

У
2431

АКАДЕМИЯ НАУК ССРС

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ
П. Л. ЧЕБЫШЕВА



ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ССРС

1945

501.0
H-34.

НЗЧ

2491

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

ДЕП

НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ П.А.ЧЕБЫШЕВА



ВЫПУСК ВТОРОЙ
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

45732



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА БССР

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА БССР

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА БССР

ЧЕТВЕРТЫЙ ЭТАЖ

Handwritten signatures and numbers:
W/O
196
08

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ССР
МОСКВА • ЛЕНИНГРАД

1945

ОТВЕТСТВЕННЫЕ РЕДАКТОРЫ

второго выпуска

академик Н. Г. Бруевич и член-корреспондент АН СССР И. И. Артоболевский

АВТОРЫ СТАТЕЙ

второго выпуска

*И. И. Артоболевский, В. Ш. Блок, В. В. Добровольский,
Н. И. Левитский*



W. C. C. C.

ОТ РЕДАКЦИИ

Предлагаемый сборник статей имеет целью облегчить читателю изучение всего богатого научного наследия П. Л. Чебышева, включая последующее развитие его идей, и состоит из двух выпусков: первый посвящен математическим работам (отв. редактор — академик С. Н. Бернштейн), второй — изобретениям и исследованиям П. Л. Чебышева по теории механизмов и машин (отв. редакторы — академик Н. Г. Бруевич и член-корреспондент АН СССР И. И. Артоболевский).

Теория и практика тесно связаны в творчестве П. Л. Чебышева. Но, независимо от их фактических или возможных приложений, математические исследования П. Л. Чебышева представляют огромную научную ценность, и именно они в первую очередь обессмертили имя нашего великого соотечественника и оказали решающее влияние на дальнейшее развитие науки. С другой стороны, его изобретения и своеобразные исследования в области техники до сих пор не получали должного распространения. Без сомнения, отделение теории от практики при анализе трудов П. Л. Чебышева является несколько искусственным, но мы надеемся, что чтение статей обоих выпусков будет полезно для восстановления утраченной после смерти П. Л. Чебышева связи между математическим и техническим направлениями его творчества. Однако в основном статьи первого выпуска имеют в виду лиц, достаточно знакомых с важнейшими достижениями современной математики, между тем как второй обращается к кругу читателей с соответствующим инженерно-техническим образованием.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пафнутий Львович Чебышев постоянно интересовался теорией механизмов и машин. Его перу принадлежат многочисленные работы, посвященные метрическому синтезу шарнирных механизмов. Им сконструировано и построено большое количество весьма разнообразных моделей шарнирных механизмов: прямых механизмов, в которых одна из точек приближенно описывает дугу окружности; механизмов для движения с остановками, механизмов, служащих для передачи вращения от одного вала к другому, сложных механизмов, предназначенных для весьма разнообразных целей („стопходящая машина“, гребной механизм, механизм самокатного кресла и т. д.). Чебышев первый поставил и успешно разрешил вопрос о структуре плоских механизмов, имеющих только шарнирные кинематические пары. Им впервые в мире была обоснована теория образования сложных механизмов путем последовательного присоединения ряда кинематических цепей, каждая из которых состоит из двух шарнирно соединенных между собой звеньев.

Механизмы, созданные Чебышевым, исследованы в его сочинениях или сохранились в моделях, им сделанных, причем последние не были Чебышевым описаны. Член-корр. АН СССР И. И. Артоболевский проделал выдающуюся работу по собиранию всех механизмов Чебышева, составлению их кинематических схем, уточнению размеров звеньев, анализу отдельных механизмов, составлению таблиц и графиков, построению траекторий важнейших точек механизмов и описи всех механизмов. Собранный И. И. Артоболевским материал ясно показывает, как разносторонни были интересы Чебышева в области теории механизмов и какую богатейшую коллекцию механизмов он нам оставил. Работа И. И. Артоболевского (совместно с Н. И. Левитским), публикуемая в настоящем сборнике под названием „Механизмы П. Л. Чебышева“, несомненно, поможет внедрению в технику механизмов Чебышева.

В работах по метрическому синтезу Чебышев пользуется разработанной им теорией функций, наименее уклоняющихся от нуля. Сущность задачи заключается в том, что требуется построить шарнирный механизм, одна из точек которого описывает кривую, приближенно совпадающую с заданной кривой. Заслуга Чебышева прежде всего заключается в том, что он уточнил понятие о приближенном осуществлении заданной кривой. Под приближенным осуществлением заданной кривой он понимает получение такой другой

кривой, которая от первой нигде не отклоняется более чем на определенную величину. Чебышев разрабатывал вопрос на механизмах, служащих для приближенного черчения прямых линий и дуг окружностей. В применении к этим задачам приближенная кривая должна укладываться между двумя параллельными линиями или между двумя концентрическими окружностями. После Чебышева весьма многие занимались метрическим синтезом шарнирных плоских механизмов. Однако многие пошли по пути Бурместера, требовавшего, чтобы приближенная кривая пересекала заданную кривую в возможно большем числе точек. Ясно, что такой подход менее точен, чем предложенный Чебышевым, так как в промежутке между точками пересечения приближенная кривая может значительно удаляться от заданной.

Чебышев обычно подробно не излагал, как он нашел необходимые размеры механизма, а только доказывал, что предлагаемый им механизм удовлетворяет поставленным условиям. Это обстоятельство, а также сложность теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, сделали метод Чебышева трудным и мало известным специалистам по прикладной механике.

Проф. З. Ш. Блох в течение ряда лет занимался изучением работ Чебышева в области метрического синтеза механизмов. Он подробно изложил метод знаменитого математика и указал, как на основе этого метода могут быть получены нужные размеры механизмов. Одновременно З. Ш. Блох применил метод Чебышева для решения некоторых новых частных задач метрического синтеза. В настоящем сборнике помещена статья З. Ш. Блоха „Основные результаты работ П. Л. Чебышева по метрическому синтезу плоских механизмов“. Эта работа дает систематическое изложение метода Чебышева в форме, удобной для техников. Работа З. Ш. Блоха должна повысить интерес к методу Чебышева по метрическому синтезу и способствовать распространению этого метода на практике.

В своих занятиях по метрическому синтезу Чебышеву приходилось изучать общие вопросы структуры и кинематики плоских механизмов. Во первых, Чебышев занимался выяснением, сколькими шарнирными четырехзвенными механизмами можно осуществить шарнирную кривую любого четырехзвенного плоского механизма. Соответствующая теорема, известная под названием „теоремы Робертса“, была опубликована Робертсом на 3 года раньше, чем это сделал Чебышев. Однако только Чебышев в своих работах показал значение этой теоремы для метрического синтеза механизмов и широко применял ее при создании своих механизмов. Судя по дальнейшей истории развития теории механизмов и машин, без Чебышева теорема Робертса осталась бы малозначительным и весьма частным результатом. Вот почему справедливо считать эту теорему *теоремой Робертса — Чебышева*.

Занимаясь структурой механизмов, Чебышев шел в совершенно девственной и неизвестной области науки. Структурную формулу для плоских шарнирных механизмов он получил на 13 лет раньше Грюблера и дал блестящий пример применения этой формулы к метрическому синтезу сложных плоских шарнирных механизмов (т. е. механизмов, имеющих более четырех звеньев). Поэтому структурная формула должна называться не формулой Грюблера, а *формулой Чебышева*.

Проф. В. В. Добровольский подробно исследовал последние два вопроса в трудах Чебышева. В настоящем сборнике помещена статья В. В. Добровольского „Вопросы структуры механизмов в работах П. Л. Чебышева“. В этой статье В. В. Добровольский приходит к такому заключению: „Замечательно, что наиболее полные и общие результаты в этом направлении (т. е. в области структуры механизмов) были достигнуты рядом русских ученых (Л. В. Ассуром, П. О. Сомовым, Х. И. Гохманом, Я. В. Столяровым, А. П. Малышевым, В. В. Добровольским и И. И. Артоболевским)“.

Статья Чебышева „О зубчатых колесах“ затронута в настоящем сборнике в ранее указанной работе Э. Ш. Блоха.

Таким образом, в настоящем сборнике, выпускаемом Академией Наук СССР к пятидесятилетию со дня смерти П. Л. Чебышева, рассмотрены почти все его работы в области теории механизмов и машин и показано богатство наследия знаменитого математика.

Мы надеемся, что сборник облегчит изучение Чебышева нашими техниками и специалистами по прикладной механике. Сборник должен показать также, сколь велики заслуги Чебышева в создании русской школы теории механизмов и машин и сколь велика роль русской школы в развитии мировой науки о механизмах.

Н. Бруевич

И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ и Н. И. ЛЕВИТСКИЙ
МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

ВВЕДЕНИЕ

Роль и значение П. Л. Чебышева как выдающегося русского математика хорошо освещены во многих работах отечественных и зарубежных исследователей.

Гораздо менее изучена роль Чебышева в развитии русской теории механизмов, или, вернее, в развитии той науки, которая во времена Чебышева носила название *практической механики*. Между тем замечательными работами Чебышева открылась первая страница нашей русской науки о механизмах. Именно ему принадлежит заслуга научной постановки и блестящего разрешения ряда задач одной из труднейших проблем теории механизмов — проблемы *синтеза механизмов*, той проблемы, над разрешением которой работали и работают в течение последнего столетия крупнейшие русские и иностранные ученые. В русской технической литературе до Чебышева вообще не встречалось работ, посвященных теории механизмов, и, тем более, работ, посвященных проблеме синтеза механизмов. Небольшое количество работ по теории синтеза механизмов французских и английских ученых носит в большинстве случаев характер решения частных задач, часто без серьезной их математической обработки. Тем более кажется на первый взгляд поразительным то обстоятельство, что Чебышев выбирает одну из сложнейших задач синтеза механизмов — задачу о синтезе шарнирных механизмов — и продвигает ее настолько, что теперь, через девяносто лет после появления первого мемуара Чебышева, посвященного этим механизмам, метод, разработанный им, не только не потерял своего значения, но, повидимому, еще долгие годы будет источником, из которого исследователи будут черпать материал по решению задач синтеза плоских механизмов.

Некоторые ученые склонны считать, что задачи синтеза плоских шарнирных механизмов, решенные Чебышевым, не являются самодовлеющими, а что они — только талантливое воплощение математических теорий Чебышева. Подробный анализ всех материалов, относящихся к работам Чебышева в области практической механики, показывает, что постановка и решение Чебышевым ряда задач синтеза механизмов не случайны и менее всего могут рассматриваться как только иллюстрация его математических теорий, они

логически обусловлены тем большим интересом, который проявлял в течение всей жизни Чебышев к вопросам техники и современного ему состояния практической механики.

Интерес, проявляемый Чебышевым к современным ему конструкциям машин (паровым двигателям, турбинам, ветровым двигателям, бумагоделательным машинам и т. д.), и его глубокое понимание того значения, которое может оказать внедрение этих машин в практику русских заводов и фабрик на отсталую в его время отечественную промышленность, заставляют Чебышева настойчиво изучать сочинения крупнейших специалистов по практической механике: Кулона, Понселе, Сильвестра, Келе и других ученых. Находясь в заграничной командировке в Париже, Брюсселе и Лондоне *, он подробно знакомится с самыми разнообразными конструкциями машин, имеет продолжительные беседы с выдающимися учеными и инженерами (Сильвестром, Келе, Грегори и др.), слушает лекции по практической механике, тщательно подбирает необходимые ему материалы и пособия для чтения курса практической механики в Александровском лицее и т. д.

Важная роль Чебышева в развитии прикладных знаний в России признавалась и рядом официальных представителей министерства народного просвещения. Так, попечитель С.-Петербургского учебного округа в своем докладе министру народного просвещения, в котором он просит предоставить Чебышеву заграничную командировку, пишет о том, что Чебышев проявляет особый интерес к вопросам практической механики и что по возвращении из командировки целесообразно поручить ему наблюдение за преподаванием практической механики и за дальнейшим развитием этой дисциплины в России.

Истоки творчества Чебышева в области практической механики идут от работ Понселе, которого по заслугам часто называют „гением практической механики“, учениками которого были учителя Чебышева — профессора Московского университета Брашман и Ершов. Лекции Брашмана и Ершова несомненно оказали значительное влияние на молодого Чебышева.

Все это с полной очевидностью подтверждает, что задачи теории механизмов, поставленные и решенные Чебышевым, не являются какими-то случайными или вытекающими только из его математических интересов, а они — вполне самостоятельные научные исследования, поставленные крупнейшим специалистом по практической механике.

Чем же объяснить, что среди многообразия вопросов практической механики Чебышев выбирает наиболее сложный и трудный, а именно вопрос синтеза шарнирных механизмов? Ответом на вопрос может служить то обстоятельство, что середина XIX в. характерна для теории механизмов появлением значительного количества серьезных работ, посвященных теории шарнирных механизмов (работы Поселье, Гарта, Робертса и др.). Большое количество шарнирных механизмов используется в реальных конструкциях (паровых и ветровых двигателях, текстильных машинах и т. д.). Многие

* См. „Отчет экстраординарного профессора С.-Петербургского университета о путешествии за границу“. П. Л. Чебышев, Соч., т. II, стр. VII—XIX, СПб., 1907..

ученые, с которыми встречается и беседует Чебышев, — авторы выдающихся работ по теории подобных механизмов. Естественно, что и Чебышев проявляет к этим механизмам особый интерес и теория их находит значительное место во всех его мемуарах.

Ответом на вопрос, почему Чебышев выбирает для своего рассмотрения наиболее трудную задачу теории механизмов — задачу синтеза шарнирных механизмов, — по нашему мнению, является особенность всего творчества Чебышева, очень тонко подмеченная П. С. Александровым*.

„Великий русский математик, — пишет П. С. Александров, — является ярким и гениальным представителем направления исследования, в центре которого находится искание конкретного факта, *преодоление конкретной трудности доказательства данной индивидуальной теоремы*“**.

Вот это-то постоянное стремление к преодолению конкретных трудностей, в частности связанных с задачами синтеза шарнирных механизмов, и заставляет работать Чебышева над разрешением одной из труднейших и сложнейших задач теории механизмов.

Может быть, этой же особенностью творчества Чебышева объясняется и то несколько непонятное даже для специалистов по теории механизмов обстоятельство, что, дав блестящее решение ряда труднейших конкретных частных задач, Чебышев не создал на их базе синтетического, обобщающего труда, посвященного общим методам синтеза шарнирных механизмов, чего, казалось бы, так естественно было ожидать от такого замечательного исследователя.

Своими замечательными решениями ряда конкретных задач синтеза шарнирных механизмов Чебышев значительно опередил всех своих современников; более того, он поставил перед наукой о механизмах такие проблемы и задачи, к которым эта наука стала вплотную подходить только в самые последние десятилетия. Вот почему, несмотря на громадное научное значение работ Чебышева по теории механизмов, они до самого последнего времени не находили должного внимания со стороны специалистов и не оказали существенного влияния на первые этапы развития этой науки у нас и за границей. Этому в известной мере способствовало и то, что если в области математической науки Чебышев оставил после себя серьезную научную школу в лице выдающихся русских ученых (Ляпунова, Маркова и позже Виноградова), то в области теории механизмов Чебышев не оставил талантливых последователей, которые могли бы продолжать и развивать его теории. К сожалению, после Чебышева не осталось и талантливых популяризаторов его идей, которые могли бы довести его научное наследие до практического внедрения в инженерную практику. Работ, доступно излагающих метод Чебышева, мы почти не имеем, а некоторые статьи, посвященные его методу, написанные даже русскими учеными, опубликованы

*Вестн. АН СССР, № 11—12 за 1943 г., стр. 60.

** Курсив наш. И. А. и Н. Л.

ими или на немецком*, или на французском** языках, а потому были мало доступны широкому кругу русских инженеров. Да и само содержание работ Чебышева в подлинниках представляло для инженеров значительные трудности.

Этими обстоятельствами в основном и объясняется то малое влияние, которое оказали работы Чебышева на современную ему теорию механизмов и инженерную практику.

Только в настоящее время, когда наука о механизмах вплотную подошла к разрешению проблем синтеза механизмов, как бы вновь „открываются“ работы Чебышева, и в них исследователь находит богатый материал к решению задач синтеза механизмов, выдвигаемых современным машиностроением.

Вот почему теперь особенно целесообразно подробно проанализировать все богатейшее наследие, оставленное Чебышевым в виде его мемуаров, заметок, выполненных моделей механизмов и т. д., и, увязав его идеи с современными задачами теории механизмов и инженерной практики, сделать их доступными для творческой созидательной работы наших ученых и инженеров.

В настоящей работе сделана попытка некоторого анализа механизмов Чебышева. В ней мы постарались вскрыть перед читателем все многообразие механизмов, созданных Чебышевым, вне зависимости от того, нашли ли все эти механизмы соответствующее математическое обоснование в его мемуарах.

Как при описании, так и при анализе механизмов Чебышева мы старались сохранить запись основных закономерностей, буквенных обозначений, расчетных формул в том виде, как это было сделано самим Чебышевым. Кроме того, для облегчения читателя, желающего более подробно ознакомиться с теми местами сочинений Чебышева, в которых анализируемые механизмы описаны, в каждом отдельном случае даются постраничные ссылки на соответствующие места его мемуаров.

В качестве основных материалов нами использованы:

- а) мемуары самого Чебышева, собранные в его „Сочинениях“, изданных Академией Наук в двух томах: том I был издан в 1899, а том II — в 1907 г.;
- б) некоторые модели механизмов, сохранившиеся после смерти Чебышева в его личном архиве;
- в) некоторые фотоснимки с моделей и устройств, не сохранившихся в натуре;
- г) литературные материалы различных авторов, упоминающих о некоторых механизмах Чебышева***.

Обычно в русской и зарубежной литературе имя Чебышева связывают с синтезом направляющих механизмов, причем в качестве примеров указываются два-три приближенных прямолинейно-направляющих механизма, созданных Чебышевым. Анализ механизмов Чебышева показывает, что диапазон его творчества был гораздо шире. Чебышевым был решен более обширный

* De launay N. Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmehanismen. Zeitschr. Math. und Phys., B. 44, H. 4, 1899.

** Vassilleff A. P. L. Tchebycheff et son oeuvre scientifique. Turin, 1898.

*** Список этой литературы см. в конце статьи на стр. 109.

круг задач, включающий в себя лишь как одну из задач — задачу о синтезе приближенно-направляющих механизмов. Используя свойства шатунных кривых, имеющих *симметрию*, он решает задачи о синтезе шарнирных механизмов с остановками, шарнирных механизмов для воспроизведения двух качаний коромысла за один оборот кривошипа, шарнирных механизмов для передачи вращательного движения и т. д.

Таким образом, в области теории механизмов основной заслугой Чебышева является, по нашему мнению, глубокое изучение *симметричных шатунных кривых* и их использование в самых различных задачах синтеза шарнирных механизмов. Анализ свойств этих кривых привел Чебышева к постановке ряда задач, относящихся к теории синтеза приближенно-направляющих механизмов, шатунные кривые которых на всем своем протяжении или на некоторых участках приближаются к прямым или дугам окружностей. Кроме того, Чебышевым был разрешен и ряд задач синтеза конкретных механизмов (парораспределения, весов, пресса, регуляторов и др.).

Авторами настоящей статьи были проанализированы 41 основной механизм Чебышева. Кроме того, проанализированы модификации основных механизмов, которые могут в некоторых случаях также рассматриваться как самостоятельные механизмы. Наконец, с помощью известных преобразований, указанных Чебышевым, получены различные частные случаи механизмов Чебышева. Таким образом, настоящее исследование охватывает около 80 различных вариантов механизмов Чебышева.

Ставя своей основной задачей сделать механизмы Чебышева и основные идеи, заложенные в них, доступными широким кругам инженерных и конструкторских работников, авторы дают основные соотношения, необходимые для определения параметров этих механизмов. В некоторых случаях даются графики, с помощью которых эти параметры легко могут быть получены.

Вся работа делится на три части. В первой части дано описание в общем виде симметричных механизмов Чебышева и указано их использование в различных задачах синтеза. Вторая часть посвящена прямолинейно-направляющим механизмам, а третья часть — некоторым специальным механизмам и приспособлениям с указанием конкретного их применения. Наконец, в Приложениях даны таблицы и графики для некоторых наиболее интересных в практическом отношении механизмов.

Для удобства основные механизмы Чебышева и их модификация *прономерованы*. Поэтому при ссылках на тот или иной механизм дается не полное название механизма, а его *основной номер* и *номер модификации*.

Часть первая

СИММЕТРИЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Глава I

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО МЕХАНИЗМА И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

§ 1. Общий случай симметричного механизма

(Механизм № 1.—Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 493)

Размеры звеньев механизма (фиг. 1) имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1.$$

Переменные параметры AC' , CC' и $\angle ABM$ обозначены через

$$AC' = r, CC' = d, \angle ABM = \omega.$$

При указанных соотношениях длин звеньев точка M шатуна AB описывает траекторию (шатунную кривую), симметричную относительно оси $\eta-\eta$, проходящей через неподвижный центр вращения C . Угол наклона MCC' , оси симметрии $\eta-\eta$ к линии центров CC' , равен

$$\angle MCC' = \pi - \frac{\omega}{2}. \quad (1)$$

Давая различные значения параметрам r , d и ω , получаем различные варианты механизма и соответственно различные по виду симметричные траектории точки M .

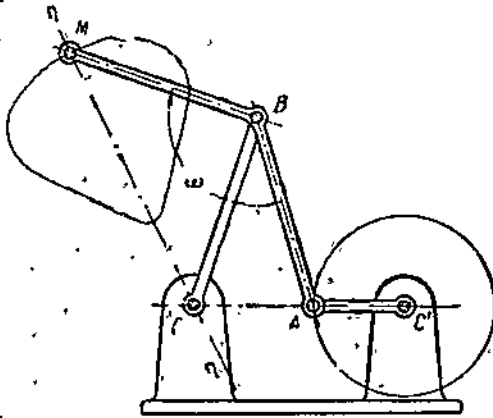
Первый вариант. Параметры r , d и ω механизма

удовлетворяют следующим условиям:

$$r < d, r + d < 2, \omega < \pi.$$

В этом случае звено AC' может совершить полный оборот. Точка M будет находиться на оси симметрии $\eta-\eta$ всякий раз, когда ось звена AC будет совпадать с линией CC' , проходящей через неподвижные центры вращения C и C' . Положения механизма, соответствующие моментам времени, когда точка M находится на оси симметрии $\eta-\eta$, будем называть средними положениями механизма.

На фиг. 2 сплошными линиями показан механизм с параметрами, удовлетворяющими приведенным выше условиям в одном из средних положений, а именно, когда точка A расположена вправо от точки C' , на продолжении линии центров CC' .



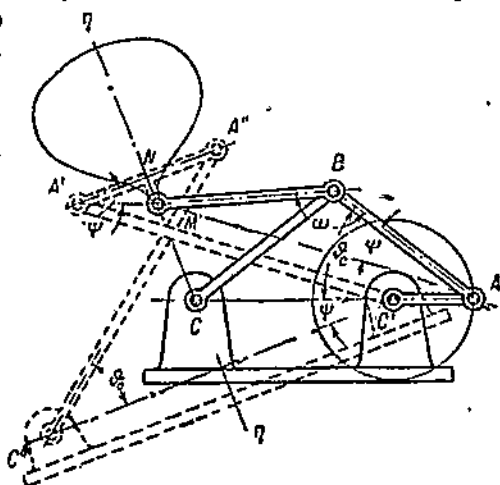
Фиг. 1

Преобразовав механизм по теореме Робертса—Чебышева*, получим механизм, показанный на фиг. 2 пунктирными линиями, точка M которого описывает ту же траекторию, что и в исходном механизме (см. Приложение № 1). Третий механизм, получаемый по указанной выше теореме, вследствие симметрии, совпадает с исходным.

Между параметрами исходного и преобразованного механизма существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \angle BAM = \angle BMA = \angle A'A'M = \\ = \angle A'A''M = \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'C' = A''C'' = AM = 2AB \cos \psi = \\ = 2AB \sin \frac{\omega}{2} \quad (3) \end{aligned}$$



Фиг. 2

или, так как AB принято равным единице ($AB = 1$),

$$A'C' = A''C'' = 2 \cos \psi = 2 \sin \frac{\omega}{2}, \quad (3')$$

$$C'C'' = 2CC' \cos \psi = 2d \cos \psi = 2d \sin \frac{\omega}{2}, \quad (4)$$

$$A'A'' = 2AC' \cos \psi = 2r \cos \psi = 2r \sin \frac{\omega}{2}, \quad (5)$$

$$MN = \frac{A'A''}{2} \operatorname{tg} \psi = AC' \sin \psi = AC' \cos \frac{\omega}{2}. \quad (6)$$

Если в преобразованном механизме, как и в исходном, определять не абсолютные величины длин звеньев, а их относительные величины, то, приняв

$$\begin{aligned} A'C' = A''C'' = 1, \\ A'A'' = a, \quad C'C'' = b, \quad MN = c, \end{aligned}$$

получим следующие простые соотношения между относительными размерами звеньев преобразованного и исходного механизмов:

$$a = r, \quad (7)$$

$$b = d, \quad (8)$$

$$c = \frac{r}{2} \operatorname{tg} \psi = \frac{r}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}. \quad (9)$$

В некоторых случаях удобнее определять преобразованный механизм посредством параметров a , c и угла $A''C''C'$, равного

$$\angle A''C''C' = \angle A'C'C'' = \vartheta_0 \text{ (в среднем положении механизма).}$$

* Чебышев П. Л. Соч., т. II, стр. 271. СПб., 1907; см. также статью В. В. Добровольского в настоящем сборнике.

Тогда, принимая во внимание, что в исходном механизме

$$\angle BAC' = \angle BCC' = \angle A''C''C' = \angle A'C'C'' = \vartheta_0^*, \quad (10)$$

параметр b может быть определен из условия

$$b = 2AC' \cos \vartheta_0 - a = 2 \cos \vartheta_0 - a, \quad (11)$$

Для определения параметров исходного механизма можно воспользоваться приведенными выше условиями (7), (8) и (9). Направления всех величин, определяющих преобразованный и исходный механизмы в положении, показанном на фиг. 2, считаем положительными.

На фиг. 3 механизм той же модификации изображен во *втором* среднем положении. Если в исходном механизме направление величины r считать теперь *отрицательным*, то в преобразованном механизме, в соответствии с формулами (7) и (9), отрицательными будут величины a и c , т. е. механизм из *перекрестного* переходит в *прямой*, а точка M располагается выше линии $A''A'$.

Исходный механизм с параметрами, удовлетворяющими приведенным выше неравенствам, будем называть *механизмом 1-й модификации*.

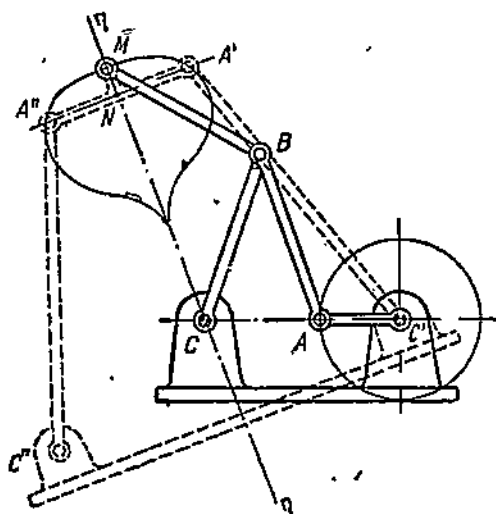
Тогда преобразованный механизм может быть или *перекрестным 1-й модификации* (фиг. 2), или *прямым 1-й модификации* (фиг. 3).

Механизм переходит из перекрестного в прямой и обратно в положениях, когда ось звена $A'A''$ совпадает по направлению с осями звеньев $A'C'$ или $A''C''$.

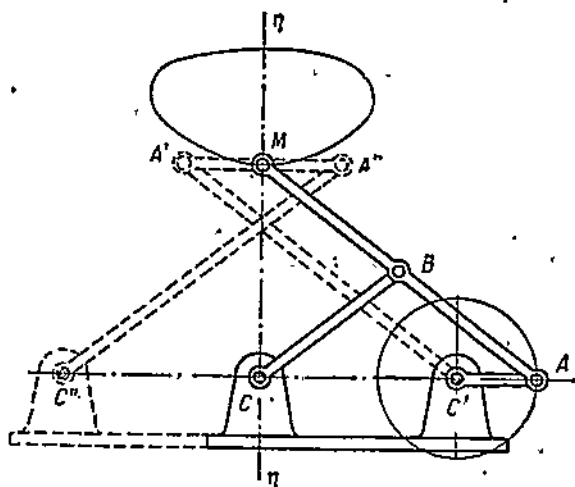
Второй вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r < d, \quad r + d < 2, \quad \omega = \pi.$$

* В некоторых своих мемуарах Чебышев обозначает этот угол через φ . Здесь принято иное обозначение вследствие того, что в общих формулах для симметричных механизмов, данных Чебышевым позднее, через φ обозначен другой угол в том же механизме, а именно $\angle ABC = \pi - 2\vartheta_0$.



Фиг. 2



Фиг. 4

В этом варианте угол ψ (фиг. 2) равен нулю, и соответственно в преобразованном механизме величина c также равна нулю. Ось симметрии η — η траектории точки M перпендикулярна к линии центров $C''C'$ (фиг. 4 и 5).

На фиг. 4 и 5 эти механизмы показаны в средних их положениях. Исходный механизм с вышеуказанными параметрами будем называть *механизмом 2-й модификации*, а преобразованный — *перекрестным 2-й модификации* (фиг. 4) или *прямым 2-й модификации* (фиг. 5).

Третий вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

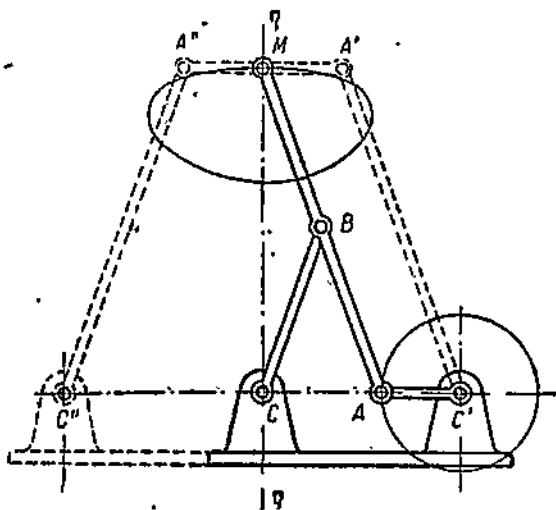
$$r < d, \quad r + d < 2, \quad \omega > \pi.$$

На фиг. 6 показан механизм этого варианта в одном из *средних* своих положений. Угол MCC' , т. е. угол, образованный осью симметрии η — η с линией центров CC' в отличие от механизма 1-й модификации, теперь имеет величину, меньшую $\frac{\pi}{2}$. Величина $\text{tg } \psi$ отрицательна, и соответственно в преобразованном механизме величина c также отрицательна, т. е. точка M расположена в этом положении механизма выше линии $A'A''$.

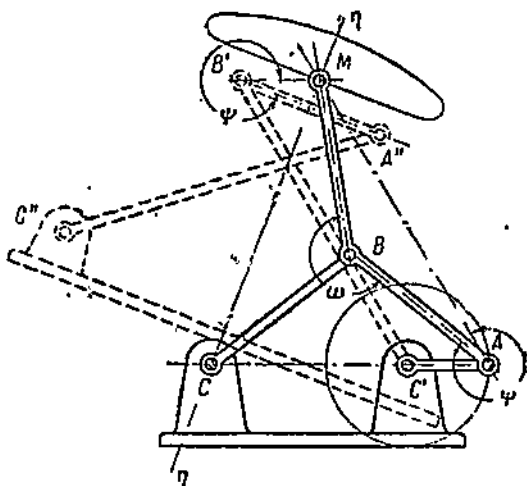
На фиг. 7 показан тот же механизм во втором среднем положении. Как видно из фиг. 7, в отличие от механизма 1-й модификации, величина c в преобразованном механизме положительна, что следует также и из формулы (9), так как оба переменных множителя ее правой части отрицательны. Исходный механизм с вышеуказанными параметрами будем называть *механизмом 3-й модификации*, а преобразованный — *перекрестным 3-й модификации* (фиг. 6) или — *прямым 3-й модификации* (фиг. 7).

Четвертый вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r < d, \quad r + d = 2, \quad \omega < \pi.$$

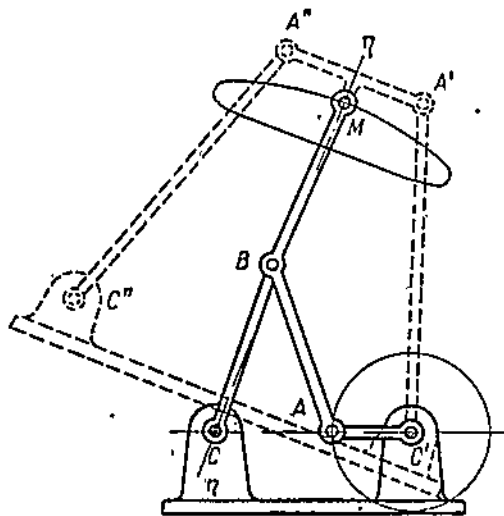


Фиг. 5

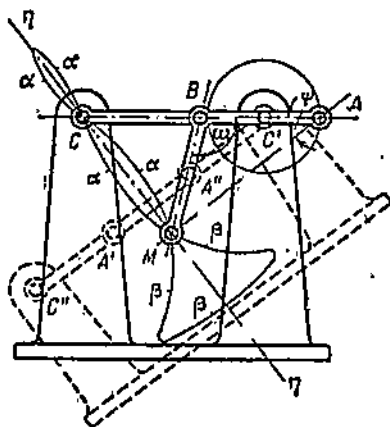


Фиг. 6

Как видно из фиг. 8, в этом варианте оси звена и звена AC' вытягиваются в среднем положении в одну линию, т. е. механизм будет находиться в крайнем своем положении, что приводит к *неопределенности* в движении механизма, если ведущим звеном будет звено AC' или BC . Если точка B при движении механизма располагается всегда выше линии центров CC' , то точка M описывает траекторию $\alpha-\alpha$ в виде восьмерки (фиг. 8). Исходный и преобразованный механизмы при этом будут частными случаями механизмов 1-й модификации. Если же точка B располагается ниже линии центров CC' , то точка M описывает траекторию $\beta-\beta$ (фиг. 8), а исходный и преобразованный механизмы будут частными случаями механизмов 3-й модификации. В предельном положении механизма возможен



Фиг. 7



Фиг. 8

переход из одной модификации в другую. Однако, если ведущим звеном будет звено AB , то неопределенность в движении механизма будет отсутствовать.

Пятый вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r < d, \quad r + d = 2, \quad \omega = \pi.$$

В этом варианте при ведущих звеньях AC' или BC также возможны неопределенные положения механизма. Механизмы, при этом получаемые, будут только частными случаями механизмов 2-й модификации.

Шестой вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

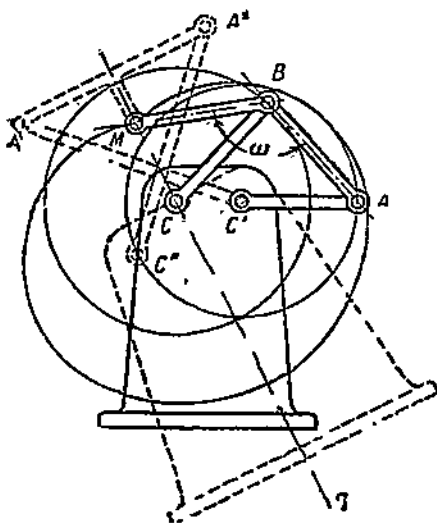
$$r < d, \quad r + d = 2, \quad \omega > \pi.$$

Данный вариант аналогичен четвертому варианту.

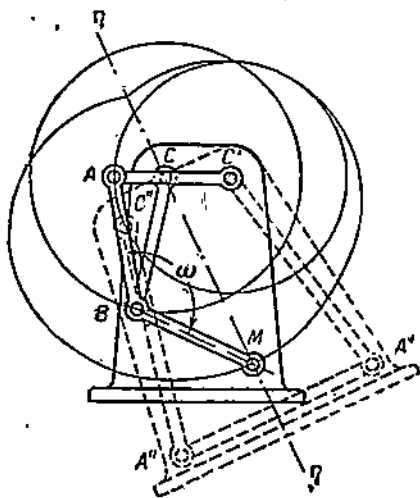
Седьмой вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r < d, \quad r + d > 2, \quad 0 < \omega < 2\pi.$$

При данных условиях звено AC' уже не может совершать полного оборота, но средних положений механизма, т. е. положений, когда точка M приходит на ось симметрии своей траектории, будет опять *два*. Одно из них соответствует показанным на фиг. 3, 5 и 7 (в зависимости от значения угла ω), второе положение получается при симметричном расположении точки B относительно линии CC' . При этом механизмы 1-й модификации переходят в механизмы 3-й модификации и обратно. Переход возможен в предельных положениях механизма, т. е. тогда, когда, например, в исходном механизме звенья AC' и AB совпадают по направлению. Преобразованный механизм при указанных соотношениях всегда *прямой*.



Фиг. 9



Фиг. 10

Восьмой вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r=d, \quad r+d < 2, \quad 0 < \omega < 2\pi.$$

Исходный механизм с этими параметрами дает *механизм Галлоуэя*. Этот механизм двухкривошипный и обладает тем свойством, что ведомый кривошип совершает два оборота за один оборот ведущего кривошипа. Преобразованный механизм в этом случае представляет собой *шарнирный антипараллелограм* или *шарнирный параллелограм*.

Девятый вариант. Параметры r , d и ω удовлетворяют следующим условиям:

$$r=d, \quad r+d=2, \quad 0 < \omega < 2\pi.$$

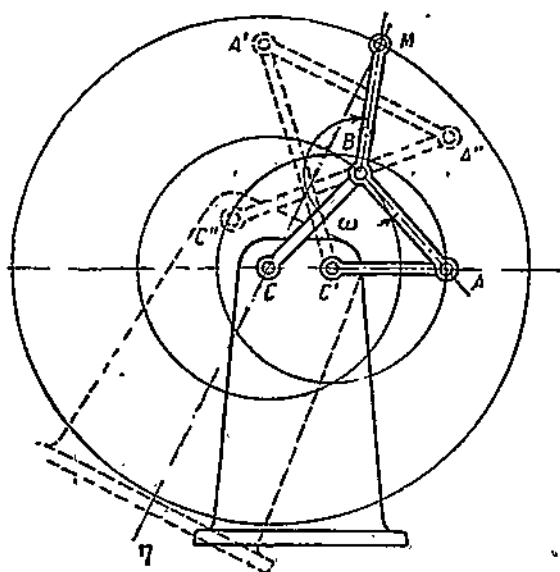
Исходный и преобразованный механизмы представляют собой *шарнирный ромб*.

Десятый вариант. Параметры r , d и ω удовлетворяют следующим условиям:

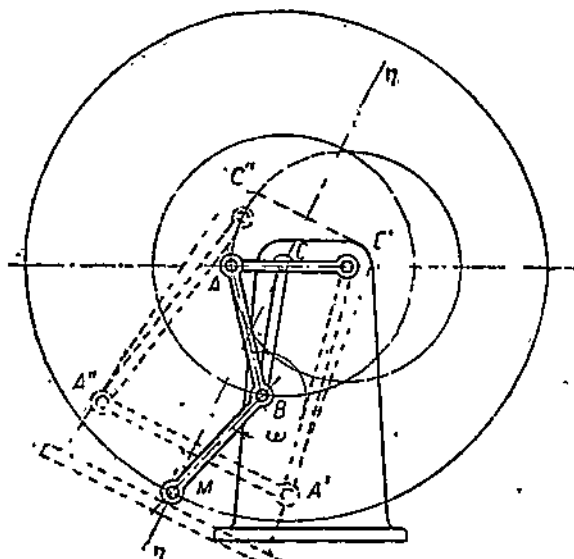
$$r=d, \quad r+d > 2, \quad 0 < \omega < 2\pi.$$

~~51~~
4-19

Исходный механизм представляет собой обращенный механизм Галлоуэя. Преобразованный механизм может быть только шарнирным параллелограммом.



Фиг. 11.



Фиг. 12

Одиннадцатый вариант. Параметры r , d и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r > d, \quad r + d < 2, \\ 0 < \omega < 2\pi.$$

Все механизмы с данными условиями можно рассматривать как обращенные механизмы первых трех модификаций, т. е. механизмы, получаемые из исходного при постановке его на звено AC' и из преобразованного при постановке его на звено $A'C''$. Механизмы, получаемые из механизмов 1-й модификации указанным способом, при угле $\omega < \pi$ условимся называть механизмами 4-й модификации. Механизмы 5 и 6-й модификаций можно получить тем же методом из механизмов 2 и 3-й модификаций.

На фиг. 9 и 10 показаны механизмы 4-й модификации в их средних положениях, а на фиг. 11 и 12 — механизмы 6-й модификации в тех же положениях.

Двенадцатый вариант. Параметры r , d

и ω исходного механизма удовлетворяют следующим условиям:

$$r > d, \quad r + d > 2, \quad 0 < \omega < 2\pi.$$

При данных условиях звено AC' не может совершать полного оборота. Средние положения механизма определяются так же, как и в седьмом варианте.

В предельных положениях механизма возможен переход из 4-й модификации в 6-ю и обратно. Преобразованный механизм всегда прямой.

§ 2. Основные виды шатунных кривых симметричного механизма

Шатунные кривые, описываемые точками шатунов симметричных механизмов Чебышева, весьма широко использовались им для решения различных задач синтеза. Поэтому весьма важным является изучение характера этих кривых.

На фиг. 13 показано, как изменяется характер указанных траекторий с изменением угла ω для симметричного механизма при некоторых произвольно выбранных и наперед заданных значениях параметров r и d .

Обозначим положения точки M шатуна AB в средних положениях механизма, или, что то же, положения ее на оси симметрии, через M_0 и M_1 . Тогда при малых значениях угла ω точки M_0 и M_1 располагаются ниже линии центров CC' , и шатунная кривая, описываемая точкой M , особых точек (т. е. точек возврата, узловых точек и т. п.) не имеет (вид I, фиг. 13).

При увеличении значения угла ω точка M_1 может уже расположиться и выше линии центров CC' . Тогда если точка M_0 остается ниже линии центров CC' , шатунная кривая имеет вид „восьмерки“, т. е. имеет одну двойную узловую точку (вид II, фиг. 13), которая всегда совпадает с неподвижным центром C .

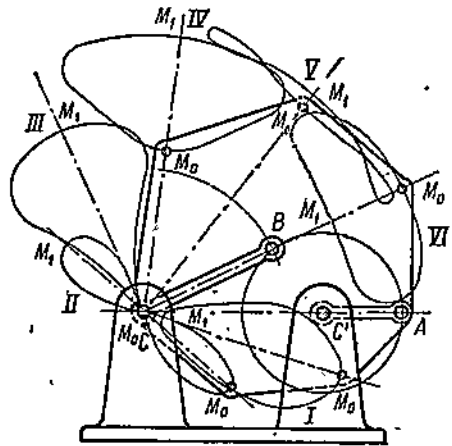
Если одна из точек M_0 и M_1 совпадает с неподвижным центром C , т. е. с мгновенным центром вращения для шатуна в среднем положении механизма, то шатунная кривая, описываемая точкой M , имеет точку возврата (вид III, фиг. 13).

При дальнейшем увеличении значений угла ω точки M_0 и M_1 располагаются выше линии центров CC' , и шатунная кривая, описываемая точкой M , особых точек не имеет (вид IV, фиг. 13).

При значениях угла $\omega > \pi$ возможно получение шатунной кривой, описываемой точкой M в виде кривой с двумя двойными узловыми точками (вид V, фиг. 13).

Наконец, еще более увеличивая угол ω , можно опять получить шатунную кривую без особых точек (вид VI, фиг. 13), но в этом случае расположение точек M_0 и M_1 по отношению к центру C будет иным, чем у шатунных кривых вида IV.

Таким образом, характер шатунных кривых, описываемых точками симметричных механизмов Чебышева, существенно изменяется при изменении угла ω .



Фиг. 13

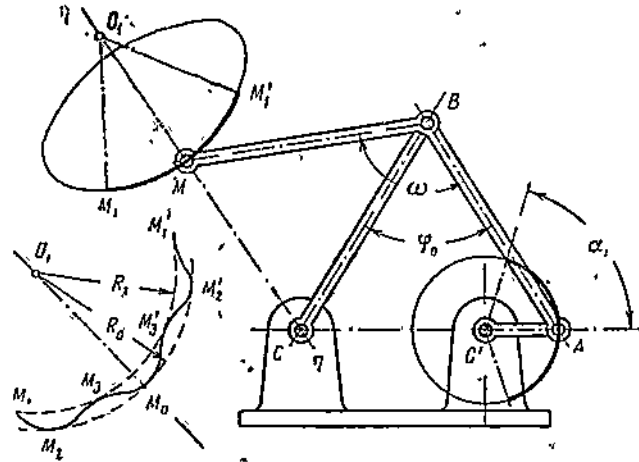
Глава II

КРУГОВЫЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

§ 3. Общий случай кругового направляющего механизма

(Механизм № 2—Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 512)

При некоторых значениях параметров r , d и ω траектория точки M (фиг. 14) на некотором участке (обозначенном на фиг. 14 жирной линией) располагается в области между двумя концентрическими окружностями



Фиг. 14

радиусов R_0 и R_1 , имея соприкосновение с первой окружностью в точках M_0 , M_2 и M_2' и со второй окружностью в точках M_3 и M_3' , причем кривошип AC' за это время поворачивается на угол $\pm a_1$. В точках M_1 и M_1' траектория точки M пересекает окружность радиуса R_1 и выходит за пределы указанной области. Очевидно, если

разность между R_0 и R_1 будет мала, то на участке M_1M_1' траектория точки M будет мало отличаться от дуги окружности радиуса $\frac{R_0+R_1}{2}$.

Обозначим переменный угол ABC через φ . Значение этого угла в среднем положении механизма, т. е. когда точка M совпадает с точкой M_0 траектории, обозначим через φ_0 . Соответственно обозначим значения этого угла в положениях, когда точка M приходит в точки M_1 и M_1' через φ_1 , в точки M_2 и M_2' через φ_2 и в точки M_3 и M_3' через φ_3 . Между указанными углами существуют следующие соотношения:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}} \left[\sqrt{\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} - \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}} \right] \quad (12)$$

и

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} + \varphi_2. \quad (13)$$

Значения параметров r и d , при которых траектория точки M имеет указанное свойство, определяются из следующих соотношений:

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\omega - \varphi_3 - \frac{\varphi_0}{2} \right)} \quad (14)$$

и

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}. \quad (15)$$

Угол α_1 поворота кривошипа AC' при прохождении точкой M участка M_0M_1 , при заданных r , d и φ_1 , определяется по формуле

$$\cos \alpha_1 = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - d^2 - r^2}{2dr}, \quad (16)$$

или при заданных ω , φ_0 , φ_1 — по формуле

$$\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}. \quad (17)$$

Полный угол поворота кривошипа AC' за время прохождения точкой M участка, приближенного к дуге окружности, равен $2\alpha_1$. Расстояние от неподвижного центра вращения C до центра O_1 окружностей R_0 и R_1 , определяется по формуле

$$O_1C = \frac{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)} \right]. \quad (18)$$

Радиус R_0 может быть определен из уравнения

$$R_0 = O_1C - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}. \quad (19)$$

Радиус R_1 определяется из уравнения

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} (d^2 - r^2) O_1C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_2}{2} \cdot d}. \quad (20)$$

Наконец, можно определить величину E максимального отклонения траектории точки M от дуги окружности радиуса $\frac{R_0 + R_1}{2}$ по формуле

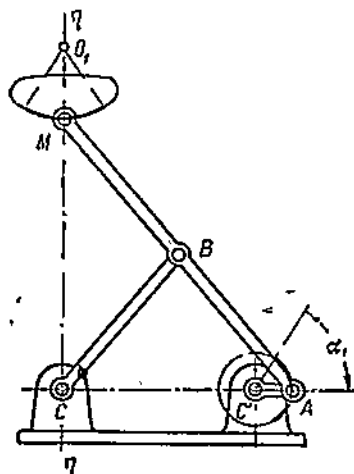
$$E = \frac{R_0 - R_1}{2}. \quad (21)$$

Как это было показано выше, в общем случае симметричный механизм Чебышева определяется, если задать только относительные размеры звеньев, *три* параметрами (например, r , d и ω). Относительные размеры звеньев в общем случае кругового направляющего механизма также определяются *тремя* параметрами, в качестве которых удобно для вычисления принимать углы φ_0 , φ_1 и ω . Однако не все комбинации значений этих величин дают действительные решения для угла α_1 , и, следовательно, указанное выше приближение к дуге окружности возможно лишь в некоторой области значений углов φ_0 , φ_1 и ω .

В зависимости от выбранных условий, которым должны удовлетворять параметры r , d и ω , так же как и в выше разобранным общем случае симметричного механизма, возможны различные модификации исходного механизма. Преобразуя далее механизмы по теореме Робертса—Чебышева, можно получать различные модификации преобразованных механизмов.

§ 4. Круговой направляющий механизм с чертающей точкой, расположенной на оси шатуна

(Механизм № 3—Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 514)



Фиг. 15

Данный механизм (фиг. 15) есть частный случай предыдущего при условии $\omega = \pi$.

Формулы (12), (13), (16), (21) при этом условии изменений не претерпевают, а формулы (14), (15), (17), (18), (19), (20) переходят в следующие:

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \quad (22)$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \quad (23)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}, \quad (24)$$

$$O_1C = - \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)} \right] \operatorname{tg} \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (25)$$

$$R_0 = O_1C - 2 \cos \frac{\varphi_0}{2}, \quad (26)$$

$$R_1^2 = R_0^2 \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (d^2 - r^2) O_1C}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_2}{2} \cdot d}. \quad (27)$$

Исходный и преобразованный механизм суть механизмы 2-й модификации (см. § 1), и ось симметрии $\eta-\eta$ располагается перпендикулярно линии центров CC' . Относительные размеры звеньев механизма определяются теперь уже только двумя параметрами, например φ_0 и φ_1 .

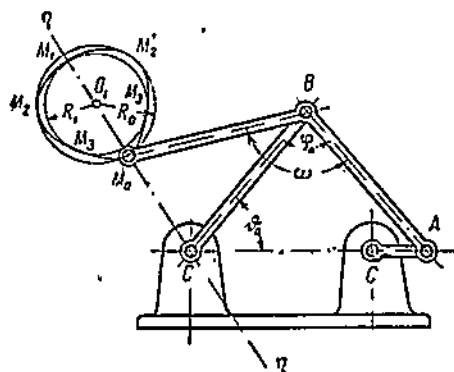
§ 5. Круговой направляющий механизм, дающий приближение всей шатунной кривой к полной окружности

(Механизм № 4 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 528)

Данный механизм (фиг. 16) получается из механизма № 2 (фиг. 14) при условии $\alpha_1 = \pi$. Точки M_1 и M'_1 проходят при этом на ось симметрии $\eta-\eta$, совпадая между собой, и вся шатунная кривая — траектория точки M — оказывается заключенной между двумя концентрическими окружностями радиусов R_0 и R_1 , имея с ними соприкосновение в точках M_0, M_1, M_2, M'_2, M_3 и M'_3 .

Углы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ связаны, как и в общем случае, соотношениями (12) и (13) и, кроме того, должно удовлетворяться условие

$$\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}. \quad (28)$$



Фиг. 16

Параметры r и d в этом случае определяются по формулам:

$$r = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad (29)$$

$$d = 2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}. \quad (30)$$

Расстояние O_1C от неподвижного центра вращения C до центра O_1 окружностей радиусов R_0 и R_1 найдется из условия:

$$O_1C = 2 \frac{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \quad (31)$$

Для возможности приближения траектории к полной окружности центр O_1 должен располагаться между точками M_0 и M_1 , что имеет место при условии

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > 0. \quad (32)$$

Из условия (32) следует, что к полной окружности могут быть приближены только траектории вида IV (см. фиг. 13).

Величина радиуса окружности, к которой приближена траектория, определяется по формуле

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \pm 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}\right). \quad (33)$$

Максимальное отклонение от окружности будет равно:

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \pm \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}. \quad (34)$$

Для этого механизма при определении относительных размеров его звеньев мы располагаем только *двумя* параметрами, например углами φ_0 и φ_1 , так как ω определится из условия (28). Кроме того, выбор φ_0 и φ_1 ограничен некоторой областью, определяемой условием (32).

Если же заданы параметры r и d механизма, то для определения угла ω необходимо предварительно определить значения ϑ_0 и ϑ_1 переменного угла $\angle BCC'$ в *средних* положениях механизма из соотношений

$$\cos \vartheta_0 = \frac{d+r}{2}, \quad (35)$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{d-r}{2}. \quad (36)$$

По значениям ϑ_0 и ϑ_1 определяются два *вспомогательных* угла ϑ и ψ' из условий

$$\sin (2\theta - \vartheta_1) = \frac{\sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_0}{2}}{\cos \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2}}, \quad (37)$$

$$\cos \psi' = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \vartheta_1}. \quad (38)$$

Тогда угол ω , при котором траектория точки M приближается к окружности радиуса R , будет равен

$$\omega = 2\pi - 2\theta - \vartheta_0 - \psi' \quad (39)$$

Радиус R этой окружности найдется по формуле

$$R = \frac{\sin \frac{2\theta - \vartheta_1 + \psi'}{2}}{\sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_0}{2}} r. \quad (40)$$

Расстояние O_1C от неподвижного центра вращения C до центра O_1 окружности радиуса R будет равно

$$O_1C = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_0}{2} \cdot \cos \psi'}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \cdot \cos \frac{2\theta + \vartheta_0 - \psi'}{2}} r. \quad (41)$$

Максимальное отклонение E траектории от окружности радиуса R будет равно

$$E = \frac{\sin \frac{\psi' + \vartheta_1 - 2\theta}{2} \cdot \sin \frac{2\theta + \vartheta_0 + \psi'}{2}}{\sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \cdot \cos \frac{2\theta + \vartheta_0 - \psi'}{2}} r. \quad (42)$$

Если разность углов ϑ_1 и ϑ_0 невелика, то наилучшее приближение к окружности будут давать те механизмы, у которых функция

$$\sin(\vartheta_1 + \vartheta_0) \cdot \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_0}{2}$$

имеет максимальное значение.

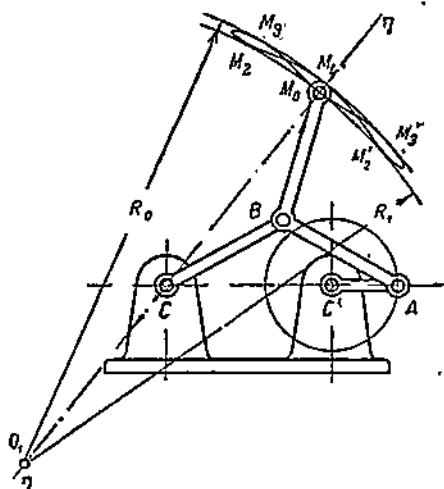
§ 6. Круговой направленной механизм, дающий приближение всей шатуновой кривой к дуге окружности

(Механизм № 5—Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 534)

В этом механизме (фиг. 17) величины φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 , ω , r , α и O_1C (§ 3) определяются, как и для механизма № 4 (фиг. 16), из соотношений (12), (13), (28), (29), (30) и (31), но при этом, так как точка O_1 должна лежать вне отрезка M_0M_1 , будет удовлетворяться условие

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_3}{2}\right) < 0. \quad (43)$$

Из условия (43) следует, что к дуге окружности полностью могут быть приближены траектории вида V (см. фиг. 13). Величина радиуса дуги окружности, к которой приближена траектория, найдется из уравнения



Фиг. 17

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{4}\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)}. \quad (44)$$

Максимальное отклонение траектории от этой окружности будет равно

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \pm 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}\right). \quad (45)$$

Положительное значение величины $\frac{R_0 + R_1}{2}$ соответствует расположению центра O_1 выше точек M_0 и M_1 . Отрицательное значение величины $\frac{R_0 + R_1}{2}$ соответствует расположению центра O_1 ниже точек M_0 и M_1 . Как и в предыдущем случае, при определении относительных размеров звеньев, мы располагаем двумя параметрами, например углами φ_0 и φ_1 . Кроме того, выбор φ_0 и φ_1 ограничен некоторой областью, определяемой условием (43).

§ 7. Круговой направляющий механизм с чертящей точкой, расположенной на оси шатуна, дающий приближенно всей шатуновой кривой в окружности

(Механизм № 6 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 519).

Механизм (фиг. 18) представляет собой частный случай механизма № 4 при условии $\omega = \pi$.

Формулы, определяющие значения параметров этого механизма, значительно упрощаются, если их выразить через некоторую вспомогательную величину ψ'' , равную

$$\psi'' = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}. \quad (46)$$

Параметры r и d тогда определяются из уравнений

$$r = \frac{2 \sin \psi'' \cdot \sin 2\psi'' \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi''}}{\sin 3\psi''}, \quad (47)$$

$$d = \frac{\sin 2\psi''}{\sin 3\psi''}. \quad (48)$$

Расстояние O_1C от неподвижного центра вращения C до центра O_1 окружности, к которой приближена траектория, будет равно

$$O_1C = \frac{2 \cos^2 \psi''}{\sin 3\psi''}. \quad (49)$$

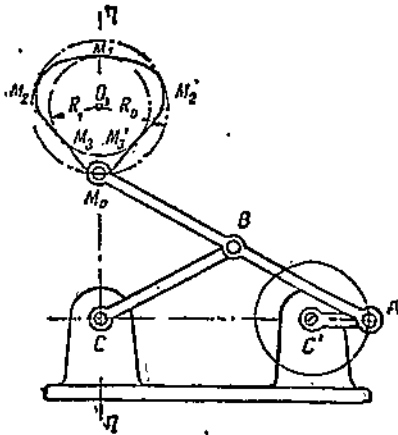
Величина радиуса дуги окружности, к которой приближена траектория, найдется из уравнения

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \cos \psi'' \cdot \sin 2\psi'' \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi''}}{\sin 3\psi''}. \quad (50)$$

Максимальное отклонение траектории от этой окружности будет равно:

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos 2\psi''}{\sin 3\psi''}. \quad (51)$$

В данном механизме для определения относительных размеров звеньев мы располагаем только одним свободным параметром, например величиной ψ'' , которая не должна превосходить $\frac{\pi}{4}$. С приближением угла ψ'' к величине $\frac{\pi}{4}$ уменьшаются как радиус окружности $\frac{R_0 + R_1}{2}$, так и величина максимального отклонения от окружности (см. Приложение № 2, стр. 78).



Фиг. 18

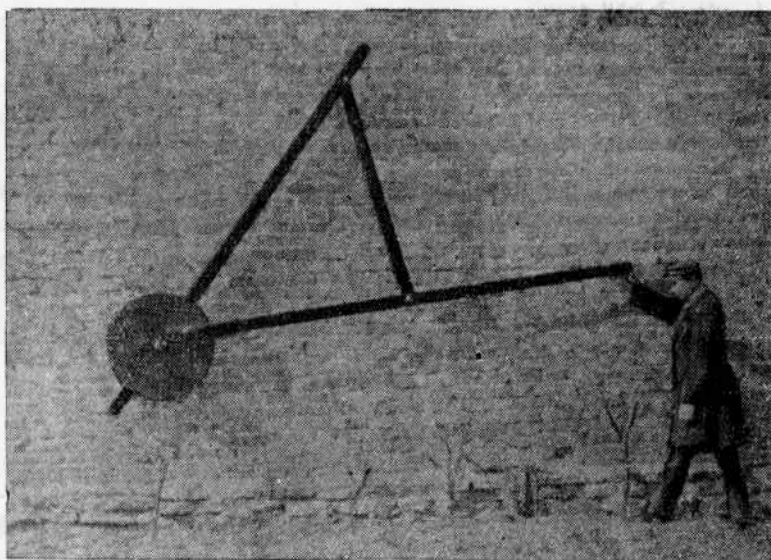
Глава III

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ШАТУННЫХ КРИВЫХ
В МЕХАНИЗМАХ ЧЕБЫШЕВА§ 8. Механизмы для преобразования вращательного движения в
другое вращательное движение

А. Четырехзвенная противовращательная рукоятка

(Механизм № 7—по фотоснимку из архива Чебышева)

На фиг. 19 приведена копия фотоснимка, сохранившегося в архиве Чебышева, модели механизма четырехзвенной противовращательной рукоятки, построенной Чебышевым (сама модель не сохранилась). Кинематическая схема механизма дана на фиг. 20.



Фиг. 19

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1;$$

$$AC' = r = 0,136; \quad CC' = d = 1,409.$$

Этот механизм является частным случаем механизма № 6, при условии $\phi'' = 44^\circ 56'$.

