = 167 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное напряжение в сечении d_1 от кручения

$$\tau_m = \frac{M_{kp} \cdot 16}{\pi d_1^3} = \frac{1225 \cdot 16}{\pi \cdot 2,42^3} = 440 \text{ кг/см}^2.$$

Определение запаса прочности в нарезанной части болта

В качестве материала выбрана легированная термически обработанная хромоникелевая сталь марки Э-8 завода „Электросталь“. По табл. 33 находим:

$$\sigma_b = 100 \text{ кг/мм}^2, \sigma_s = 80 \text{ кг/мм}^2, \tau_s = 44 \text{ кг/мм}^2, \sigma_{-1z} = 33 \text{ кг/мм}^2$$

Значение $\bar{K}_\sigma$ по табл. 48 равно 5,5—5,8.

Тогда значение предела прочности при переменной нагрузке:

$$(\sigma_{\max})_K = \sigma_m + \frac{\sigma_{-1z}}{K_\sigma} = 822 + \frac{3300}{5,7} = 1402 \text{ кг/см}^2.$$

Запас прочности в нарезанной части

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{\sigma_{\max}}{(\sigma_{\max})_K} \right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_s} \right)^2 = \left(\frac{989}{1402} \right)^2 + \left(\frac{440}{4400} \right)^2 = 0,508,$$

откуда $n = 1,4$.

Расчет болтового соединения фланцев вертикальной штанги насоса

Соединение испытывает постоянное растягивающее усилие 600 кг и знакопеременное усилие ± 3400 кг. Число болтов в соединении 4. Толщина фланцев $s = 24$ мм (фиг. 289 и 290).

Предварительное определение размеров болта:

$$P = 1,5 \frac{3400 + 600}{4} = 1500 \text{ кг};$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1500}{\pi \cdot 400}} = 2,18 \text{ см.}$$

Выбираем метрическую 1-ю мелкую нарезку (ОСТ 271) $d = 27$ мм;

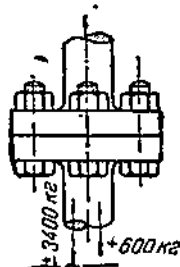
$$d_1 = 24,2 \text{ мм};$$

$$d_{cm} = 25,7 \text{ мм}; r = 2 \text{ мм};$$

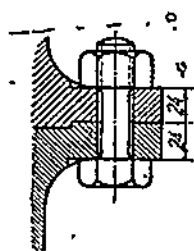
$$F_1 = 4,61 \text{ см}^2.$$

Диаметр стержня болта выбираем равным $d_{cm} = 2 \text{ см}$, $F_{cm} = 3,14 \text{ см}^2$.
Жесткость болта

$$c_1 = \frac{E_1 F_{cm}}{l} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,14}{4,8} = 1,375 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}.$$



Фиг. 289. Схема болтового соединения штанги насоса.



Фиг. 290. Схема болта.

Жесткость фланцев: $a = 4,1 \text{ см}$,

$$D_n = a + \frac{s_1 + s_2}{2} = 4,1 + \frac{2,4 + 2,4}{2} = 6,5 \text{ см},$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4} (6,5^2 - 2,8^2) = 27 \text{ см}^2;$$

$$c_2 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 27}{4,8} = 11,8 \cdot 10^6 \text{ кгс/см};$$

$$T_{min} = \frac{3400 + 600}{4} \frac{c_2}{c_1 + c_2} = 1000 \frac{11,8 \cdot 10^6}{(1,375 + 11,8) \cdot 10^6} = 900 \text{ кг}.$$

Принимаем $T = 1,3$; $T_{min} = 1170 \text{ кг}$.

Добавочное знакопеременное усилие, действующее на болт,

$$P_z = \frac{3400}{4} \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 89 \text{ кг};$$

$$M_{кр} = \beta T d = 0,15 \cdot 1170 \cdot 27 = 475 \text{ кгс·см}.$$

Наименьшее номинальное напряжение от растяжения в сечении d_1 болта

$$\sigma_{min} = \frac{T - P_z}{F_1} = 235 \text{ кг/см}^2,$$

и наибольшее

$$\sigma_{max} = \frac{T + P_z}{F_1} = 274 \text{ кг/см}^2.$$

Постоянная часть напряжения

$$\sigma_m = \frac{274 + 235}{2} = 255 \text{ кг/см}^2.$$

Знакопеременная часть

$$\sigma_v = \frac{274-235}{2} = 20 \text{ кг/см}^2.$$

Момент сопротивления кручению в нарезке болта

$$W_{кр} = \frac{\pi d_1^3}{16} = 2,78 \text{ см}^3.$$

Номинальное напряжение от кручения в сечении d_1

$$\tau_m = \frac{475}{2,78} = 171 \text{ кг/см}^2.$$

В качестве материала болта принимаем сталь ОСТ 35. В табл. 33 находим характеристики этой стали:

$$\sigma_s = 52-65 \text{ кг/мм}^2; \tau_s = 19 \text{ кг/мм}^2, \sigma_{-1} = 1722 \text{ кг/мм}^2.$$

Принимаем $\sigma_{-1} = 19 \text{ кг/мм}^2$.

Предел прочности при растягивающей нагрузке

$$(\sigma_{max})_k = \sigma_m + \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma} = 255 + \frac{1900}{4,8} = 651 \text{ кг/см}^2.$$

Из выражения

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{274}{651}\right)^2 + \left(\frac{171}{1900}\right)^2$$

находим запас прочности болта в нарезанной части $n = 2,3$.

§ 3. Схема расчета прочности цилиндрических спиральных пружин

Пружины круглого поперечного сечения [3]

Для определения напряжения τ и осадки f в цилиндрических спиральных пружинах из круглой проволоки пользуются формулами, введенными в гл. VI, § 4.

В тех случаях, когда нет необходимости в большой точности вычислений напряжения и осадки, целесообразно воспользоваться диаграммами на фиг. 291—293, на которых приведены значения коэффициентов c_1 , c_2 и c_3 , позволяющие определять усилие и осадку пружины по выражению:

$$P = c_1 \tau; \quad f = c_2 \tau i; \quad P = c_3 \frac{f}{i},$$

где i — число рабочих витков.

На основании системы расчета Зодерберга (см. гл. VIII) имеем:

$$\frac{1}{n} = \frac{\tau_m}{\tau_s} + \frac{\tau_v}{\tau_{-1}}, \quad (266)$$

где τ_m и τ_v — среднее напряжение и амплитуда напряжения;

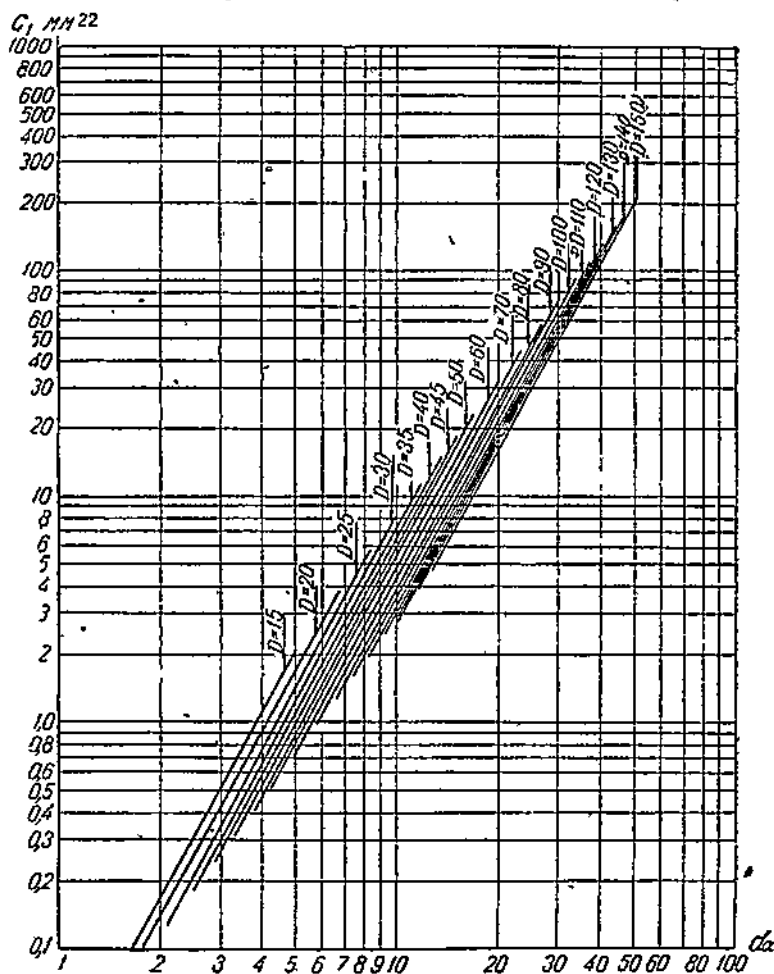
τ_s и τ_{-1} — предел текучести и предел усталости материала на кручение.

