

50350
Л. Г. ЛОЙЦАНСКИЙ

248019
**АЭРОДИНАМИКА
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

ПОЛУЧЕНО

Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ

ДЕП

АЭРОДИНАМИКА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

ПОЛУЧЕНО
1/305335

POst durch
in dem
sah
ПОЛУЧЕНО

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1941 · МОСКВА

ГОСУДАРСТВЕННАЯ БИБЛИОТЕКА
ИМЕНИ
ЛЕНИНА

Список замеченных опечаток

<i>Страница</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>	<i>По чьей вине</i>
63	В ф-ле (2.1) в 1-ой строке	$\frac{du}{dt}$	$\frac{du}{dt}$	Типографии
	во 2-ой строке	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	"
		$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial v}{\partial y}$	"
147	15 сверху	$t > \frac{\eta}{2}$	$t > \frac{\eta^2}{2}$	"
	16	$\int_0^8 \frac{1}{\eta^2}$	$\int_0^8 \frac{1}{\eta^2}$	"
225	В ф-ле (3.30) в 1-ой строке	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	"
273	В ф-ле (1.14)	Над буквой <i>v</i> надо повсюду черту ($\bar{v}$)		"

Л. Г. Л о й ц я н с к и й. Аэродинамика пограничного слоя. Отиз. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. Индекс 32-5-2.

Редактор С. Н. Ткаченко. Ведущий редактор Е. В. Пулькина. Технический ред. Е. Г. Женин. Корректор Н. В. Альтшуллер.

Сдано в набор 21/XII 1939 г. Подписано к печати 10/XII 1940 г. Формат бумаги 60 × 92/16

Объем 127/8 бум. л., 257/4 печ. л., 32,7 авт. л., 33,11 учетн. изд. л.,
М 43691 Тираж 2500. Цена книги 14 руб. переплет 1 р. 50 к. Заказ № 3958

4-я типография ОГИЗа РСФСР треста «Полиграфкнига» имени Евгении Соколовой
Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с ростом скоростей в авиации, кораблестроении и других областях техники современная аэрогидродинамика уделяет большое внимание вопросам сопротивления.

Настоящая книга содержит систематическое изложение теории пограничного слоя, лежащей в основе теории сопротивления, а также некоторых других вопросов, тесно связанных с этой теорией. Размеры книги не позволили достаточно подробно остановиться на практических методах расчетов и на деталях техники эксперимента в теории пограничного слоя.

Имея в виду недостаточную распространенность в широких кругах наших инженеров и учащихся вопросов динамики реальной (вязкой и сжимаемой) жидкости, мы в отделе первом в краткой форме напоминаем самые необходимые сведения из кинематики, динамики и термодинамики реальной жидкости. Второй и третий отделы посвящены, собственно теории ламинарного и турбулентного пограничного слоя.

Книга составлена на основании курсов лекций, читанных для студентов и аспирантов различных специальностей в Ленинградском индустриальном институте, и, как нам представляется, сможет несколько заполнить пробел, несомненно имеющийся в советской учебной и научной литературе по аэродинамике.

Акад. Н. Е. Кочин и проф. К. К. Федяевский просмотрели книгу в рукописи и сделали автору ряд весьма ценных указаний. Доц. Е. М. Минский согласился составить два параграфа в конце книги, посвященные методам измерения пульсаций, а также прочел в рукописи некоторые главы и сделал по поводу них отдельные замечания. Всем указанным лицам автор выражает свою искреннюю признательность.

Л. Лойцянский.

Ленинград
15/XI-1939 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7

Отдел первый

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА; ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ В АЭРОГИДРОДИНАМИКЕ

Глава I. Основные кинематические представления	9—20
§ 1. Элементарное перемещение жидкого отрезка и его деформация. Тензор деформации. Теорема Гельмгольца (9). § 2. Движение жидкости, как предел совокупности последовательных элементарных перемещений ее. Теорема Гельмгольца. Вращение жидкого объема и скорости его деформаций (14). § 3. Поле ускорений жидкости. Разложение ускорения на локальную и конвективную части (16). § 4. Элементы кинематики сплошных средин в криволинейной ортогональной системе координат. Скорость и ускорение в криволинейных координатах. Тензор скоростей деформаций в криволинейных координатах (18).	
Глава II. Основные уравнения динамики реальной жидкости и теория подобия	20—54
§ 1. Тензор напряжений в жидкости. Теорема о взаимности напряжений. Уравнения в напряжениях. Уравнение сохранения массы. Тензор переноса количества движения (20). § 2. Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций. Дифференциальные уравнения Навье-Стокса. Уравнение состояния. Уравнение притока тепла (30). § 3. Условия подобия двух течений реальной жидкости. Основные критерии подобия (37). § 4. Число Эйлера и закон сопротивления (42). § 5. Дополнительные соображения о числе Струхала. Подobie в газодинамических случаях. Случай тяжелой жидкости. Теория подобия и теория размерностей (47). § 6. Компоненты тензора напряжений в криволинейных координатах. Уравнения гидродинамики и притока энергии в криволинейных (ортогональных) координатах (51).	

Отдел второй

ТЕОРИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Глава I. Основные направления теории ламинарного пограничного слоя; ламинарный слой при продольном обтекании пластины	56—99
§ 1. Движение вязкой жидкости вблизи поверхности обтекаемого тела при больших рейнольдсовых числах. Пограничный слой. Уравнения движения жидкости в пограничном слое (56). § 2. Уравнения Прандтля, как общие уравнения движения жидкости вблизи поверхности при больших рейнольдсовых числах (62). § 3. Основные направления в развитии теории пограничного слоя. Асимптотический слой и слой конечной толщины. Метод Кармана-Польгаузена (69). § 4. Расчет трения пластинки по теории асимптотического слоя (75). § 5. Продольное обтекание пластин с точки зрения теории пограничного слоя конечной толщины. Сравнение результатов теорий с экспериментальными данными (83). § 6. Уравнения ламинарного пограничного слоя	

в форме Мизеса. Уравнение Кармана-Милдикена. Метод Буссинеска-Бюргерса. Продольное обтекание пластинки. „Внешнее“ решение (89). § 7. Другие методы построения внешнего решения и применение их к случаю продольного обтекания пластинки (95).

Глава II. Некоторые случаи движения жидкости и газа в ламинарном пограничном слое при отсутствии продольного перепада давления 99—151

§ 1. Ламинарный пограничный слой на пластинке, продольно обтекаемой сжимаемой вязкой жидкостью (99). § 2. Теплоотдача в ламинарном пограничном слое на пластинке в случае несжимаемой и сжимаемой жидкости. Связь между трением и теплоотдачей (112). § 3. Ламинарный „след“ за телом. След за пластинкой, продольно обтекаемой вязкой жидкостью (118). § 4. Ламинарная струя в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью (124). § 5. Некоторые случаи движения жидкости в пространственном ламинарном слое без продольного градиента давлений (134). § 6. Приложение методов операционного исчисления к задачам теории ламинарного пограничного слоя. Обтекание жидкостью бокового края пластинки. (141).

Глава III. Ламинарный пограничный слой при наличии продольного перепада давлений. Плоское движение 151—204

§ 1. Асимптотический слой; метод Блязиуса и уточнение его, данное Хоуэрзом (151). § 2. Движение жидкости в ламинарном пограничном слое при линейном распределении скорости во внешнем потоке; приближенный учет влияния начального сечения (157). § 3. Применение метода Хоуэрса к случаю величинного профиля скорости внешнего потока (163). § 4. Метод Кармана-Польгаузена. Определение толщины пограничного слоя и места отрыва. Сравнение результатов расчета с экспериментом. Неточность метода вблизи отрыва слоя (170). § 5. Возможные уточнения метода Польгаузена вблизи места отрыва слоя, (187). § 6. Метод Кармана и Милдикена расчета плоского пограничного слоя; приложение к „односкатному“ профилю (191).

Глава IV. Пространственный ламинарный пограничный слой при наличии перепада давления 204—226

§ 1. Ламинарный пограничный слой при продольном обтекании тел вращения (204). § 2. Пространственный ламинарный слой вблизи линии пересечения двух поверхностей (212). § 3. Пограничный слой при вращательных движениях жидкости вокруг оси. Сопротивление диска, вращающегося в безграничном пространстве и в кожухе (218).

Отдел третий

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Глава I. Переход ламинарного слоя в турбулентный и критические явления в пограничном слое 227—268

§ 1. Переход ламинарного движения в турбулентное. Роль числа Рейнольдса в общих условиях устойчивости ламинарного движения (228). § 2. Переход ламинарного слоя в турбулентный. Критическое рейнольдсово число пограничного слоя. Устойчивость ламинарного слоя в конфузorialной и диффузорной частях слоя (231). § 3. Влияние рейнольдсова числа и начальной турбулентности на точку перехода ламинарного слоя в турбулентный в случае обтекания цилиндра, шара и крыла (241). § 4. Явления „кризиса“ сопротивления плохо обтекаемых тел; влияние

начальной турбулентности на „кризис“ (250). § 5. Понятие о „шкалах“ турбулентности. Динамические шкалы. Тепловая шкала (262).

Глава II. Турбулентный перенос количества движения и „путь смещения“. Логарифмические и степенные законы скоростей и сопротивлений 268—315

§ 1. Актуальное и осредненное движение жидкости. Турбулентные напряжения. Уравнения Рейнольдса (268). § 2. Турбулентное перемешивание. Конвективный перенос субстанции и перенос количества движения. Путь смещения и формула турбулентного трения (273). § 3. Распространение турбулентной струи в пространстве, затопленном жидкостью той же плотности. Задача о размывании края струи. Струя, бьющая из тонкого отверстия. Обобщения на практические струи (279). § 4. Турбулентное движение жидкости, ограниченной стенкой. Логарифмический профиль скоростей. Применение логарифмического профиля скоростей к выводу закона сопротивления гладких труб. Степенные законы (290). § 5. Применение степенного и логарифмического законов к расчету сопротивления пластин. Учет влияния ламинарного участка пограничного слоя (306).

Глава III. Теория Тэйлора переноса завихренности в турбулентном потоке. Приложение идеи подобия к турбулентному движению 315—348

§ 1. Перенос завихренности при турбулентном перемешивании. Формула Тэйлора для плоско-параллельного потока. Напряжение турбулентного трения по теории переноса завихренности и по теории переноса количества движения (315). § 2. Теория турбулентного следа за телом. Вихревая и турбулентная часть следа за телом. Распределение скоростей и температур в турбулентном следе (317). § 3. Применение теории Тэйлора переноса завихренности к внутренней задаче (движение в трубах) (327). § 4. Применение идеи подобия в полуэмпирических теориях турбулентности. Формула Кармана и ее приложение к плоской трубе. Формулы Праудтля и Кармана с точки зрения подобия (328). § 5. Сопротивление пластины по Карману. Местное и суммарное трение. Развитие пограничного слоя (335). § 6. Турбулентное движение в шероховатых трубах. Влияние шероховатости стенки на сопротивление. Пограничный слой вблизи шероховатой стенки (338).

Глава IV. Турбулентный пограничный слой при наличии продольного перепада давления 348—381

§ 1. Применение степенных законов к расчету пограничного слоя на криволинейном профиле. Основные недостатки метода (348). § 2. Применение степенных законов к осесимметричным обтеканиям. Сопротивление dirigeбельных форм (355). § 3. Применение полуэмпирических (логарифмических) законов к расчету пограничного слоя при наличии продольного перепада давлений (363). § 4. Учет влияния продольного перепада давления на форму профиля скоростей в турбулентном пограничном слое (367).

Глава V. Современные методы исследования структуры турбулентных потоков 382—402

§ 1. Основные характеристики турбулентного потока. Однородный и изотропный турбулентный поток. Затухание искусственной турбулентности за решетками. (382). § 2. Методы экспериментального исследования турбулентных течений (387). § 3. Некоторые сведения о структуре турбулентных потоков (396).

ВВЕДЕНИЕ

Переход к большим скоростям полета в авиации, к котлам с форсированными теплообменными процессами (котлы с повышенными скоростями движения газов при повышенных давлениях), к мощным быстроходным гидромашинам и другим агрегатам промышленной аэрогидродинамики в последние два десятилетия поставил перед конструкторами ряд вопросов, на которые не смогла ответить классическая аэрогидродинамика.

Наиболее существенным является вопрос о сопротивлениях при движении жидкостей и газов по каналам и о сопротивлениях движению тел со стороны окружающей среды. Как известно, аэрогидродинамика идеальной жидкости решила в первом приближении задачу о распределении нормальных давлений по обтекаемым телам, но не дала касательных сил трения и, в конечном счете, не решила задачи о сопротивлении. Основной заслугой классической аэрогидродинамики явилось создание теории подъемной силы крыла бесконечного и конечного размаха со всеми вытекающими отсюда приложениями к теории винта (Прандтль, Жуковский, Чаплыгин и др.) Теория Кирхгофа отрывного обтекания тел со всеми последующими ее развитиями (Жуковский, Леви-Чивитта, Чаплыгин и др.) дала формулу сопротивления при отрывном обтекании, однако в настоящее время, при больших скоростях движения, такого рода обтекания не представляют интереса. Теория индуктивного сопротивления, как составная часть теории крыла конечного размаха, представляет замечательную страницу истории развития аэродинамики, но при современных скоростях полета необходимые коэффициенты подъемной силы настолько малы, что пропорциональные их квадрату коэффициенты индуктивного сопротивления просто пренебрежимы.

Современная механика жидкости и газа ближе подошла к изучению вопросов влияния физических свойств потока (вязкость, сжимаемость, анизотропия и др.) и его внутренней структуры (турбулентность) на кинематические, динамические и термодинамические процессы (обтекание, сопротивление, распределение давлений и трения, теплопередача и др.).

Если классическая аэродинамика, опираясь на наиболее элементарные и общие законы движения непрерывной среды, может в остальном пользоваться строгими методами математической дедукции, то современная аэрогидродинамика, наоборот, находитсся на той первоначальной ступени развития, когда многие основные законы еще далеко не ясны. Отсюда вытекают необходимость широкого использования част-

ных экспериментальных закономерностей, отсутствие строгих обоснований и во многих методах еще недостаточная законченность и простота.

Развитие современной теоретической аэрогидродинамики идет в тесной связи с развитием физического эксперимента. Изучение поля скоростей и давлений в тонких слоях движущейся жидкости, исследование быстро меняющихся пульсаций скорости и давления в турбулентном потоке, задача создания видимых спектров обтеканий, не нарушающих движения, и много других подобных задач, привели к необходимости использования современных физических методов исследования (тепловые, оптические и электрические методы), без которых сейчас не обходится ни одна экспериментальная работа по аэрогидродинамике.

В настоящей книге излагается один из основных разделов современной аэрогидродинамики — учение о ламинарном и турбулентном пограничном слое и некоторые приложения этого учения к теории сопротивлений. В первом отделе мы приводим основные, необходимые для понимания дальнейшего сведения из кинематики и динамики реальной (вязкой и сжимаемой) жидкости. Учащиеся, хорошо знакомые с выводом основных дифференциальных уравнений движения реальной жидкости или газа, могут пропустить первый отдел, ознакомившись лишь с содержанием главы о подобии, весьма существенной для дальнейшего.

Второй отдел посвящен теории ламинарного пограничного слоя и ее приложениям. В нем довольно полно освещено состояние вопроса в настоящее время. Здесь изложены почти все современные методы теории ламинарного пограничного слоя, включая и самые последние (Карман, Милликен, Хоуэра), а также ряд задач, решенных в самое последнее время. Наряду с теорией ламинарного слоя в несжимаемой жидкости проводится и единственно пока решенная задача о ламинарном слое сжимаемого газа на пластинке (задача о пластинчатом термометре). Кроме пограничного слоя на поверхности обтекаемого тела разбираются также задачи о ламинарном движении в следу тела и в свободной струе и, наконец, задача о вращающемся диске.

В том же отделе помещены исследования по пространственному пограничному слою (движение жидкости на стыке двух плоскостей, или поверхностей, движение вблизи боковой кромки пластины).

В третьем отделе излагаются современные полуэмпирические теории турбулентного движения в связи с их применением к расчету сопротивлений плоских пластин, крыловых профилей и тел вращений. Попутно даются решения задач о свободных струях и „следе“ тела.

В заключение приводятся в краткой форме основные сведения о характеристиках турбулентного движения, о методах измерения этих характеристик и некоторые экспериментальные данные о распределении характеристик турбулентности в реальных потоках.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА;
ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ В АЭРОГИДРОДИНАМИКЕ¹⁾

ГЛАВА I

I ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Элементарное перемещение жидкого отрезка и его деформация.
Тензор деформации. Теорема Гельмгольца

Рассматривая жидкость как непрерывную среду, предположим, что нам задано поле перемещений этой жидкости в некоторой области. Обозначим перемещения вектором u и будем изучать лишь бесконечно-малые или, как иногда говорят, элементарные перемещения частиц жидкости. По принятому предположению о непрерывности, u будет непрерывной функцией вектор-радиуса r точки M области; рассматривая перемещения за элементарный промежуток времени Δt и относя их к произвольному моменту времени t , будем считать t параметром. Для дальнейшего надо еще предположить, что вектор перемещения имеет непрерывные производные первого порядка. Итак,

$$u = u(r)$$

или

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Возьмем в жидкости в данный момент t элементарный отрезок

$\overrightarrow{MM_1} = \delta r$ (рис. 1) и посмотрим, что произойдет с этим отрезком за время Δt , в течение которого точка M переместится в точку M' , совершив перемещение $\overrightarrow{MM'} = u$, точка M_1 — в положение M_1' , пере-

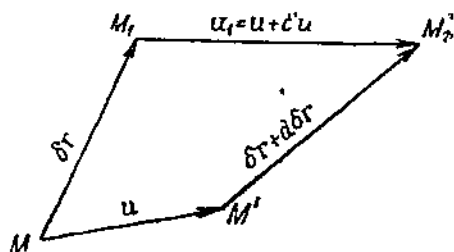


Рис. 1.

¹⁾ При составлении настоящего отдела предполагалось, что читатель знаком с элементами векторного и тензорного анализа. Все необходимые сведения по этим разделам математики читатель может найти в книгах: Н. Е. Коци, Векторное исчисление, ОНТИ, 1939 г. или Я. И. Френкель, Теоретическая механика, ОНТИ, 1940.

²⁾ Символом δ мы обозначаем дифференцирование в пространстве в данный момент времени t , так что δr есть изменение вектор-радиуса точки M по отношению к некоторому началу O , на рисунке опущенному; символом ϵ представляется дифференцирование во времени, т. е. в связи с совершаемым перемещением жидкости.

местившись на $\overrightarrow{M_1 M_1'} = u_1$. Вспоминая смысл операции дифференцирования вектора по данному направлению, можем написать:¹⁾

$$u_1 = u + \left(\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \nabla \right) u \delta s = u + (\delta r \cdot \nabla) u, \quad (1.1)$$

где $\delta s = |\delta r|$, $\frac{\partial r}{\partial s}$ — орт направления MM_1 , а скалярное произведение $\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \nabla$ представляет оператор дифференцирования по направлению жидкого отрезка MM_1 . Еще иначе, вводя дифференциальный тензор (диаду) $D = \nabla u$, найдем:

$$u_1 = u + \delta r \cdot D. \quad (1.2)$$

Из векторного многоугольника $MM_1 M_1' M'$ имеем:

$$\delta r = \overrightarrow{M' M_1'} - \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_1 M_1'} - \overrightarrow{MM'} = u_1 - u = \delta r \cdot D. \quad (1.3)$$

Таким образом полное изменение жидкого отрезка δr вполне определяется дифференциальным тензором D , заданным наперед, поскольку задано поле перемещений u . Прямоугольные декартовы компоненты тензора D будут $D_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. Разложим тензор D на части: симметричную — S и антисимметричную — A , положив (D^* — сопряженный тензор):

$$S = \frac{1}{2} (D + D^*), \quad A = \frac{1}{2} (D - D^*). \quad (1.4)$$

Тогда предыдущее изменение жидкого отрезка представится в виде двух слагаемых:

$$d \delta r = \delta r \cdot S + \delta r \cdot A. \quad (1.5)$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое $\delta r \cdot A$. Известно, что умножение вектора на антисимметричный тензор эквивалентно векторному умножению:

$$\delta r \cdot A = c \times \delta r, \quad (1.6)$$

где компоненты вектора c составляются из компонентов тензора A по закону круговой перестановки:

$$c_i = A_{jk} = \frac{1}{2} (D_{jk} - D_{jk}^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \text{rot}_i u. \quad (1.7)$$

¹⁾ В дальнейшем точкой, поставленной между двумя векторами, обозначается скалярное произведение их, крестом — векторное произведение. Точка между вектором и тензором означает произведение их, т. е. вектор с проекциями

$$(a \cdot D)_i = a_j D_{ji}; \quad (D \cdot a)_i = D_{ij} a_j,$$

где в правых частях предположено суммирование по повторяющемуся индексу j от 1 до 3. Два вектора, стоящие рядом и не разделенные никаким знаком, например ab , определяют диаду, т. е. тензор с компонентами

$$(ab)_{ij} = a_i b_j.$$

Рассмотрим деформацию отрезка δx_1 , расположенного по оси x_1 . Согласно равенству (1.5), отвлекаясь от поворота $\delta \tau \cdot A$, можем утверждать, что после деформации вектор $(\delta x_1, 0, 0)$ будет иметь компоненты: $\delta x_1(1 + S_{11})$, $\delta x_1 S_{12}$, $\delta x_1 S_{13}$, следовательно относительное удлинение e_1 отрезка δx_1 будет равно:

$$e_1 = \frac{\sqrt{\delta x_1^2(1 + S_{11})^2 + \delta x_1^2 S_{12}^2 + \delta x_1^2 S_{13}^2} - \delta x_1}{\delta x_1} = \\ = \sqrt{1 + 2S_{11} + \text{мал. 2-го пор.}} - 1 \approx (1 + 2S_{11})^{1/2} - 1 \approx S_{11},$$

т. е. с точностью до малых высшего порядка вообще будем иметь:

$$S_{ii} = e_i. \quad (1.9)$$

Перейдем ко второй части теоремы. Рассмотрим угол между двумя координатными осями, например осями Mx_1 и Mx_2 , проведенными из данной точки M параллельно осям координат. Пусть до деформации этот угол равнялся прямому; положим, что после деформации он уменьшится на бесконечно-малый угол α_{12} , называемый скошением координатного угла $x_1 Mx_2$. По определению деформации (1.5) координатные отрезки с компонентами $(\delta x_1, 0, 0)$ и $(0, \delta x_2, 0)$ после деформации будут иметь компоненты:

$$(\delta x_1 + \delta x_1 S_{11}, \delta x_1 S_{12}, \delta x_1 S_{13}) \text{ и } (\delta x_2 S_{12}, \delta x_2 + \delta x_2 S_{22}, \delta x_2 S_{23}),$$

а косинус угла между ними будет, по только-что доказанной первой части теоремы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{12}\right) = \sin \alpha_{12} \approx \alpha_{12} = \\ = \frac{[1 + S_{11}] S_{12} + S_{12} (1 + S_{22}) + S_{13} S_{23}] \delta x_1 \delta x_2}{(1 + e_1) \delta x_1 (1 + e_2) \delta x_2},$$

т. е. с точностью до малых высших порядков

$$\alpha_{12} = 2S_{12};$$

отсюда следует, что вообще:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.10)$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Таким образом, зная тензор деформации, а мы его знаем, так как при решении кинематической задачи поле перемещений задается, можем судить об изменении любых элементарных отрезков, проведенных из заданной точки M в любом направлении. В самом деле, принимая направление выбранного отрезка за направление новой оси координат, по известным формулам перехода всегда можем выразить новые компоненты тензора деформации через старые, а, следовательно, и найти относительные удлинения и скошения между любыми отрезками. Среди всех направленных элементарных жидких отрезков в данной точке

особую роль будут играть жидкие отрезки, направленные по главным осям тензора деформации в выбранной точке. Мы знаем, что в главных осях недиагональные компоненты равны нулю, т. е. отрезки, направленные по главным осям, не скашиваются, а только удлиняются (или укорачиваются). Если в перемещающейся жидкости рассмотреть совокупность таких трех взаимно-перпендикулярных элементарных отрезков δr_1 , δr_2 , δr_3 (рис. 3), то при перемещении соединение этих отрезков в точке M будет жестким, триедр главных осей поворачивается, как твердое тело. В дальнейшем можно условиться под поворотом жидкой частицы (объема) понимать именно этот поворот триедра жидких отрезков, расположенных по главным осям. Очень важно понять, что этот триедр осей в перемещенном положении перестанет быть триедром главных осей;

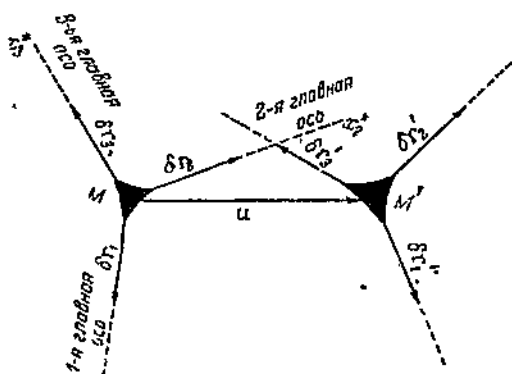


Рис. 3.

в точке M' имеются свои главные направления деформации и поэтому, при последующем перемещении в некоторую точку M'' (на рисунке не показанную), выбранные нами оси уже скосятся. Образ некоторого жидкого, так сказать, „скелета“ элементарного объема помогает представить себе с полной ясностью перемещение жидкого объема, а это, как мы вскоре увидим, существенно для понимания непрерывного движения жидкости.

При деформации элементарного объема величина этого объема изменяется; обозначим объемное расширение через θ , тогда, приняв для простоты за элементарный объем — координатный объем в главных осях $\delta \tau = \delta x_1^* \delta x_2^* \delta x_3^*$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\delta \tau' - \delta \tau}{\delta \tau} = \frac{[(1 + e_1^*)(1 + e_2^*)(1 + e_3^*) - 1] \delta x_1^* \delta x_2^* \delta x_3^*}{\delta x_1^* \delta x_2^* \delta x_3^*} = \\ &= e_1^* + e_2^* + e_3^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*}; \end{aligned}$$

выражение, стоящее справа, представляет инвариант тензора деформаций, не зависящий от выбора системы координат, — это не что иное, как дивергенция вектора перемещения:

$$\theta = \operatorname{div} u. \quad (1.11)$$

Объединяя все предыдущее выскажем следующую теорему:

Перемещение элементарного объема жидкости можно представить себе разложенным на поступательное перемещение, вращательное перемещение и деформацию.

Эта теорема, являющаяся обобщением известной теоремы кинематики твердого тела на случай деформируемого жидкого объема принадлежит Гельмгольцу и называется иногда первой теоремой Гельмгольца.

Желая подчеркнуть связанность отдельных элементов этого сложного перемещения между собой и зависимость их от заданного поля перемещений, мы прорежем содержание настоящего параграфа, ставя на вид количественную сторону теоремы Гельмгольца: всякое перемещение элементарного объема жидкости разлагается на поступательное перемещение u , на поворот в целом согласно вектора поворота $\frac{1}{2} \operatorname{rot} u$ и на деформацию, согласно тензора деформации S с компонентами $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$, причем в результате деформации элементарные координатные отрезки δx_i получают относительные удлинения e_i , равные диагональным членам тензора S_{ii} , и сжимаются между собою на углы $\alpha_{ij} = 2S_{ij}$; при этом коэффициент объемного расширения равен $\operatorname{div} u$.

Не останавливаясь на дальнейших подробностях (их читатель может найти в общих курсах гидродинамики) перейдем к рассмотрению непрерывного движения жидкости.

§ 2. Движение жидкости как предел совокупности последовательных элементарных перемещений ее. Теорема Гельмгольца. Вращение жидкого объема и скорости его деформаций

Непрерывное движение жидкой среды можно рассматривать как результат последовательных элементарных ее перемещений из одного положения в смежное. При этом, очевидно, скорость частицы жидкости v будет определяться, как предел отношения перемещения u к промежутку времени Δt , в течение которого перемещение осуществлялось, при стремлении этого промежутка к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u}{\Delta t} \quad (2.1)$$

При таком предельном переходе вектору поворота s будет соответствовать вектор угловой скорости ω , равный

$$\omega = \lim_{\Delta t} \frac{s}{\Delta t} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \left(\lim_{\Delta t} \frac{u}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v, \quad (2.2)$$

а тензору деформаций — тензор скоростей деформаций $\dot{S}$ с компонентами:

$$\dot{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.3)$$

Диагональные компоненты этого тензора будут определять собою скорости относительных удлинений координатных элементарных отрезков, недиагональные — удвоенные скорости сжатия координатных углов. Скорость объемного расширения будет:

$$\dot{\theta} = \operatorname{div} v. \quad (2.4)$$

Первая теорема Гельмгольца может быть легко изложена в терминах скоростей. В данный момент времени движение элементарного объема можно рассматривать, как результат сложения поступательного движения со скоростью v , вращения вокруг некоторой мгновенной оси с угловой скоростью $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v$ и деформации со скоростями относительных удлинений координатных отрезков и скоростями сжатий их, равными соответственно диагональным и недиагональным компонентам тензора скоростей деформаций $\dot{S}$, и со скоростью объемного расширения $\dot{\theta} = \operatorname{div} v$.

Следует подчеркнуть принципиальное отличие понятия вращения и угловой скорости в жидком теле по сравнению с теми же понятиями в твердом теле. В случае твердого тела мы имеем дело на самом деле с непрерывным вращением тела вокруг некоторой мгновенной оси, которая в общем случае как то изменяет свое положение в теле (например, катание без скольжения одного конуса по другому, неподвижному, эквивалентно вращению подвижного конуса вокруг линии соприкасания конусов по образующей). При движении же жидкого объема мы не можем говорить о вращении как о некотором длительном процессе, так как в каждый последующий момент не только изменяются ось и вектор угловой скорости, но и, что существенно, меняется тот жидкий триедр осей („скелет“ объема), вращение которого подразумевается. Так например, мы можем себе представить прямолинейное движение жидкости, например, плоское пуазейлево движение, при котором все частицы движутся по прямым параллельным стенкам, вместе с тем в каждый данный момент времени элементарные объемы жидкости вращаются (угловые скорости этих вращений могут быть весьма велики); это возможно лишь потому, что при переходе от одного положения к другому изменяется самый вращающийся элемент, т. е. новые жидкие элементы вступают в мгновенные вращения. Особенно наглядно это можно показать в простейшем случае плоского прямолинейного движения — движении сдвига с линейным распределением скоростей (рис. 4): $v_1 = 2ax_2$, $v_2 = 0$. Это движение с угловой скоростью

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = -a \text{ и со скоростью сжатий координатных}$$

$$\text{углов } \dot{\alpha}_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 2a. \text{ В данном случае легко находится триедр глав-}$$

ных осей; достаточно сообразить, что элементарный квадрат после смещения превращается в ромб, так как скорости относительных удлинений равны нулю ($\dot{e}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$, $\dot{e}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$), и, следовательно, диагонали квадрата остаются взаимно-перпендикулярны. Направления этих диагоналей и являются направлениями главных осей. После перемещения оси Mx_1^* и Mx_2^* перейдут в положение диагоналей ромба $M'x_1'$ и $M'x_2'$, повернувшись как жесткая плоская фигура на угол ($-adt$); во втором положении эти оси перестанут быть главными осями (роль главных осей будут играть новые оси $M'x_1^{**}$ и $M'x_2^{**}$, направленные по диагоналям квадрата) и в дальнейшем уже начнут сжиматься, так

что при последующем движении не имеет смысла говорить об их вращении. Другие жидкие отрезки будут как-то скашиваться, так например, отрезок $\overrightarrow{MN'}$ в результате скошения и поворота повернется на угол $-2adt$, равный сумме угла скошения $-adt$ (рис. 4) и угла поворота $-adt$; отрезок же $\overrightarrow{MP}$ не повернется так как для него угол

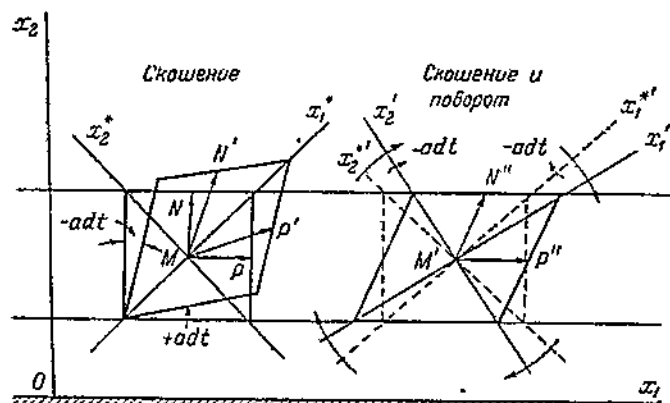


Рис. 4.

от скошения $+adt$ равен углу от полного поворота, но противоположен по знаку. Мы видим таким образом что прямолинейность движения не противоречит наличию в каждый данный момент слагаемого вращательного движения.

Таковы классические представления о движении жидкости как непрерывной среды.

§ 3. Поле ускорений жидкости. Разложение ускорения на локальную и конвективную части

Как известно, ускорение частицы определяется как векторная производная ее скорости по времени. Поэтому если нам в общем случае задано поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, то поле ускорений $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ определится дифференцированием:

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} \quad (3.1)$$

Здесь следует лишь иметь в виду, что мы говорим об ускорении частиц жидкости, переходящих из одних точек поля в смежные по направлению своей скорости, т. е. при дифференцировании по времени считать $\mathbf{r}$ функцией от времени и $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$.

Производные по времени от величин поля, учитывающие изменения, связанные не только с переменностью поля со временем в данной точке (локальные изменения), но и изменения из-за перехода из одной точки поля в другую (конвективное изменение из-за

переноса), называются часто субстанциональными или индивидуальными производными и даже иногда особо обозначаются ($\frac{D}{dt}$ у Прандтля); мы сохраним для них обычные обозначения полной производной. Физически субстанциональная производная обозначает, что, составляя изменение некоторой величины, мы следим за движением частицы, к которой эта величина отнесена.

Из самого определения субстанциональной производной следует, что вообще:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \quad (3.2)$$

т. е. в самом деле, первое слагаемое в правой части обозначает частное дифференцирование по времени, т. е. локальную производную, характеризующую местное изменение из-за нестационарности поля, второе слагаемое можно представить так (вспомнить определение производной по направлению):

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \nabla \right) = \frac{ds}{dt} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Это тоже изменение во времени, но изменение вследствие перемещения частицы на ds вдоль линии тока (или траектории), т. е. именно конвективное изменение.

Формула (3.2) является общей формулой и может быть применена к любой скалярной, векторной, либо тензорной величине поля. Возвращаясь к определению (3.1) ускорения частицы как субстанциональной производной вектора скорости, получим:

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (3.3)$$

По известной формуле векторного анализа:

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a},$$

можно произвести замену (полагая $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$)

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}.$$

Отсюда следует, что равенству (3.3) можно придать еще вид:

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}. \quad (3.3')$$

Заметим, что равенство (3.3) можно тождественно представить так:

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (3.4)$$

где последнее слагаемое определяет произведение вектора ско-

рости на тензор (диаду) ∇v . Разбивая эту диаду на симметричную и антисимметричную части ($\dot{S}$ — тензор скоростей деформаций):

$$\nabla v = \dot{S} + \dot{A}, \quad \dot{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad \dot{A}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right),$$

можем переписать (3.4) еще так:

$$w = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \dot{S} + \omega \times v. \quad (3.5)$$

Если движение стационарно, локальное ускорение повсюду равно нулю, что же касается конвективного ускорения, то оно может обращаться в нуль при однородности поля скоростей. Практически интересен случай начала движения жидкости из покоя или начала нарушения однородности поля. В начале движения конвективное ускорение всегда равно нулю; лишь благодаря наличию локальных ускорений нарушается однородность поля скоростей, а уже затем появляются конвективные ускорения. Этим важным фактом пользуются при изучении нестационарных потоков. Конечно, имеются и другие случаи равенства нулю конвективного ускорения, например, прямолинейные движения в цилиндрических трубах и др.

§ 4. Элементы кинематики сплошных средин в криволинейной ортогональной системе координат. Скорость и ускорение в криволинейных координатах. Тензор скоростей деформаций в криволинейных координатах

В приложениях мы часто будем иметь дело с такими задачами, которые проще всего решаются в криволинейной системе координат. Дадим в связи с этим вывод некоторых основных формул, выражающих кинематические элементы движения жидкости в криволинейной системе координат, причем удовольствуемся лишь случаем ортогональной системы.

Обозначим через q_i криволинейные ортогональные координаты точки M с декартовыми координатами x_i ; через q'_i — орты криволинейных осей, через H_i — соответствующие коэффициенты Ляме. Компоненты скорости, ускорения, тензора скоростей деформаций и т. д. будем обозначать v_{q_i} , w_{q_i} ,

$\dot{S}_{q_i q_j}$ и т. д.

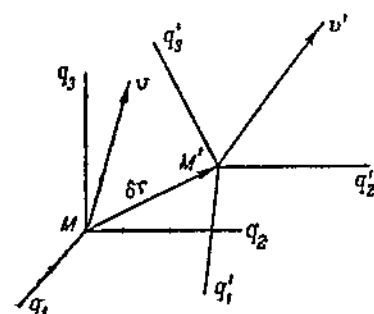


Рис. 5.

Основными величинами в кинематике жидкости являются компоненты скорости в криволинейной системе — v_{q_i} , все остальные элементы будем выражать через них.

Начнем с розыскания компонентов тензора скоростей деформации, так как по (3.5) через эти компоненты могут быть выражены и компоненты ускорения. Предположим, что в некоторой точке M (рис. 5)

имеется координатник осей криволинейных координат $Mq_1q_2q_3$, и скорость равна v , а в смежной точке M' , определяемой перемещением $\vec{MM}' = \delta r$ скорость равна v' , а координатник — $M'q'_1q'_2q'_3$. Составляя изменение скорости δv , сможем по предыдущему написать:

$$\delta v = \delta r \cdot \nabla v = \delta r \cdot \dot{S} + \delta r \cdot \dot{A} = \delta r \cdot \dot{S} + \frac{1}{2} \text{rot } v \times \delta r;$$

с другой стороны, по известной теореме о связи между абсолютным δv и относительным $\delta'v$ изменением вектора, принимая систему $Mq_1 \dots$ за абсолютную, а $M'q'_1 \dots$ — за относительную, будем иметь:

$$\delta v = \delta'v + \frac{1}{2} \text{rot } \delta r \times v,$$

так как роль вектора поворота при переходе от одной системы к другой, будет играть вектор $\frac{1}{2} \text{rot } \delta r$. Таким образом из предыдущего и последнего равенств следует

$$\dot{S} \cdot \delta r = \delta'v + \frac{1}{2} \text{rot } \delta r \times v - \frac{1}{2} \text{rot } v \times \delta r. \quad (4.1)$$

Проектируя обе части этого равенства на оси $Mq_1q_2q_3$, будем помнить, что $\delta'v$ соответствует изменению вектора при поступательном перемещении системы координат и что при этом $(\delta'v)_{q_i} = \delta v_{q_i}$; обозначим еще проекции на q_i вектора δr через $\delta s_i = H_i \delta q_i$; тогда, проектируя на ось Mq_1 , получим:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{q_1 q_1} \delta s_1 + \dot{S}_{q_1 q_2} \delta s_2 + \dot{S}_{q_1 q_3} \delta s_3 &= \delta v_{q_1} + \frac{1}{2} \text{rot}_{q_2} \delta r \cdot v_{q_3} - \frac{1}{2} \text{rot}_{q_3} \delta r \cdot v_{q_2} - \\ &- \frac{1}{2} \text{rot}_{q_2} v \cdot \delta s_3 + \frac{1}{2} \text{rot}_{q_3} v \cdot \delta s_2 = \frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_1} \delta s_1 + \frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_2} \delta s_2 + \frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_3} \delta s_3 + \\ &+ \frac{1}{2} v_{q_3} \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial (H_1 \delta s_1)}{\partial s_3} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial (H_3 \delta s_3)}{\partial s_1} \right] - \frac{1}{2} v_{q_2} \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial (H_2 \delta s_2)}{\partial s_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial (H_1 \delta s_1)}{\partial s_2} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \delta s_3 \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial (H_1 v_{q_1})}{\partial s_3} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial (H_3 v_{q_3})}{\partial s_1} \right] + \frac{1}{2} \delta s_2 \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial (H_2 v_{q_2})}{\partial s_1} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial (H_1 v_{q_1})}{\partial s_2} \right] = \\ &= \frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_1} \delta s_1 + \frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_2} \delta s_2 + \frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_3} \delta s_3 + \frac{1}{2} v_{q_3} \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial (H_1^2)}{\partial s_3} \delta q_1 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial (H_3^2)}{\partial s_1} \delta q_3 \right] - \\ &- \frac{1}{2} v_{q_2} \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial (H_2^2)}{\partial s_1} \delta q_2 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial (H_1^2)}{\partial s_2} \delta q_1 \right] - \frac{1}{2} \delta s_3 \left[\frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_3} - \frac{\partial v_{q_2}}{\partial s_1} + \frac{v_{q_1}}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial s_3} - \right. \\ &\left. - \frac{v_{q_2}}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial s_1} \right] + \frac{1}{2} \delta s_2 \left[\frac{\partial v_{q_1}}{\partial s_2} - \frac{\partial v_{q_3}}{\partial s_2} + \frac{v_{q_2}}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial s_1} - \frac{v_{q_1}}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial s_2} \right]. \end{aligned}$$

Заменяя в правой части этого равенства δq_i через $\frac{1}{H_i} \delta s_i$ и приравнивая коэффициенты при δs_i компонентам $\dot{S}_{q_1 q_i}$ (стоящим с левой стороны равенства), получим

$$\begin{aligned} \dot{S}_{q_1 q_1} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{v_{q_2}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_{q_3}}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right), \\ \dot{S}_{q_1 q_2} &= \frac{1}{2H_1 H_2} \left(H_1 \frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_2} + H_2 \frac{\partial v_{q_2}}{\partial q_1} - v_{q_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - v_{q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \text{ т. д.} \end{aligned}$$

Вообще, сохраняя круговую последовательность букв i, j, k , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_{q_i q_i} &= \frac{1}{H_i} \left(\frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{v_{q_j}}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} + \frac{v_{q_k}}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \right), \\ 2\dot{S}_{q_i q_j} &= \frac{1}{H_i H_j} \left(H_i \frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_j} + H_j \frac{\partial v_{q_j}}{\partial q_i} - v_{q_i} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} - v_{q_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \right) = \\ &= \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v_{q_j}}{H_j} \right) + \frac{H_i}{H_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{v_{q_i}}{H_i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Пользуясь этими выражениями, найдем компоненты ускорения w_{q_1} по формуле (3.5):

$$\begin{aligned} w_{q_1} &= \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} + v_{q_2} \dot{S}_{q_1 q_2} + \frac{1}{2} \operatorname{rot}_{q_2} v \cdot v_{q_3} - \frac{1}{2} \operatorname{rot}_{q_3} v \cdot v_{q_2} = \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} + \frac{v_{q_1}}{H_1} \left(\frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_1} + \right. \\ &+ \frac{v_{q_2}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_{q_3}}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \left. \right) + \frac{v_{q_2}}{2H_1 H_2} \left(H_1 \frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_2} + H_2 \frac{\partial v_{q_2}}{\partial q_1} - v_{q_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - v_{q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \right. \\ &- \frac{\partial H_2 v_{q_2}}{\partial q_3} + \frac{\partial H_1 v_{q_1}}{\partial q_2} \left. \right) + \frac{v_{q_3}}{2H_1 H_3} \left(H_1 \frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_3} + H_3 \frac{\partial v_{q_3}}{\partial q_1} - v_{q_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - v_{q_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \right. \\ &+ \frac{\partial H_1 v_{q_1}}{\partial q_3} - \frac{\partial H_3 v_{q_3}}{\partial q_1} \left. \right) = \frac{\partial v_{q_1}}{\partial t} + \frac{v_{q_1}}{H_1} \frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{v_{q_2}}{H_2} \frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_2} + \frac{v_{q_3}}{H_3} \frac{\partial v_{q_1}}{\partial q_3} + \frac{v_{q_1} v_{q_2}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \\ &+ \frac{v_{q_1} v_{q_3}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_{q_2}^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{v_{q_3}^2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Вообще будем иметь:

$$\begin{aligned} w_{q_i} &= \frac{\partial v_{q_i}}{\partial t} + \frac{v_{q_1}}{H_1} \frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_1} + \frac{v_{q_2}}{H_2} \frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_2} + \frac{v_{q_3}}{H_3} \frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_3} + \frac{v_{q_i} v_{q_j}}{H_i H_j} + \\ &+ \frac{v_{q_i} v_{q_k}}{H_i H_k} - \frac{v_{q_j}^2}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} - \frac{v_{q_k}^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти же формулы можно было получить и иначе, заметив, что по известным формулам векторного анализа:

$$w = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \times \operatorname{rot} v.$$

Проектируя обе части на ось q_i , получим вновь (4.3).

Приложения выведенных формул к различным частным системам координат (полярная, сферическая, цилиндрическая) мы дадим в следующей главе, связав их с выражениями компонентов тензора напряжений.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

§ 1. Тензор напряжений в жидкости. Теорема о взаимности напряжений. Уравнения в напряжениях. Уравнение сохранения массы. Тензор переноса количества движения

В жидкости, как и во всякой другой непрерывной среде, действуют двоякого рода силы: объемные (или массовые) и поверхностные. К объемным силам принадлежат такие силы, как вес, в известном

смысле слова инерционные силы и др. Все они приложены к частицам объема, ограниченного данной поверхностью. Условимся эти силы относить к единице массы. Так например, силу веса будем относить к единице массы и, следовательно, приравнивать ускорению силы тяжести, силу инерции относить также к единице массы и писать в виде вектора ускорения с обратным знаком и т. д.

К поверхностным силам относятся силы, приложенные к элементам поверхности, как, например, силы внутреннего трения в жидкости, силы давления. Эти силы мы условимся относить к единице площади, т. е. вместо поверхностных сил будем рассматривать напряжения. Отличительной особенностью поверхностных сил в гидродинамике, да и вообще в механике сплошных сред, является то, что эти силы не определяются однозначно точкой поля, к которой они приложены, а зависят еще от направления площадки, на которую они действуют, или, что все равно, от орта нормали этой площадки. В каждой точке имеется, таким образом, многообразие значений напряжений p_n , различающихся между собою направлением орта n . Можно, однако, доказать, что все векторы p_n однозначно определяются ортом n и некоторой физической величиной, характеризующей напряженное состояние или напряженность жидкости в данной ее точке; эта физическая величина определяется тензором второго ранга, являющимся функцией точки поля, и называется тензором напряжений. Связь между вектором напряжения p_n , ортом нормали n и тензором напряжений P определяется простым линейным соотношением:

$$p_n = n \cdot P, \quad (1.1)$$

т. е. напряжение, действующее на некоторую элементарную жидкую площадку, равно произведению ортанормали к этой площадке на тензор напряжений в рассматриваемой точке жидкости.

Для вывода формулы (1.1) рассмотрим координатный элементарный жидкий тетраэдр (рис. 6) и составим, пользуясь принципом затвердевания и принципом Даламбера, уравнение равновесия этого элементарного тетраэдра под действием всех приложенных сил и сил инерции. Заметим, что главный вектор всех объемных сил (обозначим его через $F d\tau$), включая сюда и силы инерции, будет бесконечно-малым вектором того же порядка, что и элемент объема $d\tau$, т. е. малой третьего порядка; главный вектор поверхностных сил будет малой второго порядка (элемент поверхности). Обозначим напряжение, приложенное к площадке, перпендикулярной к j -ой оси, через p_j ,

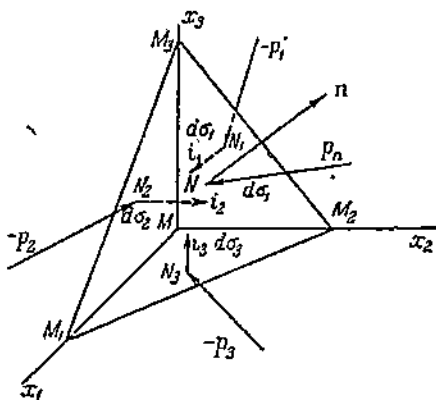


Рис. 6.

а сам элемент площадки через $d\sigma_j$, причем условимся под p_j понимать действие на площадку жидкости, находящейся с той стороны, куда направлен орт нормали площадки. Тогда будем иметь:

$$-p_1 d\sigma_1 - p_2 d\sigma_2 - p_3 d\sigma_3 + p_n d\sigma_n + F d\tau = 0,$$

но $d\sigma_j = d\sigma_n \cdot n_j$, где n_j — косинусы углов орта нормали n с осями координат, а $d\tau = d\sigma_n \cdot h$, где h — высота тетраэдра, опущенная из точки M ; следовательно, сокращая на $d\sigma_n$ и переходя к пределу, когда h стремится к нулю, получим:

$$p_n = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3. \quad (1.2)$$

Эта формула представляет разложение напряжения, действующего в данной точке на любую наклонную площадку, на три напряжения, действующие на координатные площадки в той же точке. Проектируя это равенство на какую-нибудь j -ую ось, получим:

$$p_{nj} = p_{1j} n_1 + p_{2j} n_2 + p_{3j} n_3 = p_{kj} n_k. \quad (1.3)$$

Совокупность величин p_{kj} определяет тензор, так как слева стоит проекция вектора p_n , а орт n — также вектор. Равенство (1.3) заключает справа выражение j -ой проекции произведения орта n на тензор с компонентами p_{kj} ; назовем тензор p_{kj} тензором напряжений и условимся в дальнейшем обозначать его буквой P , а его компоненты буквой p . Формула (1.3) эквивалентна формуле (1.1), которую мы хотели вывести.

Приравнявая нулю главный вектор приложенных сил, мы воспользовались лишь одним условием равновесия. Составим еще условие равенства нулю главного момента сил, предполагая, что, как и раньше, момент объемных сил есть малая третьего порядка:

$$r \times p_n d\sigma_n - r_1 \times p_1 d\sigma_1 - r_2 \times p_2 d\sigma_2 - r_3 \times p_3 d\sigma_3 = 0.$$

Здесь через r, r_1, r_2, r_3 (рис. 7) соответственно обозначены вектор-радиусы точек N, N_1, N_2, N_3 приложения векторов напряжения p_n, p_1, p_2 и p_3 . Вспоминая (1.2) и заменяя по предыдущему $d\sigma_j$ на $d\sigma_n \cdot n_j$, получим после очевидных приведений:

$$(r - r_1) \times p_1 n_1 + (r - r_2) \times p_2 n_2 + (r - r_3) \times p_3 n_3 = 0. \quad (1.4)$$

В силу элементарности тетраэдра мы с тем меньшей ошибкой, чем меньше размеры тетраэдра, можем считать напряжения сосредоточенными в центрах граней, т. е. на пересечении медиан треугольников, причем векторы r_1, r_2, r_3 будут направлены по медианам, проведенным из вершины M . Увеличивая эти векторы в отношении 3:2, получим новые векторы $MN'_1, \dots$, концы которых, так же как и конец N вектора r , расположатся в одной и той же плоскости $M_1 M_2 M_3$, т. е.

векторы $\frac{3}{2} \mathbf{r}_1$, $\frac{3}{2} \mathbf{r}_2$, $\frac{3}{2} \mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}$ имеют одну и ту же проекцию h на нормаль $\mathbf{n}$, следовательно, при любом $k=1, 2, 3$:

$$h = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{2} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{n}; \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3} h;$$

с другой стороны, точка N_k является проекцией N на соответствующую координатную плоскость, следовательно, вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_k$ параллелен $\mathbf{i}_k$. Полагая его равным $\mathbf{r} - \mathbf{r}_k = \alpha_k \mathbf{i}_k$, из предыдущего равенства найдем:

$$\alpha_k \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{n} = \alpha_k n_k = \frac{1}{3} h; \quad \alpha_k = \frac{h}{3n_k},$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_k = \frac{h}{3n_k} \mathbf{i}_k.$$

Подставляя последнее равенство в (1.4) получим:

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}_3 = 0. \quad (1.5)$$

Проектируя это равенство на оси координат, увидим, что имеют место следующие соотношения:

$$P_{21} = P_{12}, \quad P_{32} = P_{23}, \quad P_{13} = P_{31}, \quad (1.6)$$

выражающие теорему о взаимности напряжений:

Если через некоторую точку жидкости провести две взаимно-перпендикулярные площадки, то проекции напряжений, приложенных к одной из площадок, на нормаль к другой, между собою равны.

Эту же теорему можно формулировать еще так: **тензор напряжений есть тензор симметричный**. Мы вывели это свойство тензора напряжений, пользуясь некоторой системой координат, но, конечно, свойство симметрии представляет собой физическое свойство напряженного состояния жидкости (и вообще среды), не зависящее от выбора системы координат — если тензор симметричен в одной системе координат, то он симметричен и во всякой другой системе координат.

Рассмотрим некоторый произвольный конечный объем жидкости τ , ограниченный поверхностью σ , и предположим, что к элементу массы $dm = \rho d\tau$ (ρ — массовая плотность, равная отношению удельного веса к ускорению силы тяжести) приложена некоторая объемная сила $\mathbf{F} \rho d\tau$, а к поверхностному элементу ds с ортом нормали $\mathbf{n}$ — напряжение $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} P = P \mathbf{n}$ (в силу симметрии тензора напряжений). Пользуясь опять принципом затвердевания и принципом Даламбера, можем составить уравнения движения конечного объема жидкости, как уравнения „равновесия“ соответствующего „затвердевшего“ объема, конечно, эти уравнения будут необходимыми, но не достаточными, так как по самому смыслу принципа затвердевания уравнения равновесия (движения) твердого тела являются частью уравнений равновесия (движения) соответствующего жидкого тела.

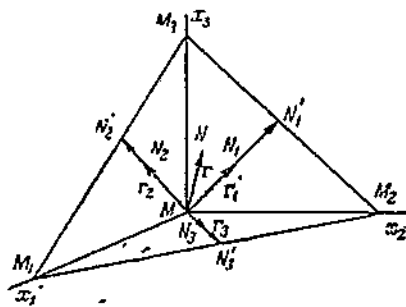


Рис. 7.

Условие равенства нулю главного вектора всех сил (включая силы инерции) дает:

$$\int_{\sigma} p_n d\sigma + \int_{\tau} \rho F d\tau - \int_{\tau} \rho w d\tau = 0; \quad (1.7)$$

условие равенства нулю главного момента будет:

$$\int_{\sigma} \mathbf{r} \times p_n d\sigma + \int_{\tau} \mathbf{r} \times \rho F d\tau - \int_{\tau} \mathbf{r} \times \rho w d\tau = 0. \quad (1.8)$$

Рассмотрим первый интеграл равенства (1.7). По формуле (1.1) и по теореме Гаусса:

$$\int_{\sigma} p_n d\sigma = \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot P d\sigma = \int_{\tau} \text{Div } P d\tau, \quad (1.9)$$

где под символом $\text{Div } P$ мы понимаем расходимость (дивергенц) тензора напряжений, т. е. вектор с проекциями:

$$\text{Div}_i P = \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{3i}}{\partial x_3} \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.10)$$

Аналогично, поверхностный интеграл равенства (1.8) преобразуется так:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{r} \times p_n d\sigma &= \int_{\sigma} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot P) d\sigma = \int_{\tau} \mathbf{r} \times \nabla P d\tau + \int_{\tau} (\nabla \mathbf{r})^* \times P d\tau = \\ &= \int_{\tau} \mathbf{r} \times \text{Div } P d\tau + \int_{\tau} E \times P d\tau. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $(\nabla \mathbf{r})^*$ означает сопряженную дифференциальную диаду вектора $\mathbf{r}$, т. е. тензор E с проекциями

$$E_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Это — тензорная „единица“. Символ $\times$, поставленный между двумя тензорами, соответствует векторному произведению двух тензоров ¹⁾.

¹⁾ Под векторным произведением двух тензоров мы понимаем вектор с проекциями

$$(P \times Q)_{jk} = P_{jr} Q_{rk} - P_{kr} Q_{rj},$$

где индексы i, j, k пишутся в порядке круговой перестановки, а по индексу r , как повторяющемуся два раза в каждом одночлене, производится суммирование от 1 до 3.

Подставляя значения поверхностных интегралов из (1.9) и (1.11) в уравнения (1.7) и (1.8) и замечая, что векторное произведение $E \times P$ в случае симметричного тензора P (а мы уже ранее, на элементарном тетраэдре показали, что тензор напряжений P симметричен) тождественно равно нулю, получим:

$$\int_{\tau} (\text{Div } P + \rho F - \rho w) d\tau = 0,$$

$$\int_{\tau} r \times (\text{Div } P + \rho F - \rho w) d\tau = 0.$$

В силу произвольности объема τ отсюда следует, что

$$\rho w = \rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \text{Div } P. \quad (1.12)$$

Второе уравнение выполняется при этом тождественно. Заметим, что если бы мы ранее на элементарном тетраэдре не показали симметричность тензора P , то уравнение (1.8) свелось бы к уравнению

$$\int_{\tau} E \times P d\tau = 0,$$

откуда в силу произвольности объема τ следовало бы, что $E \times P = 0$, т. е. тензор P симметричен.

Уравнение (1.12), в котором можно w заменить еще на $\frac{\partial v}{\partial t}$ или равное ему выражение $\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v$, носит наименование уравнения в напряжениях; в проекциях оно может быть написано так:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i + \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.13)$$

Если не делать никаких дополнительных предположений о природе связи между напряжениями и скоростями, то такая система уравнений останется не замкнутой, так как в ней число неизвестных превосходит число уравнений; это и естественно, так как мы, пользуясь принципом затвердевания, составляли лишь необходимые уравнения движения, но не достаточные. Приняв принцип затвердевания, мы тем самым опустили специфические отличия законов движения жидкости от законов движения твердых тел. В следующем параграфе мы покажем, как уравнения (1.13) могут быть дополнены уравнениями, учитывающими некоторые свойства жидкости, связанные со скоростями ее деформации.

К уравнениям в напряжениях можно присоединить еще уравнение, определяющее зависимость плотности от поля скоростей. Вспомним основное допущение классической ньютоновской механики: — масса тела во время движения остается неизменной, и напомним, что индивидуальная ρ , изводная по времени от массы m

объема τ равна нулю:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = 0.$$

Дифференцируя под знаком объемного интеграла и приняв во внимание возможное изменение объема при деформации, получим:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} d\tau + \int_V \rho \frac{d}{dt} d\tau = 0;$$

но по определению скорости объемного расширения (§ 2, гл. I):

$$\frac{d}{dt} d\tau = \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau,$$

следовательно:

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau = 0;$$

отсюда в силу произвольности объема τ будет следовать¹⁾:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.14)$$

Таково уравнение сохранения массы в гидродинамике. Замечая, что по определению индивидуальной производной

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho,$$

сможем переписать уравнение (1.14) еще так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

или окончательно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0. \quad (1.15)$$

Пользуясь этим уравнением, можно несколько преобразовать левую часть уравнения (1.13), а именно:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) - v_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j); \end{aligned}$$

при этом уравнение (1.13) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho F_i + \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \quad (1.16)$$

¹⁾ К аналогичному результату можно было прийти, написав, что $\frac{d}{dt} (dm) = \frac{d}{dt} (\rho d\tau) = 0$; мы рассматриваем конечную массу, чтобы сохранить связь с предыдущими выводами, приведенными для конечной массы.

или синтетически:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \text{Div } \mathfrak{T} = \rho F + \text{Div } P; \quad (1.17)$$

входящий сюда симметричный тензор $\mathfrak{T}$, равный

$$\mathfrak{T} = \rho v v, \quad (\mathfrak{T}_{ij} = \rho v_i v_j), \quad (1.18)$$

может быть назван тензором переноса количества движения, так как произведение его на ориентированную элементарную площадку $d\sigma_n$ даст протекшее в единицу времени количество движения через эту площадку; в самом деле

$$(d\sigma_n \cdot \rho v v)_i = d\sigma_n n_j \rho v_j v_i = d\sigma_n n_j v_j \cdot \rho v_i = d\sigma_n v_n \cdot \rho v_i,$$

Расходимость такого тензора

$$\text{Div } \mathfrak{T} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} n \cdot \mathfrak{T} d\sigma$$

определяет конвективное изменение количества движения в данной точке, отнесенное к единице объема и единице времени. Таким образом левая часть уравнения (1.17) представляет сумму локального и конвективного изменения количества движения, т. е. полное (индивидуальное или субстанциональное) изменение вектора количества движения, отнесенное к единице объема в данной точке и к единице времени. Правая часть, как мы уже знаем, определяет главные векторы объемных и поверхностных сил, также отнесенные к единице объема. Таким образом уравнение (1.17) представляет известную теорему об изменении количества движения, которую для конечного объема можно было бы написать еще и так ($\frac{d}{dt}$ — символ субстанциональной производной):

$$\frac{d}{dt} \int \rho v d\tau = \int (\rho F + \text{Div } P) d\tau. \quad (1.19)$$

В случае стационарного движения уравнению в напряжениях можно придать следующую форму:

$$\text{Div } (P - \mathfrak{T}) + \rho F = 0. \quad (1.20)$$

Замечая, что уравнения равновесия деформируемого тела имеют вид:

$$\text{Div } P + \rho F = 0,$$

можем выразить равенство (1.20) следующими словами:

Уравнения движения деформируемого тела можно придать вид уравнений равновесия, если к тензору напряжений прибавить тензор переноса количества движения с обратным знаком.

Такой тензор „— $\mathfrak{T}$ “ можно по аналогии с силами инерции рассматривать, как некоторый тензор кажущихся инерционных

напряжений. Эта точка зрения окажется в дальнейшем весьма удобной при рассмотрении турбулентного движения.

Пользуясь тензором

$$T = P - \mathfrak{T} = P - \rho \mathbf{v} \mathbf{v},$$

можем переписать уравнение (1.20) в виде

$$\text{Div } T + \rho F = 0. \quad (1.21)$$

На выведенные только-что уравнения в напряжениях можно взглянуть еще и несколько иначе, не применяя ни принципа Даламбера, ни принципа затвердевания, а пользуясь лишь обычной теоремой об изменении количества движения жидкого объема τ с поверхностью σ . Применяя эту общую теорему динамики системы материальных точек, напишем:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \rho F d\tau + \int_{\sigma} p_n d\sigma. \quad (1.22)$$

Поступая аналогично тому, как выводилось уравнение сохранения массы, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau &= \int_{\tau} \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) d\tau + \int_{\tau} \rho \mathbf{v} \text{div } \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} \right) \mathbf{v} d\tau + \\ &+ \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{w} d\tau. \end{aligned}$$

Заменяя левую часть (1.22) на только-что полученный интеграл, а справа p_n на $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$, разделим обе части уравнения на τ и перейдем к пределу, когда $\tau \rightarrow 0$, тогда все объемные интегралы перейдут в свои подинтегральные функции, а поверхностный даст:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} d\sigma = \text{Div } \mathbf{P},$$

и мы вновь получим уравнение в напряжениях (1.12). Применяя аналогично теорему об изменении момента количества движения, мы получили бы закон симметрии тензора напряжений или тождество, если бы воспользовались доказательством симметрии на элементарном тетраэдре. Этим выводом мы хотели еще раз подчеркнуть физический смысл уравнений в напряжениях, как уравнений изменения количества движения, отнесенного к единице объема, в данной точке. Если, как это принято, назвать плотностью распределения некоторой величины предел отношения количества этой величины в некотором объеме к объему при сведении последнего к нулю в данной точке, то мы можем рассматривать левую часть уравнения в напряжениях $\rho \mathbf{w}$ как плотность быстроты изменения количества движения или как отнесенную к единице объема быстроту изменения количества движения объема

$$\rho \mathbf{w} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau.$$

Величины ρF и $\text{Div } P$ определяют плотности распределения главных векторов внешних объемных и поверхностных сил. В этих уравнениях совершенно не учитываются внутренние силы и их эффект. Уравнения в напряжениях это не уравнения движения точки, а уравнения движения конечного объема, „приведенные“ к точке (например центру тяжести) предельным переходом. Указанная особенность уравнений в напряжениях выукло вырисовывается при переходе к таким теоремам механики, где внутренние силы играют роль наравне с внешними, например, в теореме об изменении кинетической энергии.

Составляя субстанциональную производную по времени от кинетической энергии жидкого объема τ , мы должны приравнять ее мощности как внешних, так и внутренних сил, т. е. написать:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \frac{v^2}{2} d\tau = \int_{\tau} \rho F \cdot v d\tau + \int_{\sigma} p_n \cdot v d\sigma + \int_{\tau} N_{in} d\tau, \quad (1.23)$$

где под N_{in} мы понимаем плотность распределения мощности внутренних сил, т. е. мощность внутренних сил, отнесенную к единице объема в данной точке. Производя преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \frac{v^2}{2} d\tau &= \int_{\tau} \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) d\tau + \int_{\tau} \rho \frac{v^2}{2} \text{div } v \cdot d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } v \right) \frac{v^2}{2} d\tau + \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) d\tau, \\ \int_{\sigma} p_n \cdot v d\sigma &= \int_{\sigma} (n \cdot P) \cdot v d\sigma = \int_{\sigma} n \cdot (P \cdot v) d\sigma = \int_{\sigma} (P \cdot v)_n d\sigma, \end{aligned}$$

деля затем обе части на τ и совершая предельный переход ¹⁾ при $\tau \rightarrow 0$, получим:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho F \cdot v + \text{div } (P \cdot v) + N_{in}. \quad (1.24)$$

С другой стороны, непосредственно умножая скалярно обе части уравнения в напряжениях (1.12) на скорость v , получим:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho F \cdot v + \text{Div } P \cdot v. \quad (1.25)$$

Уравнения (1.24) и (1.25) различаются в составе правых своих частей. Правая часть (1.24) представляет сумму мощностей внешних и внутренних объемных и поверхностных сил, отнесенных к единице объема в данной точке, правая же часть (1.25) — сумму мощностей главных векторов объемных и внешних поверхностных сил, отне-

¹⁾ Можно было бы, конечно, и не делать предельного перехода, а вместо этого перевести интеграл $\int_{\sigma} (P \cdot v)_n d\sigma$ в объемный $\int_{\tau} \text{div } (P \cdot v) d\tau$, а затем, пользуясь произвольностью τ , приравнять подинтегральные функции.

сенных к единице объема в данной точке. Если ввести термин „удельная“ величина для величины, отнесенной к единице объема, то можно еще сказать что правая часть (1.24) выражает удельную мощность всех сил, как внешних, так и внутренних, а правая часть (1.25) — мощность удельных внешних сил.

Вычитая из (1.24) обе части (1.25), получим:

$$N_{in} = v \cdot \text{Div } P - \text{div}(P \cdot v). \quad (1.26)$$

Это выражение для удельной мощности внутренних сил в данной точке можно упростить, если заметить, что:

$$\text{div}(P \cdot v) = \nabla \cdot (P \cdot v) = \nabla P \cdot v + P \cdot \nabla v = v \cdot \text{Div } P + P \cdot \dot{S} + P \cdot \dot{A},$$

где $P \cdot \dot{S} = P_{ij} \dot{S}_{ij}$ (предполагается суммирование по i и j от 1 до 3) представляет скалярное произведение тензора напряжения и тензора скоростей деформаций, а аналогичное произведение $P \cdot \dot{A} = P_{ij} \dot{A}_{ij}$ равно нулю, так как тензор $\dot{A}$ антисимметричен, а P — симметричен. Итак, будем иметь следующее выражение для удельной мощности внутренних сил:

$$N_{in} = -P \cdot \dot{S}. \quad (1.27)$$

Уравнение (1.24) может быть переписано еще так:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho F \cdot v + \text{div}(P \cdot v) - P \cdot \dot{S}. \quad (1.28)$$

Форма этого уравнения полезна тем, что здесь в правой части поставлены на вид удельные мощности объемных ($\rho F \cdot v$), внешних поверхностных ($\text{div}(P \cdot v)$) и внутренних поверхностных ($-P \cdot \dot{S}$) сил.

В дальнейшем мы увидим, как выражается удельная мощность внутренних сил в частном предположении о линейной связи между тензором напряжений и тензором деформаций; тогда убедимся, что часть этой мощности рассеивается в тепло (необратимая часть), а другая часть уходит на сжатие жидкости (обратимая часть).

§ 2. Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций. Дифференциальные уравнения Навье Стокса. Уравнение состояния. Уравнение притока тепла

Чтобы получить замкнутую систему дифференциальных уравнений движения жидкости, нам надо принять дополнительно гипотезу о связи между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций. Общепринятой и достаточно проверенной на опыте в настоящее время является гипотеза линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций (обобщенный закон Ньютона):

$$P = a\dot{S} + bE, \quad (2.1)$$

где a должно быть, по гипотезе линейности, независимым от $\dot{S}$ и P скаляром, а скаляр b может быть линейно связан с линейными инвариантами тензора $\dot{S}$ и P , т. е. с $\text{div } v$, и суммой трех нормальных напряжений $p_{11} + p_{22} + p_{33}$, которую в дальнейшем мы обозначаем через $-3p$; E — тензорная единица. Полагая на основании последнего соображения:

$$a = 2\mu, \quad b = \mu' \text{div } v - b' \cdot 3p,$$

где b' и μ' от $\dot{S}$ и P не зависят, получим:

$$P = 2\mu\dot{S} + (\mu' \text{div } v - 3b'p)E. \quad (2.2)$$

Здесь μ и μ' — две физические константы жидкости, зависящие от состояния жидкости (температуры, давления); что касается величины b' , то для ее определения приравняем между собою линейные инварианты левой и правой частей равенства (2.2), тогда получим:

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = -3p = 2\mu \text{div } v + 3\mu' \text{div } v - 9b'p,$$

откуда следует:

$$9p(b' - \frac{1}{3}) = (2\mu + 3\mu') \text{div } v. \quad (2.3)$$

Если движение жидкости происходит без объемного расширения, т. е. скорость объемного расширения $\text{div } v$ равна нулю, то $b' = \frac{1}{3}$; величина „ $-p$ “, равная среднему арифметическому из трех нормальных напряжений, приложенных к трем взаимно-перпендикулярным площадкам в данной точке, определяет скалярную величину, называемую гидродинамическим давлением в данной точке жидкости. Знак минус здесь берется для того, чтобы подчеркнуть, что в жидкости нормальные напряжения, выражающие действие на площадку жидкости, расположенной со стороны положительного направления орта нормали к площадке, проявляют себя всегда как сжимающие, а не растягивающие усилия; предполагается, что жидкость не сопротивляется растяжению (мы исключаем здесь капиллярные явления) и при нулевом давлении нарушается основное свойство непрерывности среды.

Таким образом, при условии $\text{div } v = 0$, мы будем иметь:

$$-p = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}). \quad (2.4)$$

Так как в случае движения с объемным расширением (общий случай движения сжимаемого газа) давление, определенное как среднее арифметическое трех нормальных напряжений, т. е. по формуле (2.4), зависит от характера движения жидкости, а не просто пропорционально $\text{div } v$, то отсюда по (2.3), как следствие, вытекает связь между константами:

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu. \quad (2.5)$$

Окончательно имеем следующую связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций:

$$P = 2\mu \dot{S} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v\right) E, \quad (2.6)$$

или в прямоугольных декартовых компонентах (здесь суммирование по i не предполагается):

$$\left. \begin{aligned} p_{ii} &= 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right), \\ p_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.6')$$

Подставляя эти значения компонентов напряжения в уравнения (1.13) настоящей главы, получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= \rho F_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right), \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= \rho F_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= \rho F_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

В общем случае мы не можем считать коэффициент вязкости постоянным и выносить его за скобку; на самом деле коэффициент вязкости, так же как и плотность, зависит от абсолютной температуры T и гораздо менее чем плотность — от давления p . Температура жидкости или газа, как вскоре увидим, в свою очередь является функцией координат, таким образом μ за знак производных по координатам выносить нельзя. Все же иногда в первом приближении это делают, тогда уравнения (2.7) значительно упрощаются и, как легко убедиться, после простых вычислений переходят в такие:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} v, \quad (2.8)$$

или в векторной форме:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 v + \frac{1}{3}\mu \operatorname{grad} \operatorname{div} v. \quad (2.8')$$

Это — известное уравнение Навье-Стокса. К уравнениям (2.7) или (2.8) еще присоединяется, по предыдущему, уравнение сохранения массы:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (2.9)$$

Мы получили всего четыре уравнения с шестью неизвестными $v_1, v_2, v_3, p_1, \rho, \mu$. Давление и плотность примем связанными уравнением Клапейрона (идеальный газ):

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (2.10)$$

где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура. Связь коэффициента вязкости μ с температурой T может быть представлена различными формулами. Для газа кинетическая теория дает известную формулу

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}; \quad (2.11)$$

ближе к опыту подходит формула:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0,76} \quad (2.11')$$

иногда применяют еще формулу Сэзерленда (Sutherland):

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T_0 + C}{T + C} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}, \quad (2.11'')$$

где $C = \text{const}$ равно для воздуха 110° . Для воды и вообще капельных жидкостей имеются свои экспериментальные формулы. Существенно подчеркнуть, что μ незначительно зависит от давления p .

Итак видим, что при движении сжимаемой жидкости (газа) имеется еще одна существенная переменная величина — температура T , избежать учета влияния которой на так называемые физические константы (плотность, вязкость) и вообще на движение мы не можем.

Чтобы замкнуть систему дифференциальных уравнений движения газа, нам необходимо составить еще уравнение баланса энергии или, как иногда говорят, уравнение притока энергии. Для этого вспомним, что, согласно общего термодинамического закона о сохранении энергии, субстанциональная производная от полной энергии некоторой массы газа равна сумме мощностей (работ, отнесенных к единице времени) всех объемных и поверхностных сил, приложенных к рассматриваемой массе газа, сложной с количеством тепла, протекающим через поверхность, ограничивающую выделенную массу благодаря теплопроводности; мы отвлекаемся здесь от явления лучеиспускания.

Полная энергия ϵ , отнесенная к единице массы в данной точке, как известно, равна сумме внутренней энергии газа U и кинетической энергии $\frac{v^2}{2}$. Если вспомнить, что в случае идеального газа внутренняя энергия равна произведению теплоемкости при постоянном объеме на абсолютную температуру, то выражение для энергии ϵ будет иметь вид:

$$\epsilon = c_v T + \frac{v^2}{2}. \quad (2.12)$$

В дальнейшем условимся все виды энергии выражать в механических единицах, и относить к единице массы. Закон сохранения энергии, примененный к движущемуся объему τ газа, дает:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho e d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau = \int_{\tau} \rho F \cdot v d\tau + \int_{\sigma} p_n \cdot v d\sigma + \\ + \int_{\sigma} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Первый интеграл справа определяет мощность объемных сил, второй — мощность внешних поверхностных сил, а третий — количество тепла (λ — коэффициент теплопроводности так же, как и μ , зависящий от температуры газа), прошедшего в единицу времени сквозь поверхность σ благодаря теплопроводности; мощность внутренних сил уже учтена в изменении внутренней энергии в левой части уравнения (2.12).

Левая часть равенства (2.13) может быть представлена так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau = \int_{\tau} \frac{d}{dt} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau + \int_{\tau} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} \right) \frac{d}{dt} (d\tau) = \\ = \int_{\tau} \left\{ \rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) + \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) \frac{d\rho}{dt} + \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) \rho \operatorname{div} v \right\} d\tau = \\ = \int_{\tau} \left\{ \rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) + \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение сохранения массы (1.14), получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(\rho c_v T + \frac{\rho v^2}{2} \right) d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) d\tau. \quad (2.14)$$

Преобразуем поверхностные интегралы, стоящие в правой части (2.11), к объемным, пользуясь теоремой Гаусса:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} p_n \cdot v d\sigma = \int_{\sigma} (P \cdot n) \cdot v d\sigma = \int_{\sigma} (P \cdot v) \cdot n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} (P \cdot v) d\tau, \\ \int_{\sigma} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = \int_{\sigma} (\lambda \operatorname{grad} T)_n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) d\tau. \end{aligned}$$

Выразив все члены уравнения (2.13) через объемные интегралы, воспользуемся произвольностью выбора объема τ и приравняем подинтегральные функции; тогда получим:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) = \rho F \cdot v + \operatorname{div} (P \cdot v) + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T). \quad (2.15)$$

Вычтя из обеих частей этого уравнения почленно обе части уравнения (1.28) предыдущего параграфа, придем к уравнению:

$$\rho \frac{d}{dt} (c_v T) = P \cdot \dot{S} + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T); \quad (2.15')$$

верному при любой связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций. Вспоминая обобщенную гипотезу Ньютона, принятую уже нами [формула (2.6)], найдем:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}(c_v T) &= 2\mu \dot{S}^2 - \left(\rho + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} v\right) E \cdot \dot{S} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \\ &= 2\mu \dot{S}^2 - \frac{2}{3}\mu (\operatorname{div} v)^2 - p \operatorname{div} v + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Полученное уравнение и является общим уравнением притока тепла в жидкости (без учета лучеиспускания). Первые два члена в правой части, — обозначим их сумму через Φ —

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\mu \dot{S}^2 - \frac{2}{3}\mu (\operatorname{div} v)^2 = \mu \left[2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

дают выражение, отнесенное к единице времени и к единице объема в данной точке, механической энергии, рассеивающейся (диссипирующей) из-за наличия вязкости жидкости и превращающейся в тепло. Член $-p \operatorname{div} v$ определяет удельную мощность, уходящую на сжатие жидкости (газа).

В случае несжимаемой жидкости уравнение притока тепла упрощается ($\operatorname{div} v = 0$, $c_p = c_v = c$) и принимает вид

$$c_p \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + 2\mu \dot{S}^2. \quad (2.18)$$

Часто при рассмотрении движений несжимаемой жидкости с небольшими скоростями пренебрегают членом $2\mu \dot{S}^2$, выражающим диссипацию энергии из-за вязкости жидкости. В этом случае, переходя к локальной и конвективной производным, уравнение распространения тепла (2.18) пишут еще так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} T = \frac{\lambda}{c_p} \nabla^2 T. \quad (2.19)$$

Коэффициент $\frac{\lambda}{c_p} = a$ называют коэффициентом температуропроводности.

В общем случае сжимаемого идеального газа коэффициент теплопроводности λ является функцией температуры, т. е. в конечном счете координат. Вид этой функции может быть определен, если вспомнить, что, как доказывается в кинетической теории газов, величина $\frac{\mu c_p}{\lambda}$ или $\frac{\mu c_v}{\lambda}$, отличающаяся от нее множителем $\frac{1}{k} = \frac{c_v}{c_p}$, не зависит от температуры, а определяется только атомностью газа. В дальнейшем условимся величину

$$\frac{\mu c_p}{\lambda} = \operatorname{Pr}$$

называть числом Прандтля; подробнее об этом числе мы скажем в дальнейшем, а сейчас укажем, что если отвлечься от влияния температуры на коэффициент теплоемкости газа c_p , то зависимость λ от T будет выражаться теми же формулами, что и для коэффициента вязкости μ .

В дальнейшем нам нужно будет иметь уравнение Гельмгольца, связывающее скорость и вихрь скорости.

Выведем это уравнение для случая изотермического движения несжимаемого газа, когда коэффициент вязкости μ и плотность ρ постоянны; будем также предполагать, что объемные силы консервативны, т. е. $F = -\text{grad } \Pi$. Заменяя по формуле (3.3') главы I в левой части уравнения (2.8) настоящей главы, ускорение $\frac{dv}{dt}$ выражением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \times \text{rot } v,$$

а в правой части того же уравнения производя замену:

$$\nabla^2 v = \text{grad div } v - \text{rot rot } v = -\text{rot rot } v,$$

получим уравнение в форме Лэ м б а:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - v \times \text{rot } v = -\text{grad} \left(\Pi + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho} \text{rot rot } v. \quad (2.20)$$

Возьмем от обеих частей этого уравнения операцию rot . Тогда, как легко видеть, будем иметь, обозначая $\text{rot } v = \Omega$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } v = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \\ \text{rot}(v \times \text{rot } v) &= \text{rot}(v \times \Omega) = (\Omega \cdot \nabla) v - (v \cdot \nabla) \Omega + v \text{ div } \Omega - \\ &\quad - \Omega \text{ div } v = (\Omega \cdot \nabla) v - (v \cdot \nabla) \Omega. \end{aligned}$$

Уравнение (2.20), после применения к нему операции rot , примет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) v = -v \text{ rot rot } \Omega, \quad (2.21)$$

или, вводя субстанциональную производную Ω по времени,

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega \cdot \nabla) v - v \text{ rot rot } \Omega. \quad (2.22)$$

Это и есть искомое уравнение Гельмгольца. Соответствующие уравнения для сжимаемого газа были выведены А. А. Фридманом¹⁾ без учета сил вязкости и Б. И. Извековым²⁾ с учетом сил вязкости. А. А. Фридман дал обобщенные уравнения Гельмгольца, а также и самому уравнению Гельмгольца, название уравнений динамической возможности движения. Основное значение уравнений динамической возможности заключается в том, что в них не входят давления и объемные силы, которые исключились

¹⁾ А. А. Фридман. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. ГТТИ, 1935.

²⁾ Б. И. Извеков. Об условиях динамической возможности движения вязкой сжимаемой жидкости. Матем. сборник, том XXXII, вып. I, 1924, Москва.

после произведения операции rot над обеими частями уравнения. Если движение удовлетворяет условиям (уравнениям) динамической возможности, то давление (при заданном поле потенциала объемных сил) может быть определено как функция координат и времени из уравнения в полных дифференциалах, которое получится из уравнений Стокса, если поле скоростей уже известно. При этом давление определится с точностью до некоторой функции времени, а в случае стационарного движения — с точностью до постоянной интегрирования, так что поле давлений определяется по заданию давления в одной точке потока (вообще говоря, в функции времени). Этот факт будет в дальнейшем использован при изложении теории подобия.

§ 3. Условия подобия двух течений реальной жидкости. Основные критерии подобия

Как известно, для моделирования натуральных явлений в лабораторных условиях существенно установить необходимые и достаточные условия подобия двух явлений. Этим вопросом занимается теория подобия.

Чтобы найти условия подобия двух течений, мы используем безразмерные уравнения аэрогидродинамики, которые легко получить из размерных уравнений предыдущего параграфа. Условимся величины, входящие в уравнение движения жидкости (газа), выражать в частях некоторого, характерного для каждой из этих величин, масштаба. За масштаб переменных величин примем какое-нибудь определенное их значение в выбранные по произволу момент времени и точке в пространстве; за масштаб постоянных величин примем их самих, тогда соответствующие безразмерные величины станут равными единице. Будем обозначать масштабы теми же буквами, что и сами величины, но со знаком „0"; тогда, пользуясь постоянством масштабов и оставляя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, перепишем одно из уравнений (2.7), уравнения (2.9), (2.10), (2.11'), (2.11'') и (2.16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{p_0 v_0}{l_0} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{p_0 v_0^2}{l_0} \rho v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} &= p_0 F_0 \rho F_1 - \frac{p_0}{l_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} v \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right], \\ &\left. + \frac{p_0}{l_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p_0 v_0}{l_0} \left(v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + p \operatorname{div} v \right) \right\} = 0, \\ \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} &= R T_0 T, \quad \mu = \sqrt{T} \quad \text{или} \quad \mu = T^{0,76}, \\ \frac{p_0 c_p T_0}{l_0} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p_0 c_p T_0 v_0}{l_0} \rho v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \frac{\lambda_0 T_0}{l_0^2} \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) - \frac{p_0 v_0}{l_0} p \operatorname{div} v + \\ &+ \frac{\mu_0 v_0^2}{l_0^2} \left[2\mu \dot{S}^2 - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} v)^2 \right]. \end{aligned}$$

Целя обе части составленных уравнений на совокупность масштабов, стоящую коэффициентом при одном из членов уравнения, например, на

коэффициент при конвективном члене в первом, втором и четвертом уравнениях и замечая еще в силу уравнения Клапейрона, что в данной точке жидкости (газа) выполняется равенство

$$\frac{p_0}{\rho_0} = RT_0,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_0}{v_0 t_0} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{F_0 l_0}{v_0^2} \rho F_i - \frac{\rho_0}{\rho_0 v_0^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\nu_0}{v_0 l_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \dots \right], \\ \frac{l_0}{v_0 t_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{p}{\rho} = T, \mu = \sqrt{T} \quad \text{или} \quad \mu &= T^{0,76}, \\ \frac{l_0}{v_0 t_0} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T &= \frac{\lambda_0}{l_0 v_0 \rho_0 c_v} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \frac{\rho_0}{\rho_0 c_v T_0} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ &+ \frac{\mu \nu_0}{l_0 \rho_0 c_v T_0} \left(2\dot{S}^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Рассмотрим комплексы масштабов, входящих в эту систему уравнений. Введем следующие обозначения:

$\frac{l_0}{v_0 t_0} = \operatorname{Sh}$ (число Струхала), $\frac{v_0^2}{F_0 l_0} = \operatorname{Fr}^2$ (Fr — обобщенное число Фруда¹⁾), $\frac{v_0 l_0}{\nu_0} = \operatorname{Re}$ (число Рейнольдса), $\frac{\mu c_p}{\lambda_p} = \operatorname{Pr}$ (число Прандтля); кроме того еще определим следующие две, характерные для сжимаемого газа, величины:

• 1) константу k данного газа, определяющую отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме:

$$k = \frac{c_p}{c_v}, \quad k - 1 = \frac{R}{c_v}, \quad (R \text{ — газовая постоянная}); \quad (3.2)$$

2) местную скорость звука a_0 или, что все равно, скорость распространения упругих возмущений в данной точке газа. Эта скорость зависит от физических свойств жидкости и от температуры в данной точке, согласно уравнению:

$$a_0 = \sqrt{k R T_0} = \sqrt{k \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (3.3)$$

При помощи последней величины можно составить еще одно характерное для движения газа число, так называемое число Бэрстоу (Ba), равное:

$$\operatorname{Ba} = \frac{v_0}{a_0},$$

¹⁾ Собственно говоря, числом Фруда называют отношение $\frac{v}{\sqrt{l g}}$, т. е. частный случай величины $\frac{v_0}{\sqrt{F_0 l_0}}$, когда объемной силой является сила веса и $F_0 = g$.

т. е. отношению местной скорости жидкости (газа) к местной скорости звука.

Пользуясь введенными здесь числами, перепишем систему (3.1) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} Sh \cdot \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{Fr^2} \cdot \rho F_i - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{Ba^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} v \right) + \dots \right], \\ Sh \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\ \frac{p}{\rho} = T, \mu = \sqrt{T} \text{ или } \mu = T^{0,76} \\ Sh \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho v \cdot \operatorname{grad} T &= \frac{k}{Re \cdot Pr} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - (k-1) p \operatorname{div} v + \\ &+ \frac{Ba^2 k (k-1)}{Re} \left(2S^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} v)^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.4) представляет систему безразмерных уравнений аэрогидродинамики реальной жидкости.

Если два явления подобны между собой, т. е. подобны в геометрическом, кинематическом, динамическом и термодинамическом смысле, то, будучи количественно выражены при помощи безразмерных величин, они опишутся тождественными уравнениями и граничными и начальными условиями. Таким образом из уравнений (3.4) сразу следует, что *если два движения реальной жидкости подобны между собою, то для них одинаковы числа Sh, Fr, Ba, Re, Pr и k, составленные в сходственных точках*; запишем это так (символ idem означает одинаковость в подобных системах):

$$\left. \begin{aligned} Sh &= \frac{l_0}{v_0 t_0} = \operatorname{idem}, \quad Ba = \frac{v_0}{a_0} = \frac{v_0}{\sqrt{k R T_0}} = \frac{v_0}{\sqrt{k \frac{p_0}{\rho_0}}} = \operatorname{idem} \\ Fr &= \frac{v_0}{\sqrt{F_0 l_0}} = \operatorname{idem}, \quad Re = \frac{v_0 l_0}{\nu_0} = \operatorname{idem}, \\ Pr &= \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0} = \operatorname{idem}, \quad k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} = \operatorname{idem} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

(R — газовая константа).

Эти условия или, как еще иногда говорят, критерии подобия, вместе с предположением о подобии граничных и начальных условий для всех входящих в уравнения величин, представляют собою систему достаточных условий подобия¹⁾.

¹⁾ Если пользоваться для зависимости коэффициента вязкости от температуры формулой Sutherland'a (2.11'), то к указанным критериям подобия присоединится еще условие $\frac{C}{T_0} = \operatorname{idem}$. Мы в дальнейшем будем пользоваться лишь формулами (2.11) или (2.11').

Проанализируем вопрос о том, все ли они необходимы?

Величины, входящие в наше рассмотрение, и их распределения в пространстве и во времени могут быть разбиты на два класса: 1) по произволу задаваемые величины или распределения и 2) величины и их распределения, определяемые из уравнений движения. К первым относятся константы жидкости, вернее, те величины, которые мы с той или иной степенью приближения относим к константам (например в нашем рассуждении теплоемкости c_p и c_v , газовая постоянная R), а также начальные и граничные распределения переменных величин (например, скорость на бесконечности), ко вторым — неизвестные наперед распределения переменных величин скорости, плотности, температур и др. в пространстве и во времени, которые нельзя задавать наперед, а можно лишь найти в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений движения. Не имея до сих пор в достаточно общем виде доказанной теоремы об условиях единственности решения системы уравнений аэрогидродинамики, мы не можем строго установить необходимые и достаточные условия подобия двух аэрогидродинамических явлений; ясно, что задание тождественных безразмерных начальных и граничных условий (их совокупность должна быть установлена строго теоремой о существовании и единственности решения уравнений аэрогидродинамики) при тождественности безразмерных дифференциальных уравнений явления приведет к тождественным безразмерным уравнениям явления в конечной форме, т. е. к полному подобию двух явлений.

Для тождественности уравнений (3.4) в двух явлениях необходимо выполнение системы равенств (3.5) для этих явлений, причем весьма существенно, что числа (Рейнольдса, Бэрстоу и др.), входящие в эту систему, должны быть составлены из наперед задаваемых величин, т. е. тех величин, которые или входят в граничные и начальные условия или являются просто константами жидкостей. В отдельных частных случаях некоторые из условий (3.5) могут и выпадать, так например, если движение стационарно, то выпадает условие $Sh = idem$, так как в уравнениях опускаются члены $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$. Интересно, однако, отметить, что условие $Sh = idem$ может выпасть и при нестационарном движении. Так например, если мы рассмотрим равномерное движение тела со скоростью U по отношению к неподвижной на бесконечности жидкости, то, принимая за характерную скорость v_0 эту скорость U , за характерную длину какой-нибудь (совершенно произвольный, но сходственный в подобных системах) размер тела l_0 , мы все же не сможем составить числа Sh , так как из самой постановки задачи нельзя найти характерного масштаба t_0 для времени. Мы можем принять за масштаб времени отношение $t_0 = \frac{l_0}{v_0}$, т. е. время, в течение которого тело переместится на длину l_0 , но тогда условие $Sh = idem$ автоматически будет выполнено и в обеих системах $Sh = 1$. Другое получится, если в гра-

нические и начальные условия входят все три характерные величины t_0, l_0, v_0 , как, например, это имеет место при вынужденных колебаниях жидкости, происходящих за счет заданных колебаний твердого тела в ней. В этом случае, принимая заданный период колебания за t_0 , какой-нибудь размер тела — за l_0 и скорость произвольно выбранной точки тела (а, следовательно, и скорость прилипающей к нему в этой точке вязкой жидкости) за v_0 , составим число Sh и в числе прочих условий подобия потребуем, чтобы это число было одинаково в сравниваемых явлениях. Необходимо подчеркнуть, что в этом случае v_0 никак не связано с отношением $\frac{l_0}{t_0}$; скорость в данный момент определяется амплитудой колебания тела и периодом колебаний, а не размером тела.

Таким образом мы заключаем, что в различных частных случаях не все ранее перечисленные условия подобия необходимы. Кроме того не все условия подобия, даже необходимые, практически выполнимы. Обычно на практике ставят условия подобия лишь приближенно, в среднем, и дополнительно теоретически и экспериментально выясняют существенность тех или иных условий подобия для практики. Вопросами такого рода занимаются в теории моделирования явлений, относящихся к некоторой частной области естествознания и техники ¹⁾.

В дальнейшем мы будем иметь ряд примеров, когда различные задания начальных и граничных условий будут в корне менять условия подобия двух явлений, причем могут быть случаи, когда роль характерных чисел (или критериев) подобия будут играть комплексы, составленные несколько иначе, чем это показано в системе (3.5). Все зависит от того, какие именно величины наперед задаются и чем мы можем по произволу располагать. Так например, при изучении явления ламинарного распространения струи в безграничном затопленном пространстве, при условии, что струя бьет с бесконечно большой (практически очень большой) скоростью из бесконечно тонкого отверстия (практически очень тонкого) с некоторым конечным количеством движения J_0 , роль рейнольдсова числа Re играет величина $\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{J_0}{\rho}}$. Эта величина безразмерна (J_0 имеет размерность — массовая плотность $\times$ квадрат скорости $\times$ квадрат длины) и, как вытекает из анализа, именно она определяет явление и служит критерием подобия двух явлений. В рассматриваемом примере нет ни одной характерной длины или скорости; движение определяется импульсом струи, плотностью и вязкостью жидкости, соответственно этому на основании условий задачи составляется и определяющее число задачи (см. § 4, главы IV, второго отдела).

Еще раз подчеркнем, что для составления необходимых и достаточных условий подобия мы должны располагать полной системой:

¹⁾ Литература по теории подобия и теории моделирования крайне обширна. Из современной советской литературы укажем на книгу проф. А. А. Гухман, Физические основы теплопередачи. Том I — Теория подобия и ее приложения. ГЭИ. Л.-М. 1934.

уравнений, определяющих явление, включая сюда дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия для них и вообще все дополнительные условия, как, например, задание импульса в только-что разобранным примере. Иными словами, задача должна быть поставлена (и, известна, строго говоря, теорема о существовании и единственности решения). Решение задачи может быть и не известно, так что для моделирования явления нам необходима лишь постановка задачи, а не ее решение. В противном случае, т. е. при наличии готового решения, вопрос о моделировании явления на основании соображений о подобии явлений, потерял бы свою актуальность; осталось бы проверить одно единичное явление в лабораторной обстановке. Идея же моделирования заключается, наоборот, в переносе результатов одного опыта в данном масштабе на все подобные явления любого масштаба и в предсказании правильности такого переноса при отсутствии теоретического решения задачи.

§ 4. Число Эйлера и закон сопротивления

В дальнейшем большое значение будет иметь частная гидродинамическая задача о стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости постоянной плотности при отсутствии объемных сил. Этой задаче соответствует система дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Граничные условия (начальных условий нет, так как движение стационарно) здесь заключаются в задании равенства нулю скоростей на неподвижных стенках и величины скорости на бесконечности в случае внешней задачи и скорости на оси или расхода в случае внутренней задачи. В задачах этого типа давление входит лишь под знак производной и определяется поэтому с точностью до постоянной, имеющей значение давления в некоторой произвольной точке потока. Иными словами, как во внешней, так и во внутренней задаче этого типа никогда не фигурируют абсолютные давления, а лишь перепады давлений. Эти перепады не могут быть ни для какой точки заданы наперед, если уже заданы вышеупомянутые кинематические граничные условия, вполне определяющие сами по себе задачу. Так например, рассматривая внешнюю задачу обтекания некоторого тела с характерным размером a , вязкой жидкостью с коэффициентом кинематической вязкости ν , при скорости набегающего потока на бесконечности U_0 , можем однозначно определить поле безразмерных скоростей (масштаб U_0) в функции безразмерных координат (масштаб — a) и числа Рейнольдса $Re = \frac{U_0 a}{\nu}$, как параметра. В самом деле, обозначая через Δp_0 масштаб перепадов давлений в одном из двух сравниваемых потоков, мы можем формально представить безразмерные урав-

нения так:

$$\left. \begin{aligned} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -Eu \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где под символом Eu понимается так называемое число Эйлера $Eu = \frac{\Delta p_0}{\rho v_0^2}$ или, иногда, $Eu = \frac{2\Delta p_0}{\rho v_0^2}$. Но никакого перепада давлений Δp_0 мы с данной задачей заранее (не решив ее) связать не можем, так как в число граничных условий задачи входит лишь задание нулевой скорости на неподвижной поверхности обтекаемого тела (вследствие вязкости), задание скорости U_0 набегающей жидкости (скорости на бесконечности) и, наконец, еще давления p_0 в какой-нибудь одной точке, например также на бесконечности. Чтобы пояснить последнее, напомним, что при решении системы (4.2) давление сначала исключается (переходом к уравнениям Гельмгольца, см. конец § 2), и задача сводится к розысканию поля скоростей, удовлетворяющего вышеупомянутым чисто кинематическим условиям; уже только после определения поля скоростей переходят к определению поля давлений из уравнения в полных дифференциалах:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} dx_3,$$

после чего давление определяется с точностью до постоянной интегрирования. Таким образом мы не можем задавать произвольное граничное распределение давлений, а имеем лишь одно значение p_0 в некоторой точке, при этом не сможем, очевидно, и наперед задавать перепад давления между двумя точками потока. Мы видим, что число Эйлера $Eu = \frac{\Delta p_0}{\rho v_0^2}$ не входит в число условий подобия, так как оно содержит величину Δp_0 , не фигурирующую в задаваемых наперед граничных условиях. Пользуясь неопределенностью величины Δp_0 , мы можем вообще опустить число Eu в уравнениях (4.2); для этого достаточно, например, положить $\Delta p_0 = \rho v_0^2$, тогда уравнения (4.2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v_i \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Из этого уравнения сразу следует, что, если говорить о задаче розыскания поля скоростей и перепадов давлений $\Delta p = p - p_0$ (а не абсолютных давлений p), то единственным определяющим числом явится число Рейнольдса Re . Условия подобия полей скоростей и перепадов давлений при обтекании двух тел безграничным потоком вязкой жидкости (ν), имеющим на бесконечности скорость U_0 , являются: 1) геометрическое подобие тел и их расположения по отношению

к направлению скорости потока на бесконечности (подобие „русел“) и 2) одинаковость чисел Рейнольдса Re . Число Re не исчезает подобно числу Eu , так как оно состоит из наперед заданных величин, распоряжаться которыми мы не можем.

Иначе встанет задача, если мы захотим из уравнений (4.1) определить поле скоростей и поле абсолютных давлений (а не перепадов). Тогда в число граничных условий входит одно, значение абсолютных давлений p_0 ; примем его за масштаб абсолютных давлений μ , переходя к безразмерным уравнениям, вновь получим (4.2), но уже с другими Eu . Обозначим его $Eu_a = \frac{p_0}{\rho v_0^2}$, в знак того, что он состав-

лен для абсолютных давлений. В этом случае и Eu_a и Re оба заданы наперед, ни одно из них нельзя заставить исчезнуть из уравнений задачи и условия подобия полей скоростей и полей абсолютных давлений войдут наряду с условиями геометрического подобия русел оба равенства $Eu_a = idem$ и $Re = idem$.

Поясним рассуждение примером. Как показал Озеен¹⁾ при обтекании шара радиуса a потоком несжимаемой жидкости со скоростью U на бесконечности, параллельной оси Ox_1 , поле скоростей и давлений в первом приближении может быть представлено в размерных величинах так:

$$\begin{aligned} v_1 &= U - \frac{3}{2} \frac{aU}{r} e^{-\frac{U}{2v}(r-x_1)} - \frac{3\mu a}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1 - e^{-\frac{U}{2v}(r-x_1)}}{r} + \frac{1}{4} a^3 U \frac{\partial^2}{\partial x_1^3} \left(\frac{1}{r} \right) \\ v_2 &= - \frac{3av}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1 - e^{-\frac{U}{2v}(r-x_1)}}{r} + \frac{1}{4} a^3 U \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{1}{r} \right) \\ v_3 &= - \frac{3av}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1 - e^{-\frac{U}{2v}(r-x_1)}}{r} + \frac{1}{4} a^3 U \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{1}{r} \right) \\ p - p_0 &= \frac{3}{2} \mu a U \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4} \rho a^3 U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Перейдем к безразмерным величинам, сохраняя те же обозначения для них, что и для размерных величин. Примем за масштаб длин радиус шара a , за масштаб скоростей — скорость U ; что касается масштаба для перепадов давлений $\Delta p = p - p_0$, то, согласно изложенному ранее, за масштаб перепадов примем ρU^2 ; тогда будем иметь:

$$v_1 = 1 - \frac{3}{2r} e^{-\frac{1}{2} Re(r-x_1)} - \frac{3}{Re} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2} Re(r-x_1)}}{r} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1^3} \left(\frac{1}{r} \right)$$

¹⁾ C. W. Oseen. Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, Arkiv für Mat., Astr. und Physik, Bd. 6, № 29, 1910 и Bd. 7, № 1, 1911; см. также Розе, Кубель, Кочин, Теоретическая гидромеханика, ч. II, 1937, стр. 367

$$v_2 = -\frac{3}{2\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\text{Re}(r-z_2)}}{r} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$v_3 = -\frac{3}{2\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\text{Re}(r-z_1)}}{r} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$p - p_0 = p - E u_a = \Delta p = \frac{3}{2\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{r} \right);$$

в левой части последнего уравнения p_0 есть безразмерная величина, т. е. размерное p_0 , отнесенное к ρv_0^2 , а это как раз и есть $E u_a$.

Приводимые нами безразмерные уравнения хорошо иллюстрируют сказанное выше. Для подобия полей скоростей обтекания двух шаров достаточно задать одинаковость чисел Рейнольдса; то же относится и к подобию полей перепадов Δp , но иначе обстоит дело с абсолютными давлениями p . Как видно из последнего уравнения:

$$p = E u_a + \Delta p.$$

Следовательно, для подобия полей абсолютных давлений необходимо еще выполнение дополнительного условия $E u_a = \text{idem}$. В вопросах механики несжимаемой жидкости определение полей абсолютных давлений не имеют значения, так как во все исследования динамического воздействия потока на погруженные в жидкость тела (сопротивление, подъемная сила) входят поверхностные интегралы от перепадов; иное будет в сжимаемой жидкости или при наличии кавитации.

Рассмотрим безразмерное сопротивление тела, под которым будем понимать отношение суммарного воздействия потока на тело W к масштабу его, равному $\rho v_0^2 a^2$ или, как это более принято, отношение:

$$\frac{W}{\frac{\rho v_0^2}{2} \cdot \sigma} = c_w, \quad (4.4)$$

где под v_0 обычно понимают скорость U на бесконечности, а под σ (в двух подобных системах пропорциональную a^2) величину площади миделевого сечения или поверхности тела. Это безразмерное сопротивление c_w есть не что иное, как коэффициент сопротивления. Чтобы найти этот коэффициент, надо безразмерно проинтегрировать по поверхности тела нормальные и касательные компоненты тензора напряжений, определяемые, как мы уже знаем, с одной стороны, полем скоростей вблизи поверхности тела (тензор скоростей деформации) и, с другой — полем давлений $p = p_0 + \Delta p$. Но слагаемое p_0 , будучи проинтегрировано по замкнутой поверхности, даст нуль, а все безразмерные интегралы, как определенные, сведутся к функциям одного параметра Re (вид этой функции зависит от геометрической формы обтекаемого тела). Для двух подобных тел, описываемых тождественными безразмерными уравнениями, такие функции будут одинаковы. Итак имеем:

$$c_w = \frac{W}{\frac{\rho U^2}{2} \cdot \sigma} = f(\text{Re}) = f\left(\frac{Ua}{\nu}\right), \quad (4.5)$$

т. е. для подобных между собой и подобно обтекаемых тел, коэффициент сопротивления определяется одной и той же функцией рейнольдсова числа.

В рассмотренном нами ранее примере обтекания шара приближенная теория Озеена дает сопротивление:

$$W = 6\pi\mu aU \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\rho aU}{\mu}\right).$$

Переходя к безразмерному сопротивлению, положим $\sigma = \pi a^2$; тогда получим:

$$c_w = \frac{12}{\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{8} \text{Re}\right).$$

Формулу (4.5), обычно, называют формулой сопротивления к частным случаям этой формулы мы неоднократно будем в дальнейшем возвращаться.

Заметим в заключение, что после того, как задача разрешена, мы можем определить перепад давления между двумя точками и составить число Эйлера Eu . Из предыдущего видно, что если зафиксировать точки, между которыми берется перепад, то Eu для данного потока будет функцией рейнольдсова числа Re , причем в двух подобных потоках, если перепады брать между сходственными точками, Eu будет одной и той же функцией Re , так что равенство $Eu = \text{idem}$ в подобных системах есть следствие подобия, а не условие его.

Все что сейчас говорилось о внешней задаче гидродинамики, с успехом может быть отнесено и к внутренней задаче. Здесь, обычно, под сопротивлением понимают механические потери в жидкости, т. е. перепады или падения механической энергии (суммы потенциальной энергии — давления и кинетической энергии). В случае цилиндрической трубы при стационарном движении сопротивление определяется просто перепадом давления Δp на некоторой произвольно выбранной длине l . Для круглых труб принимают часто (r — радиус трубы, v_m — максимальная скорость на оси трубы):

$$\Delta p = \zeta_m \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{\rho v_m^2}{2}. \quad (4.6)$$

Коэффициент ζ_m носит наименование коэффициента сопротивления. Приведенные ранее рассуждения показывают, что (значок m подчеркивает отнесение скоростей к максимальным скоростям):

$$Eu_m = \frac{\Delta p}{\frac{\rho v_m^2}{2}} = \varphi(\text{Re}_m) = \varphi\left(\frac{v_m l}{\nu}\right). \quad (4.7)$$

Замечая, что в подобных системах отношения $\frac{l}{r} = \text{idem}$, можем утверждать существование во всех подобных системах одной и той же функциональной связи между коэффициентом сопротивления ζ_m и рейнольдсовым числом Re_m :

$$\zeta_m = \zeta_m(\text{Re}_m), \quad (4.8)$$

называемой формулой сопротивления. Чаще, однако, переходят к средним скоростям по расходу сквозь сечение трубы и формулу (4.6) переписывают так:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{2r} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}, \quad (4.9)$$

тогда формула сопротивления будет:

$$\lambda = \lambda(\text{Re}_{\text{ср}}) = \lambda\left(\frac{v_{\text{ср}} \cdot 2r}{\nu}\right). \quad (4.10)$$

Необходимо подчеркнуть, что переход от точечных значений к средним принципиально допустим, так как в подобных системах отношения скоростей в сходственных точках к средним скоростям представляются одинаковыми функциями рейнольдсова числа. За деталями исследования вопроса о переходе от точечных критериев к осредненным отсылаем интересующихся к специальным курсам.¹⁾

§ 5. Дополнительные соображения о числе Струхала. Подобие в газодинамических случаях. Случай тяжелой жидкости. Теория подобия и теория размерностей

В предыдущем параграфе на наиболее простом частном случае рассмотрены условия подобия и роль чисел или критериев подобия в формулах сопротивления геометрически подобных и подобно обтекаемых тел. Переходя к более сложным явлениям, напомним, что роль критерия Струхала при рассмотрении подобия нестационарных явлений была нами уже выяснена в § 3 настоящей главы. Поэтому в настоящем параграфе мы будем рассматривать лишь стационарные явления и члены с частными производными по времени (локальные производные), содержащие число Sh , будем опускать. Но прежде чем приступить к дальнейшему изложению отметим, что в ряде случаев мы можем не знать наперед, будет ли движение стационарным или не стационарным. Это те случаи, когда при стационарных граничных условиях и отсутствии начальных условий движение все же нестационарно по внутренней своей сущности. Так например, при набегании жидкости с постоянной на бесконечности скоростью U на плохо обтекаемое тело наблюдается периодический отрыв вихрей с поверхности тела (автоколебания). Если обозначить N — частоту отрыва вихрей, T — период отрыва вихрей и L — какой-нибудь характерный размер обтекаемого тела (например, диаметр цилиндра, ширина пластинки и др.), то число Струхала Sh , составленное из этих элементов, т. е.

$$\text{Sh} = \frac{LN}{U} = \frac{L}{UT}$$

не может входить в число условий подобия, так как оно содержит величину N или T , наперед неизвестную, а наоборот, являющуюся

¹⁾ А. А. Гухман loc. cit.

следствием законов обтекания. Такое число Sh будет в геометрически подобных системах определенной функцией числа Re ,

$$Sh = \frac{U}{LN} = \frac{UT}{L} = f(Re) = f\left(\frac{UL}{\nu}\right), \quad (5.1)$$

а при подобных движениях одним и тем же ($Sh = idem$) — факты давно уже экспериментально доказанные самим Струхалом¹⁾ и другими исследователями. Итак, если величины, входящие в состав критерия Sh , определены граничными или начальными условиями, то условие $Sh = idem$ является условием подобия и входит в рассмотрение, как условие подобия нестационарных явлений. Если же в определение числа Sh входят величины, которые можно найти только решив задачу, то равенство $Sh = idem$ будет следствием подобия. Так например, при моделировании машущего крыла мы должны на модели сохранять число Струхала натуре, при моделировании явления фляггера или бафтинга не можем задавать число Струхала, а наоборот, будем его находить.

В установлении условий подобия очень большое значение имеет точное знание граничных и начальных условий. В предыдущем параграфе мы видели, что в сравнительно простых явлениях движения несжимаемой жидкости постоянной плотности (и при отсутствии объемных сил) установление последних условий не составляет труда. В случае сжимаемого газа вопрос гораздо более сложен главным образом потому, что весьма трудно установить граничные условия для температуры. Жидкость прилипает к твердой стенке и это сразу дает простые граничные условия для скоростей (относительная скорость равна нулю), в случае же теплопередачи условия более сложны. В одних случаях мы имеем теплоизолированную твердую стенку и это приводит к равенству нулю нормальной к стенке производной температуры (отсутствие теплового потока через стенку), в других случаях нам, наоборот, задается, что стенка идеальный проводник и выравнивает температуру вдоль всей стенки, в третьих, нам известно распределение коэффициента теплоотдачи по обтекаемой поверхности. Вот почему рассмотрение условий подобия в общем случае сжимаемого газа при наличии притока энергии (общая газодинамическая задача) представляет известные трудности. Трудности эти становятся почти непреодолимыми при практических попытках демоделирования явлений и осуществлении граничных и начальных условий. Что же касается критерия подобия (3. 5), то, опуская по предыдущему критерий Sh и оставляя пока в стороне вопрос о влиянии числа Фруда (Fr), обратимся рассмотрению остальных.

Если отвлечься от влияния температуры на такие константы, как c_p и c_v , то согласно кинетической теории газов условия $Pr = idem$ и $k = idem$ будут выполнены, если газы имеют одинаковые атомные числа. Так например, для воздуха в пределах температур от $-100^\circ C$ до $+300^\circ C$ можем положить в среднем $Pr = 0,73$; для таких газов как H_2 , N_2 , O_2 и NO число Pr лежит между 1,87 и 1,97. Число k

1) V. Strouhal. Wied. Ann. 5, 216, 1878.

меняется при переходе от воздуха ($k=1,4$) к перегретому пару ($k=1,28$) и насыщенному пару ($k=1,15$). Влияние разницы значений этих параметров на подобие модели и натуры еще очень мало изучено.

Чрезвычайно важную роль в газодинамике играет число Бэрстоу (Ba). Требование одинаковости Ba в тех случаях, когда это число не слишком мало (например $Ba > \frac{1}{3}$), весьма существенно. Сложность в осуществлении требования $Ba = idem$ заключается в том, что в Ba входят местные скорости движения жидкости и скорости распространения звука, причем последняя зависит от температуры в данном месте или от давления и плотности. Практически, на самом деле при моделировании все эти условия выполняются лишь в среднем. Эксперимент показывает, что приближенное осуществление условий подобия вместо точных во многих случаях допустимо даже при очень широких диапазонах отклонений значений чисел подобия от теоретически требуемых. Так например, хорошо известно (мы в дальнейшем будем специально рассматривать это явление), что в широком диапазоне значений Re коэффициент сопротивления плохо обтекаемых тел практически не зависит от Re ; при моделировании в границах таких областей можно не соблюдать условие одинаковости рейнольдсова числа. Области, где отдельные критерии подобия могут практически не соблюдаться, называют областями автомодельности явления. Выявление областей автомодельности представляет собою задачу большого практического значения.

Число Бэрстоу Ba тесно связано с упомянутым ранее числом Эйлера Eu_a , построенным по абсолютному давлению в данной точке. Если сравнить (3.1) и (3.4), то легко заключить о существовании соотношения

$$Eu_a = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{Ba^2} = \frac{R T_0}{v_0^2}. \quad (5.2)$$

Таким образом мы видим, что при выполнении условия $k = idem$, т. е. условия одинаковости атомности газов в натуре и на модели, критерий подобия $Ba = idem$ эквивалентен критерию $Eu_a = idem$, а это условие, как мы уже видели, тесно связано с требованием подобия полей абсолютных давлений. В то время, как в несжимаемом газе последнее требование излишне, в вопросах динамики сжимаемого газа, наоборот, это требование является основным, так как поле абсолютных давлений, поле плотностей и поле абсолютных температур находятся между собой в связи. Итак, требование $Ba = idem$ представляет собою основное условие подобия двух газодинамических явлений, требования $Pr = idem$ и $k = idem$ можно объединить в одно — в натуре и модели газы имеют одинаковое атомное число¹⁾, наконец условия $Sh = idem$ и $Re = idem$

¹⁾ Как доказывается в кинетической теории газов, число Прандтля Pr и величина k в газах одинаковости атомности связаны соотношением $Pr = \frac{4k}{9k-5}$; некоторые интересные детали теории подобия в газодинамике можно найти в статье А. Busemann, *Gasdynamik, Handb. der Exper. Physik*, Bd. IV, 1 Teil, S. 356—363, Leipzig, 1931.

имеют тот же смысл, что и в несжимаемом газе. Наиболее существенны и трудно выполнимы условия подобия начальных и граничных условий для таких величин, как p или T .

В обычных условиях газодинамического эксперимента коэффициент, сопротивления c_w будет функцией Re и Ba

$$c_w = f(Re, Ba). \quad (5.3)$$

Чтобы перенести результаты опытов в воздухе на случай, скажем, явления в паровых турбинах, необходимо еще дополнительно учитывать влияние числа Fr и k . В обстановке внутренней задачи искомой величиной является перепад давлений или E_u ; очевидно, что

$$E_u = \varphi(Re, Ba) = \psi(Re, E_u). \quad (5.4)$$

Мы оставили пока в стороне вопрос о роли числа Фруда (Fr). Число это, при прочих равных условиях, характеризует роль объемных сил, обычно на практике сил веса. Если объемные силы потенциальны, то соответствующий им потенциал в дифференциальных уравнениях гидродинамики складывается с давлением, так как и тот и другое стоят под знаком градиента.

В этом случае относительно суммы потенциала объемных сил (веса, например) и давления можно повторить все, что говорилось ранее просто о давлении. Если явление определяется только перепадами, а не абсолютными значениями этой суммы, то условие $Fr = idem$, точно так же как и условие $E_u = idem$, не будет входить в число условий подобия, если же, наоборот, нас интересует вопрос о подобии абсолютных величин давления и потенциала объемных сил, то условие $Fr = idem$ присоединяется к необходимым условиям подобия. Последнее имеет место в газодинамических условиях, если сжимаемый газ движется в поле тяжести на значительно разнящихся между собою высотах над землей (динамическая метеорология и др.). Критерий Фруда имеет значение и тогда, когда тяжелая несжимаемая жидкость движется при наличии свободных поверхностей (волны на границе двух средин различной плотности); мы этих случаев в дальнейшем не будем рассматривать.

Некоторые авторы отождествляют теорию подобия с учением о размерности физических величин. Часто даже вообще теорию подобия называют анализом размерностей¹⁾. Этот взгляд не верен и представляет следствие формального отношения к учению о подобии явлений. Анализ размерностей действительно позволяет указать систему безразмерных чисел или критериев, характерных для данного явления, и установить даже их число²⁾, но только теория подобия, рассматривающая сами дифференциальные уравнения и учитывающая роль граничных и начальных условий задачи, позволяет указать необходимые и достаточные условия подобия двух явлений. Так

¹⁾ См., например статью *H. Dryden'a*, *Aerodynamics of Cooling*. „Aerodynamic Theory“ edit. by *W. F. Durand*, vol. VI, 1936, p. 250.

²⁾ См. *П. В. Бриджмэн*. Анализ размерностей, ГТИ, 1934, а также *Кибель, Кочин и Розе*, Теоретическая гидромеханика, ч. II, 1937, стр. 287.

например, с точки зрения теории размерностей E_{ij} и E_{ij} представляют одно и то же, между тем мы видели, как велико между ними принципиальное различие. На самом деле, применяя теорию размерностей, обычно, в дополнительных рассуждениях о физической природе явления прибавляют все то, что дается собственно говоря, именно знанием дифференциальных уравнений и других условий задачи, центр же тяжести переносят на составление системы критериев, что отнюдь не является исчерпывающим приемом теории подобия.

§ 6. Компоненты тензора напряжений в криволинейных координатах. Уравнения гидродинамики и притока энергии в криволинейных (ортогональных) координатах

В дальнейшем нам предстоит решать ряд задач в криволинейных ортогональных координатах. Так как это будут задачи движения несжимаемого газа, то мы дадим вывод уравнений в криволинейных координатах лишь для случая несжимаемого газа (гидродинамики).

В предыдущей главе выведены выражения для криволинейных ортогональных компонентов тензора скоростей деформаций (формула (4. 2)) Пользуясь ими, мы можем теперь на основании равенства (2.6) на стоящей главы, положив в нем $\text{div } \mathbf{v} = 0$, получить:

$$\left. \begin{aligned} p_{q_i q_i} &= -p + \frac{2\mu}{H_i} \left(\frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{v_{q_j}}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} + \frac{v_{q_k}}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \right), \\ p_{q_i q_j} &= \frac{\mu}{H_i H_j} \left(H_i \frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_j} + H_j \frac{\partial v_{q_j}}{\partial q_i} - v_{q_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} - v_{q_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

В случае сжимаемого газа нам пришлось бы к диагональным компонентам тензора напряжений прибавить еще член

$$-\frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{v} = -\frac{2}{3} \mu \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (v_{q_1} H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (v_{q_2} H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (v_{q_3} H_1 H_2)}{\partial q_3} \right].$$

По формулам (6.1) в цилиндрических координатах ($H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_z = 1$) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, & p_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), & p_{\theta z} &= \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & p_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Аналогично в сферических координатах ($H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\lambda = r \sin \theta$; r — радиус-вектор точки, θ — полярный угол, т. е. угол между радиус-вектором и осью, дополнительный к широте, λ — долгота, т. е. угол между проекцией радиус-вектора на плоскость, перпендику-

лярную к полярной оси и отсчетной осью):

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, & p_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ p_{\theta\lambda} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda \cotg \theta}{r} \right) \\ p_{\lambda\lambda} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cotg \theta}{r} \right) \\ p_{\lambda r} &= \mu \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Для составления дифференциальных уравнений движения в криволинейных координатах проще всего воспользоваться известной формулой тензорного анализа:

$$\text{Div}_{q_i} T = \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} T_{q_i q_k} \right)}{\partial q_k} - T_{q_k q_k} \frac{\partial \lg H_k}{\partial q_i} \right\} \quad (6.4)$$

и применить ее к уравнению в напряжениях в форме (1.21), где тензор T имеет компоненты:

$$T_{q_i q_k} = p_{q_i q_k} - p v_{q_i} v_{q_k}. \quad (6.5)$$

Можно, конечно, было бы непосредственно взять уравнения Навье-Стокса и их проектировать на оси криволинейных координат¹⁾.

Мы выпишем здесь результаты для цилиндрической и сферической систем координат.

а) Цилиндрическая система:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= F_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

¹⁾ См. *Н. Е. Кочин*. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. ГИИТ, 1934, стр. 439 и 440, а также *Кочин, Кибель и Розе*, loc. cit., стр. 268—273.

б) Сферическая система:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} = F_r - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \\
 & + v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right) \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} = \\
 & = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \lambda^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\
 & \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta}{r} = \\
 & = F_\lambda - \frac{1}{r} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + v \left(\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \lambda^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\
 & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{v_\lambda \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

К этим основным дифференциальным уравнениям движения жидкости, соответствующим предположению о несжимаемости жидкости и одинаковости плотности жидкости, можно присоединить еще уравнения распространения тепла [ср. (2.18)] в криволинейных координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_{q_i} \operatorname{grad}_{q_i} T = a \nabla^2 T + 2 \frac{\mu}{c_p} \dot{S}^2$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_{q_1}}{H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{v_{q_2}}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{v_{q_3}}{H_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + \right. \\
 \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) \right\} + 2 \frac{\mu}{c_p} \dot{S}^2.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Последний член мы явно не выписываем, так как он слишком громоздок. Составить его можно, взяв сумму квадратов всех компонентов $\dot{S}_{ij}$ в криволинейной системе, приведенных в формулах (4.2) предыдущей главы.

Имеем:

В цилиндрической системе:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 2 \frac{\mu}{c_p} \dot{S}^2.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

В сферической системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = a \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} \right] + 2 \frac{\mu}{\rho} \dot{S}^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

ТЕОРИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Общая кинематика и динамика ламинарного движения жидкости или газа была вкратце изложена в предыдущем отделе. Оставляя в стороне вопросы движения жидкости при очень малых рейнольдсовых числах (задача Стокса и ее обобщение, данное Озееном, ламинарное движение в цилиндрических и расширяющихся трубах и некоторые другие случаи движения), мы посвящаем настоящий отдел движению при больших рейнольдсовых числах. Многочисленные опыты, включая самые последние лабораторные и натурные исследования, доказывают, что ламинарные движения со всеми специфическими их свойствами, относящимися к профилям скоростей и трению, наблюдаются даже на таких крупных объектах, как натуральное крыло самолета и корпус дирижабля при их обычных скоростях движения. В случае внешних обтеканий тел при больших рейнольдсовых числах области ламинарных движений жидкости или газа бывают сосредоточены в носовых частях тел вблизи обтекаемой поверхности, причем размеры этих ламинарных областей зависят от многих факторов. Во всяком случае, как бы ни были малы или велики эти области, наличие их обуславливает значительные изменения в сопротивлении и теплоотдаче тел, в их обтекании и других аэрогидродинамических явлениях. Недоучет роли ламинарных участков может привести к большим недоразумениям при пересчете результатов опытов на натурные условия (масштабный эффект и др.). За ламинарными участками обтекания, вниз по течению, располагаются участки не ламинарного — турбулентного течения жидкости. В большинстве практически важных случаев именно эти участки дают главную часть сопротивления (модели больших масштабов в искусственных воздушных потоках — аэродинамических трубах); все же при изучении явлений даже и в этих случаях нельзя пренебрегать ролью ламинарных участков. Как только-то упоминалось, в других случаях (модели малого масштаба, натурные объекты, движущиеся в покоящейся жидкости, и др.), наоборот, ламинарные участки имеют основное значение. Вот почему настоящий отдел посвящается специальному вопросу — ламинарному обтеканию тел при больших рейнольдсовых числах. Общеизвестной теорией таких явлений считается ставшая уже классической теория ламинарного пограничного слоя, основы которой были даны Прандтлем еще в 1904 г. Изложение этой теории и ее приложений к некоторым главнейшим плоским и пространственным задачам движения несжимаемой и сжимаемой жидкости и составляет основной предмет настоящего отдела.

Попутно мы затрагиваем и другие специальные вопросы ламинарных движений, на первый взгляд не относящиеся непосредственно к задаче о пограничном слое, — теорию ламинарной струи в затопленном пространстве и теорию следа за обтекаемым телом. Однако эти вопросы, интересные сами по себе, на самом деле тесно связаны с теорией пограничного слоя.

Теория ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе еще очень мало разработана. Мы довольствуемся изложением лишь тех нескольких работ по вопросу об обтекании пластинки, которые составили предмет недавних изысканий крупнейших аэродинамиков (Буземан, Карман и Тзян). Эти задачи и методы их решения представляют большое принципиальное значение, так как выясняют характерные особенности явлений трения и теплопередачи при больших скоростях в разреженном газе, т. е. в обстановке, приближающейся к высотным полетам.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ; ЛАМИНАРНЫЙ СЛОЙ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ

В настоящей главе мы дадим развитие основных принципиальных идей теории ламинарного пограничного слоя и для иллюстрации и сравнительной оценки методов приведем пример продольного обтекания плоской пластины без перепада давления. Изложению методов расчета ламинарного пограничного слоя в более сложных случаях обтеканий посвящаются следующие главы.