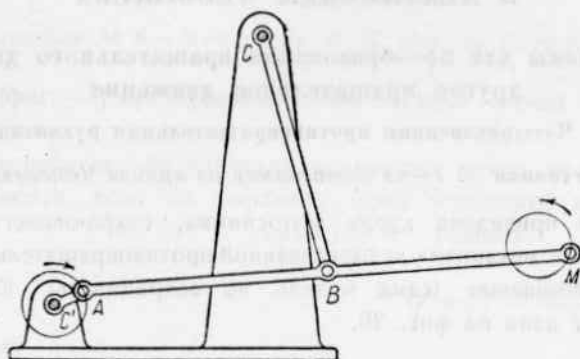
Точка M_1 описывает траекторию, весьма мало отличающуюся от окружности радиуса R , равного

$$R = 0,136.$$

Максимальное отклонение E траектории от этой окружности равно

$$E = 0,0066.$$

Направление движения точки M по ее траектории является обратным по отношению к направлению движения точки A кривошипа AC' , а потому данный механизм может служить в качестве противовращательной рукоятки.



Фиг. 20

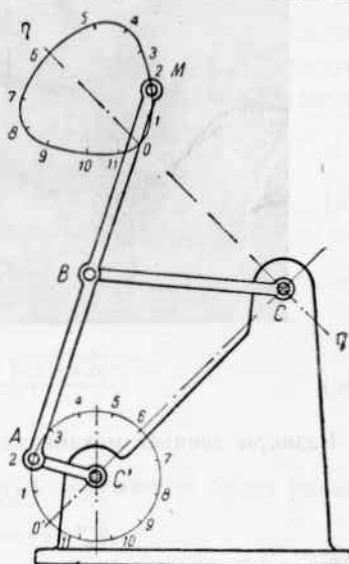
Б. Самокатное кресло

(Механизм № 8—по фотоснимку из архива Чебышева)

На фиг. 21 приведена копия фотоснимка самокатного кресла, снабженного механизмом Чебышева. Кинематическая схема этого механизма дана на фиг. 22.



Фиг. 21



Фиг. 22

Размеры звеньев механизма имеют следующие отношения:

$$AB = BC = BM = 1;$$

$$AC' = r = 0,325; \quad CC' = d = 1,385.$$

Данный механизм является частным случаем механизма № 6 при условии $\varphi'' = 44^\circ 36'$.

Точка M описывает траекторию, которая уже более значительно отличается от окружности, а именно, радиус окружности равен $\frac{R_0 + R_1}{2} = 0,33$, а максимальное отклонение траектории точки M от этой окружности равно $\frac{R_0 - R_1}{2} = 0,039$.

Если ведущим звеном сделать шатун AB (фиг. 22) и перемещать точку M по ее траектории, то кривошип AC' будет делать полный оборот, что и использовано Чебышевым при конструировании своего самокатного кресла, в котором каждое из двух колес приводится во вращение при помощи механизма, кинематическая схема которого дана на фиг. 22.

В зависимости от направления усилия, прикладываемого в точке M , на точку A кривошипа AC , будет действовать соответствующая тангенциальная приведенная сила. Поэтому при произвольно выбранном направлении прикладываемого к точке M усилия в некоторых положениях может произойти *заклинивание* механизма. Очевидно, что это будет иметь место, когда направление усилия будет проходить через или около мгновенного центра скоростей шатуна AB .

Как указывает Н. Б. Делоне,* это обстоятельство было отмечено и самим Чебышевым, а именно, для определения направления, по которому следует перемещать рукоятку и прикладывать усилие, был отмечен центр той окружности, к которой приближена траектория точки M и, следовательно, рекомендовалось прикладывать усилие в направлении, касательном к траектории точки M .

В. Шестизвенная противовращательная рукоятка

(Механизм № 9 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 23 приведен фотоснимок модели механизма шестизвенной противовращательной рукоятки, хранившейся в архиве Чебышева. Кинематическая схема этого механизма дана на фиг. 24.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB = BC = BM &= 1; \\ AC' = r &= 0,54; \quad CC' = d = 1,33; \quad MD = FD = 0,57; \quad O_1C = 1,39; \\ \omega &= \pi. \end{aligned}$$

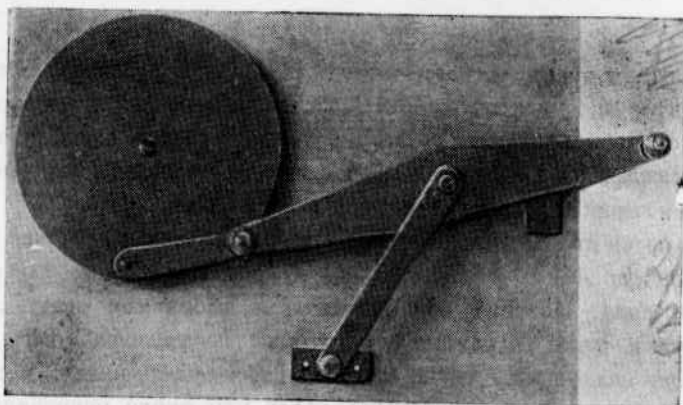
Данный механизм есть частный случай механизма № 6 при условии $\psi^* = 43^\circ 45'$.

Точка M описывает траекторию, значительно отличающуюся от окружности, а именно, радиус окружности равен $\frac{R_0 + R_1}{2} = 0,57$, а максимальное отклонение от этой окружности равно $\frac{R_0 - R_1}{2} = 0,116$.

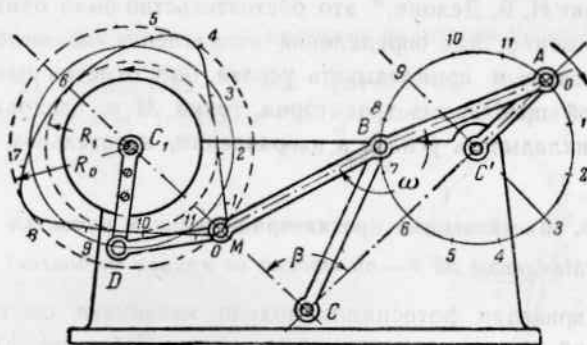
Однако, если, выбрав длину ведомого звена равной $\frac{R_0 + R_1}{2}$, присоединить его не непосредственно к точке M , а с помощью *дополнительного*

* De launay N. Die Tschebyscheffischen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmehanismen. Zeitschr. f. Math. und Phys., B. 44, H. 4, 1899.

звена MD , т. е. присоединить к точкам O_1 и M двухпроводковую группу O_1DM (фиг. 24), то, очевидно, даже значительные отклонения траектории точки M от окружности не мешают звену O_1D совершить полный оборот



Фиг. 23



Фиг. 24

за один оборот кривошипа AC' . Так как вращение ведомого звена O_1D происходит в направлении, обратном вращению кривошипа AC' , то данный механизм, так же как и механизм № 7, может служить в качестве *противовращательной рукоятки*.

Г. „Парадоксальный механизм“

(Механизм № 10 — по модели из архива Чебышева)

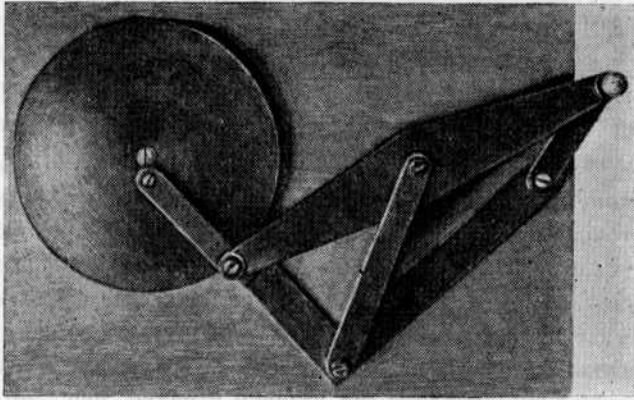
На фиг. 25 приведен фотоснимок модели „парадоксального механизма“, хранившейся в архиве Чебышева. Кинематическая схема этого механизма дана на фиг. 26.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB = BC = BM &= 1; \\ AC' = r &= 0,557; \quad CC' = d = 1,324; \\ \beta &= 90^\circ; \\ O_1C &= 1,387; \quad DM = 0,584; \quad O_1D = 0,123. \end{aligned}$$

Данный механизм, как и предыдущие, есть частный случай механизма № 6, но при условии $\psi'' = 43^\circ 40'$.

В отличие от механизма № 9, размеры звеньев O_1D и MD выбраны таким образом, что сумма длин их равна радиусу окружности, описанной



Фиг. 25

вокруг траектории точки M , а их разность равна радиусу окружности, вписанной в эту траекторию, т. е.

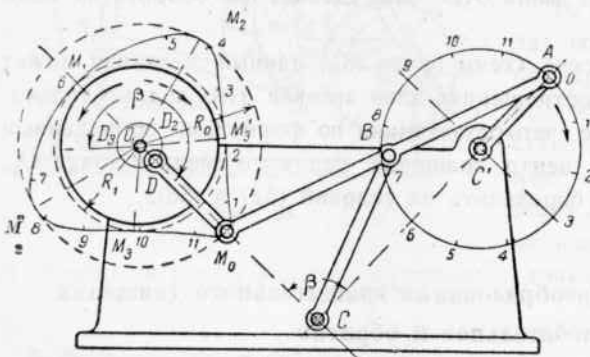
$$O_1D + DM = R_0 \text{ и } DM - O_1D = R_1.$$

Отсюда

$$DM = \frac{R_0 + R_1}{2}, \tag{52}$$

$$O_1D = \frac{R_0 - R_1}{2}. \tag{53}$$

Окружность радиуса R_0 касается траектории точки M в трех точках M_0, M_2 и M'_2 (фиг. 26). Окружность радиуса R_1 также касается



Фиг. 26

траектории в трех точках M_1, M_3 и M'_3 . Когда точка M приходит в положения M_0, M_1, M_2, M'_2, M_3 и M'_3 , то звенья DM и O_1D , в силу условий (52) и (53), вытягиваются в одну линию, т. е. находятся в предельных положениях механизма. За один оборот кривошипа AC' предельных положений будет *шесть*: три *внешних* (длины звеньев O_1D и DM

складываются) и три *внутренних* (длины звеньев O_1D и DM вычитаются). Так как из каждого предельного положения звено O_1D может выйти, вращаясь как в одну, так и в другую сторону, то для определенности движения механизма ведомое звено O_1D снабжено маховиком.

Предположим, что маховик (звено O_1D) вращается в направлении, указанном *сплошной* стрелкой (против часовой стрелки — фиг. 26), т. е. в направлении, противоположном вращению кривошипа AC' . Тогда при перемещении точки M из положения M_0 в положение M'_3 точка D переместится, вращаясь против часовой стрелки, в точку D_3 . Угол поворота ведомого звена O_1D за это время равен β , причем β больше 180° . Далее, при перемещении точки M из положения M'_3 в положение M'_2 точка D переместится в положение D_2 . Угол поворота звена O_1D за это время опять больше 180° . Следовательно, за промежуток времени, соответствующий перемещению точки M в положение M'_2 , точка D обойдет вокруг точки O_1 более, чем один раз. Наконец, когда точка M приходит на ось симметрии, т. е. в положение M_1 , точка D опять приходит в исходное положение, обойдя вокруг точки O_1 два раза. В силу симметрии во вторую половину оборота кривошипа AC' будет происходить то же самое, и, следовательно, ведомое звено O_1D сделает *четыре* оборота за *один* оборот кривошипа AC' .

Теперь предположим, что маховик (звено O_1D) вращается в направлении, указанном *пунктирной* стрелкой (по часовой стрелке, фиг. 26), т. е. в том же направлении, что и кривошип AC' . Тогда при перемещении точки M из положения M_0 в положение M'_3 точка D , так же как и в первом случае, переместится в положение D_3 , но угол поворота звена O_1D при этом будет равен не β , а $360^\circ - \beta$, т. е. будет меньше 180° . При перемещении точки M из положения M'_3 в положение M'_2 точка D приходит в положение D_2 , описав дугу окружности также меньше 180° , т. е. за время перемещения точки M из положения M_0 в положение M'_2 точка D обойдет точку O_1 менее чем один раз. Наконец, когда точка M приходит на ось симметрии в положение M_1 , точка D возвращается в исходное положение, обойдя точку O_1 один раз. Во вторую половину оборота кривошипа AC' звено O_1D сделает еще один оборот, и, следовательно, при данном направлении вращения ведомого звена O_1D оно сделает *два* оборота за один оборот кривошипа AC' .

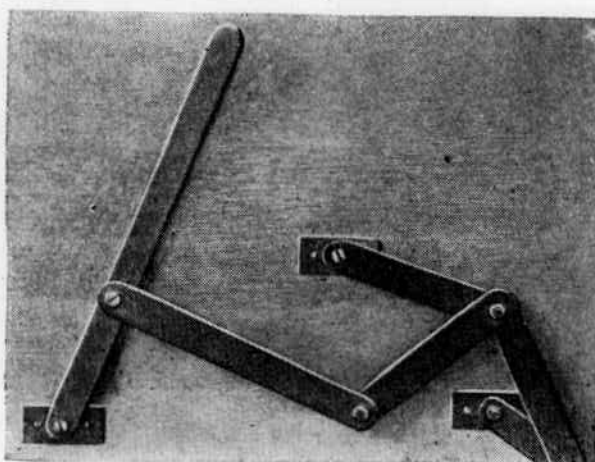
Как видно из кинематической схемы (фиг. 26), данный механизм может быть построен и при других соотношениях длин звеньев. Необходимо только, определив размеры основного четырехзвенника по формулам, приведенным для механизма № 6, выбрать центр вращения ведомого звена в точке O_1 , а длины звеньев O_1D и DM определить из условий (52) и (53).

§ 9. Механизмы для преобразования вращательного движения в колебательное и обратно

А. Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа

(Механизм 11 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 27 приведен фотоснимок модели механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Ведомое звено этого механизма совершает два качания за один оборот кривошипа. Кинематическая схема механизма дана на фиг. 28.



Фиг. 27

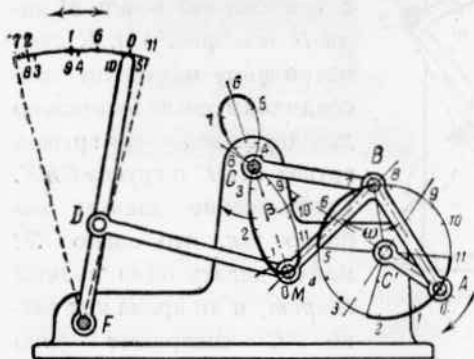
Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1;$$

$$AC = r = 0,54; \quad CC' = d = 1,29;$$

$$\omega = 80^\circ;$$

$$MD = 1,6; \quad FD = 0,81; \quad CF = 1,92; \quad CF = 2,57.$$



Фиг. 28

Траектория точки M в этом механизме относится к виду II (см. фиг. 13), т. е. имеет одну двойную точку, совпадающую с неподвижным центром C .

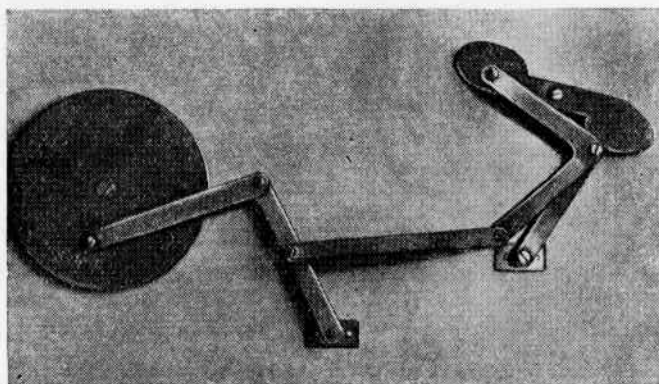
Ведомое звено DF совершает два полных качания за один оборот кривошипа: одно *медленное* и другое *быстрое*. На фиг. 28 участки траектории точки M , проходимые ею при качании ведомого звена DF справа налево, показаны жирными линиями; так же показаны

и соответствующие участки, проходимые точкой A кривошипа AC .

Б. Механизм для преобразования качательного движения во вращательное

(Механизм № 12—по модели из архива Чебышева)

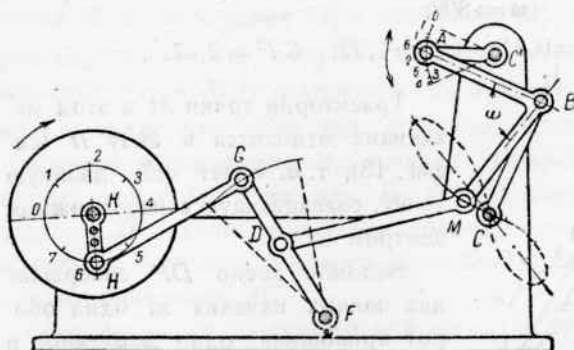
На фиг. 29 приведен фотоснимок модели механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Ведущее звено этого механизма имеет качательное движение, а ведомое — вращательное движение (механизм „выпрямителя движения“). Кинематическая схема механизма дана на фиг. 30.



Фиг. 29

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 AB = BC = BM = 1; \\
 AC = r = 0,545; \quad CC' = d = 1,325; \\
 \omega = 80^\circ; \\
 MD = 1,61; \quad FD = 0,71; \quad GF = 1,33; \quad GH = 1,36; \quad KH = 0,39; \quad CF = 1,6; \\
 C'F = 2,6; \quad KF = 2,11; \quad CK = 3,29.
 \end{aligned}$$



Фиг. 30

В основе механизма лежит симметричный механизм с траекторией точки M вида H (см. фиг. 13). К симметричному механизму присоединены последовательно две двухповодковые группы: группа MDF и группа CHK . Соотношение звеньев выбрано так, что звено KH может делать один *полный оборот*, в то время как звено AC' совершает *одно*

полное качание на некоторый угол. Прямой и обратный ход точка A совершает в приблизительно равные промежутки времени. Если звено AC' принять за ведущее, то для определенности направления вращения при переходе через предельные положения ведомое звено KH должно быть снабжено маховиком, что и выполнено в модели.

В. „Велосипед“

(Механизм № 13—по фотоснимку из архива Чебышева)

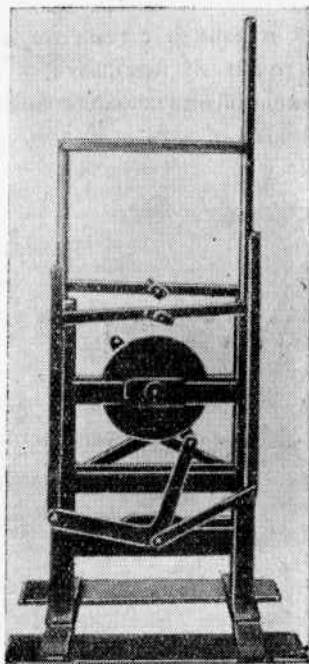
На фиг. 31 приведена копия фотоснимка модели механизма, известного под названием „велосипед“. Кинематическая схема механизма, лежащего в основе этого приспособления, показана на фиг. 32.

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

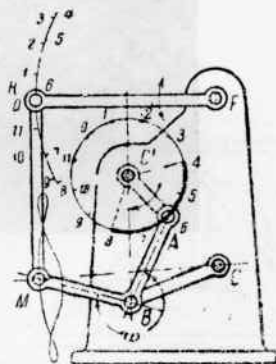
$$\begin{aligned} AB = BC = BM = 1; \\ AC' = r = 0,55; \quad CC' = d = 1,38; \\ \omega = 267^\circ; \\ MK = KF = 1,4; \quad C'F = 1,23; \quad FC = 1,77. \end{aligned}$$

Как видно из кинематической схемы (фиг. 32), к симметричному механизму C_1ABC с траекторией точки M вида V (см. фиг. 13) присоединена двухповодковая группа MKF . При движении звена KF сверху вниз, от одного крайнего положения к другому, кривошип AC' совершает более полуоборота. Участок траектории точки A кривошипа AC' , соответствующий обратному ходу звена KF , обозначен жирной линией.

Присоединяя к оси C' второй подобный механизм с кривошипом, сме-



Фиг. 31



Фиг. 32

щенным относительно кривошипа AC' на угол в 180° (на фиг. 32 не показан), получаем возможность, нажимая попеременно на ведущие звенья обоих механизмов, привести во вращение ведомое звено AC' (механизм „выпрямителя движения“).

По характеру модели можно предположить, что данный механизм предназначен не для передвижения велосипеда, а для использования в качестве *ножного привода*.

§ 10. Механизм для преобразования вращательного или сложного движения в поступательное

А. Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом

(Механизм № 14—по модели из архива Чебышева)

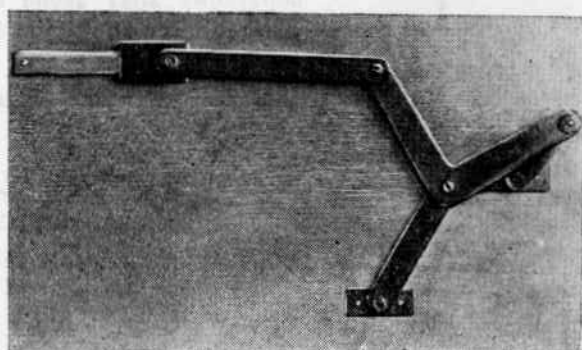
На фиг. 33 приведен фотоснимок модели механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Ведомое звено этого механизма,двигающееся поступа-

тельно, имеет ускоренный обратный ход. Кинематическая схема механизма дана на фиг. 34.

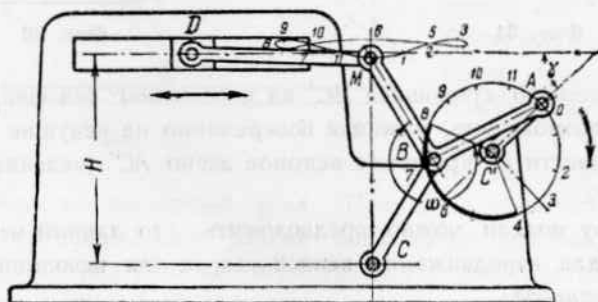
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= r = 0,55; \quad CC' = d = 1,38; \\ \omega &= 267^\circ; \quad \gamma = 43,5^\circ; \\ MD &= 1,5; \quad H = 1,79. \end{aligned}$$

В основе механизма лежит симметричный механизм с теми же параметрами, что и механизм № 13, но траектория точки M используется для сообщения ползуну D дополнительно присоединенной двухпроводковой группы возвратно-поступательного движения с ускоренным обратным ходом.



Фиг. 33



Фиг. 34

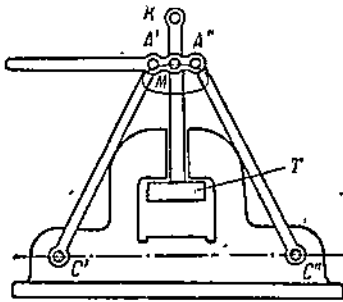
Участок траектории точки A , соответствующий обратному ходу ползуна D , показан жирной линией. Отношение K времен обратного и прямого ходов при постоянной угловой скорости кривошипа AC' равно

$$K \approx \frac{3}{5}.$$

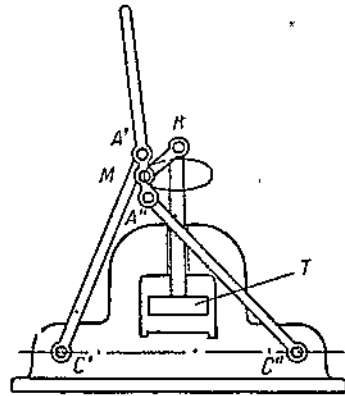
Б. Прессе

(Механизм № 15 — по модели из архива Чебышева)

Механизм показан в трех положениях, соответствующих наивысшему подъему ползуна (фиг. 35), среднему его положению (фиг. 36) и наини́зшему (фиг. 37).



Фиг. 35

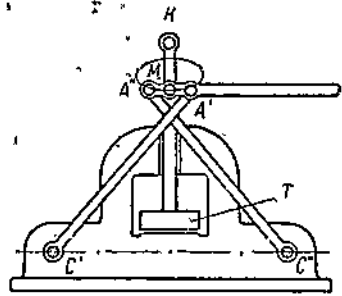


Фиг. 36

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1; \quad A'A'' = a = 0,198; \\ C'C'' = b = 1,105; \quad MK = 0,211.$$

Механизм представляет собой преобразованный симметричный механизм 2-й модификации с присоединенной двухповодковой группой, состоящей из поводка KM и ползуна T . Ведущим звеном является шатун $A'A''$. Таким образом, сложное движение шатуна преобразуется в поступательное движение ползуна T .



Фиг. 37

В процессе движения механизм из прямого переходит в перекрестный.

§ 11. Механизмы с остановками

А. Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода

(Механизм № 16 — по модели из архива Чебышева)

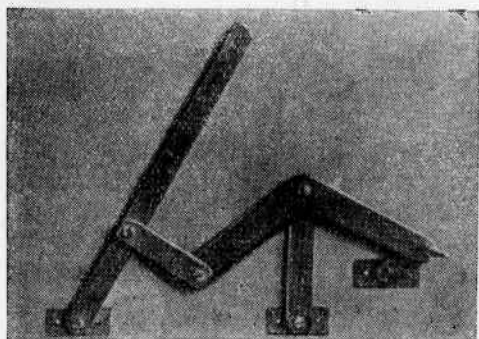
На фиг. 38 приведен фотоснимок модели механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Ведомое звено этого механизма имеет длительную остановку в конце его хода. Кинематическая схема механизма дана на фиг. 39.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

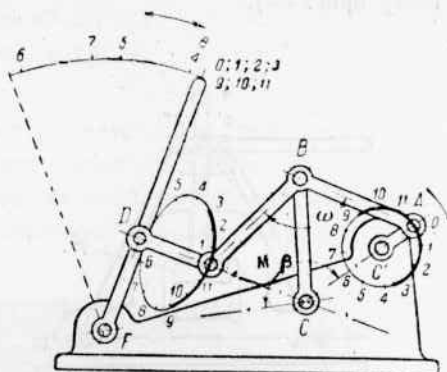
$$AB = BC = BM = 1; \quad AC = r = 0,305; \quad CC' = d = 0,76 \\ \omega = 114^\circ, \\ MD = 0,66; \quad FD = 0,8; \quad CF = 1,66; \quad C'F = 2,36.$$

В основе механизма лежит круговой направляющий механизм $C'ABC$ (механизм № 2). К этому механизму присоединена двухповодковая группа MDF , состоящая из звеньев MD и DF .

Длина звена MD равна радиусу окружности, к которой приближена траектория точки M на некотором участке своей траектории, а положение



Фиг. 38



Фиг. 39

центра F выбрано таким образом, что в одном из крайних положений звена FD точка D совпадает с центром этой окружности. Вследствие этого ведомое звено FD имеет в одном из крайних положений остановку, продолжительность которой равна времени прохождения точкой M участка траектории, приближенного к окружности (обозначен на схеме *жирной* линией).

При данных соотношениях длин звеньев продолжительность остановки приблизительно равна *половине оборота* кривошипа или времени *полного качания* звена FD .

В. „Сортировалка“

(Механизм № 17 — по фотоснимку из архива Чебышева)

На фиг. 40 приведена копия фотоснимка приспособления, известного под названием „сортировалка“. Кинематическая схема механизма, лежащего в основе этого приспособления, показана на фиг. 41.

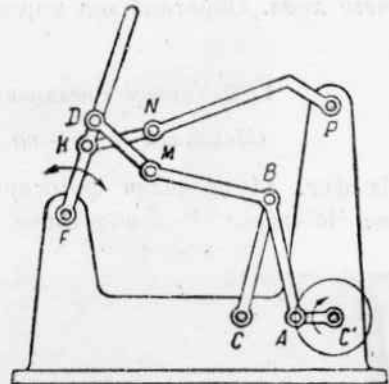
Относительные размеры звеньев основного механизма те же, что и механизма № 16. В механизме имеется *дополнительная* двухповодковая группа KNP , которая присоединена к ведомому звену в точке K и к неподвижному звену в центре P .

Принцип работы приспособления заключается в следующем. При крайнем правом положении коромысла DF зерно из бункера поступает в лоток, укрепленный в верхней части коромысла. Так как остановка коромысла DF в этом положении продолжительна и соответствует полуобороту кривошипа AC' (см. механизм № 15), то зерно успевает полностью заполнить лоток. За следующую половину оборота кривошипа AC коромысло DF с

лотком, наполненным зерном, быстро совершает полное качание. При этом зерна, отделяясь от лотка, падают ближе или дальше, в зависимости от величины их массы. Звено NP закрывает выходное отверстие бункера, открывая его лишь в момент, соответствующий остановке коромысла DF .



Фиг. 40

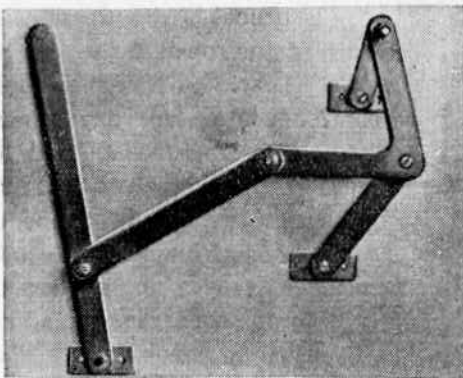


Фиг. 41

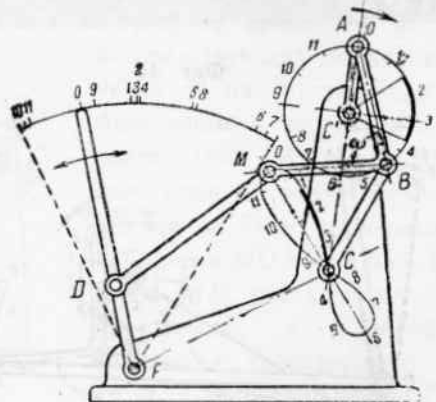
В. Механизм с остановкой ведомого звена на полпути

(Механизм № 18 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 42 приведен фотоснимок модели механизма, хранившейся в архиве Чебышева.



Фиг. 42



Фиг. 43

Ведомое звено этого механизма имеет остановку в середине рабочего хода. Кинематическая схема механизма дана на фиг. 43.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1; \quad AC = r = 0,54; \quad CC' = d = 1,3; \quad \omega = 80^\circ;$$

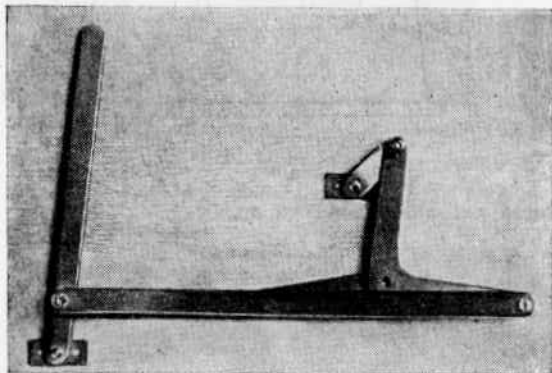
$$MD = 1,603; \quad FD = 0,695; \quad CF = 1,8; \quad C'F = 2,78.$$

В основе механизма лежит симметричный механизм $C'ABC$ (фиг. 43), имеющий те же размеры, что и механизм № 11 (фиг. 28). Траектория точки M механизма на участке, обозначенном жирной линией, мало отличается от дуги окружности. Длина звена MD принята равной радиусу этой окружности, а положение центра F выбрано таким образом, что в одном из средних положений коромысла DF точка D приходит в центр указанной окружности. Вследствие этого при непрерывном вращении кривошипа AC' коромысло DF совершает *колебательное движение с остановкой в середине рабочего хода*. Обратный ход коромысла ускоренный и без остановки.

Г. Механизм с остановками в крайних положениях

(Механизм № 19 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 44 приведен фотоснимок модели механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Ведомое звено этого механизма имеет две остановки в своих *крайних* положениях.



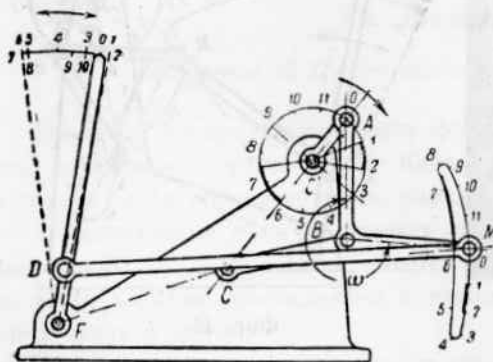
Фиг. 44

Кинематическая схема механизма дана на фиг. 45.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= r = 0,43; \\ CC' &= d = 1,15; \quad \omega = 265^\circ; \\ MD &= 3,34; \quad FD = 0,41; \\ CF &= 1,47; \quad C'F = 2,51. \end{aligned}$$

В основе этого механизма лежит симметричный механизм $C'ABC$ (фиг. 45), траектория точки M которого имеет два участка приблизительно равной кривизны (на схеме эти участки обозначены жирной линией). Длина звена MD принята равной величине радиуса окружностей, с которыми совпадают указанные участки, а положение центра F выбрано так, что в крайних положениях точка D приходит в центры этих окружностей. Вследствие этого при непрерывном вращении кривошипа AC' звено



Фиг. 45

DF совершает *колебательное движение с остановками* в своих крайних положениях. Дуги окружностей, проходимых точкой A кривошипа AC' в момент остановок, очерчены на схеме (фиг. 45) жирной линией.

Так как механизм имеет предельные положения, то для определенности направления вращения ведомого звена FD с ним жестко скрепляют маховик.

Предположим, что маховик (звено FD) вращается только в направлении, указанном сплошной стрелкой (по часовой стрелке, фиг. 47), т. е. в направлении, совпадающем с направлением движения кривошипа AC' . Тогда ведомое звено FD движется с *остановкой*, а именно: в течение одной половины оборота кривошипа AC' оно неподвижно, а в течение второй совершает полный оборот вокруг точки F в направлении, совпадающем с направлением движения кривошипа AC' . Если же маховик (звено FD) вращается в направлении, указанном пунктирной стрелкой (против часовой стрелки), т. е. в направлении, обратном движению кривошипа AC' , то ведомое звено FD остановки не имеет, и механизм представляет собой обычную *противовращательную рукоятку* (см. механизм № 9).

§ 12. Некоторые выводы по теории симметричных механизмов Чебышева

Подведем некоторые итоги проведенного анализа симметричных механизмов, предложенных Чебышевым.

Как показывает анализ этих механизмов, Чебышев весьма широко использует свойства этих механизмов для воспроизведения разнообразных форм движения. Можно с уверенностью теперь утверждать, что Чебышева не только интересовала математическая сторона вопроса о возможности приближения к дугам окружностей шатунных кривых на всем их протяжении или на некоторых участках, но не в меньшей степени его интересовал вопрос о возможности использования этого приближения к решению конкретных технических задач.

Круг этих задач исключительно многообразен. Отметим некоторые из них.

Первая задача относится к преобразованию *вращательного* движения во *вращательное* с переменным передаточным отношением. В решении этой задачи Чебышевым достигнуты выдающиеся результаты. Для правильной оценки этих результатов достаточно указать, что до настоящего времени техника располагает очень скромным количеством типов шарнирных механизмов, позволяющих воспроизводить данную форму преобразования движения. Широко используются механизмы шарнирного параллелограмма и антипараллелограмма в самых разнообразных модификациях; для воспроизведения движения с передаточным отношением, равным за полный цикл движения механизма *двум*, известен только механизм Галлоуэя. Чебышев создает оригинальные конструкции механизмов *противовращательных рукояток* (механизмы № 7, 8, 9 и 10). Один из них (механизм № 10) действительно заслуживает названия „парадоксальный“, под которым он известен.

Шарнирного механизма с изменением передаточного отношения за полный цикл движения в зависимости от направления вращения ведомого звена

техника до Чебышева не знала. Не имеет она ничего подобного и в настоящее время.

Вторая задача, решенная Чебышевым, относится к преобразованию *вращательного* движения в *колебательное* и обратно. Здесь надо в первую очередь отметить механизм № 11, в котором ведомое звено имеет два качания за один оборот ведущего звена, одно медленное и другое быстрое. Так же как и для „парадоксального“ механизма, мы не можем и здесь подыскать ничего аналогичного в арсенале механизмов современной техники. Не менее замечательны по остроумию, проявленному их автором, и механизмы „выпрямителей движения“ (механизмы № 12 и № 13).

Следует отметить, что механизмы „выпрямителей движения“ встречаются в самых последних конструкциях механизмов. Достаточно указать на современные конструкции прогрессивных коробок скоростей автомобилей, некоторые конструкции приборов и т. д. Таким образом, при решении и этой задачи Чебышев значительно опережает своих современников.

Третья задача — о преобразовании *вращательного* движения в *поступательное* с ускоренным движением поступательно движущегося звена на рабочем или холостом ходу (механизм № 14) — интересна в том отношении, что Чебышев на много лет предвосхитил современное решение этой задачи механизмами с аналогичной структурой (механизм грохота Маркуса, механизм строгального станка и т. д.), широко применяющихся в самых различных отраслях техники.

Особенно интересным является решение Чебышевым задачи о *механизмах с остановками*. Указанными видами механизмов особенно много занимались последние годы немецкие ученые (Альт, Бейер, Рау и др.). Анализ механизмов № 16, 18, 19 и 20 показывает, что Чебышеву принадлежит несомненный приоритет в решении задач синтеза подобных механизмов. В отличие от вышеуказанных ученых, решавших задачу или по ограниченному количеству конечных положений ведомого звена, без изучения закона движения этого звена в промежутках между выбранными положениями (метод Бурместера), или эмпирически, подбором соответствующих участков шатунных кривых (метод Рау), Чебышев решает эту задачу математически совершенно безукоризненно, с точной оценкой получаемого отклонения шатунных кривых от дуг окружностей. Если в своих примерах Чебышев ограничивался только шарнирными механизмами, то это надо отнести не за счет того, что метод Чебышева неприменим к решению задач синтеза механизмов с остановками, когда в состав механизмов входят и *поступательные* пары, а за счет только того, что в период научной деятельности Чебышева существовало некоторое предубеждение против механизмов с поступательными парами. Очевидно, что решение задачи о приближении шатунной кривой к прямой решает полностью и задачу о синтезе механизмов с остановками, когда в состав механизмов входят как *вращательные*, так и *поступательные* пары.

Все вышеперечисленные задачи, поставленные и так блестяще разрешенные Чебышевым, не только не потеряли своей актуальности, но более чем когда-либо могут быть использованы для решения ряда самых важных проблем современного машиностроения. Если перечислить основные задачи

синтеза механизмов с *низшими* парами, стоящие перед современной теорией машин-автоматов, то окажется, что значительное их число уж разрешено было Чебышевым или во всяком случае Чебышевым были поставлены основные принципиальные вехи на пути их разрешения, с характерной для него законченностью математического их обоснования. Вот почему мы с полным правом можем считать Чебышева не только основоположником русской теории механизмов, но и творцом теории приближенного синтеза плоских механизмов с *низшими* парами.

Часть вторая

ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

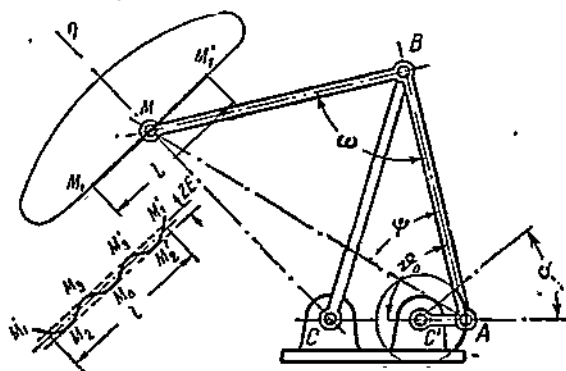
Глава I

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

§ 13. Общий случай симметричного прямолинейно-направляющего механизма

(Механизм № 21 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 283, 709)

Кинематическая схема симметричного прямолинейно-направляющего механизма для общего случая приведена на фиг. 48. Данный механизм является



Фиг. 48

частным случаем механизма № 2 при значении R_0 , равном бесконечности ($R_0 = \infty$). При повороте кривошипа AC' из среднего положения на угол $\pm \alpha_1$ точка M проходит участок траектории (шатунной кривой) $M_1 M_1'$ длиной l , весь заключающийся между двумя параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2E$. Точки M_0, M_1 и M_2 суть точки касания тра-

ектории с первой из этих прямых, а точки M_3 и M_3' — со второй.

На фиг. 49 изображен тот же механизм, но преобразованный по теореме Робертса—Чебышева.* Как и в общем случае симметричного механизма, знаки всех величин, определяющих механизм, в положениях, соответствующих показанным на фиг. 48 и 49, считаем положительными.

* Механизм, показанный на фиг. 48, самим Чебышевым был получен путем преобразования из механизма, показанного на фиг. 49 (см. статью В. В. Добровольского в настоящем сборнике).

Если в преобразованном механизме, как и ранее (см. § 1), принять

$$A'C' = A''C'' = 1, \quad A'A'' = a, \quad C'C'' = b, \quad MN = c, \\ \angle A'C'C'' = \angle A''C''C' = \vartheta_0,$$

то условия, которым должны удовлетворять эти величины, чтобы имело место указанное выше соприкосновение траектории точки M с двумя параллельными, могут быть представлены с помощью некоторой вспомогательной величины t в следующем виде:

$$a = \frac{T^2 - 2}{T^2 - 1} \cos \vartheta_0, \quad (54)$$

$$c = \frac{(2 - T^2) [2T - (T^2 + 1) \sin \vartheta_0]}{2(T^2 - 1)^2}, \quad (55)$$

где

$$T = \frac{2 \sin \vartheta_0 (1 + t^2) + t(3 + t^2)}{1 - t^2}. \quad (56)$$

Величина b , а также параметры исходного механизма могут быть определены по формулам (7), (8), (9), (10) и (11).

При перемещении точки M из положения M_0 в положение M_1 или M'_1 кривошип AC' в исходном механизме поворачивается на угол α_1 . В преобразованном механизме ему соответствует угол α_1 наклона линии $A'A''$ к линии $C'C''$, когда точка M занимает положение M_1 или M'_1 . Величина этого угла определится из соотношения

$$\cos \alpha_1 = \frac{2(1 - T^2)^2}{T^2(2 - T^2)} \left[\left(\frac{1 + 2t \sin \vartheta_0 + t^2}{1 - 2T \sin \vartheta_0 + T^2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (57)$$

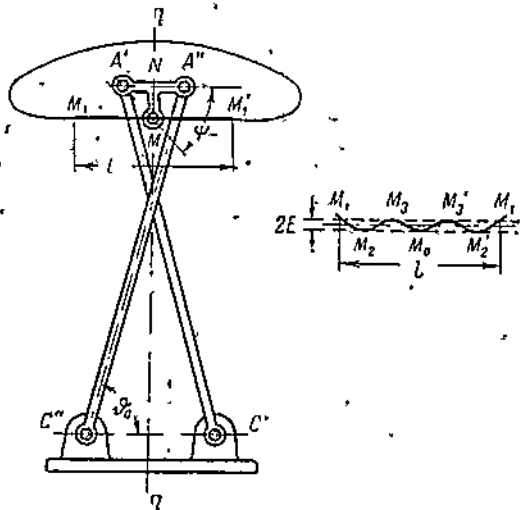
Полный угол поворота кривошипа AC' за время прохождения точкой M участка, приближенного к прямому, равен $2\alpha_1$. Длина приближенно прямолинейного участка найдется по формуле

$$l = \frac{2(2 - T^2)}{1 - T^2} \left[\frac{T - \sin \vartheta_0}{T^2 - 1} + \frac{2(1 + 2t \sin \vartheta_0 + t^2)t}{(1 - t^2)^2} \right] \sin \alpha_1. \quad (58)$$

Наконец, может быть определена величина E — максимальное отклонение от прямолинейности по формуле

$$E = \frac{2(1 + 2t \sin \vartheta_0 + t^2)t^3}{(2 \sin \vartheta_0 + 3t + 2t^2 \sin \vartheta_0 - t^3)^2}. \quad (59)$$

Из формул (58) и (59) следует, что с уменьшением величины t уменьшаются как длина приближенно прямолинейного участка l , так и максимальное отклонение от прямолинейности E . Так как последняя величина уменьшается значительно быстрее, чем l , то при малых значениях t шатунная кривая, описываемая точкой M на некотором участке, мало отличается



Фиг. 40

от прямой. Если t — величина достаточно малая, то значения всех приведенных выше величин могут быть получены из разложений в ряды.

Имеем

$$T = 2 \sin \vartheta_0 + 3t + \dots, \quad (60)$$

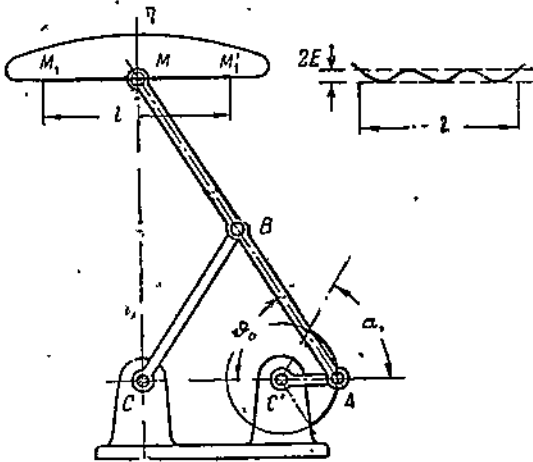
$$a = \frac{2 \cos 2\vartheta_0 \cdot \cos^2 \vartheta_0}{\cos 3\vartheta_0} + \frac{6 \sin 2\vartheta_0 \cdot \cos^2 \vartheta_0}{\cos^2 3\vartheta_0} t + \dots, \quad (61)$$

$$c = \frac{\operatorname{tg} 3\vartheta_0 \cdot \cos 2\vartheta_0 \cdot \cos^2 \vartheta_0}{\cos 3\vartheta_0} + 3 \frac{\cos^2 \vartheta_0 \cdot (3 \cos 2\vartheta_0 - \cos 4\vartheta_0)}{\cos^2 3\vartheta_0} t + \dots, \quad (62)$$

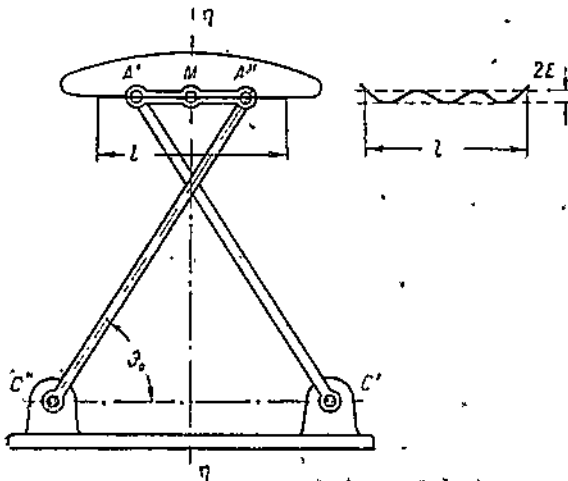
$$E = \left(\frac{1}{2 \sin^2 \vartheta_0} - \frac{3 - 2 \sin^2 \vartheta_0}{2 \sin^2 \vartheta_0} t + \dots \right) t^2, \quad (63)$$

$$\sin \alpha_1 = 2 \sqrt{-\frac{(4 \sin^2 \vartheta_0 - 1)^2 t}{\sin \vartheta_0 \cdot \cos 2\vartheta_0}} \left[1 + \frac{56 \sin^6 \vartheta_0 - 50 \sin^4 \vartheta_0 + 15 \sin^2 \vartheta_0}{\sin \vartheta_0 \cdot \cos 2\vartheta_0 (4 \sin^2 \vartheta_0 - 1)} t + \dots \right], \quad (64)$$

$$l = \frac{8 \cos \vartheta_0 \sqrt{-t \sin \vartheta_0 \cdot \cos 2\vartheta_0}}{\cos 3\vartheta_0} \left[1 - \frac{\cos^3 \vartheta_0 (8 \sin^4 \vartheta_0 - 6 \sin^2 \vartheta_0 - 1)}{\sin \vartheta_0 \cos 2\vartheta_0 \cos 3\vartheta_0} t + \dots \right]. \quad (65)$$



Фиг. 50



Фиг. 51

Как видно из приведенных формул, при $t=0$ длина хода l и отклонение E равны нулю, и шатунная кривая, описываемая точкой M , в среднем положении механизма имеет с прямой соприкосновение 5-го порядка.

Параметры механизма для этого случая определяются из соотношений

$$a = \frac{2 \cos 2\vartheta_0 \cdot \cos^2 \vartheta_0}{\cos 3\vartheta_0}, \quad (66)$$

$$c = \frac{\operatorname{tg} 3\vartheta_0 \cdot \cos 2\vartheta_0 \cdot \cos^2 \vartheta_0}{\cos 3\vartheta_0}, \quad (67)$$

$$b = -\frac{\sin^2 2\vartheta_0}{\cos 3\vartheta_0}. \quad (68)$$

При выборе относительных размеров звеньев данного механизма мы располагаем двумя параметрами, например t и ϑ_0 . Если давать различные значения углу при одном и том же значении t , то будем получать следующие варианты симметричного механизма, которых, однако, будет меньше, чем для общего случая симметричного механизма (см. § 1).

Первый вариант. Исходный механизм $C'ABC$ (фиг. 48) есть механизм 1-й

модификации, а преобразованный механизм (фиг. 49) — перекрестный механизм 1-й модификации.

Второй вариант. Исходный механизм есть механизм 2-й модификации (фиг. 50), а преобразованный механизм — перекрестный механизм 2-й модификации (фиг. 51).

Третий вариант. Исходный механизм есть механизм 3-й модификации (фиг. 52), а преобразованный механизм — перекрестный механизм 3-й модификации (фиг. 53).

Четвертый вариант. Исходный механизм есть механизм 3-й модификации (фиг. 54), а преобразованный механизм — прямой механизм 3-й модификации (фиг. 55).

Пятый вариант. Исходный механизм есть механизм 4-й модификации (фиг. 56), а преобразованный механизм — прямой механизм 4-й модификации (фиг. 57).

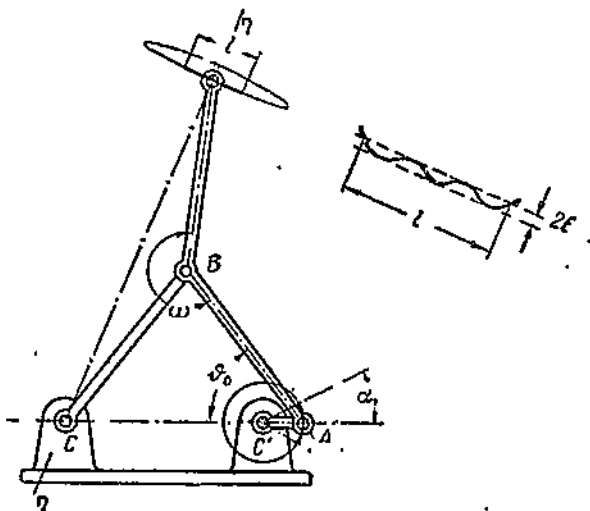
Указанные выше пять вариантов получаются при изменении угла ϑ_0 от 0 до $\frac{\pi}{2}$; но так как при дальнейшем увеличении угла ϑ_0 в силу симметрии все полученные механизмы по размерам и расположению звеньев повторяются, то всегда при расчетах возможно считать угол ϑ_0 меньшим $\frac{\pi}{2}$,

т. е., например, на фиг. 57 за угол ϑ_0 принимать *острый* угол, образованный осью звена $A''C''$ с линией центров $C'C''$.

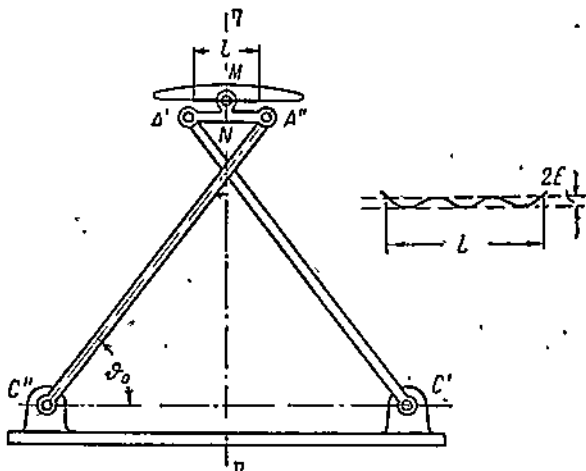
Значения углов ϑ_0 , при которых происходит переход из одной модификации в другую, соответствуют изменениям знака какой-либо величины, определяющей конфигурацию механизма.

Как следует из формул (54) и (55), это будет иметь место, когда удовлетворятся следующие условия:

$$T = 1, \tag{69}$$



Фиг. 52

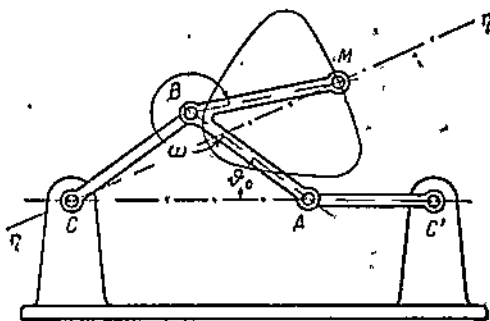


Фиг. 53

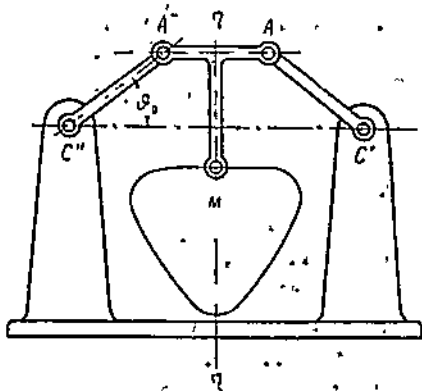
$$T = \sqrt{2}, \quad (70)$$

$$2T - (T^2 + 1) \sin \vartheta_0 = 0, \text{ или } T = \frac{1 \pm \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0}. \quad (71)$$

Для $t=0$ углы ϑ_0 , соответствующие условиям (69), (70) и (71), будут соответственно равны 30° , 45° и 60° . С увеличением t предельные значения углов ϑ_0 изменяются (см. Приложение № 3).

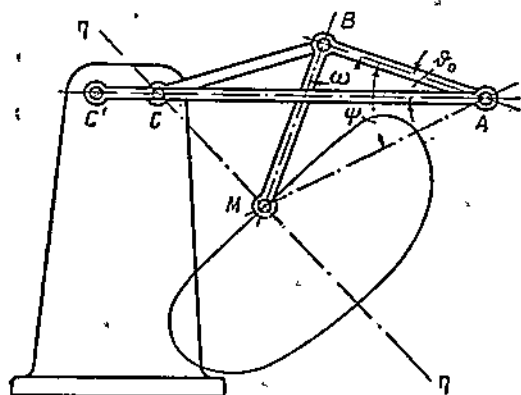


Фиг. 54



Фиг. 55

Следует отметить, что формулы для определения длины l прямолинейного участка [формула (58)], угла поворота кривошипа α_1 [формула (57)] и отклонения E от прямолинейности на этом участке [формула (59)] применимы лишь для *первых трех* вариантов.



Фиг. 56

Действительно, так как при выводе формул (57) и (58) начало координат было выбрано в точке M_0 , а ось ординат направлена по оси симметрии $\eta - \eta$, то, считая величину E всегда *положительной*, заметим, что в механизмах 4-го и 5-го вариантов (фиг. 55 и 57) прямая, проходящая на расстоянии E от оси абсцисс, уже не будет иметь с траекторией точки M ни точек пересечения, ни точек соприкосновения

и вследствие этого формулы (57) и (58) для определения угла α_1 и длины хода l действительных решений в этих случаях не дают.

Если в качестве свободных параметров выбираются не t и ϑ_0 , а величины a и ϑ_0 , то для вычисления величины c можно пользоваться формулой:

$$c = \frac{a}{\cos^2 \vartheta_0} \left[\left(\frac{3}{2} \cos \vartheta_0 - a \right) \sin \vartheta_0 - (\cos \vartheta_0 - a) \sqrt{\frac{2 \cos \vartheta_0 - a}{\cos \vartheta_0 - a}} \right]. \quad (72)$$

Затем, определив величину T по формуле

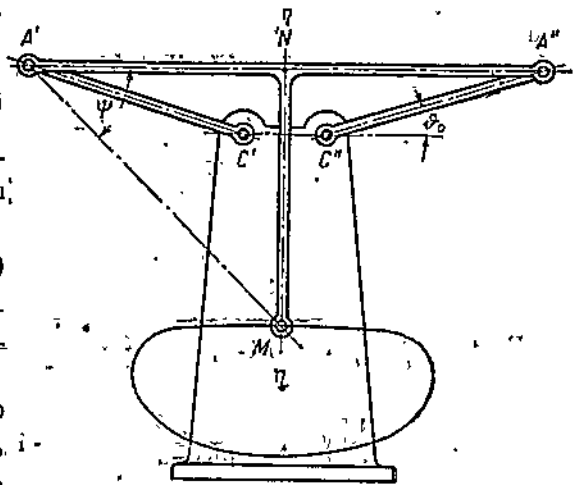
$$T = \sqrt{\frac{2 \cos \theta_0 - a}{\cos \theta_0 - a}}, \quad (73)$$

ищем значение вспомогательной величины t из уравнения

$$2 \sin \theta_0 (1 + t^2) + t(3 + t^2) - (1 - t^2)T = 0, \quad (74)$$

где t есть корень этого уравнения, наиболее близко подходящий к нулю.

Зная величину t , можно определить по формулам (57), (58) и (59) значения угла α_1 , длины хода l и отклонения E .



Фиг. 57

§ 14. Симметричный прямолинейно-направляющий механизм с чертящей точкой, расположенной на оси шатуна

(Механизм № 22 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 49)

Этот механизм, который мы условились относить к механизмам 2-й модификации общего случая прямолинейно-направляющего механизма, известен весьма широко. На фиг. 50 показан исходный механизм этой модификации, известный под названием „лямбдаобразное прямилло“, а на фиг. 51 — преобразованный* механизм в виде *перекрестного*.

Относительные размеры звеньев в исходном механизме связаны условием:

$$d = \frac{2+r}{3}. \quad (75)$$

В преобразованном механизме соответственно имеем

$$b = \frac{2+a}{3}. \quad (75')$$

Угол поворота α_1 кривошипа AC' в исходном механизме, соответствующий перемещению точки M из положения M_0 в положение M_1 или M'_1 , определится из уравнения

$$\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{4r-1}{r(2+r)}. \quad (76)$$

В преобразованном механизме (фиг. 51) угол α_1 — угол наклона линии $A'A''$ к линии $C'C''$, когда точка M находится в положении M_1 или M'_1 .

Длина l приближенно прямолинейного участка равна

$$l = \frac{(5-2a)(2a+1)(4a-1)}{a+2}. \quad (77)$$

* См. сноску на стр. 44.

Траектория точки M на участке, приближенном к прямолинейному, располагается между двумя параллельными прямыми, отстоящими от линии $C'C''$ на расстояниях K' и K'' ($K'' - K' = 2E$), соответственно равных

$$K' = \sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$

$$K'' = \sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^2}{12(a+2)^2}}.$$

Отсюда величина E максимального отклонения от прямолинейности траектории точки M на участке $M_1M'_1$ будет равна

$$E = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^2}{12(a+2)^2}} - \sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)} \right], \quad (78)$$

или

$$E = \frac{1}{3} \left[\sqrt{1 + \frac{3(4a-1)^2}{16(1-a)(a+2)^2}} - 1 \right] \sqrt{(1-a)(a+2)}, \quad (79)$$

или, наконец,

$$E = \frac{(4a-1)^2}{4(2+a) \left[\sqrt{(5-2a)^2(1+2a) + 4(2+a)^2(1-a)} \right]}. \quad (80)$$

В данном механизме для выбора относительных размеров звеньев мы располагаем только *одним* параметром, например величиной a .

Из формул для определения длины хода l и отклонения E следует, что величина a должна быть больше $\frac{1}{4}$. При приближении a к $\frac{1}{4}$ уменьшаются как длина хода l , так и отклонение E , причем последняя величина уменьшается быстрее (см. Приложение № 4). Если принять $a_1 = \frac{\pi}{2}$, то параметры механизма будут следующими:

$$a = \frac{2}{3 + \sqrt{7}}, \quad (81)$$

$$b = \frac{2(4 + \sqrt{7})}{3(3 + \sqrt{7})}, \quad (82)$$

а величина отклонения E будет равна

$$E = \frac{\sqrt{272 + 104\sqrt{7}} - \sqrt{305 + 92\sqrt{7}}}{12(3 + \sqrt{7})}. \quad (83)$$

В этом частном случае за время прохождения точкой M приближенно прямолинейного участка $M_1M'_1$ кривошип AC' в исходном механизме совершает поворот. В преобразованном механизме линия $A'A''$ перпендикулярна к линии центров $C'C''$, когда точка M находится в положениях M_1 и M'_1 .

§ 15. Симметричный прямолинейно-направляющий механизм, дающий приближение всей палупной кривой к прямой

(Механизм № 23 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 526)

Данный механизм может рассматриваться как частный случай механизма № 5 при значении R_0 , равном бесконечности ($R_0 = \infty$).

На фиг. 58 дана кинематическая схема исходного механизма для данного случая, а на фиг. 59 — кинематическая схема преобразованного* механизма.