Для среднего напряжения τ_m концентрация не учитывается, а дополнительные напряжения среза должны быть учтены коэффициентом k_s (см. гл. VI, § 4).

Для переменного напряжения τ_v увеличение напряжений учитывается введением коэффициента k_v .

В таком случае компоненты среднего напряжения и амплитуды напряжения определяются выражениями: .

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2k_c}; \quad (267) \quad \tau_u = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2}; \quad (268)$$



Фиг. 291. Значение коэффициента C_1 в зависимости от диаметра проволоки d и среднего диаметра пружины D для определения усилия на пружину $P = C_1 \tau$.

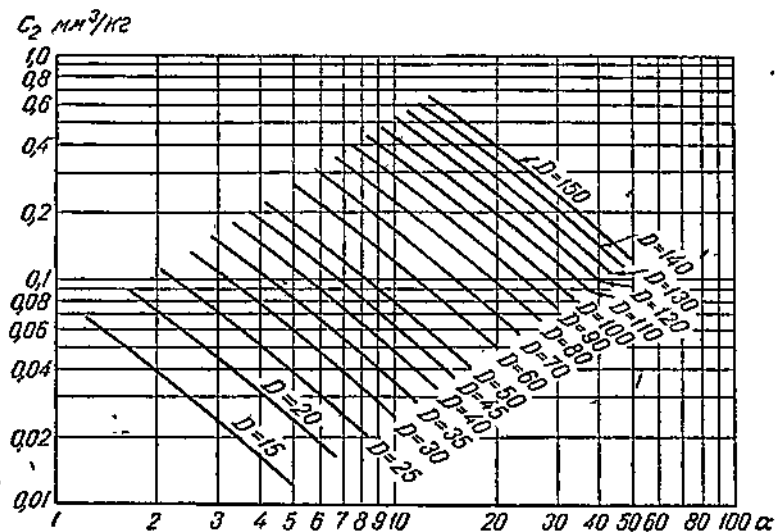
$\tau_{\max}$ и $\tau_{\min}$ предварительно определены по соответствующим усилиям $P_{\max}$ и $P_{\min}$, действующим на пружину, а также с учетом коэффициентов k_s и k_c .

Подставляя значения $\tau_{\max}$ и τ_u из выражений (267) и (268) в выражение (266), после преобразований получим:

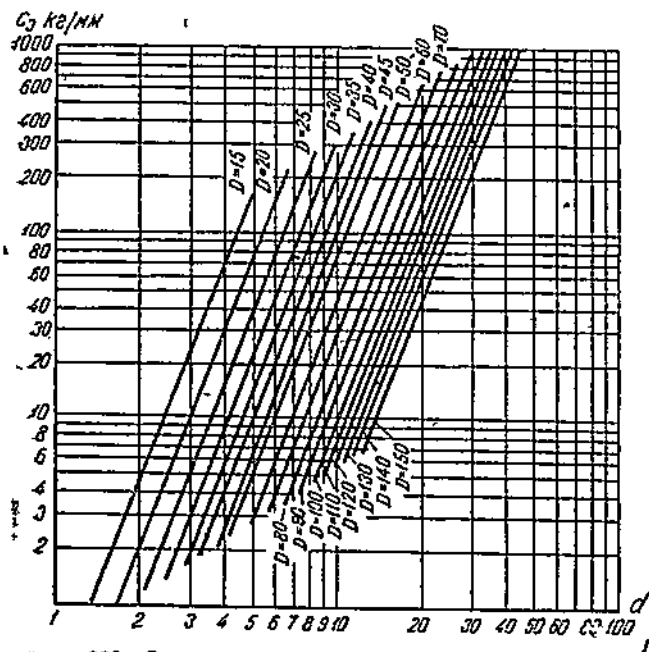
$$\frac{1}{n} = \frac{\tau_{\max}}{2\tau_s} \left[\frac{1}{k_c} \left(1 + \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) + \frac{\tau_s}{\tau_{-1}} \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) \right]. \quad (269)$$

Это выражение может быть переписано в виде:

$$\frac{1}{n} = C_w \frac{\tau_{\max}}{\tau_{-1}}, \quad (270)$$



Фиг. 292. Значения коэффициента C_2 в зависимости от диаметра проволоки d и среднего диаметра пружины D для определения ссадки пружины $f = C_2 \tau$.



Фиг. 293. Значения коэффициента C_3 в зависимости от диаметра проволоки d и среднего диаметра пружины D для определения усилия пружины $P = C_3 \frac{f}{l}$.

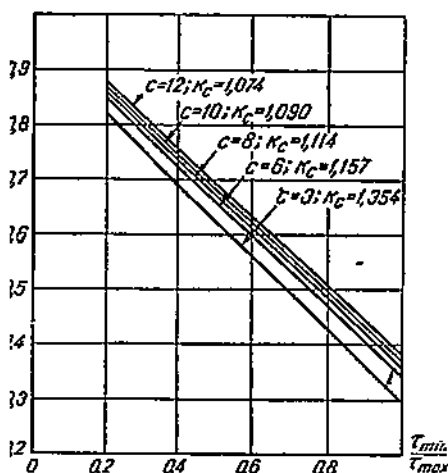
где

$$C_w = 0,5 \left[\frac{\tau_{-1}}{k_c \tau_s} \left(1 + \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) + \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) \right]$$

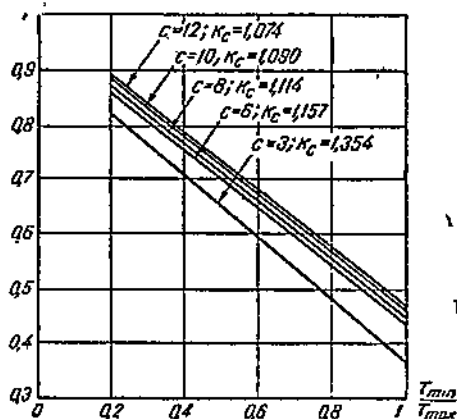
является функцией k_c , $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$ и $\frac{\tau_{-1}}{\tau_s}$.

Выражение (269) было получено в предположении, что предел усталости материала τ_{-1} определен экспериментально при симметричном цикле нагружения. Однако обычно в пружинах напряжения изменяются от нуля до максимума и значительная часть экспериментальных данных по усталости получена при таком же режиме.

Предел усталости материала при изменении нагрузки от нуля до максимума обозначается τ_0 .



Фиг. 294. Значения коэффициента C'_w в зависимости от $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$; для $\frac{\tau_0}{\tau_s} = 0,4$.



Фиг. 295. Значения коэффициента C'_w в зависимости от $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$; для $\frac{\tau_0}{\tau_s} = 0,5$.