§ 1. Движение вязкой жидкости вблизи поверхности обтекаемого тела при больших реynольдсовых числах. Пограничный слой. Уравнения движения жидкости в пограничном слое

Отличительная особенность реальной вязкой жидкости — наличие в ней внутреннего трения, обусловленного обменом количеств движения между молекулами жидкости, — особенно резко проявляется вблизи твердой стенки обтекаемого тела. Если в теории „идеальной“ жидкости мы можем (и широко пользуемся этим приемом) любую линию тока заменить твердой стенкой, то в реальной жидкости такая замена совершенно не допустима, так как между твердой стенкой и непосредственно к ней прилегающими слоями жидкости действуют касательные силы трения, вызывающие искажения в „идеальном“ обтекании тела.

Твердое тело, помещенное в движущуюся жидкость или движущееся по отношению к неподвижной жидкости, нарушает состояние движения или равновесия жидкости, производит в ней возмущения. Теория идеальной жидкости знает лишь „возмущения формой“, связанные с искривлением линий тока из-за непроницаемости тела. Введение в поток тела, имеющего форму поверхности, состоящей из линий тока, никакого возмущения в потоке не производит. На самом же деле,

кроме возмущения формой во всякой жидкости, как мало вязкой, так и значительно вязкой, при введении в нее твердого тела образуются еще возмущения потока из-за вязкости. Эти вязкие возмущения в некоторых случаях сильно искажают видимую картину обтекания (плохо обтекаемые тела с плавными обводами), в других случаях производят на первый взгляд незначительные искажения (хорошо обтекаемые тела), но на самом деле и в тех и в других случаях влияние этих искажений очень значительно, если не с кинематической, то с динамической точки зрения.

С удалением от поверхности обтекаемого тела возмущения убывают. Так, помещая в плоско-параллельный поток некоторое тело, мы искажаем поток, но в достаточном удалении от тела имеем право с известным приближением говорить о невозмущенном плоско-параллельном потоке. Если ввести условное представление об областях возмущения, как о таких областях, где возмущение с данной степенью приближения еще существует, то можно заметить одну отличительную особенность области вязкого возмущения¹⁾.

Как мы уже знаем из теории подобия, картина обтекания тела идеальной жидкостью не зависит от скорости набегающей жидкости и ее плотности. В двух геометрически подобных руслах области возмущения формой также подобны между собой (следует особо выделить применяемое иногда искусственное наложение циркуляции, которое не представляет собою возмущения формой). Если мы, рассматривая обтекание данного тела, будем повышать, например, скорость на бесконечности, то при этом все скорости изменятся в соответствующее число раз, а картина обтекания не изменится.

Принципиально иным свойством обладает область вязкого возмущения. С изменением скорости набегающей, благодаря наличию вязких возмущений, картина обтекания изменяется не подобно.

Замечательно, что с ростом значения рейнольдсова числа размеры области вязкого возмущения убывают. С качественной стороны этот важный опытный факт легко наблюдать в наиболее простой его форме, хотя бы при продольном движении пластинки в неподвижной жидкости. При очень малых скоростях пластинки мы заметим, что в продольное движение вместе с пластинкой приходят даже частицы, относительно далеко расположенные от пластинки; при больших же скоростях пластинкой будут увлекаться лишь более близко к ней расположенные частицы (поперечные скорости будут при этом очень малы). Теоретически вязкое возмущение должно передаваться сколь угодно далеко от тела, но практически мы замечаем лишь скорости, превышающие некоторую определенную скорость, соответствующую чувствительности наших измерительных приборов, — эта чувствительность и определит условную границу области вязкого возмущения.

Примем следующую схему обтекания тел по Прандтлю (рис. 8).

¹⁾ Как мы далее увидим, на самом деле области возмущения формой и возмущения вязкостью тесно переплетаются между собой, так как в реальной жидкости оба типа возмущения влияют друг на друга.

Вблизи поверхности обтекаемого тела образуется область, в которой проявляются и возмущения формы и вязкие возмущения, это — пограничный слой, который непосредственно за телом по направлению потока переходит в кормовую область или, как еще иногда говорят, след (тень) тела. В случае плохо обтекаемых тел пограничный слой отрывается от поверхности тела, не доходя до кормы, — в этом случае кормовая область содержит еще часть жидкости, подтекающей сзади и увлекаемой срывающимся пограничным слоем. Область жидкости, находящуюся вне пограничного слоя и

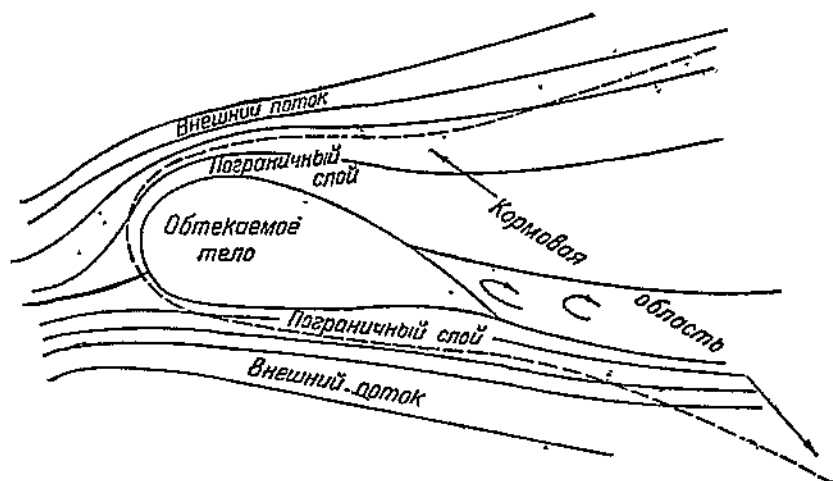


Рис. 8.

кормовой области, называют внешним потоком. В этой области можно пренебречь влиянием вязкости и считать, приближенно, что здесь имеются лишь возмущения формы; в случае плохо обтекаемых тел эти возмущения могут косвенно зависеть и от вязких возмущений в пограничном слое (искажение обтекания из-за отрыва пограничного слоя).

Прандтль заметил, что для жидкостей малой вязкости, при достаточно больших скоростях (как в дальнейшем будет разъяснено, — при больших рейнольдсовых числах), толщина пограничного слоя бывает крайне мала по сравнению с размерами тела и поэтому внутри этой области уравнения Навье-Стокса могут быть заменены более простыми приближенными уравнениями и до конца проинтегрированы.

Вывод этих уравнений сейчас уже стал классическим. Мы приведем последний вывод, данный самим Прандтлем в 1935 г.¹⁾

Рассмотрим плоский поток вязкой жидкости вблизи поверхности, имеющей настолько малую кривизну, что в области пограничного слоя уравнения движения можно писать в декартовых прямоугольных координатах x и y , считая с достаточной точностью кривую пересече-

¹⁾ Aerodynamic Theory, ed. by W. F. Durand, Berlin, J. Springer, 1935. Vol. III, G. The Mechanics of Viscous Fluids, p. 80.

чения поверхности тела с плоскостью течения координатной линией $y=0$, а кривые, нормальные к поверхности тела, прямыми $x = \text{const}$ ¹⁾. Уравнения движения будут, как уже известно, иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Введем характерный масштаб l длин вдоль пограничного слоя, положив $x = l \cdot \xi$, и масштаб δ поперечных координат, положив $y = \delta \cdot \eta$; здесь ξ, η — безразмерные координаты.

Интегрируя для оценки отдельных членов уравнений (1.1) последнее равенство в пределах $(0, \delta)$, получаем:

$$v = - \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (\text{при } y=0, v=0)$$

или

$$v = - \frac{\delta}{l} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta.$$

Продольная скорость изменяется, в пределах слоя, от значения нуль на стенке до некоторого „нормального“ значения, соответствующего внешнему потоку. Ее производная по ξ также имеет нормальное значение, не зависящее от толщины пограничного слоя. Наоборот, поперечная скорость v , как это видно из последней формулы, есть величина порядка, в $\frac{\delta}{l}$ раз отличающегося от порядка величины u , т. е. величина очень малая, если слой тонок.

Производные $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ имеют тот же порядок, что и скорость u , так как η меняется в пределах от 0 до 1 в отличие от y , меняющегося от 0 до δ . Таков же порядок и величины $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$.

Переходя в первом из уравнений (1.1) к безразмерным координатам, получим:

$$\frac{\rho}{l} \left(l \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{l}{\delta} v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = - \frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\mu}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Мы видим, что вся левая часть имеет нормальный порядок величин, так как, по предыдущему, произведение $\frac{l}{\delta} v$ имеет порядок u . Член $\frac{\partial u}{\partial t}$, характеризующий нестационарность явления, будем также считать

¹⁾ См. по этому поводу *Кибель, Кочин, Розе*, loc. cit., ч. II, 1937 г., стр. 392—394.

имеющим обычное значение, предполагая, что никаких особенностей во времени (например ударов) не происходит.

Обращаясь к членам, стоящим в правой части, заметим, что член, дающий градиент давления в продольном направлении, имеет нормальное значение, остальные же два слагаемых различны по порядку величины. Очевидно, последнее больше предыдущего в $\left(\frac{l}{\delta}\right)^2$ раз, т. е. оно, в предположении крайней малости отношения $\frac{\delta}{l}$, несравнимо велико по сравнению со вторым слагаемым правой части. Второе слагаемое, поэтому, должно быть опущено в общей сумме. Для того чтобы последнее слагаемое $\frac{\mu}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ было бы того же порядка, что и все остальные члены равенства, необходимо положить ($\approx$ знак порядка)

$$\frac{\mu}{\delta^2} u_0 \approx \frac{\rho u_0^2}{l},$$

где u_0 — порядок скорости u . Из этого равенства следует

$$\frac{\delta}{l} \approx \sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}},$$

т. е. что порядок отношения масштаба толщины пограничного слоя к масштабу продольных размеров есть величина, обратная корню квадратному из рейнольдсова числа рассматриваемого движения. Мы таким образом количественно оценили порядок убывания области вязкого возмущения при росте рейнольдсова числа.

Обратимся ко второму уравнению (1.1) и перепишем его, введя безразмерные координаты, так:

$$\frac{\rho}{l} \left(l \frac{\partial v}{\partial \xi} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{l}{\delta} v \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = - \frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\mu}{l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\mu}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Припоминая сказанное о порядке скорости v и ограничиваясь обычными движениями, не связанными с быстро меняющимися локальными ускорениями, можем утверждать, что вся левая часть имеет одинаковый порядок $\frac{\rho u_0 \delta}{l^2}$; таков же и порядок последнего слагаемого правой части. Предпоследнее слагаемое крайне мало по сравнению с остальными членами и может быть опущено. Таким образом получим порядок поперечного градиента давлений:

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{\rho u_0^2}{l} \cdot \frac{\delta}{l}.$$

Он оказывается очень малым и пропорциональным порядку отношения $\frac{\delta}{l}$; можем приближенно положить

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

и, следовательно, в дальнейшем в случае стационарного слоя заменять символ частной производной $\frac{\partial p}{\partial x}$ на полную производную $\frac{dp}{dx}$; физически это означает, что можно считать давление неизменяющимся поперек слоя и принимающим различные значения лишь вдоль слоя. Иными словами, распределение давления по поверхности тела одинаково с распределением давления во внешнем потоке вдоль внешней границы пограничного слоя.

Возвращаясь к уравнениям (1.1), перепишем их теперь так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Это — известные уравнения Прандтля, данные им впервые в 1904 г.¹⁾. Мы видим, что с математической стороны они проще уравнений Навье-Стокса. Мы должны их рассматривать как два уравнения с двумя неизвестными u, v ; что касается давления p , то оно должно быть наперед известно и определяется распределением давления во внешнем, не возмущенном влиянием вязкости, потоке. Как это фактически делается, мы увидим в дальнейшей.

Заметим, что система уравнений (1.3) могла бы быть заменена одним уравнением относительно функции тока Ψ , вводимой обычным путем:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Обозначим через $U(x, t)$ скорость во внешнем потоке на границе с пограничным слоем, тогда граничные условия нашей задачи будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0, \quad u=0, \quad v=0 \\ \text{„ } y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow U(x, t); \end{aligned} \right\} \quad (1.3')$$

последнее условие надо понимать так, что распределение скоростей в пограничном слое переходит асимптотически в распределение скоростей во внешнем потоке; на самом деле, как мы в дальнейшем увидим, этот переход происходит весьма быстро и, при еще достаточно малых значениях y , u становится не отличимо от U ; кроме условий по y , должен быть еще задан в общем случае профиль скорости $u(x_0, y, t)$, соответствующий некоторому начальному значению $x=x_0$. Как мы увидим в дальнейшем, последнему граничному условию удовлетворяют обычно лишь приближенно. При нестационарном слое должны задаваться еще начальные условия, т. е. распределения скоростей в начальный момент времени.

Так как движение жидкости во внешнем потоке вязкостью не возмущено (по схеме Прандтля), то его можно рассматривать как

¹⁾ L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. der dritten Intern. Math. Kongr. in Heidelberg (1904); Leipzig, 1905.

потенциальное и считать в случае нестационарного движения:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (1.5)$$

а в случае стационарного:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}. \quad (1.5')$$

Уравнения Прандтля в связи с этим, в случае нестационарного движения, могут быть представлены еще и так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

в случае стационарного движения опускаются члены $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial U}{\partial t}$.

В дальнейшем будет выяснено, в каких случаях скорость U может быть взята непосредственно из решения потенциальной задачи обтекания тела жидкостью без трения и в каких случаях приходится определять U по экспериментальному распределению давлений, согласно (1.5).

§ 2. Уравнения Прандтля, как общие уравнения движения жидкости вблизи поверхности при больших рейнольдсовых числах.

Приведенный в предыдущем параграфе вывод уравнений Прандтля отличается от более ранних выводов тех же уравнений тем, что здесь оценки порядков величин производятся в безразмерных величинах, в то время как в других выводах сравнивались порядки величин разной размерности (например, условно говорилось, что поперечная скорость является величиной порядка толщины слоя и др.).

Это изменение вывода, однако, не является принципиальным¹⁾ и оставляет у читателя ряд неясностей в другом направлении. Во всем выводе порядок величин сравнивался с относительной толщиной $\frac{\delta}{l}$

пограничного слоя, которая являлась как бы характеризующей явление величиной, с другой стороны, судя по граничным условиям, толщина слоя бесконечна. Далее непонятно, почему идет речь о жидкостях малой вязкости, в то время как общая теория подобия нас учит, что ни вязкость, ни скорость, ни размер русла не могут быть характерными для явления, а лишь их определенная комбинация — рейнольдсово число. Хотя Прандтль в вышецитированной статье и оговаривает эквивалентность предположения о малой вязкости предположению о больших значениях рейнольдсова числа, но в доказательстве эта идея недостаточно подчеркнута. Ввиду крайней важности понимания идеи, заложенной в прандтлевских уравнениях, мы приведем и другой вывод этих уравнений, ставящий себе целью показать, что уравнения

¹⁾ См. аналогичный вывод уравнений Прандтля в статье W. Tollmien'a (Handbuch der Experimentalphysik, t. IV, Bd. 1, S. 244. Berlin. 1932).

пограничного слоя являются общими уравнениями гидродинамики реальной жидкости при больших значениях рейнольдсова числа.¹⁾

Начнем с того, что перейдем от обычных уравнений плоского течения (1.1) к безразмерным, причем произведем анаморфозу их, взяв различные масштабы для продольных и поперечных длин и скоростей.

Обозначим через X_0 и Y_0 масштабы продольных и поперечных координат, через U_0 и V_0 — масштабы продольных и поперечных скоростей, через P_0 — масштаб перепада давлений и через T_0 масштаб времени. Тогда, независимо от каких бы то ни было предположений, уравнения (1.1) смогут быть переписаны в безразмерных величинах (мы оставляем для безразмерных величин прежние обозначения) так:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{U_0}{T_0} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_0^2}{X_0} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_0 V_0}{Y_0} v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{P_0}{X_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U_0}{X_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu U_0}{Y_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho \left(\frac{V_0}{T_0} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_0 V_0}{X_0} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{V_0^2}{Y_0} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{P_0}{Y_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu V_0}{X_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\mu V_0}{Y_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{U_0}{X_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V_0}{Y_0} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

или после простых преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_0}{U_0 T_0} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{P_0}{\rho U_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{X_0 U_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu X_0}{Y_0^2 U_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{X_0}{U_0 T_0} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{P_0 X_0}{\rho Y_0 U_0 V_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{X_0 U_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\nu X_0}{Y_0 U_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Как уже было выяснено в теории подобия (гл. II §§ 4 и 5), масштаб перепадов давлений P_0 можно принять равным ρU_0^2 , что же касается масштаба времени T_0 , то он или характерен и задан наперед, тогда $\frac{X_0}{U_0 T_0}$ определяет число Струхала Sh (например, в вопросах колебаний тел в жидкости), или же произволен — в этом случае его можно положить равным $T_0' = \frac{X_0}{U_0}$, и тогда $Sh = \frac{X_0}{U_0 T_0} = 1$.

Итак, положим в общем случае:

$$P_0 = \rho U_0^2, \quad \frac{X_0}{U_0 T_0} = Sh. \quad (2.2)$$

¹⁾ См. *R. von Mises*. Bemerkungen zur Hydrodynamik, Zeitschr. für angew. Math. und Mech. Bd. 7, S. 425—431, 1927, а также *Кибель, Кочин, Розе*, loc. cit. ч. II, 1937 стр. 394—396 и *Л. Г. Лойцянский*, К теории кризиса сопротивлений. Труды ЦАГИ № 237.

Уравнения (2.1) при этом несколько упростятся, приняв вид:

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{X_0}}{Y_0^2 U_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{Sh} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{U_0 X_0}{V_0 Y_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{X_0}}{Y_0^2 U_0} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введено рейнольдсово число

$$R_0 = \frac{U_0 X_0}{\nu}.$$

Сохраняя за масштабами продольных величин X_0 и U_0 обычные их значения (например, хорда крыла, скорость набегания или др.), распорядимся масштабами поперечных длин Y_0 и поперечных скоростей V_0 так, чтобы постоянные коэффициенты $\frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0}$ и $\frac{\sqrt{X_0}}{Y_0^2 U_0}$ были бы независимы от основного параметра — рейнольдсова числа R_0 ; положим, например,

$$\frac{X_0 V_0}{Y_0 U_0} = 1, \quad \frac{\sqrt{X_0}}{Y_0^2 U_0} = 1 \quad (2.4)$$

или, что все равно:

$$Y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{R_0}}, \quad V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R_0}}. \quad (2.5)$$

Дифференциальные уравнения движения (2.3) примут при этом вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{Sh} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \cdot R_0 + \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) представляют точные уравнения гидромеханики, выраженные в безразмерном виде при помощи масштабов (2.5) и справедливые при любых значениях рейнольдсова числа R_0 . Будем теперь увеличивать R_0 ; тогда Y_0 и V_0 будут убывать (X_0 и U_0 по условию не зависят от R_0). Зафиксируем безразмерные координаты x и y некоторой точки M . Это означает, что при безграничном росте R_0 точка M будет приближаться к поверхности тела. Если предположить, что при росте параметра R_0 переменные величины u , v , p и их производные по t , x , y стремятся к определенным пределам в точке M с фиксированными безразмерными координатами и в данный момент времени, то приближенно при больших R_0 мы можем в уравнениях (2.6) откинуть все члены, имеющие множителем $\frac{1}{R_0}$ или $\frac{1}{R_0^2}$; деля

второе уравнение на R_0 , получим, таким образом, вместо (2.6):

$$\left. \begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Возвращаясь отсюда при помощи (2.2) и (2.5) к размерным величинам, вновь получим уравнения Прандтля (1.3).

Уравнения (2.7) играют роль безразмерных уравнений пограничного слоя, причем как они сами, так и соответствующие им начальные и граничные условия не содержат рейнольдсова числа R_0 [вспомнить формулы (1.3') и перейти в них к безразмерным величинам!]. Поскольку мы при выводе уравнений пренебрегли кривизной поверхности, условие геометрического подобия русел, как будто, выполнено автоматически, но отсюда нельзя еще сделать вывода о подобии движения жидкости в пограничных слоях на всех телах малой кривизны. Действительно, не следует забывать, что мы учитываем геометрические особенности обтекаемого профиля в задаваемом наперед распределении давлений $p = p(x, t)$ во внешнем потоке, а следовательно и на поверхности тела.

Если распределения давлений вдоль по поверхностям обтекаемых профилей задать подобными между собой, то конечно при этом и распределения скоростей будут подобны между собой. Мы здесь встречаемся с важным для дальнейшего фактом уменьшения влияния рейнольдсова числа на движение с возрастанием рейнольдсова числа. О существовании этого явления мы уже говорили ранее, когда упоминали о наличии областей автомодельности. Подробнее к этому вопросу мы вернемся еще при рассмотрении явления „кризиса обтекания“.

Из приведенного анализа видно, что *уравнения пограничного слоя представляют собой приближенные уравнения гидродинамики реальной жидкости при больших значениях рейнольдсова числа.*

Если рассматривать обратную рейнольдсову числу величину

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{R_0}$$

как малый параметр и искать решение полной системы стоксовых уравнений (2.6) в виде рядов по степеням этого параметра:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon_0 u_1 + \dots \\ v &= v_0 + \varepsilon_0 v_1 + \dots \end{aligned}$$

то прандтлевская система уравнений представит собою не что иное, как уравнения первого приближения.

Равенства (2.5), очевидно, совершенно эквивалентны ранее полученным оценкам порядка толщины пограничного слоя и поперечной скорости в нем.

Масштабы Y_0 и V_0 фигурируют во многих современных работах по пограничному слою; мы будем постоянно ими пользоваться, вводя их для того, чтобы в уравнении движения не входило явно рейнольдсово число задачи; этот прием позволяет часто сводить уравнения к такому виду, что интегрирование их может быть произведено один раз для всех рейнольдсовых чисел.

Теория пограничного слоя в первый же момент своего появления объяснила часто встречающийся на опыте факт отрыва жидкости от стенок обтекаемого ею тела или стенок трубы в случае внутреннего протекания. Известно, что при наличии положительного градиента давления (возрастающего давления), как это имеет место, например, в диффузорах, жидкость иногда отстает от стенки и образует обратный ток, хотя никаких острых краев, выступающих углов или других особенностей поверхности не наблюдается (рис. 9). На основании теории Прандтля мы можем следующим образом объяснить это явление. Пусть жидкость движется слева направо в области растущего по направлению ее движения давления, т. е. в области за точкой минимума давления M ; тогда равнодействующая сил давления будет действовать справа налево и, очевидно, тормозить движущуюся

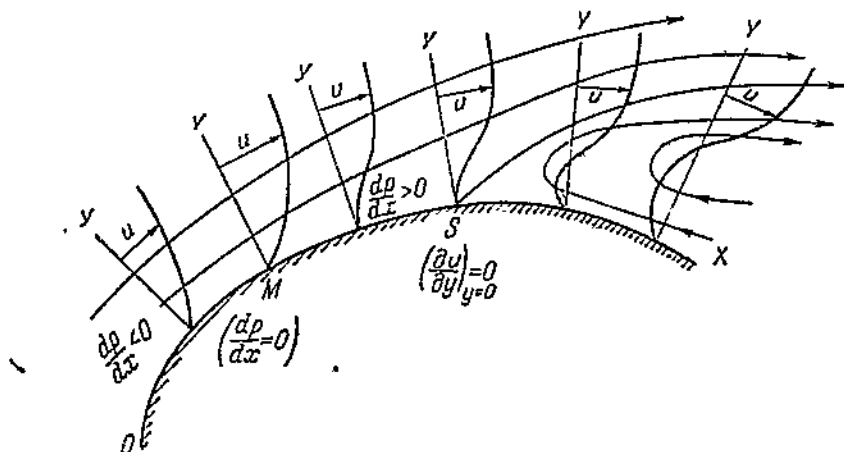


Рис. 9.

жидкость. По теории Прандтля, давление поперек слоя одинаково как вдалеке, так и вблизи стенки, где скорости очень малы; наиболее близко расположенные к стенке частицы жидкости затормозятся раньше, чем более удаленные, и на некотором расстоянии вниз по потоку от точки M частицы остановятся и даже, под действием обратного перепада давлений, начиная с известного места, начнут двигаться вспять, более же удаленные частицы, увлекаемые внешним потоком, будут продолжать двигаться слева направо, создавая отрыв пограничного слоя с характерным обратным подсосом жидкости. Такова качественная картина явления; задача теории — количественно определить расположение места отрыва в зависимости от заданного закона перепада давления на исследуемом теле или в канале.

Мы покажем в следующей главе решение этой задачи, а сейчас остановимся лишь на некоторых общих свойствах явления отрыва.

Как видно из схемы рис. 9, на стенке вблизи места отрыва пограничного слоя производная скорости по нормали $-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y=0$ меняет знак: это означает, что в точке отрыва $S(x=x_S)$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}^{x=x_S} = 0. \quad (2.8)$$

Равенство (2.8) можно принять за основное уравнение для определения абсциссы точки отрыва. Если задача о распределении скоростей в пограничном слое решена, то не составляет уже никакого труда найти точку отрыва по (2.8). Пользуясь этим равенством и общими уравнениями Прандтля, можно показать следующие общие свойства явления отрыва.

10. *Положение места отрыва ламинарного пограничного слоя на данном профиле не зависит от рейнольдсова числа.* Для доказательства этого важного свойства предположим, что мы решили безразмерную систему (2.7), причем ограничимся для простоты стационарным случаем. Будем иметь:

$$u = f(x, y),$$

где функция $f(x, y)$ от R_0 не зависит и, следовательно, безразмерная абсцисса x_S по (2.8) определится из уравнения:

$$f'_y(x_S, 0) = 0$$

и будет в размерном виде выглядеть так:

$$x_S = X_0 \cdot \text{число (не зависящее от } R_0),$$

что и требовалось доказать. Так например, на круглом цилиндре отношение x_S к X_0 , равному радиусу цилиндра, определит угол отрыва α_S , и этот угол не должен зависеть от рейнольдсова числа, т. е. от размеров цилиндра, скорости набегающей жидкости и физических свойств жидкости. Опыт хорошо подтверждает факт независимости места отрыва от R_0 ; наблюдающиеся отклонения при так называемом „кризисе“ объясняются переходом ламинарного слоя в турбулентный и отнюдь не опровергают только-что доказанного. На этом подробнее остановимся в дальнейшем.

20. *Угол между направлением срывающегося слоя и касательной к поверхности в точке отрыва обратно пропорционален корню квадратному из рейнольдсова числа, т. е. очень мал.*

Возьмем какую-нибудь линию тока в пограничном слое обтекаемого тела и пусть ее уравнение в размерных величинах будет

$$\psi(x, y) = C;$$

тангенс угла наклона касательной к этой линии тока по отношению к оси абсцисс будет равен:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{v}{u} \quad (u \text{ и } v \text{ — размерные}).$$

Если взять ту линию тока, которая идет по поверхности тела, то мы, вообще говоря, получим сначала неопределенность типа нуль, деленный на нуль, и после раскрытия все же получим нуль, как это видно из последовательности равенств:

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{v}{u} \right)_{y=0} = \frac{0}{0} = \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \right)_{y=0} = - \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \right)_{y=0} = 0.$$

Иное получится в точке отрыва, где линия тока разветвляется:

$$\operatorname{tg} \theta_s = - \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \right)_{\substack{x=x_S \\ y=0}} = \frac{0}{0} = - \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right)_{\substack{x=x_S \\ y=0}}. \quad (2.9)$$

Как легко сообразить, при наличии градиента давлений, а это необходимое условие отрыва, — ни числитель, ни знаменатель в нуль не обращаются, и правая часть имеет простой физический смысл:

$$\operatorname{tg} \theta_s = - \left(\frac{\frac{d\tau_0}{dx}}{\frac{dp}{dx}} \right)_{x=x_S}, \quad \tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (2.10)$$

Переходя в правой части (2.9) к безразмерным величинам, получим (сохраняя те же обозначения и для безразмерных величин):

$$\operatorname{tg} \theta_s = - \frac{U_0 Y_0^2}{U_0 X_0 Y_0} \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right)_{\substack{x=x_S \\ y=0}} = \frac{\text{число}}{\sqrt{R_0}}, \quad (2.11)$$

что и доказывает наше основное утверждение; при больших значениях рейнольдсовых чисел, при которых только и имеет место вся теория пограничного слоя, угол θ_s крайне мал и тангенс угла может быть заменен значением самого угла. Мы не станем здесь специально приводить фотографий спектров отрыва, на которых отчетливо видно, насколько мал угол, под которым происходит отрыв. Рекомендуем читателю просмотреть соответствующие фотографии Титъенса, помещенные в конце известного курса лекций Прандтля.

§ 3. Основные направления в развитии теории пограничного слоя. Асимптотический слой и слой конечной толщины. Метод Кармана-Польгаузена

Уравнения Прандтля теории пограничного слоя представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных; поэтому, вопрос о методах решения их составил предмет многочисленных исследований. Ранее всех Блязиус¹⁾ в своей большой классической работе дал метод представления решений уравнений Прандтля в виде степенного ряда по абсциссе x и применил этот метод к расчету пластинки и круглого цилиндра. Затем Хименц²⁾ исправил решение Блязиуса для цилиндра, показав влияние отрыва пограничного слоя на распределение давлений во внешнем потоке. Больтце³⁾ применил теорию Прандтля к телам вращения. В этих работах, как и многих последующих, — мы в дальнейшем обратимся к изложению некоторых из них — даются непосредственные решения прандтлевских уравнений. Значительная сложность этих методов заставила исследователей искать более простых путей, которые могли бы дать легкие оперативные приемы. Интересным шагом в этом направлении явился выход в свет работы Кармана⁴⁾ и тесно связанной с нею работы Польгаузена⁵⁾. В этих работах, взамен безграничного слоя, удовлетворяющего асимптотическим граничным условиям (1.3'), или как в дальнейшем будем иногда говорить, асимптотического слоя, вводится понятие пограничного слоя конечной толщины, как некоторой области определенной толщины $\delta(x, t)$, обладающей тем свойством, что внутри нее сосредоточено все влияние вязкости, а на границе ее $y = \delta(x, t)$ скорость в точности (а не асимптотически) равна скорости внешнего, невозмущенного вязкостью, потока. С точки зрения теории Прандтля (и вообще теории вязкой жидкости) влияние вязкости сказывается в безграничной области, поэтому некоторым элементом, связывающим теорию асимптотического слоя и слоя конечной толщины, может служить определение толщины слоя $\delta(x, t)$, как такого расстояния от стенки, на котором скорость жидкости $u(x, y, t)$ становится весьма близкой к скорости внешнего потока $U(x, t)$, например,

$$\text{при } y = \delta(x, t) \quad u(x, y, t) = (1 - \varepsilon) U(x, t),$$

где ε — заданная наперед, по нашему желанию, малая величина (часто принимают $\varepsilon = 0,005$). В силу асимптотического характера перехода скорости частиц пограничного слоя в скорость внешнего потока такое

¹⁾ H. Blasius. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 56 (1908) S. 1—37.

²⁾ Hiemenz. Die Grenzschicht an einem in der gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Inaugural Dissertation. Göttingen, 1911.

³⁾ E. Boltze. Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Göttingen, 1908.

⁴⁾ Th. v. Kármán. Über laminare und turbulente Reibung. Zeitschrift für Angew. Math. und Mechanik, Bd. 1, 1921.

⁵⁾ K. Pohlhausen. Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichungen der laminaren Grenzschicht. Ibid. Настоящая и предыдущая статьи перепечатаны в Abhandlungen aus dem Aerodyn. Institut. Aachen, H. 1.

определение толщины слоя весьма условно, так как большим изменениям толщины соответствуют весьма малые изменения скорости. До последнего времени теория слоя конечной толщины служит рабочей теорией в большинстве практических расчетов трения, особенно при исследованиях турбулентных пограничных слоев, где эта теория вообще является единственной. Если толщину пограничного слоя измеряют экспериментальным путем, то роль параметра δ играет чувствительность измерителя скорости, или взятая наперед величина процента допустимого отклонения. Опасность того факта, что измеряемая толщина пограничного слоя как будто не существует, как нечто реальное, а растет с ростом чувствительности прибора, заставляет

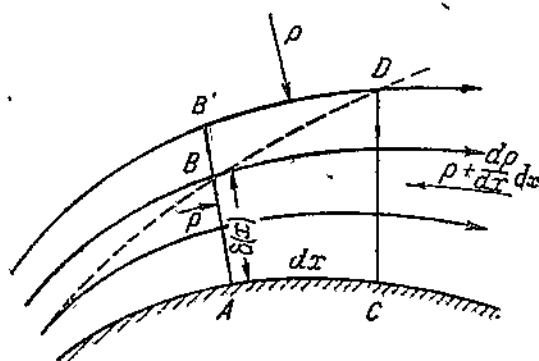


Рис. 10.

переходить к рассмотрению некоторых других, также условных „толщин“ (вытеснения и импульсов), о которых речь впереди.

Расчет пограничного слоя по методу Кармана-Польгаузена основан на следующем.

Рассмотрим общий случай нестационарного плоского обтекания тела и пусть (рис. 10) AB и CD — два смежных сечения конечного пограничного

слоя, расположенных друг от друга на расстоянии dx . Не будем смешивать линий тока движущейся жидкости (сплошные линии на рисунке) с линией границы пограничного слоя (пунктирная линия) и выделим отрезок трубки тока $AB'DC$, частью ($ABDC$) состоящий из жидкости пограничного слоя, т. е. возмущенной вязкостью, и частью ($BB'D$) находящийся во внешнем потоке. Сохраняя обычные обозначения, применим теорему количеств движения к выделенному отрезку трубки тока $AB'CD$ в проекции на продольное направление, причем за независимую от времени контрольную поверхность или, в случае плоской задачи, контрольный контур, примем как раз контур $AB'DC$. Заметим сразу, что разность между сечением трубки тока $\overline{AB'} = h$ и сечением слоя $\overline{AB} = \delta$ есть малая величина того же порядка, что и dx ; в самом деле, из условия несжимаемости жидкости имеем

$$\int_A^B u dy + \overline{BB'} \cdot U = \int_A^B u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_A^B u dy \cdot dx,$$

или

$$\overline{BB'} = h - \delta = \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy \cdot dx. \quad (*)$$

Составим теперь производную по времени от количества движения жидкости в выделенном объеме. Локальное изменение за счет нестационарности будет в силу независимости от времени контрольной поверхности и равенства (*) иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u dy \cdot dx = \int_0^h \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy \cdot dx = \int_0^h \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy \cdot dx + \text{малая 2-го порядка.}$$

Конвективное изменение за счет притока жидкости через сечение $\overline{AB'}$ и ухода через CD также легко подсчитать. Через сечение AB входит количество движения $\int_0^h \rho u^2 dy$, через отрезок $\overline{BB'}$ — количество движения

$\overline{BB'} \cdot \rho U^2$ или по (*) $U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy \cdot dx$ и, наконец, через сечение $\overline{CD}$ —

количество движения $\int_0^h \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \int_0^h \rho u^2 dy \cdot dx$; очевидно, что через

твердую стенку $\overline{AC}$ и отрезок линии тока $B'D$ никакое количество движения не входит и не выходит. Полная производная по времени от проекции на продольную ось количества движения жидкости в рассмотренном объеме отрезка трубки тока будет, с точностью до малых порядка выше первого, равна:

$$\begin{aligned} \int_0^h \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy \cdot dx + \int_0^h \rho u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u^2 dy \cdot dx - \int_0^h \rho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy \cdot dx = \\ = \left(\int_0^h \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy \right) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Эту производную мы должны приравнять проекции главного вектора внешних сил на то же продольное направление. Если отвлечься от объемных сил, то эта проекция сведется к проекции силы трения на стенке (на внешней границе слоя $B'D$ трения нет!), равной $-\tau_0 dx$, и сумме продольных проекций сил давлений на стороны $\overline{AB'}$, $\overline{B'D}$ и $\overline{CD}$, т. е. к сумме:

$$p \cdot \overline{AB} + p \cdot \overline{BB'} + p \cdot \text{пр}_y \overline{B'D} - (p + dp) \overline{CD},$$

равной по уравнению (*) и по очевидному равенству

$$\text{пр}_y \overline{B'D} = dh,$$

следующему выражению (с точностью до малых величин 2-го порядка):

$$p\delta + p(h - \delta) + p dh - (p + dp)(h + dh) = -h dp = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Итак, проекция главного вектора внешних сил равна

$$-\delta \frac{dp}{dx} dx - \tau_0 dx. \quad (3.2)$$

Приравняв (3.2) выражению (3.1), после сокращения на dx найдем следующее уравнение:

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0, \quad (3.3)$$

обычно называемое интегральным условием Кармана. В выводе Кармана, приведенном в вышецитированной работе, относящейся к 1921 г., допущена неточность, а именно: первый член равенства (3.3)

написан в виде $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta \rho u dy$; на эту неточность указал В. Толмие¹⁾.

Интегральное условие Кармана можно было бы получить и непосредственным интегрированием уравнения Прандтля. Проще всего это сделать, проинтегрировав обе части уравнения Прандтля (1.3) поперек слоя в пределах от $y=0$ до $y=\delta$, где δ — толщина пограничного слоя; тогда получим:

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \int_0^\delta \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right\}. \quad (3.4)$$

Последний интеграл в левой части уравнения интегрированием по частям может быть преобразован к виду (используем уравнение неразрывности):

$$\int_0^\delta \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy = [\rho v u]_0^\delta - \int_0^\delta \rho u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \rho \cdot (v)_{y=\delta} \cdot U + \int_0^\delta \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

причем в силу уравнения неразрывности:

$$(v)_{y=\delta} = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

При этом левая часть уравнения (3.4) может быть переписана так:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \int_0^\delta \rho \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy - U \int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial x} dy &= \int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - \\ - \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy + \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} &= \int_0^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy. \end{aligned}$$

¹⁾ См. W. Tollmien, Grenzschichttheorie, S. 283, Handb. der Experimentalphysik, Bd. IV, 1 Leipzig 1931. Другой вывод, основанный на применении теоремы количеств движения к элементу пограничного слоя, а не трубки тока, принадлежит Н. Е. Кочину. См. Кибель, Кочин, Розе, loc. cit., ч. II, стр. 401

Замечая, что трение $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ на внешней границе слоя равно нулю, и обозначая трение на стенке $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ через τ_0 , получим по (3.4) вновь уравнение Кармана (3.3).

Интегральное условие Кармана в случае стационарного слоя может быть представлено еще и в другом виде, удобном для различных приложений. Для вывода этой формы уравнения перепишем первое уравнение Прандтля в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = UU' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.5)$$

тождественном с обычным в силу уравнения несжимаемости. Умножим теперь обе части уравнения несжимаемости на U и перепишем его так:

$$\frac{\partial}{\partial x} (Uu) + \frac{\partial}{\partial y} (Uv) - uU' = 0. \quad (3.6)$$

Вычитая почленно из уравнения (3.6) обе части уравнения (3.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U-u)] + (U-u)U' = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

или, что все равно

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ U^2 \left[\frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} [v(U-u)] + UU' \left(1 - \frac{u}{U} \right) = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Выполняя дифференцирование в первой скобке, будем иметь:

$$U^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \right] + 2UU' \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) + \frac{\partial}{\partial y} [v(U-u)] + + UU' \left(1 - \frac{u}{U} \right) = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.7)$$

Беря интеграл от обеих частей этого уравнения по переменной y в пределах от 0 до δ , получим:

$$\begin{aligned} U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy - U^2 \left[\frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \right]_{y=\delta} \cdot \frac{d\delta}{dx} + \\ + 2UU' \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy + [v(U-u)]_{y=0}^{y=\delta} + UU' \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \\ = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\rho}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, подстановки обращаются в нуль и мы, деля еще обе части уравнения на U^2 , окончательно получим искомое уравнение в виде

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}, \quad (3.8)$$

где введены обозначения

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (3.9)$$

Величины δ^* и δ^{**} имеют размерность длины; эти величины являются характерными длинами для пограничного слоя, их принято именовать так: δ^* — „толщина вытеснения“, δ^{**} — „толщина потери импульса“. Происхождение этих наименований будет в дальнейшем выяснено.

Как видно из вывода, мы могли прийти к тому же уравнению (3.8), интегрируя обе части уравнения (3.7) от 0 до ∞ и заменяя в выражениях (3.9) для δ^* и δ^{**} величину δ на ∞ . Таким образом уравнение (3.8) является общим уравнением теории пограничного слоя как асимптотического, так и конечной толщины; условные толщины δ^* и δ^{**} удобны для сравнения результатов обеих теорий.

Идея метода Кармана расчета пограничного слоя заключается в замене неизвестного профиля продольной скорости в пограничном слое некоторой полиномиальной кривой (интерполяцией), удовлетворяющей определенно выбранным граничным условиям на стенке и на внешней границе пограничного слоя. В зависимости от числа наперед поставленных граничных условий выбирается и степень многочлена. Единственной неизвестной при этом остается толщина пограничного слоя $\delta(x)$, которую можно определить из уравнения Кармана. Уравнение Кармана представляет собою в этом случае обыкновенное дифференциальное уравнение (нелинейное) относительно $\delta(x)$.

По своей идее метод Кармана очень напоминает широко применяемый в механике (в теории колебаний стержней) метод Релея, в котором также задаются, обычно, формой упругой линии стержня, ограниченной лишь условиями закрепления в опорах, и после этого подчиняют движение стержня некоторой интегральной теореме (энергии). Собственно говоря, обобщая метод Кармана, можно было бы, выбрав интерполяционный полином по граничным условиям, подчинить затем толщину пограничного слоя не теореме об изменении количества движения, выражением которой является интегральное условие Кармана, а, например, теореме об изменении энергии или какой-нибудь другой теореме. Об этом у нас еще будет речь впереди.

Условия на стенке сводятся к таким:

- 1) при $y=0$ $u=0$, $v=0$;
- 2) при $y=0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{UU'}{v}$.

Условие 2 сразу следует из основного прандтлевского уравнения при $y=0$, $u=0$, $v=0$.

Что касается условий на внешней границе пограничного слоя, то они таковы:

- 3) при $y=\delta$ $u=U$ (по определению понятия конечного слоя),
- 4) при $y=\delta$ $\frac{\partial u}{\partial y}=0$,
- 5) при $y=\delta$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Последние два условия пуждаются в некоторых пояснениях. Условие 4 говорит о малости поперечного градиента скорости вблизи внешней границы слоя по сравнению со значениями этого градиента внутри слоя и особенно у самой стенки.

Если мы находимся в области потока, где скорость на внешней границе пограничного слоя больше чем скорость на бесконечности (например, вблизи миделя цилиндра), то условие 4 выполняется в точности. В самом деле, от стенки, где скорость равна нулю до внешней границы пограничного слоя скорость возрастает; начиная с внешней границы слоя скорость убывает; таким образом на границе слоя поперечная производная скорости должна быть равна нулю. В тех же областях, где скорость внешнего потока на границе слоя меньше чем скорость на бесконечности, производная в нуль не обращается, но настолько мала по величине, что иногда даже практически границу пограничного слоя определяют не по условию 3, а по условию 4. Когда график скорости вычерчивается в определенном масштабе для расстояний от стенки (в хороших опытах отмечаются сотые миллиметра), то переход к внешнему потоку сразу бросается в глаза, благодаря исключительно малым уклонам кривой скоростей.

Если считать, что переход профиля скоростей в пограничном слое в профиль скоростей внешнего потока происходит непрерывно, то условие 5 сразу следует из прандтлевского уравнения и условия 4, так как на внешней границе справедливо уравнение Бернулли. Указанные условия 1—5 не единственные. Можно доказать дифференцированием уравнения Прандтля по y , с последующим приравниванием $y=0$, что имеется еще условие

$$6) \text{ при } y=0 \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

Некоторые авторы указывают, что можно было бы требовать равенства нулю старших производных на внешней границе в знак более тесного смыкания профилей скоростей пограничного слоя и внешнего потока; легкообразно что последние условия приведут к преуменьшению толщины пограничного слоя.

Покажем для сравнения применение обоих методов (асимптотического и конечного слоя) на простейшем случае пластинки в безграничном стационарном потоке, т. е. в случае отсутствия продольного градиента давления ($U = \text{const}$, $\frac{dp}{dx} = 0$); что касается обтекания криволинейных профилей, сопровождаемого наличием градиента давлений, то этот вопрос излагается в одной из следующих глав.

§ 4. Расчет трения пластинки по теории асимптотического слоя

Применим уравнения пограничного слоя в безразмерной форме (2.7) для решения задачи о распределении скоростей и трения в стационарном пограничном слое на пластинке длины L , обтекаемой потоком

постоянной скорости U_0 на бесконечности, параллельным плоскости пластинки (рис. 11). Уравнения в безразмерном виде будут:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

при граничных условиях:

$$\text{при } 0 \leq x \leq 1 \text{ и } y = 0, u = v = 0, \text{ при } y = \infty, u = 1, v = 0. \quad (4.1')$$

Здесь безразмерные координаты x, y связаны с размерными x_1, y_1 равенствами:

$$x_1 = x \cdot X_0 = xL, y_1 = y \cdot Y_0 = y \cdot \sqrt{\frac{U_0}{\nu X_0}} = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu L}}. \quad (4.2)$$

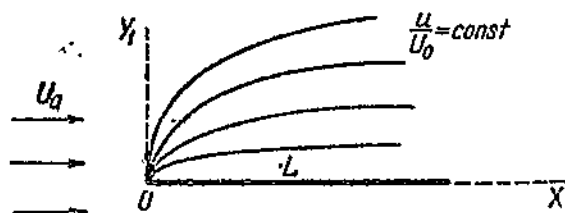


Рис. 11.

Решение задачи при граничных условиях (4.1') представляет значительные трудности. Мы удовольствуемся упрощенной задачей Блязюса¹⁾.

Сделаем предположение о независимости продольной скорости в данной точке слоя от длины пла-

стинки. Это означает, что, если мы имеем установившийся поток на тонкой пластинке данной длины, то от прибавления к кормовой части дополнительной пластинки продольное движение на основной пластинке не изменится. Такое предположение можно сделать, конечно, только тогда, когда внешний поток однороден по всей длине пластины ($U_0 = \text{const}$) и пластина достаточно длинна. Математически наше предположение может быть выражено так:

$$\frac{du}{dX_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X_0} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X_0} = 0,$$

а это по (4.1) эквивалентно уравнению:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

откуда сразу следует, что решение уравнения (2.7) должно иметь вид:

$$u = u\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \quad (4.3)$$

— чрезвычайно важный результат, сводящий функцию двух переменных к функции одного комплекса этих переменных

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{x}} = y_1 \sqrt{\frac{U_0}{\nu \cdot x_1}}.$$

¹⁾ H. Blasius. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56 (1908).

Из равенства (4.3) наперед также следует, что изотаксами (кривыми одинаковой скорости) в пограничном слое будут служить параболы:

$$y_1 = \text{const} \sqrt{\frac{vx_1}{U_0}} \quad \text{или} \quad y = \text{const} \sqrt{x}. \quad (4.4)$$

Перейдем к определению вида функции (4.3). Для этого надо решить основную систему дифференциальных уравнений пограничного слоя (4.1), преобразованную к переменной η и с упрощенными пограничными условиями:

$$\text{при } \eta = 0 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \text{при } \eta = \infty, \quad u = 1.$$

Введем для упрощения безразмерную функцию тока $\psi(x, y)$, которая, очевидно, существует в силу безразмерного уравнения неразрывности.

Полагая

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(x, y) = f(\eta),$$

найдем

$$\psi = \int_0^y f(\eta) dy = \sqrt{x} \int_0^\eta f(\eta) d\eta = \sqrt{x} \cdot \varphi(\eta). \quad (4.5)$$

Теперь можно выразить все величины, входящие в первое дифференциальное уравнение (4.1), через функцию $\varphi(\eta)$

$$u = \varphi'(\eta), \quad v = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\eta\varphi' - \varphi) \quad \text{и т. д.}, \quad (4.6)$$

(штрих обозначает производную по η) и, после простых упрощений, получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\varphi\varphi'' + 2\varphi''' = 0. \quad (4.7)$$

Граничные условия для этого уравнения по (4.5) и (4.6) будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \eta = 0 \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \\ \text{при } \eta = \infty \quad \varphi' = 1. \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

Уравнение (4.7) может быть решено раз навсегда независимо от частных условий обтекания пластинки. Блязиус решал его разложением в степенной ряд относительно η , но так как последнее из условий (4.8) степенным рядом удовлетворено не может быть, то для больших η ему пришлось строить асимптотическое решение последовательными приближениями и затем смыкать его со степенным рядом для меньших значений η . Мы не будем приводить деталей решения Блязиуса¹⁾ отсылая интересующихся за подробностями к первоисточнику или к курсам гидродинамики, где этот вопрос изложен²⁾.

¹⁾ H. Blasius, loc. cit.

²⁾ Aerodynamic Theory ed. by W. Dugand, Vol. III, p. 85—87, Кибель, Кочин, Розе, loc. cit. ч. II, 1937, стр. 407—414.

Гораздо проще уравнения типа (4.7) решаются простыми численными приемами, столь широко распространенными в современной прикладной математике.

Если бы мы знали значения функции φ и первых двух производных ее при $\eta=0$, то, согласно уравнению (4.7), мы могли бы найти и третью производную при $\eta=0$, а зная значения этих производных, найти последовательно соответствующие значения функции и ее производных для смежного значения η и т. д. Идя таким путем от точки к точке, например, через две десятых, мы с достаточной степенью точности смогли бы определить неизвестную функцию. В настоящей задаче вопрос усложняется тем, что неизвестно значение производной $\varphi'(\eta)$ при $\eta=0$, а известно, что безразмерная скорость асимптотически стремится к единице, т. е.

$$\varphi'(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty.$$

Указанные вычисления были произведены впервые Тёпфером¹⁾. Задавая некоторым произвольным значениям $\varphi''(\eta)$ при $\eta=0$ и проделав последовательные, от точки к точке, вычисления, получим кривую $\varphi'(\eta)$, стремящуюся к асимптоте, расположенной не на расстоянии единицы от оси абсцисс, а на некотором другом расстоянии; изменяя после этого начальное значение $\varphi''(0)$ так, чтобы асимптота стала на нужное место, получим и требуемое значение $\varphi''(0)$ и правильную кривую для всей функции. Таким путем Тёпфер получил следующую таблицу значений функции $\varphi'(\eta) = \frac{u_1}{U_0}$ (таблица 1).

ТАБЛИЦА 1

η	$\varphi'(\eta)$	η	$\varphi'(\eta)$	η	$\varphi'(\eta)$	η	$\varphi'(\eta)$
0	0	1,6	0,5168	3,2	0,8761	4,8	0,9878
0,2	0,0664	1,8	0,5778	3,4	0,9018	5,0	0,9916
0,4	0,1328	2,0	0,6293	3,6	0,9233	5,2	0,9943
0,6	0,1990	2,2	0,6818	3,8	0,9411	5,4	0,9962
0,8	0,2647	2,4	0,7290	4,0	0,9555	5,6	0,9975
1,0	0,3298	2,6	0,7725	4,2	0,9670	5,8	0,9984
1,2	0,3938	2,8	0,8115	4,4	0,9759	6,0	0,9990
1,4	0,4563	3,0	0,8461	4,6	0,9827		

Пользуясь этой таблицей или соответствующей ей кривой (рис. 12), можно ответить на все стоящие перед нами вопросы. Прежде всего найдем трение на единицу длины (единица в поперечном направлении, как всегда в плоском потоке, подразумевается) пластины с одной стороны

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right)_{y_1=0} = \mu \sqrt{\frac{U_0^3}{\nu x_1}} \cdot \varphi''(0).$$

¹⁾ C. Töpfer. Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 60, 1912, p. 397.

По таблице приближенно находим

$$\varphi''(0) \approx 0,0664 : 0,2 = 0,332$$

и, следовательно,

$$\tau_0 = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x_1}}. \quad (4.9)$$

Полное сопротивление пластинки длины L , омываемой с двух сторон, будет

$$W = 2 \int_0^L \tau_0 dx_1 = 1,328 \sqrt{\mu \rho L U_0^3}; \quad (4.10)$$

напомним, что это сопротивление рассчитано на единицу ширины пластинки в поперечном (по размаху) направлении.

Если ввести, как обычно, коэффициент сопротивления C_f по формуле:

$$W = C_f S \frac{\rho U_0^3}{2},$$

где S — смоченная поверхность пластины, то для коэффициента сопротивления получим выражение:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}} = \frac{1,328}{\sqrt{R_L}}. \quad (4.11)$$

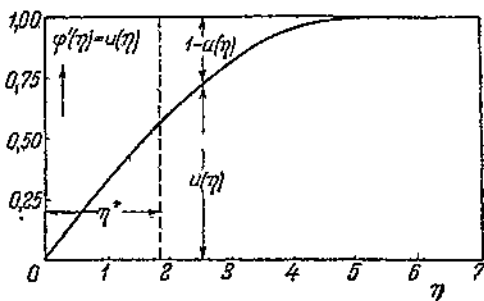


Рис. 12.

Таким образом задача об определении сопротивления пластины, обтекаемой потоком вязкой жидкости при больших R , разрешена. Важно отметить, что сопротивление оказывается пропорциональным полуторной степени скорости. Формулы (4.9), (4.10) и (4.11) обычно называют формулами Блязиуса.

Заметим следующие особенности задачи Блязиуса. Значение $\eta = \infty$ может быть достигнуто не только при $y = \infty$, но и при $x = 0$, а y — конечном. Следовательно на всей оси OY_1 , кроме точки O , размерные скорости равны U_0 . Физически это можно себе представить так, как будто пластинка не оказывает обратного влияния на поток слева от оси OY_1 . В точке O скорость претерпевает скачок от значения U_0 до нуля. Далее, при $\eta = 0$, $u = 0$, т. е. каково бы ни было x при $y = 0$, скорость равна нулю; полученное решение дает таким образом при $x > L$, т. е. в следу пластинки, на оси продольную скорость, равную нулю, что является прямым следствием принятых нами упрощенных граничных условий и, конечно, не соответствует действительности. На самом деле, перед пластинкой на оси OX скорости непрерывно убывают от значения U_0 до нуля, а позади пластинки скорости вновь постепенно выравниваются от нуля на кромке до U_0 на бесконечности. Такие искажения профилей скоростей приводят и к искаженной картине

распределения трения. Как видно из формулы (4.9), напряжение трения на передней кромке пластины равно бесконечности, на самом же деле оно велико, но не бесконечно. Точно также на задней кромке оно по (4.9) не равно нулю, хотя при больших L и мало. Если длина пластинки велика, то такие краевые искажения слабо отразятся на суммарном коэффициенте трения C_f . Для пластинок малой длины эти искажения будут существенны. К сожалению, дать точное решение задачи о пластинке конечной длины вместо задачи Блязиуса не представляется возможным.

Мы ранее уже указали, что теории асимптотического слоя чуждо представление о толщине пограничного слоя. Но для дальнейшего полезно дать хотя бы условную оценку толщины пограничного слоя. Наиболее строгим методом такой оценки является введенное Прандтлем понятие „толщины вытеснения“ (*Verdrängungsdicke*) δ^* , равной

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u_1}{U_0}\right) dy_1 \quad (4.12)$$

и имеющей следующий физический смысл. Перепишем равенство (4.12) так:

$$U_0 \delta^* = \int_0^{\infty} (U_0 - u_1) dy_1.$$

Справа стоит уменьшение расхода жидкости через бесконечное сечение, нормальное к пластине, за счет вязкого торможения пластиной. Эта кажущаяся потеря жидкости, конечно, компенсируется вздутием линий тока и появлением поперечных скоростей, которые при идеальной жидкости отсутствовали бы. Расход жидкости через сечение слоя, равное „толщине вытеснения“, при отсутствии торможения как раз был бы равен уменьшению расхода сквозь бесконечное, нормальное к пластине сечение, при действительном движении вязкой жидкости в пограничном слое.

Толщину „вытеснения“ можно также связать с поперечными скоростями v_1 . Проинтегрировав для этого обе части (4.12) по x_1 , получим:

$$\frac{d\delta^*}{dx_1} = -\frac{1}{U_0} \int_0^{\infty} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dy_1 = \frac{1}{U_0} \int_0^{\infty} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} dy_1 = \frac{1}{U_0} (v_1)_{\infty},$$

откуда для любой точки, находящейся на расстоянии x_1 от начала пластины, в предположении $\delta^*(0) = 0$, найдем

$$U_0 \delta^*(x_1) = \int_0^{x_1} (v_1)_{\infty} dx_1. \quad (4.13)$$

Равенство (4.13) подтверждает ранее высказанное соображение о том, что уменьшение расхода в продольном направлении через бес-

конечное нормальное к пластине сечение в точности равно поперечному расходу, появившемуся за счет скоростей, перпендикулярных к пластине.

Наконец, мы еще можем трактовать толщину „вытеснения“ просто как отклонение линии тока внешнего потока от той параллельной пластине прямой, которая служила бы линией тока в случае жидкости без трения. В самом деле, рассмотрим (рис. 13) некоторую линию

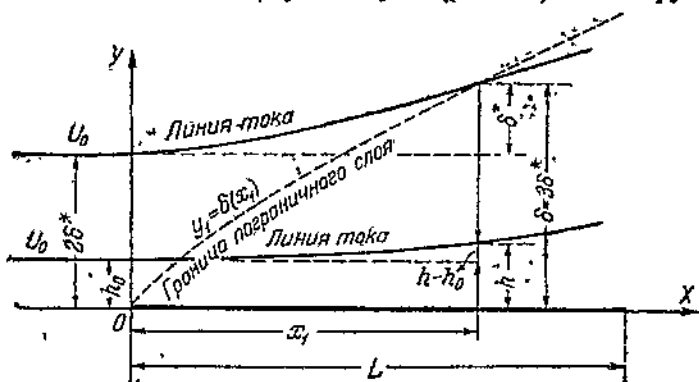


Рис. 13.

тока, отстоящую от пластины во входном сечении на расстоянии h_0 . На расстоянии x_1 вследствие торможения линия тока отойдет от пластины на расстояние $h > h_0$; соответствующее смещение линии тока $h - h_0$ может быть определено из условия постоянства расхода через сечение трубки тока

$$U_0 h_0 = \int_0^h u_1 dy_1.$$

и окажется равным:

$$h - h_0 = \frac{1}{U_0} \int_0^h (U_0 - u_1) dy_1.$$

Отсюда следует, что толщина „вытеснения“ δ^* равна

$$\delta^* = \lim_{h \rightarrow \infty} (h - h_0) \quad (4.14)$$

т. е. смещению линии тока внешнего потока в сечении, соответствующем данной точке на пластине. Мы подробно проанализировали понятие толщины „вытеснения“, так как в дальнейшем к нему и еще некоторым аналогичным понятиям принуждены будем неоднократно возвращаться.

Для рассмотренного нами случая обтекания пластины по Блязиусу величина δ^* может быть легко вычислена. Для этого проще всего найти соответствующую безразмерную величину η^* , равную

$$\eta^* = \frac{\delta^*}{Y_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_1}{L}}} = \delta^* \sqrt{\frac{U_0}{\nu x_1}}.$$

По определению (4.12) получим:

$$\eta^* = \int_0^{\infty} (1 - u) d\eta. \quad (4.15)$$

Обращаясь к рис. 12, видим, что η^* может быть определено как ширина полосы, эквивалентной по площади интегралу в правой части (4.15). Вычисления показывают, что $\eta^* = 1,73$, т. е. толщина „вытеснения“ равна

$$\delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}. \quad (4.16)$$

Наряду с величиной δ^* , определяющей смещение линий тока, мы можем рассмотреть приближенную характеристику толщины пограничного слоя δ , как такое значение y , при котором продольная скорость составляет, например, 99% от скорости U_0 на бесконечности. По таблице видно, что это приближенно будет иметь место при

$$\delta = 3\delta^* = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}. \quad (4.17)$$

Из предыдущего следует, что на расстоянии $\delta = 3\delta^*$ линия тока приходящая слева (рис. 13) в точку $y = \delta$, т. е. на условную границу пограничного слоя, отклоняется на расстояние $\delta^* = \frac{1}{3}\delta$ от той прямой, параллельной оси OX (на рисунке пунктир), которая служила бы линией тока при отсутствии вязкого торможения. Мы видим, что хотя пластинка не имеет поперечной толщины, все же из-за вязкости внешний идеальный прямолинейный поток оказывается искаженным, „вытесненным“. В этом потоке, строго говоря, уже нет постоянной скорости и давления. Таким образом, наряду с идеей Прандтля об одностороннем влиянии внешнего потока на течение в пограничном слое (задание $\frac{dp}{dx}$ по идеальному обтеканию), необходимо считаться и с обратным влиянием пограничного слоя на внешний поток. В случае продольного обтекания пластинки это обратное влияние невелико; в случае же обтекания тел, имеющих поперечную толщину, и особенно в случае плохо обтекаемых тел (с отрывающимся слоем) обратное влияние в корне меняет картину обтекания и распределения давлений. Как мы далее увидим, при обтекании круглого цилиндра за счет влияния пограничного слоя точка минимума давления смещается с 90° от лба до 70° , изменяется величина минимума давления.

Пользуясь введенными понятиями δ^* и δ , можно теперь иначе проинтерпретировать лежащее в основе задачи Блязиуса предположение о том, что скорости в пограничном слое определяются в функции от отношения $\frac{y}{\sqrt{x}}$. В самом деле, в размерных координатах и скоростях это обозначает, что продольная скорость u_1 может быть представлена так:

$$\frac{u_1}{U_0} = f\left(\frac{y_1}{\delta^*}\right) = f\left(3\frac{y_1}{\delta}\right), \quad (4.18)$$

иными словами, что при точках с равными отношениями $\frac{y_1}{\delta^*}$ или $\frac{y_1}{\delta}$ скорости равны между собой, а это в свою очередь говорит о подобии профилей скоростей в нормальных к пластине сечениях потока.

В заключение приводим график распределения толщины „вытеснения“, условного пограничного слоя и напряжения трения (рис. 14). Толщина пограничного слоя и толщина „вытеснения“ представляются параболлами, график трения дается гиперболической кривой. Сравнение результатов асимптотической теории обтекания пластинки с экспериментом будет дано в следующем параграфе в связи с теорией слоя конечной толщины.

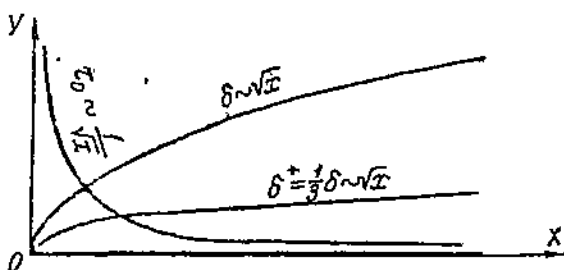


Рис. 14.

§ 5. Продольное обтекание пластинки с точки зрения теории пограничного слоя конечной толщины. Сравнение результатов теории с экспериментальными данными.

Перейдем к рассмотрению той же задачи о пластине с точки зрения теории слоя конечной толщины Кармана-Польгаузена. Согласно этой теории мы можем подобрать профиль скоростей, удовлетворяющий, в случае пластинки, граничным условиям (в дальнейшем координаты и скорости — размерны) при любых x :

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 \quad u &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \text{при } y=\delta \quad u &= U, \\ & \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

и, подставляя уравнение этого профиля скоростей в интегральное условие Кармана (3.3), составленное для случая стационарного слоя, будем определять толщину слоя, а уже затем поперечный градиент скорости на стенке и трение.

Польгаузен в ранее цитированной работе рассматривает несколько приближений, соответственно со степенью выбранного полинома для профиля скоростей. Рассмотрим эти приближения.

1. *Первое приближение.* Профиль скорости выбирается прямолинейным, удовлетворяющим условиям:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad \text{при } y=\delta, \quad u=U_0.$$

Соответствующая линейная зависимость будет иметь вид:

$$u = U_0 \frac{y}{\delta}.$$

Вычисляя интегралы, входящие в уравнение Кармана (3.3)

$$\int_0^{\delta} u \, dy = U_0 \delta \int_0^1 \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{2} U_0 \cdot \delta; \quad \int_0^{\delta} u^2 dy = U_0^2 \delta \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{3} U_0^2 \cdot \delta,$$

и подставляя их в это уравнение, получим следующее дифференциальное уравнение для определения $\delta(x)$:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = 6 \frac{\nu}{U_0}.$$

Отсюда, предполагая, что слой начинается с передней кромки пластинки ($x=0$, $\delta=0$), т. е. так же, как и в задаче Блязгуса, найдем:

$$\delta = \sqrt{\frac{12\nu x}{U_0}} = 3,47 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}},$$

а скорость будет равна

$$u = \sqrt{\frac{U_0^3}{12\nu x}} \cdot y = \sqrt{\frac{U_0^3}{12\nu}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Зная скорость, легко найдем и напряжение трения на стенке:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0,289 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}}.$$

2. *Второе приближение.* В виду крайней простоты выкладок будем давать сводку результатов, опуская промежуточные вычисления. Принимая граничные условия:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad \text{при } y=\delta \text{ и } u=U_0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

получим профиль скорости:

$$u = U_0 \left[2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right].$$

Условие Кармана приводится к уравнению

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U_0},$$

имеющему интеграл (при прежнем условии $x=0$, $\delta=0$)

$$\delta = \sqrt{\frac{30\nu x}{U_0}} = 5,477 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}};$$

напряжение трения оказывается равным

$$\tau_0 = 0,365 \sqrt{\frac{\mu \rho \cdot U_0^3}{x}}.$$

3. *Третье приближение.* Граничные условия:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$$

$$\text{при } y=\delta \quad u=U_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

дают профиль скорости:

$$u = U_0 \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right],$$

толщину пограничного слоя:

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}},$$

и напряжения трение на стенке:

$$\tau_0 = 0,323 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}}.$$

4. Четвертое приближение. Граничные условия:

$$\text{при } y = 0 \quad u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{при } y = \delta \quad u = U_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

приводят к профилю:

$$u = U_0 \left[2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right];$$

толщина пограничного слоя будет равна:

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}},$$

напряжение трения на стенке:

$$\tau_0 = 0,343 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}}.$$

Польгаузен останавливается на этом четвертом приближении и для него вычисляет полное сопротивление пластинки длины L , омываемой жидкостью с двух сторон, приходящееся на единицу длины пластинки в поперечном к потоку направлении:

$$W = 2 \int_0^L \tau_0 dx = 1,372 \sqrt{\mu \rho L U_0^3},$$

или, если ввести квадратичный закон,

$$W = C_f \frac{\rho U_0^2}{2} L \cdot 1,$$

$$C_f = \frac{1,372}{\sqrt{R}}, \quad R = \frac{U_0 L}{\nu}.$$

Сравнивая эти результаты с ранее полученными формулами Блязуса, видим, что совпадение с ними приближений Польгаузена удовлетворительно.

Наибольший интерес представляет сходимость закона трения. Мы видим, что коэффициенты в формулах трения при последовательных

приближениях ложатся по обе стороны от соответствующего значения по Блязиусу и сходятся к этому значению; нельзя сказать того же про коэффициент в выражении толщины слоя, так как, например, во втором приближении он гораздо ближе к коэффициенту Блязиуса, чем в четвертом. Вообще вопрос о сходимости приближений пока еще математическому исследованию не поддается и никаких строгих соображений насчет выбора последовательности граничных условий нет.

Интересно отметить, что для подсчета трения на стенке учет значения третьей производной скорости на стенке $\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_0$, равной нулю, должно иметь большое значение. Действительно, было подсчитано следующее приближение, учитывающее третью производную на стенке, а именно, были приняты граничные условия (шестое приближение):

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$$

$$\text{при } y=\delta \quad u=U_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0;$$

тогда оказалось (читателя не затруднит воспроизвести выкладки):

$$u=U_0 \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + 6 \left(\frac{y}{\delta} \right)^5 - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]$$

$$\delta = 6,048 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$$

$$\tau_0 = 0,331 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}}.$$

Замечательно, что трение при этом получается лишь на 0,3% отличающимся от трения по Блязиусу. Отметим здесь, что так же как и по Блязиусу, в теории слоя конечной толщины напряжение трения меняется обратно пропорционально корню квадратному из расстояния от переднего края пластинки, толщина пограничного слоя — прямо пропорционально корню квадратному из того же расстояния (рис. 14). Полное сопротивление пропорционально полуторной степени скорости.

Эксперимент хорошо подтверждает теоретическое решение задачи. Бюргерс¹⁾ один из первых исследовал распределение скоростей в пограничном слое на стеклянной пластинке с острым краем, помещенной в аэродинамическую трубу. В качестве измерителя он использовал тепловой анемометр (накаленная платиновая нить, охлаждаемая потоком воздуха), проградуированный по трубке Прандтля. Не останавливаясь на подробностях опытов Бюргерса, укажем лишь, что в них не учитывалось тепловое влияние стенки на показания термоанемометра и, кроме того пластинка была помещена в аэродинамическую трубу с закрытой рабочей частью, причем индукция трубы

¹⁾ I. M. B. *Burgers*. The motion of a Fluid in the Boundary Layer along a Plane Smooth Surface. Proceedings of the First Intern. Congr. for Applied Mechanics, Delft, 1924; p. 113.

(перепад давлений вдоль по потоку) также не принималась во внимание. Эти недостатки объясняют некоторое расхождение результатов Бюргера с расчетами Блязиуса и Карман-Польгаузена.

Спустя, примерно, пять лет после первых опытов Бюргера (и его помощника Ван-дер-Хееге-Цайнена) появились весьма интересные опыты Ханзена.¹⁾

Ханзен измерял поле скоростей вблизи пластин из различного материала и при различном состоянии поверхности, причем помещал пластину в открытую струю воздуха; этим он добился отсутствия продольного градиента давления на пластине. В качестве измерителя скорости Ханзен принял стеклянные трубочки с вытянутыми носиками. После предварительных опытов и тарировок экспериментатор остановился на трубочке с внешним диаметром 0,35 мм и внутренним 0,21 мм (такие маленькие трубочки, обычно, называют микротрубочками Пито или микротрубочками полного напора); микротрубки меньшего диаметра приводили к необходимости слишком долгого ожидания установления мениска в микроманометре.

На рис. 15 приводим профили скоростей по опытам Ханзена в трех сечениях пограничного слоя на различных расстояниях от переднего края пластинки. Мы видим, что вблизи переднего края профиль скорости несколько отличается от кривой Блязиуса (на рисунке — сплошная кривая). Это отличие объясняется формой носика, который приходится делать из-за толщины пластины, чтобы избежать отрыва слоя в самом же начале. На рисунке показана форма носика пластины и размеры ее. Сечения, удаленные от переднего края, дают прекрасное совпадение теории с экспериментом. На рис. 16 приводим кривые напряжения трения на пластине, рассчитанного двояким способом: разысканием нормальной производной на стенке по профилям скорости (сплошная кривая) — дифференциальный метод — и посредством уравнения количеств движения или интегрального условия Кармана [см. также (7.14) настоящей главы] — интегральный метод (пунктир на рисунке).

Мы видим, что эксперимент Ханзена дает прекрасное совпадение

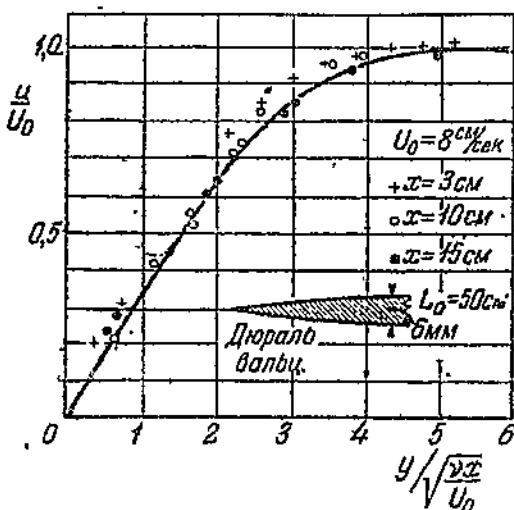


Рис. 15.

¹⁾ M. Hansen. Die Geschwindigkeitsverstellung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. ZAMM, Bd. 8, H. 3, 1928.

напряжения трения, рассчитанного двумя методами. Следует отметить, что непосредственная проверка величины местного трения по полному сопротивлению пластины, в случае ламинарного пограничного слоя, крайне затруднительна, так как мерить пришлось бы весьма малые силы сопротивления, а для этого необходимы аэродинамические весы очень большой чувствительности и точности. Косвенную проверку силы

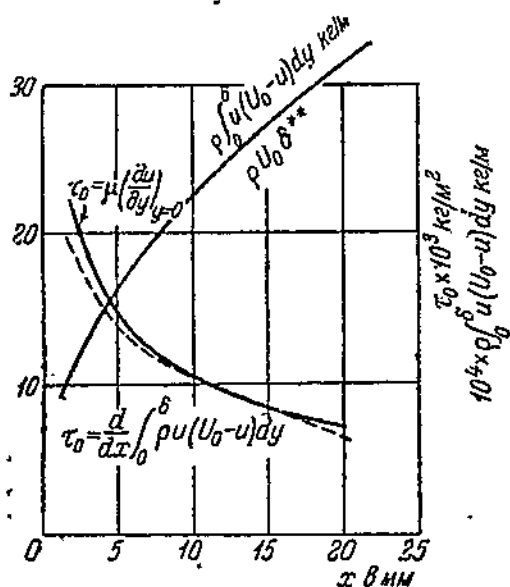


Рис. 16.

трения по методу импульсов производил также А. Фейдж¹⁾ в очень тонкой и интересной экспериментальной работе (для измерения профилей скорости в воде им применялся метод ультрамикроскопии, о котором будет сказано подробнее в следующем разделе). По опытам Фейджа для рейнولدсовых чисел от 14 000 до 200 000 коэффициент сопротивления пластинки получился почти на 6% выше коэффициента Блязюса.

В последние годы применение микротрубок для измерения скоростей в пограничном слое стало обычным в аэродинамических лабораториях. Так, в аэродинамической лаборатории Ленинградского индустриального института, а также в лабораториях ЦАГИ, с успехом применяются металлические микротрубки (изготовленные вытягиванием трубочек для шприца), внешний вид которых и расположение у поверхности показаны на рис. 17. С помощью таких микротрубок можно мерить скорости на весьма малых расстояниях (порядка нескольких сотых миллиметра) от стенки. Момент соприкосновения конца трубочки со стенкой регистрируется электрическим контактом, перемещения — особым микрокоординатником. Микротрубки пропускались сквозь стенку — этим путем уменьшаются колебания трубочек относительно пластины; Ханзен подводит трубочки извне и регистрировал момент соприкосновения со стенкой методом зеркального отображения трубочки в зеркальной поверхности пластины. Мы специально не занимались исследованием поля скоростей в плоском пограничном слое на пластине, но, попутно с другими результатами, получали неоднократно прекрасное совпадение с кривой Блязюса или кривой по четвертому приближению Кармана-Польгаузена. В настоящем курсе нет возможности останавливаться на экспериментальных подробностях.

Как показывают опыты многочисленных исследователей, начиная

¹⁾ A. Fage. Frictional Drag of Flat below the Critical Reynolds Number ARC, R & M, № 1580 (1934).

с некоторого сечения по x , профиль скоростей становится совершенно непохожим на профиль по Блязиусу. Это происходит потому, что, начиная с некоторого сечения, ламинарный пограничный слой становится неустойчивым и превращается в турбулентный. Все вопросы, связанные с переходом ламинарного слоя в турбулентный и со свойствами турбулентного пограничного слоя, рассматриваются в следующем разделе.

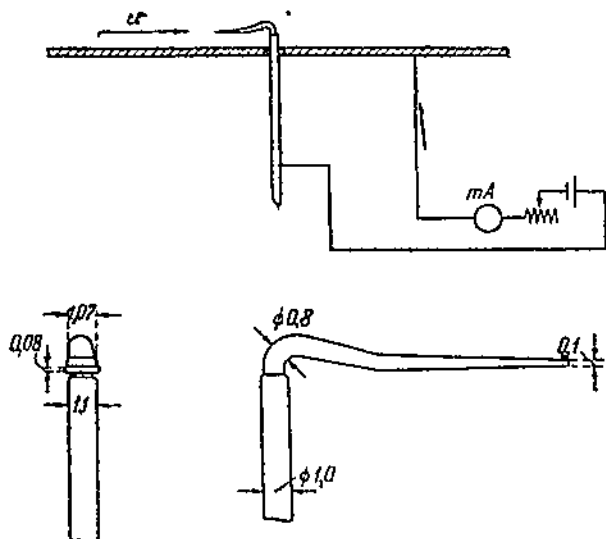


Рис. 17.

§ 6. Уравнения ламинарного пограничного слоя в форме Мизеса. Уравнение Кармана-Миллиkena. Метод Буссинеска-Бюргерса. Продольное обтекание пластинки. „Внешнее“ решение

В 1927 г. появилась работа Мизеса,¹⁾ в которой был дан новый вид дифференциальным уравнениям ламинарного пограничного слоя. Уравнение Мизеса не получило сначала применений, но в последнее время в связи с выходом в свет работы Кармана и Милликена²⁾ метод Мизеса получил интересное развитие и стал применяться в ряде работ.³⁾ Мы изложим его в настоящем параграфе вместе с видоизменением, предложенным Карманом и Милликеном, и покажем применение метода на случае обтекания пластины, ранее разобранным другими методами. Более сложные случаи мы разберем в следующих главах.

¹⁾ R. V. Mises. Bemerkungen zur Hydrodynamik, ZAMM, 7 (1927), S. 425.

²⁾ Th. V. Kármán and C. B. Millikan. On the theory of laminar boundary layers involving separation. NACA, Rep. № 504 (1934).

³⁾ Как указывает Л. Прандтль в своей последней работе (Zur Berechnung der Grenzschichten, ZAMM, Bd. 18, H. 1, 1938), уравнения, данные Мизесом в 1927 г., были Прандтлю известны еще в 1914 г., но не были им опубликованы, так что приоритет в этом вопросе принадлежит Мизесу.

Основная идея уравнения Мизеса заключается в переходе от производных по аргументам x и y в уравнениях Прандтля к производным вдоль линий тока и по направлениям, перпендикулярным к линиям тока.

Предположим, что воспользовавшись уравнениями линий тока ($\psi = \text{const}$ вдоль линии тока):

$$\psi(x, y) = \psi, \quad (6.1)$$

мы разрешили это уравнение относительно y ; исключим y из первого уравнения Прандтля, составленного для стационарного пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (6.2)$$

Для этого заметим, что, если dx и dy — проекции элемента линии тока, то

$$v = u \frac{dy}{dx}, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = u \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{u^2}{2} \right); \quad (6.3)$$

подчеркнем, что в последних частях равенств u предполагается уже не функцией x и y , а функцией x и ψ , причем y выражено через x и ψ по (6.1). Мы не будем здесь вводить для $u(x, \psi)$ нового обозначения только потому, что вскоре перейдем от $u(x, \psi)$ к новой функции; очень важно понять, что производная, стоящая справа в формуле (6.3), не равна первому члену слева в уравнении (6.2).

Замечая, что при переходе к переменной ψ вместо y будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \psi} \cdot u = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{u^2}{2} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot u; \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

перепишем уравнение (6.2) в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \nu u \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{u^2}{2} \right),$$

или, вспоминая, что U зависит только от x , а не от ψ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2 - u^2}{2} \right) = \nu u \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{U^2 - u^2}{2} \right). \quad (6.5)$$

Введем в рассмотрение отнесенную к единице массы потерю кинетической энергии потока из-за торможения вязкостью в пограничном слое:

$$z = \frac{U^2 - u^2}{2}, \quad (6.6)$$

причем, будем предполагать, что z выражено через x и ψ ; тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}. \quad (6.7)$$

Это и есть известное уравнение Мизеса.

Граничные условия будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \psi = 0 \quad z = \frac{U^2}{2} = z_0 \text{ (данная функция } x) \\ \text{при } \psi = \infty \quad z = 0 \\ \text{при } x = 0 \quad z = \bar{z}(\psi) \text{ (данная функция } (\psi)). \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

Если вместо переменной x формально ввести потенциал скоростей φ того потенциального потока, который при данном x имеет место на внешней границе слоя, т. е. положить:

$$\frac{d\varphi}{dx} = U(x) \quad (6.9)$$

и заметить, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = U \frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

то уравнение Мизеса приобретет вид, данный ему Карманом и Милликеном в выше цитированной работе:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \nu \frac{u}{U} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}, \quad (6.10)$$

при тех же граничных условиях, но с заменой x на φ .

Уравнение Мизеса, подобно уравнению Прандтля, представляет собою нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, хотя по внешнему виду и напоминает уравнение одномерной задачи нестационарного распределения тепла (уравнение параболического типа). Коэффициент при второй производной является функцией самого z , а именно по (6.6) и (6.8):

$$u = \sqrt{U^2 - 2z} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{z_0 - z},$$

так что уравнение (6.10) в явном виде следовало бы писать так:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \nu \sqrt{1 - 2 \frac{z}{U^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}. \quad (6.11)$$

Если говорить об аналогии с тепловой задачей, то здесь мы имеем с математической стороны аналог задачи об охлаждении стержня, коэффициент теплопроводности которого является заданной функцией температуры (φ — время, ψ — координата, z — температура).

Метод Мизеса не следует смешивать с методом Буссинеска-Бюргерса¹⁾ дающим уравнение относительно вихря скорости, несколько

¹⁾ J. Boussinesq. Calcul des pouvoirs refroidissants des courants fluides, Journal de Liouville (6) 1, 1905, p. 285; J. M. Burgers. Stationary streaming caused by a body in a fluid with friction. Konink. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceed. 1921, Vol. XXIII, № 8, p. 1083. Метод был применен также L. V. King'ом (Phil. Trans. London, A 214, p. 373, 1914) для определения охлаждения проволок.

напоминающее (6.10). Указанные авторы (Буссинеск — для общего случая движения, Бюргерс — для пограничного слоя) также вводят в качестве координат потенциал скоростей и функцию тока, но последние берут не для поля скоростей, действительно существующего вблизи тела, а для того воображаемого поля, которое было бы, если бы жидкость была идеальна. Мы изложим здесь вкратце и этот метод.

Обозначим через ω половину вихря скорости (угловую скорость мгновенного вращения частиц). Из уравнений гидродинамики в случае плоского стационарного движения можно, взяв от обеих частей операцию rot и спроектировав на ось, перпендикулярную к плоскости движения, легко получить:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (6.12)$$

Введем в рассмотрение потенциал скоростей φ и функцию тока ψ известного заранее потенциального обтекания нашего профиля и обозначим через U_0 как всегда, скорость на внешней границе пограничного слоя, и через U_0 — скорость жидкости на бесконечности. Тогда, как показывают простые вычисления, если обозначить:

$$\varphi = U_0 \alpha, \quad \psi = U_0 \beta, \quad u_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.13)$$

и заменить в уравнении (6.12) компоненты скорости u, v исследуемого движения, на компоненты заданного потенциального обтекания u_0, v_0 , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \omega &= U_0 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right] \\ u_0 \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} &= U_0 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

и, следовательно, по (6.12) получим уравнение Буссинеска:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{\nu}{U_0} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \right). \quad (6.15)$$

Если рассматривать движение в пограничном слое, то первым членом в скобках, по обычным соображениям теории пограничного слоя, по сравнению со вторым можно пренебречь, и мы получим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{\nu}{U_0} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}, \quad (6.16)$$

напоминающее по внешнему виду уравнение Мизеса. Отсылая за подробностями к вышецитированной работе Бюргерса или, ввиду малой распространенности трудов голландской академии, к изложению результатов этой статьи в книге Мюллера¹⁾, заметим, что, в отличие от метода Мизеса, метод Буссинеска-Бюргерса связан с линеаризацией (замена u, v на u_0, v_0) уравнений при помощи потенциального потока и, кроме того, предполагает возможность замены внешнего потока известным потенциальным потоком, а это, как в дальнейшем увидим, в ряде случаев совершенно недопустимо. Метод Буссинеска-Бюргерса, если развивать при пользовании им последовательные приближения, может представить интерес для хорошо обтекаемых форм.

Удовольствовавшись пока этими краткими замечаниями, проиллюстрируем идею применения уравнения Мизеса в форме Кармана-

¹⁾ W. Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Leipzig, 1932, S. 188.

Милликена (6.10) на примере продольного обтекания пластинки. Приложение метода к исследованию обтекания любого контура мы дадим в следующих главах.

Прежде всего, для упрощения дальнейших выкладок перейдем к безразмерному виду уравнения (6.10), выбрав за масштаб продольных скоростей скорость потока U_0 на бесконечности, и за масштаб длин — какую-нибудь характерную длину L . Примем следующие масштабы для величин, входящих в уравнение (6.10):

$$\left. \begin{aligned} \text{масштаб } \varphi & \dots U_0 L \\ \text{„ } \psi & \dots 2U_0 \frac{L}{\sqrt{R}} \\ \text{„ } z & \dots U_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

где $R = \frac{U_0 L}{\nu}$; коэффициент 2 в масштабе ψ поставлен для удобства. При таком выборе масштабов уравнения (6.10) и (6.11) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{1}{4} u \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = \frac{1}{4} \sqrt{1-2z} \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}, \quad (6.18)$$

если, как обычно, для безразмерных величин мы сохраним те же обозначения, что и для размерных. Граничные условия будут иметь ранее указанный вид.

Рассмотрим внешнее (по терминологии Кармана и Милликена) решение уравнения (6.18), т. е. такое приближенное решение, которое будет наиболее близко подходить к истинному во внешней части пограничного слоя, и, наоборот, удаляться от точного решения вблизи стенки обтекаемого тела. Такое решение можно получить, если в правой части уравнения (6.18) коэффициент u заменить на единицу или z на нуль, т. е. линеаризовать уравнение (6.18), при помощи внешнего потока так же, как в методе Буссинеска-Бюргера линеаризируется уравнение для определения вихря скорости.

При такой линеаризации уравнение (6.18) примет обычный линейный вид теплового уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \quad (6.19)$$

и его решение при граничных условиях задачи Блязиуса

$$\text{при } \psi = 0 \quad z = \frac{1}{2}, \quad \text{при } \psi \rightarrow \infty \quad z \rightarrow 0, \quad (6.20)$$

будет иметь вид:

$$z = \frac{\psi}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\psi}{\sqrt{\pi}}} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{\pi}}}{(\pi - \xi)^{3/2}} d\xi; \quad (6.21)$$

после замены переменной

$$\frac{\psi}{(\pi - \xi)^{1/2}} = \eta,$$

сразу получим:

$$z = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}} e^{-\eta^2} d\eta \right],$$

или, если ввести обычные обозначения для функций „ошибок“:

$$\operatorname{Erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\eta^2} d\eta, \quad (6.22)$$

то будем иметь:

$$z = \frac{1-u^2}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right) \right], \quad (6.23)$$

откуда следует:

$$u = \sqrt{\operatorname{Erf} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right)}. \quad (6.24)$$

Переход к безразмерным координатам x и y (масштаб — L) может быть произведен так:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\varphi d\varphi = \varphi; \quad y = \frac{2}{\sqrt{R}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{u} = \frac{2}{\sqrt{R}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\operatorname{Erf} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right)}} = \\ &= \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{R}} \int_0^{\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}} \frac{d\eta}{\sqrt{\operatorname{Erf} \eta}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{R}} \int_0^{\frac{y}{\sqrt{x}}} \frac{d\eta}{\sqrt{\operatorname{Erf} \eta}}. \end{aligned}$$

Удобнее однако параллельно с принятыми масштабами (6.17) для φ и ψ и для y принять за масштаб величину $\frac{2L}{\sqrt{R}}$ вместо L , как мы уже это ранее делали (множитель 2 не существен). Тогда второе из предыдущих равенств даст:

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = \int_0^{\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}} \frac{d\eta}{\sqrt{\operatorname{Erf} \eta}}. \quad (6.25)$$

Совокупность равенств (6.24) и (6.25) представляет параметрическую связь u и $\frac{y}{\sqrt{x}}$. На рис. 18 эта связь показана на соответствующем графике. Для сравнения дана кривая Блязиуса.

Заметим, что указанное „внешнее“ решение по Карману и Милликену приводит к формуле безразмерного трения:

$$\tau_0 = \frac{0,282}{\sqrt{x}}. \quad (6.26)$$

Сравнивая с (4.9) настоящей главы, видим, что трение по Карману и Милликену получается, примерно, на 15% меньше трения по Блязиусу. В вышецитированной работе Карман и Милликен дают еще второе приближение, которое значительно ближе подходит к решению Блязиуса (на рис. 18 оно не показано, так как почти сливается с кривой Блязиуса). Это приближение строится так: перепишем уравнение (6.18) в тождественном с (6.18) виде

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} (\sqrt{1-2z} - 1). \quad (6.27)$$

Если положить справа $z=0$, что как раз соответствует „внешнему“ решению, то уравнение (6.27) перейдет в уравнение (6.19) и даст первое приближение $z=z^{(1)}$, определенное ранее параметрически равенствами (6.24) и 6.25). Положим теперь справа $z=z^{(1)}$ и составим такое уравнение для второго приближения $z=z^{(2)}$:

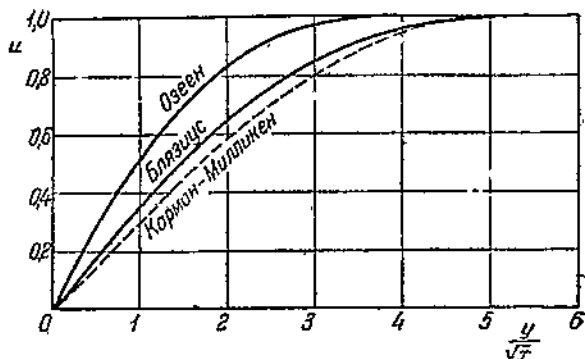


Рис. 18.

$$\frac{\partial z^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \psi^2} (\sqrt{1-2z^{(1)}} - 1) = f(\varphi, \psi). \quad (6.28)$$

Это линейное неоднородное уравнение типа уравнения тепла может быть разрешено; решение, как известно, имеет вид

$$z^{(2)}(\varphi, \psi) = z^{(1)}(\varphi, \psi) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \int_0^\psi d\xi \left[e^{-\frac{(\psi-\eta)^2}{\varphi-\xi}} - e^{-\frac{(\psi+\eta)^2}{\varphi-\xi}} \right] \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{\varphi-\xi}}. \quad (6.29)$$

Несмотря на наличие решения в замкнутой форме, вряд ли будет возможно им пользоваться, так как оно слишком сложно. В следующем параграфе будет показано более простое использование той же идеи построения приближенного решения.

§ 7. Другие методы построения „внешнего“ решения и применение их к случаю продольного обтекания пластинки

Решения, вытекающие из уравнения Мизеса, имеют место лишь при наличии функции тока, т. е., например, в плоском случае, поэтому обобщений их на те случаи пространственного движения, когда нет функции тока, сделать нельзя. Укажем некоторые упрощенные решения, которые, хотя имеют лишь качественное значение, но ценны тем, что легко обобщаются на случай пространственного пограничного слоя.

Взяв безразмерные уравнения (4.1) стационарного пограничного слоя, составленные для случая отсутствия продольного перепада давления, заменим в левой части первого из уравнений множители u и v при $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ на 1 и 0; этим приемом мы, очевидно, построим „внешнее“ решение. Метод эквивалентен известному приему Озеена линейризации уравнений гидродинамики путем выделения основного потока и малых отклонений от него; излагаемое ниже решение будем называть решением Озеена. Уравнение (4.1) перейдет в такое

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.1)$$

решим его при граничных условиях задачи Блязгуса:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=0 \\ \text{при } y=\infty \quad u=1. \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

Уравнение (7.1) соответствует грубому упрощению уравнения (4.1) и, в связи с этим, ожидать большой точности в определении напряжения трения не приходится. Очевидно, что уравнение (7.1) эквивалентно также уравнению Буссинеска-Бюргерса (6.16), в чем легко убедиться простым дифференцированием уравнения (7.1) и заменой ω на $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$, верной в пограничном слое.

Решение уравнения (7.1) при граничных условиях (7.2) не составляет труда; если вспомнить, что здесь по предыдущему можно искать решение в виде:

$$u = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = f(\eta),$$

то уравнение (7.1) переходит в обыкновенное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{du}{d\eta} = 0, \quad (7.3)$$

решением которого при заданных граничных условиях будет служить,

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\eta} e^{-t^2} dt = \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\eta\right) = \operatorname{Erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right). \quad (7.4)$$

Отсюда уже легко найти безразмерное напряжение трения

$$\tau_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \quad (7.5)$$

и обычное размерное напряжение трения:

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\mu p U_0^2}{x}} = 0,564 \sqrt{\frac{\mu p U_0^2}{x}}. \quad (7.6)$$

Мы видим, что разобранный метод даст сильно преувеличенное напряжение трения (почти в 1,7 раз). На рис. 18 для сравнения даны профили скорости, рассчитанной по методам Блязгуса и Озеена.

Имея в виду дальнейшие применения к пространственному пограничному слою, покажем, как можно поправить полученное решение.

Возьмем опять первое безразмерное уравнение пограничного слоя в случае пластинки и перепишем его тождественно так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1-u) \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7.7)$$

Считая здесь скорость конвекции по потенциальному обтеканию пластинки без трения ($u_0 = 1$, $v_0 = 0$), получаем вновь уравнение (7.1) и решение его (7.4), приводящее к преувеличенному трению (7.5).

Возьмем теперь в правой части (7.7) $u = 0$, $v = 0$, а в выражении $\frac{\partial u}{\partial x}$ вместо u подставим решение $u^{(1)}$, только что полученное предыдущим методом, и будем решать относительно $u^{(2)}$ уравнение

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \quad (7.8)$$

при прежних граничных условиях. Здесь, следовательно, преуменьшением значения u мы несколько сглаживаем ранее допущенное преувеличение.

Решение неоднородного линейного уравнения (7.8) не составляет труда, особенно если заметить, что оно может быть переведено в обыкновенное уравнение той же подстановкой

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = \eta.$$

Будем иметь, после простых выкладок, уравнение:

$$\frac{d^2 u^{(2)}}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{du^{(2)}}{d\eta} = \frac{1}{2} \eta \frac{du^{(1)}}{d\eta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta e^{-\frac{\eta^2}{4}}. \quad (7.9)$$

Частное решение, его можно искать в виде:

$$u^{(2)} = A \eta e^{-\frac{\eta^2}{4}};$$

тогда, подставляя в (7.9), получим $A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, и общее решение будет:

$$u^{(2)} = C_1 \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\eta\right) + C_2 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta e^{-\frac{\eta^2}{4}},$$

что, при заданных граничных условиях, окончательно даст:

$$u^{(2)} = \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\eta\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} = \operatorname{Erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{y}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{4x}}. \quad (7.10)$$

Напряжение трения будет равно:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{0.023} &= \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} = 0,282 \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \tau_0 &= 0,282 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Мы видим, что уточненное решение дает в два раза меньшее трение, чем решение по Озееву. Трение получается меньшим, чем у Блязиуса, примерно, на 15% и соответствует первому приближению по Польгаузену и первому приближению по Карман-Милликену. Существенно, что для скорости получается сравнительно простое аналитическое выражение.

На рис. 19 нанесены для сравнения профили скоростей по Блязиусу, Карман-Милликену (первое приближение) и по уточненной формуле (7.10).

Даем для сравнения с решением Блязиуса таблицу значений безразмерной скорости $u^{(2)}$ по формуле (7.10)

ТАБЛИЦА 2

η	u (Бл)	$u^{(2)}$	η	u (Бл)	$u^{(2)}$
0,0	—	—	3,2	0,8761	0,9066
0,2	0,0664	0,0566	3,4	0,9018	0,9305
0,4	0,1328	0,1143	3,6	0,9233	0,9493
0,6	0,1990	0,1739	3,8	0,9411	0,9638
0,8	0,2647	0,2306	4,0	0,9555	0,9746
1,0	0,3298	0,3008	4,2	0,9670	0,9825
1,2	0,3938	0,3697	4,4	0,9759	0,9883
1,4	0,4563	0,4358	4,6	0,9827	0,9923
1,6	0,5168	0,5041	4,8	0,9878	0,9950
1,8	0,5778	0,5710	5,0	0,9916	0,9969
2,0	0,6298	0,6351	5,2	0,9943	0,9986
2,2	0,6813	0,6951	5,4	0,9962	0,9988
2,4	0,7290	0,7499	5,6	0,9975	0,9993
2,6	0,7725	0,7987	5,8	0,9984	0,9996
2,8	0,8115	0,8410	6,0	0,9990	0,9998
3,0	0,8461	0,8769	—	—	—

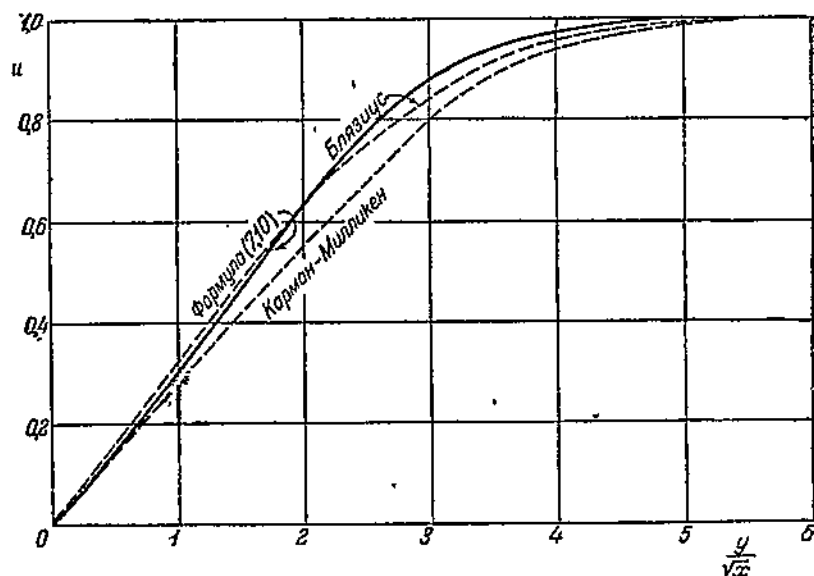


Рис. 19.

Мы видим, что разница в производных в точке $\eta=0$ достигает 15%, между тем как относительная разница в координатах в среднем невелика и уменьшается при $\eta \rightarrow \infty$. К недостаткам предлагаемого решения следует отнести наличие слабого перегиба на профиле скоростей поблизи $\eta=2$; на самом деле, на истинном профиле перегиба быть не должно, так как производная $\frac{du}{dy}$ монотонно убывает. Перегиб этот мало заметен, и для приближенных расчетов предлагаемый прием с успехом может применяться (см. например,

приводимый далее расчет взаимодействия пограничных слоев на двух пересекающихся пластинках).

Покажем, как можно получить более точную формулу трения. Для этого используем ранее установленное уравнение (3.8) § 3 настоящей главы, которое в безразмерном виде для пластины будет

$$\tau_0 = \frac{d\delta^{**}}{dx}. \quad (7.12)$$

В случае задачи Б л а з н у с а η представляет собою функцию комплекса $\eta = \frac{y}{\sqrt{x}}$ и, следовательно,

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} u(1-u) dy = \sqrt{x} \int_0^{\infty} u(1-u) d\eta = \alpha^{**} \sqrt{x}, \dots \quad (7.13)$$

где α^{**} , определяемое интегралом:

$$\alpha^{**} = \int_0^{\infty} u(1-u) d\eta, \quad (7.14)$$

есть просто число, зависящее от вида функции u ; по (7.12) и (7.13) имеем:

$$\tau_0 = \frac{\alpha^{**}}{2\sqrt{x}}. \quad (7.15)$$

Покажем, что грубое приближение, дающее весьма неточное значение для τ_0 , определенного по уклону касательной на стенке $\tau_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$, приводит к гораздо более точному значению для τ_0 , определенного интегрально по (7.15).

Если взять решение (7.10) и для него подсчитать τ_0 по (7.15), то будем иметь:

$$\alpha^{**} = 2 \int_1^{\infty} \left(\operatorname{Erfi} t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} t e^{-t^2} \right) \left(\operatorname{erf} t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} t e^{-t^2} \right) dt.$$

Интеграл легко берется и дает:

$$\alpha^{**} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{23}{16} \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right), \quad \tau_0 = \frac{0,301}{\sqrt{x}}, \quad (7.16)$$

т. е. напряжение трения всего лишь на 9% меньше, чем у Блязнуса, вместо погрешности в 15%, имевшей место ранее при дифференциальном расчете трения.

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

§ 1. Ламинарный пограничный слой на пластинке, продольно обтекаемой сжимаемой вязкой жидкостью

Предположим, что у нас имеется пластинка длины L (вдоль по потоку) и на нее в продольном направлении набегают плоский газовый поток, имеющий на бесконечности скорость U_0 , плотность ρ_0 , коэффициент вязкости μ_0 , коэффициент теплопроводности λ_0 , темпера-

туру T_0 . Условимся в дальнейшем величины, соответствующие температуре пластинки, обозначать индексом „w“ (wall — стенка), т. е. T_w, μ_w и т. д. Будем, как и раньше, предполагать, что давление во внешнем потоке при таком обтекании всюду одинаково и равно p_0 .

В сжимаемом газе, на основании тех же допущений о порядке величин в пограничном слое, что и в случае несжимаемого газа, можно пренебречь продольными производными по сравнению с поперечными производными от тех же величин, тогда для плоского потока при $p = p_0$ будем иметь по (2.7) предыдущей главы ($F = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$):

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.1)$$

Уравнение сохранения массы (2.9) дает:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение притока энергии (2.16) приведетсЯ (предполагаем, что порядок λ тот же, что и μ , точнее, что отношение $\mu c_p : \lambda = \text{Pr}$ при увеличении Re остается конечным) к такому:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - p_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right); \quad (1.3)$$

мы его несколько преобразуем, переходя от c_v к c_p по известной формуле (R — газовая постоянная):

$$c_p - c_v = R, \quad c_p T - c_v T = RT = \frac{p}{\rho}. \quad (1.4)$$

Левая часть может быть представлена так:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} (c_v T) &= \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} (c_p T) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} = \\ &= \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} (c_p T) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p + \frac{p}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho, \end{aligned}$$

но $p = p_0$, следовательно, $\operatorname{grad} p = 0$, вместе с тем по (1.2)

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0,$$

так что

$$\rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} (c_v T) = \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} (c_p T) - p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Подставляя этот результат в уравнение (1.3), окончательно получим:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (1.5)$$

К уравнениям (1.1), (1.2) и (1.5) следует еще присоединить очевидные уравнения:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T_0}{T} \quad (1.6)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\alpha, \quad \alpha = 0,5 \text{ (иногда берут } \alpha = 0,76) \quad (1.7)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \text{Pr}_0 = \text{const.} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) на основании (1.7) может быть заменено уравнением:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\alpha. \quad (1.9)$$

Мы имеем, таким образом, замкнутую систему дифференциальных уравнений, которую надо решать при тех или иных граничных условиях.

Чтобы упростить задачу удовольствуемся решением типа Блязиуса, т. е. предположим упрощенные граничные условия (см. предыдущую главу):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=0, \quad v=0, \quad T=T_w \\ \text{при } y=\infty \quad u=U_0, \quad T=T_0 \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

иными словами, отвлечемся от условий по x и пренебрежем влиянием длины пластинки.

В этом случае, рассуждая в точности, как в случае несжимаемого газа, легко убедимся, что u и T оба будут функциями отношения $\frac{y}{\sqrt{x}}$, а, следовательно, изотермы и изотакхи будут совпадать (параболы, выходящие из переднего края пластины). Отсюда можно сделать заключение, что вообще

$$T = T(u). \quad (1.11)$$

Определяя при этом частные производные от T по x и y через функцию u :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

и подставляя их в уравнение (1.5), получим

$$\rho c_p T'(u) \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda T'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

или пользуясь уравнением (1.1)

$$c_p T'(u) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T'(u) \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[\lambda T''(u) + \mu \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.12)$$

Вводя число Pr по (1.8), можно последнее уравнение переписать еще так:

$$\text{Pr} \cdot T'(u) \frac{\partial}{\partial y} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = T'(u) \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[T''(u) + \frac{\text{Pr}}{c_p} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.13)$$

Отсюда сразу следует важный результат:

$$\text{при } \text{Pr}=1, \quad T''(u) = -\frac{1}{c_p}. \quad (1.14)$$

Интегрируя, найдем:

$$T = T(u) = -\frac{u^2}{2c_p} + au + b; \quad (1.15)$$

вспоминая граничные условия (1.10), определим постоянные интегрирования a и b ; тогда окончательно будем иметь чрезвычайно существенную формулу:

$$T = T_w - \left[T_w - \left(T_0 + \frac{U_0^2}{2c_p} \right) \right] \frac{u}{U_0} - \frac{U_0^2}{2c_p} \left(\frac{u}{U_0} \right)^2. \quad (1.16)$$

Если ввести в рассмотрение вместо обычной абсолютной температуры, так называемую, „температуру торможения“ θ , равную

$$\theta = T + \frac{u^2}{2c_p} = \frac{1}{c_p} \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right), \quad (1.17)$$

т. е. температуру, соответствующую сумме отнесенных к единице массы кинетической энергии наблюдаемого движения жидкости и тепло-содержания, то формула (1.16) сможет быть переписана еще так (на стенке $u=0$, $\theta_w = T_w$)

$$\theta = \theta_w - (\theta_w - \theta_0) \frac{u}{U_0}, \quad (1.18)$$

или еще иначе

$$\frac{\theta_w - \theta}{\theta_w - \theta_0} = \frac{u}{U_0}. \quad (1.19)$$

Это замечательное равенство утверждает, что при $Pr=1$ и граничных условиях (1.10) безразмерные скорости и безразмерные перепады температур торможения в любой точке пограничного слоя совпадают, т. е. профили скоростей и перепадов температур торможения подобны между собою. Если удельная кинетическая энергия видимого движения мала по сравнению с кинетической энергией молекулярного движения, то температура торможения совпадает с обычной абсолютной температурой, и мы получаем:

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_0} = \frac{u}{U_0}. \quad (1.20)$$

Последний результат, а также общее решение задачи о распределении температуры вблизи пластинки при указанных ранее граничных условиях в несжимаемой жидкости и при любом значении Pr , был получен теоретически Польгаузенем еще в 1921 г. и экспериментально исследован Элиасом в 1930 г.; мы в дальнейшем к этому вопросу еще вернемся.

В виду важности формулы (1.16) или эквивалентной ей формулы (1.18), покажем еще другой вывод этих формул. Умножим обе части уравнения (1.1) на u и перепишем его так:

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) = u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

отсюда следует, что

$$-\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right],$$

и уравнение (1.5) может быть преобразовано к виду

$$\rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

или, если ввести опять температуру торможения θ по (1.17) и число Pr по (1.8):

$$\rho \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2c_p} \right) \right]. \quad (1.21)$$

Если в этом уравнении положить $Pr = 1$, то оно преобразуется в уравнение:

$$\rho \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (1.22)$$

совершенно подобное уравнению (1.1) для скорости u ; отсюда следует, что $\theta = au + b$, причем, определяя a и b по граничным условиям (1.10), вновь получим уравнение (1.18).

А. Бусеман,¹⁾ следуя общему методу Блязиуса, полагает

$$u = \frac{1}{2} U_0 f(\xi), \quad \xi = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_0}{\nu_w x}}, \quad (1.23)$$

тогда по (1.16) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_w (1 - 2mf - nf^2) = T_w \vartheta(f) \\ \rho &= \rho_w \cdot \frac{T_w}{T} = \frac{\rho_w}{\vartheta(f)} = \frac{\rho_w}{1 - 2mf - nf^2} \\ \mu &= \mu_w \left(\frac{T}{T_w} \right)^{1/2} = \mu_w \sqrt{\vartheta(f)} = \mu_w \sqrt{1 - 2mf - nf^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

где введены обозначения

$$m = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{T_0}{T_w} \left(\frac{U_0^2}{2c_p T_0} + 1 \right) \right], \quad n = \frac{1}{8} \cdot \frac{T_0}{T_w} \frac{U_0^2}{c_p T_0}; \quad (1.24')$$

если ввести еще в рассмотрение число Ba , рассчитанное для величин на бесконечности, положив:

$$\left. \begin{aligned} a_0^2 &= k \frac{p_0}{\rho_0} = k R T_0 = k (c_p - c_v) T_0 = k c_p T_0 \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \\ &= (k - 1) c_p \cdot T_0 \\ Ba^2 &= \frac{U_0^2}{a_0^2} = \frac{1}{k - 1} \cdot \frac{U_0^2}{c_p T_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

¹⁾ A. Busemann. Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. ZAMM, Bd 15, H. 1/2, (1935).

См. также Ф. И. Франкль, С. А. Христианович, Р. Н. Алексеева. Основы азовой динамики, Труды ЦАГИ, вып. 364, 1938 г.

то коэффициенты m и n выразятся еще и так:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{T_0}{T_w} \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ba}^2 \right) \right] \\ n &= \frac{1}{8} \frac{T_0}{T_w} (k-1) \text{Ba}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Разрешая уравнение (1.1) относительно v , получим

$$v = \frac{1}{2} U_0 \sqrt{\frac{\gamma_w}{U_0 x}} \left[\xi f + \frac{3}{2} \frac{f''}{f'} - \frac{3}{2} (m + nf) f' \right]; \quad (1.27)$$

подставим это выражение v в уравнение (1.2), тогда будем иметь следующее уравнение для определения $f(\xi)$:

$$f''' = \frac{f'^2}{f'} + \frac{(m^2 + n) f'^3}{(1 - 2mf - nf^2)^2} - \frac{f f'}{(1 - 2mf - nf^2)^{3/2}} + \frac{[2(m + nf) f' f'']}{1 - 2mf - nf^2} \quad (1.27')$$

при граничных условиях, следующих из условий (1.10) и равенства (1.27):

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \xi = 0, f = 0, f''(0) &= m [f'(0)]^2 \\ \text{при } \xi = \infty, f &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Уравнение (1.27') и граничные условия (1.28) служат обобщением рассмотренного нами в предыдущей главе уравнения Блязиуса на случай сжимаемого газа, движущегося с большими скоростями. Если положить $\text{Ba} = 0$ и $T_0 = T_w$, то m и n обратятся в нуль, и уравнение (1.27') превратится в уравнение:

$$f' f'' = f'^2 - f f''.$$

Если заметить, что по (4.5) главы I настоящего отдела:

$$\varphi(\eta) = \int_0^\eta f(\eta) d\eta,$$

то уравнение (4.7) той же главы перейдет в уравнение

$$f f'^2 = 2(f'^2 - f f''),$$

отличающееся лишь множителем 2, объясняемым наличием лишнего множителя $\frac{1}{2}$ в равенствах (1.23) настоящей главы; точно также убедимся в тождественности граничных условий в задаче Блязиуса и задаче Буземана при $m = n = 0$.

1) При $\xi = 0$ в равенстве (1.27) левая часть равна нулю, а $\frac{3}{2} = 1$, откуда и следует граничное условие для $f''(0)$.

Уравнение (1.27') может быть решено лишь численно, причем, в отличие от уравнения Блязюса, оно, к сожалению, содержит еще два параметра m и n . Поэтому решение может проводиться лишь при заданных m и n . Буземан в своей работе приводит результаты численного интегрирования (тем же методом, который применен Тёпфером в задаче Блязюса) для $m=0$ и $n=0,235$ при $Ва=8,8$. На рис. 20 приведены для сравнения безразмерные профили скоростей в случае сжимаемого газа при только что указанных значениях m , n и $Ва$ и несжимаемого газа ($m=n=Ва=0$). Предположение $m=0$ имеет конкретный физический смысл. Как легко видеть из первого равенства системы (1.24):

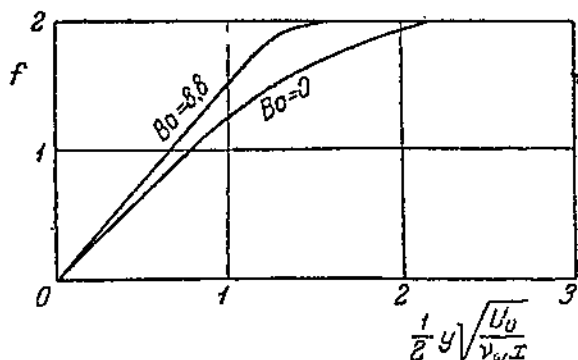


Рис. 20.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_{f=0} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{y=0} = -T_w m f'(0) \sqrt{\frac{U_0}{v_w x}};$$

$f'(0)$ очевидно, всегда положительно, следовательно знак величины m говорит о знаке температурного градиента на стенке. Если $m > 0$, то $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$ — пластинка охлаждается жидкостью, если $m < 0$, $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} > 0$ — пластинка нагревается жидкостью и, наконец, при $m=0$ теплопередача между жидкостью и пластинкой отсутствует. Легко связать эти представления с понятием температуры „торможения“. В самом деле, первая из формул (1.24') дает

$$\text{при } m > 0, \frac{U_0^2}{2c_p} + T_0 < T_w, \text{ т. е. } \theta_0 < \theta_w (= T_w),$$

$$\text{при } m < 0, \frac{U_0^2}{2c_p} + T_0 > T_w, \text{ т. е. } \theta_0 > \theta_w$$

$$\text{при } m = 0, \frac{U_0^2}{2c_p} + T_0 = T_w, \text{ т. е. } \theta_0 = \theta_w,$$

т. е. в зависимости от направления теплопередачи температура „торможения“ жидкости на бесконечности больше, меньше или равна температуре пластинки.

Определяя напряжение трения по обычной формуле

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{4} \mu_w U_0 \sqrt{\frac{U_0}{v_w x}} \cdot f'(0) \quad (1.29),$$

и суммируя его по всей длине пластины L , получим суммарный коэффициент сопротивления:

$$C_f = \frac{\int_0^L \tau_{w0} dx}{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \cdot L \cdot 1} = \frac{\mu_{w0}}{\rho_0 U_0 L} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu_{w0}}} f'(0). \quad (1.30)$$

Пользуясь равенствами (1.24), связывающими μ_0 , ν_0 со значениями μ_{w0} , ν_{w0} , можем получить еще такую формулу:

$$C_f = f'(0) \sqrt{\frac{\nu_0}{U_0 L}} \cdot \sqrt[4]{1 - 4m - 4n} \quad (1.31)$$

или в нашем случае $m = 0$:

$$C_f = f'(0) \sqrt{\frac{\nu_0}{U_0 L}} \sqrt[4]{1 - 4n}. \quad (1.32)$$

Из равенств (1.26) можно усмотреть, что при $m = 0$

$$n = \frac{\frac{k-1}{8} \text{Ba}^2}{1 + \frac{k-1}{2} \text{Ba}^2}, \quad 1 - 4n = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \text{Ba}^2}, \quad (1.33)$$

т. е. $n \rightarrow \frac{1}{4}$ когда $\text{Ba} \rightarrow \infty$, при этом $C_f \rightarrow 0$. Что касается значения $f'(0)$, то, как видно из графика, оно возрастает от значения 1,327 при $n = 0$, $\text{Ba} = 0$ (Блязигус) максимально на 20% при $n = \frac{1}{4}$ и $\text{Ba} = \infty$. Буземан предлагает приблизительно положить:

$$f'(0) = 1,46 \pm 10\%,$$

тогда формула сопротивления (1.32) по (1.33) примет вид:

$$C_f = 1,46 \sqrt{\frac{\nu_0}{U_0 L}} \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \text{Ba}^2}} \pm 10\%. \quad (1.34)$$

Согласно этой формуле коэффициент сопротивления убывает с числом Ba при заданном числе Re . При малых значениях Ba величина поправочного коэффициента мало отличается от единицы, при больших Ba роль поправки быстро возрастает; так например, при $\text{Ba} = 10$ коэффициент сопротивления уменьшается на 50%.

Как видно из рис. 21, при больших числах Ba профили скоростей почти совершенно прямолинейны. Пользуясь этим фактом, Карман¹⁾ дал приближенную теорию, являющуюся обобщением известной уже нам по предыдущей главе теории того же автора на случай сжимае-

¹⁾ Th. v. Kármán. The Problem of Resistance in Compressible Fluids. V Convegno della Fondazione A. Volta, Reale Accademia D'Italia, Roma.

мого газа. В результате применения этой теории Карман пришел к формуле, аналогичной (1.34):

$$C_f = \Theta \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 U_0 L}} \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ba}^2\right)^{-r}, \quad (1.35)$$

где $r=0,25$, если пользоваться законом (1.7) при $\alpha=0,5$ и $r=0,12$ при $\alpha=0,76$; Θ зависит от Ba согласно следующей таблице:

Ba	0	1	2	5	10	∞
Θ	1,16	1,20	1,25	1,39	1,50	1,57

При $\text{Ba}=0$ получается как раз то значение коэффициента, которое соответствует теории Кармана-Польгаузена для несжимаемой жидкости при первом приближении (линейный закон скорости). Мы видим, что при очень малых числах Ba расхождение с теорией Буземана значительно (Θ по Буземану при Ba , близких к нулю, близко к 1,327), при больших Ba , наоборот, результаты обеих теорий сближаются. Теорией слоя конечной толщины пользовался также Ф. Франкль¹⁾, решивший задачу об обтекании пластинки при несколько более ограничительных предположениях.

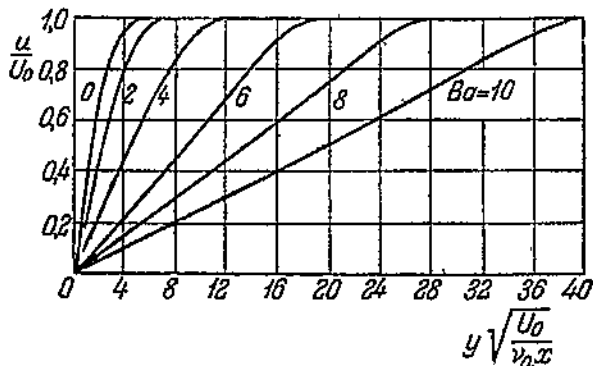


Рис. 21.

Год тому назад вопрос о ламинарном пограничном слое в сжимаемом газе был вновь рассмотрен с несколько другой точки зрения Карманом и Тзяном²⁾. Исходя из тех же предпосылок, что и Буземан, авторы указанной работы вводят функцию тока ψ , полагая:

$$\frac{\rho}{\rho_0} u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.36)$$

и, следуя методу Мизеса (предыдущая глава, § 6), сводят уравнение (1.1) к уравнению:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left(u^* \rho^* \mu^* \frac{\partial u}{\partial \psi^*} \right), \quad (1.37)$$

¹⁾ Ф. Франкль. Ламинарный пограничный слой в сжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ № 176. 1934. Москва.

²⁾ Th. v. Kármán and H. S. Tsien. Boundary layer in compressible fluids. Journ. of Aeronaut. Sciences. Vol. 5, № 6, April 1938, p. 227.

где величины со звездочками обозначают следующие безразмерные величины (ср. метод Карман-Милликена § 6):

$$u^* = \frac{u}{U_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{UL} \sqrt{\frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.37')$$

Пользуясь возможностью найти для u^* , а следовательно, и для $T^* = \frac{T}{T_0}$, ρ^* , μ^* решение в функции от комплекса $\zeta = \frac{\psi^*}{\sqrt{x^*}}$ (задача Блязиуса!), перейдем от уравнения (1.37) к обыкновенному уравнению

$$-\frac{\zeta}{2} \frac{du^*}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} (u^* \rho^* \mu^* \frac{du^*}{d\zeta}). \quad (1.38)$$

Это уравнение можно решать методом последовательных приближений. В качестве первого приближения берется решение для u^* , а следовательно, и для T^* , ρ^* , μ^* [по формулам (1.16), (1.6) и (1.7)] по Блязиусу и подставляется в правую часть (1.38) в выражение множителя перед $\frac{du^*}{d\zeta}$. Пусть по первому приближению

$$u^* \rho^* \mu^* = f(\zeta), \quad (1.39)$$

тогда уравнение (1.38) переходит в такое

$$-\frac{\zeta}{2} \frac{du^*}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left[f(\zeta) \frac{du^*}{d\zeta} \right],$$

или

$$-\frac{\zeta}{2f} \cdot f \frac{du^*}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left(f \frac{du^*}{d\zeta} \right).$$

Решая это уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d \left(f \frac{du^*}{d\zeta} \right)}{f \frac{du^*}{d\zeta}} &= -\frac{\zeta d\zeta}{2f}, \\ f \frac{du^*}{d\zeta} &= C \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{f} \right) = CF(\zeta), \\ u^* &= C \int_0^\zeta \frac{F(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \end{aligned} \quad (1.40)$$

причем постоянная интегрирования определяется из граничного условия

$$\text{при } \zeta = \infty, \quad u^* = 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{C} = \int_0^\infty \frac{F(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta. \quad (1.41)$$

Определяя u^* по (1.40) и (1.41), подставляем полученные значения u^* и пересчитанные на новые u^* и T^* величины μ^* и ρ^* в равенство (1.39) и вновь повторяем весь процесс. Как указывает Карман, третьего или четвертого приближения уже достаточно для требуемой точности решения. Найдя u^* в функции от ζ^* , можно затем определить и ψ в функции от x и y , а следовательно, и u в функции от x и y . Для этого по (1.36) переходом к безразмерным величинам, согласно серии равенств (1.37'), получим:

$$\sqrt{R} \rho^* u^* = L \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \quad (1.42)$$

откуда при данном x^*

$$y \sqrt{R} = L \int_0^{\psi^*} \frac{d\psi^*}{\rho^* u^*} = L \sqrt{x^*} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\rho^* u^*},$$

или

$$\frac{y \sqrt{R}}{\sqrt{x^*}} = y \sqrt{\frac{U_0 \rho_0}{\mu_0 x}} = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\rho^* u^*}. \quad (1.42')$$

Обращая этот интеграл, находим:

$$\zeta = \frac{\psi^*}{\sqrt{x^*}} = \chi \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu_0 x}} \right), \quad \psi^* = \sqrt{x^*} \chi \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu_0 x}} \right), \quad (1.43)$$

откуда уже нетрудно найти и $u^* = \frac{u}{U_0}$, а следовательно, и $T^* = \frac{T}{T_0}$ в функции от безразмерного параметра $y \sqrt{\frac{U_0}{\nu_0 x}}$. Результаты этих вычислений при μ^* , определенном по (1.7) при $\alpha = 0,76$, приведены на рис. 21 и 22. Мы видим, что профили скоростей очень близки к прямым линиям, причем наклон кривых в начале координат убывает с ростом Ba . Отсюда еще нельзя сделать вывода (верного для несжимаемой жидкости), что так же будет убывать местное напряжение трения на стенке τ_{w0} , так как последнее изменяется по закону:

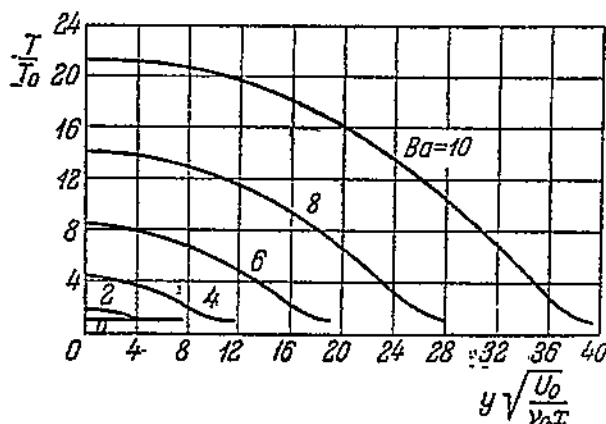


Рис. 22.

$$\tau_{w0} = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_0 \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{0,76} \cdot \left[\frac{\partial \left(\frac{u}{U_0} \right)}{\partial \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu_0 x}} \right)} \right]_{y=0} \cdot \frac{U_0}{\sqrt{\frac{\nu_0 x}{U_0}}};$$

производная в квадратной скобке при $y=0$ убывает с ростом $Ва$, но, как видно из рис. 22, $\frac{T_w}{T_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)_{y=0}$ возрастает с ростом $Ва$; чтобы получить суждение о влиянии $Ва$ на сопротивление при данном рейнгольдсовом числе, определим коэффициент полного сопротивления C_f равный по предыдущему:

$$C_f = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{\frac{\rho_0 U_0^2}{2} \cdot L \cdot 1} \quad (1.44)$$

Интеграл, стоящий в числителе, проще всего вычислить, пользуясь теоремой (интегралом) количества движения, которую можно получить следующим образом. Умножим обе части уравнения сохранения массы (1.2) на постоянную скорость U_0 и вычтем из него обе части уравнения (1.1), переписанного так

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho u (U_0 - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (U_0 - u)] = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по y от 0 до ∞ , будем иметь:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho u (U_0 - u) dy + [\rho v (U_0 - u)]_0^\infty = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \tau_w.$$

Подстановка обращается в нуль, так как при $y=0$, $v=0$, а при $y=\infty$, $u=U_0$; следовательно:

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho u (U_0 - u) dy. \quad (1.45)$$

Интегрируя обе части этого равенства по x от 0 до L , найдем

$$\int_0^L \tau_w dx = \left[\int_0^\infty \rho u (U_0 - u) dy \right]_{x=L} - \left[\int_0^\infty \rho u (U_0 - u) dy \right]_{x=0}. \quad (1.46)$$

Теперь уже нетрудно найти C_f :

$$C_f = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{\frac{\rho_0 U_0^2}{2} \cdot L \cdot 1} = \frac{2}{L} \left[\int_0^\infty \rho^* u^* (1 - u^*) dy \right]_{x=L} - \left[\int_0^\infty \rho^* u^* (1 - u^*) dy \right]_{x=0},$$

или по (1.42)

$$C_f = \frac{2}{\sqrt{R}} \left[\int_0^{\infty} (1 - u^*) d\psi^* \right]_{x=L} = \frac{2}{\sqrt{R}} [V x^*]_{x=L} \int_0^{\infty} (1 - u^*) d\left(\frac{\psi^*}{\sqrt{x^*}}\right) = \\ = \frac{2}{\sqrt{R}} \int_0^{\infty} (1 - u^*) d\zeta. \quad (1.47)$$

По этой формуле легко подсчитать $C_f \sqrt{R}$, так как u^* в функции ζ уже было найдено. Результаты приведены на рис. 23 (кривая I). Мы видим, что в полном согласии с исследованием Буземана, при данном R коэффициент полного сопротивления C_f падает с ростом Ba . При $Ba = 0$,

$C_f \sqrt{R} = 1,328$ (Б л а з и у с), при $Ba = 10$, $C_f \sqrt{R} = 0,975$, т. е. на 30% меньше. Карман и Тзян приводят любопытный расчет, иллюстрирующий роль сопротивления трения в общем сопротивлении тел при больших скоростях.