Относительные размеры звеньев этих механизмов могут быть представлены как функции одного свободного параметра, например угла ψ ,

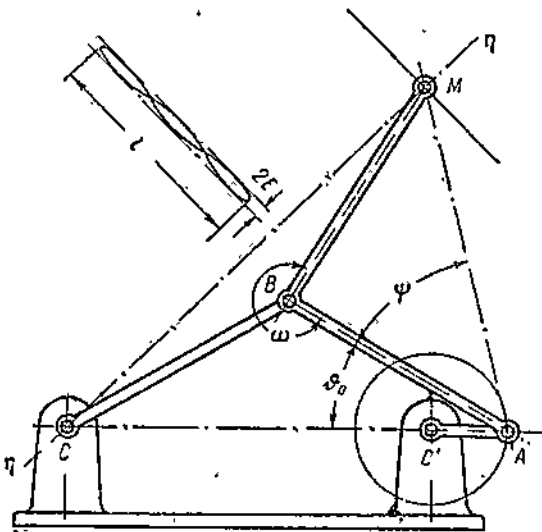
$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad (84)$$

$$d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi} \quad (85)$$

и
$$\omega = \pi + 2\psi. \quad (86)$$

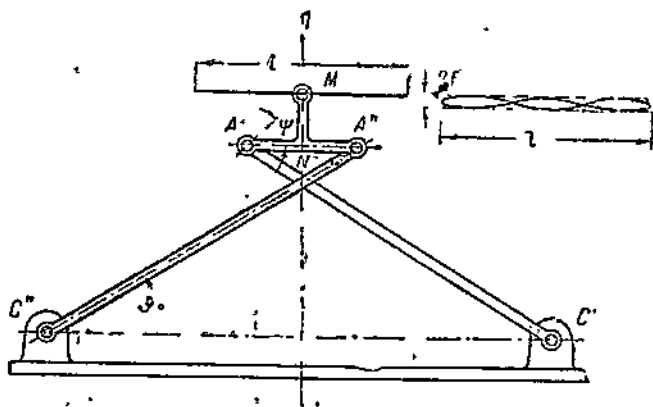
Величина E максимального отклонения от прямолинейности будет равна

$$E = \frac{2 \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos^3 2\psi}}{\sin 3\psi} \quad (87)$$



Фиг. 58

Если же данный механизм рассматривать как частный случай механизма № 21, у которого угол α_1 равен $\frac{\pi}{2}$ ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$), то, воспользовавшись вспомо-



Фиг. 59

гательной величиной t , получим

$$\sin \theta_0 = \frac{-t(t^2 + 2) + \sqrt{2 - t^2}}{2(1 + t^2)}, \quad (88)$$

$$a = \frac{2t\sqrt{2 - t^2}}{1 + t\sqrt{2 - t^2}} \cos \theta_0, \quad (89)$$

$$c = -\frac{(2 - t^2)t}{2(1 + t^2)}, \quad (90)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(3 - t\sqrt{2 - t^2}) \sin \theta_0 + 2(t - \sqrt{2 - t^2})}{(1 + t\sqrt{2 - t^2}) \cos \theta_0}. \quad (91)$$

* См. сноску на стр. 44.

Отклонение E от прямолинейности может быть определено по формуле (59).

Для определения же длины хода l следует определить максимальное значение величины

$$l = -a \left[\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_0 + \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2} (1-\cos \alpha)}{1 - \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2} (1-\cos \alpha)}} - \frac{2c}{a}} \right] \sin \alpha, \quad (92)$$

при α , изменяющемся от 0 до 2π .

Таблицы и графики для рассматриваемого механизма приведены в Приложении № 5.

Глава II

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

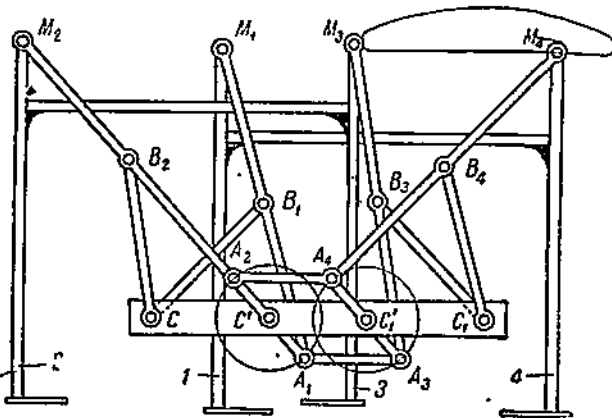
§ 16. „Переступающий механизм“ („Стопоходящая машина“)

(Механизм № 24 — по модели из архива Чебышева)

Помимо своего непосредственного применения в качестве механизмов, осуществляющих движение по прямой линии, симметричные прямолинейно-

направляющие механизмы могут быть использованы и для других целей в силу своеобразия траектории точки M .

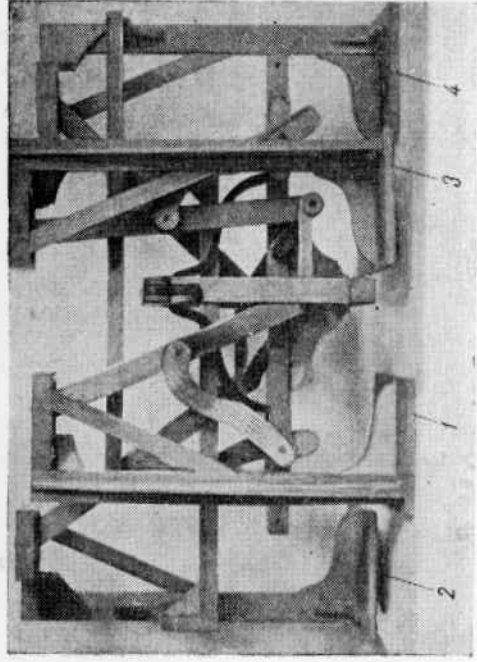
Так, например, в механизме № 22 (фиг. 50) шатунная кривая точки M весьма близко совпадает с траекторией, которую описывает конец ноги идущего человека или животного по отношению к его корпусу, а именно, прямолинейная часть тра-



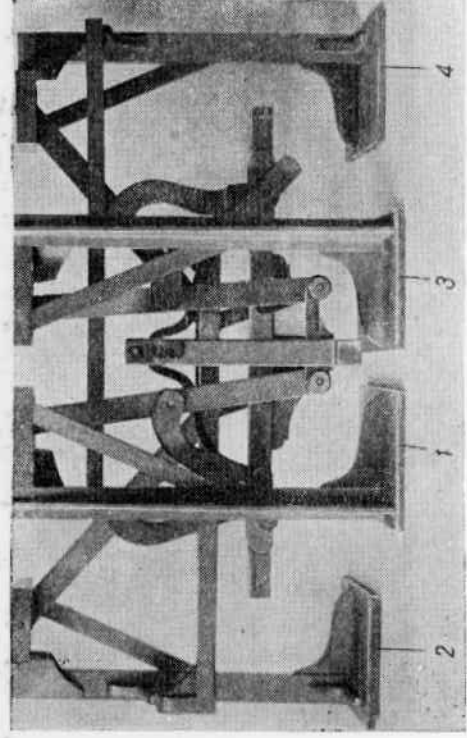
Фиг. 60

ектории точки M соответствует положению конца ноги на земле, остальная же часть траектории — движению конца ноги над землей.

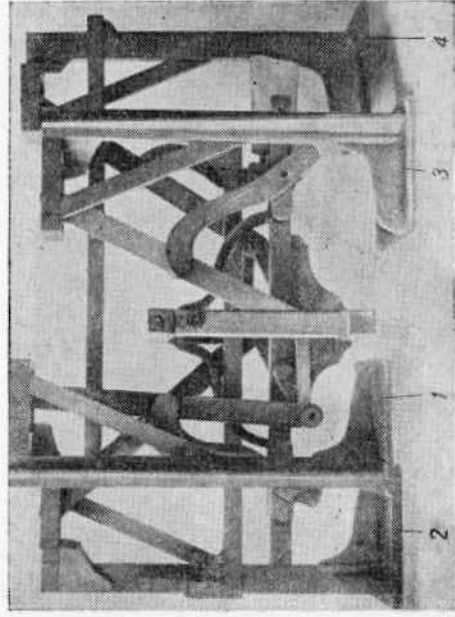
Это свойство механизма и было использовано Чебышевым для построения „переступающего механизма“, или, как его иногда называют, „стопоходящей машины“. Кинематическая схема „переступающего механизма“ дана на фиг. 60.



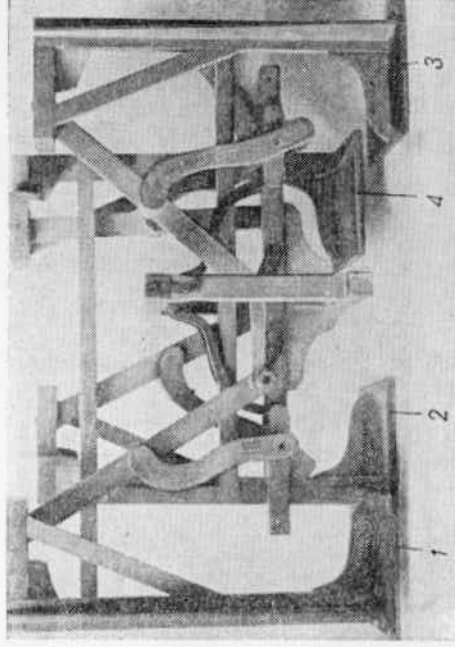
Фиг. 61



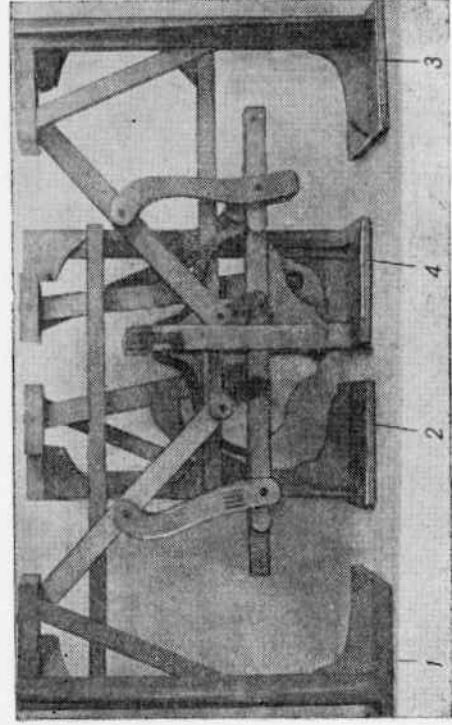
Фиг. 62



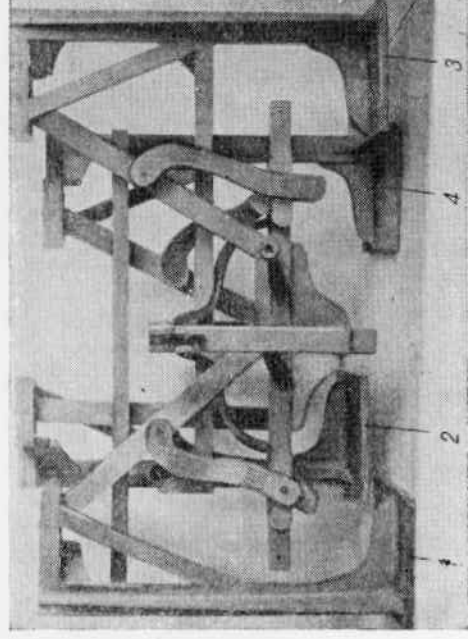
Фиг. 63



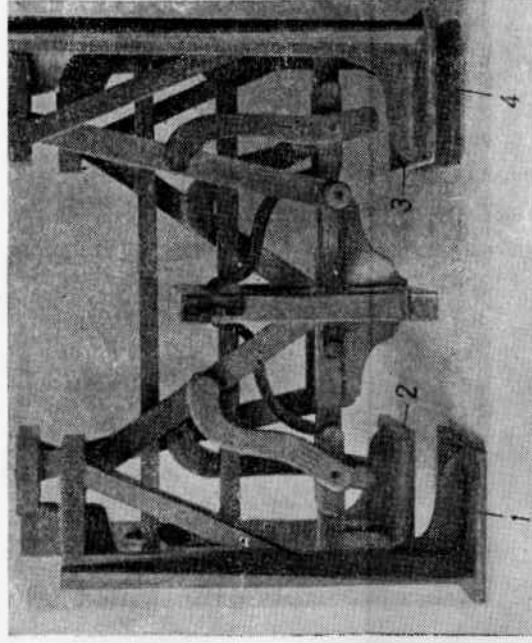
Фиг. 64



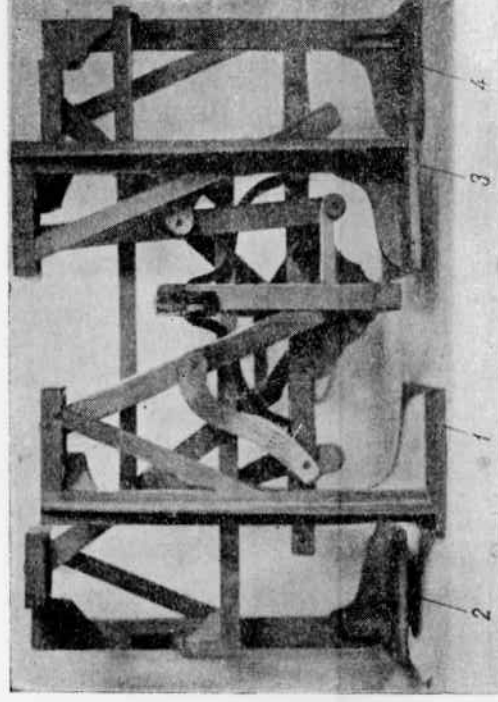
Фиг. 65



Фиг. 66



Фиг. 67



Фиг. 68

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$A_1B_1 = B_1C = B_1M_1 = A_2B_2 = B_2C = B_2M_2 = A_3B_3 = B_3C_1 = B_3M_3 = A_4B_4 = \\ = B_4C_1 = B_4M_4 = 1; \\ A_1C' = A_2C' = A_3C'_1 = A_4C'_1 = 0,355; \quad CC' = C_1C'_1 = 0,785; \quad A_2A_4 = A_1A_3 = \\ = C'C'_1 = 0,634.$$

Переступающий механизм состоит из четырех лямбдообразных прямил, т. е. механизмов № 22, соединенных таким образом, что кривошпы их образуют шарнирный параллелограмм $A_1A_2A_3A_4$ (звено A_1C' жестко соединено со звеном A_2C' , а звено $A_3C'_1$ — со звеном $A_4C'_1$). Точки M_1 и M_4 принадлежат звену, с которым жестко скреплены ноги 1 и 4 механизма, точки M_2 и M_3 принадлежат другому звену, с которым жестко скреплены ноги 2 и 3. На схеме (фиг. 60) показана траектория точки M_4 в ее движении относительно корпуса, т. е. звена $CC'C'_1C_1$.

Если из положения, указанного на схеме (фиг. 60), перемещать корпус $CC'C'_1C_1$ прямолинейно в ту или другую сторону, то, пока точки M_4 и M_1 остаются на прямолинейных участках своих относительных траекторий, ноги 1 и 4 неподвижны, а ноги 2 и 3 перемещаются по направлению движения корпуса. В тот момент, когда точки M_1 и M_4 должны покинуть прямолинейный участок, точки M_2 и M_3 приходят в начало своего прямолинейного участка, так как при выбранных размерах звеньев угол поворота кривошпы, соответствующий перемещению точки M по прямолинейному участку, равен π . При дальнейшем движении корпуса ноги 2 и 3 будут некоторое время оставаться неподвижными, а ноги 1 и 4 начнут перемещаться по направлению движения корпуса, и, таким образом, при непрерывном перемещении корпуса, ноги механизма переступают подобно ногам животного.

На фиг. 61—68 показаны последовательные положения механизма при его движении.

На фиг. 69 приведен фотоснимок, показывающий один из способов применения этого механизма (при ведущем звене — корпусе). За ведущее звено можно принять также и какой-либо из кривошпов.

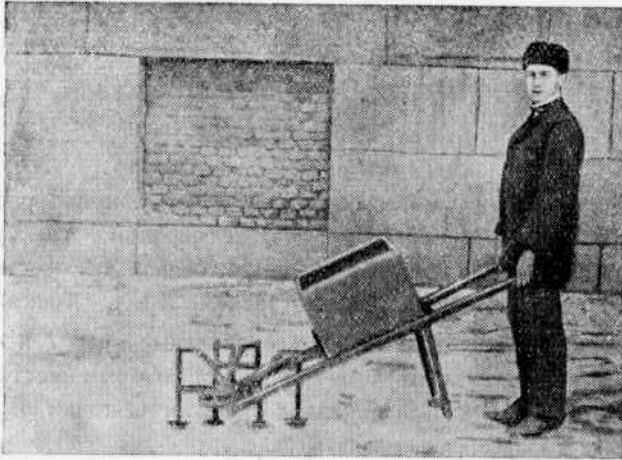
§ 17. Гребной механизм

(Механизм № 25 — по модели из архива Чебышева)

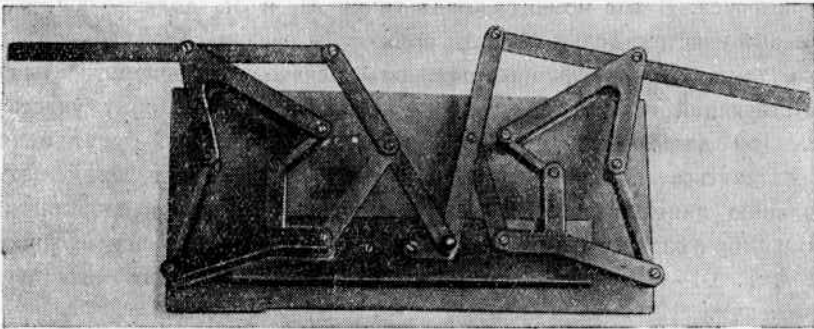
На фиг. 70 приведен фотоснимок модели гребного механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Кинематическая схема этого механизма дана на фиг. 71.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

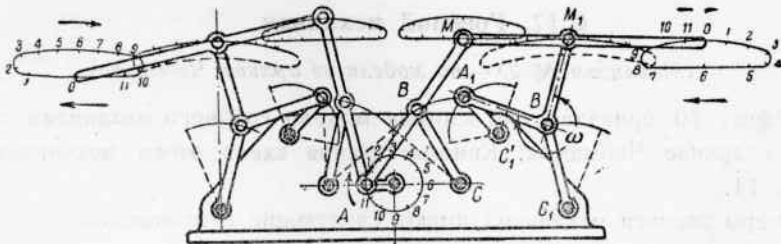
$$AB = BC = BM = A_1B_1 = B_1C_1 = B_1M_1 = 1; \\ AC' = 0,297, \quad CC' = 0,765, \quad A_1C'_1 = 0,528, \quad C_1C'_1 = 1,21; \\ \omega = 270^\circ; \\ MM_1 = 1,275; \quad CC'_1 = 0,74; \quad C'C'_1 = 1,335; \quad CC_1 = 1,3; \quad MK = 1,6;$$



Фиг. 69



Фиг. 70



Фиг. 71

Симметричная часть механизма имеет те же соотношения.

Как видно из схемы (фиг. 71), механизм представляет собой соединение симметричного прямолинейно-направляющего механизма № 22 и симметричного механизма № 1 с траекторией точки M_1 , вида V (см. фиг. 13), которая, однако, на выбранном участке приблизительно прямолинейна. Весло,



Фиг. 72



Фиг. 73

соединенное жестко со звеном MM_1K во время рабочего хода, т. е. на участке 4—8, движется *быстро*, обратный ход — *замедленный*, вход и выход из воды совершаются почти *отвесно* и с *небольшой* скоростью. На фиг. 72, 73, 74 приведены копии фотоснимков (хранящихся в архиве Чебышева), показывающих устройство лодки с гребным механизмом, соответствующим



Фиг. 74

описанной модели. Кривошип в этом устройстве приводится во вращение или непосредственно с помощью рукоятки (фиг. 72), или же посредством качания коромысла дополнительного четырехзвенника (фиг. 73 и 74).

Глава III

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

§ 18. Несимметричный четырехзвенный прямолинейно-направляющий механизм с шатуновой кривой, имеющей с прямой соприкосновение 5-го порядка

(Механизм № 26 — Чебышев П. А., Соч., т. II, стр. 299)

На фиг. 75 приведена кинематическая схема механизма в его среднем положении, при котором касательная к траектории (шатуновой кривой) точки M имеет соприкосновение с ней 5-го порядка.

Если задан шатунный треугольник AA_1M (на фиг. 75 показан пунктиром), то условия, которым должны удовлетворять углы φ и φ_1 , в среднем положении механизма, будут таковы:

$$\varphi = \frac{A + 2\pi}{3} \quad (93)$$

$$\varphi_1 = \frac{A_1 + 2\pi}{3}, \quad (94)$$

где $A = \angle A_1AC$ и $A_1 = \angle AA_1C$, а n принимает значения 0, 1 и 2.

Отношения длин звеньев, AC и A_1C_1 , соответственно к расстояниям AM и A_1M запишутся так:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2(3\varphi + \gamma)}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos^2(\varphi + \gamma)}, \quad (95)$$

$$\frac{A_1C_1}{A_1M} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos^2(\varphi_1 - \gamma)}, \quad (96)$$

где γ — угол наклона линии AA_1 к касательной к траектории точки M в среднем положении механизма.

Значение угла γ может быть определено графическим путем или из соотношения

$$\frac{\operatorname{tg} \left[\frac{3}{2} (\varphi_1 - \varphi) + \gamma \right]}{\operatorname{ctg} \frac{3}{2} (\varphi - \varphi_1)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\varphi + \varphi_1}{2}}. \quad (97)$$

Уравнение [93] дает три значения угла φ

$$\varphi = \frac{A}{3}, \quad \varphi = \frac{A}{3} + 120^\circ, \quad \varphi = \frac{A}{3} + 240^\circ.$$

Уравнение (94) дает три значения угла φ_1

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{A_1}{3} + 120^\circ, \quad \varphi_1 = \frac{A_1}{3} + 240^\circ.$$

Уравнение (97) дает два значения угла γ , отличающихся между собой на величину π .

Следовательно, комбинируя эти значения углов φ , φ_1 и γ , получаем восемнадцать различных решений для заданного шатунного треугольника. Однако не все эти решения практически можно использовать, так как одна из величин AC и A_1C_1 или обе величины могут получиться несоразмерно большими или, наоборот, чрезвычайно малыми (см. Приложение № 6). В число этих решений не входят механизмы, преобразованные по теореме Робертса—Чебышева, так как при этом преобразовании шатунные треугольники получаемых механизмов подобны, но соединяются с другими звеньями различными своими вершинами.

При малой длине хода l отклонение E от прямолинейности может быть вычислено по формуле

$$E = \frac{1}{2048rr_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\frac{\cos(\varphi + \gamma)}{m \cdot s \cdot n \cdot 2 \varphi} \right)^3 \cdot l^3, \quad (98)$$

где $AC = r$, $A_1C_1 = r_1$, $AM = m$.

Указанное выше решение дает наилучшее приближение к прямой в предположении бесконечно малого хода точки M . Как указывает Чебышев, для получения наилучшего приближения к прямой на некотором конечном участке траектории точки M следует, определив параметры механизма по

формулам (93), (94), (95) и (96), изменить их таким образом, чтобы кривая, описываемая точкой M , пересекала прямую FG в точках, абсциссы которых имеют следующие величины:

$$x_0 - \frac{l}{2} \cos 15^\circ, \quad x_0 - \frac{l}{2} \cos 45^\circ, \quad x_0 - \frac{l}{2} \cos 75^\circ, \\ x_0 + \frac{l}{2} \cos 15^\circ, \quad x_0 + \frac{l}{2} \cos 45^\circ, \quad x_0 + \frac{l}{2} \cos 75^\circ,$$

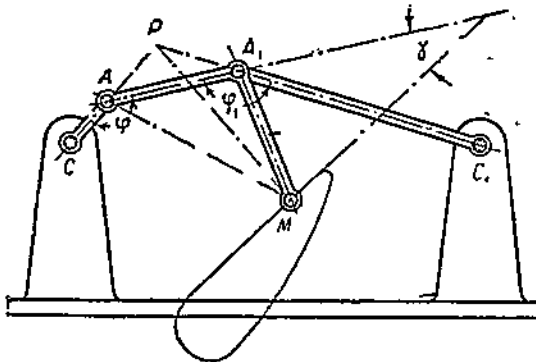
где $x_0 = FM$ — абсцисса точки M в среднем положении механизма, а l — длина приближенно прямолинейного участка траектории точки M .

Эта задача может быть разрешена при помощи метода, изложенного Чебышевым в его мемуаре „Теория механизмов, известных под именем „параллелограммов“.*

Величина E максимального отклонения от прямолинейности при этом будет равна

$$E = \frac{1}{65\,586\,r r_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\frac{\cos(\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 \cdot l^6. \quad (99)$$

Следует заметить, что, и не производя указанных изменений в параметрах механизма, мы получаем практически весьма малое отклонение от прямолинейности на значительном



Фиг. 75

участке траектории точки M , так как соприкосновение с прямой в данном механизме является соприкосновением 5-го порядка.

Симметричный прямолинейно-направляющий механизм в случае бесконечно малого хода точки M , т. е. при $l=0$, является частным случаем данного механизма.

Действительно, если в шатунном треугольнике AA_1M (фиг. 75) $AM = A_1M$, то возможных решений будет девять, и из девяти получаемых прямолинейно-направляющих механизмов различных модификаций три будут симметричными.

§ 19. Несимметричный четырехзвеновый прямолинейно-направляющий механизм с шатуновой кривой, имеющей с прямой соприкосновение 4-го порядка

(Механизм № 27 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 360)

Определение параметров механизма, при которых траектория одной из его точек имеет с прямой соприкосновение 4-го порядка, сводится к решению нескольких уравнений 1-й степени и одного квадратного уравнения.

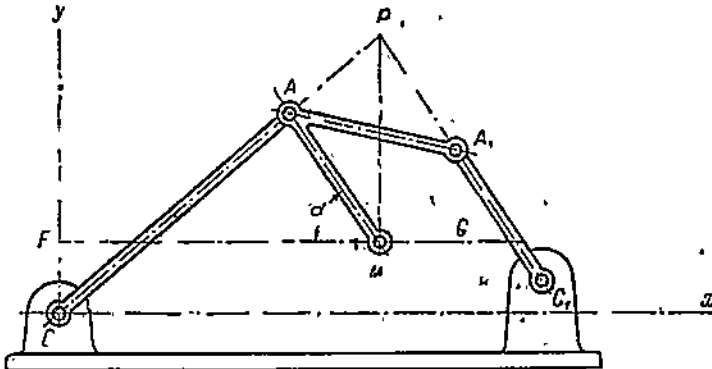
На фиг. 76 показана кинематическая схема механизма № 27 в среднем

* Чебышев П. Л., Соч., т. I, стр. 109—143, СПб., 1899.

его положении, т. е. когда точка M находится на прямой FG , имеющей с траекторией точки M соприкосновение 4-го порядка.

Если начало координат выбрать в точке C (фиг. 76), ось $x-x$ — параллельной прямой FG , величины $AC=r$, $AM=m$, $FC=b$, $\sin \alpha=d$ считать заданными, то для полного определения всех параметров механизма остается найти величины $AA_1=a$ и координаты x и y центра C_1 .

Решение это может быть получено в следующем порядке.



Фиг. 76

Сначала определяем вспомогательные величины g и h из уравнений

$$g = \frac{(1-d^2)m(md+b)}{r^2-(md+b)^2} - d, \quad (100)$$

$$h = \frac{(1-d^2)mr}{r^2-(md+b)^2}. \quad (101)$$

Потом определяем вспомогательные величины $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \lambda, \mu$, решая следующую систему из семи уравнений 1-й степени:

$$p_0 = gh^3 + h^2\lambda + (h^2-1)g\mu, \quad (102)$$

$$p_1 = 4h^2g^2 + h^4 + 4h^2g\lambda + [4h^2g^2 + (h^2-1)^2]\mu, \quad (103)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(4g^2 + h^2 - 1)h^2 - (2h^2 - 1)g\lambda - \frac{1}{2}(4g^2 + h^2 - 3)h^2\mu, \quad (104)$$

$$p_3 = (h^2 + 1)g + (h^2 - 1)\lambda + h^2g\mu, \quad (105)$$

$$p_4 = 4h^2g^2 + h^4 - 1 + 4gh^2\lambda + (4g^2 + h^2 - 2)h^2\mu, \quad (106)$$

$$(\lambda-d)\sqrt{h^2-(g+d)^2} = (p_1d-p_0)\sqrt{1-d^2}, \quad (107)$$

$$\mu\sqrt{1-d^2}\sqrt{h^2-(g+d)^2} = -p_2 + p_3d - p_4d^2. \quad (108)$$

Далее определяем вспомогательные величины N_1 и N_2 из уравнений

$$N_1 = \frac{r(p_1-p_0d)\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{(1-d)\lambda h\sqrt{1-d^2}}, \quad (109)$$

$$N_2 = \frac{r[2p_2d-p_3(1+d^2)+2p_4d]\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{1-d\lambda h\sqrt{1-d^2}}. \quad (110)$$

Затем определяем угол $A = \angle MAA_1$ из уравнения

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda-d}{\mu\sqrt{1-d^2}}. \quad (111)$$

Координаты x и y неподвижного центра C_1 и величина a определяются из следующих трех уравнений:

$$x_1^2 - \frac{(N_1 - m) \cos A + N_2 \sin A}{f} x_1 - \frac{(f b \sin A - N_2) m}{f^2} = 0, \quad (112)$$

$$\frac{a}{x} = f, \quad (113)$$

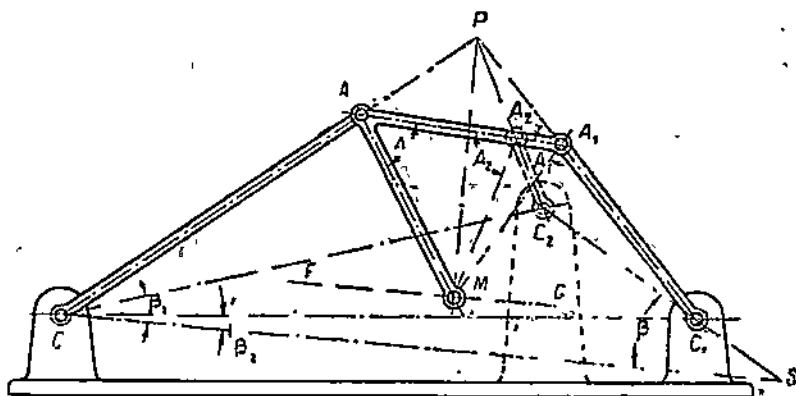
$$y_1 = b - \operatorname{ctg} A x_1 - \frac{N_1}{f \sin A}. \quad (114)$$

Если уравнения (112) — (114) не имеют действительных корней, то при заданных величинах d , r , m и b задача не может иметь решения.

§ 20. Прямолинейно-направляющий механизм, преобразованный по Чебышеву

(Механизм № 28 — Чебышев П. Л., т. II, стр. 367)

На фиг. 77 приведена кинематическая схема некоторого прямолинейно-направляющего механизма в *среднем* его положении, т. е. когда точка M лежит на прямой FG , с которой шатунная кривая, описываемая точкой M , имеет несколько общих точек.



Фиг. 77

Чебышев показал, что можно получить два других четырехзвенных прямолинейно-направляющих механизма CAA_2C_2 и $C_2A_2A_1C_1$ (фиг. 77), если заменить шатунный треугольник AA_1M (на фиг. 77 показан пунктиром) треугольниками AA_2M или A_2A_1M . При этом должны быть выполнены следующие условия:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - A, \quad (115)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - A_1, \quad (116)$$

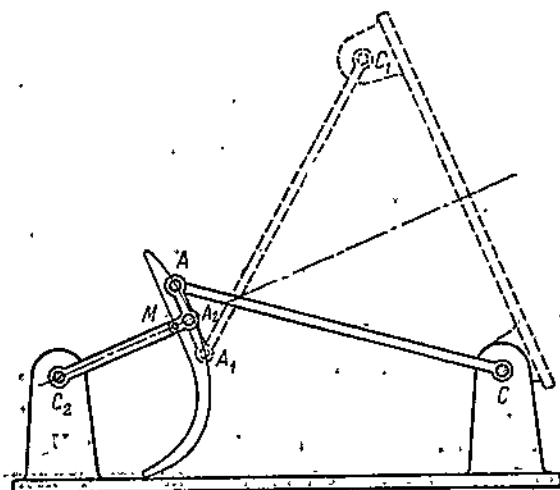
$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - A_2. \quad (117)$$

При такой замене траектории точки M будут *различными* для указанных, трех механизмов, но *число точек*, в которых кривая, описываемая точкой M , пересекает прямую FG , и места точек пересечения *не изменятся*.

Например, если точка M исходного механизма имеет с прямой FG соприкосновение 5-го порядка, то в преобразованных механизмах точка M с этой прямой также будет иметь соприкосновение 5-го порядка.

На фиг. 78 показана кинематическая схема прямолинейно-направляющего механизма, преобразованного из симметричного механизма № 21 (см. фиг. 48).

В результате преобразования получен несимметричный прямолинейно-направляющий механизм, который, однако, имеет приближенно прямолинейный участок той же длины, что и в симметричном механизме. В силу симметрии второе решение совпадает для данного случая с указанным.



Фиг. 78

Для механизма № 22 (фиг. 50), т. е. для симметричного прямолинейно-направляющего механизма с чертящей точкой, расположенной на линии шатуна, данное построение не выполнимо, так как точка C_2 (фиг. 78) уходит в бесконечность.

Глава IV

МНОГОВЕННЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

§ 21. Шестизвальный прямолинейно-направляющий механизм, получаемый из полного параллелограмма Уатта

(Механизм № 29 — Чебышев П. Л., Соч., т. 1, стр. 531)

Кинематическая схема механизма дана на фиг. 79. Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = 1; BD = EG = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; CF = FG = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; BC = DE \approx \frac{l}{2};$$

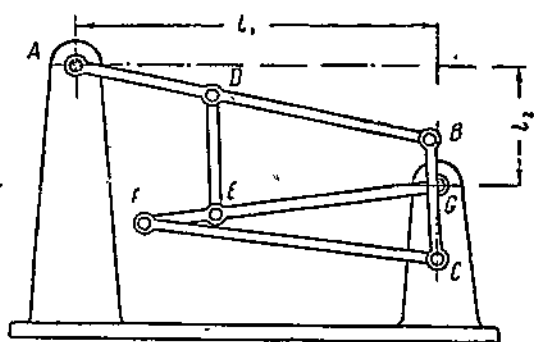
где l — длина хода точки C и $l_1 = 1, l_2 = BC$.

Указанное видоизменение полного параллелограмма Уатта повышает порядок приближения траектории точки к прямой, а именно: если в обычном полном параллелограмме Уатта траектория точки C имеет не более пяти общих точек с прямой, то в данном механизме эта траектория имеет вблизи точки касания с вертикалью, проходящей через точку G , семь общих элементов, что приводит к уменьшению максимального отклонения от прямолинейности.

Например, при

$$AB = 2,515 \text{ м}; BC = 0,762 \text{ м} \text{ и } \alpha = 17^\circ 35' 30''$$

(α —предельный угол наклона коромысла AB) максимальное отклонение траектории точки C от прямой в данном механизме менее 0,5 мм. В обычном же параллелограмме Уатта при тех же условиях отклонение 2 мм, т. е. в 40 раз больше.



Фиг. 79

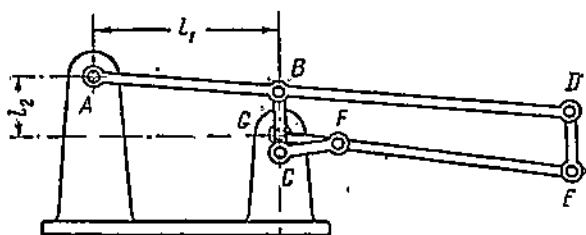
Кроме того, максимальное отклонение от прямолинейности может быть еще уменьшено приблизительно в 128 раз, если внести в величины параметров механизма некоторые поправки, определяемые при помощи метода, указанного Чебышевым в мемуаре „Теория механизмов, известных под именем параллелограмов“.*

Однако, как указывает Чебышев, практически в этом нет необходимости, так как техника изготовления механизмов не дает возможности реализовать столь высокую точность механизма.

Второй вариант механизма № 29 получается, если относительные размеры звеньев принять следующими:

$$AB=1, CF=FG=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$BD=EG=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, BC=DE \approx \frac{l}{2}, l_1=1, l_2=BC,$$



Фиг. 80

где l —длина хода точки C .

Кинематическая схема механизма с указанными параметрами дана на фиг. 80. Точность механизма при этом остается прежней, но конструкция его получается весьма неудобной, что и было отмечено самим Чебышевым.

§ 22. Шестизвённый прямолинейно-направляющий механизм, точный до 6-й степени

(Механизм № 30—Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 89)

Кинематическая схема механизма дана на фиг. 81. Относительные размеры звеньев механизма определяются из следующих соотношений (см. приложение № 7):

$$BC=1, CF=f, BF=h,$$

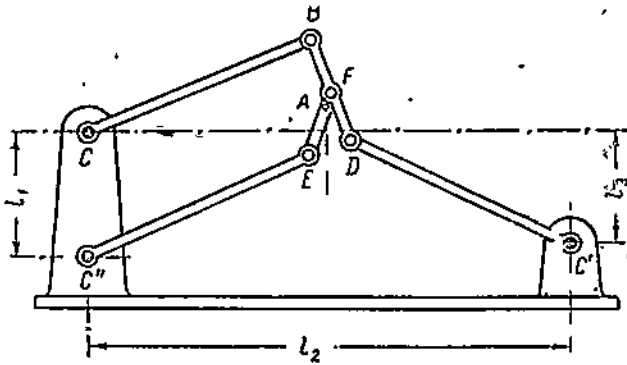
$$ED=\frac{(1-f)f^2}{1-2f^2}, CD=\frac{(1-f)(1-f^2)}{1-2f^2}, EC'=\frac{(1-f)^2(1+f)}{1-f-f^2}h,$$

* Чебышев П. Л., Соч., т. I, стр. 109, СПб., 1899.

§ 24. Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, получаемый из сокращенного параллелограмма Уатта

(Механизм № 32 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 91)

Кинематическая схема механизма приведена на фиг. 83. Относительные размеры звеньев механизма определяются из следующих соотношений:



Фиг. 83.

$$AF = \frac{BF^2 - DF^2}{4FD},$$

$$AE = \frac{(BF - DF)^2}{4FD},$$

$$EC'' = CB,$$

$$l_1 = BF + AF + AE,$$

$$l_2 = CB + C'D.$$

Если к обычному сокращенному параллелограмму Уатта присоединить к точке F , которая движется приблизительно прямолинейно, двухповодковую

группу с указанными размерами, то точка A , лежащая на звене FE , будет осуществлять прямолинейное движение с точностью уже более высокого порядка, чем исходный механизм, а именно с точностью до 8-й степени.

§ 25. Многозвенные прямолинейно-направляющие механизмы с лямбдообразными группами

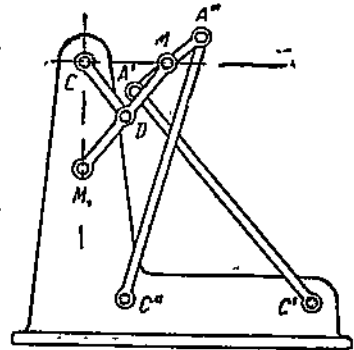
(Механизм № 33 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 93)

Двухповодковую группу, образованную звеньями MM_1 и CD (фиг. 84), размеры звеньев которой удовлетворяют условиям

$$CD = DM = DM_1,$$

условимся называть лямбдообразной группой.

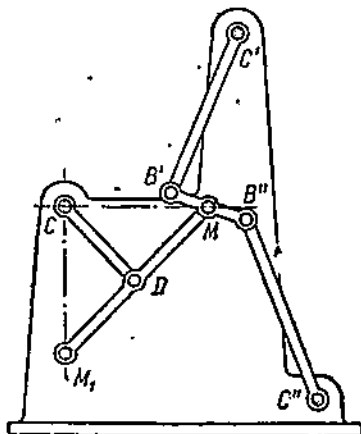
Если к какому-либо прямолинейно-направляющему механизму, точному до λ -степени, присоединить лямбдообразную группу так, чтобы точка M была соединена с точкой механизма, осуществляющей приблизительно прямолинейное движение, а точки M_1 и C совпадали в среднем положении механизма, то, как это доказано Чебышевым, траектория точки M_1 будет приближена к прямой уже с точностью до $(2\lambda + 1)$ степени.



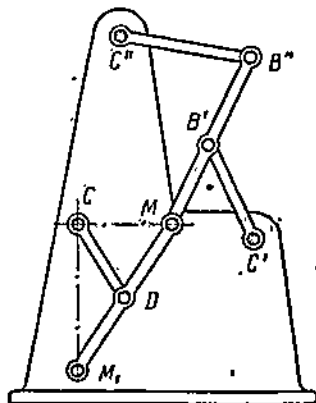
Фиг. 84

На фиг. 84 показан шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, имеющий в своей основе симметричный механизм № 22 (механизм $C'A'A''C''$). Так как симметричный механизм № 22 осуществляет прямолиней-

ное движение с точностью до 6-й степени, то механизм с присоединенной лям дообразной группой CDM будет осуществлять прямолинейное движение с точностью уже до 13-й степени. Присоединив в точке M_1 следующую лямбдообразную группу, мы получили бы восьмизвенный механизм, точный до 27-й степени, и т. д. Однако само собой разумеется, что *практическая* точность механизма с увеличением количества звеньев будет падать.



Фиг. 85



Фиг. 86

На фиг. 85 показано аналогичное образование шестизвенного прямолинейно-направляющего механизма, точного до 11-й степени из *сокращенного* параллелограмма Уатта, на фиг. 86 — образование шестизвенного прямолинейно-направляющего механизма, точного также до 11-й степени, из механизма типа Эванса.

§ 26. Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, дающий приближение всей шатунной кривой к прямой

(Механизм № 34 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 95)

Данный механизм (фиг. 87) образован из симметричного прямолинейно-направляющего механизма № 22 путем присоединения добавочной лямбдообразной группы. Звено CD делает полный оборот. Траектория точки M_1 приближена к прямой на всем ее протяжении, если выполнены следующие условия:

$$A'C' = A''C'' = 1, \quad A'M = MA'',$$

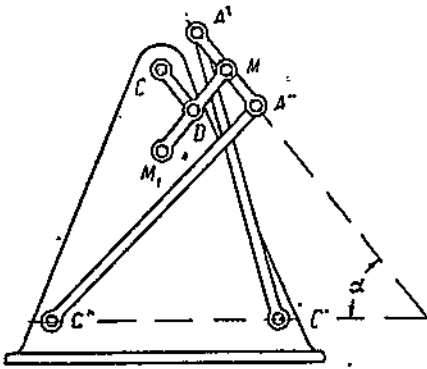
$$A'A'' = a = \frac{1}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}, \quad (118)$$

где σ есть \sin -versus угла α в крайних положениях звена $A'A''$.

Далее,

$$C'C'' = b = a(1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}), \quad (119)$$

$$DC = DM = DM_1 = \frac{1}{4}l, \quad (120)$$



Фиг. 87

Максимальное отклонение E траектории точки M_1 от прямолинейности будет равно:

$$E = \frac{\sigma^2}{128} \sqrt{M}; \quad (124)$$

как указывает Чебышев, M есть наибольшая величина, которой достигают дроби

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s)^2 \left[\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right] (2 - s)} \quad (125)$$

и

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda (\mu + s) \left[\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right]^2 (2 - s)} \quad (126)$$

при изменении величины s в пределах

$$0 < s < \sigma.$$

27. Некоторые выводы по теории прямолинейно-направляющих механизмов Чебышева

Подведем некоторые итоги проведенного анализа прямолинейно-направляющих механизмов Чебышева.

Анализ этих механизмов показывает, что при их синтезе Чебышев в основном преследует цель получения достаточно точного прямолинейного движения, могущего быть использованным в некоторых важных для того времени технических задачах. Здесь на первом месте стоит задача о передаче возвратно-поступательного движения поршня парового двигателя к валу приводимой им в движение рабочей машины. В то время эта передача движения осуществлялась механизмами без поступательных пар, т. е. шарнирными механизмами. Так как простейшим шарнирным механизмом является шарнирный четырехзвенник, то естественным было стремление решать эту задачу с помощью именно этого механизма,

Как известно, движение по отрезку прямой какой-либо точки шатуна этого механизма может быть осуществлено с точностью до шестой степени. Чебышев, изучив существовавшие в его время механизмы, дает полное решение задачи синтеза такого шарнирного четырехзвенника, у которого одна из точек шатуна описывает траекторию, близкую к прямой; им рассмотрены многообразные модификации этого механизма, которыми указанное движение может быть осуществлено.

Не останавливаясь только на механизме шарнирного *четырёхзвенника*, Чебышев решает задачу, связанную с улучшением механизма Уатта, бывшего долгое время основным механизмом, используемым в конструкциях паровых двигателей.

Наконец, им принципиально разрешается задача об увеличении порядка приближения шатунной кривой к прямой линии путем дополнительного присоединения к механизму лямбдаобразных групп. Таким образом, задача о воспроизведении приближенно прямолинейного движения шарнирными механизмами Чебышевым решается исключительно подробно и глубоко.

В настоящее время шарнирные приближенно прямолинейно-направляющие механизмы не применяются для тех задач, которые они выполняли во времена Чебышева, однако применение их все же имеет место в целом ряде приборов и специальных устройств. Поэтому эти механизмы не потеряли своей ценности и для современного машиностроения и могут быть широко используются в наиболее тонком машиностроении — приборостроении. Как показывают наши исследования и исследования З. Ш. Блоха*, например, механизм № 22 дает возможность получения достаточно равномерного перемещения точки, двигающейся приближенно прямолинейно, что имеет весьма важное значение для получения достаточно равномерных шкал регистрирующих механизмов-приборов. Несомненно, что внимательный анализ и других механизмов Чебышева позволит выявить в них аналогичные или другие свойства, важные для техники приборостроения.

Кроме указанных выше применений рассмотренных механизмов в различных конструкциях, Чебышев создает два оригинальных сложных механизма: „переступающий механизм“ и гребной механизм (механизмы № 24 и 25). Эти механизмы, выполненные им в виде довольно значительных по размерам моделей, использовались Чебышевым в практических целях. Механизмы эти, правда, не имеют пока большого практического значения, их скорее следует отнести к разряду остроумных „игрушек“, над созданием которых, как это известно из истории техники, часто трудились величайшие представители науки и техники.

Если нам зададут вопрос: а не является ли создание таких „игрушек“ забавой и развлечением ученого в часы его досуга?, то на это мы можем ответить только вопросом: а разве не от замечательных игрушек Анри Древедут свою родословную современные сложнейшие машины-автоматы или

* См. Приложение № 3 и статью З. Ш. Блоха в настоящей сборнике.

разве не эллипс Герона Александрийского явился прототипом современных реактивных двигателей?

В этих „игрушках“, наравне со всеми остальными механизмами Чебышева мы видим реальные воплощения исключительной технической интуиции Чебышева.

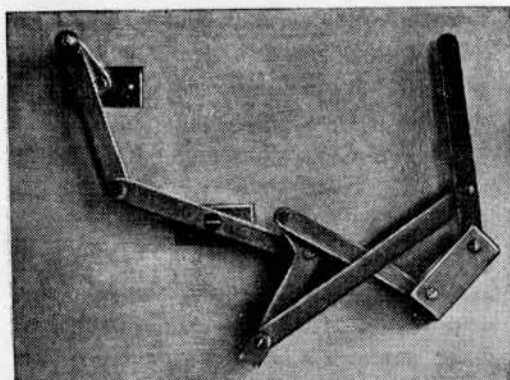
Часть третья

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И ПРИСПОСОБЛЕНИЯ

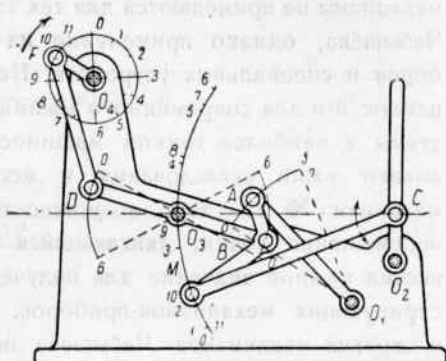
§ 28. Несимметричный круговой направляющий механизм

(Механизм № 35 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 88 приведен фотоснимок модели несимметричного кругового направляющего механизма, хранившейся в архиве Чебышева. Кинематическая схема этой модели показана на фиг. 89.



Фиг. 88



Фиг. 89

Звенья механизма имеют следующие относительные размеры:

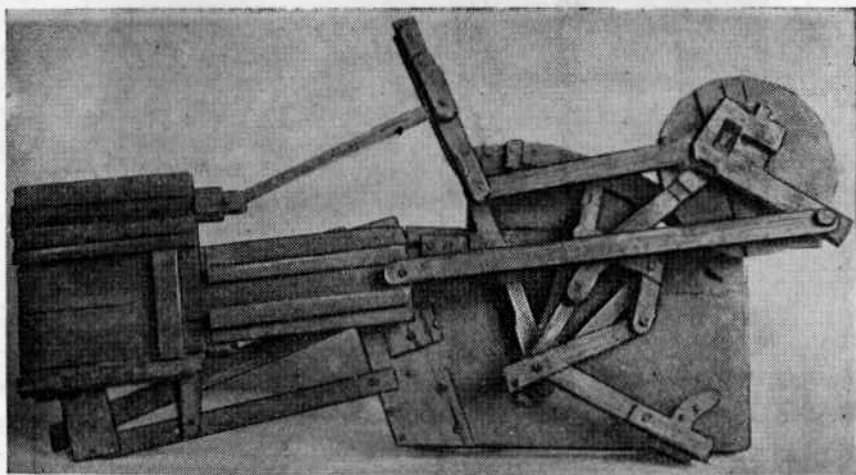
$$\begin{aligned} O_3B = O_3D = 1; \quad O_1A = 1,55; \\ AB = 0,418; \quad O_1O_3 = 2,18; \quad BM = 0,983; \quad AM = 1,23; \\ CM = 2,46; \quad CO_2 = 0,526; \\ O_1O_2 = 0,608; \quad O_3O_2 = 2,51; \\ FD = 1,51; \quad O_4F = 0,92; \quad O_4O_3 = 1,795; \quad O_4O_1 = 3,82. \end{aligned}$$

При указанных размерах звеньев точка M механизма на всем протяжении описывает траекторию, мало отличающуюся от дуги окружности. Радиус этой окружности равен длине звена MC , а центр вращения совпадает с положением точки C . Вследствие этого звено O_2C неподвижно во все время движения кривошипа O_4F .

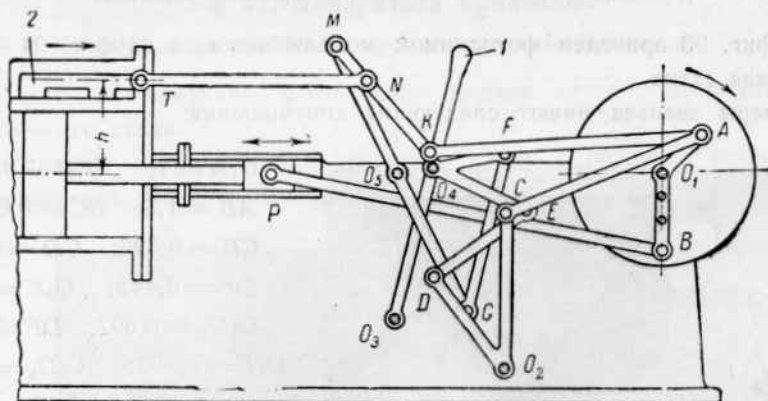
§ 29. Кулисный механизм паровой машины

(Механизм № 36 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 90 приведен фотоснимок черного проекта модели этого механизма, сохранившейся в архиве Чебышева, а на фиг. 91 — кинематическая схема.



Фиг. 90

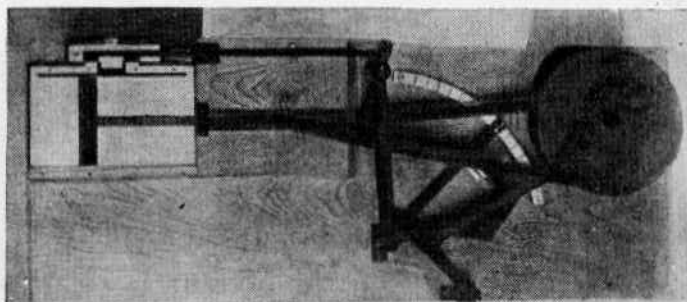


Фиг. 91

Звенья, определенные нами по этому черновому проекту, имеют следующие относительные размеры:

$$\begin{aligned}
 O_1B &= 1; & PB &= 5,38; & O_1A &= 0,755; & AC &= 2,82; \\
 EO_2 &= 2,08; & O_2D &= 1,58; & DC &= 1,29; & DF &= 1,54; \\
 O_4E &= 1,36; & O_4F &= 1,03; & EF &= 0,78; & FG &= 2,19; \\
 GO_5 &= 2,08; & MO_5 &= MK = 1,89; & MN &= 0,62; & AK &= 3,7; \\
 MT &= 3,09; & h &= 1,27; & O_1O_2 &= 3,38; & O_1O_5 &= 3,56; \\
 O_1O_3 &= 3,95; & O_5O_3 &= 1,94; & O_5O_2 &= 3,04; & O_3O_4 &= 2,09.
 \end{aligned}$$

Центр O_4 укреплен на рычаге 1 (фиг. 91), который может быть устанавливаем в различных положениях. При этом изменяется траектория точки N и, следовательно, характер движения золотника 2. На схеме рычаг 1 показан в крайнем левом положении, при котором длина хода золотника 2 наибольшая.



Фиг. 92

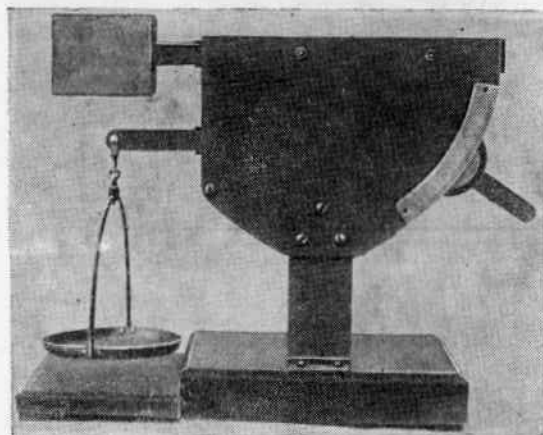
На фиг. 92 приведена копия фотоснимка другой модели этого же механизма; к сожалению, сама модель, повидимому, не сохранилась.

§ 30. Весы

(Механизм № 37 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 93 приведен фотоснимок модели весов, а на фиг. 94 — кинематическая схема.

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:



Фиг. 93

$$\begin{aligned} O_1A &= 1; & O_1B &= 0,692; \\ AB &= 1,5; & BC &= 0,693; \\ CE &= 0,626; & CD &= 0,353; \\ DF &= 0,442; & O_3E &= 0,941; \\ O_1O_3 &= 0,692; & DF &= 0,98; \\ O_2F &= 0,892; & O_2O_3 &= 0,892; \\ O_1O_2 &= 1,42. \end{aligned}$$

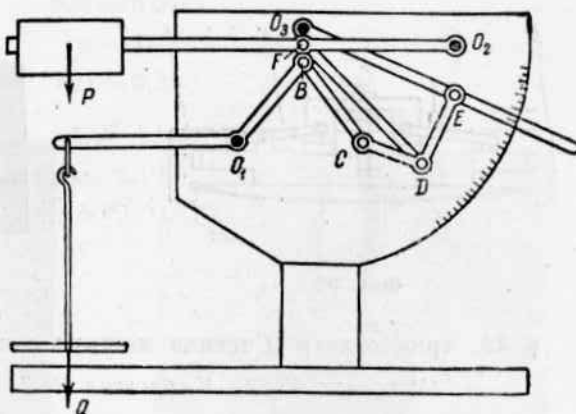
При указанных размерах звеньев точки O_3 , F и B почти совпадают. На схеме же (фиг. 94) эти точки условно раздвинуты, чтобы показать характер соединений звеньев.

Механизм представляет собой шарнирный семизвенник. На звено O_1A действует сила тяжести взвешиваемого груза Q , а на звено O_2F сила тяжести груза P .

Как видно из схемы, механизм имеет две степени свободы, т. е. для определения положений всех звеньев механизма следует задаваться двумя независимыми условиями. В данном случае такими условиями являются: 1) условие равновесия системы под действием сил P и Q и 2) условие горизонтальности звена O_3F в положении равновесия. Оба условия удовлетворяются при некотором положении звена O_3E , причем это положение, очевидно, изменяется с изменением величины взвешиваемого груза.

Рычаг O_3E снабжен установочным приспособлением и нониусом, а на корпусе весов укреплена шкала, которая может быть градуирована непосредственно в килограммах.

Груз P выполнен сменным. Каждой величине груза P должна соответствовать особая градуировка шкалы. При принятых относительных размерах звеньев эти шкалы *приблизленно равномерные*.



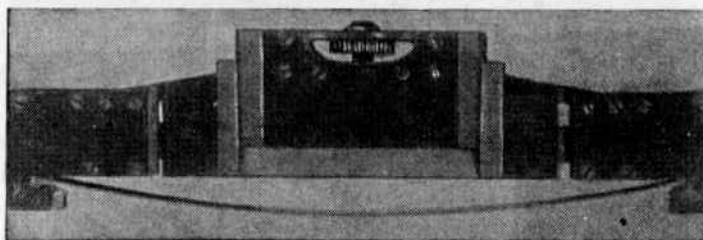
Фиг. 94

§ 31. Измеритель кривизны

(Механизм № 38 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 95 приведен фотоснимок модели этого устройства, а на фиг. 96 — его схема.

Как следует из схемы, при вращении винта 1 ползун 2 перемещается в направляющих корпуса 3, а ползуну 5 сближаются или удаляются друг

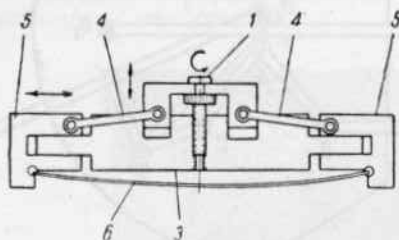


Фиг. 95

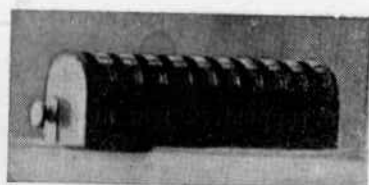
от друга, что вызывает больший или меньший прогиб упругой пластинки 6.

Так как при малых величинах прогиба упругая линия пластинки в данных условиях мало отличается от дуги окружности, то это приспособление может быть использовано как для измерения кривизны, так и для черчения дуг окружностей больших радиусов.

Величина прогиба, а следовательно, и величина радиуса кривизны измеряемой кривой определяются по перемещению ползуна 2. С этой целью ползун 2 снабжен нониусом, а корпус 3 имеет шкалу.



Фиг. 96



Фиг. 97

§ 32. Арифмометр (Счетная машина с непрерывным движением)

(Механизм № 39 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 721)

На фиг. 97 приведен фотоснимок арифмометра. Этот экземпляр арифмометра хранится в Conservatoire des Arts et Métiers в Париже. Кроме этого сохранился один из ранних экземпляров арифмометра, обнаруженный нами среди других архивных материалов.

Во времена Чебышева счетные машины с прерывным изменением цифр суммы обладали еще значительными конструктивными недостатками (арифмометр Однера появился позднее), и это, очевидно, побудило Чебышева к созданию счетной машины с непрерывным движением. Если в машинах с прерывным изменением сумм цифр колесо высшего разряда продвигается сразу на одно деление, когда колесо низшего разряда переходит с 9 на 0, то при непрерывной передаче соседнее колесо постепенно поворачивается на одно деление, пока младшее совершает полный оборот. В модели Чебышева эта непрерывная передача цифр суммы достигается применением планетарной передачи.

§ 33. Центробежный регулятор

(Механизм № 40 — Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 107)

На фиг. 98 и 99 даны копии фотоснимков центробежных регуляторов типа Уатта, изготовленных по указанию Чебышева.

В мемуаре «О центробежном уравниателе»* Чебышев излагает метод определения основных размеров этих регуляторов при условии получения наилучшего изохронизма. Модели, изображенные на фиг. 99 и 100, и были построены по размерам, определенным при помощи указанного метода.

§ 34. Механизм с изменяемым ходом

(Механизм № 41 — по модели из архива Чебышева)

На фиг. 100 приведен фотоснимок модели или, точнее сказать, чернового проекта ее, выполненного собственноручно Чебышевым. На фиг. 101 дана кинематическая схема этой модели.

* Чебышев П. Л. Соч., т. II, стр. 107—121, СПб., 1907.