Запас прочности по линейной формуле составит:

$$\frac{1}{n} = \frac{\tau_{\max}}{2\tau_s} \left[\frac{1}{k_c} \left(1 + \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) + \left(\frac{2\tau_s}{\tau_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) \right] \quad (271)$$

или, заменив через

$$C_w' = 0,5 \left[\frac{\tau_0}{k_c \tau_s} \left(1 + \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) + \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) \left(2 - \frac{\tau_0}{\tau_s} \right) \right],$$

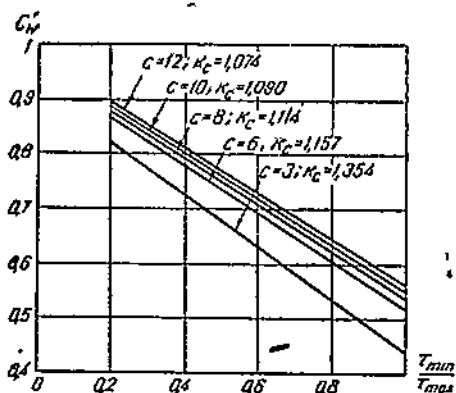
получим

$$\frac{1}{n} = C_w' \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}. \quad (272)$$

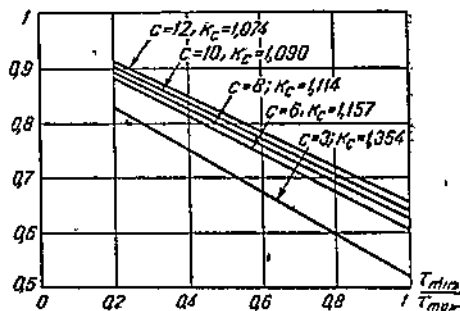
Значения коэффициента C_w' в зависимости от $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$ для различных значений c и $\frac{\tau_0}{\tau_s}$ даны в виде диаграмм на фиг. 294—297.

Для значений $\frac{\tau_0}{\tau_s}$, отличных от приведенных, может быть сделана интерполяция.

Выбор запаса прочности, а следовательно допускаемого напряжения, зависит от условий работы пружины. Когда пружина подвержена продолжительному переменному нагружению при отношении минимального напряжения к максимальному, равном половине или меньше, необходимо считать этот случай наиболее неблагоприятным и выбирать больший запас прочности.



Фиг. 296. Значения коэффициента C'_w в зависимости от $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$; для $\frac{\tau_0}{\tau_s} = 0,6$.



Фиг. 297. Значения коэффициента C'_w в зависимости от $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$; для $\frac{\tau_0}{\tau_s} = 0,7$.

Если же пружина подвержена резко изменяющимся усилиям и работает при отношении минимального напряжения к максимальному больше чем половина, запас прочности может быть выбран меньшим.

Обезуглерожженный слой на поверхности проволоки, мелкие повреждения и коррозия поверхности значительно снижают предел усталости материала. С другой стороны, пружины из шлифованной проволоки имеют повышенный предел усталости.

Термическая обработка, хотя и повышает механические свойства проволоки, но не оказывает значительного влияния на предел усталости.

Пружины квадратного поперечного сечения

Расчет напряжений в пружинах квадратного сечения проволоки производится по формулам гл. VI, § 4 и § 2, табл. 17.

Когда нет необходимости в большой точности вычислений напряжений и осадки, целесообразно воспользоваться диаграммами фиг. 298—300, на которых даны значения коэффициентов c_1' , c_2' и c_3' , позволяющие определять усилие на пружину и ее осадку.

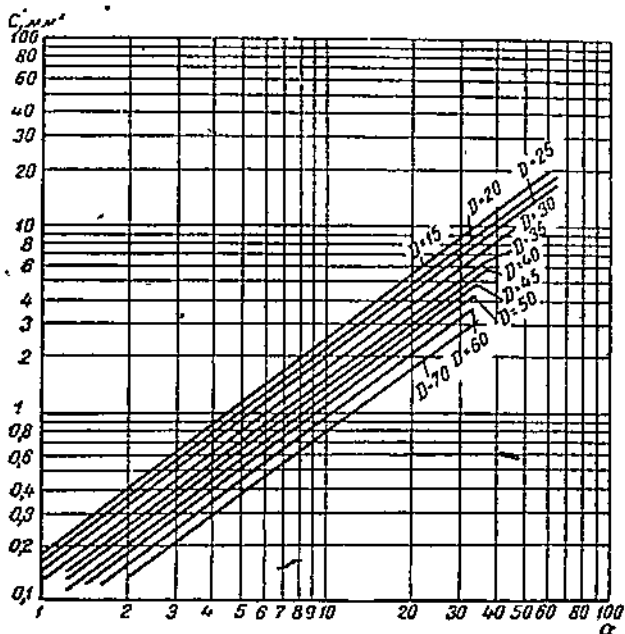
Запас прочности по линейной формуле составит:

$$\frac{1}{n} = C_w' \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}, \quad (273)$$

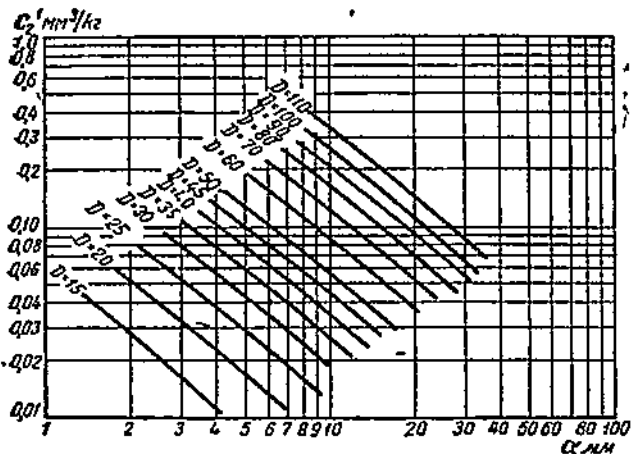
где

$$C_w' = 0,5 \left[\frac{\tau_0}{k_c \tau_s} \left(1 + \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) + \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \right) \left(2 - \frac{\tau_0}{\tau_s} \right) \right].$$

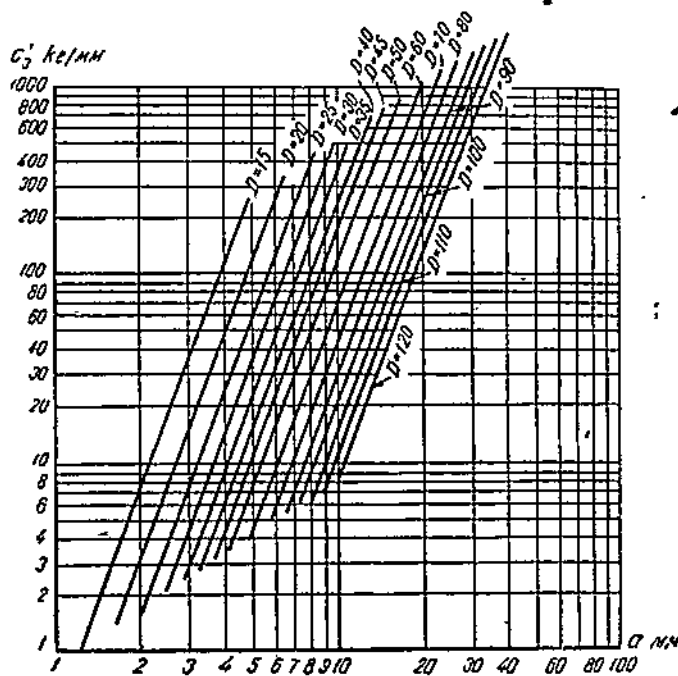
Значения коэффициента C_w' в зависимости от $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$ для различных значений c и $\frac{\tau_0}{\tau_s}$, данные на фиг. 294—297, могут быть применены с достаточной точностью и для пружин квадратного сечения проволоки. Ошибка при этом не превышает 4%.⁶



Фиг. 298. Значения коэффициента C'_1 в зависимости от стороны квадрата поперечного сечения a и среднего диаметра пружины D для определения усилия пружины $P=C'_1 \tau$.



Фиг. 299. Значения коэффициента C'_2 в зависимости от квадрата поперечного сечения a и среднего диаметра пружины D для определения осадки пружины $f=C'_2 \tau l$.