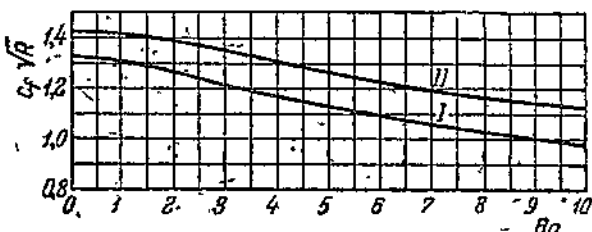


Рис. 23.

Шестидюймовый снаряд длиной 24 дюйма имеет скорость 1500 фут/сек и летит на высоте 32 800 фут (10 км), число Рейнольдса отнесенное к длине снаряда — $R = 7,86 \cdot 10^6$, $Ba = 1,52$. По графику рис. 23 определяем

$$C_f = 1,286 \cdot \frac{10^{-3}}{\sqrt{7,86}} = 0,000459,$$

или, переходя к коэффициенту, пересчитанному на максимальное поперечное (миделевое) сечение,

$$C_{xf} = 0,0055.$$

По опытам Кента¹⁾ коэффициент волнового сопротивления

$$C_{xw} = 0,190,$$

так что роль трения здесь крайне мала, коэффициент трения составляет около 3% от коэффициента волнового сопротивления. Это легко объясняется тем, что снаряд представляет собой плохо обтекаемую форму небольшой длины по сравнению с диаметром миделевого сечения, для которой сопротивление давлений является определяющим.

Совсем иное получается для ракеты диаметром 9 дюймов и длиной 8 футов. При высоте полета 50 км (164 000 футов) и скорости

¹⁾ Kent, R. H. The Role of Model Experiment in Projectile Design. Mechanical Engineering, Vol. 54, p. 641—646, 1932.

3400 фут/сек, при числе Рейнольдса равном $6,14 \cdot 10^5$ и $Ва = 3,0$ коэффициент трения

$$C_f = 1,213 \sqrt{\frac{10^{-5}}{6,14}} = 0,00360,$$

или после пересчета на миделевое сечение:

$$C_{mf} = 0,123,$$

в то время, как по опытам Кента

$$C_{mo} = 0,100,$$

т. е. в этом случае коэффициент трения в 1,23 раза больше, чем коэффициент волнового сопротивления.

Обратим еще внимание на то, какие высокие температуры получаются за счет торможения жидкости вблизи стенки при больших $Ва$. Так например, при $Ва = 10$, абсолютная температура на стенке (при отсутствии теплопередачи) примерно в 20 раз превосходит температуру потока вдали от стенки; при переводе на стоградусную шкалу цифры получаются совершенно фантастические; так например, пластина, движущаяся при $Ва = 10$ в воздухе комнатной температуры 20° , будет иметь температуру около 5000° . Конечно, этот расчет весьма приближен. Следует принять во внимание еще теплоотдачу излучением¹⁾, которое при таких температурах будет уже велико; кроме того при таких высоких температурах неизвестно, правильна ли принятая формула зависимости вязкости от температуры. Если, наоборот, воздух приведен в движение, скажем всасывается в трубу, то при больших $Ва$ температура движущегося воздуха будет крайне низка, температура же пластинки, закрепленной неподвижно (или стенки трубы), будет, примерно, та же что и неподвижного воздуха в помещении, откуда он всасывается в трубу. За счет трения о стенку в заторможенном воздухе, проходящем сквозь пограничный слой, будет происходить нагревание, и температура на стенке восстановится. Температура „торможения“ при $Pg = 1$ и отсутствии теплоотдачи будет на пластинке та же, что и в помещении; температуры „торможения“ на пластинке и в помещении с неподвижным воздухом будут совпадать с обычной температурой, так как скорость на пластинке и в помещении равны нулю.

§ 2. Теплоотдача в ламинарном пограничном слое на пластинке в случае несжимаемой и сжимаемой жидкости. Связь между трением и теплоотдачей

В предыдущем параграфе рассмотрен случай движения сжимаемого газа при отсутствии теплопередачи между газом и обтекаемой им пластинкой, причем мы принуждены были удовольствоваться лишь газом, для

¹⁾ В недавно появившейся работе (Доклады Академии Наук СССР, том XXV, № 4, 1939) проф. Кибель показал, что наличие излучения значительно понижает температуру пластины.

которого число Прандтля Rg равно единице (приближенно — воздух).

Граничные условия там были таковы, что уравнения движения жидкости и распространения тепла можно было разрешить, пользуясь для продольной скорости движения и для температуры — функцией аргумента $y/\sqrt{x}$. Отсюда вытекало, что $T = T(u)$ и, следовательно, единственным возможным граничным условием для температуры на пластинке служила одинаковость температуры вдоль пластинки:

$$\text{при } y = 0 \quad T = T(0) = T_w.$$

При числе Бэрстоу равном нулю (практически при малых Ba) и числе Прандтля Rg равном единице это приводило к тому, что (рис. 22) температура во всей жидкости была одинакова и $T_0 = T_w$. Конечно, при этом еще надо иметь в виду, что при $Ba = 0$, строго говоря, температура T совпадает с температурой торможения, так как, по определению температуры торможения (1.17) и (1.25),

$$\begin{aligned} \theta &= T + \frac{u^2}{2c_p} = T + \left(\frac{u}{U_0}\right)^2 \cdot \frac{U_0^2}{2c_p} = T + \left(\frac{u}{U_0}\right)^2 \frac{U_0^2}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{2c_p} = \\ &= T + \left(\frac{u}{U_0}\right)^2 \cdot Ba^2 \cdot \frac{1}{2} (k - 1) \cdot T_0, \end{aligned}$$

а это, в свою очередь, эквивалентно пренебрежению в основном уравнении переноса тепла членом, представляющим приток тепла за счет работы трения $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

В настоящем параграфе рассмотрим более общий случай движения жидкости — движения, сопровождаемого теплопередачей.

Начнем с рассмотрения наиболее простого случая — теплопередачи в ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости (число Прандтля — любое) с физическими константами, не зависящими от температуры, причем будем пренебрегать притоком тепла за счет работы трения. В этом случае неизвестные функции u и T разделяются, так что можно сначала решать гидродинамическую задачу, т. е. решать систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad u &= 0, \quad v = 0 \\ \text{при } y = \infty, \quad u &= U_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1')$$

а затем, найдя u и v , обратиться к решению тепловой задачи (см. уравнение (2.19) главы II предыдущего отдела, в котором опу-

скаем $\frac{\partial T}{\partial t}$ по условию стационарности и $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ — по сравнению с $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0, T=T_w, \\ \text{при } y=\infty, T=T_0, \end{array} \right\} \quad (2.2')$$

Первая задача была уже решена в предыдущей главе (задача Блязиуса).

Сохраняя прежние обозначения, будем иметь в безразмерных координатах (см. (4.6) главы I)

$$u = \varphi'(\eta), \quad v = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\eta \varphi' - \varphi), \quad (2.3)$$

где $\varphi'(\eta)$ определяется таблицей или кривой, например, по Тёпферу (стр. 78). Мы ранее не давали таблицы $\varphi(\eta)$, но эта функция легко может быть определена по той же кривой или таблице, как интеграл от $\varphi'(\eta)$.

Обращаясь к тепловому уравнению (2.2), перейдем в нем к тем же безразмерным координатам и введем следующее обозначение для безразмерной температуры:

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_0} = \vartheta. \quad (2.4)$$

Легко видеть, что при этом уравнение (2.2) примет вид:

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

а граничные условия будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0, \vartheta=0, \\ \text{при } y=\infty, \vartheta=1. \end{array} \right\} \quad (2.5')$$

Здесь число $Pr = \frac{\mu c}{\lambda}$. Воспользовавшись тем, что мы решаем задачу типа Блязиуса, перейдем в уравнении (2.5) к аргументу $\eta = y/\sqrt{x}$ вместо x и y , взятых раздельно; тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\vartheta'' + \frac{1}{2} Pr \cdot \varphi \vartheta' = 0, \quad (2.6)$$

которое надо решать при граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \eta=0, \vartheta=0, \\ \text{при } \eta=\infty, \vartheta=1. \end{array} \right\} \quad (2.6')$$

Уравнение (2.6) легко решается в квадратурах и приводит к следующему результату¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(\eta) &= C(\text{Pr}) \int_0^\eta e^{-\frac{1}{2} \text{Pr} \int_0^\eta \varphi(\eta) d\eta} d\eta \\ C(\text{Pr}) &= \left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \text{Pr} \int_0^\eta \varphi(\eta) d\eta} d\eta \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Заметим, что учет влияния притока тепла за счет работы внутреннего трения, т. е. решение уравнения (2.2), при наличии в правой части дополнительного члена $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$, несколько усложнил бы задачу. Как легко усматривается из уравнения (1.21) и (1.22), при $\text{Pr} = 1$ получается то же решение, что и (2.7), только для безразмерной температуры „торможения“; при $\text{Pr} \neq 1$ уравнение (2.6) стало бы неоднородным, но также приводилось бы к квадратурам.

Обращаясь к анализу результата (2.7), видим, что при заданном числе Прандтля Pr можно легко найти $\vartheta(\eta)$ для любого η , например графическим интегрированием. На рис. 24 приведены графики ϑ при различных значениях числа Pr . По интерполяции Польгаузена в интервале $0,6 < \text{Pr} < 15,0$ функция $C(\text{Pr})$ может быть представлена в виде:

$$C(\text{Pr}) = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr}}. \quad (2.8)$$

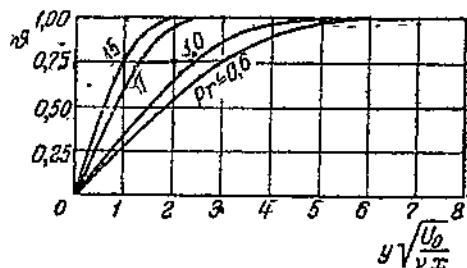


Рис. 24.

Наличием кубического корня в правой части объясняется возможность приближенной замены для воздуха ($\text{Pr} \approx 0,8$) числа Pr на единицу.

Случай $\text{Pr} = 1$, как мы уже знаем из предыдущего параграфа, приводит к подобию полей перепадов температур $T_w - T$ и скоростей u в соответствующих сечениях.

Опыты Элиаса²⁾ над воздухом вполне удовлетворительно подтвердили этот факт как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя на пластинке.

Составляя выражение для количества тепла q_w , протекающего в единицу времени через единицу площади в данной точке (в размер-

¹⁾ E. Pohlhausen. Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. ZAMM, 1, 115, 1921; принятый аргумент η в два раза больше, чем аргумент Польгаузена, но это не существенно; наше $C(\text{Pr}) = \frac{1}{2} a(\text{Pr})$ у Польгаузена.

²⁾ F. Elias. Die Wärmeübertragung einer geheizten Platte an strömende Luft. ZAMM. H. 6, S. 453, 1929; H. 1, S. 1, 1930.

ных величинах), и для коэффициента местной теплоотдачи α , равного отношению q_w к перепаду температур, получим:

$$q_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda \cdot C(\text{Pr}) (T_w - T_0) \sqrt{\frac{U_0}{\nu}}, \quad \alpha = \frac{q_w}{T_w - T_0}. \quad (2.9)$$

Сравнивая эту формулу с формулой напряжения τ_w трения на стенке, видим, что отношение $\frac{q_w}{\tau_w}$ не зависит от x , а только от разности температур и физических свойств жидкости; взяв данное Блязиусом выражение τ_w [формула (4.9) главы I]:

$$\tau_w = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}},$$

получим:

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{C(\text{Pr})}{0,332} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{T_0 - T_w}{U_0} \quad (2.10)$$

$$(q_w > 0 \text{ если } T_0 > T_w, \quad q_w < 0 \text{ если } T_0 < T_w).$$

При числе Прандтля, равном единице, $C(1) = 0,332$ и мы получаем формулу Рейнольдса-Прандтля¹⁾

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{T_0 - T_w}{U_0} = \frac{c(T_0 - T_w)}{\rho U_0}, \quad (2.11)$$

дающую связь между потоком тепла через стенку и напряжением трения на стенке. Заметим, что выражение $c(T_0 - T_w)$ можно рассматривать как количество тепла, которое отдала (приняла) бы единица массы жидкости во внешнем потоке в единицу времени, охладившись (нагревшись) до температуры стенки; ρU_0 — то изменение количества движения, которое произошло, если бы жидкость приняла скорость стенки (затормозилась). Равенство (2.11) утверждает, что в любом сечении пограничного слоя отношение этих двух величин равно отношению потока тепла к напряжению трения на стенке. Если $\text{Pr} \neq 1$, то в пропорции (2.11) следует ввести еще функцию Pr .

Для случая $\text{Pr} = 1$ предыдущие результаты могут быть обобщены и на сжимаемый газ. Обозначая вновь через q_w и τ_w — поток тепла через единицу площади стенки в единицу времени и напряжение трения на стенке в том же месте, получим:

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w.$$

Используя выведенное ранее соотношение (1.16) между температурой и скоростью, придем к соотношению Карман-Тзяна

$$\begin{aligned} \frac{q_w}{\tau_w} &= \frac{\lambda_w}{\mu_w} \cdot \frac{T_0}{U_0} \left[1 - \frac{T_w}{T_0} + \frac{k-1}{2} \text{Ba}^2 \right] = \frac{\lambda_w}{\mu_w} \cdot \frac{T_0 - T_w}{U_0} + \frac{k-1}{2} \cdot \frac{\lambda_w}{\mu_w} \cdot \frac{T_0}{U_0} \text{Ba}^2 = \\ &= \frac{c_p(T_0 - T_w)}{\rho_w U_0} + \frac{k-1}{2} \frac{c_p T_0}{\rho_w U_0} \cdot \text{Ba}^2, \quad (2.12) \end{aligned}$$

¹⁾ L. Prandtl. Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit. Phys. Zeitschr., 1910, S. 1072; подробнее см. А. Гухман, Физические основы теплопередачи, ч. I, 1934, стр. 213.

которое можно рассматривать как обобщение формулы Рейнольдса-Прандтля на случай сжимаемого газа ($Pr=1$).

Если перейти к температурам торможения, то мы придадим формуле (2.12) вновь вид (2.11):

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{c_p (0_0 - 0_w)}{Pr U_0}. \quad (2.12')$$

Здесь лишний раз подтверждается удобство введения температуры „торможения“ в вопросы динамики сжимаемого газа.

Не имея возможности в настоящем курсе останавливаться на подробностях и отсылая интересующихся к оригинальному исследованию

Кармана и Тзяна, приведем в заключение графики скорости и температуры в пограничном слое пластины при температуре набегающего потока T_0 , в четыре раза превосходящей температуру стенки T_w (рис. 25). На рис. 23 показана зависимость коэффициента сопротивления пластины от Re при данном Re (кривая II). Расчет сделан по методу Кармана-Тзяна.

Настоящая книга не преследует целей изложения теории теплопередачи, поэтому мы удовольствуемся данным выводом формул (2.9), (2.10), (2.11) и (2.12) для местной теплоотдачи и не будем переходить к формулам для суммарной теплоотдачи и анализу этих формул; отсылаем интересующихся к ранее перечисленным оригинальным работам.

Задача о теплоотдаче пластинки при продольном ее обтекании несжимаемой жидкостью составила предмет многих исследований. Отметим прежде всего работу Пирси и Шмидта¹⁾, в которой авторы дают приближенное решение, основанное на применении метода, аналогичного методу Озеена, изложенного нами в предыдущей главе. Анализ приводит их к приближенной формуле:

$$C(Pr) = 0,404 \sqrt[3]{Pr},$$

при $Pr=1$, дающей результат, примерно на 20% превышающий точное значение 0,332 по Польшаузену.

Из приближенных решений задачи следует отметить еще решение Г. Н. Кружилина²⁾, который разработал метод теплового погра-

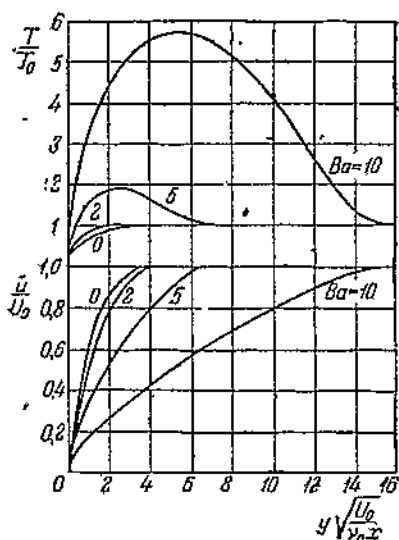


Рис. 25.

¹⁾ Piercy and Schmidt. Phil. Mag. V, 17, № 112 (1934).

²⁾ Г. Н. Кружилин. Исследование теплового пограничного слоя. Журн. Техн. Физики, т. VI, вып. 3, 1936 г.

ничного слоя конечной толщины, аналогичный методу Кармана-Польгаузена. Ограничиваясь использованием интерполяционного полинома второй степени для профиля скоростей и беря полином четвертой степени для температур, Г. Н. Кружилин составляет уравнение баланса тепла для элемента пограничного слоя и в результате получает формулы:

$$C(\text{Pr}) = 0,335 \sqrt{\text{Pr}}, \quad \alpha = 0,335 \lambda \sqrt{\text{Pr}} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}},$$

весьма близко подходящие к решению Польгаузена. Как уже ранее упоминалось, метод конечного слоя для сжимаемой жидкости применялся Ф. Франклем и Т. Карманом. Ряд авторов занимался вопросом теплоотдачи при чисто конвективном переносе тепла, т. е. при замене скоростей в жидкости скоростями по потенциальному закону идеальной жидкости ¹⁾.

§ 3. Ламинарный „след“ за телом. След за пластинкой продольно обтекаемой вязкой жидкостью

Сходя с задней кромки хорошо обтекаемого тела, жидкость течет согласно законам теории пограничного слоя; в момент схода исчезает основная причина подтормаживания жидкости — влияние стенки — и начинается процесс выравнивания скоростей от профиля в пограничном слое до однородного потока на бесконечности. Область за телом (теоретически — бесконечная, практически — ограниченная), в которой происходит выравнивание профиля продольных скоростей, называют „следом“ или „тенью“ тела.

Задача о движении жидкости в „следе“ тела представляет большие трудности. Как уже ранее было указано, решая задачу о продольном обтекании пластинки по методу Блязюса, мы принимаем весьма упрощенные граничные условия, а именно, полагаем продольную скорость u равной нулю при $y=0$ и при любом $x>0$, т. е. фактически решаем задачу об обтекании пластинки бесконечной длины, а затем уже подсчитываем трение на²⁾ выбранном участке пластины, не считаясь с влиянием на него части пластинки, расположенной вниз по потоку. Решение задачи об интегрировании уравнений Прандтля при граничных условиях

$$\text{при } y=0, \quad u=0, \quad \text{если } 0 < x \leq L,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{если } L \leq x,$$

$$v=0, \quad \text{при } x>0$$

$$\text{при } y=\pm\infty, \quad u=U_0,$$

¹⁾ W. Bickley. Some Solutions of the Problem of Forced Convection. Phil. Mag. Vol. 20, N 132, 1935, p. 322; в этой, исключительно интересной по содержанию работе можно найти обзор предыдущих работ Буссинеска, Кинга и др. более современных работ. В СССР вышло по тому же вопросу исследование Л. Н. Сретенского. Прикл. Матем. и механика, т. II, № 2, 1935.

соответствующих стеканию жидкости с задней кромки пластинки для $x = L$ (при $x > L$ в силу симметрии потока $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$), до сих пор не выполнено и представляет большие затруднения, так как при наличии длины L мы, очевидно, уже не будем иметь возможности составлять решения в функции от аргумента $y/\sqrt{x}$ и сводить нелинейные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Первым шагом к упрощению задачи о следе может явиться следующий прием. В интервале $0 < x \leq L$ задача решается по Блязиусу (для бесконечной пластины), находится профиль скоростей при $x = L$, а уже затем ставится задача о розыскании решения уравнений Прандтля при граничных условиях:

$$\text{при } y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0$$

$$\text{при } y = \infty, \quad u = U_0,$$

при $x = L$, $u = u(L, y)$ — заданная функция y (профиль по Блязиусу).

Эта значительно упрощенная задача является частным случаем более общей, поставленной еще Прандтлем, задачи о развитии в пограничном слое заданного начального профиля скоростей. Решение этой задачи было дано впервые С. Гольдштейном¹⁾ в 1930 г.

Метод Гольдштейна настолько сложен и кропотлив (представление решения в виде рядов по степеням y с последующим численным вычислением коэффициентов), что мы не можем в настоящем курсе дать его изложение и отсылаем интересующихся к первоисточнику. Однако результаты его вычислений, как материалы для сравнений с другими более приближенными методами, представляют большой интерес и поэтому мы приводим их в форме графиков на рис. 26.

На этих графиках отложена безразмерная скорость $\frac{u}{U_0}$ в функции от безразмерной ординаты $\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{U_0}{xL}} = \frac{1}{2}\frac{y}{L\sqrt{R}}$ для различных сечений по $\frac{x}{L}$ за пластинкой, причем x отсчитывается от задней кромки вниз по потоку. При $\frac{x}{L} = 0$ мы имеем профиль скоростей по Блязиусу, рассчитанный для $x = L$, последующие профили представляют вырождения профиля Блязиуса в следу за пластинкой; видим, что при $\frac{x}{L} > 0$ и $y = 0$, $\frac{u}{U_0}$ уже не равно нулю, а растет с $\frac{x}{L}$, причем производные $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$. На рис. 27 дан график роста $\left(\frac{u}{U_0}\right)_{y=0}$ с $\frac{x}{L}$. Теория Гольдштейна дает решение лишь для малых относительных расстояний $\frac{x}{L}$ за пластинкой, примерно, до $\frac{x}{L} = 0,5$. На гра-

¹⁾ S. Goldstein. Concerning some solutions of the Boundary Layer Equations in Hydrodynamics. Proceed. of the Cambridge Philos. Society, Vol. XXV, part I, 1930, p. 1—25.

фиках пунктиром даны кривые Гольдштейна, проведенные им при помощи экстраполяции.

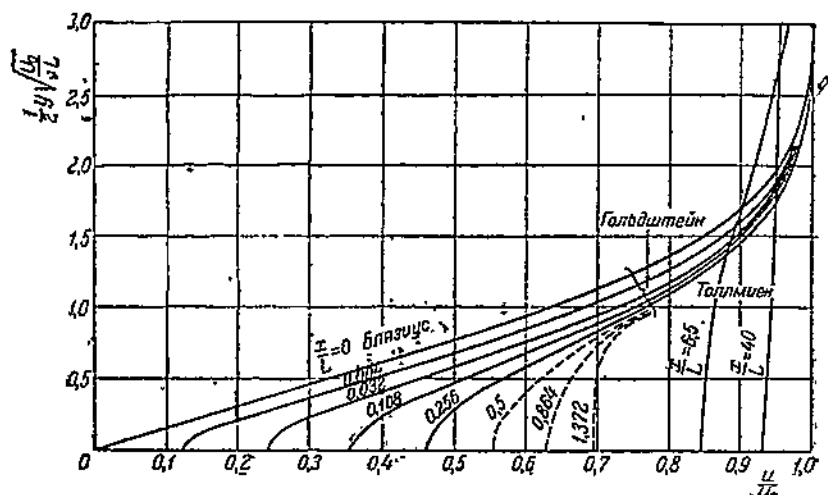


Рис. 26.

При больших значениях $\frac{x}{L}$, как показал В. Толmien,¹⁾ можно построить вполне удовлетворительное решение простой линеаризацией

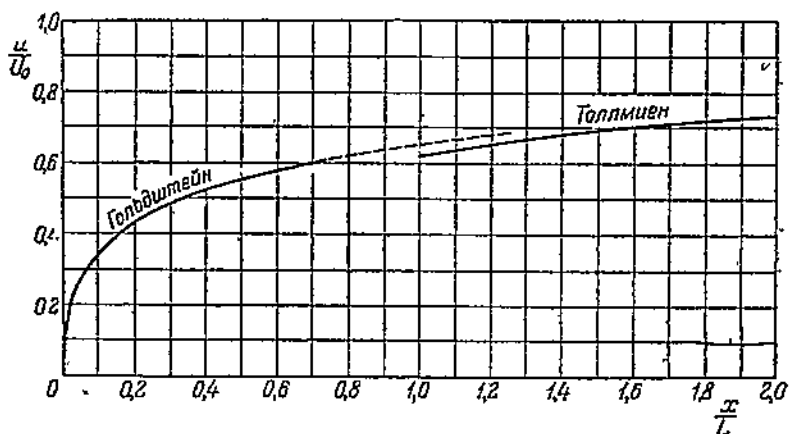


Рис. 27.

уравнений Прандтля приемом, аналогичным методу Озена. Обозначая через u размерную продольную скорость, введем в рассмотрение

¹⁾ W. Tollmien, Grenzschichttheorie. Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, 1 Teil, Leipzig, 1931, S. 269.

разность скоростей U_0 и u :

$$u_1 = U_0 - u, \quad u = U_0 - u_1.$$

Скорость u_1 будет убывать с ростом $\frac{x}{L}$, поэтому, опуская в первом из уравнений пограничного слоя квадратичные члены с u_1 , получим уравнение:

$$U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (3.1)$$

которое можно легко решить при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0, \\ \text{при } y=\infty, \quad u_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1')$$

Эта простая «тепловая» задача об охлаждении стержня имеет, как известно, решение, соответствующее «источнику»:

$$u_1 = \text{const} \cdot e^{-\frac{U_0 y^2}{4\nu x}}. \quad (3.2)$$

Для определения величины const поступим так же, как уже делали в § 1 настоящей главы, а именно вычтем из уравнения сохранения массы (уравнения неразрывности), умноженного на ρU_0 :

$$\rho \frac{\partial (U_0 u)}{\partial x} + \rho \frac{\partial (U_0 v)}{\partial y} = 0,$$

уравнение Прандтля при $\frac{dp}{dx} = 0$:

$$\rho \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \rho \frac{\partial (uv)}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho u (U_0 - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (U_0 - u)] = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.3)$$

Интегрируя обе части этого уравнения в пределах y от $-\infty$ до $+\infty$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u (U_0 - u) dy &= 2\tau_w(x) \quad \text{при } x \leq 0 \\ &= 0 \quad \text{при } x > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в следу пластины ($x > 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u (U_0 - u) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho (U_0 - u_1) u_1 dy = 2 \int_0^L \tau_w(x) dx \quad (3.4)$$

или, откидывая вторые степени u_1 и вычисляя интеграл справа по Блязиусу [вспомнить (4.10) главы I]:

$$\rho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy = 1,328 \rho U_0^2 L \sqrt{\frac{\nu}{U_0 L}}. \quad (3.4')$$

Подставляя сюда вместо u_1 его выражение по (3.2) и вычисляя интеграл, получим:

$$\text{const} = \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} U_0 \sqrt{L},$$

так что профиль скоростей в следу пластины в достаточно большом удалении от задней кромки (большие $\frac{x}{L}$) пластины будет определяться уравнением:

$$u_1 = U_0 - u = \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{U_0}{\sqrt{\frac{x}{L}}} \cdot e^{-\frac{U_0 y^2}{4\nu x}}. \quad (3.5)$$

Отсюда получаем

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{L}}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu L}}\right)^2 \frac{L}{x}}. \quad (3.6)$$

Скорость на оси симметрии следа, т. е. при $y=0$, будет идти асимптотически к U_0 по закону

$$\left(\frac{u}{U_0}\right)_{y=0} = 1 - \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{L}}}. \quad (3.7)$$

Кривые, соответствующие решению Толмиена, нанесены на тех же графиках (рис. 26 и 27).

Вопрос о ламинарном следе не представляет большой актуальности, так как на самом деле ламинарный след весьма мало устойчив даже при сравнительно малых рейнольдсовых числах и быстро переходит в турбулентное состояние; об этом скажем подробнее в следующем отделе, где будет изложена теория турбулентного следа.

В заключение укажем, что асимптотическое решение Толмиена, представленное формулой (3.2), как всякое решение типа „источника“, представляет собою распределение скоростей в следу, не зависящее от начального распределения. Иными словами, это распределение скоростей не зависит от формы тела, след которого мы рассматриваем. Легко показать, что постоянная интегрирования, входящая в равенство (3.2), однозначно определяется ваданием лишь одной суммарной характеристики тела, создающего след, — его сопротивления. В самом деле, обозначая полное сопротивление тела через W и применяя теорему количеств движения к трубке тока между двумя сечениями (рис. 28): одним (I) далеко впереди тела, где все скорости равны U_0 ,

и вторым (II)—за телом, можем при достаточно больших сечениях трубки: $2h$ —в I сечении и $2h'$ —во II сечении пренебречь перепадом давлений во внешнем безграничном потоке и написать:

$$\rho U_0^3 \cdot 2h - \int_{-h'}^{+h'} \rho u^3 dy = W;$$

с другой стороны, по условию несжимаемости жидкости

$$U_0 \cdot 2h = \int_{-h'}^{+h'} u dy.$$

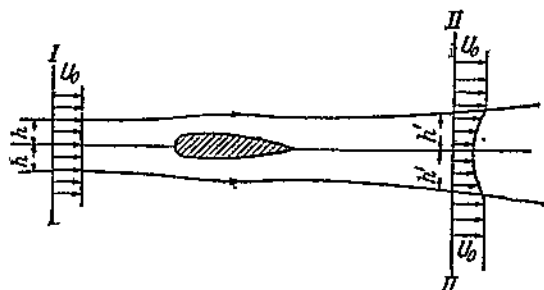


Рис. 28.

Умножая обе части этого равенства на ρU_0 и вычитая его из предыдущего, найдем:

$$\rho U_0 \int_{-h'}^{+h'} u dy - \int_{-h'}^{+h'} \rho u^2 dy = W,$$

или, переходя к пределу при $h' \rightarrow \infty$,

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U_0 - u) dy = W. \quad (3.8)$$

Заменяв здесь $U_0 - u$ на u_1 , u на $U_0 - u_1$ и пренебрегая старшими степенями u_1 , получим формулу

$$\rho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy = W, \quad (3.9)$$

представляющую обобщение приближенной формулы (3.4') на случай любого тела. Подставляя в равенство (3.9) значение u_1 по (3.2), получим:

$$\text{const} = \frac{W}{2 \sqrt{\pi} \rho \sqrt{U_0}}$$

и, следовательно, в общем случае ламинарного следа за любым телом в достаточном удалении от него будем иметь профиль скоростей:

$$u_1 = U_0 - u = \frac{W}{2 \sqrt{\pi} \cdot \rho \cdot \sqrt{U_0 x}} \cdot e^{-\frac{U_0 y^2}{4\nu x}}. \quad (3.10)$$

Рассуждением, аналогичным примененному в предыдущем параграфе, можно показать, что распределение тепла в следе, вдалеке от тела, при $Pr=1$ будет подобно распределению скоростей; подробнее

к этому вопросу вернемся в следующем отделе, где разберем явление теплообмена в турбулентном следе. Здесь же укажем на одну особенность задачи о температурном следе. Чтобы граничные условия для скоростного поля и температурного поля были в следе одинаковы, необходимо рассматривать не отношение перепадов температур $\frac{T_w - T}{T_w - T_0}$, как мы это делали в задаче о теплообмене в пограничном слое на пластинке, а просто отношение $\frac{T}{T_0}$; тогда условия на границах будут для скоростного и температурного поля одинаковы:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0, \quad \frac{\partial \left(\frac{T}{T_0} \right)}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{u}{U_0} \right)}{\partial y} = 0; \\ \text{при } y \rightarrow \infty \quad \frac{T}{T_0} &\rightarrow 1, \quad \frac{u}{U_0} \rightarrow 1; \end{aligned}$$

из безразмерных уравнений (при сохранении для безразмерных величин тех же обозначений, что и для размерных):

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

при $Pr=1$ и будет следовать равенство u и T . При $Pr \neq 1$ можно было бы провести исследование, аналогичное данному Польгаузен о м см. предыдущий параграф).

Заметим, что профили (3.5) и (3.10) соответствуют так называемому „нормальному“ распределению по Гауссу (x при фиксированном y).

§ 4. Ламинарная струя в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью

К задаче об аэродинамическом следе тела близко подходит другая, на первый взгляд совершенно отличная задача о распространении ламинарной струи. На самом деле мы имеем здесь дело с теми же дифференциальными уравнениями и принципиально с теми же граничными условиями по y , но с другим условием при $x=0$. Если в задаче об аэродинамическом следе пластинки стоял вопрос об исследовании законов выравнивания под торможением стеной профиля до однородного поля скорости U_0 на бесконечном удалении, то здесь — в задаче о струе, — наоборот, решается вопрос о торможении врывающейся в неподвижную жидкость струи с некоторым профилем скоростей и последующим затуханием скоростей до нуля. Здесь, по существу, мы имеем разновидность одной и той же общей задачи о развитии в пограничном слое некоторого, заданного наперед, профиля скоростей в одном („начальном“) сечении. Сравнительно просто решается при этом задача типа „источника“, т. е. задача о распространении бесконечно тонкой струи, выходящей с бесконечно большой скоростью, но с конечным

заданным наперед, и импульсом (количеством движения) из бесконечно тонкого отверстия. Задание такого начального условия позволяет свести дифференциальное уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению. Впервые задача о ламинарной струе была решена Шлихтингом¹⁾, причем плоский случай был им разобран приближенно с указанием на отсутствие точного решения. Это указание — ошибочно; мы приводим решение в конечной форме²⁾.

Рассмотрим сначала задачу о плоской струе. Направим ось x -ов в плоскости симметрии струи (рис. 29), ось y -ов — по перпендикуляру к оси x -ов и начало координат поместим в источник струи. Сохраним для проекций скорости обычные обозначения u и v . Обозначим через J — количество движения (импульс) струи, т. е. величину:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy. \quad (4.1)$$

Если струя вырывается в безграничное пространство, то никакого перепада давлений в продольном направлении во внешней жидкости она не создает. По основному свойству пограничного слоя, совершенно аналогично тому, как мы имели это в случае пластинки, поперек струи перепада давлений также нет, т. е. во всем потоке давление одинаково. Отсюда по теореме количества движения (импульсов) количество движения J одинаково для всех сечений, перпендикулярных оси x и, следовательно,

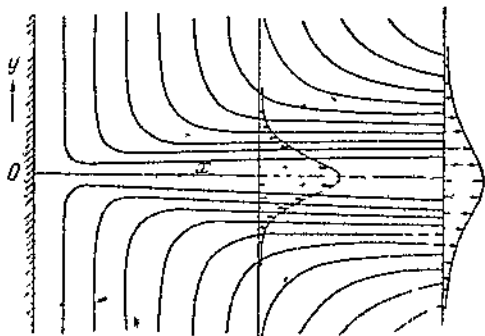


Рис. 29.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \text{const} = J_0, \quad (4.2)$$

где J_0 — начальный заданный импульс струи.

Интересно отметить одну особенность задачи о струе: так как импульс J_0 , пропорциональный квадрату скорости, конечен, несмотря на бесконечно большую скорость истечения струи, то расход, пропорциональный первой степени, будет бесконечно мал. Физически это надо понимать так, что из щели вырывается очень малое секундное количество жидкости, но с конечным импульсом.

¹⁾ H. Schlichting. Laminare Strahlausbreitung. ZAMM, Bd. 13, H. 4, August 1933, S. 260.

²⁾ Решение в конечной форме было дано также Биклейем. См. Bickley. Phil. Mag., (7), 23 (1937).

Из уравнения (4.2) следует:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = K_0 = \frac{J_0}{\rho}; \quad (4.3)$$

величину K_0 будем называть кинематическим импульсом.

Уравнения движения жидкости в струе будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

как мы уже упоминали, $\frac{dp}{dx} = 0$. Граничные условия будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad v=0 \\ \text{при } y=\infty, \quad u &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4')$$

причем решение подчиняется интегральному условию (4.3).

Обозначим, как уже ранее это делали, через L масштаб продольных длин, через U — масштаб продольных скоростей, через $Y = L/\sqrt{R}$ и $V = \frac{U}{\sqrt{R}}$ масштабы поперечных длин и скоростей; $R = \frac{UL}{\nu}$. В безразмерных величинах, для которых сохраняем прежние обозначения, уравнения (4.4), (4.4') и (4.3) перейдут в следующие:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad v=0 \\ \text{при } y=\infty, \quad u &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.5')$$

$$U^3 \cdot Y \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \frac{U^2 L}{\sqrt{R}} \cdot n = K_0, \quad (4.6)$$

где n — некоторое произвольное безразмерное число, зависящее от выбора масштабов U и L ; мы им распорядимся в дальнейшем.

Единственным заданным наперед масштабом нашей задачи является величина K_0 ; согласно уравнению (4.6) через него может быть выражен один из масштабов U или L . Если за такой масштаб принять L , то масштаб U останется произвольным и решение нашей задачи не должно от него зависеть. По (4.6) получим:

$$U^3 L \sqrt{\frac{\gamma}{UL}} \cdot n = K_0,$$

следовательно, все масштабы могут быть выражены через U по формулам:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{K_0^2}{n^2 \nu} \cdot U^{-3} \\ Y &= \frac{K_0}{n} \cdot U^{-2} \\ V &= \frac{n \nu}{K_0} \cdot U^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Условие, чтобы размерная скорость $u_1 = Uu$ не зависела от U , может быть записано так:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dU} &= \frac{d}{dU} [Uf(x, y)] = \frac{d}{dU} \left[Uf\left(\frac{x_1}{L}, \frac{y_1}{Y}\right) \right] = \\ &= \frac{d}{dU} \left[Uf\left(\frac{n^2 \nu}{K_0^2} U^3 x_1, \frac{n}{K_0} U^2 y_1\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Выполняя дифференцирование, получим уравнение:

$$f + 3x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (4.8)$$

Решая его обычным методом, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} &= \frac{dx}{3x} = \frac{dy}{2y} \\ f \cdot x^{1/3} &= C_1, \quad \frac{y}{x^{2/3}} = C_2 \\ u = f &= x^{-1/3} \varphi\left(\frac{y}{x^{2/3}}\right) = x^{-1/3} \cdot \varphi(\eta). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Введем в рассмотрение безразмерную функцию тока ψ ; по определению этой функции:

$$\psi(x, y) = \int_0^y u dy = x^{-1/3} \int_0^y \varphi(\eta) d\eta = x^{1/3} \int_0^\eta \varphi(\eta) d\eta = x^{1/3} F(\eta). \quad (4.10)$$

После этого легко все величины, входящие в уравнение (4.5), выразить через функцию $F(\eta)$. Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} u &= x^{-1/3} \cdot F'(\eta), \quad v = \frac{1}{3} x^{-2/3} \cdot (2\eta F' - F) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{3} x^{-4/3} (F' + 2\eta F''), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{-1} \cdot F'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^{-2/3} \cdot F''' \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Уравнение (4.5) переходит в обыкновенное уравнение

$$F''' + \frac{1}{3} (F'^2 + FF'') = 0, \quad (4.12)$$

которое легко интегрируется. Имеем первый интеграл

$$F'' + \frac{1}{3}FF' = C_1.$$

Из граничных условий (4.5') и уравнений (4.11) следует, что $C_1 = 0$. Второй интеграл получается простым почленным интегрированием предыдущего уравнения и имеет вид:

$$F' + \frac{1}{6}F^2 = \frac{1}{6}C_2^2,$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования. Пользуясь свободой выбора n , подчиним F' условию $F' = 1$ при $\eta = 0$; тогда $C_2 = \sqrt{6}$. Предыдущее уравнение до конца интегрируется и дает

$$F(\eta) = \sqrt{6} \operatorname{th}\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right). \quad (4.13)$$

Отсюда уже нетрудно найти и безразмерные скорости

$$u = x^{-1/2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right)}, \quad v = \frac{1}{3}x^{-1/2} \left[\frac{2\eta}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right)} - \sqrt{6} \cdot \operatorname{th}\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right) \right].$$

Обозначая максимальную продольную скорость на оси струи через u_m и замечая, что она имеет место при $\eta = 0$, получим

$$u_m = x^{-1/2}, \quad \frac{u}{u_m} = F'(\eta) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right)}. \quad (4.14)$$

Остается найти еще число n , нужное для перехода от безразмерных величин к размерным. Число n , согласно равенства (4.6), определяется так

$$\begin{aligned} n &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = x^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch}^4\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\operatorname{ch}^4\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right)} = \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{6} = 3,27. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом задача решена в конечном виде. Интересно отметить, что при $\eta \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \sqrt{6}$, а не к бесконечности. Это показывает, что расход через бесконечное сечение, нормальное оси потока, конечен. Этот расход (размерный) легко подсчитать по формуле (значек „1“ указывает на то, что величины — размерные):

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy_1 = \frac{UL}{\sqrt{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} u dy = \sqrt{\nu UL} \cdot x^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{6}}\right)} = \\ &= 2\sqrt{6\nu UL} \cdot L^{1/2} \cdot x_1^{1/2} = 3,27 \sqrt{\nu K_0 x_1}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

при $x_1 = 0$ расход равен нулю, с ростом x_1 расход растет за счет подтекающих с боков струй жидкости, вовлекаемых в движение вязким взаимодействием.

Аналогичным методом может быть исследована и пространственная струя, симметричная относительно оси. Сохраняя прежние обозначения, будем теперь считать y за расстояние точки в пространстве от оси струи OX (рис. 29). Импульс струи зададим равенством

$$\int_0^{\infty} 2\pi y \cdot \rho u^2 dy = J_0 = \rho K_0. \quad (4.17)$$

В силу отсутствия перепада давлений в продольном направлении (пространство, куда входит струя, безгранично) этот импульс, как и прежде, не изменяется при переходе от одного нормального сечения струи к другому.

Дифференциальные уравнения пограничного слоя получатся из обычных уравнений Навье-Стокса, составленных для симметричного движения, если сохранить лишь уравнение для продольной скорости u и уравнение неразрывности, причем в первом уравнении можно откинуть член $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ по сравнению с членами $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y}$. Будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial(yu)}{\partial x} + \frac{\partial(yv)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad v=0, \\ \text{при } y=\infty \quad u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Переходя к безразмерным величинам при помощи тех же масштабов, что и в плоском случае, и сохраняя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, перепишем уравнения (4.18) в виде:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial(yu)}{\partial x} + \frac{\partial(yv)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Граничные условия сохраняют прежний вид.

В настоящем случае мы вновь можем воспользоваться тем, что нам заданы лишь величины K_0 и ν , масштабы же L и U — произвольны; подчиним их лишь условию, чтобы безразмерный кинематический импульс равнялся единице (здесь для разнообразия мы не будем вводить величину n , как в плоском случае):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi y u^2 dy = 1. \quad (4.21)$$

Для этого надо, очевидно, связать масштабы L и U равенством:

$$U^2 Y^2 = \frac{U^2 L^2}{R} = UL\nu = K_0, \quad (4.22)$$

где под R мы понимаем обычное выражение для рейнولدсова числа $\frac{UL}{\nu}$; за определяющее рейнولدсово число в силу равенства (4.22) можно принять число R_0 :

$$R_0 = \frac{K_0}{\nu^2};$$

корень квадратный из обратной ему величины мы обозначим через

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\sqrt{K_0}}.$$

В силу равенства (4.22) масштабы U и L связаны между собой; примем теперь, в отличие от плоского случая, за основной масштаб L , чтобы подчеркнуть несущественность этого выбора. Масштаб L произволен и в решение задачи входить не должен. Следовательно, по предыдущему:

$$\frac{du_1}{dL} = \frac{d}{dL} \left[U f \left(\frac{x_1}{L}, \frac{y_1}{L} \sqrt{R} \right) \right] = 0.$$

Здесь надо до дифференцирования выразить U через L по (4.22). Условие независимости u_1 от L приведет к уравнению в частных производных:

$$u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.23)$$

решение которого элементарно и дает для u следующий тип функциональной зависимости (φ — символ произвольной функции):

$$u = \frac{1}{x} \varphi \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} \varphi(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x}. \quad (4.24)$$

Пользуясь уравнением неразрывности, можем выразить через ту же произвольную функцию и v . В самом деле, имеем по (4.18):

$$\begin{aligned} uv &= - \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} (yu) dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{y}{x} \varphi \left(\frac{y}{x} \right) dy = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[x \int_0^\eta \eta \varphi(\eta) d\eta \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Проще всего для дальнейшего ввести функцию тока ψ , связанную с проекциями скоростей такими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

для определения функции тока ψ получим равенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[x \int_0^{\eta} \eta \varphi(\eta) d\eta \right],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \eta \varphi(\eta),$$

откуда сразу следует, что

$$\psi = x \int_0^{\eta} \eta \varphi(\eta) d\eta = x \cdot F(\eta). \quad (4.27)$$

Функцию $F(\eta)$ мы и будем рассматривать, как неизвестную функцию. Подставляя выражения скоростей через функцию $F(\eta)$:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{y} F'(\eta) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\eta} F'(\eta) \\ v &= \frac{1}{x} \left[F'(\eta) - \frac{1}{\eta} F(\eta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

в основные уравнения задачи (4.18), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2 y} F' F'' - \frac{1}{x y^2} F'^2 + \frac{1}{y^3} F F' + \frac{1}{x^2 y} F' F'' - \frac{1}{x y^2} F F'' = \\ = \frac{1}{y^3} F' - \frac{1}{x y^2} F'' + \frac{1}{x^2 y} F''', \end{aligned}$$

или

$$F''' - \frac{1}{\eta} F'' + \frac{1}{\eta^2} F' = \frac{1}{\eta^3} F F' - \frac{1}{\eta} F'^2 - \frac{1}{\eta} F F''. \quad (4.29)$$

Это на первый взгляд сложное уравнение чрезвычайно легко интегрируется, если заметить, что оно может быть переписано так:

$$\left(F'' - \frac{1}{\eta} F' \right)' = \frac{1}{\eta^2} F F' - \frac{1}{\eta} (F F')' = - \left(\frac{1}{\eta} F F' \right)'$$

и, следовательно:

$$F' - \eta F'' = F F' + \text{const}; \quad (4.30)$$

для определения константы достаточно заметить, что при $y \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ согласно первого из равенств (4.28),

$$F'(\eta) = u y \rightarrow 0,$$

тогда будем иметь

$$F' - \eta F'' = F F'. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) можно легко решить разложением в ряды¹⁾; полагая $F(0) = 0$ (произвол в выборе константы для функции тока) и $F'(0) = 0$ на основании первого из (4.28) и конечности u , получим ряд:

$$F(\eta) = a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \eta^4 + a_5 \eta^5 + a_6 \eta^6 + \dots;$$

¹⁾ Хотя оно решается и в конечной форме, но несколько более кропотливо.

подставляя его в (4.31), найдем:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{4} a_2^2 \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{1}{16} a_2^3 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

так что разложение

$$F(\eta) = a_2 \eta^2 \left[1 - \frac{1}{4} a_2 \eta^2 + \left(\frac{1}{4} a_2 \eta^2 \right)^2 - \dots \right]$$

оказывается ничем иным как произведением $a_2 \eta^2$ на геометрическую прогрессию:

$$F(\eta) = \frac{a_2 \eta^2}{1 + \frac{1}{4} a_2 \eta^2} \quad (4.33)$$

или, полагая:

$$a_2 = \gamma^2, \quad \gamma \eta = \xi, \quad (4.34)$$

получим:

$$F(\eta) = \frac{\xi^2}{1 + \frac{1}{4} \xi^2} = \Phi(\xi). \quad (4.35)$$

Коэффициент a_2 легко получить из интегрального равенства (4.21), которое может быть переписано так:

$$\int_0^\infty 2\pi y u^2 dy = 2\pi x^2 \int_0^\infty \eta u^2 d\eta = 1; \quad (4.36)$$

для этого определим прежде всего u по (4.28)

$$u = \frac{1}{x} \frac{2a_2}{\left(1 + \frac{1}{4} a_2 \eta^2\right)^2} \quad (4.37)$$

и подставим в (4.36), тогда после простых выкладок, найдем:

$$a_2 = \frac{3}{16\pi}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}}. \quad (4.38)$$

Теперь уже можно выписать все окончательные результаты. Поле скоростей определяется так:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{x} \cdot \frac{2\gamma^2}{\left(1 + \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2\right)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2\gamma^2}{\left(1 + \frac{1}{4} \xi^2\right)^2} \\ v &= \frac{\gamma}{x} \cdot \frac{\xi - \frac{1}{4} \xi^3}{\left(1 + \frac{1}{4} \xi^2\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Если вернуться к обычным размерным координатам и скоростям, то получим по предыдущему:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{3K_0}{8\pi\nu x_1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi_1^2\right)^2} \\ v_1 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{K_0}}{x_1} \cdot \frac{\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_1^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\xi_1^2\right)^2}; \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \cdot \frac{\sqrt{K_0}}{\nu} \cdot \frac{y_1}{x_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Полный расход сквозь безграничную плоскость, нормальную к оси потока, оказывается, в отличие от плоского случая, независимым от импульса K_0 :

$$Q = 2\pi \int_0^\infty u_1 y_1 dy_1 = 8\pi\nu x_1. \quad (4.41)$$

Качественная картина линий тока приведена на рис. 29; профиль продольных скоростей показан на рис. 30. Профиль скоростей в плоской струе по типу аналогичен.

Определим в качестве условной внешней границы струи такую поверхность, на которой продольная скорость u_1 составляет малую часть от максимальной скорости на оси струи $u_{1\max}$ в соответствующем сечении:

$$\frac{u_1}{u_{1\max}} = n;$$

тогда, замечая, что

$$\begin{aligned} u_{1\max} &= (u_1)_{y_1=0} = \\ &= (u_1)_{\xi_1=0} = \frac{3K_0}{8\pi\nu x_1}, \end{aligned}$$

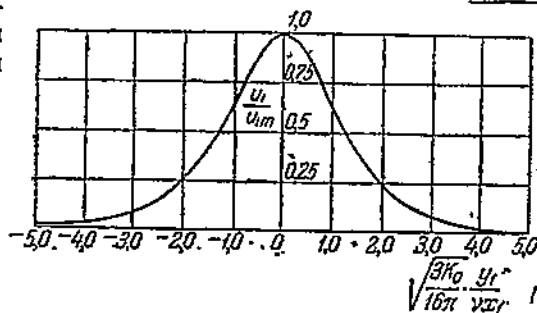


Рис. 30.

найдем уравнение искомой поверхности в виде

$$\frac{y_1}{x_1} = 2\sqrt{\frac{16\pi}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right)} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{K_0}} = \operatorname{tg} \alpha; \quad (4.42)$$

это — конус с углом раствора α .

Задаваясь, например, одним процентом отклонения ($n=0,01$), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx 24 \frac{\nu}{\sqrt{K_0}} = 24 \varepsilon, \quad (4.43)$$

где ε является характеристическим числом задачи. Чрезвычайно нагляден с физической стороны факт пропорциональности угла раствора конуса струи — вязкости жидкости и обрат-

иой пропорциональности того же угла корню квадратному из импульса струи.

Интересно подчеркнуть, что в случае круглой струи граница пограничного слоя (в принятом условном определении) в осевом сечении — прямая линия, в случае же плоской струи эта граница будет полукубической параболой (4. 14)

$$\eta = \frac{y}{x^{2/3}} = \text{const.}$$

При желании можно было бы ввести в рассмотрение „толщину вытеснения“.

§ 5. Некоторые случаи движения жидкости в пространственном ламинарном слое без продольного градиента давлений.

Мы до сих пор рассматривали случаи плоского пограничного слоя и лишь в случае круглой струи имели пример пространственного пограничного слоя в наиболее простом его случае — аксиальной симметрии. Более сложные случаи пространственного пограничного слоя еще весьма мало изучены. Общие уравнения пространственного пограничного слоя были даны впервые Т. Леви-Чивита¹⁾, но не были применены к частным задачам в виду крайней их сложности. Установлению интегральных соотношений, вытекающих из общих уравнений Леви-Чивита, посвящена статья Л. Е. Калихмана²⁾, также без приложений. В настоящей и следующих главах мы приводим некоторые случаи приближенного решения отдельных задач теории пространственного пограничного слоя³⁾. Отсутствие в задачах этого рода функции тока не позволяет пользоваться ни методом Блязиуса, ни методом Мизеса-Кармана-Милликена. Изложенный нами в § 7 предыдущей главы прием оказывается здесь полезным.

Рассмотрим движение вязкой жидкости, набегающей со скоростью U_0 на две пересекающиеся под прямым углом бесконечные пластины (рис. 31), причем будем предполагать, что скорость набегающего параллельна линии пересечения пластин. Направим по линии пересечения пластин ось OX , а по передним краям пластин — оси OY и OZ . Если обозначить проекции скорости через u , v и w , то обычным рассуждением можно убедиться в том, что уравнения движения в пограничном слое будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

¹⁾ T. Levi-Civita. Allgemeine Folgerungen aus der Prandtl'schen Grenzschichttheorie. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik. Aachen (1929).

²⁾ Л. Е. Калихман. Пространственный пограничный слой. Труды ЦАГИ вып. 371, 1939.

³⁾ Л. Г. Лойцянский. Об одной задаче пространственного пограничного слоя. Труды ЛИИ, Раздел физико-математических наук. № 1, 1937, стр. 1.

В первом уравнении отсутствует член $\frac{dp}{dx}$, равный нулю в виду отсутствия перепада давлений во внешнем потоке; второе и третье уравнения Навье-Стокса дают равенство нулю поперечных градиентов давлений ($\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$), что представляет известное свойство пограничного слоя. Для определения трех проекций скорости у нас остается всего лишь два уравнения. Третье уравнение можно получить, если исключить давление из второго и третьего уравнений Навье-Стокса (взять от обеих частей второго уравнения производные по z , от

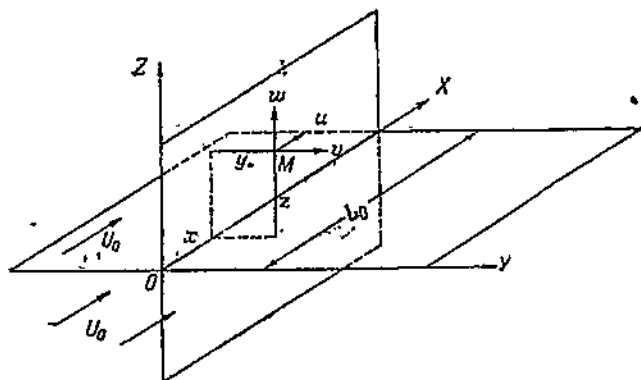


Рис. 31.

третьего — по y и результаты вычесть друг из друга). Имея в виду приближенное решение задачи по методу, изложенному в конце предыдущей главы, опустим это уравнение, так как оно необходимо лишь для разыскания v и w (вторичные течения), мы же удовольствуемся разысканием решения лишь для продольных скоростей u . Граничные условия мы выберем те же, что и в известной задаче об обтекании бесконечной пластинки плоско-параллельным потоком т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } y=0, \quad u=0, \quad v=0 \quad w=0; \\ \text{при } z=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad w=0; \\ \text{при } y \rightarrow \infty \text{ и } z \rightarrow \infty \quad u \rightarrow U_0. \end{aligned}$$

Если $y \rightarrow \infty$, а z не $\rightarrow \infty$, то решение переходит в соответствующее решение плоской задачи; последнее условие может служить для проверки решения.

Перейдем в уравнении (5.1) к безразмерным величинам, положив:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 u'; & v &= \frac{U_0}{\sqrt{R}} v'; & w &= \frac{U_0}{\sqrt{R}} w'; \\ x &= L x'; & y &= \frac{L}{\sqrt{R}} y'; & z &= \frac{L}{\sqrt{R}} z'; \\ R &= \frac{U_0 L}{\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где L — произвольная длина, ν — кинематическая вязкость жидкости. Легко видеть, что после преобразования (5.2) уравнение (5.1) примет вид (мы опускаем штрихи у безразмерных величин):

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

причем граничные условия останутся те же, за исключением того, что теперь уже при бесконечном удалении от обеих пластин $u \rightarrow 1$.

Можно показать, что наша задача должна иметь решение типа

$$u = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}, \frac{z}{\sqrt{x}}\right) = f(\eta, \zeta), \quad (5.4)$$

являющегося обобщением известного решения Блязиуса. Здесь, как мы уже ранее видели, все дело в том, что граничные условия предполагают пластины вдоль по потоку бесконечными; при подсчете сопротивления пластины продольной длины L мы суммируем трение от 0 до L , но совершенно не учитываем влияния этой длины L на профиль скоростей; условие эквивалентно следующему

$$\frac{du}{dL} = \frac{d}{dL} u(x', y', z') = \frac{\partial}{\partial L} u\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}, \frac{z}{L} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}\right) = 0.$$

Вычисляя указанную производную, найдем уравнение:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} z \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

решение которого, очевидно, будет:

$$u = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}, \frac{z}{\sqrt{x}}\right) = f(\eta, \zeta),$$

где f — пока произвольная функция.

Для розыскания грубой оценки решения применим метод, аналогичный методу Озеена (ср. § 7 предыдущей главы). Заменим в левой части первого из уравнений (5.3) u на 1 (т. е. размерное u на U_0), а v и w — на нуль.

Тогда придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.5)$$

которое при ранее сделанном замечании о типе решения (5.4) может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0, \quad (5.6)$$

причем решать его надо при граничных условиях:

при $\eta = 0$, $f = 0$; при $\zeta = 0$, $f = 0$; при $\eta = \zeta = \infty$, $f = 1$. (5.7)

Уравнение (5.6) легко решается методом разделения переменных; проще еще однако его решить из следующих частных соображений. Заметим, что f можно разыскать как произведение двух функций: одной от η и другой от ζ ; в силу симметрии эти функции одинаковы, причем при стремлении одного из аргументов к бесконечности f стремится к соответствующему решению плоской задачи.

Эти соображения сразу позволяют указать решение уравнения (5.6), удовлетворяющее граничным условиям (5.7), в виде:

$$u = \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\eta\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\zeta\right) = \operatorname{Erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{x}}\right). \quad (5.8)$$

Такова эпюра скоростей в пограничном слое, соответствующая озееновскому методу. Напряжение трения по этому приближению может быть вычислено так:

$$\tau_{0\text{баз}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{x}}\right), \quad (5.9)$$

или в размерных величинах:

$$\tau_0 = 0,564 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}} \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}}\right). \quad (5.10)$$

Введем в рассмотрение поправку местного напряжения трения за счет взаимодействия пограничных слоев:

$$\Delta\tau_0 = (\tau_0)_{\text{вз}} - \tau_0 = (\tau_0)_{z=\infty} - \tau_0, \quad (5.11)$$

т. е. разность между тем напряжением трения, которое бы имело место на данной изолированной пластине, или, что все равно, на одной из пластин, но вдалеке от другой, и трением при взаимодействии пластин. Эта поправка, очевидно, будет равна

$$\Delta\tau_0 = 0,564 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}}\right), \quad (5.12)$$

где, как и всюду в настоящем курсе, обозначено:

$$\operatorname{erf}t = 1 - \operatorname{Erf}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Замечая, что вдалеке от линии пересечения пластин ($z = \infty$)

$$(\tau_0)_{\text{вз}} = 0,564 \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}},$$

получим относительную поправку на местное напряжение трения в форме:

$$\frac{\Delta\tau_0}{(\tau_0)_{\text{вз}}} = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}}\right). \quad (5.13)$$

Из этой формулы следует, что относительная поправка вблизи линии пересечения велика; при $z=0$ эта поправка составляет 100%; вообще при расстояниях от линии пересечения пластин, соизмеримых с толщиной пограничного слоя, поправка значительна, при удалении от линии пересечения, т. е. возрастании z , относительная поправка быстро убывает. Пограничный слой при удалении от переднего края пластин растет, вместе с ним растет и область взаимного влияния пластин.

Поправку на полное сопротивление пластины продольной (по потоку) длины L_0 , смоченной с одной стороны, получим, взяв интеграл:

$$\Delta W = \int_0^{L_0} dz \int_0^{L_0} \Delta \tau_0 dx = \\ = 0,564 \sqrt{\mu \rho U_0^3} \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}}\right) dz = 0,637 \mu U_0 L_0. \quad (5.14)$$

Поправка эта крайне мала, что и естественно, так как область, где относительная поправка напряжения местного трения значительна, имеет порядок толщины слоя. Отсюда важный вывод: поправку на взаимное влияние пересекающихся под прямым углом пластин при продольном их обтекании следует вводить лишь в случаях пластин, поперечный размер которых сравним по величине с толщиной пограничного слоя на задней кромке пластин. В остальных случаях имеют значение лишь местные искажения в напряжении трения, теплоотдаче и др.

Формула (5.13) относительной поправки напряжения трения в области интерференции пластин может быть уточнена. Следуя ранее изложенному приему (§ 7 главы I), перепишем первое уравнение пограничного слоя в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (1-u) \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z},$$

примем в правой части нулевую конвекцию ($u=v=w=0$), а производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычислим по ранее полученному решению. Будем иметь следующее неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x},$$

где по (5.8)

$$u^{(1)} = \operatorname{Erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{x}}\right).$$

Вводя опять переменные η и ζ , получим:

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \eta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \zeta} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\zeta\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \operatorname{Erf}\left(\frac{1}{2}\eta\right). \quad (5.15)$$

Частное решение этого неоднородного уравнения можно искать в виде ($A = \text{const}$):

$$u^{(2)} = A \left[\eta e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \text{Erf} \left(\frac{1}{2}\zeta \right) + \zeta e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \text{Erf} \left(\frac{1}{2}\eta \right) \right]. \quad (5.16)$$

Подставляя это решение в уравнение (5.15), увидим, что постоянная должна равняться

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Полное решение уравнения (5.15), удовлетворяющее нашим граничным условиям, будет:

$$u = \text{Erf} \left(\frac{1}{2}\eta \right) \text{Erf} \left(\frac{1}{2}\zeta \right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \cdot \text{Erf} \left(\frac{1}{2}\zeta \right) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \cdot \text{Erf} \left(\frac{1}{2}\eta \right) \quad (5.17)$$

или в старых переменных:

$$u = \text{Erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \text{Erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{y}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{4x}} \cdot \text{Erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{x}} \right) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4x}} \cdot \text{Erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} \right). \quad (5.18)$$

Отсюда легко найти безразмерное напряжение трения

$$\tau_{0\text{без}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \right) \cdot \text{Erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{x}} \right) - \frac{z}{2\pi x} \cdot e^{-\frac{z^2}{4x}} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \text{Erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{x}} \right) - \frac{z}{2\pi x} e^{-\frac{z^2}{4x}},$$

или в размерных величинах

$$\tau_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}} \text{Erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{v}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{2\pi} \rho U_0^3 \frac{z}{x} e^{-\frac{1}{4} \frac{U_0}{v} \frac{z^2}{x}}. \quad (5.19)$$

Введем опять поправку на взаимодействие слоев:

$$\Delta \tau_0 = (\tau_0)_{\text{вз}} - \tau_0 = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu \rho U_0^3}{x}} \text{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{v}} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2\pi} \rho U_0^3 \frac{z}{x} e^{-\frac{1}{4} \frac{U_0}{v} \frac{z^2}{x}}$$

и вычислим относительную поправку:

$$\frac{\Delta \tau_0}{(\tau_0)_{\text{вз}}} = \text{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0 z^2}{vx}} \right) + \sqrt{\frac{U_0 z^2}{\pi vx}} e^{-\frac{1}{4} \frac{U_0}{v} \frac{z^2}{x}}. \quad (5.20)$$

Это выражение поправки более точно, чем (5.13). Указать порядок погрешности мы не можем, но, судя по плоскому слою, формула

(5.19) дает трение, несколько преуменьшенное (примерно, на 15%). Во всяком случае результат интересен с качественной стороны, так как разъясняет наблюдающееся в природе явление взаимного подтор-маживания слоев вблизи пересекающихся плоскостей. В главе IV увидим, что это приводит к весьма важным последствиям (преждевременный отрыв слоя и др.).

Поправка на полное сопротивление одной стороны пластинки продольной длины L_0 будет равна

$$\Delta W = \int_0^{L_0} dx \int_A \Delta \tau_0 dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu \rho U_0^3} \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \frac{z}{\sqrt{x}}\right) dz + \\ + \frac{1}{2\pi} \rho U_0^3 \int_0^{L_0} \frac{dx}{x} \int_0^\infty z e^{-\frac{1}{4} \frac{U_0}{\nu} \frac{z^2}{x}} dz.$$

Входящие сюда интегралы легко вычисляются, и мы получаем

$$\Delta W = \left(\frac{1}{\pi} + 1\right) \mu U_0 L_0 = 1,32 \mu U_0 L_0, \quad (5.21)$$

т. е. почти два раза больше, чем в предыдущем решении.

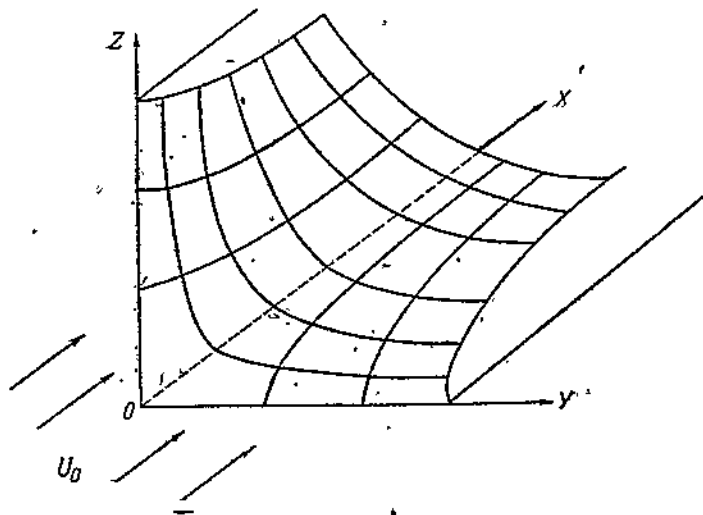


Рис. 32.

Рассмотренная задача могла бы быть разрешена и методом слоя конечной толщины. Анализ не составляет больших затруднений и содержит в основном обобщение интегрального условия Кармана на случай пространственного слоя и использования приближенных эпюр скоростей в пограничном слое, аналогичных многочленным интерполяциям метода Польгаузена. Отсылая за подробностями к соответ-

ствующим статьям¹⁾, заметим лишь, что метод слоя конечной толщины приводит к результатам мало отличающимся от только-что полученных. Для примера укажем, что абсолютная поправка на полное сопротивление по второму приближению (многочлен 2-й степени) дает в формуле аналогичной (5.21) коэффициент 1,407, а по шестому приближению (многочлен 6-й степени) — коэффициент 1,204, т. е. числа, весьма близкие к коэффициенту 1,32 в формуле (5.21).

Нами был исследован также случай взаимодействия пограничных слоев вблизи линии пересечения двух пластин под любым (острым или тупым) углом²⁾.

На рис. 32 даем общий вид явления взаимодействия пограничных слоев с характерным вздутием слоя вблизи линии пересечения пластин.

Подчеркнем еще раз, что необходимость применения приближенных методов была здесь обусловлена отсутствием функций тока, а, следовательно, невозможностью пользования методами, аналогичными методу Блязиуса.

§ 6. Приложение методов операционного исчисления к задачам теории ламинарного пограничного слоя. Обтекание жидкостью бокового края пластинки.

Методы линеаризации нелинейных уравнений, т. е. сведения задачи решения нелинейных уравнений к составлению приближенного решения при помощи одного или некоторой последовательности линейных уравнений, за последнее время приобрели большое значение. В связи с этим встал вопрос об упрощении приемов решения линейных уравнений в частных производных при различных граничных (и начальных) условиях. Наиболее простым и практически удобным приемом решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (а в некоторых случаях и с переменными коэффициентами) является применение метода Хивисайда или операционного исчисления. Как известно³⁾, идея метода заключается в применении к данному дифференциальному уравнению преобразования Лапласа. При этом основной неизвестной функции или, как говорят, „оригиналу“ соответствует „преобразованная“ по Лапласу функция — „изображение“, — имеющее на один аргумент меньше чем „оригинал“, так как аргумент, по которому производилось преобразование Лапласа, замещается параметром Хивисайда. Таким образом обыкновенные дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям в конечном виде (алгебраическим), уравнения в частных производных с двумя аргументами — к обыкновенным дифференциальным уравнениям и т. д. В области „изображений“, как правило, весь анализ гораздо проще, чем в области „оригиналов“, поэтому по возможности стараются все выкладки и преобразования совершать в области изображений и, лишь получив окончательный ответ, возвращаться к „оригиналам“. В некоторых случаях нас интересует не полное решение задачи, которое часто весьма затруднительно, а лишь ответ на ча-

¹⁾ Л. Г. Лойцманский. Взаимодействие пограничных слоев. Труды ЦАГИ, вып. 249, Москва 1936.

²⁾ Л. Г. Лойцманский и В. П. Большаков. О движении жидкости в пограничном слое вблизи линии пересечения двух плоскостей. Труды ЦАГИ, вып. 279, Москва 1936.

³⁾ См. А. И. Лурье. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, ОНТИ, Ленинград 1938, а также А. М. Эфрос и А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. ОНТИ, Харьков, 1937. В первой из указанных книг можно найти ряд интересных применений в области гидродинамики вязкой жидкости, главным образом в теории нестационарных движений.

стный вопрос. При обычных методах мы не можем получить этого ответа, не имея полного решения; при пользовании же методами операционного исчисления можем, оставаясь в области изображений, где все выкладки более просты, чем в области оригиналов¹⁾, найти изображение того частного элемента решения, который нас интересует и, не возвращаясь к оригиналу²⁾ полного решения, найти оригинал искомого элемента.

Продemonстрируем этот метод на решении одного интересного вопроса теории пространственного пограничного слоя — определении напряжения трения на пластине вблизи бокового края ее при продольном обтекании потоком, параллельным этому боковому краю. В предыдущем параграфе было показано, что наличие пластины, перпендикулярной к данной, вызывает уменьшение местного трения на пластине вблизи линии пересечения пластин. Физически это легко объяснялось дополнительным подтормаживанием от второй пластины и вследствие этого уменьшением нормальной производной продольной скорости. Естественно думать, что, наоборот, вблизи бокового края пластины на внешний поток действует уменьшенное подтормаживание и, следовательно, напряжение трения при приближении к боковому краю должно увеличиваться. Исследуем сейчас это явление, пользуясь методом линеаризации, аналогичным наложенному в предыдущем параграфе.³⁾

Взяв такое же расположение осей, как на рис. 31, рассмотрим одну пластину, лежащую в плоскости XOY , причем боковой край (никакой вертикальной пластины теперь нет) горизонтальной пластины совместим с осью OX . Особая сложность задачи обусловлена тем, что граничные условия для скоростей: $u=0$, $v=0$, $w=0$ имеет место не при всех $z=0$, как ранее, а лишь при $y>0$. Как и в предыдущем параграфе, пользуясь сначала методом, аналогичным методу Озеена, составим уравнение движения в безразмерных координатах:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \quad (6.1)$$

где $u_1 = 1 - u$ представляет безразмерную разность скоростей на бесконечности и в данной точке. Граничные условия будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z=0 \text{ и } y>0, \quad u_1 &= 1, \\ \text{при } z=\infty, \quad u_1 &= 0, \\ \text{при } x=0, \quad u_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1')$$

Здесь имеем обычную „тепловую“ задачу об интегрировании уравнения параболического типа при граничных условиях, затрудненных условием положительности y -ов при $z=0$.

Чтобы упростить граничные условия (освободиться от стеснительного условия $y>0$), введем параболы и е координаты $\bar{\eta}$ и $\bar{\zeta}$, положим:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2} (\bar{\eta}^2 - \bar{\zeta}^2) \\ z &= \bar{\eta}\bar{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

тогда положительная часть оси OY ($y>0$) будет определяться условием $\bar{\zeta}=0$ при $\bar{\eta}$, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$, причем отрицательным значениям $\bar{\eta}$ будут соответствовать точки на нижней поверхности пластины, положительным — на верхней поверхности. Начало координат O определится значением $\bar{\eta}=0$.

¹⁾ Л. Г. Лойцянский. Пространственный пограничный слой и трение вблизи бокового края пластины продольно обтекаемой вязкой жидкостью. Прикладная математика и механика т. II, вып. 2, 1938 г.

Дифференциальное уравнение задачи приведет к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{\eta^2 + \zeta^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} \right), \quad (6.3)$$

причем граничные условия будут уже более простыми:

$$\text{при } \bar{\zeta} = 0, u_1 = 1, \text{ при } \bar{\zeta} = \infty, u_1 = 0, \text{ при } x = 0, u_1 = 0. \quad (6.3')$$

Чтобы проинтегрировать уравнение (6.3) при граничных условиях (6.3'), применим к нему преобразование Лапласа по переменному x или, что все равно, перейдем от функции „оригинала“ $u_1(x, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ к ее „изображению“ $U_1(p; \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ положив:

$$u_1(x, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \div U_1(p; \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = p \int_0^\infty e^{-px} u_1(x, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) dx. \quad (6.4)$$

огда по известным правилам операционного исчисления найдем

$$p U_1 = \frac{1}{\eta^2 + \zeta^2} \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2} \right), \quad (6.5)$$

или, вводя новые переменные:

$$\eta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{p} \cdot \bar{\eta}; \quad \zeta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{p} \cdot \bar{\zeta}, \quad (6.6)$$

перепишем уравнение (6.5) в таком виде:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{4} (\eta^2 + \zeta^2) U_1. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) допускает разделение переменных. В самом деле, полагая

$$U_1 = Y(\eta) \cdot Z(\zeta),$$

получим два обыкновенные уравнения (α — произвольная постоянная):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \left(\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \eta^2 \right) Y &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + \left(-\alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \zeta^2 \right) Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Это — известные дифференциальные уравнения функций параболического цилиндра¹⁾. Решение первого уравнения, обращающееся в нуль на бесконечности, представляется функцией

$$\begin{aligned} Y = D_\alpha(\eta) = & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{1/2\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right)} \cdot e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \cdot {}_1F_1\left\{-\frac{1}{2}\alpha; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\eta^2\right\} + \\ & + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2^{1/2\alpha-1/2}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha\right)} \cdot \eta \cdot e^{-\frac{1}{4}\eta^2} \cdot {}_1F_1\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\eta^2\right\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

¹⁾ См., например, *Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа*, ГТТИ 1934; стр. 153.

где ${}_1F_1$ — символ функции Куммера

$${}_1F_1 \left\{ \frac{1}{2} \pm m - k; \pm 2m + 1; z \right\} = 1 + \frac{\frac{1}{2} \pm m - k}{11 (\pm 2m + 1)} z + \\ + \frac{\left(\frac{1}{2} \pm m - k \right) \left(\frac{3}{2} \pm m - k \right)}{21 (\pm 2m + 1) (\pm 2m + 2)} z^2 + \dots \quad (6.10)$$

Что касается второго дифференциального уравнения системы (6.8), то, переписав его в форме:

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + \left[-(\alpha + 1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \zeta^2 \right] Z = 0,$$

видим, что соответствующее решение будет:

$$Z = D_{-\alpha-1}(\zeta).$$

Остановимся на целых значениях параметра α , для которых функция $D_\alpha(\eta)$ превращается в известную функцию Эрмита, равную произведению функции $e^{-\frac{1}{2}\eta^2}$ на полином Эрмита порядка α .

Замечая, что по условиям задачи U_1 должно быть четной функцией η , положим $\alpha = 2k$, где k — целое число.

Общее решение дифференциального уравнения (6.7) можно представить в виде бесконечного ряда:

$$U_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} D_{2k}(\eta) D_{-2k-1}(\zeta). \quad (6.11)$$

Граничные условия для функции U_1 :

$$\text{при } \zeta = 0, \quad U_1 = 1; \quad \text{при } \zeta = \infty, \quad U_1 = 0 \quad (6.12)$$

будут выполнены, если коэффициенты A_{2k} будут удовлетворять условию:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} D_{2k}(\eta) D_{-2k-1}(0). \quad (6.13)$$

при любом η . Для определения коэффициентов A_{2k} заметим, что по (6.9), заменив α на $-2k-1$ и η на нуль, получим:

$$D_{-2k-1}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \cdot 2^k \cdot k!},$$

т. е. (6.13) приводится к такому равенству:

$$1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \frac{D_{2k}(\eta)}{2^k \cdot k!}.$$

Умножим обе части этого равенства на $D_{2m}(\eta) d\eta$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$; тогда найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_{2m}(\eta) d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{2^k \cdot k!} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{2k}(\eta) D_{2m}(\eta) d\eta.$$

Но по известному свойству ортогональности функций Эрмита

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_{2k}(\eta) D_{2m}(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \sqrt{2\pi} (2m)!, & k = m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_{2m}(\eta) d\eta = \pi \cdot \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} \cdot A_{2m}. \quad (6.14)$$

Для вычисления интеграла, стоящего слева, можно, пользуясь известными формулами теории функций параболического цилиндра:¹⁾

$$\begin{aligned} D_{n+1}(z) - z D_n(z) + n D_{n-1}(z) &= 0 \\ D_n'(z) + \frac{1}{2} z D_n(z) - n D_{n-1}(z) &= 0, \end{aligned}$$

найти такое выражение для производной $D_n'(z)$:

$$D_n'(z) = -\frac{1}{2} D_{n+1}(z) + \frac{n}{2} D_{n-1}(z),$$

откуда непосредственным интегрированием получим:

$$J_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{n+1}(z) dz = n \int_{-\infty}^{+\infty} D_{n-1}(z) dz = n J_{n-1};$$

полагая здесь $n = 2k-1$, $2k-2$ и т. д., и перемножая результаты, найдем

$$\begin{aligned} J_{2k} &= (2k-1)(2k-3)\dots 1 \cdot J_0 = (2k-1)(2k-3)\dots 1 \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(z) dz = \\ &= (2k-1)(2k-3)\dots 1 \cdot 2\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к равенству (6.14) будем иметь

$$A_{2m} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \quad (6.15)$$

Таким образом общее решение (6.11) будет иметь вид:

$$U_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k}(\eta) D_{-2k-1}(\zeta). \quad (6.16)$$

Полученное разложение дает операционное „изображение“ дополнительной скорости u_1 . Возвращение к „оригиналу“ в этой формуле представляет большие затруднения. Не определяя „оригинала“ скорости, можем, однако, найти гораздо более простую и вместе с тем наиболее интересную величину — трение. Для этого найдем сначала „изображение“ напряжения трения в безразмерных координатах $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = \tau(x, y)$; следуя обычным обозначениям, назовем „изображение“ трения буквой T :

$$\tau(x, y) \div T(p, y).$$

¹⁾ Уиттекер и Ватсон, loc. cit, стр. 157.

Итак, будем искать

$$T \div \tau = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = - \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad (6.17)$$

Вычисление „оригинала“ производной $\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_{z=0}$ проще чем вычисление „оригинала“ U_1 , так как здесь z положено равным нулю. По (6.6) имеем:

$$\begin{aligned} T = - \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_{z=0} &= - \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = - \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} \times \\ &\times \frac{d\zeta}{dz} = - \frac{\sqrt{2} \sqrt[4]{p}}{\eta} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Обратимся к разысканию „оригинала“ величины $\left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0}$. По (6.16) находим

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k}(\eta) D'_{-2k-1}(0) = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{(2k)!} D_{2k}(\eta), \quad (6.19)$$

как это сразу следует из ранее упомянутой формулы

$$D_n'(\zeta) = n D_{n-1}(\zeta) - \frac{1}{2} \zeta D_n(\zeta)$$

из разложения (6.9). Сумма, стоящая справа в равенстве (6.19), сводится к специальным функциям. Методы операционного исчисления позволяют ее легко вычислить. Воспользуемся следующей формулой:¹⁾

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{(2k)!} D_{2k}(2\sqrt{t}) = \frac{1}{2} t^{1/2} \left[\gamma\left(\frac{1}{2}, t\right) + t^{-1/2} \cdot e^{-t} \right],$$

где γ представляет символ так называемой „неполной функции гамма“, определяемой равенством:

$$\gamma(n, t) = \int_0^t \tau^{n-1} e^{-\tau} d\tau.$$

В нашем случае будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{(2k)!} D_{2k}(\eta) = \frac{1}{4} \eta \left[\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\eta^2}{4}\right) + \frac{2}{\eta} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \right], \quad (6.20)$$

но

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\eta^2}{4}\right) = \int_0^{\eta^2/4} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\eta^2/4} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

причем здесь, как и ранее, принято обозначение

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

¹⁾ См. А. М. Эфрос и А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. ДНТУ ОНТИ НКТП, 1937, стр. 169, формула (364).

Окончательно получим выражение для $\left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0}$:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta \left[\sqrt{\pi} \operatorname{Erfi} \left(\frac{\eta}{2} \right) + \frac{2}{\eta} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \right]. \quad (6.21)$$

Переходя от η к $\bar{\eta}$ для выявления оператора p , получим по (6.18) и (6.6):

$$T = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{Erfi} \left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} \bar{\eta} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p} \bar{\eta}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{p} \bar{\eta}^2}{2}} \right]. \quad (6.22)$$

Нахождение „оригинала“ τ по этому выражению T затруднительно. Проще воспользоваться приемом дифференцирования по параметру, а именно составить выражение:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{\eta}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\bar{\eta}^2} \cdot \sqrt{p} \cdot e^{-\frac{\sqrt{p} \bar{\eta}^2}{2}} \quad (6.23)$$

и искать его „оригинал“, а уже затем обратно проинтегрировать результат по $\bar{\eta}$. По основной формуле операционного исчисления:

$$f(\sqrt{p}) \div \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x}} \varphi(t) dt, \quad f(p) \div \varphi(t)$$

найдем в нашем случае:

$$f(p) = e^{-\frac{\sqrt{p}}{2} \bar{\eta}^2} \cdot \sqrt{p} \div \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{\sqrt{p}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{t - \frac{\sqrt{p}}{2}}}, & t > \frac{\sqrt{p}}{2} \end{cases}$$

$$f(\sqrt{p}) = e^{-\frac{\sqrt{p} \bar{\eta}^2}{2}} \cdot \sqrt{p} \div \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{p}}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x} \cdot \sqrt{t - \frac{\sqrt{p}}{2}}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{x}} \int_{\frac{\sqrt{p}}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{4x}}}{\sqrt{t - \frac{\sqrt{p}}{2}}} dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\frac{\sqrt{p}}{2}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t - \frac{\sqrt{p}}{2}}} dt.$$

Уравнение (6.23) приводит нас таким образом к „оригиналу“:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{\eta}} \div \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\eta}} = \frac{-2}{\pi \sqrt{\pi} \bar{\eta}^2 \sqrt{x}} \int_{\frac{\sqrt{p}}{2}}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{\sqrt{t - \frac{\sqrt{p}}{2}}}. \quad (6.24)$$

Введя вместо $\bar{\eta}$ переменную

$$\frac{\sqrt{p}}{4\sqrt{x}} = \alpha, \quad (6.25)$$

перепишем (6.24) в виде:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\pi \sqrt{\pi x}} \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{\sqrt{t-\alpha}},$$

откуда интегрированием найдем искомое напряжение трения в форме (τ_0 — трение на бесконечном расстоянии от боковой кромки, т. е. при $\alpha = \infty$):

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\pi x}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta \sqrt{\beta}} \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{\sqrt{t-\beta}}.$$

Меняя порядок интегрирования, будем иметь:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\pi x}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-t^2} \cdot dt \int_{\alpha}^t \frac{d\beta}{\beta^{3/2} \sqrt{t-\beta}}.$$

Совершая во внутреннем интеграле замену $\beta = \frac{t}{\gamma}$, после простых приведений получим:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi x} \sqrt{\alpha}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-t^2} \sqrt{t-\alpha}}{t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}, \quad (6.26)$$

где функция $\varphi(\alpha)$, равная

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-t^2} \cdot \sqrt{t-\alpha}}{t} dt, \quad (6.27)$$

при $\alpha \rightarrow 0$ стремится к конечному значению

$$\varphi(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-q^2} \cdot dq = \frac{2}{\pi} \Pi\left(\frac{1}{4}\right) = 0,577. \quad (6.28)$$

Вспомня, что при принятом приближении $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$, получим относительную поправку на местное трение за счет влияния края пластин в виде

$$\frac{\Delta \tau}{\tau_0} = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}. \quad (6.29)$$

Расчет, который мы до сих пор производили, основывался на замене в уравнении (I) § 1 конвективных скоростей u, v, w на $U_0, 0, 0$. Полученное, таким образом, решение приводит, как уже известно, к сильно преувеличенному трению.

Более точное решение получим, составляя уравнение для исправленного решения $u^{(2)}$ по ранее полученному $u^{(1)}$:

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}. \quad (6.30)$$

Полагая, как и ранее

$$u^{(2)} = U_0 - u_1^{(2)}, \quad u^{(1)} = U_0 - u_1^{(1)},$$

и переходя от „оригиналов“ $u_1^{(2)}$ и $u_1^{(1)}$ к „изображениям“ $U_1^{(2)}$ и $U_1^{(1)}$, получим следующее неоднородное уравнение:

$$p U_1^{(2)} - \left(\frac{\partial^2 U_1^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(2)}}{\partial z^2} \right) = p U_1^{(1)}, \quad (6.31)$$

частным решением которого будет, как легко убедиться простой подстановкой, следующая функция

$$\bar{U}_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \left(y \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} + z \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial z} \right). \quad (6.32)$$

Общее решение, удовлетворяющее граничным условиям (6.12), составится в форме:

$$U_1^{(2)} = U_1^{(1)} - \frac{1}{2} \left(y \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} + z \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial z} \right). \quad (6.33)$$

Не возвращаясь к „оригиналу“ опять можем разыскать „изображение“ напряжения трения по формуле:

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= - \left(\frac{\partial U_1^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} = - \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{1}{2} y \left(\frac{\partial^2 U_1^{(1)}}{\partial y \partial z} \right)_{z=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} = \\ &= - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{2} T^{(1)} - \frac{1}{2} y \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

т. е. свести вычисление напряжения трения к ранее вычисленной величине $T^{(1)}$.

Замечая, что

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \eta}, \quad y = \frac{1}{2} \eta^2 \text{ при } \zeta = 0,$$

получим

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} T^{(1)} - \frac{1}{4} \frac{\eta}{\eta} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \eta}. \quad (6.35)$$

Возвратимся теперь к „оригиналам“. По (6.26) будем иметь:

$$\tau^{(2)} = \frac{1}{2} \tau_0^{(1)} + \frac{1}{2 \sqrt{\pi x}} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{4} \frac{\eta}{\eta} \cdot \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} \right],$$

или, замечая, что по предыдущему $\frac{1}{2} \tau_0^{(1)} = \tau_0^{(2)}$, после простых выкладок получим:

$$\Delta \tau = \tau^{(2)} - \tau_0^{(2)} = \frac{\frac{3}{2} \varphi(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha)}{2 \sqrt{\pi x} \cdot \sqrt{\alpha}}. \quad (6.36)$$

Относительная поправка определится равенством

$$\frac{\Delta \tau}{\tau_0} = \frac{\frac{3}{2} \varphi(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}. \quad (6.37)$$

Покажем, что при приближении к боковому краю поправка становится бесконечной и определим порядок этой поправки. Заметим, что непосредственное определение порядка величины производной $\varphi'(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$ по равенству (6.27) затруднено; для определения порядка стремления к бесконечности относительной поправки проще поступить так.

С одной стороны, непосредственное дифференцирование при $\alpha \neq 0$ дает:

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} \cdot d\xi}{\xi \sqrt{\xi - \alpha}},$$

с другой стороны

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} \cdot d\xi}{\sqrt{\xi - \alpha}} - \frac{\alpha}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} \cdot d\xi}{\xi \sqrt{\xi - \alpha}}.$$

Следовательно

$$\frac{3}{2} \varphi(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha) = \varphi(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2} \cdot d\xi}{\sqrt{\xi - \alpha}}, \quad (6.38)$$

откуда при $\alpha \rightarrow 0$ получим

$$\frac{3}{2} \varphi(0) - [\alpha \varphi'(\alpha)]_{\alpha=0} = \varphi(0) + \frac{1}{2} \varphi(0) = \frac{3}{2} \varphi(0),$$

т. е.

$$\alpha \varphi'(\alpha) \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что при $\alpha \rightarrow 0$ относительная поправка на трение стремится к бесконечности; порядок бесконечности представляется формулой:

$$\text{при } \alpha \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \sqrt{\alpha} \rightarrow \frac{3}{2} \varphi(0) = 0,865. \quad (6.39)$$

Очевидно, что при $\alpha \rightarrow \infty, \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \rightarrow 0$. Поведение относительной поправки при $0 < \alpha < \infty$ может быть легко определено, если наперед затабулировать функцию $\varphi(\alpha)$.

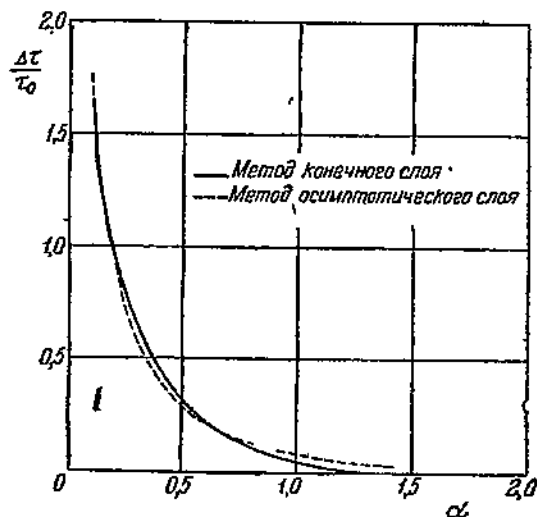


Рис. 33.

В ранее процитированной нашей работе можно найти разложения $\frac{\Delta \tau}{\tau_0}$ в ряды по степеням α при малых и больших α . Дадим здесь несколько цифр:

$\alpha = 0$	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	∞
$\frac{\Delta \tau}{\tau_0} = \infty$	1,75	0,72	0,27	0,14	0,08	0,004	0

Отсюда видно, что область заметного влияния боковой кромки пластины определяется расстоянием от боковой кромки, имеющим тот же порядок, что и толщина пограничного слоя на безграничной пластинке в соответствующем сечении. В самом деле, задаваясь, например, отношением $\frac{\Delta \tau}{\tau_0} = 0,10\%$, получим $\alpha = 2$, т. е. $y = 4\sqrt{x}$, что, примерно, соответствует толщине пограничного слоя.

Вопрос о применении к решению той же задачи метода слоя конечной толщины исследовал в своей кандидатской диссертации Б. Ф. Вильям¹⁾.

Даем (рис. 33) для сравнения кривую $\frac{\Delta \tau}{\tau_0}$, полученную им путем интерполяции эпюр скоростей, и нашу кривую, соответствующую уравнению (6.37).

Экспериментальное исследование, проведенное Б. Ф. Вильям в аэродинамической лаборатории Ленинградского промышленного института, с достаточной степенью точности подтвердило правильность вышеуказанного решения для ламинарного пограничного слоя.

ГЛАВА III

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЙ. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 1. Асимптотический слой; метод Блязиуса и уточнение его, данное Хоуэрзом

Рассмотрим плоское течение около цилиндрического тела, причем будем предполагать, что $\frac{dp}{dx} \neq 0$ и, следовательно, скорость внешнего потока U уже не постоянная величина, равная скорости на бесконечности U_0 , а заданная функция абсциссы x :

$$U = U(x).$$

Блязиус²⁾ рассматривал случай симметричного профиля с плавным закругленным носом ($U = 0$ при $x = 0$) и предполагал, что скорость на внешней границе пограничного слоя может быть разложена в сходящийся ряд по степеням x :

$$U = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots, \quad (1.1)$$

где $u_1, u_3, u_5 \dots$ — постоянные, характеризующие распределение скорости (а, следовательно, и давления) во внешнем потоке; четные степени отсутствуют по условию симметричности профиля.

Введем функцию тока ψ и представим ее также разложенной в ряд, аналогичный (1.1):

$$\psi = \psi_1 x + \psi_3 x^3 + \psi_5 x^5 + \dots, \quad (1.2)$$

¹⁾ Б. Ф. Вильям. Движение вязкой жидкости вблизи бокового края плоской пластины ориентированной вдоль по потоку. Журнал технической физики, т. VIII, в. 21, 1938 г.

²⁾ H. Blasius, loc. cit.

Система (1.4) переходит в такую:

$$\begin{aligned}
 f_1' - f_1'' &= 1 + f_1''' \\
 4f_1'f_5' - 3f_1''f_5 - f_1f_5'' &= 1 + f_5''' \\
 6f_1'g_5' - 5f_1''g_5 - f_1g_5'' &= 1 + g_5''' \\
 6f_1'h_5' - 5f_1''h_5 - f_1h_5'' &= \frac{1}{2} + h_5''' - 8(f_3'^2 - f_3f_3'') \\
 8f_1'g_7' - 7f_1''g_7 - f_1g_7'' &= 1 + g_7''' \\
 8f_1'h_7' - 7f_1''h_7 - f_1h_7'' &= 1 + h_7''' - 3(8f_3'g_5' - \\
 &\quad - 5f_3''g_5 - 3f_3g_5'') \\
 8f_1'k_7' - 7f_1''k_7 - f_1k_7'' &= k_7''' - 3(8f_3'h_5' - 5f_3''h_5 - 3f_3h_5'') \\
 10f_1'g_9' - 9f_1''g_9 - f_1g_9'' &= 1 + g_9''' \\
 10f_1'h_9' - 9f_1''h_9 - f_1h_9'' &= 1 + h_9''' - \frac{16}{5}(10f_3'g_7' - \\
 &\quad - 3f_3g_7'' - 7f_3''g_7) \\
 10f_1'k_9' - 9f_1''k_9 - f_1k_9'' &= \frac{1}{2} + k_9''' - 18(g_5'^2 - g_5g_5'') \\
 10f_1'j_9' - 9f_1''j_9 - f_1j_9'' &= j_9''' - \frac{16}{5}(10f_3'h_7' - 3f_3h_7'' - \\
 &\quad - 7f_3''h_7) - 18(2g_5'h_5' - g_5h_5'' - g_5''h_5) \\
 10f_1'q_9' - 9f_1''q_9 - f_1q_9'' &= q_9''' - \frac{16}{5}(10f_3'k_7' - 3f_3k_7'' - \\
 &\quad - 7f_3''k_7) - 18(h_5'^2 - h_5h_5''),
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

причем в системе (1.7) значок штрих обозначает дифференцирование по новой переменной η , связанной со старой y соотношением

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{y}}. \tag{1.8}$$

Граничные условия для системы (1.7) могут быть по (1.5) и (1.6) выбраны такими:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{при } \eta = 0 \quad & f_1 = f_1' = f_3 = f_3' = g_5 = g_5' = g_7 = g_7' = g_9 = \\
 & = g_9' = h_5 = h_5' = h_7 = h_7' = k_7 = k_7' = h_9 = \\
 & = h_9' = k_9 = k_9' = j_9 = j_9' = q_9 = q_9' = 0 \\
 \text{при } \eta = \infty \quad & f_1' = 1, \quad f_3' = \frac{1}{4}, \quad g_5' = \frac{1}{6}, \quad g_7' = \frac{1}{8}, \quad g_9' = \frac{1}{10}, \\
 & h_5' = h_7' = k_7' = k_9' = j_9' = q_9' = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{1.9}$$

Система уравнений (1.7) полностью была дана в 1935 г. Хоуэрзом; приближенное решение для первых двух функций ψ_1 и ψ_3 было дано

еще Блязиусом в 1908 г. и затем численно исследовано Хименцем¹⁾ в 1911 г.

Система уравнений (1.7) при граничных условиях (1.9) была проинтегрирована Хоуэрзом численным методом Адамса. Не имея значений вторых производных при $\eta = 0$, Хоуэрз задавался произвольными значениями этих производных, а затем комбинировал частные решения так, чтобы общее решение удовлетворяло условиям на бесконечности. Отсылая за деталями численного интегрирования к оригинальной работе Хоуэрза, приводим к концу книги таблицы значения функций, решающих задачу (таблица I).

Подставляя значения функций $\psi_1, \psi_3, \dots$, выраженные через новые функции $f_1, f_3, \dots$, по (1.6), в формулу (1.2), и производя дифференцирование функции тока по координатам, найдем следующие выражения для компонентов скорости и поперечного градиента скорости u :

$$u = u_1 f_1' x + 4u_3 f_3' x^3 + 6 \left(u_5 g_5' + \frac{u_3^2}{u_1} h_6' \right) x^5 + \\ + 8 \left(u_7 g_7' + \frac{u_5 u_3}{u_1} h_7' + \frac{u_3^3}{u_1^2} k_7' \right) x^7 + \dots \quad (1.10)$$

$$-v = \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} \left[u_1 f_1 + 12u_3 f_3 x^2 + 30 \left(u_5 g_5 + \frac{u_3^2}{u_1} h_6 \right) x^4 + \right. \\ \left. + 56 \left(u_7 g_7 + \frac{u_5 u_3}{u_1} h_7 + \frac{u_3^3}{u_1^2} k_7 \right) x^6 + \dots \right] \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \left[u_1 f_1'' x + 4u_3 f_3'' x^3 + 6 \left(u_5 g_5'' + \frac{u_3^2}{u_1} h_6'' \right) x^5 + \right. \\ \left. + 8 \left(u_7 g_7'' + \frac{u_5 u_3}{u_1} h_7'' + \frac{u_3^3}{u_1^2} k_7'' \right) x^7 + \dots \right]. \quad (1.12)$$

Здесь мы ограничились лишь теми членами разложения, которые заключают протабулированные функции. Хоуэрз дает во всех разложениях еще по одному члену, содержащему в (1.10) и (1.12) x в девятой степени, а в (1.11) x в восьмой степени; эти члены могут быть полезны для оценки погрешности только-что указанных рядов. Сходимость рядов зависит от быстроты убывания величин $u_1, u_3, u_5, u_7, \dots$ и строго обоснована быть не может.

Поясним метод численным примером. Рассмотрим задачу об обтекании круглого цилиндра. Блязиус исследовал пограничный слой на круглом цилиндре в предположении, что внешний поток потенциален и идеально (без отрыва) обтекает цилиндр. Результат, полученный Блязиусом, оказался противоречащим опыту. Хименц первый заметил, что при наличии отрыва пограничного слоя внешний поток настолько искажается, что распределение давлений по поверхности профиля совершенно не совпадает с рассчитанным по теории безотрывного потенциального обтекания теоретическим распределением давлений. Для плохо обтекаемых профилей в связи с этим приходится распределение давлений задавать из опытных данных.

¹⁾ *Hiemenz*. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. (Dissertation Göttingen, 1911). *Dingl. Polytech. Journal* Vol. 326, p. 321, 1911.

Хименц¹⁾ поставил экспериментальное исследование на воде ($\nu = 0,01$ см/сек) с цилиндром радиуса 4,87 см, при скорости набегающей воды 19,2 см/сек, что соответствует рейнольдсову числу $R = \frac{U_0 d}{\nu} \approx 18500$.

Распределение давлений, полученное им непосредственно по показаниям микроманометра, соединенного с отверстиями на поверхности цилиндра, пересчитанное по теореме Бернулли на скорость внешнего потока, дано на рис. 34. Здесь ясно видно смещение минимума давлений (максимума скорости) почти на 20° назад к лобовой части цилиндра, по сравнению с теоретическим распределением (минимум на середине, т. е. при 90°), кроме того и абсолютное значение давления совсем иное. Давление, пересчитанное на скорость внешнего потока по Бернулли, дает распределение скорости:

$$U = 7,151x - 0,04497x^3 - 0,0003300x^5, \\ 0 \leq x \leq 8 \text{ см}, \quad (1.13)$$

следовательно, в данном случае:

$$u_1 = 7,151, \quad u_3 = -0,04497, \\ u_5 = -0,0003300;$$

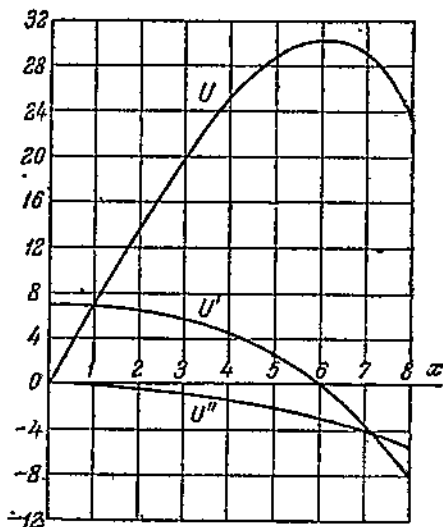


Рис. 34.

видим, что u_i быстро убывают.

По формуле (1.10) будем в данном случае иметь ($u_1 = u_3 = 0$):

$$u = u_1 f_1' x + 4u_3 f_3' x^3 + 6 \left(u_5 g_5' + \frac{u_3^2}{u_1} h_5' \right) x^5 + \left. \begin{aligned} & + 8 \left(\frac{u_3 u_5}{u_1} h_7' + \frac{u_3^3}{u_1^2} k_7' \right) x^7. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Для нашего случая, пользуясь таблицей I, обнаружим, что последний член ряда в интервале $0 \leq x \leq 7$ см (при радиусе 4,87 см соответствующем углу до 82°), будет численно менее 0,06; замечая же что первый член ряда, меньший чем $7,151 \cdot 7 \cdot 1$, имеет порядок пятидесяти, заключим, что даже в наибольшем удалении от стенки во взятом нами интервале углов скорость в пограничном слое определяется формулой (1.14) с точностью большей 0,2 %. Таким же приемом можно определить место отрыва пограничного слоя и оценить ошибку этого определения.

Обратимся для этого к уравнению (1.12) и положим в нем $\eta = 0$ и $\frac{du}{dy} = 0$; тогда для определения абсциссы места отрыва x_s получим

¹⁾ loc. cit.

уравнение:

$$f_1'' x_s + 4 \frac{u_3}{u_1} f_3'' x_s^3 + 6 \left(\frac{u_5}{u_1} g_5'' + \frac{u_3^2}{u_1^2} h_5'' \right) x_s^5 + 8 \left(\frac{u_3 u_5}{u_1^2} h_7'' + \frac{u_3^3}{u_1^3} k_7'' \right) x_s^7 = 0.$$

Обозначая левую часть уравнения через $\varphi(x_s)$ и полагая

$$\varphi(x_s) = \theta(x_s) + R(x_s),$$

где $\theta(x_s)$ — сумма первых трех членов ряда, а $R(x_s)$ — остаточный член, оценим прежде всего остаточный член. Для этого предположим, что h_7'' во всяком случае меньше чем h_5'' , а k_7'' возьмем из таблицы; тогда для случая Хименца получим при $0 \leq x \leq 7,1$:

$$|R(x)| < 0,15 + \text{члены малые по сравнению с } 0,15;$$

примем

$$|R(x)| < 0,2 \text{ при } 0 \leq x \leq 7,1.$$

Легко видеть, что

$$\theta(6,85) = 0,3 \text{ и } \theta(7,05) = -0,2,$$

следовательно,

$$\varphi(6,85) = 0,3 \pm 0,2,$$

$$\varphi(7,05) = -0,2 \pm 0,2.$$

Отсюда сразу следует, что функция φ меняет знак между значениями $x = 6,85$ и $x = 7,05$. Можем утверждать таким образом, что место отрыва ламинарного слоя на круглом цилиндре лежит где-то между 81 и 83° и принять его приближенно ($\pm 1^\circ$) находящимся в точке с азимутом 82° . Этот результат прекрасно подтверждается всеми опытами.

Блявнус и Хименц рассматривали лишь случай симметричного профиля. Хоуэрз исследовал и случай несимметричного профиля, для которого распределение скоростей во внешнем потоке имеет вид

$$U = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots \quad (1.15)$$

Не повторяя рассуждений, ничем не отличающихся от предыдущего случая, приводим, в виду важности данного случая, окончательные результаты, позволяющие делать расчеты.

Аналогично формулам (1.10), (1.11) и (1.12), в случае несимметричного распределения (1.15), Хоуэрз получает такие результаты:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 f_1' x + 3u_2 f_2' x^2 + 4 \left(u_3 g_3' + \frac{u_2^2}{u_1} h_3' \right) x^3 + \\ &\quad + 5 \left(u_4 g_4' + \frac{u_2 u_3}{u_1} h_4' + \frac{u_2^3}{u_1^3} k_4' \right) x^4 + \dots \\ -v &= \sqrt{\frac{\gamma}{u_1}} \left[u_1 f_1 + 6u_2 f_2 x + 12 \left(u_3 g_3 + \frac{u_2^2}{u_1} h_3 \right) x^2 + \right. \\ &\quad \left. + 20 \left(u_4 g_4 + \frac{u_2 u_3}{u_1} h_4 + \frac{u_2^3}{u_1^3} k_4 \right) x^3 + \dots \right] \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sqrt{\frac{u_1}{\gamma}} \left[u_1 f_1'' x + 3u_2 f_2'' x^2 + 4 \left(u_3 g_3'' + \frac{u_2^2}{u_1} h_3'' \right) x^3 + \right. \\ &\quad \left. + 5 \left(u_4 g_4'' + \frac{u_2 u_3}{u_1} h_4'' + \frac{u_2^3}{u_1^3} k_4'' \right) x^4 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

причем входящие сюда величины $u_1, u_2, \dots$ определяются по заданному внешнему обтеканию (1.15), а функции $f_1, f_1', f_1''; f_2, f_2', f_2''; g_3, g_3', g_3''; h_3, h_3', h_3''; k_4, k_4', k_4''$ протабулированы и значения их даны в таблице II в конце книги.

Мы видим, что метод Блязюса, развитый в свое время Хименцем, а в последнее время уточненный Хоуэрзом, является методом весьма общим и дающим решение уравнений Прандтля с достаточной степенью точности.

Основным недостатком метода Блязюса-Хоуэрза и его усовершенствования заключается в необходимости представления скорости внешнего потока в виде ряда (практически многочлена) по степеням абсциссы x . Обычно, пользуясь экспериментальным распределением давлений, мы получаем табличное представление функции $U(x)$ и последующим интерполированием должны представить ее в виде многочлена по x . Это представление при более или менее значительных интервалах для x и недостаточно высоких степенях многочлена чрезвычайно затруднительно, так как многочленная кривая (параболическая), проходя через выбранный ряд точек, значительно отклоняется от табличных значений в других точках интервала. Метод наименьших квадратов позволяет сглаживать эти отклонения, но вместе с тем усложняет общее решение.

Вторым недостатком метода (как и всякого численного метода) является затруднительность качественного анализа результатов, имеющего большое значение при выборе, например, профиля крыла для заданных целей. Последний недостаток может быть устранен применением графиков и номограмм, составленных для численных решений; что касается первого недостатка, то он крайне существенен и, повидимому, Хоуэрз сам его заметил, так как не дал в своей работе ни одной иллюстрации метода, кроме круглого цилиндра, для которого многочленное представление внешней скорости было давно дано Хименцем. В самое последнее время Хоуэрз разработал другой метод, по своей основной идее призванный бороться с указанным недостатком метода Блязюса (хотя сам автор этого и не подчеркивает). Краткое изложение этого метода дается в следующем параграфе.

§ 2. Движение жидкости в ламинарном пограничном слое при линейном распределении скорости во внешнем потоке; приближенный учет влияния начального сечения

Рассмотрим следующий частный случай распределения скорости во внешнем потоке:

$$U = b_0 - b_1 x. \quad (2.1)$$

Как показал Хоуэрз¹⁾, этот случай является основным и может

¹⁾ L. Howarth. On the solution of the laminar boundary layer equations. Proceed. of the Royal Society, Ser. A, Vol. 164, № 919, 1938; p. 547.

быть в дальнейшем обобщен на другие распределения скоростей во внешнем потоке (рассматриваемое распределение не является частным случаем несимметричного распределения предыдущего параграфа, так как там $b_0 = 0$). При грубом приближении можно под форму (2.1) подвести также профиль скорости $U(x)$ за точкой минимума давления (максимума скорости), отвлекаясь от условия $U'(x) = 0$ при $x = x_m$. Так делают, например, Карман и Милликен в ранее указанной нами работе (подробнее об этом будет сказано в одном из следующих параграфов), вводя понятие одно- и двускатного профиля скорости. Такое предположение эквивалентно предположению о линейной зависимости продольного градиента давления от абсциссы:

$$\Gamma - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} = -b_1(b_0 - b_1 x) \quad (2.2)$$

и его не следует смешивать с принимаемым некоторыми авторами линейным распределением давления за минимумом давления, т. е. постоянным градиентом давлений, которое не является частным случаем формулы (2.2), так как при $b_1 = 0$, $\frac{dp}{dx}$ будет равно нулю¹⁾, а не постоянной

Введем, следуя Хоуэрзу, вместо аргументов x и y следующие безразмерные аргументы:

$$x^* = \frac{b_1}{b_0} x, \quad \eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{b_0}{\nu x}}; \quad (2.3)$$

функцию тока ψ представим разложением:

$$\psi = \sqrt{b_0 \nu x} \left[f_0(\eta) - 8x^* f_1(\eta) + \right. \\ \left. + (8x^*)^2 f_2(\eta) - (8x^*)^3 f_3(\eta) + \dots \right]. \quad (2.4)$$

Вычислив компоненты скорости и их производные, подставим их а также выражение для $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ по (2.2), в дифференциальные уравнения пограничного слоя Прандтля. Если после всех выкладок сравнить в обеих частях уравнения, полученного таким образом из первого уравнения Прандтля (уравнение неразрывности выполнится тождественно), коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x^* , то мы получим следующую систему дифференциальных уравнений, аналогичную по типу уравнениям предыдущего параграфа (штрих — производная по η):

¹⁾ В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. ч. I. Теория предкрылка в плоско-параллельном потоке. Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933.

$$\begin{aligned}
 f_0''' + f_0 f_0'' &= 0 \\
 f_1''' + f_0 f_1'' - 2 f_0' f_1' + 3 f_0'' f_1 &= -1 \\
 f_2''' + f_0 f_2'' - 4 f_0' f_2' + 5 f_0'' f_2 &= -\frac{1}{8} + 2 f_1'^2 - 3 f_1' f_1'' \\
 f_3''' + f_0 f_3'' - 6 f_0' f_3' + 7 f_0'' f_3 &= 6 f_1' f_2' - 3 f_1' f_2'' - 5 f_1'' f_2 \\
 f_4''' + f_0 f_4'' - 8 f_0' f_4' + 9 f_0'' f_4 &= 4 f_2'^2 - 5 f_2' f_2'' + \\
 &\quad + 8 f_1' f_3' - 3 f_1' f_3'' - 7 f_1'' f_3 \\
 f_5''' + f_0 f_5'' - 10 f_0' f_5' + 11 f_0'' f_5 &= 10 f_1' f_4' - 3 f_1' f_4'' - 9 f_1'' f_4 + \\
 &\quad + 10 f_2' f_3' - 5 f_2' f_3'' - 7 f_2'' f_3 \\
 f_6''' + f_0 f_6'' - 12 f_0' f_6' + 13 f_0'' f_6 &= 12 f_1' f_5' - 3 f_1' f_5'' - 11 f_1'' f_5 + \\
 &\quad + 12 f_2' f_4' - 5 f_2' f_4'' - 9 f_2'' f_4 + 6 f_3'^2 - 7 f_3' f_3'' \\
 f_7''' + f_0 f_7'' - 14 f_0' f_7' + 15 f_0'' f_7 &= 14 f_1' f_6' - 3 f_1' f_6'' - 13 f_1'' f_6 + \\
 &\quad + 14 f_2' f_5' - 5 f_2' f_5'' - 11 f_2'' f_5 + 14 f_3' f_4' - 7 f_3' f_4'' - 9 f_3'' f_4 \\
 f_8''' + f_0 f_8'' - 16 f_0' f_8' + 17 f_0'' f_8 &= 16 f_1' f_7' - 3 f_1' f_7'' - 15 f_1'' f_7 + \\
 &\quad + 16 f_2' f_6' - 5 f_2' f_6'' - 13 f_2'' f_6 + 16 f_3' f_5' - 7 f_3' f_5'' - 11 f_3'' f_5 + \\
 &\quad + 8 f_4'^2 - 9 f_4' f_4'' \\
 \vdots & \vdots
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Граничные условия будут:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{при } \eta = 0, \quad t_r = f_r' &= 0 \\
 \text{при } \eta = \infty, \quad f_0' &= 2, \quad f_1' = \frac{1}{4}, \quad f_2' = f_3' = \dots = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5')$$

При $b_1 = 0$, $x^* = 0$; получаем обычное решение Блязнуса для пластины. Из уравнений (2.5) остается лишь первое — мы его решали в главе III. Система (2.5) в общем случае может быть раз навсегда решена, например, методом Адамса, аналогично тому, как была решена система уравнений предыдущего параграфа. Первые семь функций и их производные табулированы Ходуэрзом; приводим их в конце книги (таблица III). Распределение скоростей имеет вид:

$$u = \frac{b_0}{2} \left[f_0'(\eta) - (8x^*) f_1'(\eta) + (8x^*)^2 f_2'(\eta) - \dots \right]. \quad (2.6)$$

Отсюда нетрудно найти и распределение трения

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{4} \mu b_0 \sqrt{\frac{b_1}{\nu x^*}} \left[f_0''(0) - (8x^*) f_1''(0) + \right. \\
 \left. + (8x^*)^2 f_2''(0) - \dots \right] \quad (2.7)$$

Для определения точки отрыва, если таковой имеет место, получим уравнение

$$f_0''(0) - (8x_s^*) f_1''(0) + (8x_s^*)^2 f_2''(0) - \dots = 0. \quad (2.8)$$

Из таблицы III выпишем значения коэффициентов этого уравнения:

$$\begin{aligned} f_0''(0) &= 1,32824, & f_1''(0) &= 1,02054, & f_2''(0) &= -0,06926 \\ f_3''(0) &= 0,0560, & f_4''(0) &= -0,0372, & f_5''(0) &= 0,0272 \\ f_6''(0) &= -0,0212, & f_7''(0) &= 0,0174, & f_8''(0) &= -0,0147. \end{aligned}$$

Последние два коэффициента в таблице III не помещены.

Из рассмотрения приведенных коэффициентов (особенно последних) можно заключить, что при $8x_s^*$, близком к единице, ряд, стоящий в левой части (2.8), сходится весьма медленно. Следующим образом можно оценить корень этого уравнения. Положим сначала все коэффициенты, начиная с $f_9''(0)$, равными нулю, тогда, решая полученное уравнение обычным методом обращения рядов, найдем $x_s^* = 0,129$; затем положим, что все коэффициенты $f_r''(0)$, начиная с $f_9''(0)$, по модулю равны $|f_9''(0)| = 0,0147$, тогда, суммируя таким образом полученную прогрессию и решая уравнение, найдем $x_s^* = 0,119$. Решение уравнения (2.8) лежит в пределах:

$$0,119 < x_s^* < 0,129.$$

Дополнительное рассуждение, приводимое в работе Хоуэрза (слишком громоздкое для того, чтобы его здесь излагать), дает значение x_s^* , равное

$$x_s^* = 0,12. \quad (2.9)$$

Заметим одну весьма существенную деталь полученного решения. В числе граничных условий (2.5') нет условия при $x^* = 0$; аналогично тому, как это имело место в задаче Блязюса, ставятся лишь условия при $y = 0$ и $y = \infty$ — решение, которое при этом получается, ведет себя вблизи $x^* = 0$ так же, как решение Блязюса для пластинок, т. е. при $x^* \rightarrow 0$, $\tau_0 \rightarrow \infty$, что касается скоростей, то при $x^* \rightarrow 0$ профиль скорости, согласно (2.6), стремится к профилю на пластинке без продольного перепада давлений. На самом же деле, как легко представить, в некотором промежуточном сечении пограничного слоя, в частности в сечении, соответствующем максимуму скорости (минимуму давления) внешнего потока, профиль скоростей и местное трение зависят от развития слоя в предыдущих сечениях. Однако с возрастанием x^* влияние начального сечения уменьшается и можно с успехом применять предыдущие формулы. Вопрос о том, с какого именно значения $x = x_0$ или $x^* = x_0^*$ следует пользоваться полученными решениями, остается открытым. Для решения этого вопроса можно поступать различно, но основная идея заключается в том, чтобы подчинить выбираемое решение, если не в точности начальному условию при $x = x_0$ (что невозможно при выбранном методе решения), то по крайней мере хотя бы некоторому суммарному условию, характеризующему явление в начальном сечении. Можно, например, потребовать, чтобы в начальном сечении было задано напряжение трения τ_0 или какая-нибудь условная толщина в пограничном слое: „толщина вытеснения“ δ^* или „толщина потери импульса“ δ^{**} , о которых было сказано

еще в главе I; напомним, что эти толщины определяются равенствами:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad (2.10)$$

причем в случае наличия продольного градиента давления скорость внешнего потока U представляет собою заданную функцию x , а не просто постоянную, как в предыдущей главе.

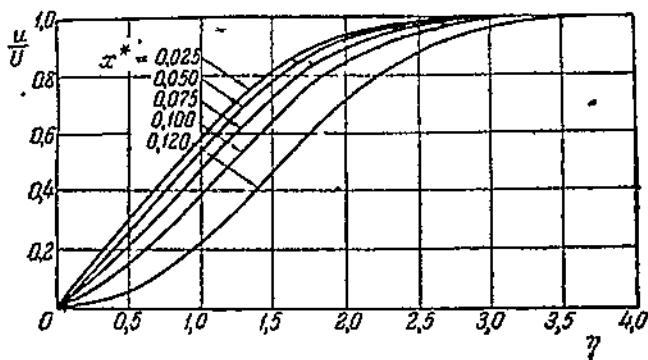


Рис. 35.

В дальнейшем условимся принимать за основную суммарную меру движения жидкости в данном сечении пограничного слоя „толщину потери импульса“ и введем наряду с этой величиной еще следующую безразмерную величину:

$$\chi = \sqrt{\frac{b_1}{\gamma}} \delta^{**} = \chi(x^*). \quad (2.11)$$

Найденная формула для скорости (2.6) позволяет определить $\frac{u}{U}$ как функцию η при различных x^* , а следовательно, по (2.10) и (2.11) δ^* , δ^{**} и χ , как функции x^* . На рис. 35 даем графики скорости при различных x^* , а на рис. 36 кривую $\chi(x^*)$; приводим также в конце книги таблицу скоростей (таблица IV). В таблице 1 даны значения $\chi(x^*)$ и некоторых производных величин, которые в дальнейшем нам пригодятся; в эту же таблицу поместим и величины, связанные с трением на стенке

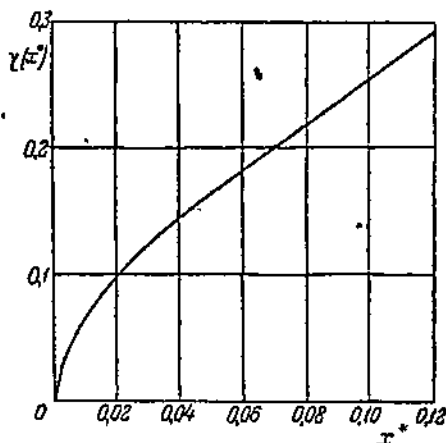


Рис. 36.

$$\tau_0' = \frac{1}{b_0} \sqrt{\frac{\gamma}{b_1}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{и} \quad \frac{\tau_0'}{1-x^*} = \frac{1}{b_0(1-x^*)} \sqrt{\frac{\gamma}{b_1}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (2.12)$$

ТАБЛИЦА I

x^*	$\chi(x^*)$	$\frac{d\chi}{dx^*}$	$\frac{\chi}{\frac{d\chi}{dx^*}}$	τ_0'	$\frac{\tau_0'}{1-x^*}$
0,0000	0,000	∞	0,000	∞	∞
0,0125	0,076	3,17	0,024	2,739	2,773
0,0250	0,110	2,39	0,046	1,772	1,817
0,0375	0,137	2,08	0,066	1,309	1,360
0,0500	0,162	1,93	0,084	1,011	1,064
0,0625	0,186	1,85	0,100	0,790	0,843
0,0750	0,209	1,82	0,115	0,613	0,663
0,0875	0,231	1,81	0,128	0,459	0,503
0,1000	0,254	1,84	0,138	0,315	0,345
0,1125	0,276	1,88	0,147	0,163	0,184
0,1200	0,290	1,92	0,151	0,000	0,000

Графики этих величин при $0 < x^* < 0,12$ мало отличаются друг от друга, поэтому приводим лишь один из них (рис. 37). Если каким-нибудь путем удалось уже найти решение задачи о пограничном слое в интер-

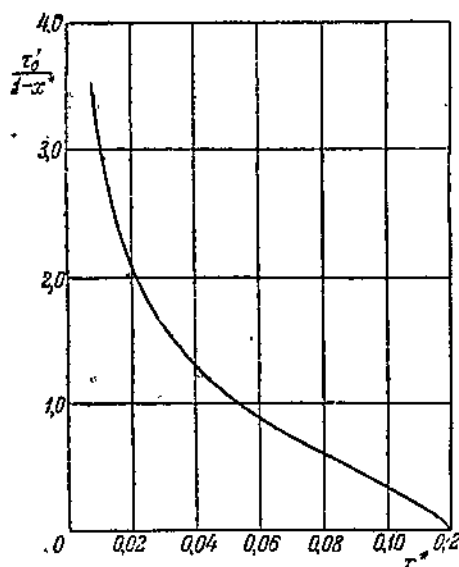


Рис. 37.

вале $0 \leq x \leq x_0$ и мы хотим в дальнейшем (при $x > x_0$) применить решение, соответствующее линейному профилю скорости (2.1), то, вычислив по имеющемуся уже решению при $x = x_0$, $\delta_0^{**} = \delta_{x_0}^{**}$ (рис. 36

и $\chi_0 = \sqrt{\frac{b_1}{\nu} \delta_0^{**}}$, по графику рис. 36 или по таблице находим соответствующие x_0^* . Этому значению x_0^* соответствует определенный профиль скоростей по рис. 35 или таблице скоростей (таблица 1). Полученный профиль, конечно, не должен совпадать с профилем скоростей, найденным при решении задачи для интервала $0 < x < x_0$; то же относится и к трению τ_0' — совпадать будут лишь „толщины потери импульса“. Начиная с $x^* = x_0^*$,

примем за решение задачи уже имеющиеся у нас графики для $x_0^* < x^* < 0,12$.