Звенья механизма удовлетворяют следующим соотношениям:

$$AB = BC = BM = QC' = 1; \quad AC' = r = 0,246; \quad CC' = d = \text{variable};$$

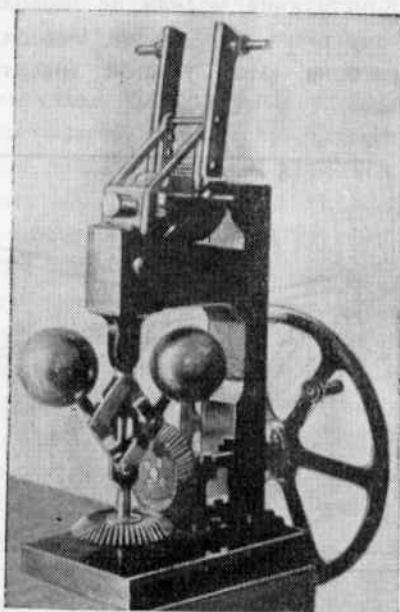
$$AM = 0,246;$$

$$\omega = 14^\circ;$$

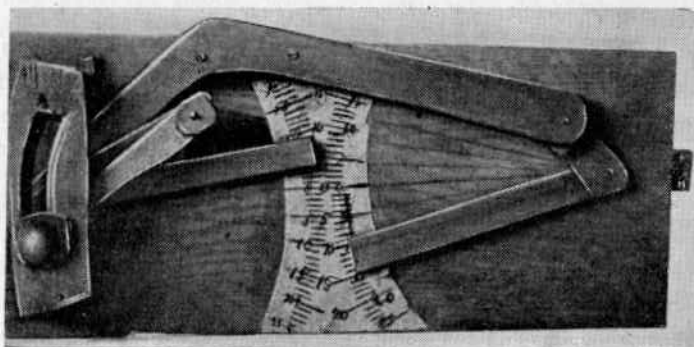
$$MD = 2,82; \quad FD = 0,376, \quad C'F = 2,84.$$



Фиг. 98



Фиг. 99



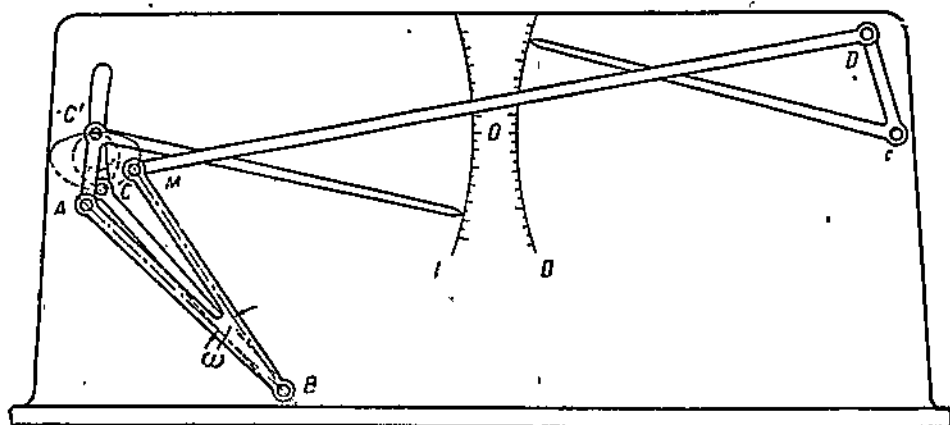
Фиг. 100

Механизм состоит из симметричного механизма $C'ABC$ и присоединенной к нему двухповодковой группы MDF . Центр C может быть переставляем по дуге окружности, описанной из центра O , т. е. величина $CC' = d$ сделана *переменной*, что дает возможность получать различные по виду траектории точки M . При этом будет меняться также и соотношение между

углами поворота звеньев AC' и DF . Так как звенья AC' и DF соединены жестко с указателями, движущимися по градуированным шкалам I и II , то эти углы поворота и изменение их соотношений могут быть показаны на модели весьма наглядно.

На схеме центр C показан в *крайнем правом* положении, при котором полная траектория точки M имеет *петлеобразную* форму, что может иметь место при $r > d$ и малом угле ω .

Конструкция модели не позволяет звену AC' сделать *полный* оборот, поэтому точка M в данной модели описывает только некоторую часть ее траектории (этот участок траектории на фиг. 101 показан *сплошной* линией).



Фиг. 101

При уменьшении расстояния CC' угол поворота ведомого звена DF уменьшается и, наконец, становится равным нулю, когда точка C' совпадает с точкой C .

Данная модель и наличие на ней большого количества карандашных пометок, соответствующих различным углам поворота стрелок при различных положениях точки C' , с наглядностью показывают, что Чебышев при подборе размеров звеньев механизма и изучении свойств траекторий, описываемых отдельными его точками, не чуждался эксперимента, а создавал свои оригинальные экспериментальные установки и вел кропотливые опыты, сочетая их с теоретической разработкой поставленных задач.

Заключение

Как показывает анализ всех материалов, относящихся к работам Чебышева, настоящим исследованием охвачены почти все основные механизмы Чебышева. В истории развития наук о механизмах нельзя назвать ни одного имени ученого, творчеству которого принадлежало бы такое большое количество замечательных по своим свойствам механизмов. Создание подобных механизмов под силу только таким высоко одаренным ученым, каким был Чебышев.

Еще десятилетия будут ученые и инженеры продолжать работать над освоением наследства, оставленного Чебышевым в области синтеза механизмов, с изумлением наблюдая за поразительными формами движения, осуществляемыми его механизмами.

Что же является наиболее характерным для творчества Чебышева в области теории механизмов?

Для творчества Чебышева чрезвычайно характерным является, во-первых, теснейшая связь разрабатываемых им теоретических проблем с конкретными задачами техники, в которой он был подлинным новатором. Вот что пишет по этому поводу сам Чебышев:

„Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее; она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых методов, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике“.*

Далее, для творчества Чебышева характерна ясность постановки задачи и исключительная простота ее разрешения.

Можно утверждать, что нигде так ясно, как у самого Чебышева, не изложены, например, основы созданной им теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Эта простота и ясность изложения своих идей является свойством, присущим только классикам естествознания, к которым, несомненно, принадлежит и Чебышев.

Указанные качества работ Чебышева вытекают из следующего характерного для его творчества свойства. Чебышев — непревзойденный мастер постановки и разрешения конкретных задач синтеза механизмов. Он не ищет и не дает обобщений в теории синтеза механизмов, но, ставя перед собой и разрешая ту или иную конкретную задачу, доводит до исключительной тонкости ее аналитическую обработку.

Для всего творчества Чебышева характерна также его самобытность в постановке и разрешении задач, столь свойственная всей нашей русской науке. В работах Чебышева по теории механизмов мы не находим влияния каких-либо иностранных школ, направлений или отдельных ученых. Он, как Н. И. Лобачевский в геометрии, стоял настолько выше своих современников, что не мог быть ими полностью понят, и только теперь, когда развитие науки о механизмах вплотную подошло к решению проблем синтеза механизмов, мы можем по достоинству оценить гениальность его научного творчества.

* Чебышев П. Л., Черчение географических карт, Соч., т. I, стр. 237—247, СПб., 1899.

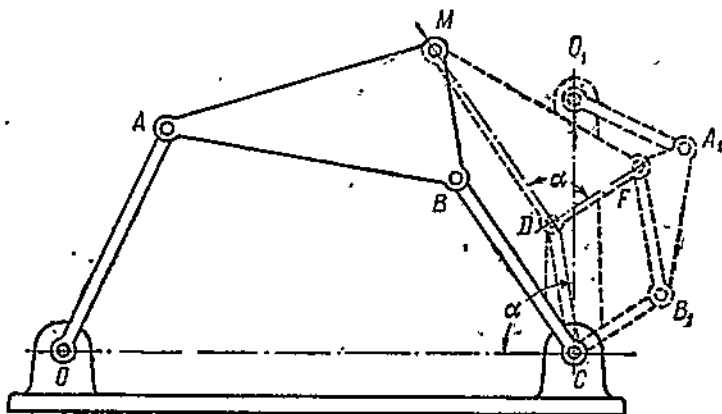
Чебышев принадлежит к тем ученым, которые каждое свое теоретическое изыскание предваряют или заканчивают конкретным его воплощением на практике. С этой точки зрения Чебышев стоит в одном ряду с Ломоносовым, Павловым, Жуковским и другими нашими великими учеными-естествоиспытателями.

Подытоживая к 50-летию со дня смерти Чебышева его научное наследство в области теории механизмов, мы находим в нем такое богатство идей и такую глубину научного анализа, которые позволяют нам с особенной гордостью говорить о русской науке, о русской культуре и об одном из лучших ее представителей — Пафнутии Львовиче Чебышеве.

Приложение № 1

К ТЕОРЕМЕ РОБЕРТСА — ЧЕБЫШЕВА

Кроме трех четырехзвенных механизмов, получаемых преобразованием по теореме Роберта — Чебышева, ту же шатунную кривую описывают еще три шестизвенных механизма, указанные З. Ш. Блохом*. Можно показать, что число шестизвенных механизмов, описывающих одну и ту же шатунную кривую, равно бесконечности. Например, если в четырехзвенном механизме



Фиг. 102

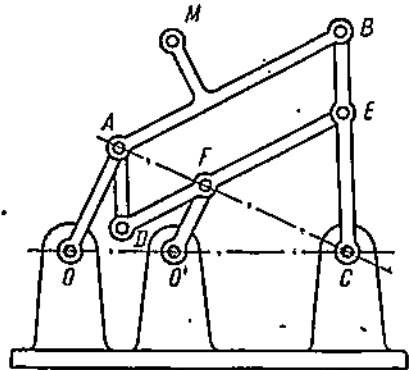
$OABC$ (фиг. 102) точка M , жестко связанная с шатуном AB , описывает некоторую заданную кривую, то, присоединив к этому механизму двухповодковую группу MDC так, чтобы образовался пайтограф Сильвестра ($CD=MB$, $MD=BC$), можно заметить, что траекторией произвольно выбранной точки F , жестко связанной со звеном MD , есть шатунная кривая четырехзвенника $O_1A_1B_1C$, который по отношению к четырехзвеннику $OABC$ повернут на угол α и уменьшен (или увеличен) в отношении $\frac{FD}{MD}$. Построив четырехзвенник, удовлетворяющий этим условиям, получим шестизвенный механизм $O_1A_1B_1CDF$ (показанный на фиг. 102 пунктирными линиями), который описывает ту же шатунную кривую (траекторию точки M), что

* См. статью З. Ш. Блоха, Теорема Роберта — Чебышева, Прикл. мат. и мех., ч. IV, вып. 4, 1940.

и исходный четырехзвенный механизм $OABC$. Так как точка F на звене MD может быть выбрана произвольно, то количество шестизвенных механизмов, описывающих одну и ту же шатунную кривую, теоретически равно бесконечности.

Кроме лантографа Сильвестра для подобного преобразования можно использовать и обыкновенный пантограф.

Например, присоединив к шарнирному четырехзвеннику $OABC$ (фиг. 103) двухпроводковую группу ADE так, чтобы образовался пантограф ($AB = DE$; $AD = BE$), заметим, что траектория точки F , лежащей на пересечении линий AC и DE , подобна траектории точки A , а именно, это есть окружность с центром в точке O' , лежащем на линии OC . Соединив точку F с точкой O' , мы, очевидно, подвижности механизма не нарушим. Удалив же звено OA , получим шестизвенный механизм, точка M которого описывает ту же шатунную кривую, что и исходный механизм. Так как точка E может быть в некоторых пределах выбрана произвольно, то количество шестизвенных механизмов, получаемых по этому способу, также теоретически равно бесконечности.

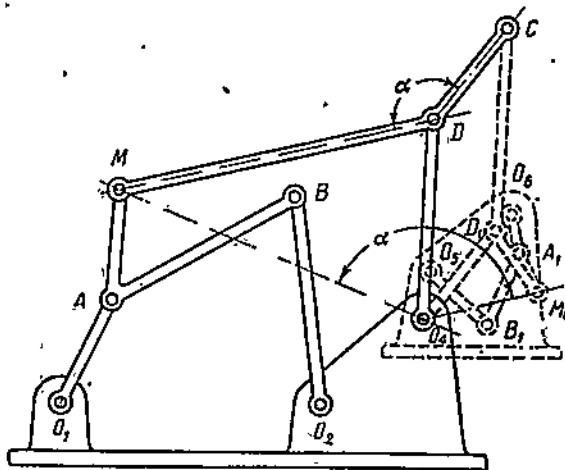


Фиг. 103

Возможны и другие способы преобразования четырехзвенного механизма в шестизвенный. Однако подобные преобразования лишь в весьма редких случаях могут быть практически целесообразны, так как при этом повышается сложность механизма.

Используя свойства пантографов, можно преобразовывать аналогично теореме Роберта — Чебышева и многозвенные механизмы.

Например, если в шестизвенном механизме (фиг. 104) точка C описывает некоторую заданную кривую, то, присоединив двухпроводковую группу CD_1O_4 так, чтобы образовался пантограф Сильвестра ($CD_1 = DO_4$; $D_1O_4 = CD$), заметим, что точка M_1 будет описывать траекторию, подобную траектории точки M , а именно шатунную кривую четырехзвенника $O_0A_1B_1O_6$, который по отношению к четырехзвеннику O_1ABO_2 повернут на угол α и уменьшен или увеличен в отношении $\frac{CD}{MD}$.



Фиг. 104.

Используя свойства пантографов, можно преобразовывать аналогично теореме Роберта — Чебышева и многозвенные механизмы. Например, если в шестизвенном механизме (фиг. 104) точка C описывает некоторую заданную кривую, то, присоединив двухпроводковую группу CD_1O_4 так, чтобы образовался пантограф Сильвестра ($CD_1 = DO_4$; $D_1O_4 = CD$), заметим, что точка M_1 будет описывать траекторию, подобную траектории точки M , а именно шатунную кривую четырехзвенника $O_0A_1B_1O_6$, который по отношению к четырехзвеннику O_1ABO_2 повернут на угол α и уменьшен или увеличен в отношении $\frac{CD}{MD}$.

Построив четырехзвенник, удовлетворяющий этим условиям, получим шестизвенный механизм (показанный на фиг. 104 пунктирными линиями), который описывает ту же шатунную кривую (траекторию точки C), что и исходный шестизвенный механизм.

Так как четырехзвенные механизмы O_1ABO_2 и $O_6A_1BO_5$ могут быть преобразованы по теореме Робертса — Чебышева, то общее количество решений по этому методу для указанного шестизвенника будет шесть.

Аналогичным образом решаются подобные задачи и для более сложных механизмов.

Приложение № 2

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ ДЛЯ МЕХАНИЗМА № 6

Кинематическая схема механизма приведена на фиг. 18. Относительные размеры звеньев данного механизма (при $AB=BC=BM=1$) могут быть выражены через один параметр, в качестве которого удобно для вычисления принимать вспомогательную величину ψ'' .

Из табл. 1 видно, как изменяются величины, характеризующие данный механизм с изменением вспомогательной величины ψ'' .

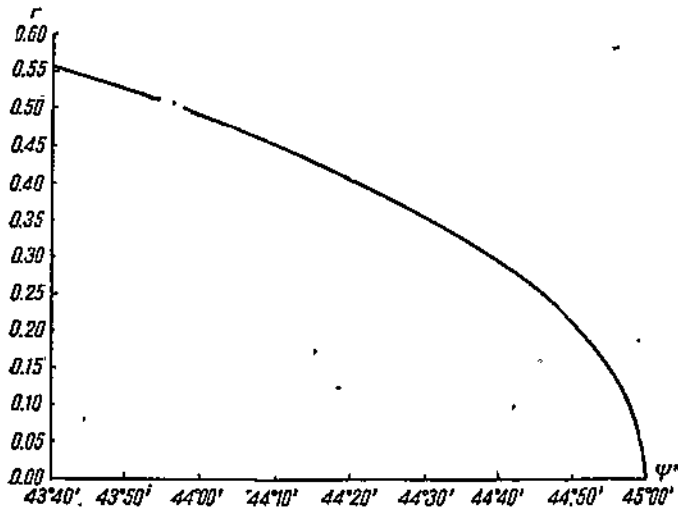
Таблица 1

ψ''	r	d	$\frac{R_0+R_2}{2}$	$\frac{R_0-R_2}{2}$	CO_1	θ_0
1	2	3	4	5	6	7
45°00'	0.0000	1.4142	0.0000	0.0000	1.4142	45°00'
44 58	0.0961	1.4118	0.0962	0.0033	1.4134	41 04
44 56	0.1359	1.4093	0.1362	0.0066	1.4126	39 25
44 54	0.1659	1.4068	0.1665	0.0098	1.4118	38 09
44 52	0.1911	1.4044	0.1921	0.0131	1.4110	37 05
44 50	0.2133	1.4020	0.2145	0.0163	1.4102	36 08
44 48	0.2331	1.3996	0.2347	0.0195	1.4094	35 17
44 46	0.2512	1.3972	0.2532	0.0227	1.4086	34 30
44 45	0.2597	1.3960	0.2620	0.0244	1.4082	34 07
44 44	0.2679	1.3948	0.2704	0.0260	1.4079	33 46
44 43	0.2758	1.3936	0.2785	0.0276	1.4075	33 25
44 42	0.2835	1.3924	0.2865	0.0292	1.4071	33 04
44 40	0.2981	1.3901	0.3016	0.0324	1.4063	32 25
44 38	0.3120	1.3877	0.3160	0.0355	1.4056	31 48
44 36	0.3252	1.3854	0.3298	0.0387	1.4048	31 13
44 33	0.3436	1.3819	0.3491	0.0434	1.4037	30 22
44 30	0.3610	1.3784	0.3674	0.0481	1.4027	29 35
44 25	0.3877	1.3726	0.3957	0.0559	1.4009	28 20
44 20	0.4121	1.3670	0.4218	0.0636	1.3992	27 11
44 15	0.4347	1.3615	0.4462	0.0718	1.3974	26 05
44 10	0.4556	1.3558	0.4691	0.0788	1.3958	25 05
44 05	0.4752	1.3503	0.4907	0.0864	1.3942	24 07
44 00	0.4936	1.3448	0.5111	0.0939	1.3926	23 11
43 55	0.5109	1.3394	0.5306	0.1014	1.3910	22 19
43 50	0.5273	1.3339	0.5492	0.1087	1.3896	21 28
43 45	0.5428	1.3288	0.5670	0.1160	1.3881	20 38
43 40	0.5576	1.3236	0.5841	0.1233	1.3866	19 51

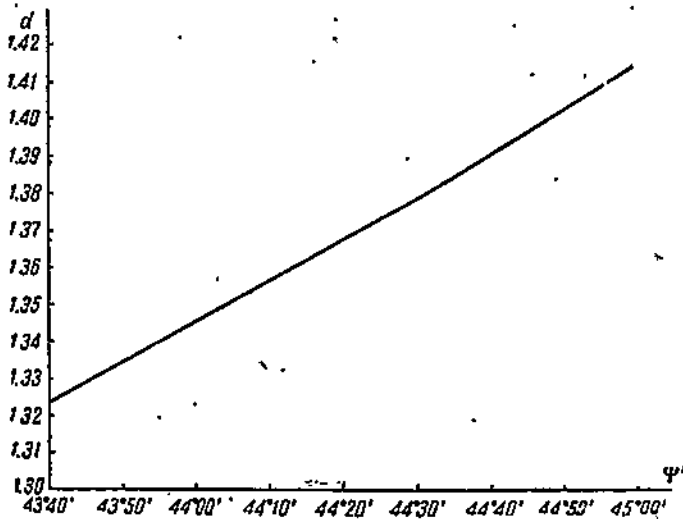
В графе 1 этой таблицы даны значения вспомогательной величины ψ'' в пределах от 45 до 43°40', т. е. в пределах, интересных для практики.

В графах 2 и 3 даны относительные размеры звеньев исходного механизма: $AC' = r$ и $CC' = d$, определенные по формулам (44) и (45).

В графе 4 даны значения $\frac{R_0 + R_1}{2}$ радиуса окружности, к которой приближена траектория точки M , определенные по формуле (47).



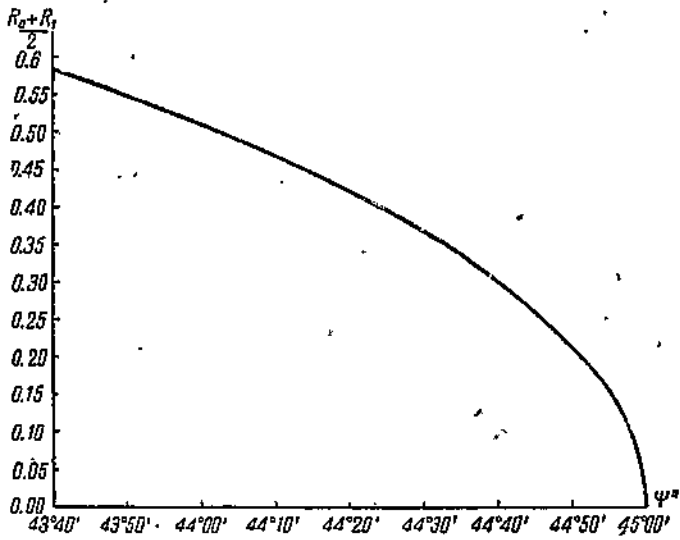
Фиг. 105а



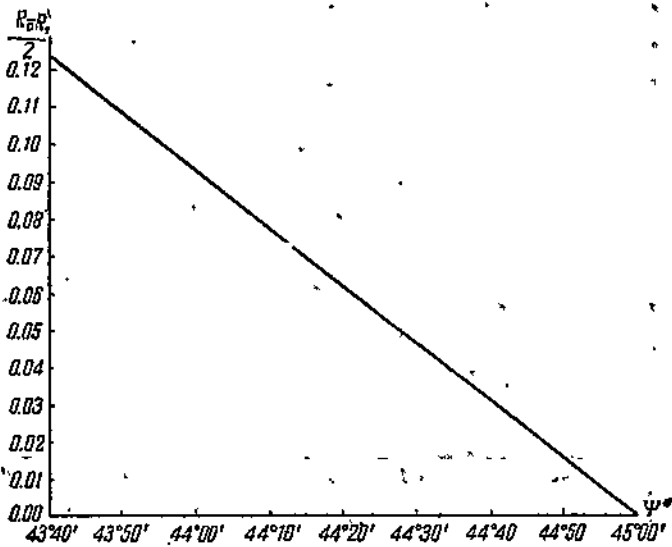
Фиг. 105б.

В графе 5 даны значения $\frac{R_0 - R_1}{2}$ максимального отклонения траектории точки M от этой окружности, определенные по формуле (48).

В графе 6 даны расстояния CO_1 от неподвижного центра вращения C до центра окружности, к которой приближена траектория точки O_1 , определенные по формуле (46).



Фиг. 106а



Фиг. 106б.

Преобразовав исходный механизм (фиг. 18) по теореме Робертса — Чебышева, получим механизм, аналогичный указанному на фиг. 4 пунктирными линиями.

Для преобразованного механизма относительные размеры звеньев определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} A'C' &= A''C'' = 1, \\ A'A'' &= r, \quad C'C'' = d, \quad \angle ACC'' = \angle A''C''C = \vartheta_0 \end{aligned}$$

(в среднем положении механизма).

В графе 7 даны значения угла ϑ_0 , вычисленные по формуле (11).

Следует заметить, что значения $\frac{R_0 + R_1}{2}$ и $\frac{R_0 - R_1}{2}$ в табл. 1 даны для исходного механизма (фиг. 18) при $AB = BC = BM = 1$. Для преобразованного же механизма (фиг. 4), если длина звена $A'C'$ принята за единицу, указанные величины следует уменьшить вдвое, так как в силу соотношения (3) $A'C' = 2AB$.

На фиг. 105а и б даны графики для определения относительных размеров звеньев r и d в зависимости от вспомогательной величины ψ'' .

На фиг. 106а показан график для величины $\frac{R_0 + R_1}{2}$, т. е. радиуса окружности, к которой приближена траектория точки M , а на фиг. 106б — для величины $\frac{R_0 - R_1}{2}$ — максимального отклонения от этой окружности.

Примеры использования Чебышевым механизмов с данными параметрами приведены в § 8, где даны описания механизмов (№№ 7, 8, 9 и 10).

Приложение № 3

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Относительные размеры звеньев данного механизма определяются двумя свободными параметрами (см. § 13), в качестве которых удобно для вычислений принимать вспомогательную величину l и угол ϑ_0 . Для исходного механизма (фиг. 48) ϑ_0 есть $\angle BCC' = \angle BC'C$ в среднем положении механизма. Для преобразованного механизма (фиг. 49) угол ϑ_0 есть $\angle A'C'C'' = \angle A''C''C'$ в среднем положении механизма.

Из табл. 2 видно, как изменяются величины, характеризующие преобразованный механизм (фиг. 49) с изменением вспомогательной величины l и угла ϑ_0 .

В графе 1 этой таблицы даны наименования возможных модификаций механизма в соответствии с терминологией, принятой в § 1 и 13.

В графе 2 указаны номера фигур, на которых изображены механизмы этих модификаций.

В графе 3 даны предельные значения угла ϑ_0 , при которых происходит переход механизма из одной модификации в другую, и несколько значений

Таблица 2

Модификация механизма	Фигура	θ_0	T	a	b	c
1	2	3	4	5	6	7
$t = 0.00$						
4-я прямая	57	0°00'	0.0000	2.0000	0.0000	0.0000
		3 00	0.1047	2.0085	-0.0113	0.1591
		7 00	0.2437	2.0478	-0.0627	0.3723
		10 00	0.3477	2.1047	-0.1351	0.6076
		15 00	0.5176	2.2854	-0.3536	1.1427
		22 30	0.7654	3.1543	-1.3065	3.8074
3-я прямая	55	30 00	1.0000	∞	∞	∞
		34 00	1.1184	-2.4770	4.1350	5.8270
		37 30	1.2175	-0.8514	2.4381	1.0277
		41 00	1.3121	-0.2911	1.8005	0.2241
3-я перекрестная	53	45 00	1.4142	0.0000	1.4142	0.0000
		49 00	1.5094	0.1428	1.1693	-0.0464
		52 30	1.5867	0.2076	1.0099	-0.0430
		56 00	1.6581	0.2395	0.8789	-0.0255
2-я перекрестная	51	60 00	1.7321	0.2500	0.7500	0.0000
1-я перекрестная	49	67 30	1.8478	0.2247	0.5412	0.0464
		75 00	1.9319	0.1640	0.3536	0.0820
		82 30	1.9829	0.0866	0.1750	0.1038
		87 00	1.9973	0.0348	0.0709	0.1105
		90 00	2.0000	0.0000	0.0000	0.1100
$t = 0.01$						
4-я прямая	57	0°00'	0.0300	2.0009	-0.0009	0.0601
		3 00	0.1347	2.0158	-0.0186	0.2220
		7 00	0.2738	2.0555	-0.0804	0.4585
		10 00	0.3774	2.1331	-0.1635	0.7026
		15 00	0.5477	2.3459	-0.4140	1.3168
		22 30	0.7955	3.4396	-1.5919	4.9331
3-я прямая	55	29 01	1.0000	∞	∞	∞
		34 00	1.1486	-1.7675	3.4256	3.3398
		37 30	1.2480	-0.6246	2.2122	0.6604
		41 00	1.3436	-0.1951	1.7045	0.1274
		43 47	1.4142	0.0000	1.4439	0.0000
3-я перекрестная	53	44 13*	1.4250	0.0175	1.4139	-0.0875
		49 00	1.5387	0.1774	1.1347	-0.0529
		52 30	1.6170	0.2318	0.9858	-0.0432
		56 00	1.6884	0.2570	0.8613	-0.0230
2-я перекрестная	51	59 30	1.7532	0.2612	0.7538	0.0000
1-я перекрестная	49	67 30	1.8750	0.2306	0.5348	0.0505
		75 00	1.9622	0.1680	0.3495	0.0866
		82 30	2.0133	0.0870	0.1741	0.1039
		87 00	2.0277	0.0355	0.0712	0.1170
		90 00	2.0304	0.0000	0.0000	0.1230

Продолжение

Модификация механизма	Фигура	θ_0	T	a	b	c
1	2	3	4	5	6	7
$t = 0.05$						
4-я прямая	57	0°00'	0.1505	2.0231	-0.0281	0.6230
		3 00	0.2557	2.0671	-0.0699	0.5047
		7 00	0.3955	2.1691	-0.1840	0.7704
		10 00	0.4995	2.2971	-0.3275	1.2155
		15 00	0.6707	2.7218	-0.7899	2.4761
		22 30	0.9257	7.4518	-5.6040	31.8673
3-я прямая	55	25 11	1.0000	∞	∞	∞
		34 00	1.2745	-0.4989	2.2580	0.5212
		37 30	1.3741	-0.0999	1.6866	0.0701
3-я перекрестная	53	38 57	1.4142	0.0000	1.5554	0.0000
		40 56*	1.4620	0.0980	1.4120	-0.0480
		41 00	1.4692	0.1033	1.4062	-0.0505
		49 00	1.6648	0.2982	1.0189	-0.0593
		52 30	1.7575	0.3151	0.9024	-0.0406
		56 00	1.8167	0.3162	0.8021	-0.0074
2-я перекрестная	51*	57°20'	1.8300	0.3090	0.7700	-0.0000
1-я перекрестная	49	67°30'	2.0075	0.2564	0.5090	0.0699
		75 00	2.0920	0.1822	0.3355	0.1230
		82 30	2.1433	0.0942	0.1669	0.1274
		87 00	2.1578	0.0880	0.0667	0.1320
		90 00	2.1605	0.0000	0.0000	0.1350
$t = 0.10$						
4-я прямая	57	0°00'	0.3037	2.1010	-0.1019	0.7041
		3 00	0.4108	2.2001	-0.2028	1.0080
		7 00	0.5467	2.4217	-0.4366	1.6622
		10 00	0.6588	2.7230	-0.7534	2.6055
		15 00	0.8321	4.1067	-2.1749	8.4762
3-я прямая	55	19 56	1.0000	∞	∞	∞
		22.30	-1.0654	-4.2981	6.1459	21.3523
3-я перекрестная	53	32 58	1.4142	0.0000	1.6780	0.0000
		34 00	1.4450	0.0673	1.5908	-0.0471
		36 50*	1.5300	0.1980	1.4040	-0.0970
		37 30	1.5470	0.2240	1.3627	-0.1042
		41 00	1.6430	0.3103	1.1991	-0.1040
		49 00	1.8440	0.3827	0.9294	-0.0446
52 30	1.9230	0.3835	0.8341	-0.0139		
2-я перекрестная	51	54 20	1.9500	0.3760	0.7910	0.0000
1-я перекрестная	49	56 00	1.9960	0.3720	0.7464	0.0155
		67 30	2.1890	0.2844	0.4810	0.0945
		75 00	2.2750	0.1968	0.3308	0.1289
		82 30	2.3270	0.1016	0.1595	0.1553
		90 00	2.3440	0.0000	0.0000	0.1570

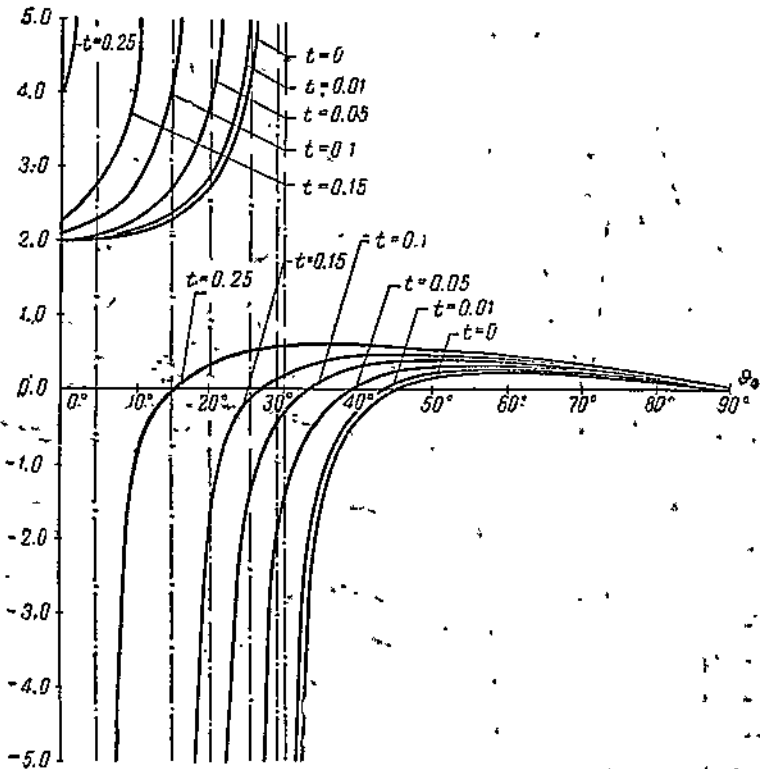
Продолжение

Модификация механизма	Фигура	θ_0	T	a	b	c
1	2	3	4	5	6	7
$t = 0.15$						
4-я прямая	57	0°00'	0.4638	2.2741	-0.2741	1.3438
		3 00	0.5733	2.4862	-0.4889	1.9976
		7 00	0.7188	3.0459	-1.0608	3.9988
		10 00	0.8265	4.0920	-2.2850	8.9187
3-я прямая	55	14 50	1.0000	∞	∞	∞
		15 00	1.0053	-90.2660	92.1770	6722.0
		22 30	1.2644	-0.6192	2.4670	0.8590
3-я перекрестная	53	27 00	1.4142	0.0000	1.7920	0.0000
		32 15*	1.5800	0.3020	1.3900	-0.1470
		34 00	1.6337	0.3329	1.3252	-0.1460
		37 30	1.7374	0.4003	1.1864	-0.1245
		41 00	1.8863	0.4366	1.0729	-0.0967
		49 00	2.0427	0.4493	0.8628	-0.0196
2-я перекрестная	51	51 20	2.0800	0.4360	0.8140	0.0000
1-я перекрестная	49	52 30	2.1368	0.4380	0.7795	0.0088
		56 00	2.1982	0.4133	0.7051	0.0438
		67 30	2.3966	0.3020	0.4633	0.1196
		75 00	2.4846	0.2088	0.3089	0.1530
		82 30	2.5380	0.1066	0.1545	0.1739
		90 00	2.5559	0.0000	0.0000	0.1590
$t = 0.25$						
4-я прямая	57	0°00'	0.8167	4.0026	-2.0026	9.8604
		3 00	0.9353	8.9743	-6.9870	63.5970
3-я прямая	55	4 39	1.0000	∞	∞	∞
		7 00	1.0029	-4.2368	5.1219	20.6200
		10 00	1.2107	-1.1203	3.0689	2.4720
		15 00	1.4033	-0.0156	1.9625	0.0330
3-я перекрестная	53	15 17	1.4142	0.0000	1.9229	0.0000
		22 30	1.6840	0.4207	1.4270	-0.2356
		24 22*	1.7520	0.4700	1.3520	-0.2270
		34 00	2.0841	0.5811	1.0770	-0.1237
		37 30	2.1965	0.5859	1.0010	-0.0818
		41 00	2.3037	0.5792	0.9299	-0.0418
2-я перекрестная	51	44 55	2.4200	0.5610	0.8530	0.0000
1-я перекрестная	49	49 00	2.5273	0.5343	0.7778	0.0393
		52 30	2.6149	0.5045	0.7131	0.0701
		56 00	2.6958	0.4700	0.6484	0.0980
		67 30	2.9108	0.3314	0.4339	0.1648
		75 00	3.0061	0.2266	0.2910	0.2006
		82 30	3.0639	0.1150	0.1461	0.2190
		89 00	3.0833	0.0000	0.0000	0.2250

денным в табл. 2, и могут служить для ориентировочного определения размеров звеньев прямолинейно-направляющего механизма.

На фиг. 110 показан график изменения величины угла α_1 , т. е. угла наклона линии $A'A''$ к линии центров $C'C''$ (фиг. 49), когда точка M находится в положениях M_1 и M'_1 .

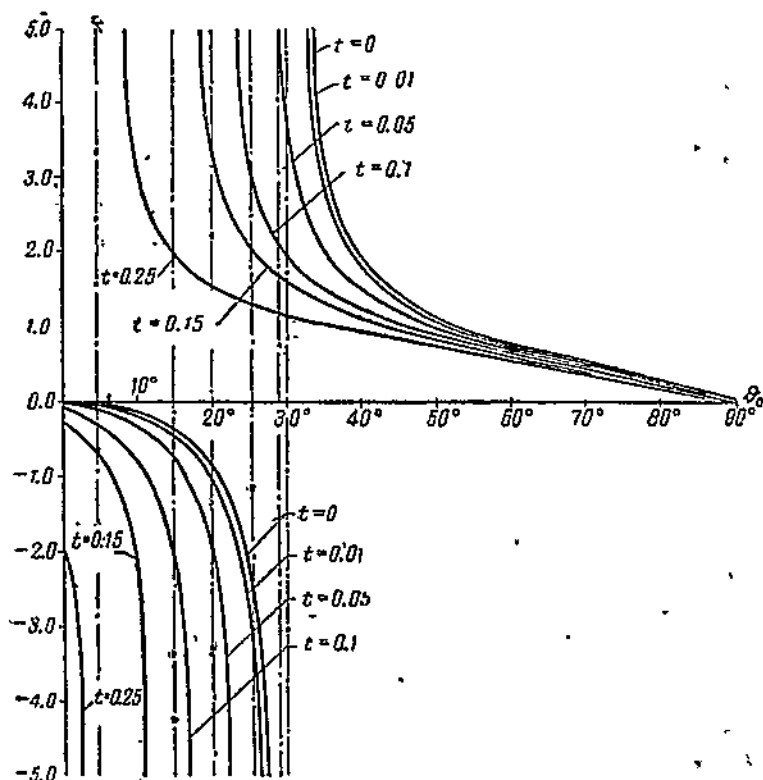
В исходном механизме (фиг. 48) углу α_1 соответствует угол поворота звена AC' при перемещении точек M из положения M_0 в положения M_1



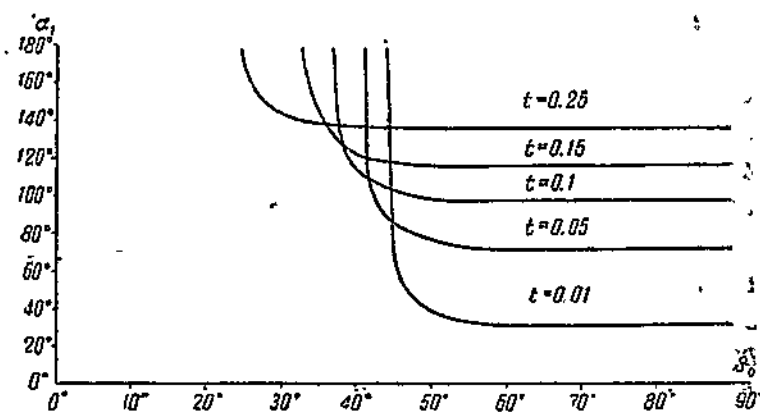
Фиг. 108

и M'_1 . Полный угол поворота звена AC' за время прохождения точкой M участка, приближенного к прямой, равен $2\alpha_1$. Значения угла α_1 вычислены по формуле (57). При некоторых значениях углов φ_0 , отмеченных в таблице знаком *, угол $\alpha_1 = 180^\circ$, т. е. вся траектория точки M приближена к прямой, и точки M_1 и M'_1 совпадают (механизм № 23). При дальнейшем уменьшении угла φ_0 формула (57) действительных решений для угла α_1 не дает, так как отсутствуют точки M_1 и M'_1 , т. е. точки пересечения траектории точки M с прямой, проходящей на расстоянии $\pm 2E$ от касательной к указанной траектории в точке M_0 .

На фиг. 111а даны для преобразованного механизма графики изменения длины l приближенно-прямолинейного участка траектории точки M , а на фиг. 111б — для отклонения E от прямолинейности на этом участке при $A'C' = A''C'' = l$.

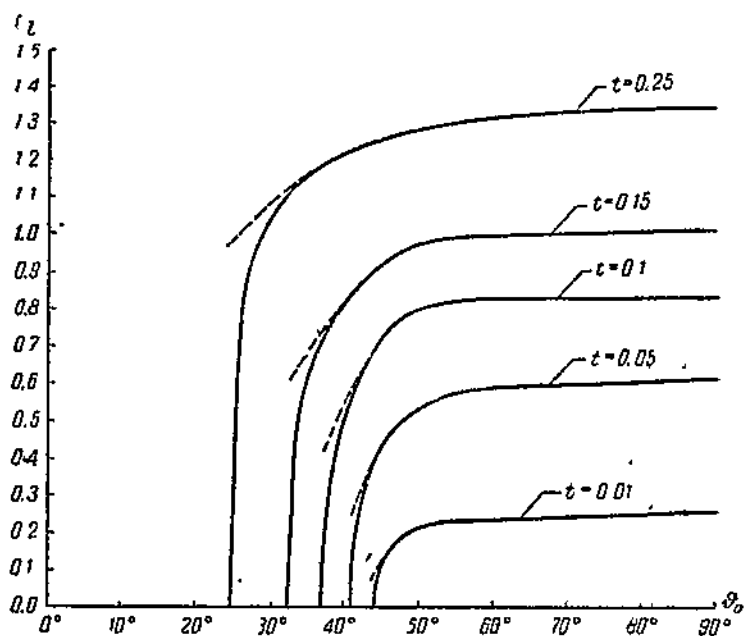


Фиг. 100

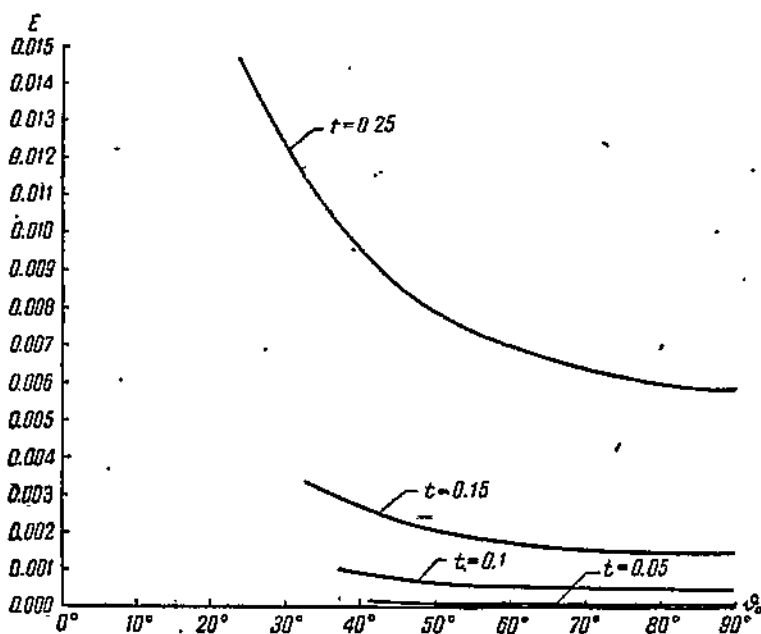


Фиг. 110

Значения длины l вычислены по формуле (58). Следует отметить, что эта формула дает значение величины $M_1M'_1$, которая совпадает с фактической длиной приближенно прямолинейного участка лишь до некоторого значения угла δ_0 (различного для различных t). При дальнейшем увеличении угла α_1 длина $M_1M'_1$ становится уже меньше длины приближенно прямолинейного участка траектории точки M и, наконец, при $\alpha_1 = \pi$, т. е. когда



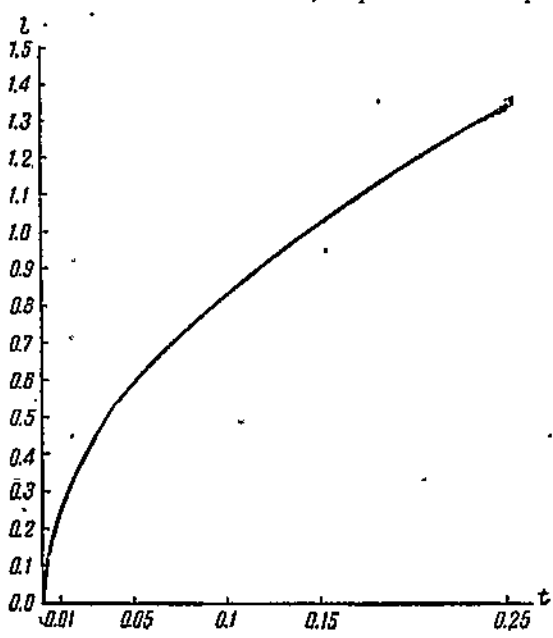
Фиг. 111а



Фиг. 111б

вся траектория приближена к прямой, длина l , определенная по формуле (58), равна нулю. Фактическая же длина приблизительно прямолинейного участка траектории точки M , разумеется, не равна нулю и может быть определена графически или по условию (92).

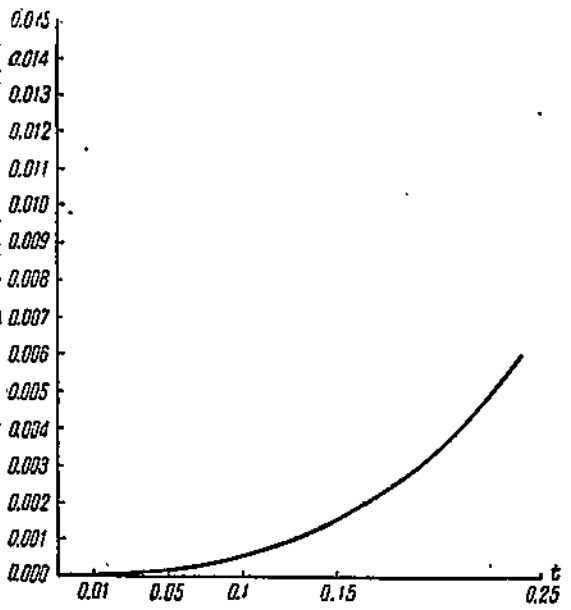
Для тех случаев, когда фактическая длина l больше длины $M_1M'_1$, вычисленной по формуле (58), указаны значения длины l , определенные графическим путем. Соответствующая часть графика показана пунктирной линией. Значения величины E максимального отклонения от прямолинейности определены по формуле (59). На графике (фиг. 111) указаны величины E только для углов ϑ_0 , при которых α_1 имеет действительную величину, так как лишь в этих случаях можно по формулам, предложенным Чебышевым, определять длину участка траектории точки M , на котором отклонение от прямой не превосходит величины $\pm E$.



Фиг. 112а

На фиг. 112а показан график изменения длины l приближенно прямолинейного участка, а на фиг. 112б — отклонения E в зависимости от вспомогательной величины l для преобразованного механизма (фиг. 49) при угле $\vartheta_0 = 75^\circ$.

Как видно из графика, с уменьшением вспомогательной величины l отклонение E от прямолинейности уменьшается значительно быстрее, чем длина l .



Фиг. 112б

Графики для величин угла α_1 , длины l и отклонения E (см. фиг. 110—112) построены по весьма ограниченному количеству вычисленных значений и потому могут служить лишь для ориентировочного выбора величины l .

В табл. 3 показано, как изменяются величины, характеризующие исходный механизм (фиг. 48) с изменением величины l и угла ϑ_0 . В графе 1 этой таблицы даны наименования возможных модификаций механизма в соответствии с терминологией, принятой в § 1 и 13.

В табл. 3 показано, как изменяются величины, характеризующие исходный механизм (фиг. 48) с изменением величины l и угла ϑ_0 .

В графе 1 этой таблицы даны наименования возможных модификаций механизма в соответствии с терминологией, принятой в § 1 и 13.

Таблица 3

Модификация механизма	Фигура	θ_0	T	r	d	ω
1	2	3	4	5	6	7
$t = 0.00$						
4-я	56	0°00'	0.0000	2.0000	0.0000	180°00'
		3 00	0.1047	2.0085	-0.0113	162 00
		7 00	0.2437	2.0478	-0.0627	138 00
		10 00	0.3477	2.1047	-0.1351	120 00
		15 00	0.5176	2.2854	-0.3536	90 00
		22 30	0.7654	3.1543	-0.3065	45°00'
3-я $r+d > 2$	54	30 00	1.0000	∞	∞	0 00
		34 00	1.1184	-2.4770	4.1350	336 00
		37 30	1.2175	-0.8514	2.4381	315 00
		41 00	1.3121	-0.2911	1.8005	294 00
3-я $r+d < 2$	52	45 00.	1.4142	0.0000	1.4142	270 00
		49 00	1.5094	0.1428	1.1693	246 00
		52 30	1.5867	0.2076	1.0099	225 00
		56 00	1.6581	0.2395	0.8789	204 00
2-я	50	60 00	1.7321	0.2500	0.7500	180 00
1-я	48	67 30	1.8478	0.2247	-0.5412	135 00
		75 00	1.9319	0.1640	0.3536	90 00
		82 30	1.9829	0.0866	0.1750	45 00
		87 00	1.9973	0.0348	0.0709	18 00
		90 00	2.0000	0.0000	0.0000	0 00
$t = 0.01$						
4-я	56	0°00'	0.0300	2.0009	0.0009	175°00'
		5 00	0.1347	2.0158	0.0186	155°15'
		7 00	0.2738	2.0655	0.0804	131 30
		10 00	0.3774	2.1331	0.1635	113 30
		15 00	0.5477	2.3459	0.4140	83 30
		22 30	0.2955	3.4396	6.5919	38.30
3-я $r+d > 2$	54	29 61	1.0000	∞	∞	0 00
		34 00	1.1485	1.7675	3.4256	330 20
		37 30	1.2478	0.6314	2.2181	309 38
		41 00	1.3424	0.1863	1.6958	289 30
3-я $r+d < 2$	52	43 47	1.4142	0.0000	1.4439	272 45
		44 13*	1.4250	0.6175	1.4139	270 00
		49 00	1.5387	0.1774	1.1347	242 00
		52 30	1.6170	0.2318	0.9858	221 30
		56 00	1.6884	0.2570	0.8673	201 45
2-я	50	59 30	1.7532	0.2612	0.7538	180 00

Продолжение

Модификация механизма	Фигура	θ_6	T	r	d	ω
1	2	3	4	5	6	7
1-я	48	67°30'	1.8750	0.2306	0.5348	132°45'
		75 00	1.9622	0.1680	0.3495	88 50
		82 30	2.0133	0.0870	0.1741	-14 30
		87 00	2.0277	0.0355	0.0712	17 30
		90 00	2.0304	0.0000	0.0000	0 00
$t=0.05$						
4-я	56	0°00'	0.1505	2.0231	-0.0231	144°00'
		3 00	0.2557	2.0671	-0.0699	127 00
		7 00	0.3955	2.1691	-0.1840	104 30
		10 00	0.4995	2.2911	-0.3275	86 45
		15 00	0.6707	2.7218	-0.7899	57 30
22 30	0.9257	7.4518	-5.6040	13 50		
3-я $r+d > 2$	54	25 11	1.0000	∞	∞	0 00
		34 00	1.2745	-0.4989	2.2580	308 50
		37 30	1.3741	-0.0999	1.6866	289 05
3-я $r+d < 2$	52	38 57	1.4142	0.0000	1.5554	280 50
		40 55*	1.4620	0.0980	1.4120	269 55
		41 00	1.4692	0.1033	1.4062	269 45
		49 00	1.6648	0.2932	1.0189	224 00
		52 30	1.7575	0.3151	0.9024	205 00
		56 00	1.8167	0.3162	0.8021	187 00
2-я	50	57 20	1.8300	0.3090	0.7700	180 00
1-я	48	67 30	2.0075	0.2564	0.5090	122 00
		75 00	2.0920	0.1822	0.3355	82 00
		82 30	2.1433	0.0942	0.1669	40 10
		87 00	2.1578	0.0380	0.0667	16 00
		90 00	2.1605	0.0000	0.0000	0 00
$t=0.10$						
4-я	56	0°00'	0.3037	2.1019	-0.1019	109°45'
		3 00	0.4108	2.2001	-0.2028	95 00
		7 00	0.5466	2.4217	-0.4366	72 15
		10 00	0.6588	2.7230	-0.7534	55 15
		15 00	0.8321	4.1067	-2.1749	27 15
3-я $r+d > 2$	54	19 56	1.0000	∞	∞	0 00
		22 30	1.0654	-4.2981	6.1459	345 15
3-я $r+d < 2$	52	32 58	1.4142	0.0000	1.6780	289 45
		34 00	1.4450	0.0673	1.5908	284 15
		36 50*	1.5300	0.1980	1.4040	269 45
		37 30	1.5470	0.2240	1.3627	265 55
		41 00	1.6430	0.3103	1.1991	249 30
		49 00	1.8440	0.3827	0.9294	207 00
		52 30	1.9230	0.3835	0.8341	189 00

Продолжение

Модификация механизма	Фигура	θ_0	T	r	d	ω
1	2	3	4	5	6	7
2-я	50	54°20'	1.9500	0.3760	0.7910	180°00'
1-я	48	56 00	1.9960	0.3720	0.7464	171 00
		67 30	2.1890	0.2844	0.4810	112 45
		75 00	2.2750	0.1968	0.3303	74 45
		82 30	2.3270	0.1016	0.1595	36 15
		90 00	2.3440	0.0000	0.0000	0 00
$t=0.15$						
4-я	56	0°00'	0.4638	2.2741	-0.2741	80°30'
		3 00	0.5733	2.4862	-0.4889	64 00
		7 00	0.7188	3.0459	-1.0608	42 00
		10 00	0.8265	4.0920	2.2851	25 50
3-я $r+d > 2$	54	14 50	1.0000	∞	∞	0 00
		15 00	1.0053	90.2460	92.1770	359 50
		22 30	1.2644	0.61920	2.4670	1320 15
3-ья $r+d < 2$	52	27 00	1.4142	0.0000	1.7820	297 15
		32 15*	1.5800	0.3020	1.3900	269 30
		34 00	1.6337	0.3329	1.3252	262 00
		37 30	1.7374	0.4003	1.1864	242 45
		41 00	1.8363	0.4366	1.0729	227 45
		49 00	2.0427	0.4493	0.8628	190 00
2-я	50	51 20	2.0800	0.4360	0.8140	180 00
1-я	48	52 30	2.1368	0.4380	0.7795	175 00
		56 00	2.1982	0.4133	0.7051	156 00
		67 30	2.3966	0.3020	0.4633	103 15
		75 00	2.4842	0.2088	0.3089	69 00
		82 30	2.5380	0.1066	0.1545	34 00
		90 00	2.5559	0.0000	0.0000	0 00
$t=0.25$						
4-я	56	0°00'	0.8167	4.0026	-2.0026	23°00'
		3 00	0.9353	8.9743	-6.9870	8 00
3-ья $r+d > 2$	54	4 39	1.0000	∞	∞	0 00
		7 00	1.0929	-4.2368	5.1219	350 00
		10 00	1.2107	1.1293	3.0689	336 00
		15 00	1.4033	0.0156	1.9625	312 00
3-ья $r+d < 2$	52	15 17	1.4142	0.0000	1.9229	310 00
		22 30	1.6840	0.4207	1.4270	277 00
		24 22*	1.7520	0.4700	1.3520	268 00
		34 00	2.0841	0.5811	1.0770	226.06
		37 30	2.1965	0.5859	1.0010	211 15
		41 00	2.3037	0.5792	0.9299	196 30

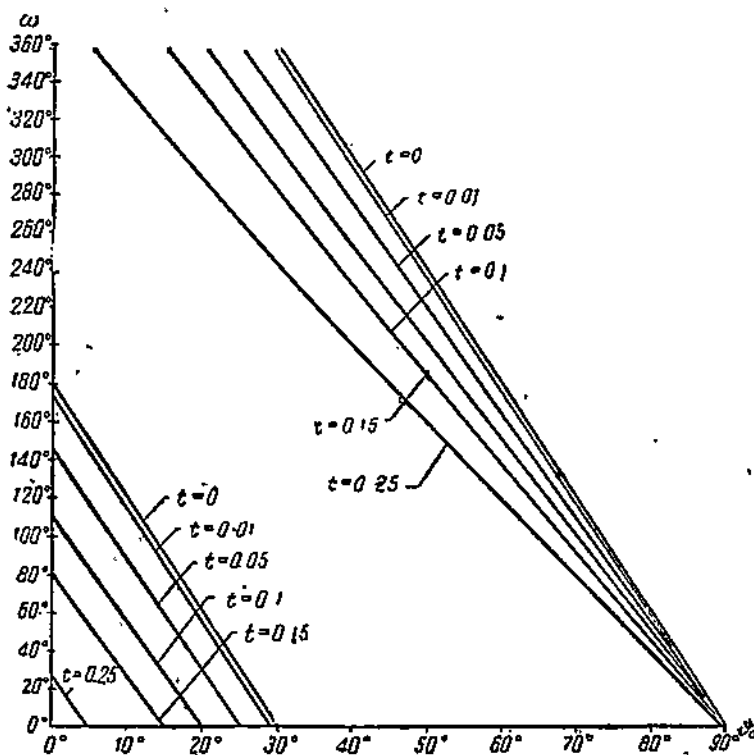
Продолжение

Модификация механизма	Фигура	θ_0	T	r	d	ω
1	2	3	4	5	6	7
2-я	50	44°55'	2.4200	0.5610	0.8530	180°00'
1-я	48	49 00	2.5273	0.5343	0.7778	163 15
		52 30	2.6149	0.5045	0.7131	149 00
		56 00	2.6958	0.4700	0.6484	134 45
		67 30	2.9108	0.3314	0.4339	79 30
		75 00	3.0061	0.2266	0.2910	59 00
		82 30	3.0639	0.1150	0.1461	29 30
90 00	3.0833	0.0000	0.0000	0 00		

В графе 2 указаны номера фигур, на которых изображены механизмы этих модификаций.

В графе 3 даны значения угла $\theta_0 = \angle BCC' = \angle BC'C$ (в среднем положении механизма).

В графе 4 даны значения величины T (см. пояснения к графе 4 табл. 2).



Фиг. 118

В графах 5 и 6 указаны размеры звеньев исходного механизма (фиг. 48) $AC' = r$ и $CC' = d$ при $AB = BC = BM = 1$.

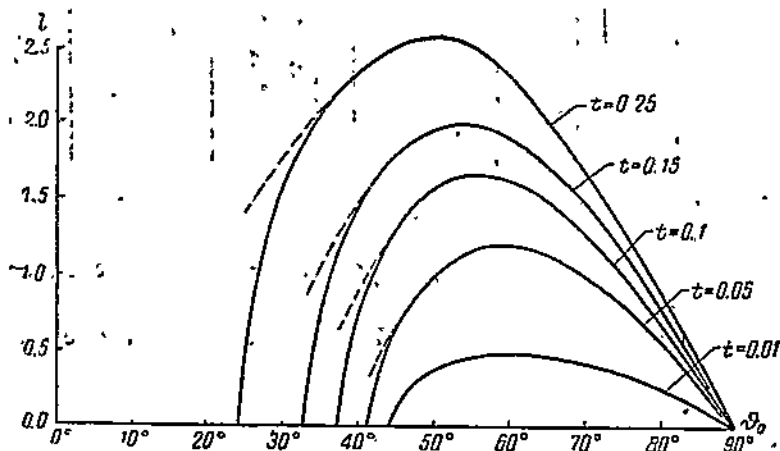
Значения величин r и d определены из условий $r = a$, $d = b$ соответственно по формулам (54) и (11).

В графе 7 даны величины угла $\omega = \angle ABM$.

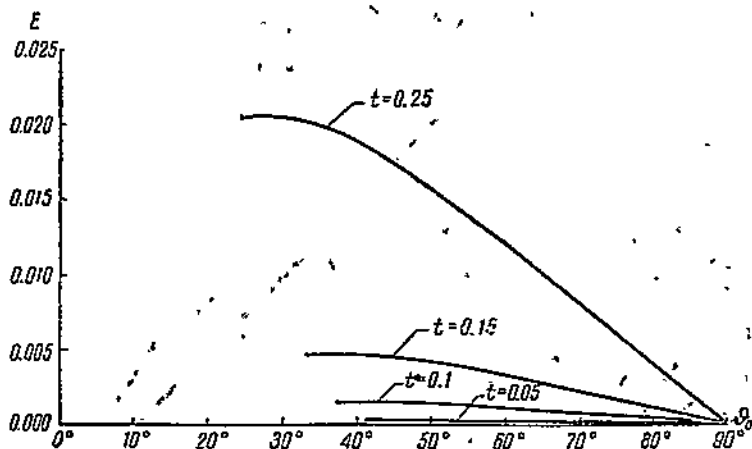
Значения угла ω вычислены по формуле

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} = \frac{2T - (T^2 + 1) \sin \theta_0}{(1 - T^2) \cos \theta_0}$$

Для $t=0$ значения угла ω могут быть найдены из условия $\omega = 180 - 6\theta_0$, что следует из формулы (93).



Фиг. 114а



Фиг. 114б

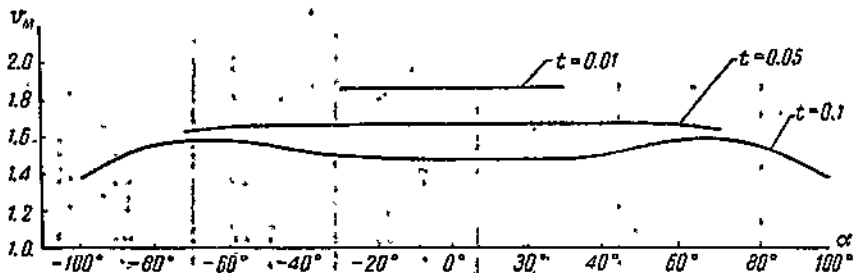
На фиг. 113 приведен график изменения угла ω в зависимости от вспомогательной величины t и угла θ_0 .