Фиг. 300. Значения коэффициента C_2 в зависимости от стороны квадрата поперечного сечения a и среднего диаметра пружины D для определения усилия пружины $P = C_2 \cdot \frac{f}{l}$.

Пружины трапециoidalного поперечного сечения

Способы расчета для пружин квадратного поперечного сечения остаются справедливыми и для пружин трапециoidalного поперечного сечения — с той разницей, что вместо величины a необходимо брать

$$a = \frac{a_1 + a_2 + 2t}{4},$$

где размеры a_1 , a_2 и t указаны на фиг. 301.

Пружины прямоугольного поперечного сечения

При расчете цилиндрических пружин прямоугольного поперечного сечения, кроме коэффициента c , зависящего от соотношения размеров пружины, необходимо учитывать также влияние соотношения сторон поперечного сечения и их расположение относительно оси пружины.

Введем следующие обозначения:

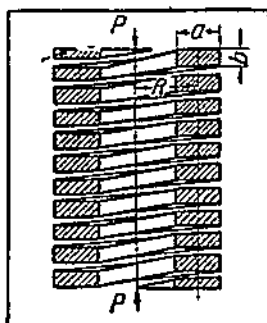
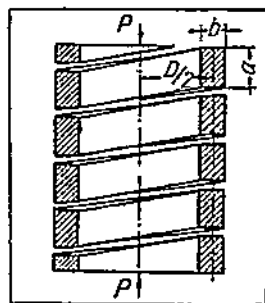
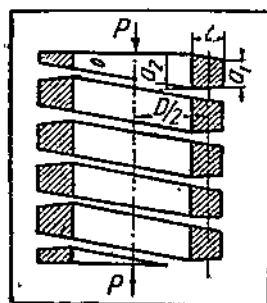
P — действующее усилие на пружину, кг;

D — средний диаметр пружины, мм;

a — большая сторона прямоугольника поперечного сечения витка;

b — меньшая сторона прямоугольника поперечного сечения витка;

c — отношение среднего диаметра пружины к длине стороны прямоугольника поперечного сечения витка, перпендикулярной к оси пружины.



Фиг. 301. Пружина трапециoidalного сечения.

Фиг. 302. Пружина прямоугольного сечения.

Фиг. 303. Пружина прямоугольного сечения.

Когда большая сторона поперечного сечения витка параллельна оси пружины (фиг. 302) и $\frac{a}{b}$ находится в пределах 1 — 4, напряжение определяется с достаточной точностью по формуле

$$\tau = k' \frac{PD(1,5a + 0,9b)}{a^2 b^2}. \quad (274)$$

Здесь k' определяется в предположении $c \geq 3$.

Следует отметить, что при отношении $\frac{a}{b} \leq 4$ погрешность составляет около 70%.

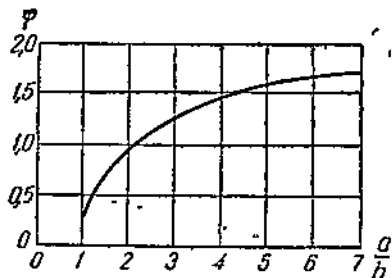
Для определения осадки пружины пользуются формулой

$$f = \frac{2,36PD^3l}{Gb^3(a - 0,63b)}. \quad (275)$$

Когда пружина изготавливается таким образом, что большая сторона прямоугольника поперечного сечения витка перпендикулярна оси пружины (фиг. 303), напряжение определяется по формуле (274), а осадка — по формуле

$$f = \frac{2,36PD^3l}{Gb^3(a - 0,63b) \left(1 + \frac{c}{c-1}\right)}, \quad (276)$$

где ϕ дано кривой на фиг. 304 как функция $\frac{a}{b}$.



Фиг. 304. Значения коэффициента ϕ в формуле (276).

Однако при применении формулы (274) для определения напряжения в пружине с $c \approx 3$ погрешность может достигать 20%.

Формулы для определения k_1' , k_s' и k_c , а также диаграммы и формулы, данные для расчета пружин квадратного сечения, остаются справедливыми и для пружин прямоугольного поперечного сечения.

В табл. 49 — 51 указаны химический состав, термическая обработка, механические и усталостные свойства наиболее употребительных сталей для спиральных пружин.

Химический состав наиболее употребительных сталей для спиральных пружин

Сорт стали	Химический состав, %						
	C	Mn	Cr	Si	V	Mo	P S
Среднеуглеродистая	0,45—0,7	0,8—1,2	—	до 0,35	—	—	0,04 0,045
Высокоуглеродистая	0,9—1,05	0,3—0,5	—	0,35	—	—	0,04 0,05
Хромованадиевая	0,4—0,55	0,5—0,8	0,8—1,2	0,2—0,3	0,15—0,25	—	0,04 0,04
Кремнемарганцевая	0,35—0,6	0,6—1,0	—	1,0 2,2	—	—	0,045 0,045
Хромокремнистая	0,4—0,6	0,5—0,7	0,5—1,0	0,8—1,5	—	—	0,03 0,03
Кремневанадиевая	0,8—0,95	0,4—0,5	—	0,5—0,65	0,1—0,2	—	0,02 —
Хромомолибденовая	0,4—0,55	0,7—0,9	0,7—1,0	0,1—0,3	—	0,15—0,3	—

Таблица 50

Термическая обработка пружинных сталей

Химический состав, %					Время выдержки	Охлаждение	Температура на- вивания пружины	Температура за- калки пружины	Охлаждение
C	Mn	Si	Cr	V					
0,91 1,04	0,38 0,36	0,16 0,16	— —	— —	505 430	1 мин. 15 "	925° Холодн.	865 845	Масло Масло 50°
0,52	0,66	—	0,88	0,21	432	1 час	Горяч.	870	Масло 55°
0,53	0,83	1,96	—	—	460	1 "	•	870	Масло 55°
1,05 1,05 0,94	0,36 0,21 0,46	0,15 0,27 0,63	— — —	— — 0,17	370 370 460	1 " 1 " 1 "	— — —	880 895 850	Масло " " "

Сорт стали	Р а с т я ж е н и е				
	Предел пропорциональности σ_c кг/мм ²	Предел текучести σ_s кг/мм ²	Временное сопротивление σ_b кг/мм ²	Модуль упругости E кг/мм ²	Удлинение, %
Среднеуглеродистая	75—90	100—120	150—160	$2,1 \cdot 10^4$	7—9
Высокоуглеродистая	80—100	95—135	145—170	$2,1 \cdot 10^4$ до $2,2 \cdot 10^4$	5—7
Хромованадиевая	90—100	150—160	160—175	$2,1 \cdot 10^4$	10—11
Кремнемарганцевая	90—95	140—150	160—170	$2,05 \cdot 10^4$	10—12
Хромкремнистая	—	—	—	—	—
Кремневанадиевая	60—65	95—105	140—150	$2,3 \cdot 10^4$	12
Хромомолибденовая	—	—	—	—	—

Пример расчета клапанной пружины авиационного двигателя Райт „Циклон“ 1820 F-3

Комплект клапанных пружин состоит из наружной, средней и внутренней пружин.

Пружины изготовлены из хромованадиевой проволоки. Минимальное и максимальное напряжения в пружинах соответствуют осадкам предварительной затяжки и при полном открытии клапана.

В данном случае для всех трех пружин эти осадки равны

$$f_{\min} = 25 \text{ мм}, f_{\max} = 39,25 \text{ мм}.$$

Пользуясь диаграммой (фиг. 292), определяем минимальное и максимальное напряжения в пружинах.