Изложенный только-что прием представляет собою приближенный метод решения основной задачи теории пограничного слоя о развитии начального профиля скорости, заданного при $x = x_0$ в дальней-

ших сечениях слоя при $x > x_0$; приближенность обусловлена тем, что мы решаем лишь небольшой частный случай этой задачи, а именно случай задания начального профиля некоторой интегральной его характеристикой. Напомним, что, собственно говоря, также решалась задача о следе за пластинкой по методу Толмиена, — там профиль скоростей подчинялся условию, чтобы в сечении на задней кромке пластинки полное сопротивление или потеря импульса, рассчитанная по взятому профилю скоростей, равнялась истинному полному сопротивлению пластинки. Это полностью соответствует примененному в настоящем параграфе методу, так как в случае пластинки равенство полных сопротивлений или потерь импульсов эквивалентно равенству „толщин“ потери импульсов. Таково же было и решение задачи о струе, вытекающей с бесконечно большой скоростью из бесконечно тонкого отверстия. Задание начального импульса делает эту на первый взгляд весьма отвлеченную задачу применимой к приближенному решению задач вытекания из отверстия конечного размера, лишь бы в некотором сечении импульсы обеих струй совпадали; начиная с этого сечения, первое решение может рассматриваться как приближение ко второму, причем тем более точное, чем далее мы уйдем от выбранного сечения.

Как будет в дальнейшем показано, сравнительно просто решить задачу о распределении скоростей и трения в области ламинарного пограничного слоя от лобовой критической точки до точки минимума давления (максимума внешней скорости), т. е. в области убывающего давления или возрастающей скорости внешнего потока (область ускоренного движения, конфузорная область). Наибольшие затруднения представляет, наоборот, область за точкой минимума давления, где жидкость во внешнем потоке замедляет свое движение (диффузорная область). При решении задачи о диффузорной области по заданным интегральным характеристикам (толщины потери импульса, в частности) в сечении, где давление — минимум, с успехом может применяться изложенный в настоящем параграфе прием.

§ 3. Применение метода Хоуэрза к случаю нелинейного профиля скорости внешнего потока

Как уже упоминалось в конце § I настоящей главы, основным недостатком метода Блязиуса является сложность, а иногда и невозможность при больших интервалах аргумента достаточно точного представления кривой скорости внешнего потока, многочленом сравнительно невысокой степени. На основании изложенного в предыдущем параграфе метода можно дать прием приближенного, решения задачи о пограничном слое в случае любого нелинейного профиля скорости внешнего потока.

Идея этого приема, принадлежащего также Хоуэрзу,¹⁾ заключается в замене нелинейного профиля скорости $U=U(x)$ полигоном, к отдельным сторонам которого могут быть применены результаты

¹⁾ loc. cit., Part. II, p. 565.

предыдущего параграфа. Возможность дальнейшего предельного перехода от полигона к истинному профилю скоростей делает метод Хоу-эрта особенно интересным.

Предположим, что заданный профиль скоростей $U = U(x)$ заменен некоторым полигоном $ABCD \dots$ с конечным числом сторон. В сечении, соответствующем вершине A , будем считать заданной некоторую интегральную характеристику слоя, например δ^* или χ ; сторона AB может быть представлена уравнением

$$U = b_0' - b_1 X = U_A - b_1 (x - x_A). \quad (3.1)$$

Представляя это уравнение в виде (2.1), имеем

$$U = b_0' - b_1 X = b_0 - b_1 x; \quad (3.2)$$

отсюда следует, что

$$b_0' = U_A = b_0 - b_1 x_A = b_0 (1 - x_A^*). \quad (3.3)$$

Выбирая, согласно ранее изложенному приему, x_A^* так, чтобы

$$\chi(x_A^*) = \sqrt{\frac{b_1}{\nu}} \delta_A^{**},$$

где δ_A^{**} взято из заданного наперед решения для области $x \leq x_A$, по графику рис. 3б находим x_A^* . Определив x_A^* , будем знать по (3.3),

чему равно b_0 , а следовательно, и любое $x^* = \frac{b_1 x}{b_0}$, в том числе и x_B^* ,

соответствующее вершине B ¹⁾. Вычислив $\chi(x_B^*) = \sqrt{\frac{b_1}{\nu}} \cdot \delta_B^{**}$ по формулам только-что исследованного интервала ($x_A \leq x \leq x_B$), найдем новое x_B^* для интервала $x_B \leq x < x_C$, с новыми значениями b_0 и b_1 , приравняв новую функцию $\chi(x^*)$ только-что полученному значению $\chi(x_B^*)$ и т. д. Так, переходя от одной вершины к другой и от одной стороны полигона к другой, получаем по отдельным интервалам профили скоростей и трение на поверхности. Следует, однако, заметить, что решение в целом не будет при этом непрерывным, в частности, трение на стенке будет претерпевать скачки в сечениях, соответствующих вершинам полигона, так как мы непрерывно сопрягали лишь „толщины потери импульса“, а не их производные.

¹⁾ Указанный прием определения x_A^* и x_A имеет следующий смысл. Пользуясь произволом в выборе начала отсчета абсцисс x для линейного профиля, мы подбираем x_A так, чтобы в точке A при пользовании линейным профилем внешней скорости успело нарасти то же значение суммарной характеристики слоя (например δ^{**}), что и при действительном распределении скоростей во внешнем потоке. Речь идет, таким образом, о замене существующей на самом деле формы обтекаемого тела на участке, расположенном вверх по потоку от точки A , некоторой другой эквивалентной формой, при наличии которой распределение скоростей будет линейным и в точке A даст то же значение выбранной для сравнения характерной суммарной величины (δ^* , δ^{**} или другой).

Этот недостаток приближенного решения можно устранить, если совершить предельный переход, увеличивая безгранично число сторон полигона и уменьшая длины сторон до нуля.

Для определенности выберем следующий прием замены заданной кривой $U=U(x)$ полигоном. Пусть полигон $ABC \dots$ описан вокруг кривой $U=U(x)$, причем (рис. 38) B есть одна из вершин полигона, а A и C — смежные точки соприкосновения сторон полигона с кривой.

Исследуем, как будет изменяться величина x^* , когда, выйдя из точки A , будем двигаться в точку C , переходя по ломаной линии ABC . В настоящем случае, поскольку заданы направления сторон полигона по касательным к профилю скоростей, величины b_1 имеют вполне определенные значения; пусть абсцисса точки A есть x , а точки C — $x + \Delta x$, тогда вдоль стороны AB : $b_1 = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_x$, вдоль

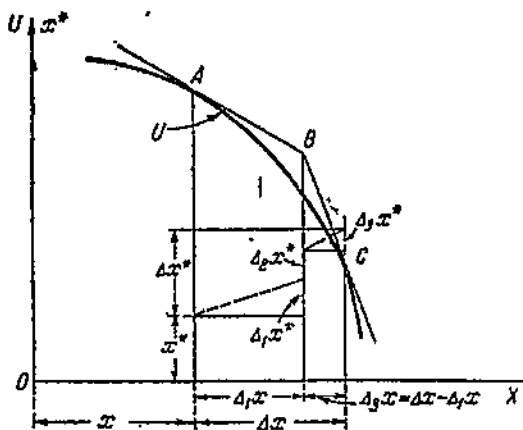


Рис. 38.

стороны BC : $b_1 = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x+\Delta x} = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_x - \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_x \cdot \Delta x$. Что же касается величины b_0 , то ее определение связано с принимаемым опять условием непрерывности изменения „толщины потери импульса“ δ^{**} .

Обозначим через $\Delta_1 x^*$ изменение величины x^* при переходе от точки A к B вдоль линии AB ; через $\Delta_2 x^*$ обозначим скачок, который происходит в величине x^* , при переходе в точке B от отрезка AB к отрезку BC ; при этом изменяются величины b_0 и b_1 . Наконец, через $\Delta_3 x^*$ обозначим изменение величины x^* при переходе из точки B в точку C вдоль отрезка BC . Определим полное изменение $\Delta x^* = \Delta_1 x^* + \Delta_2 x^* + \Delta_3 x^*$.

Имеем на отрезке AB по (3.3):

$$\Delta_1 x^* = \frac{b_1 \Delta_1 x}{b_0} = \frac{b_1 (1-x^*) \Delta_1 x}{b_0'} = -(1-x^*) \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \Delta_1 x. \quad (3.4)$$

Скачок $\Delta_2 x^*$ определится из условия непрерывности δ^{**} или пропорциональной ей величины

$$\frac{\delta^{**}}{\sqrt{v}} = \frac{\lambda}{\sqrt{b_1}}.$$

Будем иметь, вспоминая выражение b_1 через производную U по x :

$$\frac{\lambda (x^* + \Delta_1 x^*)}{\sqrt{-\left(\frac{dU}{dx}\right)_x}} = \frac{\lambda (x^* + \Delta_1 x^* + \Delta_2 x^*)}{\sqrt{-\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x+\Delta x}}},$$

или разлагая входящие сюда величины в ряд и довольствуясь малыми первого порядка:

$$\frac{\chi(x^* + \Delta_1 x^*)}{\sqrt{-\left(\frac{dU}{dx}\right)_x}} = \frac{\chi(x^* + \Delta_1 x^*) + \Delta_2 x^* \left(\frac{d\chi}{dx^*}\right)_{x^* + \Delta_1 x^*}}{\sqrt{-\left(\frac{dU}{dx}\right)_x - \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_x \cdot \Delta x}}.$$

Если в правой части полученного равенства вынести в качестве множителя отношение $\frac{\chi(x^* + \Delta_1 x^*)}{\sqrt{-\left(\frac{dU}{dx}\right)_x}}$, а в оставшемся выражении сделать

обычные упрощения, сводящиеся к отбрасыванию малых величин выше первого порядка, то после простых сокращений получим:

$$\Delta_2 x^* = \frac{\chi \frac{d^2U}{dx^2}}{2 \frac{d\chi}{dx^*} \frac{dU}{dx}} \Delta x. \quad (3.5)$$

Изменение $\Delta_3 x^*$, происходящее при переходе от точки В к точке С по отрезку ВС, очевидно, будет равно (рис. 38) с точностью до малых первого порядка:

$$\begin{aligned} \Delta_3 x^* &= -(1 - x^* - \Delta x^*) \left(\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \right)_{x + \Delta x} (\Delta x - \Delta_1 x) = \\ &= -(1 - x^*) \left(\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \right) (\Delta x - \Delta_1 x). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Складывая результаты уравнений (3.4), (3.5) и (3.6), получим с точностью до малых первого порядка:

$$\Delta x^* = \Delta_1 x^* + \Delta_2 x^* + \Delta_3 x^* = \left[-(1 - x^*) \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2} \frac{\chi}{d\chi^*} \frac{\frac{d^2U}{dx^2}}{\frac{dU}{dx}} \right] \cdot \Delta x,$$

или, переходя к пределу, когда $\Delta x \rightarrow 0$;

$$\frac{dx^*}{dx} = -\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (1 - x^*) + \frac{1}{2} \frac{\chi(x^*)}{\frac{d\chi}{dx^*}} \cdot \frac{\frac{d^2U}{dx^2}}{\frac{dU}{dx}}. \quad (3.7)$$

Это и есть основное уравнение Хоуэрза; в нем $\chi(x^*)$ — заданная таблицей 1 и графиком рис. 36 функция x^* , а U — известная функция x , — уравнение (3.7) определяет x^* в функции от x по заданному начальному x_0^* , соответствующему некоторому начальному сечению $x = x_0$. Задавая для начального сечения ($x = x_0$) значение толщины потери импульса δ_0^{**} , найдем

$$\chi_0 = \sqrt{\frac{b_1}{\nu}} \delta_0^{**} = \sqrt{-\frac{1}{\nu} \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x_0}} \delta_0^{**},$$

и по графику или по таблице то x_0^* , при котором $\chi(x_0^*) = \chi_0$, — это и будет начальное значение x_0^* при $x = x_0$. Зная $x^* = x^*(x)$, сможем для любого x по имеющимся таблицам и графикам найти трение и профили скорости в сечении пограничного слоя, т. е. решить задачу до конца.

Уравнение имеет особую точку $x^* = 0$; в самом деле, при этом $\frac{dU}{dx} = 0$, первое слагаемое (3.7) обращается в нуль, а второе принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$, так как вместе с $\frac{dU}{dx}$ обращается в нуль и отношение $\frac{\chi(x^*)}{\frac{d\chi}{dx^*}}$ (см. таблицу 1). Легко видеть, что эта особая

точка — „узел“, т. е. такая точка плоскости (x, x^*) , через которую проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Предположим теперь, что мы хотим исследовать ламинарный слой в диффузорной части обтекаемого профиля, начиная как раз с сечения, соответствующего минимуму давления, т. е. $x^* = 0$, тогда задание начального условия $x^* = 0$ при $x_0 = x_m$ будет уже недостаточно, так как в этой (особой) точке производная $\frac{dx^*}{dx}$ имеет неопределенное значение. Поставленная задача имеет большое значение, так как именно в диффузорной части мы встречаемся с большими затруднениями, применяя другие методы, а в конфузорной части вплоть до сечения, соответствующего минимуму давления, задача легко может быть решена (см. следующие параграфы). Покажем, как следует поступать в этом случае.

Докажем прежде всего, что вблизи особой точки $x^* = 0$ функция $\chi(x^*)$ ведет себя как $\sqrt{x^*}$. Для этого заметим, что функция χ , равная

$$\chi = \sqrt{\frac{b_1}{\gamma}} \cdot \delta^{**} = \sqrt{\frac{b_1}{\gamma}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy,$$

согласно формуле скорости (2.6) и равенства (2.3) может быть представлена в виде:

$$\chi = 2 \sqrt{x^*} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{2} f_0(\eta) \left[1 - \frac{1}{2} f_0(\eta)\right] d\eta + \text{величина порядка } x^{*3/2},$$

а интеграл, стоящий в правой части, представляет просто число, которое может быть приближенно найдено по таблице $f_0(\eta)$. Таким образом будем иметь:

$$\chi(x^*) = 0,664 \sqrt{x^*} + \text{величина порядка } x^{*3/2} \quad (3.8)$$

Предположим теперь, что точка A совпадает как раз с максимальной точкой кривой скорости $U = U(x)$; сохраняя прежние обозначения, заметим, что в этом случае наклон отрезка AB будет нулем, а наклон отрезка BC с точностью до малых первого порядка равен $\frac{d^2U}{dx^2} \Delta x$.

Повторяя предыдущий анализ, убедимся, что изменение функции χ при переходе от точки A к точке C будет равно:

$$\Delta\chi = \sqrt{-\frac{1}{\nu} \frac{d^2U}{dx^2}} \Delta x \cdot \delta_0^{**}, \quad (3.9)$$

где δ_0^{**} задается наперед (из решения задачи для конфузорной области). С другой стороны, по (3.8), поскольку в сечении, где U максимально, $x^* = 0$, $\chi = 0$, и, следовательно, $x^* = \Delta x^*$ и $\chi = \Delta\chi$,

$$\Delta\chi = 0,664 \sqrt{\Delta x^*}. \quad (3.10)$$

Сравнивая (3.9) и (3.10), получим:

$$\frac{dx^*}{dx} = -2,269 \frac{\delta_0^{**}}{\nu} \cdot \frac{d^2U}{dx^2}. \quad (3.11)$$

Это равенство дает недостающее условие для производной $\frac{dx^*}{dx}$ при $x = x_m$, $x^* = 0$ и, таким образом, доопределяет задачу о решении уравнения (3.7) в том случае, когда начальные условия даны в особой точке — сечении, соответствующем максимуму скорости или минимуму давления.

Решение уравнения (3.7) может быть выполнено любым из приближенных аналитических или графических приемов. В том и другом случае нам достаточно иметь таблицы (или графики) значений U , $\frac{dU}{dx}$, $\frac{d^2U}{dx^2}$, а не нужно, как в методе Блязюса, знать аналитическое представление функций U в виде полинома, что, как уже указывалось, весьма затруднительно. Даем на рис. 39 полезный вспомогательный график величины $\frac{\chi}{\frac{d\chi}{dx^*}}$, входящий в уравнение (3.7), как функции от x^{*1} .

¹) Кривая, представленная этим графиком, с большой точностью укладывается в зависимость

$$\frac{\chi}{\frac{d\chi}{dx^*}} = 2x^* - 6,2x^{*2}.$$

Уравнение (3.7) при этом превращается в уравнение Рикатти

$$\frac{dx^*}{dx} = -\frac{U'}{U} + \left(\frac{U'}{U} + \frac{U''}{U'}\right) x^* - 3,1 \frac{U''}{U'} x^{*2}.$$

А. С. Кельзон разработал прием приближенного численного интегрирования последнего уравнения, допускающий практические приложения. Примеры расчетов можно найти в кандидатской диссертации А. С. Кельзон. „Сопротивление трения крыла“, защищенной им в июне 1940 г. в ЛИИ. Основное достоинство приема А. С. Кельзона заключается в том, что для расчета нет необходимости пользоваться второй производной $U''(x)$, определяемой обычно графически с очень малой точностью.

Изложенный метод был применен к исследованию вопроса о теоретическом определении места отрыва пограничного слоя в диффузорной его части на эллиптическом цилиндре с отношением большей полуоси к меньшей 2,96:1, обдуваемым под нулевым углом атаки потоком, направленным вдоль большей оси.

Экспериментально вопрос был исследован Шубауэром¹⁾, который дал для этого случая распределение давлений по поверхности эллиптического цилиндра, таблицы значений U , $\frac{dU}{dx}$ и $\frac{d^2U}{dx^2}$ профиля скоростей в сечениях пограничного слоя и, наконец, место отрыва слоя. Не останавливаясь на деталях эксперимента, укажем лишь, что профили скоростей определялись методом тепловой анемометрии, о которой уже говорилось в разделе о пластинке (опыты Бюргерса), а место отрыва определялось как по профилям скорости (условие $(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} = 0$), так и непосредственно визуально при помощи дыма.

Приводим таблицу 2 скоростей (безразмерных, отнесенных к скорости на бесконечности) внешнего потока и их производных по опытам Шубауэра (значения производных были уточнены Хоуэрзом) в диффузорной области пограничного слоя (x , отнесенное к меньшей оси, больше чем 1,3).

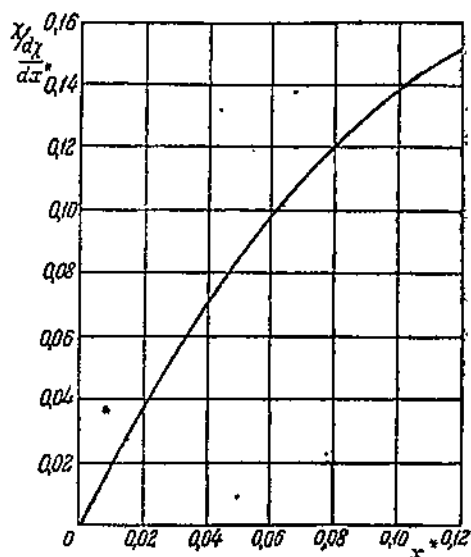


Рис. 39.

ТАБЛИЦА 2

x	U	$\frac{dU}{dx}$	$\frac{d^2U}{dx^2}$
1,3	1,295	0,000	-0,215
1,4	1,294	-0,024	-0,255
1,5	1,290	-0,050	-0,260
1,6	1,284	-0,075	-0,255
1,7	1,275	-0,100	-0,220
1,8	1,264	-0,119	-0,140
1,9	1,252	-0,126	-0,005
1,925	1,249	-0,126	+0,055

¹⁾ G. Schubauer. Air flow in a separating laminar boundary layer. NACA Rep. № 527, 1935.

Пользуясь этой таблицей и таблицей или графиком $\frac{\chi}{\frac{d\chi}{dx^*}}$, можно

определить x^* в функции от безразмерного x (рис. 40); видим, что значение $x^* = 0,12$, соответствующее отрыву, достигается, примерно, при $x_s = 1,925$, что достаточно близко подходит к опытному значению $x_s = 1,99$. Имея кривую $x^* = x^*(x)$, можно по ранее указанным

графикам найти профили скоростей и трение в любом сечении.

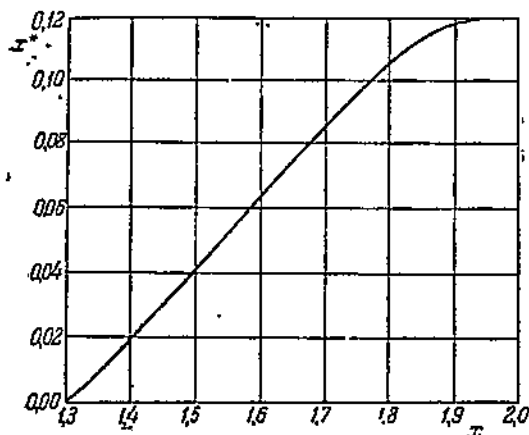


Рис. 40.

§ 4. Метод Кармана-Польгаузен. Определение толщины пограничного слоя и места отрыва. Сравнение результатов расчета с экспериментом. Неточность метода вблизи отрыва слоя

Обратимся теперь к рассмотрению приложения теории пограничного слоя к конечной толщине к решению задачи о распределе-

нии скоростей, трения и розыскания точки отрыва в пограничном слое.

Как уже упоминалось в главе I, метод сводится к выбору многочлена, аппроксимирующего профиль скоростей в пограничном слое и удовлетворяющего тем или иным граничным условиям.

Польгаузен¹⁾ остановился на многочлене четвертой степени и положил в основу уже ранее указанные (в § 3 главы I) условия 1—5:

$$\text{при } y=0 \quad u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{UU'}{v}$$

$$\text{при } y=\delta \quad u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Подчиняя этим условиям коэффициенты многочлена

$$u = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3 + a_4(x)y^4,$$

получим следующее выражение аппроксимирующего многочлена

$$\frac{u}{U} = \frac{12+\lambda}{6} \cdot \frac{y}{\delta} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{4-\lambda}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{6-\lambda}{6} \left(\frac{y}{\delta}\right)^4, \quad (4.1)$$

где

$$\lambda = \frac{U'^2 \delta^3}{v}. \quad (4.2)$$

¹⁾ K. Pohlhausen. Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. ZAMM, Bd. 1, 1921, S. 233; также Abhandlungen aus dem Aerod. Inst. Aachen, H. 1, S. 20.

Этот многочлен должен быть подставлен в интегральное условие Кармана. Предварительно находим

$$\int_0^{\delta} u dy = U \delta \int_0^1 \frac{u}{U} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{120}(84 + \lambda) \cdot U \cdot \delta,$$

$$\int_0^{\delta} u^3 dy = U^3 \delta \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^3 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{1260} \left(734 + \frac{71}{6} \lambda + \frac{5}{36} \lambda^3\right) U^3 \delta,$$

и уже после этого составим уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0,8 \left[-9072 + 1670,4\lambda - \left(47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U'^2}\right) \lambda^2 - \left(1 + \frac{UU''}{U'^2}\right) \lambda^3 \right]}{U(-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^3)} \quad (4.3)$$

где введено промежуточное обозначение для величины, пропорциональной квадрату толщины пограничного слоя:

$$z = \frac{\lambda}{U} = \frac{\delta^2}{\nu}. \quad (4.4)$$

Для определения толщины пограничного слоя получено таким образом обыкновенное нелинейное уравнение первого порядка. Прежде чем обратиться к вопросу о приближенных методах его решения, остановимся на выяснении начального условия для z или λ . Нам необходимо знать $z = \frac{\delta^2}{\nu}$, т. е. квадрат толщины пограничного слоя, для какого-нибудь значения абсциссы x . Заметим, что при $x=0$, $U=0$ (для любого носа модели, как закругленного, так и острого, с углом отличным от нуля). Если числитель правой части уравнения (4.3) не будет при этом равен нулю, то производная в левой части обратится в бесконечность, и мы не сможем получить интеграла, дающего конечное значение z при $x=0$. Поэтому приходится положить числитель равным нулю при $x=0$ и $U=0$; это приведет нас к алгебраическому уравнению

$$\lambda^3 + 47,4\lambda^2 - 1670,4\lambda + 9072 = 0, \quad (4.5)$$

имеющему корни:

$$\lambda_1 = -70, \lambda_2 = 7,052 \text{ и } \lambda_3 = 17,75.$$

Для выбора корня, отвечающего условиям нашей задачи, прежде всего отбросим корень λ_1 , как отрицательный и противоречащий условию $U' > 0$ вблизи лобовой точки ($U=0$) и после этого рассмотрим третий корень $\lambda_3 = 17,75$. В интервале между точкой разветвления на лбу и точкой отрыва слоя λ должно изменяться непрерывно. По (4.1) легко сообразить, что в точке отрыва $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0\right] \lambda$ должно равняться

$$\lambda_s = -12. \quad (4.6)$$

Если предположить, что на лбу $\lambda = \lambda_3 = 17,75$, то на протяжении не оторвавшегося слоя λ будет меняться от положительного значения

17,75 до отрицательного — 12 и, следовательно, обязательно пройдет значение $+12$, которое, как легко видеть, является корнем знаменателя правой части (4.3). При этом производная $\frac{dz}{dx}$ обратится в бесконечность, что, как уже упоминалось, недопустимо. В связи с этим, третий корень также должен быть отброшен, и остается единственное значение для λ на лбу:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 = \lambda_0 = \frac{U_0' \delta_0^2}{\nu} = 7,052 \\ z_0 = \frac{\delta_0^2}{\nu} = \frac{7,052}{U_0'} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Приведенное рассуждение дает нам граничное условие: при $x=0$, $z=z_0 = \frac{7,052}{U_0'}$, но при этом правая часть дифференциального уравнения (4.3) обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, т. е. точка $x=0$, $z=z_0$ является особой точкой дифференциального уравнения (4.3); обычное исследование убеждает нас, что это так называемая седлообразная точка. Аналитическое розыскание интегральных кривых, проходящих через особую точку, представляет собою большую сложность, поэтому Польгаузен¹⁾ предпочел решать задачу графическим методом изоклин. Вкратце сущность этого метода заключается в следующем. В каждой точке плоскости (z, x) непосредственным вычислением определяется значение правой части уравнения (4.3) и это дает $k = \frac{dz}{dx}$, т. е. тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в данной точке. Если наметить графически, в ряде точек, небольшие отрезки этих касательных, то обертка их даст интегральную кривую; при более или менее плотном выборе системы точек на плоскости и малых по длине штрихам, изображающих наклоны касательных, интегральные кривые вырисовываются сами, как это видно на рис. 41. При желании можно упорядочить распределение наклонных отрезков, нанеся заранее на чертеж кривые одинакового наклона касательных к интегральным кривым — *изоклины* (по наименованию которых и называют обычно сам метод); для этого полагаем правую часть уравнения (4.3) равной различным постоянным и наносим соответствующее семейство кривых — *изоклин*. Для удобства вычисления правой части для различных частных случаев, отличающихся между собою лишь значениями U , U' и U'' , можно основному уравнению Польгаузена (4.3) придать вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(\lambda)}{U} + z^2 U'' \cdot g(\lambda), \quad (4.8)$$

где функции

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{7257,6 - 1336,32\lambda + 37,92\lambda^2 + 0,8\lambda^3}{213,12 - 5,76\lambda - \lambda^2} \\ g(\lambda) &= \frac{3,84 + 0,8\lambda}{213,12 - 5,76\lambda - \lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

¹⁾ K. Pohlhausen, loc. cit.

могут быть заранее протабулированы раз навсегда; таблицы их вычислены Хоуэрзом¹⁾ и прилагаются нами в конце книги (таблица V). Пользование этими таблицами облегчает применение метода Польгаузена.

На рис. 41 показано построение решения для круглого цилиндра при заданном распределении скоростей внешнего потока по Хименцу (см. § 1 настоящей главы). Начальное значение $z = z_0$ в данном конкретном случае ($U_0' = 7,151$) получается весьма близким к единице:

$$z_0 = \frac{\lambda_0}{U_0'} = \frac{7,052}{7,151} \approx 0,987.$$

Если принять для воды $\nu = 0,01$ см²/сек, то

$$\delta_0 = 0,0996 \text{ см},$$

т. е. начальная толщина пограничного слоя должна быть оценена в 1 мм.

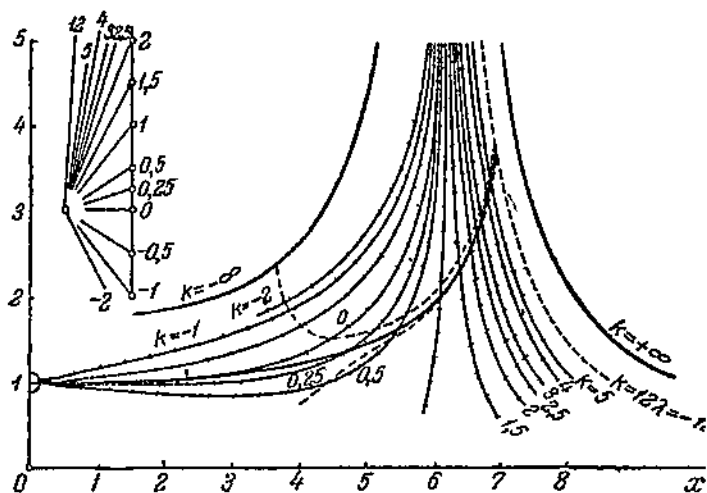


Рис. 41.

Жирная кривая на рис. 41 дает искомую интегральную кривую, проходящую через точку $x=0$, $z_0=1$. Это — кривая квадрата толщины пограничного слоя (с точностью до множителя $\frac{1}{\nu}$); по этой кривой сразу можно найти и место отрыва слоя и профили скоростей и др. Для определения места отрыва будем искать пересечение нашей интегральной кривой с кривою [вспомнить (4.6)]:

$$z = -\frac{12}{U'}.$$

¹⁾ В ранее цитированной работе (ARC, R & M, № 1632, 1935).

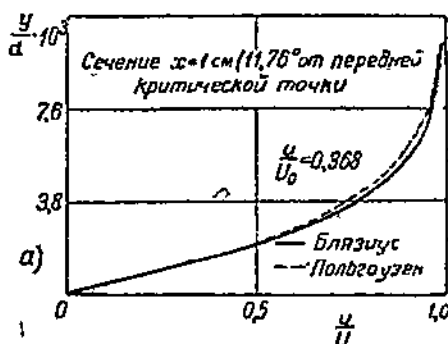


Рис. 42 а.

Полученное при этом значение x_s (рис. 41) оказывается очень близким к ранее указанному значению абсциссы места отрыва ($x_s = 6,94$). Толщина слоя в этом месте почти в два раза толще соответствующей толщины в точке разветвления потока.

Распределение скоростей в пограничном слое на круглом цилиндре, рассчитанное методом Польшаузена, показано на рис. 42а, б, в; там же, для сравнения, даны профили по Блязиусу.

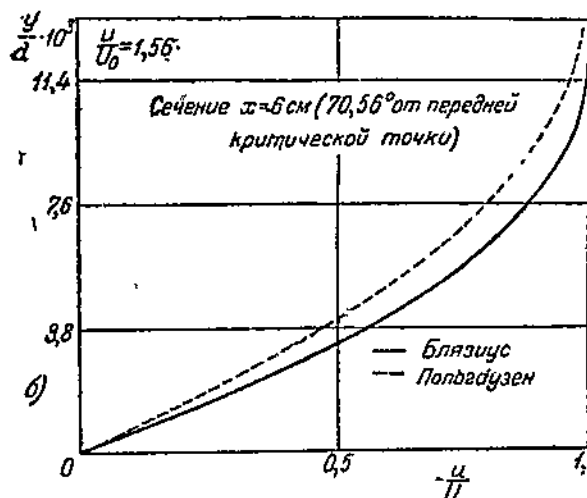


Рис. 42 б.

зигнусу (при распределении давления по Хименцу, т. е. экспериментальному). Как видно, в сечениях, далеких от точки отрыва, оба метода приводят к довольно хорошо совпадающим результатам, при приближении же к месту отрыва (82°), кривые скоростей все более и более расходятся.

В конфузорной области пограничного слоя на цилиндре метод Польшаузена дает вполне удовлетворительные результаты (точка минимума давлений на цилиндре расположена, примерно, на 68° от передней критической точки). В диффузорной же части профили скоростей значительно расходятся, и метод Польшаузена оказывается не пригодным. Вызывает удивление тот факт, что хотя в диффузорной части метод не удо-

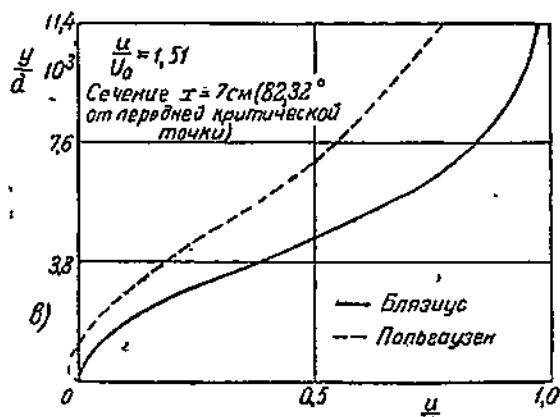


Рис. 42 в.

влетворителен, все же место отрыва предсказывается правильно. Факт этот легко объясним специфическими особенностями обтекаемого тела. На круглом цилиндре, как это можно видеть на рис. 41, кривые $z(x)$ и $\lambda = \lambda_S = -12$ вблизи отрыва круто идут вверх и значительным изменениям λ_S (например от -12 до -4) будут соответствовать сравнительно малые изменения в абсциссе отрыва x_S , между тем как изменения λ_S сильно влияют на профили скоростей. Таким образом удовлетворительность указания правильной абсциссы точки отрыва по методу Польгаузена еще не доказывает его точности. Подтвердить эту мысль можно опытом Шубауэра, о котором мы уже говорили в предыдущем параграфе. Шубауэр исследовал эллиптический цилиндр сравнительно вытянутой формы (отношение осей 2,96:1) с медленно развивающимся за точкой минимума давлений явлением отрыва, и из его опытов факт неприменимости метода Польгаузена явствует с большой очевидностью.

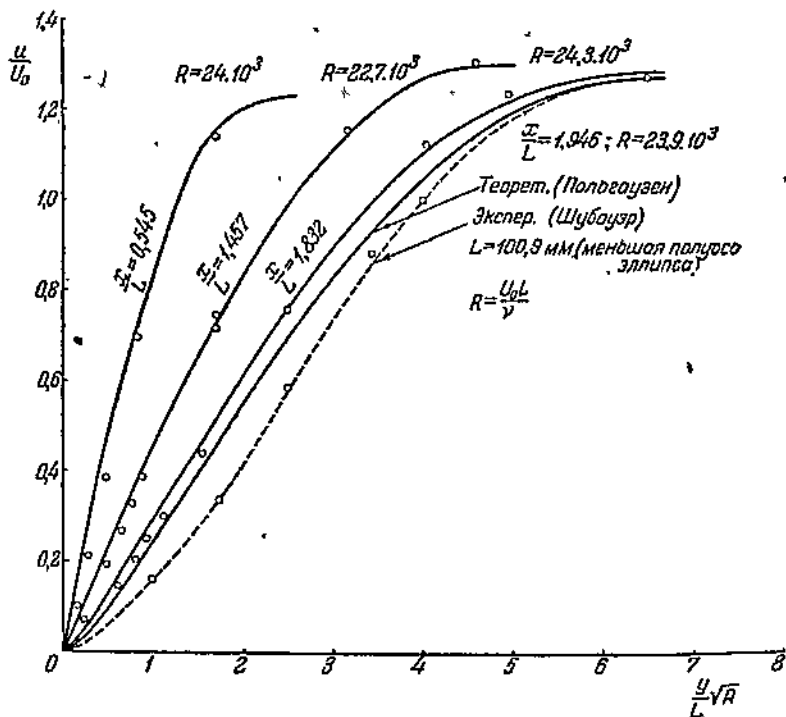


Рис. 43.

На рис. 43 приводим результаты сравнений экспериментальных профилей Шубауэра с теоретическими, рассчитанными по методу Польгаузена. Мы видим, что очень хорошее совпадение получается, примерно, до $\frac{x}{L} = 1,832$, т. е. сравнительно далеко за индексом ($\frac{x}{L} = 1,6$) и за точкой минимума давлений ($\frac{x}{L} = 1,3$). Но совпадение

быстро нарушается, когда подходим к точке отрыва пограничного слоя ($\frac{x}{L} = 1,99$). Замечательно, что условие $\lambda_g = -12$ здесь совершенно не выполняется. Отрыву соответствует $\lambda \approx -5,37$, и это число вообще является минимальным, полученным на поверхности эллиптического цилиндра. Шубауэр видит причину этих серьезных расхождений не столько в неточности метода Польгаузена, сколько в неприменимости самих уравнений Прандтля в области, близкой к месту отрыва; этот взгляд, как мы покажем в следующем параграфе, необоснован.

Итак, мы можем констатировать, что метод Польгаузена применим к конфузормым областям пограничного слоя, а также частично и к диффузорной области, но недалеко за точкой минимума давлений. В силу большой своей простоты этот метод применяется во многих современных работах; к сожалению не всегда обращают внимание на те значительные отклонения, которые метод Польгаузена дает при приближении к области отрыва. В последнее время сделаны попытки замены трафического метода решения уравнения Польгаузена численными методами¹⁾.

Полезно заметить еще следующую форму уравнения Польгаузена (4.3), которая может применяться наряду с уравнениями (4.3) и (4.8) и удобна тем, что содержит лишь λ , а не λ и x :

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{U'}{U} f(\lambda) + \frac{U''}{U'} h(\lambda), \quad (4.10)$$

причем функция $h(\lambda)$, равная, как это видно из (4.3):

$$h(\lambda) = \frac{213,12\lambda - 1,92\lambda^2 - 0,2\lambda^3}{213,12 - 5,76\lambda - \lambda^2},$$

может быть, аналогично ранее введенным функциям $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, заранее и раз навсегда затабулирована (см. таблицу V в конце курса).

Уравнение (4.10) представляет, как будто бы, то удобство, что может быть легко проинтегрировано вблизи точки минимума давления. Действительно, если условиться отсчитывать абсциссу x от точки минимума давления, то при $x=0$, $\lambda = \frac{U'^2}{v} = 0$ и мы имеем гранич-

ные условия, которых не доставало при интегрировании вблизи критической точки разветвления потока. На самом деле при $U'=0$, $\lambda=0$ и $h(\lambda)=0$, так что правая часть (4.10) превращается в неопределенность вида ноль на ноль, и точка $x=0$, $\lambda=0$ оказывается особой точкой уравнения (4.10). Простое исследование показывает, что на этот раз мы имеем дело с „узлом“, т. е. с особой точкой, через которую проходит бесчисленное множество интегральных кривых, причем все они, кроме одной, касаются оси координат и различаются между собою лишь кривизной. Выбор нужной интегральной кривой связан с заданием „истории“ потока в сечениях, лежащих выше, т. е.

¹⁾ А. П. Мельников. К теории пограничного слоя крыла. Труды Ленинградского института инж. гражд. возд. флота, вып. № 12, 1937 г.

до сечения, где давление минимум; необходимо задать, например, толщину пограничного слоя в последнем указанном сечении или другую какую-нибудь из условных „толщин“ (вытеснения, потери импульса). Метод Кармана-Польгаузена напоминает изложенный в предыдущем параграфе прием Хоуэрза; уравнение (4.10) с аналитической стороны аналогично уравнению Хоуэрза (3.7).

В самом деле, и в том и другом методе искомые профили скорости заменяются некоторым однопараметровым семейством кривых: у Хоуэрза — профилями скоростей внешнего потока с параметром x^* , у Польгаузена — многочленными профилями с параметром λ . Дифференциальные уравнения (4.10) и (3.7) служат для определения значений параметров при различных x .

Семейство профилей скорости, выбранное Хоуэрзом, соответствует некоторому реальному случаю обтекания и удовлетворяет уравнениям Прандтля; в этом смысле оно имеет некоторые преимущества перед профилями Польгаузена.

Проф. Космодемьянский¹⁾ предложил метод, аналогичный методу Польгаузена, используя для профилей скорости выражения вида:

$$u = U \cdot P\left(\frac{y}{\delta}, \lambda\right) \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta},$$

где P — полином второй степени. Указанный им прием последовательных приближений упрощает решение основного уравнения, аналогичного уравнению Польгаузена. В указанной работе можно найти ряд приложений к расчету круглого и эллиптического цилиндра, а также и профили Жуковского (симметричного).

Проф. К. К. Федяевский²⁾ разработал простой приближенный прием интегрирования уравнения (4.10), основанный на замене функций $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ линейными функциями. При этой замене уравнение (4.10) становится линейным и легко интегрируется. Таким путем крайне просто определяется положение точки отрыва с достаточной для практики, точностью.

В конфузурной области крыла (от критической точки разветвления потока на лбу до точки минимума давления) параметр Польгаузена z , при ранее указанных граничных условиях для профиля скоростей, может быть определен из равенства:

$$\left(\frac{\delta}{c}\right)^2 \cdot \frac{cU_0}{\nu} = \left(\frac{\delta}{c}\right)^2 \text{Re} = \frac{34,05}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{4,825}} \int_0^{s/c} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{3,825} d\left(\frac{s}{c}\right),$$

¹⁾ А. А. Космодемьянский. К теории лобового сопротивления, ч. I. Приближенное интегрирование дифференциального уравнения ламинарного пограничного слоя. Труды ЦАГИ, вып. 215, 1935.

²⁾ К. К. Федяевский. Сопротивление трения крыловых профилей при различном расположении места перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Доклад на конференции по физической аэродинамике (ЦАГИ, 1939 г.) Краткая аннотация — „Техника воздушного флота“ № 7, июль 1939.

где U_0 — скорость на бесконечности, U — скорость внешнего потока на границе пограничного слоя на дуговом расстоянии s от критической точки; c — хорда крыла.

Другой весьма простой приближенный метод был недавно предложен Райтом и Бейлем¹⁾. Исходя из уравнения (3,8) § 3 главы I, переписанного в форме

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + 2 \frac{U'}{U} \left(1 + 2 \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) \delta^{**},$$

указанные авторы, на основании своих опытов над ламинарным пограничным слоем в конфузорной и диффузорной области, заметили, что в пределах их опытов можно в последнем уравнении произвести замену:

$$\delta^{**} = \frac{0,664x}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}}, \quad \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = 2,59.$$

Эти формулы соответствуют точно продольному обтеканию пластинки по Блязиусу, т. е. случаю $\frac{dp}{dx} = 0$, в случае же $\frac{dp}{dx} \neq 0$ они верны лишь приближенно, но с достаточной для практики точностью.

Подставляя значения δ^{**} и $\frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ в основное уравнение для c_f , получим следующую приближенную формулу для расчета c_f :

$$c_f = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}} \left(1 + 8,18 \frac{U'}{U} x \right). \quad (4.11)$$

При $U = U_0 = \text{const}$, получим точную формулу трения на пластине; выражение, стоящее в скобках, дает поправку на влияние переменности $U(x)$, при этом, конечно, и U , стоящее в знаменателе под корнем, тоже меняется с x .

В заключение настоящего параграфа остановимся на нескольких примерах применения метода Польгаузена. Разберем поток в плоском диффузоре (конфузоре) как пример интегрирования уравнения Польгаузена в конечном виде.

Стенки диффузора, показанного на рис. 44, продолжим до пересечения в точке O . Расстояние OB будем считать за единицу, а направлении OC — за координатную ось. Пусть в точке O находится источник, мощность которого $2\pi A$. Имея в виду, что расход через полную окружность радиуса x будет

$$2\pi A = 2\pi x \cdot U,$$

находим функцию U :

$$U = \frac{A}{x}.$$

¹⁾ E. A. Wright and G. W. Bailey, Laminar Frictional Resistance with Pressure Gradient. Journ. of the Aeronaut. Sciences Vol. 6, № 12, October 1939.

Для определения толщины пограничного слоя можем воспользоваться уравнением (4.3). Имея в виду, что в данном случае

$$\frac{UU''}{U^2} = \frac{\frac{A}{x} \cdot 2 \frac{A}{x^3}}{\frac{A^2}{x^4}} = 2, \quad (4.12)$$

получим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0,8(-9072 + 1670,4\lambda - 57\lambda^2 - 3\lambda^3)}{\frac{A}{x} - 213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}; \quad (4.13)$$

принимая во внимание, что

$$\lambda = U' \cdot z = -\frac{A}{x^2} \cdot z \text{ или}$$

$$z = -\frac{\lambda x^2}{A} \text{ и дифференцируя}$$

по x , получим:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{A} (2\lambda + \lambda' x).$$

Подставляя значение производной $\frac{dz}{dx}$ в уравнение (4.13), преобразуем его к такому виду:

$$-\frac{x}{2} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{0,2\lambda^3 - 17,04\lambda^2 + 455,04\lambda - 3628,8}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2},$$

или после разделения переменных:

$$\frac{2}{5} \frac{dx}{x} = \frac{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}{\lambda^3 + 85,2\lambda^2 - 2275,2\lambda + 18144} d\lambda.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, разлагая правую часть, представляющую собой рациональную дробь, на простейшие дроби. Интегрируя в пределах от нуля до λ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \ln x = & 0,7581 \ln \frac{107,85 + \lambda}{107,85} + 0,1210 \ln \frac{\lambda^2 - 22,65\lambda + 168,2}{168,2} - \\ & - 0,0664 \left(\operatorname{arctg} \frac{2\lambda - 22,65}{12,65} + \operatorname{arctg} 1,790 \right). \end{aligned}$$

Вспомня, что срыв струи происходит при $\lambda = -12$, найдем уравнение для определения абсциссы места срыва:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \ln x_s = & 0,7581 \ln 0,8887 + 0,1210 \ln 3,471 - \\ & - 0,0664 (\operatorname{arctg} 1,790 - \operatorname{arctg} 3,688), \end{aligned}$$

откуда

$$x_s = 1,214.$$

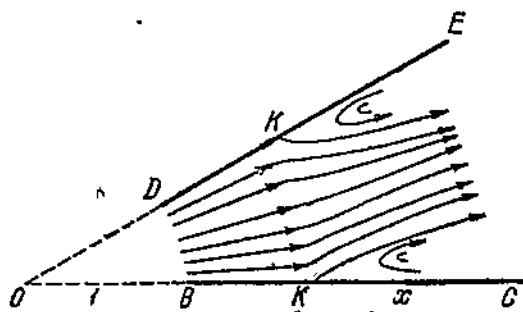


Рис. 44.

Таким образом теория пограничного слоя (если принять метод Польгаузена) дает следующий результат: в прямолинейном диффузоре существуют места отрыва струй, положение которых определяется отношением 1,214:1, где единицей обозначено расстояние от источника до входа в диффузор (согласно схеме рис. 44).

Места отрыва струи K и K' определяются по теории Польгаузена равенством:

$$\overline{BK} = 0,214 \cdot \overline{OB}.$$

Если ввести в рассмотрение угол диффузора α и ширину d входа в диффузор BB' , то будем иметь

$$\overline{BK} = 0,214 \cdot \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

или при малых углах (в аэродинамических трубах углы берут порядка $4-8^\circ$):

$$\overline{BK} = 0,214 \cdot \frac{d}{\alpha}.$$

Таким образом, чем меньше угол раствора диффузора, тем дальше отодвигается точка срыва и может быть выведена за пределы диффузора (безотрывный диффузор).

Иное получится для случая втекания жидкости в конфузор (т. е. сходящийся канал). Предположим, что в точке O существует сток, мощность которого также $2\pi A$ (рисунка не приводим ввиду ясности схемы). Функция U для этого случая определяется так

$$U = -\frac{A}{x}. \quad (4.14)$$

Дифференциальное уравнение, после аналогичных предыдущему преобразований, может быть написано в таком виде:

$$\frac{x \frac{d\lambda}{dx}}{4,4} = \frac{\lambda^3 + 12,98\lambda^2 - 400,6\lambda + 1649}{213,12 - 5,76\lambda - \lambda^2}.$$

После разделения переменных, имеем:

$$4,4 \frac{dx}{x} = \frac{213,12 - 5,76\lambda - \lambda^2}{\lambda^3 + 12,98\lambda^2 - 400,6\lambda + 1649};$$

интегрируя, получим:

$$4,4 \ln x = 0,2473 \ln (\lambda - 10,34) - 0,9115 \ln (\lambda - 5,530) - 0,3363 \ln (\lambda + 28,85) + C.$$

В этом случае мест срыва струй не получается, так как при значении $\lambda = -12$, $\ln x$, а следовательно и x получают мнимые значения. Таким образом в рассматриваемом случае жидкость течет, не отрываясь от стенок.

Интересно отметить, что в частном случае конфузора можно провести до конца точное интегрирование уравнений Прайдтля, не пользуясь методом Польгаузена. Чтобы сравнить результаты приближенного решения с точным, приведем последнее.

Представим функцию тока в форме $\psi = \psi(\xi)$, где $\xi = \frac{y}{x}$; тогда

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{x} \psi'; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \psi'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\psi'' \frac{y}{x^3} - \psi' \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\psi'''}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\psi'''}{x^3}.$$

Перепад давления определим из уравнения

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = UU' = -\frac{A^2}{x^3}.$$

Подставляя эти значения в дифференциальное уравнение пограничного слоя, получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$-\psi'^2 = -A^2 + v\psi'''. \quad (4.15)$$

Обозначая ψ' через ξ , получим:

$$-\xi^2 = -A^2 + v\xi''.$$

Имея в виду, что $\xi'' = \frac{d\xi'}{d\xi} \cdot \xi'$, можно разделить переменные и после интегрирования получить

$$-\frac{\xi^3}{3} = -A^2\xi + v \frac{\xi'^2}{2} + B. \quad (4.16)$$

Постоянная интегрирования B определяется из условия на границе потенциального потока и пограничного слоя. Там будет выполняться асимптотически

$$u = \frac{1}{x} \cdot \psi' = U = -\frac{A}{x},$$

следовательно:

$$-A = \psi' = \xi, \quad \xi' = 0.$$

Подставляя эти значения в интеграл уравнения, найдем, что $B = -\frac{2}{3} A^3$. Интеграл уравнения после подстановки значения B будет иметь вид:

$$\frac{v}{2} \xi'^2 = -\frac{\xi^3}{3} + A^2\xi + \frac{2}{3} A^3,$$

или, после простого алгебраического преобразования,

$$\sqrt{\frac{3}{2} v} \cdot \xi' = (\xi + A) \sqrt{2A - \xi}.$$

Имея в виду, что $\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial y}$, интегрирование этого уравнения проведем для данного значения x , т. е. в определенном сечении, или иначе,

считая $x = \text{const}$:

$$\frac{1}{x} dy = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \cdot \frac{d\xi}{(\xi + A) \sqrt{2A - \xi}}. \quad (4.17)$$

Обозначим $2\sqrt{2A - \xi} = q$ и, следовательно, $-\frac{d\xi}{\sqrt{2A - \xi}} = dq$. Подставляя эти значения в уравнение (4.17), получим:

$$\frac{1}{x} dy = -\sqrt{\frac{2\nu}{A}} \frac{d \frac{q}{\sqrt{12A}}}{1 - \frac{q^2}{12A}}.$$

После интегрирования найдем:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu}{A}} \ln \frac{1 - \frac{q}{\sqrt{12A}}}{1 + \frac{q}{\sqrt{12A}}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu}{A}} \cdot \ln \frac{1 - \sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}}}{1 + \sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}}} + C'$$

или

$$e^{\frac{2}{x} \left(\frac{y}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{A}{2\nu}} + C \right)} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}}}{1 + \sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}}}.$$

Решая это равенство относительно корня $\sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}}$, будем иметь

$$\sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}} = \frac{e^{\frac{2}{x} \left(\frac{y}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{A}{2\nu}} + C \right)} - 1}{e^{\frac{2}{x} \left(\frac{y}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{A}{2\nu}} + C \right)} + 1}.$$

Окончательно:

$$\sqrt{\frac{2A - \xi}{3A}} = \text{th} \left(\frac{y}{x} \sqrt{\frac{A}{2\nu}} + C \right). \quad (4.18)$$

Постоянная интегрирования C определится из условия $y = 0$ при $\psi = 0$.

Получим $\text{th} C = \sqrt{\frac{2}{3}}$ или $C = 1,146$. Подставляя значение C в уравнение (4.18) и решая относительно ξ , найдем

$$\xi = 2A - 3A \text{th}^2 \left(1,146 + \frac{y}{x} \sqrt{\frac{A}{2\nu}} \right). \quad (4.19)$$

Зная ξ , на основании формулы $\frac{1}{x} \psi' = \frac{1}{x} \xi$ находим значение скорости u , при данном значении x . На приведенном графике (рис. 45) показан профиль скоростей пограничного слоя, полученный в резуль-

тате точного и приближенного решения для значений $A=1$, $\nu=1$, $x=1$.

Приведенный расчет имеет следующий принципиальный недостаток. Пограничный слой, начинающийся от точки B , постепенно раздувается и загружает все больше сечение трубы, поэтому закон распределения скорости во внешнем потоке (4.11) или (4.14) выполняется лишь в самом начале входного участка. Область жидкости, заторможенной вязкостью, становится постепенно настолько значительной (конец входного участка и переход к участку установившегося движения в длинных диффузорах), что по условию одинаковости расхода через любое

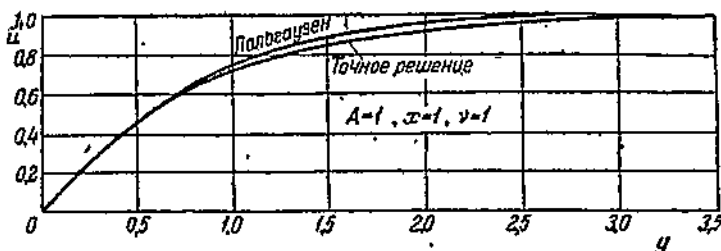


Рис. 45.

сечение диффузора мы получим весьма сильное обратное влияние пограничного слоя на внешний поток даже и в области, далекой от отрыва слоя. Как уже упоминалось, в обстановке внешней задачи, при обтекании тел безграничным потоком, такое обратное влияние значительно лишь при наличии отрыва пограничного слоя.

Учет этого обратного влияния вообще крайне сложен, и в настоящем случае приведет к нарушению того частного вида формул (4.11) и (4.14), благодаря которому только и возможно было аналитическое решение уравнения Польгаузена.

Принципиальная сложность задач с учетом обратного влияния пограничного слоя на внешний поток заключается в том, что влияние это в свою очередь связано с законом изменения толщины пограничного слоя — обстоятельство, приводящее к отсутствию наперед заданного закона скорости во внешнем потоке. Простейшим примером задач этого рода может служить расчет начального (входного) участка цилиндрической трубы, данный Л. Шиллером¹⁾ еще в 1922 г. Хотя расчет посвящен рассмотрению круглой цилиндрической трубы, но принципиально ничем не отличается от плоского случая движения, и мы изложим его здесь.

Рассмотрим начальный участок трубы радиуса a и обозначим через u скорость внутри пограничного слоя трубы, т. е. в области жидкости, заторможенной вязким влиянием стенки, через U — скорость в ядре течения, сохраняющем потенциальный характер движения и, наконец, через U_0 — скорость входа жидкости в трубу, причем

¹⁾ L. Schiller. Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessung. ZAMM, Bd. 2, 1922.

будем предполагать, что при входе в трубу поток однороден и имеет по всему сечению скорость U_0 .

Ядро потока рассматриваем как внешний поток по отношению к пограничному слою, но вместе с тем учитываем, что косвенное влияние вязкости сказывается в увеличении скорости U с ростом x . Закон этого роста получим, если запишем условие одинаковости расхода через начальное сечение ($x=0$) и любое заданное сечение ($x=x$). Обозначим через r расстояние точки в трубе до оси ее и через y расстояние той же точки до стенки; тогда, очевидно, будем иметь

$$\pi a^2 U_0 = \pi (a - \delta)^2 U + \int_{a-\delta}^a 2\pi r \cdot u dr = \pi (a - \delta)^2 U + \int_0^{\delta} 2\pi (a - y) u dy. \quad (4.20)$$

Если пренебречь явным влиянием продольного градиента давления (или $\frac{dU}{dx}$) на форму профиля, сохранив его лишь в неявном виде через толщину пограничного слоя, т. е. положить

$$u = U f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (4.21)$$

вместо необходимого, как мы знаем, предположения

$$u = U f\left(\frac{y}{\delta}, \lambda\right), \quad \lambda = \frac{U'\delta^2}{\nu}, \quad U' = \frac{dU}{dx}, \quad (4.22)$$

то условие (4.20) может быть представлено так:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta}{a}\right)^2 + 2\beta \frac{\delta}{a} - 2\gamma \left(\frac{\delta}{a}\right)^2}, \quad (4.23)$$

где

$$\beta = \int_0^1 f\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \gamma = \int_0^1 \frac{y}{\delta} f\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (4.23')$$

представляют собой просто числа, зависящие от принятой формы профиля (4.21). Шиллер принимает профиль, соответствующий второму приближению по Польгаузену

$$f\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2, \quad (4.24)$$

что дает

$$\beta = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{5}{12}. \quad (4.25)$$

Концом начального (входного) участка трубы называют то сечение трубы, в котором $\delta = a$, т. е. профиль устанавливается. Заметив, что в рассматриваемом нами случае цилиндрической трубы установившийся профиль должен быть параболой (по Пуазейлю)

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)^2 = 2\frac{y}{a} - \left(\frac{y}{a}\right)^2, \quad (4.26)$$

видим, что при $\delta = a$ профиль (4.24) непрерывно переходит в (4.26). Подставляя значения β и γ из (4.25) в (4.23), получим

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta}{a}\right)^2 + \frac{4}{3} \frac{\delta}{a} - \frac{5}{6} \left(\frac{\delta}{a}\right)^2}. \quad (4.27)$$

Обозначив теперь через ΔJ изменение количества движения между двумя сечениями трубы: одним у входа и другим — на расстоянии x от входа, найдем

$$\Delta J = -\rho \pi a^2 U_0^2 + \pi (a - \delta)^2 \rho U^2 + \int_0^x 2\pi (a - y) \rho u^2 dy. \quad (4.28)$$

Подставляя сюда вместо u его приближенное выражение по (4.21) и (4.24), получим

$$\Delta J = -\pi \rho U U_0 \left(a^2 - \frac{2}{3} a \delta + \frac{1}{6} \delta^2 \right) + \pi \rho U^2 \left(a^2 - \frac{14}{15} a \delta + \frac{4}{16} \delta^2 \right). \quad (4.29)$$

Обозначая через W полное сопротивление трения на поверхности выбранного цилиндрического отрезка

$$W = \int_0^x 2\pi a \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 dx \quad (4.30)$$

и замечая, что двигательная сила в данном случае равна

$$P = \pi a^2 (p_0 - p) = \pi a^2 \cdot \rho \frac{U^2 - U_0^2}{2}, \quad (4.31)$$

получим по теореме импульсов

$$\Delta J = P - W,$$

или, дифференцируя по x :

$$\frac{d}{dx} \Delta J = \frac{dP}{dx} - \frac{dW}{dx}.$$

Выполняя здесь дифференцирование и исключая всюду $\frac{\delta}{a}$ при помощи равенства (4.27), т. е. полагая

$$\frac{\delta}{a} = 2 - \sqrt{6 \left(\frac{U_0}{U} - 1 \right) + 4}, \quad (4.32)$$

получим такое дифференциальное уравнение

$$dx = \frac{\rho a^2}{4\mu} \left(\frac{58}{15} - \frac{22}{5} \frac{U_0}{U} - \frac{7}{5} \sqrt{6 \frac{U_0}{U} - 2} + \frac{8}{5} \frac{U}{U_0} \sqrt{6 \frac{U_0}{U} - 2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \frac{U}{\sqrt{6 U U_0 - 2 U_0^2}} - \frac{8}{15} \frac{U}{\sqrt{6 U U_0 - 2 U^2}} \right) dU$$

или, если ввести для сокращения обозначение:

$$\eta = \frac{U - U_0}{U_0} = \frac{U}{U_0} - 1, \quad (4.33)$$

причем $\eta = 0$ у входа в трубу и $\eta = 1$ в конце входного участка ($U_0 = U_{cp} = \frac{1}{2}U$ в установившемся ламинарном движении), то получим, интегрируя дифференциальное уравнение в пределах от 0 до η ,

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} = \frac{1}{4} \frac{aU_0}{\nu} & \left[\frac{58}{15}\eta - \frac{66}{15} \ln(1+\eta) - \frac{17}{15} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\eta-\eta^2} - \frac{48}{15} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2-\eta}{1+\eta}} + \right. \\ & + \frac{130}{15} - \frac{63}{15} \sqrt{2} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\eta}{3}} + \frac{63}{15} \sqrt{2} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} - \\ & \left. - \frac{48}{15} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{2}{3} \eta - \frac{1}{3} \right) - \frac{48}{15} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{1}{3} \right]. \quad (4.34) \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет определенную функцию η , так что можно последнее равенство переписать так:

$$\frac{x}{aR} = f(\eta), \quad (4.35)$$

где R — рейнольдсово число, равное $\frac{aU_0}{\nu}$, а $f(\eta)$ представляет одну четверть от выражения в вышеприведенной квадратной скобке.

Задача о длине входного участка L решается теперь крайне просто, а именно

$$\frac{L}{aR} = f(1) = 0,115$$

или, если выразить длину входного участка, как это принято, в диаметрах и перейти к обычному рейнольдсову числу с диаметром в качестве характерного размера, то:

$$\frac{L}{d} = 0,0575 \cdot R = 0,02875 R_d. \quad (4.36)$$

Так например, при $R_d = 1000$, входной участок равен, примерно, тридцати диаметрам; при $R_d = 10\,000$ нужно отойти от входа почти на триста диаметров, чтобы получить ламинарное движение с вполне развитым параболическим профилем скоростей; в дальнейшем увидим, что получение ламинарного движения при столь больших R_d крайне затруднительно, а формула (4.36), как и все предыдущие, имеет место только при ламинарном движении.

Если взять два сечения на расстояниях x_1 и x_2 и обозначить через Δp перепад давления между этими сечениями, то будем иметь

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = (2\eta + \eta^2)_{x=x_2} - (2\eta + \eta^2)_{x=x_1} = \Delta(2\eta + \eta^2);$$

коэффициент сопротивления будет равен

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho \cdot U_0^2} \cdot \frac{d}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta(2\eta + \eta^2)}{\Delta x} \cdot d. \quad (4.37)$$

Коэффициент сопротивления всего входного участка равен

$$\lambda = \frac{3-0}{L} \cdot d = 3 \frac{d}{L} \approx \frac{100}{R_d}. \quad (4.38)$$

К сожалению, как отмечает и сам Шиллер, равенство (4.35) дает хорошие результаты лишь до $\frac{x}{aR} = 0,05$. Как показали опыты Никурадзе, при больших значениях этого отношения расхождение с результатами опытов получается весьма значительное; так как при $\eta = 0,95$, по Шиллеру $\frac{x}{aR} \approx 0,105$, а по опытам Никурадзе $\frac{x}{aR} \approx 0,17$. Объяснение этому факту можно найти в откидывании влияния параметра $\lambda = \frac{U'_{\delta^2}}{\nu}$ на форму профиля скорости (4.22). Решение Шиллера является лишь первым приближением, соответствующим значению $\lambda = 0$, следующие приближения надо искать в связи с использованием параметра λ ; сделать это можно было бы, например, при помощи метода Хильды Ляйон — интересующихся отсылаем к § 1, главы IV настоящего отдела.

§ 5. Возможные уточнения метода Польгаузена вблизи места отрыва слоя

Вопрос о точности метода Польгаузена теоретически не исследован.

Легко, однако, с качественной стороны указать возможные причины непригодности метода Польгаузена для определения места отрыва и вообще течения вблизи отрыва. Предположим, что профиль скорости в данном сечении слоя представлен в виде ряда Маклорена:

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \cdot \frac{y^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} \cdot \frac{y^3}{3!} + \dots \quad (5.1)$$

и рассмотрим диффузорную область пограничного слоя между точкой минимума давления M и точкой отрыва S .

Ранее уже указывалось, что из уравнений пограничного слоя Прандтля строго следует равенство нулю третьей производной скорости по y на стенке при любом x . Метод Польгаузена совершенно опускает это условие; по формуле (4.1)

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = -3(4-\lambda) \frac{U}{\delta^3}$$

далеко не нуль, особенно вблизи точки отрыва ($\lambda = -12$). Такая неточность мало сказывается в тех областях пограничного слоя, где вблизи стенки разложение (5.1) вполне определяется первыми своими членами, т. е. где $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ сравнительно велико; совершенно иначе

обстоит дело при приближении к точке отрыва, где $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$. В этом случае разложение (5.1) определяется уже вторым членом, причем не следует забывать, что в точке M (минимума давления)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_m \\ y=0}} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dp}{dx}\right)_{x=x_m} = 0$$

и, особенно, в тех случаях, когда $\left(\frac{d^2 p}{dx^2}\right)_{x=x_m}$ мало (малая кривизна про-

филя давлений вблизи точки минимума — удлиненные профили), второй член тоже мал. Таким образом вблизи отрыва нельзя пренебрегать условием

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0, \quad (5.2)$$

а следует, наоборот, приняв его, уточнить метод, используя члены, следующие за третьим.

Желая приближенно оценить эффект вышеуказанного изменения граничных условий, остановимся для простоты на многочлене четвертой степени, как и Польгаузен, но примем граничные условия¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0, \quad u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{UU'}{\nu}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \\ \text{при } y=\delta, \quad u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

опустив по необходимости условие: при $y=\delta$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Укажем, что уравнение Польгаузена сохраняет свой тип (4.10), но функции $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ будут уже иные, а именно:

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{r(\lambda)} &= \frac{-0,006\lambda^3 - 0,07442\lambda^2 + 0,70174\lambda - 2,667}{0,00731\lambda^2 + 0,00582\lambda - 0,1432} \\ h(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{r(\lambda)} &= \frac{0,0015\lambda^3 + 0,00193\lambda^2 - 0,1432}{0,00731\lambda^2 + 0,00582\lambda - 0,1432} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Функции эти вычисляются раз навсегда; нами затабулированы и даны в таблице 3 полиномы $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ и $r(\lambda)$ в интервале $(-4,0)$.

Профиль скоростей, соответствующий условиям (5.3), имеет вид:

$$\frac{u}{U} = \frac{\lambda+4}{3} \cdot \frac{y}{\delta} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \frac{\lambda-2}{6} \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \quad (5.5)$$

¹⁾ Л. Г. Лойцманский. Исследование влияния продольного градиента на спектр скоростей в граничном слое и на место отрыва. Отчет по ЦКТИ НКТП № 1001, 1936.

ТАБЛИЦА 3

λ	$p(\lambda)$	$q(\lambda)$	$r(\lambda)$
0	—2,66700	0	—0,14320
—1	—3,43716	0,14363,	—0,14171
—2	—4,32016	0,28212	—0,12560
—3	—5,28000	0,40647	—0,09487
—4	—6,28068	0,51368	—0,04952

и значительно отличается от профиля (4.1); мы видим, что точке отрыва соответствует $\lambda_s = -4$. Это значение λ_s гораздо ближе к наблюдаемому на опыте значению $\lambda_s \approx -5,37$, чем значение по Польгаузену $\lambda_s = -12$, но тоже еще недостаточно точно.

Заметим, что в отличие от профиля Польгаузена, применимого на всем протяжении слоя, предлагаемый нами профиль может быть использован лишь в диффузорной области (точнее при $\lambda < 2$), так как в конфузорной области имеются участки, где профиль имеет перегибы, что делает его непригодным. До точки минимума давления можно пользоваться обычным профилем Польгаузена.

По предложению автора настоящей книги асп. А. Н. Александров разработал численный метод интегрирования уравнения Польгаузена, являющийся видоизменением метода Хильды Ляйон (см. след. главу § I) причем в качестве граничных условий принял условия Польгаузена для области от лба до точки минимума давлений и условия (5.3) — в диффузорной части пограничного слоя¹⁾. Для эллиптического цилиндра, соответствующего эксперименту Шубауэра при нулевом угле атаки, в отличие от метода Польгаузена, вообще не дающего отрыва, применение условий (5.3) дало отрыв при $\frac{x}{L} = 1,8$ (поле скоростей внешнего потока по Шубауэру), что довольно близко подходит к экспериментальным данным.

Уравнение Кармана, соответствующее теореме импульсов, не является единственно возможным интегральным условием теории пограничного слоя.

Л. С. Лейбензон²⁾ показал, что, умножая обе части уравнения Прандтля на продольную скорость u и интегрируя по переменной y в пределах от 0 до δ , можно получить новое условие

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{1}{2} \rho u^3 dy - \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = - \frac{dp}{dx} \cdot \int_0^{\delta} u dy - \mu \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (5.6)$$

соответствующее теореме об изменении энергии.

¹⁾ А. Н. Александров. Теоретическое и экспериментальное исследование зависимости места отрыва ламинарного пограничного слоя на эллиптическом цилиндре от угла атаки. Журнал технической физики, т. VIII в. 22, 1938.

²⁾ Л. С. Лейбензон. Энергетическая форма интегрального условия в теории пограничного слоя. Труды ЦАГИ, вып. 240, 1935. См. также Кибель, Кочин и Розе. Теоретическая гидромеханика ч. II, 1937, стр. 404—407.

В. В. Голубев заметил, что легко получить бесчисленное множество аналогичных интегральных условий, умножая уравнение Прандтля на любую положительную степень скорости u^k и интегрируя в пределах от 0 до δ ; общий вид этих интегральных условий следующий:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u^{k+2}}{k+1} dy - \frac{U^{k+1}}{k+1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \int_0^{\delta} u^k dy - \nu k \int_0^{\delta} u^{k-1} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy. \quad (5.7)$$

В. Сэттон¹⁾ независимо от указанных только-что авторов, установил аналогичные уравнения и показал применение первых двух ($k=0$, $k=1$) к расчету сопротивления пластины. Задаваясь профилем скорости

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3 - \alpha \cdot \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3,$$

Сэттон из упомянутых двух уравнений нашел две неизвестные: $\alpha = 1,143$ и $\delta = 5,603 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$, что привело его к величине напряжения трения

$$\frac{\tau_0}{U_0^2} = 0,3314 \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}},$$

почти не отличающейся от точного решения Блязиуса.

Приемом, аналогичным изложенному в § 3 главы I, настоящего отдела, можно установить систему интегральных условий:

$$\frac{d\delta_{k+1}^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \left[(k+2) \delta_{k+1}^{**} + (k+1) \delta_{k+1}^{*} \right] = \\ = -(k+1) \frac{\nu}{U} \int_0^{\delta_{k+1}^{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U} \right)^k \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{u}{U} \right) dy, \quad (5.8)$$

где введены „обобщенные“ толщины слоя:

$$\delta_{k+1}^{*} = \int_0^{\delta_{k+1}^{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U} \right)^{k+1} dy, \\ \delta_{k+1}^{**} = \delta_{k+1}^{*} - \delta_{k+2}^{*} = \int_0^{\delta_{k+1}^{\infty}} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right)^{k+1} dy \quad (5.9)$$

знак δ_{k+1}^{∞} в верхнем пределе интеграла показывает, что интегральные условия могут одинаково применяться в теории слоя как конечной, так и бесконечной толщины.

Легко видеть, что при $k=0$, $\delta_1^{*} = \delta^1$, $\delta_1^{**} = \delta^{**}$, а уравнение (5.8) переходит в уравнение (3.8) § 3 главы I настоящего отдела.

¹⁾ W. G. Sutton. Phil. Mag. (7), 23 (1937); p.p. 1146—1152.

Возьмем систему n уравнений (5.8) по порядку от $k=0$ до $k=n-1$ и определим функцию от n параметров $u_n(x, y; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ так, чтобы эта функция удовлетворяла граничным условиям

$$\begin{aligned} \text{при } y=0 & \quad u_n=0 \\ \text{при } y=\delta, \infty & \quad u_n=U(x) \end{aligned}$$

и, кроме того, будучи подставлена в систему (5.8) вместо u , обращала ее в тождество. Тогда можно доказать, что, если при стремлении n к бесконечности последовательность функций u_n стремится к некоторой определенной предельной функции $u(x, y)$, то во всей области значений x от лба до точки отрыва эта функция представляет собою решение уравнений Прандтля, удовлетворяющее граничным условиям $u(x, 0)=0$, $u(x, \infty)=U(x)$ или $u(x, \delta)=U(x)$.

Таким образом обосновывается метод решения уравнений Прандтля путем сведения задачи к системе обыкновенных уравнений. Способ Кармана-Польгаузена оказывается при этом первым приближением. Использование дополнительных граничных условий для первой и старших производных от скорости по ординате может дать ускорение сходимости. К сожалению, метод крайне сложен с вычислительной стороны.

§ 6. Метод Кармана и Милликена расчета плоского пограничного слоя; приложение к „односкатному“ профилю

Уравнение Кармана и Милликена было выведено в § 6 главы I [формула (6.10)]. Если совершить указанный там же переход к безразмерному виду (6.17), то после простых преобразований перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{1}{4} \frac{u}{U} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{2z}{U} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}}, \quad (6.1)$$

где, напоминаем, все входящие сюда величины безразмерны и выражены в масштабах (6.17), причем дополнительно подчеркнем, что U выражено в частях U_0 и уже не единица, как в случае пластинки, а заданная функция φ . Безразмерные граничные условия имеют вид

$$\text{при } \psi=0, \quad z = \frac{1}{2} U^2(\varphi), \quad \text{при } \psi \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow 0, \quad (6.2)$$

при отсутствии условий по φ .

Введем, следуя Карману и Милликену¹⁾, в качестве грубого приближения „внешнее решение“, положив в уравнении (6.1) под знаком радикала $z=0$ или, что все равно, $u=U$. Уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}, \quad (6.3)$$

¹⁾ Th. v. Kármán and C. B. Millikan. On the theory of laminar boundary layers involving separation. NACA, Rep. № 504, 1934.

которое при этом получится, может быть легко решено; при граничных условиях (6.2) решение имеет вид

$$z_w = \frac{\psi}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\psi^2}{\varphi-\xi}}}{(\varphi-\xi)^{3/2}} U^2(\xi) d\xi. \quad (6.4)$$

Поскольку $U^2(\xi)$ представляет заданную функцию, внешнее решение определяется квадратурой.

О точности этого внешнего решения ничего строго сказать нельзя. Если отказаться от построения второго приближения [см. (6.29), § 6 гл. I], а оно слишком сложно для фактических вычислений, то единственное соображение, которое можно привести в защиту точности этого решения, следующее: уравнения (6.1) и (6.3) совпадают при $z=0$, т. е. вблизи внешней границы пограничного слоя и при

$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = 0$, или $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, т. е. в точке перегиба профиля скоростей; отсюда

можно сделать заключение, что в интервале между внешней границей пограничного слоя и точкой перегиба профиля внешнее решение удовлетворительно аппроксимирует профили скоростей. За точкой перегиба внешнее решение может значительно отличаться от точного решения. В конфузорной области пограничного слоя профили скоростей не имеют перегибов, в точке минимума давления перегиб находится на стенке, а в диффузорной области по мере удаления от точки минимума давления перегиб перемещается все дальше и дальше в толщу пограничного слоя. В связи с этим можно утверждать, что внешнее решение должно с достаточной точностью нас удовлетворять при расчете пограничного слоя в конфузорной области, где $\frac{dp}{dx} < 0$ и, наоборот, быть непригодным для расчета отрыва. Факт этот совершенно аналогичен замеченному нами ранее свойству решения Польгаузена. Решение это, не учитывая условия равенства нулю третьей производной на стенке, было в известном смысле слова „внешним“ и поэтому для диффузорной области вблизи отрыва оказалось непригодным.

Имея в виду в дальнейшем подтвердить примером пригодность „внешнего“ решения для конфузорной области и непригодность его для определения отрыва, определим абсциссу отрыва. Найдем, для этого $\frac{\partial z_w}{\partial \psi}$:

$$\frac{\partial z_w}{\partial \psi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\psi^2}{\varphi-\xi}}}{(\varphi-\xi)^{3/2}} U^2(\xi) d\xi - \frac{\psi}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\psi^2}{\varphi-\xi}}}{(\varphi-\xi)^{3/2}} U^2(\xi) d\xi$$

и, замечая, что $\frac{\partial z_w}{\partial \psi}$ пропорционально $\frac{\partial u}{\partial y}$, приравняем нулю значение вычисленной производной при $\psi = 0$.

Второе слагаемое обращается в нуль при $\psi = 0$; первое может быть вычислено интегрированием по частям (непосредственная подстановка $\psi = 0$ приводит к неопределенности); получаем условие отрыва в виде:

$$\int_0^{\varphi_S} \frac{U(\xi) \frac{dU}{d\xi}}{\sqrt{\varphi_S - \xi}} d\xi = 0. \quad (6.5)$$

Это весьма приближенное уравнение замечательно с качественной стороны, так как при любом распределении $U(\varphi)$ дает общее уравнение отрыва. Из уравнения (6.5), например, сразу видно, что отрыв может произойти лишь в диффузорной части пограничного слоя. В самом деле в конфузорной части $U(\xi)$ и $\frac{dU}{d\xi}$ положительны, интеграл (6.5) может обратиться в нуль лишь за счет отрицательных слагаемых в диффузорной части.

Внешнее решение (6.4) может быть в явной форме представлено некоторой конечной суммой, если предположить, что $U^2(\varphi)$ задано в форме:

$$U^2(\varphi) = \sum_{i=0}^n b_i \varphi^i. \quad (6.6)$$

Полагая в выражении (6.4)

$$\frac{\psi}{\sqrt{\varphi - \xi}} = \eta,$$

получим

$$z_w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\psi/\sqrt{\varphi}}^{\infty} e^{-\eta^2} \cdot U^2\left(\varphi - \frac{\psi^2}{\eta^2}\right) d\eta,$$

или по (6.6)

$$\begin{aligned} z_w = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^n b_i \int_{\psi/\sqrt{\varphi}}^{\infty} e^{-\eta^2} \left(\varphi - \frac{\psi^2}{\eta^2}\right)^i d\eta = \frac{b_0}{2} J_0\left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n b_i \varphi^i \sum_{r=0}^i (-1)^r \frac{i!}{(i-r)! r!} \left(\frac{\psi^2}{\varphi}\right)^r \cdot J_r\left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}\right), \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$J_r(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta^{2r}} d\eta$$

$$J_0(x) = \operatorname{erf} x.$$

Повторным интегрированием по частям можно свести все J_r к J_0 и окончательно получить

$$z_w(\varphi, \psi) = b_0 g_0\left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}\right) + \sum_{i=1}^n b_i \varphi^i \sum_{r=0}^i \frac{i!}{(i-r)! r!} g_r\left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}\right),$$

где при $r < 2$

$$g_0(x) = \frac{1}{2} J_0(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x)$$

$$g_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot \operatorname{erf}(x),$$

а при $r \geq 2$

$$g_r(x) = \frac{(r-1)!}{(2r-1)!} \left\{ \frac{(-1)^r}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \sum_{k=0}^{r-2} (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \frac{(2r-2k-3)!}{(r-k-2)!} x^{2k} + \right. \\ \left. + 2^3 (r-1) \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} x^{2(r-1)} + \operatorname{erf}(x) \cdot x^{2r} \right] \right\}, \quad (6.7)$$

Функции g_r могут быть вычислены заранее, первые две из них в дальнейшем будут даны графически. Полученные суммы довольно сложны, но для большинства практических случаев достаточно в выражении (6.6) брать два члена, т. е. принимать линейную зависимость U^2 от φ , полагая (рис. 46а)

$$U^2 = U_1^2 - \beta \varphi, \quad (6.8)$$

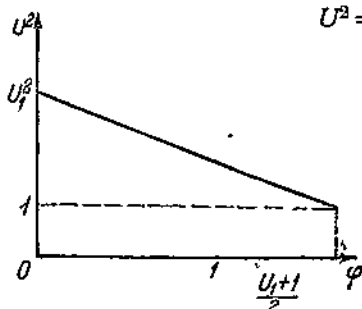


Рис. 46 а.

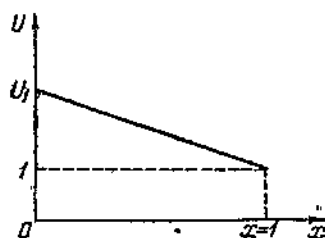


Рис. 46 б.

где U_1 — безразмерная (т. е. отнесенная к скорости на бесконечности) скорость, соответствующая точке начала отсчета φ . Замечая, что на конце профиля крыла (длины L) в точке схода скорость очень близка к скорости на бесконечности, можно считать там $x=1$, $U=1$ (безразмерные). Если в формуле (6.8) перейти от координаты φ к координате x ($\varphi=0$ при $x=0$) по формуле:

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{U} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{U_1^2 - \beta \varphi}} = \frac{2}{\beta} \left(U_1 - \sqrt{U_1^2 - \beta \varphi} \right),$$

то получим такие выражения φ и U через x :

$$\begin{aligned}\varphi &= U_1 x - \frac{1}{4} \beta x^2 \\ U &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_1 - \frac{1}{2} \beta x.\end{aligned}$$

В точке схода струй с крыла:

$$1 = U_1 - \frac{1}{2} \beta, \quad \beta = 2(U_1 - 1),$$

следовательно

$$\left. \begin{aligned}2z_0 &= U^2 = U_1^2 - 2(U_1 - 1)\varphi, \\ U &= U_1 - (U_1 - 1)x,\end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

при этом

$$\begin{aligned}z_\varphi &= U_1^2 g_0 \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right) - 2(U_1 - 1) \left[g_0 \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right) + g_1 \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right) \right] \varphi = \\ &= U_1^2 g_0 \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right) - 2(U_1 - 1) h_1 \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} \right).\end{aligned} \quad (6.10)$$

Функции g_0 , g_1 и h_1 даны на рис. 47. Формула (6.10) дает окончательное выражение внешнего решения для выбранного простейшего профиля скорости (6.9) — Карман и Милликен называют этот профиль однократным.

Обратимся теперь к рассмотрению внутреннего решения, т. е. той части приближенного профиля скоростей, которая должна заменить точный профиль в интервале от стенки до линии перегиба.

Введем обозначение

$$z_0 - z = \frac{U^2}{2} - z = \frac{u^2}{2} = \zeta, \quad (6.11)$$

тогда основное уравнение (6.1) перейдет в такое

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \psi^2} = - \frac{4z_0' \sqrt{\frac{U^2}{2}}}{\sqrt{\zeta}} \left(1 - \frac{1}{z_0'} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right). \quad (6.12)$$

Определим внутреннее решение ζ_i , как решение уравнения

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial \psi^2} &= \frac{A(\varphi)}{\sqrt{\zeta_i}} \left[1 - \frac{1}{z_0'} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \varphi} \right)^* \right], \\ A(\varphi) &= -4z_0' \sqrt{\frac{U^2}{2}} = -2\sqrt{2} \cdot U^2 \cdot U',\end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

в котором $\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \varphi} \right)^*$ выбирается по произволу в виде такой функции φ , ψ и ζ_i , чтобы уравнение (6.13) переходило в уравнение (6.12), т. е. точное уравнение, при приближении к стенке. Этот произвол заранее ограничивается еще тем, что на линии перегибов, т. е. при $\zeta_i = \zeta_j$

(значок j обозначает точку смыкания внутреннего и внешнего решений), вторая производная $\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial \psi^2}$ или пропорциональная ей величина $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ должна обращаться в нуль. В качестве такого (удобного для вычислений) значения $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^*$ Карман и Милликен предлагают функцию:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^* = z_0' \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}}. \quad (6.14)$$

Когда ψ примет такое значение ψ_{ij} , что внутреннее решение ζ_i достигнет линии перегибов, определенной из условия $\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial \psi^2} = 0$ (будем

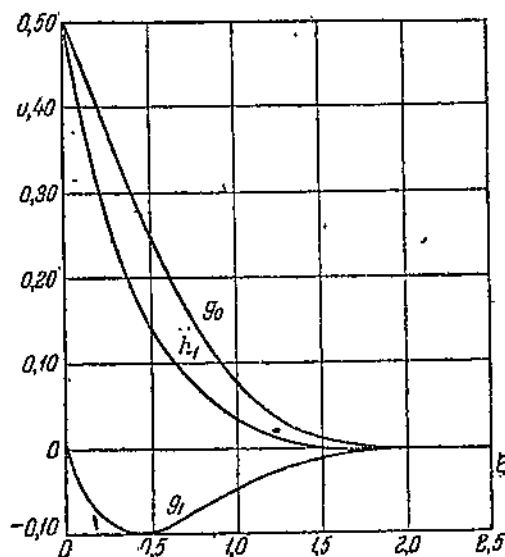


Рис. 47.

называть эту линию перегибов внутренней в отличие от внешней линии перегибов, определенной из условия $\frac{\partial^2 \zeta_\omega}{\partial \psi^2} = 0$), то $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^*$ примет по (6.14) значение z_0' , и условие перегиба будет удовлетворено; с другой стороны, вблизи стенки $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^*$ будет вести себя как $\sqrt{\zeta_i}$, т. е. обращаться в нуль, и уравнение (6.13) станет идентичным с точным уравнением (6.12).

Построенное таким образом уравнение (6.13) можно интегрировать для различных значений φ , как семейство обыкновенных уравнений (при заданном постоянном значении φ , рассматриваемом как параметр).

Уравнение это, как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, приведет в окончательном интеграле к двум произвольным постоянным (на самом деле, конечно, не постоянным, а функциям параметра φ). Этими постоянными надо распорядиться так, чтобы, во-первых, выполнялось условие на стенке ($\zeta_i = 0$) и, во-вторых, так, чтобы наше внутреннее решение ζ_i сопрягалось с ранее разобранным, внешним. Здесь имеем явную перегрузку условий. В самом деле, при двух постоянных интегрирования имеем три граничных условия:

$$\begin{aligned} \zeta_i &= 0 \text{ при } \psi_i = 0 \\ \zeta_{ij} &= \zeta_{\omega j} \text{ при } \psi_i = \psi_{ij} = \psi_{\omega j} \\ \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \psi}\right)_j &= \left(\frac{\partial \zeta_\omega}{\partial \psi}\right)_j \text{ при } \psi_i = \psi_{ij} = \psi_{\omega j} \end{aligned}$$

Выход из этого положения можно найти в отказе от естественного равенства $\psi_{ij} = \psi_{\omega j}$, если условиться определять место смыкания $\psi = \psi_{ij}$ внутреннего и внешнего решения равенством $\zeta_{ij} = \zeta_{\omega j}$. При этом, вообще говоря, $\psi_{ij} \neq \psi_{\omega j}$; разность их будем в дальнейшем определять равенством

$$\frac{\psi_{ij}}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\psi_{\omega j}}{\sqrt{\varphi}} = \xi_{ij} - \xi_{\omega j} = \varepsilon(\varphi); \quad (6.15)$$

при таком построении решения у нас остается свободная постоянная интегрирования для удовлетворения условию равенства наклонов касательных в той точке сопряжения $\psi = \psi_{ij}$, где

$$\zeta_i(\psi_{ij}) = \zeta_{\omega}(\psi_{\omega j}),$$

или

$$\zeta_{ij} = \zeta_{\omega j} = \zeta_j. \quad (6.16)$$

Физически принятые условия обозначают, что «внутренняя» и «внешняя» линии перегибов не будут совпадать и что решения будут смыкаться по внутренней линии; кроме того переменные ψ_i и ψ_{ω} для двух решений при этом оказываются сдвинутыми друг по отношению к другу. Для данного φ это показано на рис. 48. Можно кривые переместить так, чтобы кривая ζ_{ω} не являлась непрерывным продолжением ζ_i , как это показано на рис. 49. Это позволит вместо двух переменных ξ_i и ξ_{ω} (с разными началами отсчета) иметь одну переменную ξ . Хотя решение ζ в функции от ξ получается при этом разрывным, но это отнюдь не влияет на непрерывность и функции от y , как это в дальнейшем будет показано.

Подставим теперь значение $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)^*$ из (6.14) в (6.13) и полученное таким образом уравнение

$$\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial \psi^2} = \frac{A(\varphi)}{\sqrt{\zeta_i}} \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}}\right) \quad (6.17)$$

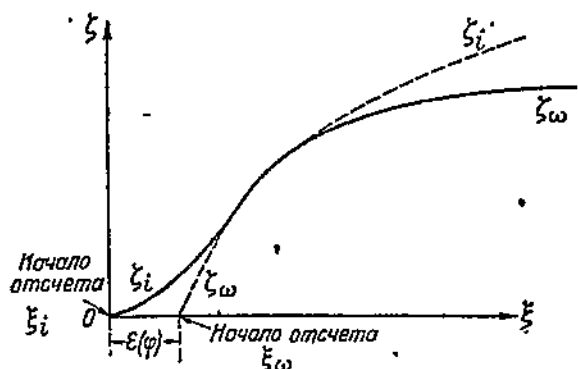


Рис. 48.

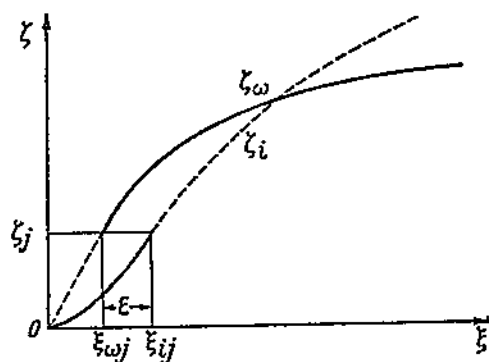


Рис. 49.

будем интегрировать, как уравнение в полных производных для данного φ ; тогда получим

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \psi} = \sqrt{B_1^2 + 4A \sqrt{\zeta_i} - \frac{2A}{\sqrt{\zeta_j}} \zeta_i}, \quad (6.18)$$

где постоянная интегрирования B_1^2 равна

$$B_1^2 = \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \psi} \right)_{\psi=0}^2.$$

Интегрируя еще раз и используя условие $\zeta_i = 0$ при $\psi = 0$, получим

$$\psi = \frac{\sqrt{\zeta_i}}{A} \left(B_1 - \sqrt{B_1^2 + 4A \sqrt{\zeta_i} - \frac{2A}{\sqrt{\zeta_j}} \zeta_i} \right) + \\ + \sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \zeta_i^{3/4} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B_1^2}{2A \sqrt{\zeta_j}}}} - \arcsin \frac{1 - \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}}}{\sqrt{1 + \frac{B_1^2}{2A \sqrt{\zeta_j}}}} \right),$$

или переходя к переменному $\xi = \frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}$ и полагая $\frac{U^2}{2} = z_0$:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{z_0}{-z_0' \varphi}} \left(\frac{\zeta_i}{z_0} \right)^{3/4} \left(B - \sqrt{B^2 + 2 \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}} - \frac{\zeta_i}{\zeta_j}} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} - \arcsin \frac{1 - \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}}}{\sqrt{1+B^2}} \right), \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi} &= 2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{-z_0' \varphi}{z_0}} \left(\frac{\zeta_i}{z_0} \right)^{1/4} \sqrt{B^2 + 2 \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}} - \frac{\zeta_i}{\zeta_j}}, \\ \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial \xi^2} &= 4 \sqrt{\frac{-z_0' \varphi}{z_0}} \left(\frac{\zeta_i}{z_0} \right)^{-1/2} \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta_i}{\zeta_j}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

где

$$B^2 = \frac{\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \psi} \right)_{\psi=0}^2}{-8z_0' z_0 \sqrt{\frac{\zeta_j}{z_0}}}. \quad (6.20)$$

В точке смыкания решений ($\zeta_i = \zeta_j$) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{z_0}{-z_0' \varphi}} \cdot \left(\frac{\zeta_j}{z_0} \right)^{3/4} \left(B - \sqrt{1+B^2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \right) \\ \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi} \right)_j &= 2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{-z_0' \varphi}{z_0}} \cdot \left(\frac{\zeta_j}{z_0} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{1+B^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Определим $\xi_{\omega j}$, $\frac{\xi_{\omega j}}{z_0}$ и $\left(\frac{\partial \xi_{\omega j}}{\partial \xi}\right)_j$ из внешнего решения, положив

$$\left(\frac{\partial^2 z_{\omega}}{\partial \xi^2}\right)_j = \left(\frac{\partial^2 z_{\omega}}{\partial \xi^2}\right)_j = \left(\frac{\partial^2 \xi_{\omega}}{\partial \xi^2}\right)_j = 0;$$

после этого останется найти B , например из второго равенства (6.21), и подставить в первое, тогда получим и $\xi_{\omega j}$. Наконец, вычитая из $\xi_{\omega j}$ ранее найденное $\xi_{\omega j}$, получим согласно (6.15) и $\epsilon(\varphi)$. Таким образом найдем все элементы решений, представленных на рис. 48 и 49.

Переход от уравнений (6.19) к кривой $u(y)$ для любого x может быть произведен следующим образом. Имеем тождественно

$$\frac{u}{U} = \sqrt{\frac{\xi_t}{z_0}};$$

далее, по определению функции тока в безразмерных координатах (масштаб y -ов тот же, что и x -ов!),

$$y = \frac{2}{\sqrt{R}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{u} = \frac{2\sqrt{\varphi}}{U\sqrt{R}} \int_0^{\psi/\sqrt{\varphi}} \frac{d\left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}\right)}{\frac{u}{U}} = \frac{2\sqrt{\varphi}}{U\sqrt{R}} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\xi_t}{z_0}}}; \quad (6.22)$$

стоящий здесь интеграл можно проинтегрировать по частям, так что переменным станет ξ_t , а ξ будет функцией его, определяемой по первому равенству (6.19); проинтегрировав, получим

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\xi_t}{z_0}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{z_0}{-z_0' \varphi}} \left(\frac{\xi_j}{z_0}\right)^{1/4} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} - \arcsin \frac{1 - \sqrt{\frac{\xi_t}{\xi_j}}}{\sqrt{1+B^2}} \right); \quad (6.23)$$

подставляя это равенство в предыдущее, найдем $\sqrt{\xi_t}$ в функции от y , т. е. u в функции от y ; для этого придется только обратить арксинус.

Для дальнейшего нам будет удобнее пользоваться одной общей переменной ξ для обоих решений, т. е. кривой, изображенной на рис. 49. Несмотря на разрыв кривой на рисунке, решение для u в функции от y при этом получается, очевидно, непрерывным, так как мы только-что видели, что связь между u и y устанавливается путем исключения ξ .

Из равенства (6.22) при помощи (6.23) можем получить уравнение для определения $\frac{u}{U}$ в функции от y . Для этого заменим

$$\sqrt{\frac{\xi_t}{\xi_j}} = \frac{u_t}{u_j}, \quad \sqrt{\frac{\xi_j}{z_0}} = \frac{u_j}{U}$$

и обозначим через y^* выражение

$$y^* = y\sqrt{R} \cdot \sqrt{-z_0'}; \quad (6.24)$$

тогда после простых выкладок получим:

при $\zeta \leq \zeta_j$,

$$\frac{u}{U} = \frac{u_j}{U} \left[1 - \sqrt{1+B^2} \cdot \sin \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} - \frac{y^*}{\sqrt{\frac{u_j}{U}}} \right) \right], \quad (6.25)$$

при $\zeta \geq \zeta_j$ внешнее решение представится так:

$$\frac{u}{U} = \sqrt{\frac{\zeta_\omega(\zeta)}{z_0}}, \quad (6.26)$$

причем ξ может быть выражено через y или y^* , если заметить, что

$$y = \frac{2}{\sqrt{R}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{u}$$

$$\begin{aligned} y^* &= y\sqrt{R} \cdot \sqrt{-z_0'} = 2\sqrt{-z_0'} \int_0^\psi \frac{d\psi}{u} = 2\sqrt{-z_0'} \int_0^{\psi_j} \frac{d\psi}{u} + \\ &+ 2\sqrt{-z_0'} \int_{\psi_j}^\psi \frac{d\psi}{u} = \frac{2\sqrt{-z_0'\psi}}{U} \cdot \int_0^{\xi_j} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\zeta_\omega(\xi)}{z_0}}} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{-z_0'\psi}}{\sqrt{z_0}} \int_{\xi_{\omega j}}^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\zeta_\omega(\xi)}{z_0}}}, \end{aligned}$$

а это выражение по (6.23) может быть переписано так:

$$y^* = \sqrt{\frac{u_j}{U}} \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{-z_0'\psi}{z_0}} \int_{\xi_{\omega j}}^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\zeta_\omega(\xi)}{z_0}}}. \quad (6.27)$$

Совокупность уравнений (6.24), (6.25), (6.26) и (6.27) представляет полное решение задачи о профиле скорости в любом сечении пограничного слоя. Профиль скоростей в сечении, соответствующем точке отрыва слоя, будет выглядеть еще проще, а именно, вследствие равенства

$$B = 0,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \text{для } u \leq u_j \quad \frac{u}{U} &= \frac{u_j}{U} \left(1 - \cos \frac{y^*}{\sqrt{\frac{u_j}{U}}} \right) \\ \text{для } u \geq u_j \quad \frac{u}{U} &= \sqrt{\frac{\zeta_{\omega}(\xi)}{z_0}}, \\ y^* &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u_j}{U}} + \sqrt{2} \sqrt{\frac{-z_0' \varphi}{z_0}} \int_{\xi_{\omega j}}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\zeta_{\omega}(\xi)}{z_0}}} \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Обращаясь к вопросу об определении места отрыва, т. е. значения потенциальной функции φ_0 , заметим, что по (6.21) при $B=0$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ij} &= \frac{\pi-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{z_0}{-z_0' \varphi}} \left(\frac{\zeta_j}{z_0} \right)^{1/4} \\ \left(\frac{\partial \left(\frac{\zeta_j}{z_0} \right)}{\partial \xi} \right)_j &= 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{-z_0' \varphi}{z_0}} \left(\frac{\zeta_j}{z_0} \right)^{1/4} \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

С другой стороны, пользуясь внешним решением, из условия $\left(\frac{\partial^2 \zeta_{\omega}}{\partial \xi^2} \right)_j = 0$ получим

$$\left(\frac{\zeta_{\omega}}{z_0} \right)_j = f_1(\varphi), \quad \left(\frac{\partial \frac{\zeta_{\omega}}{z_0}}{\partial \xi} \right)_j = f_2(\varphi).$$

Пользуясь же равенствами

$$\left(\frac{\zeta_j}{z_0} \right)_j = \left(\frac{\zeta_{\omega}}{z_0} \right)_j = \frac{\zeta_j}{z_0} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \frac{\zeta_j}{z_0}}{\partial \xi} \right)_j = \left(\frac{\partial \frac{\zeta_{\omega}}{z_0}}{\partial \xi} \right)_j;$$

из второго равенства (6.29) найдем

$$\sqrt{\frac{-z_0' \varphi}{z_0}} = f_3(\varphi);$$

поскольку z_0' и z_0 — известные функции φ , то последнее равенство и послужит для определения $\varphi = \varphi_0$.

Метод Миньеса, а, следовательно, и Кармана-Милликена, относится к числу теорий асимптотического слоя, однако, как уже ранее упоминалось, можно условно определить толщину пограничного слоя, как такое расстояние от стенки, при котором, например, $\frac{u}{U} = 0,995$ или, что все равно, $\frac{\zeta_{\omega}}{z_0} = \left(\frac{u}{U} \right)^2 = 0,99$. Соответствующее значение y даст δ , а $y^* = \delta^*$.

Карман и Милликен доводят до конца расчет для двух профилей: ранее упомянутого односкатного и для двухскатного. Покажем здесь решение лишь для первого, за остальным отсылаем интересующихся к оригинальной работе указанных авторов.

В случае односкатного профиля (6.9) переменная z_ω может быть выражена по (6.10) так:

$$\frac{z_\omega}{z_0} = 1 - \frac{z_\omega}{z_0} = 1 - 2h_1(\xi) - 2\alpha g_1(\xi), \quad (6.30)$$

где положено:

$$\alpha = \frac{U_1^2}{U^2} = \frac{1}{1 - 2 \frac{U_1 - 1}{U_1^3} \varphi}. \quad (6.31)$$

Прежде всего, из условия перегиба внешнего решения

$$\frac{\partial^2 z_\omega}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_{\omega j}$$

находим соответствующее $\alpha(\xi_{\omega j})$; само решение можно провести, например, разлагая функции $g(\xi)$ в ряды по степеням ξ . Зная $\alpha(\xi_{\omega j})$, по (6.30) находим $\left(\frac{z_\omega}{z_0}\right)_j$ и $\left(\frac{\partial z_\omega}{\partial \xi}\right)_j$ в функции $\xi_{\omega j}$. Переходя к внутреннему решению, по (6.9) и (6.31) найдём

$$\frac{-z_0 \varphi}{z_0} = z - 1, \quad (6.32)$$

что для точки отрыва по (6.29) дает

$$\left(\frac{\partial z_j}{\partial \xi}\right)_j = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha - 1} \left(\frac{z_j}{z_0}\right)^{1/4};$$

после замены $\left(\frac{z_j}{z_0}\right)^{1/4}$ на $\left(\frac{z_\omega}{z_0}\right)^{1/4}$, получим $\left(\frac{\partial z_j}{\partial \xi}\right)_j$ как функцию $\xi_{\omega j}$. Равенство

$$\left(\frac{\partial z_\omega}{\partial \xi}\right)_j = \left(\frac{\partial z_j}{\partial \xi}\right)_j$$

даст нам тогда возможность определить $\xi_{\omega j}$ для $\varphi = \varphi_s$, т. е. в том сечении, где находится точка отрыва. Зная это значение $\xi_{\omega j}$, будем знать α и $\frac{z_\omega}{z_0}$. Что касается ξ_{ij} при $\varphi = \varphi_s$, то его можно найти и по первому равенству (6.29), а затем уже, если угодно, и по (6.15).

Указанные выкладки приводят для случая односкатного профиля к следующим численным результатам:

$$\alpha_s = 1,241, \quad \left(\frac{z_i}{z_0}\right)_s = 0,246, \quad (\xi_{\omega i})_s = 0,262, \quad \varphi_s = 0,026. \quad (6.33)$$

Замечая, что при $\varphi = 0$ $U = U_1$, $\alpha = 1$, видим, что весь рассматриваемый нами участок пограничного слоя соответствует интервалу α от 1 до 1,241. Задаваясь наперед различными значениями α внутри

этого интервала, можно найти соответствующие значения $\xi_{w,j}$, $\frac{\xi_l}{z_0}$ и $\left(\frac{\partial \xi_w}{\partial \xi}\right)_j$, а затем по второму равенству (6.21), приравнявая $\left(\frac{\partial \xi_w}{\partial \xi}\right)_j$ и $\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial \xi}\right)_j$ найдем и B^2 . Очевидно, что, следуя этому процессу, освобождаемся от необходимости определять $\xi_{l,j}$ и ϵ .

Профили скорости определяются равенствами (6.24), (6.25), (6.26), (6.27) и (6.28).

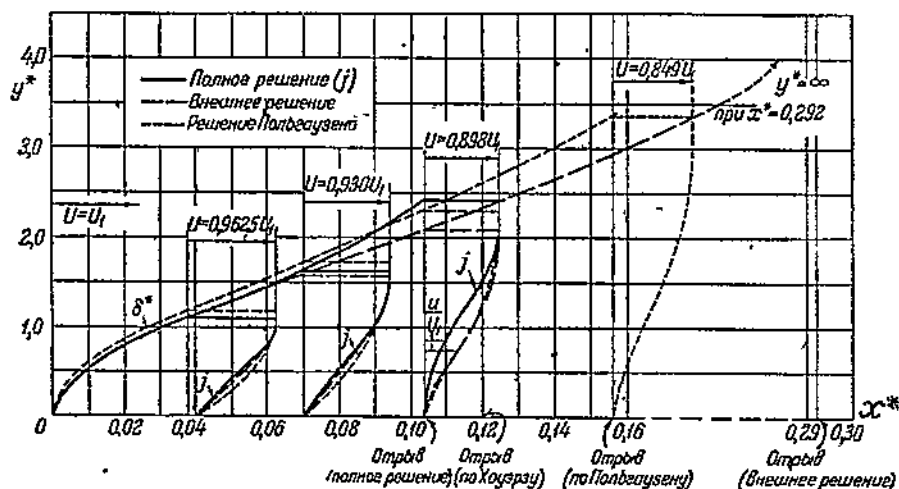


Рис. 50.

На рис. 50 приведены профили скоростей в пограничном слое в трех сечениях и толщины пограничного слоя, рассчитанные по трем методам: 1) соединению внешнего и внутреннего решений, 2) только внешнему решению и 3) методу Польгаузена. Метод Польгаузена дает абсциссу места отрыва, сильно запаздывающую по сравнению с полным решением; чисто внешнее решение еще более запаздывает.

Для сопоставления решения Кармана-Милликена с решением Хоуэрза для того же односкатного профиля скорости внешнего потока заметим, что величина x^* , фигурирующая у Хоуэрза (§ 2 настоящей главы), связана с величиной α у Кармана-Милликена простым соотношением:

$$x^* = \frac{b_1 x}{b_0} = \frac{U_1 - U}{U_1} = 1 - \frac{U}{U_1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (6.34)$$

Следовательно, для места отрыва по Карману-Милликену получим значение $x_s^* = 0,102$, в то время, как у Хоуэрза $x_s^* = 0,12$; легко видеть, что решение Польгаузена приводит к значению $x_s^* = 0,156$, далеко уходящему от точного решения Хоуэрза.

Вспоминая критические замечания, помещенные в предыдущем параграфе, мы можем себе объяснить значительное запаздывание отрыва по Польгаузену тем, что, как уже упоминалось, решение Польгаузена принадлежит по своему типу к „внешним“ решениям уравнений пограничного слоя, так как, пренебрегая характерным для стенки условием обращения в нуль третьей производной скорости по y , это решение использует ряд условий для внешней границы. Но вместе с тем оно все же более точно, чем чисто внешнее решение по Карман-Милликену, хотя бы уже потому, что подчиняет профиль условию для второй производной скорости по y на стенке. Идея смыкания „внешнего“ решения с „внутренним“, как бы не показались сложны отдельные детали этого смыкания, изложенные в настоящем параграфе, является крайне интересной и несомненно может быть использована и независимо от пользования уравнением Мизеса. Можно было бы скомбинировать по такому же принципу и полиномиальные решения типа Польгаузена, пользуясь при построении внешнего и внутреннего решения различными граничными условиями, характерными для стенки и для внешней границы пограничного слоя.

В заключение упомянем, что Милликен в одной из последующих работ¹⁾ применил настоящий метод к теоретическому определению места отрыва и профилей скорости на эллиптическом цилиндре при данных, исследованных экспериментально Шубауэром.

Результаты Милликена, в отличие от метода Польгаузена, очень хорошо совпали с экспериментальными данными. Место отрыва по теоретическому расчету оказалось всего на 6% ближе к лбу, чем экспериментальное, в то время как метод Польгаузена, как уже ранее упоминалось, вообще не давал отрыва на эллиптическом цилиндре. К сожалению, при расчете Милликен не смог воспользоваться ни односкатным, ни двускатным профилем, а принужден был взять разложение U^2 по степеням φ с довольно большим числом членов, что привело к сложным выкладкам.

ГЛАВА IV

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

§ 1. Ламинарный пограничный слой при продольном обтекании тел вращения

Метод Блязюса, изложенный в предыдущей главе, может быть обобщен и на случай продольного обтекания аксиально-симметричных тел, так как в этом случае задача допускает наличие функции тока и, следовательно, представляется возможным провести анализ, аналогичный методу Блязюса. Таким методом ламинарное обтекание тел

¹⁾ С. Millikan. A theoretical calculation of the laminar boundary layer around an elliptic cylinder etc. J. Aer. S., Vol. 3, № 3, 1936.

прощения было исследовано Болтце¹⁾, работа которого вышла в свет одновременно с упомянутой работой Блязиуса.

Однако за последнее время, имея в виду возможные обобщения задач ламинарного слоя на турбулентный слой, предпочитают применять методы слоя конечной толщины, так как эти методы могут быть применены и к турбулентному слою. В связи с этим, оставляя в стороне вопросы обобщения метода асимптотического слоя на случай пространственного слоя, обратимся к изложению решения поставленной задачи приемами теории пограничного слоя конечной толщины.

Впервые, повидимому, К. Милликен²⁾ в 1932 г. применил метод слоя конечной толщины к исследованию ламинарного (и турбулентного) пограничного слоя на телах вращения, причем воспользовался обычным приемом Кармана—Польгаузена, обобщив его несколько для случая неплоской задачи с осевой симметрией. После него, примерно через два года, тот же метод, но уточненный последовательными приближениями, использовала Х. Ляйон³⁾.

Для краткости мы изложим непосредственно метод Х. Ляйон, так как результаты К. Милликена войдут сюда как первое приближение. В основе метода лежит обобщение на пространство трех измерений интегрального условия Кармана.

Рассмотрим меридиональное сечение пограничного слоя на некотором теле вращения (рис. 51). Пусть расстоянию x , отсчитанному от носа тела по оси вращения, или расстоянию s , взятому от той же точки по дуге меридионального

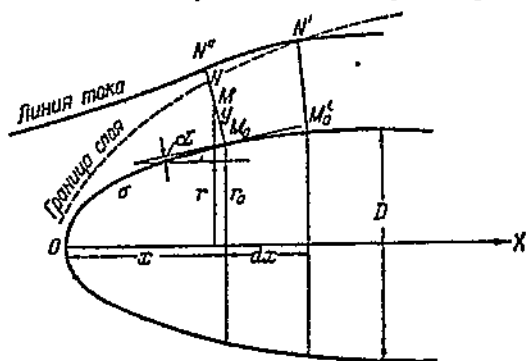


Рис. 51.

сечения поверхности тела вращения, соответствует сечение пограничного слоя M_0N , а соответственно расстояниям $x + dx$ или $\sigma + d\sigma$ — сечение $M_0'N'$. Проведем поверхность тока через край последнего сечения N' (т. е. через окружность, имеющую центр на оси вращения тела и проходящую через точку N'). Эта поверхность (на рисунке линия ее меридионального сечения) пересечет нормаль M_0N в точке N'' . Применим теорему количеств движения к бесконечно малому кольцевому объему трубки тока жидкости, образованному вращением фигуры $M_0N''N'M_0'$ вокруг оси x -ов. Обозначив через Q и J соответственно секундную массу и секундное количество движения, про-

¹⁾ *E. Boltz*. Grenzschichten an Rotationskörpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Dissert. Göttingen, 1908.

2) *Clark B. Millikan*. The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. Trans. A. S. M. E. January, 1932.

³) H. Lyon. The drag of streamline-bodies. Aircraft Engineering. № 67, 1934.

ходящие сквозь сечение слоя образованное вращением отрезка $M_0N=\delta$, можно написать (u — продольная скорость):

$$Q = \int_0^{\delta} 2\pi r p u dy, \quad J = \int_0^{\delta} 2\pi r p u^2 dy. \quad (1.1)$$

Сквозь сечение $M_0'N'$ в силу несжимаемости будет проходить секундная масса жидкости, равная

$$Q + \frac{dQ}{d\sigma} d\sigma - Q = \frac{dQ}{d\sigma} d\sigma = \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r p u dy \cdot d\sigma$$

и секундное количество движения:

$$U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r p u dy \cdot d\sigma;$$

через полное сечение трубки тока M_0N'' — количество движения

$$J + U \frac{dQ}{d\sigma} d\sigma = \int_0^{\delta} 2\pi r p u^2 dy + U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r p u dy \cdot d\sigma.$$

Сквозь второе сечение $M_0'N'$ будет проходить секундное количество движения

$$J + \frac{dJ}{d\sigma} d\sigma = \int_0^{\delta} 2\pi r p u^2 dy + \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r p u^2 dy d\sigma.$$

Таким образом при стационарном движении проекция полного секундного изменения количества движения в рассматриваемом объеме трубки тока на ось OX будет равна по (1.1)

$$\begin{aligned} \left(J + \frac{dJ}{d\sigma} d\sigma - J - U \frac{dQ}{d\sigma} d\sigma \right) \cos \alpha &= \left(\frac{dJ}{d\sigma} - U \frac{dQ}{d\sigma} \right) d\sigma \cos \alpha = \\ &= \left(\frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r p u^2 dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r p u dy \right) d\sigma \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

По теореме об изменении количеств движения, полученную проекцию секундного изменения количества движения надо приравнять проекции главного вектора внешних сил (которые в рассматриваемом случае сводятся к давлению и трению на стенке) на ту же ось. Проводя рассуждение, аналогичное изложенному в главе I при выводе уравнения Кармана для плоского случая, найдем выражение для этой проекции в виде

$$-\left(\frac{dp}{d\sigma} \int_0^{\delta} 2\pi r dy + 2\pi r_0 \tau_0 \right) d\sigma \cdot \cos \alpha. \quad (1.3)$$

Приравнивая (1.2) и (1.3), найдем

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} 2\pi r \rho u^2 dy - U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} 2\pi r \rho u dy = -\frac{dp}{ds} \int_0^{\delta} 2\pi r dy - 2\pi r_0 \tau_0. \quad (1.4)$$

Это и есть интегральное условие Кармана, обобщенное на случай продольного обтекания тела вращения.

Заменяя здесь

$$r = r_0 + y \cos \alpha = r_0 + \beta y, \quad \beta = \cos \alpha,$$

и принимая закон Бернулли для внешнего потока

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2, \quad \frac{dp}{ds} = -\rho U \frac{dU}{ds},$$

преобразуем полученное уравнение (1.4) к виду, не содержащему явно p ; если заметить, что

$$U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} r \rho u dy = \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} r \rho U u dy - \frac{dU}{ds} \int_0^{\delta} r \rho u dy,$$

то будем иметь

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho (r_0 + \beta y) u (U - u) dy + \frac{dU}{ds} \int_0^{\delta} \rho (r_0 + \beta y) (U - u) dy = \tau_0 r_0. \quad (1.5)$$

Примем теперь следующие обозначения: $r_0 = z \cdot D$, $x = s \cdot L$, D — максимальный диаметр, L — длина тела вращения; тогда, заменяя повсюду

$$ds = \frac{dx}{\beta} = \frac{L}{\beta} ds$$

и деля обе части (1.5) на $\rho U_0^2 D \beta$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{z}{L} \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \left(1 + \frac{\beta y}{r_0} \right) dy \right] + \\ + \frac{U}{U_0} \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{U_0} \right) \frac{z}{L} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \left(1 + \frac{\beta y}{r_0} \right) dy = \left(\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} \right) \frac{z}{\beta}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для дальнейших вычислений будет удобно ввести следующие сокращенные обозначения для обобщенных „толщин“ вытеснения и потери импульса:

$$\left. \begin{aligned} \delta^* &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \left(1 + \frac{\beta y}{r_0} \right) dy \\ \delta^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \left(1 + \frac{\beta y}{r_0} \right) dy. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Основное уравнение (1.6) примет при этом вид

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \frac{z \delta^{**}}{L} \right] + \frac{U}{U_0} \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{U_0} \right) \cdot \frac{z \delta^*}{L} = \frac{\tau_0}{\rho U_0^2} \cdot \frac{z}{\beta}. \quad (1.8)$$

Здесь U_0 и L — постоянные величины, U , x и β — известные функции $s = \frac{x}{L}$ согласно заданного распределения скоростей во внешнем потоке и уравнения контура меридионального сечения поверхности; что же касается величин δ^* и δ^{**} , а также и τ_0 , то они зависят от толщины пограничного слоя и выбранного приближенного профиля скоростей в пограничном слое.

Как только, следуя методу Польгаузена, выберем вид полинома, аппроксимирующего профиль скоростей, и определим коэффициенты этого полинома, так сейчас же δ^* и δ^{**} станут определенными функциями неизвестной толщины слоя δ и уравнение (1.8) представит собою обыкновенное дифференциальное уравнение для определения толщины слоя в функции от s или x . Если, наоборот, экспериментальным путем найти профиль скоростей и толщину слоя, тогда уравнение (1.8) сможет быть использовано для определения напряжения трения τ_0 , коэффициента местного трения $\frac{\tau_0}{\rho U_0^2}$ или, наконец, путем простого интегрирования, для определения полного сопротивления.

Положим, что профиль скорости в пограничном слое аппроксимируется полиномом четвертой степени

$$\frac{u}{U} = a\left(\frac{y}{\delta}\right) + b\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^4, \quad (1.9)$$

причем по Польгаузену неопределенные коэффициенты a , b , c , d определяются из граничных условий $\left(\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}\right)$:

$$\text{при } y=0, \quad u=0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{U}{\nu} \frac{dU}{dx} = -\frac{\lambda U}{\delta^2}$$

$$\text{при } y=\delta, \quad u=U, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

и равны

$$a = 2 + \frac{1}{6}\lambda, \quad b = -\frac{1}{2}\lambda, \quad c = -2 + \frac{1}{2}\lambda, \quad d = 1 - \frac{1}{6}\lambda,$$

так что

$$\frac{u}{U} = \left(2 + \frac{1}{6}\lambda\right)\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\lambda\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{6}\lambda\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^4. \quad (1.10)$$

Имея уравнение профиля скоростей, можно вычислить δ^* , δ^{**} и τ_0 . Для этого подставим значение скорости из (1.10) в равенства (1.7), причем для упрощения опустим всюду слагаемое $\frac{\beta y}{r_0}$ по сравнению с единицей (как замечает Х. Ляйон, для испытанных ею моделей такое упрощение давало погрешность не более 2,5% на всей лобовой части

до половины длины модели), т. е. примем

$$\left. \begin{aligned} \delta^* &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ \delta^{**} &= \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \cdot \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Вычисления дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta^*}{\delta} &= 0,3000 - 0,008333 \lambda \\ \frac{\delta^{**}}{\delta} &= 0,1175 - 0,001058 \lambda - 0,0001102 \lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

коэффициент, местного трения будет равен по (1. 10)

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{\mu}{\rho U_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\nu}{U_0^2} \cdot \frac{U(2 + \frac{1}{6}\lambda)}{\delta} = \frac{U}{U_0} \left(2 + \frac{1}{6}\lambda\right) \frac{L}{\delta R_L}, \quad (1.13)$$

где, как обычно, введено обозначение для рейнольдсова числа

$$R_L = \frac{U_0 L}{\nu}.$$

В целях упрощения дальнейших интегрирований, уравнение (1.8) (которое после подстановки значений (1.12), должно было бы обратиться в тождество известного уже нам уравнения Польшауэна на случай тел вращения) удобно еще несколько преобразовать; беря производную от квадратной скобки в левой части (1.8), перегруппируем члены так:

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{z \delta^{**}}{L}\right) + \frac{U}{U_0} \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{U_0}\right) \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right) \left(\frac{z \delta^{**}}{L}\right) = \frac{a z \frac{U}{U_0}}{\beta \frac{\delta}{L} R}. \quad (1.14)$$

где, напомним,

$$a = 2 + \frac{1}{6} \lambda.$$

Уравнение (1.14) есть не что иное, как уравнение (3.8) § 3 главы I, обобщенное на случай осесимметричного обтекания.

Умножим обе части уравнения (1.14) на выражение

$$2z \cdot \frac{\delta^{**}}{L} \left(\frac{U_0}{U}\right)^2$$

и обозначим

$$2 \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}}\right) = k(\lambda); \quad (1.15)$$

тогда получим искомое, окончательно преобразованное уравнение;

$$2 \left(\frac{z \delta^{**}}{L}\right) \frac{d}{ds} \left(\frac{z \delta^{**}}{L}\right) + \left(\frac{z \delta^{**}}{L}\right)^2 k(\lambda) \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{U_0}\right) \frac{U_0}{U} = 2a \frac{\delta^{**}}{\beta \frac{\delta}{L} R} \frac{U_0^2 z^2}{L}. \quad (1.16)$$

Для решения этого, в общем виде весьма сложного уравнения, применим метод последовательных приближений. Для построения первого приближения отвлечемся от влияния продольного градиента на характер профиля, а, именно, положим величину λ , пропорциональную $\frac{dU}{ds}$, равной нулю. Тогда по (1.15), (1.14) и второму из равенств (1.12) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} k(0) = k_0 = 2 \left[2 + \left(\frac{\partial^{**}}{\partial \delta} \right)_{\lambda=0} \right] &= 2 \left(2 + \frac{0,3000}{0,1175} \right) = 9,106 \\ a(0) = a_0 &= 2 \\ \left(\frac{\partial^{**}}{\partial \delta} \right)_0 &= 0,1175. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

После упрощения уравнение (1.16) становится легко интегрируемым.

В самом деле, умножая обе части (1.16) на $\left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0}$, получим:

$$\left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0} \frac{d}{ds} \left(\frac{z \partial^{**}}{L} \right)^2 + k_0 \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{U_0} \right) \left(\frac{z \partial^{**}}{L} \right)^2 = \frac{2a_0}{R_L} \left(\frac{\partial^{**}}{\partial \delta} \right)_0 \frac{z^2}{\beta} \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1},$$

или

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0} \left(\frac{z \partial^{**}}{L} \right)^2 \right] = \frac{2a_0}{R_L} \left(\frac{\partial^{**}}{\partial \delta} \right)_0 \frac{z^2}{\beta} \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1}.$$

Непосредственным интегрированием обеих частей в пределах от 0 до s найдем (при $s=0$, $U=0$; $k_0 > 1$) искомым интеграл

$$\left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0} \left(\frac{z \partial^{**}}{L} \right)^2 = \frac{2a_0}{R_L} \left(\frac{\partial^{**}}{\partial \delta} \right)_0 \int_0^s \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1} \frac{z^2}{\beta} ds = \frac{0,4700}{R_L} \int_0^s \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1} \frac{z^2}{\beta} ds.$$

Вспомня, что при $\lambda=0$, $\partial^{**}=0,1175 \delta$, получим решение:

$$R_L \left(\frac{\partial}{L} \right)^2 = \frac{34,12}{z^2 \cdot \left(\frac{U}{U_0} \right)^{9,106}} \cdot \int_0^s \left(\frac{U}{U_0} \right)^8 \cdot \frac{z^2}{\beta} ds. \quad (1.18)$$

Таково первое приближение решения задачи, эквивалентное решению К. Миллика (последний, пренебрегая продольным градиентом, довольствовался полиномом второй степени при соответствующих упрощенных граничных условиях, но это не существенно).

Чтобы получить следующее приближение, откажемся от условия $\lambda=0$ и подсчитаем новое значение $\lambda=\lambda_1$, приняв в правой части выражения

$$\lambda = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{dU}{ds} = R_L \left(\frac{\partial}{L} \right)^2 \cdot \frac{\beta}{U_0} \cdot \frac{dU}{ds} \quad (1.19)$$

значение $R_L \left(\frac{\partial}{L} \right)^2$ — по первому приближению (1.18). Имея таким образом для каждого значения s величину $\lambda_1(s)$, подсчитаем новые значения $\left(\frac{\partial^{**}}{\partial \delta} \right)_1$, $\left(\frac{\partial^*}{\partial \delta} \right)_1$, a_1 , k_1 как функции s . Если отвлечься от больших

значений λ , например, близких к значению $\lambda = -12$ в месте отрыва, то легко видеть, что функция $k(\lambda)$, равная по (1.15) и (1.12)

$$k(\lambda) = 2 \left(2 + \frac{0,3000 - 0,008333\lambda}{0,1175 - 0,001058\lambda - 0,000102\lambda^2} \right) = \\ = 2 \left(2 + \frac{0,3000}{0,1175} \cdot \frac{1 - 0,0278\lambda}{1 - 0,00908\lambda - 0,000988\lambda^2} \right) \approx \\ \approx 9,106 - 0,512(0,188\lambda - 0,00102\lambda^2 + \dots)$$

может быть представлена, как

$$k(\lambda) = k_0 + \varepsilon(\lambda), \quad (1.20)$$

причем функция $\varepsilon(\lambda)$ мала по сравнению с k_0 .

Уравнению (1.16) можно будет придать следующий вид

$$2 \left(\frac{z \delta^{**}}{L} \right)_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{z \delta^{**}}{L} \right)_2 + \left(\frac{z \delta^{**}}{L} \right)_2^2 \cdot k_0 \cdot \frac{U_0}{U} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{U_0} \right) = \\ = \left(2a - \lambda \frac{\varepsilon \delta^{**}}{\delta} \right)_1 \cdot \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)_1 \cdot \frac{U_0 z^2}{U} \frac{1}{\beta R_L}, \quad (1.21)$$

где нижние значки показывают номер приближения, из которого берутся значения величин, входящих в скобки. Прием, в точности аналогичным предыдущему, это уравнение может быть проинтегрировано; получим

$$R_L \left(\frac{z \delta^{**}}{L} \right)_2^2 \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0} = \int_0^s \left(2a - \lambda \frac{\varepsilon \delta^{**}}{\delta} \right)_1 \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)_1 \frac{z^2}{\beta} \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1} ds, \quad (1.22)$$

или, вводя явно толщину слоя во втором приближении:

$$R_L \left(\frac{\delta}{L} \right)_2^2 = \frac{1}{\left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0} z^2 \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)_1^2} \cdot \int_0^s \left(2a - \lambda \frac{\varepsilon \delta^{**}}{\delta} \right)_1 \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)_1 \frac{z^2}{\beta} \left(\frac{U}{U_0} \right)^{k_0-1} ds. \quad (1.23)$$

Таким образом решение сводится к квадратуре, брать которую, естественно, проще всего графически, так как $\frac{U}{U_0}$ и z обычно задаются графически. Пользуясь планиметром, можно последовательно для ряда значений s вычислить толщину слоя, а следовательно, найти профили скоростей и трение.