На фиг. 114а приведены графики изменения l — длины, приближенно прямолинейного участка, а на фиг. 114б — величины E — отклонения от прямолинейности для исходного механизма (фиг. 48) при $AB = BC = BM = 1$. Значения длины l и отклонения E получены умножением соответствующих

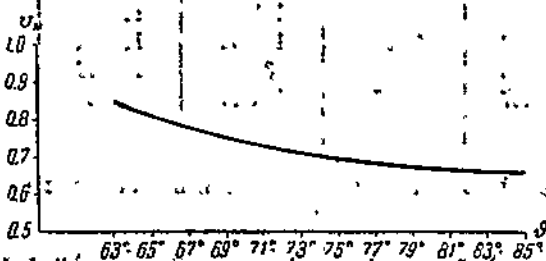
значений l и E для преобразованного механизма (см. табл. 2) на величину $2 \sin \frac{\omega}{2}$, что следует из формулы (3).

На фиг. 115 приведен график изменения скорости v_M точки M исходного механизма № 21 (фиг. 48) в функции угла поворота α ведущего звена AC' (скорость точки A звена AC' принята за единицу). Скорости v_M определены для приближенно прямолинейного участка при значениях угла $\theta_0 = 75^\circ$ и $t = 0,01; 0,05$ и $0,10$. Как видно из графика (фиг. 115), исходный механизм № 21 (фиг. 48) при t малом доставляет весьма равномерное движение точки M , а потому может с успехом применяться в ряде регистрирующих приборов для получения достаточно равномерных шкал.

На фиг. 116 приведен график v_M скорости точки M преобразованного механизма (фиг. 49) в функции угла поворота ведущего звена $\vartheta = \angle A'C'C''$



Фиг. 115



Фиг. 116

(скорость точки A' звена $A'C''$ принята за единицу). Скорость v_M определена для случая $\theta_0 = 75^\circ$ и $t = 0,01$.

Как видно из графика, приведенного на фиг. 116, применение в регистрирующих приборах преобразованного механизма дает менее равномерные шкалы, чем применение в них исходного механизма с теми же параметрами, что и у преобразованного.

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ ДЛЯ МЕХАНИЗМА № 22

Кинематическая схема исходного механизма дана на фиг. 50, а преобразованного — на фиг. 51. Относительные размеры звеньев преобразованного механизма при $A'C' = A''C'' = 1$ могут быть выражены через один параметр, например через величину $A'A'' = a$. Из табл. 4 видно, как изменяются величины, характеризующие данный механизм (фиг. 51), с изменением величины a .

Таблица 4

a	b	θ_0	α_1	l	E
1	2	3	4	5	6
0.250	0.7500	60°00'	0°00'	0.0000	0.000
0.255	0.7517	59 47	21 30	0.1633	$3.793 \cdot 10^{-8}$
0.260	0.7533	59 33	30 14	0.2309	$3.028 \cdot 10^{-7}$
0.270	0.7567	59 07	42 22	0.3255	$2.412 \cdot 10^{-6}$
0.290	0.7633	58 13	58 48	0.4616	$1.914 \cdot 10^{-5}$
0.310	0.7700	57 19	70 46	0.5649	$6.412 \cdot 10^{-5}$
0.330	0.7767	56 24	80 20	0.6516	$1.509 \cdot 10^{-4}$
0.350	0.7833	55 29	88 26	0.7277	$2.929 \cdot 10^{-4}$
0.370	0.7900	54 33	95 26	0.7959	$5.035 \cdot 10^{-4}$
0.390	0.7967	53 37	101 38	0.8581	$7.949 \cdot 10^{-4}$
0.410	0.8033	52 39	107 12	0.9156	$1.118 \cdot 10^{-3}$
0.430	0.8100	51 41	112 14	0.9690	$1.675 \cdot 10^{-3}$
0.450	0.8167	50 42	116 50	1.0189	$2.290 \cdot 10^{-3}$
0.470	0.8233	49 43	121 04	1.0659	$3.039 \cdot 10^{-3}$
0.500	0.8333	48 12	126 52	1.1314	$4.446 \cdot 10^{-3}$
0.530	0.8433	46 38	132 06	1.1917	$6.234 \cdot 10^{-3}$
0.546	0.8487	45 47	134 42	1.2220	$7.367 \cdot 10^{-3}$

В графе 1 этой таблицы даны значения величины a в пределах от 0,25 до 0,546.

В графе 2 даны значения величины $C'C'' = b$, определенные по формуле (75').

В графе 3 даны значения угла $\theta_0 = \angle A'C'C'' = \angle A''C''C'$ (в среднем положении механизма), определенные по формуле (11).

В графе 4 даны значения α_1 угла наклона линии $A'A''$ к линии $C'C''$ при положении точки M в конце прямолинейного участка, определенные по формуле (76).

В графе 5 даны значения длины l приближенно прямолинейного участка траектории точки M , определенные по формуле (77).

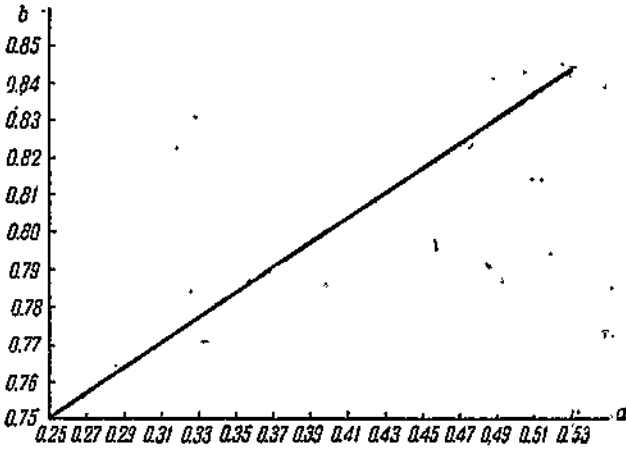
В графе 6 даны значения максимального отклонения E от прямолинейности на участке траектории длиной l , определенные по формуле (78).

Для исходного механизма (фиг. 50) при $AB = BC = BM = 1$ относительные размеры звеньев будут равны

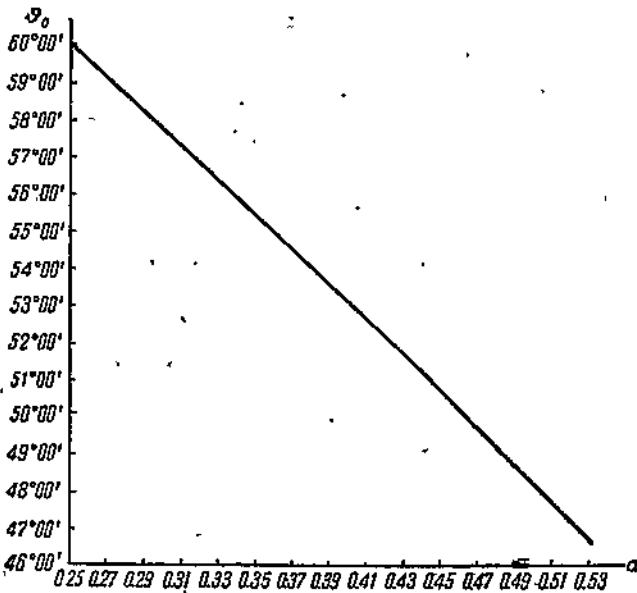
$$AC' = a, \quad CC' = b.$$

Углу α_1 в исходном механизме будет соответствовать угол поворота кривошипа AC' за время перемещения точки M из среднего положения в положение M_1 или M'_1 .

Полный угол поворота кривошипа AC' за время прохождения точкой M приближенно прямолинейного участка длины l равен $2\alpha_1$. Величины l и E



Фиг. 117а



Фиг. 117б

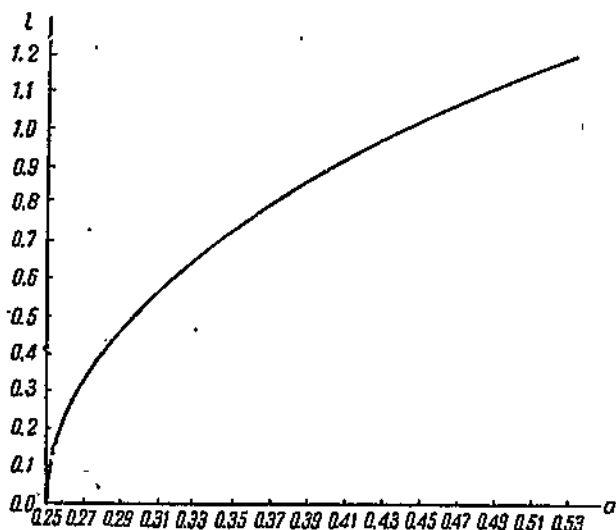
для исходного механизма (фиг. 50), если длина звена AB принята за единицу, следует увеличивать в два раза, так как в силу соотношения (11)

$$AB = \frac{A'C'}{2}$$

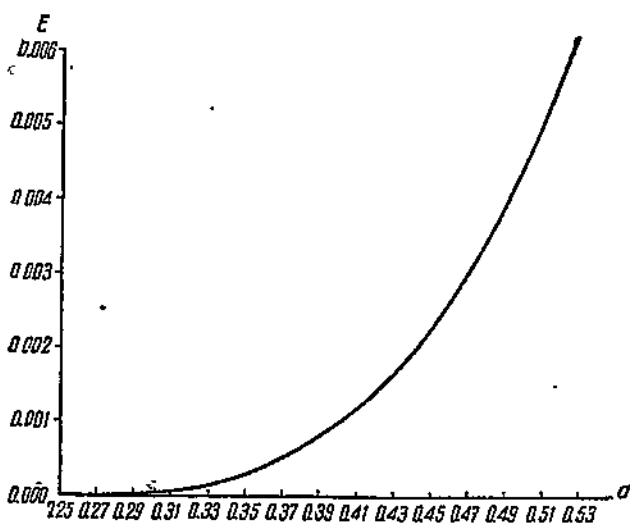
По значениям, приведенным в табл. 4, построены графики для величин b и φ_0 (фиг. 117а и б), l и E (фиг. 118а и б) и величины угла $2\alpha_1$ (фиг. 119).

Как показано в Приложении № 3, исходный механизм (фиг. 50) дает более равномерную шкалу, чем преобразованный механизм (фиг. 51).

Для определения равномерности шкал, доставляемых исходным механизмом, построены графики v_M (фиг. 120) скорости точки M в функции угла



Фиг. 118а

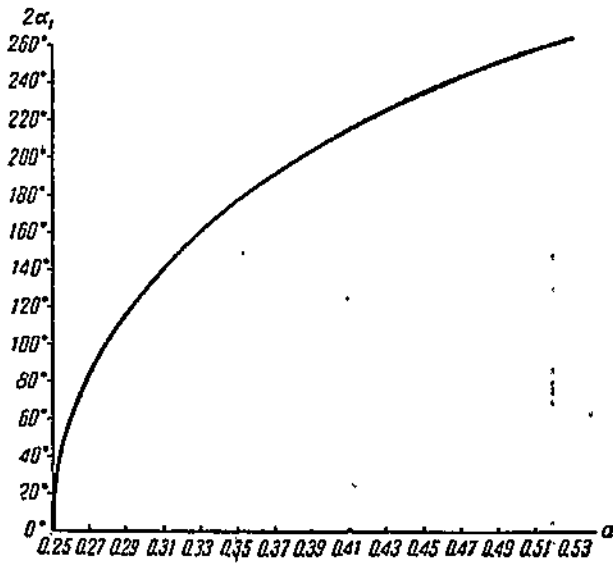


Фиг. 118б

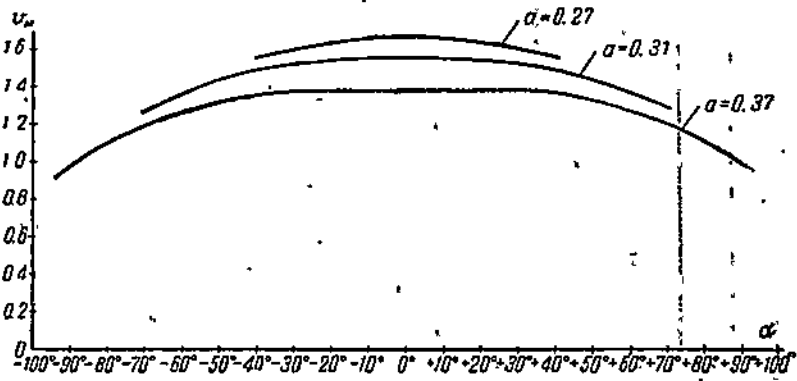
поворота ведущего звена AC' при условии, что скорость точки A звена AC' принята равной единице ($v_A = 1$).

Значения скорости v_M определены для приближенно прямолинейного участка траектории точки M трех механизмов, имеющих длины кривошипов AC' , равные соответственно 0,27; 0,31 и 0,37.

Как видно из графиков (фиг. 120), эти механизмы обеспечивают получение весьма равномерных шкал.



Фиг. 119



Фиг. 120

Приложение № 5

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ ДЛЯ МЕХАНИЗМА № 28

Кинематическая схема исходного механизма дана на фиг. 58; а преобразованного — на фиг. 59. Относительные размеры звеньев исходного механизма (фиг. 58) при $AB=BC=BM=1$ могут быть выражены через один параметр, например через угол $\phi = \angle BAM = \angle BMA$.

Из табл. 5 видно, как изменяются величины, характеризующие данный механизм с изменением величины ϕ .

Таблица 5

ϕ	r	d	E	θ_0	c
1	2	3	4	5	6
45°00'	0.0000	1.4142	0.00000	45°00'	0.0000
44 58	0.0961	1.4118	0.00015	41 04	-0.0480
44 56	0.1859	1.4093	0.00045	39 25	-0.0678
44 54	0.1659	1.4068	0.00081	38 09	-0.0827
44 52	0.1911	1.4044	0.00126	37 05	-0.0951
44 50	0.2133	1.4020	0.00175	36 08	-0.1060
44 48	0.2331	1.3996	0.00231	35 17	-0.1157
44 46	0.2512	1.3972	0.00290	34 30	-0.1246
44 45	0.2597	1.3960	0.00322	34 07	-0.1287
44 44	0.2679	1.3948	0.00354	33 46	-0.1327
44 43	0.2759	1.3936	0.00388	33 25	-0.1365
44 42	0.2835	1.3924	0.00422	33 04	-0.1403
44 40	0.2981	1.3901	0.00493	32 25	-0.1474
44 38	0.3120	1.3877	0.00568	31 48	-0.1540
44 36	0.3252	1.3854	0.00647	31 13	-0.1603
44 33	0.3436	1.3819	0.00769	30 22	-0.1691
44 30	0.3610	1.3784	0.00899	29 35	-0.1774
44 25	0.3877	1.3726	0.01130	28 20	-0.1899
44 20	0.4121	1.3670	0.01370	27 11	-0.2013
44 15	0.4347	1.3615	0.01630	26 05	-0.2118
44 10	0.4556	1.3558	0.01900	25 05	-0.2213
44 05	0.4752	1.3503	0.02180	24 07	-0.2301
44 00	0.4936	1.3448	0.02480	23 11	-0.2383
43 55	0.5109	1.3394	0.02780	22 19	-0.2460
43 50	0.5273	1.3354	0.03100	21 21	-0.2531
43 45	0.5428	1.3288	0.03420	20 38	-0.2598

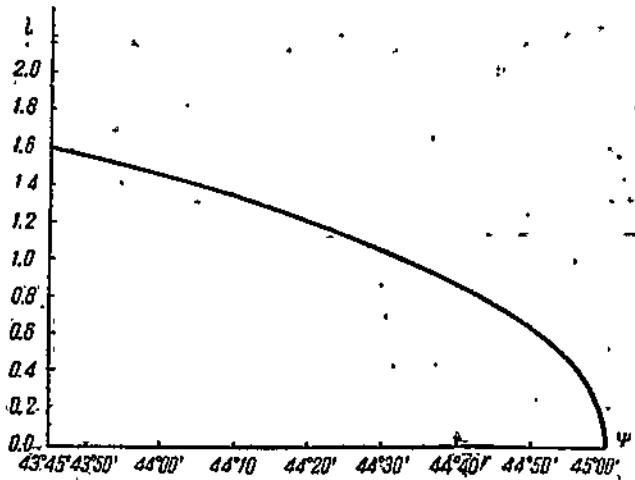
В графе 1 этой таблицы даны значения величины угла в пределах от 45° до 43°45'.

В графах 2 и 3 даны значения относительных размеров звеньев $AC'=r$ и $CC'=d$, определенные по формулам (84) и (85).

В графе 4 даны значения величины E — максимального отклонения траектории точки M от прямолинейности для исходного механизма (фиг. 58), определенные по формуле (87).

В графе 5 даны значения величины угла $\vartheta_0 = \angle BAC' = \angle BCC'$ (в среднем положении механизма), определенные по формуле (11). Для преобразованного механизма (фиг. 59) при $A'C' = A''C'' = 1$ относительные размеры звеньев будут равны

$$\begin{aligned} A'A'' &= r, \\ C'C'' &= d, \\ MN &= \varepsilon. \end{aligned}$$

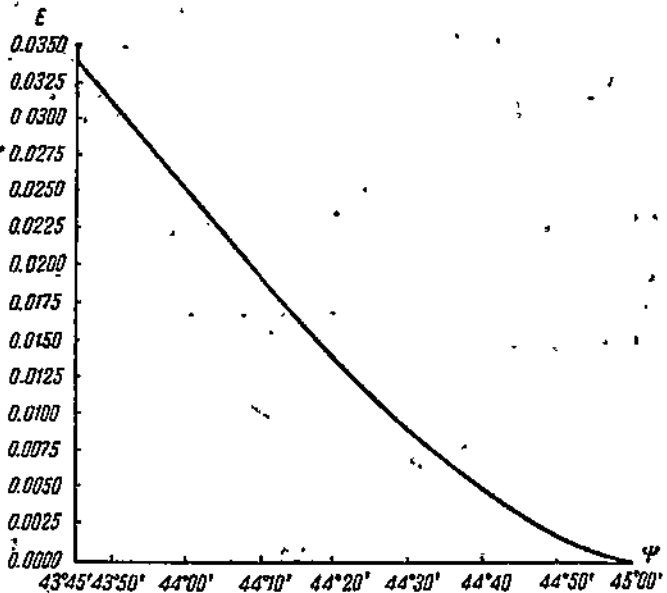


Фиг. 121а

В графе 6 даны значения величины ε , определенные по формуле (9).

Для преобразованного механизма угол $\vartheta_0 = \angle A'C'C'' = \angle A''C''C'$ (в среднем положении механизма).

Величину E для преобразованного механизма, если длина звена $A'C'$ принята за единицу, следует уменьшать в отношении $\frac{AB}{A'C'} = \frac{1}{2 \cos \phi}$ согласно условию (3).



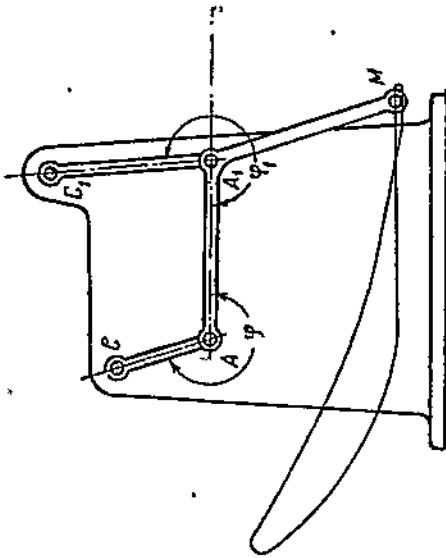
Фиг. 121б

По значениям, приведенным в табл. 5,

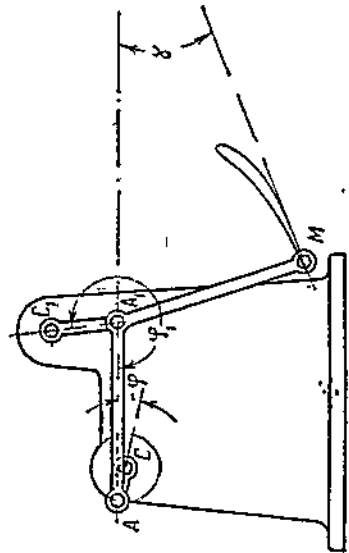
построены графики изменения величин E (фиг. 121а) и длины хода l точки M (фиг. 121б). Для определения же относительных размеров звеньев, т. е. величин r и d следует пользоваться графиком, приведенным на фиг. 105а и б, так как формулы для определений r и d в механизмах № 23 и 6 совпадают, если принять угол ϕ равным вспомогательной величине ψ .

В графе 5 даны величины $AC=r$ (при $AM=1$), определенные по формуле (95).

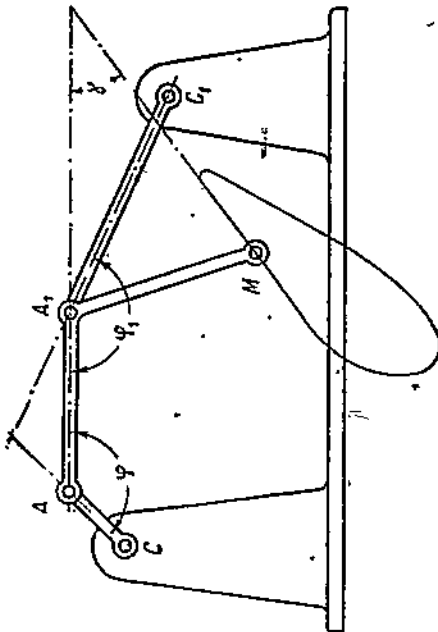
В графе 6 даны величины $A_1C_1=r_1$ (при $AM=1$), определенные по формуле (96).



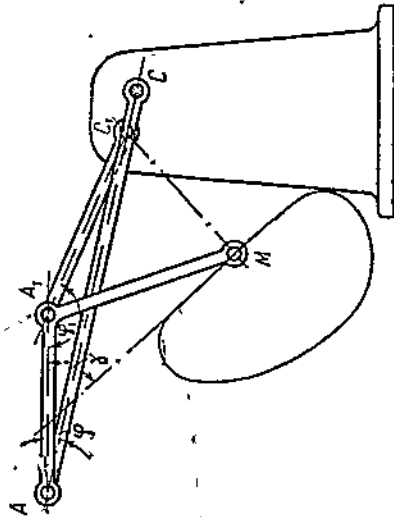
Фиг. 124



Фиг. 126

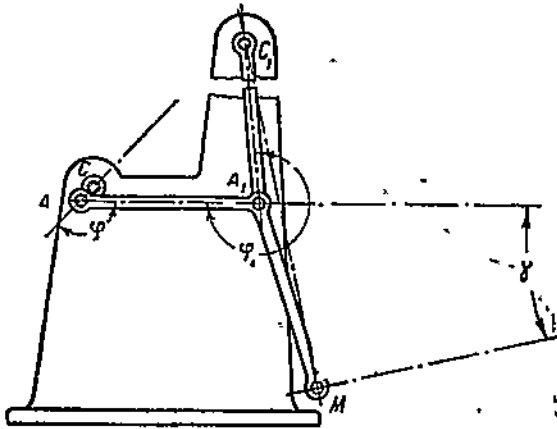


Фиг. 123

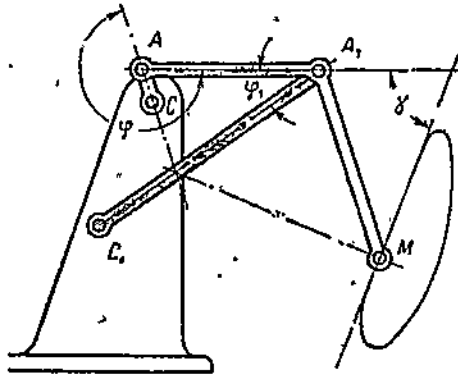


Фиг. 125

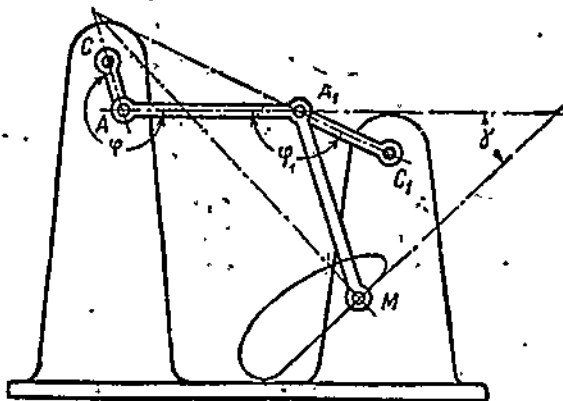
В графе 7 указаны номера фигур, на которых изображены механизмы с параметрами, указанными в табл. 6. Не показаны лишь те механизмы, которые имеют длины звеньев несоразмерно большие или, наоборот, несоразмерно малые (фиг. 123—129).



Фиг. 127



Фиг. 128



Фиг. 129

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ П. Л. ЧЕБЫШЕВА „О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ“

В статье „О параллелограмах“ П. Л. Чебышев дает формулы** для определения размеров звеньев прямолинейно-направляющего механизма, изображенного на фиг. 130.

В последнюю из приведенных формул, определяющую размер звена AB механизма

$$AB = \frac{1-f-f^2}{f(1-f)} h,$$

повидному, вкралась досадная опечатка, так как на самом деле

$$AB = \frac{f}{1-f-f^2} h,$$

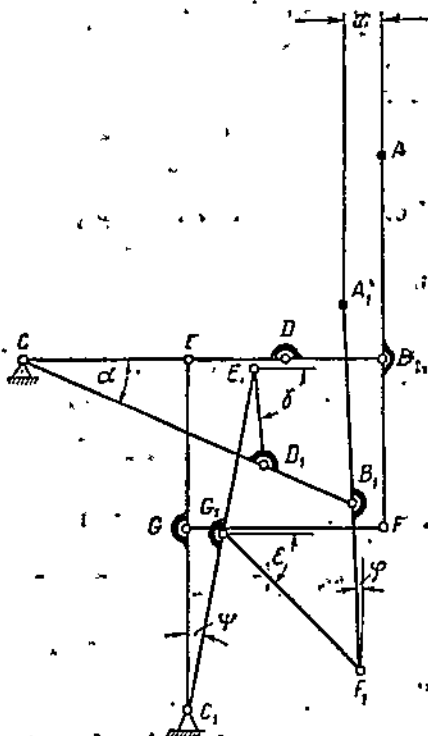
что непосредственно вытекает из следующего. Рассматривая два положения механизма Чебышева, имеем для определения уклонения x траектории точки A от вертикальной прямой $y-u$

$$x = 1 + AB \sin \psi - \cos \alpha, \quad (I)$$

где $BC=1$. Полагая

$GF_1=f, BF=h, ED=e, GE=c,$
имеем

$$CE=1-f, C_1G_1=c-h, \\ CD=1-f+e.$$



Фиг. 130

Из фиг. 130 видно, что

$$\left. \begin{aligned} e \cos \gamma &= (1-f+e) \cos \alpha - c \sin \psi + f - 1, \\ e \sin \gamma &= (1-f+e) \sin \alpha + c \cos \psi - c. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Полагая далее, что $\sin \psi$ и $\cos \psi$ разлагаются в ряды

$$\cos \psi = 1 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots$$

$$\sin \psi = b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \dots$$

* Приложение № 7 написано Э. Ш. Блохи.

** Чебышев П. Л. О параллелограмах. Соч., т. II, стр. 90, СПб., 1907.

и исключая из системы (II) угол γ , получим, пользуясь формулами, аналогичными формулам (70) и (71), приведенным в нашей статье, опубликованной в настоящем сборнике (стр. 163),

$$\cos \phi = 1 - \frac{(1-f+e)^2(1-f)^2}{8c^2e^2} a^4 + a_3 a^3 + \dots$$

и

$$\begin{aligned} \sin \phi = & \frac{(1-f+e)(1-f)}{2ce} a^2 + \\ & + \frac{(1-f+e)(1-f)}{8ce} \left[\frac{(1-f+e)(1-f+2e)}{e^2} - \frac{1}{3} \right] a^4 - \frac{(1-f+e)^2(1-f)^2}{8c^2e^2} a^5 \dots \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} f \cos \varepsilon = \cos \alpha + h \sin \varphi + (h-c) \sin \phi + f - 1, \\ f \sin \varepsilon = \sin \alpha + h \cos \varphi + (c-h) \cos \phi - c. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Полагая, что $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ разлагаются в ряды

$$\cos \varphi = 1 + r_2 a^2 + r_3 a^3 + \dots$$

и

$$\sin \varphi = m_1 a + m_2 a^2 + \dots$$

и исключая из системы (III) угол ε , получим после замены $\sin \phi$, $\cos \phi$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ соответствующими разложениями по степеням a ,

$$\sin \varphi = \left[\frac{f-1}{2fh} - \frac{(h-c)(1-f)(1-f+e)}{2ceh} \right] a^2 + m_4 a^4 + m_5 a^5 + \dots,$$

где m_4 и m_5 определяются из уравнений

$$\begin{aligned} m_4 h f + \frac{b_2(c-h)}{2} - \frac{m_2 h}{2} + b_4(h-c) f + \frac{f-1}{24} + b_2 m_2 (h-c) h - \\ - a_4 (c-h)^2 + \frac{m_2^2 h^2}{3} = 0 \end{aligned} \quad (IV)$$

и

$$h f m_5 + f(h-c) b_5 - \frac{h m_2^2}{2} + (c-h) a_4 = 0. \quad (V)$$

Подставляя найденное значение $\sin \varphi$ в (1) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях a , получим систему уравнений для определения искомого размера звеньев механизма

$$\left. \begin{aligned} m_2 AB + \frac{1}{2} = 0, \\ m_4 AB - \frac{1}{24} = 0, \\ m_5 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Полагая на основании (VI) в уравнениях (IV) и (V) $m_5 = 0$, $m_4 = -\frac{m_2}{12}$ получим

$$\frac{1+f}{f^2} - \frac{(c-h)(d+e)fa^2}{ce^2} = 0$$

и

$$\frac{(c-h)fa^2}{4c^2} + \frac{(c-h)a}{2chf} - \frac{(c-h)a^2}{4ch} - \frac{1}{4hf^2} = 0,$$

где положено

$$z = \frac{1-f+e}{e}$$

Решая уравнения (VII) относительно e и c , получим

$$e = \frac{(1-f)f^2}{1-2f^2}$$

и

$$c = \frac{(1-f)^2(1+f)h}{1-f-f^2}$$

что совпадает соответственно с значениями ED и EC' размеров звеньев, полученными Чебышевым. Для определения AB имеем по первому уравнению системы (VI)

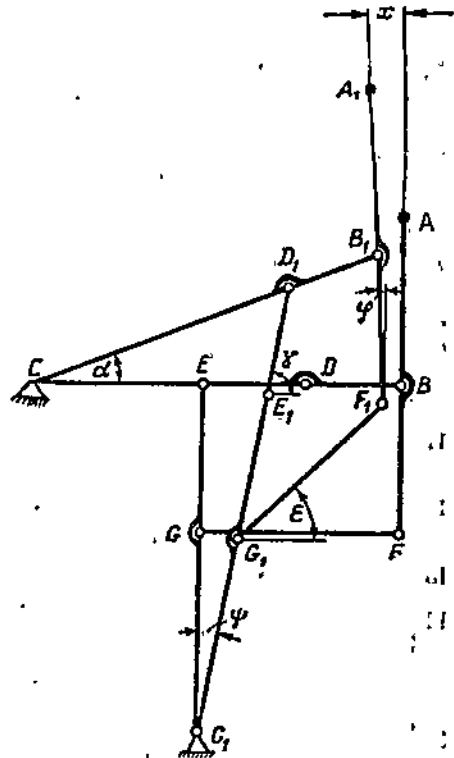
$$AB = -\frac{1}{2m_2}$$

Воспользовавшись значением m_2 и найденными выше значениями c и e , получим

$$AB = \frac{f}{1-f-f^2} h.$$

Отметим, что при движении звена CB механизма из начального положения против часовой стрелки (фиг. 131)

вычисления с той же степенью точности дают те же расчетные формулы для размеров звеньев механизма, что и при движении звена CB по часовой стрелке (фиг. 130).



Фиг. 131

Приложение № 8

УКАЗАТЕЛЬ МЕХАНИЗМОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

№ пп.	Наименование механизма	Источник	№ фиг.	Стр.
1.	Симметричный механизм (общий случай)	Чебышев П. Л., Соч. т. II, стр. 493	1	12
2.	Круговой направляющий механизм (общий случай)	Там же, стр. 512	14	20
3.	Круговой направляющий механизм с чертящей точкой, расположенной на оси шатуна	стр. 514	15	22
4.	Круговой направляющий механизм, дающий приближение всей шатуновой кривой к полной окружности	стр. 528	16	23
5.	Круговой направляющий механизм, дающий приближение всей шатуновой кривой к дуге окружности	стр. 534	17	25

Продолжение

№ пп.	Наименование механизма	Источник	№ фиг.	Стр.
6	Круговой направляющий механизм с чертящей точкой, расположенной на оси шатуна, дающий приближение всей шатунной кривой к окружности	Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 493, 519	18	26
7	Четырехзвенная противовращательная рукоятка		19	27
8	Самокатное кресло	То же	21	28
9	Шестизвенная противовращательная рукоятка	Модель из архива Чебышева	23	29
10	Парадоксальный механизм*	То же	25	30
11	Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа	.	27	32
12	Механизм для преобразования качательного движения во вращательное	.	29	33
13	„Велосипед“	Фотоснимок из архива Чебышева	31	34
14	Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом	Модель из архива Чебышева	33	35
15	Пресс	То же	35, 36, 37	37
16	Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода	.	38	37
17	„Сортировалька“	Фотоснимок из архива Чебышева	40	38
18	Механизм с остановкой ведомого звена на полпути	Модель из архива Чебышева	42	39
19	Механизм с остановками в крайних положениях	То же	44	40
20	Механизм противовращательной рукоятки с остановкой ведомого звена	.	46	41
21	Симметричный, прямолинейно-направляющий механизм (общий случай)	Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 283, 709	48, 49	44
22	Симметричный прямолинейно-направляющий механизм с чертящей точкой, расположенной на оси шатуна	Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 49	50, 51	49
23	Симметричный прямолинейно-направляющий механизм, дающий приближение всей шатунной кривой к прямой	стр. 526.	58, 59	50
24	„Переступающий механизм“ („Стопоходящая машина“)	Модель из архива Чебышева	60—69	52
25	Гребной механизм	То же	70	53
26	Несимметричный четырехзвенный прямолинейно-направляющий механизм с шатунной кривой, имеющей с прямой соприкосновение 5-го порядка	Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 299	75	56

Продолжение

№ пп.	Наименование механизма	Источник	№ фиг.	Стр.
27	Несимметричный четырехзвенный прямолинейно-направляющий механизм с шатунной кривой, имеющей с прямой соприкосновение 4-го порядка	Там же, стр. 357	76	58
28	Прямолинейно-направляющий механизм, преобразованный по Чебышеву	стр. 367	77	60
29	Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, получаемый из полного параллелограмма Уатта	т. I, стр. 531	79	61
30	Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, тонкий до 6-й степени	т. II, стр. 89	81	62
31	Симметричный прямолинейно-направляющий механизм с пантографом	стр. 57	82	63
32	Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, получаемый на сокращенного параллелограмма Уатта	стр. 91	83	64
33	Многозвенные прямолинейно-направляющие механизмы с лямбда-образными группами	стр. 93	84	64
34	Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, дающий приближение всей шатунной кривой к прямой	стр. 95	87	65
35	Несимметричный круговой направляющий механизм	Модель из архива Чебышева	88	68
36	Кулисный механизм паровой машины	То же	90	69
37	Весы		93	70
38	Измеритель кривизны		95	71
39	Арифмометр (Счетная машина с непрерывным движением)	Чебышев П. Л., Соч., т. II, стр. 721	97	72
40	Центробежный регулятор	Там же, стр. 107	98, 99	72
41	Механизм с изменяемым ходом	Модель из архива Чебышева	100	72

ЛИТЕРАТУРА

- Бобылев Д., О симметричных параллелограмах Чебышева. Сб. Инст. инж. путей сообщ., т. I, вып. 70.
- Бодль В. Г., Инструменты и аппараты для геометрического черчения, М., 1893.
- , Арифмометр Чебышева, Труды физ. сек. Общ. люб. естеств., т. VII, вып. I, 1894.
- Стеклов В. А., Теория и практика в исследованиях Чебышева, 1921.
- Чебышев П. Л. Соч., т. I; 1899; т. II; 1907.
- Arithmomètre de Tchebychef. Ann. de Conservatoire des Arts et Métiers, t. V, 2^e serie, Paris, 1893.
- De launay N., Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Ztschr. für Math. und Phys., B. 44, N. 4, 1899.
- Recréations mathématiques par E. Lucas, t. IV, Paris, 1894.
- Vassilief A., P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique, Turin, 1898.

В. Ш. БЛОХ

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТ Н. Л. ЧЕБЫШЕВА ПО МЕТРИЧЕСКОМУ СИНТЕЗУ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ*

ВВЕДЕНИЕ

Развитие машиностроения в XIX в. и возникшие в связи с этим задачи усовершенствования механизмов конструируемых машин привлекли внимание ряда выдающихся математиков и механиков к рассмотрению и решению некоторых важных задач по теории механизмов, к числу которых относятся и задачи синтеза механизмов.

В связи с большим интересом, который представляли прямолинейно-направляющие механизмы, применявшиеся в паровых машинах того времени, значительное внимание было уделено разработке методов синтеза шарнирных механизмов для приближенного черчения заданных кривых.

Сущность такого рода задач заключается, как известно, в определении размеров звеньев шарнирного механизма, у которого траектория некоторой определенной точки шатуна имеет ряд общих элементов с заданной кривой и, следовательно, может эту заданную кривую заменить на каком-то определенном участке.

В наиболее примитивной постановке задачи о черчении заданной кривой выдвигается требование, чтобы шатунная кривая имела с заданной кривой определенное число точек пересечения, причем никаких дополнительных ограничений на взаимное положение кривых, в промежутках между точками пересечения, не накладывается. В такой постановке, эквивалентной задаче точечного интерполирования, задача о черчении заданной кривой была разработана Бурместером, который показал, что число задаваемых точек пересечения в случае шарнирного четырехзвенника не превосходит пяти. Между тем хорошо известно [14],** что интерполяционный процесс далеко не

* Настоящая работа выходит под редакцией академика Н. Г. Бруевича, которому автор выражает свою признательность за просмотр рукописи. *З. Ш.*

** Здесь и далее цифрами в квадратных скобках даются ссылки на литературу, список которой приведен в конце статьи на стр. 182.

всегда дает приемлемое приближение к заданной кривой как раз в промежутках между точками пересечения кривых; в этом и состоит его основной недостаток.

Совершенно с другой стороны к задаче синтеза прямолинейно-направляющего механизма подошел выдающийся русский математик — академик П. Л. Чебышев. Изучая во время своих зарубежных командировок различные механизмы и машины, в частности известный прямолинейно-направляющий механизм Уатта, Чебышев пришел к совершенно новой и оригинальной постановке задачи синтеза прямолинейно-направляющих механизмов.

По Чебышеву задача синтеза шарнирного механизма для черчения заданной траектории заключается в определении размеров звеньев такого механизма, у которого траектория некоторой точки шатуна на заданном участке наименее уклоняется от заданной кривой, имея с ней определенное число точек пересечения. Отправляясь от задач синтеза прямолинейно-направляющих механизмов, Чебышев создал в математике совершенно новое направление — теорию наилучшего приближения функций при помощи *полиномов*, нашедшую себе широкое применение в математике и успешно развиваемую в настоящее время. В дальнейшем свой метод Чебышев с успехом применил к решению задачи о черчении дуг окружностей [10] и построении приближенного профиля зубца цилиндрического колеса [11].

Всякий механизм, построенный по методу Чебышева, дает наилучшее приближение к задаваемым функциям по сравнению с любым другим механизмом такого же типа, предназначенным для аналогичных целей. Количественно это наилучшее приближение при помощи механизмов Чебышева характеризуется тем, что наибольшее отклонение выполняемой механизмом функциональной зависимости от заданной функции на конечном интервале ее изменения будет минимальным. Все задачи по метрическому синтезу механизмов, рассмотренные Чебышевым в мемуарах и заметках [3—12], посвящены приближенному воспроизведению некоторых кривых, которые с успехом применяются в технике. Значительная часть работ Чебышева посвящена задаче о приближенном воспроизведении участков *прямых* при помощи *шатунных кривых*. В этих работах, наряду с методами, развитыми в теории наилучшего приближения функций [4—7], Чебышев широко применяет разложение в ряды [7, 8, 9].

Решенная им задача о приближенном воспроизведении *дуги окружности* при помощи шатунной кривой [10] является естественным обобщением задачи о синтезе прямолинейно-направляющего механизма. Эта задача может найти техническое применение при синтезе механизмов с остановкой заданной продолжительности. Наконец, Чебышевым была рассмотрена задача о приближенной замене дугами окружностей точных *профилей зубцов* цилиндрических колес при условии, что при такой замене передаточное отношение колес будет наименее уклоняться от заданного [11].

Глава I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ НАИЛУЧШЕГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛИНОМОВ*

§ 1. Системы функций Чебышева

Пусть задана совокупность $n+1$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$, линейно независимых** и непрерывных в некоторых пределах изменения независимой переменной x

$$a \leq x \leq b.$$

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ образуют в интервале (a, b) систему Чебышева, если полином

$$P(x) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + \dots + p_{n+1}\varphi_{n+1}(x),$$

где p_k ($k=1, 2, \dots, n+1$) — его коэффициент, составленный из этих функций, имеет не более n корней в интервале (a, b) .

В качестве примера возьмем систему функций $\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t}, 1, t$, рассмотренную нами в одной из задач по синтезу кулисного механизма [17]. Полином $P(t)$, составленный из четырех написанных функций

$$P(t) = p_1 \frac{1}{t^2} + p_2 \frac{1}{t} + p_3 + p_4 t,$$

имеет не более трех корней для любого интервала, не содержащего нулевой точки $t=0$.

Отсюда следует, что рассматриваемая система функций образует в этом же интервале систему Чебышева.

§ 2. Теорема Чебышева

Для функций, образующих систему Чебышева, справедлива фундаментальная теорема, установленная Чебышевым в 1857 г. [2] и приведенная им впервые без доказательства в 1853 г. [1].

Подробное доказательство теоремы Чебышева дал в своей монографии академик С. Н. Бернштейн [13]. Теорема Чебышева формулируется следующим образом:

Для того, чтобы полином

$$P(x) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + \dots + p_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$$

системы функций Чебышева наименее уклонялся от заданной непрерывной функции $f(x)$ в интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы разность

$$F(x) = f(x) - P(x)$$

* Более строгое и подробное изложение вопроса интересующиеся могут найти в монографии акад. С. Н. Бернштейна [13].

** Функции линейно независимы, если каждая из них не является линейной комбинацией других.

не менее $n+2$ раза достигала своих предельных значений $\pm L$, с последовательно чередующимися знаками в интервале (a, b) .

По теореме Чебышева коэффициенты p_1, p_2, \dots, p_{n+1} полинома $P(x)$, наименее уклоняющегося от заданной функции $f(x)$, и самое предельное отклонение L могут быть определены на основании таких соображений. Обозначая через x_1, x_2, \dots, x_{n+2} те значения x , при которых разность

$$F(x) = f(x) - P(x)$$

достигает своих предельных значений $\pm L$, согласно теореме Чебышева, имеем $n+2$ уравнения

$$F(x_i) = f(x_i) - P(x_i) = \pm L, \quad (i=1, 2, \dots, n+2).$$

Кроме того, так как разность $F(x)$, достигнув во всех промежуточных точках x_2, x_3, \dots, x_{n+1} своего предельного значения $\pm L$, не должна переходить за это значение, то производная $F'(x)$ в этих точках должна обращаться в нуль из условий максимума или минимума. Следовательно,

$$F'(x_i) = 0, \quad (i=2, 3, \dots, n+1).$$

Считая, что крайние точки $x_1 = a$ и $x_{n+2} = b$ соответствуют рассматриваемому интервалу (a, b) изменения x , в котором $f(x)$ непрерывна и $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ образуют систему Чебышева, имеем для определения $2n+4$ неизвестных

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; p_1, p_2, \dots, p_{n+1}; L$$

систему $2n+4$ уравнений

$$\begin{aligned} F(x_i) &= \pm L, \\ F'(x_i)(x_i - a)(x_i - b) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i=1, 2, \dots, n+2$.

Вычисленные по уравнениям (1) значения коэффициентов p_1, p_2, \dots, p_{n+1} определяют такой полином $P(x)$, для которого, по теореме Чебышева, наибольшее отклонение $\pm L$ от заданной функции $f(x)$ будет *минимальным*. Это означает, что по сравнению со всяким другим полиномом, составленным из заданной системы функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$, которым можно приближенно заменить функцию $f(x)$, полином $P(x)$ является *наилучшим* ее приближенным выражением.

§ 3. Функции, наименее уклоняющиеся от нуля

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$, линейно независимых и непрерывных в интервале (a, b) , не образующих в общем случае системы Чебышева. Если при отбрасывании одной какой-либо функции $\varphi_k(x)$ остальные функции рассматриваемой системы образуют систему Чебышева, то при помощи этих функций можно определить полином

$$P(x) = p_1 \varphi_1(x) + \dots + p_{k-1} \varphi_{k-1}(x) + p_{k+1} \varphi_{k+1}(x) + \dots + p_{n+1} \varphi_{n+1}(x),$$

наименее уклоняющийся от отброшенной функции $\varphi_k(x)$, или, при несколько иной формулировке задачи, полином

$$\Pi(x) = \varphi_k(x) - P(x) = p_1 \varphi_1(x) + \dots + p_{k-1} \varphi_{k-1}(x) + \varphi_k(x) + p_{k+1} \varphi_{k+1}(x) + \dots + p_{n+1} \varphi_{n+1}(x),$$

наименее уклоняющийся от нуля. Так как для полинома $P(x)$ и функции $\varphi_k(x)$ все условия теоремы Чебышева выполнены, то для определения полинома $\Pi(x)$, наименее уклоняющегося от нуля, применимы уравнения (1), если считать число точек предельного уклонения равным $n+1$.

В качестве примера рассмотрим систему *пяти* функций в пределах изменения переменной $0 < t_1 \leq t \leq t_5$

$$t^2, t, 1, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}.$$

Так как функции

$$t, 1, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2},$$

рассмотренные выше, образуют систему Чебышева, то полином

$$\Pi(t) = t^2 + p_3 t + p_2 + p_1 \frac{1}{t} + p_0 \frac{1}{t^2},$$

по теореме Чебышева, будет наименее уклоняться от нуля, если $\Pi(t)$ не менее *пяти* раз достигнет своих предельных значений при $t = t_1$, $t = t_2, \dots, t = t_5$.

Для определения полинома $\Pi(t)$ имеем по (1) такие уравнения:

$$t_i^2 + p_3 t_i + p_2 + p_1 \frac{1}{t_i} + p_0 \frac{1}{t_i^2} = \pm L, \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

и

$$2t_i + p_3 - p_1 \frac{1}{t_i^2} - 2p_0 \frac{1}{t_i^3} = 0, \quad (i = 2, 3, 4),$$

которые позволяют вычислить $p_0, p_1, p_2, p_3, L, t_2, t_3, t_4$ по заданным t_1 и t_5 , определяющим пределы изменения t .

Интересующихся подробным решением полученных уравнений отсылаем к нашей статье [17].

§ 4. Системы функций Чебышева с нулевой точкой

Рассмотрим совокупность функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$, линейно независимых и непрерывных в интервале (a, b) . Если все функции рассматриваемой системы обращаются в нуль при $x = a$ или $x = b$ (а также $x = a, x = b$ одновременно), то очевидно, что при этих же значениях x обратится в нуль и всякий полином

$$P(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_{n+1} \varphi_{n+1}(x).$$

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$ образуют в интервале (a, b) систему Чебышева с нулевой точкой, если, не считая соответствующих обязательно существующих корней $x = a$ или $x = b$ (а также $x = a, x = b$ одновременно), полином $P(x)$ имеет не более n корней. Таким образом, при подсчете

числа корней полинома $P(x)$ соответствующие обязательные корни a и b не должны учитываться, и в этом случае все условия теоремы Чебышева сохраняются, если рассматриваются полиномы, наименее уклоняющиеся от таких функций, которые при $x=a$ или $x=b$ сами обращаются в нуль.

В качестве примера рассмотрим систему трех функций

$$t, \frac{t}{1+t}, \frac{t}{(1+t)^2}$$

в интервале $0 \leq t \leq t_0$. Соответствующий обязательный корень, очевидно, равен $t=0$. Если не считать обязательный корень $t=0$, то при отбрасывании функции t остается система двух функций, образующая полином

$$P(t) = p_1 \frac{t}{1+t} + p_2 \frac{t}{(1+t)^2}$$

с одним корнем. Следовательно, функции

$$\frac{t}{1+t}, \frac{t}{(1+t)^2}$$

образуют систему Чебышева с нулевой точкой $t=0$, и полином

$$\Pi(t) = t + p_1 \frac{t}{1+t} + p_2 \frac{t}{(1+t)^2}$$

наименее уклоняется от нуля, если число точек предельного уклонения равно трем*.

Изложенные здесь краткие сведения по теории наилучшего приближения функций, основоположником и одним из создателей которой является Чебышев, необходимы для понимания сущности ряда его работ, посвященных проблеме приближенного синтеза механизмов.

Глава II

МЕХАНИЗМЫ ЧЕБЫШЕВА И ИХ МОДИФИКАЦИИ

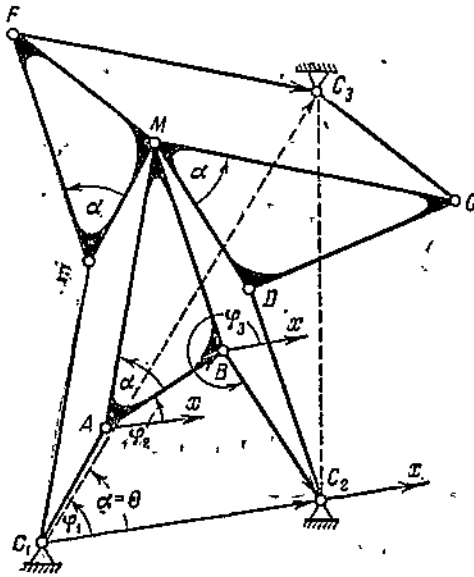
§ 5. Теорема Робертса.—Чебышева

Часто оказывается, что механизм, удовлетворяющий всем условиям поставленной задачи, не может быть использован на практике из-за неудачного соотношения между размерами звеньев, отсутствия кривошипа, недопустимых пределов изменения угла передачи и других причин. В связи с этим при рассмотрении задач синтеза весьма важно знать все возможные механизмы, которые могут быть использованы для решения поставленной задачи.

Рассматривая задачи о воспроизведении заданных кривых при помощи шарнирных механизмов, Чебышев дал построение, которое позволяет получить три четырехзвенных плоских шарнирных механизма с одной и той же траекторией определенных точек шатунной плоскости [6]. Следовательно, воспроизведение заданной шатунной кривой может быть осуществлено по крайней мере тремя различными четырехзвенными шарнирными механизмами.

*—Определение коэффициентов рассматриваемого полинома при решении одной задачи синтеза шарнирного механизма дано в нашей статье [19].

Построение, определяющее такого типа механизмы, показано на фиг. 1. Здесь C_1ABC_2 — некоторый произвольный плоский шарнирный четырехзвено-ник с точкой M , жестко связанной с шатуном AB . Строим параллелограммы



Фиг. 1

C_1AME и C_2BMD . На сторонах параллелограммов EM и DM строим соответственно треугольники EMF и MDG , подобные треугольнику ABM шатунной плоскости исходного механизма. На сторонах треугольников строим параллелограмм $FMGC_3$ и получаем механизм, у которого шарнир C_3 во всех возможных положениях механизма можно считать неподвижным. Чтобы установить это замечательное свойство точки C_3 механизма, достаточно показать, что радиус-вектор z точки C_3 , определяемый комплексным числом $z = C_1C_3e^{i\theta}$, постоянен и не зависит от угла поворота φ_1 кривошипа C_1A механизма. Имеем по фиг. 1*

$$z = C_1Ee^{i(\varphi_1+\alpha)} + EFe^{i(\varphi_1+\alpha)} + FC_3e^{i(\varphi_1+\alpha)}.$$

Так как по построению,

$$C_1E = AM, EF = \frac{AM \cdot C_1A}{AB}, FC_3 = \frac{AM \cdot BC_2}{AB},$$

то

$$z = \frac{AM}{AB} e^{i\alpha} [C_1Ae^{i\varphi_1} + AB e^{i\varphi_1} + BC_2e^{i\varphi_1}] = \frac{AM}{AB} C_1C_2e^{i\alpha} = \text{const.}$$

Сравнивая полученное значение z с $z = C_1C_3e^{i\theta}$, можно отметить, что $\theta = \alpha$ и $\frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \frac{AM}{AB}$; следовательно, треугольник $C_1C_2C_3$ с вершинами в неподвижных точках подобен треугольнику ABM . Это обстоятельство позволяет определить положение неподвижного шарнира C_3 непосредственным построением на стойке C_1C_2 треугольника, подобного треугольнику ABM шатунной плоскости исходного механизма.

Таким образом устанавливается существование трех шарнирных четырехзвенных механизмов C_1ABC_2 , C_2DGC_3 и C_1EFC_3 , у которых точки M шатунных треугольников AMB , DMG и EMF описывают одну и ту же шатунную кривую. Это свойство точек шатунных плоскостей четырехзвенных шарнирных механизмов известно в иностранной и русской литературе под названием теоремы Робертса по имени английского ученого Робертса, впервые давшего доказательство этой теоремы в 1875 году.

Несколько позже Робертса (в 1878 г.) в указанном выше мемуаре [6] Чебышев дал построение, преобразующее его перекрестный механизм C_1ABC_2 в так назы-

* Приведенное здесь доказательство дано Я. Б. Шором. Прикл. мат. и мех., т. V, вып. 2, 1941.

ваемый лямбдообразный механизм C_2C_2DGM , и показал, что траектории точек M этих четырехзвенных механизмов совпадают (фиг. 2).

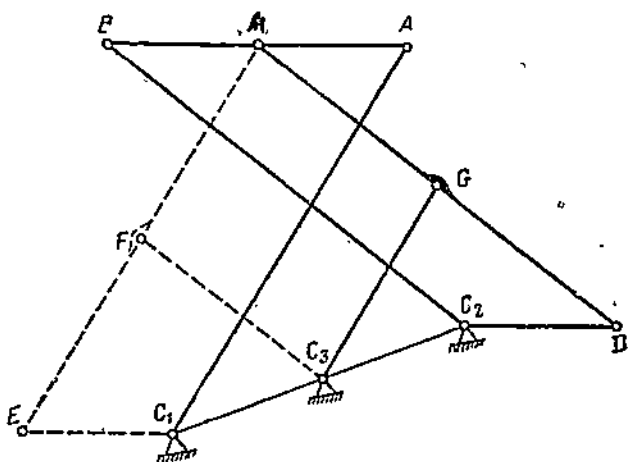
Построение Чебышева состоит в следующем. Из точки M , лежащей на середине шатуна AB заданного перекрестного механизма C_1ABC_2 (фиг. 2), проводим линию MD ,

равную и параллельную BC_2 . Отмечаем точки C_3 и G , лежащие соответственно на серединах звеньев C_1C_2 и MD , и соединяем C_3 с G и C_2 с D . Нетрудно видеть, что построение Робертса совпадает с построением Чебышева в случае, когда точка M шатуновой плоскости *лежит на линии шатуна*. Для более удобного сличения обоих построений соответствующие точки на фиг. 1 и 2 обозначены одинаковыми буквами.

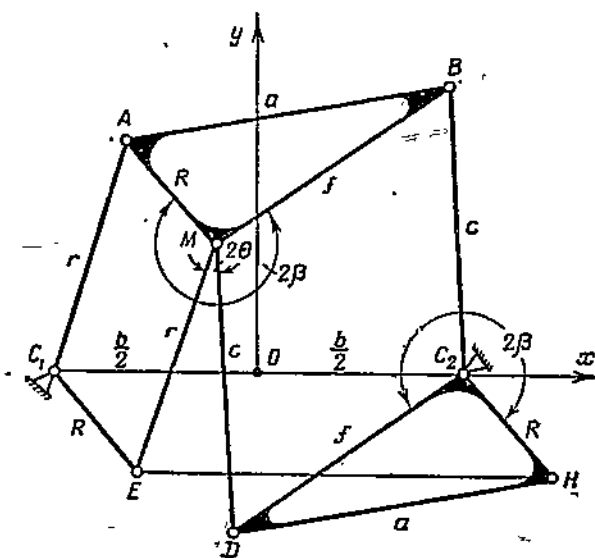
В конце своего мемуара [6] Чебышев распространил указанное им построение и на тот случай, когда точка M *не лежит на линии шатуна* AB , повторив, таким образом, результат Робертса. Сличение доказательств обоих ученых с несомненностью убеждает в том, что свой результат Чебышев получил совершенно независимо от Робертса. На основании изложенного можно

следующим образом сформулировать теорему Робертса—Чебышева: *траекторию любой точки M шатуновой плоскости шарнирного четырехзвенника можно осуществить как траекторию некоторой точки шатунов трехшарнирных четырехзвенников.*

Следует отметить, что, используя построение Чебышева, можно получить еще три новых шестизвенных механизма, определенные точки которых описывают траектории, совпадающие с траекториями точек M шарнирных



Фиг. 2



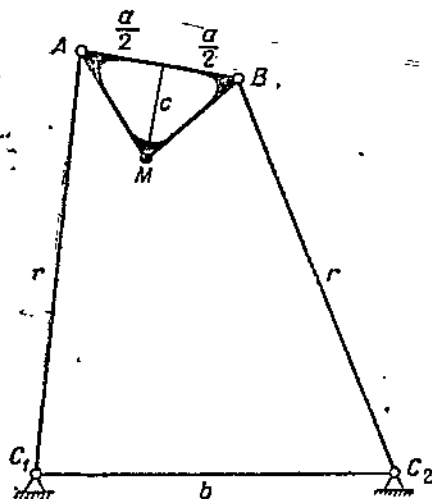
Фиг. 3

четырёхзвенников, изображенных на фиг. 1. Построение, определяющее такие механизмы, изложено нами в заметке [18].

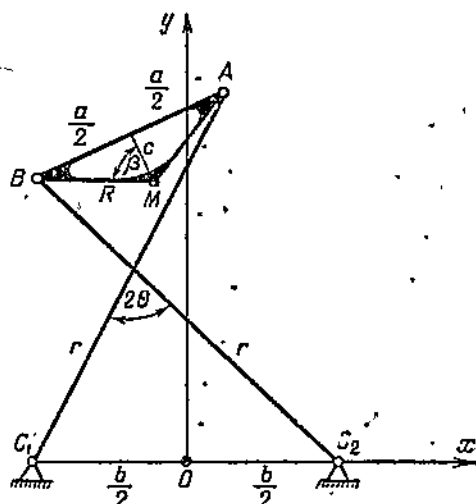
Пусть C_1ABC_2 — произвольный шарнирный четырёхзвенник (фиг. 3) с точкой M , лежащей в плоскости шатуна AB . Построим параллелограммы C_1AME и C_2BMD . Замечая, что при движении образовавшегося механизма звенья C_1E и C_2D находятся всегда под постоянным углом, равным углу AMB , строим параллелограмм C_1ENC_2 и соединяем точки H и D жестко. Тогда очевидно, что траектория точки M (шестизвенного) параллелограммного механизма C_1ENC_2 с двухпроводковой группой (диадой) DME совпадает с траекторией точки M исходного четырёхзвенного механизма C_1ABC_2 . Так как шестизвенные параллелограммные механизмы можно построить для каждого из трех шарнирных четырёхзвенников, удовлетворяющих теореме Робертса — Чебышева, то эту теорему можно дополнить и изложить в следующей редакции: *траекторию любой точки M шатунной плоскости шарнирного четырёхзвенника можно осуществить как кривую некоторой точки шатунов трех шарнирных четырёхзвенников и как кривую среднего шарнира диады трех шестизвенников, образованных присоединением этих диад к кривошипам параллелограммных механизмов.**

§ 6. Модификации симметричных механизмов Чебышева

Применяя общие теоремы теории наилучшего приближения функций к различным задачам синтеза шарнирных механизмов, Чебышев создал ряд



Фиг. 4



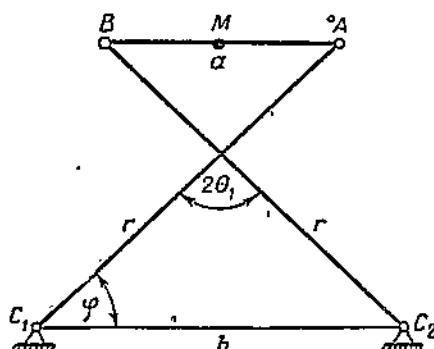
Фиг. 5

новых замечательных механизмов, из которых особенно интересными являются так называемые *симметричные механизмы Чебышева* и их модификации. Для симметричного механизма Чебышева коромысла C_1A и BC_2 равны, а точка M лежит на перпендикуляре c , восстановленном из середины шатуна (фиг. 4 и 5).