Наружная пружина

$$\tau_{\min} = \frac{f_{\min}}{c_2 l} = \frac{25}{0,193 \cdot 5,25} = 24,6 \text{ кг/мм}^2,$$

$$\tau_{\max} = \frac{f_{\max}}{c_2 l} = \frac{39,25}{0,193 \cdot 5,25} = 38,7 \text{ кг/мм}^2.$$

Средняя пружина

$$\tau_{\min} = \frac{f_{\min}}{c_2 l} = \frac{25}{0,143 \cdot 7,25} = 24,1 \text{ кг/мм}^2,$$

$$\tau_{\max} = \frac{f_{\max}}{c_2 l} = \frac{39,25}{0,143 \cdot 7,25} = 37,8 \text{ кг/мм}^2.$$

Внутренняя пружина

$$\tau_{\min} = \frac{f_{\min}}{c_2 l} = \frac{25}{0,110 \cdot 9} = 25,3 \text{ кг/мм}^2,$$

$$\tau_{\max} = \frac{f_{\max}}{c_2 l} = \frac{39,25}{0,110 \cdot 9} = 39,6 \text{ кг/мм}^2.$$

свойства пружинных сталей

Кручение			Предел усталости при симметричном цикле τ_{-1} кг/мм ²	Предел усталости проволоки от 0 до max τ_0 кг/мм ²	Предел усталости, полученный на пружине, τ_0 кг/мм ²
Предел текучести τ_s кг/мм ²	Временное сопротивление τ_b кг/мм ²	Модуль упругости G кг/мм ²			
60—80	85—110	8,2·10 ³	31—40	45—80	53—65
65—90	100—140	7,6·10 ³ 8,3·10 ³	35—40	40—85	50—70
95—100	120—130	8·10 ³	50—55	50—90	55—60
95—100	135	7,5·10 ³	—	95—100	50—55
—	—	—	—	—	—
90	120—125	8,3·10 ³	—	40—45	—
—	—	—	—	—	—

Таблица 52

Основные данные пружин

	Наружная	Средняя	Внутренняя
Средний диаметр пружины, мм	50	38	31
Диаметр проволоки пружины, мм	4,5	3,5	3
Число всех витков пружины, ...	7	9	11
Число рабочих витков пружины	5,25	7,25	9
Длина пружины в свободном состоянии	75	75	75
Предварительная затяжка пружины мм	25	25	25
Рабочая осадка пружины, мм	14,25	14,45	14,25

Для этой стали может быть принят предел текучести при кручении $\tau_s = 85$ кг/мм², а предел усталости $\tau_0 = 53$ кг/мм².

Отношение предела усталости к пределу текучести равно

$$\frac{\tau_0}{\tau_s} = \frac{53}{85} = 0,623.$$

Пользуясь диаграммой (фиг. 296), определяем коэффициент c_w' для наших значений c и $\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}$:

для наружной пружины $c_w' = 0,61$
 " средней " $c_w' = 0,613$
 " внутренней " $c_w' = 0,61$

Определение запаса прочности

Наружная пружина

$$\frac{1}{n} = C_w \cdot \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} = \frac{0,61 \cdot 38,7}{53} = 0,443; n = 2,25.$$

Средняя пружина

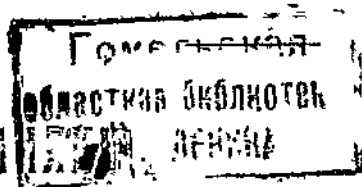
$$\frac{1}{n} = C_w \cdot \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} = \frac{0,613 \cdot 37,8}{53} = 0,438; n = 2,28.$$

Внутренняя пружина

$$\frac{1}{n} = C_w \cdot \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} = \frac{0,61 \cdot 39,6}{53} = 0,456; n = 2,19.$$

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Thum, Bautz, ZVDI, 1937, S 1407.
2. Серенсен С. В., „Весник металлопромышленности“ № 6, 1943.
3. Wahl, Machine designe, 1938.
4. Soderberg, Transactions ASME, 1930.
5. Серенсен С. В., Известия Отделения технических наук № 7, 1938.
6. Серенсен С. В., Инженерный сборник, т. I, 1941.
7. Röttscher, Maschinenbau, 1931, S. 80.
8. Lehr, Maschinenelementtagung, 1936.
9. Brenner, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1931. S. 637.
10. Кинасовили Р. С., Сборник ЦИАМ, № 5, 1939.
11. Bock, Maschinenbau, 1930, S. 637.
12. Бах, Детали машин, т. I. 1929.
13. Machinery's Handboock, Machinery Publishing Co, 1937.
14. Одинг И. А., Прочность металлов, 1937.
15. Беллев Н. М., Сопротивление материалов, 1939.
16. Серенсен С. В., Исследования в области машиноведения, АН СССР, 1944, стр. 58.
17. Mailänder, Technische Mitteilungen Krupp, 1934.
18. Moor H., Univ. Illinois Engin. Exp. Station Bull., 1934, № 264.
19. Herold, Wechselfestigkeit metallischer Werkstoffe, 1934.
20. Peterson, Journal of applied Mechanics, 1937.
21. Schmidt, Archiv für Eisenhüttenwesen, 1937, H. 8.
22. Шейнин Б., „Техника воздушного флота“ № 8—9, 1936.
23. Корнеев Н., Труды ВИАМ, № 48, 1937.
24. Cazaud, Recherches sur la fatigue des aciers, 1934.
25. Houdremont, Stahl u. Eisen, 1937, S. 480.
26. Lehr, Sparwirtschaft, 1931, H. 8.
27. Arbeitsblätter VDI.
28. Horger, Journal of applied mechanics, N 4, 1935.
29. Kaufmann, Ueber Dauerbiegefestigkeit einiger Eisenwerkstoffe, 1931.
30. Серенсен С. В., Прочность металлов и расчет деталей машин, 1937.
31. Серенсен С. В., „Сталь“, № 3, 1940.
32. Белякин Ф. П., Труды института строительной механики, 1936.
33. Козлов П., „Техника Воздушного флота“ № 7, 1934.
34. Mailänder, Technische Mitteilungen Krupp, 1936, H. 3.
35. Давиденков Н. Н., Проблема удара в металловедении, 1938.
36. Houdremont, Mailänder, „Stahl u. Eisen“, 1939, S. 833.
37. Thum, Debus, Dauerhaltbarkeit von Schraubenverbindungen, 1936.
38. Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, 1936.



НИГОХРАН

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие (ко второму изданию)	3

I. Вибрационные расчеты

Глава I. Основные положения вибрационных расчетов

§ 1. Кинематика колебательного движения	5
§ 2. Основные зависимости для линейных систем	7
§ 3. Колебания нелинейных систем	17
§ 4. Демпфирование вибраций	20
§ 5. Переходные режимы	23

Глава II. Крутильные колебания

§ 1. Определение моментов инерции масс системы	28
§ 2. Определение податливости элементов системы	35
§ 3. Составление расчетной схемы	46
§ 4. Определение частот собственных колебаний линейных систем с помощью уравнений частот	49
§ 5. Определение частот собственных колебаний методом последовательных приближений	60
§ 6. Номограммы и приближенные формулы для систем рядных моторов	53
§ 7. Определение возбуждающих моментов	61
§ 8. Определение амплитуд вынужденных колебаний	70
§ 9. Демпфирование крутильных колебаний	74

Глава III. Поперечные колебания

§ 1. Определение частот собственных колебаний невесомой балки с сосредоточенными массами	81
§ 2. Формулы частот собственных колебаний для типичных балок постоянного сечения	84
§ 3. Определение частот собственных колебаний конструкций из стержней постоянного сечения	87
§ 4. Энергетические методы определения частот собственных колебаний стержней и критических скоростей валов переменного сечения	93
§ 5. Методы последовательных приближений для определения критических скоростей валов переменного сечения. Определение оборотов	101
§ 6. Влияние побочных факторов на частоты собственных колебаний стержней и критические скорости валов	105
§ 7. Мембраны, пластинки, диски, кольца	110

Глава IV. Продольные колебания

§ 1. Определение частот собственных продольных колебаний стержней	112
§ 2. Определение частот собственных продольных колебаний витых пружин	114

Глава V. Моделирование в применении к вибрационным расчетам

§ 1. Механическое моделирование	118
§ 2. Электромеханическое моделирование	122
§ 3. Стенд для вибрационных расчетов	126

II. Определение напряжений в деталях машин

Глава VI. Основные случаи расчета напряжений

§ 1. Напряженное состояние в точках детали	133
Типы напряженного состояния. Закон взаимности напряжений (133). Линейное напряженное состояние (133). Плоское напряженное состояние (133). Объемное напряженное состояние (140)	—
§ 2. Напряжения в прямых стержнях. Центральное растяжение или сжатие (144). Чистый срез (145). Кручение (147). Плоский поперечный изгиб (157). Косой изгиб (163). Центр изгиба (164). Сложное сопротивление (168)	144
§ 3. Напряжения в толстостенных цилиндрах и кривых брусках	171
Толстостенные цилиндры (171). Кривые брусья (176)	—

§ 4. Напряжения в пружинах	184
Цилиндрические винтовые пружины (184). Спиральная пружина, работающая на изгиб (186). Пружины Бельвилля (165).	
§ 5. Контактные напряжения	187
Сосредоточенное давление (187). Контактные напряжения в цилиндрах (189). Контакт между двумя соприкасающимися телами (197).	