На рис. 52 вычерчен по второму приближению профиль скорости в сечении, соответствующем значению $x = 21$ дюйму на модели общей длины 70 дюймов и диаметра 14 дюймов (модель дирижаблей $R-100$ и $R-101$, с удлинением 5:1), причем для сравнения дан экспериментальный профиль, полученный при помощи непосредственных измерений скоростей микротрубками. Там же приведены для сравнения профили соответствующего сечения на гладкой пластине, рассчитанной теоретически по первому приближению (четвертое приближение Польгаузена) и по Блязиусу. Схождение результатов вполне удовлетворительное. Пограничный слой на поверхности дирижабельной формы оказывается тоньше, чем на пластинке, трение, наоборот, —

больше; в дальнейшем слой на дирижабельной форме перерастает соответствующий слой на пластине. На рис. 53 приведены кривые местного трения на той же модели в форме зависимости $\frac{\tau_0 z}{\rho U_0^2}$ от $\frac{x}{L}$, рассчитанные по первому и второму приближению, и, для сравнения с ними, экспериментальная кривая, полученная при помощи уравнения (1.8), вычислением левой части его по непосредственным замерам; схождение почти до $\frac{x}{L} = 0,5$ можно признать вполне

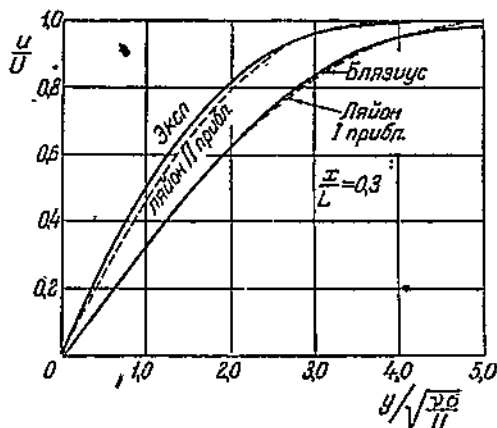


Рис. 52.

удовлетворительным, особенно, если принять во внимание, что розыскание левой части (1.8), связанное с необходимостью графического дифференцирования, далеко не точно. Изложенный метод, как видим, дает прекрасные результаты для хорошо обтекаемых моделей. В случае плохо обтекаемых форм в области, близкой к линии (окружности) отрыва, метод был бы не применим. Для расчета отрыва слоя следовало бы повести анализ так же, как это было уже сделано в § 5 предыдущей главы, т. е., доведя по ме-

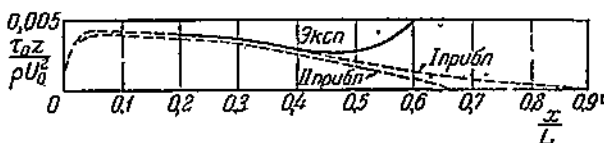


Рис. 53.

тоду Хильды Ляйон все вычисления до сечения, соответствующего линии минимума давления, в дальнейшем отказаться от многочлена Польгаузена и применить прием, указанный в § 5. Таким путем и эта задача может быть доведена до конца.

Примечание. Метод последовательных приближений Х. Ляйон применим и для плоского движения в пограничном слое; в этом случае в формуле (1.18) следует сохранить в числителе и знаменателе правой части по z^2 и, кроме того, заменить $\frac{ds}{\beta}$ на ds . Точно так же можно получать и следующие приближения.

§ 2. Пространственный ламинарный слой вблизи линии пересечения двух поверхностей

Ранее (в главе II, § 5) было рассмотрено движение жидкости в ламинарном слое в углу на стыке двух плоскостей. Теперь обратимся к более сложному случаю, когда пересекающиеся поверхности неплос-

кие и, на них имеется некоторый перепад давлений. Сохраним обозначения рис. 31, с той лишь разницей, что теперь ось OX криволинейна. Как всегда, в теории пограничного слоя примем следующую схему¹⁾. Будем пренебрегать влиянием кривизны поверхностей на вид дифференциальных уравнений движения жидкости в пограничном слое, но учтем это влияние в продольном градиенте $\frac{dp}{dx}$; кроме того остановимся лишь на случае продольного движения во внешнем потоке со скоростью $U(x)$ и в силу этого будем пренебрегать поперечными перепадами давления $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ (проведенные опыты прекрасно подтвердили возможность принятия такой схемы). Теоретическое исследование явления даже при такой упрощенной схеме представляет непреодолимые препятствия, так как в рассматриваемом случае мы имеем трехмерный поток, не имеющий функции тока. Желая исследовать, хотя бы качественно, поведение жидкости в пограничном слое и особенно интересуясь влиянием интерференции поверхностей на явление отрыва пограничного слоя, мы решили эту задачу методом, аналогичным методу Озеена, о котором была речь в главе IV.

Заменим в первом из уравнений пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.1)$$

скорость u на $U - u_1$, где u_1 рассматривается как малая добавка, и будем считать v и w также малыми; кроме того примем еще во внимание, что по теореме Бернулли:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}.$$

Тогда, после откидывания малых второго порядка, приведем уравнение (2.1) к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \cdot u_1) = \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (U \cdot u_1) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U \cdot u_1) \right]. \quad (2.2)$$

Не следует забывать, что здесь U —заданная функция x ; уравнение (2.2) приводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами подстановкой:

$$\sqrt{U(x)} \cdot y = \eta, \quad \sqrt{U(x)} \cdot z = \zeta, \quad U \cdot u_1 = k. \quad (2.3)$$

Если перейти одоновременно еще к безразмерным величинам при помощи масштабов:

$$\left. \begin{aligned} L \text{ для } x; \quad \frac{L}{\sqrt{R}} \text{ для } y \text{ и } z; \quad \text{где } R = \frac{U_0 L}{\nu}; \\ U_0^2 \text{ для } k, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

¹⁾ Л. Г. Лойцянский. Движение жидкости в пограничном слое вдоль линии пересечения двух поверхностей. Труды Ленинградского индустриального института № 6, вып. 3, 1937.

то уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial \zeta^2}. \quad (2.5)$$

Решать это уравнение следует при безразмерных граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } \eta = 0, \quad k = U(u_1)_{y=0} = U^2(x); \\ &\text{при } \zeta = 0, \quad k = U^2(x); \\ &\text{при } \eta = \zeta = \infty, \quad k = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

присоединим сюда еще условие, что при $x=0$, $k=0$.

Таким образом приходим к типовой задаче на распространение тепла¹⁾. Решение этой задачи может быть представлено в виде:

$$k(x; \eta, \zeta) = \int_0^x [U^2(\xi)]_{\xi}' \cdot \left[1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{x-\xi}}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{x-\xi}}\right) \right] d\xi, \quad (2.7)$$

где принято обозначение:

$$\operatorname{Erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Легко непосредственной проверкой убедиться, что функция (2.7) удовлетворяет уравнению (2.5) и граничным условиям (2.6). Если вернуться от функции k к u и от аргументов η и ζ к y и z , то решение (2.7) можно переписать еще в следующей окончательной форме:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{U(x)} \int_0^x [U^2(\xi)]_{\xi}' \cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{y\sqrt{U(x)}}{2\sqrt{x-\xi}}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{z\sqrt{U(x)}}{2\sqrt{x-\xi}}\right) d\xi. \quad (2.8)$$

Обратимся к рассмотрению явления отрыва. Для определения линии отрыва пограничного слоя на поверхности $z=0$ составим условие $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$. Это условие будет иметь вид

$$\int_0^{x_0} [U^2(\xi)]_{\xi}' \operatorname{Erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{x_0-\xi}}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{x_0-\xi}} = 0, \quad (2.9)$$

представляющий в известном роде обобщение условия (6.5) § 6 предыдущей главы, данного Карманом и Миллиkenом для плоского случая.

Прежде всего видим, что в отличие от плоского движения линия отрыва уже не является прямой линией, а представляет некоторую кривую на поверхности (x, η) или (x, y) . При удалении от линии

¹⁾ См., например, *Н. С. Кошляков*. Основные дифференциальные уравнения математической физики, ГТТИ, 1933, стр. 477—478, где решена более простая, но легко обобщаемая задача.

пересечения поверхностей: $\eta \rightarrow \infty$, $\text{Erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{x_s - \xi}}\right) \rightarrow 1$ и мы приходим к обычному уравнению плоского случая.

Чрезвычайно интересно теперь исследовать, как будет выглядеть линия отрыва при приближении к линии пересечения поверхностей. Для этого исследуем поведение абсциссы отрыва x_s при малых η . Положим

$$U^3(\xi) = q(\xi); \quad x_s - \xi = \frac{\eta^2}{4f^2}, \quad \xi = x_s - \frac{\eta^2}{4f^2}; \quad (2.10)$$

Тогда уравнение (2.9) приведет к виду

$$\eta \cdot \int_{\frac{\eta}{2\sqrt{x_s}}}^{\infty} q' \left(x_s - \frac{\eta^2}{4f^2} \right) \text{Erf } t \frac{dt}{f^2} = 0. \quad (2.11)$$

Предполагая справедливым разложение

$$q' \left(x_s - \frac{\eta^2}{4f^2} \right) = q'(x_s) - \frac{\eta^2}{4f^2} q''(x_s) - \dots, \quad (2.12)$$

перепишем уравнение (2.11) в такой форме

$$\eta q'(x_s) \int_{\frac{\eta}{2\sqrt{x_s}}}^{\infty} \text{Erf } t \frac{dt}{f^2} - \frac{\eta^3}{4} q''(x_s) \int_{\frac{\eta}{2\sqrt{x_s}}}^{\infty} \text{Erf } t \frac{dt}{f^4} - \dots = 0. \quad (2.13)$$

Входящие в эти равенства интегралы берутся в конечном виде и выражаются через Erf и интегральную показательную функцию Ei . Приводим результат подстановки этих интегралов в уравнение (2.13):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} q'(x_s) \eta \text{Ei} \left(-\frac{\eta^2}{4x_s} \right) + 2\sqrt{x_s} \cdot q'(x_s) \text{Erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{x_s}} \right) + \\ & + \frac{2}{3} q''(x_s) x_s^{3/2} \text{Erf} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{x_s}} \right) + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} q''(x_s) x_s \eta e^{-\frac{\eta^2}{4x_s}} + \\ & + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} q''(x_s) \eta^3 \cdot \text{Ei} \left(-\frac{\eta^2}{4x_s} \right) - \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При малых значениях аргумента η интегральная показательная функция разлагается в ряд (C — эйлера константа):

$$\text{Ei} \left(-\frac{\eta^2}{4x_s} \right) = C + \ln \left(\frac{\eta^2}{4x_s} \right) - \frac{\eta^2}{4x_s} - \dots$$

Следовательно при малых η уравнение линии отрыва может быть представлено в виде

$$\eta [q'(x_s) \ln \eta + F(x_s, \eta)] = 0, \quad (2.15)$$

где $F(x_s, \eta)$ — функция, остающаяся конечной при $\eta \rightarrow 0$.

Кривая, соответствующая уравнению (2.15), состоит из двух ветвей:

1) линия $\eta = 0$ представляет линию пересечения поверхностей, вдоль нее $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}$ обращается в нуль, но это не линия отрыва, так как при $y=0$ и любых z и x , скорость u равна нулю;

2) линия

$$q'(x_s) \ln \eta + F(x_s, \eta) = 0, \quad (2.16)$$

представляет искомую линию отрыва. При $\eta \rightarrow 0$, $F(x_s, \eta)$ стремится к некоторой конечной величине, а $\ln \eta \rightarrow -\infty$, следовательно, для существования равенства (2.16) должно быть:

$$q'(x_s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow 0,$$

откуда сразу следует, что

$$\text{при} \quad \eta \rightarrow 0, \quad x_s \rightarrow x_m,$$

где x_m — корень уравнения

$$q'(x_m) = 0$$

или

$$U(x_m) U'(x_m) = 0;$$

но, как уже знаем, точка отрыва не может лежать впереди точки минимума давления, следовательно $U(x_m) \neq 0$; остается лишь предположить, что $U'(x_m) = 0$, т. е. что при приближении к линии пересечения поверхностей линия отрыва пограничного слоя стремится к линии минимума давлений.

Расположение линии отрыва на крыле самолета вблизи поверхности фюзеляжа показано схематически на рис. 54 а. В аэродинамической лаборатории Ленинградского индустриального

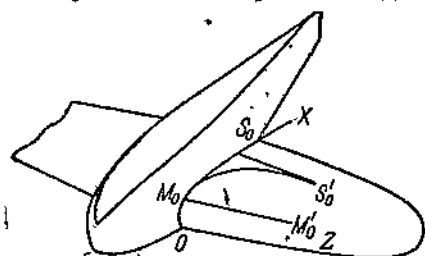


Рис. 54 а.

M_0M_0' — линия минимума давления.
 S_0S_0' — линия отрыва крыла без фюзеляжа.
 M_0S_0 — линия отрыва крыла с фюзеляжем.

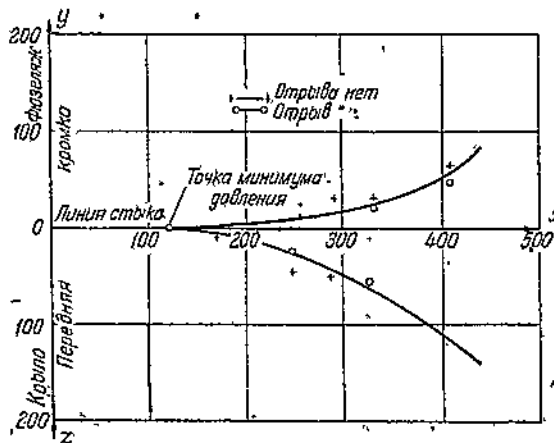


Рис. 54 б.

института были поставлены опыты на модели самолета¹⁾. Опыты эти показали, что линия отрыва действительно идет в точку минимума давления на линии стыка крыла и фюзеляжа. Явление само по себе мало устойчиво, так как линия отрыва колеблется, но все же, как показано на рис. 54 б

¹⁾ Исследование производили аспиранты кафедры Аэродинамики Б. Ф. Виллом и П. И. Третьяков. См. отчет "Теоретические и экспериментальные исследования пограничного слоя на модели скоростного самолета" ГУУЗ, НКТП, ЛИИ, Ленинград, 1937, а также канд. диссертацию П. И. Третьякова: "Интерференция крыла и фюзеляжа". 1940.

можно отчетливо наметить область отрыва (на рис. 54 б дана развертка поверхностей крыла и фюзеляжа). Наличие отрыва определялось

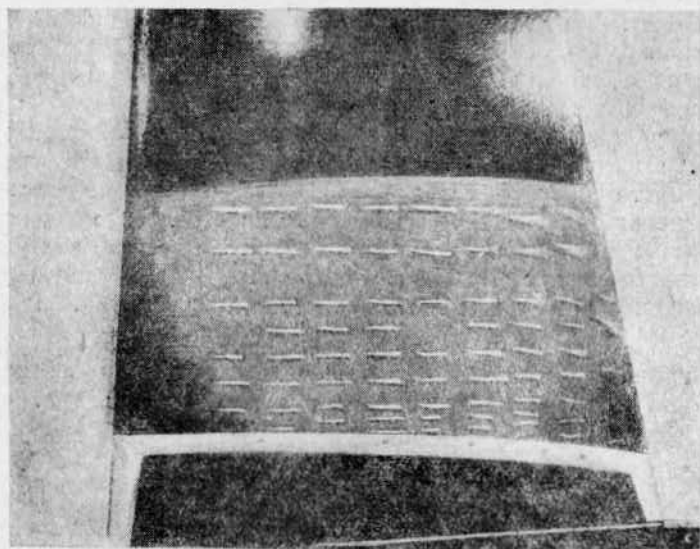


Рис. 55 а.

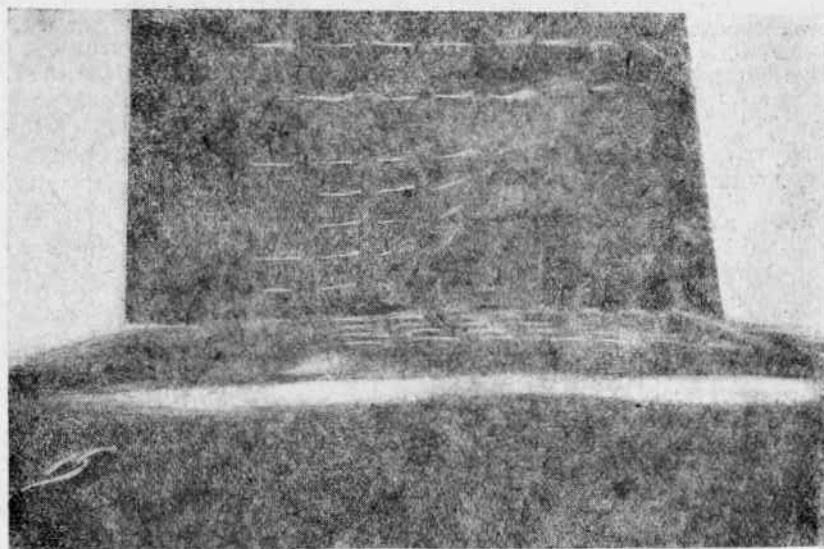


Рис. 55 б.

по профилям скоростей в пограничном слое, замеренным микротрубочками; крестиками отмечены точки, где отрыва слоя еще нет, кружками — где отрыв уже произошел.

Таким образом удалось, примерно, наметить область отрыва при угле атаки 6° и других углах. Совершенно отчетливо наметилась также область отрыва, когда мы покрыли поверхности крыла и фюзеляжа шелковинками. Фотографии явления отрыва на модели самолета можно видеть на рис. 55; на крыле без фюзеляжа (рис. 55 а) шелковинки располагаются вдоль по потоку и отчетливо видны по всей поверхности, при наличии фюзеляжа (рис. 55 б) в диффузорной области виден отрыв, причем линия отрыва имеет предсказанный теоретический характер. Конечно здесь имеет важное значение общее увеличение диффузорности при смыкании крыла с фюзеляжем, но все же интересно отметить ясно видимое на фотографии стремление линии отрыва к точке минимума давления вверх по потоку. Заметим, что указанная экспериментальная работа подтвердила вздутие пограничных слоев вблизи линии стыка поверхностей и ряд других явлений.

§ 3. Пограничный слой при вращательных движениях жидкости вокруг оси. Сопротивление диска, вращающегося в безграничном пространстве и в жидкости

До сих пор мы рассматривали пограничные слои на телах при обтекании их параллельным потоком, имеющим определенную скорость на бесконечности. Обратимся к несколько своеобразному случаю теории ламинарного пограничного слоя — к слою на вращающемся диске. Рассмотрим сначала простейший случай диска бесконечного радиуса, равномерно вращающегося в неподвижном воздухе с заданной скоростью ω_0 . Направляя ось z (цилиндрические координаты) по оси вращения диска, ось r по радиусу диска и φ по направлению, перпендикулярному к этим двум, обозначим через v_r — радиальную, v_φ — тангенциальную и v_z — аксиальную скорости. Принимая во внимание осевую симметрию движения, опустим производные по φ , тогда уравнения Навье-Стокса (глава II, отдел I) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

При вращении диска с достаточно большими угловыми скоростями, влияние вязкости, в данном случае проявляющееся в увлечении жидкости во вращательное движение, сосредотачивается в тонком слое на диске, причем вне этого слоя жидкость не будет иметь скоростей в плоскости, параллельной диску, и давление выравнено, следовательно $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$; подсосывание жидкости к вращающемуся диску будет иметь место и это сохранит некоторый градиент давления по нормали к диску, одинаковый по всему диску. Пользуясь обычными соображениями теории пограничного слоя, из всех членов, зависящих от вязкости, в уравнениях (3.1) сохраним лишь последние, представляющие производные по направлению нормали к плоскости диска; тогда уравнения

(3.1) перепишутся так

$$\left. \begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Карман ¹⁾ замечает, что систему уравнений (3.2) можно решить, положив:

$$v_r = r F(z), \quad v_\varphi = r G(z), \quad v_z = H(z) \quad \text{и} \quad p = p(z). \quad (3.3)$$

В самом деле, подставляя эти значения в систему (3.2), получим следующую совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих — знак производной по z):

$$\left. \begin{aligned} F^2 - G^2 + HF' &= \nu F'', \quad 2FG + HG' = \nu G'' \\ H' + 2F &= 0, \quad HH' = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu H'' \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= 0, \quad G(0) = \omega_0, \quad H(0) = 0 \\ F(\infty) &= 0, \quad G(\infty) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Чтобы сделать уравнения безразмерными, положим

$$\xi = z \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}, \quad f = \frac{F}{\omega_0}, \quad g = \frac{G}{\omega_0}, \quad h = \frac{H}{\sqrt{\nu \omega_0}} \quad (3.6)$$

тогда уравнения (3.4) перейдут в такие (последнее пока опускаем, так как оно служит для определения p):

$$f^2 - g^2 + hf' = f'', \quad 2fg + hg' = g'', \quad h' + 2f = 0, \quad (3.7)$$

при граничных условиях

$$f = 0, \quad g = 1, \quad h = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad f = 0, \quad g = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Эту нелинейную систему проще всего приближенно решить по методу конечного слоя. Обозначив через δ_0 толщину слоя, проинтегрируем обе части первого и второго равенства (3.7) по ξ в пределах от нуля до $\xi_0 = \delta_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\nu}}$:

$$\int_0^{\xi_0} f^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} g^2 d\xi + \int_0^{\xi_0} hf' d\xi = [f']_0^{\xi_0}, \quad 2 \int_0^{\xi_0} fg d\xi + \int_0^{\xi_0} hg' d\xi = [g']_0^{\xi_0} \quad (3.9)$$

Из написанных равенств непосредственно следует, что $\xi = \xi_0 = \text{const}$. Пользуясь уравнением неразрывности (последнее равенство (3.7)) и интегрируя в равенствах (3.9) по частям, исключим функцию h . Будем иметь:

$$3 \int_0^{\xi_0} f^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} g^2 d\xi = [f']_0^{\xi_0}, \quad 4 \int_0^{\xi_0} fg d\xi = [g']_0^{\xi_0} \quad (3.10)$$

¹⁾ Th. v. Kármán, Über die laminare und turbulente Reibung, ZAMM, 1921.

Профили скоростей f и g выберем так, чтобы они удовлетворяли обычным граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0, \quad f = 0, \quad g = 1; \\ \text{при } \xi = \xi_0, \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad g = 0, \quad g' = 0. \end{aligned}$$

Введем для простоты в качестве аргумента величину $\lambda = \frac{\xi}{\xi_0}$, обращаясь в единицу на границе слоя; тогда, останавливаясь на полиномиальных приближениях, получим:

$$f = (1 - \lambda)^2 \left(a\lambda + 2a\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^3 \right), \quad g = \frac{1}{2}(2 + \lambda)(1 - \lambda)^2, \quad (3.11)$$

где a — пока неопределенный параметр. Подставим эти значения функций f и g в равенство (3.10), предварительно найдя:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_0} f^2 d\xi &= (0,0301 a^2 - 0,00326a + 0,00159)\xi_0 \\ \int_0^{\xi_0} g^2 d\xi &= 0,2357\xi_0, \quad \int_0^{\xi_0} fg d\xi = (0,0607a - 0,00567)\xi_0, \end{aligned}$$

тогда получим два уравнения относительно a и ξ_0 , которые нам дадут

$$a = 1,026, \quad \xi_0 = 2,58; \quad (3.12)$$

отсюда следует, что толщина пограничного слоя равна

$$\delta_0 = \xi_0 \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}} = 2,58 \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0}};$$

так например, при 600 об/мин, $\omega_0 = 62,81/\text{сек}$, для воздуха $\nu = 0,14 \text{ см}^2/\text{сек}$ и $\delta_0 = 0,122 \text{ см}$.

Определим теперь момент M сил сопротивления вращению диска радиуса r_0 , пренебрегая концевым эффектом, имеющим место на периферии диска (при $r = r_0$). Этот момент будет равен, очевидно (при расчете на одну сторону диска):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M &= \int_0^{r_0} r \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{z=0} = \int_0^{r_0} r \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \mu \cdot r \left(\frac{dg}{dr} \right)_0 = \\ &= \int_0^{r_0} r \cdot 2\pi r dr \cdot \mu r \frac{\omega_0^{3/2}}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{dg}{d\xi} \right)_{\xi=0}, \end{aligned}$$

но

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{\xi_0} \cdot \frac{dg}{d\lambda} = -\frac{3}{2\xi_0} (1 - \lambda^2), \quad \left(\frac{dg}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -\frac{3}{2\xi_0},$$

так что окончательно получим:

$$M = -\frac{3}{2} \pi r_0^4 \rho \sqrt{\nu} \cdot \omega_0 \sqrt{\omega_0} = -1,84 r_0^4 \rho \sqrt{\nu} \cdot \omega_0 \sqrt{\omega_0}. \quad (3.13)$$

Если принять, как это обычно делают, квадратичную зависимость

$$M = C_{mf} \cdot \frac{\rho(r_0 \omega_0)^2}{2} \cdot r_0^3 = C_{mf} \frac{\rho U^2}{2} r_0^2 \cdot r_0, \quad (3.14)$$

то коэффициент сопротивления окажется равным

$$C_{mf} = \frac{3,68}{\sqrt{R}}, \quad R = \frac{r_0^2 \omega_0}{\nu} = \frac{r_0 U}{\nu}. \quad (3.15)$$

Таковы формулы сопротивления вращению диска при ламинарном пограничном слое. Видим, что, подобно обтеканию пластины, при ламинарном движении сопротивление оказывается пропорциональным полуторной степени скорости. Экспериментальная проверка этой формулы была произведена Кемпфом¹⁾ и показала, что теоретическое сопротивление лежит несколько ниже экспериментального. Уточненный расчет дает $C_{mf} = \frac{3,87^2}{\sqrt{R}}$, — формулу, несколько лучше совпадающую с опытом (см. рис. 134 отд. III).

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного случая — вращения диска в неподвижном кожухе. В этом случае²⁾ жидкость, увлекаемая вращающимся диском, будет тормозиться кожухом и в результате образуются два пограничных слоя: 1) на вращающемся диске и 2) на стенках кожуха; последние можно рассматривать, как неподвижные диски. Если диск вращается с угловой скоростью ω относительно неподвижного кожуха, то между пограничными слоями жидкость вращается как одно твердое тело с некоторой угловой скоростью β , удовлетворяющей условию

$$0 < \beta < \omega,$$

так что внешний по отношению к обоим пограничным слоям поток можем рассматривать как поток с тангенциальным распределением скоростей

$$V_\varphi = \beta r. \quad (3.16)$$

Такая картина движения во внешней части потока наблюдалась при весьма тщательных опытах Шульца-Грюнова, произведенных им на специальной экспериментальной установке, где диск диаметра 200 мм вращался, делая 10 000 об/мин в кожухе диаметра 206 мм с зазором между плоскостью вращения диска и стенкой кожуха равным 30 мм.

Таким образом перед нами, собственно говоря, две задачи:

1) определить трение на неподвижном диске, если жидкость во внешней области пограничного слоя вращается как одно целое с угловой скоростью β вокруг оси диска и

2) определить трение на подвижном диске, вращающемся с угловой скоростью ω , если жидкость во внешнем потоке вращается в ту же сторону с угловой скоростью $\beta < \omega$.

Очевидно, оба момента трения будут при этом равны, как моменты действия и противодействия.

Для решения этих задач можно поступить так же, как и ранее, с той лишь разницей, что в данном случае внешний поток уже не неподвижен и следовательно, имеется внешний радиальный градиент давлений, который легко вычислить, например, по (3.1), если в первом уравнении откинуть члены, зависящие от вязкости, и положить [вспомнить (3.16)]:

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = V_\varphi = \beta r, \quad v_z = 0,$$

т. е. рассмотреть вращательное движение в потоке идеальной жидкости вне пограничного слоя. Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= \rho \frac{V_\varphi^2}{r} = \rho \beta^2 r \\ p &= \frac{1}{2} \rho \beta^2 r^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

¹⁾ G. Kempf. Reibungswiderstand rotierender Scheiben. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik, Berlin 1924), S. 168.

²⁾ Cochran. Proc. Camb. Phil. Soc. 30 (1934), p.p. 365—375.

³⁾ F. Schultz-Grunow. Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. ZAMM, Bd. 15, H. 4, 1935, S. 191.

Как показали опыты Шульца-Грюнова, параболическое распределение давления хорошо оправдывается.

Начнем с рассмотрения пограничного слоя на неподвижной стенке. Возьмем первое из уравнений (3.2), восстановим в нем член $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ и, воспользовавшись уравнением несжимаемости (четвертое уравнение), перепишем левую часть первого уравнения так:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial(v_r v_z)}{\partial r} - v_r \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r^2}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial(v_r v_z)}{\partial z}.$$

После этого, умножая обе части уравнения (3.2) на $r dz$ и интегрируя в пределах от 0 до толщины слоя, которую обозначим через δ , в отличие от толщины пограничного слоя δ на вращающемся диске, получим:

$$\int_0^\delta r \frac{\partial(v_r^2)}{\partial r} dz + \int_0^\delta v_r^2 dz - \int_0^\delta v_\varphi^2 dz + [v_r v_z]_0^\delta = -\frac{1}{\rho} r \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial r} dz + r \int_0^\delta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} dz.$$

Замечая, что

$$\int_0^\delta r \frac{\partial}{\partial r} (v_r^2) dz = \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^2) dz - \int_0^\delta v_r^2 dz$$

и что по условию, на внешней границе $z = \delta$ отсутствует радиальный поток ($v_r = 0$), а на стенке v_r и $v_z = 0$, т. е.

$$[v_r v_z]_0^\delta = 0,$$

получим такое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^\delta v_r^2 dz \right) - \int_0^\delta v_\varphi^2 dz = -r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_{z=0} - r \int_0^\delta \frac{\partial^2 p}{\partial r} dz. \quad (3.18)$$

Уравнение это представляет не что иное, как уравнение количества движения, написанное в проекции на радиальную ось; его можно было бы получить и непосредственным применением теоремы к элементарному объему жидкости — цилиндрическому кольцу высоты δ и толщины dr .

Возьмем теперь второе уравнение системы (3.2) и преобразованием, аналогичным предыдущему, перепишем левую часть так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (v_r v_\varphi) - v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi v_z) - v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r} (v_r v_\varphi) - v_\varphi \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi v_z) = \frac{\partial}{\partial r} (v_r v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi v_z) + 2 \frac{v_r v_\varphi}{r}; \end{aligned}$$

после этого, умножая обе части на $r^2 dz$ и интегрируя по z от нуля до δ , получим:

$$\int_0^\delta r^2 \frac{\partial}{\partial r} (v_r v_\varphi) dz + \int_0^\delta r^2 \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi v_z) dz + 2 \int_0^\delta r v_r v_\varphi dz = -r \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \int_0^\delta v_r v_\varphi dz \right) + r^2 \cdot \beta r (v_z)_{z=0} = -r^2 \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0};$$

по уравнению несжимаемости

$$v_z = - \int_0^z \frac{1}{r} \frac{\partial (v_r r)}{\partial r} dz;$$

следовательно окончательно получим:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \int_0^{\vartheta} v_r v_{\varphi} dz \right) - r^2 \beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^{\vartheta} v_r dz \right) = -r^2 \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (3.19)$$

Это уравнение соответствует уравнению моментов количеств движения для того же цилиндрического кольца.

Подобно задаче Кармана о вращении диска в безграничном покоем пространстве, примем приближенно полиномиальный профиль скоростей в пограничном слое, причем для простоты удовольствуемся квадратичной зависимостью

$$v_r = -v_0 \left[1 - \left(2 \frac{z}{\vartheta} - 1 \right)^2 \right], \quad v_{\varphi} = r \beta \left[1 - \left(1 - \frac{z}{\vartheta} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

знак минус при v_r взят заранее, так как если в силу центробежного эффекта на вращающемся диске радиальная скорость будет направлена по радиусу от оси вращения к периферии, то на неподвижной стенке радиальная скорость будет направлена против радиуса к оси вращения; v_0 обозначает пока неизвестную максимальную радиальную скорость.

Вычисляем предварительно:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\vartheta} v_r^2 dz &= \frac{8}{15} \vartheta v_0^2, & \int_0^{\vartheta} v_{\varphi}^2 dz &= \frac{8}{15} \beta^2 r^2 \vartheta \\ \int_0^{\vartheta} v_r v_{\varphi} dz &= -\frac{7}{15} \beta r v_0 \vartheta, & \int_0^{\vartheta} v_r dz &= -\frac{2}{3} v_0 \vartheta \\ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_{z=0} &= -4 \frac{v_0}{\vartheta}, & \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} \right)_{z=0} &= 2 \frac{\beta r}{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (3.20')$$

Подставляя эти значения в уравнения (3.18) и (3.19), получим, пользуясь (3.17) (штрих — производная по r):

$$\left. \begin{aligned} \Phi^2 \vartheta + 2r \Phi \Phi' \vartheta - r \Phi^2 \vartheta' + \frac{7}{8} \beta^2 r^2 \vartheta^3 &= \frac{15}{2} \nu r \Phi \\ \frac{11}{15} \Phi \vartheta - \frac{1}{5} r \Phi' \vartheta &= 2\nu, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

где введено для краткости обозначение

$$\Phi = v_0 \vartheta. \quad (3.22)$$

Замечая, что частное решение $\vartheta = \text{const}$, $\Phi = \text{const} \cdot r$ в данном случае не подходит, так как не удовлетворяет граничным условиям и дает мнимые значения для констант; Ш у л ц - Г р ю н о в вводит безразмерную переменную

$$x = \frac{b-r}{b},$$

где b — радиус кожуха, и переписав (3.20) в виде (штрих — производная по x):

$$\left. \begin{aligned} \Phi^2 - 2(1-x)\Phi\Phi' + (1-x)\Phi^2\Phi'' + \frac{7}{8}\beta^2\delta^2(1-x)^{2\delta^2} - \frac{15}{2}\nu b\Phi(1-x) &= 0 \\ 11\Phi\Phi' + 3(1-x)\Phi'\Phi - 30\nu b(1-x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

ищет решение в виде рядов

$$\Phi = x^n (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots), \quad \Phi' = x^p (d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots), \quad (3.24)$$

причем показатели n и p подбирает так, чтобы показатели в (3.22) отличались друг от друга на единицу; это дает

$$n = \frac{3}{4}, \quad p = \frac{1}{4}.$$

После этого, подставляя значения Φ и Φ' из (3.24) в (3.23) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x , окончательно получим искомого решение

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= x^{3/4} b \sqrt{\beta \nu} [3,04 - 4,64x + 2,839x^2 - 2,855x^3 - 1,814x^4 + \dots] \\ \Phi' &= x^{1/4} \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} [4,385 - 5,845x + 4,015x^2 - 4,46x^3 - 1,29x^4 + \dots] \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Момент трения диска радиуса b можно получить по формуле

$$M = 2 \int_0^b 2\pi r^2 \cdot \mu \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial z} \right)_{z=0} \cdot dr,$$

или по последнему равенству (3.20')

$$M = -8\pi\mu\beta b^4 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{\delta} dx. \quad (3.26)$$

В области малых x , например, при $0 \leq x \leq 0,02$, можно приближенно заменить

$$\begin{aligned} \delta &\approx x^{1/4} \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} \cdot 4,385 \\ (1-x)^3 &\approx 1 - 3x, \end{aligned}$$

тогда будем иметь:

$$[M]_0^{0,02} = 0,397 \mu \beta b^4 \sqrt{\frac{\beta}{\nu}},$$

в остальной же области приходится интеграл (3.26) брать графически, планиметрируя раз навсегда вычерченную кривую $\left(\frac{(1-x)^3}{\delta}, x \right)$, что дает

$$[M]_{0,02}^1 = 2,99 \mu \beta b^4 \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}.$$

Складывая, окончательно получим

$$M = 3,39 \mu \beta b^4 \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}. \quad (3.27)$$

Как видим, момент пропорционален полуторной степени угловой скорости, подобно формуле (3.13), но коэффициент почти в два раза больше. Последний факт объясняется глубокой динамической разницей между кинематически, на первый взгляд, одинаковыми движениями: вращением диска по отношению к неподвижному воздуху и обращением этого движения — вращением воздуха

по отношению к неподвижному диску. В уравнениях эта разница прежде всего сказалась в наличии радиального градиента давлений.

Переходя ко второй из двух поставленных задач — рассмотрению случая диска, вращающегося с угловой скоростью ω при наличии угловой скорости β у вращающегося внешнего потока, заметим, что уравнения количества и моментов количества движения останутся здесь теми же самыми, с той лишь разницей, что теперь уже радиальный поток будет направлен от оси вращения к периферии. Многочленное представление скорости будет иметь вид

$$v_r = v_0^* \left[1 - \left(2 \frac{z}{\delta} - 1 \right)^2 \right], \quad v_\varphi = \omega r - (\omega - \beta) r \left[1 - \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^2 \right], \quad (3.28)$$

где δ обозначает толщину пограничного слоя на вращающемся диске, v_0^* — максимальную радиальную скорость. Подобно предыдущему, сначала вычисляем:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\delta v_r^2 dz &= \frac{8}{15} \delta v_0^{*2}, & \int_0^\delta v_\varphi^2 dz &= \beta^2 r^2 \delta \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\omega}{\beta} - 1 \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{\omega}{\beta} - 1 \right)^2 \right] \\ \int_0^\delta v_r v_\varphi dz &= \beta r \delta v_0^* \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{5} \frac{\omega}{\beta} \right), & \int_0^\delta v_r dz &= \frac{2}{3} v_0^* \delta \\ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_{z=0} &= 4 \frac{v_0^*}{\delta}, & \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0} &= -2(\omega - \beta) \frac{r}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

После подстановки этих величин в уравнения (3.18) и (3.19), получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{15} \frac{d}{dr} (r v_0^{*2} \delta) - \beta^2 r^2 \delta \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\omega}{\beta} - 1 \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{\omega}{\beta} - 1 \right)^2 \right] &= -8 \nu r \frac{v_0^*}{\delta} - \beta^2 r^2 \delta \\ \beta \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{5} \frac{\omega}{\beta} \right) \frac{d}{dr} (r^3 \delta v_0^*) - \frac{2}{3} \beta r^2 \frac{d}{dr} (r v_0^* \delta) &= \nu (\omega - \beta) 2 \frac{r^3}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

которая, в отличие от случая неподвижного диска, удовлетворяется следующими решениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \text{const} = \sqrt{\frac{\nu}{\beta}} \cdot \frac{\sqrt[4]{150}}{\sqrt{2 + 3 \frac{\omega}{\beta}}} \sqrt[4]{\frac{6 \frac{\omega}{\beta} - 1}{\frac{\omega}{\beta} + \frac{7}{3}}} \\ v_0^* &= \text{const} \cdot r = \frac{r}{\delta^2} \cdot 2,5 \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\beta} - 1}{\frac{\omega}{\beta} + \frac{7}{3}}} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Момент трения при радиусе диска a будет равен

$$M = \int_0^a 4 \pi \mu (\omega - \beta) 2 \frac{r^3}{\delta} dr;$$

вычисляя его, получим:

$$M = 1,79 a^4 \mu (\omega - \beta) \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} \cdot \sqrt{2 + 3 \frac{\omega}{\beta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\frac{\omega}{\beta} + \frac{7}{3}}{6 \frac{\omega}{\beta} - 1}} \quad (3.32)$$

При $\beta = 0$, что соответствует случаю, разобранному Карманом, получаем

$$M_0 \approx 2a^4 \cdot \sqrt{\mu_r \omega^3},$$

т. е. результат, примерно, на 90% больший, чем у Кармана (3.13).

Угловая скорость β вращения жидкости в кожухе вдалеке от твердых стенок осталась пока неопределенной. Для определения ее будем исходить из равенства двух моментов: 1) момента, тормозящего жидкость о круглые стенки кожуха, определяемого по формуле (3.27), и 2) тормозящего диск (3.22). Если пренебречь разницей в радиусах a и b , а также отвлечься от малого момента торможения жидкости о цилиндрическую часть поверхности кожуха, то эти моменты должны равняться один другому по закону равенства действия и противодействия.

Получаемое уравнение несколько сложно и решать его лучше всего графически.

Решение дает

$$\frac{\omega}{\beta} = 1,86, \quad (3.33)$$

после чего получим окончательную формулу момента

$$M = 1,334 a^4 \mu \omega \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 1,334 a^4 \sqrt{\mu_r \omega^3}. \quad (3.34)$$

Если ввести коэффициент момента C_{mf} формулой:

$$C_{mf} = \frac{M}{\rho a^5 \omega^2}, \quad (3.35)$$

то получим:

$$C_{mf} = \frac{1,334}{\sqrt{R}}, \quad R = \frac{a^2 \omega}{\nu}$$

—результат, очень хорошо совпадающий с опытным, в пределах $4,5 \leq \lg R \leq 5$. При больших R на краях шайбы образуется турбулентный слой, при меньших R — гипотеза существования вращающегося, как твердое тело, ядра между пограничными слоями диска и кожуха становится несправедливой, появляется взаимодействие слоев, зависящее от расстояния между диском и стенкой кожуха, и задача должна решаться по общей теории вязкой жидкости.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ.

Мы до сих пор не располагаем строгой теорией турбулентного движения жидкости. В связи с этим нет и строгой теории турбулентного пограничного слоя. Важность задачи о расчете турбулентного пограничного слоя однако настолько велика, что за последние годы создано много эмпирических и полуэмпирических примеров расчета. Основываясь на более или менее значительном количестве данных, взятых из опыта, и применяя общие суммарные теоремы механики (обычно теорема количеств движения), можно дать удовлетворительный расчет силы трения и распределения скоростей в турбулентном пограничном слое. Количество принимаемых допущений и иногда весьма малая очевидность их не позволяют поставить существующие теории турбулентного движения в один ряд со строгими теориями аэрогидродинамики; даже по сравнению с теорией ламинарного пограничного слоя, также еще не вполне строгой, теория турбулентного пограничного слоя кажется весьма мало обоснованной. Все же, поскольку ничего лучшего пока нет, а приложения полуэмпирических теорий значительны, необходимо изучать и развивать существующие в настоящее время приемы до тех пор, пока накопившийся опыт не выдвинет недостающие элементарные законы турбулентного движения, основываясь на которых можно будет дать строгую теорию турбулентного движения и турбулентного пограничного слоя.

ГЛАВА I

ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО СЛОЯ В ТУРБУЛЕНТНЫЙ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Прежде чем приступить к изложению основных свойств и методов расчета турбулентного пограничного слоя, следует познакомиться с явлением перехода ламинарного слоя в турбулентный и некоторыми другими явлениями, связанными с этим переходом.

Вопрос об определении точки перехода ламинарного слоя в турбулентный имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение. Дело в том, что при тех же рейнольдсовых числах трение в турбулентном слое значительно больше, чем трение в ламинарном слое, поэтому с точки зрения, например, уменьшения сопротивления

скорости самолета, задача о затягивании ламинарного режима на самолете представляет большое значение ¹⁾. Вот почему в последнее время так много исследований посвящено специально вопросу об условиях перехода ламинарного слоя в турбулентный на различных телах и в частности на крыле самолета. Исследования проводятся в лабораторных и натурных условиях, так как на явление перехода влияют не только скорость набегающего потока и размер модели, но и степень возмущенности потока или, как принято говорить, „начальная турбулентность“ потока. В настоящей главе мы излагаем некоторые основные результаты современных исследований по вопросу о переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

§ 1. Переход ламинарного движения в турбулентное. Роль числа Рейнольдса в общих условиях устойчивости ламинарного движения

При постановке задач аэрогидродинамики всегда приходится делать упрощающие предположения и допущения. Собственно говоря, постановка задачи как раз и заключается в том, что мы устраниваемся от тех или других допущений и упрощений, без которых решение задачи невозможно. Таковы известные и общепринятые допущения потенциальности потока в теории идеальной жидкости, предположения стационарности движения и мн. др. Наряду с допущениями, относящимися к самим дифференциальным уравнениям задачи, мы принуждены, обычно, упрощать и граничные (начальные) условия, опускать влияние отдельных частей поверхности русла (так например, рассматривая поток в рабочем участке трубы, отвлекаемся от истории потока при его прохождении через завороты, лопатки, винт и т. п.).

На основании принятых допущений строится решение задачи и это решение может быть совершенно строгим, единственным решением поставленной задачи, но, конечно, лишь задачи, ограниченной принятыми допущениями. Проверяя на опыте теоретическое решение, замечаем, что оно в одних случаях хорошо подтверждается, а в других — нет. Анализ причин несовпадения теории с опытом приводит к заключению, что в отрицательных случаях оказываются неправильными принятые допущения. Так например, в хорошо известном явлении течения жидкости по круглой цилиндрической трубе с гладкими стенками, согласно теории ламинарного движения, профиль скоростей должен быть параболическим, коэффициент сопротивления — обратно пропорционален числу Рейнольдса и т. д.; это и наблюдается при достаточно малых рейнольдсовых числах

$$R = \frac{\text{средн. скорость} \times \text{диаметр}}{\text{кinem. коэфф. вязкости}} < 2300.$$

При больших рейнольдсовых числах не имеется тех же законов скоростей и сопротивления; движение изменяет свой характер по существу

¹⁾ См. например, *Б. Т. Горощенко*. Скорость самолета. Оборонгиз, Москва, 1938, стр. 219 и др.

и начинает подчиняться совершенно другим закономерностям. Означает ли это, что найденное ранее решение (формулы Пуазейля) не является единственным в математическом смысле этого слова? Нет, при поставленных ограничениях стационарности решения и безграничности трубы по длине, решение Пуазейля является единственным решением, но новый режим движения (турбулентный режим), как показывает опыт, уже не стационарен и обладает тем свойством, что возникшие на входе или в других каких-нибудь областях трубы возмущения не затухают, а, наоборот, пронизывают все движение в трубе, создавая беспорядочность и хаотичность движения. Таким образом в одной и той же трубе могут происходить два совершенно различных движения: одно — простое, ламинарное движение, характеризующееся с внешней стороны почти полной прямолинейностью и отчетливостью отдельных струек (вспомнить классический опыт Рейнольдса), другой — весьма сложный, хаотический режим с причудливо перепутанными и размытыми струями — турбулентный режим.

Можно с общемеханической точки зрения представить причины перехода ламинарного движения в турбулентное следующим образом. Не всякое, удовлетворяющее уравнениям механики, движение может наблюдаться в природе. Для того, чтобы можно было наблюдать некоторое явление, оно не только должно существовать, но и должно быть устойчивым; в противном случае вероятность сколько-нибудь длительного его существования весьма мала, и мы не сможем явление наблюдать. Поясним это простейшим примером. Качение шарика по лезвию ножа является вполне возможным и мыслимым, но мы почти никогда такое качение осуществить не сможем, так как движение это неустойчиво — шарик соскальзывает с лезвия. В некоторых случаях движения механических систем можно указать совокупность тех условий, при выполнении которых движение будет устойчиво и, следовательно, наблюдаться на опыте; при нарушении этих условий движение нарушается и переходит в другой устойчивый режим или совершает некоторое длительное переходное движение. Наличие областей устойчивости и неустойчивости движений является хорошо установленным фактом и указание границ этих областей представляет одну из самых важных и сложных задач современной механики.

Вопрос об устойчивости или неустойчивости заданного движения особенно еще усложняется тем, что проявление неустойчивости зависит часто от величины и характера налагаемых возмущений. Так например, при наличии малых возмущений движение может мало уклоняться от рассматриваемого движения и быть в силу этого принятым как устойчивое; наоборот, при действии конечных по величине возмущений исследуемый на устойчивость режим движения срывается и, следовательно, в конечном счете движение оказывается неустойчивым. Точно также, например, движение может быть устойчивым по отношению к возмущениям малой частоты и оказаться неустойчивым для высокочастотных возмущений и т. д.

Возвращаясь к примеру движения жидкости в цилиндрической трубе, укажем, что наблюдение говорит за существование устойчивых и неустойчивых областей ламинарного движения в трубе.

Если внимательнее приглядеться к движению жидкости в цилиндрической трубе, то можно заметить следующее. При достаточно малых скоростях, соответствующих при данном диаметре трубы и заданной жидкости условию, чтобы число Рейнольдса было меньше своего критического значения (примерно 2300), наблюдается ламинарный режим. Не следует думать, что при этом движение в точности стационарно и линии тока (они же и траектории частиц) являются прямыми линиями. На самом деле, в силу бесчисленного количества различных причин, на стационарное ламинарное движение накладываются малые возмущения и возмущения конечных размеров. Эти возмущения наблюдаются — мы видим, например, что подкрашенная струйка, пущенная в ламинарный поток, временами становится извилистой, по ней проходят отдельные волны; то же показывают и измерители скорости, регистрирующие отдельные колебания, накладываемые на среднее показание. Однако при малых рейнольдсовых числах эти возмущения редки и, возникнув, быстро затухают. Ламинарный режим устойчив и отдельные случайно появляющиеся отклонения не могут изменить общие характеристики режима: профиль скоростей, сопротивление, расход и т. д.

Можно заметить, что с ростом рейнольдсова числа и приближением его к нижнему значению критического числа (2300), поток становится все более и более беспокойным, измеритель скорости все чаще и чаще отмечает колебания скорости. Наконец, наступает срыв ламинарного режима, поток пульсирует, линии тока хаотически переплетаются, движение становится турбулентным.

Важно подчеркнуть, что срыв ламинарного режима не всегда происходит при нижнем значении $R_{кр} = 2300$. Если свести к минимуму случайные возмущения, то ламинарный режим можно затянуть до рейнольдсовых чисел, почти в двадцать и больше раз превышающих $R_{кр}$. Поэтому, обычно, говорят о двух предельных критических рейнольдсовых числах: нижнем — ниже которого при данном русле не может быть турбулентного режима и верхнем — выше которого не может быть ламинарного режима. Нижний предел довольно устойчив, верхний же, повидимому, может быть значительно увеличен путем улучшения входа в трубу и введения различных успокоителей. До достижения нижнего критического числа возмущения в потоке затухают, и основной ламинарный режим устойчив; при переходе потока на нижнее критическое рейнольдсово число появившиеся возмущения не только не затухают, а, наоборот, начинают развиваться, что характерно для неустойчивого движения.

Изложенные здесь обстоятельства хорошо известны из общего курса гидродинамики ¹⁾. К сожалению, теория устойчивости ламинарного режима, как и вообще вся теория устойчивости движения деформирующихся тел и, в частности, устойчивости движения жидкости, еще крайне мало разработана. Задача о теоретическом определении нижнего критического числа до сих пор не решена. Не будем приводить ряда

¹⁾ См., например, изложение вопроса о переходе ламинарного течения в турбулентное, данное во втором томе замечательных лекций Прайдтля, изданных О. Титъенсом (русский перевод издан в 1935 г.).

замечательных работ в этом направлении, отсылаем интересующихся к имеющимся обзорам и оригинальным работам по теории устойчивости ламинарного режима и возникновения турбулентности¹⁾.

Для дальнейшего имеет значение тот факт, что критическое число Рейнольдса представляет не единственный определяющий параметр перехода ламинарного движения в турбулентное; в случае цилиндрической трубы, о котором была речь в настоящем параграфе, кроме рейнольдсова числа играло роль наличие более или менее значительных наложенных возмущений, а также и тип этих возмущений (масштаб их, частота, интенсивность). Далее увидим, что кроме этих факторов основное значение имеет и вид самого ламинарного течения, переход которого в турбулентное состояние изучается.

§ 2. Переход ламинарного слоя в турбулентный. Критическое рейнольдсово число пограничного слоя. Устойчивость ламинарного слоя в конфузорной и диффузорной части слоя

Переход ламинарного движения в турбулентное в случае цилиндрической трубы, как известно, был замечен и экспериментально исследован еще в первой половине XIX в. Хагеном, затем Дарси и, наконец, Рейнольдсом в его классической работе 1883 г.²⁾ Что же касается других случаев течений и, в частности, особо интересующего нас вопроса о переходе ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое, то они были исследованы гораздо позже.

Объясняя наблюдаемое Эйфелем в 1912 г. резкое падение коэффициента сопротивления шара при рейнольдсовых числах порядка $2 \cdot 10^5$, в настоящее время называемое „кризисом“ сопротивления (подробно об этом будет рассказано ниже), Прандтль, повидимому, впервые в 1914 г. обратил внимание на существование турбулентного режима в пограничном слое³⁾ и на влияние перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на обтекаемость и сопротивление тел.

Первым специальным, существенным для дальнейшего развития, исследованием по этому вопросу явилось экспериментальное исследование Бюргерса и Ван-дер-Хееге-Цайнена⁴⁾, проведенное на

¹⁾ Изложение важнейших из этих работ можно найти в гл. IV второго тома курса *Кибеля, Кочина и Розе*, неоднократно уже ранее цитированного. Там же см. ссылки на оригинальные работы. Рекомендуем также последний обзор *Прандтля*, помещенный в третьем томе „Аэродинамики“ В. Дюрэнда (Обorongиз, 1939). W. Durand, J. Springer, 1935. См. также Г. И. Петров. Об устойчивости вихревых слоев, Труды ЦАГИ, вып. 304, 1937 и того же автора „О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности“, Труды ЦАГИ, вып. 345, 1938.

²⁾ O. Reynolds. An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. Phil. Trans. Roy. Soc. London. (1883).

³⁾ L. Prandtl. Über den Luftwiderstand von Kugeln. Göttinger Nachrichten, S. 177 (1914).

⁴⁾ J. M. Burgers. Proc. of the First Intern. Congr. for Applied Mechanics Delft, 1924. P. 113. J. M. Burgers and Van der Heege Zynen. Preliminary measurements of the distribution of the velocity of a fluid in the immediate neighbourhood of a plane smooth surface. Verh. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Deel XIII, № 3, 1924.

пластине, продольно обтекаемой воздушным потоком в аэродинамической трубе.

Наблюдая при помощи теплового анемометра профили скоростей в различных сечениях пограничного слоя на гладкой стеклянной пластине с острым передним краем, Бюргерс заметил, что нормальная производная скорости на стенке, или напряжение трения на стенке, пропорциональное этой производной, при возрастании расстояния от

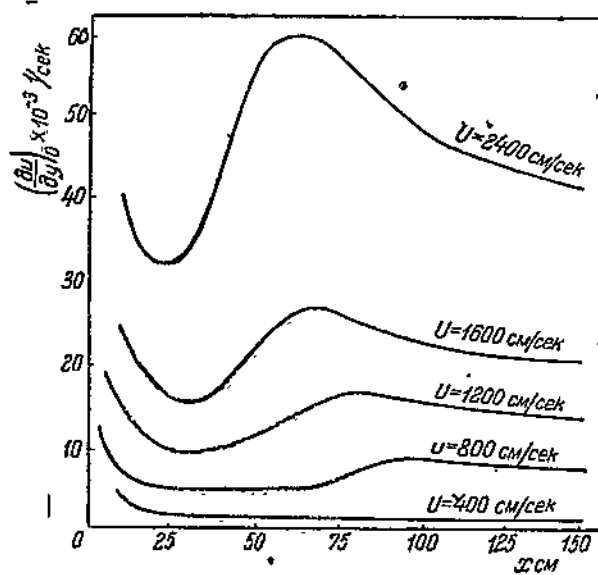


Рис. 56.

переднего края сначала убывает, а затем в некоторой точке начинает внезапно возрастать и после некоторого возрастания вновь убывает. Сравнение с теорией ламинарного пограничного слоя и рассмотрение профилей скорости в сечениях показало, что первый участок убывания напряжения трения соответствует ламинарному режиму, а область минимума перед подъемом кривой — переходу ламинарного пограничного слоя в турбулентный. На рис. 56 приведены кривые Бюргерса,

соответствующие изменению напряжения трения при различных скоростях U_0 набегающего потока. Оставляя в стороне критические замечания, сделанные в § 5 главы I предыдущего отдела, можем считать, что с качественной стороны явление описывается этими кривыми вполне правильно. Введем в рассмотрение наряду с обычным рейнольдсовым числом, отнесенным к длине x участка от передней кромки пластинки, $R_x = \frac{U_0 x}{\nu}$, еще рейнольдсово число пограничного слоя $R_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu}$. Поскольку при ламинарном течении на пластине

$$\delta \approx 5,5 \sqrt{\frac{U_0 x}{\nu}},$$

то можно установить следующую связь между только-что введенными рейнольдсовыми числами:

$$R_\delta = 5,5 \sqrt{R_x}. \quad (2.1)$$

Отмечая значком „кр“ — критические значения величин, можем на основании опытов Бюргера найти $R_{кр}$; в таблице I приведены некоторые числовые данные и средние числа.

ТАБЛИЦА I

U_0 (см/сек)	$x_{кр}$ (см)	$\delta_{кр}$ (см)	$R_{x_{кр}}$	$R_{\delta_{кр}}$	Средние
400	125	1,2	332 000	3 120	$R_{x_{кр}} = 318 000$
800	60	0,55	320 000	2 950	$R_{\delta_{кр}} = 3'150$
1200	34	0,38	268 000	3 000	по формуле (2.1)
1600	30	0,30	318 000	3 180	$R_{\delta_{кр}} =$
2400	22	0,22	350 000	3 480	$= 5,5 \sqrt{318000} = 3100$

По опытам Бюргера $R_{кр} \approx 3000$ по порядку своему близко к критическому рейнольдсовому числу круглой цилиндрической трубы, если условиться (в дальнейшем это будет принято) сопоставлять: скорость на границе пограничного слоя — максимальной осевой скорости в трубе, толщину пограничного слоя — радиусу трубы (при ламинарном режиме в трубе, как известно, скорость на оси в два раза превосходит среднюю скорость по сечению, а радиус трубы в два раза меньше диаметра, так что рейнольдсово число, рассчитанное по средней скорости и диаметру, равно рейнольдсову числу, рассчитанному по максимальной скорости и радиусу).

Однако так же как и в трубе, критическое рейнольдсово число оказывается значительно зависящим от возмущений, входящих в поток. Бюргерс ставил исследуемую пластину на разные расстояния от спрямляющей решетки (honecomb) аэродинамической трубы. Решетка является источником возмущений в потоке, так как, проходя через нее, поток турбулизируется. Образующиеся в следу за планками решетки вихри постепенно затухают и перемешиваются, поэтому, чем дальше от спрямляющей решетки поставлена исследуемая пластина, тем меньшие возмущения будут до нее доходить. Наряду с возмущениями от решетки, наблюдалось влияние турбулизирующей проволоочной сетки (диаметр проволоки — 0,08 см, расстояние между проволоками 0,4 см, сетка квадратная), поставленной непосредственно у переднего края испытуемой пластины, поперек всего сечения трубы. Результаты представлены на рис. 57 и в таблице 2 при одной скорости $U_0 = 800$ см/сек. Через X обозначено расстояние переднего края пластины от турбулизатора (спрямляющей решетки).

ТАБЛИЦА 2

X (см)	$x_{кр}$ (см)	$\delta_{кр}$ (см)	$R_{\delta_{кр}}$	
250	решетка	75	0,75	4100
150		60	0,65	3500
25		22	0,40	2200
0 (сетка)		15	0,30	1650

Критическое рейнольдсово число пограничного слоя значительно зависит от степени возмущенности набегающего на пластину потока.

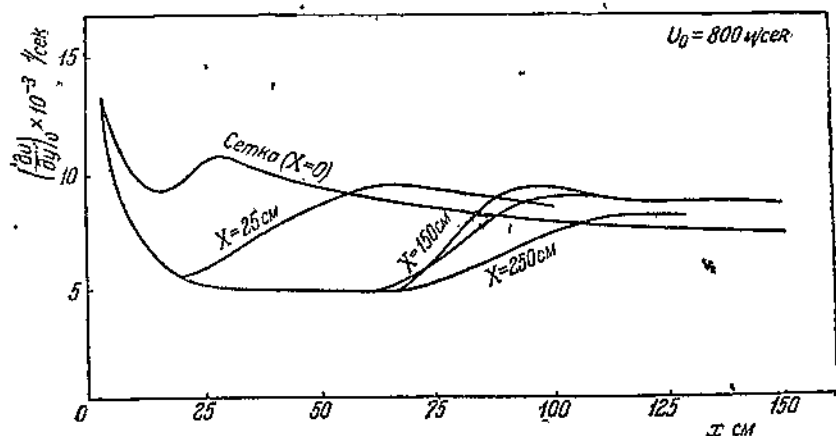


Рис. 57.

При изменении расстояния переднего края пластины до турбулизатора от 25 см до 250 см, $R_{\text{кр}}$ меняется почти в два раза. При $X = 25$ см, $R_{\text{кр}}$ имеет величину около 2000, вдалеке от решетки — около 4000. Турбулизирующая сетка доводит $R_{\text{кр}}$ до 1650. В таких пределах колеблется критическое рейнольдсово число на пластине.

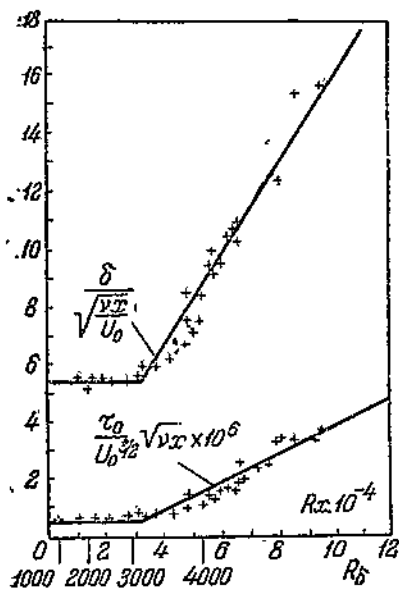


Рис. 58.

Опыты Ханзена (см. § 5, гл. I, предыдущего отдела) подтвердили в общем правильность оценки $R_{\text{кр}}$, сделанной Бюргерсом. Экспериментируя с микротрубками на стеклянной пластине, Ханзен нашел критическое рейнольдсово число пограничного слоя равным, примерно, 3100, причем число это было получено Ханзеном двояким путем — по наблюдению толщины пограничного слоя и по напряжению трения. На рис. 58 по оси абсцисс отложены R_x и R_δ , по оси ординат — величины $\frac{\delta}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$ и $\frac{\tau_0}{U_0^{3/2}} \sqrt{\nu x}$, ко-

торые в ламинарном слое должны быть постоянными, не зависящими от x или R_x . Излом прямых на графике показывает переход от ламинарного режима к турбулентному. Ханзен не изучал влияния возмущений на точку перехода.

Более тщательно и подробно вопрос о переходе ламинарного слоя в турбулентный и о влиянии на этот переход наложенных возмущений изучал Драйден¹⁾ (воздушный поток, продольно обтекаемая пластинка).

В отличие от ранее указанных авторов, Драйден непосредственно измерял отклонения скорости потока в данной точке от средней во времени скорости — так называемые пульсации скорости. В дальнейшем мы подробно остановимся на исследовании природы этих пульсаций, сейчас же укажем лишь, что прибор Драйдена позволял находить среднее квадратичное отклонение скорости, т. е. интеграл по времени, от квадрата разности между истинной и средней скоростью в данной точке за некоторый промежуток времени, деленный на этот промежуток; обозначим, вместе с Драйденом, корень квадратный из этой средней квадратичной через ΔV и примем за меру интенсивности пульсаций (возмущений) в турбулентном потоке выраженное в процентах отношение ΔV к скорости V_0 набегающего на пластину потока или величину

$$K = 100 \frac{\Delta V}{V_0} \% \quad (2.2)$$

Величина эта имеет значение критерия подобия двух турбулентных потоков, а также является одной из наиболее существенных характеристик турбулентного потока, — будем называть ее „числом Кармана“ и обозначать через „ K “ или „ Ka “²⁾.

Драйден находил число K в потоке, набегающем на пластинку, чем характеризовал степень возмущенности самого потока, затем определял число K в различных точках пограничного слоя пластинки; последнее позволяло судить о расположении областей ламинарного и турбулентного движения и о точке перехода.

Было обнаружено, что число K вблизи пластины, начиная с переднего края, гораздо больше, чем вдалеке от нее в набегающем потоке, так что на первый взгляд можно было бы думать, что вообще никакого ламинарного слоя на пластинке нет. Действительно, идеального стационарного ламинарного движения без отклонений (пульсаций) скорости на пластинке нет, как нет его и в трубах³⁾; пульсации существуют, и даже могут быть сравнительно велики, но, как мы уже указывали в предыдущем параграфе, большое значение имеет еще частота пульсаций. Наличие редких по частоте возмущений не может изменить режим в целом. Турбулентный поток, попадая в тонкий пограничный слой вблизи переднего края пластинки, стабилизируется, частота пульсаций резко падает, остаются лишь отдельные, сравнительно с внешним потоком, редкие пульсации, часть которых,

¹⁾ H. L. Dryden. Aerodynamics of Cooling. Aerodynamic Theory edit. by W. Durand, Vol. VI, Div. T, p. 263, а также NACA Rep. N 562 (1936).

²⁾ Л. Г. Лойцянский. О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности. „Прикладная математика и механика“, т. II, № 2, 1934.

³⁾ См., например, В. Del-Nunzio. La distribuzione dei vortici nelle condotte chiuse in regime turbulente e laminare. „Electrotecnica“, № 14, 1931 и другие более ранние работы этого автора. Русский перевод указанной статьи можно найти в „Проблемах турбулентности“ ОНТИ, 1936, стр. 151.

вероятно, происходит от возмущений, создаваемых вихрями, отрывающимися с переднего острого края пластинки. Хотя интенсивность (K) пульсаций и велика, все же, в силу малой частоты (повторяемости) их, режим в передней части пластинки ламинарный, что и наблюдается по средним характеристикам (профили скорости, трение на стенке, толщина пограничного слоя). В дальнейшем, с развитием толщины слоя и ростом рейнольдсова числа пограничного слоя, наступает состояние неустойчивости ламинарного потока и возникают новые возмущения, которые и заполняют турбулентную область пограничного слоя.

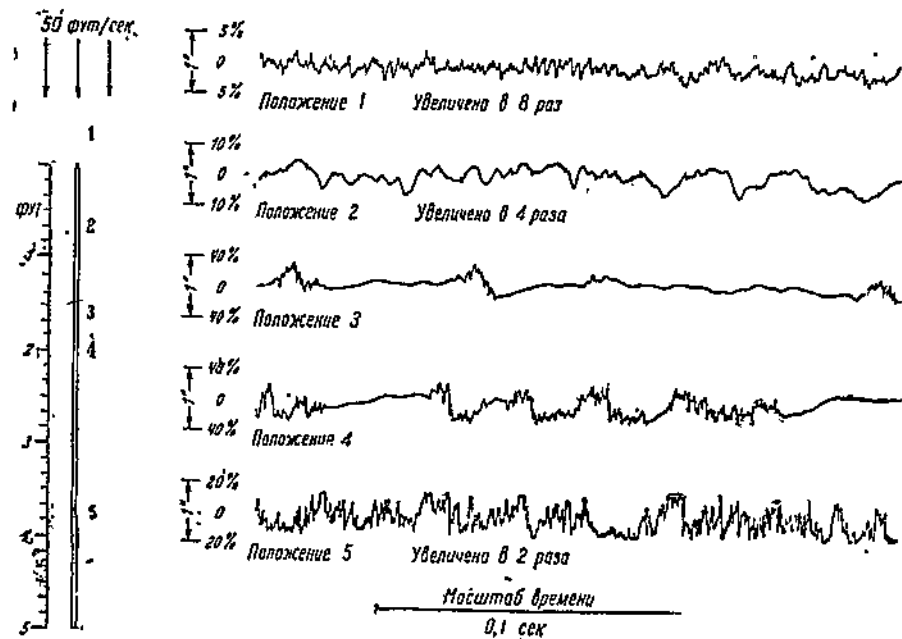


Рис. 59.

На рис. 59 приведены осциллограммы Драйдена пульсаций в пограничном слое на пластинке в различных областях (на рисунке цифры 1, 2, 3, 4, 5) по длине пластины вниз по потоку. Мы видим, что при втором, третьем и четвертом доложении измерителя в области переднего края пластинки пульсации имеют редкий случайный характер, хотя и велики по амплитуде сравнительно с частыми пульсациями набегающего потока, зарегистрированными измерителями (1), помещенным впереди пластинки. Как будет видно из дальнейшего, в указанной области пограничный слой сначала ламинарен, затем начинает переходить в турбулентное состояние.

Обратимся к рассмотрению вопроса о распределении пульсаций внутри пограничного слоя. Ставя сейчас перед собою цель показать влияние возмущенности набегающего потока на точку перехода ламинарного слоя в турбулентный, выберем из результатов опытов Драй-

дена лишь те кривые, которые для нас сейчас интересны. На рис. 60 и 61 показано несколько наиболее характерных кривых, соответствующих геометрическому месту одинаковых по интенсивности пульсаций, т. е. условию $K = \text{const}$. Не приводя изотак, поместим на тех же рисунках лишь одну из них, соответствующую отношению 0,9 осредненной во времени скорости потока в данной точке к скорости набегающего потока. Эта изотака (на рисунках — пунктирная линия) дает приближенное представление о развитии толщины пограничного слоя вдоль пластинки (на самом деле пограничный слой несколько толще). По осям абсцисс и ординат отложены безразмерные координаты точек пограничного слоя (V_0 — скорость набегающего потока, ν — кинематическая вязкость).

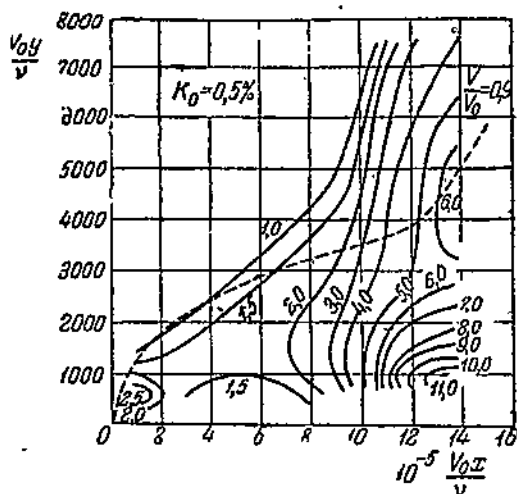


Рис. 60.

На рис. 60 дана картина пульсаций в пограничном слое при интенсивности турбулентности набегающего потока, равной $K_0 = 0.5\%$, на рис. 61 — то же при $K_0 = 3\%$.

Сосредоточим внимание на следующих замечательных фактах. Как видно из графиков, места максимальных пульсаций почти точно совпадают с точками перегиба (вернее перегиба) в границе пограничного слоя, соответствующими переходу ламинарного слоя в турбулентный.

В этой области неустойчивости ламинарного режима возникают весьма мощные пульсации скорости. Интересно отметить, что интенсивность этих пульсаций не находится в непосредственной связи с интенсивностью пульсаций набегающего потока, а зависит от них лишь косвенно. При пульсации $K_0 = 0.5\%$, интенсивность в точке перехода равна почти

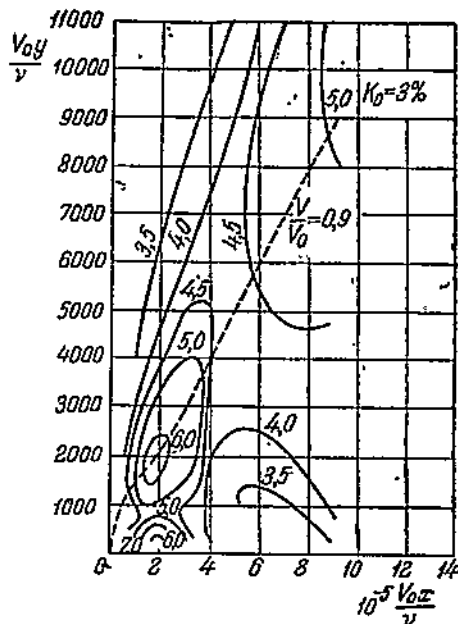


Рис. 61.

связи с интенсивностью пульсаций набегающего потока, а зависит от них лишь косвенно. При пульсации $K_0 = 0.5\%$, интенсивность в точке перехода равна почти

11%, наоборот, при $K_0 = 3\%$ максимальная интенсивность пульсаций в точке перехода — 7%. Эта собственная пульсация пограничного слоя, повидимому, зависит от критического рейнольдсова числа пограничного слоя, т. е. при прочих равных условиях от толщины $\delta_{кр}$ или $x_{кр}$. Начальная пульсация или пульсация набегающего потока влияет на эту собственную пульсацию косвенно, через перемещение точки перехода ламинарного слоя в турбулентный, т. е. через изменение $x_{кр}$. При затягивании явления перехода, при малых начальных K_0 ламинарный слой успевает больше вырасти чем при больших начальных K_0 — этому соответствует нарастание интенсивности пульсаций при срыве ламинарного режима. Вопрос об изменении пульсаций за точкой перехода в турбулентном пограничном слое здесь не рассматривается.

При $K_0 = 0,5\%$ переход ламинарного слоя в турбулентный происходит при $R_{акр} = \frac{V_0 x}{\nu} \approx 1\,100\,000$, что соответствует $R_{\delta_{кр}} \approx 5760$; при $K_0 = 3\%$ переход соответствует $R_{акр} \approx 100\,000$, т. е. $R_{\delta_{кр}} \approx 1740$. Полученные на основании опытов Драйдена критические рейнольдсовы числа пограничного слоя трудно сравнивать с результатами опытов Бюргерса, Ван-дер-Хееге-Цайнена и Ханзена, так как последние не мерили количественно турбулентность набегающего потока в своих трубах. Все же можно заметить, что критическое число $R_{\delta_{кр}}$, полученное Бюргерсом при наличии сетки впереди носика пластинки, весьма близко подходит к $R_{\delta_{кр}}$ при 3% турбулентности. Спрямолиющая решетка в опытах Бюргерса и Ван-дер-Хееге-Цайнена, повидимому, давала турбулентность большую чем $K_0 = 0,5\%$, так как $R_{\delta_{кр}}$ в этих опытах, примерно, в два раза было меньше, чем в опытах Драйдена. К сожалению, имеющихся материалов еще не достаточно, чтобы установить надежную связь между степенью турбулентности набегающего потока K_0 и критическим рейнольдсовым числом пограничного слоя $R_{\delta_{кр}}$. Вопрос этот в настоящее время составляет предмет многих экспериментальных исследований и можно надеяться, что в ближайшее время он будет с надлежащей точностью решен, — мы вернемся еще к вопросу о влиянии „начальной“ турбулентности на положение точки перехода в одном из следующих параграфов.

Из вышеизложенного следует, что на положение точки перехода ламинарного слоя в турбулентный влияют два основных фактора: рейнольдсово число обтекания и степень возмущенности (турбулентности) набегающего потока. Однако эти факторы отнюдь не исчерпывают условия перехода ламинарного слоя в турбулентный.

Теоретические исследования по устойчивости ламинарных течений в пограничном слое, проведенные Титъенсом¹⁾, а также Толмие-

¹⁾ O. Tietjens. Beiträge über die Entstehung der Turbulenz. Göttingen Dissertation 1922, а также ZAMM 5, S. 200, 1925.

ном¹⁾), дали очень низкие значения $R_{\text{кр}}$, но чрезвычайно существенно, что эти исследования показали значительное влияние характера профиля скоростей в ламинарном слое на устойчивость его. А именно, было выяснено, что устойчивость движения сильно зависит от наличия перегибов на профиле скоростей. Было доказано, что при течениях с профилями скоростей, имеющими перегибы, неустойчивость наступает при гораздо меньших рейнольдсовых числах, чем при выпуклых профилях без перегибов. Так например, ламинарная струя в затопленном пространстве, или ламинарный след за телом, как мы видели в предыдущем отделе, имеют профили скоростей (в поперечных сечениях) с перегибами. Эти ламинарные движения крайне неустойчивы. Уже при рейнольдсовых числах (отнесенных к средней скорости и ширине струи),



Рис. 62.

в несколько десятков раз меньших чем в пограничном слое на пластинке или в трубе, наступает неустойчивость, возникающие колебания возрастают и движение из ламинарного становится турбулентным. Этот факт можно наблюдать на многочисленных снятых спектрах струй и других течений. На рис. 62 и 63 приведены спектры водяной струи, полученные при малых и больших скоростях течения путем фотографирования частичек порошка, посыпанного на поверхность воды²⁾. На первом из рисунков, соответствующем малым рейнольдсовым числам, отчетливо видна ламинарная струя с развивающимися в дальнейшем отдельными возмущениями. Образующиеся при этом

¹⁾ W. Tollmien. Ein allgemeines Kriterium der Unstabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Göttinger Nachrichten, V. I, № 5, S. 79—114. См. также Г. И. Петров, Труды ЦАГИ, вып. 345, 1938 и Кибель, Кочин, Розе, ч. II, стр. 467.

²⁾ Flügel. Jahrbuch der Schiffbau Techn. Gesellschaft, 1930.

извилины (волны), в линиях тока также отчетливо видны и соответствуют колебаниям около устойчивого ламинарного движения. При больших скоростях устойчивость нарушается, закономерность колебаний исчезает, и картина размывается. Движение, показанное на рис. 63 турбулентное. Теория турбулентной струи будет изложена в дальнейшем.

Твердая стенка, вообще говоря, стабилизирует поток. Подтормаживая жидкость (скорость на стенке — нуль), стенка тем самым создает выпуклый профиль скоростей, т. е., при прочих равных условиях, устойчивый профиль. В конфузорной части пограничного слоя, как уже известно из предыдущего, профили выпуклы, так что в конфузоре



Рис. 63.

ной части слоя (область ускоряющегося движения жидкости) критические рейнольдсовы числа пограничного слоя велики сравнительно с пластинкой или цилиндрической трубой. Наоборот, в диффузорной части (замедляющееся движение) сразу же за точкой минимума давления профили скорости имеют перегиб, перемещающийся по профилю от стенки к внешней границе слоя, при удалении от точки минимума давления. В диффузорной области пограничного слоя ламинарное движение мало устойчиво и поэтому критические рейнольдсовы числа пограничного слоя здесь сравнительно малы.

То же относится и к потокам в конфузоре и диффузоре. Критические числа Рейнольдса в конфузорах весьма велики по сравнению с критическими числами в диффузорах.

Вопрос о количественном учете влияния распределения скоростей внешнего потока на расположение точки перехода ламинарного слоя в турбулентный будет затронут в конце следующего параграфа, — обратимся к обзору важнейших экспериментальных материалов.

§ 3. Влияние рейнольдсова числа и начальной турбулентности на точку перехода ламинарного слоя в турбулентный в случае обтекания цилиндра, шара и крыла

Уже более десяти лет тому назад А. Фейдж¹⁾ обратил внимание на то, что критическое рейнольдсово число пограничного слоя, $R_{кр}$ имеет на поверхности круглого цилиндра тот же порядок, что и на пластинке. За последнее десятилетие вопрос о переходе ламинарного слоя в турбулентный на различных телах был исследован многими авторами как в лабораторной обстановке, так и в натурных условиях. Изложим некоторые основные результаты этих исследований.

Непосредственное измерение пульсаций скорости в пограничном слое представляет большие экспериментальные трудности. Необходимость определения точки перехода (в дальнейшем эта точка будет обозначаться буквой T — transition point) на различных моделях при варьировании многочисленных параметров (размеры, скорости, углы атаки и т. д.) заставила экспериментаторов пользоваться некоторыми простейшими приемами для определения положения точки T . Как мы уже знаем, Бюргерс, Ханзен и Драйден пользовались для этого толщиной пограничного слоя и наблюдали точку перегиба в границе слоя. Для пластинки такой метод был достаточно удовлетворителен, для криволинейных профилей он уже почти не применим, так как перегиб в границе ламинарного слоя может явиться следствием усиления быстроты возрастания слоя в диффузорной области. Наиболее отчетливой характеристикой точки перехода является напряжение трения на стенке. При удалении от лобовой критической точки, трение в ламинарном слое сначала возрастает, затем начинает спадать. В области перехода, как это имело место, например, в опытах Бюргерса на пластинке (рис. 58), напряжение трения вновь очень значительно возрастает, доходит до максимума и уже после этого продолжается падение напряжения трения в турбулентном пограничном слое. Точка T , где напряжение трения на стенке после падения внутри ламинарного слоя начинает быстро возрастать, и есть точка перехода ламинарного слоя в турбулентный.

Фейдж²⁾ определял напряжение трения, измеряя градиент скорости на стенке помощью так называемой поверхностной трубки, впервые примененной Стэнтоном. Трубка эта представляет собою просто небольшую щель на поверхности тела с козырьком над нею, возвышающимся над поверхностью тела на очень небольшую высоту. В опытах Фейджа высота щели достигала 0,003 дюйма, ширина щели была 0,052 дюйма. Такой трубкой, предварительно проградуировав ее, можно довольно точно мерить градиенты скорости на стенке.

¹⁾ A. Fage. The air-flow around a circular cylinder in the region where the boundary layer separates from the surface. Phil. Mag. Ser. № 42, Febr. 1929.

²⁾ A. Fage. Experiments on a Sphere at Critical Reynolds Numbers. ARC R. & M. № 1766, 1936 (1937). Описание трубки Стэнтона и методы ее калибровки можно найти в работе: A. Fage and V. Falkner. An experimental determination of the intensity of friction on the surface of an aerofoil. ARC. R. & M. № 1315, London 1930 (1931).

На рис. 64 и 65 приведены графики распределения величины $\frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$ по опытам Фейджа¹⁾ на шаре, круговом цилиндре и симметричном крыле Жуковского

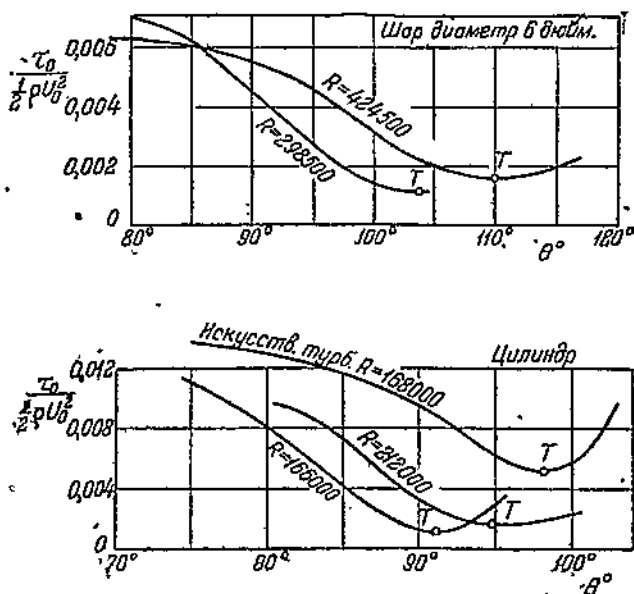


Рис. 64.

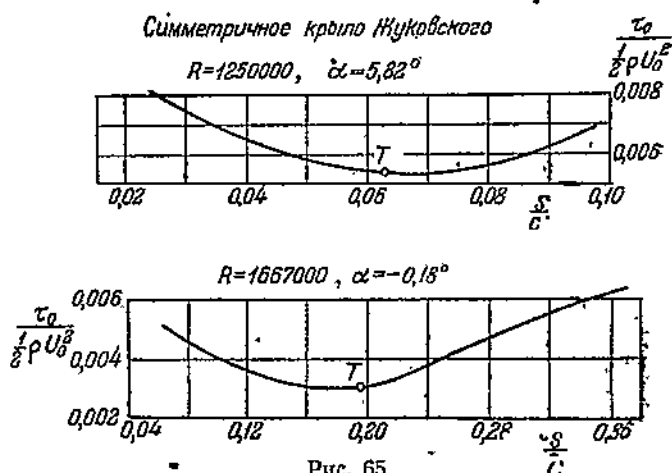


Рис. 65.

тричном крыле Жуковского в нормальном потоке аэродинамической трубы при различных реynольдовых числах и в потоке, искус-

¹⁾ A. Fage. On Reynolds Numbers of Transition. ARC R. & M. № 1765, London 1936 (1937).

ственно турбулизированном решеткой. Как видно из этих графиков, точка перехода ламинарного слоя в турбулентный определяется довольно отчетливо. В отличие от пластинки, где с ростом рейнольдсова числа или начальной турбулентности потока точка перехода приближается к переднему краю, в случае цилиндра и шара мы наблюдаем как раз противоположное явление отодвигания точки перехода назад вниз по потоку при возрастании рейнольдсова числа или турбулентности. Объяснение этого факта можно искать в соответствующем смещении точки минимума давления и всей диффузорной области, в которой совершается переход ламинарного слоя в турбулентный, а также и в перераспределении давлений. На рис. 66 приведен для примера график давлений для круглого цилиндра. Перегибы на кривых давления соответствуют областям перехода ламинарного слоя в турбулентный.

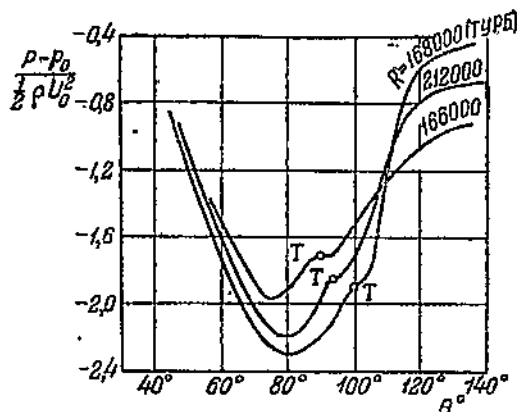


Рис. 66.

Обратимся к рассмотрению значений критических рейнольдсовых чисел пограничного слоя в точках перехода ламинарного слоя в турбулентный. В таблице 3 приведены значения $R_{кр}$ для рассмотренных выше обтеканий, причем сюда же для сравнения помещена и пластинка по Драйдену.

ТАБЛИЦА 3

Название тела	Начальная турбулентность K_0	Рейнольдсово число R	$R_{кр}$	$\frac{U_\infty \delta}{\nu}$	$\frac{U_\infty \delta^*}{\nu}$
Круглый цилиндр . . .	2,20%	212 000	2340	41,5	15,0
	2,20%	166 000	3020	43,3	16,0
	5,30%	168 000	1410	42,0	14,2
Шар	0,80%	424 500	2750	55,5	19,0
	0,80%	298 500	2660	47,0	16,8
Крыло $\alpha = -0,18^\circ$. . .	1,60%	1 667 000	1660	62,5	18,7
	1,60%	1 250 000	1965	61,0	18,5
Пластика	0,50%	$R_{кр} = 1100000$	6290	112,0	33,6
	3,00%	$R_{кр} = 100000$	1896	61,4	18,4

Из рассмотрения таблицы 3 можно сделать вывод, что критические рейнольдсовы числа пограничного слоя для различных тел близки друг к другу. Несколько выпадает из общего ряда величин пластинка Драйдена при малой начальной турбулентности (0,5%). Влияние рейнольдсова числа тела и „начальной“ турбулентности на круглом цилиндре идет в сторону убывания $R_{\delta_{кр}}$ с ростом R или K_0 ; на сфере это имеет место — увеличение рейнольдсова числа приводит к увеличению $R_{\delta_{кр}}$. На крыле при различных углах атаки и несколько различающихся рейнольдсовых числах (подсчитанных по хорде и скорости на бесконечности) $R_{\delta_{кр}}$ одинаковы. Фейдж замечает, что если ввести в рассмотрение вместо скорости U на внешней границе пограничного слоя величину $U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, а вместо δ — толщину „вытеснения“

$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$, то составленные из этих величин рейнольдсовы числа $\frac{U_* \delta^*}{\nu}$, $\frac{U_* \delta}{\nu}$ или $\frac{U_* \delta^*}{\nu}$ дают возможность обобщить результаты

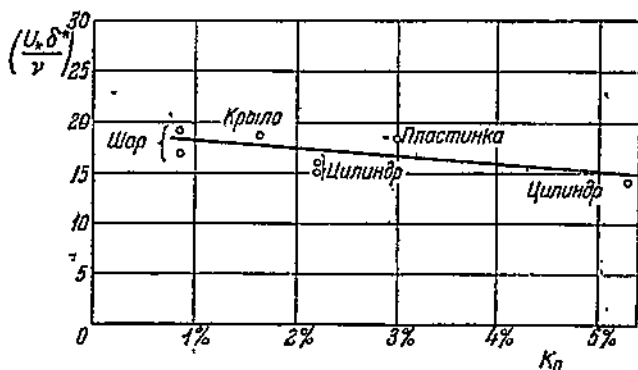


Рис. 67.

опытов над различными телами в одну зависимость условного критического рейнольдсова числа пограничного слоя $\left(\frac{U_* \delta^*}{\nu}\right)$, $\left(\frac{U_* \delta}{\nu}\right)$ или $\left(\frac{U_* \delta^*}{\nu}\right)_{кр}$ от степени начальной турбулентности K_0 . На рис. 67 приведен один из графиков Фейджа для условного критического рейнольдсова числа $R_{\delta_{кр}}^* = \frac{U_* \delta^*}{\nu}$ в функции от K_0 . Малое количество опытных данных не позволяет сделать окончательного суждения о ценности такого выбора критического рейнольдсова числа пограничного слоя. Отметим, что пластинка при $K_0 = 0,5\%$ не ложится на прямую, проведенную между экспериментальными точками. Можно думать, что при стремлении K_0 к очень малым величинам критическое рейнольдсово число пограничного слоя быстро возрастает.

Некоторый свет на этот вопрос могут пролить недавние лётные испытания, проведенные в Англии¹⁾ на самолете „Нэвсон“ (с 14% и 25% профилем крыла и различными покрытиями крыла — фанерным и полированным металлическим). В отчете приведены данные о средних рейнольдсовых числах R полета, рассчитанных по хорде крыла c и об относительных абсциссах точек перехода $\frac{x_{кр}}{c}$. Имея эти данные, можем приблизительно оценить $R_{\delta_{кр}}$ по формуле для пластинки:

$$R_{\delta_{кр}} \approx 5,5 \sqrt{R \cdot \frac{x_{кр}}{c}}.$$

Для 14% профиля по лётным данным при фанерном покрытии оказалось:

$$\frac{x_{кр}}{c} \approx 0,15, R_{\delta_{кр}} = 5500 \text{ при } R = 6,8 \times 10^6 \text{ и } R_{\delta_{кр}} = 6100 \\ \text{при } R = 8,3 \times 10^6.$$

При полированном металлическом крыле:

$$\frac{x_{кр}}{c} \approx 0,3, R_{\delta_{кр}} = 7850 \text{ при } R = 6,8 \times 10^6, \\ \frac{x_{кр}}{c} \approx 0,35, R_{\delta_{кр}} = 9300 \text{ при } R = 8,2 \times 10^6.$$

В отчете приводятся также данные о толщинах пограничного слоя (кстати говоря, по опытам вышеуказанных авторов излом границы пограничного слоя в точке перехода должен быть отчетливо заметен); пересчет $R_{\delta_{кр}}$, произведенный нами по замеренным толщинам слоя, прекрасно подтверждает возможность применения предыдущей формулы с коэффициентом 5,5.

При полете в атмосфере значения критического рейнольдсова числа пограничного слоя могут быть весьма велики, доходя почти до 10^4 . Это объясняется тем, что относительная возмущенность (турбулентность) атмосферы K_0 , определенная отношением пульсаций скорости воздуха (ветра) к скорости самолета, в обычных условиях крайне мала. По некоторым косвенным измерениям, о которых мы в дальнейшем еще скажем, турбулентность атмосферы можно оценить величиной $K_0 < 0,3\%$. При медленных движениях турбулентность атмосферы окажется, наоборот, очень большой.

Натурные $R_{\delta_{кр}}$, как видим, значительно превосходят данное Драйденом для пластинки при $K_0 = 0,5\%$ число $R_{\delta_{кр}} = 6290$.

В условиях искусственной турбулентности (аэродинамические трубы) на расположение точки перехода влияет не только степень начальной турбулентности K_0 , но и характер турбулентного потока, зависящий от сравнительных размеров турбулизирющей решетки (в частности

¹⁾ J. Serby, M. Morgan and E. Cooper. Flight Tests on the Profile Drag of 14% and 25% Thick Wings. ARC R & M № 1826, 1937 (ноябрь).

хонейкомба) и обтекаемого тела. Подробнее об этом будет сказано в заключительной главе книги, где введено понятие масштаба турбулентности, как некоторой геометрической меры возмущений в потоке.

Тэйлор¹⁾ на основании теоретических соображений, которые еще трудно признать достаточно отчетливыми и убедительными, показал, что критическое рейнольдсово число перехода

$$R_{кр} = \frac{Ux_{кр}}{\nu}$$

должно зависеть от комплекса (M — размер ячейки турбулизирующей решетки):

$$K_0 \left(\frac{x_{кр}}{M} \right)^{1/2},$$

который часто называют параметром Тэйлора. Введение этого параметра позволяет объединить в одну кривую результаты различных опытов (см., например, рис. 159 в конце книги). Вместо величины M можно ввести другую величину L , характеризующую геометрический масштаб турбулентных возмущений в потоке; определение этой величины приведено в заключительной главе этой книги, углубляющей общие представления о турбулентном потоке. Там же мы возвращаемся и к вопросу о влиянии степени турбулентности потока на расположение точки перехода.

В приведенных опытах Фейджа точка перехода T лежала за точкой минимума давления вниз по потоку. Даже при сравнительно большом рейнольдсовом числе шара $R=424500$, когда точка минимума давления была на угле $\theta=90^\circ$, точке перехода соответствовал угол $\theta=110^\circ$. Таким образом, точка перехода ламинарного слоя в турбулентный лежит в диффузорной части пограничного слоя, так как в конфузорной части слоя профили скорости весьма устойчивы и нужны очень большие критические числа Рейнольдса пограничного слоя или очень значительная степень турбулентности набегающего потока, чтобы переход из ламинарного слоя в турбулентный мог произойти.

В настоящее время делаются попытки оценить количественно влияние формы крыла и его расположения в потоке (угла атаки) на расположение точки перехода ламинарного слоя в турбулентный. Для гладких крыльев явление определяется характером распределения скоростей внешнего потока по крылу или, что все равно, распределением давлений. Для составления параметров, отображающих влияние этого распределения, можно рассуждать следующим образом.

¹⁾ G. J. Taylor. Effect of Turbulence on boundary layer. Proc. Roy. Soc. A, 156, № 888, 1936. См. также: Е. М. Минский. К вопросу о влиянии турбулентности набегающего потока на пограничный слой. Труды ЦАГИ № 290, 1936 и только что появившуюся заметку: K. Wieghardt. Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagpunkt. ZAMM. Bd. 20, H. 1 (Febr. 1940).

Чем больше диффузорность в пограничном слое на крыле за точкой минимума давления, тем менее устойчив ламинарный слой и тем ближе точка перехода (T) к точке минимума давлений (M). С другой стороны, степень диффузорности связана с крутизной кривой падения скорости внешнего потока (возрастания давления) за точкой максимальной скорости (минимума давления). Последнюю можно связать с расположением теоретической (расчетной) точки отрыва ламинарного пограничного слоя (S), отрыва, который произошел бы, если бы слой не стал турбулентным. Напоминаем, что при приближении к месту отрыва ламинарного слоя профили скорости в пограничном слое (начиная с точки минимума давления) становятся все более и более неустойчивыми (профили с перегибами).

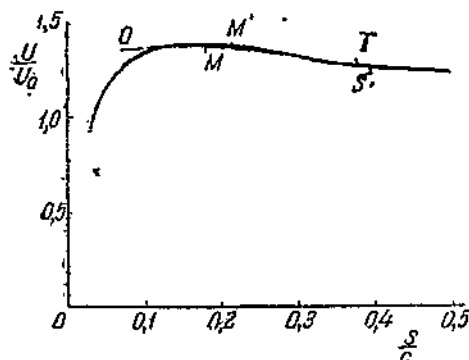


Рис. 68.

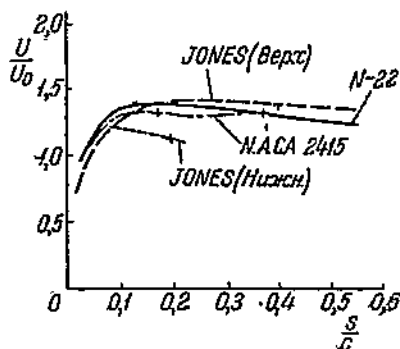


Рис. 69.

Если условиться обозначать длины дуг от критической точки на лбу крыла до данной точки на крыле через s с подстрочным индексом, отмечающим данную точку, то можно утверждать, что величины s_T и s_S должны быть между собою как то связаны.

Введем безразмерную величину s^* , равную

$$s^* = \frac{s_T - s_M}{s_S - s_M},$$

и рейнольдсово число

$$R^* = \frac{U_m s_S}{\nu},$$

где U_m — максимальная скорость. Можно предположить, что зависимость s^* от R^* будет для разных крыльев при одной и той же степени турбулентности потока примерно одинаковой.

Ж. Бикнел¹⁾ заменял (рис. 68) профиль скорости внешнего потока на участке до минимума давления прямолинейным отрез-

¹⁾ J. Bicknell. The correlation of boundary layer transition data. Journ. of the Aeronaut. Sciences. Vol. 6, № 5, March, 1939. Подробнее см. A. V. Doenhoff. A method of rapidly estimating the position of the laminar separation point. NACA Techn. Note № 671, 1938.

ком OM' , параллельным оси абсцисс, и соответствующим обтеканию некоторой эквивалентной с точки зрения нарастания слоя пластинки длины $s_{M'} - s_0$; точка минимума давления M при этом смешалась в положение M' , а началу пластинки соответствовала точка O . В диффузорной части профиль заменялся прямой $M'S$ (на рис. 68 сплошной линией показан действительный профиль, штрихами — приближенный, состоящий из прямолинейных отрезков). Пользуясь этим упрощенным приемом, Биксел обработал опыты Джонса¹⁾ и др. На рис. 69 приводятся кривые распределения скоростей внешнего потока U , относенных к скорости набегающего U_0 ; по оси абсцисс отложены дуги в частях хорды крыла (опыты Джонса проводились на верхней и нижней поверхностях крыла).

Вертикальные штрихи показывают расположение точки перехода T по опытным данным. По этим кривым определялось s_T и вычислялось (по ранее указанному методу) значение s_c , соответствующее возможному ламинарному отрыву. За s^* было принято выражение:

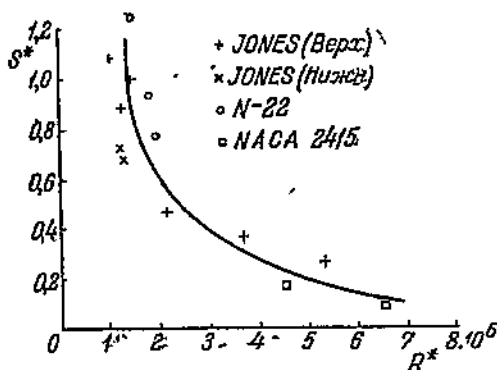


Рис. 70.

$$s^* = \frac{s_T - s_{M'}}{s_S - s_{M'}}$$

а за реинольдсово число

$$R^* = \frac{(s_S - s_0) \bar{U}}{\nu}$$

где $\bar{U}$ — среднее значение скорости внешнего потока на участке OS . При этом, как видно из рис. 70, точки, относящиеся к различным крыльям, сравнительно хорошо ложатся на одну и ту же кривую. При

$R^* \approx 1,4 \cdot 10^6$ точка перехода T совпадает с точкой ламинарного отрыва S , с ростом R^* точка перехода приближается к точке минимума давления.

Выбранные параметры, конечно, не единственно возможные; наоборот, они представляют собой лишь одну из первых попыток учета влияния распределения давления на положение точки перехода ламинарного слоя в турбулентный.

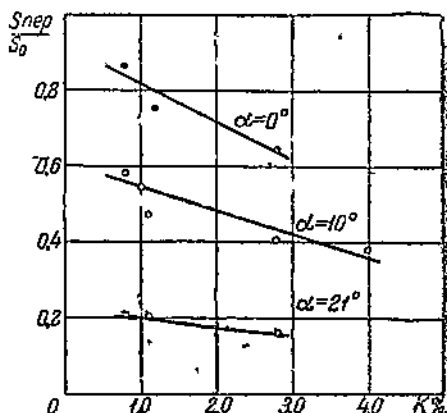
В условиях искусственной турбулентности аэродинамических труб наряду с только-что введенными параметрами имеют значение параметры Кармана и Тэйлора, учитывающие степень турбулентности и влияние размера областей турбулентных возмущений (геометрического масштаба турбулентности). При этом вместо одной кривой, показанной на рис. 70, придется вычертить семейство кривых, зависящих от параметра Кармана и Тэйлора.

¹⁾ B. Melvill Jones, Flight experiments on the boundary layer. Journ. of the Aeron. Sciences, Vol. 5, № 3, 1938.

В дальнейшем мы увидим, да это ясно и из предыдущих диаграмм распределения напряжения трения, что в турбулентном пограничном слое трение, а, следовательно, и вообще сопротивление, больше чем в ламинарном слое. В связи с этим одной из задач конструктора скоростного самолета является выбор таких профилей крыльев и фюзеляжа, у которых линия минимума давления отнесена по возможности назад вниз по потоку, но, конечно, не настолько, чтобы профиль стал не обтекаемым или слишком уменьшился конфузورный эффект, полезный для устойчивости ламинарного слоя. С этой точки зрения ясно также вредное влияние интерференции крыла и фюзеляжа. Как мы видели в конце второго отдела, интерференция приводит к уменьшению напряжения трения, т. е. как будто к положительному результату, на самом же деле это уменьшение напряжения имеет следствием приближение линии отрыва к точке минимума давления, а, следовательно, практически, к преждевременной неустойчивости и, в конечном счете, турбулентности слоя.

Недавно Е. М. Минский (ЦАГИ)¹⁾ опубликовал результаты своих интересных опытов по влиянию турбулентности набегающего потока и перепада давлений на точку перехода по верхней поверхности крыла Clarc-Y с относительной толщиной 14% . Мы приводим основной график Е. М. Минского на рис. 71. По оси абсцисс отложена степень турбулентности, по оси ординат — отношение расстояния (по дуге профиля) точки перехода ламинарного слоя в турбулентный от передней кромки к длине дуги верхней поверхности. Из графика отчетливо видно перемещение точки перехода вверх по потоку с повышением турбулентности и увеличением угла атаки α .

Рис. 71.



Любопытны также новые американские опыты в трубе малой турбулентности ($\approx 0,2\%$) по определению положения точки перехода в конфузоре и диффузоре²⁾. В конце книги приводятся некоторые результаты других опытов.

В заключение укажем, что наши знания о причинах и условиях перехода ламинарного слоя в турбулентный еще весьма недостаточны. Необходимо много экспериментировать, прежде чем можно будет сделать сколько-нибудь обоснованные теоретические выводы о протекании этого важного явления.

¹⁾ Доклад Е. М. Минского (ЦАГИ) на конференции по физической аэродинамике (май 1939 г. Техника воздушного флота №№ 7—8, 1939 г. стр. 7). См. также Е. М. Минский, Влияние турбулентности набегающего потока на переход. Труды ЦАГИ, вып. 415, 1939.

²⁾ E. A. Wright and G. W. Bailey, Laminar Frictional Resistance with Pressure Gradient. Journ. Aeron. Sc. Vol. 6, № 12, October 1939.

§ 4. Явление „кризиса“ сопротивления плохо обтекаемых тел; влияние начальной турбулентности на „кризис“

Четверть века тому назад Эйфель¹⁾ обратил внимание на то, что при обдувке шара в области наличия квадратичного закона сопротивления шара при некоторой скорости начинается быстрое падение сопротивления шара, а затем устанавливается сопротивление, почти в четыре раза меньшее предыдущего (рис. 72). Так как указанное падение сопротивления происходит в сравнительно узком интервале рейнولدсовых чисел ($1 \cdot 10^6 — 3 \cdot 10^6$), то естественно в этом случае говорить о „кризисе“ сопротивления. Явление кризиса наблюдается не

только на шаре, но и на всех других плохо обтекаемых телах, а также и на крыле при больших углах атаки. Прандтль²⁾ первый связал явление кризиса сопротивления с явлением перехода ламинарного слоя в турбулентное состояние, показав, что кризис можно получить и при малых скоростях, если искусственно протурбулизовать пограничный слой, поместив в него проволочку (на шаре проволочное кольцо). Последующие многочисленные опыты показали, что в полном

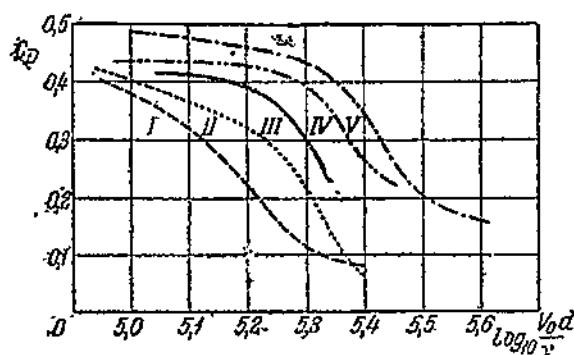


Рис. 72.

I	— 4 1/2 ф. труба за раб. сеч.; труб. 2,3%
II	— " " раб. сеч. " 1,6%
III	— " " до раб. сеч. " 1,2%
IV	— 10 ф. труба; раб. сеч.; " 1,0%
V	— 3 ф. " " " 0,5%

согласии с теорией подобия явление кризиса начинается при определенном рейнولدсовом числе, но это число, в свою очередь, зависит от многих причин, из которых, повидимому, самой главной является степень турбулентности набегающего потока, т. е. начальная турбулентность, а затем — степень отделки поверхности тела (шероховатость поверхности), относительный размер тела и геометрического масштаба возмущений в потоке и др.³⁾ На рис. 72 приводим серию кривых сопротивления шара в зависимости от рейнольдсова числа, снятую при продувках шара в различных трубах и различных пунктах одной и той же трубы; степень турбулентности указана на рисунке⁴⁾.

¹⁾ G. Eiffel. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, Vol. 155, p. 1597, 1912.

²⁾ L. Prandtl. Über den Luftwiderstand von Kugeln. Göttinger Nachrichten. S. 177, 1914.

³⁾ Л. Г. Лойцянский. Проблема сопротивления в свете современных взглядов физической аэродинамики. Труды III Всесоюзной конференции по аэродинамике, Москва, ЦАГИ, 1933 г.

⁴⁾ H. Dryden and A. Kuethe. Effect of Turbulence in Wind Tunnel Measurements. NACA, Rep. № 342.

Чтобы понять механизм явления кризиса сопротивления, остановимся на рассмотрении какого-нибудь одного тела, например шара, причем изучим его обтекание при различных рейнольдсовых числах, но одной и той же степени турбулентности. Исследование облегчается тем опытным фактом, что степень турбулентности в трубе почти не зависит от рейнольдсовых чисел течения, а, главным образом, от конструкции трубы и расположения рабочего участка.

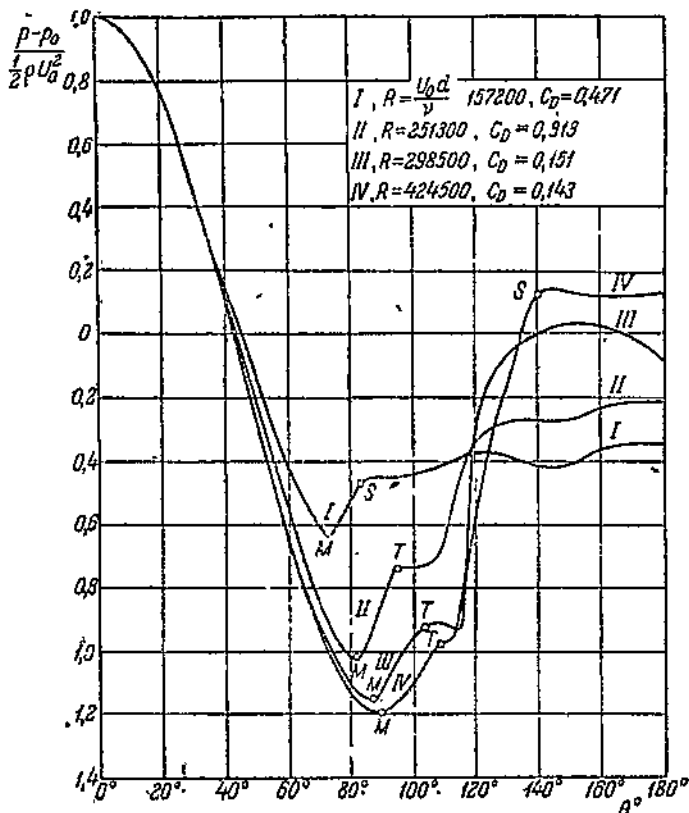


Рис. 73.

Наиболее обстоятельно обтекание шара в области кризиса было изучено в последнее время Фейджем¹⁾. Не останавливаясь на весьма интересных деталях эксперимента, за которыми отсылаем к оригиналу, укажем, что опыты проводились с полым шаром диаметром 6 дюймов, подвешенным в рабочем участке аэродинамической трубы за стержень, выходящий из кормовой части шара. Поверхность шара по горизонтальному кругу имела ряд отверстий, соединенных трубочками, проходящими внутри сферы через стержень, с микроманометрами. Распределение давлений по сфере показано на рис. 73 (экспериментальные точки

¹⁾ A. Fage. Experiments on a Sphere at Critical Reynolds Numbers. ARC, R & M, № 1/66, 1937.

опущены, укажем, что кривые точно с ними совпадают). По оси ординат отложено отношение $\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}$, где p — давление в точке на поверхности шара, p_0 — давление в струе вдалеке от шара, U_0 — скорость набегающей струи; по оси абсцисс отложен угол θ° , определяющий расположение точки на поверхности шара.

Кривые весьма показательны. При $R=157\,200$ пограничный слой до точки отрыва его S , соответствующей углу $\theta_S=83^\circ$, ламинарен. Угол отрыва может быть рассчитан теоретически методом Польгаузена или Х. Лайон¹⁾, расчет хорошо совпадает с опытом.

Положение точки отрыва до тех пор, пока отрывается ламинарный слой, от реинольдсова числа не зависит; действительно, при меньших реинольдсовых числах обтекание шара и картина распределения давлений на нем устойчиво сохраняются (конечно, в пределах реинольдсовых чисел, для которых справедлива теория ламинарного пограничного слоя, т. е. не при очень малых реинольдсовых числах).

Сорвавшийся ламинарный пограничный слой ведет себя, примерно, так, как свободная струя в затопленном пространстве (вначале, т. е. в непосредственной близости от места отрыва, стенка несколько стабилизирует струю). Как ранее указано, струя мало устойчива и ламинарное движение в ней переходит в турбулентное при меньших реинольдсовых числах, чем

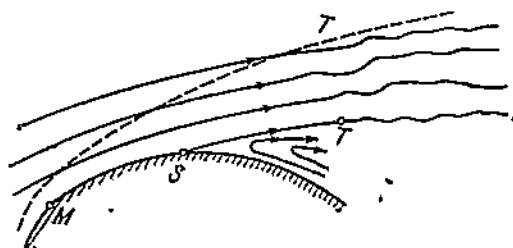


Рис. 73.

в пограничном слое. Поэтому за точкой отрыва ламинарного слоя S (рис. 74) где-то в сорвавшейся струе произойдет переход в турбулентный слой (струю). Точка T перехода ламинарной струи в турбулентную будет с ростом реинольдсова числа перемещаться назад к точке отрыва S . При некотором реинольдсовом числе R точка T совпадает с S , и пограничный слой вблизи отрыва станет турбулентным. Картина обтекания изменится. Наличие турбулентного перемешивания сорвавшегося слоя с ранее отчетливо обозначавшимся кормовым обратным течением, с одной стороны, и, усилившееся вследствие того же обмена (перемешивания) увлечение струи внешним потоком, с другой, приведет к тому, что точка отрыва переместится вниз по течению. Это повлечет за собой значительное улучшение обтекания тела, а следовательно, перемещение вниз по потоку точки минимума давления M . Струя прилипнет к поверхности тела и станет вновь пограничным слоем до некоторой новой точки отрыва уже турбулентного слоя. При новом режиме обтекания точка перехода T лежит выше по потоку, чем точка отрыва S . В связи с улучшенным обтеканием происходит

¹⁾ См. *Tomotika*. The laminar boundary layer on the surface of a sphere in uniform stream. ARC, R & M, № 1678, 1935 (1936).

уменьшение сопротивления давлений, которое весьма значительно, и, как уже известно, для шара достигает почти 400%.

Описанный только что процесс и является „кризисом“ сопротивления плохо обтекаемых тел. На рис. 73 представлена картина изменения распределений давлений на шаре в области „кризиса“. Видим, что при $R=157\,200$ точка минимума давлений M находится, примерно, на 72° от лобовой точки разветвления потока, а отрыв S происходит в ламинарной области при 83° , затем начинается „кризис“. При $R=251\,300$ точка M — на 83° и, примерно, на 92° начинается переход ламинарного слоя в турбулентный, отрыв S происходит где-то вблизи 120° уже в турбулентной области пограничного слоя. Дальнейший рост рейнольдсова числа R до $298\,500$ приводит к смещению точки M минимума давления к 87° , точка перехода T достигает 105° , точка отрыва также отодвигается назад. При $R=424\,500$ кризис уже закончился. Точка M приближается к углу 90° , соответствующему случаю идеального обтекания шара. Замечательно, что давление в точке M по величине почти достигает давления в случае идеального обтекания. В самом деле, как известно, при теоретическом обтекании, по теореме Бернулли:

$$U_m = \frac{3}{2} U_0, \quad \frac{p_m - p_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = 1 - \frac{9}{4} = -1,25,$$

по опытам Фейджа, при $R=424\,500$,

$$\frac{p_m - p_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = -1,2.$$

Точка перехода T лежит приблизительно, на 110° , отрыв S происходит почти на 140° . Определение отрыва турбулентного слоя крайне затруднительно, так как все спектры сильно размыты. Метод поверхностных трубок, примененный Фейджем, дает нулевое трение вблизи 140° (результат этот получен путем экстраполяции кривой трения).

Аналогичная картина наблюдается и на круглом цилиндре, исследованном с точки зрения явления кризиса Фейджем в 1929 г.¹⁾

Обратим теперь внимание на кормовую часть тела. Как это следует, например, из кривых Фейджа (рис. 75), давление в кормовой части тела в области рейнольдсовых чисел, соответствующих кризису, повышается с ростом рейнольдсовых чисел. Видно, что в пределах кризиса относительная разность давлений $\frac{p_k - p_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$, где p_k — среднее давление в кормовой части цилиндра, изменяется от значения — 0,4 до почти 0,2. Тенденция увеличения давления совершенно естественна и связана, очевидно, с улучшением обтекания тела и, следовательно, с более полным восстановлением давления в кормовой части лобового его значения. В случае идеального безотрывного обтекания, в крити-

¹⁾ См. ранее цитированную работу, помещенную в Phil. Magaz. № 42.

ческой точке смыкания потока $p_k - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2$ и относительное давление при $\theta = 180^\circ$ должно было бы равняться единице, так же как и в точке $\theta = 0$.

Явление кризиса с характерными для него вышеперечисленными процессами изменения сопротивления, смещения точки минимума давления и других точек, а также и изменения давления в кормовой части тела, представляет весьма устойчивое и определенное явление. Многочисленные, частью уже выше изложенные, заграничные опыты, а также и наши советские¹⁾ очень хорошо совпадают между собой. На рис. 75

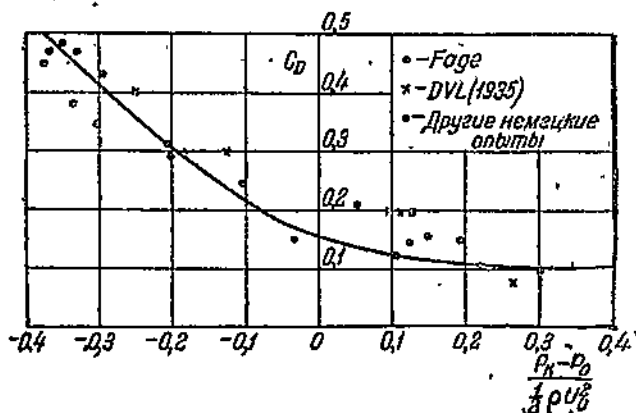


Рис. 75.

приводим сводную диаграмму связи между коэффициентом сопротивления шара C_D и относительным падением давления $\frac{p_k - p_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$ по опытам

Фейджа, Хёрнера²⁾ и др.

Наблюдаемое распределение давлений оказывается однозначно зависящим от значения коэффициента сопротивления C_D . Так например, если в различных аэродинамических трубах с различной турбулентностью, при различных рейнольдсовых числах, шар имеет тот же коэффициент сопротивления C_D , то картина распределения давления при этом одна и та же. Явление кризиса, происходящее при продувке тела в данной аэродинамической труб в определенном интервале рейнольдсовых чисел, при повышении начальной турбулентности трубы будет происходить при сниженных значениях рейнольдсовых чисел.

¹⁾ П. П. Красильщиков. Материалы к динамической шкале турбулентности. Техн. заметки ЦАГИ № 82 (1935). Труды ЦАГИ, вып. 268 и 339; по тому же вопросу проводились многочисленные опыты в аэродинамической лаборатории Ленинградского индустриального института доц. Швабом, Кружилыми и др.

²⁾ S. Hoerner. Versuche mit Kugeln betreffend Kennzahl, Turbulenz und Oberflächenbeschaffenheit. Luftfahrtforschung v. XI, № 1, 1935.

Если перед плохо обтекаемым телом, находящимся в режиме обтекания до кризиса, поместить на достаточно близком к нему расстоянии турбулизирующую решетку, то происходит кризис, несмотря на то,

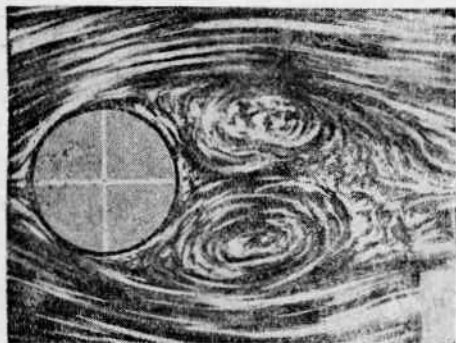


Рис. 76 а.

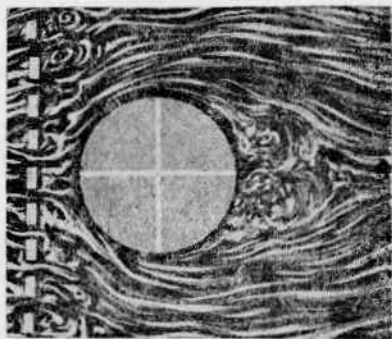


Рис. 76 б.

что рейнольдсовы числа обтекания весьма малы и далеки до критических. Точно также действует и помещение в пограничный слой турбулизирующих проволочек, планок и т. п. Помещение турбулизатора

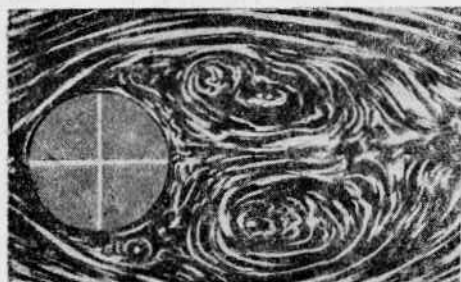


Рис. 77 а.

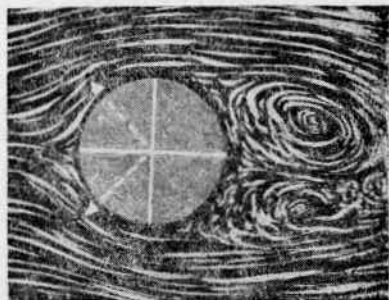


Рис. 77 б.

в такое положение, при котором он сможет протурбулизовать пограничный слой вблизи отрыва, приведет к явлению кризиса. Если турбулизатор поместить слишком близко ко лбу модели так, что вызванные им возмущения успеют затухнуть до точки отрыва, то кризиса не произойдет.¹⁾

На рис. 76 помещены спектры Альборна²⁾ нормального обтекания круглого цилиндра при рейнольдсовых числах, далеких от кризиса (а), и обтекание того же цилиндра при искусственной турбулизации решеткой (б). На рис. 77 приводим для сравнения обтекание

¹⁾ Л. Г. Лойцянский и В. А. Шваб. Прикладная математика и механика, т. 1, вып. 2. 1933 г.

²⁾ T. Ahlborn. Turbulenz und Mechanismus des Widerstandes an Kugeln und Zylindern. Zeitschr. f. techn. Phys., № 10, 1931.

в случае неправильно поставленных турбулизирующих планок (а) и правильно расположенных (б).

Наконец, на рис. 78 можно видеть результат турбулизации пограничного слоя шара проволоочным колечком (опыт Прандтля ¹⁾).

На всех указанных рисунках совершенно отчетливо видно улучшение обтекания тел при кризисе и переход точки отрыва с части поверхности до миделевого сечения шара или цилиндра за мидель. При этом кормовая область обратных течений как по ширине, так и по длине уменьшается. И то и другое объясняется улучшением обтекания и усилением обмена между кормовой областью и внешним потоком.

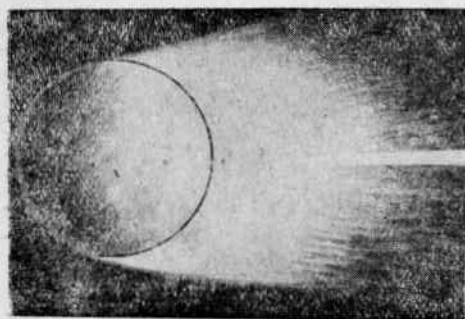


Рис. 78 а.

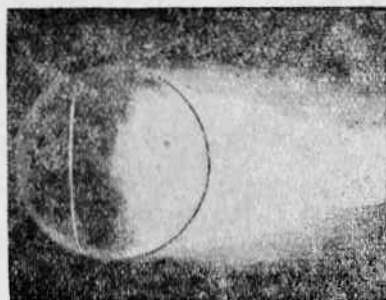


Рис. 78 б.

Явление кризиса имеет большое значение и для испытания крыльев. Рассмотрение кривых зависимости коэффициента подъемной силы C_y от угла атаки α приводит к заключению, что при больших (критических) углах атаки, различных для крыльев разной формы и параметров, коэффициент подъемной силы начинает падать. Объяснение этого факта следует искать в уменьшении циркуляции крыла за счет ухудшения его обтекания и отрыва пограничного слоя с верхней поверхности крыла. Опыты прекрасно подтверждают правильность такого объяснения. При закритических углах атаки, имеющих место при штопоре и других явлениях, крыло работает, как плохо обтекаемое тело. Естественно было бы в связи с этим ожидать, что с ростом рейнольдсовых чисел потока или его турбулентности, в тех случаях, когда с крыла срывается ламинарный слой, а также тогда, когда вообще точка перехода ламинарного слоя в турбулентный перемещается по поверхности крыла, кривые C_y или C_L по α должны изменяться. При этом, как правило, должны увеличиваться критические углы атаки и соответствующие им максимальные значения коэффициента подъемной силы $C_{y_{\max}}$.

Опыт подтверждает эти теоретические предположения. Продемонстрируем прежде всего влияние рейнольдсова числа на обтекание профиля крыла; для этого используем замечательные спектры, полученные

¹⁾ C. Wieselsberger. Der Luftwiderstand von Kugeln. ZFM. t. V, 1914.

Таунендом. ¹⁾ Тауненд пускал в трубу одно за другим облачки нагретого воздуха, которые получал при помощи искрового разряда. Нагретые струйки воздуха весьма устойчивы и на оригиналах фотографий отчетливы. При фотографировании на кинопленку струйки давали видимые линии тока (рис. 79). С другой стороны, расстояния между отдельными облачками характеризуют скорость течения. На рис. 79 приведены спектры Тауненда обтекания крылышка; на кадре (б) скорости потока больше, чем на кадре (а), (на фотографиях в оригинальной работе об этом можно судить по расстояниям между облачками нагретого воздуха). При том же угле атаки, в первом случае (а) имеем отрывное обтекание крылышка, во втором (б) — почти безотрывное обтекание с улучшенной циркуляцией и подъемной силой. Если увеличить угол атаки (кадр в), то при той же скорости крылышко вновь станет плохо обтекаемым и нужно дополнительное, большее чем раньше, увеличение скорости (кадр г) для приведения крылышка к режиму обтекаемости.