* Дальнейшее обобщение теоремы Робертса — Чебышева дано в работе И. И. Артоболовского и Н. И. Левитского (см. Приложение № 1, стр. 76 настоящего сборника).

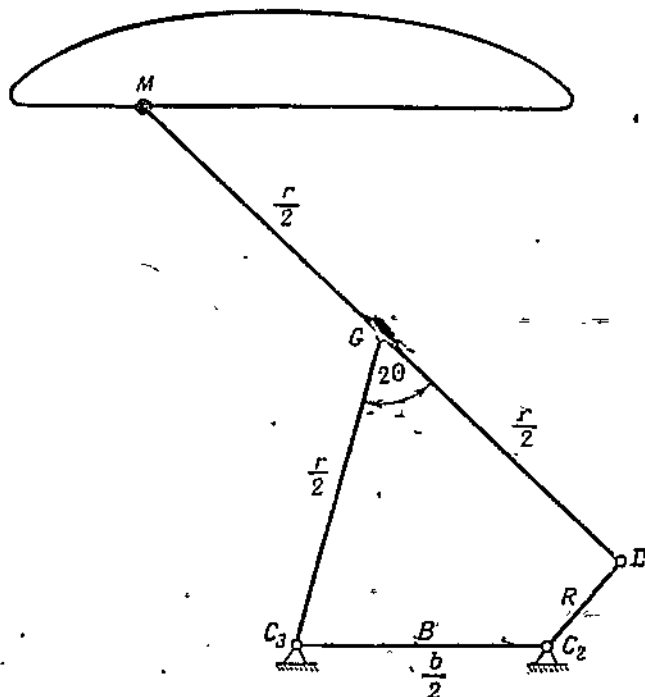
Траектория точки M механизмов Чебышева рассматриваемого типа симметрична относительно оси, перпендикулярной стойке и проходящей через ее середину. Частный случай симметричного механизма с точкой M , лежащей на середине шатуна (фиг. 6), рассмотрен Чебышевым в одном из первых его мемуаров по теории механизмов [4].

Воспользовавшись теоремой Робертса — Чебышева, построим различные модификации симметричных механизмов. На фиг. 2 дано построение для образования известного лямбдаобразного механизма Чебышева. Это построение указано Чебышевым в мемуаре [6]. Полученный лямбдаобразный механизм изображен отдельно на фиг. 7.



Фиг. 6

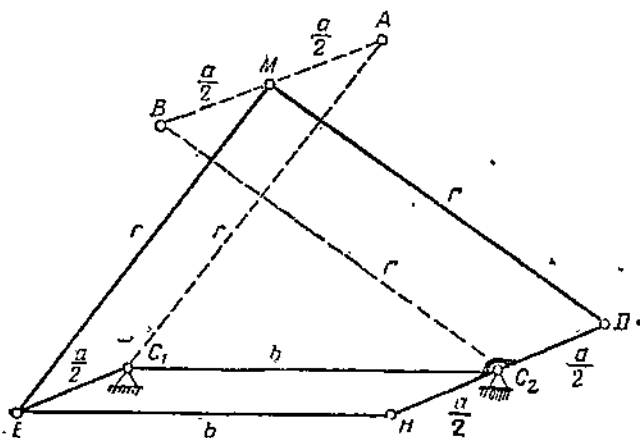
Легко видеть, что третьей четырехзвенной модификацией симметричного механизма C_1ABC_2 , удовлетворяющей теореме Робертса — Чебышева, будет также лямбдаобразный механизм C_3C_1EFM (фиг. 2). На фиг. 8 показано построение шестизвенной модификации $MDHEC_1C_2$ четырехзвенного сим-



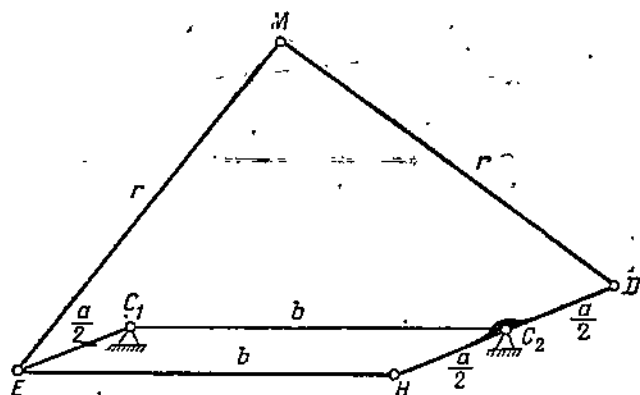
Фиг. 7

метричного механизма C_1ABC_2 . Отдельно этот механизм изображен на фиг. 9. Аналогичным образом строится шестизвенная модификация лямбдаобразного механизма Чебышева (фиг. 10).

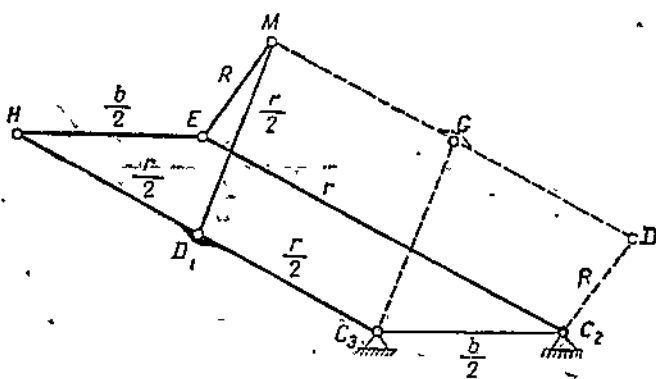
В рассматриваемом случае можно указать четыре механизма с одина-



Фиг. 8



Фиг. 9



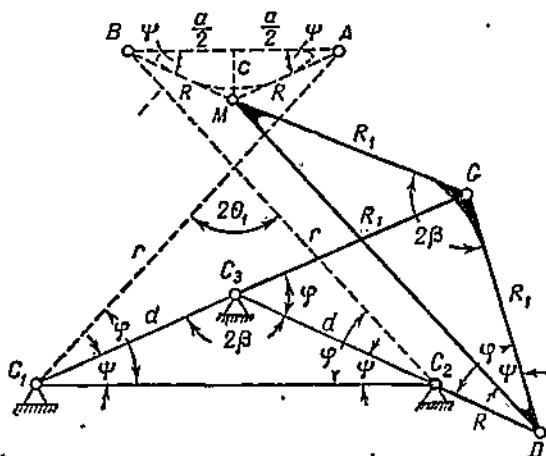
Фиг. 10

ковыми шатунными кривыми; механизмы эти показаны на фиг. 6, 7, 9 и 10, Условия наилучшего приближения шатунных кривых к прямой, указанные Чебышевым, справедливы для всех этих механизмов.

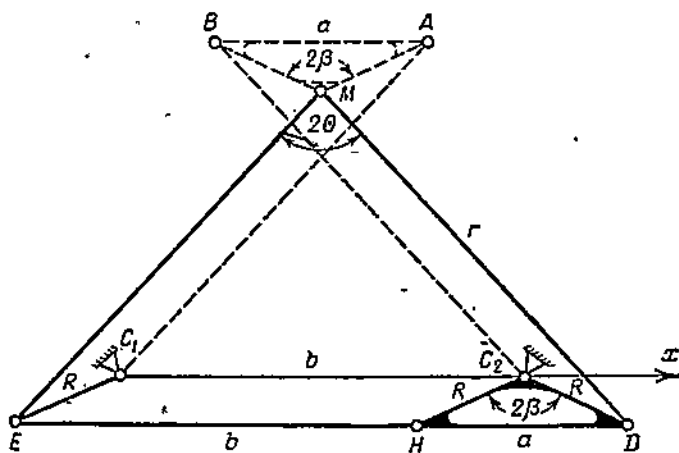
В более общем случае точка M шатуна может лежать на перпендикуляре, восстановленном к линии AB из ее середины.

Такие симметричные механизмы (фиг. 4 и 5) и их модификации рассмотрены Чебышевым в двух мемуарах [7 и 12]. На фиг. 11 и 12 показаны различные модификации этих четырехзвенных механизмов, полученные по теореме Роберта—Чебышева и на основании преобразования, изложенного в § 5. Точки M этих механизмов описывают одинаковые траектории. Очевидно, что механизм, изображенный на фиг. 11, является общим типом симметричных механизмов, изученных Чебышевым в указанных выше мемуарах [4, 6, 7]. Этому механизму Чебышев посвятил специальный мемуар [12], где изложил решение задачи о наилучшем приближении траектории точки M к окружности либо к прямой.

Аналогично, общим типом шестизвенных параллелограммных механизмов является механизм, изображенный на фиг. 12.



Фиг. 11



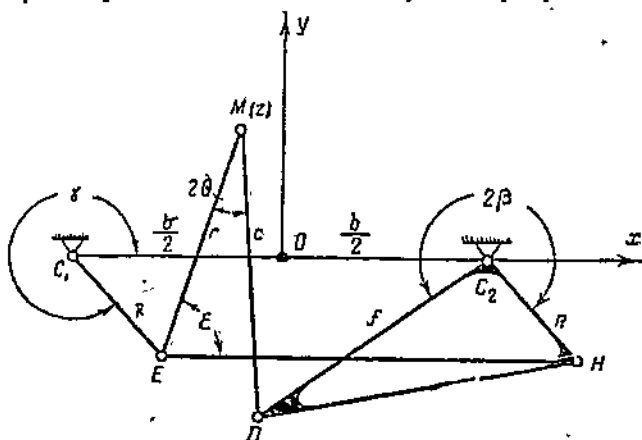
Фиг. 12

Теория этого механизма дает возможность одновременно получить все необходимые формулы как для шестизвенных, так и для четырехзвенных его модификаций.

§ 7. Уравнение шатунной кривой шарнирного четырехзвенника

Для последующего исследования необходимо иметь уравнение траектории произвольной точки шатуна шарнирного четырехзвенника в параметрическом виде, где

за параметр принят переменный угол между кривошипом и коромыслом механизма. Воспользовавшись шестизвенной модификацией шарнирного четырехзвенника, показанной на фиг. 3, и расположив начало координат O на середине отрезка $C_1C_2 = b$, получим векторные равенства,



Фиг. 13

определяющие положение точки M шатуна (фиг. 13),

$$\overline{OM} = \overline{OC_1} + \overline{C_1E} + \overline{EM},$$

и

$$\overline{OM} = \overline{OC_2} + \overline{C_2D} + \overline{DM}.$$

Обозначая через z комплексную координату точки M и вводя комплексные числа, получим

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}b + Re^{i\gamma} + re^{i\epsilon}, \\ z &= \frac{1}{2}b + fe^{i(\gamma+2\theta)} + ce^{i(\epsilon+2\theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Исключив из системы (2) угол ϵ

$$z(ce^{i2\theta} - r) = Rce^{i(\gamma+2\theta)} - ffe^{i(\gamma+2\theta)} - \frac{1}{2}b(ce^{i2\theta} + r),$$

находим выражение для угла γ

$$e^{i\gamma} = \frac{z(ce^{i2\theta} - r) + \frac{1}{2}b(ce^{i2\theta} + r)}{cRe^{i2\theta} - rfe^{i2\theta}}.$$

Воспользовавшись сопряженным уравнением

$$e^{-i\gamma} = \frac{\bar{z}(ce^{-i2\theta} - r) + \frac{1}{2}b(ce^{-i2\theta} + r)}{cRe^{-i2\theta} - rfe^{-i2\theta}}$$

и исключая угол γ , получим окончательно

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)[(c-r)^2 + 4rc \sin^2 \theta] + b(c^2 - r^2)x - 2brcy \sin 2\theta &= \\ = (rf - cR)^2 + 4rcfR \sin^2(\beta - \theta) - \frac{1}{4}b^2[(c-r)^2 + 4rc \cos^2 \theta]. \end{aligned} \quad (3)$$

Замечая, что система уравнений (2), симметричная относительно R и r , γ и ϵ , f и c , β и θ , и при взаимной соответственной перестановке всех этих величин не изменяется, получаем из (3) второе уравнение

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2) [(f - R)^2 + 4fR \sin^2 \beta] + b(f^2 - R^2)x - 2bfRy \sin 2\beta = \\ & = (rf - cR)^2 + 4rcfR \sin^2 (\beta - \theta) - \frac{1}{4} b^2 [(f - R)^2 + 4fR \cos^2 \beta]. \end{aligned} \quad (4)$$

Вводя коэффициенты

$$A_1 = (c - r)^2 + 4rc \sin^2 \theta,$$

$$B_1 = b(c^2 - r^2),$$

$$C_1 = 2brc \sin 2\theta,$$

$$D_1 = (rf - cR)^2 + 4rcfR \sin^2 (\beta - \theta) - \frac{1}{4} b^2 [(c - r)^2 + 4rc \cos^2 \theta],$$

$$A_2 = (f - R)^2 + 4fR \sin^2 \beta,$$

$$B_2 = b(f^2 - R^2),$$

$$C_2 = -2bfR \sin 2\beta$$

$$D_2 = (rf - cR)^2 + 4rcfR \sin^2 (\beta - \theta) - \frac{1}{4} b^2 [(f - R)^2 + 4fR \cos^2 \beta],$$

перепишем уравнения (3) и (4) шатунной кривой в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y &= D_1, \\ A_2(x^2 + y^2) + B_2x + C_2y &= D_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Исключая из системы (5) выражение $(x^2 + y^2)$, получим линейное соотношение между x и y , из которого находим

$$\left. \begin{aligned} x &= m_1y + n_1, \\ y &= m_2x + n_2. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Подставляя значение x в первое уравнение системы (5), получим квадратное уравнение относительно y вида

$$y^2 + q_1y + q_0 = 0,$$

из которого определяем y как функцию размеров звеньев механизма и параметра θ . Аналогичным образом получаем квадратное уравнение относительно x и его выражение в функции размеров звеньев механизма и параметра θ . Таким образом, система (5') может быть легко преобразована к виду

$$\left. \begin{aligned} x &= x(r, b, c, R, f, \beta, \theta), \\ y &= y(r, b, c, R, f, \beta, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (5'')$$

Для изученных Чебышевым симметричных механизмов

$$r = c \text{ и } f = R.$$

Исключая из уравнений (5) и (4) c и f и производя сокращения, получим уравнение траектории точки D симметричного механизма Чебышева в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} 4(x^2 + y^2) \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - 2by \sin 2\theta &= 4R^2 \sin^2 (\theta - \beta), \\ 4(x^2 + y^2) \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta - 2by \sin 2\beta &= 4r^2 \sin^2 (\theta - \beta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Исключая по намеченной выше общей схеме выражение $(x^2 + y^2)$, получим

$$y = \frac{4[R^2 \sin^2 \beta - r^2 \sin^2 \Theta] \sin(\Theta - \beta) + b^2 \sin(\Theta + \beta)}{4b \sin \Theta \cdot \sin \beta}.$$

Представляя второе уравнение системы (6) в виде

$$4x^2 \sin^2 \beta + (2y \sin \beta - b \cos \beta)^2 = 4r^2 \sin^2(\Theta - \beta)$$

и заменяя у его значением, получим

$$x = \pm \frac{\sin(\Theta - \beta)}{\sin \beta} \sqrt{r^2 - \left[\frac{4R^2 \sin^2 \beta - 4r^2 \sin^2 \Theta - b^2}{4b \sin \Theta} \right]^2}.$$

Таким образом, уравнение траектории точки M шатуна симметричного механизма Чебышева в параметрическом виде запишется в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \frac{\sin(\Theta - \beta)}{\sin \beta} \sqrt{r^2 - \left[\frac{4R^2 \sin^2 \beta - 4r^2 \sin^2 \Theta - b^2}{4b \sin \Theta} \right]^2}, \\ y &= \frac{4(R^2 \sin^2 \beta - r^2 \sin^2 \Theta) \cdot \sin(\Theta - \beta) + b^2 \sin(\Theta + \beta)}{4b \sin \beta \cdot \sin \Theta}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где за параметр Θ принята половина переменного угла между коромыслами C_1A и C_2B механизма (фиг. 5).

Исключая из уравнения (7) параметр Θ , получим уравнение траектории точки M шатуна в виде алгебраического уравнения *шестого* порядка.

Глава III

ЗАДАЧА О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ШАТУННОЙ КРИВОЙ К ЗАДАННОЙ

§ 8. Общая постановка задачи

Пусть уравнение траектории произвольной точки шатуна плоского механизма задано в параметрическом виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x(r_1, r_2, \dots, r_n, s), \\ y &= y(r_1, r_2, \dots, r_n, s), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где x и y — декартовы координаты точки, r_1, r_2, \dots, r_n — постоянные величины, определяющие размеры звеньев и положение точки в плоскости шатуна, а s — переменный параметр. Требуется найти плоский механизм, у которого траектория некоторой точки шатунной плоскости мало уклоняется от участка кривой, заданной уравнением

$$\phi(x, y) = 0.$$

Подставляя в уравнение заданной кривой значения переменных координат x и y из (8), получим некоторую функцию

$$F(r_1, r_2, \dots, r_n, s),$$

вообще говоря, отличную от нуля. Если удастся подобрать значения r_1, r_2, \dots, r_n так, чтобы функция F наименее уклонялась от нуля в неко-

торых пределах изменения параметра s , то определяемая этими значениями r_1, r_2, \dots, r_n шатунная кривая соответствующего плоского механизма будет в указанном смысле наименее уклоняться от кривой, заданной уравнением

$$\psi(x, y) = 0,$$

в тех же пределах изменения параметра s .

Следовательно, всякая задача о приближенном черчении кривых при помощи шатунных может быть сведена к отысканию некоторой функции, наименее уклоняющейся от нуля, по общему методу, установленному Чебышевым в его мемуаре [2].

В своих многочисленных работах, посвященных симметричным четырехзвенным шарнирным механизмам, Чебышев дал исчерпывающее решение поставленной задачи для случаев, когда функция ψ задана либо в виде

$$\psi = y - y_0 = 0,$$

либо

$$\psi = x^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2 = 0,$$

установив тем самым необходимые и достаточные условия, при которых участки траекторий точек шатуна мало уклоняются от *прямых* или от *дуг окружностей*.

§ 9. Наилучшее приближение к прямой

Пусть требуется построить шарнирный симметричный четырехзвенник (фиг. 5) с шатунной кривой, мало уклоняющейся на некотором участке от прямой, параллельной оси абсцисс, заданной уравнением

$$\psi = (x, y) = y - y_0 = 0.$$

Подставляя в уравнение $\psi(x, y) = 0$ значение y из (7) и заменяя $\operatorname{ctg} \theta = s$, получаем

$$F(s) = A \left[s + p_1 \frac{s}{1+s^2} + p_2 \frac{1}{1+s^2} + p_3 \right], \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{b^2 - 4R^2 \sin^2 \beta}{4b}, \\ p_1 &= \frac{4r^2}{b^2 - 4R^2 \sin^2 \beta}, \\ p_2 &= -\frac{4r^2 \operatorname{ctg} \beta}{b^2 - 4R^2 \sin^2 \beta}, \\ p_3 &= \frac{4R^2 \sin \beta \cdot \cos \beta + b^2 \operatorname{ctg} \beta - 4by_0}{b^2 - R^2 \sin^2 \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и сводим задачу к отысканию полинома

$$f = s + p_1 \frac{s}{1+s^2} + p_2 \frac{1}{1+s^2} + p_3, \quad (11)$$

наименее уклоняющегося от нуля в некоторых пределах изменения параметра s

$$s_1 \leq s \leq s_2.$$

Так как траектория точки M симметрична относительно оси y , то поставленную задачу достаточно рассмотреть только для значений $x \geq 0$

(или, наоборот, только для значений $x \leq 0$). Полагая, что значению $x = 0$ соответствует $s = s_1 = \text{ctg } \theta$, находим по фиг. 14 для этого положения механизма, что

$$\sin \theta_1 = \frac{b \pm 2R \sin \beta}{2r}$$

Так как угол $\beta < \pi$, то значение θ_1 по формуле

$$\sin \theta_1 = \frac{b + 2R \sin \beta}{2r}$$

будет соответствовать положению точки M механизма на оси y для наименьшего значения y , а значение θ_1 по формуле

$$\sin \theta_1 = \frac{b - 2R \sin \beta}{2r}$$

для наибольшего значений y , в соответствии с принятым расположением осей координат и точки M .

§ 10. Наилучшее приближение к дуге окружности

Пусть требуется построить шарнирный симметричный четырехзвенник с траекторией точки шатуна, мало уклоняющейся от окружности, заданной уравнением

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2y_0 y + y_0^2 - \rho^2 = 0,$$

где ρ — радиус этой окружности, а y_0 — ордината ее центра.

Подставляя в уравнение окружности значения x и y из (7) и введя вспомогательный параметр

$$s = \text{ctg } \theta,$$

получим функцию

$$F(s) = A \left[s + p_1 \frac{s}{1+s^2} + \frac{p_2}{1+s^2} + p_3 \right], \quad (9')$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4b} (b^2 - 4R^2 \sin^2 \beta) (b \text{ ctg } \beta - 2y_0), \\ p_1 &= -\frac{r^2}{A} \left(\frac{2y_0}{b} + \text{ctg } \beta \right), \\ p_2 &= \frac{r^2}{A} \left(\frac{2y_0}{b} \text{ ctg } \beta - 1 \right), \\ p_3 &= \frac{1}{A} \left[y_0^2 - \rho^2 + r^2 + \frac{R^2}{b} (b \text{ ctg } \beta - 2y_0) \sin \beta \cos \beta - \frac{b}{2} y_0 \text{ ctg } \beta \right], \end{aligned} \right\} (10')$$

вообще говоря, отличную от нуля, которая должна наименее уклоняться от нуля в заданных пределах изменения параметра s .

Таким образом, как и в случае приближения к прямой, задача сводится к отысканию полинома (11), наименее уклоняющегося от нуля, в заданном интервале изменения параметра s .

§ 11. Определение полинома, наименее уклоняющегося от нуля

Если отбросить в полиноме (11) функцию s , то останутся три функции

$$\frac{s}{1+s^2}, \quad \frac{1}{1+s^2}, \quad 1$$

образуют систему Чебышева, так как всякий полином

$$P = p_1 \frac{s}{1+s^2} + p_2 \frac{1}{1+s^2} + p_3$$

имеет не более двух корней.

Следовательно, на основании теоремы Чебышева, функция f будет наименее уклоняться от нуля, если она не менее четырех раз достигает своих предельных значений при значениях $s = s_1, s = s_2, s = s_3, s = s_4$, не выходящих за пределы заданного интервала. Обозначая через $\pm L$ наибольшие отклонения функции f от нуля, устанавливаем, что все значения s , при которых функция f достигает своих предельных значений, должны быть корнями уравнений системы

$$\left. \begin{aligned} f + L = s + p_1 \frac{s}{1+s^2} + p_2 \frac{1}{1+s^2} + p_3 + L = 0, \\ f - L = s + p_1 \frac{s}{1+s^2} + p_2 \frac{1}{1+s^2} + p_3 - L = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как при значениях $s = s_2$ и $s = s_3$ функция f , достигнув своего предельного значения, не должна переходить за него, то корни $s = s_2$ и $s = s_3$ уравнений (12) должны быть *двойными*. Каждое из уравнений (12) после освобождения от знаменателя приводится к уравнению третьей степени, которое может иметь только один *двойной* корень и один *простой*. Полагая, что первому уравнению системы (12) соответствует простой корень $s = s_1$ и двойной $s = s_0$, а второму простой корень s_4 и двойной s_2 , получим

$$\left. \begin{aligned} s^3 + (p_3 + L)s^2 + (p_1 + 1)s + p_2 + p_3 + L = (s - s_1)(s - s_0)^2, \\ s^3 + (p_3 - L)s^2 + (p_1 + 1)s + p_2 + p_3 - L = (s - s_4)(s - s_2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -p_3 + L &= -s_1 - 2s_0, \\ p_3 - L &= -s_4 - 2s_2, \\ 1 + p_1 &= 2s_1s_0 + s_0^2, \\ 1 + p_1 &= 2s_2s_4 + s_2^2, \\ p_2 + p_3 + L &= -s_1s_0^2, \\ p_2 + p_3 - L &= -s_4s_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

из которой определяются

$$p_1, p_2, p_3, L, \\ \theta_2 = \text{arc ctg } s_2, \quad \theta_0 = \text{arc ctg } s_0$$

по заданным значениям

$$\theta_1 = \text{arc ctg } s_1, \quad \theta_4 = \text{arc ctg } s_4.$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (14) находим

$$p_1 = 2s_1s_3 + s_3^2 - 1 = 2s_2s_4 + s_2^2 - 1$$

или, производя замену $S_i = \operatorname{ctg} \theta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$p_1 = \frac{\sin(2\theta_3 + \theta_1)}{\sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_3} = \frac{\sin(2\theta_2 + \theta_4)}{\sin \theta_4 \cdot \sin^2 \theta_2}. \quad (15)$$

Воспользовавшись остальными уравнениями системы (14) и исключая из пятого уравнения $p_3 + L$ при помощи первого, а из шестого $p_4 - L$ при помощи второго, найдем

$$p_2 = s_1 + 2s_3 - s_1s_3^2 = s_4 + 2s_2 - s_4s_2^2.$$

Заменяя $s_i = \operatorname{ctg} \theta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), получим

$$p_2 = -\frac{\cos(2\theta_3 + \theta_1)}{\sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_3} = -\frac{\cos(2\theta_2 + \theta_4)}{\sin \theta_4 \cdot \sin^2 \theta_2}. \quad (16)$$

Составив по формулам (15) и (16) $p_2^2 + p_1^2$, получим

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin^4 \theta_3} = \frac{1}{\sin^2 \theta_4 \cdot \sin^4 \theta_2}.$$

Так как $2\theta_i < \pi$, то возможно только

$$\sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_3 = \sin^2 \theta_4 \cdot \sin \theta_2. \quad (17)$$

Теперь по формуле (15) найдем

$$\sin(2\theta_3 + \theta_1) = \sin(2\theta_2 + \theta_4),$$

что дает, при $2\theta_i < \pi$,

$$2\theta_3 + \theta_1 = 2\theta_2 + \theta_4. \quad (18)$$

По заданным θ_1 и θ_4 углы θ_3 и θ_2 определяются следующим образом:

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_4) = \theta_2 + \alpha$$

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_3} = \sqrt{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_4}} = k.$$

Исключая θ_2 , получим

$$\sin \theta_3 = \sin(\theta_2 + \alpha) = k \sin \theta_2.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{k - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \theta_2 &= \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{k - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Зная $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, определяем p_3 и L по первым двум уравнениям системы (14)

$$\left. \begin{aligned} p_3 + L &= -\operatorname{ctg} \theta_1 - 2 \operatorname{ctg} \theta_3, \\ p_4 - L &= -\operatorname{ctg} \theta_4 - 2 \operatorname{ctg} \theta_2; \end{aligned} \right\}$$

далее,

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_1 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_4 - \operatorname{ctg} \theta_3 - \operatorname{ctg} \theta_2, \\ L &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_4 + \operatorname{ctg} \theta_3 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_1 - \operatorname{ctg} \theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Предельное уклонение траектории точки M от заданной кривой оценивается величиной

$$E = \pm AL,$$

где A — коэффициент, определяемый по формулам (10) или (10').

Выведенными формулами определяются коэффициенты полинома (11), наименее уклоняющегося от нуля, если заданы пределы изменения угла θ

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4.$$

Для определения основных элементов искомого механизма, следует воспользоваться зависимостями (10) или (10') между коэффициентами полинома (12) и размерами звеньев.

Решение уравнений типа (10) в ряде случаев значительно упрощается при удачном выборе некоторых вспомогательных параметров,* через которые достаточно просто выражаются все основные элементы искомого механизма. Такой путь был с успехом применен Чебышевым при решении задачи о наилучшем приближении шатунной кривой симметричного механизма к горизонтальной прямой [7].

Глава IV

ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ ЧЕБЫШЕВА

§ 12. Выражение основных элементов механизма через параметры Чебышева

При определении основных элементов симметричного прямолинейно-направляющего механизма с точкой M , не лежащей на линии шатуна; Чебышев вводит специальный вспомогательный параметр t , в функции которого определяются все элементы рассматриваемого механизма. Пусть

$$\left. \begin{aligned} t &= \operatorname{ctg} \theta_2 \sin \theta_1 - \cos \theta_1, \\ T &= \operatorname{ctg} \theta_3 \sin \theta_1 + \cos \theta_1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — значения углов между коромыслами механизма в точках наибольшего уклонения шатунной кривой от горизонтальной прямой. Так как между углами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ существует зависимость

$$\frac{\sin(2\theta_3 + \theta_1 - 2\theta_2)}{\sin \theta_1} = \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin^2 \theta_2},$$

* Непосредственное решение уравнений (10) для этой же задачи без введения вспомогательных параметров дано в нашей статье [15].

непосредственно вытекающая из формул (17) и (18), то параметры t и T не являются независимыми. Заменяя θ_2 и θ_3 их значениями, выраженными через t и T , получим уравнение для определения T

$$T^2(1-t^2) - 4T(t + \cos \theta_1) + 4t \cos \theta_1 + t^2 - \cos^2 2\theta_1 + 4 \cos^4 \theta_1 + (t^2 + 2t \cos \theta_1 + 1)^2 = 0.$$

После несложных преобразований получаем

$$[T(1-t^2) - 2(t + \cos \theta_1)]^2 = t^2(t^2 + 2t \cos \theta_1 + 1)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства и полагая

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

где φ — угол между звеном AC_1 механизма и стойкой (фиг. 14) в среднем его положении, получим окончательно

$$T = \frac{2(1+t^2)\sin \varphi + t(3+t^2)}{1-t^2}. \quad (22)$$

Таким образом, основными независимыми параметрами, определяющими все элементы механизма, являются t и φ .

В точках предельного уклонения имеем по формулам (21)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \theta_2 &= \frac{t + \sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ \operatorname{ctg} \theta_3 &= \frac{T - \sin \varphi}{\cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Для определения θ_4 по формуле (17) имеем

$$\sin \theta_4 = \frac{\sin \theta_1 \sin^2 \theta_3}{\sin^2 \theta_2}.$$

Заменяя θ_2 и θ_3 их значениями, выраженными через t , φ и T по формулам (23), и полагая $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, получим

$$\sin \theta_4 = \frac{\cos \varphi (1 + t^2 + 2t \sin \varphi)}{1 + T^2 - 2T \sin \varphi}. \quad (24)$$

По найденному значению $\sin \theta_4$ находим

$$\operatorname{ctg} \theta_4 = \frac{(1 + 6t^2 + t^4) \sin \varphi + 4t(1 + t^2)}{(1 - t^2)^2 \cos \varphi}. \quad (25)$$

Воспользовавшись значениями для p_1 и p_2 из (14)

$$p_1 = 2 \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_3 + \operatorname{ctg}^2 \theta_3 - 1$$

и

$$p_2 = \operatorname{ctg} \theta_1 + 2 \operatorname{ctg} \theta_3 - \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_3$$

и, заменяя θ_2 и θ_3 их значениями по формулам (23), получим

$$p_1 = \frac{T^2 - 1}{\cos^2 \varphi}$$

и

$$p_2 = \frac{2T - (T^2 + 1) \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

Далее, для определения положения точки M в плоскости шатуна целесообразно ввести, вместо R и β (рис. 14), новые параметры

$$\left. \begin{aligned} a &= 2R \sin \beta, \\ c &= R \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где a — длина шатуна AB механизма, а c — расстояние от точки M до линии AB . Воспользовавшись значениями p_1 и p_2 по формулам (10) и исключая R и β , получим

$$p_1 = \frac{4r^2}{b^2 - a^2}$$

и

$$p_2 = \frac{8r^2 c}{a(a^2 - b^2)}.$$

Присоединяя к этим формулам зависимость между размерами звеньев для *среднего* положения механизма (фиг. 14)

$$a + b = 2r \cos \varphi,$$

получим

$$a = r \left(\cos \varphi - \frac{1}{p_1 \cos \varphi} \right)$$

и

$$b = r \left(\cos \varphi + \frac{1}{p_1 \cos \varphi} \right),$$

или, после подстановки найденного выше значения p_1

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{r(T^2 - 2) \cos \varphi}{T^2 - 1}, \\ b &= \frac{rT^2 \cos \varphi}{T^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Подставляя найденные значения a и b в формулу для p_2 , получим

$$c = \frac{r(2 - T^2)[2T^2 - (T^2 + 1) \sin \varphi]}{2(T^2 - 1)^2}. \quad (28)$$

Найденные формулы для a и c совпадают с формулами, данными Чебышевым без вывода в упомянутом выше мемуаре [7].

В своей заметке [12] Чебышев приводит формулу для c в таком виде:

$$c = \frac{a}{r \cos \varphi} \left[\left(\frac{3}{2} r \cos \varphi - a \right) \sin \varphi - (r \cos \varphi - a) \sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} \right].$$

Эта формула легко получается из приведенной выше, если в ней исключить T , воспользовавшись зависимостью

$$T = \sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}},$$

вытекающей из формул (27).

Значение L по соотношениям (14) определяется такими уравнениями:

$$2L = s_4 s_2^2 - s_1 s_3^2,$$

и

$$2L = s_4 + 2s_2 - s_1 - 2s_3.$$

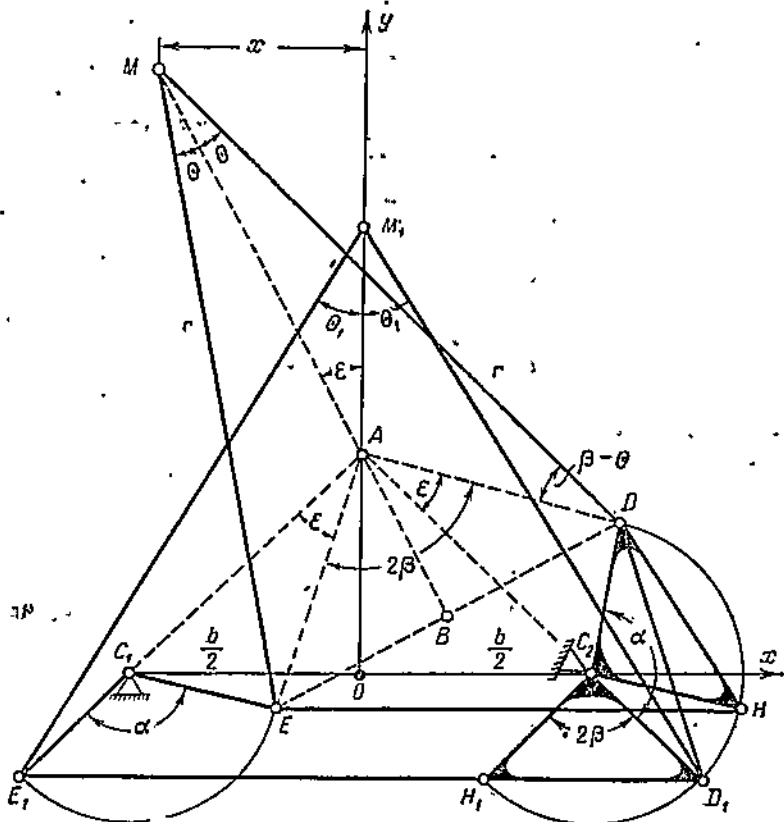
Исключая s_2 и полагая $s_1 = \text{ctg } \theta_1$, получим

$$L = \frac{2t^3(t^2 + 2t \sin \varphi + 1)}{(1 - t^2) \cdot \cos \varphi},$$

где $\text{ctg } \theta_2$ и $\text{ctg } \theta_3$ заменены по формулам (26), а $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta_1$. Предельное уклонение шатуновой кривой от прямой оценивается по формуле

$$E = \pm AL,$$

где $A = \frac{b^2 - a^2}{4b} = \frac{r \cos \varphi}{T^2}$ определяется по формулам (10), после замены a и b по формулам (27).



Фиг. 15

Заменяя T его значением по формуле (22), получим окончательно

$$E = \pm \frac{2t^3 r (1 + 2t \sin \varphi + t^2)}{(2 \sin \varphi + 3t + 2t \cdot \sin \varphi + t^2)^2}. \quad (29)$$

Угол поворота α шатуна AB механизма по отношению к стойке проще всего определить, заметив по фиг. 12, что для шестизвенной модификации рассматриваемого механизма α определяет угол поворота звена C_2HD . Построим два положения шестизвенного механизма (фиг. 15) и продолжим направления E_1C_1 и D_1C_2 до их пересечения в точке A . Очевидно, что треугольник C_1AC_2 равнобедренный и, следовательно, $C_1A = AC_2$. Тре-

угольнички C_1EA и C_2DA равны по двум сторонам и углу между ними. Вследствие равенства сторон $EA=AD$ прямая AM является биссектрисой угла равнобедренного треугольника EMD .

Прибавляя к равным углам $\angle DAC_2 = \angle C_1AE$ общий угол EAC_2 , получим

$$\angle DAE = C_1AC_2 = 2\beta.$$

Из треугольника ADC_2 находим

$$(AD)^2 = (AC_2)^2 + (C_2D)^2 + 2(AC_2)(C_2D) \cos \alpha.$$

Замечая, что

$$AD = \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{r \sin \theta}{\sin \beta}, \quad AC_2 = \frac{l}{2 \sin \beta}, \quad C_2D = R,$$

получим

$$\cos \alpha = \frac{4r^2 \sin^2 \theta - 4R^2 \sin^2 \beta - b^2}{4Rb \sin \beta}. \quad (30)$$

Исключая R и β по формулам (26) и заменяя a, b, c их значениями по формулам (27) и (28), получим окончательно

$$\cos \alpha = \frac{4 \sin^2 \theta \cdot (T^2 - 1)^2 - [(T^2 - 2)^2 + T^4] \cdot \cos^2 \varphi}{2T^2(T^2 - 2) \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Для крайнего положения механизма при $\theta = \theta_4$ угол $\alpha = \alpha_4$. Подставляя в формулу для $\cos \alpha$ значение $\sin \theta_4$ по формуле (24), получим

$$\cos \alpha_4 = 1 - \frac{2(1 - T^2)^2}{T^2(2 - T^2)} \left[\left(\frac{1 + 2t \sin \varphi + t^2}{1 - 2T \sin \varphi + T^2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (31)$$

Для определения x имеем по фиг. 15

$$x = -MA \sin \epsilon.$$

Так как

$$AM = AD \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \theta}, \quad AD = \frac{R \sin \alpha}{\sin \epsilon},$$

то

$$x = \frac{R \sin(\theta - \beta) \sin \alpha}{\sin \epsilon} = (R \cos \beta - R \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \theta) \sin \alpha,$$

Исключаем R и β по формулам (26)

$$x = \left(c - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) \sin \alpha \quad (32)$$

и заменяя a и c их значениями по формулам (27) и (28), получим

$$x = -\frac{r(2 - T^2)}{2(1 - T^2)} \left[\frac{2(T - \sin \varphi)}{T^2 - 1} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \right] \sin \alpha.$$

Длина прямолинейного участка l определяется удвоенным абсолютным значением x при $\theta = \theta_4$ и $\alpha = \alpha_4$. Исключая угол θ_4 по формуле (25), получим

$$l = \frac{2r(2 - T^2)}{1 - T^2} \left[\frac{T - \sin \varphi}{T^2 - 1} + \frac{2(1 + 2t \sin \varphi + t^2)t}{(T - 1)^2 t^2} \right] \sin \alpha_4, \quad (33)$$

где α_4 определяется по формуле (31).

Уравнение прямой, от которой наименее уклоняется шатунная кривая, проще всего получается из очевидной зависимости между элементами механизма в *среднем* его положении (фиг. 14)

$$y_0 = r \sin \varphi + E - c.$$

Таким образом, все необходимые элементы механизма выражаются по Чебышеву как рациональные функции трех независимых параметров φ , t и r .

§ 13. Несимметричная модификация механизма

Для несимметричной модификации рассмотренного в § 12 симметричного механизма Чебышева основные зависимости проще всего получаются непосредственно из формул § 9 и 11. По фиг. 11 рассматриваемый механизм вполне определяется величинами R , R_1 и 2β при заданном значении d . Для определения этих величин имеем по общим формулам (10), полагая в них по фиг. 11

$$\left. \begin{aligned} a &= 2R \sin \beta, & b &= 2d \sin \beta, & r &= 2R_1 \sin \beta, \\ p_1 &= \frac{4R_1^2}{d^2 - R^2}, \\ p_2 &= \frac{4R_1^2 \operatorname{ctg} \beta}{d^2 - R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Кроме того, для *среднего* положения механизма при $\theta = \theta_1$ по фиг. 11

$$a + b = 2r \sin \theta_1$$

или, после подстановки указанных выше значений a , b , r ,

$$R + d = 2R_1 \sin \theta_1. \quad (35)$$

Составив отношение $\frac{p_2}{p_1}$ по формулам (11) и сравнивая его с аналогичным выражением (34), получим

$$\operatorname{ctg} \beta = -\frac{p_2}{p_1} = \operatorname{ctg} (2\theta_3 + \theta_1) = \operatorname{ctg} (2\theta_2 + \theta_4).$$

и

$$\beta = 2\theta_3 + \theta_1 = 2\theta_2 + \theta_4.$$

Воспользовавшись значением p_1 по формулам (10) и (34) и уравнением (35), получим

$$R = \left[\frac{\sin \theta_1 \sin \beta}{\sin (\theta_1 + \theta_3)} - \frac{\sin \beta}{2 \sin (2\theta_3 + \theta_1)} \right] d$$

и

$$R_1 = \frac{\sin (2\theta_3 + \theta_1)}{\sin (\theta_1 + \theta_3)} d.$$

Воспользовавшись зависимостью

$$\cos 2\theta_3 = 1 - 2 \sin^2 \theta_3 = \cos (\beta - \theta_1),$$

исключаем из формул для R_1 и R угол φ_n и приводим их после некоторых упрощений к следующему виду:

$$R = \left[\frac{2 \sin \theta_1 \sin \beta}{\sin^2 \frac{\beta + \theta_1}{2}} - \frac{1}{2} \right] d$$

и

$$R_1 = \frac{\sin \beta}{\sin^2 \frac{\beta + \theta_1}{2}} d.$$

Задаваясь пределами изменения параметра $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_4$, следует вычислить по общим формулам (19) значения углов θ_2 и θ_3 , после чего все остальные элементы рассматриваемого механизма определяются выведенными зависимостями. Предельное отклонение шатунной кривой от прямой $y = y_0$ определяется по формуле

$$E = \pm AL,$$

где L вычисляется по формуле (20), а величина

$$A = \frac{(d^2 - R^2) \sin \beta}{Ld}.$$

Длина прямолинейного участка l , на котором траектория точки M уклоняется от $y = y_0$ не более чем на $\pm E$, определяется удвоенным значением x по формуле, вытекающей из формулы (7)

$$l = 2 \sqrt{4R_1^2 \sin^2 (\theta_4 - \beta) - (y_4 - d \cos \beta)^2},$$

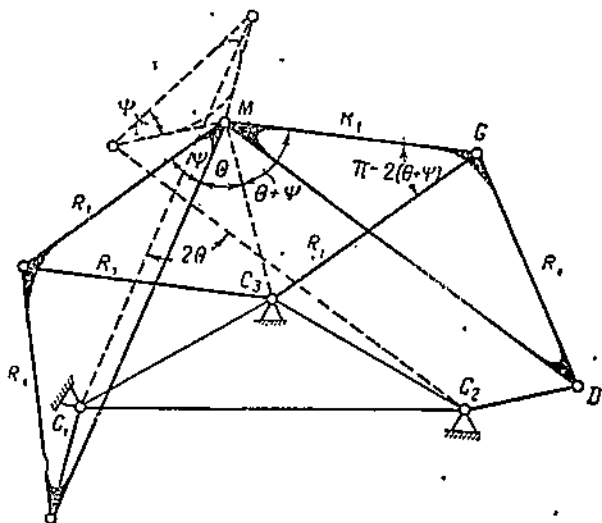
где y_4 — значение y при $\theta = \theta_4$, вычисляемое по формуле (7).

В настоящее время значительное внимание уделяется динамическому синтезу механизмов с учетом изменения углов передачи механизма. По фиг. 16 устанавливаем, что угол передачи рассматриваемого механизма в произвольном его положении равен

$$\angle C_3GD = 2\theta,$$

где θ — независимый параметр, пределами изменения которого определяются все основные элементы проектируемого прямолинейно-направляющего механизма.

Задаваясь изменением угла θ в допустимых практикой пределах, можно всегда обеспечить необходимые значения углов передачи для всего рабочего хода механизма, определяемого



Фиг. 16

длиной прямолинейного участка шатунной кривой. Что же касается общих пределов изменения угла передачи за один оборот кривошипа механизма, то эти величины легко определяются по формуле (30) при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$

$$\cos 2\theta_{\max} = 1 - \frac{(R+d)^2}{R_1^2}$$

и

$$\cos 2\theta_{\min} = 1 - \frac{(R-d)^2}{R_1^2}$$

§ 14. Приближенные формулы

В тех случаях, когда рассматривается приближение шатунной кривой к прямой в небольших пределах изменения параметра t , Чебышев дает для определения основных элементов механизма *приближенные формулы*, основанные на разложении полученных им функций в сходящиеся ряды по степеням малого параметра t . Разложение T по степеням параметра t получается непосредственно в результате деления многочленов, расположенных в числителе и знаменателе формулы (22) $T = 2 \sin \varphi + 3t + \dots$

Подставляя полученное значение T в формулы (27) и (28) для a , b , c , найдем

$$a = \left[\frac{2 \cos 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{6 \sin 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 3\varphi} t \dots \right] r,$$

$$b = \left[-\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 3\varphi} - \frac{6 \sin 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 3\varphi} t \dots \right] r$$

и

$$c = \left[\frac{\operatorname{tg} 3\varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos 3\varphi} + 3 \frac{\cos^3 \varphi (3 \cos 2\varphi - \cos 4\varphi)}{\cos^3 3\varphi} t \dots \right] r.$$

Разложение предельного уклонения E непосредственно вытекает из формулы (29) и является результатом непосредственного деления числителя на знаменатель

$$E = \pm \left(\frac{1}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{3 - 2 \sin^2 \varphi}{2 \sin^3 \varphi} t \dots \right) r t^3 \quad (36)$$

Аналогичным образом после несколько громоздких преобразований получается формула для длины хода

$$l = \frac{8r \cos \varphi \sqrt{-t \sin \varphi \cdot \cos 2\varphi}}{\cos 3\varphi} \left[1 - \frac{(8 \sin^4 \varphi - 6 \sin^2 \varphi - 1) \cos^3 \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos 3\varphi} t \dots \right] \quad (37)$$

Применение приближенных формул дано Чебышевым в мемуаре [12]. Наибольшей предельной точностью хода будет обладать механизм, для которого предельное уклонение $E=0$, что возможно только, при $t=0$. В этом случае длина прямолинейного участка траектории $l=0$, и шатунная кривая имеет соприкосновение пятого порядка с прямой. Ряды, определяющие размеры звеньев механизма, дают при $t=0$:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2 \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} r, \\ b &= -\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 3\varphi} r \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

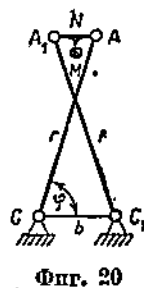
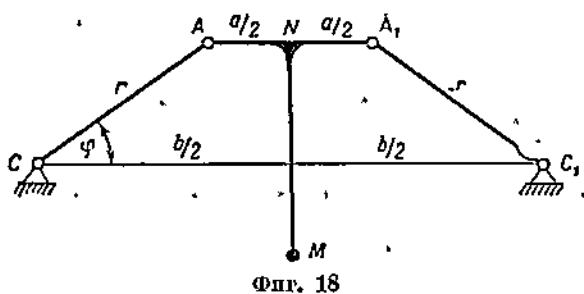
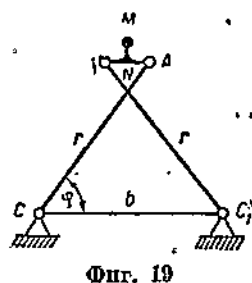
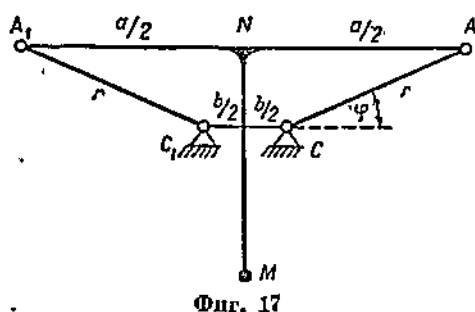
и

$$c = \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \operatorname{tg} 3\varphi}{\cos 3\varphi} r,$$

Чебышев отмечает, что по полученным формулам значения a , b , c меняют свои знаки при значениях угла φ , равных 0 , 30° , 45° , 60° , 90° .

Следовательно, для значений углов, заключенных между любым из указанных пределов, механизм не будет менять своего вида. Вычислив a , b , c для середины указанных промежутков, т. е. для значений φ , равных 15° , $37^\circ 30'$, $52^\circ 30'$, 75° , Чебышев получает четыре различных симметричных шарнирных четырехзвенника, которые отличаются между собой расположением звеньев и точки M в шатунной плоскости. Схемы полученных механизмов со всеми необходимыми размерами при $r=1$ приведены в нижеследующей таблице:

Схема механизма	Угол φ	Размеры звеньев			
		$AC = A_1C_1 = r$	$A_1A = a$	$CC_1 = b$	$NM = c$
См. фиг. 17	15°	1	2.29	-0.353	1.145
См. фиг. 18	$37^\circ 30'$	1	-0.85	2.44	1.02
См. фиг. 19	$52^\circ 30'$	1	0.207	1.01	-0.0425
См. фиг. 20	75°	1	0.165	0.353	0.082



Все найденные механизмы осуществляют прямолинейное движение с совершенно одинаковой степенью точности, несмотря на существенные различия в своей конфигурации.

Пусть требуется построить механизм по заданным E и l в случае, когда эти величины не обращаются в нуль. Эта задача может быть решена, как

отмечает Чебышев, приближенно, если воспользоваться формулами для разложения E , l , a , b и c в ряды и остановиться на первых членах этих разложений.

В этом случае по формулам (36) и (37) имеем

$$\left. \begin{aligned} E &= \pm \frac{rt^3}{2 \sin^2 \varphi}, \\ l &= \frac{3r \cos \varphi}{\cos 3\varphi} \sqrt{-t \sin \varphi \cdot \cos 2\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Исключая из этих формул t , получим

$$r = \frac{l \cos 3\varphi}{8 \sin 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \cdot \frac{l}{E}}.$$

Подставляя найденное значение r в формулы (38), найдем

$$a = \frac{l \cos^2 \varphi}{4 \operatorname{tg}^2 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \cdot \frac{l}{E}},$$

$$b = -\frac{l \sin 2\varphi}{8} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \cdot \frac{l}{E}}$$

$$c = \frac{l \cos^3 \varphi \cdot \operatorname{tg} 3\varphi}{8 \operatorname{tg} 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \cdot \frac{l}{E}}.$$

Задаваясь определенными значениями E и l и беря значения углов φ равными 15° , $37^\circ 30'$, $52^\circ 30'$, 75° , Чебышев получает четыре вида механизмов со схемами, аналогичными изображенным на фиг. 17, 18, 19 и 20. Все эти механизмы дают одинаковую длину и точность хода точки M с той же степенью точности, какая была принята при выводе формул для вычисления размеров звеньев этих механизмов.

В заключение обзора приложений приближенных формул отметим вывод зависимости для несимметричной модификации симметричного шарнирного четырехзвенника. Эти простые зависимости без подробного их вывода даны Чебышевым в его мемуаре [6].

По фиг. 11 имеем

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2c}{a}.$$

Подставляя значения $2c$ и a по приближенным формулам, получим

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} 3\varphi,$$

и, следовательно,

$$\psi = 3\varphi - \pi.$$

Из простых геометрических соображений (фиг. 11) находим

$$\angle MGD = \pi - 2\psi = 3\pi - 6\varphi,$$

$$DC_2 = BM = R = \frac{a}{2 \cos \psi} = -\frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos^2 3\varphi} r,$$

где значение a заменено по приближенной формуле (38)

$$MG = GD = C_3 G = \frac{r}{2 \cos \varphi} = -\frac{r}{2 \cos 3\varphi}.$$

Исключая из последних двух равенств значение r и обозначая $MG = R_1$, получим

$$R = \frac{2 \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} R_1,$$

что вместе со значением углов

$$\angle MGD = 3\pi - 6\varphi; \quad \angle C_2 C_3 G = \varphi$$

вполне определяет начальное положение рассматриваемого механизма по заданным φ и R_1 (фиг. 11).

§ 15. Механизмы с шатунной кривой, ущемляющейся между двумя близкими прямыми

На ряду с задачей о приближении шатунной кривой к прямой для малых пределов изменения параметра t или угла α поворота шатуна относительно стойки, Чебышев подробно рассматривает задачу об определении такого механизма, для которого вся траектория некоторой точки шатуна мало уклоняется от прямой. Эта задача для симметричного механизма с точкой M , не лежащей на линии шатуна, рассмотрена им в одном мемуаре [7], а для несимметричной его модификации — в другом [6]. Очевидно, что вся траектория точки M должна мало уклоняться от прямой, если угол поворота шатуна механизма относительно стойки α сможет принимать все значения от $-\pi$ до $+\pi$.

Подставляя $\alpha_t = \pi$ в формулу (31), получим после элементарных преобразований

$$T^2 - 1 = \pm \frac{1 - 2T \sin \varphi + T^2}{1 + 2t \sin \varphi + t^2}.$$

Заменяя T его значением по (22), получим

$$\begin{aligned} t^4 + 4t^3 \sin \varphi + 6t^2 + 4t \sin \varphi + 1 &= \\ = \pm [(t^3 + 2t^2 \sin \varphi + 3t + 2 \sin \varphi)^2 - (1 - t^2)^2]. \end{aligned}$$

Из квадратного уравнения относительно $\sin \varphi$ находим

$$\sin \varphi = \frac{-t(t^2 + 2) \pm \sqrt{2 - t^2}}{2(1 + t^2)}$$

или

$$\sin \varphi = \frac{-t(t^2 + 4) \pm t\sqrt{2t^2 - 1}}{2(1 + t^2)}.$$

Принимая

$$\sin \varphi = \frac{-t(t^2 + 2) + \sqrt{2 - t^2}}{2(1 + t^2)}, \quad (40)$$

находим T по формуле (22)

$$T = \frac{t + \sqrt{2 - t^2}}{1 + t^2}.$$

Остальные величины определяются по формулам (27), (28) и (29) после подстановки в них найденного значения T

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2tr\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}} \cos \varphi, \\ b &= \frac{2r \cos \varphi}{1+t\sqrt{2-t^2}}, \\ c &= -\frac{(2-t^2)tr}{2(1+t^2)}, \\ E &= \pm \frac{rt^3}{1+t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

В рассматриваемом случае длина прямолинейного участка не может быть определена по формуле (32) при $\alpha_1 = \pi$ и вычисляется по наибольшему значению абсциссы x точки M .

По формулам (26) и (30) определяем

$$\operatorname{ctg} \theta = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} = \sqrt{\frac{4r^2}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} - 1}.$$

Подставив найденное значение $\operatorname{ctg} \theta$ в формулу (32), получим

$$x = \left[c - \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} - 1} \right] \sin \alpha.$$

Далее, подставив в полученную формулу под знак корня найденные выше значения a и b по формулам (41), получим после некоторых преобразований результат, совпадающий с формулой Чебышева, приведенной им в мемуаре [7]

$$x = \frac{a}{2} \left[\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t)\sqrt{2-t^2}} (1-\cos \alpha)}{1 - \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t)\sqrt{2-t^2}} (1-\cos \alpha)}} + \frac{2c}{a} \right] \sin \alpha. \quad (42)$$

Удвоенное наибольшее значение x , вычисленное по формуле (42), дает длину b прямолинейного участка для рассматриваемого случая. Так определяются все основные элементы искомого симметричного механизма в зависимости от выбранных значений t и r .

В случае несимметричной модификации считаем заданными t и R_1 (фиг. 11) и определяем угол φ по формуле (40).

Для определения угла φ имеем по формулам (41)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2c}{a} = -\frac{(1+t\sqrt{2-t^2})\sqrt{2-t^2}}{2(1+t^2) \cos \varphi}.$$

Так как по фиг. 11

$$R = \frac{a}{2 \cos \varphi} \quad \text{и} \quad R_1 = \frac{r}{2 \cos \varphi},$$

то, воспользовавшись значением a по формулам (41), находим

$$R = \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}} R_1 \cos \varphi.$$

и

$$\cos(2\theta_2 + \theta_4) = 0.$$

Следовательно

$$\theta_1 + 2\theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\theta_4 + 2\theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя $\theta_3 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta_1)$ в формулу (15), получим

$$p_1 = \frac{2}{\sin \theta_1 \cdot (1 - \sin \theta_1)}.$$

Так как по формуле (10)

$$p_1 = \frac{4r^2}{b^2 - a^2},$$

а по фиг. 6

$$\sin \theta_1 = \frac{a + b}{2r},$$

то из полученных формул легко находим

$$b = \frac{a + 2r}{3}. \quad (43)$$

Подставляя найденное значение b в формулу для $\sin \theta_1$, получим

$$\sin \theta_1 = \frac{2a + r}{3r}.$$

Далее, очевидно, что

$$\cos 2\theta_3 = \sin \theta_1 = \frac{2a + r}{3r}.$$

Углы θ_3 и θ_4 определяются из системы уравнений, в которой первое уравнение взято по формуле (17)

$$\sin \theta_4 \cdot \sin^2 \theta_2 = \sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_3,$$

а второе будет

$$\theta_4 + 2\theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя в первое уравнение найденные значения θ_1 , θ_3 и $\theta_4 = \frac{\pi}{2} - 2\theta_2$, получим

$$\cos 2\theta_2 \cdot \sin^2 \theta_2 = \frac{(2a + r)(r - a)}{9r^2}.$$

Отсюда

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{5r - 2a}{6r}}.$$

Значение θ_4 определяется по формуле

$$\sin \theta_4 = \cos 2\theta_2 = \frac{2(r - a)}{3r}.$$

Подставляя найденные значения b и $\sin \theta_4$ в формулу (7) для y и полагая для этого случая $y = y_4$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$, получим

$$y_4 = \frac{r(5r-2a)}{2(a+2r)} \cos \theta_4.$$

Теперь длина l прямолинейного участка легко определяется удвоенным значением x по формуле, вытекающей из формулы (7) при $\theta = \theta_4$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$l = \frac{1}{a+2r} \sqrt{r(4a-r)(5r-2a)(r+2a)}, \quad (44)$$

что при $r=1$ совпадает с формулой, данной Чебышевым в его мемуаре [4].

Полученная формула накладывает на выбор r и a следующее ограничение:

$$a \geq \frac{1}{4} r.$$

Для определения y_0 и предельного уклонения E траектории точки M от прямой $y = y_0$ имеем следующие зависимости по формулам (10) при $c=0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$p_3 = -\frac{4by_0}{b^2 - a^2},$$

и

$$A = \frac{b^2 - a^2}{4b}.$$

Отсюда

$$y_0 = -Ap_3.$$

Рассматриваемый участок траектории точки M расположен между двумя параллельными прямыми

$$y_1 = y_0 + E$$

и

$$y_2 = y_0 - E.$$

Учитывая, что $E = \frac{1}{2}AL$ и воспользовавшись найденным значением y_0 , получим

$$y_1 = -A(p_3 - L)$$

и

$$y_0 = -A(p_3 + L).$$

Воспользовавшись значениями $p_3 - L$ и $p_3 + L$ по формулам (14) и заменяя $s_i = \operatorname{ctg} \theta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), получим

$$y_1 = \frac{b^2 - a^2}{4b} (\operatorname{ctg} \theta_4 + 2 \operatorname{ctg} \theta_2)$$

и

$$y_2 = \frac{b^2 - a^2}{4b} (\operatorname{ctg} \theta_1 + 2 \operatorname{ctg} \theta_3):$$

Воспользовавшись найденными для рассматриваемого частного механизма значениями b , θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 , получим

$$y_1 = \sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a) + \frac{r(4a-r)^2}{12(a+2r)}}$$

и

$$y_2 = \sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a)}.$$

Отсюда видно, что, чем ближе к нулю выражение

$$\frac{r(4a-r)^2}{12(a+2r)},$$

тем менее разнятся друг от друга значения y_1 и y_2 и тем точнее будет ход механизма. В предельном случае $y_1 = y_2$ при $a = \frac{1}{4}r$. Найденные формулы накладывают на выбор a и r такие ограничения:

$$r > a \geq \frac{1}{4}r.$$

Для иллюстрации приложения полученных формул Чебышев приводит такой числовой пример. Пусть требуется построить механизм по заданной длине его хода $l = 0,64$, при $r = 1$. Подставляя значение l в формулу (44), получаем $a = 0,327$. При этом значении a и $r = 1$ вычисляются $y_1 = 0,83457$; $y_2 = 0,83428$. Следовательно, расстояние между параллельными прямыми y_1 и y_2 , ограничивающими участок траектории точки M , равно

$$y_1 - y_2 = 0,00029.$$

Предельное уклонение от средней прямой

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 0,834425,$$

очевидно, равно

$$E = \pm \frac{y_1 - y_2}{2} = \pm 0,000145.$$

Размер стойки механизма вычисляется по формуле (43).