Глава VII. Концентрация напряжений

§ 1. Основные понятия	204
§ 2. Концентрация напряжений в местах сопряжения галтелями	207
§ 3. Концентрация напряжений в местах надрезов и выточек	211
§ 4. Концентрация напряжений в валах с напрессованными деталями	214
§ 5. Концентрация напряжений возле поперечных отверстий	216
§ 6. Концентрация напряжений в проушинах	223
§ 7. Концентрация напряжений во входящих углах	226
§ 8. Концентрация напряжений, вызываемая входящими углами в поперечном сечении скручиваемого стержня и аксиальными отверстиями	228
§ 9. Концентрация напряжений у гиперболических и эллиптических надрезов и отверстий (по Нейберу)	231

III. Расчет прочности деталей при динамических нагрузках

Глава VIII. Расчет прочности при переменных напряжениях

§ 1. Основные понятия	237
§ 2. Факторы, влияющие на прочность	239
§ 3. Прочность при действии переменных напряжений с асимметричным циклом	241
§ 4. Прочность при неустановившихся режимах переменных напряжений	245
§ 5. Определение запасов прочности	246
§ 6. Определение допускаемых напряжений	251
§ 7. Величины запасов прочности и допускаемых напряжений	252

Глава IX. Данные к расчету прочности при переменных напряжениях

§ 1. Влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров	259
§ 2. Влияние термической обработки, уковки и структуры на прочность при переменных нагрузках	267
§ 3. Влияние обработки поверхности, коррозии и температуры на усталость	270
§ 4. Характеристика прочности материалов	275

Глава X. Расчет прочности деталей машин (примеры)

§ 1. Расчет валов прямых и коленчатых	289
Расчет приставного вала дизельной установки (294). Расчет коленчатого вала компрессора (297).	
§ 2. Расчет прочности болтовых соединений	301
Определение нагрузок, действующих на болт (301). Влияние неравномерности распределения напряжений на прочность болтов (304). Определение запасов прочности (305). Числовые примеры (306). Расчет шатунных болтов тракторного двигателя (310). Проверочный расчет болтового соединения малой (поршневой) головки шатуна двухтактного дизеля (311). Расчет болтового соединения фланцев вертикальной штанги насоса (313).	
§ 3. Схема расчета прочности цилиндрических спиральных пружин	315
Пружины круглого поперечного сечения (315). Пружины квадратного поперечного сечения (319). Пружины трапециевидного поперечного сечения (321). Пружины прямоугольного поперечного сечения (322). Пример расчета клапанной пружины авиационного двигателя Райт „Циклон“ 1820 F-3 (324).	