Литература по вопросу о влиянии рейнольдсова числа и начальной турбулентности на подъемную силу крыла весьма велика. ²⁾ Явление кризиса на крыле гораздо сложнее, чем в рассмотренных нами простейших случаях шара и цилиндра, так как крыло представляет поверхность переменной кривизны, а, следовательно, и переменной конфузурности и диффузорности в пограничном слое при изменяющемся угле атаки.

Опыты показали, что для одних типов крыльев влияние рейнольдсова числа и степени начальной турбулентности идет в одну сторону — $C_{L\max}$ возрастает с увеличением этих параметров. Для других — $C_{L\max}$ убывает с возрастанием K_0 и R . Для третьих и четвертых типов влияние R и K_0 идет в разные стороны.

В настоящем курсе мы не можем ставить себе задачей рассмотрение всех типов крыльев. Обратимся к разъяснению основных эффектов.

На сравнительно тонких крыльях (до 12%) носовая часть при углах атаки, близких к критическим, может быть уподоблена цилиндру малого диаметра, находящемуся в режиме до кризиса. На модели такого крыла при переходе к закритическим углам можно ожидать отрыв ламинарного слоя. Следовательно, в этом случае, повышение как рейнольдсова числа, так и начальной турбулентности должно вызывать нормальное явление кризиса, аналогичное кризису на шаре или цилиндре. Обтекание крыла при углах атаки, близких к закритическим, с возрастанием

¹⁾ H. Townend. Abstract of a Film illustrating the Theory of Flight. ARC, R & M № 1767, 1937.

²⁾ Из советских работ отметим: Ф. Гласс. О влиянии рейнольдсова числа на величину максимальной подъемной силы. Труды ЦАГИ, вып. 103, 1932; П. П. Красильщиков. Влияние числа Рейнольдса и турбулентности потока на максимальную подъемную силу крыла, ч. I — Труды ЦАГИ*, вып. 268, 1936; ч. II — там же, вып. 339, 1937. См. также „Справочник авиаконструктора“ т. I, ЦАГИ, 1937 стр. 53 и 113.

Из зарубежных работ необходимо особо отметить: C. Millikan and A. Klein. The Effect of Turbulence. Aircraft Engin. № 8, 1933; C. Millikan. Trans. of the ASME, № 11, 1934; E. Relf. Journ. Roy. Aeron. Soc. January, 1935; S. France. NACA Techn. Rep. № 459 и др.

рейнольдсова числа и степени турбулентности потока улучшается, подъемная сила возрастает, возрастает и максимальная подъемная сила. Подтверждение приведенному объяснению можно найти на рис. 80, где помещены графики C_L по α для различных рейнольдсовых чисел R и начальных степеней турбулентности K_0 . Графики эти представляют результаты опытов Клейна и Милликена над крылом NACA 2412 в аэродинамической трубе с искусственными турбулизаторами (решетками). Из графиков отчетливо следует, что C_L растет с ростом R и K_0 (последние числа даны приближенно пересчетом с некоторых суммарных характеристик степени турбулентности, о которых будет речь в следующем параграфе).



Рис. 79 а.



Рис. 79 б.

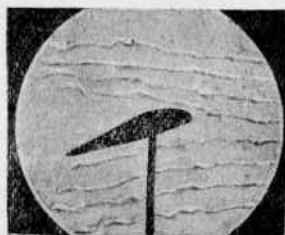


Рис. 79 в.



Рис. 79 г.

На основании тех же опытов можно судить о зависимости $C_{L_{\max}}$ от R и K_0 ; соответствующие кривые приведены на рис. 81 и 82. Рост $C_{L_{\max}}$ по R и K_0 очевиден.

Иначе обстоит дело с профилями, у которых даже на моделях при углах атаки, близких к закритическим, точка перехода T лежит впереди точки отрыва S , т. е. кризис уже пройден и отрывается турбулентный слой. Увеличение рейнольдсова числа или турбулентности в этом случае не влияет на смещение точки отрыва, а действует лишь на перемещение точки T к переднему краю крыла. Такое перемещение вызывает утолщение пограничного слоя и уменьшение циркуляции, т. е. подъемной силы. Этот эффект наблюдается на толстых крыльях и на крыльях со значительной относительной вогнутостью (например, Göttingen 387), так как с точки зрения

работы верхней поверхности такие крылья весьма близки (схематически приближаются к цилиндрам с большим радиусом кривизны).

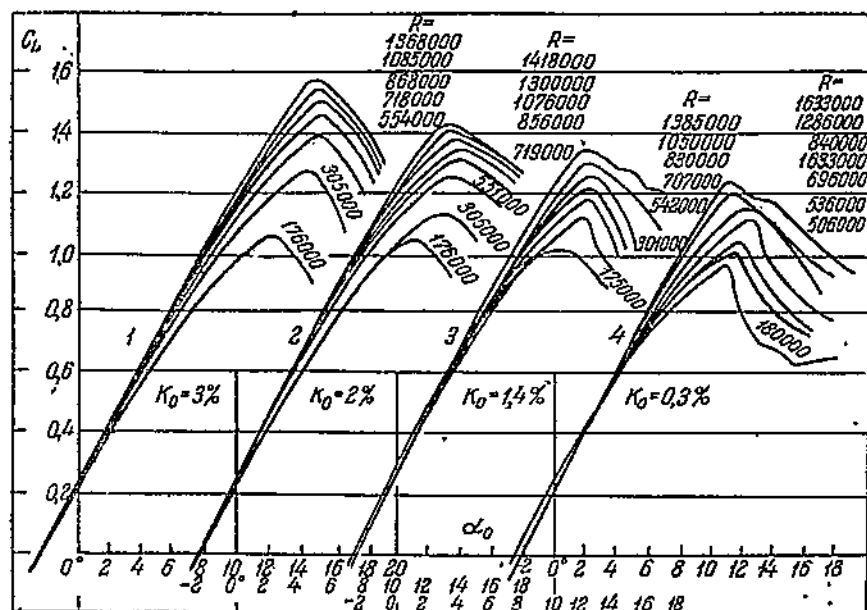


Рис. 80.

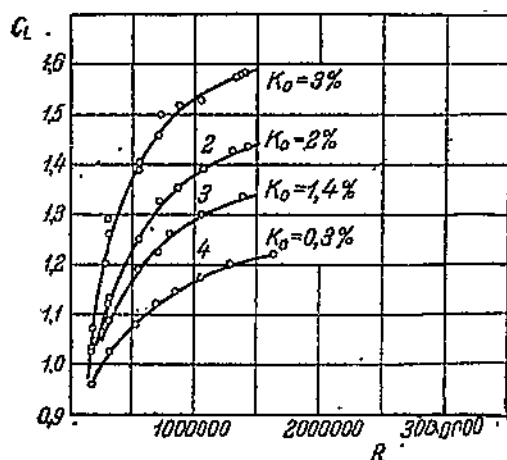


Рис. 81.

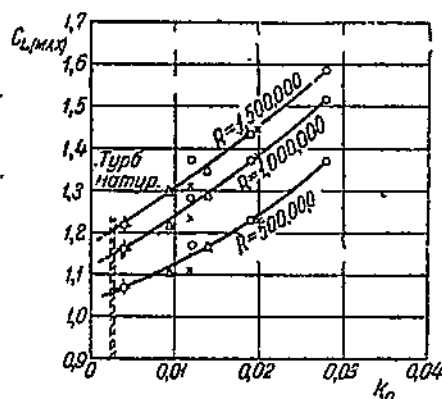


Рис. 82.

Приводим для примера кривые зависимости $C_{L,max}$ от R для нескольких профилей по опытам, проделанным в ЦАГИ¹⁾ (рис. 83). Видим,

¹⁾ П. П. Красильщиков. Влияние числа Рейнольдса и турбулентности потока на максимальную подъемную силу крыла. Труды ЦАГИ, вып. № 268, 1936.

что два профиля с одинаковой относительной кривизной, но с разными относительными толщинами (NACA 4409 и NACA 4421), ведут себя резко различно. У первого $C_{y \max}$ растет с ростом реинольдсова числа, у второго, — наоборот, падает. Эффект кривизны наглядно сказывается при сравнении продувок профилей NACA 2415 и NACA 6415, имеющих одинаковую толщину, но разную кривизну: на меньшей кривизне имеем возрастание $C_{y \max}$, на большей — убывание.

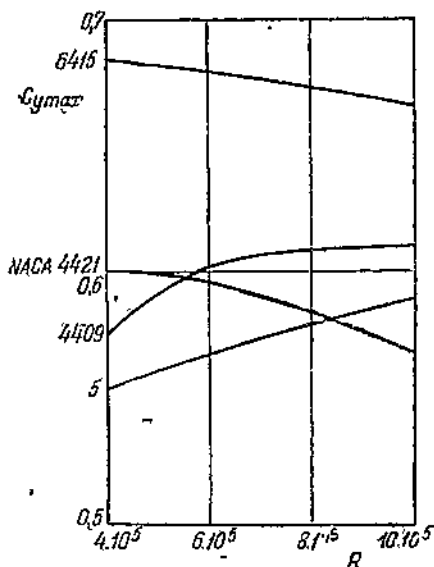


Рис. 88.

Следует отметить, что указанные признаки не исчерпывают условий хода явления, а представляют лишь некоторые общие правила. На самом деле наличие других особенностей крыла может совершенно изменить картину; на циркуляцию, особенно в случае сравнительно большой относительной кривизны, влияет вид и жесткость поверхности и другие факторы. Вопрос в целом нуждается еще в глубоких и длительных исследованиях. Обычные принятые в теории крыльев геометрические параметры крыла могут быть и недостаточными для характеристики работы крыла.

Предыдущие кривые соответствовали малым реинольдсовым числам. Замечательно что те же явления происходят и при больших реинольдсовых числах. Приводим график ¹⁾ $C_{y \max}$ по R (рис. 84) для профиля Clark-Y с относительной толщиной 12,7% при больших реинольдсовых числах (опыты проводились на больших моделях в американской самолетной трубе, имеющей весьма малую начальную турбулентность). Как видно из графика, рост $C_{y \max}$ при больших значениях R продолжается.

При больших реинольдсовых числах на критические явления оказывает влияние отделка поверхности (ее шероховатость), — об этом уже упоминалось в предыдущем параграфе; объяснение влияния шероховатости будет дано в одной из следующих глав. Сейчас покажем качественное влияние шероховатости на зависимость C_y от α (угла атаки) для профиля, у которого при гладкой поверхности эффект реинольдсова числа соответствует нормальному эффекту кризиса.

На рис. 85 приведены кривые C_L по α при растущих реинольдсовых числах для одного и того же профиля, с гладкой (сплошная линия) и шероховатой (пунктирная линия) поверхностями. ²⁾ При малых

¹⁾ S. France. The NACA Full Scale Wind Tunnel. Technical Report, NACA № 459.

²⁾ R. Hooker. The aerodynamic characteristics of airfoils as affected by surface roughness. NACA Techn. Note 457 (1933).

рейнольдсовых числах шероховатость на отрыв не влияет, при больших—влияние шероховатости весьма вредно. Возрастание R , приводящее при гладкой поверхности к значительному росту C_L (почти в два

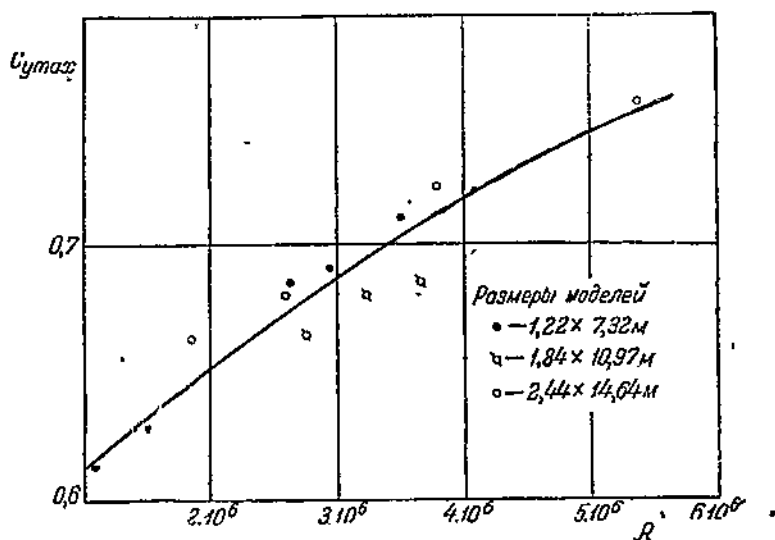


Рис. 84.

раза при возрастании R от 118 000 до 3 550 000), не имеет места при шероховатости поверхности.

Подводя итоги вышесказанному, видим, что у тонких крыльев, полезных для скоростных самолетов в силу малого их коэффициента сопротивления при нормальном горизонтальном полете, ухудшены условия посадки (малое $C_{y_{max}}$). Для устранения этого недостатка можно впереди крыла ставить турбулизаторы, для повышения $C_{y_{max}}$ при посадке; при горизонтальном полете эти турбулизаторы должны убираться. К той же цели могут привести и предкрылки (на рис. 86 приводим спектр Тауненда¹⁾ для крыла без предкрылка и с предкрылком), увеличивающие как бы кривизну вблизи носика и уменьшающие угол атаки.¹⁾

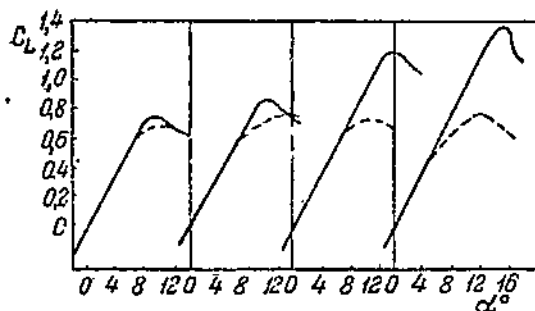


Рис. 85.

¹⁾ См. например, Aerodynamic Theory (Durand), Vol. IV, p. 9; 1935; „Справочник авиаконструктора“, ч. 1, стр. 139—163, а также отдельные оригинальные исследования.

В современной авиации для уменьшения посадочной скорости самолета и расширения диапазона скоростей скоростного самолета широко применяют различные приспособления для повышения циркуляции и подъемной силы крыльев самолета на больших углах атаки¹⁾. Многие из этих приспособлений (например, сдувание или отсос пограничного слоя и др.) тесно связаны с теорией пограничного слоя.



Рис. 86а.

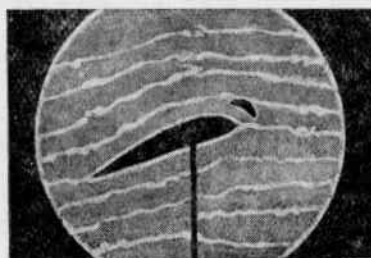


Рис. 86 б.

§ 5. Понятие о „шкалах“ турбулентности. Динамические шкалы. Тепловая шкала.

Турбулентность потока значительно влияет на область значений рейнольдсовых чисел, при которых происходит кризис сопротивления плохо обтекаемых тел. Как видно из графиков рис. 72, в зависимости от типа трубы и размещения рабочего участка, кризис (падение коэффициента сопротивления) начинается при весьма различных рейнольдсовых числах шара.

Явление это настолько ярко выражено, что может быть положено в основу косвенного метода характеристики турбулентности потока. Так как точка начала кризиса не отчетлива, то обычно отмечают не ее, а некоторую среднюю точку области кризиса. По предложению Драйдена и Кьюза²⁾ за косвенную меру турбулентности потока принимают то значение R_c рейнольдсова числа шара, при котором коэффициент сопротивления шара C_D равен 0,3 (рис. 87). Видим, что в зависимости от расстояния шара от решетки (от 10,5 дюйма до бесконечности, под которой в данном случае подразумевается просто отсутствие турбулизирующей решетки) число R_c меняется в пределах от 100 000 до, примерно, 330 000. Предполагается, что с удалением от турбулизатора интенсивность возмущений спадает, в соответствии с этим возрастает R_c , а, следовательно, и вообще рейнольдсовы числа кризиса. На том же графике приведена кривая сопротивления шара по опытам,

¹⁾ Аналогичный эффект получается и при искусственном искривлении переднего края пластинки в сторону уменьшения угла атаки (см. вышеуказанную статью Тауненда).

²⁾ H. Dryden and A. Kuethe. Effect of Turbulence in Wind — Tunnel Measurements. NACA, Rep. 342.

проведенным в известной американской аэродинамической трубе переменной плотности (увеличение плотности воздуха достигается повышением давления в трубе; при этом, очевидно, повышаются рейнولدсовы числа продувок, что позволяет в сравнительно небольшой трубе получать большие рейнولدсовы числа). Труба переменной плотности в силу особенностей своей конструкции имеет очень высокую степень турбулентности.

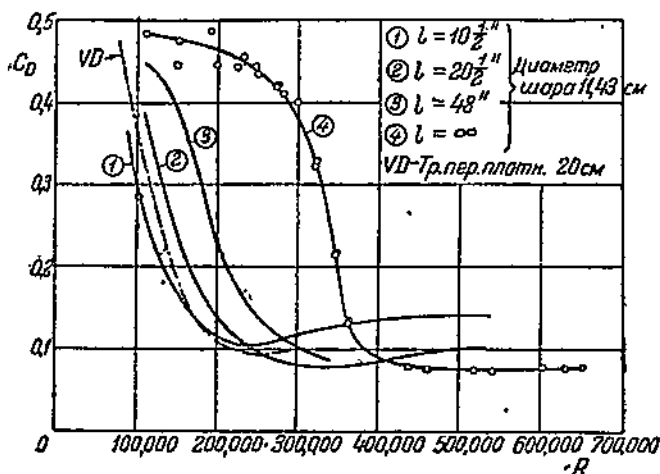


Рис. 87.

Диапазон изменений R_c шара в различных трубах можно характеризовать числами $R_c \approx 119\,000$ в трубе переменной плотности и $R_c \approx 360\,000$ в малой трубе DVL (диаметр 1,2 м). Большая самолетная труба НАСА (Ланглей-Филд) имеет $R_c \approx 340\,000$. Сравнительно хорошие трубы типа Прандтля ($R_c = 320\,000$); у нас в ЦАГИ (Москва) труба Т5 такого же типа имеет $R_c = 318\,000$. В трубе Т1 ЦАГИ, $R_c = 228\,000$ ¹⁾. Летные испытания показывают числа, близкие к лучшим аэродинамическим трубам ($R_c = 365\,000 - 400\,000$). Значения R_c образуют простую, практически удобную „шкалу“ турбулентности. Однако следует отметить, что шкала эта обладает одним принципиальным недостатком. По американским опытам, оказалось, что число R_c зависит от диаметра шара, выбранного за измеритель турбулентности. Зависимость эта (рис. 88) незначительна при шарах больших диаметров.

Тэйлор показал²⁾, что влияние диаметра шара при искусственной турбулентности на кризис можно учесть, если умножить R_c на $\left(\frac{d}{M}\right)^{-\frac{1}{5}}$, где d — диаметр шара и M — какой-нибудь характерный размер турбулизующей решетки, например, диаметр стержней или размер ячейки.

¹⁾ Советские данные цитируются по „Справочнику авиаконструктора“ т. I, стр. 44.

²⁾ G. Taylor, Proc. Roy. Soc. A. 156 (1936) p. p. 307—317.

При таком учете можно связать R_c и ранее введенную нами характеристику турбулентности K_0 одной кривой, не зависящей от диаметра

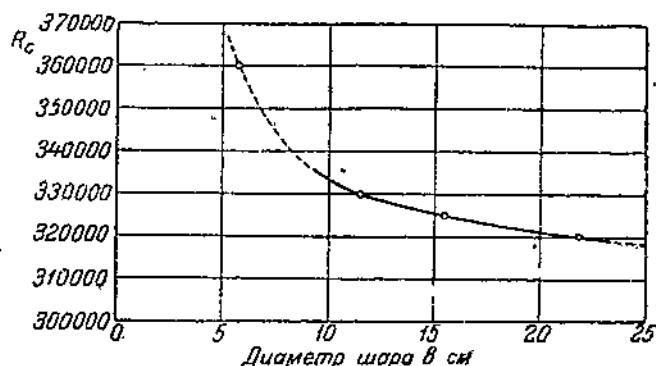


Рис. 88.

шара. На рис. 89 приводим кривую зависимости $K_0 \cdot \left(\frac{d}{M}\right)^{1/6}$ от R_c в диапазоне $\frac{d}{M}$ от 40 до 1; как видно, все экспериментальные точки с достаточной точностью ложатся на одну кривую.

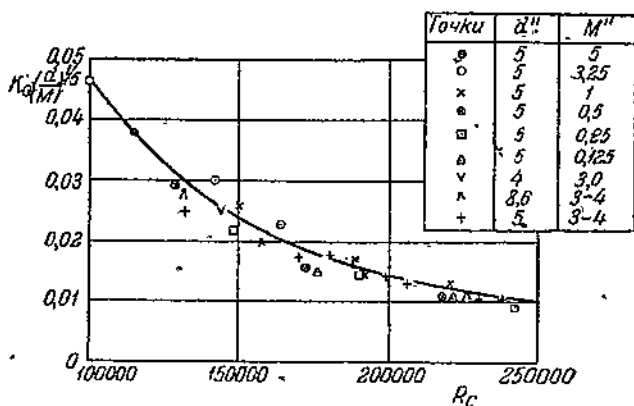


Рис. 89.

Для приближенного пересчета R_c на K_0 (без учета влияния диаметра) можно предложить эмпирическую формулу, выведенную П. П. Красильщиковым¹⁾:

$$K_0 = \left[\frac{5}{\left(\frac{R_c}{100\,000} \right)^{0.65}} - 2 \right] \%$$

¹⁾ Труды ЦАГИ, вып. 268, 1936, стр. 8 и 9.

Эту формулу можно с успехом применять для практических оценок в интервале R_e от 100 000 до 300 000, что же касается больших значений R_e , то она дает несколько преуменьшенные значения для R_e ; по формуле Красильникова K_0 обращается в нуль вблизи $R_e = 400\,000$, на самом же деле кривая идет асимптотически к оси R_e .

Хёрнер¹⁾ использовал для своей шкалы, указанной в предыдущем параграфе, факт значительного изменения разности давлений на лбу и в кормовой части шара при переходе через кризис (рис. 73). Отношение $\frac{\Delta p}{q}$, где Δp — разность давлений в лобовой точке шара и в точке кормовой области (например, на угле $22,5^\circ$ от задней точки шара), а q — динамический напор $\frac{\rho U_0^2}{2}$, падает при кризисе с ростом рейнольдсова числа; кривые этого падения значительно отличаются друг от друга в зависимости от турбулентности потока. Опыты показывают, что значению $C_D = 0,3$ соответствует значение $\frac{\Delta p}{q} \approx 1,2$. Это можно видеть, например, по сводному графику, приведенному на рис. 75. На этом графике по оси абсцисс отложено отношение $\frac{p_k - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}$. Легко сообразить, что

$$\frac{\Delta p}{q} = \frac{p_{\text{лоб}} - p_k}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = \frac{p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 - p_k}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = 1 - \frac{p_k - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2};$$

следовательно, если, согласно графика рис. 75, при $C_D = 0,3$ отношение $\frac{p_k - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = -0,2$, то $\frac{\Delta p}{q} = 1,2$. Таким образом практически

по шкале Хёрнера R_e определяется как значение рейнольдсова числа шара, при котором $\frac{\Delta p}{q}$ равно 1,2.

Метод Хёрнера имеет то преимущество перед методом Драйдена и Кьюза, что измерение перепада давления более просто, чем измерение C_D . Детальное исследование метода Хёрнера было впоследствии произведено Драйденом, Шубауэром, Моком и Скрамстейдом²⁾. Что же касается влияния отношения диаметра шара к диаметру турбулизирующей решетки, то это влияние, конечно, сохраняется в одинаковой мере как в методе Драйдена, так и в методе Хёрнера. Учет влияния диаметра шара может быть произведен тем же самым поправочным коэффициентом $\left(\frac{d}{M}\right)^{\frac{1}{5}}$ перед K_0 , как и в методе Драйдена и Кьюза. В указанной работе Драйдена, Шубауэра и др. произведено соответствующее экспериментальное исследование; результаты показывают правильность такого учета влияния

¹⁾ S. Hoerner. Luftfahrtforschung, Bd. 12, № 1, 1935.

²⁾ H. Dryden, G. Schubauer, W. Mock and H. Skramstad. Measurements of intensity and scale of Wind-Tunnel Turbulence etc. NACA, Rep. № 581 (1937).

диаметра. Заметим, что в графике на рис. 89 часть точек нанесена по сопротивлению шара, а другая часть — по перепаду давлений.

Предыдущие два метода косвенной характеристики турбулентного движения относятся к методам динамическим, и соответствующие им „шкалы“ турбулентности, т. е. значения R_c для различных турбулентностей потока, естественно назвать динамическими шкалами турбулентности.

Параллельно с динамическими шкалами турбулентности можно вести шкалы, основанные на применении эффекта влияния турбулентности потока на различные другие физические явления (теплоотдачу тел, распространение струй и др.).

Первым опытом в этом направлении было установление тепловой шкалы турбулентности, идея которой была выдвинута нами еще в 1931 г.¹⁾ Тепловая шкала турбулентности основана на применении эффекта роста суммарной теплоотдачи нагретого тела в потоке жидкости (воздуха) с ростом турбулентности потока при данном рейнольдсовом числе. Если обозначить через Q количество тепла, снимаемого потоком, омывающим тело, с поверхности тела в единицу времени, через F — поверхность тела и через ΔT — разность температур поверхности тела и потока вдалеке от тела, то средний коэффициент теплоотдачи тела α определится формулой

$$\alpha = \frac{Q}{F \cdot \Delta T}.$$

Как известно, число Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda},$$

(где d — характерный размер теплоотдающего тела, например, диаметр шара, λ — коэффициент теплопроводности жидкости или газа, отнесенный к средней температуре между поверхностью тела и потоком вдалеке) является в потоке заданной турбулентности K_0 функцией рейнольдсова числа $Re = \frac{U_0 d}{\nu}$, причем ν отнесено к той же средней температуре, что и λ . В общем случае имеем

$$Nu = f(Re, K_0).$$

Похожее тело, например шар, заполняется, примерно, на три четверти водой и при помощи электрического подогревателя вода доводится до кипения, причем в паровом пространстве поддерживается атмосферное давление. Таким путем удастся сохранять на поверхности тела постоянную и одинаковую температуру, близкую к 100°. Измеряя мощность электрической энергии, подаваемой в нагреватель для поддержания кипения, можно определить α , а следовательно и Nu по формуле (I — сила тока, E — разность потенциалов на клеммах подогревателя):

$$Nu = 0,86 \frac{IE}{\pi d \lambda \Delta T}.$$

¹⁾ Л. Г. Лойцянский и В. А. Шваб. Тепловая шкала турбулентности. Труды ЦАГИ, вып. 239, 1935, а также Techn. Physics of the USSR, v. II, № 5, 1935.

В наших опытах мы не имели в то время возможности непосредственно замерять K_0 при помощи теплового анемометра, поэтому сопоставляли Nu с Re определенным весовым образом, а Re с K_0 по заграничным (изложенным в настоящем параграфе) опытам. Результаты измерений приведены на рис. 90. Зная рейнольдсово число и измеряя теплоотдачу шара, определим Nu и по соответствующей кривой найдем K_0 . Тепловой метод имеет большие преимущества перед предыдущими динамическими методами. В-первых, как видно из приводимого

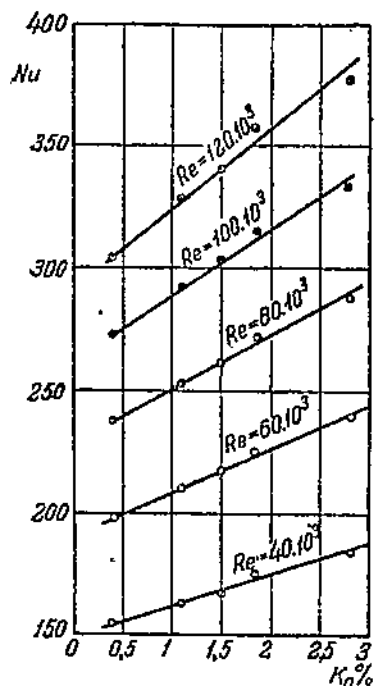


Рис. 90.

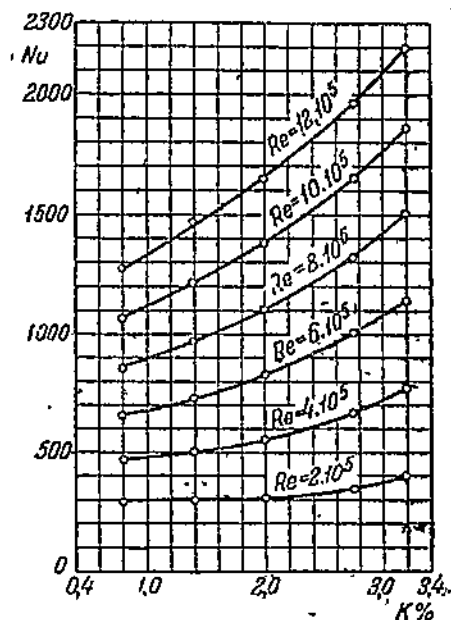


Рис. 91.

графика, метод не связан с явлением кризиса, что позволяет мерить турбулентность при скоростях и масштабах, далеких от кризиса, во-вторых, сами измерения, сводящиеся в основном к простейшим электрическим измерениям, не сложные и легко могут быть выполнены как в лабораториях, так и в промышленных условиях.

Опыты показали¹⁾, что наилучшей формой тела для теплового турбулизатора является хорошо обтекаемая форма, например дирижабельная. Исследования, проведенные над моделью дирижабля R-101 длиной 600 мм (удлинение 5,5), заполнявшейся водой так же, как ранее было сказано о шаре, привели к результатам, показанным на рис. 91. Влияние турбулентности и рейнольдсова числа идут в одну

¹⁾ В. А. Шваб и П. И. Третьяков. К вопросу о выборе оптимальной формы теплового турбулизатора. Труды Ленинградского индустриального института. Разд. физ. мат. наук, № 1, 1937.

сторону — возрастание их приводит к возрастанию теплоотдачи. Причиной этого явления следует считать увеличение турбулентного участка пограничного слоя, т. е. смещение точки перехода ламинарного слоя в турбулентный.

О некоторых других типах тепловых турбулиметров будет упомянуто в дальнейшем.

ГЛАВА II

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И „ПУТЬ СМЕШЕНИЯ“. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ СКОРОСТЕЙ И СОПРОТИВЛЕНИЙ

§ 1. Актуальное и осредненное движение жидкости. Турбулентные напряжения. Уравнения Рейнольдса

Основное отличие турбулентного движения от ламинарного заключается в наличии беспорядочных изменений скорости в данной точке потока по величине и по направлению. Если при ламинарном режиме малоинерционный измеритель скорости показывает некоторую определенную по величине и направлению скорость, лишь изредка изменяющуюся благодаря набегающим возмущениям (§ 2 предыдущей главы, рис. 59), то при турбулентном режиме движения жидкости, наоборот, скорость все время меняется, пульсирует, колеблется вокруг некоторого своего среднего значения; частоты этих пульсаций скорости весьма разнообразны, можно говорить о широком спектре частот от самых малых до больших, причем некоторая полоса частот является основной для данного движения, остальные играют второстепенную роль. В конце настоящего курса будет приведен анализ частот в турбулентном потоке, а пока обратимся к рассмотрению основных уравнений турбулентного движения.

Предположим, что безинерционный измеритель, помещенный в данную точку M турбулентного потока, записывает без искажений изменение во времени некоторой пульсирующей величины $\varphi(M; t) = \varphi(x_1, x_2, x_3; t)$ например одной из проекций скорости потока; такие величины будем называть актуальными величинами, т. е. действительно существующими в потоке.

Наряду с этими актуальными величинами введем в рассмотрение осредненные во времени величины:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} \varphi(x_1, x_2, x_3; \tau) d\tau. \quad (1.1)$$

Предположим, что интегральное осреднение (1) пульсирующей функции $\varphi(x_1, x_2, x_3; t)$ в интервале длиной T настолько сглаживает пульсации и выравнивает функцию, что новая осредненная функция $\bar{\varphi}(x_1, x_2, x_3; t)$, при повторном осреднении в том же интервале, будет приводиться к прежнему среднему значению. Если условиться обозна-

часть осреднение горизонтальной чертой, помещенной сверху осредняемой величины, то принятое предположение запишется так:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}. \quad (1.2)$$

Будем называть пульсацией (φ') величины φ — отклонение актуальной величины φ от осредненной по формуле (1) величины $\bar{\varphi}$

$$\varphi' = \varphi - \bar{\varphi}. \quad (1.3)$$

В таком случае, очевидно, предположение (2) эквивалентно предположению

$$\bar{\varphi}' = 0, \quad (1.4)$$

т. е. равенству нулю среднего значения пульсации за интервал осреднения T в любой момент времени t .

Предположение (1.2) является постулатом осреднения; оно может быть пояснено следующими соображениями. Если бы в результате осреднения по формуле (1) мы вместо зубчатого графика актуальной вели-

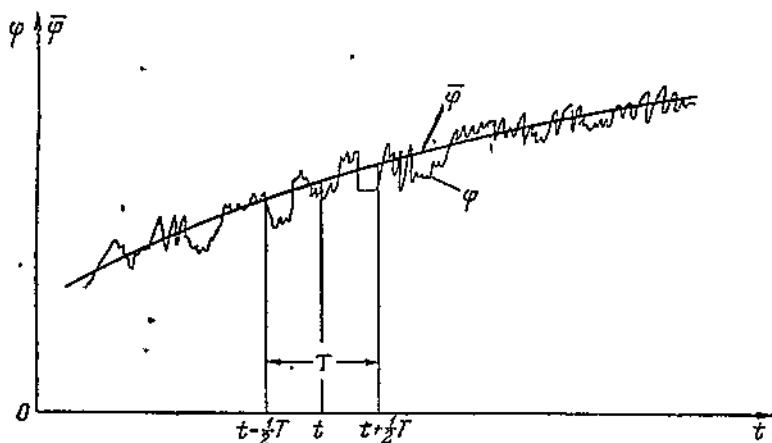


Рис. 92.

чины φ получили бы прямую линию, то закон (1.2) был бы в точности верен; на самом же деле функция $\bar{\varphi}$ представляет некоторую кривую, а не прямую линию.

Предположение (1.2) будет с достаточной степенью точности верно, если период (интервал) осреднения удовлетворяет следующим двум ограничительным условиям: 1) период достаточно велик по сравнению с периодом турбулентных пульсаций (условие возможности сглаживания пульсаций) и 2) период достаточно мал, чтобы на его протяжении можно было бы рассматривать функцию φ как линейную (рис. 92).

Иными словами, можно рассматривать лишь такие турбулентные движения, в которых осредненная величина $\bar{\varphi}$ является слабо изменя-

ющейся функцией времени (или в частном случае просто постоянной величиной). Если говорить о периодических (волновых) процессах, то следует предполагать, что период (длина волны) турбулентных пульсаций весьма мал по сравнению с периодом осредненного движения (например, турбулентные пульсации в потоке газа в двигателе).

В дальнейшем мы будем изучать лишь стационарные осредненные движения, и тогда предположение (1.2) легко может быть принято. Формула (1.4) говорит о том, что в процессе пульсаций одинаково вероятны, как положительные, так и отрицательные отклонения величины φ от своего среднего значения $\bar{\varphi}$.

Второе предположение, которое мы принуждены сделать, достаточно очевидное, если осредненная величина постоянна во времени, описывается формулой (φ и ψ — две пульсирующие функции):

$$\overline{\varphi\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}. \quad (1.5)$$

Примем его и в общем случае.

Согласно этому предположению и формуле (1.4):

$$\overline{\varphi\psi'} = \bar{\varphi}\bar{\psi}' = 0. \quad (1.6)$$

Кроме основных двух предположений (постулатов) осреднения, отметим еще следующие легко доказываемые свойства осреднения (1.1):

$$\overline{\varphi + \psi} = \bar{\varphi} + \bar{\psi} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}. \quad (1.8)$$

Эти свойства являются простым следствием принятого закона осреднения (1.1). Докажем наименее очевидное свойство:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \bar{\frac{\partial \varphi}{\partial t}};$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x_1, x_2, x_3; \tau) d\tau = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x_1, x_2, x_3; \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \left[\varphi\left(x_1, x_2, x_3; t + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(x_1, x_2, x_3; t - \frac{T}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau = \bar{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}. \end{aligned}$$

Принятых двух постулатов (1.1) и (1.5) достаточно, чтобы вывести основные дифференциальные уравнения осредненного движения жидкости

при турбулентном режиме. Остановимся на выводе этих уравнений в случае несжимаемого газа или жидкости при условии отсутствия объемных сил.

Напишем уравнения актуального движения в форме (ср. с уравнениями (1.16) § 1 главы II первого отдела):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.9)$$

Здесь предполагается суммирование по повторяющемуся два раза индексу j от 1 до 3.

Произведем над обеими частями уравнений (9) операцию осреднения (1.1). На основании только-что выведенных свойств осреднения, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{v}_i \bar{v}_j &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{v}_i, \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.10)$$

Рассмотрим отдельно выражение $\bar{v}_i \bar{v}_j$. Заменяя в нем актуальные величины v_i и v_j на суммы осредненных и пульсационных

$$v_i = \bar{v}_i + v_i', \quad v_j = \bar{v}_j + v_j',$$

получим на основании формул (1.2), (1.4), (1.5) и (1.6):

$$\begin{aligned} \overline{v_i v_j} &= \overline{(\bar{v}_i + v_i')(\bar{v}_j + v_j')} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'} + \overline{\bar{v}_i v_j'} + \overline{\bar{v}_j v_i'} = \\ &= \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'}. \end{aligned} \quad (1.10')$$

Подставляя полученное выражение для $\overline{v_i v_j}$ в уравнение (1.10) и пользуясь последним уравнением этой системы, т. е. уравнением неразрывности осредненного движения, после простых перегруппировок получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{v}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.11)$$

где через π_{ij} обозначены величины:

$$\pi_{ij} = -\rho \overline{v_i' v_j'}. \quad (1.12)$$

Если сравнить уравнения (11) с общими уравнениями гидродинамики в напряжениях (глава II, отдел первый):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0,$$

то можно прийти к следующему заключению: *уравнения осредненного движения отличаются от уравнений актуального движения (Навье-Стокса) добавочными напряжениями (1.12), обусловленными заменой актуальных скоростей на осредненные и пульсационные.*

Совокупность величин π_{ij} образует симметричный тензор II, который мы назовем тензором турбулентных напряжений.

В главе II отдела первого указано, что два тензора определяют динамику жидкости: один — тензор переноса количества движения и другой — тензор напряжений. Замечая, что преобразование (1.10') эквивалентно разложению тензора переноса количества движения в актуальном движении на сумму тензоров переноса в осредненном движении и пульсационного переноса, видим, что *тензор II турбулентных напряжений обусловлен наличием переноса количества движения пульсационными составляющими скоростей.*

Появление дополнительных турбулентных напряжений при замене действительно происходящего движения жидкости некоторым воображаемым осредненным аналогично появлению инерционных сил (центробежной, кориолисовой), при рассмотрении уравнений относительного движения системы точек в общей динамике.

Турбулентные напряжения также являются инерционными напряжениями; они формально получаются переносом инерционных пульсационных членов с левой стороны уравнений гидродинамики в правую их часть. В дальнейшем, рассматривая уравнения осредненного движения методом разложения актуальных скоростей на осредненные и пульсационные, мы должны всегда принимать эти инерционные напряжения, как действительно приложенные к площадкам на жидких поверхностях, ограничивающих выделяемые объемы.

Вышеуказанный метод разложения актуального движения на осредненное и пульсационное принадлежит О. Рейнольдсу¹⁾, уравнения (1.1) называют уравнениями Рейнольдса.

Естественно, что такое разложение неизвестных проекций скорости увеличивает число неизвестных величин, входящих в уравнения гидродинамики, между тем как число уравнений остается прежним. В результате мы получаем незамкнутую систему дифференциальных уравнений осредненного движения. В системе уравнений (1.11) четыре уравнения, а неизвестных — десять: три осредненных скорости ($\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$), осредненное давление $\bar{p}$ и, наконец, шесть неизвестных компонентов

¹⁾ О. Reynolds. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Phil. Transactions A, 186 (1895); русский перевод этой классической работы помещен в „Проблемах турбулентности“, ранее цитированных.

симметричного тензора турбулентных напряжений π_{ij} . Чтобы замкнуть такую систему уравнений, необходимы дополнительные предположения о связи между неизвестными.

В приложениях часто приходится иметь дело с уравнениями Рейнольдса в цилиндрических координатах. Обозначим продольную координату через x , радиус-вектор — через r и угол через φ ; соответствующие проекции актуальной скорости обозначим через $\bar{v}_x$, $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_\varphi$, пульсации через $\bar{v}_x'$, $\bar{v}_r'$, $\bar{v}_\varphi'$ и осредненные скорости $\overline{v_x}$, $\overline{v_r}$ и $\overline{v_\varphi}$. Тогда рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые приведены при выводе уравнений Рейнольдса в декартовых координатах, дадут возможность составить следующее уравнение для продольной осредненной скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \varphi} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\pi_{xr}}{r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \pi_{x\varphi}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.13)$$

и соответствующие уравнения для других компонентов скорости. Заменяя

$$\pi_{xx} = -\rho \cdot \overline{v_x'^2}, \quad \pi_{xr} = -\rho \cdot \overline{v_x' v_r'} \quad \text{и т. д.,}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \varphi} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_x'^2}) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_x' v_r'}) - \frac{\overline{v_x' v_r'}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{v_\varphi' v_x'}) \\ \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial x} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varphi} + \frac{\bar{v}_r \cdot \bar{v}_\varphi}{r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_\varphi' v_x'}) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r' v_\varphi'}) - \frac{\overline{2 v_r' v_\varphi'}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{v_\varphi'^2}) \\ \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial x} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}_\varphi^2}{r} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} = & - \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_x' v_r'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{v_r' v_\varphi'}) - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v_r'^2}) - \frac{\overline{v_r'^2}}{r} + \frac{\overline{v_\varphi'^2}}{r}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

§ 2. Турбулентное перемешивание. Конвективный перенос субстанции и перенос количества движения. Путь смещения и формула турбулентного трения

Теория Рейнольдса долго не могла получить применений из-за неопределенности величин турбулентных напряжений. Были попытки представить турбулентные напряжения зависящими от производных осредненных скоростей по тому же закону, что и обычные напряжения в вязкой жидкости. Так при плоском осредненном движении, параллельном координатной плоскости xu с линиями тока, параллельными

оси OX , пытались представлять напряжение турбулентного трения между слоями равными:

$$\pi_{xy} = A \frac{du}{dy}. \quad (2.1)$$

Коэффициент A получил наименование коэффициента „турбулентной вязкости“ или, иногда, „виртуальной вязкости“ по аналогии с коэффициентом вязкости μ . Попытки экспериментального определения величины A показали, что порядок величины A во много тысяч, а иногда и сотен тысяч раз превосходит порядок величины μ ¹⁾. Кроме того быстро стало очевидным, что коэффициент A не является какой-то константой турбулентного движения, а изменяется от слоя к слою в одном и том же движении, завися, повидимому, от распределения осредненных скоростей в потоке и от других причин. Формулой (2.1) с постоянным A , однако, широко пользовались и сейчас еще пользуются в исследованиях по гидротехнике, динамической метеорологии и других отделах физической географии (течения в морях и океанах, например).

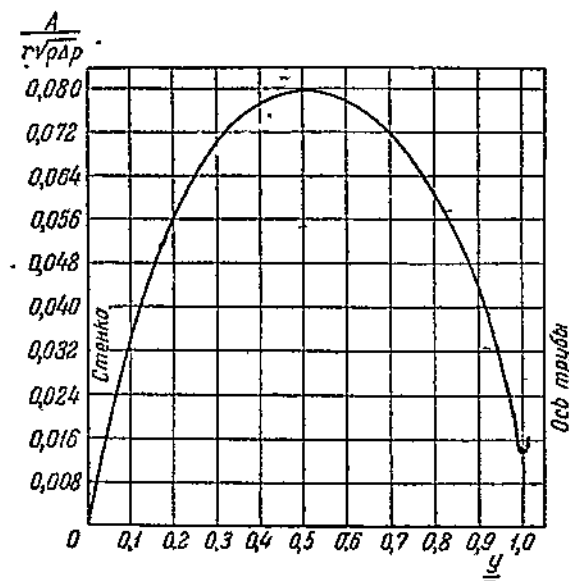


Рис. 93.

кривую зависимости величины A от расстояния y от стенки цилиндрической трубы, по которой происходит турбулентное движение жидкости (рис. 93). По оси ординат отложен коэффициент A , отнесенный к независящей от y величине $r\sqrt{\rho\Delta p}$, где r — радиус трубы, ρ — плотность жидкости, Δp — перепад давления в трубе между сечениями, на-

В вопросах, наиболее интересных для аэродинамики, во всех случаях движения жидкости или газа с неоднородным профилем скоростей (например в пограничном слое) принятие величины A за постоянную совершенно недопустимо. Приведем для иллюстрации этого положения

¹⁾ Так, например, известный специалист по динамике атмосферы *Ричардсон* указывает, что по опытам над атмосферными движениями коэффициент „турбулентной“ вязкости воздуха следовало бы принять равным коэффициенту вязкости сиропа, а соответствующий кинематический коэффициент „турбулентной“ вязкости равным коэффициенту сапожной ваксы. См. доклад проф. *И. А. Кибель* на совещании по турбулентности в Научно-исследовательском институте Гидротехники в январе 1933 г. [Известия НИИГ, т. IX].

ходящимися друг от друга на расстоянии, равном половине радиуса трубы; по оси абсцисс — относительное расстояние от стенки. Кривая получена Никурадзе по формуле (2.1) непосредственным делением экспериментально замеренного напряжения трения на поперечную производную осредненной скорости потока вдоль трубы. Видим, что величина A меняется столь значительно, что нет никакой возможности принять ее за постоянную, равную среднему значению.

Пути к розысканию закономерностей для коэффициента A появились в связи с созданием общей теории турбулентного перемешивания (обмена) в жидкостях и газах, которое надо отнести к периоду 1915—1925 гг.

Теория турбулентного перемешивания создавалась, главным образом, благодаря работам Дж. Тэйлора и Л. Ричардсона в Англии и В. Шмидта в Германии. Мы лишь вкратце остановимся на этой, имеющей для нас вспомогательное значение, теории ¹⁾.

Представим себе такое движение жидкости, для которого осредненным является движение слоями, параллельными координатной плоскости x_1, x_2 , с осред-

ненной скоростью $v_1 = V$, зависящей лишь от третьей координаты x_3 ; таково, например, плоское движение (параллельное плоскости x_1, x_2) между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными к оси x_3 .

Предположим, что в любой плоскости $x_3 = h$ задано значение $V(h)$ и,

кроме того, еще задана физическая величина s , характеризующая плотность распределения некоторой субстанции, переносимой жидкостью при ее движении. Это может быть концентрация дыма или какого-нибудь газа в воздухе, концентрация ила или песка, взвешенного в воде, или что-нибудь иное (тепло, количество движения и т. д.).

Будем также предполагать, что s представляется, вообще говоря, функцией координат и времени, но что в результате переноса установилось некоторое среднее распределение величины s ; обозначим его через S и будем считать, как и V , функцией только координаты x_3 .

Рассмотрим в плоскости $x_3 = h$ площадку σ (рис. 94). Через эту площадку в разных направлениях проходят струи актуального движения жидкости и приносят сюда различные значения величины s . Струи эти в различных пунктах площадки σ наклонены к ней под разными углами, и, кроме того, картина протекания через площадку меняется со временем. Так как площадка σ выбрана в плоскости линий тока

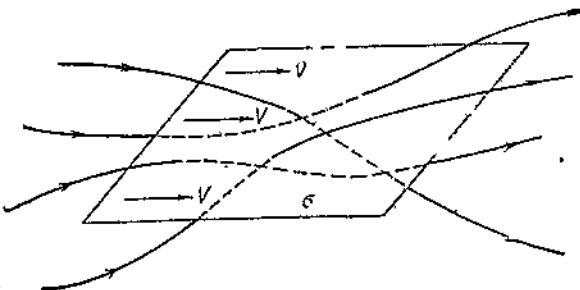


Рис. 94.

¹⁾ См. Л. В. Келлер. Теория конвекции в турбулентной атмосфере по Тэйлору, Ричардсону и Шмидту. Известия Главной геофизической обсерватории, № 4, 1931 стр. 3; там же можно найти указатель литературы.

осредненного движения, то при выборе достаточно большой площадки σ и достаточно большого времени T среднее количество жидкости, протекающее сквозь площадку σ за время T , должно быть равно нулю

$$\int_0^T dt \int_{\sigma} \rho v_3' d\sigma = 0. \quad (2.2)$$

равенство эквивалентное условию ($\rho = \text{const}$):

$$\overline{v_3'} = 0, \quad (2.3)$$

где под знаком осреднения следует понимать осреднение по времени в интервале $(0, T)$ и в пространстве по площадке σ . Если осредненное поле распределения субстанции S однородно, т. е. S повсюду одинаково, то никакого переноса субстанции сквозь площадку σ не будет происходить; если же $S = S(x_3)$, то пересекающие со всех сторон площадку σ струи будут переносить через эту площадку различные значения величины s , зависящие от предыдущей истории струй, до ее прихода на площадку σ .

Все струи при общем их движении перемешиваются между собою и обмениваются переносимой ими субстанцией, вследствие чего и получается некоторое среднее распределение величины s , равное S . Однако, в силу индивидуальных особенностей отдельных струй, приходя в плоскость $x_3 = h$, струи не имеют еще концентрации $S(h)$, а несут с собою средние концентрации смежных слоев $S \pm \Delta S$, приближенно равные

$$S \pm \Delta S = S(h) \pm S'(h) \cdot \Delta h, \quad (2.4)$$

где Δh — положительные и отрицательные величины, различные для разных струй.

Среднее количество субстанции, переносимой в единицу времени через единицу площади сквозь плоскость $x_3 = h$, определится величиной

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{\sigma} \int \rho v_3' \cdot [S(h) \pm \Delta S] d\sigma = \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{\sigma} \int_0^T dt \int_{\sigma} \rho v_3' \left[S(h) \pm \left(\frac{dS}{dx_3} \right)_{x_3=h} \cdot \Delta h \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Замечая, что величины $S(h)$ и $\left(\frac{dS}{dx_3} \right)_{x_3=h}$ являются величинами, постоянными в плоскости $x_3 = h$, получим, вводя вместо операции

$\frac{1}{T} \frac{1}{\sigma} \int_0^T dt \int_{\sigma} d\sigma$ знак осреднения,

$$\Sigma = \rho S(h) \overline{v_3'} + \rho \left(\frac{dS}{dx_3} \right)_{x_3=h} \cdot \overline{v_3' \Delta h},$$

или по (2.3), окончательно получим среднее количество субстанции, переносимое в единицу времени через единицу площади s плоскости $x_3 = h$, в виде

$$\Sigma = \overline{\rho v_3' \Delta h} \cdot \frac{dS}{dx_3}. \quad (2.5)$$

Такова основная формула переноса субстанции при турбулентном перемешивании. Различные авторы по разному понимали осреднение: Шмидт осреднял по пространству (площадке s) и времени, Ричардсон — только по пространству.

Формулу (2.5) можно переписать в виде:

$$\Sigma = A \frac{dS}{dx_3} \quad (2.6)$$

и назвать коэффициент A — коэффициентом перемешивания (Austauschgrösse, Eddy Conductivity).

До сих пор мы не делали никаких предположений о роде субстанции; при этом величина Δh , конечно, вообще говоря, зависит не только от гидродинамических особенностей струек, но и от свойств субстанции, ее отношения к движущейся жидкости (тепловые, химические и другие влияния). Если предположить, что субстанция обладает свойствами сохраняемости (постоянство в данном объеме жидкости до смешения его с окружающей жидкостью и сохранения общего количества субстанции при перемешивании) и пассивности по отношению к движению жидкости (субстанция, переносясь жидкостью, сама на ее движение не влияет), то тогда все Δh будут определяться лишь гидродинамикой потока и, следовательно, коэффициент перемешивания станет чисто гидродинамической величиной, одинаковой при переносе любой субстанции и зависящей лишь от характера течения жидкости. Такая постановка вопроса полезна тем, что если каким-нибудь путем определен закон распределения коэффициента A для одной субстанции, то этот же закон сохраняется и для переноса всякой другой субстанции, отвечающей ранее поставленным условиям сохраняемости и пассивности.

Изложенная теория предполагает гидродинамическую часть проблемы переноса решенной заранее и величину A определенной; однако можно использовать ту же теорию и для решения гидродинамической задачи, если рассмотреть явление переноса количества движения жидкости при турбулентном ее движении. Вспомня, что напряжение турбулентного трения, приложенное к площадке, расположенной в плоскости $x_3 = h$, определяется переносом количества движения между слоями, параллельными плоскости $x_1 x_2$, получим по (2.5):

$$\pi_{13} = \overline{\rho v_3' \Delta h} \cdot \frac{dV}{dx_3}; \quad (2.7)$$

коэффициент „турбулентной“ вязкости, входящий в формулу (2.1), совпадает с коэффициентом перемешивания и равен

$$A = \overline{\rho v_3' \Delta h}. \quad (2.8)$$

Без дополнительных допущений о природе пульсаций v'_3 и величин Δh никаких выводов из формулы (2.7) сделать нельзя.

Прандтль¹⁾ выдвинул гипотезу „пути смешения“ (Mischungsweg), заключающуюся в следующем. Струи, приходящие в плоскость $x_3 = h$, где средняя скорость равна V , приносят частицы, имеющие продольную скорость $V + \Delta V$, вообще говоря, отличную от V ; разность скоростей ΔV может быть приближенно представлена так

$$\Delta V = \frac{dV}{dx_3} \cdot \Delta' h; \quad (2.9)$$

здесь $\Delta' h$ — расстояние от данного слоя до того слоя, где осредненная скорость потока равна скорости, с которой частица приходит в рассматриваемый слой. Иначе говоря, мы можем себе представить, что на расстоянии $\Delta' h$ от данного слоя существует слой, выйдя из которого, частица сохраняет свою скорость до тех пор, пока не смешается с выделенным слоем $x_3 = h$. Для различных струй эти расстояния $\Delta' h$ различны; среднее значение абсолютных величин $\Delta' h$ обозначим через l' и назовем путем смешения. Путь смешения представляет собою расстояние между данным слоем ($x_3 = h$) и таким другим слоем, который по своей осредненной скорости отличается от данного как раз настолько, насколько в среднем разнятся продольные скорости частиц, приносимых струями в плоскости $x_3 = h$, от скорости в этой плоскости. Величины $\Delta' h$ вообще не равны величинам Δh , которые в среднем также определяют некоторый путь смешения, но не скоростей, а переносимой субстанции; при переносе скоростей, будем иметь: $\Delta' h = \Delta h$.

Кроме предположения о существовании пути смешения l' Прандтль делает еще предположение о том, что пульсации v'_3 (и другие пульсации) пропорциональны разности скоростей ΔV слоя и приходящих в него частиц, т. е. что

$$v'_3 \sim \frac{dV}{dx_3} \Delta' h. \quad (2.10)$$

При этом формула (2.7) принимает вид

$$\pi_{13} \sim \rho (\Delta' h)^3 \left(\frac{dV}{dx_3} \right)^2; \quad (2.11)$$

или, если обозначить через l среднюю квадратичную величин $\Delta' h$ и ввести в нее же и коэффициент пропорциональности, то (2.11) дает следующую формулу Прандтля²⁾

$$\pi_{13} = \rho l^3 \left| \frac{dV}{dx_3} \right| \frac{dV}{dx_3}. \quad (2.12)$$

¹⁾ ZAMM 5 (1925); Verhandl. der 2 intern. Kongr. für Techn. Mechanik, Zürich, 1926.

²⁾ Предположение (2.10) является наиболее слабым пунктом теории Прандтля, так как сразу бросается в глаза несоответствие этой формулы с хорошо известным экспериментальным фактом неравенства нуля пульсаций на оси трубы, где $\frac{dV}{dx_3} = 0$. Вместе с тем следует под-

Здесь квадрат производной заменен произведением производной на ее абсолютную величину для того, чтобы напряжение π_{13} имело правильный знак. Если $\frac{dV}{dx_3} > 0$ то слой, соответствующий большим значениям x_3 , должен увлекать рассматриваемый слой, т. е. π_{13} должно быть больше нуля; если же $\frac{dV}{dx_3} < 0$, то, наоборот, верхние слои тормозят нижние и $\pi_{13} < 0$; формула (2.12) правильно оценивает знак.

Теория пути смещения не решает задачу о турбулентном движении, так как выражая напряжение турбулентного трения через производные осредненных скоростей, эта теория вводит новое неизвестное — длину l , которую, подобно величине l' , также называют путем смещения. Как указывает Прандтль, введение пути смещения упрощает наши представления о процессе турбулентного перемешивания, дает возможность сделать некоторые простые допущения о законе изменения этой характерной длины и, таким образом, довести до конца исследование о турбулентном движении. Это будет ниже показано на некоторых характерных примерах.

§ 3. Распространение турбулентной струи в пространстве, затопленном жидкостью той же плотности. Задача о размывании края струи. Струя, выходящая из тонкого отверстия. Обобщения на практические струи

Плоско-параллельная струя бесконечной ширины с однородным профилем скоростей U_0 (рис. 95), начиная с некоторой точки O , по-

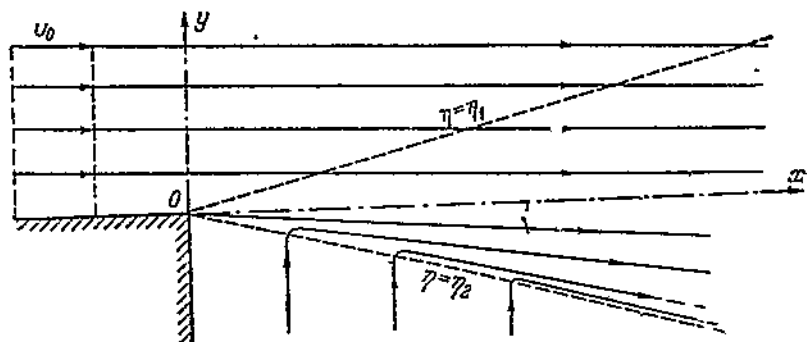


Рис. 95.

падает в пространство, заполненное неподвижной жидкостью той же плотности. Образующаяся при этом поверхность раздела (скачок в скоростях от нуля в пространстве до U_0 в струе) неустойчива; благодаря

черкнуть, что окончательная формула (2.12) лишена этого недостатка, так как на оси $\pi_{13} = -\rho u_1' u_3'$ обращается в нуль не за счет равенства нулю отдельных пульсаций, а в силу отсутствия корреляции между ними. Как будет показано в дальнейшем, применение формулы Прандтля вблизи оси (в предположении $l = \text{const}$) дает прекрасное совпадение с опытом.

наличие вязкости образуется переходный пограничный слой между струей и пространством неподвижной жидкости, причем профиль скоростей имеет перегиб, даже при небольших рейнольдсовых числах, приводящий к переходу ламинарного слоя в турбулентный. Будем предполагать, что пограничный слой на краю струи целиком турбулентен. Выберем ось, как показано на рисунке, и обозначим осредненные скорости через u и v без черточек сверху, касательную компоненту турбулентного трения между слоями в осредненном движении $\frac{\pi_{xy}}{\rho u^2}$ обозначим через τ ; нормальные компоненты будут равны $\pi_{xx} = -\frac{\pi_{xy}^2}{\rho u^2}$ и $\pi_{yy} = -\frac{\pi_{xy}^2}{\rho v^2}$.

Предположим, как вообще в теории пограничного слоя, что $\frac{\partial p}{\partial y}$ крайне мало; тогда, поскольку в самой струе и пространстве, заполненном жидкостью, продольного перепада давления нет, то во всем пограничном слое положим $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Наконец, как уже упоминалось ранее, турбулентное трение τ весьма велико по сравнению с членом $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$, соответствующим ламинарному (вязкому) трению в осредненном потоке, так что член $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ может быть опущен. Уравнения Рейнольдса для стационарного пограничного слоя струи могут быть написаны в форме ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Для определения τ примем формулу Прандтля (2.12) в виде

$$\tau = \frac{1}{2} \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.2)$$

Наличие коэффициента $\frac{1}{2}$ объясняется удобством дальнейших вычислений. Как указал Прандтль, ввиду отсутствия стенок можно предположить, что путь смешения l не меняется в данном поперечном сечении струи, а является лишь функцией x ; простейшим предположением о форме зависимости между l и x является предположение о линейной их связи

$$l = cx, \quad (3.3)$$

которое можно несколько обосновать допущением пропорциональности пути смешения ширине пограничного слоя струи, и линейным ростом ширины слоя при распространении струи. Обозначим ширину (тол-

¹⁾ В первом уравнении опущен также член $\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x}$; это эквивалентно предположению об одинаковости степени турбулентности вдоль пограничного слоя; опыты хорошо подтверждают неизменность суммы $\overline{p} + \overline{\rho u'^2} = \overline{p} - \overline{\pi_{xx}}$ вдоль всего пограничного слоя струи.

щину) пограничного слоя через b и примем ее за масштаб ординат y внутри слоя (b есть разность ординат в точках, где продольная скорость u равна U_0 и нулю, или же какая-нибудь условная толщина, например, толщина вытеснения или потери импульса); за масштаб x примем какую-нибудь произвольную постоянную длину L . В отличие от теории ламинарного слоя, масштабы поперечных и продольных длин между собою никак не связаны.

Составляя выражение для скорости u в общем случае в виде

$$u = U_0 \cdot f\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{b}\right), \quad (3.4)$$

видим, что в тех случаях, когда в задаче нет ни одной характерной длины L , как, например, в рассматриваемой нами сейчас задаче о пограничном слое бесконечной по ширине струи, u не может зависеть от $\frac{x}{L}$, и формула скорости сводится к виду

$$\frac{u}{U_0} = f\left(\frac{y}{b}\right), \quad (3.5)$$

где b может быть функцией x . Это равенство говорит о подобии профилей продольных скоростей в различных поперечных сечениях граничного слоя струи. Если бы струя не была безграничной, то подобие профилей скоростей не имело бы места.

Принимая толщину пограничного слоя b пропорциональной x и путь смещения по формуле (3.3) равным cx , можем утверждать, что систему уравнений (3.1) или, по (3.2), уравнения

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

можно удовлетворить, полагая:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = U_0 \varphi(\eta) \\ v &= - \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = U_0 \int \varphi'(\eta) \frac{y}{x^2} dy = U_0 \int \varphi'(\eta) \eta d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Изотаксами u и v служат лучи, выходящие из начала координат.

Для упрощения дальнейших выкладок полезно ввести в рассмотрение функцию тока осредненного движения ψ ¹⁾, положив ее равной

$$\psi = \int u dy = U_0 x \int \varphi(\eta) d\eta = U_0 x F(\eta); \quad (3.8)$$

¹⁾ W. Tollmien. Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. ZAMM, IV S. 468, 1926, а также обзор Прандтля, помещенный в Aerodynamic Theory (ed. by Durand) vol. III, Div. G, p. 170.

тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 F'(\eta) \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_0 (\eta F' - F). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Подставляя эти значения u и v в уравнение (3.6), приведем его к виду

$$FF'' + c^2 F'' F''' = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение распадается на два уравнения

$$F'' = 0 \quad \text{и} \quad F + c^2 F''' = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $F' = \text{const}$, т. е. $u = U_0$, верное лишь при переходе к невозмущенной струе, имеющей скорость U_0 . Итак, задача сводится к решению простого линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$F + c^2 F''' = 0. \quad (3.11)$$

Установим граничные условия. На линии $\eta = \eta_1$ (рис. 95), соответствующей изотаксе $u = U_0$, имеем $F'(\eta_1) = 1$. Требуя плавности перехода u в U_0 , будем иметь $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, т. е. $F''(\eta_1) = 0$. Наконец, замечая, что вблизи этой линии $F''(\eta) = 0$, $F'(\eta) = \text{const} = 1$, $F(\eta) = \eta + \text{const}$, получим еще третье дополнительное условие $F(\eta_1) = \eta_1$ ¹⁾.

На линии $\eta = \eta_2$, отделяющей пограничный слой от пространства нулевой продольной скорости, получим $F'(\eta_2) = 0$ и $F''(\eta_2) = 0$.

В эти граничные условия входят две незадаанные наперед величины η_1 и η_2 , так что уравнение третьего порядка (3.11) подчиняется трем граничным условиям, а из остальных двух условий могут быть определены постоянные η_1 и η_2 , т. е. граничные лучи турбулентного слоя струи.

Общий интеграл уравнения (3.11) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} F &= C_1 e^{-\alpha \eta} + e^{1/2 \alpha \eta} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \eta + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \eta \right) \\ \alpha &= c^{-2/3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Постоянная c , представляющая коэффициент при x в выражении для пути смешения (3.3), остается единственной неопределенной константой, зависящей от турбулентной структуры потока; эта постоянная должна быть отнесена к числу экспериментальных констант задачи. Замечательно, что такая константа только одна.

Подчиняя общий интеграл (3.12) граничным условиям, найдем систему пяти уравнений, откуда можно найти три постоянные интегри-

¹⁾ Аддитивная постоянная в выражении функции тока может быть опущена.

рования C_1 , C_2 , C_3 и значения η_1 и η_2 . Приводим результаты, опуская выкладки:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -0,0062, & C_2 &= 0,987, & C_3 &= 0,577; \\ \alpha\eta_1 &= 0,981, & \alpha\eta_2 &= -2,04. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Графики $\frac{u}{U_0}$ и $\frac{v}{U_0 \sqrt[3]{2c^2}}$ в функции от $\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}$ приведены на рис. 96.

Опыты, проведенные в аэродинамической лаборатории Прандтля в Гёттингене, показали прекрасное совпадение экспериментальных и теоретических профилей продольных скоростей в различных сечениях граничного слоя струи рабочего участка аэродинамической трубы при $c = 0,0246$ и соответствующем $\alpha = c^{-1/2} = 11,8$. Толщина пограничного слоя струи при этом оказывается равной

$$\begin{aligned} b &= y_1 - y_2 = (\eta_1 - \eta_2) x = \\ &= 0,255x. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Видим, что в отличие от ламинарного пограничного слоя турбулентный слой струи не зависит от рейнольдсова числа (т. е. от вязкости).

Аналогичным приемом решается задача о распространении бесконечно тонкой струи в затопленном жидкостью той же плотности безграничном пространстве¹⁾. В отделе втором было изложено решение этой задачи для ламинарной струи. Как и там, предполагаем, что струя при выходе из бесконечно тонкого отверстия имеет бесконечно малый расход, но несет с собою сохраняющееся в дальнейшем (при отсутствии продольного перепада давления) конечное количество движения

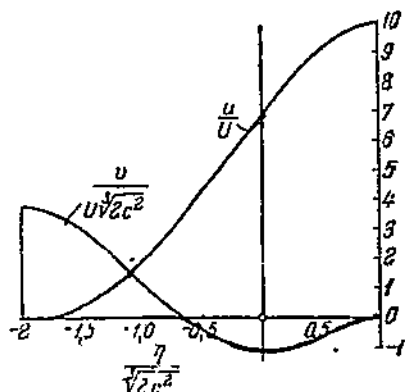


Рис. 96.

$$J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = \text{const.} \quad (3.15)$$

Так как никакой характерной длины в данном случае нет, то, как и в случае турбулентного слоя границы струи, продольная скорость может быть представлена в виде

$$u = u_m f\left(\frac{y}{b}\right), \quad (3.16)$$

где u_m — максимальная скорость на оси струи. Если предположить, что ширина струи b в данном сечении пропорциональна удалению от

¹⁾ W. Tollmien, loc. cit.

точки выхода струи, то из уравнения (3.15) следует

$$J_0 = bu_m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right) \sim \rho x u_m^2, \quad (3.16')$$

где численное значение интеграла и коэффициент линейной связи b и x введены в знак пропорциональности. Отсюда следует, что $u_m \sim x^{-1/2}$ и по (3.16)

$$u \sim x^{-1/2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = x^{-1/2} \varphi(\eta). \quad (3.17)$$

Функция тока ψ при этом может быть представлена в виде (A — пока произвольный множитель):

$$\psi = Ax^{1/2} F(\eta), \quad (3.18)$$

а компоненты осредненной скорости

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = Ax^{-1/2} F'(\eta) \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{A}{2} x^{-1/2} (2\eta F' - F). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Полагая опять $l = cx$, составим уравнение Рейнольдса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

и положим в нем

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = -\rho c^2 x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

где знак минус выбран в силу отрицательности $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y > 0$. Имеем уравнение

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -2c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

которое после подстановки в него u и v по (3.19) преобразуется в такое

$$F'^2 + FF'' = 2c^2 \frac{d}{d\eta} (F''^2). \quad (3.20)$$

Интегрируя один раз по η и пользуясь очевидными, в силу симметрии струи, условиями: при $\eta = 0$, $v = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, т. е. по (3.19)

$$\text{при } \eta = 0, \quad F = 0, \quad F'' = 0, \quad (3.21)$$

получим

$$FF' = 2c^2 F''^2. \quad (3.22)$$

Для интегрирования последнего уравнения нам необходимо иметь два граничных условия; одно из них — $F = 0$, при $\eta = 0$, за второе примем условие:

$$\text{при } \eta = 0, \quad F'(0) = \frac{1}{A} x^{1/2} \cdot u_m = \text{const.}$$

Распорядимся постоянной A так, чтобы при $\eta = 0$, $F'(0) = 1$.

Вместе с тем для упрощения численного интегрирования заменим η на новую переменную $\frac{\eta}{\sqrt{2c^2}}$, тогда, очевидно, в уравнении (3.22) постоянная c исчезнет, и уравнение можно будет проинтегрировать численно раз навсегда.

На рис. 97 приведен график зависимости $\frac{u}{u_m}$ от $\frac{y}{Y}$, где под Y понимается значение y , при котором $u = \frac{1}{2} u_m$; там же даны экспери-

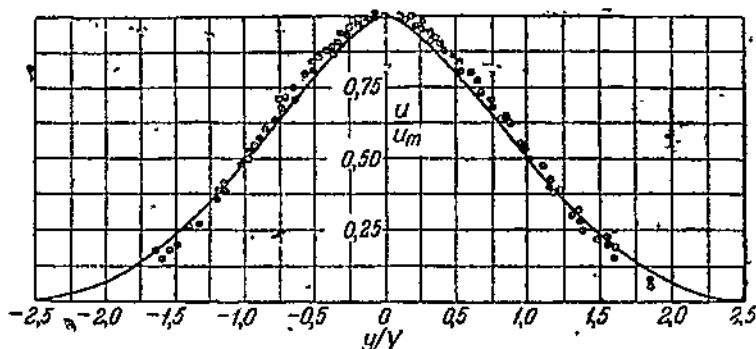


Рис. 97.

ментальные точки опытов Фёртмана¹⁾. Совпадение теории с опытом вполне удовлетворительное. Угол расширения струи определяется уравнением

$$\frac{y}{x} = 2,412\sqrt{2c^2}, \quad (3.23)$$

получаемым из условия, что на границе струи: $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Фёртман на основании своих опытов дает для c значение 0,0165. Число c , как и в предыдущей задаче, зависит от турбулентности струи.

Подобно тому, как это имеет место в ламинарной струе, количество жидкости, протекающее сквозь поперечное сечение струи, возрастает с x , т. е. струя увлекает окружающую ее жидкость. Из уравнения (3.18) непосредственно следует, что расход сквозь сечение струи растет пропорционально $\sqrt{x}$, хотя максимальная скорость убывает пропорционально $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Совершенно аналогичным методом может быть изучена и осесимметричная струя²⁾. В этом случае задается количество движения

$$J_0 = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 r dr, \quad (3.24)$$

¹⁾ Förthmann. Ingen. Archiv, 5 (1934), S. 42—54.

²⁾ W. Tollmien. loc. cit.

где r — расстояние от данной точки струи до ее оси. Вводя опять функцию тока уравнениями в цилиндрических координатах

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.25)$$

убедимся, что в этом случае можно положить:

$$l = cx, \quad \eta = \frac{r}{x}, \quad \psi = Ax F(\eta). \quad (3.26)$$

Первое из уравнений Рейнольдса в цилиндрических координатах (1.13) приведет к виду:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\pi_{xr}}{r} \right). \quad (3.27)$$

Следуя Прандтлю, положим

$$\pi_{xr} = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \frac{\partial u}{\partial r} = -\rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2, \quad (3.28)$$

так как в струе при $r > 0$ $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$.

Уравнение Рейнольдса (3.27) переходит в такое

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right]. \quad (3.29)$$

Вводя функцию тока и новую переменную η , по (3.26) получим обыкновенное уравнение

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{FF'}{\eta} \right) = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{c^2}{\eta} \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right)^2 \right],$$

которое один раз интегрируется и дает

$$FF' = c^2 \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right)^2 + \text{const.} \quad (3.30)$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю. В самом деле, при стремлении $r \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$, т. е. на оси струи, скорость u остается конечной, а v стремится к нулю. Вычисляя эти скорости, получим

$$u = \frac{A}{cx} \cdot \frac{F'}{\eta}, \quad v = \frac{A}{x} \left[F' - \frac{F}{\eta} \right],$$

следовательно, при $\eta \rightarrow 0$, $\frac{F'}{\eta}$ стремится к конечной величине, а $F \rightarrow 0$.

Составляя далее $\frac{\partial u}{\partial r}$ и требуя, чтобы $\frac{\partial u}{\partial r}$ стремилось к нулю, когда $\eta \rightarrow 0$, получим (при $\eta \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{A}{\eta x^2} \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right) \rightarrow 0, \quad \text{т. е.} \quad F'' - \frac{F'}{\eta} \rightarrow 0;$$

таким образом видно, что константа в уравнении (3.30) равна нулю

Выбирая в уравнении (3.30) вместо η новую переменную $\frac{\eta}{\sqrt[3]{c^2}}$ и подчиняя произвольный коэффициент A условию

$$\frac{F'}{\eta} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow 0,$$

получим вместо уравнения (3.30) аналогичное, но не содержащее c , и с чисто численными граничными условиями. Такое уравнение может быть до конца проинтегрировано раз навсегда численным методом. Результат приведен на рис. 98, где по оси ординат отложено $\frac{u}{u_m}$.

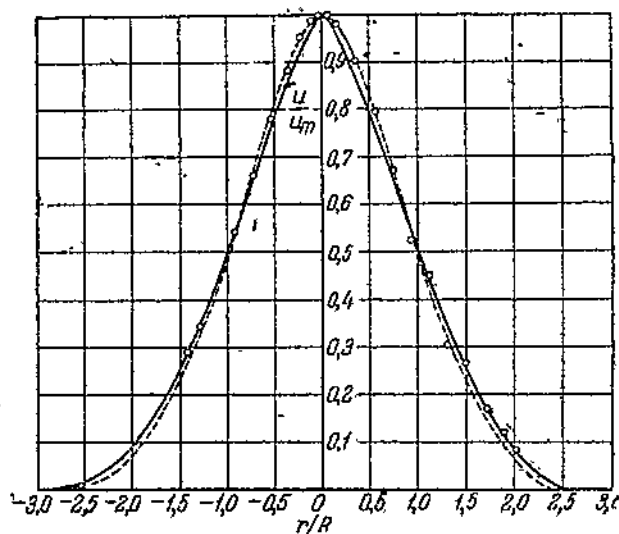


Рис. 98.

а по оси абсцисс $\frac{r}{R}$, где под R понимается такое значение r , для которого $u = \frac{1}{2} u_m$. На том же рисунке для сравнения приводятся опытные данные. Сплошная линия соответствует теории Толмиена, пунктирная — опытам Рудена¹⁾, экспериментальные точки — опытам Кьюза²⁾; здесь $c = 0,0705$. Угол расхождения струи определяется равенством

$$\frac{r}{x} = 3,4 \sqrt[3]{c^2}, \quad (3.31)$$

являющимся следствием условий обращения в нуль скорости u и поперечной производной $\frac{\partial u}{\partial r}$ на внешней границе струи. Расход через по-

¹⁾ P. Ruden. Turbulente Ausbreitungsvorgänge im Freistrah. Naturwissenschaften, Heft 21/23, 1933, S. 375.

²⁾ A. Kuethe. Investigations of the turbulent mixing regions formed by jets. Journ. of appl. mechanics, v. 11, 1935, № 3.

перечное сечение растет пропорционально расстоянию x от точки выхода струи.

Анализируя изложенные в настоящем параграфе расчеты, заметим, что возможность доведения решения до конца была обусловлена отсутствием граничных условий по x ; сведение задачи к решению обыкновенного уравнения с аргументом η , вместо уравнения в частных производных, явилось следствием отсутствия характерной длины, заданной наперед. Точно так же, как и в случае ламинарной струи и пограничного слоя вообще, все это имеет место благодаря тому, что мы решаем задачу типа „источника“, вместо того, чтобы решать задачу о развитии в пограничном слое заданного начального профиля скоростей. Последняя задача, — о ней мы неоднократно упоминали в теории ламинарного пограничного слоя, — остается пока не разрешимой.

Между тем, практически всегда приходится иметь дело со струями, выходящими из отверстия конечного диаметра, с конечным расходом. В таких струях имеет значение начальное распределение скоростей в выходном сечении струи. Наличие характерной длины — конечного ди-

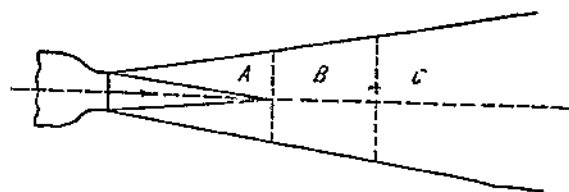


Рис. 99.

аметра выхода струи — делает неправильным ранее принятое заключение о подобии профилей скорости в различных сечениях струи, и задача сильно усложняется. То же относится и к случаю турбулентного слоя

на краю струи. Если струя имеет конечную ширину, а не бесконечна, то распределение скоростей в пограничном слое зависит от диаметра струи, и подобия профилей скорости не будет; отсюда вытекут все последующие осложнения задачи.

Однако из этого нельзя сделать вывода о непригодности ранее изложенного теоретического построения. Как было пояснено в теории ламинарного пограничного слоя, решения типа „источника“ переходят в соответствующие решения для начального, заданного наперед, распределения при достаточно больших удалениях от „источника“. Влияние начального распределения скоростей уменьшается с возрастанием расстояния до начального сечения. В зависимости от относительной величины $\frac{x}{d}$, где d — диаметр выходного отверстия струи, и неодно-

родности начального профиля, должно стираться отличие распределения скоростей в струе конечного диаметра от распределения скоростей в теоретически схематизированной струе.

Опыты показывают, что теория Прандтля-Толмиена дает прекрасное совпадение с экспериментом, начиная с $\frac{x}{d} = 8 \div 10$ для турбулентной струи, бьющей из конечного отверстия.

При рассмотрении же начального участка струи приходится решать задачу весьма приближенным приемом. На рис. 99 приведена принятая сейчас многими авторами схема струи, выходящей из отверстия конеч-

ного диаметра. Часть *A* представляет ядро струи, например, однородный по профилю скоростей поток. По краям этой области располагается пограничный слой, который, развиваясь, постепенно заполняет все сечения струи. В области *B* завершается реконструкция профиля осредненных скоростей $\bar{u}$, наконец, в области *C* можно принять то развитие профилей скорости, которое было бы в ранее рассмотренной теоретической струе, бьющей из бесконечно тонкого отверстия.

Такого рода схема была принята и изучена экспериментально и теоретически Кьюзом в цитированной его работе.

Г. Н. Абрамович в ряде статей¹⁾, посвященных теории и практическим применениям струй, принимает более простую схему двух областей *A* и *C*: начального участка, в котором развивается пограничный слой на краю струи, постепенно заполняющий все сечение струи, и области установившейся турбулентной струи. Переноса на случай струи конечной ширины предположение о подобии профилей скорости, верное, как было показано, лишь приближенно, Г. Н. Абрамович дает полный аэродинамический расчет струи и ряда ее приложений в экспериментальной и промышленной аэродинамике: расчет рабочей струи аэродинамической трубы, расчет воздушных завес и много других расчетов, представляющих значительный интерес. В последнее время, в своей докторской диссертации²⁾, Г. Н. Абрамович обобщил теорию струй на случай сжимаемого газа.

Задача о пограничном слое в области турбулентного перемешивания двух потоков, движущихся с разными скоростями, была разрешена Кьюзом³⁾.

Явление распространения турбулентной струи составило предмет большого числа экспериментальных исследований как за границей, так и в Советском Союзе. Не имея возможности перечислять всех исследователей (В. Туркус, В. Батурич, Д. Ляховский и С. Сыркин, А. С. Предводителев, К. К. Баулин, Г. Иванцов и мн. др.), сошлемся лишь на одну из статей Д. Н. Ляховского и С. Н. Сыркина⁴⁾.

Почти совершенно не исследован чрезвычайно важный для практики вопрос о распространении струи в ограниченном затопленном пространстве. Наличие в этом случае продольного перепада давления делает задачу с теоретической стороны крайне сложной. На рис. 100 даем для иллюстрации изобары, изотакхи и линии тока в струе, вытекающей в ограниченное пространство (труба)⁵⁾. Как видно из приводимых графиков, граница струи в этом случае даже приближенно не может рассматриваться как прямолинейная, изотакхи не являются прямолинейными лучами; процесс турбулентного распространения струи весьма сложен. У выхода струи наблюдается разрежение.

¹⁾ Г. Н. Абрамович. Теория свободной струи и ее приложения. Труды ЦАГИ, вып. 293, 1936 и другие статьи в Трудах ЦАГИ.

²⁾ Г. Н. Абрамович. К теории свободной струи сжимаемого газа. Труды ЦАГИ, вып. 377 (1939).

³⁾ loc. cit.

⁴⁾ Д. Н. Ляховский и С. Н. Сыркин. Аэродинамика элементарного факела. Журн. Технической Физики, т. VII, вып. 5, 1937.

⁵⁾ *Flügel. Jahrbuch der Schiffbau Techn. Gesellschaft*, 1930.

Наряду с исследованиями струй в среде той же плотности, большое значение для практики имеют исследования, посвященные вопросу о турбулентном распространении струй в пространстве, заполненном жидкостью (газом) другой плотности. Особенный интерес представляет распространение нагретых или охлажденных струй. Такого рода неизотермические струи, попадая в пространство, заполненное средой, отличной от струи температуры, искривляются; определение „траектории“

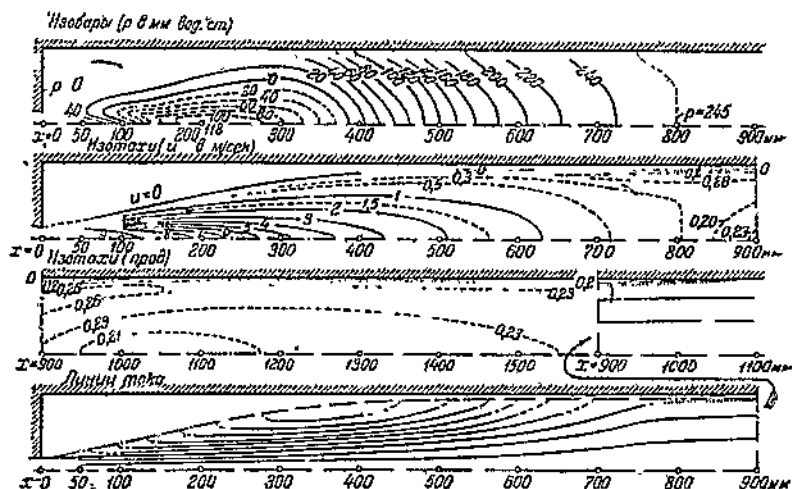


Рис. 100.

неизотермической струи представляет чрезвычайно важную промышленную задачу. Решение этой задачи с достаточной для практики точностью дано Г. Н. Абрамовичем в ранее цитированной его докторской диссертации. Весьма интересное и тщательное экспериментальное исследование этого явления было произведено недавно Д. Н. Ляховским и С. Н. Сыркиным¹⁾.

§ 4. Турбулентное движение жидкости, ограниченной стенкой. Логарифмический профиль скоростей. Применение логарифмического профиля скоростей к выводу закона сопротивления гладких труб. Степенные законы

В качестве второго замечательного применения теории „пути смешения“ Прандтля, разберем турбулентное движение жидкости, ограниченной твердой стенкой.

Рассмотрим следующую упрощенную схему²⁾. Жидкость совершает плоское осредненное движение, параллельное плоскости $ХОУ$ (рис. 101),

¹⁾ Д. Н. Ляховский и С. Н. Сыркин. Аэродинамика факела, вытекающего в среду другой плотности. Журнал технической физики, т. IX, в. 9, 1939 г.

²⁾ L. Prandtl. Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung: V. D. I. 77, № 5, 1933.

причем линии тока прямолинейны и параллельны оси OX . Перепада давлений нет, элементы движения не зависят от продольной координаты x , а лишь от y . При этих предположениях (опускаем черточки сверху осредненных величин) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $v = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} = 0$, и уравнение Рейнольдса приведет к такому:

$$0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (4.1)$$

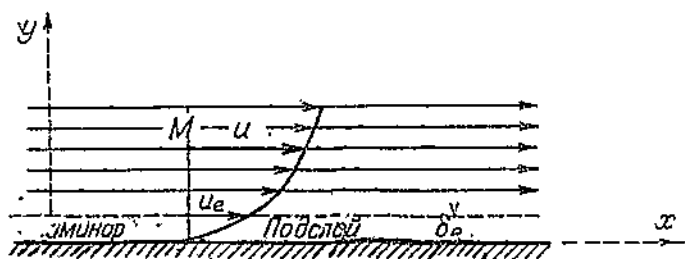


Рис. 101.

где под τ понимаем турбулентное напряжение $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$. Из уравнения (4.1) следует

$$\tau + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \text{const},$$

или, если обозначить через τ_0 трение на стенке,

$$\tau + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \tau_0. \quad (4.2)$$

Вблизи стенки поперечный турбулентный перенос количества движения невозможен, $\tau = 0$ и трение целиком сводится к вязкому трению. Наоборот, при удалении от стенки появляющийся за счет поперечных пульсаций v' турбулентный перенос создает значительное турбулентное трение τ , по сравнению с которым член $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ крайне мал и может быть опущен. Итак, в удалении от стенки по (4.2) будет:

$$\tau = \tau_0 \quad (4.3)$$

Применяя теорию Прандтля, будем иметь

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_0. \quad (4.4)$$

В этом случае, если отвлечься от роли молекулярной вязкости, единственной характерной длиной для течения является расстояние y от рассматриваемой точки M до стенки.

Прандтль предлагает сделать простейшее предположение о зависимости „пути смещения“ l от y — принять линейный закон

$$l = \kappa y, \quad (4.5)$$

где κ — некоторая универсальная константа турбулентного процесса.

При таком предположении уравнение (4.4) переписывается в виде

$$\rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_0 \quad (4.6)$$

и сможет быть легко до конца решено.

Введем существенное для дальнейшего обозначение

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = v_*. \quad (4.7)$$

Величина v_* имеет размерность скорости, но вместе с тем физически не является скоростью какой-то точки потока. Прандтль называет ее „Schubspannungsgeschwindigkeit“ (в английской литературе — „Friction-velocity“). Было бы неправильно переводить этот термин, как „скорость сдвига“ или „скорость трения“, так как это придавало бы термину совершенно нежелательный смысл — скорости, с которой происходит трение. На самом же деле терминология Прандтля предполагает, что речь идет о некоторой условной скорости, рассчитанной на основании напряжения трения.

Имея в виду динамический характер величины v_* , мы предложили, и это уже частично вошло в советскую литературу, для величины v_* термин „динамическая скорость“, подчеркивающий динамическое происхождение величины.

В дальнейшем мы ближе познакомимся с величиной v_* и ее количественным определением, пока же отметим, что эта величина по порядку очень мала по сравнению с осредненными скоростями в турбулентной части потока и скорее приближается по величине к пульсационным составляющим скорости актуального движения.

Интегрируя уравнение (4.6), получим

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} (\ln y + C). \quad (4.8)$$

Принятая схема имеет очевидный недостаток: на бесконечности (при $y \rightarrow \infty$) скорость потока становится бесконечно большой, что и естественно, так как повсюду, кроме области, близкой к стенке, $\tau = \tau_0$; если бы при $y \rightarrow \infty$ скорость стремилась к некоторому определенному пределу u_m , то напряжение трения τ должно было бы стремиться к нулю. Однако, как показывают опыты, при ограниченных y формула (4.8) очень хорошо описывает распределение скоростей в турбулентном потоке, об этом будет сказано несколько ниже.

Обращаясь к вопросу об определении константы интегрирования C , видим, что нет никаких граничных условий, так как вблизи стенки ($y = 0$) нельзя пренебрегать обычным вязким членом $\mu \frac{du}{dy}$, а на бес-

конечности $u \rightarrow \infty$.

Следуя Карману, введем в рассмотрение ламинарный подслоя (laminar sublayer), как такую область вблизи стенки, в которой движение определяется лишь ламинарным трением. Так как поперечные размеры ламинарного подслоя практически крайне малы (его иногда называют ламинарным фильмом), то можно принять, что распределение скоростей в подслое линейно. Обозначим толщину ламинарного подслоя через δ_l , а скорость на внешней границе его — через u_l . Предположим, что явления в подслое определяются лишь физическими константами жидкости μ и ρ , а также напряжением трения на стенке τ_0 ; тогда из соображений о размерности следует, что единственно возможная комбинация указанных величин будет

$$\delta_l = \alpha \frac{\nu}{v_*} = \alpha l_* \quad (4.9)$$

где величина l_* , имеющая размерность длины, но по природе своей динамическая величина, равная

$$l_* = \frac{\nu}{v_*} = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \quad (4.10)$$

могла бы быть по ранее указанным соображениям названа „динамической длиной“.

Постоянная α , входящая в формулу (4.9), представляет, наряду с постоянной κ , некоторую, теоретически пока неопределимую, величину.

Принимая линейное распределение скорости в ламинарном подслое, найдем u_l :

$$u_l = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot \delta_l = \frac{\tau_0}{\mu} \alpha \frac{\nu}{v_*} = \alpha \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \alpha v_* \quad (4.11)$$

Из многочисленных опытов, о которых речь еще впереди, следует, что α равно, приблизительно, 11,5, так что из равенств (4.9) и (4.11) можно сделать заключение: динамическая скорость и динамическая длина, примерно, в десять раз меньше скорости на внешней границе ламинарного подслоя и толщины его.

Введенное понятие о ламинарном подслое позволяет составить граничные условия для определения постоянной интегрирования в уравнении (4.8):

$$\text{при } y = \delta_l = \alpha l_*, \quad u = u_l = \alpha v_* \quad (4.12)$$

Таким путем получим

$$\frac{u}{v_*} - \alpha = \frac{1}{\kappa} \ln y - \frac{1}{\kappa} \ln \delta_l = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{l_*} - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha,$$

или

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{l_*} + \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha \quad (4.13)$$

Вводя новые постоянные A и B и переходя от натуральных логарифмов к десятичным, получим формулу Прандтля:

$$\varphi = A \lg \eta + B, \quad (4.14)$$

где положено для краткости:

$$\varphi = \frac{u}{v_*}, \quad \eta = \frac{y v_*}{\nu}. \quad (4.15)$$

Итак, профиль осредненных скоростей в рассмотренном турбулентном потоке является логарифмическим.

Опыты Никурадзе¹⁾, проведенные с большой тщательностью в серии гладких труб на воде в весьма широком диапазоне рейнольдсовых чисел (от 4 000 до 3 240 000), показали полную применимость логарифмического профиля (4.14) для круглых гладких труб. На рис. 102 показан график зависимости φ от $\lg \eta$; линейность связи между этими величинами более чем удовлетворительно подтверждается опытом. Представленная зависимость (прямая 1) соответствует логарифмической формуле:

$$\varphi = 5,75 \lg \eta + 5,5 \quad (4.16)$$

и лучше всего удовлетворяет точкам, близким к оси трубы. Точки, соответствующие области, более близкой к стенке трубы, несколько лучше укладываются на прямую 2, имеющую уравнение:

$$\varphi = 5,52 \lg \eta + 5,84. \quad (4.16')$$

Не останавливаясь на весьма интересных деталях экспериментов Никурадзе, поясним лишь, какие именно величины замерялись и как вычислялась основная величина v_* . Измеряя перепад давления Δp на некотором участке трубы длиной L (в области, достаточно удаленной от входа в трубу, а именно там, где профиль осредненных скоростей уже устанавливался), Никурадзе имел возможность тем самым определять τ_0 . В самом деле, из условия равномерного движения объема, заключенного между сечениями трубы, находящимися друг от друга на расстоянии L , следует (r — радиус трубы):

$$\Delta p \cdot \pi r^2 = 2\pi r L \tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \frac{r}{2L} \Delta p,$$

т. е. напряжение трения на стенке численно равняется перепаду давления на участке длиной в пол-радиуса трубы. Таким образом определялось τ_0 , а, следовательно, и $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$. Непосредственно замерялся профиль осредненных скоростей $u = u(y)$. Замечателен факт, что логарифмический профиль скоростей один и тот же в широком диапазоне рейнольдсовых чисел. Это свойство независимости от рейнольдсовых чисел будем в дальнейшем называть универсальностью. Логарифмический профиль скоростей в трубе универсален.

¹⁾ I. Nikuradse. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren. V. D. I. Forschungsheft, 356, 1932. Русский перевод см. „Проблемы турбулентности“.

Последний факт нельзя понимать так, что вообще распределение скоростей в трубе универсально, т. е. не зависит от рейнольдсова числа. Свойство универсальности относится лишь к логарифмическому профилю (4.16). Здесь все дело в выборе масштабов скорости

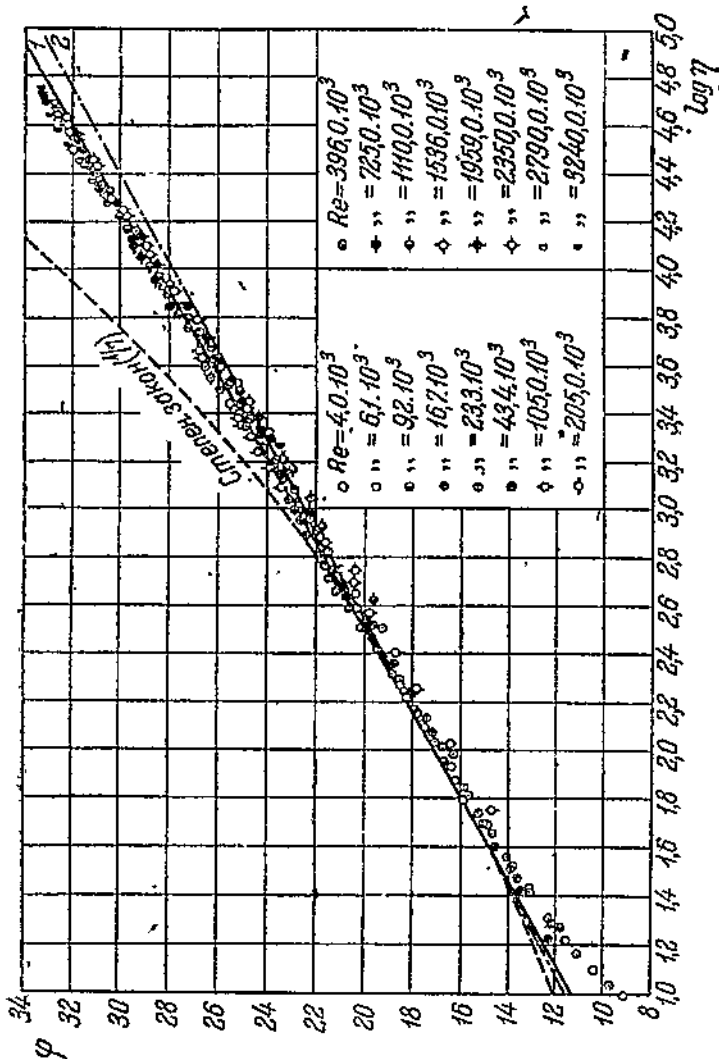


Рис. 102.

и длин u_* и l_* . Динамические скорость и длина представляют собою такие — будем их называть универсальными — масштабы, которые содержат в себе все влияние рейнольдсовых чисел потока, так что выраженные в универсальных масштабах безразмерные величины оказываются связанными равенствами, не содержащими явно рейнольдсовых чисел. Если принять вместо универсальных масштабов u_* и l_*

обычные масштабы, например, максимальную скорость u_m на оси трубы и радиус трубы r , то связь между безразмерными величинами $\frac{u}{u_m}$ и $\frac{y}{r}$ уже не будет универсальной (рис. 103).

Наряду с логарифмической формулой типа (4.14) можно установить еще другую формулу, заключающую выражение для максимальной скорости на оси трубы. Для составления этой формулы предположим, что равенство (4.8) справедливо вплоть до оси трубы ($y=r$). Тогда будем иметь при $y=r$

$$\frac{u_m}{v_*} = \frac{1}{\alpha} (\ln r + C);$$

и, вычитая отсюда обе части равенства (4.8),

$$\frac{u_m - u}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r}{y}. \quad (4.17)$$

Опыты прекрасно подтверждают правильность этой формулы при значении константы $\alpha = 0,4$. При этом формула (4.17) принимает вид

$$\frac{u_m - u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{r}{y}. \quad (4.18)$$

На рис. 104 приводим результаты опытов Никурадзе над гладкими и шероховатыми трубами. Формула (4.18) оказывается применимой и в случае шероховатых труб; объяснение этого факта будет дано в дальнейшем.

На том же графике (рис. 104) нанесена пунктиром кривая

$$\frac{u_m - u}{v_*} = 5,08 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{3/2}, \quad (4.19)$$

представляющая классическую формулу Дарси¹⁾, очень хорошо совпадающую с опытными точками вблизи оси трубы. Формула Дарси может быть получена теоретически из формулы Прандтля, если предположить, что в центре трубы, вдалеке от стенок, „путь смешения“ l постоянен и пропорционален радиусу трубы. В самом деле,

¹⁾ Darcy. Recherches experimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Mémoires de div. Savants étrangers, t. 15, 1858.

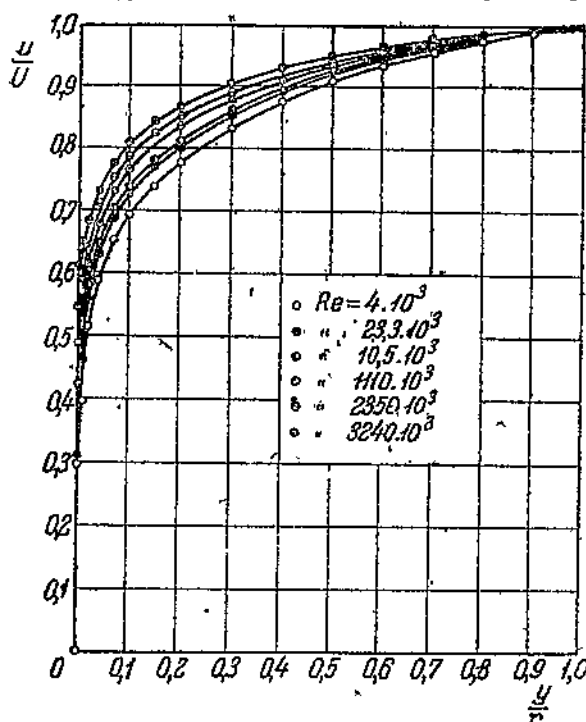


Рис. 103.

замечая, что распределение напряжения трения τ в функции от расстояния $z=r-y$ до оси трубы имеет вид:

$$\tau = \tau_0 \frac{z}{r}$$

и, полагая $l = \beta r$, будем иметь:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \rho \beta^2 r^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \tau_0 \frac{z}{r},$$

откуда следует (знак минус — из условия $\frac{du}{dz} < 0$)

$$-\frac{d \frac{u}{v_*}}{d \frac{z}{r}} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{z}{r}};$$

после интегрирования и принятия в расчет граничного условия,

$$\text{при } z=0, \quad u=u_m,$$

получим:

$$\frac{u_m - u}{v_*} = \frac{2}{3\beta} \left(\frac{z}{r} \right)^{3/2} = \frac{2}{3\beta} \left(1 - \frac{y}{r} \right)^{3/2},$$

т. е. формулу (4.19) при $\beta \approx 0,13$.

Если определить экспериментально $\frac{l}{r}$ в функции $\frac{y}{r}$ из формулы Прандтля

$$l = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}{\frac{du}{dy}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{z}{r}}{\frac{du}{dy}} = \\ = \frac{v_*}{\frac{du}{dy}} \sqrt{1 - \frac{y}{r}},$$

непосредственно замеряя v_* и $\frac{du}{dy}$ (по профилю скорости),

то связь между $\frac{l}{r}$ и $\frac{y}{r}$

представится кривой, показанной на рис. 105. Вблизи стенки имеет место закон $l=0,4y$, соответствующий предположению Прандтля; вблизи оси явление приближается к закону свободной струи ($l=0,13r$).

Универсальные формулы скоростей (4.14) и (4.18) легко могут быть превращены в формулы сопротивления труб. Напомним, что под

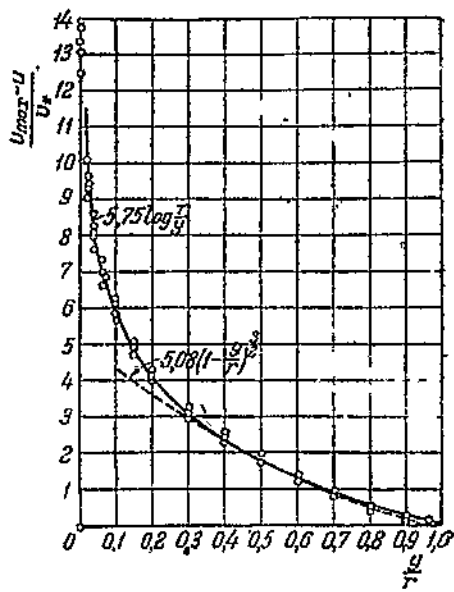


Рис. 104.

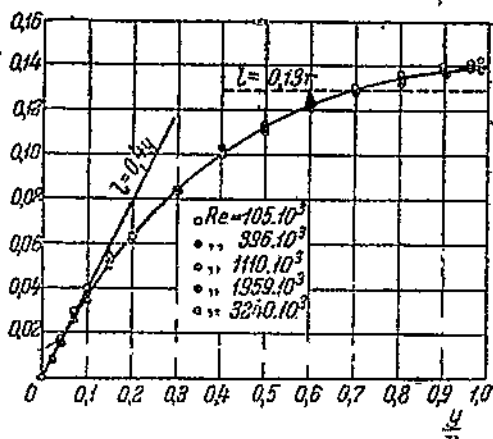


Рис 105.

формулой сопротивления понимают связь между коэффициентом сопротивления трубы и рейнольдсовым числом течения. Коэффициент сопротивления определяют двояким образом. Иногда рассматривают связь между перепадом давлений Δp на участке трубы L и кинетической энергией, рассчитанной по максимальной скорости u_m , т. е. вводят формулу

$$\Delta p = \psi \cdot \frac{L}{r} \cdot \rho u_m^3. \quad (4.20)$$

В этом случае коэффициент сопротивления будет равен (вспомнить ранее упомянутую связь между τ_0 и Δp)

$$\psi = \frac{\frac{\Delta p}{L} r}{\rho u_m^3} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho u_m^2}{2}} = 2 \left(\frac{v_*}{u_m} \right)^2. \quad (4.21)$$

В других случаях перепад давлений относят к квадрату средней по сечению скорости u_{cp} :

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho u_{cp}^3}{2}, \quad D = 2r. \quad (4.22)$$

При этом

$$\lambda = 8 \left(\frac{v_*}{u_{cp}} \right)^2. \quad (4.23)$$

Если бы коэффициенты сопротивления ψ в формуле (4.20) или λ в формуле (4.22) были бы постоянными величинами, то это означало бы, что сопротивление трубы подчиняется квадратичной зависимости от скорости. На самом же деле квадратичное сопротивление не имеет места, так как коэффициенты сопротивления представляют собой некоторые функции рейнольдсовых чисел

$$\psi = \psi(R_m) = \psi \left(\frac{u_m r}{\nu} \right) \quad (4.20')$$

$$\lambda = \lambda(R) = \lambda \left(\frac{u_{cp} D}{\nu} \right). \quad (4.22')$$

Для розыскания этих связей можно воспользоваться следующим общим приемом. Взяв универсальную формулу скоростей, в которой постоянная интегрирования определена из условий на границе ламинарного подслоя [формула (4.14)], применим эту формулу к оси трубы; если же в формуле приняты во внимание условия на оси трубы [формула (4.17)], то ее следует применить к внешней границе ламинарного подслоя. И в том и другом случае получим при этом искомую формулу сопротивления.

В самом деле, подставляя в (4.14) $y = r$ и $u = u_m$, получим

$$\frac{u_m}{v_*} = A \lg \left(\frac{r v_*}{\nu} \right) + B, \quad (4.24)$$

или по (4.21) и на основании очевидного равенства:

$$\frac{r v_*}{\nu} = \frac{r u_m}{\nu} \cdot \frac{v_*}{u_m} = R_m \sqrt{\frac{\psi}{2}},$$

найдем после простых приведений

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = A' \lg (R_m \sqrt{\psi}) + B'. \quad (4.24')$$

Линейная связь между величинами $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ и $\lg (R_m \sqrt{\psi})$ прекрасно подтверждается опытами. Что касается коэффициентов A' и B' то они по опытам Никурадзе равны:

$A' = 3,77$, $B' = 4,75$ при больших значениях $\lg (R_m \sqrt{\psi})$ и

$A' = 3,90$, $B' = 4,16$ при сравнительно небольших значениях той же величины (на рис. 106 прямые 1 и 2).

Значения постоянных A' и B' могут быть приближенно получены из значений постоянных A и B .

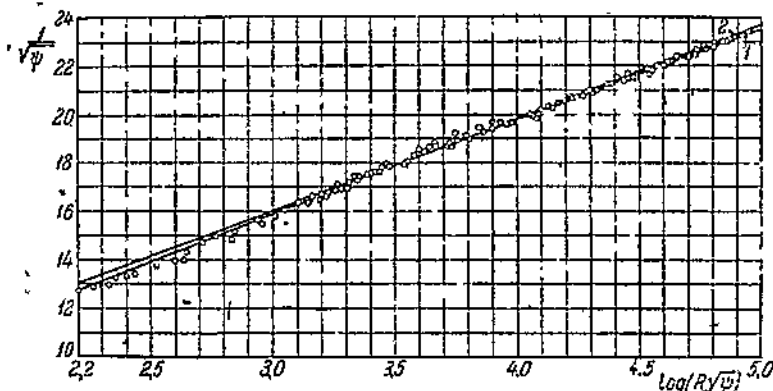


Рис. 106.

Точно так же, применяя формулу (4.17) к внешней границе ламинарного подслоя, получим:

$$\frac{u_m}{v_*} - \frac{u_l}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r}{r_l} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{rv_*}{\alpha v} \right),$$

или

$$\frac{u_{yl}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{rv_*}{v} \right) + \text{const},$$

что вновь приведет нас к той же формуле (4.24).

Заметим, что при выводе формулы сопротивления из формулы скорости имеет место некоторая неточность в константе κ , которая меняется в пределах 0,36—0,40.

Переход от формул сопротивления типа (4.20) к формулам сопротивления типа (4.22) может быть легко произведен предварительным осреднением профиля скоростей по сечению трубы. Так например, взяв профиль скорости (4.17), умножим обе части уравнения (4.17) на $2\pi (r-y)dy$, проинтегрируем по y от нуля до r и разделим на площадь сечения πr^2 ; тогда по определению u_{cp}

$$u_{cp} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r u \cdot 2\pi (r-y) dy,$$

будем иметь:

$$\frac{u_m - u_{cp}}{v_*} = \text{число} \approx 4 \text{ (от 3,75 до 4,03)}. \quad (4.25)$$

Как показывает рис. 107, опыт хорошо подтверждает факт постоянства отношения $\frac{u_m - u_{cp}}{v_*}$. Согласно равенствам (4.21) и (4.23), формула (4.25) дает

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\psi}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \approx \text{const.}$$

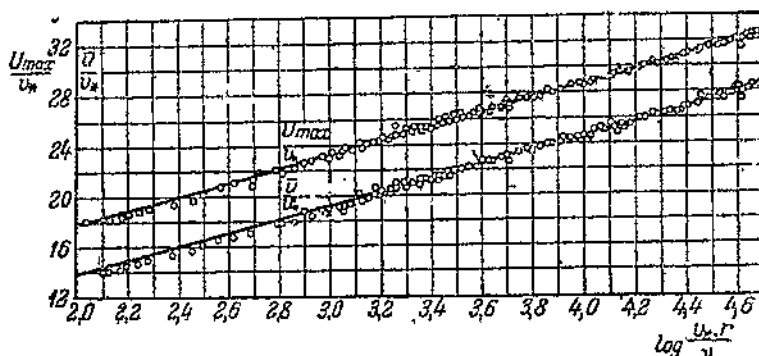


Рис. 107.

Соотношение (4.25) позволяет получить искомую зависимость λ от R . Для этого перепишем (4.24) в виде

$$\frac{u_m}{v_*} - \frac{u_{cp}}{v_*} + \frac{u_{cp}}{v_*} = A \lg \left(\frac{2r \cdot u_{cp}}{v} \cdot \frac{v_*}{2u_{cp}} \right) + B,$$

или (B'' — новая константа)

$$\frac{u_{cp}}{v_*} = A \lg \left(R \frac{v_*}{u_{cp}} \right) + B'',$$

и заменим $\frac{u_{cp}}{v_*}$ на $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$. Тогда окончательно получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = C \lg(R\sqrt{\lambda}) + D.$$

Опыты Никурадзе, а также и опыты многочисленных других исследователей (Стэнтон и Пэннэл, Омбек, Нуссельт, Якоб и Эрк, Шиллер и Германн) прекрасно ложатся на кривую:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg(R\sqrt{\lambda}) + 0,8 \quad (4.26)$$

Никурадзе предлагает следующую эмпирическую формулу выражающую явно λ в функции R :

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{R^{0,237}} \quad (4.27)$$

Соответствующая этой формуле сплошная кривая показана на рис. 108.

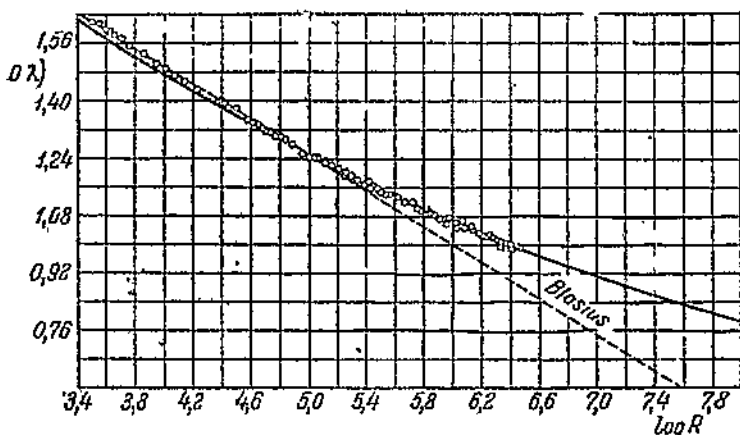


Рис. 108.

Из изложенного следует, что логарифмический профиль скоростей и логарифмическая формула сопротивления, выведенные на основании теории Прандтля о „пути смещения“ при простейшем предположении о линейной зависимости „пути смещения“ от расстояния до стенки, достаточно хорошо описывают явление турбулентного движения жидкости в трубах при больших рейнгольдсовых числах. При сравнительно малых числах Рейнольдса (но больших критического, конечно) можно заметить закономерные отклонения от логарифмических формул, объяснимые влиянием вязкости, не учитываемой в теории Прандтля.

Теория Прандтля, как и некоторые другие теории турбулентности, о которых будет рассказано в дальнейшем, относятся к числу так называемых полуэмпирических теорий. Это название оправдывается тем, что полуэмпирическая теория не может обойтись без некоторых эмпирических коэффициентов. Так, в теории свободной струи имелся один эмпирический коэффициент c в формуле связи пути смещения l с абсциссой x . В настоящем параграфе появление стенки и вместе с нею ламинарного подслоя привело к необходимости введения двух эмпирических коэффициентов: одного — κ — в формуле „пути смещения“, второго — α — в выражении толщины ламинарного подслоя и скорости на внешней границе подслоя. Все другие постоянные A , B и т. д. выражаются через основные константы κ и α .

Наличие эмпирических коэффициентов, конечно, несколько снижает ценность теории, но все же следует отметить, что наиболее существ-

венный факт — утверждение линейности связи между безразмерной скоростью $\frac{u}{v_*}$ и $\lg \frac{y}{l_*} = \lg \frac{y v_*}{\nu}$, точно так же как и установление логарифмической формулы сопротивления, представляют блестящее завоевание полуэмпирической теории Прандтля. Чрезвычайно существенно также установление возможности выбора динамических, универсальных масштабов, позволяющих дать формулы скорости, независимые от числа Рейнольдса, справедливые при всех достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Все сказанное здесь в той же степени относится и к полуэмпирической теории струй, изложенной в предыдущем параграфе.

Полуэмпирические теории нуждаются еще в ряде уточнений и углублении, но уже и сейчас связь их с опытом и поразительные результаты, достигнутые этими теориями в области, до сих пор не располагавшей никакими закономерностями, кроме чисто эмпирических, позволяют думать, что полуэмпирические теории заслуживают большого внимания.

До появления полуэмпирических теорий, при изучении турбулентных движений широко пользовались введенным в 1921 г. Карманом¹⁾ степенным законом скоростей (закон „одной седьмой“), основанным на известной в гидравлике эмпирической формуле Блязюса²⁾

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (4.28)$$

Как было выше показано, логарифмический профиль скоростей приводил к логарифмической формуле сопротивления. Можно попытаться степенную формулу сопротивления общего вида

$$\lambda = a R^m \quad (4.29)$$

получить из степенной формулы скоростей

$$\frac{u}{v_*} = A \left(\frac{v_* y}{\nu} \right)^n, \quad (4.30)$$

и таким путем найти связь между показателями n и m , а также A и a ³⁾. Для этого поступим так же, как и ранее при выводе логарифмической формулы сопротивления, — умножим обе части (4.30) на $\frac{2\pi(r-y)dy}{\pi r^2}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до r ; тогда получим:

¹⁾ Th. v. Kármán. Ueber die laminare und turbulente Reibung. ZAMM № 1, 1921, а также Abhandlungen Aerod. Instit. Aachen.

²⁾ H. Blasius. Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Forsch.-Arb. Ing. Wes. № 131, 1913.

³⁾ Метод вывода закона „одной седьмой“, изложенный Карманом, основан на соображениях о размерности, несколько затемняющих основную сущность вывода — его эмпирическую связь с формулой Блязюса. Предлагаемый вывод подчеркивает прямое соответствие степенных формул скоростей и сопротивлений.

$$\begin{aligned} \frac{u_{\text{ср}}}{v_*} &= \frac{2A}{r^2} \int_0^r \left(\frac{v_* y}{v} \right)^n (r-y) dy = 2A \left(\frac{v_* r}{v} \right)^n \int_0^1 \left(\frac{y}{r} \right)^n \left(1 - \frac{y}{r} \right) d\left(\frac{y}{r} \right) = \\ &= \frac{2A}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{v_* r}{v} \right)^n = \frac{2A}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{v_*}{u_{\text{ср}}} \right)^n \cdot \left(\frac{u_{\text{ср}} \cdot 2r}{v} \right)^n \cdot \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\frac{u_{\text{ср}}}{v_*}$ через $2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$ и $\frac{u \cdot 2r}{v}$ через R , найдем:

$$\frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{A}{2^{n-1}(n+1)(n+2)} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{2}} \right)^n \cdot R^n.$$

Отсюда можно найти λ в функции R :

$$\lambda = \frac{2^{\frac{5n+1}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}}{A^{\frac{2}{n+1}}} \cdot R^{-\frac{2n}{n+1}}.$$

Сравнивая последнее равенство с принятой формулой сопротивления (4.29), после простых приведений получим

$$\left. \begin{aligned} n &= -\frac{m}{2+m}, \quad m = -\frac{2n}{n+1} \\ A &= 2^{\frac{3-m}{2+m}} \cdot \frac{4+m}{2+m} a^{-\frac{1}{2+m}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Так например, если принять формулу Блязиуса (4.28), т. е. положить

$$m = -\frac{1}{4}, \quad a = 0,3164,$$

то вычисления по (431) приведут к известному закону „одной седьмой“:

$$\frac{u}{v_*} = 8,6 \left(\frac{y v_*}{v} \right)^{1/7}. \quad (4.32)$$

С опытом несколько лучше согласуется формула

$$\frac{u}{v_*} = 8,7 \left(\frac{y v_*}{v} \right)^{1/7}, \quad (4.32')$$

основанная на применении экспериментальной величины отношения $u_{\text{ср}}$ к u_m , равной 0,8¹⁾.

Степенной профиль скоростей (4.30) не универсален; несмотря на то, что скорость u и ордината y отнесены к динамическим масштабам v_* и $l_* = \frac{v}{v_*}$, все же формула (4.30) в отличие от логарифмической формулы не универсальна, т. е. входящие в нее величины A

¹⁾ См. статью *Прандтля* в „Aerodynamic Theory“ ed. by Durand, vol. III, p. 137.

n и представляют некоторые функции рейнольдсова числа R . На рис. 109 приведены профили скоростей в гладких трубках, полученные экспериментально Никурадзе¹⁾. По оси ординат отложено u^n , по оси абсцисс — y ; при различных рейнольдсовых числах, как видно из графиков, следует брать различные показатели n . Закон „одной седьмой“ является одним из частных законов, соответствующих интервалу рейнольдсовых чисел, примерно, от 10^4 до 10^5 ; при меньших R имеет место показатель $\approx 1/6$, наоборот, при очень больших R — показатель $\approx 1/10$.

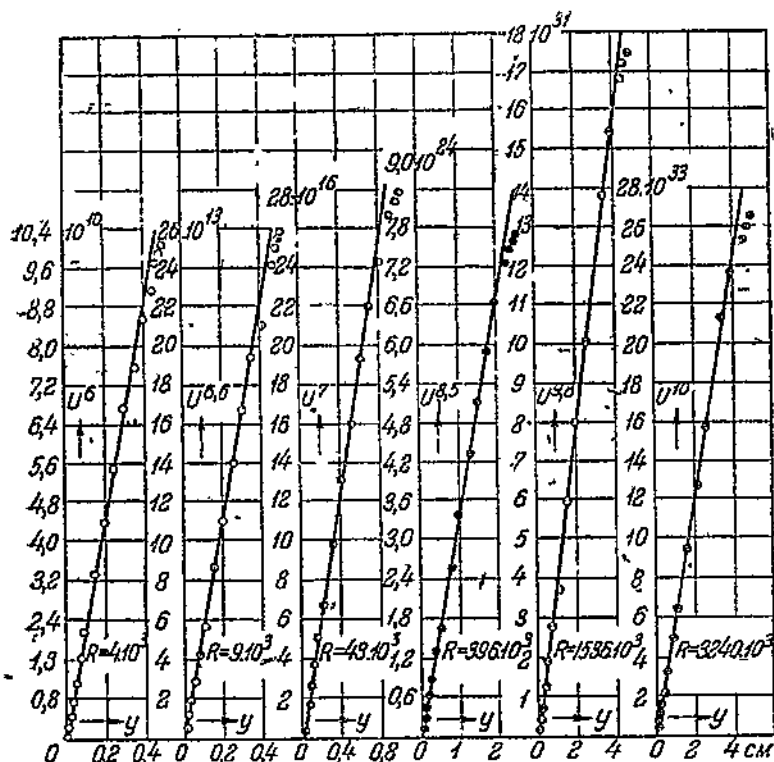


Рис. 109.

На рис. 110 приведены в логарифмическом масштабе:

I — логарифмический профиль скоростей

$$\varphi = 5,75 \log \eta + 5,5;$$

II — степенной закон „одной седьмой“

$$\varphi = 8,74 \eta^{1/7}$$

¹⁾ Loc. cit.

III — степенной закон „одной восьмой“

$$\varphi = 9,60\eta^{1/8}$$

и, наконец,

IV — степенной закон „первой степени“:

$$\varphi = \eta,$$

соответствующий, как легко видеть, ламинарному прямолинейному профилю скоростей в ламинарном подслое:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{y}{\delta_l} \quad \text{или} \quad \frac{u}{u_*} = \frac{y}{l_*}.$$

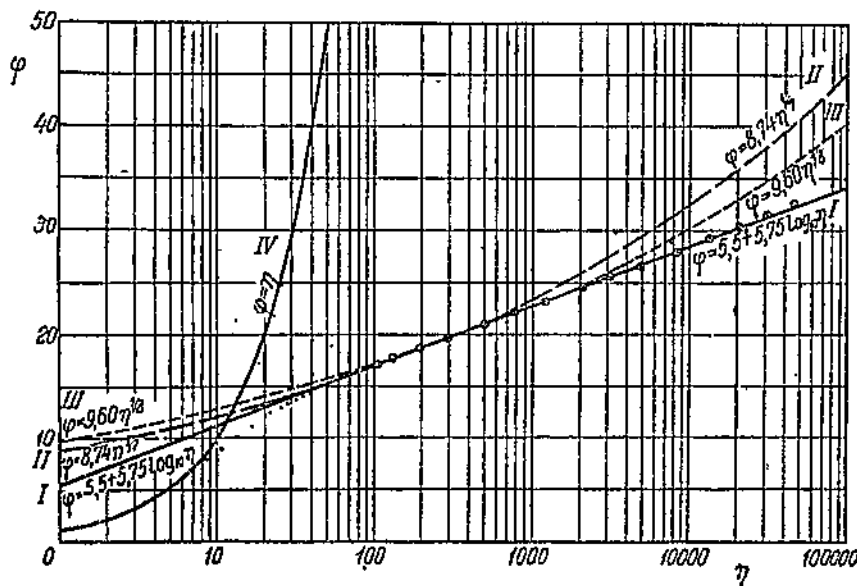


Рис. 110.

Из рисунка видно, что степенные законы представляют собою семейство кривых, оберткой которых является некоторая кривая, при $\eta > 50$ совпадающая с логарифмическим профилем скоростей.

Точка пересечения кривой IV $\varphi = \eta$ и логарифмического профиля I определяет безразмерную толщину ламинарного подслоя. Имеем, примерно,

$$\eta_l = \frac{\delta_l}{l_*} = \frac{u_* \delta_l}{\nu} \approx 12, \quad \delta_l \approx 12 \frac{\nu}{u_*}.$$

На основании различных опытов, величина α , ранее введенная формулой (4.9), действительно оказывается близкой к числу 12.

Для дальнейшего нам понадобится еще выражение степенного закона сопротивления, выраженного через максимальную скорость u_m и соот-

ветствующее рейнольдсово число $R_m = \frac{u_m r}{\nu}$. Применим степенную формулу скоростей (4.30) к оси трубы, положив $y = r$, $u = u_m$, тогда получим:

$$\frac{u_m}{v_*} = A \left(\frac{v_* r}{\nu} \right)^n = A \left(\frac{v_*}{u_m} \right)^n \cdot \left(\frac{u_m r}{\nu} \right)^n = A \left(\frac{v_*}{u_m} \right)^n R_m^n,$$

отсюда следует:

$$\left(\frac{v_*}{u_m} \right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho u_m^2} = \frac{1}{\frac{2}{A^{1+n}}} R_m^{-\frac{2n}{n+1}} = \frac{1}{2} \zeta \cdot R_m^{-\frac{2n}{n+1}}. \quad (4.33)$$

Закон „одной седьмой“ дает, в частности ($A = 8,7$; $n = \frac{1}{7}$)

$$\frac{\tau_0}{\rho u_m^2} = 0,0225 R_m^{-0,25}. \quad (4.34)$$

Коэффициент ζ представляет собою коэффициент сопротивления в формуле Кармана:

$$\tau_0 = \zeta \cdot \frac{1}{2} \rho u_m^2 \cdot \left(\frac{u_m r}{\nu} \right)^{-\frac{2n}{n+1}}. \quad (4.35)$$

§ 5. Применение степенного и логарифмического законов к расчету сопротивления пластины. Учет влияния ламинарного участка пограничного слоя

Степенной и логарифмический профиль скоростей можно применить к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине, если условиться сопоставлять радиусу трубы r — толщину пограничного слоя δ , а максимальной скорости u_m на оси трубы — скорость на внешней границе пограничного слоя — U . При таком сопоставлении рейнольдсовому числу R_m будет соответствовать рейнольдсово число пограничного слоя R_δ . Эксперимент подтверждает полную возможность такого сопоставления; в настоящее время указанный прием широко используется при расчетах турбулентного пограничного слоя как на пластинах, так и на телах криволинейного профиля. Таким образом тесно связываются между собой законы внутренней и внешней задачи — течения в трубах и внешнего обтекания тел.