§ 17. Лямбдообразный механизм

Так как лямбдообразный механизм является модификацией механизма, рассмотренного в предыдущем параграфе, то для определения всех элементов этого механизма воспользуемся уже выведенными формулами. Основные элементы лямбдообразного механизма проще всего выражаются через длину его кривошипа $R = \frac{a}{2}$ и длину стойки $B = \frac{b}{2}$ (фиг. 7). Находим длину шатуна и коромысла механизма по формуле (43)

$$CD = C_3G = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}(3B - R).$$

Подставляя $a = 2R$, $b = 2B$ и $r = 3B - R$ в формулы предыдущего параграфа и полагая $B = 1$, получим все необходимые зависимости для лямбдообразного механизма.

Длина l прямолинейного участка будет равна

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{3(5-3R)(1+R)(3-R)(3R-1)}. \quad (45)$$

Предельное уклонение E точек шатунной кривой от прямой на участке l

$$E = \pm \left[\sqrt{2(1-R) + \frac{(3-R)(3R-1)^2}{64}} - \sqrt{2(1-R)} \right]. \quad (46)$$

Значения углов давления 2θ в точках предельного уклонения для половины участка $\frac{l}{2}$, расположенного вправо от оси y

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{R+1}{3-R}, & \cos \theta_2 &= \sqrt{\frac{5-3R}{2(3-R)}}, \\ \sin \theta_3 &= \sqrt{\frac{1-R}{3-R}}, & \sin \theta_4 &= \frac{2(1-R)}{3-R}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Связь между размерами звеньев механизма такова:

$$r = 3 - R. \quad (48)$$

Зависимость между углом передачи 2θ и углом поворота кривошипа α определяется по формуле (30), при $b = 2B = 2$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos \alpha = \frac{r^2 \sin^2 \theta - R - 1}{2R}.$$

§ 18. Анализ углов передачи* лямбдообразного механизма**

Наибольшее значение угла передачи $2\theta_{\max}$ определяется значением $\alpha = 0$

$$\sin \theta_{\max} = \sin \theta_1 = \frac{R+1}{3-R},$$

а наименьшее $2\theta_{\min}$ — значением $\alpha = \pi$

$$\sin \theta_{\min} = \frac{1-R}{3-R},$$

если r заменить его значением по формуле (48).

Согласно написанным выше формулам, изменение R ограничено следующим образом:

$$1 > R > \frac{1}{3}.$$

Анализируя формулы для θ_{\max} и θ_{\min} в указанных пределах изменения R , можно отметить, что при изменении R от $\frac{1}{3}$ до 1, $\sin \theta_{\max}$ монотонно возрастает от $\frac{1}{2}$ до 1, а $\sin \theta_{\min}$ монотонно убывает от $\frac{1}{4}$ до 0. Следовательно, углы передачи могут изменяться только в таких пределах:

$$60^\circ \leq 2\theta_{\max} \leq 180^\circ,$$

и

$$0^\circ \leq 2\theta_{\min} \leq 29^\circ.$$

* Углом передачи называют переменный угол $C_2GD = 2\theta$ между коромыслом C_2G и шатуном DG механизма (фиг. 7).

** Результаты, изложенные в §§ 18—20, разработаны нами и опубликованы в статье [20].

Отметим попутно, что при $R = \frac{1}{3}$ имеем $l = 0$, и, следовательно, шатунная кривая имеет с приближаемой прямой шесть бесконечно близких общих точек. Этот случай для практического использования может оказаться весьма невыгодным из-за малой длины приблизительно прямолинейного участка шатунной кривой, так что значение R придется выбрать большим $R = \frac{1}{3}$, и минимальный угол передачи $2\theta = 29^\circ$ окажется меньше наилучшего для данного механизма значения. Отсюда следует, что лямбдообразный механизм может оказаться невыгодным в динамическом отношении, если при оценке его исходить из пределов изменения угла передачи для полного угла поворота кривошипа $\alpha = 2\pi$.

Несколько иное заключение о механизме можно получить, если его оценивать по изменениям угла передачи на рабочем участке хода, определяемом длиной приближенно прямолинейного участка траектории l . В этом случае угол передачи 2θ изменяется в пределах

$$2\theta_4 \leq 2\theta \leq 2\theta_1,$$

где угол θ_4 определяется по формуле (47).

Анализируя формулы (47), можно отметить, что в предельном случае при $R = \frac{1}{3}$

$$2\theta_1 = 2\theta_4 = 60^\circ,$$

Так как с увеличением R значение $2\theta_1$ возрастает от 60° до 180° , то выбор R следует ограничить

$$R \leq \frac{3 \sin \theta_n - 1}{1 + \sin \theta_n}, \quad (49)$$

где $2\theta_n$ — установленное практикой предельное значение угла передачи 2θ .

Так как с увеличением R значение $2\theta_4$ убывает от 60° до 0 , то выбор R следует ограничить

$$R \leq \frac{2 - 3 \sin \theta_n}{2 - \sin \theta_n}. \quad (50)$$

Таким образом, для R следует выбрать меньшее значение из получаемых по формулам (49) и (50). Так, например, если задать $2\theta_n = 135^\circ$ для формулы (49) к $2\theta_n = 45^\circ$ для формулы (50), то следует выбрать $R \leq 0,526$.

Отметим, что всякий, прямолинейно-направляющий механизм Чебышева удовлетворяет условиям Грасгофа и, следовательно, звено C_2D (фиг. 7) всегда является кривошипом.

В самом деле, составив неравенство Грасгофа для двух возможных случаев

$$R + 1 < r, \quad R + \frac{r}{2} < 1 + \frac{r}{2}$$

и воспользовавшись формулой (48), легко установить выполнимость написанных неравенств при $R < 1$, что совпадает с допустимыми пределами изменения R . После установления допустимого значения R пригодность механизма оценивается по формулам (45) и (46).

§ 19. Разложение в ряд выражений для координат точки M лямбдообразного механизма

Так как траектория точки M лямбдообразного механизма симметрична относительно оси y , то разложения выражений для координат x и y точки M ищем в виде рядов

$$x = c_1 a + c_3 a^3 + c_5 a^5 + \dots,$$

$$y = f_0 + f_2 a^2 + f_4 a^4 + \dots$$

Коэффициенты рядов легко вычисляются, если воспользоваться формулами (32), (7) и (30), при $c = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, и положить в них $a = 2R$, $b = 2B = 2$,

$$\begin{aligned} x &= R \sin a \cdot \operatorname{ctg} \theta, \\ y &= \frac{1}{2} [(1 - R^2) \operatorname{ctg} \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta], \\ 2R \cos a &= r^2 \sin^2 \theta - R^2 - 1. \end{aligned}$$

По этим формулам после исключения угла θ получаются такие значения коэффициентов разложений x и y в ряды:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -R \operatorname{ctg} \theta_1, \\ c_3 &= \frac{R}{6} \left(\operatorname{ctg} \theta_1 - \frac{3R}{r^2 \sin^3 \theta_1 \cos \theta_1} \right), \\ c_5 &= \frac{R^3}{(1+R)^2 \sin 2\theta_1} \left[\frac{1}{4 \cos^2 \theta_1} - 1 \right] + \frac{R^3}{4(1+R)^2 \sin 2\theta_1} - \frac{R \operatorname{ctg} \theta_1}{120}, \\ f_0 &= r \cos \theta_1, \\ f_2 &= \frac{(3 \sin \theta_1 - 1)(2 \sin \theta_1 - 1)}{4 \sin \theta_1 \sin 2\theta_1}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где угол θ_1 определяется по формуле (47). Воспользовавшись формулами (47) и (48), можно определить все коэффициенты как функции только одного параметра θ_1 . Выбором этого параметра θ_1 устанавливаются определенные свойства лямбдообразного механизма. Если необходимо, чтобы траектория точки M лямбдообразного механизма по возможности мало уклонялась от горизонтальной прямой, то следует выбрать θ_1 так, чтобы $f_2 = 0$. Воспользовавшись (51), получим при $f_2 = 0$

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{2}$$

и по формулам (47)

$$R = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, поставленному условию удовлетворяет траектория предельного механизма, имеющая с приближаемой прямой шесть бесконечно близких точек. Вычисляя при $\theta_1 = 30^\circ$ значения c_k , получим для x

$$x = -0,58a - 0,024a^3. \quad (52)$$

Отсюда следует, что для малых значений углов поворота кривошипа механизма горизонтальное перемещение точки M приблизительно пропорционально

углу α . Если необходимо повысить точность формулы (52) для больших значений α , то следует выбрать θ_1 так, чтобы $c_3 = 0$. Полагая $c_3 = 0$ и заменяя R и r их значениями по формулам (47) и (48), получим уравнение для определения θ_1

$$16 \sin^3 \theta_1 - 16 \sin^2 \theta_1 + 9 \sin \theta_1 - 3 = 0.$$

Действительный корень уравнения равен $\theta_1 \approx 35^\circ 51'$. При этом значении θ_1 разложение для x имеет вид

$$x = -0,66\alpha + 0,007\alpha^3 \quad (53)$$

и пропорциональность перемещения углу α поворота кривошипа достигается с весьма высокой степенью точности. Что же касается уклонения траектории точки M от прямой, то эту величину нет никакого смысла оценивать по разложению в ряд для y , так как совершенно точно ее значение определяется по формуле (46) для любого лямбдообразного механизма Чебышева.

Резюмируя изложенное, можно отметить, что в пределах изменения параметра

$$30^\circ \leq \theta_1 \leq 35^\circ 50'$$

траектории точки M лямбдообразного механизма Чебышева на значительном участке весьма мало уклоняется от прямой, располагаясь между двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми не превосходит

$$0 \leq 2L \leq 0,003,$$

причем перемещение точки M на приблизительно-прямолинейном участке ее траектории с весьма высокой степенью точности пропорционально углу α поворота кривошипа.

Размеры кривошипа и коромысла механизма могут быть выбраны в пределах

$$\frac{1}{3} \leq R \leq 0,478; \quad 1\frac{1}{3} \geq \frac{r}{2} \geq 1,261$$

и должны, кроме того, удовлетворять условиям (48).

Наибольшая возможная длина прямолинейного участка траектории l вычисляется по формуле (45).

Выбор рабочей длины прямолинейного участка l_1 определяется степенью точности, с какой необходимо, чтобы формула

$$x = -c_1\alpha$$

определяла действительное перемещение точки M вдоль оси x . Так, например, при $R = 0,478$; $r = 2,522$ и α , равном одному радиану, находим по формуле (53), ограничиваясь первым членом разложения,

$$x = -0,66.$$

Значение x по точной формуле при этих же R , r и α равно $x = -0,653$, т. е. с точностью до трех десятичных знаков совпадает с результатом, вычисленным по двум членам разложения (53). Рабочая длина прямо-

линейного участка в пределах полного угла поворота кривошипа $|2\alpha|$ (равного двум радианам) равна $l_1 = 2|x| \approx 1,3$.

Таким образом, для рассмотренного примера можно считать, что на участке $l_1 = 1,3$ составляющая скорости точки M вдоль оси x практически постоянна при равномерном вращении кривошипа, и наибольшая ошибка в определении x при таком допущении не превосходит $1,06\%$.

§ 20. Сравнение лимбообразного механизма Чебышева с механизмом Эванса

Для механизма Эванса, изображенного на фиг. 22, принято

$$O_1A = MA = AB = a, \quad BO_2 = R, \quad O_1O_2 = \sqrt{R^2 + 4a^2}.$$

Координаты точки M определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \beta - 2a(1 - \cos \alpha), \\ y &= 2a \sin \alpha + R(1 - \cos \beta). \end{aligned} \right\} (54)$$

Исключая углы (фиг. 22) γ и β при помощи уравнений

$$a \cos \gamma = 2a - R \sin \beta - a \cos \alpha,$$

и

$$a \sin \gamma = R(1 - \cos \beta) + a \sin \alpha$$

и разлагая x и y в ряды по степеням α , получим

$$x = \frac{a^2}{2R} \alpha^5 + \dots,$$

и

$$y = 2a\alpha - \frac{1}{3}a\alpha^3 + \frac{a^2}{2R}\alpha^4 + \dots$$

При той же длине стойки $O_1O_2 = b = 1$ и угле поворота кривошипа

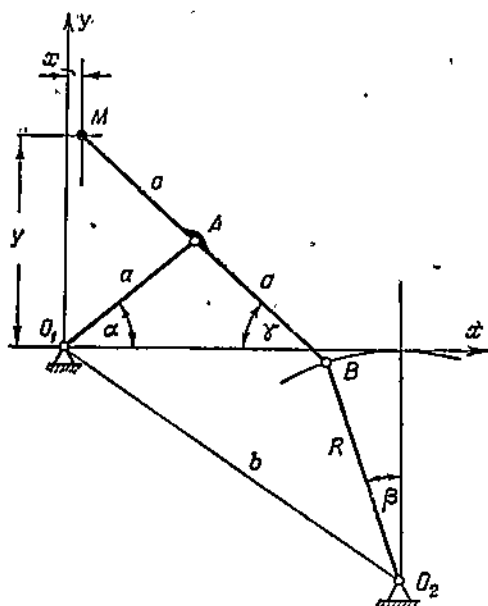
α , равном одному радиану, как в рассмотренном в конце § 19 механизме Чебышева, механизм Эванса не может дать наперед заданного прямолинейного участка траектории. Как оказывается, длина приближенно прямолинейного участка траектории механизма Эванса получается значительно меньшей, нежели у аналогичного с ним механизма Чебышева.

Желая использовать возможно больший участок приближенно прямолинейной части траектории точки M механизма Эванса, рассмотрим крайнее положение этого механизма, когда звенья O_2B и BA образуют одну прямую. Для этого положения механизма

$$y_{\max} = \frac{aR}{a+R} + \frac{2a^2 + aR}{a+R} \sin \alpha_{\max},$$

где α_{\max} — максимальный возможный угол поворота кривошипа в одном направлении. Кроме того, для этого же положения механизма

$$R = \frac{2a(1 - \cos \alpha_{\max})}{1 - \sin \alpha_{\max}}.$$



Фиг. 22

Полагая $a_{\max} = 1$, получим $R = 5,75a$ и наибольшее возможное значение $y_{\max} = 1,82a$. Расстояние между неподвижными точками O_1 и O_2

$$b = \sqrt{R^2 + 4a^2} = 6,09a,$$

Следовательно, $y_{\max} \approx 0,3b$ (фиг. 22) против $0,65B$ для аналогичного механизма Чебышева, где B — расстояние между неподвижными точками в механизме Чебышева.

Действительное отклонение точки M от прямой, вычисленное по формуле (54), при $a = 1$ равно $x = 0,82a = 0,052b$. Ошибка в определении y_{\max} , если принять $y = 2aa$, достигает, при $a_{\max} = 1$ $\Delta y = 0,18a$, или $9,9\%$ действительного значения y_{\max} .

Результаты сравнительной оценки двух аналогичных механизмов: Чебышева и Эванса сведены в следующей таблице:

Механизм	Длина стойки	Угол поворота кривошипа в радианах	Длина прямолинейного участка	Уклонение от прямой	Наибольшее отклонение от равномерного движения, в %
Чебышева	$B = 1$	1	$0,65B$	$0,0015B$	1
Эванса	$b = 1$	1	$0,3b$	$0,052b$	10

Таким образом, сравнительный анализ механизмов показывает, что механизм Чебышева значительно превосходит механизм Эванса как в точности хода, так и в равномерности движения точки M по приближенно прямолинейному участку ее траектории.

Глава V

МЕХАНИЗМЫ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ЧЕРЧЕНИЯ ДУГ ОБРУЖНОСТЕЙ

§ 21. Основные зависимости

В своем мемуаре [10] Чебышев дал решение задачи о наилучшем приближении к окружности траектории точки M шатуна несимметричной модификации механизма (фиг. 11). Так как рассмотренный Чебышевым механизм является общим типом всех шарнирных механизмов Чебышева и, кроме того, прямую можно рассматривать как частный случай окружности, то из формул мемуара [10] можно в сущности извлечь все результаты, полученные ранее Чебышевым для прямолинейно-направляющих механизмов в других его мемуарах.

Так как в случае приближения шатунной кривой к прямой и окружности задача сводится к отысканию совершенно одинаковых полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, то все необходимые зависимости для рассматриваемой задачи проще всего получить непосредственно из общих формул, выведенных в § 10 и 11.

Вводим, по Чебышеву, следующие величины (фиг. 11 и фиг. 23):

$$C_3G = R_1 = 1 = \frac{r}{2 \sin \beta},$$

$$C_2C_3 = d = \frac{b}{2 \sin \beta},$$

$$O_1C_3 = h = y_0 - \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \beta = y_0 - d \cos \beta$$

и

$$C_2D = R = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

Исключая r , y_0 , b и a из формул (10'), получим выражения для коэффициентов A , p_1 , p_2 и p_3 в новых обозначениях

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{h}{d} (R^2 - d^2) \sin \beta, \\ p_1 &= \frac{4(h \sin \beta + d \sin 2\beta)}{h(d^2 - R^2) \sin \beta}, \\ p_2 &= \frac{4(h \cos \beta + d \cos 2\beta)}{h(R^2 - d^2) \sin \beta}, \\ p_3 &= \frac{d(\rho^2 - 2 + 2 \cos 2\beta - h^2) - h(d^2 - R^2) \cos \beta}{h(d^2 - R^2) \sin \beta}. \end{aligned} \right\} (55)$$

Сравнивая значения p_1 и p_2 с найденными выше общими выражениями для этих же величин по формулам (15) и (16), получим два уравнения для определения размеров звеньев механизма

$$\frac{\sin(\Theta_1 + 2\Theta_3)}{\sin \Theta_1 \cdot \sin^2 \Theta_3} = \frac{4(h \sin \beta + d \sin 2\beta)}{h(d^2 - R^2) \sin \beta}$$

и

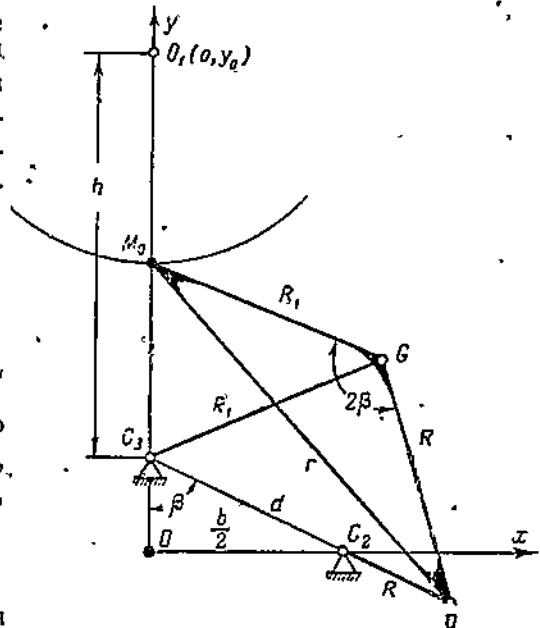
$$\frac{\cos(\Theta_1 + 2\Theta_3)}{\sin \Theta_1 \cdot \sin^2 \Theta_3} = \frac{4(h \cos \beta + d \cos 2\beta)}{h(d^2 - R^2) \sin \beta}$$

Кроме того, для среднего положения механизма при $\theta = \theta_1$, приняв во внимание, что $R_1 = 1$, имеем по формуле (35)

$$R + d = 2 \sin \theta_1.$$

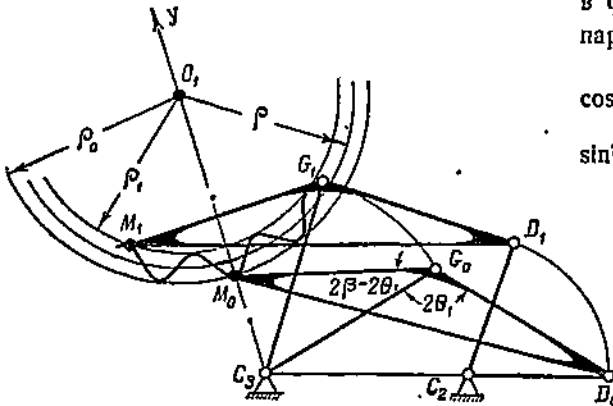
Решая написанные уравнения относительно R , d и h , найдем

$$\left. \begin{aligned} R &= \sin \theta_1 - \frac{\sin^2 \Theta_3}{\sin(2\beta - 2\Theta_3 - \Theta_1)}, \\ d &= \sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \Theta_3}{\sin(2\beta - 2\Theta_3 - \Theta_1)}, \\ h &= \frac{\sin(2\beta - 2\Theta_3 - \Theta_1)}{\sin(2\Theta_1 + \Theta_1 - \beta)} \left[\sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \Theta_3}{\sin(2\beta - 2\Theta_3 - \Theta_1)} \right]. \end{aligned} \right\} (56)$$



Фиг. 23

Радиус ρ приближаемой окружности (фиг. 24) вычисляется по формулам (55) после подстановки найденных значений R , d , h и значения p_0 по формуле (20). Для определения угла поворота кривошипа механизма заменяем в формуле (30) b и r новыми параметрами d и R . Тогда



Фиг. 24

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{4 \sin^2 \theta - d^2 - R^2}{2dR}, \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{(d+R)^2 - 4 \sin^2 \theta}{4dR}. \end{aligned} \right\} (57)$$

Наибольший угол поворота кривошипа в механизме в одну сторону, при котором шатунная кривая наименее уклоняется от окружности, определится значением $\alpha = \alpha_4$ при $\theta = \theta_4$

$$\sin^2 \frac{\alpha_4}{2} = \frac{(d+R)^2 - 4 \sin^2 \theta_4}{4dR}.$$

Заменяя значения d и R по формулам (56), получим окончательно

$$\sin^2 \frac{\alpha_4}{2} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_4) \cdot \sin^2(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1)}{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin^2(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) - \sin^4 \theta_3}. \quad (58)$$

Далее, не трудно заметить, что величина

$$E = \pm AL,$$

по которой оценивается наибольшее уклонение точек шатунной кривой от окружности, представляет разность квадратов расстояний точек шатунной кривой и окружности от центра окружности в положениях механизма, для которых $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, $\theta = \theta_3$, $\theta = \theta_4$.

Обозначая через ρ_0 расстояние от точки M механизма до центра окружности (рис. 24) при $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_3$ и через ρ_1 — соответствующее расстояние при $\theta = \theta_2$ и $\theta = \theta_4$, имеем

$$\rho_0^2 - \rho^2 = AL \quad \text{и} \quad \rho_1^2 - \rho^2 = -AL.$$

Отсюда после исключения радиуса окружности ρ получаем

$$\rho_1^2 = \rho_0^2 - 2AL.$$

По выведенным формулам определяется разность квадратов расстояний соответствующих точек шатунной кривой и окружности в точках наибольшего уклонения этих кривых друг от друга. Очевидно, что для всех промежуточных точек в пределах изменения угла θ

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4$$

справедливы неравенства

$$\rho_0^2 - \rho^2 \leq AL \quad \text{и} \quad \rho_1^2 - \rho^2 \geq -AL.$$

Следовательно, участок траектории точки M шатуна, наименее уклоняющийся от окружности радиуса ρ , целиком располагается между двумя концентрическими окружностями радиусов ρ_0 и ρ_1 , имеющими общий центр с окружностью радиуса ρ .

§ 22. Приближение к окружности всей шатунной кривой

Определим размеры звеньев механизма Чебышева, для которого вся шатунная кривая располагается между двумя близкими концентрическими окружностями. Очевидно, что рассматриваемый случай будет иметь место, когда наибольший угол α_4 поворота кривошипа механизма, при котором шатунная кривая наименее уклоняется от окружности, равен π .

Полагая $\alpha_4 = \pi$ в формуле (58), получим

$$\sin(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) = \pm \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin^2 \theta_4}.$$

Замечая, что при

$$\sin(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) < 0,$$

согласно формулам (56),

$$R > d$$

и, следовательно, механизм не будет удовлетворять условиям поворота кривошипа на угол $\alpha = \pi$, Чебышев принимает

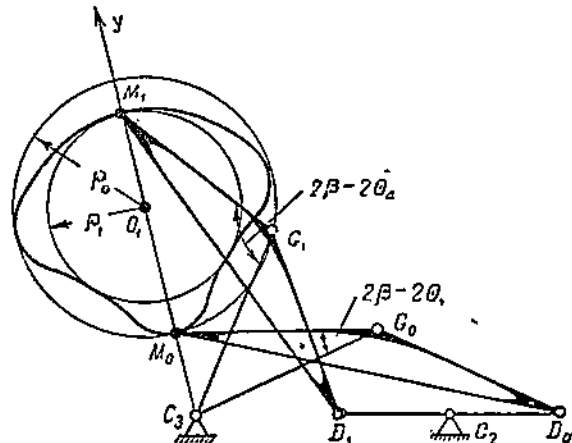
$$\sin(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) = \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin^2 \theta_4}, \quad (59)$$

что дает по формулам (56) такие выражения для основных элементов механизма:

$$\left. \begin{aligned} R &= \sin \theta_1 - \sin \theta_4, \\ d &= \sin \theta_1 + \sin \theta_4, \\ h &= \frac{L \sin(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1)}{\sin(2\theta_3 + \theta_1 - \beta)} \sin \frac{\theta_1 + \theta_4}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta_4}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Выведенными формулами определяются значения β , R , d и h для искомого механизма по заданным углам θ_1 и θ_4 , причем угол θ_3 вычисляется по формулам (19).

Для выявления различных интересных частных случаев изучаемого механизма рассмотрим, по Чебышеву [10], два положения механизма: при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, что соответствует двум значениям угла $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_4$ (фиг. 25). Если O_1 — центр приближаемой окружности, то вся траектория точки M механизма будет в рассматриваемом случае располагаться между двумя концентрическими окружностями радиусов $\rho_0 = O_1 M_0$ и $\rho_1 = O_1 M_1$



Фиг. 25

Из равнобедренных треугольников $C_n G_0 M_0$ и $C_n G_1 M_1$ определяются

$$M_0 C_n = 2 \sin(\beta - \theta_1)$$

и

$$M_1 C_n = 2 \sin(\beta - \theta_4).$$

Для определения радиусов предельных окружностей имеем

$$\rho_0 = O_1 M_0 = O_1 C_n - M_0 C_n$$

и

$$\rho_1 = O_1 M_1 = O_1 C_n - M_1 C_n.$$

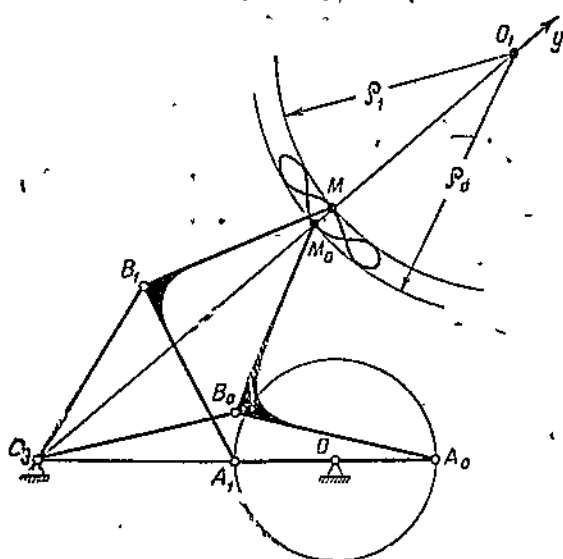
Подставляя найденные значения $M_0 C_n$ и $M_1 C_n$ и заменяя $O_1 C_n = h$ по формуле (60), а $\sin(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1)$ по формуле (59), можно получить после ряда несложных преобразований, подробно приведенных Чебычевым в его мемуаре [10], такие выражения для ρ_0 и ρ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{\sin^2 \theta_3 - \cos \theta_1 \cdot \cos(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1)}{\sin(2\theta_3 + \theta_1 - \beta)}, \\ \rho_1 &= \frac{\cos^2 \theta_3 - \cos \theta_4 \cdot \cos(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1)}{\sin(2\theta_3 + \theta_1 - \beta)}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Отсюда сразу видно, что при

$$\cos(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) < 0$$

радиусы предельных окружностей имеют одинаковые знаки и, следовательно, точки M_0 и M_1 располагаются на оси y по одну сторону от



Фиг. 26

точки O_1 . В этом случае вся шатунная кривая мало уклоняется от определенного участка приближаемой окружности, располагаясь так, как это показано на фиг. 26.

Подробный анализ формул (61), когда

$$\cos(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) > 0,$$

показывает, что при этом предположении знаки ρ_0 и ρ_1 противоположны, следовательно, по фиг. 25 точки M_0 и M_1 располагаются на оси y по разные стороны от точки O_1 . В этом случае вся шатунная кривая мало уклоняется от всей приближаемой окружности, как это показано на фиг. 25.

§ 23. Лямбдообразный механизм для черчения дуг окружностей

Для такого лямбдообразного механизма справедливы все формулы предыдущего параграфа при $\beta = \frac{\pi}{2}$. Полагая $\beta = \frac{\pi}{2}$ в формулах (56) и (57),

получим

$$\begin{aligned} R &= \sin \theta_1 \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin (2\theta_3 + \theta_1)}, \\ d &= \sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin (2\theta_3 + \theta_1)}, \\ h &= - \left[\sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_3}{\sin (2\theta_3 + \theta_1)} \right] \operatorname{tg} (2\theta_3 + \theta_1), \end{aligned}$$

и

$$\sin^2 \frac{\alpha_4}{2} = \frac{\sin (\theta_1 + \theta_4) \cdot \sin (\theta_1 - \theta_4) \cdot \sin^2 (2\theta_3 + \theta_1)}{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin^2 (2\theta_3 + \theta_1) - \sin^4 \theta_3}.$$

По этим формулам определяются все основные элементы механизма, если заданы θ_1 и θ_4 , а θ_3 вычислено по общей для всех рассматриваемых механизмов формуле (19).

Если необходимо получить лямбдообразный механизм, у которого вся траектория точки M шатуна мало уклоняется от окружности, то в этом случае, полагая в формуле (59) $2\beta = \pi$, получаем

$$\sin (2\theta_3 + \theta_1) \sin^2 \theta_4 = \sin^2 \theta_3. \quad (62)$$

Вместе с общими зависимостями между углами, выведенными в § 11,

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 + 2\theta_3 &= \theta_4 + 2\theta_2, \\ \sin^2 \theta_3 \cdot \sin^2 \theta_1 &= \sin^2 \theta_2 \cdot \sin^2 \theta_4 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

имеем три уравнения, связывающие значения углов θ_1 , θ_2 , θ_3 и θ_4 .

Таким образом, при приближении к окружности всей шатунной кривой лямбдообразного механизма уже нельзя произвольно задать пределы изменения углов передачи θ_1 и θ_4 .

Все основные элементы механизма проще всего выражаются в этом случае по Чебышеву через вспомогательный угол ϕ , равный

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_4}{2},$$

выбор которого ограничен определенными пределами.

Полагая $\varepsilon = \theta_1 + 2\theta_3 = \theta_4 + 2\theta_2$ и воспользовавшись уравнениями (62) и (63), можно получить

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon \cdot \sin \theta_4 &= \sin^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\theta_1}{2} \right), \\ \sin \varepsilon \cdot \sin \theta_1 &= \sin^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\theta_4}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_4}{\sin \theta_1 - \sin \theta_4} = - \operatorname{tg} \frac{\theta_1 + \theta_4}{2}.$$

Анализ формулы для $\operatorname{tg} \varepsilon$ показывает, что возможно только

$$\varepsilon = \pi - \frac{\theta_1 + \theta_4}{2},$$

или, выражая угол ε с помощью вспомогательного угла ϕ ,

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \phi.$$

Подставляя найденное значение ϵ в систему (64), можно получить после некоторых преобразований

$$\cos \frac{\theta_1 - \theta_4}{2} = \frac{\sin \phi}{\sin 3\phi}$$

и, следовательно,

$$\sin \frac{\theta_1 + \theta_4}{2} = \frac{\sin 2\phi \cdot \sqrt{2 \cos 2\phi}}{\sin 3\phi}$$

Воспользовавшись уравнением (62) и найденными значениями $\theta_1 + \theta_4$ и $\theta_1 - \theta_4$, получим

$$R = \frac{2 \sin \phi \cdot \sin 2\phi \cdot \sqrt{2 \cos 2\phi}}{\sin 3\phi},$$

$$d = \frac{\sin 2\phi}{\sin 3\phi}$$

и

$$h = \frac{2 \cos^2 \phi}{\sin 3\phi}.$$

Из найденных формул следует, что изменение угла ϕ ограничено следующими пределами:

$$0 < \phi < \frac{\pi}{4}.$$

Для радиусов предельных окружностей имеем по формулам (61), при $2\beta = \pi$,

$$\rho_0 = \frac{2 (\cos \phi \cdot \sin 2\phi \cdot \sqrt{2 \cos 2\phi} + \cos 2\phi)}{\sin 3\phi}$$

и

$$\rho_1 = \frac{2 (\cos \phi \cdot \sin 2\phi \cdot \sqrt{2 \cos 2\phi} - \cos 2\phi)}{\sin 3\phi}.$$

Отсюда видно, что радиусы предельных окружностей тем меньше отличаются друг от друга, чем ближе угол ϕ к $\frac{\pi}{4}$.

§ 24. Приближенные формулы

Рассматривая в мемуаре [10] приближение шатунной кривой к окружности для весьма малых пределов изменения угла α поворота кривошипа, Чебышев принимает для этого случая $\sin \alpha \approx \alpha$. Воспользовавшись формулой (58) и считая угол α весьма малым, получим

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_4) \cdot \sin^2(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1)}{\sin^2 \theta_1 \cdot \sin^2(2\beta - 2\theta_3 - \theta_1) - \sin^4 \theta_3}. \quad (65)$$

Из формулы (65) следует, что с точностью до величин второго порядка

$$\theta_1 = \theta_4$$

и, кроме того,

$$\theta_1 = \theta_3,$$

так как значение угла θ_3 лежит между θ_1 и θ_4 . Подставляя найденные значения углов в формулу (56), получим для определения размеров звеньев

искового механизма следующие приближенные формулы:

$$R = \sin \theta_1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin(2\beta - 3\theta_1)},$$

$$d = \sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin(2\beta - 3\theta_1)}$$

$$h = \frac{\sin(2\beta - 3\theta_1)}{\sin(3\theta_1 - \beta)} \left[\sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin(2\beta - 3\theta_1)} \right].$$

По фиг. 23 для радиуса ρ_0 предельной окружности имеем

$$\rho_0 = O_1 C_3 - M_0 C_3 = h - 2 \sin(\beta - \theta_1).$$

Следовательно,

$$\rho_0 = \frac{\sin(2\beta - 3\theta_1)}{\sin(3\theta_1 - \beta)} \left[\sin \theta_1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin(2\beta - 3\theta_1)} \right] - 2 \sin(\beta - \theta_1). \quad (66)$$

Предельное уклонение точек шатунной кривой от окружности оценивается по формуле

$$E = \pm AL,$$

где L определяется по формуле (20).

Для последующего предельного перехода необходимо получить несколько иное выражение для L , не зависящее от угла θ_2 . Воспользовавшись системой (13) и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$2L(1 + s^2) = (s - s_1)(s - s_3)^2 - (s - s_4)(s - s_2)^2.$$

В этом уравнении, справедливом для любого значения s в интервале $s_4 \leq s \leq s_1$, полагая

$$s = s_4 = \operatorname{ctg} \theta_4, \quad s_3 = \operatorname{ctg} \theta_3, \quad s_1 = \operatorname{ctg} \theta_1,$$

получим

$$L = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4) \sin(\theta_3 - \theta_4)^2}{2 \sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_3 \cdot \sin \theta_4}, \quad (67)$$

Для определения разности углов, входящих в формулу (67), воспользуемся уравнениями (17) и (18)

$$\sin \theta_1 \sin^2 \theta_3 = \sin \theta_4 \sin^2 \theta_2,$$

$$\theta_1 + 2\theta_3 = \theta_4 + 2\theta_2.$$

Полагая $\theta_1 = \theta_3 + \Delta$ и $\theta_4 = \theta_3 + \Delta_1$, так что по второму уравнению системы $\theta_2 = \theta_3 + \frac{\Delta - \Delta_1}{2}$, и подставляя значения углов θ_1 , θ_4 и θ_2 в первое уравнение системы, получим, с точностью до величин второго порядка включительно,

$$\Delta = -3\Delta_1.$$

По этим значениям Δ и Δ_1

$$\theta_3 - \theta_4 = \frac{1}{4}(\theta_1 - \theta_4).$$

Подставляя разность $\theta_3 - \theta_4$ в формулу (67) и ограничиваясь в числителе для $\sin(\theta_1 - \theta_4)$ первыми членами разложения в ряд $\sin(\theta_1 - \theta_4)$ по

степеням $\theta_1 - \theta_4$, получим

$$L = \frac{(\theta_1 - \theta_4)^3}{32 \sin^3 \theta_1},$$

где в знаменателе принято $\theta_2 = \theta_3 = \theta_1$.

Коэффициент A , входящий в формулу для предельного уклонения E , определяется по формуле (55) и найденным приближенными значениям R , d и h следующей формулой:

$$A = \frac{4 \sin^3 \theta_1 \cdot \sin \beta}{\sin (3\theta_1 - \beta)}.$$

Следовательно,

$$E = \pm \frac{(\theta_1 - \theta_4)^3 \cdot \sin \beta}{8 \sin (3\theta_1 - \beta) \cdot \sin \theta_1}.$$

Так как между радиусами предельных окружностей ρ_0 и ρ_1 и радиусом приближаемой окружности ρ существуют зависимости

$$\begin{aligned} \rho_0^2 - \rho^2 &= E, \\ \rho_1^2 - \rho^2 &= -E, \end{aligned}$$

то

$$\rho_1^2 = \rho_0^2 - \frac{(\theta_1 - \theta_4)^3 \sin \beta}{4 \sin \theta_1 \cdot \sin (3\theta_1 - \beta)},$$

или, после извлечения квадратного корня, приближенно

$$\rho_0 - \rho_1 = \frac{(\theta_1 - \theta_4)^3 \sin \beta}{8 \rho_0 \sin \theta_1 \cdot \sin (3\theta_1 - \beta)}. \quad (68)$$

Для малых величин $\theta_1 - \theta_4$ и α^2 имеем такую зависимость по формуле (65), при $\theta_1 = \theta_3 = \theta_4$,

$$\theta_1 - \theta_4 = \frac{\sin (2\beta - 2\theta_1) \cdot \sin (2\beta - 4\theta_1)}{8 \operatorname{ctg} \theta_1 \sin^2 (2\beta - 3\theta_1)} \alpha^2.$$

Подставляя в формулу (68) найденное значение $\theta_1 - \theta_4$ и исключая ρ_0 в правой части по (66), получим после некоторых преобразований

$$\rho_0 - \rho_1 = \frac{\sin \beta \cdot \sin^2 \theta_1 \cdot \sin^3 (2\beta - 2\theta_1) \cdot \sin^3 (2\beta - 4\theta_1) \cdot \alpha^6}{8192 \cos^4 \theta_1 \cdot \sin (\beta - \theta_1) \cdot \sin (\beta - 2\theta_1) \cdot \sin^6 (2\beta - 3\theta_1)}.$$

Так как весь участок шатуновой кривой, приближаемый к окружности, должен располагаться между предельными окружностями радиусов ρ_0 и ρ_1 , то из полученной формулы следует, что при малых значениях α рассматриваемое приближение будет *весьма* точным.

Глава VI

ПРИМЕНЕНИЯ РЯДОВ К ЗАДАЧАМ СИНТЕЗА ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 25. Вводные замечания

Практическая применимость метода, развитого Чебышевым в теории наилучшего приближения функций, к задачам синтеза механизмов тесно связана с возможностью решения в каждом отдельном случае системы урав-

нений типа (1). Даже в простейшем случае при рассмотрении задач синтеза шарнирных четырехзвенных прямолинейно-направляющих механизмов общего вида (несимметричных) не удалось до сих пор решить соответствующую систему типа (1). Еще большие трудности возникнут при рассмотрении задач синтеза многозвенных механизмов. Этим обстоятельством, повидимому, объясняется тот факт, что задачу о наилучшем приближении шатунных кривых к прямым и окружностям Чебышев рассматривал в своих работах исключительно для симметричных модификаций.

Изыскивая другие методы решения задач синтеза приближенных прямолинейно-направляющих механизмов, Чебышев устанавливает [5] общий простой способ, позволяющий построить многозвенный шарнирный механизм, шатунная кривая которого имеет соприкосновение с прямой весьма высокого порядка. Практически шатунные кривые таких механизмов будут мало отклоняться от соответствующих прямых на достаточно большом участке.

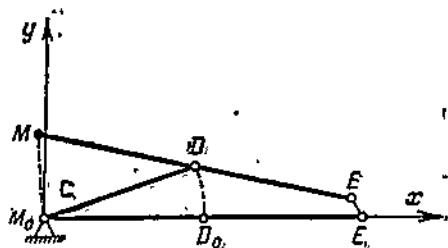
При рассмотрении задачи о приближении шатунной кривой к заданной прямой можно всегда выбрать систему координат так, чтобы заданная прямая была горизонтальна или вертикальна. В таком случае, по Чебышеву, точка механизма доставляет прямолинейное движение с точностью до величин порядка λ , если разность Δ соответствующей координаты точки и заданной прямой разлагается в степенной ряд

$$\Delta = a_{\lambda} a^{\lambda} + a_{\lambda+1} a^{\lambda+1} + \dots,$$

где a — малый параметр (обычно малый угол поворота звена), не содержащий первых $\lambda - 1$ степеней a . Очевидно, что прямая и приближенная к ней шатунная кривая имеют при таком разложении Δ в ряд λ бесконечно близких общих точек.

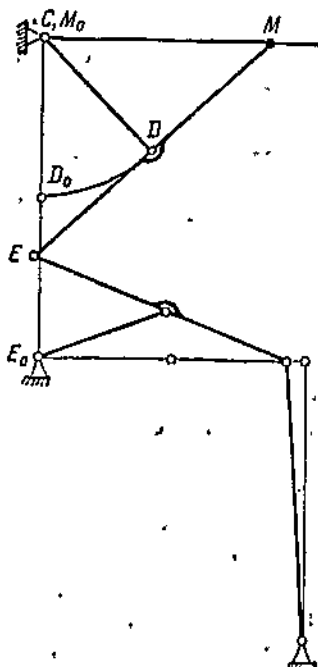
§ 26. Диада Чебышева

Назовем диадой Чебышева кинематическую цепь, состоящую из двух звеньев ME и CD с размерами $MD = DE = DC$ (фиг. 27). Пусть точка C диады присоединена к стойке и в начальном положении звенья ME и CD располагаются на одной прямой так, что точки M_0 и C совпадают. Если из рассматриваемого начального положения двигать точку E диады Чебышева по малому участку траектории, доставляющему прямолинейное движение по горизонтальной прямой с точностью до величин порядка λ , то, как показал Чебышев [5], точка M диады опишет траекторию, доставляющую прямолинейное движение по вертикальной прямой с точностью до величин порядка $2\lambda - 1$. Это замечательное свойство диады Чебышева позволяет получать новые прямолинейно-направляющие механизмы из уже су-

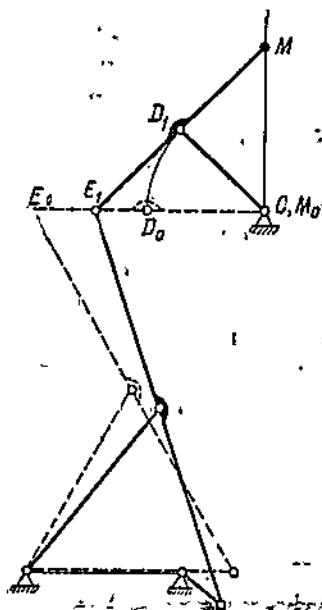


Фиг. 27

ществующих. Пусть точка E двигается по окружности, касательной к оси x в начальном положении днады. В таком случае рассматриваемое движение точки E доставляет прямолинейное движение с точностью до величин второго порядка, а траектория точки M доставит прямолинейное движе-



Фиг. 28



Фиг. 29

ние по оси y с точностью до величин пятого порядка. Координата x полученного таким образом механизма Эванса действительно разлагается в ряд

$$x = \frac{a^3}{2R} a^5 + \dots,$$

как это показано в § 20 и в нашей статье [19].

Если к точке E механизма Эванса присоединить днаду Чебышева, то траектория точки M образованного таким образом шестизвенного шарнирного механизма доставит движение по горизонтальной прямой с точностью до величин одиннадцатого порядка (фиг. 28).

Если днаду Чебышева присоединить к точке E лямбдаобразного прямолинейно-направляющего механизма Чебышева (фиг. 29), доставляющего движение по горизонтальной прямой с точностью до величин шестого порядка, то траектория точки M полученного таким образом шестизвенного механизма (фиг. 29) доставит движение по вертикальной прямой с точностью до величин тринадцатого порядка.

Путем последовательного наложения диад Чебышева можно получить в общем случае шарнирный многозвенный механизм, доставляющий прямолинейное движение с точностью до величин порядка

$$2^n \lambda + 2^n - 1,$$

где n — число присоединяемых диад, если точка E первой диады Чебышева движется по кривой, доставляющей прямолинейное движение с точностью до величин порядка λ .

Однако, следует отметить, что по мере увеличения числа звеньев механизма вследствие неточностей при изготовлении звеньев и зазоров в шарнирах действительная точность его хода начнет быстро уменьшаться, в связи с чем многозвенные механизмы с высокой точностью хода могут представлять лишь теоретический интерес.

§ 27. Шестизвенные прямолинейно-направляющие механизмы

В ряде случаев оказывается необходимым установить, при каком соотношении между размерами звеньев заданного шестизвенного механизма траектория его некоторой точки доставляет прямолинейное движение с определенной степенью точности. Чебышев в своих работах [3 и 5] рассмотрел три таких механизма и указал без вывода соотношение между размерами их звеньев. Легко показать, что все необходимые зависимости получены Чебышевым из соответствующих разложений в ряды выражений для координат точки, совершающей искомое приближенное прямолинейное движение.

Рассмотрим два положения шестизвенного шарнирного механизма Чебышева (фиг. 30). В начальном положении механизма шарнир C располагается на вертикальной прямой $y_0 - y_0$ в точке O . Точка O является неподвижным центром вращения коромысла OF . Кроме того, для рассматриваемого механизма в начальном положении звено BC совпадает с вертикалью $y_0 - y_0$, звено DE параллельно вертикали $y_0 - y_0$, а звенья AB и FC перпендикулярны $y_0 - y_0$ так, что контур $D_0 B_0 O E_0$ — прямоугольник.

Так как для рассматриваемого механизма $FO = FC$, то уклонение точки C от вертикали в некотором произвольном положении механизма определится по формуле

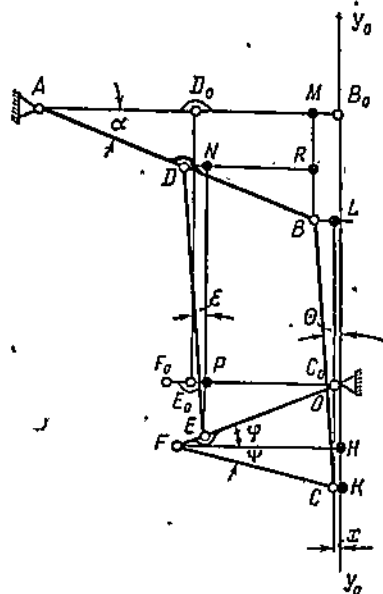
$$KC = x = FC (\cos \psi - \cos \varphi).$$

По фиг. 30 имеем

$$B_0 O + OH + HK = CL + BM$$

и

$$AB_0 = AM + BL + CK.$$



Фиг. 30

Из этих уравнений определяем

$$\begin{aligned}
 CL &= BC \cos \theta = B_0O + OH + HK - BM = B_0O + FO \sin \varphi + \\
 &+ FC \sin \psi - AB \sin \alpha \\
 \text{и} \quad BL &= BC \sin \theta = AB_0 - AM - CK = AB_0 (1 - \cos \alpha) - FC (\cos \varphi - \cos \psi).
 \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений угол θ , получим

$$\begin{aligned}
 BC^2 &= [BC + FC (\sin \varphi + \sin \psi) - AB \sin \alpha]^2 + \\
 &+ [AB (1 - \cos \alpha) - FC (\cos \varphi - \cos \psi)]^2.
 \end{aligned}$$

Это уравнение устанавливает зависимость между двумя вспомогательными углами φ и ψ . Для определения этих углов необходимо второе уравнение. Имеем по фиг. 30

$$DN + PO = DR + MB$$

и

$$EN + RM = B_0C_0 + PE_1.$$

Из этих уравнений определяем

$$DN = BC \sin E = BD \cos \alpha + AB (1 - \cos \alpha) - BD \cos \varphi$$

и

$$EN = BC \cos E = BC + BD \sin \varphi - (AB - BD) \sin \alpha.$$

Исключая угол E , получим

$$\begin{aligned}
 BC^2 &= [AB (1 - \cos \alpha) + BD (\cos \alpha - \cos \varphi)]^2 + \\
 &+ [BC - AB \sin \alpha + BD (\sin \varphi + \sin \alpha)]^2.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$a = \frac{BC}{AB}, \quad b = \frac{BD}{AB}, \quad c = \frac{CF}{AB}$$

и перепишем найденные уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}
 b^2 - b + 1 + (b - 1) \cos \alpha + a(b - 1) \sin \alpha &= b [1 + (b - 1) \cos \alpha] \cos \varphi + \\
 &+ b [(1 - b) \sin \alpha - a] \sin \varphi, \\
 c^2 + 1 - \cos \alpha - a \sin \alpha &= c (1 - \cos \alpha) \cos \varphi - c (a - \sin \alpha) \sin \varphi - \\
 - c (a - \sin \alpha) \sin \psi - c (1 - \cos \alpha) \cos \psi - c^2 \sin \varphi \cdot \sin \psi + c^2 \cos \varphi \cdot \cos \psi.
 \end{aligned} \right\} (69)$$

Уравнения (69) позволяют получить для $\cos \psi$ и $\cos \varphi$ разложения в ряды по степеням угла поворота α ведущего звена AB механизма. Пусть

$$\cos \varphi = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots,$$

и

$$\sin \varphi = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \dots$$

Установим зависимость между коэффициентами a_k и b_k написанных разложений. Подставляя значения $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в формулу

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , получим такие зависимости для коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned}
 a_0^2 &= 1 - b_0^2, \\
 a_0 a_1 &= -b_0 b_1, \\
 a_1^2 + 2a_0 a_2 &= -b_1^2 - 2b_0 b_2, \\
 a_0 a_3 + a_1 a_2 &= -b_0 b_3 - b_1 b_2, \\
 a_2^2 + 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 &= -b_2^2 - 2b_0 b_4 - 2b_1 b_3, \\
 a_0 a_5 + a_1 a_4 + a_2 a_3 &= -b_0 b_5 - b_1 b_4 - b_2 b_3, \\
 a_3^2 + 2a_0 a_6 + 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 &= -b_3^2 - 2b_0 b_6 - 2b_1 b_5 - 2b_2 b_4, \\
 a_0 a_7 + a_1 a_6 + a_2 a_5 + a_3 a_4 &= -b_0 b_7 - b_1 b_6 - b_2 b_5 - b_3 b_4,
 \end{aligned} \right\} (70)$$

из которых последовательно легко определяются все b_k , если известны a_k и, наоборот, все a_k , если известны b_k .

Подставляя в первое из уравнений (69) написанные выше разложения в ряды для $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, а также

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \dots$$

и

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \dots$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 b^2 &= b^2 a_0 - a b b_0, \\
 a(b-1) &= a_1 b^2 + b b_0 (1-b) - a b b_1, \\
 1-b &= b(1-b) a_0 - 2b(1-b) a_2 + 2b(1-b) b_1, \\
 (1-b)a &= 3b(1-b) a_1 + 6b^2 a_3 - b(1-b) b_0 + 6b(1-b) b_2 - 6a b b_3, \\
 \frac{b-1}{24} &= \frac{b(b-1)}{24} a_0 + \frac{b(1-b)}{2} a_2 - b^2 a_4 - \frac{b(1-b)}{6} b_1 + \\
 &\quad + b(1-b) b_3 - a b b_4, \\
 \frac{b-1}{120} a &= \frac{b(b-1)}{24} a_1 + \frac{b(1-b)}{2} a_3 + b^2 a_5 + \frac{b(1-b)}{120} b_0 - \frac{b(1-b)}{6} b_2 + \\
 &\quad + b(1-b) b_4 - a b b_5,
 \end{aligned} \right\} (71)$$

и

$$\frac{1-b}{720} = \frac{b(1-b)}{720} a_0 - \frac{b(1-b)}{24} a_2 + \frac{b(1-b)}{2} a_4 + b^2 a_6 + \frac{b(1-b)}{120} b_1 - \\
 - \frac{b(1-b)}{6} b_3 + b(1-b) b_5 - a b b_6.$$

Первые уравнения систем (70) и (71)

$$a_0^2 = 1 - b_0^2, \quad b_0^2 = b^2 a_0 - a b b_0$$

имеют решениями

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

При этих значениях a_0 и b_0 по второму уравнению системы (70) определяем $a_1 = 0$, а по второму уравнению системы (71) $b_1 = \frac{1-b}{b}$. Продолжая аналогичным образом вычисление, получим значение всех коэффициентов рядов

$$\cos \varphi = 1 - \frac{(1-b)^2}{2b^2} \alpha^2 + \left[\frac{(1-b)^3}{6b^2} - \frac{(1-b)^4}{8b^4} \right] \alpha^4 + \frac{(1-b)^5}{8ab^4} \alpha^5 + \\
 + \left[\frac{(1-b)^4}{12b^4} - \frac{(1-b)^6}{16b^6} - \frac{(1-b)^7}{45b^2} \right] \alpha^6 + a_7 \alpha^7 + \dots$$

где

$$a_7 = \frac{(1-b)^6}{16ab^6} - \frac{(1-b)^5}{12ab^4} - \frac{(1-b)^3}{48ab^2} - \frac{5(1-b)^4}{48ab^3} + \frac{(1-b)^6}{16ab^5} + \frac{(1-b)^7}{16ab^4};$$

и

$$\sin \varphi = \frac{1-b}{6} \alpha - \frac{1-b}{6b} \alpha^3 - \frac{(1-b)^2}{8ab^3} \alpha^4 + \frac{1-b}{12ab} \alpha^5 + b_0 \alpha^6 + \dots,$$

где

$$b_0 = \frac{(1-b)^2}{48ab} + \frac{5(1-b)^3}{48ab^2} + \frac{(1-b)^4}{12ab^3} - \frac{(1-b)^5}{16ab^4} - \frac{(1-b)^6}{16ab^5};$$

Полагая далее, что $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ разлагаются в ряды

$$\sin \varphi = c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + \dots$$

и

$$\cos \varphi = d_0 + d_1 \alpha + d_2 \alpha^2 + \dots$$

и подставляя во второе уравнение (69) эти ряды вместе с найденными разложениями для $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, получим, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α ,

$$c = cd_0 - ac_0,$$

$$b_1 c + cc_1 = 1,$$

$$b_1 - ac_2 + c_1 - cb_1 c_1 + ca_2 + cd_2 = \frac{1}{2},$$

$$cb_3 + cc_3 = -\frac{1}{6},$$

$$\frac{ca_2}{2} - cab_4 + cb_3 - \frac{cb_1}{6} - \frac{cc_1}{6} + cc_3 - cac_4 - \frac{cd_2}{2} - c^2 b_1 c_3 - c^2 b_3 c_1 + c^2 d_4 + c^2 a_4 + c^2 a_2 d_2 = -\frac{1}{24},$$

$$cb_4 - cab_5 - cac_5 + cc_4 - c^2 b_4 c_1 - c_4 b_1 c^2 + c^2 d_5 + c^2 a_5 = -\frac{a}{120}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{ca_4}{2} - \frac{ca_2}{24} + \frac{cb_1}{120} - \frac{cb_3}{6} + cb_5 - acb_6 + \frac{cc_1}{120} - \frac{cc_3}{6} + cc_5 - cac_6 + \\ + \frac{cd_2}{24} - \frac{cd_4}{2} - c^2 c_1 b_5 - c^2 b_4 c_3 - c^2 b_3 c_5 - c^2 b_1 c_5 + c^2 d_0 + c^2 a_4 d_2 + \\ + c^2 d_4 a_2 + c^2 a_6 = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно с уравнениями, аналогичными (70), составленными для c_0 и d_0 , получим для искомого разложения

$$\begin{aligned} \cos \varphi = 1 - \frac{(b-c+bc)^2}{2b^2c^2} \alpha^2 + \left(\frac{1}{24c^2} - \frac{1}{128c^4} \right) \alpha^4 + \left(\frac{1}{16ac^2} - \frac{1}{64abc^3} \right) \alpha^5 + \\ + \left(\frac{1}{192c^4} - \frac{1}{180c^2} - \frac{1}{1024c^6} \right) \alpha^6 + d_7 \alpha^7 + \dots, \end{aligned}$$

где

$$d_7 = -\frac{1}{64ac^3} + \frac{1}{192ac^4} + \frac{5}{1536ac^5} + \frac{1}{768ac^6} - \frac{1}{2048ac^7} - \frac{1}{4096ac^8}.$$

При $AB=1$ искомое значение x равно

$$x = c(\cos \varphi - \cos \varphi).$$

Подставляя в формулу найденные разложения для $\cos \varphi$ и $\cos \varphi$, получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{c} = \left[\frac{(1-b)^2}{2b^2} - \frac{(b-c+bc)^2}{2b^2c^2} \right] \alpha^2 + \left[\frac{1}{24c^2} - \frac{1}{128c^4} - \frac{(1-b)^2}{6b^2} + \frac{(1-b)^4}{8b^4} \right] \alpha^4 + \\ + \left[\frac{1}{16ac^2} - \frac{1}{64abc^3} - \frac{(1-b)^3}{8ab^4} \right] \alpha^5 + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при a^2 и a^5 , получим систему уравнений для определения размеров звеньев искомого механизма

$$c^2(1-b)^2 = [b - c(1-b)]^2, \quad 4b^2c - b^3 = 8c^3(1-b)^3.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем при $AB=1$ (фиг. 30):

$$\left. \begin{aligned} BD = b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ CF = c = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

что совпадает с результатом, приведенным Чебышевым [3].

При найденных значениях b и c коэффициенты при a^4 и a^6 в разложении x в ряд обращаются в нуль и

$$x = \frac{7-3\sqrt{5}}{32a} a^7. \quad (73)$$

Следовательно, если размеры звеньев рассматриваемого шарнирного механизма удовлетворяют условиям (72), то шатунная кривая точки C доставляет движение по вертикальной прямой с точностью до величин седьмого порядка и будет мало уклоняться от этой прямой на некотором участке, определяемом углом поворота α кривошипа механизма. Предельное уклонение траектории точки C от вертикальной прямой при $\alpha < 1$ может быть оценено по формуле (73).

Рассмотрим два положения другого шарнирного шестизвенного механизма Чебышева, изображенного на фиг. 31.

В начальном положении механизма точка A , принадлежащая звену EF , располагается на вертикальной прямой y_0-y_0 в точке A_0 , направления звеньев BD и FE совпадают с y_0-y_0 , а звенья CB , CE , D_0O перпендикулярны y_0-y_0 , причем они занимают соответственно положения B_0D_0 , F_0E_0 , CB_0 , CE_0 и D_0O . Уклонение точки A от вертикали y_0-y_0 в некотором произвольном положении механизма при

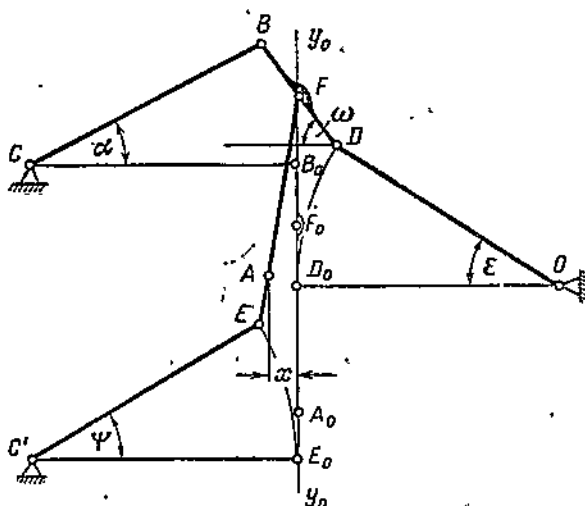
$$OD = BC = CE = 1, \quad BD = a, \quad EF = b, \quad DF = c, \quad AF = d$$

определится по формуле

$$x \cos \varepsilon = 1 + d \sin \theta + c \cos \omega.$$

Для определения $\sin \theta$ и $\cos \omega$ имеем уравнения

$$\left. \begin{aligned} [2 - \cos \varepsilon + a \cos \omega]^2 + [\sin \varepsilon - a + a \sin \omega]^2 = 1, \\ [2 - b \sin \theta - c \cos \omega - \cos \varepsilon]^2 + [\sin \varepsilon + c(\sin \omega - 1) + b(1 - \cos \theta)]^2 = 1. \end{aligned} \right\} (74)$$



Фиг. 31

По первому уравнению системы ищем разложения в ряды $\sin \omega$ и $\cos \omega$, полагая

$$\cos \omega = a_0 + a_1 \varepsilon + \dots$$

и

$$\sin \omega = b_0 + b_1 \varepsilon + \dots$$

Коэффициенты написанных разложений a_k и b_k связаны между собой общими уравнениями (70). Подставляя ряды для $\cos \omega$, $\sin \omega$, $\cos \varepsilon$ и $\sin \varepsilon$ в первое уравнение системы (74) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим для определения a_k и b_k систему уравнений, аналогичную (71). Поступая аналогично изложенному при решении систем (70) и (71), получим для искомых разложений

$$\cos \omega = \frac{1}{a} \varepsilon^2 - \frac{1}{12a} \varepsilon^4 - \frac{1}{2a^2} \varepsilon^5 + \frac{1}{360a} \varepsilon^6 - \frac{1}{12a^2} \varepsilon^7 + \left(\frac{5}{8a^3} - \frac{2}{81a} \right) \varepsilon^8 \dots$$

и

$$\sin \omega = 1 - \frac{1}{2a^2} \varepsilon^4 + \frac{1}{12a^2} \varepsilon^5 + \frac{1}{2a^3} \varepsilon^7 - \left(\frac{1}{8a^4} + \frac{1}{160a^2} \right) \varepsilon^8 \dots$$

Далее, ищем разложение в ряды для $\sin \theta$ и $\cos \theta$

$$\sin \theta = c_0 + c_1 \varepsilon + \dots$$

и

$$\cos \theta = d_0 + d_1 \varepsilon + \dots$$

Подставляя значения рядов для $\cos \omega$, $\sin \omega$, $\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$, $\sin \theta$ и $\cos \theta$ во второе уравнение системы (74) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим для определения c_k и d_k систему, аналогичную (71).