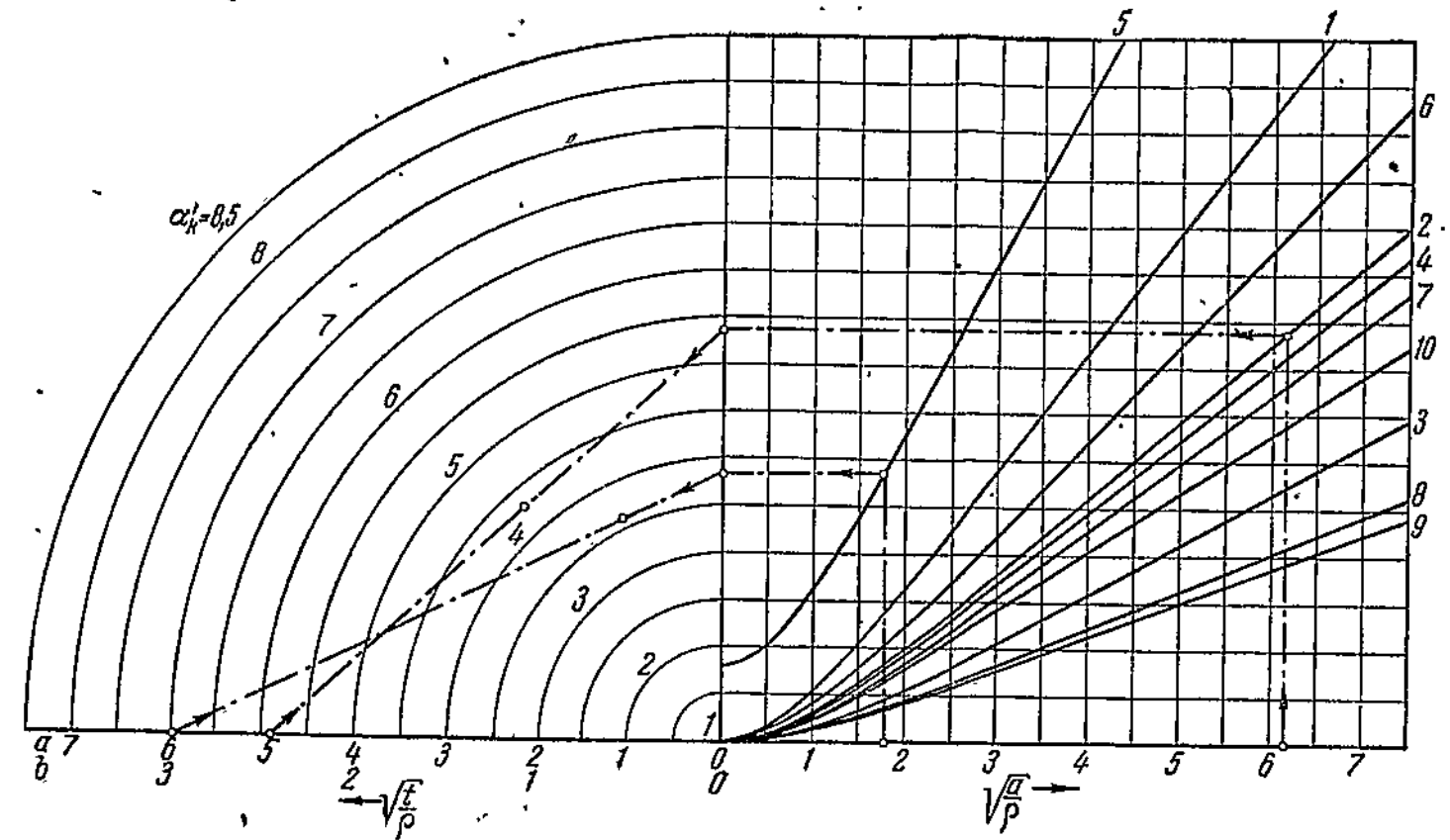
Таблица к фиг. 214

Форма ослабления	Способ нагружки	Формулы для номинальных напряжений	Мелкий надрез. Характеристика $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ Шкала	Глубокий надрез. Характеристика $\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ Кривая	Вспомогательный коэффициент Характеристика $\sqrt{\frac{r}{\rho}}$ Кривая
I 	Растяжение, сжатие	$\frac{P}{2da}$	b	1	—
	Изгиб	$\frac{3Mb}{2da^2}$	b	2	—
II 	Растяжение, сжатие	$\frac{P}{da}$	b	3	—
	Изгиб	$\frac{6Mb}{da^2}$	b	4	—
III 	Растяжение, сжатие	$\frac{P}{2da}$	b	5	—
	Изгиб	$\frac{3Mb \cdot l}{2d(b^3 - d^3)}$	a	5	—
IV 	Растяжение, сжатие	$\frac{P}{\pi a^2}$	b	6	—
	Изгиб	$\frac{4Mb}{\pi a^3}$	b	7	—
	Срез	$\frac{1,23V}{\pi a^2}$	a	8	—
	Кручение	$\frac{2Mt}{\pi a^3}$	a	9	—
V 	Растяжение, сжатие	$\frac{P}{\pi(r^2 - c^2)}$	b	5	1
	Изгиб	$\frac{4Mb \cdot r}{\pi(r^4 - c^4)}$	b	5	2
	Срез	$\frac{(1,23 \cdot r^2 + 2,77c^2) \cdot V}{\pi(r^4 - c^4)}$	a	10	3
	Кручение	$\frac{2Mt \cdot r}{\pi(r^4 - c^4)}$	a	10	4
VI 	Растяжение, сжатие	$\frac{P}{\pi(b^2 - r^2)}$	b	5	5
	Изгиб	$\frac{4Mb \cdot r}{\pi(b^4 - r^4)}$	b	5	6
	Срез	$\frac{(2,77b^2 + 1,23r^2) \cdot V}{\pi(b^4 - r^4)}$	a	10	7
	Кручение	$\frac{2Mt \cdot r}{\pi(b^4 - r^4)}$	a	10	8
VII 	Срез	$\frac{V}{\pi ar}$	a	10	—
	Кручение	$\frac{Mt}{2\pi ar^2}$	a	10	—
VIII 	Срез	$\frac{V \cdot S}{2a \cdot J}$	a	10	—
	Кручение	$\frac{Mt}{2aF}$	a	10	—

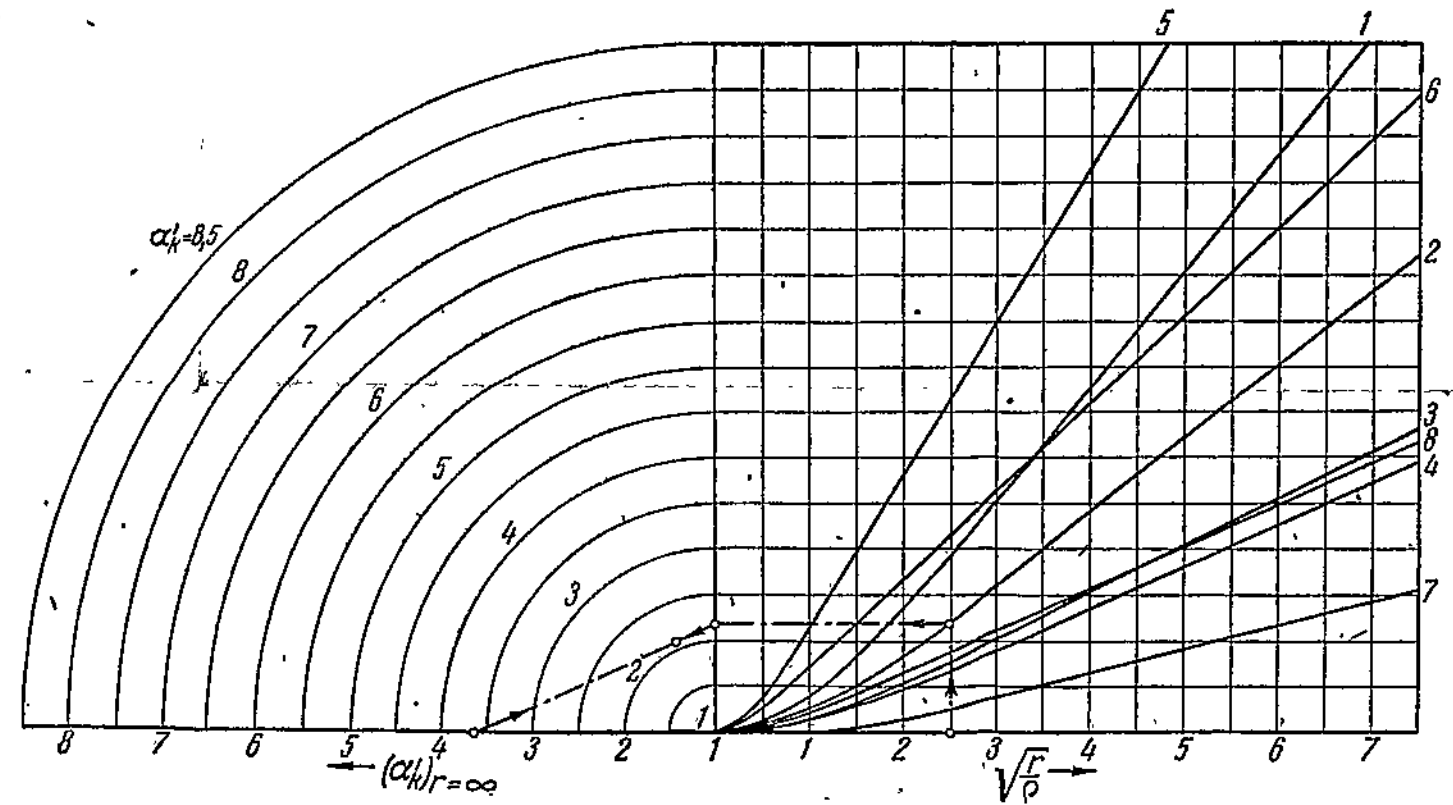
Любое симметричное поперечное сечение

¹ S — статический момент верхней части сечения по отношению к нейтральной линии;
J — момент инерции всего поперечного сечения по отношению к нейтральной линии;
² F — площадь, ограниченная средней линией стенки.

С. В. Серенсен. 1044



Фиг. 214а. Номограмма Нейбера



Фиг. 214б. Номограмма Нейбера.