Рассмотрим задачу о продольном обтекании пластины плоско-параллельным потоком, имеющим на бесконечности скорость U ; плотность жидкости — ρ , вязкость ее — μ .

Согласно теореме количеств движения, изложенной в предыдущем отделе, полное сопротивление W_x одной стороны участка пластины длины x от переднего края будет определяться интегралом

$$W_x = \rho \int_0^x u(U - u) dy, \quad (5.1)$$

а местное напряжение трения — формулой

$$\tau_0 = \frac{dW_x}{dx}. \quad (5.2)$$

Предположим сначала для простоты, что, начиная с переднего края ($x=0$), пограничный слой турбулентен, и применим закон „одной седьмой“. Разделим друг на друга равенства

$$\frac{u}{v_*} = A \left(\frac{y}{l_*} \right)^{1/7}, \quad \frac{U}{v_*} = A \left(\frac{\delta}{l_*} \right)^{1/7},$$

тогда получим уравнение профиля скорости в пограничном слое

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (5.3)$$

Подставляя полученный профиль в правую часть равенства (5.1), найдем:

$$\begin{aligned} W_x &= \rho U^2 \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy = \rho U^2 \delta \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] d \left(\frac{y}{\delta} \right) = \\ &= \frac{7}{72} \rho U^2 \delta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Обратимся теперь к уравнению (5.2); в левую часть его подставим значение τ_0 , согласно (4.34) равное

$$\tau_0 = 0,0225 \rho U^2 \cdot R_\delta^{-1/4}, \quad (5.5)$$

а в правую — результат дифференцирования (5.4); тогда получим

$$\frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{1/4}. \quad (5.6)$$

Уравнение это легко интегрируется и дает

$$\delta = 0,37 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/4} \cdot x^{4/5}, \quad (5.7)$$

где принято начальное условие: при $x=0$, $\delta=0$. Из уравнения (5.7) следует, что турбулентный пограничный слой растет с ростом x пропорционально $x^{4/5}$, в отличие от ламинарного слоя, утолщающегося пропорционально $x^{1/2}$. Такое увеличение быстроты роста δ при переходе от ламинарного участка к турбулентному наблюдается экспериментально (см. например, кривые $\delta(x)$ на рис. 58, 60, 61) и может, как ранее указывалось, даже служить для определения области перехода ламинарного слоя в турбулентный.

Имея выражение (5.7) для δ в функции от x , найдем и полное сопротивление одной стороны пластины

$$W_x = 0,036 \rho U^2 x \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/5} \quad (5.8)$$

Введем коэффициент сопротивления C_f равенством (S — смоченная площадь пластины):

$$C_f = \frac{W_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} = \frac{W_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 x \cdot 1},$$

тогда будем иметь следующую формулу сопротивления:

$$\left. \begin{aligned} C_f &= 0,072 R_x^{-1/2} \\ R_x &= \frac{Ux}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Формула (5.9) была дана впервые Карманом еще в 1921 г.¹⁾. Опыты Визельсбергера, проведенные в аэродинамической трубе на тупоносых пластинах, показали, что коэффициент 0,072 несколько мал и должен быть увеличен до 0,074, так что следует пользоваться формулой

$$C_f = 0,074 R_x^{-1/2}. \quad (5.10)$$

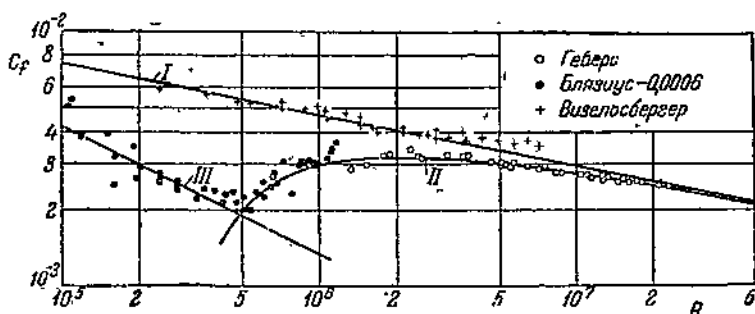


Рис. 111.

На рис. 111 цифрой I отмечена прямая, соответствующая уравнению (5.10). В опытах Визельсбергера (на графике — крестики) ламинарный участок был незначителен, так как передний край пластины не был заострен; этим объясняется тот факт, что даже при сравнительно малых рейнولدсовых числах коэффициент сопротивления удовлетворяет формуле турбулентного сопротивления. На том же рисунке приведена прямая III, соответствующая формуле Блязиуса ламинарного трения

$$C_f = 1,327 R_x^{-1/2}. \quad (5.11)$$

Как показывают опыты Блязиуса и Геберса над пластинами с острой передней кромкой, протаченными в спокойной воде, при тех же рейнولدсовых числах, что и у Визельсбергера, удастся получать чисто ламинарное трение (до, примерно, $R = 5 \cdot 10^5$), а затем

¹⁾ Th. v. Kármán. Ueber laminare und turbulente Reibung. ZAMM, № 1, 1921.

переход на смешанный пограничный слой — в передней части ламинарный, затем турбулентный.

Чтобы разыскать формулу для переходного режима (на рисунке — кривая II) Прандтль предлагает следующий прием¹⁾.

Обозначим через C_f и W коэффициент трения и полное сопротивление, полученные с учетом ламинарного участка пограничного слоя, а через C_f^* и W^* — те же величины, рассчитанные без учета ламинарного участка, т. е. при турбулентном слое, начинающемся с переднего края пластины. Коэффициент C_f очевидно, меньше чем C_f^* . Так как полная сила сопротивления W , согласно формуле (5.1), определяется только распределением скоростей и толщиной слоя в конечном сечении, то мы можем, приравнявая сопротивления пластин W и W^* , рассчитанные двумя способами, учесть влияние ламинарного участка тем, что укоротить истинную длину пластины x на некоторую длину l , тем меньшую, чем меньше ламинарный участок. Таким образом получим

$$W = C_f \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 x \cdot 1 = W^* = C_f^* \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 (x - l) \cdot 1,$$

откуда следует

$$C_f = C_f^* \cdot \frac{x-l}{x}$$

или, что все равно

$$C_f = C_f^* \left(1 - \frac{l}{x}\right) = C_f^* \left(1 - \frac{R_l}{R_x}\right), \quad (5.12)$$

где величина $R_l = \frac{U l}{\nu}$ характеризует рейнольдсово число ламинарного участка слоя; чем меньше ламинарный участок слоя, тем ближе C_f к C_f^* ; если ламинарный участок заполняет почти всю пластину, то предлагаемый метод учета слишком груб.

Прандтль предлагает для оценки влияния ламинарного участка заменять произведение $C_f^* \cdot R_l$ постоянной величиной, представляющей некоторое среднее значение этого произведения. Так, по опытам Геберса²⁾ (рис. 111) $R_l = 5 \cdot 10^5$, C_f^* при $R_x > R_l$ в переходной области лежит между $3 \cdot 10^{-3}$ и $4 \cdot 10^{-3}$; если принять

$$C_f^* \cdot R_l \approx 1700,$$

то кривая

$$C_f = C_f^* - \frac{1700}{R_x} = \frac{0,074}{R_x^{1/2}} - \frac{1700}{R_x}, \quad (5.13)$$

снабженная на рис. 111 цифрой II, прекрасно удовлетворяет опытным точкам Геберса.

В зависимости от степени турбулентности набегающего потока и формы переднего края пластины, критическое рейнольдсово число изменяется, а вместе с ним меняется и числитель добавочного члена в фор-

¹⁾ L. Prandtl. Ergebnisse der Aerod. Versuchsanstalt, Göttingen, Lief. III; а также статья Прандтля в т. III „Aerodynamic Theory“ ed. by Durand, стр. 151.
²⁾ Schiffbau, IX, 1908.

муле (5.13), определяющего влияние начального ламинарного участка. Так например, Шёйхер¹⁾ получал переход при $R_L = 10^5$, что дает вместо 1700 число 300. При переходном рейнольдсовом числе $R_L = 2 \cdot 10^5$ опытные точки близки к переходной кривой, получаемой из (5.13) заменой числа 1700 на 600 и т. д.

Кемпф²⁾, производивший опыты по определению сопротивления длинных пластин (протаскивание в спокойной воде), доходил до весьма больших рейнольдсовых чисел $R_x \approx 5 \cdot 10^8$. Результаты опытов Кемпфа показали, что при $R_x > 10^7$ степенная формула Кармана (5.10) уже непригодна, так как дает преуменьшенные значения коэффициента трения. Причиной этого явления служит ограниченность возможности применения закона „одной седьмой“ при больших рейнольдсовых числах.

Формулу сопротивления, верную при очень больших рейнольдсовых числах, можно получить, применяя логарифмический профиль скоростей, который, как мы ранее указывали, универсален, т. е. не зависит от рейнольдсова числа течения.

Непосредственное применение логарифмического профиля скоростей было дано Прандтлем³⁾. Аналогичное решение Кармана будет приведено несколько ниже.

Введем, как и ранее, обозначения

$$\frac{u}{v_*} = \varphi, \quad \frac{y v_*}{\nu} = \eta$$

и условимся отмечать подстрочным индексом „1“ значения величины на внешней границе пограничного слоя:

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{v_*} = \frac{U}{v_*}, \quad \eta_1 = \frac{y_1 v_*}{\nu} = \frac{\delta v_*}{\nu}. \quad (5.14)$$

Равенства (5.1) и (5.2) дают

$$\tau_0 = \rho v_*^2 = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u (U - u) dy. \quad (5.15)$$

Заменим все входящие сюда величины их выражениями через φ , φ_1 , η , η_1 по формулам:

$$v_* = \frac{u_1}{\varphi_1}, \quad u = \varphi v_* = \varphi \frac{u_1}{\varphi_1}, \quad U = u_1, \quad \delta = \frac{\nu}{v_*} \eta_1 = \frac{\nu}{u_1} \varphi_1 \eta_1 \quad (5.16)$$

и, кроме того, вместо дифференцирования по x произведем дифференцирование по η_1 , согласно равенству

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\eta_1}{dx} \cdot \frac{d}{d\eta_1};$$

¹⁾ Schoenherr. Trans. Soc. Naval Architects and Marine Eng. 40 (1932).

²⁾ G. Kempf. Werft, Reederei, Hafen, 10 (1929).

³⁾ L. Prandtl. Ergebnisse der Aerod. Versuchsanstalt, Göttingen, Lief. IV. См. также „Aerod. Theory“ vol. III, p. 147.

тогда равенство (5.15) приведет к виду

$$\frac{u_1}{\varphi_1^2} = \nu \frac{d\eta_1}{dx} \frac{d}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta. \quad (5.17)$$

Производная от интеграла выразится так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta &= \left[\varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right]_{\eta=\eta_1} + \int_0^{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta = \\ &= \int_0^{\eta_1} \frac{\varphi^2}{\varphi_1^2} d\eta \cdot \frac{d\varphi_1}{d\eta_1}, \end{aligned}$$

так что уравнение (5.17) приводится к следующему виду:

$$dx = \frac{\nu}{u_1} F(\eta_1) d\eta_1, \quad (5.18)$$

где введено обозначение:

$$F(\eta_1) = \frac{d\varphi_1}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \varphi^2 d\eta. \quad (5.18')$$

Интегрируя (5.18) в предположении, что при $x=0$, $\delta=0$, а, следовательно, и $\eta_1=0$, получим ($u_1 = U = \text{const}$):

$$x = \frac{\nu}{u_1} \int_0^{\eta_2} F(\eta_1) d\eta_1 = \frac{\nu}{u_1} \Phi(\eta_2),$$

откуда следует:

$$R_x = \Phi(\eta_2) = \int_0^{\eta_2} \frac{d\varphi_1}{d\eta_1} \left(\int_0^{\eta_1} \varphi^2 d\eta \right) d\eta_1. \quad (5.19)$$

В последних равенствах η_2 обозначает текущее значение η_1 , соответствующее взятому x ; значок „2“ поставлен лишь для того, чтобы не смешать это текущее η_1 с переменным интегрирования η_1 , входящим под знак интеграла.

Составим теперь C_f по формуле:

$$C_f = \frac{W_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot x \cdot 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho u_1^2 x} \int_0^x \tau_0 dx. \quad (5.20)$$

Интеграл, стоящий справа, по (5.18) равен

$$\begin{aligned} \int_0^x \tau_0 dx &= \int_0^{\eta_2} \rho \nu \frac{\varphi^2}{\varphi_1^2} \cdot \frac{\nu}{u_1} F(\eta_1) d\eta_1 = \rho \nu u_1 \int_0^{\eta_2} \frac{F(\eta_1)}{\varphi_1^2} d\eta_1 = \\ &= \rho \nu u_1 \Psi(\eta_2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Подставляя это выражение в (5.20) и пользуясь равенством (5.19)^{*} получим

$$C_f = \frac{2\Psi(\eta_2)}{R_x} = \frac{2\Psi(\eta_2)}{\Phi(\eta_2)}. \quad (5.22)$$

Если задаться профилем скорости $\varphi = \varphi(\eta)$ в пограничном слое и тем самым задаться равенством $\varphi_1 = \varphi(\eta_1)$, то функции $F(\eta_2)$, $\Phi(\eta_2)$ и $\Psi(\eta_2)$ будут определены, и совокупность равенств (5.19) и (5.22) представит параметрическую связь (через η_2) между C_f и R_x , т. е. не что иное, как искомую формулу сопротивления.

Прандтль задается логарифмическим профилем (4.16), который в натуральных логарифмах имеет вид

$$\varphi = 2,5 \ln \eta + 5,5, \quad (5.23)$$

но несколько трансформирует его. При $\eta \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow -\infty$, а не к нулю, как должно быть в действительности. Вместо того, чтобы избежать этот недостаток путем введения ламинарного подслоя, можно заменить (5.23) профилем

$$\varphi = a \ln(1 + b\eta) \quad (5.24)$$

и подобрать константы a и b так, чтобы при $b\eta \gg 1$ профиль (5.24) совпадал с (5.23), т. е. положить:

$$a \ln b = 5,5; \quad a = 2,5, \quad b = 9.$$

Результаты вычислений получаются несколько лучшими, если положить:

$$a = 2,495, \quad b = 8,93. \quad (5.25)$$

Выбрав логарифмический профиль скоростей в форме (5.24), можем вычислить функции $F(\eta)$, $\Phi(\eta)$ и $\Psi(\eta)$. Опуская несложные выкладки (вычисление интегралов по (5.18'), (5.19) и (5.21)), приведем результаты:

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= a^3 \left(\ln^2 z - 2 \ln z + 2 - \frac{2}{z} \right) \\ \Phi(\eta) &= \frac{a^3}{b} (z \ln^2 z - 4z \ln z - 2 \ln z + 6z - 6) \\ \Psi(\eta) &= \frac{a}{b} \left[z + 1 - \frac{2(z-1)}{\ln z} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

где для краткости письма положено

$$z = 1 + b\eta.$$

В таблице 4 сопоставлены между собою $R_x \cdot 10^{-6}$ и $C_f \cdot 10^3$ при помощи заданных текущих значений $\eta \cdot 10^{-3}$.

ТАБЛИЦА 4

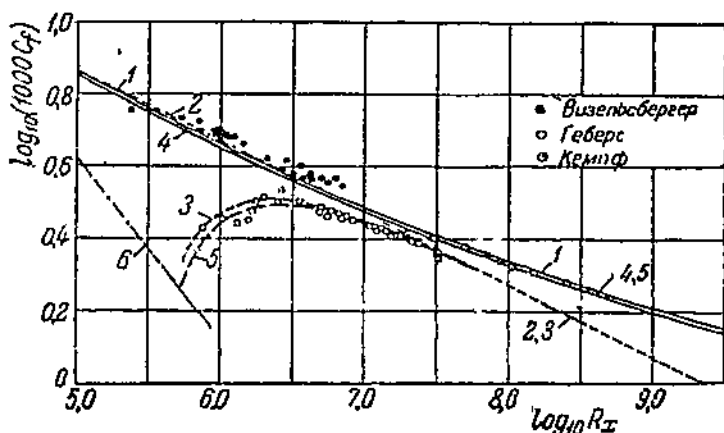
$\eta \cdot 10^{-3}$	0,5	1,0	2,0	3,0	5,0	12,0	20,0	50,0	100	500
$R_x \cdot 10^{-6}$	0,337	0,820	1,96	3,25	6,10	17,7	32,5	96,5	217,5	1401
$C_f \cdot 10^3$	5,65	4,75	4,05	3,71	3,34	2,81	2,57	2,20	1,96	1,55

По этим данным для численных расчетов Шлихтингом составлена эмпирическая формула

$$C_f = \frac{0,472}{(\lg R_x)^{2,58}}. \quad (5.27)$$

Экспериментальные точки Кемпфа ложатся несколько ниже кривой (1) на рис. 112, соответствующей формуле (5.27). Опытным данным лучше удовлетворяет кривая (4) на том же рисунке, соответствующая формуле

$$C_f = \frac{0,455}{(\lg R_x)^{2,58}}. \quad (5.28)$$



$$1 - C_f = \frac{0,472}{(\lg R_x)^{2,58}};$$

$$2 - C_f = \frac{0,474}{\sqrt{R_x}};$$

$$3 - C_f = \frac{0,474}{\sqrt{R_x}} - \frac{1700}{R_x};$$

$$4 - C_f = \frac{0,455}{(\lg R_x)^{2,58}};$$

$$5 - C_f = \frac{0,455}{(\lg R_x)^{2,58}} - \frac{1700}{R_x};$$

$$6 - C_f = \frac{1,328}{\sqrt{R_x}}.$$

Рис. 112.

Учет ламинарного участка в начале пластины можно производить тем же приемом, что и в случае степенного закона, т. е. положить

$$C_f = \frac{0,455}{(\lg R_x)^{2,58}} - \frac{1700}{R_x}. \quad (5.29)$$

На рис. 112 собраны вместе различные степенные и логарифмические формулы; совпадение с экспериментом следует признать более чем удовлетворительным.

Формулу Прандтля-Шлихтинга (5.28) можно экстраполировать на большие реynольдовы числа, так как она основывается на универсальном логарифмическом законе скоростей.

Как уже ранее было указано, степенные законы также можно применять при больших рейнольдсовых числах, если от закона „одной седьмой“ переходить к законам „одной восьмой“ и т. д. Строго говоря, при этом на разных участках пластины следует применять различные степенные законы, согласно графикам рис. 109 или таблице, приведенной Никурадзе в ранее цитированной его работе.

И. Г. Ханович¹⁾ показал, что можно подобрать такое значение показателя в степенном законе, при котором степенная формула сопротивления становится верной в широком диапазоне рейнольдсовых чисел.

Формула И. Г. Хановича имеет вид

$$C_f = 0,0315 R_x^{-0,145} \quad (5.30)$$

и соответствует значению показателя степени в законе скоростей

$n = 0,0925 = \frac{1}{10,80}$. Значение коэффициента ζ в формуле Кармана (4.35)

будет при этом $\zeta = 0,02085$. Формула (5.30) может с успехом применяться в интервале рейнольдсовых чисел $2 \cdot 10^6 < R_x < 10^{10}$. Простота этой формулы по сравнению с формулой Прандтля-Шлихтинга очевидна. Кривая, соответствующая формуле (5.30), пересекает кривые степенных законов и чрезвычайно близка к кривой Прандтля. График, иллюстрирующий это положение, можно найти в вышеуказанной работе И. Г. Хановича.

Предложенный Прандтлем прием учета влияния ламинарного участка на сопротивление пластины не является единственно возможным.

Можно себе представить еще следующую схему. Предположим, что переход ламинарного слоя в турбулентный происходит скачком в одной точке без какого-то ни было переходного участка. Тогда, начиная расчет турбулентного пограничного слоя с этой точки, мы можем требовать сопряжения турбулентного слоя с предыдущим ламинарным или по толщине слоя (прием Бюргерса), или по силе трения (прием Кармана) или по какой-нибудь другой, характерной для слоя, величине. Такие приемы физически более оправданы, чем прием Прандтля, но зато связаны с большими расчетными трудностями. Сущность этих расчетов ясна. Сначала проводится полный расчет ламинарного участка пограничного слоя до точки перехода, а затем уже по полученным конечным результатам начинают рассчитывать тем или другим методом турбулентный пограничный слой²⁾.

К. К. Федяевский³⁾ произвел для сравнения расчет коэффициента

¹⁾ И. Г. Ханович. О степенном законе распределения скоростей. Труды Ленинградского индустриального института, раздел физ.-мат. наук, № 1, 1937 г.

²⁾ Подробное изложение этих методов можно найти в только что появившейся в № 7 „Техника воздушного флота“ за 1940 г. статье К. К. Федяевского и Б. Т. Горощенко.

³⁾ Сопротивление трения крыльев при различном расположении места перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. (Доклад на конф. по физ. аэродинамике, Москва, ЦАГИ, Май 1939 г.); см. Техника воздушного флота № 7—8, 1939 г., стр. 11.

сопротивления пластины при различных отношениях длины ламинарного участка l к длине пластины c по методам Бюргерса, Кармана, Прандтля, а также и приемом сопряжения толщин вытеснения δ^* . Результаты расчета показали, что если отвлечься от сравнительно больших значений l/c , например, больших 50%, когда вообще роль переходного участка может оказаться уже велика и приближенные приемы не допустимы, то разница между коэффициентами сопротивления, рассчитанными различными приемами, не превосходит: 10% до $l/c = 30\%$ и 12% до $l/c = 50\%$. При сравнительно малых l/c практически можно пользоваться простым приемом Прандтля.

В зависимости от относительной длины ламинарного участка коэффициент сопротивления пластины может измениться более чем в шесть раз.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ТЭЙЛОРА ПЕРЕНОСА ЗАВИХРЕННОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ. ПРИЛОЖЕНИЕ ИДЕИ ПОДОБИЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ ДВИЖЕНИЮ

§ 1. Перенос завихренности при турбулентном перемешивании. Формула Тейлора для плоско-параллельного потока. Напряженное турбулентного трения по теории переноса завихренности и по теории переноса количества движения

Рассмотрим плоское осредненное турбулентное движение, параллельное плоскости $ХОУ$ с линиями тока, параллельными оси $ОХ$. Как было ранее показано, напряженное турбулентного трения $\tau = -\rho \overline{u'v'}$ представляет собою средний перенос количества движения в направлении, перпендикулярном к линиям тока осредненного движения, т. е.

$$\tau = -\overline{\rho(u'v')} = -\rho \overline{u'v'}.$$

В уравнениях Рейнольдса основное значение в рассматриваемом случае имеет величина $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$, представляющая отнесенную к единице массы проекцию главного вектора сил турбулентного трения в данной точке. Величина эта, равная

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} = -\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} - \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}},$$

может быть, в силу уравнения неразрывности для пульсационных скоростей

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

преобразовано так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x} - v' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} - v' \frac{\partial u'}{\partial y}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) + \overline{v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Опыт показывает, что во многих случаях движения можно положить $\overline{u'^2} = \overline{v'^2}$; в этих случаях говорят об изотропии турбулентности. Иногда, независимо от наличия изотропии, возможно вообще пренебречь продольными производными от средних значений по сравнению с поперечными производными (установившееся движение в цилиндрической трубе и др.). В тех и других случаях будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \overline{v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)} = \overline{v' \zeta'}. \quad (1.2)$$

Правая часть равенства (1.2) представляет собою выражение среднего турбулентного переноса завихренности ζ' в плоском потоке.

В осредненном потоке рассматриваемого нами типа — плоско-параллельный поток со скоростями $\bar{u}$, параллельными оси OX , являющимися функциями только y — средняя завихренность равна $\bar{\zeta} = \frac{d\bar{u}}{dy}$, так как $\bar{v} = 0$. Применяя к переносу завихренности общую теорию турбулентного переноса, изложенную в начале предыдущей главы, можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dy} &= \overline{v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)} = \frac{A}{\rho} \frac{d\bar{\zeta}}{dy} = l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{d\bar{\zeta}}{dy} = \\ &= l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем, подчеркиваем, завихренность отвечает основному требованию, предъявляемому теорией переноса к переносимой субстанции — она сохраняется. В самом деле, по теореме Гельмгольца (отдел I, глава II), в случае плоского движения среднее значение индивидуальной производной от завихренности ζ сведется к величине $\sqrt{\nu} \zeta^2$, представляющей молекулярную (вязкую) диффузию завихренности, как всегда опускаемую нами при рассмотрении турбулентного переноса.

Входящий в формулу (1.3) „путь смешения“ l играет ту же роль, что и „путь смешения“ в теории Прандтля переноса количества движения, но не равен ему, так как количество движения, как переносимая „субстанция“, обладает другими свойствами чем завихренность, в частности, количество движения в плоском движении не сохраняется.

Равенство (1.3) может быть переписано в виде (опускаем черточку у осредненных скоростей, так как далее будем иметь дело лишь с осредненными величинами):

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho l^2 \frac{du}{dy} \frac{d^2u}{dy^2}. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) была выведена впервые Тэйлором почти двадцать пять лет тому назад (в 1915 г.), но опубликована и получила распространение лишь в 1932 г.¹⁾

Формула Тэйлора отличается лишь постоянным множителем от формулы Прандтля, если путь смещения не зависит от ординаты y . В самом деле, интегрируя при этом (1.4), будем иметь

$$\tau = \frac{1}{2} \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (1.5)$$

а так как в теории Прандтля путь смещения определяется с точностью до постоянного множителя, то формула (1.5) эквивалентна известной формуле Прандтля. Так, излагая, теорию пограничного слоя на краю плоской струи, мы уже пользовались формулой (1.5), когда вводили произвольно множитель $1/2$ в формулу Прандтля для упрощения выкладок. При изложении теории струи в безграничном пространстве (l не зависит от y) было бы все равно — пользоваться ли теорией переноса количества движения или теорией переноса завихренности.

§ 2. Теория турбулентного следа за телом. Вихревая и турбулентная часть следа за телом. Распределение скоростей и температур в турбулентном следе

Прежде чем рассмотреть в качестве иллюстрации теории Тэйлора вопрос о распределении осредненных скоростей и температур в следе за телом, выясним физическую структуру движения жидкости в кормовой области.

Опыты показывают, что при малых значениях рейнольдсова числа даже такие „плохо обтекаемые“ тела, как круглый цилиндр или шар, обтекаются безотрывно. Наличие вязкости нарушает симметрию обтекания по отношению к миделевой плоскости, что представляет принципиальное отличие вязких движений от движений идеальной жидкости²⁾.

При возрастании рейнольдсова числа на плохо обтекаемых телах можно заметить интересное явление вихреобразования (рис. 113). Вначале намечается отрыв жидкости вблизи кормы и образование обратных движений. Явление имеет те же причины, что и отрыв пограничного слоя, только при малых рейнольдсовых числах теория пограничного слоя количественно еще не применима. В связи с этим не следует удивляться тому, что с ростом рейнольдсова числа место отрыва от кормы перемещается к миделю и даже при больших рейнольдсовых числах заходит за мидель в лобовую часть (напоминаем, что угол отрыва, отсчитанный от лобовой критической точки, близок

¹⁾ G. Taylor. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Proc. of the Royal Society, Ser. A, V. 135, 1932.

²⁾ Обтекание шара, цилиндра и других тел при малых рейнольдсовых числах было исследовано Озеном, Лэмбом и др. Некоторые из этих решений можно найти в курсе Кибеля, Кочина и Розе, т. II; там же см. литературу.

к 82°). Теорема о независимости точки отрыва от рейнольдсова числа была доказана лишь для больших значений рейнольдсова числа. Образующиеся из-за обратных течений два симметричных вихря вначале устойчивы и растут по размерам, затем эти вихри начинают по очереди отрываться и увлекаться потоком, образуя за телом „дорожку“ вихрей, часто называемую „Кармановской дорожкой“, так как Карман первый исследовал вопрос об устойчивости такой „дорожки“ (серии) вихрей. Устойчивость „дорожки“ вихрей была исследована Карманом

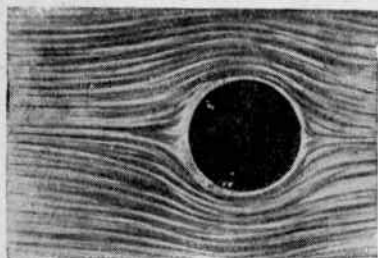


Рис. 113а.

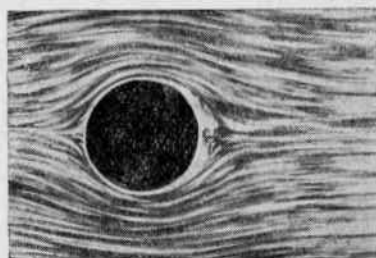


Рис. 113б.

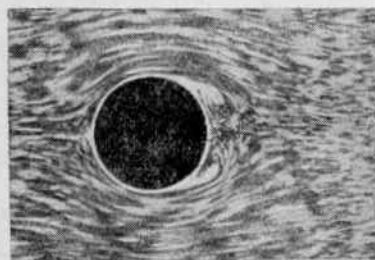


Рис. 113в.

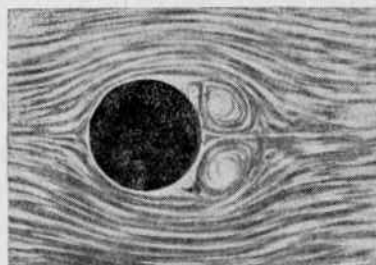


Рис. 113г.

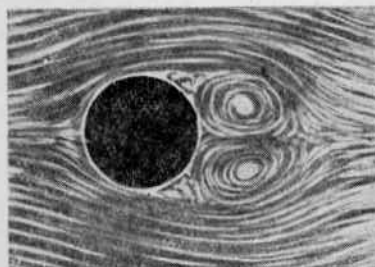


Рис. 113д.

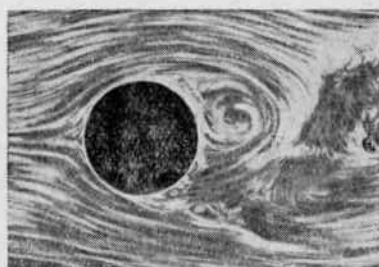


Рис. 113е.

в предположении, что эти вихри представляют изолированные вихревые нити в идеальной жидкости; однако даже такая упрощенная схема не представляется в настоящее время достаточно строго обоснованной.¹⁾

На самом же деле оторвавшиеся от тела вихри в некотором удалении от тела перемешиваются между собою, образуя нестационарный

¹⁾ См. например, *Кибель, Кочин и Розе*, т. I.

поток весьма хаотического случайного характера, т. е. то, что мы обычно называем турбулентным движением.

Таким образом при больших рейнольдсовых числах можно говорить о вихревом следе за телом в непосредственной близости к кормовой части тела и о турбулентном следе в некотором удалении от кормы обтекаемого тела.

Размер вихревого следа зависит от формы обтекаемого тела, от рейнольдсова числа и начальной турбулентности потока, а также и от других обстоятельств (близость стенок аэродинамической трубы и др.). В настоящее время еще нет достаточных материалов для определения закономерностей, связывающих размеры вихревой области с основными параметрами обтекания. Во всяком случае, повидимому, на расстоянии нескольких десятков диаметров обтекаемого тела вниз по течению уже устанавливается турбулентная область следа за телом.

Явления в вихревой области еще очень мало изучены и составляют предмет многочисленных современных исследований.¹⁾

Обратимся к рассмотрению поля скоростей и температур в турбулентной области следа за телом.

Обозначим через U_0 скорость безграничного плоского потока, набегающего на цилиндрическое тело. Направим ось x вниз по потоку, ось y — в перпендикулярном направлении (рис. 114) в плоскости потока. Считая, что в безграничном потоке продольный перепад давлений $\frac{\partial p}{\partial x}$ отсутствует и пренебрегая изменением $\bar{u}^{1/2}$ и вязкостью, напишем первое из уравнений Рейнольдса в виде (u, v — осредненные скорости):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Применяя те же рассуждения, что в теории ламинарного следа (решение Толлмиена, отдел II, глава II), заменим в левой части уравнения (2.1) u на $U_0 - u_1$; будем предполагать, что величины

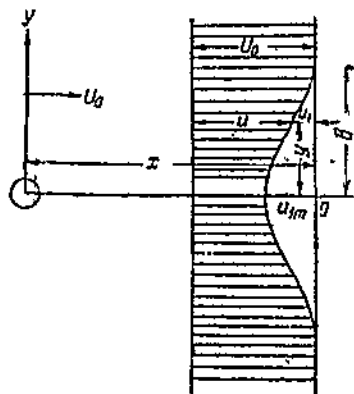


Рис. 114.

¹⁾ См. Modern developments in fluid dynamics, ed. by S. Goldstein. Oxford, 1938, p. 550, vol. II, XIII; там же помещена обширная библиография. См. также статью H. Falkenhager'a в Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, 1 Teil, § 14, S. 164; Leipzig, 1931. Совсем недавно опубликованы интересные исследования наших советских ученых Г. Петрова и Р. Штейнберга (ЦАГИ) по колебаниям давлений и скорости в вихревом и турбулентном „следе“ (Доклад на конференции по физической аэрогидродинамике, Москва, ЦАГИ, май 1939; см. также Г. И. Петров и Р. И. Штейнберг. Исследование потока за плохо обтекаемыми телами. Труды ЦАГИ, вып. 482, Москва, 1940;

$U_0 - u_1$ и v малы по сравнению с U_0 и пренебрежем малыми второго порядка, тогда получим

$$-U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (2.2)$$

где, согласно теории переноса завихренности

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho l^2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (2.3)$$

Примем, как и в теории струй, что путь смещения l постоянен в данном сечении и пропорционален ширине следа b ¹⁾.

Точно так же, как и в теории ламинарного следа, разность количеств движения, протекающих в единицу времени через нормальные сечения потока перед телом и в следу, есть величина постоянная, равная сопротивлению обтекаемого тела

$$W = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U_0 - u) dy \approx \rho U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 dy = \text{const}; \quad (2.4)$$

следовательно, если еще предположить, что профили скоростей u_1 в различных сечениях турбулентного следа подобны, т. е.

$$\frac{u_1}{u_{1m}} = f\left(\frac{y}{b}\right) = f(\eta), \quad (2.5)$$

где u_{1m} — максимальное значение отклонения $u_1 = U_0 - u$ на оси следа, то из уравнения (2.4) будет вытекать:

$$\rho U_0 u_{1m} \cdot b \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{b}\right) d\left(\frac{y}{b}\right) = \text{const}, \quad (2.4')$$

Замечая, что интеграл в левой части равен некоторому числу, придем к соотношению

$$b u_{1m} = \text{const},$$

или, что все равно, к равенству ($\sim$ — символ пропорциональности)

$$u_{1m} \sim \frac{1}{b}. \quad (2.6)$$

Обращаясь теперь к уравнению (2.2), в которое подставим значение $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ по (2.3), получим

$$-U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \rho l^2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (2.7)$$

Если в этом уравнении подставить вместо u_1 его значение по (2.5), заменить l на пропорциональную величину b и перейти к переменному $\frac{y}{b} = \eta$, то будем иметь:

$$U_0 \left[u'_{1m} f(\eta) - u_{1m} f'(\eta) \cdot \frac{\eta}{b} \cdot b' \right] \sim \frac{u_{1m}^3}{b} \cdot f'(\eta) f''(\eta),$$

¹⁾ Величина b имеет условное значение, как вообще в теории пограничного слоя конечной толщины: это — значение y , при котором $u \approx U_0$, $u_1 \approx 0$.

или по (2.6) и условию существования подобия (2.5)

$$bb' \sim \text{const}$$

$$b \sim \sqrt{x}.$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} l &\sim b \sim \sqrt{x} \\ u_{1m} &\sim \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Следовательно уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\alpha x \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (2.9)$$

где через α обозначена константа в формуле

$$l^2 = \alpha x. \quad (2.10)$$

Решение уравнения (2.9), согласно предыдущего, можно искать в виде

$$u_1 = u_{1m} f\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{U_0}{\sqrt{x}} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = \frac{U_0}{\sqrt{x}} \varphi(\eta). \quad (2.11)$$

Вычислив производные $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$, приведем уравнение (2.9) к обыкновенному уравнению:

$$\varphi + \eta \varphi' = 2\alpha \varphi' \varphi'', \quad (2.12)$$

которое до конца интегрируется. Перепишав уравнение в форме

$$(\eta \varphi)' = \alpha (\varphi'^2)',$$

легко найдем первый интеграл:

$$\eta \varphi = \alpha \varphi'^2, \quad (2.13)$$

удовлетворяющий граничному условию: при $\eta = 0$, $\varphi' = 0$ (условие симметрии следа). Повторное интегрирование приводит ко второму интегралу:

$$\varphi = \frac{\eta_0^3}{9\alpha} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{3/2} \right]^2, \quad (2.14)$$

где под η_0 понимаем значение η , при котором $\varphi = 0$, т. е. η на краю турбулентного следа. Если ввести $\varphi_m = \frac{u_{1m} \sqrt{x}}{U_0}$, то будем иметь:

$$\varphi_m = \frac{\eta_0^3}{9\alpha}, \quad u_{1m} = \frac{U_0 \eta_0^3}{9\alpha \sqrt{x}}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_m} = \frac{u_1}{u_{1m}} = \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{3/2} \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{3/2} \right]^2. \quad (2.15)$$

Опыты Шлихтинга¹⁾ прекрасно подтверждают (рис. 115) правильность формулы (2.15) в достаточном удалении от обтекаемого цилиндрического тела (более ста диаметров); при более близких расстояниях произведенное откидывание членов, содержащих вторые степени разности $U_0' - u$ и v , уже недопустимо и нужно брать следующие приближения. Опыты Фейджа и Фалькнера²⁾ также хорошо подтвердили формулу (2.15) — их результаты будут приведены ниже.

Формула (2.15) была впервые получена (в только что процитированной статье) в 1930 г. Шлихтингом, исходящим из теории Прандтля переноса количества движения, а уже затем (в 1932 г.) Тэйлором³⁾ — из теории переноса завихренности.

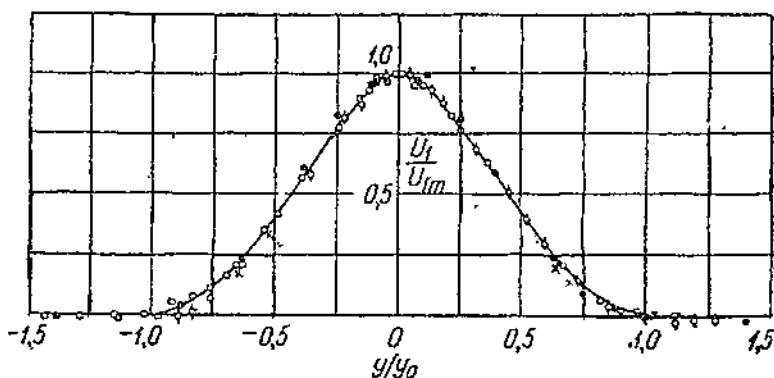


Рис. 115.

Из соображений, которые вскоре будут выяснены, мы дали решение задачи о следе, основанное на теории Тэйлора; легко показать, что то же решение можно получить и из теории Прандтля. В самом деле, по теории Прандтля, при $l^2 = \alpha x$ будем иметь:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho \alpha x \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = 2 \rho \alpha x \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

т. е. в настоящем случае выражение для $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ по теории Прандтля отличается лишь постоянным коэффициентом 2 от соответствующей формулы Тэйлора; следовательно, окончательное решение (2.15) будет одно и то же для обеих теорий.

Обратимся теперь к вопросу о распределении осредненных температур за нагретым телом. Для этого прежде всего установим дифференциальные уравнения турбулентного распространения тепла. Возьмем уравнение распространения в актуальных температурах и скоростях:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

¹⁾ H. Schlichting, Über das Windschattenproblem, Ingenieur-Archiv, 1 (1930).

²⁾ A. Fage and V. Falkner. Note on experiments on the temperature and velocity in the wake of a heated cylindrical obstacle. Proc. of the Roy. Soc. S. A., Vol. 135, 1932.

³⁾ loc. cit.

или, в силу уравнения несжимаемости,

$$\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Заменим в этом уравнении актуальные величины u , v , T на осредненные $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{T}$ и пульсационные u' , v' , T' по формулам:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad T = \bar{T} + T'$$

и осредним обе части уравнения; тогда совершенно аналогично тому, как это имело место при выводе уравнений Рейнольдса, получим после простых преобразований:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}'T') + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{v}'T'). \quad (2.16)$$

В правой части уравнения (2.16) первая скобка (с множителем a) представляет распространение осредненной температуры вследствие обычной (молекулярной) теплопроводности, — этот член может быть опущен по сравнению с остальными двумя членами, характеризующими турбулентный (молярный) перенос тепла.

Основное значение среди этих двух членов имеет член, содержащий выражение $-\bar{v}'T'$, которое характеризует перенос тепла поперечными пульсациями v' .

В разбираемом случае следа за нагретым телом обозначим через θ разность осредненных температур в данной точке следа и в области, удаленной от нагретого тела. Тогда, аналогично предыдущему, можно будет левую часть уравнения (2.16) приближенно представить в виде $U_0 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Что касается правой части, то, пренебрегая обычной теплопроводностью и членом $\frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}'T')$, сможем представить ее в виде $-\frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}'T')$.

Следуя общей теории турбулентного переноса, изложенной в § 2 предыдущей главы, можем написать

$$-\bar{v}'T' = \frac{A}{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (2.17)$$

причем, если вместе с Тэйлором предположим общность механизма переноса тепла и завихренности, то $l^2 = \alpha x$, где α имеет то же значение, что и раньше.

Опуская черточки над осредненными величинами, перепишем теперь уравнение (2.16) в виде:

$$-U_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (2.18)$$

(знак минус в левой части соответствует $\frac{\partial \theta}{\partial x} < 0$ при положительности правой части).

Заменим здесь

$$\theta = x^{-\frac{1}{2}} \Phi(\eta), \quad u_1 = U_0 x^{-\frac{1}{2}} \varphi(\eta), \quad (2.19)$$

тогда, после простых выкладок, преобразуем уравнение в частных производных (2.18) в такое обыкновенное уравнение

$$\frac{1}{2} (\Phi + \eta \Phi') = \alpha (\varphi' \Phi').$$

Первый интеграл этого уравнения, удовлетворяющий условиям: при $\eta = 0$ $\Phi' = 0$, будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \eta \Phi = \alpha \varphi' \Phi'.$$

Второй интеграл приведет к такому равенству:

$$\ln \frac{\Phi}{\Phi_m} = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{\varphi'}. \quad (2.20)$$

Заменим в знаменателе под знаком интеграла φ' его выражением по (2.15), тогда после простых выкладок получим:

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\frac{3\varphi_m}{\eta_0^{3/2}} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{2/3} \right] \eta^{1/2} \\ \ln \frac{\Phi}{\Phi_m} &= -\frac{\eta_0^{2/3}}{6\alpha\varphi_m} \int_0^\eta \frac{\eta^{1/2} d\eta}{1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{2/3}} = -\frac{\eta_0^3}{6\alpha\varphi_m} \int_0^{\eta/\eta_0} \frac{\left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{1/2} d\left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)}{1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Замечая, что по предыдущему,

$$\varphi_m = \frac{\eta_0^3}{9\alpha},$$

будем иметь, полагая $\frac{\eta}{\eta_0} = \xi$:

$$\ln \frac{\Phi}{\Phi_m} = -\frac{3}{2} \int_0^\xi \frac{\xi^{1/2} d\xi}{1 - \xi^{2/3}} = \ln(1 - \xi^{2/3}),$$

или окончательно

$$\Phi = \Phi_m (1 - \xi^{2/3}), \quad (2.21)$$

т. е.

$$\frac{\Phi}{\Phi_m} = \frac{\theta}{\theta_m} = 1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{2/3}. \quad (2.22)$$

Сравнивая (2.22) с формулой скоростей (2.15), видим, что в следу нагретого тела профиль осредненных температур не подобен профилю осредненных скоростей.

Опыты Фейджа и Фалькнера¹⁾ показали, что, действительно,

¹⁾ loc. cit.

распределение осредненных температур хорошо подчиняется формуле (2.22). На рис. 116 приведены для сравнения кривые, соответствующие уравнениям (2.15) и (2.22), и опытные точки Фейджа и Фалькнера. Следует отметить, что, повидимому, ширина теплового следа несколько превышает теоретическую ширину.

Совпадение теории Тэйлора с опытом подтверждает правильность гипотезы одинаковости механизма турбулентного переноса тепла и завихренности. С точки зрения общей теории турбулентного переноса, изложенной в начале настоящей главы, это обозначает, что тепло и завихренность в плоском движении являются субстанциями, отвечающими основным требованиям сохраняемости и пассивности.

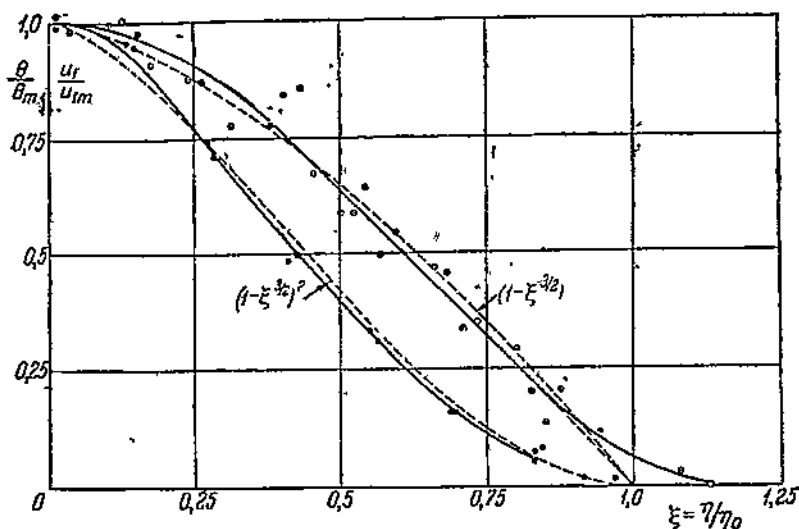


Рис. 116.

Интересно отметить, что отождествление механизма переноса количества движения и тепла приводит к результату, противоречащему опыту. Простые вычисления показывают, что, если в уравнение (2.20) вместо φ' , определенного по (2.15), т. е. по теории переноса завихренности (Тэйлор), подставить φ' , определенное по теории переноса количества движения (Прандтль), то, как было уже показано, разница будет в коэффициенте 2 в выражении $\frac{\partial \xi}{\partial y}$. Эта разница приведет к формуле $\varphi_m = \frac{\eta_0^3}{18\alpha}$ вместо $\varphi_m = \frac{\eta_0^3}{9\alpha}$, что даст в свою очередь:

$$\ln \frac{\Phi}{\Phi_m} = -3 \int_0^{\xi} \frac{\xi'^{1/2} d\xi'}{1 - \xi'^{3/2}} = 2 \ln (1 - \xi^{2/3});$$

отсюда будет следовать неправильный результат

$$\Phi = \Phi_m (1 - \xi^{2/3})^2,$$

утверждающий подобие профилей температур и скорости. Сказанное нисколько не противоречит теории турбулентного переноса, а наоборот, подтверждает существенность условий сохраняемости и пассивности, налагаемых на субстанцию. Количество движения, рассматриваемое как переносимая субстанция, не отвечает условию сохраняемости, поэтому законы переноса количества движения иные, чем переноса тепла.

Турбулентный след за телом вращения был исследован Гольдштейном¹⁾, по обобщенной на пространство теории переноса завихренности. Теоретическое распределение температур в следу нагретого тела вращения было найдено также Гольдштейном²⁾, экспериментальное исследование провели Холл и Хизлоп³⁾.

Расчет поля скоростей в следу за телом вращения по теории переноса количеств движения дала еще в 1929 г. Л. Свайн⁴⁾. Распределение скоростей, полученное Л. Свайн, по ранее изложенным соображениям, не может быть использовано для расчета распределения температур.

Гран Ольсон⁵⁾ в 1936 г. и независимо от него в Советском Союзе Б. Я. Трубчиков⁶⁾ показали, что на больших относительных расстояниях от обтекаемого тела, можно с достаточной степенью точности пользоваться законом постоянства коэффициента турбулентного перемешивания, весьма просто приводящим к экспоненциальному распределению скоростей и температур (типа „нормального“ распределения по Гауссу). В этом случае с аналитической стороны задача ничем не отличается от рассмотренного в предыдущем отделе ламинарного распределения, следует лишь заменить коэффициент кинематической вязкости ν на кинематический коэффициент турбулентного обмена $\frac{A}{\rho} = k = \text{const}$. Вычисления показывают, что в этом случае

$$\frac{u_1}{u_{1m}} = \left(\frac{\theta}{\theta_m} \right)^2 = e^{-\frac{U_0 y^2}{4kx}}.$$

Подобно тому, как в теории струй расширение струи зависит от ее „начальной“ турбулентности, характеризующей экспериментальной постоянной c , так и относительная ширина следа за телом связана с „начальной“ турбулентностью потока, обтекающего тело, через постоянную α или k (в последней формуле). На этом принципе основан любопытный метод определения „начальной“ турбулентности потока. При помощи термопары измеряется ширина теплового турбулентного следа за нагретой проволокой на фиксированном расстоянии от нее;

¹⁾ S. Goldstein. Proc. Camb. Phil. Soc. 31 (1935).

²⁾ S. Goldstein. Proc. Camb. Phil. Soc. 34 (1938); см. также Tomotika, Proc. Roy. Soc. A, 165 (1938).

³⁾ Hall and Hislop. Proc. Camb. Phil. Soc. 34 (1938).

⁴⁾ L. Swain. On the turbulent wake behind a body of revolution, Proc. of the Roy. Soc. A, 125 (1929).

⁵⁾ Gran Olsson. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulenter Strömung. ZAMM, Bd. 16, H. 5 (1936).

⁶⁾ Б. Я. Трубчиков. Тепловой метод измерения турбулентности в аэродинамических трубах. Труды ЦАГИ, вып. 372, 1938.

по изменению ширины судят о турбулентности потока. За подробностями этого метода, данного Шубауэром¹⁾, отсылаем к выше процитированной статье Б. Я. Трубчикова, детально разработавшего и видоизменившего метод Шубауэра. В этой же статье можно найти и ряд данных о турбулентности в аэродинамических трубах.²⁾

Пользуясь теорией переноса завихренности, можно также определить распределение температур в свободной неизотермической струе. Задача эта, не представляющая принципиальных затруднений, мало чем отличается от вышеизложенной задачи о температурах в следе тела. Теоретическое исследование распределения температур в плоской и осесимметричной струе было произведено лишь недавно Хоуэрзом.³⁾ Вопрос о неизотермических струях, в связи с рядом практических применений, как уже ранее указывалось, был, независимо от Хоуэрза, в Советском Союзе исследован Г. Н. Абрамовичем в его докторской диссертации, защищенной в начале 1939 г.

§ 3. Применение теории Тэйлора переноса завихренности к внутренней задаче (движение в трубах)

Теория Тэйлора переноса завихренности получила применение не только в вопросах так называемой „свободной“ турбулентности, т. е. турбулентных движений вдалеке от стенок как, например, свободная струя, след за телом. Пользуясь простейшим допущением Прандтля о линейной связи между путем перемешивания l и расстоянием y от стенки (формула $l = \kappa y$ предыдущей главы), Тэйлор⁴⁾ рассмотрел задачу о плоском турбулентном движении между двумя параллельными плоскими стенками.

Обозначим расстояние между плоскостями через $2h$, сохраним за y обозначение расстояния данной точки потока до стенки и введем еще расстояние $z = h - y$ до срединной плоскости, в которой помещим ось x .

Для рассматриваемого случая движения уравнения Рейнольдса приведутся к такому ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $v = 0$; черточки над осредненными величинами опущены):

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

или по формуле Тэйлора

$$\rho^2 \frac{du}{dy} \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (3.1)$$

Из условия равномерности осредненного продольного движения, следует

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho h} = \frac{u_*^2}{h},$$

¹⁾ G. Schubauer. A turbulence indicator utilizing the diffusion of heat. NACA, Rep. № 524, 1935.

²⁾ См. также заключительную главу настоящего курса.

³⁾ L. Howarth. Proc. Camb. Phil. Soc. 34 (1938).

⁴⁾ Proc. Roy. Soc. A. 159 (1937); p. 501.

где τ_0 , как и ранее, напряжение трения на стенке, v_* — динамическая скорость. Полагая еще $l = \kappa y = \kappa(h - z)$, перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\frac{d}{dz} \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right] = \frac{2v_*^2}{\kappa^2 h} \cdot \frac{1}{(h-z)^2}. \quad (3.2)$$

Пользуясь граничными условиями:

$$\text{при } z = 0, u = u_m, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

проинтегрируем уравнение (3.2) и найдем:

$$\frac{u_m - u}{v_*} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \left[\arcsin \sqrt{\frac{z}{h}} - \sqrt{\frac{z}{h}} \sqrt{1 - \frac{z}{h}} \right]. \quad (3.3)$$

Соответствующая кривая очень хорошо совпадает с опытными точками Никурадзе¹⁾ как вблизи срединной плоскости, так и возле стенок, если положить $\kappa = 0,28$.

Применение обобщенной на пространство теории Тэйлора и формулы $l = \kappa(a - r)$ приводит для круглой трубы радиуса a к сравнительно сложной формуле (r — расстояние точки до оси):

$$\frac{u_m - u}{v_*} = \frac{2}{\kappa} \int_0^{\frac{r}{a}} \left[\eta - 1 + 2 \ln(1 - \eta) + \frac{1}{1 - \eta} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{\eta}, \quad (3.4)$$

которая хорошо соответствует опытным данным при $\kappa = 0,19$ ²⁾.

Формулы (3.3) и (3.4), однако, слишком сложны для приложений; формулы, полученные в предыдущей главе по теории переноса количества движения, более просты и удобны для приложений.

§ 4. Применение идеи подобия в полуэмпирических теориях турбулентности. Формула Кармана и ее приложение к плоской трубе.

Формулы Прандтля, Кармана с точки зрения подобия

Теории Прандтля и Тэйлора имеют один существенный недостаток — как та, так и другая, по существу, не решают задачи о турбулентном движении, если из дополнительных соображений не принять некоторой закономерности для „пути смещения“ (постоянство по сечению струи и следа, пропорциональность расстоянию от стенки в трубе и др.).

Первая попытка установления связи между „путем смещения“ и элементами осредненного движения принадлежит Карману³⁾.

¹⁾ Forschungsarbeiten des Ver. deutsch. Ing. № 289 (1929).

²⁾ Taylor, loc. cit.; а также Modern Developments in Fluid Dynamics, ed. by S. Goldstein, Oxford, 1938; p. 346. Заметим, что величина κ в теории Тэйлора не должна совпадать с κ в теории Прандтля предыдущей главы, так как количество движения и завихренность — различные „субстанции“ с точки зрения общей теории переноса.

³⁾ Th. v. Kármán, Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, 1930; S. 58. См. также Verhandl. 3. Intern. Congr. Techn. Mech. Stockholm, 1930.

Рассматривая плоское осредненное движение между двумя плоскими стенками, Карман делает предположение о подобии полей пульсационных скоростей в различных слоях осредненного движения. Пусть $\psi'(x, y, t)$ обозначает функцию тока пульсаций u' и v' , так что

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}; \quad (4.1)$$

под подобием пульсаций Карман понимает условие, чтобы в различных слоях осредненного турбулентного потока, функции ψ' отличались между собою лишь характерным для каждого отдельного слоя масштабом A_0 . Иными словами, если ординату данного слоя обозначить через y_0 , а безразмерные, отнесенные к некоторой характерной для слоя длине l_0 , координаты точек, расположенных вблизи слоя, обозначить через ξ и η , положив:

$$\xi = \frac{x}{l_0}, \quad \eta = \frac{y - y_0}{l_0},$$

то при условии (idem — одно и то же, одинаково)

$$\xi = \text{idem}, \quad \eta = \text{idem},$$

будет выполняться равенство (при фиксированном t)

$$\frac{\psi'}{A_0} = f(\xi, \eta, t) = \text{idem}. \quad (4.2)$$

Иначе говоря, в сходственных точках различных слоев функции тока пропорциональны. Из равенств (4.1) и (4.2) при этом следует

$$u' = \frac{A_0}{l_0} \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v' = -\frac{A_0}{l_0} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad (4.3)$$

откуда вытекает, что в сходственных точках

$$\frac{u'}{A_0/l_0} = \text{idem}, \quad \frac{v'}{A_0/l_0} = \text{idem};$$

величина $\frac{A_0}{l_0}$, изменяющаяся от слоя к слою, служит масштабом пульсационных скоростей в данном слое, последнее равенство утверждает кинематическое подобие пульсаций.

Для определения величин A_0 и l_0 составим уравнение Гельмгольца [уравнение динамической возможности движения, см. отдел I, глава II, формула (2.22)] для плоского актуального движения, пренебрегая вязкими членами

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

где $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ представляет завихренность в проекции на ось, перпендикулярную к плоскости движения. Разбивая актуальное движение на осредненное и пульсационное и предполагая, что осредненное движе-

ние стационарно и прямолинейно ($\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0$), перепишем предыдущее уравнение в виде:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

Пользуясь равенствами (4.3), найдем

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{A_0}{l_0^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right). \quad (4.5)$$

Далее имеем

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + (y - y_0) \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0 + \dots \quad (4.6)$$

Сделаем в уравнении (4.4) преобразование

$$x = x' + \bar{u}_0 t,$$

соответствующее переходу к относительной системе координат движущейся поступательно и равномерно с постоянной скоростью $\bar{u}_0$ данного слоя; тогда, очевидно, будет

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \cdot \bar{u}_0, \quad (4.7)$$

и уравнение (4.4) перейдет в такое:

$$(\bar{u} - \bar{u}_0) \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} = 0. \quad (4.7')$$

Заменим здесь $\bar{u} - \bar{u}_0$ его выражением (4.6), которое можно переписать еще так, сохраняя члены, содержащие производные порядка не выше второго:

$$\bar{u} - \bar{u}_0 = \eta l_0 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 + \frac{1}{2} \eta^2 l_0^2 \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0.$$

Подставляя полученные выражения $\bar{u} - \bar{u}_0$, u' , v' , ζ' в уравнение (4.7), после простых приведений получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{A_0}{l_0^2} \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 f - \frac{A_0}{l_0} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 f \right) - \\ & - \frac{A_0^2}{l_0^4} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta^2 f + \frac{A_0^2}{l_0^4} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 f = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

По условию подобия равенство это, рассматриваемое как уравнение для определения функции $f(\xi, \eta)$, должно быть одинаково для всех слоев осредненного движения, т. е. не должно содержать элементов со значками „0“. Отсюда сразу следует:

$$l_0 \sim \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0}{\left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0}, \quad A_0 \sim l_0^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0. \quad (4.9)$$

Опуская значки и черточки, будем иметь для всех слоев (κ — некоторая константа):

$$l = \kappa \cdot \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}} \quad (4.10)$$

$$A = \text{const} \cdot l^2 \frac{du}{dy}. \quad (4.11)$$

Можно показать, что величины A и l пропорциональны соответственно коэффициенту турбулентного перемешивания и „пути смешения“ в теориях Прандтля и Тэйлора. В самом деле, напряжение трения равно

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} = \frac{A^2}{l^4} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} = \text{const} \cdot \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Если ввести константу в определение l , то получим формулу Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Составляя аналогично

$$\frac{d\tau}{dy} = -\rho \frac{d}{dy} \overline{u'v'} = \frac{\rho}{l} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{A^2}{l^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right),$$

будем иметь

$$\frac{d\tau}{dy} = \text{const} \cdot \rho l \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

или по (4.10)

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho l^2 \frac{du}{dy} \frac{d^2u}{dy^2};$$

в последней формуле, представляющей собою формулу Тэйлора, константа также введена в определение l . Само собою разумеется, что величины l в формулах Прандтля и Тэйлора не тождественны.

Основным результатом изложенной теории Кармана является равенство (4.10), содержащее закономерность изменения величины l в потоке. Пользуясь этим равенством, можно найти распределение скоростей в осредненном потоке между двумя плоскостями, не опираясь ни на какое дополнительное допущение относительно l .

По предыдущему, принимая теорию Прандтля и формулу Кармана (4.10), будем иметь, переходя от дифференцирования по y к дифференцированию по $z = h - y$:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \rho \kappa^2 \frac{\left(\frac{du}{dz} \right)^4}{\left(\frac{d^2u}{dz^2} \right)^2} = \tau_0 \cdot \frac{z}{h}.$$

Первый интеграл будет иметь вид (обозначения те же, что и ранее):

$$-\frac{1}{du} = 2 \frac{z}{v_*} \cdot \sqrt{hz} + C_1.$$

Для определения C_1 воспользуемся соображением, что вблизи стенки ($z = h$) $\frac{du}{dy}$ весьма велико и положим:

$$\text{при } z = h \quad \frac{1}{\frac{du}{dy}} = 0,$$

тогда получим:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{2\kappa} \cdot \frac{v_*}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h} - \sqrt{z}}.$$

Интегрируя еще раз, получим окончательно

$$\frac{u_m - u}{v_*} = -\frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{z}{h}} \right) + \sqrt{\frac{z}{h}} \right]. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) была дана Карманом в 1930 г.¹⁾

Опыты Никурадзе хорошо подтверждают теоретическую формулу Кармана, как это легко видеть из рис. 117; некоторые отклонения, имеющие место вблизи

стенки при малых реynольдсовых числах, могут быть объяснены влиянием вязкости. Значение константы κ близко к 0,4.

Пользуясь равенствами (4.10) и (4.12), можно вывести теоретическую формулу распределения l . Простые вычисления дают

$$l = 2\kappa h \sqrt{\frac{z}{h}} \left(1 - \sqrt{\frac{z}{h}} \right); \quad (4.13)$$

вблизи стенки при малых y , т. е. z близких к h , имеем

$$l = 2\kappa h \left(\sqrt{1 - \frac{y}{h}} + \frac{y}{h} - 1 \right) = \\ = \kappa y \left(1 - \frac{y}{4h} - \frac{y^2}{4h^2} - \dots \right).$$

Отсюда следует, что при раздвижении плоских стенок и безграничном увеличении h при фиксированных y будем иметь

$$l = \kappa \cdot y;$$

последнее соотношение полностью совпадает с закономерностью, предложенной Прандтлем.

Теоретическое распределение l по формуле (4.13) плохо совпадает с опытным распределением по Никурадзе (рис. 118). Расхождение

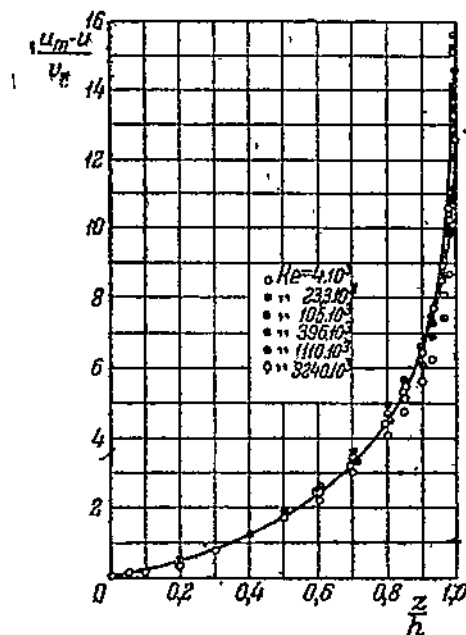


Рис. 117.

¹⁾ Th. v. Kármán, loc. cit.

вдали от стенки и особенно в центральной области весьма велико. При $y=h$ теоретическое l обращается в нуль, экспериментальное — достигает значения $0,14h$. Такое расхождение несколько не противоречит совпадению теоретической и экспериментальной кривых осредненных скоростей, так как при вычислении последних, благодаря интегрированию и подчинению граничным условиям, неточность вблизи середины канала сглаживается.

Объяснение расхождения между теоретической и экспериментальной закономерностями для пути смещения в центральной части канала следует искать в откидывании старших производных в разложении (4.6) ¹⁾.

Формула Прандтля, Тейлора и Кармана можно было бы получить из соображений подобия более просто, чем это сделано Карманом.

Представим себе ²⁾, что осредненный поток между параллельными плоскими стенками разбит осредненными линиями тока на слои толщины l . Рассмотрим один из таких слоев l_0 и пусть u_0 — осредненная скорость на нижней границе слоя, u_{01} — на верхней, u — в промежуточной точке слоя.

Составляя выражение:

$$\frac{u - u_0}{u_{01} - u_0} = \frac{(y - y_0) \left(\frac{du}{dy} \right)_0 + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right) + \dots}{l_0 \left(\frac{du}{dy} \right)_0 + \frac{1}{2} l_0^2 \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right) + \dots} =$$

$$\frac{\frac{y - y_0}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y_0}{l_0} \right)^2 \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)_0 + \dots}{1 + \frac{1}{2} l_0 \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)_0 + \dots},$$

видим, что условие подобия профилей осредненных скоростей относительно dna слоя в различных слоях:

$$\frac{u - u_0}{u_{01} - u_0} = \text{idem} \quad \text{при} \quad \frac{y - y_0}{l_0} = \text{idem}$$

¹⁾ Л. Г. Лойцянский. «О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности. Прикл. математика и механика, т. II, вып. 2, 1935.

²⁾ Л. Г. Лойцянский. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача. Известия Научно-иссл. ин-та гидротехники, т. IX, 1933; также и выше цитированная статья.

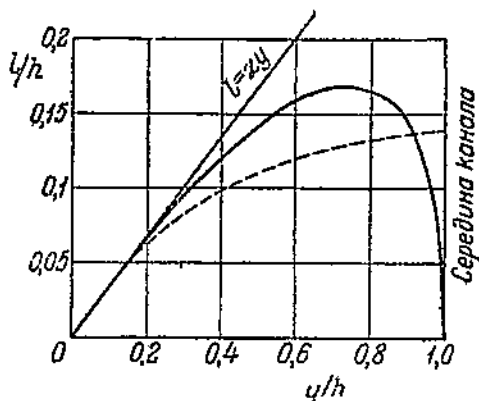


Рис. 118.

при отбрасывании членов с производными u по y старшими второго порядка, будет

$$l_0 \frac{\left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_0}{\left(\frac{du}{dy}\right)_0} = \text{idem}, \quad (4.14)$$

т. е. не что иное, как формула Кармана (4.10).

Таким образом происхождение формулы Кармана можно видеть не в предположении подобия полей пульсационных скоростей, как указывает автор, а в требовании приближенного (вследствие откидывания старших производных) подобия относительных осредненных скоростей. При наличии подобия в отдельных слоях можно сделать выводы (пренебрегая вязкостью) об одинаковости в слоях безразмерных величин (типа числа Эйлера), выражающих отношения масштабов перепада давления или турбулентного трения к динамическому напору, построенному по характерной для слоя скорости $u_{10} - u_0 \approx l_0 \left(\frac{du}{dy}\right)_0$. Таким образом будем иметь

$$\frac{\tau_0}{\rho l_0^2 \left(\frac{du}{dy}\right)_0^2} = \text{idem},$$

что эквивалентно формуле Прандтля; беря за масштаб напряжения трения разность напряжений на границах слоя, получим:

$$\frac{l_0 \left(\frac{d\tau}{dy}\right)_0}{\rho l_0^2 \left(\frac{du}{dy}\right)_0^2} = \text{idem},$$

откуда следует, что

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_0 \sim \rho l_0 \left(\frac{du}{dy}\right)_0^2,$$

а совместно с (4.14) получается формула Тэйлора:

$$\left(\frac{d\tau}{dy}\right)_0 \sim \rho l_0^2 \left(\frac{du}{dy}\right)_0 \cdot \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_0.$$

К тому же результату приводит и условие

$$\frac{\Delta p}{\rho l_0^3 \left(\frac{du}{dy}\right)^2} = \text{idem},$$

так как

$$\Delta p = -l_0 \cdot \frac{dp}{dx} = -l_0 \left(\frac{d\tau}{dy}\right)_0.$$

Обобщение метода Кармана на случай круглой цилиндрической трубы было дано недавно Гольдштейном¹⁾.

¹⁾ S. Goldstein. Proc. Roy. Soc. A. 159 (1937) p. p. 483—492.

§ 5. Сопротивление пластинки по Карману. Местное и суммарное трение. Развитие пограничного слоя

Пользуясь приемом сопоставления движения жидкости в трубе и пограничном слое, мы можем, обозначая толщину пограничного слоя через δ , а скорость на внешней границе через U , переписать формулу Кармана (4.12) в виде

$$\frac{U-u}{v_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = -\frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} \right]. \quad (5.1)$$

Применим эту формулу к расчету турбулентного слоя на пластинке¹⁾ ($U = U_0 = \text{const}$). Имеем по предыдущему

$$\tau_0 = \frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx} \rho \int_0^{\delta} u (U_0 - u) dy. \quad (5.2)$$

По (5.1) можем заменить

$$U_0 - u = v_* f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad u = U_0 - v_* f\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

тогда получим:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = v_*^2 = \frac{d}{dx} \left[v_* U_0 \delta \int_0^1 f\left(\frac{y}{\delta}\right) \left(\frac{y}{\delta}\right) - v_*^2 \delta \int_0^1 f^2\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right].$$

Замечая, что входящие в правую часть интегралы представляют некоторые постоянные числа — обозначим их через a_1 и a_2 — будем иметь:

$$v_*^2 = \frac{d}{dx} (a_1 v_* U_0 \delta - a_2 v_*^2 \delta). \quad (5.3)$$

В этом уравнении две неизвестных величины — v_* и δ , обе являющиеся функциями x . Для составления необходимого второго уравнения применим формулу (5.1) к внешней границе ламинарного подслоя (§ 4 главы II), т. е. положим в равенстве (5.1) $y = \delta_l = \text{const} \cdot \frac{\nu}{v_*}$, $u = u_l = \text{const} \cdot v_*$, тогда получим:

$$\frac{U_0}{v_*} - \text{const} = -\frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta_l}{\delta}} \right) + \sqrt{1 - \frac{\delta_l}{\delta}} \right],$$

или, пользуясь малостью отношения толщины подслоя δ_l к толщине пограничного слоя δ ,

$$\frac{U_0}{v_*} = -\frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_l}{\delta} \right) + 1 \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu} + \text{const}. \quad (5.4)$$

Отсюда вытекает недостающая нам связь между v_* и δ

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = \text{const} \cdot e^{\frac{U_0}{v_*}}, \quad \delta = \text{const} \frac{\nu}{v_*} \cdot e^{\frac{U_0}{v_*}}. \quad (5.5)$$

¹⁾ Th. v. Kármán. Theorie des Reibungswiderstandes. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, herausg. von Kempf und Foerster. 1932; S. 68—72, а также ранее цитирован. Verhandl. 3 Kongr. Techn. Mech. Stockholm, 1930.

Совокупность уравнений (5.3) и (5.5) решает задачу. Введем обозначение

$$z = z \frac{U_0}{v_*} = z \sqrt{\frac{\rho U_0^2}{\tau_0}} = z \sqrt{\frac{2}{c_f}}, \quad (5.6)$$

где c_f — коэффициент местного напряжения трения

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho U_0^2 / 2}; \quad (5.6')$$

тогда уравнение (5.3), после замены δ по (5.5), примет вид:

$$\frac{z^2 U_0}{\nu z^2} = \frac{d}{dx} \left[\left(b_1 - \frac{b_2}{z} \right) e^z \right],$$

где b_1 и b_2 — новые константы. Интегрируя, получим:

$$z^2 R_x = \int z^2 d \left[\left(b_1 - \frac{b_2}{z} \right) e^z \right].$$

Так как $z \sim \frac{1}{\sqrt{c_f}}$ при больших рейнولدсовых числах велико, то, отбрасывая младшие степени z по сравнению с z^2 , после простых выкладок найдем:

$$R_x = \frac{b_1}{z^2} z^2 \cdot e^z, \quad (5.7)$$

откуда следует

$$\frac{z \sqrt{2}}{\sqrt{c_f}} - \ln c_f = \ln R_x + \text{const},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = A + B \lg(R_x c_f). \quad (5.8)$$

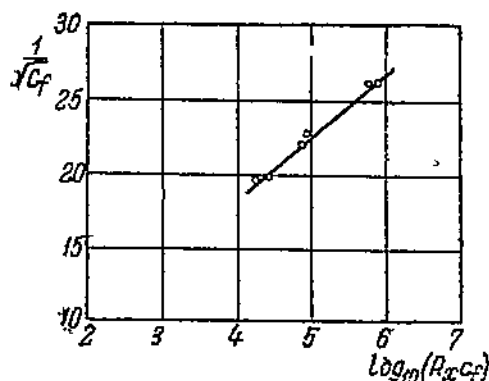


Рис. 119.

Кемпф¹⁾ определял непосредственным взвешиванием напряжение местного трения c_f ; для этого он вырезал небольшую площадку трущейся поверхности и соединил ее с динамометром. Формула Кармана (5.8) оказалась в хорошем соответствии с опытными данными Кемпфа, если положить $A = 1,7$, $B = 4,15$ (последнее число, как легко видеть, соответствует значению κ между 0,39 и 0,40). На рис. 119 приведены для сравнения опытные точки Кемпфа и прямая, отвечающая уравнению (5.7).

Наряду с коэффициентом местного трения c_f можно определить и коэффициент полного сопротивления пластины:

$$C_f = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 x \cdot 1},$$

¹⁾ G. Kempf. Neuere Ergebnisse der Widerstandsforschung. Werft, Reederei, Hafen, 10, 1929.

Пользуясь равенством (5.2) в форме (5.3) и соотношением (5.7), легко показать, что с достаточной степенью приближения

$$C_f = c_f \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{c_f} \right). \quad (5.9)$$

Шбнхер в ранее уже цитированной работе ¹⁾ выводит формулу

$$C_f^{-\frac{1}{2}} = 4,13 \lg(R_x C_f). \quad (5.10)$$

Более удобные расчетные формулы были приведены в предыдущей главе.

Формулу типа (5.8) не следует смешивать с несколько похожей на нее по внешнему виду формулой сопротивления, связывающей c_f и $R_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu}$; последнюю можно получить из (5.4), если заменить:

$$\frac{U_0}{v_*} = \sqrt{\frac{2}{c_f}}, \quad \frac{v_* \delta}{\nu} = \frac{v_*}{U_0} \cdot \frac{U_0 \delta}{\nu} = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \cdot R_\delta.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = A' + B \lg(R_\delta \sqrt{c_f}), \quad (5.11)$$

причем здесь B то же, что и в формуле (5.8), т. е. при $\alpha = 0,39$ B равно 4,15, а A в результате пересчета с обычной формулы сопротивлений для трубы по данным Никурадзе, оказывается равным 3,6. Равенство (5.11) отличается по характеру закономерности от (5.8) тем, что справа под знаком логарифма стоит произведение R_δ на квадратный корень из c_f , а не произведение R_x на первую степень c_f , как это имеет место в формуле (5.8). Вычтем почленно равенство (5.8) из равенства (5.11), тогда получим

$$\delta = 0,348 x \sqrt{c_f}. \quad (5.12)$$

Последняя формула позволяет судить о росте пограничного слоя на пластине. Слой растет медленнее чем по линейному закону, так как c_f убывает с x .

Шлихтинг ²⁾ предложил следующую расчетную формулу для c_f :

$$c_f = (2 \lg R_x - 0,65)^{-2,5}, \quad (5.13)$$

Пользуясь приближенной формулой (5.13), можно по (5.12) предложить для расчета толщины пограничного слоя при больших R_x равенство:

$$R_\delta = \frac{0,348 R_x}{(2 \lg R_x - 0,65)^{1,25}}. \quad (5.14)$$

Приведенные в настоящем параграфе формулы относятся к боль-

¹⁾ K. Schoenherr. Trans. Soc. Naval Architects and Marine Eng. 40 (1932).

²⁾ H. Schlichting. Ingen. Archiv 7 (1936).

шим числам Рейнольдса, для которых учет ламинарного участка на лобовой части пластины не существует⁴⁾.

§ 6. Турбулентное движение в шероховатых трубах. Влияние шероховатости стенки на сопротивление. Пограничный слой вблизи шероховатой стенки

Полуэмпирические теории турбулентного движения позволяют изучить движение не только в трубах с гладкими стенками, но и при наличии шероховатости.

В дальнейшем будем предполагать, что стенка покрыта бугорками шероховатости в среднем одинаковой высоты и плотности распределения. Такого типа шероховатость (зернистая шероховатость) имеет место в металлических трубах, особенно плохо обработанных, в бетонных трубах и др. Нечто подобное получается и на полированных поверхностях (обшивках), если лак содержит земляные примеси, на поверхности корабля при обрастании и др.

Если условиться рассматривать лишь шероховатости такого типа и считать, что в двух различных трубах шероховатости геометрически подобны между собою, то за основной параметр шероховатости можно принять отношение средней высоты бугорков k к радиусу трубы r или к половине расстояния между плоскими стенками h в случае плоского движения. Такое отношение $\frac{k}{r}$ или $\frac{k}{h}$ (иногда берут обратное отношение, чтобы иметь дело с целыми числами) называется относительной шероховатостью.

С физической стороны следует различать три режима течения в шероховатых трубах:

1°. *Первый (предельный режим)*. Бугорки шероховатости лежат на дне ламинарного подслоя ($k < \delta_1$). В этом случае жидкость, двигаясь с малыми скоростями между бугорками малой величины (предполагается, что высота бугорка сравнима с его толщиной), обтекает их безотрывно. Движение происходит так, как будто стенка гладкая и вся теория турбулентного движения, изложенная в предыдущей и настоящей главах, полностью приложима. Сопротивление трубы зависит от рейнольдсова числа, так как движение вблизи стенки определяется вязкостью. Относительная шероховатость не влияет на движение.

2°. *Второй (промежуточный режим)*. Бугорки шероховатости по высоте того же порядка, что и толщина ламинарного подслоя. В этом случае играют роль и вязкость (рейнольдсово число) и относительная шероховатость.

4) Экспериментальное исследование профилей скорости, толщины пограничного слоя и трения на пластине длиной в 2 м ($R \approx 7 \cdot 10^6$) было недавно произведено Н. Н. Фоминой и Е. К. Бучинской. См. работу указанных авторов „Экспериментальное исследование двумерного пограничного слоя“. Труды ЦАГИ, вып. 374, 1938, стр. 20. К сожалению, в работе нет анализа результатов с точки зрения полуэмпирических теорий. Результаты новых опытов по сопротивлению пластины можно найти в только что появившейся работе: F. Schultz-Grunow. Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten. Luftfahrtforschung, Bd. 17, Lief. 8, Aug. 1940. Там же дается новый закон сопротивления.

3°. Третий (предельный режим). Бугорки шероховатости далеко выходят за пределы ламинарного подслоя $k > \delta_r$. При этом бугорки обтекаются с отрывом, как при обычном внешнем обтекании тел. Сопротивление трубы перестает зависеть от рейнольдсова числа и определяется сопротивлениями давлений бугорков, подчиняющимися квадратичному закону. Основным параметром становится относительная шероховатость.

Количественное уточнение границ режимов можно произвести на основании имеющихся опытных материалов. Анализ опытных материалов мы предположим некоторую теоретическую схему явления.

Проведем на среднем уровне вершины бугорков шероховатости плоскость $y = k$ и обозначим через u_k скорость движения жидкости в этой плоскости, причем будем предполагать, что $k > \delta_r$, т. е. что движение происходит при втором или третьем режиме.

Считая, что движение при $y > k$ подчиняется обычным законам турбулентного движения, сможем по предыдущему утверждать правильность равенства:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C,$$

причем, в отличие от случая гладкой стенки или, что все равно, шероховатой стенки при первом (предельном) режиме, постоянная C будет определяться из граничных условий:

$$\text{при } y = k, \quad u = u_k.$$

Будем иметь

$$\frac{u_k}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln k + C,$$

откуда следует основное равенство:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + \frac{u_k}{v_*}. \quad (6.1)$$

Входящая сюда величина $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, где τ_0 , как всегда определяется по сопротивлению трубы, т. е. по перепаду давления, зависит от законов обтекания бугорков шероховатости. Согласно общей теории подобия, сопротивление отдельного бугорка шероховатости W можно характеризовать коэффициентом сопротивления c_w , отнесенным к любой характерной скорости, например, к скорости u_k , так что можно положить сопротивление отдельного бугорка в среднем равным

$$W = c_w \cdot S \frac{\rho u_k^2}{2}. \quad (6.2)$$

Составляя условие равномерного движения жидкости

$$\tau_0 \cdot 2\pi r L = \Delta p \cdot \pi r^2 = n \cdot W,$$

где n — число бугорков на поверхности трубы $2\pi r \cdot L$, L — длина участка, на котором взят перепад давлений Δp . Отсюда можно заключить, что в случае геометрически подобных шероховатостей

$$\tau_0 = c_w \cdot \frac{nS}{2\pi r L} \cdot \frac{\rho u_k^2}{2} = c_w \cdot n' \cdot \rho u_k^2, \quad (6.3)$$

где n' — некоторый численный коэффициент, характеризующий плотность распределения бугорков; у геометрически подобных шероховатых стенок коэффициент n' одинаков¹⁾.

Из уравнения (6.3) следует, что

$$\frac{u_k}{v_*} \sim \frac{1}{\sqrt{c_w}}; \quad (6.4)$$

но c_w , как коэффициент сопротивления в равенстве (6.2), представляет собою некоторую функцию рейнольдсова числа бугорка $\frac{u_k \cdot k}{\nu}$, т. е.

$$\frac{u_k}{v_*} = f\left(\frac{u_k \cdot k}{\nu}\right) = f\left(\frac{u_k}{v_*} \cdot \frac{v_* \cdot k}{\nu}\right),$$

откуда следует, что $\frac{u_k}{v_*}$ представляет собою функцию параметра $\frac{v_* k}{\nu}$, пропорционального $\frac{k}{\delta_l}$

$$\frac{u_k}{v_*} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right). \quad (6.5)$$

Из принятой схемы следует, что при третьем (предельном) режиме, когда бугорки обтекаются с отрывом, функция $\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right)$ должна быть постоянной величиной, не зависящей от $\frac{kv_*}{\nu}$, так как при этом режиме c_w — постоянная величина²⁾.

При первом (предельном) режиме предыдущая теория не приложима, так как в этом случае логарифмический профиль (6.1) не имеет места при $k < y < \delta_k$ и формула (6.1) заменяется обычной формулой Прандтля

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{yv_*}{\nu} + B = 5,75 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5,5.$$

Переписывая формулу (6.1) в виде

$$\frac{u}{v_*} - 5,75 \lg \frac{y}{k} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right) \quad (6.6)$$

и сравнивая ее с предыдущей формулой Прандтля, можем утверждать, что при первом (предельном) режиме функция $\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right)$ должна равняться

$$\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right) = 5,75 \lg \frac{kv_*}{\nu} + 5,5. \quad (6.7)$$

¹⁾ Л. Г. Лойцянский. Об универсальных формулах в теории сопротивления шероховатых труб. Труды ЦАГИ, вып. 250, 1936. См. также: C. Sadron. Sur la détermination a priori des coefficients de frottement etc. Comptes Rendus № 4 (21 Janvier 1935).

²⁾ Третий режим в связи с этим часто называют режимом установившейся шероховатости.

Предлагаемая теория не дает возможности определить вида функции $\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right)$ при промежуточном режиме, но правильно предсказывает вид этой функции при предельных режимах. Отметим еще, что функция $\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right)$, а следовательно и отношение $\frac{u_k}{v_*}$ принимают максимальное значение вблизи значения

$$\lg \frac{kv_*}{\nu} = 1, \text{ т. е. при } k \approx 11,5 \frac{\nu}{v_*} \approx \delta_l.$$

Имея профиль скоростей (6.6), найдем закон сопротивления шероховатых труб. Для этого, пользуясь обычным приемом, применим формулу (6.6) к оси трубы и тогда найдем:

$$\frac{u_m}{v_*} - 5,75 \lg \frac{r}{k} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right). \quad (6.8)$$

Как уже было показано ранее, полученное равенство представляет собою не что иное, как формулу сопротивления в том случае, когда за характерную скорость принята скорость на оси u_m . Не довольствуясь этой формулой, перейдем к практически более удобной формуле, отнесенной к средней расходной скорости u_{cp} . Для этого прежде всего вычтем почленно равенство (6.6) из (6.8), тогда получим следующую замечательную формулу, верную как для шероховатых, так и для гладких труб ($\nu > k > \delta_l$):

$$\frac{u_m - u_{cp}}{v_*} = 5,75 \lg \frac{r}{y}. \quad (6.9)$$

На рис. 104, приведенном ранее, даны экспериментальные точки Никурадзе, соответствующие как совершенно гладким, так и различным шероховатым трубам. С физической стороны правильность формулы (6.9) лишний раз подтверждает возможность считать общие законы турбулентного переноса не зависящими от шероховатости, которая влияет лишь на величину v_* и на граничные условия при $y = k$, т. е. на u_k . Исключая из уравнения величину u_k (или Φ), мы тем самым получаем равенство (6.9), одинаковое при различных относительных шероховатостях. Интегрирование кривой рис. 104 приводит к результату

$$\frac{u_m - u_{cp}}{v_*} = 3,75.$$

Обращаясь теперь к равенству (6.8), перепишем его тождественно так

$$\frac{u_m - u_{cp}}{v_*} + \frac{u_{cp}}{v_*} - 5,75 \lg \frac{r}{k} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right),$$

или по предыдущему

$$3,75 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} - 5,75 \lg \frac{r}{k} = \Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right). \quad (6.10)$$

Функция $\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right)$ может быть экспериментально определена двумя независимыми друг от друга путями: по скоростям на основании формулы (6.6) и по сопротивлениям на основании формулы (6.10). Оба определения приводят к одному и тому же результату, как это видно на рис. 120; экспериментальные точки получены Никурадзе в его большом исследовании по шероховатым трубам¹⁾. Никурадзе проводил свои опыты в трубах, внутренняя поверхность которых была покрыта просеянным сквозь сито песком определенной крупности, сверху залитым лаком; это позволяет считать бугорки шероховатости подобными и подобно расположенными (плотное расположение).

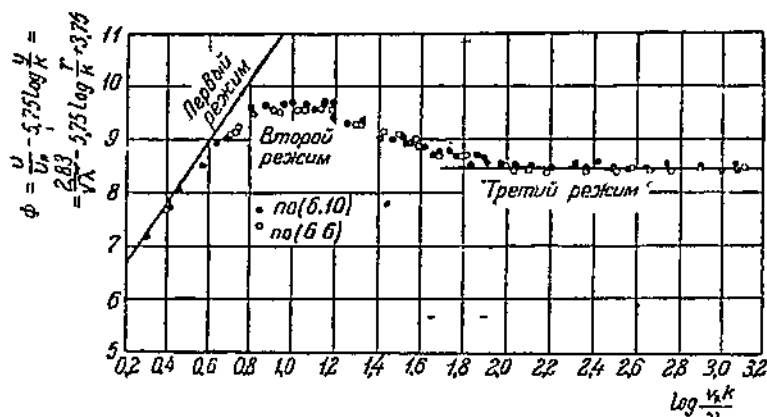


Рис. 120.

Рассмотрение кривой $\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right)$ дает возможность установить условия, при которых развивается тот или другой режим движения. Первый (предельный) режим имеет место, примерно до $\lg \frac{kv_*}{\nu} = 0,48$, т. е. до $\frac{kv_*}{\nu} \approx 3$ или, принимая $\delta_t = 11,5 \frac{\nu}{v_*}$, можем установить в качестве условия существования первого (предельного) режима

$$\frac{k}{\delta_t} < 0,25. \quad (6.11)$$

Третий (предельный) режим, режим установившейся шероховатости, начинается с $\lg \frac{kv_*}{\nu} = 1,8$, что соответствует $\frac{kv_*}{\nu} \approx 60$ и, следовательно, имеет место при условии

$$\frac{k}{\delta_t} > 6.$$

¹ I. Nikuradse. Strömungsgesetze in rauhen Röhren. VDI Forschungsheft № 361, 1933.

Заметим, что при третьем режиме

$$\Phi\left(\frac{kv_*}{\nu}\right) = 8,48, \quad (6.12)$$

и закон сопротивления (6.10) приводится к легко запоминаемому виду

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{r}{k} + 1,74, \quad (6.13)$$

или

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{k} + 1,74\right)^2}. \quad (6.14)$$

Кривая, определяющая связь между $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \lg \frac{r}{k}$ и $\frac{kv_*}{\nu}$, в случае любого режима дана на рис. 121, кривая эта аналогична кривой на рис. 120.

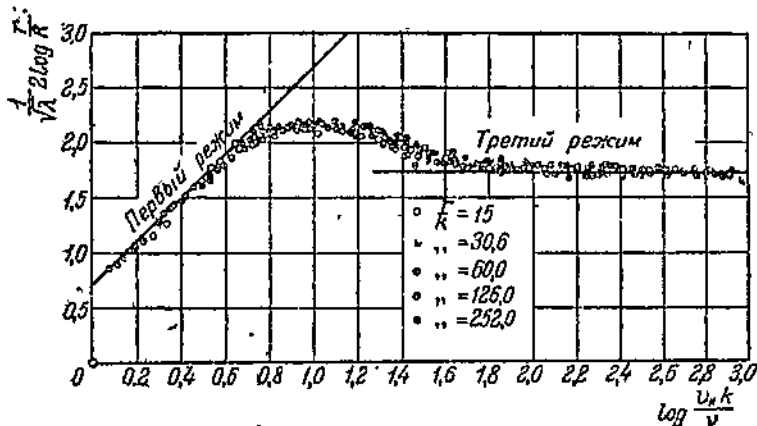


Рис. 121.

Наконец, на рис. 122 приводим обычные кривые зависимости коэффициента сопротивления λ от рейнгольдсова числа $R = \frac{u_{\text{ср}} \cdot d}{\nu}$ в случае шероховатых труб различной относительной шероховатости $\frac{k}{r}$. Из графика отчетливо видны следующие основные свойства движения в шероховатых трубах:

- 1) относительная шероховатость не влияет на критическое рейнгольдсово число перехода ламинарного движения в турбулентное и на сопротивление в еще не развившемся турбулентном движении;
- 2) формула Блязиуса верна в тем меньшем интервале, чем больше относительная шероховатость;
- 3) при больших рейнгольдсовых числах, тем больших, чем меньше относительная шероховатость, устанавливается квадратичный закон сопротивления, при котором коэффициент сопротивления не зависит от рейнгольдсова числа, а зависит от $\frac{k}{r}$ по формуле (6.13).

Приведенные кривые подтверждают правильность принятой ранее схемы трех режимов течения жидкости в шероховатых трубах.

Переход от случая трубы к „внешней“ задаче, т. е. к расчету пограничного слоя вблизи шероховатой стенки, представляет большие трудности, так как, например, при одинаковой вдоль по потоку абсолютной шероховатости k , относительная шероховатость $\frac{k}{\delta}$ (δ сопоставляется, как было показано выше, радиусу трубы, скорость на внешней границе слоя — скорости на оси трубы) будет меняться.

В лобовой части тела, где пограничный слой еще не успел развиться, относительная шероховатость будет весьма велика, так как δ мало; с развитием толщины слоя, при переходе к кормовой части, относительная шероховатость $\frac{k}{\delta}$ будет убывать. Вместе с тем на одном

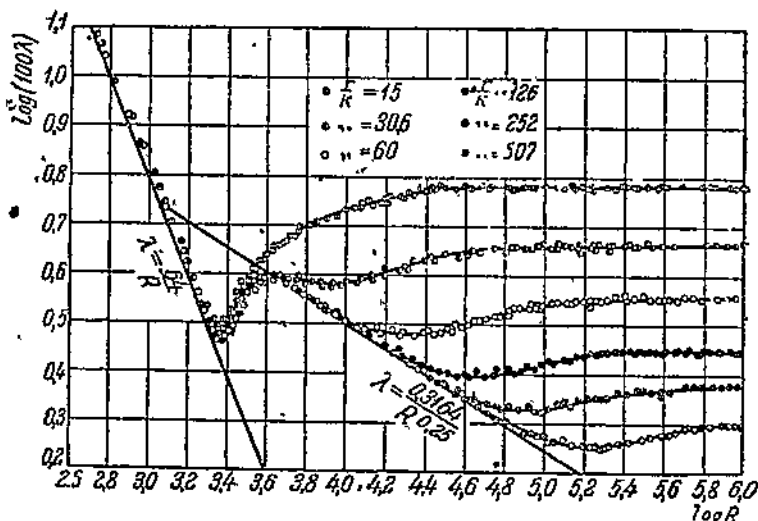


Рис. 122.

и том же теле, например, пластине, будем иметь по длине тела различные режимы течения, так как с изменением напряжения трения τ_0 , меняется толщина ламинарного подслоя в турбулентном слое, а следовательно, и отношение $\frac{k}{\delta_t}$.

Прандтль и Шлихтинг¹⁾ произвели полный расчет пластины с заданной абсолютной шероховатостью. Пользуясь тем же методом, что и при расчете гладкой пластины (по Прандтлю), авторы учитывают возможность наличия трех режимов на пластине и для каждого режима берут различные эмпирические формы функции $\Phi\left(\frac{k v_*}{\nu}\right)$ по опытам Никурадзе. Задача доводится при этом до конца, но вы-

¹⁾ L. Prandtl und H. Schlichting. Der Widerstandsgesetz rauher Platten, Werft, Reederei, Hafen, 14 (1934).

кладки настолько кропотливы, что мы не можем на них остановиться. Удовольствуемся приведением окончательных результатов.

На рис. 123 даны кривые зависимости коэффициента местного трения $c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$ (U_0 — скорость набегающего на пластину (потока) от рейнولدсова числа $R_x = \frac{U_0 x}{\nu}$ при различных постоянных значениях параметра $\frac{x}{k}$ и параметра $\frac{U_0 k}{\nu}$. На рис. 124 так же составлены кривые для коэффициента полного трения C_x .

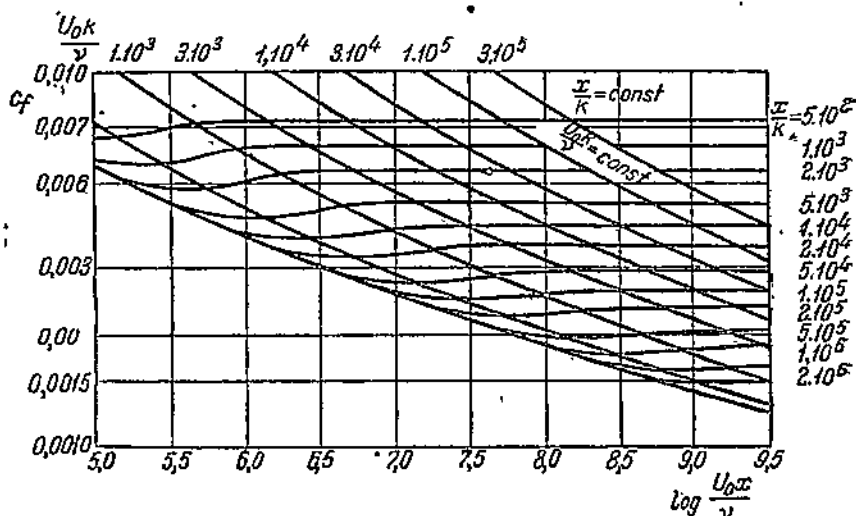


Рис. 123.

Если задаться абсолютным размером бугорка шероховатости k , то кривые семейства $\frac{x}{k} = \text{const}$ соответствуют различным фиксированным значениям x , т. е. закону изменения коэффициента местного трения на данном расстоянии x от переднего края или коэффициента полного сопротивления пластины длины x при изменении скорости набегающего потока или его вязкости. Кривые семейства $\frac{U_0 k}{\nu} = \text{const}$ при заданной абсолютной шероховатости дают возможность изучить изменение коэффициентов сопротивления в связи с изменением x . Можно, конечно, и наоборот — задаться значением x и определять влияние шероховатости и т. д. Номограммы рис. 123 и 124 позволяют решать ряд задач на сопротивление шероховатых пластин.

Если на пластине в основном устанавливается третий (предельный) режим, т. е. режим отрывного обтекания бугорков с квадратичным законом сопротивления, не зависящим от рейнولدсова числа, то решение задачи упрощается. В этом случае, исходя из формулы (6.6),

которая при третьем режиме имеет вид

$$\frac{u}{v_a} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + 8,48,$$

и применяя метод Кармана, изложенный в предыдущем параграфе для гладкой пластинки, найдем¹⁾ формулу сопротивления:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4,15 \lg \left(\frac{x \sqrt{c_f}}{k} + 5,8 \right). \quad (6.15)$$

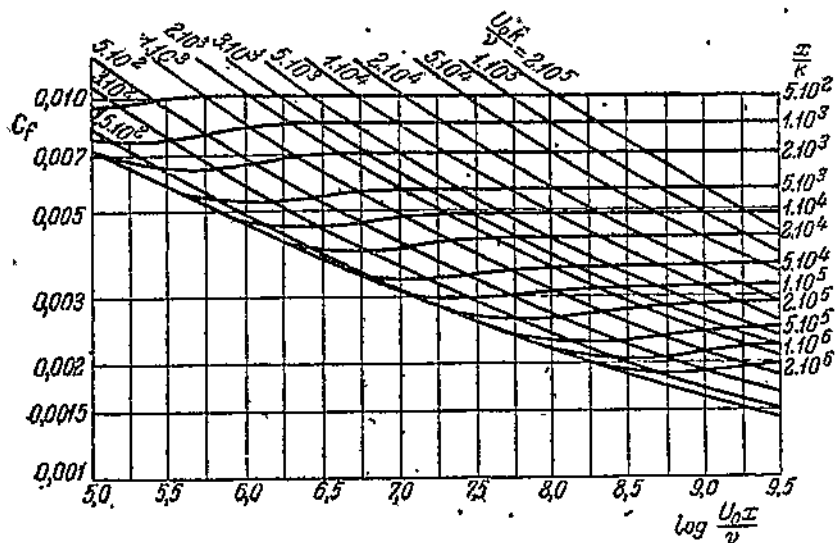


Рис. 124.

Шлихтинг²⁾ предлагает следующие две, более удобные для расчетов, приближенные формулы коэффициентов местного и полного трения при режиме установившейся шероховатости:

$$\left. \begin{aligned} c_f &= \left(2,87 + 1,58 \lg \frac{x}{k} \right)^{-2,5} \\ C_f &= \left(1,89 + 1,62 \lg \frac{x}{k} \right)^{-2,5} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Формулы эти с успехом могут быть применены для грубо шероховатых пластин, так как обычно толщина ламинарного подслоя невелика. Для приближенной оценки возможности применения формул (6.16) следует сначала подсчитать толщину ламинарного подслоя (по трению).

¹⁾ Th. v. Kármán. Turbulence and Skin Friction. Journ. of the Aeron. Sciences 1 (1934).

²⁾ H. Schlichting. Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem Ingen.-Archiv, 7 (1936).

на гладкой пластине и таким путем оценить величину $\frac{k}{\delta_l}$, чтобы знать, к какому режиму относится данное обтекание¹⁾.

Расчет влияния шероховатости на лобовое сопротивление пластины (крыла) представляет собою одну из наиболее важных современных задач теории сопротивления. Кривые Прандтля-Шлихтинга служат основой для приближенных расчетов такого рода²⁾.

Наряду с вопросами общей, однородно распределенной („зернистой“) шероховатости, стоят вопросы расчета влияния „местной“ шероховатости, происходящей от отдельных мелких выступающих тел, не нарушающих общего режима обтекания гладкой поверхности. К „местной“ шероховатости следует относить всевозможные заклепки, сварные швы и т. п. детали, попадающиеся на обшивках крыла, корабля и др. Расчет сопротивления такого рода мелких тел, собственно говоря, уже относится к специальному вопросу о сопротивлении мелких тел, расположенных в заданном пограничном слое рассматриваемого большого тела. При закономерном распределении таких отдельных тел (например, заклепок), дополнительное сопротивление, происходящее от них, можно сравнить с „эквивалентным“ сопротивлением общей (однородной) шероховатости. Такого рода анализ сопротивлений произвел Шлихтинг³⁾, экспериментировавший с поверхностями, покрытыми заклепками, расположенными по различным законам. Шлихтинг изучал влияние плотности распределения заклепок, их взаимного расположения и других параметров. Некоторые теоретические соображения по вопросу об установлении основных параметров местной шероховатости можно найти в ранее цитированной нашей статье⁴⁾.

К. К. Федяевский и Н. Н. Фомина в только что вышедшей их работе⁵⁾ приводят подробный теоретический и экспериментальный анализ пограничного слоя при наличии местной шероховатости. Исследуя экспериментально сопротивление отдельного бугорка (полусферической головки заклепки), авторы указывают, что при малой плотности распределения бугорков лобовое сопротивление отдельного бугорка лишь приблизительно равно сопротивлению тела с размерами бугорка в свободном потоке, если скорость u_∞ приравнять скорости набегающего свободного потока (утверждение Шлихтинга). На самом деле коэффициент сопротивления бугорка несколько меньше. В этой же работе можно найти изложение различных приемов определения эквивалентной высоты бугорка общей шероховатости k_s .

1) Решение задачи о сопротивлении пластины при третьем режиме, основанное на применении степенных законов, было дано И. Г. Хановичем в брошюре „О влиянии шероховатости обшивки корабля на сопротивление“. Ленинград, 1938.

2) Примерные расчеты можно найти в книге Б. Т. Горощенко. Скорость полета. Оборонгиз, 1938 г. стр. 99.

3) H. Schlichting. Ing.-Archiv 7 (1936) Experimentelle Untersuchungen zum Rauheitsproblem.

4) Л. Г. Лойцянский. Об универсальных формулах и т. д. Труды ЦАГИ, вып. 250, 1936 г.

5) К. К. Федяевский и Н. Н. Фомина. Исследование влияния шероховатости на сопротивление и состояние пограничного слоя. Труды ЦАГИ, вып. 441, 1939 г.

соответствующей высоте местной шероховатости k . Простейшим приемом является определение k_s по формуле (6.13), если представляется возможным измерить λ при третьем режиме в трубе с местной шероховатостью, или же по какой-нибудь аналогичной формуле сопротивления. В цитируемой работе можно найти таблицу эквивалентных высот бугорков k_s для различных на практике встречаемых шероховатостей, а также и ряд других ценных сведений по расчету сопротивлений шероховатых поверхностей¹⁾.

Перед конструктором стоит вопрос об определении „допустимой“ местной шероховатости на поверхности тела, как такой шероховатости, при которой течение в пограничном слое соответствует первому, предельному режиму, т. е. почти не зависит от шероховатости. При этом режиме бугорки не должны, как было показано, превосходить по высоте четверти толщины ламинарного подслоя. Производя расчет трения на заданном теле и толщины подслоя, можно тем самым определить и „допустимую шероховатость“²⁾. При больших рейнольдсовых числах допустимая шероховатость оказывается весьма малой. Так, по расчетам Кармана, на крыле с хордой 3 м, летящем со скоростью 100 м/сек, допустимая высота бугорков шероховатости равна, примерно, 0,01 мм. Отсюда следует, что крылья и фюзеляж скоростного самолета нуждаются в очень тщательной обработке. При обтеканиях с меньшими скоростями такая обработка менее существенна.

К. К. Федяевский³⁾ используя гипотезу плоского обтекания бугорков шероховатости, состоящей в предположении о пренебрежимости составляющих скорости, нормальных к поверхности, на которой расположен бугорок, развил метод расчета местной и общей шероховатости; сравнение результатов расчета с опытными материалами дало хорошее совпадение.

ГЛАВА IV

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

§ 1. Применение степенных законов к расчету пограничного слоя на криволинейном профиле. Основные недостатки метода

Применение степенного закона скорости („одной седьмой“ и др.) к расчету сопротивления пластины, изложенное в главе II настоящего отдела, приводило к результатам, хорошо совпадающим с опытными данными, если рейнольдсово число не превосходило определенной границы, тесно связанной со степенью (например, $n = \frac{1}{7}$, $R_x < 4 \cdot 10^6$

¹⁾ См. также И. Г. Ханович. Теория корабля. Военмориздат, 1939 г.; глава XXII, или ранее цитированную брошюру.

²⁾ См. К. К. Федяевский. Примерный расчет интенсивности трения и „допускаемых“ высот шероховатости для крыла. Труды ЦАГИ, вып. 250, 1936.

³⁾ К. К. Федяевский. Расчет трения поверхностей с местной и общей шероховатостью. Труды ЦАГИ, вып. 250, 1936.

и др.). Этот крайне простой метод легко обобщается и на случай обтекания криволинейного профиля¹⁾.

Для этого, следуя общей теории плоского пограничного слоя конечной толщины, составим интегральное условие (уравнение количества движения):

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - \rho U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} u dy = -\delta \frac{dp}{ds} - \tau_0, \quad (1.1)$$

где под s понимается длина дуги, отсчитываемая по контуру профиля от лобовой критической точки, а U — скорость на внешней границе пограничного слоя ($y = \delta$); эту скорость не следует смешивать со скоростью U_0 потока, набегающего на профиль из бесконечности.

Положим в уравнении (1.1)

$$u = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (1.2)$$

где n — произвольный постоянный показатель; напряжение трения τ_0 также примем по степенной формуле (гл. II, § 4) равным:

$$\tau_0 = \zeta \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \left(\frac{U_0}{U} \right)^m, \quad m = -\frac{2n}{n+1}, \quad (1.3)$$

а давление p исключим по теореме Бернулли:

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{2} \rho U^2 &= p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \\ -\frac{dp}{ds} &= \frac{1}{2} \rho \frac{d}{ds} (U^2) = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \frac{df}{ds}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь введено для краткости обозначение.

$$f = f(s) = \left(\frac{U}{U_0} \right)^2. \quad (1.5)$$

Вычисляя интегралы, входящие в левую часть уравнения (1.1) и заменяя в уравнении τ_0 и $\frac{dp}{ds}$ по только-что выведенным формулам, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \rho U^2 \frac{d\delta}{ds} + \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{\rho}{2} \frac{d}{ds} (U^2) \cdot \delta = \\ = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \frac{df}{ds} - \zeta \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \left(\frac{U_0}{U} \right)^m, \end{aligned}$$

или, деля обе части уравнения на $\frac{1}{2} \rho U_0^2$ (штрих — производная по s):

$$2 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) f \cdot \delta' + \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) f' \cdot \delta = f' \delta - \zeta f \left(\frac{U_0}{U} \right)^m, \quad (1.6)$$

¹⁾ H. Müller. Flächenwiderstand umströmter Körper. Werft, Reederei, Hafen 1932, S. 54.

В полученном уравнении $f=f(s)$, точно так же как и U — заданные наперед функции (определенные по распределению давлений); единственной неизвестной является толщина пограничного слоя $\delta=\delta(s)$. Последний член с правой стороны можно представить так

$$\zeta f \left(\frac{U_0}{v} \right)^m = \zeta f \left(\frac{U_0}{v} \right)^m \left(\frac{U}{U_0} \right)^m \cdot \delta^m = \zeta \left(\frac{U_0}{v} \right)^m \cdot f^{1+\frac{m}{2}} \cdot \delta^m,$$

после подстановки в (1.6) и деления обеих частей на $f \cdot \delta^m$, окончательно получим следующее дифференциальное уравнение относительно $z = \delta^{1-m}$:

$$z' + A \frac{f'}{f} z - B \left(\frac{U_0}{v} \right)^m f^{\frac{m}{2}} = 0, \quad (1.7)$$

где A и B — две постоянные величины, определяемые по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(2n+3)(3n+1)}{2(n+1)} \\ B &= \zeta \frac{(2n+1)(3n+1)}{2n} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

а коэффициент сопротивления ζ в функции $\frac{1}{n}$ представлен графиком на рис. 125.

Уравнение (1.7) интегрируется в квадратурах и дает

$$z = B \left(\frac{U_0}{v} \right)^m \cdot f^{-A} \int_0^s f^{\frac{m}{2}+A} ds, \quad (1.9)$$

если предположить для упрощения, что при $s=0$, $\delta=0$ и что всему слою соответствует один и тот же степенной закон скоростей и сопротивлений.

Введем в рассмотрение какую-нибудь характерную для обтекаемого профиля длину l (например, хорду) и соответствующее рейнольдсово число $R = \frac{U_0 l}{v}$, тогда уравнению (1.9) можно придать безразмерный вид:

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^{1-m} = B \cdot R^m \cdot f^{-A} \cdot \int_0^{s/l} f^{\frac{m}{2}+A} d\left(\frac{s}{l} \right). \quad (1.10)$$

В частном случае закона „одной седьмой“

$$n = \frac{1}{7}, \quad m = -\frac{1}{4}, \quad \zeta = 0,045$$

будем иметь:

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^{\frac{5}{4}} = 0,289 \cdot R^{-\frac{1}{4}} \cdot f^{-2,068} \int_0^{s/l} f^{1,938} d\left(\frac{s}{l} \right). \quad (1.11)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) служат для определения толщины пограничного слоя на профиле. Коэффициент местного трения c_f можно найти по формуле (1.3):

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \zeta \left(\frac{U_0}{v} \right)^m = \zeta \left(\frac{U_0}{v} \right)^m \cdot f^{\frac{m}{2}} \cdot \delta^m = \zeta R^m \cdot f^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\delta}{l} \right)^m, \quad (1.12)$$

если вместо $\frac{\delta}{l}$ подставить его выражение по (1.10).

Простые вычисления показывают, что c_f определяется выражением

$$c_f = \zeta \left[B \cdot R \int_0^{s/l} f^{m/2 + A} d\left(\frac{s}{l}\right) \right]^{\frac{m}{1-m}} \cdot f^{2n}. \quad (1.13)$$

При $n = \frac{1}{7}$ будем иметь

$$c_f = 0,045 \left[0,289 R \int_0^{s/l} f^{1,028} d\left(\frac{s}{l}\right) \right]^{-\frac{1}{5}} \cdot f^{\frac{2}{7}}. \quad (1.14)$$

Задаваясь распределением величины f — обычно это экспериментальный график — вычерчиваем кривую $f^{1,028}$ в функции от $\frac{s}{l}$, дальнейшее интегрирование для последовательных значений $\frac{s}{l}$ не составляет

никакого труда и допускает простое пользование планиметром. Форму таблиц и примерный расчет, произведенный по изложенному методу, можно найти, например, в ранее цитированном вып. 250 Трудов ЦАГИ. Ввиду крайней простоты методики расчета, в настоящем курсе соответствующие таблицы приводить не будем.

Обратимся к сравнению расчетных данных с экспериментальными.

На рис. 126 помещены результаты расчетов (по закону „одной седьмой“) распределения толщины пограничного слоя и напряжения трения по поверхности 15° симметричного профиля Жуковского при нулевом угле атаки и числе Рейнольдса $1,7 \cdot 10^6$ (на рисунке сплошная кривая)¹⁾. Там же для сравнения даны экспериментальные кривые Фейджа и Фалькнера²⁾. Расчет сделан с учетом роли начального ламинарного участка, который в опытах Фейджа и Фалькнера доходил до $\frac{s}{l} = 0,4$. Такой учет несколько не усложняет метода. Интегрируя уравнение (1.7) от s_0 до s , где s_0 — длина ламинарного участка, будем иметь ($\delta_0 = \delta(s_0)$):

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^{1-m} = \left(\frac{\delta_0}{l} \right)^{1-m} + B R^m f^{-A} \int_{s_0/l}^{s/l} f^{m/2 + A} \cdot d\left(\frac{s}{l}\right);$$

1) Л. Е. Калихман. Влияние формы профиля на сопротивление трения. Труды ЦАГИ, вып. 333, 1937 г., стр. 12.

2) A. Fage and Falkner. An experimental determination of the intensity of friction on the surface of an aerofoil. ARC, R & M № 1315, April, 1930.

величины δ_0 и s_0 берутся или из опыта, или расчетом по теории ламинарного слоя, если известно критическое рейнольдсово число пограничного слоя (здесь влияние ламинарного участка слоя учитывается приемом Бюргерса).

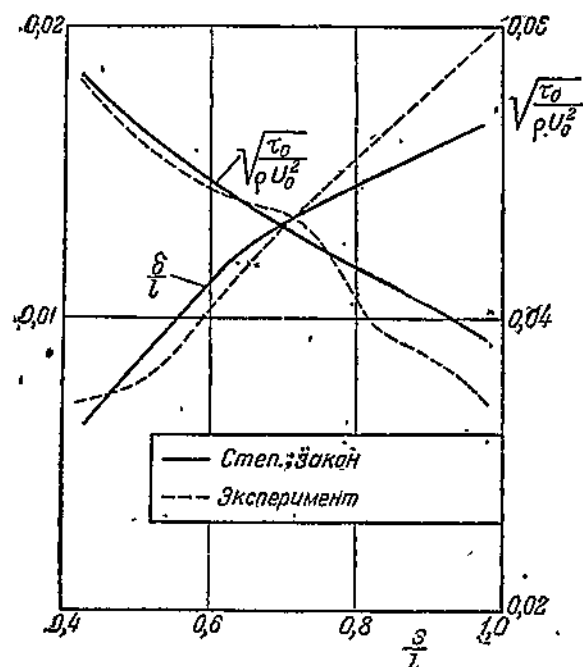


Рис. 126.

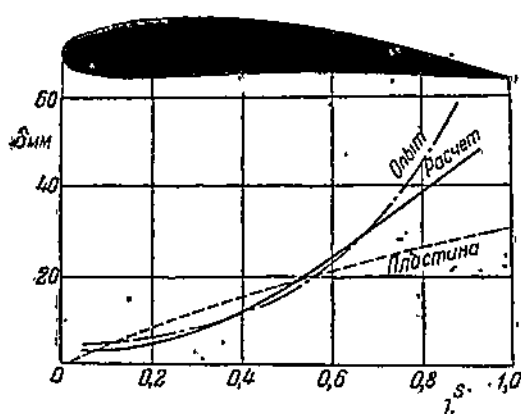


Рис. 127.

Совпадение с опытом удовлетворительное, особенно если принять во внимание, что измерение толщины пограничного слоя и напряжения трения весьма не точно. В работе Калыхана можно найти много примеров расчета трения и толщины пограничного слоя для различных профилей.

На рис. 127 приводим еще результат сравнения толщины пограничного слоя, полученной расчетом по предыдущему методу и непосредственным измерением по опытам Кун¹⁾, произведенным в полете на верхней поверхности крыла при $l = 1,85 \text{ м}$, $U_0 = 32 \text{ м/сек}$; $R = 4,5 \cdot 10^6$; расхождение между теорией и опытом идет в ту же сторону, что и на рис. 126. Для сравнения дано распределение толщины пограничного слоя по пластинке. Новые опыты на модели крыла USA 35a были произведены недавно в ЦАГИ и сравнены с теоретическими расчетами по степенному и более точному закону²⁾.

Основными принципами

¹⁾ O. Kuno. Experimentelle Untersuchungen der Grenzschichtdicke und Verlauf längs eines Flügelschnittes. ZFM, 1932, № 7

²⁾ Н. Н. Фомина и Е. К. Бучинская. Экспериментальное исследование двумерного пограничного слоя. Труды ЦАГИ вып. 374, 1938.

альными недостатками метода степенных законов в случае криволинейного профиля являются: 1) необходимость изменения значения показателя степени при переходе к большим рейнольдсовым числам и 2) предположение о подобии профилей скорости в различных сечениях пограничного слоя, скрытое в формуле (1.2).

Первый недостаток имеет место и при расчете пластины. Как мы уже знаем, этот недостаток может быть устранен переходом к логарифмическим профилям скорости, не зависящим от рейнольдсова числа, или к некоторым средним показателям степени. В случае больших рейнольдсовых чисел можно также разбить всю длину профиля (или пластины) на отдельные участки, соответствующие различным интервалам рейнольдсова числа пограничного слоя, и в каждом из таких интервалов брать различные показатели степени ($1/7$, $1/8$ и т. д.).

Гораздо большее принципиальное значение имеет второй недостаток. Если на пластине предположение о подобии профилей скорости в различных сечениях пограничного слоя хорошо согласуется с опытом, то на криволинейных профилях, наоборот, опытные кривые в значительной степени противоречат этому предположению. На рис. 128 приведены для иллюстрации экспериментальные профили скорости $\frac{u}{U}$ в функции от $\frac{y}{\delta}$ для различных сечений пограничного слоя на крыле Гёттинген 397, там же для сравнения приводится и степенной профиль $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$; как видно, о подобии профилей говорить не приходится. Правда, чтобы подчеркнуть эффект, на рис. 128 приведены профили скорости в сечениях, удаленных от передней кромки крыла ($23,55 \text{ см} < x < 39,2 \text{ см}$, при хорде равной 40 см), да при том еще при угле атаки, равном 6° , т. е. в области слоя значительно диффузорной. В других случаях отклонение от подобия может быть и меньшим, но все же с ним нельзя не считаться.

Продольный перепад давлений по поверхности крыла влияет на форму профиля скорости в пограничном слое и это влияние не учитывается степенным профилем скорости. Аналогичный факт имел место и в теории ламинарного слоя конечной толщины. Второе приближение по Польшаузену давало профили скорости, не зависящие от перепада давлений; четвертое приближение, заключавшее в себе параметр $\lambda = \frac{U'^2}{\nu}$, уже учитывало неподобие профилей в различных сечениях.

Из сказанного, конечно, было бы неправильно сделать заключение, что в изложенном методе применения степенных законов совсем не учитывается влияние перепада давлений или, что все равно, перемены скорости U на внешней границе пограничного слоя. В основном уравнении (1.1) U рассматривается как функция s , точно так же, как и параметр $f = \left(\frac{U}{U_0}\right)^2$; таким образом явное влияние изменения U учитывается; не учитывается лишь неявное влияние изменения U

¹⁾ E. Gruschwitz, Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing. Archiv. II. 1931; S. 321.

через форму профиля скорости в пограничном слое. Этим и объясняется тот факт, что все же, в результате применения степенного метода, удается получать трение и толщину пограничного слоя сравнительно близкими к опытным. Во всяком случае, в силу крайней расчетной простоты, метод применения степенных законов скорости и трения можно вполне рекомендовать, как первое приближение для практических расчетов, дающее очень хорошую оценку основных характеристик пограничного слоя.

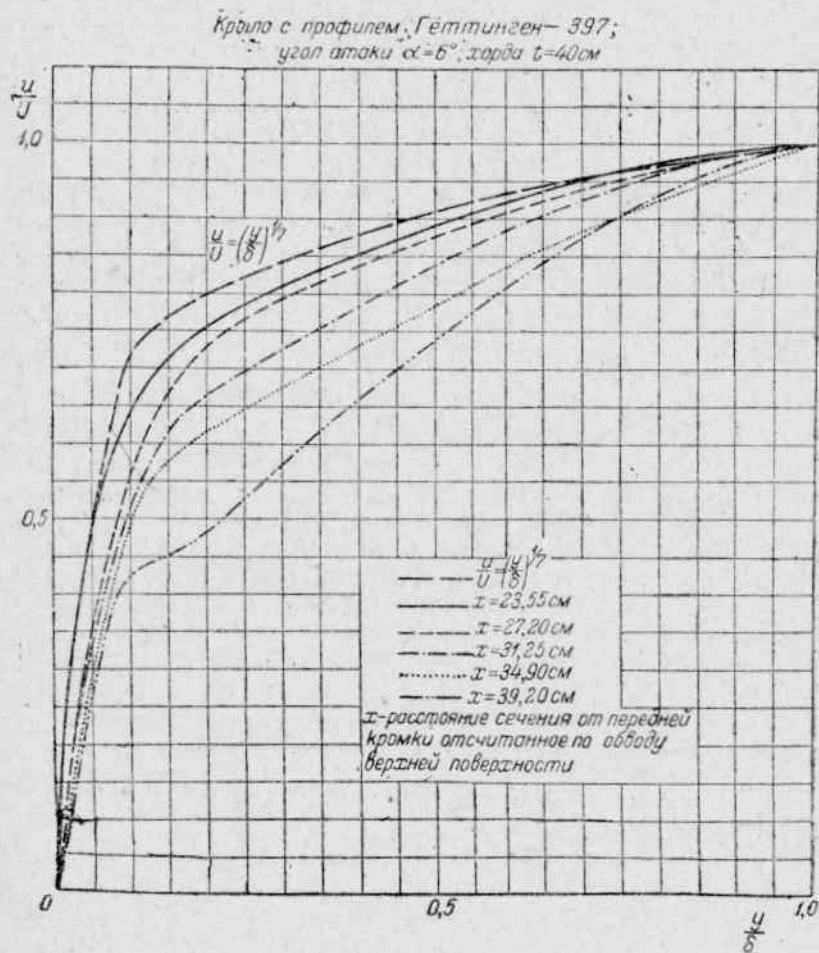


Рис. 128.

В дальнейшем будут изложены методы, в значительной степени лишенные предыдущих недостатков; эти методы, к сожалению, не будут уже так просты, как метод, основанный на применении степенных законов.

§ 2. Применение степенных законов к осесимметричным обтеканиям. Сопротивление дирижабельных форм

Приложение метода степенных законов к случаю осесимметричного обтекания тел вращения дал в 1932 г. К. Милликен¹⁾.

Пользуясь уравнением количества движения для пограничного слоя на теле вращения

$$\frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} r u^2 dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} r u dy = U U' \int_0^{\delta} r dy - r_0 \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (2.1)$$

вывод которого приведен в § 1 главы VI отдела II настоящего курса, и заменяя переменную r на $r_0 + \beta y$, где, напомним, r_0 радиус сечения тела, соответствующего рассматриваемому сечению пограничного слоя, $\beta = \cos \alpha$ — косинус угла между касательной к меридиональному сечению обтекаемого тела в рассматриваемой точке и продольной осью симметрии тела OX (рис. 51), после простых приведений сможем придать уравнению (2.1) вид (штрих означает производную по σ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u dy + \frac{r_0'}{r_0} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy - U \int_0^{\delta} u dy \right) + \\ + \left[\frac{\beta}{r_0} \left(\frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u^2 y dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u y dy \right) + \frac{\beta'}{r_0} \left(\int_0^{\delta} u^2 y dy - \right. \right. \\ \left. \left. - U \int_0^{\delta} u y dy \right) \right] = U U' \delta \left(1 + \frac{\beta}{2} \frac{\delta}{r_0} \right) - \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Для дирижабельных (сигарообразных) форм большого удлинения можно в левой части уравнения пренебречь членами (поставленными в квадратные скобки), содержащими отношения $\frac{\delta}{r_0}$ и $\delta \beta' \sim \delta \alpha' \sim \frac{\delta}{c_r}$, где c_r — радиус кривизны меридионального сечения тела, а также и членом $\frac{\beta}{2} \frac{\delta}{r_0}$, по сравнению с единицей в правой части. Такое пренебрежение может вызвать некоторые опасения вблизи носа дирижабельной формы ($r_0 = 0$), а также и в хвостовой области, где r_0 близко к нулю, а δ , наоборот, возрастает. Однако, вблизи лба σ , отсчитываемое по обводу, и r_0 приблизительно равны:

$$\sigma = c_{r0} \varphi, \quad r_0 = c_{r0} \cdot \sin \varphi = c_{r0} \varphi \left(1 - \frac{\varphi^2}{6} + \dots \right),$$

¹⁾ C. Millikan. The Boundary Layer and Skin Friction for a Figure of Revolution. Trans. Amer. Soc. Mechanical Engineers, Appl. Mech. Section, 54 (1932); p. p. 29—39.

где φ — острый угол между нормалью точки и продольной осью тела OX , а c_{r0} — радиус кривизны носа дирижабля; при этом

$$r_0' = \frac{dr_0}{d\sigma} = \frac{1}{c_{r0}} \cdot \frac{dr_0}{d\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

$$\beta = \sqrt{1 - r_0'^2} \approx \varphi + \dots, \quad \frac{\beta}{r_0} \approx \frac{1}{c_{r0}}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{d\sigma} \approx \frac{1}{c_{r0}},$$

и, следовательно:

$$\frac{\beta}{r_0} \left(\frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u^2 y dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u y dy \right) = \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u^2 \frac{y}{c_{r0}} dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u \frac{y}{c_{r0}} dy \ll$$

$$\ll \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u dy,$$

точно также

$$\frac{\beta'}{r_0} \left(\int_0^{\delta} u^2 y dy - U \int_0^{\delta} u y dy \right) \ll \frac{r_0'}{r_0} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy - U \int_0^{\delta} u dy \right),$$

$$\frac{\beta}{2} \frac{\delta}{r_0} \ll 1.$$

Эти оценки оправдывают производимые упрощения вблизи лба тела. Что же касается до хвостовой части, то там откидывание указанных членов допустимо из соображений относительной малости трения в этой области, а, следовательно, и малого веса хвостовой области в общей сумме сопротивлений трения.