Решая эту систему совместно с уравнениями, аналогичными (70), получим для определения $\sin \theta$ такой ряд:

$$\begin{aligned} \sin \theta = & \frac{1}{b} \left(1 - \frac{c}{a} \right) \varepsilon^2 + \frac{1}{12b} \left(\frac{c}{a} - 1 \right) \varepsilon^4 + \frac{1}{2b^2} \left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 \varepsilon^5 + \\ & + \frac{1}{360b} \left(1 - \frac{c}{a} \right) \varepsilon^6 + \frac{1}{12b^2} \left(1 - \frac{c}{a} \right) \varepsilon^7 + \left[\left(1 - \frac{c}{a} \right)^3 \left(\frac{c}{8ab^2} + \frac{1}{2b^3} \right) - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{c}{a} \right) \left(\frac{2}{81b} + \frac{c}{8a^2b} \right) \right] \varepsilon^8 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя ряды для $\sin \theta$, $\cos \omega$ и $\cos \varepsilon$ в выражение для уклонения x траектории точки A от вертикали $y_0 - y_0$, получим при $OD=1$

$$\begin{aligned} x = & \left[\frac{c}{a} + \frac{d}{b} \left(1 - \frac{c}{a} \right) - \frac{1}{2} \right] \varepsilon^2 + \left[\frac{1}{24} + \frac{d}{12b} \left(\frac{c}{a} - 1 \right) - \frac{c}{12a} \right] \varepsilon^4 + \\ & + \left[\frac{d}{2b^2} \left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{2}{2a^2} \right] \varepsilon^5 + \left[\frac{d}{360b} \left(1 - \frac{c}{a} \right) + \frac{c}{360a} - \frac{1}{720} \right] \varepsilon^6 + \\ & + \left[\frac{d}{12b^2} \left(1 - \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{c}{12a^2} \right] \varepsilon^7 + \left[\frac{1}{81} + \frac{5c}{8a^3} - \frac{2c}{81a} + \left(1 - \frac{c}{a} \right)^3 \left(\frac{cd}{8ab^2} + \frac{d}{2b^3} \right) - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{c}{a} \right) \left(\frac{2d}{81b} + \frac{cd}{8a^2b} \right) \right] \varepsilon^8 + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при ε^5 и ε^6 , получим

$$b = \frac{(a-2c)(a-c)}{2c}, \quad d = \frac{(a-2c)^2}{4c}$$

что совпадает с результатом Чебышева [5]. При этих значениях b и d коэффициенты при ϵ^4 , ϵ^6 и ϵ^7 в разложении x обращаются в нуль, а, следовательно,

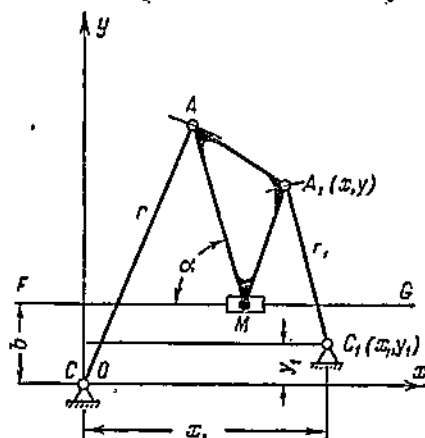
$$x = \frac{9c}{16a^2(a-2c)} \epsilon^8.$$

Траектория точки A рассматриваемого механизма доставляет прямолинейное движение с точностью до величины *восьмого* порядка. По найденному значению x оценивается предельное уклонение траектории точки A от вертикальной прямой в малых пределах изменения угла ϵ поворота звена OD .

§ 28. Четырехзвенные прямолинейно-направляющие механизмы

Для *симметричного* механизма Чебышева задача о приближении шатунной кривой к прямой в случае бесконечно малого хода чертящей точки была рассмотрена Чебышевым в мемуаре [6]. В этом случае решение задачи легко получить путем разложения в ряды общих зависимостей, выведенных для определения основных элементов симметричного прямолинейно-направляющего механизма с конечным ходом чертящей точки.

Для *несимметричного* шарнирного четырехзвенника общего типа задача о приближении шатунной кривой к прямой при бесконечно малом ходе чертящей точки также подробно рассмотрена Чебышевым в двух мемуарах [8 и 9]. Так как в указанных мемуарах решение задачи рассмотрено Чебышевым достаточно подробно, то здесь мы остановимся лишь на общей характеристике метода решения и на полученных им окончательных результатах.



Фиг. 32

Пусть в системе координат x, y (фиг. 32) задана прямая FG , уравнение которой $y = b$, и требуется определить размеры звеньев шарнирного четырехзвенника и положение точки M в его шатунной плоскости так, чтобы траектория точки M доставила прямолинейное движение по заданной прямой с точностью до величины *шестого* порядка.

В таком случае по общему определению следует искать разложение разности $\Delta = b - y$ в ряд по степеням некоторого малого параметра θ в таком виде:

$$b - y = A_6 \theta^6 + A_7 \theta^7 + \dots,$$

где y — ордината траектории точки M механизма. Однако непосредственное решение задачи в такой постановке приводит, как отмечает Чебышев, к четырем сложным уравнениям достаточно высокой степени.

Изыскивая другие возможности решения поставленной задачи, Чебышев рассматривает шатунную плоскость, у которой одна точка движется по окружности, а другая — по заданной прямой, и в этой шатунной плоскости ищет такую точку, расстояние которой до некоторой неподвижной точки

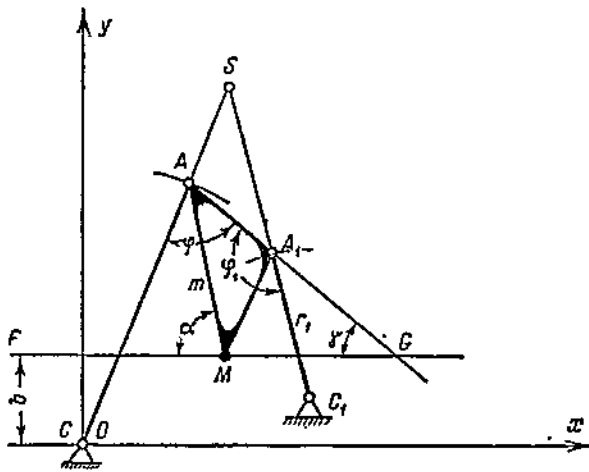
было бы постоянным с точностью до величин *шестого* порядка. Иными словами, Чебышев ищет размеры звеньев такого дезаксиального кривошипно-шатунного механизма $САМ$ с дезаксиалом b (фиг. 32), у которого некоторая точка A_1 шатунной плоскости доставляет движение по окружности радиуса A_1C_1 с точностью до величины *шестого* порядка.

В таком случае, считая, что в некотором начальном положении этого кривошипно-шатунного механизма при $\angle FMA = \alpha = \alpha_0$ расстояние искомой точки A_1 до неподвижной точки C_1 равно $A_1C_1 = r_1$ (фиг. 32), следует искать разложение разности расстояний

$$\Delta = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - r_1,$$

где x_1 и y_1 — постоянные координаты точки C_1 , а x , y — переменные координаты точки A , для значений α , близких к α_0 , в ряд

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - r_1 = A_6 (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 \dots$$



Фиг. 38

по степеням малого параметра $\theta = \sin \alpha - \sin \alpha_0$. Если точку A полученного таким образом кривошипно-шатунного механизма соединить с неподвижной точкой C_1 звеном $A_1C_1 = r_1$ и в точке M выбросить ползушку, то точка M образовавшегося шарнирного четырехзвенника $САA_1C_1$ (фиг. 33) доставит движение по прямой FG с той же точностью, с какой точка A_1 исходного механизма доставляла движение по окружности радиуса A_1C_1 (фиг. 32).

После обширных выкладок, приведенных в мемуаре [8], Чебышев пришел к следующим простым зависимостям, определяющим основные элементы искомого механизма:

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \angle A_1AC &= \frac{1}{3} \angle (A_1AM + 2n\pi), \\ \frac{AC}{AM} &= \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos^2 (\varphi + \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где $\gamma = \angle AGM$ (фиг. 33), а n — целое число, принимающее значения 0, 1, 2. Остальные элементы механизма определяются из соображений, что размеры A_1C_1 , A_1M и угол $\varphi_1 = \angle AA_1C_1$ должны быть между собой связаны

соотношениями, аналогичными, (75)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \angle AA_1C_1 = \frac{1}{3} \angle (AA_1M \mp 2\pi_1\pi), \\ \frac{A_1C_1}{A_1M} &= \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos^2 (\varphi_1 - \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

где n_1 принимает значения 0, 1, 2.

По приведенным формулам легко вычислить все элементы механизма, если считать заданным размеры сторон и положение жесткого треугольника AA_1M (фиг. 33). Задав числам n и n_1 определенные, указанные выше целые значения, следует вычислить углы φ и φ_1 по заданным углам A_1AM и AA_1M треугольника AA_1M . Эти углы определяют соответственно направления звеньев AC и A_1C_1 , а также точку их пересечения (фиг. 33), являющуюся мгновенным центром вращения шатуна AA_1M механизма. Траектория точки M доставляет движение с точностью до величин *шестого* порядка по прямой GM , перпендикулярной лучу SM , а угол γ определяется пересечением линий AA_1 и FM в точке G . При заданных углах γ , φ и φ_1 по формулам (75) и (76) вычисляются размеры AC и A_1C_1 , определяющие положение неподвижных шарниров C и C_1 механизма.

Чтобы охватить все возможные встретиться частные случаи, числам n и n_1 должны быть приданы значения 0, 1, 2, что дает 9 систем значений углов φ и φ_1 . Для каждой найденной пары значений углов φ и φ_1 угол γ может принимать *два* значения: $\gamma = \angle AGM$ и $\gamma = \angle (AGM \mp \pi)$, так что в общей сложности, задав треугольник AA_1M , можно построить 18 различных прямолинейно-направляющих механизмов.

При заданном малом ходе l точки M уклонение ее ординаты y от прямой $y = b$ оценивается по формуле

$$\Delta y = y - b = \frac{l^3 \cos^3 (\varphi + \gamma)}{2048 r r_1 m^3 \sin^3 2\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}},$$

где $m = AM$, $r = AC$, $r_1 = A_1C_1$ (фиг. 33). Как отмечает Чебышев, найденное уклонение Δy может быть уменьшено в 2^5 раз, если воспользоваться общими зависимостями, выведенными им в мемуаре [1], и вычислить на основании их те небольшие поправки, какие следует ввести в найденные размеры звеньев AC , A_1C_1 и углов φ и φ_1 .

В связи с важностью этого замечания для развития приближенных методов синтеза, остановимся на нем несколько подробнее. В своем мемуаре [1] Чебышев развил общий метод, позволяющий вычислить поправки, которые необходимо ввести в коэффициенты разложения в ряд заданной непрерывной функции по степеням малого параметра, чтобы этим разложением можно было пользоваться с достаточной точностью, когда пределы изменения параметра не бесконечно малы.

Следовательно, рассматриваемая задача синтеза механизма по идее Чебышева должна быть *сначала* решена для *бесконечно малых* пределов изменения выбранного независимого малого параметра, что позволит применить

найденный механизм на практике для малых конечных пределов изменения параметра. После этого, как это было показано Чебышевым в общем виде в мемуаре [1], требуется искать *поправки*, которые следует ввести в размеры звеньев найденного механизма, чтобы движение, осуществляемое им, мало уклонялось от заданного, когда пределы изменения выбранного параметра уже не бесконечно малы. Очевидно, что такой механизм с исправленными размерами звеньев позволит практически осуществить искомое движение в достаточно больших пределах изменения своего хода.

К сожалению, это весьма интересное и важное для практических приложений направление не получило никакого конкретного развития в опубликованных работах Чебышева по синтезу прямолинейно-направляющих механизмов.

Значительные трудности в применении метода Чебышева к задачам синтеза механизмов заключаются, повидимому, в том, что по этому методу как сами коэффициенты разложения в ряд, так и вычисленные к ним поправки являются достаточно сложными функциями размеров звеньев механизма и углов, определяющих его начальное положение.

В связи с этим определение основных элементов искомого механизма приведет к решению системы уравнений достаточно высокой степени, и трудно ожидать, чтобы из них можно было достаточно просто во всех случаях извлечь результаты, приемлемые для практического использования.

Глава VII

ВЫБОР ПРОФИЛЕЙ ЗУБЦОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЕН

§ 29. Вводные замечания

При правильном выборе профилей зубцов двух сцепляющихся круглых цилиндрических шестерен передаточное отношение, как известно, должно быть постоянным в течение всего периода зацепления.

В настоящее время получили большое распространение профили зубцов, очерченные по *эвольвентам*. До изобретения современных усовершенствованных способов обработки зубцов, дающих возможность легко получить весьма точно их профили, в практике весьма часто применяли приближенные способы профилирования, основанные на приближенной замене эвольвенты дугами окружностей. Так, например, широкое распространение имели *таблицы Гранта*, в которых радиусы соответствующих дуг окружностей профиля зубца давались в зависимости от размеров проектируемой шестерни. При составлении таблиц Гранта совершенно не учитывалось, в какой мере передаточное отношение уклоняется от номинального, когда действительный профиль зубца заменен дугами окружности и выбор дуги окружности не подчинялся условию, чтобы это уклонение было *минимальным*. Эти задачи, совершенно не рассмотренные у авторов, разрабатывавших приближенные методы профилирования зубцов цилиндрических шестерен, получили законченное и исчерпывающее решение значительно раньше в мемуаре Чебышева [11].

Несмотря на то, что задача о приближенном профилировании зубцов цилиндрических шестерен в значительной части потеряла в настоящее время свое практическое значение, этот мемуар Чебышева представляет большой *теоретический* интерес как блестящий пример решения сложной технической задачи методами, вытекающими из общей теории наилучшего приближения функций при помощи полиномов. Можно надеяться, что методы решения задачи, разработанные в этом мемуаре, получат применение в ряде случаев при рассмотрении ряда других технически важных задач.

§ 30. Постановка задачи

Если профилем зубца цилиндрической шестерни является дуга окружности, то передаточное отношение в течение времени зацепления двух зубцов будет уклоняться от номинального, определяемого отношением числа зубцов сцепляющихся шестерен. Чебышев рассматривает задачу о выборе дуг окружностей профилей зубцов так, чтобы наибольшее отклонение передаточного отношения от номинала было минимальным. Если обозначить через λ угол поворота ведущей шестерни, то соответствующий угол поворота *ведомой* шестерни будет $\mu = F(\lambda)$.

Для правильного зацепления, очевидно, должно быть

$$\mu_1 = \frac{R}{R_1} \lambda,$$

где R и R_1 — соответственно радиусы начальных окружностей ведущей и ведомой шестерен. При общей постановке задачи следует выбрать дуги окружностей профилей зубцов так, чтобы разность

$$\mu - \mu_1 = F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda = \varphi(\lambda)$$

наименее уклонялась от нуля в интервале для угла поворота λ ведущей шестерни,

$$0 \leq \lambda \leq l,$$

соответствующем времени зацепления головки и ножки одной пары зубцов. Очевидно, что точное решение задачи в такой постановке невозможно из-за сложности вида функций $F(\lambda)$ и громоздкости соответствующих уравнений типа (1), к решению которых в принципе может быть сведена рассматриваемая задача.

Переходя к *приближенному* решению задачи и учитывая, что угол λ — малая величина, Чебышев разлагает полученную функцию $\varphi(\lambda)$ в ряд по степеням малого параметра λ . Таким образом, для приближенного решения задачи достаточно сделать наименее уклоняющимся от нуля полином, приближенно заменяющий рассматриваемую функцию

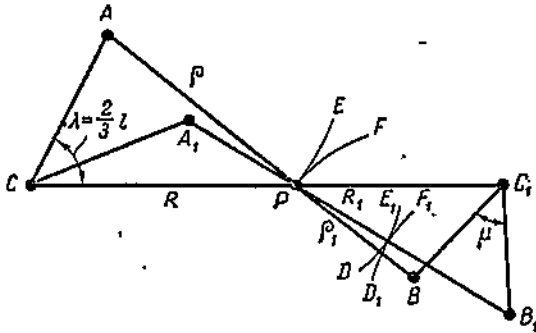
$$\varphi(\lambda) \approx k_4 \lambda^4 + k_3 \lambda^3 + k_2 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_0$$

или

$$\varphi(\lambda) \approx k_3 \lambda^3 + k_2 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_0,$$

в зависимости от точности, с какой необходимо решить задачу.

Прежде всего можно установить, что коэффициенты k_1 и k_0 написанных полиномов равны нулю. В самом деле, в начальный момент зацепления при $\lambda=0$ угол $\mu=0$ и зубцы соприкасаются на линии центров в полюсе зацепления P (фиг. 34). Для этого положения шестерен



Фиг. 34

$$\varphi(\lambda)_{\lambda=0} = \left(\mu - \frac{R}{R_1} \lambda \right)_{\lambda=0} = 0$$

и, следовательно, $k_0=0$. Так как угловая скорость ведомой шестерни

$$\omega_1 = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} = F'(\lambda) \omega,$$

где ω — угловая скорость ведущей шестерни, то передаточное отношение равно

$$i = \frac{\omega_1}{\omega} = F'(\lambda).$$

В начальный момент зацепления при $\lambda=0$, по фиг. 34

$$i_0 = \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)_{\lambda=0} = F'(\lambda)_{\lambda=0} = \frac{R}{R_1},$$

$$\varphi'(\lambda)_{\lambda=0} = F'(\lambda)_{\lambda=0} - \frac{R}{R_1} = 0,$$

а следовательно, $k_1=0$.

Таким образом, рассматриваемая задача в приближенной постановке сводится к отысканию, например, полиномов

$$\varphi(\lambda) \approx k_4 \lambda^4 + k_3 \lambda^3 + k_2 \lambda^2,$$

и

$$\varphi(\lambda) \approx k_3 \lambda^3 + k_2 \lambda^2,$$

наименее уклоняющихся от нуля в заданных пределах изменения угла λ ведущей шестерни

$$0 \leq \lambda \leq l.$$

§ 31. Решение задачи при помощи полинома третьей степени

Пусть требуется определить функцию

$$\varphi(\lambda) = k_3 (\lambda^3 + p_2 \lambda^2),$$

наименее уклоняющуюся от нуля в пределах изменения независимой переменной

$$0 \leq \lambda \leq l.$$

Если отбросить λ^3 , то λ^2 можно рассматривать как систему функций Чебышева с нулевой точкой $\lambda=0$. Так как λ^2 не имеет других корней, кроме $\lambda=0$, то, по теореме Чебышева, функция $\frac{1}{k_3} \varphi(\lambda)$ будет наименее

уклоняться от нуля, если она не менее *двух* раз достигает своих предельных значений при $\lambda = l_1$ и $\lambda = l_2 = l$ в интервале $0 \leq \lambda \leq l$. Обозначая через L предельное уклонение от нуля функции $\frac{1}{k_2} \varphi(\lambda)$, имеем по общим формулам (1) такие уравнения для определения p_2 , L и l_1 :

$$\begin{aligned} l_1^3 + p_2 l_1^2 &= -L, \\ l^3 + p_2 l^2 &= -L \end{aligned}$$

и

$$3l_1 + 2p_2 = 0.$$

Исключая из первых двух уравнений L и $l_1 = -\frac{2p_2}{3}$ и полагая $p_2 = -al$, получим

$$a^3 + \frac{27}{4}(a-1) = 0.$$

Действительный корень уравнения равен $a = 0.894$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= k_2 (\lambda^3 - 0.894 \lambda^2), \\ L &= \pm 0.106 l^3. \end{aligned}$$

Полученный полином, наименее уклоняясь от нуля в заданных пределах изменения угла λ , достигает своего предельного значения L при $\lambda = l$, т. е. в конце зацепления.

Если необходимо, чтобы в конце зацепления $\varphi(\lambda) = 0$ при $\lambda = l$, то соответствующий полином может быть также легко определен по уравнениям, непосредственно вытекающим из этого требования

$$\begin{aligned} l_1^3 + p_2 l_1^2 &= -L, \\ l + p_2 &= 0 \end{aligned}$$

и

$$3l_1 + 2p_2 = 0.$$

По второму уравнению

$$p_2 = -l$$

и искомый полином будет равен

$$\varphi(\lambda) = k_2 (\lambda^3 - l \lambda^2), \quad L = \frac{4}{27} l^3.$$

§ 32. Решение задачи при помощи полинома четвертой степени

Пусть требуется определить функцию

$$\varphi(\lambda) = k_2 (\lambda^4 + p_3 \lambda^3 + p_2 \lambda^2),$$

наименее уклоняющуюся от нуля в интервале изменения независимой переменной

$$0 \leq \lambda \leq l.$$

Если отбросить λ^4 , то λ^3 и λ^2 образуют систему Чебышева с нулевой точкой.

Так как полином

$$P(\lambda) = p_3 \lambda^3 + p_2 \lambda^2,$$

если не считать обязательного корня $\lambda=0$, имеет только один корень, то, по теореме Чебышева, функция $\frac{1}{k_4} \varphi(\lambda)$ будет наименее уклоняться от нуля, если она не менее *трех* раз достигнет своих предельных значений в интервале

$$0 \leq \lambda \leq l$$

при $\lambda=l$, $\lambda=l_2$, $\lambda=l_3=l$. Для определения коэффициентов искомой функции и ее предельного уклонения L имеем по формулам (1) систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} l_1^4 + p_3 l_1^3 + p_2 l_1^2 + L &= 0, \\ l_2^4 + p_3 l_2^3 + p_2 l_2^2 - L &= 0, \\ l^4 + p_3 l^3 + p_2 l^2 + L &= 0, \\ 4l_1^3 + 3p_3 l_1 + 2p_2 &= 0, \\ 4l_2^3 + 3p_3 l_2 + 2p_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Из последних двух уравнений системы находим

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= -\frac{3}{4} p_3, \\ l_1 l_2 &= \frac{1}{2} p_2. \end{aligned}$$

Складывая первые два уравнения системы и исключая из них l_1 и l_2 , получим

$$\frac{27}{256} p_3^4 - \frac{9}{16} p_2 p_3^2 + \frac{1}{2} p_2^2 = 0.$$

Полагая $p_2 = a p_3^2$, получим уравнение

$$a^2 - \frac{9}{8} a + \frac{27}{128} = 0,$$

и, следовательно,

$$a_1 = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{16}$$

или

$$a_2 = \frac{9 + 3\sqrt{3}}{16}.$$

Значения l_1 и l_2 определяются как корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{3}{4} p_3 x + \frac{a}{2} p_3^2 = 0$$

по формуле

$$x = -\frac{3}{8} p_3 \pm p_3 \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{a}{2}}.$$

Так как по найденному значению x выбор a определяется условием

$$a < \frac{9}{32},$$

то полагаем

$$a = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{16}$$

и следовательно,

$$p_2 = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{16} p_3^2,$$

по этому

$$l_1 = \left[-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}} \right] p_3$$

и

$$l_2 = \left[-\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}} \right] p_3,$$

Вычитая из первого уравнения системы (77) третье и заменяя l_1 и p_2 их значениями, получим уравнения для определения p_3

$$p_3^3 - 4,41p_3^2 - 54,5l^2p_3 - 70,5l^3 = 0$$

и значения

$$p_3' = 1,559l; \quad p_3'' = -4,35l; \quad p_3''' = 10,31l.$$

Из этих значений p_3 нужно выбрать то, при котором величина предельного уклонения L *наименьшая*.

Подставляя найденные значения p_3 в третье уравнение системы (77), получим для L соответственно такие *три* значения:

$$L' = -0,02l^4; \quad L'' = -1,15l^4; \quad L''' = -15,89l^4.$$

Принимая $p_3 = -1,559l$, получим $p_2 = 0,578l^2$, так что искомый полином представится в виде

$$\varphi(\lambda) = k_4 (\lambda^4 - 1,559l\lambda^3 + 0,578l^2\lambda^2), \\ L = \pm 0,02l^4.$$

Если для полинома, определяющего $\varphi(\lambda)$, поставлено условие, что $\varphi(\lambda) = 0$ при $\lambda = l$, то коэффициенты определяются из уравнений

$$l_1^4 + p_3 l_1^3 + p_2 l_1^2 + L = 0,$$

$$l_2^4 + p_3 l_2^3 + p_2 l_2^2 - L = 0,$$

$$l^2 + p_3 l + p_2 = 0,$$

$$4l_1^2 + 3p_3 l_1 + 2p_2 = 0,$$

$$4l_2^2 + 3p_3 l_2 + 2p_2 = 0.$$

Так как четыре уравнения написанной системы совпадают с соответствующими уравнениями системы (77), то, полагая $p_2 = ap_3^2$, найдем

$$p_2 = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{16} p_3^2 = 0,238 p_3^2.$$

Полагая для четвертого уравнения системы $p_3 = bl$ и заменяя p_2 его значением, получим уравнение

$$ab^2 + b + 1 = 0;$$

отсюда $b = -1,638$; так что

$$p_2 = 0,638l^2; \quad p_3 = 1,638l;$$

и, следовательно, искомый полином

$$\varphi(\lambda) = k_4 (\lambda^4 - 1,638\lambda^3 + 0,638\lambda^2), \\ L = -0,244\lambda^4.$$

Приближенные выражения для $\varphi(\lambda)$, найденные выше, совпадают с аналогичными формулами, приведенными Чебышевым без вывода [11]. Для следующего, детально изложенного анализа Чебышев пользуется приближенными значениями

$$\varphi(\lambda) = F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda = k_3 (\lambda^3 - \Omega^2), \\ \varphi(\lambda) = F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda = k_4 (\lambda^4 - 1,638\lambda^3 + 0,638\lambda^2),$$

полученными в предположении, что полином $\varphi(\lambda) = 0$ при $\lambda = L$.

§ 33. Построение профилей зубцов

Пусть соотношение между углами поворота двух сцепленных между собой шестерен выражено приближенной зависимостью

$$F(\lambda) = k_3 (\lambda^3 - \Omega^2) + \frac{R}{R_1} \lambda.$$

Так как передаточное отношение шестерен

$$F'(\lambda) = k_3 (3\lambda^2 + 2\Omega) + \frac{R}{R_1}$$

будет достигать своего номинального значения $\frac{R}{R_1}$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = \frac{2}{3}\Omega$, то, по теореме Виллиса, при этих же значениях угла λ поворота ведущей шестерни нормаль в точке касания профилей зубцов должна пройти через полюс зацепления P (фиг. 34).

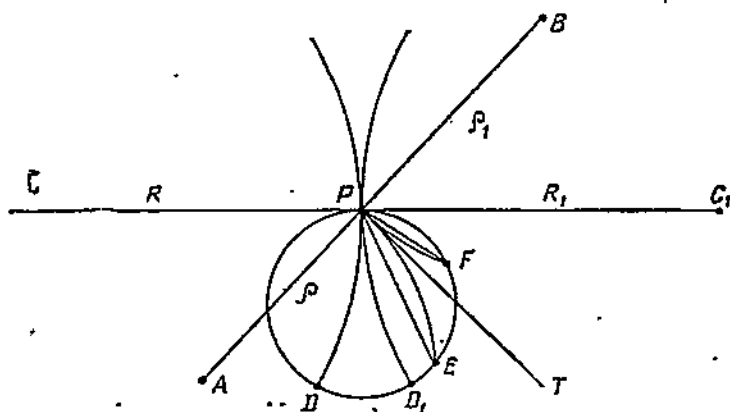
По этому свойству рассматриваемого зацепления Чебышев устанавливает весьма простое построение для определения дуг окружностей искомых профилей зубцов, заключающееся в следующем. Откладываем по начальным окружностям соответственно радиусов R и R_1 обеих шестерен равные дуги $PD = PD_1$ (фиг. 35), соответствующие периоду зацепления головки зубца ведущей шестерни и ножки зубца ведомой шестерни, и проводим через точки P , D и D_1 окружность. На полученной окружности, как это показано Чебышевым, должны лежать концы E и F дуг окружностей искомых профилей зубцов, причем $DD_1 = EF$. Выбрав положение точки E на построенной окружности, можно по условию $DD_1 = EF$ определить положение точки F . Проведя направление нормали к профилям зубцов в точке P , определяем центры A и B дуг профилей зубцов и их радиусы $\rho = AP$ и $\rho_1 = BP$. Если соотношение между углами поворота зубчатых шестерен задано более точной зависимостью

$$F(\lambda) = k_4 (\lambda^4 - 1,638\lambda^3 + 0,638\lambda^2) + \frac{R}{R_1} \lambda,$$

то передаточное отношение

$$F'(\lambda) = (4\lambda^3 - 4,914\lambda^2 + 1,276\lambda) + \frac{R}{R_1}$$

достигает своего номинального значения $\frac{R}{R_1}$ при $\lambda = 0$, $\lambda = 0,365l$ и $\lambda = 0,865l$.



Фиг. 35

В этом случае положение нормали AB к профилям зубцов в точке P не может быть выбрано произвольно и определяется из *приближенного* условия

$$\frac{\angle FPT}{\angle EPT} \approx \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1},$$

где PT — направление линии, перпендикулярной к AB . В остальном построение для определения положений точек E и F совпадает с изложенным выше.

З а в я ч е н и е

Задачи метрического синтеза шарнирных механизмов принадлежат к числу труднейших задач современной теории механизмов. Ограниченность числа параметров, которыми можно располагать при решении задач синтеза шарнирных механизмов, и разнообразие требований, какие могут быть предъявлены практикой к проектируемым механизмам, позволяют считать, что точное решение задач синтеза шарнирных механизмов в общем виде неосуществимо. Точное решение этих задач возможно лишь в особых частных случаях. Так, например, хорошо известны точные прямолинейно-направляющие механизмы Поселье — Липкина и Гарта, синусные и тангенсные механизмы, сумматоры и мультипликаторы Кемпе и др. Теоретически эти механизмы соответствующие закономерности осуществляют *точно*, в действительности же вследствие неточностей в размерах звеньев и зазоров в кинематических парах они по существу лишь *приближенные* механизмы.

В связи с указанными обстоятельствами особенное значение приобретают приближенные методы метрического синтеза шарнирных механизмов, а среди них метод Чебышева, позволяющий в ряде случаев построить механизм, движение звеньев которого наименее уклоняется от требуемого практикой

движения. Общая схема решения задач синтеза механизмов по методу Чебышева заключается в следующем. Пусть требуется при помощи механизма осуществить некоторую заданную функциональную зависимость между любыми его переменными параметрами x и y .

$$F(x, y) = 0. \quad (78)$$

Для всякого механизма с одной степенью подвижности переменные x и y могут быть выражены точно или приближенно как некоторые функции одного параметра t

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi_1(t), \\ y &= \phi_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Подставляя значения x и y в выражение (78) и выполняя соответствующие действия, в ряде случаев можно получить, вместо соотношения (78), некоторый полином, не равный нулю

$$P_n(t) = A[\varphi_0(t) + p_1\varphi_1(t) + \dots + p_n\varphi_n(t)].$$

Если функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ образуют систему Чебышева, то, на основании теоремы Чебышева при числе точек предельного уклонения, равном не менее $n+1$, полином $P_n(t)$ будет наименее уклоняться от нуля. В этом случае определение коэффициентов $p_k (k=1, 2, \dots, n)$ предельного уклонения L и значений $t_k (k=1, 2, \dots, n+1)$ в точках предельного уклонения приводится к решению системы $2n+2$ уравнений типа (1) с $2n+2$ неизвестными. Разумеется, практически точное решение системы (1) в общем случае весьма сложно, и в этом заключается основной недостаток метода наилучших приближений Чебышева. Однако для многих задач синтеза шарнирных механизмов решение соответствующей системы типа (1) удается получить, что весьма убедительно было продемонстрировано в ряде работ, принадлежащих Чебышеву.

В результате решения системы типа (1) коэффициенты p_k определяются как функции пределов изменения параметра $t=t_1$ и $t=t_{n+1}$. Эти пределы изменения параметра t могут быть выбраны заранее, если на проектируемый механизм не налагаются какие-либо дополнительные условия. Так как, с другой стороны, те же p_k являются функциями размеров звеньев и коэффициентов уравнений (78), то следующий этап решения задачи заключается в определении размеров звеньев механизма и коэффициентов уравнений (78) по известным значениям p_k . В ряде случаев этот этап может также представлять значительные трудности.

Успех применения метода Чебышева иногда зависит от умелого выбора параметра t . В качестве параметра для шарнирных механизмов рекомендуется выбирать углы между направлениями звеньев. Иногда в качестве параметра оказывается весьма полезным угол передачи. Выбор этого угла в качестве параметра позволяет, кроме того, построить искомым механизм с учетом динамических условий, что особенно важно для механизмов, передающих значительные мощности.

Для механизмов с поступательными кинематическими парами в качестве параметра целесообразно выбирать переменный размер кулисного звена. Умелым и правильным выбором параметра удается в ряде случаев значительно упростить решение системы типа (1).

Имеет значение также выбор схемы проектируемого механизма. В работах Чебышева его метод был успешно применен лишь к симметричным механизмам и их модификациям. За последнее время удалось применить метод Чебышева и к несимметричным механизмам.

Метод Чебышева, основанный на непосредственном применении к задачам синтеза механизмов теории наилучшего приближения функций при помощи полиномов, расширяя практические возможности решения этих задач, на существующем этапе своего развития не является достаточно общим и нуждается в дальнейшей доработке, в особенности в применении к задачам, важным для современного автоматостроения.

На ряду с методом, дающим приближенное решение задачи в достаточно широких пределах изменения угла поворота кривошипа механизма или параметра t , Чебышев разработал решения ряда задач синтеза механизмов при условии, что пределы изменения угла поворота кривошипа механизма бесконечно малы. Практически такие механизмы позволяют в большинстве случаев обеспечить приближенно, хотя и с меньшей точностью, требуемое движение в *конечных* пределах изменения угла поворота кривошипа механизма. Решение задачи в этих случаях выполняется по такой общей схеме. Пусть попрежнему (78)

$$F(x, y) = 0$$

— заданная зависимость, между любыми параметрами механизма, а

$$x = \varphi_1(\alpha) \text{ и } y = \varphi_2(\alpha)$$

— существующие для проектируемого механизма точные или приближенные выражения для x и y как функции малого параметра α (обычно малого угла поворота кривошипа). Подставляя значения x и y в (78) и разлагая полученное выражение в ряд по степеням α

$$f(\alpha) = k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + \dots \quad (80)$$

будем, по Чебышеву, считать, что искомая зависимость $F(x, y) = 0$ осуществляется механизмом с точностью до величин порядка n , если

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{n-1} = 0$$

и

$$f(\alpha) = k_n\alpha^n + \dots$$

Система уравнений

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{n-1} = 0 \quad (81)$$

определяет размеры звеньев искомого механизма, а точность рассматриваемого приближения оценивается величиной

$$\Delta = k_n a^n.$$

Практическая применимость рассматриваемого метода непосредственно связана с возможностью решения системы (81), а точность — с числом уравнений (81). В ряде случаев решение задачи удается значительно упростить, если правильно выбрать *схему* механизма и его *начальное* положение. В этих случаях обычно некоторые из уравнений (81) обращаются в нуль *тождественно*, что значительно упрощает решение остальных и позволяет получить искомое приближение с большой точностью.

Иногда полезно решать задачу в несколько иной постановке. Так, например, задачу о приближении шатунной кривой шарнирного четырехзвенника к прямой Чебышев удачно заменил эквивалентной задачей о приближении шатунной кривой кривошипно-шатунного механизма к окружности [8].

Аналогично этому задачу о приближении шатунной кривой шарнирного четырехзвенника к заданной произвольной кривой следует заменить задачей о приближении траектории одной точки шатунного звена диады к окружности, когда другая его точка движется по заданной кривой. В тех случаях, когда разложение в ряд не обеспечивает необходимой практической точности приближения, осуществляемой механизмом функциональной зависимости, к заданной в конечных пределах изменения параметра a , Чебышев рекомендует вводить поправки в коэффициенты разложения (80).

Общий метод определения поправок к коэффициентам разложения, обеспечивающих пригодность разложения функции в ряд для конечных малых пределов изменения параметра, разработанный Чебышевым [1], не получил, к сожалению, никакого практического применения в его работах по синтезу шарнирных механизмов, за исключением общих указаний, что при применении метода поправок точность приближения может быть значительно повышена. Лишь в работе по зубчатым передачам [11] метод поправок был успешно применен Чебышевым в несколько своеобразном виде, заслуживающем самого серьезного внимания.

Сущность метода поправок заключается в том, что разложение функций в ряд по степеням малого параметра обрывается на небольшом числе членов, например,

$$\psi(a) \approx k_0 + k_1 a + k_2 a^2 + k_3 a^3. \quad (82)$$

Это выражение дает наилучшее приближение к $\psi(a)$ в бесконечно малых пределах изменения a . В случае конечных пределов изменений a , как это имеет место в задачах синтеза механизмов, отброшенными членами разложения $\psi(a)$

$$k_4 a^4 + k_5 a^5 + \dots$$

нельзя пренебречь и следует искать полином третьей степени, наименее от них уклоняющийся в заданных малых пределах изменения a . Коэффициенты этого полинома дадут поправки для соответствующих коэффициентов выражения (82).

В простейшем случае иногда достаточно определить полином третьей степени, наименее уклоняющийся только от одного члена $k_4 a^4$ или, что то же самое, полином

$$P(a) = k_4(a^4 + p_3 a^3 + p_2 a^2 + p_1 a + p_0); \quad (83)$$

наименее уклоняющийся от нуля. Полиномы вида (83), наименее уклоняющиеся от нуля, хорошо известны для пределов изменения a от -1 до $+1$ и могут быть легко вычислены для других заданных пределов изменения a . Величины $k_4 p_3$, $k_4 p_2$, $k_4 p_1$, $k_4 p_0$ дают поправки к выражению (82) для $\psi(a)$ за счет отброшенного члена $k_4 a^4$. В более общем случае могут быть вычислены поправки к коэффициентам выражения за счет суммы двух отброшенных членов $k_4 a^4 + k_5 a^5$ разложения $\psi(a)$ и большего их числа, как это было показано Чебышевым [1].

Отметим, что метод разложения в ряды с определением соответствующих поправок к коэффициентам разложения, учитывающих влияние отброшенных членов в случае конечных пределов изменения параметра, может быть с успехом применен для составления приближенных аналитических формул по анализу шарнирных механизмов.

Если непосредственное определение функции $f(a)$, наименее уклоняющейся от нуля, затруднительно, то ее приближенно заменяют полиномом достаточно высокой степени

$$f(a) \approx k_n a^n + p_{n-1} a^{n-1} + \dots + p_1 a + p_0$$

и находят значения коэффициентов p_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), при которых полином, стоящий в правой части, наименее уклоняется от нуля.

Такой прием решения был использован Чебышевым при рассмотрении задачи о наивыгоднейшем профиле зубцов цилиндрических шестерен, очерченных по дугам окружностей [11]. Метод поправок может быть с успехом использован для установления приближенных значений выражений различных функций типа (79) шарнирного механизма, если получение точных их значений затруднительно или если точные выражения не приводят к практическому решению задачи. Разумеется, что использование приближенных выражений для функций шарнирного механизма при рассмотрении задач синтеза, уже лишает нас возможности получить механизм, доставляющий наилучшее приближение к заданной закономерности. Однако на практике нет необходимости стремиться к обязательному получению наилучших приближений, учитывая, что при работе механизма всякое наилучшее приближение все равно искажается вследствие зазоров в кинематических парах и неизбежных неправильностей в размерах звеньев.

Во многих случаях можно удовлетвориться менее точными механизмами с выгодными для конструктивного оформления соотношениями между размерами звеньев. С этой точки зрения всякий приближенный метод, при применении которого теоретическая ошибка может быть заранее учтена, позволяющий довести задачу синтеза шарнирного механизма до практических расчетных формул, заслуживает самого серьезного внимания и дальнейшей разработки.

Среди этих приближенных методов большое значение приобретает метод разложения в ряды для бесконечно малых пределов изменения параметра и метод рядов с поправками к коэффициентам для конечных малых пределов изменения параметра, разработанные Чебышевым. Дальнейшее развитие этих методов и конкретизация их содержания в применении к задачам синтеза шарнирных механизмов несомненно позволяют значительно продвинуть вперед решение этой трудной проблемы теории механизмов.

Из других методов, могущих получить значительное распространение, следует отметить метод наилучших приближений для конечного множества точек. По этому методу, непосредственно вытекающему из общей теоремы Чебышева, определение полинома, наименее уклоняющегося от заданной непрерывной функции на конечном множестве точек, приводится к решению системы линейных уравнений. Изложение сути метода дано акад. С. Н. Бернштейном [13].

Наконец, следует отметить способ определения приближенных полиномов, когда решение уравнений типа (1) невозможно. В этом случае за счет уменьшения числа точек предельного уклонения, необходимых для получения наилучших приближений, можно построить менее точные полиномы, удовлетворяющие практическим потребностям, сведя задачу к решению системы более простых уравнений для определения коэффициентов p_k и предельного уклонения L .

Дальнейшая разработка проблемы синтеза шарнирных механизмов несомненно связана с применением различных приближенных аналитических методов, и среди этих методов основная роль будет принадлежать замечательным методам, развитым академиком Пафнутием Львовичем Чебышевым.

Наиболее правильное и общее направление в разработке проблемы синтеза должно заключаться в простой методе получения механизма, осуществляющего грубое приближение к заданной закономерности, и в последующей возможности введения небольших последовательных поправок в размеры звеньев, обеспечивающих улучшение первоначальных результатов до желаемой степени точности. Разработка такого метода последовательных приближений несомненно позволила бы получить общий прием для решения самых разнообразных задач синтеза шарнирных механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебышев П. Л. К теории механизмов, известных под именем параллелограмов (1853). Соч., т. 1, стр. 111—143.
2. — Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функции (1857). Соч., т. 1, стр. 273—378, СПб., 1899.
3. — О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта (1861). Соч., т. 1 стр. 512—538, СПб., 1899.
4. — Об одном механизме (1907). Соч., т. II, стр. 51—57, СПб., 1907.
5. — О параллелограмах (1870). Соч., т. II, стр. 85—106, СПб., 1907.
6. — О простейших сочленениях (1878). Соч., т. II, стр. 273—282, СПб., 1907.
7. — О параллелограмах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси (1879). Соч., т. II, стр. 285—297, СПб., 1907.

8. — О параллелограмах, состоящих из трех каких-либо элементов (1880). Соч., т. II, стр. 301—331, СПб., 1907.
9. — О простейших параллелограмах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени (1891). Соч., т. II, стр. 359—374, СПб., 1907.
10. — О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси (1888). Соч., т. II, стр. 495—540, СПб., 1907.
11. — О зубчатых колесах (1872). Соч., т. II, стр. 129—162, СПб., 1907.
12. — О простейших параллелограмах, симметрических около одной оси (1878). Соч., т. II, стр. 709—714, СПб., 1907.
13. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. ОНТИ, М. — Л., 1937.
14. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. ОНТИ, М. — Л., 1934.
15. Блох Э. Ш. К теории симметричных механизмов Чебышева и их модификации. Изв. ОТН АН СССР, № 6, 1941.
16. — К синтезу механизмов с остановкой. Изв. ОТН АН СССР, № 7—8, 1941.
17. — Об одном применении патуновой кривой кулисного механизма. Изв. ОТН АН СССР, № 5—6, 1942.
18. — О теореме Робертса—Чебышева. Прикл. мат. и мех., т. IV, вып. 4, 1940.
19. — О невыгоднейших размерах звеньев механизмов типа Чебышева—Эванса. Изв. ОТН АН СССР, № 12, 1944.
20. — К теории λ -образного механизма Чебышева. Изв. ОТН АН СССР, № 9, 1944.

В. В. ДОВРОВОЛЬСКИЙ

ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ МЕХАНИЗМОВ В РАБОТАХ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

§ 1. Структурная формула

В работе „О параллелограмах“*, опубликованной в 1870 г., Чебышев ставит задачу о возможности большего приближения к прямой для траектории шарнирного механизма, чем это имело место в известных в то время механизмах, как, например, параллелограме Уатта и механизме Эванса, дающих, по исследованию Чебышева, движение с точностью не выше пятой степени. Для решения такой задачи Чебышев образует из четырехзвенного механизма другие путем присоединения к нему новых звеньев. Чтобы выяснить возможные комбинации звеньев, он выводит общее уравнение, связывающее число подвижных звеньев m , число подвижных шарниров n и число неподвижных шарниров v при условии определенности траекторий, т. е. одной степени свободы механизма. Полученное им уравнение имеет вид

$$3m - 2(n + v) = 1.$$

Через 13 лет после Чебышева Грюблер опубликовал статью**, в которой необходимое и достаточное условие „принужденности движения“, т. е. движения с одной степенью свободы, выражено уравнением

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

где g — число всех шарниров, а n — число всех звеньев, включая и стойку. Не трудно усмотреть тождественность этого уравнения с уравнением Чебышева; однако и до сих пор это уравнение слывет под именем „формулы Грюблера“.

В дальнейшем Чебышев показывает, что число v должно удовлетворять неравенствам

$$v > 0 \text{ и } v < \frac{m+3}{2},$$

* Чебышев П. Л. О параллелограмах. Соч., т. II, стр. 83—106, СПб. 1907.

** Grüber M. Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten. Civilingenieur 1883, (2), 29, стр. 167.

и исследует механизмы, получающиеся при последовательных значениях m , которое может выражаться только нечетными числами. Так, простейшее решение

$$m=1, v=1, n=0$$

дает вращательное движение одного звена, которое может заменить прямолинейное движение только с точностью до *второй* степени.

Следующие простые решения будут

$$m=3, v=1, n=3$$

и

$$m=3, v=2, n=2.$$

В первом случае мы опять получаем одно вращение, во втором — будем иметь шарнирный четырехзвенник в виде сокращенного параллелограмма Уатта, механизма Эванса и механизма самого Чебышева, из которых первые два дают прямолинейное движение с точностью до *пятой* степени, а третий — с точностью до *шестой* степени.

Дальнейшими решениями оказываются такие:

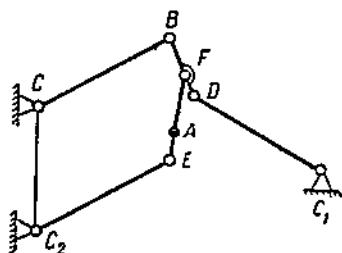
$$m=5, v=1, n=6;$$

$$m=5, v=2, n=5;$$

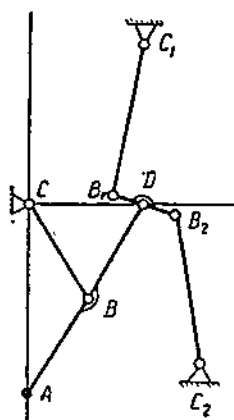
$$m=5, v=3, n=4.$$

Первое из этих решений опять приводит к *одному* вращению, второе — к *полному* параллелограмму Уатта и предложенному Чебышевым *измененному* параллелограмму Уатта, причем механизм Уатта дает точность до *пятой* степени, а механизм Чебышева — до *седьмой* степени.

В настоящее время среди этой группы механизмов найдены два точных прямолинейных — это механизмы Гарта. Третье решение Че-



Фиг. 1



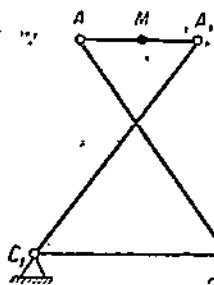
Фиг. 2

бышев дает в виде сокращенного параллелограмма Уатта (фиг. 1) („первая часть“ — звенья CB , BD и DC_1) с присоединенной к нему группой из двух звеньев („вторая часть“ — звенья C_2E и EF) и показывает, что такой механизм дает точность до *восьмой* степени.

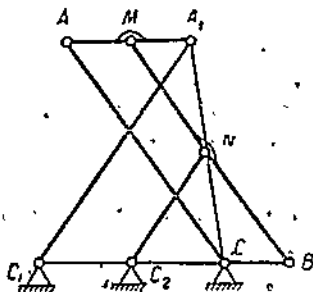
Далее Чебышев доказывает, что если „первая часть“ механизма и дает точность λ , то при определенных размерах и расположении звеньев „второй части“ степень точности получается равной $2\lambda + 1$. Так, исходя из сокра-

на то, что число звеньев и число шарниров не будет удовлетворять условию, указанному в предыдущем параграфе. Мы получаем, таким образом, применяя современную терминологию, механизм с пассивной связью,

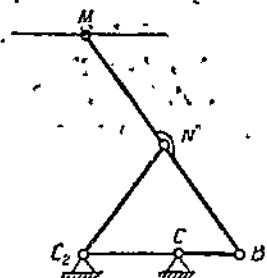
Чебышев пользуется таким механизмом, чтобы получить из него *новый* четырехзвенный механизм, состоящий только из присоединенных звеньев CB , BM и C_2N (фиг. 7), т. е. отбрасывая все (кроме стойки) звенья исходного механизма.



Фиг. 5

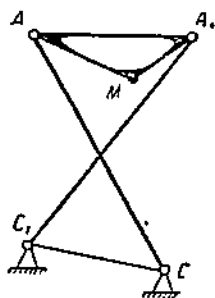


Фиг. 6

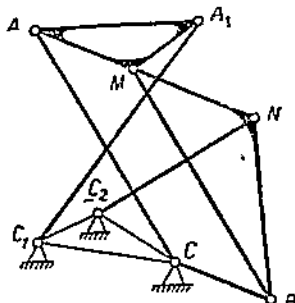


Фиг. 7

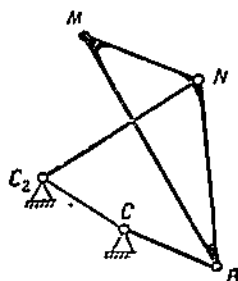
Подобное преобразование можно произвести и в том случае, когда точка M лежит вне прямой AA_1 (фиг. 8). Это и делает Чебышев, проводя MB параллельно AC и CB параллельно AM и строя треугольник MNB , подобный треугольнику AMA_1 (фиг. 9), и доказывает, что точка N во все время движения механизма находится на постоянном расстоянии от некоторой неподвижной точки C_2 , положение которой им также определяется. После этого присоединяется звено C_2N и отбрасываются звенья *исходного* меха-



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

низма (фиг. 8), в результате чего получается *новый* четырехзвенный механизм (фиг. 10), точка M шатуна которого описывает ту же траекторию, что и точка M исходного механизма.

В 1875 г. Робертс* высказал предложение, известное теперь под названием „теоремы Робертса“, о возможности образования одной и той же кривой тремя различными шарнирными четырехзвенниками. Из предыдущего изложения видно, что Чебышев пришел независимо от

* Lond. Math. Soc. Proc. 7, стр. 14, 1875.

Робертса к подобному предложению, указав только *два* из *трех* таких четырехзвенников; третий механизм опущен Чебышевым, повидимому, по той причине, что он принципиально не отличается от второго. На такое объяснение наводит нас замечание Чебышева о преобразовании механизма *симметричного* (исходного) в *несимметричный*. При указанном преобразовании второй и третий механизмы оказываются одинаковыми, но лишь симметрично расположенными. На этом основании можно высказанное предложение назвать *теоремой Робертса — Чебышева*.

Заметим, что Чебышев для нахождения центра C_2 (фиг. 9) указал более сложный, чем у Робертса, способ, не использовав подобия треугольников MNB , AMA_1 и CC_1C_2 , видимо, не обнаружив этого подобия. Это обстоятельство, по нашему мнению, также указывает на независимость открытия Чебышевым этой теоремы.

Механизмы с пассивными связями и получение из них новых механизмов путем устранения пассивных связей занимали многих исследователей, из которых назовем Бурместера, Мюллера и Клейбера. Так как для таких механизмов структурная формула уже не оправдывается, то в нее приходится внести „поправку на пассивные связи“, что и было сделано А. П. Малышевым в его работе „Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры“ (1923). В последней работе В. В. Добровольского „Система механизмов“ (1943) широко использован метод преобразования механизмов посредством введения и удаления пассивных связей, без ограничения только *плоскими* механизмами.

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	Стр. 3
Предисловие	4

В. И. Артоболовский и Н. И. Левитский.

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

Введение	7
--------------------	---

Часть первая

Симметричные механизмы

<i>Глава I.</i> Общий случай симметричного механизма и его модификации	12
§ 1. Общий случай симметричного механизма	12
§ 2. Основные виды шатуновых кривых симметричного механизма	19
<i>Глава II.</i> Круговые направляющие механизмы	20
§ 3. Общий случай кругового направляющего механизма	20
§ 4. Круговой направляющий механизм с чертающей точкой, расположенной на оси шатуна	22
§ 5. Круговой направляющий механизм, дающий приближение всей шатуновой кривой к полной окружности	23
§ 6. Круговой направляющий механизм, дающий приближение всей шатуновой кривой к дуге окружности	25
§ 7. Круговой направляющий механизм с чертающей точкой, расположенной на оси шатуна, дающий приближение всей шатуновой кривой к окружности	26
<i>Глава III.</i> Использование симметричных шатуновых кривых в механизмах Чебышева	27
§ 8. Механизмы для преобразования вращательного движения в другое вращательное движение	27
§ 9. Механизмы для преобразования вращательного движения в колебательное и обратно	32
§ 10. Механизмы для преобразования вращательного или сложного движения в поступательное	35
§ 11. Механизмы с остановками	37
§ 12. Некоторые выводы по теории симметричных механизмов Чебышева	42

Часть вторая

Прямолинейно-направляющие механизмы

<i>Глава I.</i> Симметричные прямолинейно-направляющие механизмы	44
§ 13. Общий случай симметричного прямолинейно-направляющего механизма	44

§ 14. Симметричный прямолинейно-направляющий механизм с чертающей точкой, расположенной на оси шатуна	49
§ 15. Симметричный прямолинейно-направляющий механизм, дающий приближение всей шатунной кривой к прямой	50
<i>Глава II. Примеры использования симметричных прямолинейно-направляющих механизмов</i>	<i>52</i>
§ 16. „Переступающий механизм“ („Стопоходящая машина“)	52
§ 17. Гребной механизм	53
<i>Глава III. Несимметричные прямолинейно-направляющие механизмы</i>	<i>56</i>
§ 18. Несимметричный четырехзвенный прямолинейно-направляющий механизм с шатунной кривой, имеющей с прямой соприкосновение 5-го порядка	56
§ 19. Несимметричный четырехзвенный прямолинейно-направляющий механизм с шатунной кривой, имеющей с прямой соприкосновение 4-го порядка	58
§ 20. Прямолинейно-направляющий механизм, преобразованный по Чебышеву	60
<i>Глава IV. Многозвенные прямолинейно-направляющие механизмы</i>	<i>61</i>
§ 21. Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, получаемый из полного параллелограмма Уатта	61
§ 22. Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, точный до 6-й степени	62
§ 23. Симметричный прямолинейно-направляющий механизм с пантографом	63
§ 24. Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, получаемый из сокращенного параллелограмма Уатта	64
§ 25. Многозвенные прямолинейно-направляющие механизмы с лямбдообразными группами	64
§ 26. Шестизвенный прямолинейно-направляющий механизм, дающий приближение всей шатунной кривой к прямой	65
§ 27. Некоторые выводы по теории прямолинейно-направляющих механизмов Чебышева	66
<i>Часть третья</i>	
<i>Некоторые специальные механизмы и приспособления</i>	
§ 28. Несимметричный круговой направляющий механизм	68
§ 29. Кулисный механизм паровой машины	69
§ 30. Весы	70
§ 31. Измеритель кривизны	71
§ 32. Арифмометр (Счетная машина с непрерывным движением)	72
§ 33. Центробежный регулятор	72
§ 34. Механизм с изменяемым ходом	72
Заключение	74
Приложение № 1. К теореме Робертса — Чебышева	76
Приложение № 2. Таблицы и графики для механизма № 6	78
Приложение № 3. Таблицы и графики для симметричного прямолинейно-направляющего механизма (общий случай)	81
Приложение № 4. Таблицы и графики для механизма № 22	96
Приложение № 5. Таблицы и графики для механизма № 23	100

	Стр.
Приложение № 6. Пример на определение параметров в механизме № 26 по заданному шатунному треугольнику	102
Приложение № 7. Замечание к статье П. Л. Чебышева „О параллелограммах“ (написано З. Ш. Блохом)	105
Приложение № 8. Указатель механизмов П. Л. Чебышева	107
Литература	109

З. Ш. Блох

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТ П. Л. ЧЕБЫШЕВА ПО МЕТРИЧЕСКОМУ СИНТЕЗУ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Введение	110
<i>Глава I.</i> Некоторые сведения из теории наилучшего приближения функций при помощи полиномов	112
§ 1. Системы функций Чебышева	112
§ 2. Теорема Чебышева	112
§ 3. Функции, наименее уклоняющиеся от нуля	113
§ 4. Системы функций Чебышева с нулевой точкой	114
<i>Глава II.</i> Механизмы Чебышева и их модификации	115
§ 5. Теорема Робертса—Чебышева	115
§ 6. Модификация симметричных механизмов Чебышева	118
§ 7. Уравнение шатунной кривой шарнирного четырехзвенника	122
<i>Глава III.</i> Задача о наилучшем приближении шатунной кривой к заданной	124
§ 8. Общая постановка задачи	124
§ 9. Наилучшее приближение к прямой	125
§ 10. Наилучшее приближение к дуге окружности	126
§ 11. Определение полинома, наименее уклоняющегося от нуля	127
<i>Глава IV.</i> Прямолинейно-направляющие механизмы Чебышева	129
§ 12. Выражение основных элементов механизма через параметры Чебышева	129
§ 13. Несимметричная модификация механизма	134
§ 14. Приближенные формулы	136
§ 15. Механизмы с шатунной кривой, уместающейся между двумя близкими прямыми	139
§ 16. Симметричный механизм с точкой <i>M</i> , лежащей на середине шатуна	141
§ 17. Лямбдообразный механизм	144
§ 18. Анализ углов передачи лямбдообразного механизма	145
§ 19. Разложение в ряд выражений для координат точки <i>M</i> лямбдообразного механизма	147
§ 20. Сравнение лямбдообразного механизма Чебышева с механизмом Эванса	149
<i>Глава V.</i> Механизмы Чебышева для черчения дуг окружностей	150
§ 21. Основные зависимости	150
§ 22. Приближение к окружности всей шатунной кривой	153
§ 23. Лямбдообразный механизм для черчения дуг окружностей	154
§ 24. Приближенные формулы	156
<i>Глава VI.</i> Применение рядов к задачам синтеза прямолинейно-направляющих механизмов	158
§ 25. Вводные замечания	158
§ 26. Диада Чебышева	159

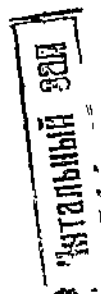
	<i>Стр.</i>
§ 27. Шестизвенные прямолинейно-направляющие механизмы	161
§ 28. Четырехзвенные прямолинейно-направляющие механизмы	167
<i>Глава VII. Выбор профилей зубцов цилиндрических шестерен</i>	170
§ 29. Вводные замечания	170
§ 30. Постановка задачи	171
§ 31. Решение задачи при помощи полинома третьей степени	172
§ 32. Решение задачи при помощи полинома четвертой степени	173
§ 33. Построение профилей зубцов	176
Заключение	177
Литература	182

В. В. Добровольский

ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ МЕХАНИЗМОВ В РАБОТАХ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

§ 1. Структурная формула	184
§ 2. Пассивные связи	186

51
H-12.



Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета АН СССР № 2911

Подписано к печати 29/V, 1945 г., А16806. Печ. л. 12+2 вкл. Уч.-изд. л. 18. Тираж 6000 экз.
Зак. 510. Цена книги 16 руб., переплет 4 руб.

Отпечатано с матрицы по 2-му издательству Академии Наук СССР, Москва, Шубинский пер., 10