№ по пор.	Группа	К о н с т р у к ц и о н н ы е с т а л и																									Источники, по данным которых (или по аналогии) приведены цифры о пределах усталости
		Материал		Химический состав, %							Термообработка	Механические характеристики ¹															
		Марка стали	Марки сталей с близкими характеристиками	C	Si	Mn	S+P	Ni	Cr			σ_s	σ_{sb}	σ_t	σ_b	$\delta_5\%$	$\delta_{10}\%$	$\psi\%$	α_k кг/см ²	σ_{-1b}	σ_{-1z}	τ_{-1}	$\frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_b}$	$\frac{\sigma_{-1z}}{\sigma_{-1b}}$	$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1b}}$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
1	Углеродистые стали	ОСТ 10	ГУТАН 1010	$\frac{0,05}{0,15}$	0,3	$\frac{0,35}{0,65}$	0,08	$\leq 0,3$	$\leq 0,2$		Нормализация	18*	26	14	32—42	30	25	55	—	16—22	12—15	8—12	$\frac{0,69}{0,53}$	$\frac{0,69}{0,70}$	0,53	Lehr, Arbeitsblatt. Одинг, "Металлург" 1937. Сталь St 37.11	
2		ОСТ 15		$\frac{0,10}{0,20}$	0,35	$\frac{0,35}{0,65}$	0,08	$\leq 0,3$	$\leq 0,2$		"	20*	26	14	35—45	—	27	55	—	17—22	12—16	8,5—13	$\frac{0,49}{0,71}$ $\frac{0,71}{0,73}$	0,59	Одинг, "Металлург", 1937, Lehr, Arbeitsblatt. St 37.11		
3		ОСТ 20		$\frac{0,15}{0,25}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,35}{0,65}$	0,08	$\leq 0,3$	$\leq 0,2$		"	22*	30	16	40—50	—	24	55	—	17—22	12—16	10—13	$\frac{0,49}{0,71}$ $\frac{0,71}{0,73}$	0,59	По данным немецких лабораторий. Одинг, "Металлург", 1937		
4		ОСТ 25	ГУТАП 1025	$\frac{0,20}{0,30}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,5}{0,8}$	0,08	—	—		"	4	—	—	43—55	22	18	50	—	19—25	—	—	$\frac{0,52}{0,53}$	—	—	Arbeitsblatt VDI Сталь St 42.11. Одинг, "Металлург", 1937	
5		ОСТ 30		$\frac{0,25}{0,35}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,5}{0,8}$	0,08	$\leq 0,3$	$\leq 0,2$		"	26*	37	17	48—60	119	16	50	—	20—27	17—21	11—12	$\frac{0,46}{0,48}$	0,73	0,5	По данным немецких лабораторий. Одинг, "Металлург", 1937	
6		ОСТ 35	ГУТАП 1035	$\frac{0,30}{0,40}$	$\frac{0,17}{0,35}$	$\frac{0,5}{0,8}$	0,08	$\leq 0,3$	$\leq 0,2$		"	28	37	19	52—65	—	18	45	—	22—30	17—22	13—18	$\frac{0,43}{0,46}$	$\frac{0,73}{0,74}$	$\frac{0,60}{0,61}$	Arbeitsblatt VDI St 50.11. Одинг, Николаев, Сварные конструкции	
7		ОСТ 45	ГУТАП 1045	$\frac{0,40}{0,50}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,5}{0,8}$	—	—	—		"	32*	43	22	60—75	—	15	40	—	25—34	19—25	15—20	$\frac{0,43}{0,45}$	$\frac{0,73}{0,74}$	$\frac{0,55}{0,60}$	Arbeitsblatt VDI St 60.11. Одинг	
8		ОСТ 50		$\frac{0,45}{0,55}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,5}{0,8}$	0,08	$\leq 0,3$	$\leq 0,2$		"	34	—	—	63—80	—	13	40	—	27—35	—	16—20	$\frac{0,43}{0,44}$	—	0,57	По данным немецких и американских лабораторий. Одинг	
9		—	ГУТАП 1040	$\frac{0,35}{0,45}$	$\frac{0,15}{0,35}$	$\frac{0,5}{0,8}$	0,085	—	—		Закалка в воде 820—840° Отпуск 500—620°	40	—	—	65—75	—	—	40	—	29—37	—	—	$\frac{0,45}{0,49}$	—	—	То же, Одинг	
10		—	ГУТАП 9255 рессорная	$\frac{0,5}{0,6}$	$\frac{1,5}{2,0}$	$\frac{0,6}{0,9}$	0,08	—	—		Закалка в масле 850—870° Отпуск 500—520°	120	—	—	130	—	8	30	3—4	62	43	35	0,47	0,70	$\frac{0,55}{0,56}$	" " Lehr. Сталь St Mп рессорная	
11		ОСТ 45Г2		$\frac{0,4}{0,5}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{1,4}{1,8}$	0,08	0,3	0,2		Нормализация	40*	—	—	70—90	—	11	40	—	31—40	—	—	0,44	—	—	" " Buchmann. St 80	
12		ОСТ 60Г		$\frac{0,55}{0,65}$	$\frac{0,17}{0,37}$	$\frac{0,7}{1,0}$	0,08	0,3	0,2		—	34*	—	—	67—87	9	8	35	—	—	25—32	—	—	—	—	По данным немецких лабораторий Сталь D-6	

Продолжение

№ по пор.	Группа	К о н с т р у к ц и о н н ы е с т а л и																								Источники, по данным которых (или по аналогии) приведены цифры о пределах усталости	
		Матерная		Химический состав, %							Термообработка	Механические характеристики															
				С	Si	Mn	S+P	Ni	Cr			σ_s	σ_{sb}	σ_s	σ_b	$\delta_5\%$	$\delta_{10}\%$	$\psi\%$	σ_R кг/см ²	σ_{-1b}	σ_{-1z}	τ_{-1}	$\frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_b}$	$\frac{\sigma_{-1z}}{\sigma_{-1b}}$	$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1b}}$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
13	Легированные стали	ОСТ 40ХН	ГУТАП 3140	0,35 0,45	0,17 0,37	0,5 0,8	0,08	1,0—1,5	0,5—0,8		Закалка 830—840° в масле Отпуск 500—850°	75	83	39	90	—	12	50	7	40	29	24	0,37 0,44	0,72	0,60	Mc. Adam, Arbeitsblatt, Сталь VCN 15	
14		ОСТ 50ХН		0,45 0,55	0,17 0,37	0,5 0,8	0,075	1,0—1,5	0,45—0,75		Закалка 820° в масле Отпуск 200°	85	—	—	110	—	8	40	—	55	—	—	0,5	—	—	Mc. Adam	
15		ОСТ 30ХМА		0,25 0,36	0,17 0,37	0,4 0,9	0,06	≤ 0,3	0,8—1,10	Mo 0,15—0,25	Закалка 880° в масле Отпуск 560°	75	—	—	95	—	12	50	9	47	—	—	0,46	—	—	Mc. Adam	
16		ОСТ 12ХНЗА	Электросталь Э-3, Э-4	< 0,17	0,17 0,37	0,25 0,55	0,06	2,75—3,25	0,6—0,9		Закалка 860° в масле Отпуск 200°	70*	72	40	95	10	8	50	9	39—47	27—32	22—26	0,46 0,48	0,64 0,72	0,55	Lehr, VCN 35, Moore & Kommers, а также испытательная станция Французского департамента авиации. Ст. 31 по французскому стандарту	
17		ОСТ 20ХНЗА		0,15 0,25	0,17 0,37	0,30 0,60	0,05	2,75—3,25	0,6—0,9		Закалка 820° Отпуск 550° в масле	85*	—	—	100*	—	10	50	9	43—45	30—32	24,5—25,5	0,43 0,45	0,70 0,71	0,57	Lehr, Arbeitsblatt VCN 35 и др.	
18		ОСТ 18ХНВА	Электросталь Э-16	0,15 0,22	0,17 0,37	0,25 0,55	0,06	4,1—4,6	1,35—1,65	W 0,8—1,2 или Mo 0,25—0,45	Закалка 950°, затем 850° в масле Отпуск 200°	85*	—	—	115*	—	12	50	9	54—59	36—40	33—36,5	0,47 0,51	0,67 0,68	0,61 0,62	Lehr, Herold	
19		ОСТ 25ХНВА		0,20 0,3	0,17 0,37	0,25 0,55	0,06	4,1—4,6	1,35—1,65	W 0,8—1,2	Закалка 850° Отпуск 560° в масле	95	105	60	110	—	11	45	9	46—54	31—36	28—31	0,42 0,49	0,67 0,68	0,58 0,61	Lehr, Arbeitsblatt. Ст. EFD 70 и др.	
20		Э-1 Электросталь		0,10 0,16	0,35	0,20 0,50	0,055	1,7—2,3	0,2—0,5		Закалка 860—880° в масле Отпуск 200°	—	—	—	55*	13	—	45	9	35—37	—	—	0,64 0,67	—	—	Ст. 21 по французскому стандарту. Испытательная станция департамента авиации	
21		Э-8 Электросталь		0,25 0,35	0,4	0,25 0,60	0,06	2,8—3,5	0,85—1,25		Закалка 820° в масле Отпуск 525° в масле	—	—	—	95*	9	—	50	6	47—50	—	—	0,47 0,50	—	—	По данным французских лабораторий, Ст. 33 по французскому стандарту	
22		ГУТАП 5140		0,35 0,45	0,20 0,35	0,50 0,80	0,080	—	0,8—1,10		Закалка 830—850° в масле Отпуск 500—650°	75	—	—	90—100	—	11	50	8	38—45	27—30	22—26	0,42 0,45	0,67 0,71	0,53	Lehr	
23		ЭЖ-1 Электросталь		0,15	0,7	0,5	0,05	0,6	13—15		Отожженная	—	—	—	40	—	23	70	10	19,5	—	—	0,49	—	—	По данным американских лабораторий (Mc. Adam)	

¹ Обозначения, принятые в этой таблице, даны на стр. 276.
* Указаны нижние пределы значений.