Собственно говоря, приведенная оценка лобовой части более существенна при расчете ламинарного слоя, так как на лбу мы имеем начальный ламинарный участок. Можно при расчете трения вообще откидывать этот участок, ввиду сравнительной малости ламинарного трения по отношению к турбулентному. Если же расчет ведется по турбулентному закону с самого носа, то сделанная оценка имеет значение.

Итак, уравнение (2.2) может быть заменено следующим

$$\frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{d}{d\sigma} \int_0^{\delta} u dy + \frac{r_0'}{r_0} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy - U \int_0^{\delta} u dy \right) = U U' \delta - \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (2.3)$$

Примем вместе с Милликеном закон „одной седьмой“, т. е. положим

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}, \quad \tau_0 = 0,045 \frac{\rho U^2}{2} \cdot \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{0,35}, \quad (2.4)$$

тогда, совершая простые вычисления, приведем уравнение (2.3) к виду

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\delta^{5/4} \right) + \left(\frac{115}{28} \cdot \frac{U'}{U} + \frac{35}{28} \frac{r_0'}{r_0} \right) \delta^{5/4} = 0,289 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/4}. \quad (2.5)$$

Простое интегрирование дает ($dx = \beta d\sigma$):

$$\delta^{\frac{5}{4}} = \frac{0,289 \cdot \frac{1}{U^{\frac{115}{28}} r_0^{\frac{35}{28}}}}{\frac{1}{U^{\frac{115}{28}} r_0^{\frac{35}{28}}}} \int_{\sigma_c}^{\sigma} \frac{U^{\frac{108}{28}} r_0^{\frac{35}{28}}}{\beta} dx + \left(\frac{U_c}{U} \right)^{\frac{115}{28}} \cdot \left(\frac{r_{0c}}{r_0} \right)^{\frac{35}{28}} \delta_c^{\frac{5}{4}}, \quad (2.6)$$

где подстрочный индекс "с" означает величины в сечении, переходном от ламинарного режима к турбулентному. Обозначая через L длину дирижабельной формы (отсчитанной по оси OX) и вводя рейнольдсовы числа $R = \frac{U_0 L}{\nu}$ и $R_0 = \frac{U_0 r_0}{\nu}$, причем, очевидно, R — заданная постоянная, а R_0 — функция x (или σ), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 0,370 R^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{U}{U_0} N\left(\frac{x}{L}; \frac{x_0}{L}\right), \\ N\left(\frac{x}{L}; \frac{x_0}{L}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{r_0}{L}} \left[\int_{\frac{x_0}{L}}^{\frac{x}{L}} \frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{27}{7}} \left(\frac{r_0}{L}\right)^{\frac{5}{4}}}{\beta} d\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 3,46 R^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\delta_c}{L}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{U_c}{U_0}\right)^{\frac{115}{28}} \left(\frac{r_{0c}}{L}\right)^{\frac{5}{4}} \right]^{\frac{4}{5}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Пользуясь этими формулами и равенством (2.4), найдем коэффициент местного трения:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,045 R_0^{-0,25}, \quad (2.8)$$

а затем коэффициент полного сопротивления трения всего тела. Обычно при расчетах лобовых сопротивлений дирижаблей пользуются формулой:

$$W = C_f \cdot \frac{\rho U_0^2}{2} (V)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.9)$$

где V — объем дирижабля; иными словами, лобовое сопротивление относят не к площади минимального сечения, а к квадрату линейного размера, равного кубическому корню из объема дирижабля.

Замечая, что сопротивление турбулентного участка слоя равно

$$W_{турб} = \int_{\sigma_c}^L 2\pi r_0 \tau_0 dx = 0,045 \pi \rho \nu^{\frac{1}{4}} \int_{\sigma_c}^L \frac{r_0 U^{\frac{11}{4}}}{\delta^{\frac{1}{4}}} dx,$$

будем иметь:

$$(C_f)_{турб} = \frac{0,3625}{R^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{L^2}{(V)^{\frac{2}{3}}} \int_{\frac{\sigma_c}{L}}^1 \frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{11}{4}} \frac{r_0}{L}}{\left[N\left(\frac{x}{L}; \frac{x_0}{L}\right)\right]^{\frac{1}{4}}} \cdot d\left(\frac{x}{L}\right). \quad (2.10)$$

Коэффициент полного сопротивления C_f определяется как сумма

$$C_f = (C_f)_{\text{лам}} + (C_f)_{\text{турб.}} \quad (2.11)$$

Вычисление функции N по заданному распределению $U(x)$, $r_0(x)$ и $\beta(x)$ не представляет труда и может быть произведено при помощи простейших графических методов или планиметрированием. Определение δ , c_f и C_f после этого производится теми же приемами.

Принципиальную трудность содержит необходимость определения точки перехода ламинарного слоя в турбулентный и соответствующих ей значений x_c , δ_c и т. д. Положение этой точки, как мы уже знаем, зависит от начальной турбулентности набегающего потока, характера поверхности на лбу и др.

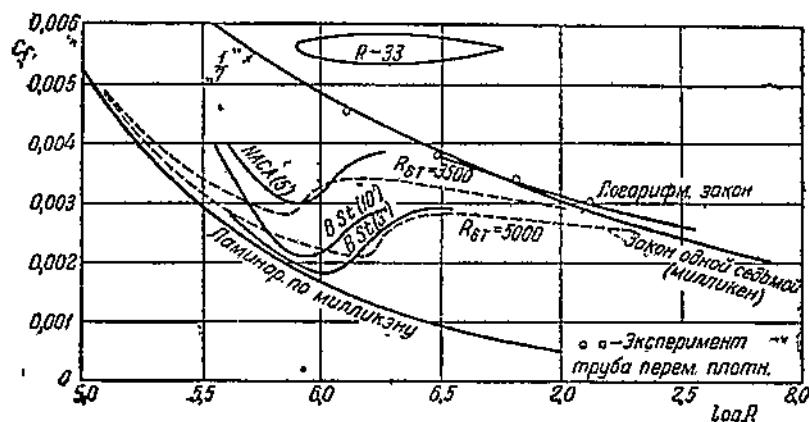


Рис. 129.¹

В первом приближении можно вообще не считаться с влиянием ламинарного участка, т. е. в предыдущих формулах положить $x_c = 0$, $r_{0c} = 0$, $U_{0c} = 0$, тогда N сведется к функции только $\frac{x}{L}$ и формулы (2.7), (2.8) и (2.10) значительно упростятся.

Во втором приближении достаточно учесть влияние ламинарного участка, например, по методу Прандтля, изложенному уже ранее¹).

Опыты (рис. 129) хорошо подтверждают расчетные формулы Милликена в области рейнольдсовых чисел, примерно, до $5 \cdot 10^6$, если только при этих рейнольдсовых числах большая часть модели обте-

¹ По этому поводу см. К. К. Федяевский и Н. Н. Фомина. Влияние степени турбулентности потока на лобовое сопротивление хорошо обтекаемых тел. Техн. заметки ЦАГИ № 126 (1936 г.) а также заметку К. К. Федяевского, там же № 30 (1932 г.).

Влияние длины ламинарного участка на сопротивление трения крыла можно найти в ранее цитированном докладе К. К. Федяевского (Техника воздушного флота № 7—8, 1939 г.; фиг. 5, стр. 12).

является турбулентным слоем; таковы, например, опыты в американской трубе переменной плотности, известной своей большой турбулентностью (об этом выше уже упоминалось). В трубах меньшей турбулентности, при обычных размерах моделей исследователь может оказаться в области рейнольдсовых чисел $5 \cdot 10^5$ — $5 \cdot 10^6$, где кривые сопротивления переходят от кривых ламинарного обтекания к кривым турбулентного обтекания. Опыты при больших рейнольдсовых числах показывают закономерные отклонения от кривой Милликена вверх, что может быть объяснено непригодностью закона „одной седьмой“ и необходимостью перехода на законы „одной восьмой“ и т. д. или же на универсальный логарифмический закон.

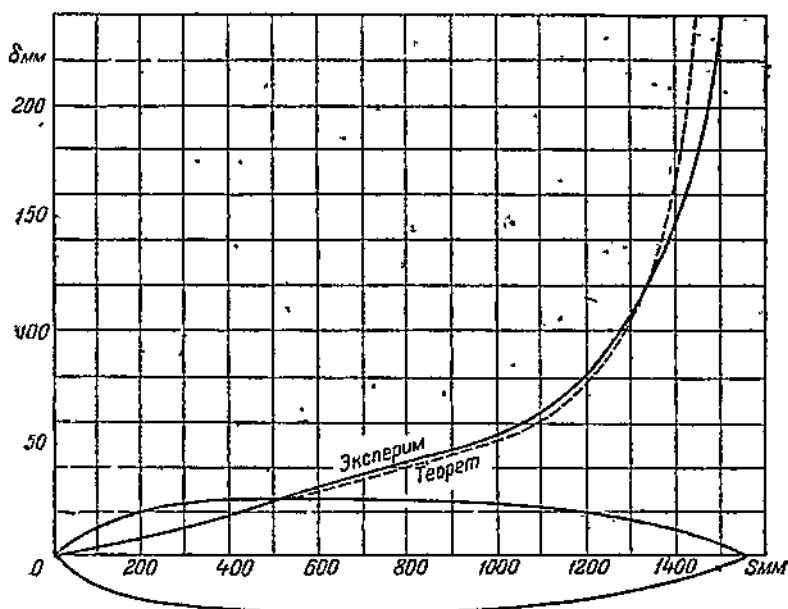


Рис. 130.

На рис. 129 приведены кривые коэффициента сопротивления трения модели R—33. Экспериментальные кривые НАСА (5-ти футовая труба) и Бюро Стандартов (В. St. 3-футовая и 10-футовая) являются переходными; только опыты, проведенные в трубе переменной плотности ложатся на чисто турбулентную кривую и этой кривой является кривая Милликена (закон „ $1/7$ “). На том же рисунке пунктиром даны две теоретические переходные кривые, соответствующие критическим рейнольдсовым числам $R_{кр}$ перехода ламинарного слоя в турбулентный, равным 3500 и 5000.

Чтобы иметь возможность произвести по турбулентным кривым пересчет с данных рейнольдсовых чисел модели на большие рейнольдсовы числа натуры, необходимо получить хотя бы несколько экспериментальных точек на турбулентной кривой. С этой целью в мало тур-

булентных аэродинамических трубах, а также и при протаскивании моделей в бассейнах, нарочно турбулизируют пограничный слой при помощи различных проволоочных колец или сеток. При этом точка перехода ламинарного слоя в турбулентный перемещается вверх по потоку и кривая сопротивления становится турбулентной.

На рис. 130 приводим сопоставление теоретической и экспериментальной кривых толщины пограничного слоя на модели дирижабля „Акрон“. На рис. 131 даны для сравнения кривые коэффициента местного трения.

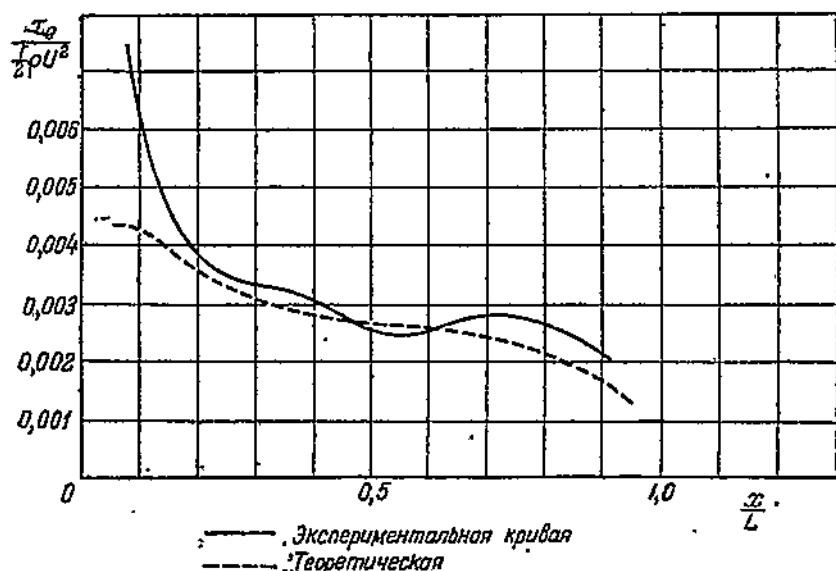


Рис. 131.

Почти одновременно с Милликеном в Советском Союзе К. К. Федяевский¹⁾ применил степенные законы к расчету трения на дирижабельных формах, причем, в отличие от Милликена, использовал общий степенной закон с любым показателем степени. Основываясь на существующих данных, К. К. Федяевский установил связь между показателем степени n и числом Рейнольдса R обтекаемого тела. Таким образом, меняя n ($n = 1/7, 1/8, 1/9$ и т. д.) в зависимости от величины R , можно определять сопротивление дирижабельной формы и при больших R , в то время как закон „одной седьмой“ пригоден лишь для моделей при малых R (примерно, до $5 \cdot 10^6$).

¹⁾ К. К. Федяевский. Пограничный слой и лобовое сопротивление тел вращения при больших числах Рейнольдса. Труды ЦАГИ, в. 179, 1934.

²⁾ Закон „одной шестой“ использован Н. Н. Фоминой и Е. К. Бучинской в ранее цитированной уже их работе „Экспериментальное исследование пограничного слоя“ Труды ЦАГИ, вып. 374, 1938; там же можно найти результаты новых, весьма точных, измерений профилей скорости и толщины пограничного слоя на модели дирижабля при различных углах атаки.

Не приводя анализа К. К. Федяевского, принципиально не отличающегося от изложенного в предыдущем и настоящем параграфах, дадим окончательные формулы:

$$\delta = \left[\frac{k(1-m)}{-2B} \right]^{\frac{1}{1-m}} \cdot R^{\frac{m}{1-m}} \cdot L^{\frac{m}{m-1}} \cdot f^{\frac{1-C}{2B}} \times$$

$$\times \frac{1}{r_0} \left(\int_0^s f^{\frac{m}{2} - \frac{(1-C)(1-m)}{2B}} \cdot r_0^{1-m} ds \right)^{\frac{1}{1-m}};$$

$$\frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = k \left(\frac{U_0}{v} \right)^m f^{1+\frac{m}{2}} \cdot \delta^m,$$

где n — показатель степени в формуле $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^n$, m — тоже в формуле сопротивления $\left(m = -\frac{2n}{n+1} \right)$, k — числовой коэффициент, зависящий от выбора n ,

$$B = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}, \quad C = \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1};$$

остальные обозначения — прежние. Зависимость коэффициента k и показателя степени n от R представлена на рис. 132. Методику расчетов (порядок вычислений, форму таблиц и т. д.) можно найти в книге К. К. Федяевского „Материалы по аэродинамическому расчету воздушных кораблей“, ч. III (Труды ЦАГИ, вып. 225, 1936).

Литература, относящаяся к области экспериментальных исследований влияния различных факторов на сопротивление дирижабельных форм, весьма обширна.

Влияние турбулентности набегающего потока на сопротивление тел различного удлинения и коэффициента полноты исследовалось Драйденом и Кьюзом. Симмонсом, Оуэром и Хаттоном, Хильдой Лайон и мн. др.¹⁾

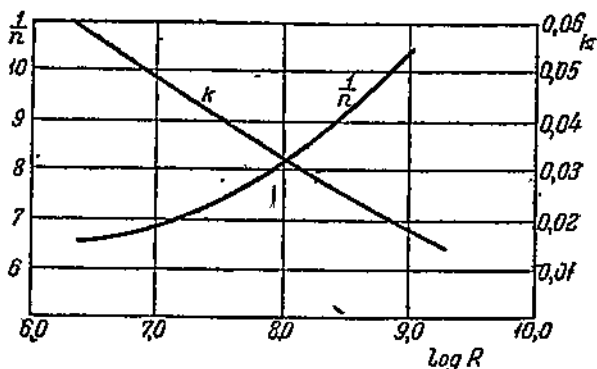


Рис. 132.

¹⁾ H. Dryden and A. Kueth. Effect of turbulence in wind tunnel measurements. NACA Rep. № 342 (1929). L. Simmons. Experiments relating to the flow in the boundary layer of an airship model. ARC R & M № 1268 (1930). E. Ower and C. Hutton. Investigation of the boundary layers and the drags of two streamline bodies. ARC R & M № 1271 (1929). H. Lyon. The Drag of streamline Bodies. Aircraft Eng. 1934 v. VI, № 67.

Возрастание „начальной“ турбулентности, так же как и на пластинке, проявляется в перемещении линии перехода ламинарного слоя в турбулентный, вверх по потоку и, вместе с тем, в смещении переходной кривой сопротивления в область меньших рейнольдсовых чисел. Интересна роль коэффициента полноты модели (опыты Хильды Лийон). При сравнительно малых рейнольдсовых числах коэффициент трения корпуса с большим коэффициентом полноты был почти на 50% больше, чем корпуса меньшей полноты. Повышение турбулентности потока (помещение в поток турбулизирующих решеток) вызывает выравнивание коэффициентов сопротивлений моделей различной полноты. Объяснение этого факта надо искать в роли ламинарного участка пограничного слоя и влияния продольной кривизны модели на расположение линии перехода ламинарного слоя в турбулентный. У модели большей полноты больше кривизна меридионального сечения в области до миделевого сечения, а, вместе с тем, меньше ламинарный участок — факт, разъясненный уже в главе I настоящего отдела при изложении вопроса о влиянии кривизны профиля крыла на максимальную подъемную силу. С ростом турбулентности пограничный слой делается турбулентным на участке все большей и большей длины, вследствие

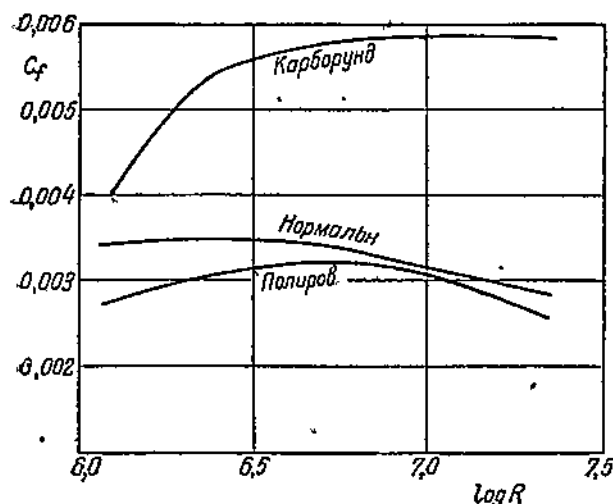


Рис. 133.

чего коэффициенты сопротивления трения выравниваются. То же имеет место и при возрастании рейнольдсова числа.

Влияние шероховатости поверхности на сопротивление тела вращения сказывается в том же направлении, что и в случае пластинки. На шероховатой модели переход на турбулентный режим сопротивления происходит раньше, чем на отполированной модели, причем, как и на пластинке,

коэффициент сопротивления шероховатой модели стремится к постоянной величине, не зависящей от рейнольдсова числа и зависящей от относительной шероховатости ($\frac{k}{\delta}$). Некоторый опытный материал в этом направлении можно найти в работе И. Эбботт¹⁾. На рис. 133 приводим для иллюстрации этого положения три кривые зависимости коэффициента сопротивления трения модели с разной шероховатостью. Кривые эти напоминают обычные переходные кривые,

¹⁾ I. Abbot. NACA Rep. № 394 (1991).

приведенные выше, но верхняя кривая, соответствующая модели, покрытой карборундовым порошком (зерно от 0,003" до 0,007"), показывает ранний переход и стремление к постоянному и относительно высокому (0,006) коэффициенту сопротивления.

§ 3. Применение полуэмпирических (логарифмических) законов к расчету пограничного слоя при наличии продольного перепада давлений

Переход от степенных законов, зависящих от рейнольдсова числа обтекания, к „универсальным“ — не зависящим от рейнольдсова числа — логарифмическим законам, может быть произведен в случаях плоского и осесимметричного пограничного слоя тем же приемом, что и в случае пластинки ¹⁾.

Подобно тому, как это было сделано ранее при изложении степенных методов, перенесем на случай пограничного слоя на теле вращения формулы распределения скоростей и формулы сопротивления, выведенные для движения в трубе; сохраняя прежние обозначения, возьмем основное уравнение Милликена (2,2) и, не откидывая членов, стоящих в квадратных скобках, вычислим входящие сюда интегралы, полагая продольную скорость u равной:

$$u = U - \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta}, \quad (3.1)$$

$$\text{или} \quad u = U + \frac{v_*}{\kappa} \left[\ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} \right]. \quad (3.2)$$

Первой формулой пользовался Н. Мур, второй — Г. Гуржиенко. Как мы уже знаем из предыдущего, первая формула несколько лучше удовлетворяет опытным данным вблизи стенки.

Результаты вычислений дают:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\delta} u dy &= \left(U - A \frac{v_*}{\kappa} \right) \delta, \\ \int_0^{\delta} u^2 dy &= \left(U^2 - 2A \frac{Uv_*}{\kappa} + B \frac{v_*^2}{\kappa^2} \right) \delta, \\ \int_0^{\delta} u y dy &= \frac{1}{2} \left(U - a \frac{v_*}{\kappa} \right) \delta^2 \\ \int_0^{\delta} u^2 y dy &= \frac{1}{2} \left(U - 2a \frac{Uv_*}{\kappa} + b \frac{v_*^2}{\kappa^2} \right) \delta^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

¹⁾ Г. Гуржиенко. Применение универсального логарифмического закона распределения скоростей к изучению пограничного слоя и лобового сопротивления хорошо обтекаемых тел при больших числах Рейнольдса. Труды ЦАГИ, вып. 257 (1936).

N. Moore. Application of Kármán's logarithmic law to prediction of airship hull drag. Journ. Aer. Scienc. 2, № 1, 1935. Случай плоского слоя рассмотрен также в диссертации Е. П. Торба. Расчет пограничного слоя и сопротивления трения крыла в плоско-параллельном потоке. Ленинградский ин-т инженеров гражд. возд. флота, 1936.

где введенные постоянные A, B, a, b имеют следующие значения:

1) при законе скоростей (3.1):

$$A=1, \quad B=2, \quad a=\frac{1}{2}, \quad b=\frac{1}{2}; \quad (3.4)$$

2) при законе скоростей (3.2):

$$A=\frac{5}{6}, \quad B=\frac{14}{9}, \quad a=\frac{23}{60}, \quad b=\frac{1601}{1800}. \quad (3.5)$$

Следуя методу Кармана, аналогично случаю обтекания пластинки, введем обозначение (ср. § 5 главы III):

$$\frac{\kappa U}{v_*} = z, \quad (3.6)$$

тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} v_* &= \frac{\kappa U}{z} \\ \delta &= \frac{n}{\kappa} \frac{ze^z}{U} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Последняя формула представляет закон сопротивления; n — размерная константа, которую надо взять из формулы сопротивления пластины или трубы:

$$\frac{U}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta v_*}{\nu} \sqrt{2} \right) + C_1.$$

откуда, если положить $C_1 = \ln C_2$, следует

$$\delta = \frac{\nu}{C_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{v_*} \cdot e^{\frac{\kappa U}{v_*}}.$$

Сравнивая с (3.7), будем иметь

$$n = \frac{\nu}{C_2 \sqrt{2}}. \quad (3.7')$$

Выражая теперь предыдущие интегралы через переменную z , на основании равенств (3.7) получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\delta} u dy &= \frac{n}{\kappa} (z - A) e^z \\ \int_0^{\delta} u^2 dy &= \frac{n}{\kappa} U \left(z - 2A + \frac{B}{z} \right) e^z \\ \int_0^{\delta} u y dy &= \frac{n^2}{2\kappa^2 U} (z^2 - az) e^{2z} \\ \int_0^{\delta} u^2 y dy &= \frac{n^2}{2\kappa^2} (z^2 - 2az + b) e^{2z} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Подставляя эти значения в уравнение Миллика (2.2) и заменяя справа по (3.7):

$$\frac{\tau_0}{\rho} = v_*^2 = \frac{\kappa^2 U^2}{z^2}, \quad (3.9)$$

после простых преобразований составим следующее основное уравнение, связывающее $z = \frac{\kappa U}{v_*}$ и длину дуги меридионального сечения σ :

$$\begin{aligned} e^z (Az^2 - Bz + B) \frac{dz}{d\sigma} + e^z (2Az^2 - Bz) \frac{d \ln U}{d\sigma} + \\ + e^z (Az^2 - Bz) \frac{d \ln r_0}{d\sigma} + \frac{n\beta z^2}{2\kappa U r_0} e^{2z} \left[(2az - 2b + a) \frac{dz}{d\sigma} + \right. \\ \left. + az \frac{d \ln U}{d\sigma} + (az - b) \frac{d \ln \beta}{d\sigma} \right] = \frac{\kappa^3}{n} U. \end{aligned}$$

Это полное уравнение можно заменить более простым приближенным, если, согласно оценке Миллика, изложенной в предыдущем параграфе, откинуть член, заключающий квадратную скобку. Введем еще, как и ранее, величину $f = \left(\frac{U}{U_0}\right)^3$ и рейнольдсово число $R = \frac{U_0 L}{\nu}$, тогда упрощенное уравнение будет иметь вид [вспомнить равенство (3.7')]:

$$\begin{aligned} e^z (Az^2 - Bz + B) \frac{dz}{d\sigma} + e^z (2Az^2 - Bz) \frac{d \ln \sqrt{f}}{d\sigma} + \\ + e^z (Az^2 - Bz) \frac{d \ln r_0}{d\sigma} = \frac{\kappa^3 C_2 \sqrt{2}}{L} R \sqrt{f}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

В случае плоского пограничного слоя на крыле, получим $\left(\frac{r_0'}{r} = 0\right)$:

$$\begin{aligned} e^z (Az^2 - Bz + B) \frac{dz}{d\sigma} + e^z (2Az^2 - Bz) \frac{d \ln \sqrt{f}}{d\sigma} = \\ = \frac{\kappa^3 C_2 \sqrt{2}}{L} R \sqrt{f}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

где L — хорда крыла.

Наконец, в случае плоской пластинки ($f=1$) будем иметь ($\sigma=x$):

$$e^z (Az^2 - Bz + B) \frac{dz}{dx} = \frac{\kappa^3 C_2 \sqrt{2}}{L} R,$$

или

$$e^z (Az^2 - Bz + B) dz = \kappa^3 C_2 \sqrt{2} dR_x,$$

т. е. ранее выведенное уравнение Кармана.

Уравнения осесимметричного слоя (3.10) и плоского слоя (3.11) не приводятся к квадратурам, их приходится интегрировать приближенными численными методами. Соответствующие методы были разработаны Гуржиенко¹⁾ и Муром²⁾; оба автора пользуются методом

¹⁾ loc. cit.

²⁾ loc. cit.

последовательных приближений, причем первый дает чисто интегральный метод, не содержащий приближенных дифференцирований, а второй приводит задачу к интегро-дифференциальному уравнению, для решения которого приходится производить приближенные дифференцирования.

Уравнение Мура, основывавшегося на укороченном уравнении Милликена, имеет вид:

$$\zeta(z) = 0,959R \int_0^{x/L} \frac{\sqrt{f}}{\xi} d\left(\frac{x}{L}\right) + \int_0^{x/L} z e^{\xi} \left[2\xi \left(\sqrt{f} \cdot \frac{r_0}{L} \right) - z \xi \left(f \cdot \frac{r_0}{L} \right) \right] d\left(\frac{x}{L}\right), \quad (3.12)$$

где $\zeta(z) = (z^2 - 4z + 6)e^z - 6$, а $\xi(\)$ обозначает дифференциальный оператор

$$\xi(\) = \frac{1}{(\)} \cdot \frac{d(\)}{d(x/L)}. \quad (3.12')$$

Определяя приближенным методом z как функцию σ или x , где $dx = \beta d\sigma$, затем уже можно найти δ и τ_0 по (3.7).

Опуская изложение приближенных методов численного интегрирования, укажем лишь, что результаты дают кривую $C_f(R)$, лежащую выше кривой, соответствующей степенному закону „одной седьмой“, а это вполне соответствует эксперименту (см. рис. 129, где теоретическая кривая Мура отмечена словами „логарифмический закон“).

Детали вычислений можно найти в ранее цитированной работе Гуржиенко или в работе Мура¹⁾, вышедшей параллельно с краткой аннотацией, ранее процитированной.

Логарифмический закон с успехом применяется не только в случае тел вращения и крыльев, но и в других случаях, как, например, в случае вращающегося диска.

Пользуясь теорией слоя конечной толщины и степенным законом „одной седьмой“, Карман в неоднократно упоминавшейся на протяжении настоящего курса работе 1921 г. „Ueber laminare und turbulente Reibung“ (ZAMM № 1) дает расчет момента сопротивления вращающегося диска и получает формулу (трение с обеих сторон диска):

$$M = C_{fm} \cdot \frac{\rho U^2}{2} \cdot a^3 = \frac{0,146}{\sqrt[5]{R}} \cdot \frac{\rho U^2}{2} \cdot a^3, \quad (3.13)$$

где U — окружная скорость диска на периферии, равная произведению угловой скорости ω диска на его радиус a ; реинольдсово число $R = \frac{Ua}{\nu} = \frac{\omega a^2}{\nu}$.

Формула (3.13) дает результат, хорошо совпадающий с экспериментами при $4,8 < \lg R < 5,4$ (рис. 134): однако при больших реинольдсовых числах

¹⁾ N. Moore. Publication № 2 of the Daniel Guggenheim Airship Institute (1935).

экспериментальные точки ложатся выше. Гольдштейн¹⁾ применил к расчету трения диска логарифмический закон скоростей и сопротивлений и получил формулу, аналогичную по структуре обычным логарифмическим формулам сопротивления:

$$-\frac{1}{2} = 1,97 \lg(RC_{fm}^{\frac{1}{2}}) + 0,03. \quad (3.14)$$

Как видно из рис. 134, опытные точки при больших R хорошо ложатся на теоретическую кривую Гольдштейна; логарифмический закон может быть таким образом с успехом применен к задаче о вращении диска при больших реинольдсовых числах, например, при больших числах оборотов.

§ 4. Учет влияния продольного перепада давления на форму профиля скоростей в турбулентном пограничном слое

Логарифмические формулы устраняют первый основной недостаток степенных методов — они учитывают влияние реинольдсова числа и дают универсальные, верные при любых больших числах Рейнольдса формулы. Вторым недостатком степенных формул, как уже было показано в конце § 1, является то, что в степенном профиле скоростей не учитывается непосредственное влияние перепада давлений на распределение скоростей поперек пограничного слоя (рис. 128). Этот недостаток сохраняется, конечно, и при применении логарифмических законов, так как в различных сечениях слоя пользуются одной и той же по типу формулой распределения скоростей, учитывающей лишь изменение толщины слоя и скорости на внешней границе слоя.

Создание теории турбулентного пограничного слоя, лишенной указанных недостатков, представляет весьма серьезную и сложную задачу. В настоящее время, уже имеется несколько методов решения

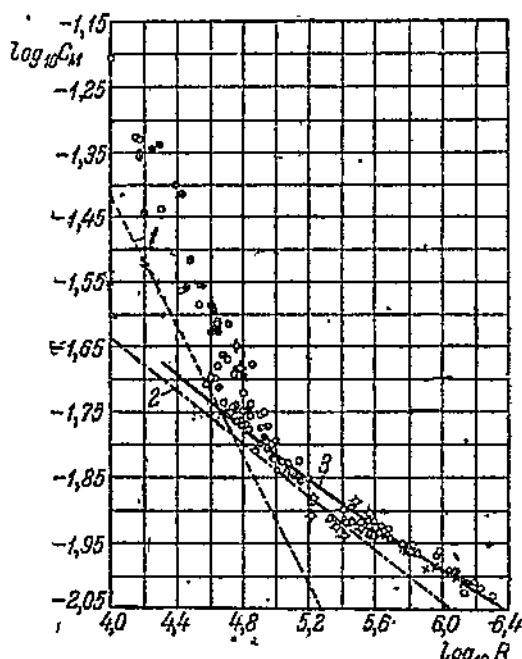


Рис. 134.

1 — теоретическая кривая ламинарного слоя

$$(C_M = 3,57 R^{-\frac{1}{2}}).$$

2 — закон «одной седьмой» ($C_M = 0,146 R^{-\frac{1}{5}}$).

3 — логарифмический закон ($C_M^{-\frac{1}{2}} = 1,97 \lg(RC_M^{\frac{1}{2}}) + 0,03$).

¹⁾ S. Goldstein. Proc. Camb. Phil. Soc. 31 (1935), pp. 232—241.

этой задачи ¹⁾, основанных на использовании некоторых дополнительных эмпирических зависимостей, общих для ряда явлений.

Первый метод решения задачи о влиянии продольного перепада давлений на плоский турбулентный пограничный слой, основанный на ряде эмпирических допущений, был предложен в 1931 г. Бурри²⁾.

В основе метода лежит уравнение

$$\frac{d\delta^{***}}{dx} + \frac{U'}{U} \left(2 + \frac{\partial^{**}}{\partial^{***}} \right) \delta^{***} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = 2c_f, \quad (4.1)$$

совершенно аналогичное соответствующему уравнению (3.8) теории ламинарного пограничного слоя (отдел II, глава I, § 3). Легко показать, что это уравнение сохраняется и в теории турбулентного слоя, если только условиться в выражениях для условных „толщин слоя“:

1) „толщины вытеснения“

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (4.2)$$

и 2) „толщины потери импульса“:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (4.3)$$

под u понимать осредненные продольные скорости, а под U — осредненные скорости внешнего потока.

В самом деле, уравнение Рейнольдса для осредненного движения в плоском стационарном пограничном слое и в проекции на продольную ось будет иметь вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = UU' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y}. \quad (4.4)$$

Если пренебречь членом $\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x}$ по сравнению с членом $\frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y}$, который по обычным свойствам пограничного слоя велик, то уравнение (4.4) переходит в такое:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = UU' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (4.5)$$

где касательное напряжение трения τ представляет сумму

$$\tau = \tau_{xy} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho \overline{u'v'} + \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

¹⁾ Прекрасный критический обзор работ указанного направления сделан К. К. Федяевским в статье: „Критический обзор работ по замедленным и ускоренным турбулентным пограничным слоям“. Техн. заметки ЦАГИ № 158 (1937 г.); там же см. и подробный библиографический указатель.

²⁾ A. Burt. Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Dissertation, Zürich, 1931.

Уравнение (4.15) формально ничем не отличается от уравнения ламинарного слоя. Из него, так же как и ранее, выводится уравнение (4.1).

Уравнение (4.1) связывает коэффициент местного трения, стоящий справа, условные толщины пограничного слоя δ^* , δ^{**} и заданное распределение $U(x)$. Если принять степенной закон „одной седьмой“, то, как легко видеть, δ^* будет равно $\frac{1}{8}\delta$, δ^{**} будет равно $\frac{7}{72}\delta$, а $\frac{\tau_0}{\rho U^2}$ обратится в $0,0225 R_0^{-\frac{1}{4}}$, и уравнение (4.1) сведется к уравнению, которое мы имели в методе Мюллера (§ 1 настоящей главы, $n=1/7$).

Возьмем разложение напряжения трения τ вблизи стенки

$$\tau = \tau_0 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_{y=0} \cdot y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}\right)_{y=0} \cdot y^2 + \dots \quad (4.6)$$

и перепишем его в виде

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{\rho U U' \delta^{**}}{\tau_0} \cdot \frac{y}{\delta^{**}} + \dots \quad (4.7)$$

Второй член разложения (4.6) заменен на основании уравнения (4.5), третий член, на основании того же уравнения, будет равен нулю; довольствуясь двумя членами разложения (4.7), видим, что параметр

$$-\frac{\rho U U' \delta^{**}}{\tau_0} = \frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \quad (4.8)$$

играет роль одного из определяющих параметров в распределении напряжения трения. Желая учесть влияние формы обтекаемого профиля на распределение напряжения трения по поверхности его, примем параметр (4.8) за основной „параметр формы“ и, вместо обычного равенства

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \zeta \cdot \left(\frac{U \delta^{**}}{v}\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad \zeta = 0,0225$$

будем считать ζ функцией „параметра формы“ (4.8), положив:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \zeta \left(\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx}\right) \cdot \left(\frac{U \delta^{**}}{v}\right)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.9)^1$$

Отсюда следует:

$$\zeta \left(\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx}\right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \left(\frac{U \delta^{**}}{v}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\tau_0}{\delta^{**}} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{\delta^{**}}{\rho U^2} \left(\frac{U \delta^{**}}{v}\right)^{\frac{1}{4}},$$

1) Начиная с настоящего равенства и кончая равенством (4.10) включительно, мы пишем выражение $\zeta \left(\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx}\right)$, как символ функциональной зависимости ζ от $\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx}$, а не как произведение ζ на $\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx}$.

так что величина

$$\Gamma = \frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \cdot \zeta \left(\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{\delta^{**}}{\rho U^2} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} = - \frac{U \delta^{**}}{U} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.10)$$

будучи функцией „параметра формы“, и сама в свою очередь будет также „параметром формы“. Параметр Γ был введен впервые Никурадзе¹⁾.

Возвращаясь к уравнению (4.1), перепишем его в виде:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \zeta \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}} - \frac{U \delta^{**}}{U} \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right). \quad (4.11)$$

Прибавляя к обеим частям уравнения (4.11) член $\frac{1}{5} \frac{U \delta^{**}}{U}$ и умножая полученное уравнение на $\frac{5}{4} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{4} \frac{U \delta^{**}}{U} \cdot \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} = \\ = \frac{5}{4} \left[\zeta - \frac{U \delta^{**}}{U} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{9}{5} + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) \right], \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[\delta^{**} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} \right] = \frac{5}{4} \left[\zeta + \left(\frac{9}{5} + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) \Gamma \right]. \quad (4.12)$$

Выражение, стоящее справа, представляет собою функцию параметра Γ . Действительно, по (4.10) параметр $\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx}$ является функцией Γ , а следовательно, и $\zeta \left(\frac{\delta^{**}}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \right)$ — также функция Γ . Отношение $\frac{\delta^*}{\delta^{**}}$, как отношение двух характерных толщин слоя, также можно принять за функцию Γ . Как показали опыты Никурадзе, Бури, Фейджа и Фалькнера (последние в обработке К. К. Федяевского²⁾), правая часть уравнения (4.12) является линейной функцией Γ :

$$\psi = \frac{5}{4} \left[\zeta + \left(\frac{9}{5} + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) \Gamma \right] = a + b\Gamma, \quad (4.13)$$

где константы a и b равны

1) По Никурадзе	$a = 0,017,$	$b = 5$	} $\Gamma < 0$ (рис. 135, а).
2) По Бури	$a = 0,015,$	$b = 4$	
3) По Федяевскому	$a = 0,0157,$	$b = 4$ при $\Gamma > 0$	

¹⁾ I. Nikuradse, Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in Konvergenten und divergenten Kanälen. VDI Forschungsheft № 289 (1929).

²⁾ I. Nikuradse, loc. cit.; A. Buri, loc. cit.; A. Fage and V. Falkner, ARS R & M № 1315 (1931); К. К. Федяевский, loc. cit.

При этом уравнение (4.12) переписывается в форме линейного дифференциального уравнения относительно величины $\delta^{**} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}$:

$$\frac{d}{dx} \left[\delta^{**} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} \right] = a - b \frac{U'}{U} \delta^{**} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4}. \quad (4.14)$$

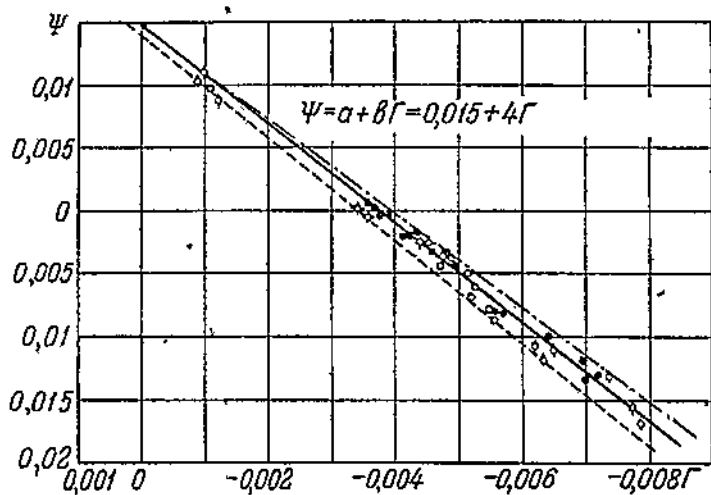


Рис. 135 а.

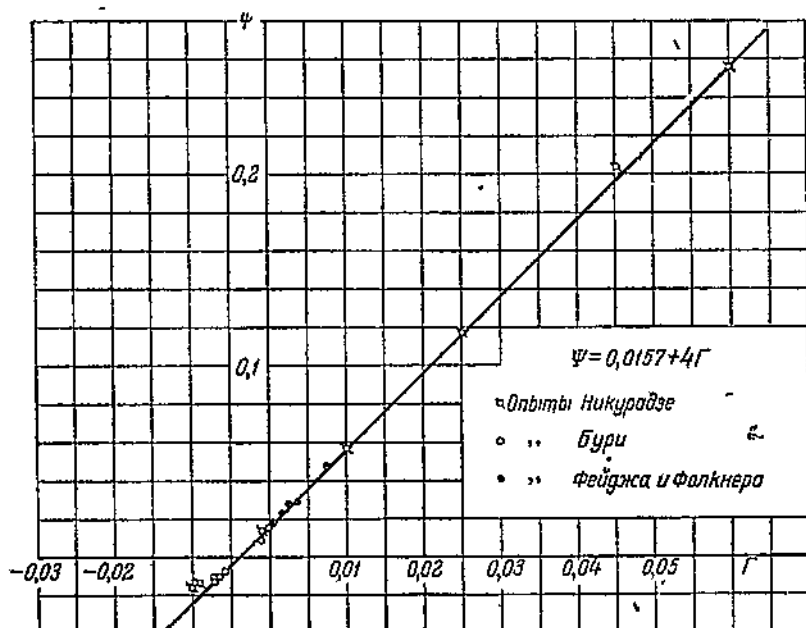


Рис. 135 б.

Решая это уравнение, получим:

$$\delta^{**} \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{a}{U^b} \int U^b dx + \text{const}, \quad (4.15)$$

где константа интегрирования определяется по заданному значению δ^{**} при $x = x_0$. Из уравнения (4.15) можно найти δ^{**} , а затем по (4.10) и Γ . Для определения ζ , т. е. коэффициента местного трения, необходимо иметь еще экспериментальную зависимость ζ от Γ или $\frac{\delta^{**}}{\delta^{**0}}$ от Γ .

Хоуэрз¹⁾ дал численный метод решения уравнения (4.12), не связанный с предположением (4.13) о линейной связи ψ и Γ . Вводя масштабы: длин — L и скоростей U_0 , Хоуэрз преобразует уравнение (4.12) к численному виду:

$$\frac{d\chi}{dx'} + \frac{5}{4} \frac{\chi}{U'} \frac{dU'}{dx'} \left(2 + \frac{\delta^{**}}{\delta^{**0}} \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{-\zeta}{U'^{1/4}}, \quad (4.16)$$

где приняты обозначения:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad U' = \frac{U}{U_0}, \quad \chi = R^{1/4} \left(\frac{\delta^{**}}{L} \right)^{1/4}, \quad R = \frac{U_0 L}{\nu}.$$

Принимая ζ и $\frac{\delta^{**}}{\delta^{**0}}$ функциями от параметра формы (на основании экспериментальных данных):

$$\Gamma = \frac{\chi}{U'^{3/4}} \frac{dU'}{dx'},$$

Хоуэрз решает уравнение (4.16) относительно χ , а, следовательно, находит δ^{**} и другие величины.

Метод Бури является эмпирическим методом, так как требует задания нескольких эмпирических зависимостей (ψ от Γ , ζ от Γ , $\frac{\delta^{**}}{\delta^{**0}}$ от Γ). К такого же рода эмпирическим методам относится и метод Грушвитца²⁾, принимающего вместо параметра формы Γ другой параметр γ , равный

$$\gamma = 1 - \left(\frac{u^{**}}{U} \right)^2,$$

где $u^{**} = u(\delta^{**})$ есть скорость в точке $y = \delta^{**}$. Метод Грушвитца основан на некоторых мало обоснованных утверждениях и гораздо менее прост, чем метод Бури³⁾.

Работы Бури и Грушвитца, а также и ряд экспериментальных исследований по движению жидкости в диффузорах, конфузорах и

¹⁾ L. Howarth. Proc. Roy. Soc. A. 149 (1935) pp. 574—579.

²⁾ F. Gruschwitz. Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Archiv, II Bd., H. 3, 1931.

³⁾ Краткое критическое освещение метода Грушвитца можно найти в ранее указанном обзоре К. К. Федяевского.

в пограничном слое на крыле (Никурадзе, Дёнх, Бури, Грушвиц и др.), накопили много ценного материала относительно движения жидкости в турбулентном пограничном слое при продольном перепаде давлений; однако с теоретической стороны задачу ни в коей мере нельзя считать решенной, так как и предположки и экспериментальные обобщения в этих эмпирических теориях очень мало обоснованы. В последнее время в Советском Союзе сделаны весьма удачные попытки создания полуэмпирической теории движения жидкости в турбулентном пограничном слое проф. К. К. Федяевским¹⁾.

В основании метода К. К. Федяевского, в первоначальном его виде, лежали следующие два предположения.

Исходя из представления о конечности толщины турбулентного пограничного слоя δ , можно выразить напряжение трения τ в виде многочлена заданной степени:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = A_0 + A_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + A_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots, \quad (4.17)$$

причем неопределенные коэффициенты $A_0, A_1, \dots$, аналогично тому, как это делается в методе Польгаузена, определяются из граничных условий на стенке:

$$1) \text{ при } y=0 \quad \frac{\tau}{\tau_0} = 1;$$

$$2) \text{ " } y'=0 \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{dp}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \frac{\tau}{\tau_0}}{\partial \frac{y}{\delta}} = \frac{\delta}{\tau_0} \cdot \frac{dp}{dx};$$

$$3) \text{ " } y=0 \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \frac{\tau}{\tau_0}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$$

и из граничных условий на внешней границе слоя:

$$4) \text{ при } y=\delta \quad \frac{\tau}{\tau_0} = 0;$$

$$5) \text{ " } y=\delta \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \frac{\tau}{\tau_0}}{\partial \frac{y}{\delta}} = 0.$$

Перечисленные пограничные условия по своей механической сущности эквивалентны условиям в ламинарном слое, изложенным в предыдущем отделе.

Используя те или другие граничные условия, можно определить коэффициенты A_0, A_1 и т. д. Так например, используя все пять условий,

¹⁾ К. К. Федяевский. Турбулентный пограничный слой крыла: ч. I. О профиле напряжения трения и скоростей. Труды ЦАГИ вып. 282 (1936); ч. II. О законе сопротивления. Труды ЦАГИ, вып. 316 (1937).

получим:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, A_1 = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{dp}{dx}, A_2 = 0, A_3 = -4 - 3 \frac{\delta}{\tau_0} \frac{dp}{dx}, \\ A_4 &= 3 + 2 \frac{\delta}{\tau_0} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Мы видим, что основное значение имеет параметр:

$$A_1 = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{dp}{dx}. \quad (4.19)$$

Это — „параметр формы“, аналогичный использованному Бури параметру (4.8). Все остальные коэффициенты A_3 и A_4 выражаются через основной параметр A_1 , точно так же как в методе Польгаузена все коэффициенты разложения скорости выражаются через один параметр $\lambda = \frac{U^2 \delta^2}{\nu}$. Отсюда, к сожалению, нельзя еще сделать вывода, что параметр A_1 (в ламинарном слое — λ) является единственным „параметром формы“. Если бы при построении многочлена (4.17) были использованы старшие производные от τ по y при $y=0$, то появились бы еще новые „параметры формы“. Параметр A_1 — только первый параметр, но достаточный для приближенных оценок. Использование такого параметра представляет первый шаг к учету влияния продольного перепада давлений.

Вторым предположением, лежащим в основе метода Федяевского, служит использование величины „пути смещения“ l , входящей в формулу Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (4.20)$$

и самой формулы Прандтля для потока с продольным перепадом давлений. Опыты показывают, что „путь смещения“, определенный по формуле (4.20) для различных малых углов конфузорности и диффузорности, близок к „пути смещения“ цилиндрического канала.

Используя эмпирическую формулу:

$$\frac{l}{\delta} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4, \quad (4.21)$$

формулу Прандтля (4.20) и разложение τ (4.17), можно найти скорость u при помощи квадратуры:

$$\frac{U-u}{v_*} = \int_1^{\frac{y}{\delta}} \frac{\sqrt{A_0 + A_1 \left(\frac{y}{\delta} \right) + A_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \dots}}{0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4} \cdot d \left(\frac{y}{\delta} \right). \quad (4.22)$$

Подставляя сюда вместо коэффициентов A их значения в зависимости от выбранных граничных условий и производя приближенное интегрирование, найдем значения продольной скорости u . На рис. 136 в виде

иллюстрации приведен один пример профиля скоростей в турбулентном пограничном слое (профиль Göttingen 397, угол атаки $\alpha = 12^\circ$, хорда $t = 40$ см, сечение, соответствующее $x = 34,9$ см; $\delta = 0,013$ м, $\tau_0 = 0,314$ кг/м², $\frac{dp}{ds} = 187$ кг/м²). На рисунке сравнены: профиль

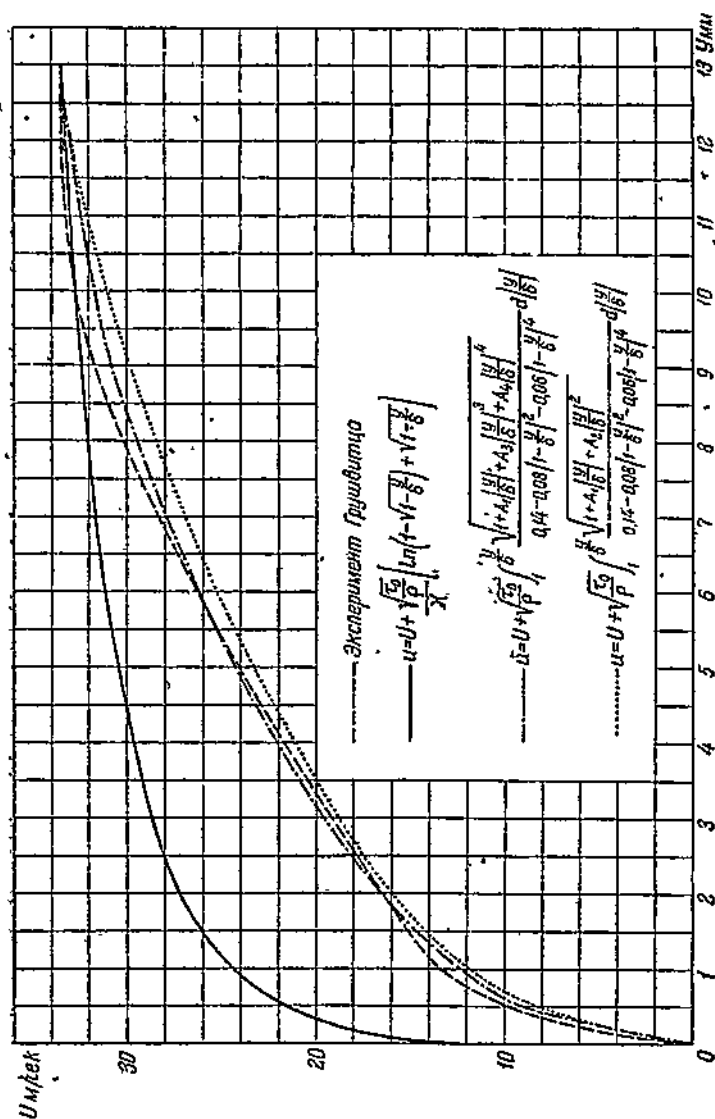


Рис. 136.

скоростей по экспериментам Грушвица, расчет по теории Федяевского при пользовании полной и упрощенной формулой и, наконец, же для противопоставления представлен логарифмический профиль.

Как видно из рисунка, в диффузорной части профиля ($x=34,9$ см при хорде $l=40$ см) различие между профилем скорости в замедленном слое и трубой весьма значительно и очень хорошо улавливается формулами полуэмпирической теории Федяевского.

Некоторым недостатком изложенной теории является необходимость использования экспериментальной формулы пути смещения (4.21). Как показал А. П. Мельников¹⁾, этот недостаток может быть устранен применением формулы Кармана

$$l = \kappa \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}}$$

вместо эмпирической зависимости (4.21). Используя распределение напряжения трения (4.17), А. П. Мельников составляет основное уравнение в виде

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \rho \kappa^2 \frac{\left(\frac{du}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)^2} = A_0 + A_1 \left(\frac{y}{\delta} \right) + A_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + A_4 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4.$$

Это уравнение может быть один раз проинтегрировано в конечном виде. Для получения второго интеграла, т. е. выражения для скорости, приходится прибегать к замене некоторых выражений упрощенными приближениями. В результате получается приближенная формула для профиля скоростей в пограничном слое:

$$\frac{U-u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{6+3A_1} \int_1^{y/\delta} \frac{d\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\ln \frac{1-\frac{y}{\delta}}{1+k\frac{y}{\delta}}},$$

где

$$k = \frac{8+5A_1+2\sqrt{(6+3A_1)(3+2A_1)}}{4+A_1+2\sqrt{6+3A_1}};$$

формула эта применима для значений параметра формы $A_1 > -\frac{3}{2}$, т. е. для положительных значений A_1 , что соответствует $\frac{dp}{dx} > 0$, т. е. диффузорной области и малым отрицательным значениям A_1 , т. е. случаю слабого конфузора.

Имея в виду упрощение формулы (4.22), К. К. Федяевский во второй части своей работы принимает для пути смещения l линейную формулу Прандтля. $l = \kappa u$ и кроме того интерполирует не $\frac{\tau}{\tau_0}$,

¹⁾ А. П. Мельников. К теории пограничного слоя крыла. Труды Лен. ин-та. Инжен. гражд. возд. флота вып. № 12 (1937 г.).

а $\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$, полагая

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = B_0 + B_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + B_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + B_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + B_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4. \quad (4.23)$$

Выбирая те же граничные условия, что и ранее указанные, получим:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1, \quad B_1 = \frac{A_1}{2}, \quad B_2 = -\frac{1}{8} A_1^2 \\ B_3 &= -4 - \frac{3}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1^2 \\ B_4 &= 3 + A_1 - \frac{1}{8} A_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Из условия положительности τ при значениях y , близких к δ , следует, что A_1 должно меняться в диапазоне $-3,15 < A_1 < 15,15$; только при таких значениях A_1 возможно применение разложения (4.23). Чтобы оценить область применимости интерполяций, на рис. 137 приводим график зависимости параметра формы A_1 от угла α растворения диффузора по опытам Никурадзе и Дюнха¹⁾.

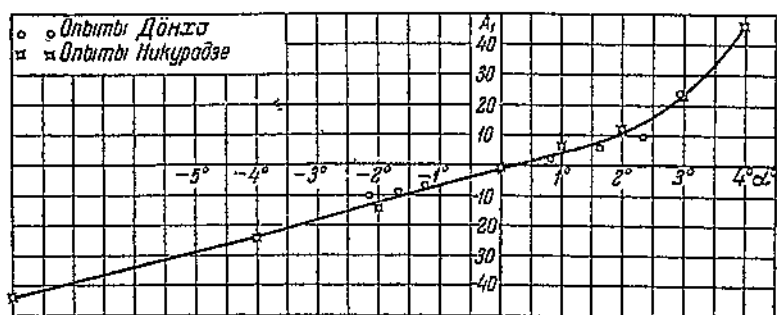


Рис. 137.

Подставляя в формулу Прандтля $\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$ вместо $\sqrt{\tau}$ разложения (4.23) и заменяя l на xy , получим:

$$\begin{aligned} \frac{u}{v_*} &= \frac{U}{v_*} + \frac{1}{x} \int \frac{y^{3/2}}{y/\delta} \left(B_0 + B_1 + B_2 \frac{y}{\delta} + \dots \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \\ &= \frac{U}{v_*} + \frac{1}{x} \left[\ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} A_1 \frac{y}{\delta} - \frac{1}{16} A_1^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(-4 - \frac{3}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1^2\right) \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(3 + A_1 - \frac{A_1^2}{8}\right) \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{12} - \frac{A_1}{4} + \frac{A_1^2}{96} \right]. \quad (4.25) \end{aligned}$$

¹⁾ Nikuradse. loc. cit. E. Dönch. Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln. VDI Forsch. Heft 282 (1926).

Формула (4.25) несравненно проще формулы скоростей (4.22). Желая получить закон сопротивления, следуя общему приему, изложенному раньше, применим формулу (4.25) к внешней границе ламинарного подслоя, только в настоящем случае необходимо учесть влияние величины $\frac{dp}{dx}$ на подслон. Для этого вместо линейного профиля скоростей в ламинарном подслое $u = \frac{\tau_0}{\mu} y$ у примем квадратичный (параболический) профиль:

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2, \quad (4.26)$$

соответствующий условиям:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\mu}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Профиль скоростей (4.26) может быть переписан в безразмерном виде так:

$$\frac{u}{v_*} = R_1 \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} A_1 R_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2, \quad R_1 = \frac{v_* \delta}{\nu}.$$

Принимая, как и раньше, толщину ламинарного подслоя δ_i равной $\alpha \frac{\nu}{v_*} = \alpha \delta \cdot \frac{\nu}{\delta v_*} = \alpha \delta \cdot \frac{1}{R_1}$, получим:

$$\frac{u_i}{v_*} = \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{A_1}{R_1}. \quad (4.27)$$

Скорость турбулентной части потока на внешней границе ламинарного подслоя будет по (4.25) равна:

$$\begin{aligned} \frac{u_s}{v_*} = \frac{U}{v_*} + \frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{\alpha}{R_1} + B_1 \frac{\alpha}{R_1} + \frac{1}{2} B_2 \left(\frac{\alpha}{R_1}\right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \dots - B_1 - \frac{1}{2} B_2 - \frac{1}{3} B_3 - \frac{1}{4} B_4 \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая это выражение правой части (4.27) и откидывая члены с $\frac{\alpha}{R_1}$, $\left(\frac{\alpha}{R_1}\right)^2$ и т. д. ввиду их малости, получим следующую формулу сопротивления:

$$\frac{U}{v_*} = \alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} \left[\ln R_1 + B_1 + \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{3} B_3 + \dots \right] \quad (4.28)$$

или, возвращаясь к A_1 по (4.24):

$$\frac{U}{v_*} = \alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha - \frac{7}{12\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\ln R_1 + \frac{1}{4} A_1 - \frac{1}{96} A_1^2 \right). \quad (4.29)$$

При отсутствии перепада давления $A_1 = 0$ и формула (4.29) переходит в нормальный закон сопротивления Кармана. На рис. 138 приводится результат обработки опытов Фейджа и Фалькнера над пограничным слоем симметричного крыла Жуковского (ранее не-

однократно цитировалось). Как видно из рисунка, формула (4.29) хорошо оправдывается при $\kappa = 0,38$ и $\alpha = 11,8$.

Не имея возможности останавливаться на деталях, укажем, что метод К. К. Федяевского был в дальнейшем развит Л. Е. Калихманом¹⁾ и применен к различным расчетам крыльев. В работе Л. Е. Калихмана можно найти много интересных кривых, демонстрирующих влияние основных аэродинамических характеристик крыла на его сопротивление.

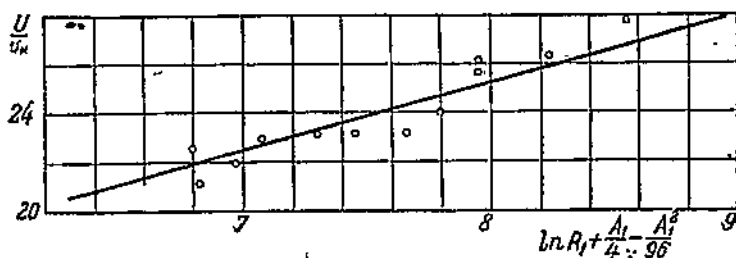


Рис. 138.

Недавно появилась работа Г. А. Гуржиенко²⁾, в которой автор, исходя из предположения полуэмпирических теорий турбулентности, рассмотрел установившееся турбулентное течение в коническом диффузоре с малым углом раствора. В этой работе автор задается аналитической формой распределения „пути смещения“ и делает ряд предположений о характере распределения компонентов тензора турбулентных напряжений и осредненных скоростей, после чего применяет уравнение Рейнольдса. Наряду с теоретической, большой интерес представляет часть экспериментальная, содержащая ряд важных результатов.

Изложенные методы позволяют теоретическим путем определять сопротивление трения.

Лобовое сопротивление крыла, обычно, разбивают на профильное сопротивление и индуктивное. При нулевой или малой подъемной силе, как уже указывалось ранее, индуктивное сопротивление ничтожно и в дальнейшем о нем не будет речи. Обращаясь к профильному сопротивлению и следуя классическому приему механики, разобьем профильное сопротивление на результирующую касательных сил — сопротивление трения и нормальных сил — сопротивление давлений (это сопротивление иногда неправильно называют вихревым). Сопротивление трения можно, в свою очередь, разложить на сопротивление трения эквивалентной по обтекаемой площади и состоянию поверхности пластинки и добавку сопротивления трения

¹⁾ Л. Е. Калихман. Влияние формы профиля на сопротивление трения. Труды ЦАГИ, вып. 333 (1937).

²⁾ Г. А. Гуржиенко. Об установившемся турбулентном течении в конических диффузорах с малыми углами раствора. Труды ЦАГИ, вып. 462, 1939.

за счет кривизны профиля крыла или дирижабельного корпуса. Последнюю добавку вместе с сопротивлением давлений естественно было бы назвать сопротивлением формы.

Если принять указанную терминологию, то можно сказать, что изложенные в настоящем курсе методы позволяют рассчитывать сопротивление трения, включая сюда отдельные слагаемые — сопротивление трения эквивалентной пластинки и добавку сопротивления трения за счет формы крыла.

Методы степенных и логарифмических законов (Карман-Прандтль) привели к формулам для сопротивления трения пластинки; обобщение степенных законов на случай обтекания тел с продольным перепадом давлений (Мюллер, Милликен, Федяевский), а также и логарифмических законов (Мур, Гурженко), позволило вычислять сопротивление трения с частичным учетом влияния формы крыла или тела вращения. Напомним, что эти методы не учитывали влияния формы поверхности обтекаемого тела на распределение скоростей внутри пограничного слоя, а лишь на скорости на внешней границе. Наконец, последние изложенные методы (Бурн, Федяевский) продвигали вперед (но не решали до конца) задачу о полном учете влияния формы на сопротивление трения. Как было указано, „параметры формы“, принятые в последних методах, являются первыми основными, но не единственными, не исчерпывающими параметрами, характеризующими влияние формы.

Совершенно в стороне от изучения осталось до сих пор сопротивление давлений. Прежде всего следует отметить, что эту часть общего профильного сопротивления не всегда правильно связывать с „вихреобразованиями“ в кормовой части. В случае плохо обтекаемых форм расчет сопротивлений давлений основывают на модели вихревых дорожек¹). В случае же хорошо обтекаемых форм природа сопротивлений давлений совершенно иная. Подтормаживание жидкости в пограничном слое вызывает расширение („вытеснение“, как упоминалось уже в теории ламинарного слоя) трубок тока и удаление линий тока от поверхности обтекаемого тела по сравнению с идеальным потенциальным обтеканием. В связи с этим искажается распределение давлений по поверхности тела и парадокс Даламбера, утверждающий равенство нулю силы сопротивления давлений, становится неверным. Давления, передаваемые поперек слоя, в своей совокупности приводят к вполне заметному сопротивлению давлений.

Следовало бы говорить об обратном влиянии пограничного слоя на потенциальное обтекание, тогда как теория пограничного слоя до сих пор решала лишь задачу о влиянии заданного потенциального распределения давлений на пограничный слой.

Происхождение сопротивления давлений достаточно ясно, но метод расчета его пока еще окончательно не установлен. Задача эта является

¹) Рекомендуем интересующимся познакомиться с работой А. А. Космодемьянского, К теории лобового сопротивления, ч. III — О вихревом сопротивлении. Труды ЦАГИ, вып. 216, 1935.

одной из наиболее интересных и важных задач теории пограничного слоя¹⁾.

Экспериментальные исследования показывают, что сопротивление давлений зависит от формы тела, от рейнольдсова числа обтекания, от турбулентности набегающего потока. Основное значение имеет расположение точки перехода ламинарного слоя в турбулентность, зависящее в свою очередь, как мы уже знаем, от формы тела, рейнольдсова числа и турбулентности потока.

По последним опытам и расчетам²⁾ оказывается, что для 25% профиля, отношение сопротивления давлений к полному профильному сопротивлению изменяется от 35% при почти полностью турбулентном слое до 25% при ламинарном участке, занимающем около 0,4 хорды. Для 14% профиля то же отношение изменяется от 20% до 15%.

С ростом рейнольдсова числа, при утоньшении турбулентного слоя, полностью охватывающего всю поверхность, сопротивление давлений уменьшается — распределение давлений приближается к потенциальному.

Вопрос о сопротивлении давлений, как и вообще вопрос о сопротивлении формы, еще мало изучен и нуждается в дальнейшем серьезном развитии. Влияние относительной толщины профиля и его вогнутости на сопротивление формы за последнее время подвергалось многим экспериментальным исследованиям и результаты этих исследований обработаны в виде эмпирических формул³⁾.

Большое значение для теории сопротивлений имеет вопрос о влиянии расположения точки максимальной кривизны, формы носа крыла и др.

Все указанные вопросы являются специальными вопросами теории сопротивления крыла и в настоящем курсе могут быть лишь упомянуты. Для ознакомления с современным состоянием проблемы профильного сопротивления рекомендуем только что вышедший в свет обширный и исключительно интересный по содержанию обзор К. К. Федяевского и Б. Т. Горощенко: „Расчет профильного сопротивления крыла“ (Техника Возд. Флота № 7, 1940; стр. 5—55).

¹⁾ Во время печатания настоящей книги мы узнали о наличии интересной статьи *J. Pretsch'a*, *Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes*, помещенной в мало распространенном у нас ежегоднике *Jahrbuch, 1938 der deutschen Luftfahrtforschung*. В этой работе используется идея рассмотрения обтекания профиля, утолщенного на δ^* (толщину вытеснения). Таким путем, независимо от *Pretsch'a*, вел расчет тела вращения дипл. *Пашковский* (Инж.-физ. факультет ЛПИ, 1939).

²⁾ *J. Sarby, M. Morgan and E. Cooper. Flight Tests on the Profile Drag of 14% and 25% Thick Wings. ARC R & M № 1826 (1937).*

³⁾ См. *Ф. Г. Глаз*. О влиянии масштабного эффекта на зависимость профильного сопротивления от геометрических параметров профиля. Труды ЦАГИ, вып. 286 (1936). Краткий обзор можно найти в ранее цитированной монографии *Б. Т. Горощенко*, Скорость полета. См. также *Л. Е. Калихан*. Влияние формы профиля на сопротивление трения, Труды ЦАГИ, вып. 333 (1937). Теоретические расчеты серий симметричных профилей *Жуковского* проводил *А. А. Космодемьянский* (Труды ЦАГИ, вып. 215, 1935). Интересное исследование семейства симметричных профилей *Кармана-Трефтца* можно найти в только-что процитированной статье *Pretsch'a*.

ГЛАВА V

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Настоящая глава ставит себе целью несколько углубить представления читателя о структуре турбулентного потока. Не имея возможности подробно остановиться на этом большом и важном вопросе, мы все же даем понятие об основных статистических характеристиках турбулентного потока, о методах их измерения и в заключение приводим некоторые наиболее установившиеся данные о распределении характеристик турбулентности в различных потоках. Остальное интересующиеся могут найти в журнальной литературе.

§ 1. Основные характеристики турбулентного потока. Однородный и изотропный турбулентный поток. Затухание искусственной турбулентности за решетками

Турбулентный (актуальный) поток представляет собою и во времени и в пространстве весьма сложное и беспорядочное явление, в котором элемент случайности играет значительную роль. Если в данный момент времени рассмотреть картину распределения актуальных (мгновенных) скоростей и других механических или физических величин в турбулентном потоке, то можно принять, что только в близлежащих друг к другу точках потока между физическими, актуальными величинами в этих точках имеется некоторая связь и что, с удалением точек друг от друга, связь между этими величинами быстро ослабевает.

Как известно, статистическая связь между двумя пульсирующими (флюктуирующими) величинами φ и ψ определяется коэффициентом корреляции и между ними:

$$k = \frac{\overline{\varphi\psi}}{\sqrt{\overline{\varphi^2}} \cdot \sqrt{\overline{\psi^2}}}, \quad (1.1)$$

лежащим по абсолютной величине между нулем и единицей. Черта обозначает, как и в первой главе настоящего отдела, осреднение во времени за некоторый промежуток времени (период осреднения), отвечающий известным постулатам осреднения.

Равенство коэффициента корреляции k нулю показывает, что пульсации совершенно не связаны между собою, наоборот, равенство $|k|=1$ говорит о полной закономерной зависимости между пульсирующими величинами.

Наряду с коэффициентом корреляции можно было бы рассматривать и не нормированную к единице величину $\overline{\varphi\psi}$, также характеризующую статистическую связь между пульсациями.

Рассмотрим в турбулентном потоке две точки: M — с координатами x_1, x_2, x_3 и M' — с координатами x'_1, x'_2, x'_3 ; относительные координаты точки M' по отношению к M обозначим через $\xi_i = x'_i - x_i$, а расстояние между точками через r , так что $r = \sqrt{\xi_i \xi_i}$ (суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3). Штрихом в дальнейшем условимся обозначать величины, относящиеся к точке M' (а не пульсации, как ранее это делалось).

Пусть v_i представляют в некоторый момент t проекции пульсационных скоростей, т. е. разностей между актуальными и осредненными скоростями в потоке, в точке M , а соответственно v'_i — пульсации в точке M' , в тот же момент; тогда тензор второго ранга:

$$\Phi_{ij} = v_i v'_j. \quad (1.2)$$

который, следуя А. Фридману и Л. Келлеру¹⁾, назовем тензором

¹⁾ А. Friedmann und L. Keller. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressibelen Flüssigkeit. Proceedings of the First Intern. Congress, for Applied Mechan. 1924; S. 395.

момента связи, будет характеризовать статистическую связанность пульсаций в точках M и M' ; для той же цели может служить при некоторых ограничительных условиях, о которых речь впереди¹⁾ и корреляционный тензор

$$R_{ij} = \frac{\overline{v_i v_j'}}{\overline{v^2}} \quad (1.3)$$

где $\overline{v^2} = \overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \overline{v_3^2} = \overline{v_1'^2} = \overline{v_2'^2} = \overline{v_3'^2}$ (условие однородности и изотропии). Компоненты того или другого тензора являются, вообще говоря, функциями времени t , координат x_i точки M и относительных координат ξ_i точки M' .

Устремим точку M' к точке M , полагая $\xi_i \rightarrow 0$; при этом компоненты Φ_{ij} превратятся в моменты связи $\overline{v_i v_j}$, пропорциональные компонентам тензора турбулентных напряжений — $\rho v_i v_j$ (напоминаем, что v_i и v_j — пульсации, а не актуальные скорости).

Диагональные компоненты такого предельного тензора или, как принято, корни квадратные из них, т. е. корни из средних квадратичных пульсаций

$$\sqrt{\overline{v_1^2}}, \sqrt{\overline{v_2^2}}, \sqrt{\overline{v_3^2}}$$

представляют меры интенсивности турбулентности. Их относят к некоторой осредненной скорости потока U и без-

размерную величину $\frac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{U}$ принимают

за „турбулентность“, оговаривая в общем случае какая из компонент v_i входит в числитель. Подобного рода величину мы ранее называли числом Кармана K . Число K в дальнейшем принимается за первую основную характеристику турбулентного потока; методы замера числа K и некоторые сведения о числе K даются в дальнейшем.

Вторая основная характеристика турбулентности связывается с представлением о масштабе турбулентности, как о некоторой характерной длине в данной точке потока.

Чтобы лучше понять физический смысл масштаба турбулентности, обратимся сначала к следующему опыту. Поместим в поток аэродинамической трубы (рис. 139) турбулизирющую решетку и в некотором удалении от решетки два измерителя скорости (детали опыта см. в следующем параграфе) M и M' . Предположим, что решетка лежит в плоскости $x_2 x_3$, перпендикулярной к средней скорости потока, направленной по оси Ox_1 ; в аналогичной параллельной плоскости, расположенной за решеткой вниз по потоку поместим измерители M и M' и будем мерить пульсации, перпендикулярные к указанной плоскости, т. е. проекции пульсаций на направление среднего потока. Составим выражение

$$L_2 = \int_0^\infty R_{11} d\xi_2, \quad \text{где} \quad R_{11} = \frac{\overline{v_1 v_1'}}{\sqrt{\overline{v_1^2}} \cdot \sqrt{\overline{v_1'^2}}} \quad (1.4)$$

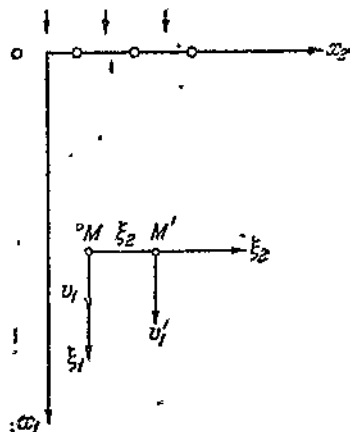


Рис. 139.

¹⁾ См. далее, стр. 385, где дается понятие об однородной и изотропной турбулентности.

Величина R_{11} равна, очевидно, единице при $\xi_2 = 0$. Как уже упоминалось, коэффициент корреляции R_{11} быстро стремится к нулю при $\xi_2 \rightarrow \infty$ (рис. 140). Если бы в интеграле (1.4) суммировались просто отрезки $d\xi_2$, то в результате была бы получена бесконечно большая длина. Умножая $d\xi_2$ на величину коэффициента корреляции R_{11} , мы приписываем каждому отрезку определенный „вес“, определяющий степень статистической связанности пульсаций скорости в точках M и M' ; величина L_2 представляет „среднюю взвешенную“ длину, характеризующую размеры области потока, заключающей в себе частицы жидкости, движущиеся не независимо между собою, а более или менее связано, в статистическом смысле слова.

Опыты показывают, что вдали от турбулизирующей решетки, где уже влияния отдельных стержней решетки отсутствуют (профиль средних скоростей однороден), измеренная величина L_2 находится в закономерной связи с геометрическими параметрами решетки (диаметром стержня или расстоянием между стержнями решетки), т. е. такого рода статистическая величина каким-то образом отображает протяженность области связанных пульсаций в потоке. Величину L_2 можно было бы определять не

интегралом (1.4), а одним из интегралов $\int_0^\infty R_{11} d\xi_2$, каждый раз оговаривая, как именно она определяется; точно также можно определить и величины L_1 и L_3 .

Величину L , определенную интегралом типа (1.4), мы примем за вторую основную характеристику турбулентного потока и назовем масштабом турбулентности.

Наряду с таким точным в статистическом смысле слова масштабом можно ввести в рассмотрение и другой приближенный масштаб λ , определенный следующим образом. Заменим кривую $R(\xi)$ приближенной параболой (рис. 140):

$$R(\xi) = R(0) + R'(0)\xi + \frac{1}{2}R''(0)\xi^2 = 1 + \frac{1}{2}R''(0)\xi^2$$

и найдем абсциссу λ точки пересечения параболы с осью ξ , тогда получим

$$\lambda = -\frac{2}{R''(0)}. \quad (1.5)$$

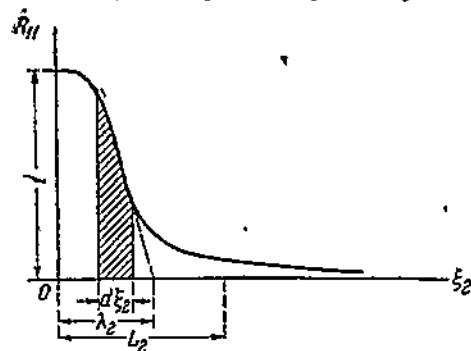


Рис. 140.

Такого рода величина λ , вычисленная вдоль той или другой оси при пользовании соответствующими проекциями скорости (по Тэйлору, λ — размер наименьшего вихря) может, наряду с величинами типа L , приблизительно характеризовать масштаб турбулентности.

Третьей характеристикой турбулентности считают частоту пульсаций скорости. Опыты показывают, что в турбулентных потоках наблюдаются весьма широкие спектры частот, но эти частоты подчиняются некоторой кривой распределения, аналогичной кривой Гаусса. Если откладывать по оси абсцисс частоты n , а по оси ординат плотности вероятности $F(n)$ наличия соответствующих частот, то при этом для $F(n)$ получатся кривые того же типа, что и для $R(\xi)$ (см. далее рис. 148). Составляя интеграл, аналогичный интегралу (1.4) и замечая, что $F(n)dn$ есть вероятность существования частот в интервале $(n, n+dn)$, получим по теореме о сложении вероятностей

$$\int_0^\infty F(n) dn = 1 \quad (1.6)$$

За меру частоты пульсаций в турбулентном потоке можно принять наиболее вероятную частоту или некоторую среднюю частоту¹⁾ турбулентного потока. В следующих двух параграфах будут изложены методы измерения основных характеристик турбулентности и приведены некоторые опытные данные, относящиеся к этим характеристикам.

Статистические теории турбулентности, в настоящее время находятся еще в зачаточном состоянии. Наиболее разработанным вопросом является теория так называемой однородной и изотропной турбулентности.

Турбулентный поток называется однородным, если все осредненные величины в потоке ($\overline{v_x^2}$, $\overline{v_x v_y}$ и т. д.) одинаковы во всех точках его (при этом компоненты Φ_{ij} и R_{ij} — функции только от t и ξ_i , а не от x_i); если компоненты тензора момента связи или корреляционного тензора сохраняют свои значения при любом повороте системы координат $M\xi_1\xi_2\xi_3$ и при зеркальном отображении осей, то такого рода турбулентный поток называется изотропным. Примером однородного изотропного потока может служить турбулентный поток, который образуется, если в практически безграничном резервуаре с жидкостью создать возмущения (продвинуть решетку, например) и затем следить за диффузией возмущений. Осредненная скорость в таком резервуаре всюду равна нулю, все точки потока друг от друга ничем не отличаются и нет никаких особых направлений, обладающих какими-то преимуществами по сравнению с другими. Такой поток будет с точки зрения турбулентности однородным и изотропным. Затухание турбулентности во времени из-за вязкости жидкости, будет представлять единственный предмет исследования, так как в этом случае, очевидно, турбулентный перенос количества движения будет отсутствовать.

Большое практическое значение имеет однородная и изотропная турбулентность в потоках за решетками. В аэродинамических трубах в некотором удалении вниз по потоку от турбулизирющей решетки можно получить однородный осредненный поток со скоростью U . Если представить себе систему координат, движущуюся прямолинейно и поступательно со скоростью U , то по отношению к такой системе координат актуальные скорости сведутся к пульсационным добавкам v_i и поле этих пульсаций можно рассматривать как изотропное, так как в указанной галилеевой системе все направления равноценны. Процесс угасания возмущений, созданных решеткой, при удалении от решетки на расстояние x можно сравнивать с процессом угасания возмущений во времени в предыдущем примере, если положить $x = Ut$ или $x = U(t - t_0)$, где постоянная Ut_0 соответствует расстоянию от решетки, на котором завихренность успевает перейти в развитую турбулентность.

Теория затухания однородной и изотропной турбулентности была создана, главным образом, Тэйлором²⁾, а затем уже развита теоретически Карманом³⁾.

Тэйлор показал, что корень квадратный из средней квадратичной пульсации $\sqrt{\overline{v^2}}$ (в случае изотропной турбулентности $\overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \overline{v_3^2}$) убывает с увеличением расстояния x от решетки по закону

$$\frac{1}{K} = \frac{U}{\sqrt{\overline{v^2}}} = \frac{5}{A^2} \cdot \frac{x}{M} + \text{const}, \quad (1.7)$$

где A — некоторая экспериментальная константа, а M характерный для решетки размер (диаметр стержня, размер ячейки или др.) С увеличением интенсивности турбулентности K происходит размывание областей связанных пульсаций,

¹⁾ Повидимому частота пульсаций не является независимой характеристикой турбулентности — она тесно связана с масштабом турбулентности и интенсивностью ее.

²⁾ В ряде работ, помещенных в Proc. Roy. Soc. A, 151 (1935) и A, 156 (1936), под общим заголовком „Statistical Theory of Turbulence“.

³⁾ Th. v. Kármán. Journ. Aeron. Sciences, 4 (1937); Kármán und Howarth. Proc. Roy. Soc. A, 164 (1938).

т. е. возрастание масштаба турбулентности. По Тэйлору приближенный масштаб турбулентности λ связан с $\sqrt{\overline{v^2}}$ формулой

$$\frac{\lambda}{M} = A \sqrt{\frac{\nu}{M \overline{v^2}}} \quad (1.8)^1$$

так что с убыванием интенсивности $\sqrt{\overline{v^2}}$ масштаб λ растет. В последней формуле λ аналогично ранее введенной величине, но определено несколько иначе, а именно, как предел

$$\frac{1}{\lambda^2} = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{1 - R(\xi_2)}{\xi_2^2}$$

где

$$R(\xi_2) = \frac{v_1 v_3'}{\sqrt{\overline{v^2}}}$$

представляет коэффициент корреляции между проекциями пульсаций на ось $M\xi_1$ в точках M и M' , находящихся на оси $M\xi_2$ на расстоянии ξ_2 друг от друга. Такое определение подходит под прежнее определение величины λ , так как

$$1 - R(\xi_2) \approx -\frac{1}{2} \xi_2^2 R''(0).$$

Тэйлору принадлежит также формула для средней диссипируемой из-за вязкости мощности в единице объема при изотропной турбулентности

$$W = 15\mu \frac{\overline{v^2}}{\lambda^2}. \quad (1.9)$$

Эта формула несколько напоминает приведенную в начале курса формулу диссипируемой мощности при актуальном движении и может быть из последней формулы выведена.

Заслуга Кармана²⁾ в том, что он первый вывел общее уравнение для определения компонентов корреляционного тензора в случае изотропной и однородной турбулентности. Уравнение это имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v^2} f) + 2 (\overline{v^2})^{3/2} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4}{r} h \right) = 2\nu \overline{v^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad (1.10)$$

где $f(r, t)$ представляет коэффициент корреляции между проекциями пульсаций в точках M и M' на направление оси MM' , h — коэффициент корреляции между квадратом поперечной проекции пульсации в точке M и продольной в точке M' , r — расстояние MM' .

Пользуясь этим не замкнутым уравнением, заключающим две неизвестные функции $f(r, t)$ и $h(r, t)$, Карман получает ряд результатов Тэйлора. Обсуждение и уточнение решений Кармана и некоторые новые результаты, относящиеся к законам затухания турбулентных возмущений, можно найти в работах М. Д. Миллионщикова и автора настоящей книги.³⁾ При угасании

¹⁾ Величину $\frac{M \sqrt{\overline{v^2}}}{\nu}$ иногда называют рейнольдсовым числом турбулентности.

²⁾ loc. cit.

³⁾ Л. Г. Лойцянский. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Труды ЦАГИ, вып. 440, (1939).

М. Д. Миллионщиков. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости (ДАН СССР т. XXII, № 5, 1939) и того же автора: Затухание пульсаций скорости в аэродинамических трубах (ДАН СССР, т. XXII, 1939).

изотропной турбулентности интенсивность турбулентности, как мы уже видели, падает, а масштаб растет. Естественно является вопрос о существовании такой характерной для турбулентного потока величины, которая при угасании турбулентности сохранилась бы. Величиной, обладающей свойством сохранности, оказывается величина

$$M = \overline{v^2} \int_0^{\infty} f(r, t) r^4 dr, \quad (1.11)$$

которую можно было бы назвать моментом возмущения; напоминаем, что здесь $f(r, t)$ — коэффициент корреляции между проекциями пульсаций в точках M и M' на направление MM' .

Если ввести в рассмотрение новый масштаб турбулентности L^* формулой

$$L^* = \left(\int_0^{\infty} f(r, t) r^4 dr \right)^{1/4}, \quad (1.12)$$

то теорема о сохранении момента возмущения принимает простую форму:

$$(\overline{v^2})^2 (L^*)^6 = \text{const}, \quad (1.13)$$

т. е. утверждает, что произведение квадрата интенсивности турбулентности на пятую степень масштаба при угасании турбулентности сохраняется неизменным. Эта теорема вытекает из общего уравнения Кармана (1.10) и нуждается в экспериментальной проверке. Возможность экспериментального определения входящих в формулировку теоремы величин в настоящее время не подлежит сомнению. Некоторые сведения по этому поводу приведены далее.

§ 2. Методы экспериментального исследования турбулентных течений ¹⁾

Для исследования турбулентных потоков необходимо иметь прибор, позволяющий регистрировать колебания (пульсации) скорости с наименьшими искажениями. Основными требованиями, предъявляемыми к подобным приборам, являются малая инерционность и малые по сравнению с размерами турбулентных возмущений, размеры приемной части, помещаемой в поток. Второе требование вызывается также желанием избежать добавочных нарушений потока прибором.

Если, не ограничиваясь исследованием качественной стороны явления, ставить своей целью получение количественных статистических характеристик, то желательно иметь возможность измерять эти характеристики непосредственно без сложных вычислений.

В наибольшей степени поставленным требованиям удовлетворяет метод термоанемометрии. Известно, что помещенное в поток нагретое тело вследствие конвекции теряет часть сообщенного ему тепла. Поэтому температура тела изменяется в зависимости от скорости потока.

Используя это обстоятельство, в поток, нормально к его направлению, помещают тонкую платиновую нить диаметром 0,008—0,020 мм, нагреваемую электрическим током. Принципиальная схема прибора показана на рис. 141. Нить включают в схему мостика Уитстона, в качестве одного из его плеч.

Если мостик сбалансирован при нулевой скорости, то изменение скорости вызовет нарушение его баланса. Восстановить баланс мостика можно одним из двух способов: либо, оставляя постоянным ток питания i , мостик балансируют изменением переменного сопротивления R_1 , включенного последовательно с измерительной нитью (метод постоянной силы тока), либо, изменяя ток

¹⁾ Настоящий параграф составлен по нашей просьбе доц. Е. М. Минским.

накала с помощью реостата R_4 , восстанавливают прежнее сопротивление нити (метод постоянного сопротивления). Первый способ дает несколько большую чувствительность, но менее удобен при экспериментировании, поэтому обычно пользуются вторым.

Связь между силой тока и средней скоростью проверяется для каждой измерительной нити тарировкой. Книгом ¹⁾ установлена теоретически

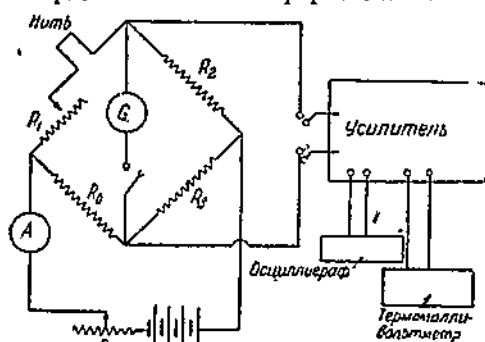


Рис. 141.

хорошо подтверждаемая экспериментом, пропорциональность квадрата силы тока квадратному корню из средней скорости. На рис. 142 мы приводим пример тарировочной кривой термоанемометра ²⁾.

Если в потоке имеют место пульсации скорости, то после балансировки мостика на концах его диагонали возникнет малая переменная разность потенциалов, определяемая этими пульсациями.

При измерении средних скоростей в диагональ мостика включают инерционный прибор, не реагирующий на ток, вызываемый этой разностью потенциалов. Ток в диагонали мостика усиливают с помощью специального усилителя, а затем либо записывают его колебания на осциллографе, либо измеряют его эффективное ³⁾ напряжение с помощью тепловых измерительных приборов.

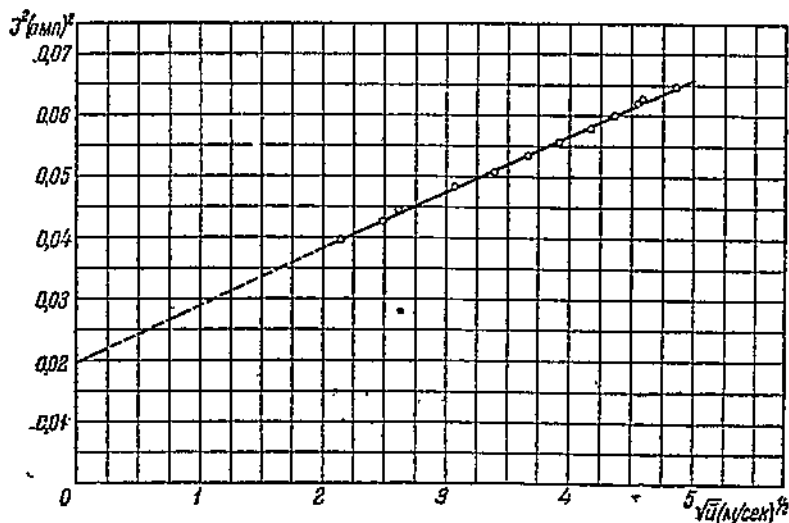


Рис. 142.

¹⁾ L. V. King. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid, Phil. Trans. A. 214 (1914).

²⁾ Ю. Г. Захаров, Е. М. Минский, М. С. Филиппов. К методике измерения турбулентности термоанемометром. Труды ЦАГИ вып. 402, 1939 г.

³⁾ Эффективным напряжением переменного тока называется среднее квадратичное значение этого напряжения.

При этом необходимо, чтобы переменная разность потенциалов была бы пропорциональна изменению скорости. Мгновенное значение напряжения на выходе усилителя пропорционально квадратному корню из суммы квадратов проекций скорости, направленных перпендикулярно к нити, и некоторой доли квадратов третьей проекции; эффективное напряжение, измеряемое на выходе усилителя, является средним квадратичным значением разности между мгновенным и средним значениями напряжения. Простой расчет показывает ¹⁾, что с точностью до членов высшего порядка величина эта пропорциональна среднему квадратичному значению проекции скорости на направление среднего движения.

Если измерение ведется по методу постоянного сопротивления, то можно показать, что среднее квадратичное значение этой проекции пропорционально силе тока накала измерительной нити, квадратичному корню из скорости и эффективному напряжению на выходе усилителя. Коэффициент пропорциональности при этом зависит определенным образом от коэффициента усиления системы температуры и размеров нити, а также и от наклона тарировочной прямой, показанной на рис. 142 ²⁾.

Для осуществления пропорциональности выходного напряжения и пульсаций скорости необходимо, чтобы размеры нити были малы сравнительно с размерами турбулентных возмущений, а инерция измерительной системы была минимальной. Для осуществления первого требования обычно применяемые насадки делают очень небольшими по размерам. На рис. 143 показаны две увеличенные фотографии насадки (слева — миллиметровая шкала), применявшегося Драйденом ³⁾ для исследования пульсаций в аэродинамической трубе. Насадок выполнен из волластоновой нити (платиновая нить, покрытая серебряным покрытием). Измерение производится средней частью насадки, где на длине 1 мм серебро удалено с помощью азотной кислоты. Диаметр платинового ядра около 0,008 мм.

К сожалению измерительная система обладает значительной тепловой инерцией, которая, однако, может быть в известной мере компенсирована. В теории разработанной Драйденом ⁴⁾ показывается, что амплитуда колебания частоты f уменьшается, вследствие инерции, в $\sqrt{1 + M^2(2\pi f)^2}$ раз, где M — постоянная величина, определяемая физическими свойствами и температурой измерительной нити. Поэтому для компенсации инерции достаточно осуществить усилитель, коэффициент усиления которого возрастает с частотой пропорционально $\sqrt{1 + M^2(2\pi f)^2}$. С этой целью в анодную цепь одного из каскадов усилителя вводится контур, состоящий из последовательно соединенных омического сопротивления и самовдукции. Аналогичных результатов можно достигнуть, вводя в усилитель контур, состоящий из емкости и сопротивления ⁵⁾. Инерция определяется величиной M , существенно зависящей

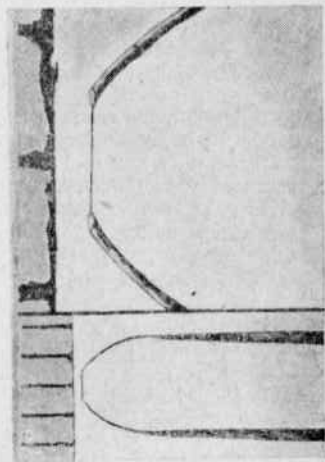


Рис. 143.

¹⁾ Ю. Г. Захаров и Е. М. Минский. Исследование турбулентности с помощью термоанемометра. Техн. зам. ЦАГИ, вып. 172, 1938.

²⁾ Захаров, Минский и Филиппов. loc. cit.

³⁾ H. L. Dryden, Turbulence and the Boundary Layer. Journ. Aero Sc. v. 6, № 3, 1939.

⁴⁾ H. L. Dryden and Kueth. The Measurements of Fluctuations of Air Speed by the Hot Wire. NACA. T. R. № 320, 1929. См. также Ю. Г. Захаров и Е. М. Минский.

⁵⁾ M. Ziegler. The application of the hot-wire anemometer for the investigation of the turbulence of an airstream. Proc. Amsterdam. Acad. v. 33, № 7 (1930); также v. 34, № 21 (1931) и v. 35, № 3 (1932).

от свойств, размеров и температуры нити и убывающей со скоростью потока. Уменьшая диаметр нити, мы можем значительно сократить величину M , а следовательно и необходимую компенсацию.

В своей простейшей схеме термоанемометр позволяет измерять среднее квадратическое значение продольной составляющей пульсационной скорости. Для измерения поперечной составляющей пользуются комбинированным насадком, состоящим из двух одинаковых по размерам нитей, установленных нормально к потоку и параллельно друг другу на очень небольшом (порядка 0,015 — 0,020 мм) расстоянии. Нити включены в два последовательных плеча мостика, как показано на рис. 144, и при отсутствии поперечной составляющей находятся в одинаковых условиях охлаждения, а следовательно, имеют одинаковые температуры и сопротивления. При наличии поперечной составляющей одна из нитей попадает в аэродинамическую тень другой, температура ее меняется и мостик выходит из равновесия. Поперечную составляющую измеряют по величине силы тока, потребного для восстановления равновесия мостика.

После балансировки мостика в его диагонали появляется переменный ток, вызываемый пульсационной скоростью, эффективное напряжение, которого пропорционально среднему квадратичному значению поперечной составляющей скорости.

Измерение поперечной составляющей можно производить также другим способом ⁴⁾.

Показание измерительной нити существенно зависит от угла наклона нити

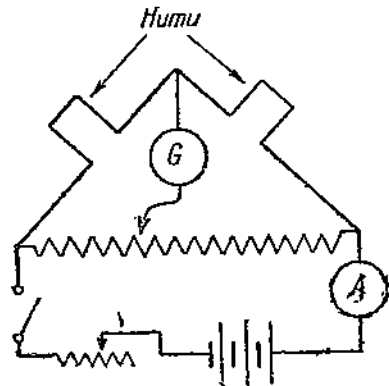


Рис. 144.

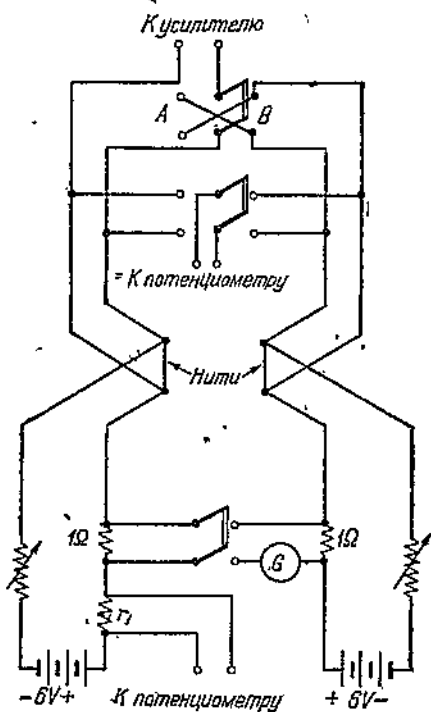


Рис. 145.

к потоку. Если выполнить насадок из двух одинаковых нитей, образующих некоторый угол и включенных в последовательные плечи мостика, то мостик будет находиться в равновесии в том случае, если поток направлен по биссектрисе угла, образованного нитями. Вращая нити вокруг их общей точки, мы установим направление потока, а измеряя переменное напряжение в диагонали мостика, после его балансировки, — величину поперечной составляющей пульсационной скорости.

Выполнив насадок из трех нитей, две из которых будут определять нам

⁴⁾ Ferrari. Sistemazioni elettriche per le studio sperimentale della dinamica dei fluidi. "Aerotecnica" Roma (1938) v. 18, № 1.

поперечную, а третья — продольную составляющие, мы можем, измеряя среднее квадратичное значение суммы их показаний, вычислить также среднее значение произведения двух различных проекций скорости.

С помощью термометра можно также измерять коэффициент корреляции между продольными составляющими пульсационной скорости в двух различных точках потока. С этой целью в каждой из исследуемых точек устанавливается измерительная нить.

Разность потенциалов на концах нити (e) пропорциональна скорости (u) в исследуемой точке. Измеряя с помощью схемы, показанной на рис. 145, сумму или разность, соответствующих двум нитям разностей потенциалов, получим величины:

$$N_a = \overline{(e_1 + e_2)^2} \quad \text{и} \quad N_b = \overline{(e_1 - e_2)^2},$$

где e_1 и e_2 — разности потенциалов на первой и второй нитях, а черта над величинами обозначает осреднение по времени.

Вычисляя отношение разности измеренных величин к их сумме, получим

$$\frac{N_a - N_b}{N_a + N_b} = \frac{4\overline{e_1 e_2}}{2(\overline{e_1^2} + \overline{e_2^2})} = \frac{4k^2 \overline{u_1 u_2}}{2k^2 (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2})} = \frac{2\overline{u_1 u_2}}{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2}},$$

где u_1 и u_2 — скорости в исследуемых точках. Полагая далее, что средние квадратичные значения скорости не зависят от направления осей координат, т. е. $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u^2}$ (изотропия!), получим величину коэффициента корреляции R между скоростями в двух точках:

$$R = \frac{N_a - N_b}{N_a + N_b} = \frac{\overline{u_1 u_2}}{\overline{u^2}}.$$

На рис. 146 показана фотография насадки, позволяющего производить измерения коэффициента корреляции в различных точках ¹⁾. Одна из нитей насадка (В) установлена неподвижно, вторую (А) можно передвигать с помощью показанного на фотографии механизма.

Для непосредственного измерения коэффициента корреляции между скоростями в двух точках можно пользоваться электродинамометром ²⁾. Если к обмоткам электродинамометра присоединить диагонали двух мостиков Уитстона, содержащих две измерительные нити, то отклонения подвижного механизма динамометра будут пропорциональны среднему значению произведения скоростей, т. е. $\overline{u_1 u_2}$. Этот метод, однако, несколько неточен при малом удалении исследуемых точек друг от друга, т. е. при значениях коэффициента корреляции, близких к единице.

Пульсации скорости обычно неравномерны и не характеризуются определенной частотой. Спектр частот турбулентных пульсаций повидимому непрерывен и диапазон возможных частот весьма широк. Построение спектра частот также возможно осуществить с помощью термометра ³⁾. Достаточно усложнить схему усилителя введенным фильтром, пропускающего лишь колебания, частоты которых лежат в определенных пределах. Применяя последовательно серию фильтров с различными диапазонами, можно построить весь спектр. Во время эксперимента измеряют средние квадратичные значения скорости, определяемые колебаниями с частотами, лежащими в пределах от 0 до переменного n . С возрастанием n , измеряемое среднее квадратичное значение $\overline{u^2}$ стремится к своему предельному значению $\overline{u^2}$. На рис. 147 мы приводим

¹⁾ Захаров, Минский, Филиппов. *loc. cit.*

²⁾ G. I. Taylor. Correlation Measurements in a Turbulent Flow Through a Pipe. *Proc. Roy. Soc. A* 157, № 892. (1936).

³⁾ L. F. G. Simmons and C. Satter. An experimental determination of the spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc. A* 165, № 920 (1938).

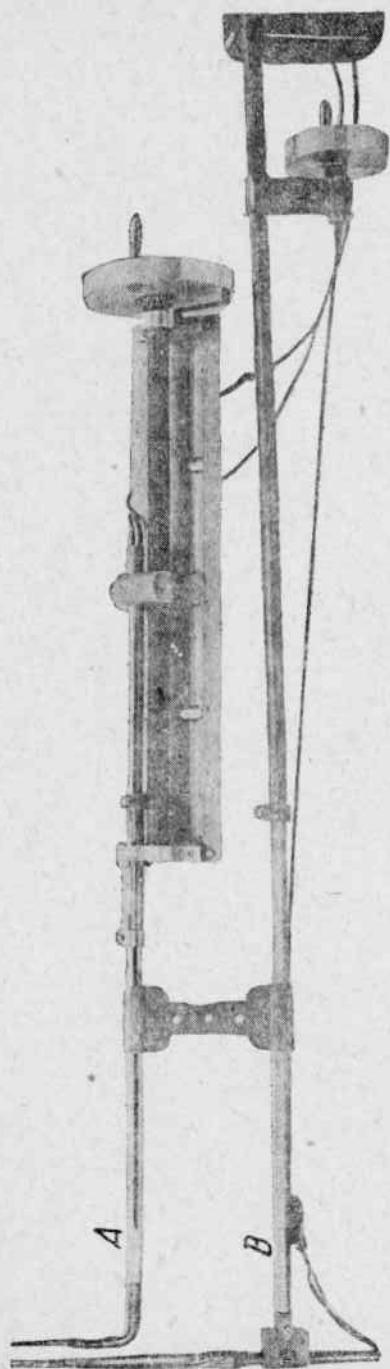


Рис. 146 а.



Рис. 146 б.

график, заимствованный из работы Симмонса и Солтера, показывающий изменение отношения $\overline{u_1^2}/u^2$ с ростом максимальной измеряемой частоты n .

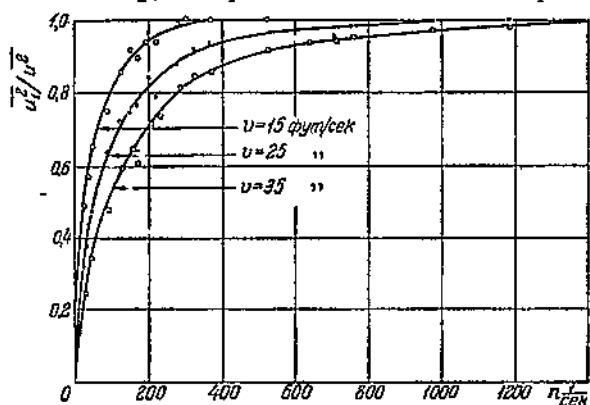


Рис. 147.

Пользуясь этим графиком нетрудно перейти к кривой спектра частот. На рис. 148, заимствованном из той же работы, построена зависимость вероятности $F(n)$ появления колебаний с частотой n , от частоты n .

В качестве примера практического применения термоанемометра можно указать также на определение с его помощью положения области перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентное состояние.

Как указывалось в начале настоящего отдела, интенсивность пульсаций в области перехода резко возрастает. Это обстоятельство позволяет легко определить область перехода по резкому максимуму пульсации на кривой, полученной в результате измерений пульсаций в точках, расположенных вдоль поверхности крыла. Пример такой кривой приведен на рис. 149, где u_0 — скорость набегающего течения, x/s_0 — безразмерное расстояние от передней кромки.

Термоанемометр позволяет, таким образом, изучать почти все характеристики турбулентных потоков. Отрицательными сторонами метода являются сравнительная сложность применяемой аппаратуры, затрудняющая массовое его применение и трудность проверки правильности ком-

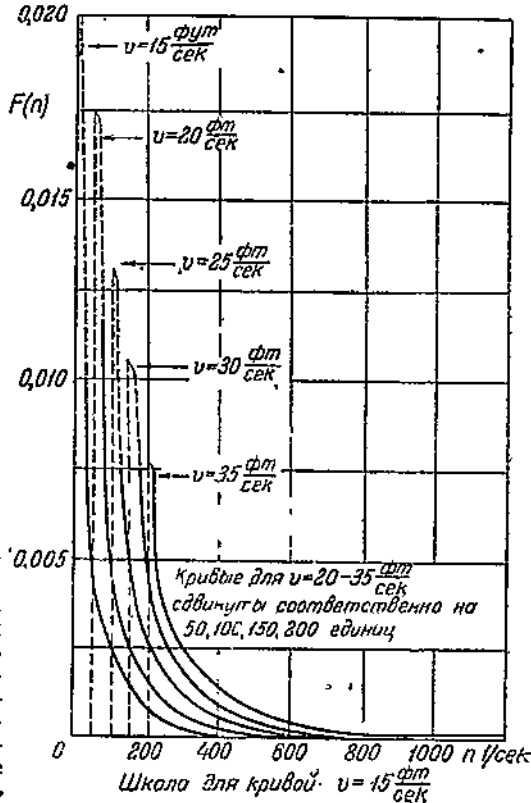


Рис. 148.

пенсации тепловой инерции. Это обстоятельство вынуждает искать более простые способы определения турбулентности.

Для изучения турбулентности в аэродинамических трубах с успехом применяется метод определения турбулентности по ширине теплового следа, образующегося позади нагретого тела обтекаемого потоком воздуха. Если установить в потоке нагретый цилиндр, то распределение температур за ним, как мы уже знаем из предыдущего, представляется кривой, напоминающей в форме известный нормальный закон ошибок Гаусса. С увеличением турбулентности ширина теплового следа растет. Статистическая теория

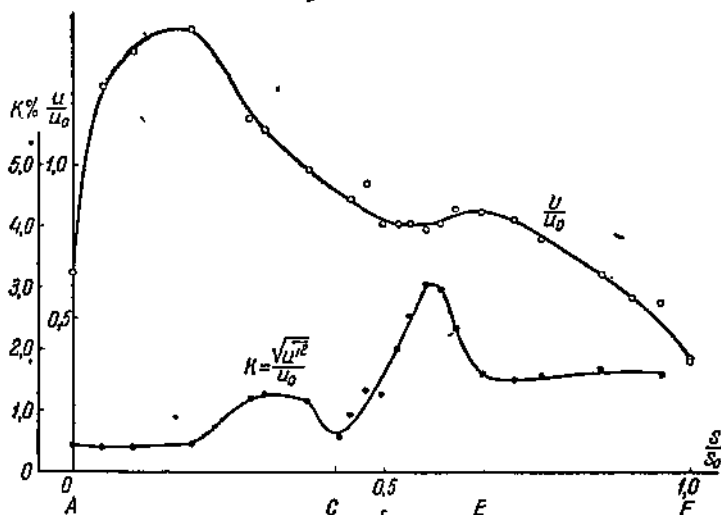


Рис. 149.

А — передняя кромка. С — начало переходной области. Е — конец переходной области. F — задняя кромка.

турбулентности Тэйлора¹⁾ позволяет связать ширину следа со средним квадратичным значением поперечной составляющей пульсационной скорости простой формулой:

$$\frac{\sqrt{Y^2}}{x} = \frac{\sqrt{v^2}}{U}$$

где: $\sqrt{Y^2}$ — параметр кривой Гаусса, характеризующий ее ширину, x — расстояние от нагретого тела, U — средняя скорость, $\sqrt{v^2}$ — среднее квадратичное значение поперечной составляющей пульсационной скорости. Прибор, основанный на указанном принципе, впервые был предложен Шубауэром²⁾, а впоследствии подробно разработан Б. Я. Трубочниковым³⁾. Прибор состоит из тонкой нити, нагреваемой электрическим током, позади которой производится измерение температур с помощью термопары. Метод весьма прост в обращении, но требует для получения искомым данных довольно громоздкой обработки.

¹⁾ G. I. Taylor. Statistical Theory of Turbulence. Proc. Roy. Soc. A 151. № 873 (1935).

²⁾ G. B. Schubauer. A turbulence indicator utilizing the diffusion of heat NASA. T. R. № 524. 1935.

³⁾ Б. Я. Трубочников. Тепловой метод измерения турбулентности в аэродинамических трубах. Труды ЦАГИ, № 372, 1938.

Для исследования потоков очень малых размеров Фейджем и Таунендом¹⁾ был предложен не нарушающий структуру потока, безинерционный метод ультрамикроскопа. Принцип ультрамикроскопа основан на том, что весьма малые частицы, присутствующие в большинстве жидкостей, но незримые даже при большом увеличении, становятся видимыми на темном фоне, если их осветить сильным светом. С целью исследования, поток воды освещается через узкую щель, а затем производится наблюдение за взвешенными частицами через микроскоп, снабженный серией объективов, установленных на вращающемся диске. Направление движения диска, в момент прохождения объектива через ось прибора совпадает с направлением движения жидкости. При совпадении линейной скорости движения объектива с минимальными значениями продольной составляющей скорости жидкости в поле зрения микроскопа появляются частицы, кажущиеся неподвижными. С увеличением скорости вращения такие частицы появляются лишь до тех пор пока линейная скорость движения объектива не достигнет максимального возможного значения скорости. Максимальное значение продольной составляющей определяется как полуразность максимального и минимального значений пульсационной скорости. Максимальные значения двух других составляющих определяются по наклону траекторий частиц видимых через неподвижный микроскоп. К сожалению, метод позволяет определять только максимальные значения пульсационных скоростей и притом, лишь в потоках очень малых размеров. В последнее время удалось получить фотографии потоков с помощью ультра-микроскопа. Примеры таких фотографий приведены в книге Гольдштейна²⁾.

Другой аналогичный метод, развитый Таунендом³⁾, в применении к воздушным потокам, заключается в фотографировании траекторий частиц нагретого воздуха. С помощью простой оптической схемы, использующей разницу в преломлении теплого и холодного воздуха, можно сделать видимыми, нагретые его частицы. В исследуемом потоке устанавливается разрядник, дающий через определенные интервалы искру, нагревающую воздух, проходящий в этот момент через разрядник. Такого рода фотографии были уже приведены на рис. 79 и 86. Статистическая обработка снятых таким образом кинофильмов позволила Тауненду определить средние квадратичные значения всех трех составляющих пульсационной скорости в различных точках трубы квадратного сечения.

Многообещающим методом для измерения пульсаций скорости является метод, использующий зависимость напряжения тлеющего разряда между двумя электродами от скорости⁴⁾. Метод по видимому совершенно безинерционен и требует для своего применения сравнительно несложной аппаратуры, однако, нуждается еще в дальнейшей разработке.

Несколько особо стоит исследование турбулентности в водных потоках. Применение термоанемометра к воде встречает ряд дополнительных трудностей принципиального характера. Разработка необходимой для этого методики ведется в настоящее время у нас в Союзе⁵⁾.

С целью усовершенствования методов Фейджа и Тауненда, в водные потоки можно вводить пузырьки эмульсии с удельным весом, не отличающимся от удельного веса воды. Осуществление киносъемки движения таких пузырьков

¹⁾ A. Fage and H. Townend. An Examination of Turbulent Flow with an Ultramicroscope. Proc. Roy. Soc. A. 135 № 828. См. также „Проблемы турбулентности“, ОНТИ, 1936 г.

²⁾ Modern developments in fluid dynamics. ed. by S. Goldstein Oxford (1938), vol. I, стр. 296, лист 29.

³⁾ H. Townend. Statistical Measurements of Turbulence in the Flow of Air through a Pipe. Proc. Roy. Soc. A 145 № 854 (1934).

⁴⁾ F. C. Lindvall. A Glow Discharge Anemometer. Electrical Engineering № 53 (1934).

⁵⁾ С. С. Чугунов. Электротермический метод измерения и регистрации пульсаций скоростей в воде. Изв. ЭНИИ на АН СССР, № 1939.

ков позволяет, в результате статистической обработки фильмов, получить необходимые сведения о потоке¹⁾.

Наконец, для исследования низкочастотных пульсаций большой амплитуды в больших лотках, каналах и реках применяются гидрометрические вертушки²⁾. Этот прибор отличается значительной инерционностью, сильно нарушает поток, но зато весьма прост в обращении и по видимому является пока единственным прибором, применимым для водных потоков больших размеров и скоростей.

Заканчивая на этом краткий обзор существующих методов исследования турбулентных потоков, отметим, что большинство этих методов нуждаются еще в дальнейшей разработке и усовершенствовании.

§ 3. Некоторые сведения о структуре турбулентных потоков³⁾.

Приведем некоторые экспериментальные данные о структуре течения в рабочей части аэродинамической трубы, в условиях вполне развившейся турбулентности и в пограничном слое.

Поток в аэродинамической трубе характеризуется постоянством средних скоростей в ядре течения, вызывающих в свою очередь отсутствие касательных напряжений, а следовательно отсутствие корреляционной связи между различными составляющими пульсационной скорости. Нормальные турбулентные напряжения при этом равны между собою. Иными словами течение в рабочем участке аэродинамической трубы является *изотропным*.

Это обстоятельство подтверждается непосредственным сравнением экспериментально определенных средних квадратичных значений продольной и поперечной составляющих пульсационной скорости. Весьма интересная проверка изотропности потока в аэродинамической трубе, заключающаяся в сравнении измеренных теплоанемометром величин коэффициентов корреляции между скоростями в различных точках, со значениями тех же коэффициентов, вычисленными по теории Кармана для изотропной турбулентности приведена Тэйлором⁴⁾. На рис. 150, заимствованном из его работы, показана кривая измеренных значений R_1 и сравнение значений R_2 , вычисленных по формуле

$$R_2 = R_1 + \frac{r}{2} \frac{dR_1}{dr} \text{ и измеренных прибором } ^5).$$

Многочисленными экспериментами установлена независимость интенсивности турбулентности (отношения среднего квадратичного значения продольной составляющей пульсационной скорости к средней скорости в ядре течения) от средней скорости потока (числа Рейнольдса) и поперечной координаты. Вдоль трубы имеет место некоторое затухание турбулентности, вызываемой входными устройствами: хвостикомбом, направляющими лопатками и т. п.

При изучении законов влияния турбулентности потока в аэродинамической трубе на характеристики испытываемых в ней тел, для повышения турбулентности в трубе устанавливают специальные турбулизирующие решетки, состоящие из прямолинейных стержней.

¹⁾ Е. М. Минский и Б. А. Фидман. Об экспериментальном определении некоторых статистических характеристик турбулентных потоков. Изв. ЭНИНа АН СССР, 1939.

²⁾ М. А. Великанов. Пульсации скоростей в турбулентном потоке. Изв. НМИ. 1929.

Е. М. Минский. О пульсации скоростей в открытых потоках. Техн. Зам. ЦАГИ, № 105, 1936.

³⁾ Этот параграф также составлен доц. Е. М. Минским.

⁴⁾ G. Taylor. Proc. Roy. Soc. A. 157, № 892 (1936).

⁵⁾ Здесь R_1 и R_2 соответственно коэффициенты корреляции между двумя продольными и двумя поперечными составляющими скорости в двух точках M и M' находящихся на расстоянии r друг от друга. R_1 эквивалентно величине f § 1 настоящей главы. Вывод последней формулы см. в ранее цитированных работах Кармана, Карман-Хоуэрза и Л. Г. Лойцянского.

Турбулентность, вызываемая такой решеткой обычно резко затухает по мере удаления от нее. Закон затухания может быть получен из соображения статистической теории турбулентности. В § 1 было упомянуто, что величина обратная интенсивности турбулентности ($U/\sqrt{u'^2}$) возрастает прямо пропорционально расстоянию от решетки. На рис. 151, заимствованном из ранее цитированной книги Гольдштейна воспроизводим экспериментальные данные, подтверждающие линейный закон затухания турбулентности при различных размерах ячейки решетки M и различных реинольдсовых числах турбулентности

$M \frac{\sqrt{u'^2}}{u}$, отмеченных на рисунке цифрами.

Прямые, проведенные через экспериментальные точки для одной и той же решетки соответствуют формуле (1.7), — они почти параллельны. Коэффициент A в среднем близок к 2, колеблясь между 1,95 и 2,20.

Следует отметить, что эксперименты Драйдена¹⁾, приведенные на рис. 152 показывают систематическое отклонение от линейного закона в сторону несколько меньшего затухания турбулентности, для решеток с ячейками малого размера.

Это обстоятельство, повидимому, можно объяснить значительной интенсивностью турбулентности потока перед решеткой, по сравнению с турбулентностью ею вызываемой.

Начальная, независимая от решетки, турбулентность затухает значительно медленнее, следствием чего и является отклонение от линейного закона. Другое объяснение дано Л. Г. Лойцянским, показавшим, что при малых реинольдсовых числах турбулентности величина обратная интенсивности должна быть пропорциональна удалению от решетки в степени $4/5$ (см. ранее цитированную работу Л. Г. Лойцянского). К тому же результату пришел в своей кандидатской диссертации М. Д. Миллиончиков (см. сноску на стр. 386).

Решетки, отличающиеся друг от друга размерами образующих их прутьев и расстояниями между прутьями, вызывают турбулентность различной интенсивности, при различной величине геометрической характеристики. Как указывалось выше, геометрической характеристикой турбулентного потока или масштабом турбулентности L называется интеграл от коэффициента корреляции между скоростями в различных точках потока $M(y=0)$ и $M'(y=y')$

т. е. $L = \int_0^\infty R_y dy$, где $R_y = \frac{\overline{u(0)u(y)}}{\sqrt{\overline{u^2(0)}\sqrt{\overline{u^2(y)}}}$. Кривая изменения R_y характеризуется резким убыванием от $R_y = 1$ при $y = 0$, до значений R_y близких к нулю при больших значениях y .

Зависимость R от y с успехом представляется в виде экспоненциальной кривой по формуле

$$R_y = e^{-\frac{y}{L}}$$

Эксперименты Драйдена показывают, что убывание R_y тем интенсивнее чем меньше расстояние между прутьями турбулизирющей решетки. На рис. 153

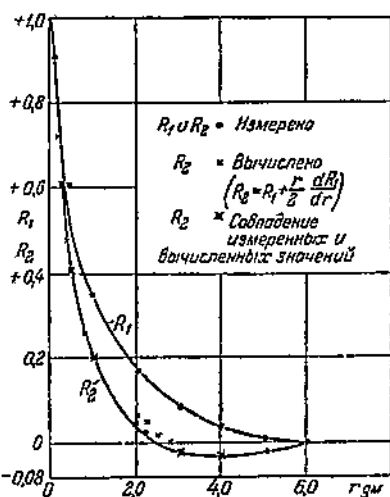


Рис. 150.

¹⁾ H. L. Dryden, G. B. Schubauer, W. C. Mock and Skramstad. Measurements of intensity and scale of windtunnel turbulence etc. NACA, T. R. № 581. 1937.

показано изменение коэффициента корреляции с изменением размера ячейки турбулизирующей решетки. Решетки в этих опытах были выполнены из

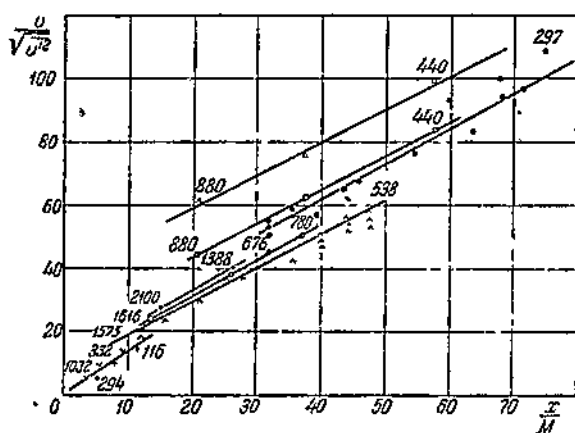


Рис. 151.

- Драбден
- × — решетка с квадратными ячейками $M=5''$, $D=1''$
 - — решетка с квадратными ячейками $M=3,25''$, $D=0,65''$
 - — хонейкомб с восьмиугольными ячейками $M=3''$
 - △ — хонейкомб из 3-дюймовых труб $M=3''$
- Симмонс и Солтер
- — хонейкомб с квадратными ячейками $M=3''$
 - △ — решетка из круглых труб $M=3''$, $D=7/8''$
 - ⊕ — решетка $M=0,62''$ в 4-дюймовой трубе
 - △ — решетка $M=1,5''$ в 1-футовой аэродинамической трубе.

Как видим, L зависит от размера решетки M . Измерения, производившиеся на различных расстояниях x/M за решетками показывают возрастание L с удалением от решетки. Соответствующие данные приведены на рис. 154 разброс точек очень велик, так что пока трудно судить о закономерности.

Этим исчерпываются почти все имеющиеся в настоящее время сведения о турбулентном течении в аэродинамических трубах.

Измерения турбулентности в водном потоке по длинной трубе квадратного сечения проводились Фейджем, с помощью ультрамикроскопа (см. § 2 настоящей главы). Были получены

распределения максимальных значений всех трех составляющих пульсационной скорости u_m' , v_m' , w_m' поперек трубы, показанные на рис. 155 а и б (широ-

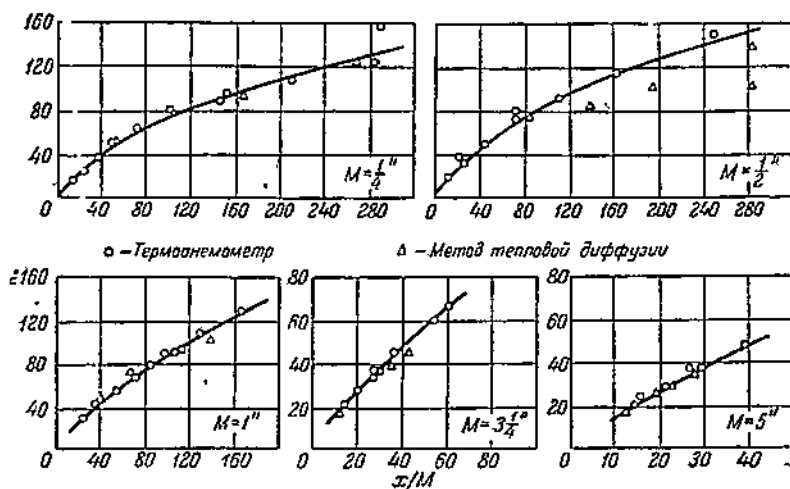


Рис. 152.

хотая и гладкая стенка). Вблизи оси все три составляющие имеют примерно одинаковое значение. По мере приближения к стенкам пульсации сначала воз-

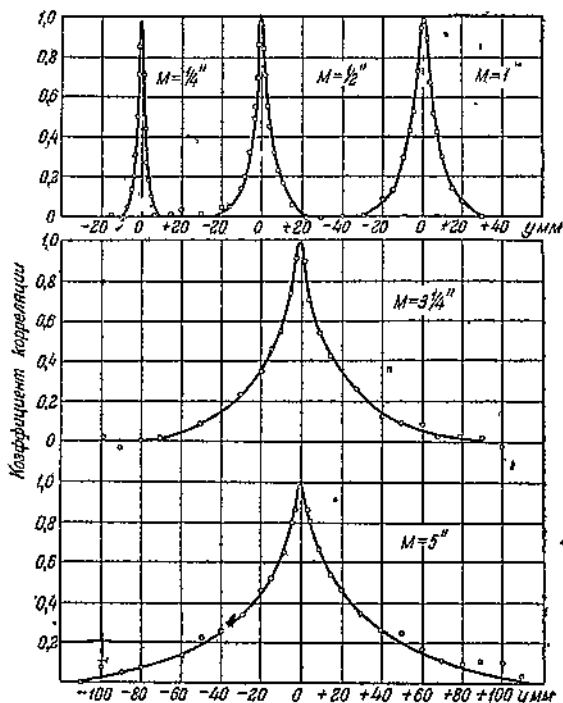


Рис. 153.

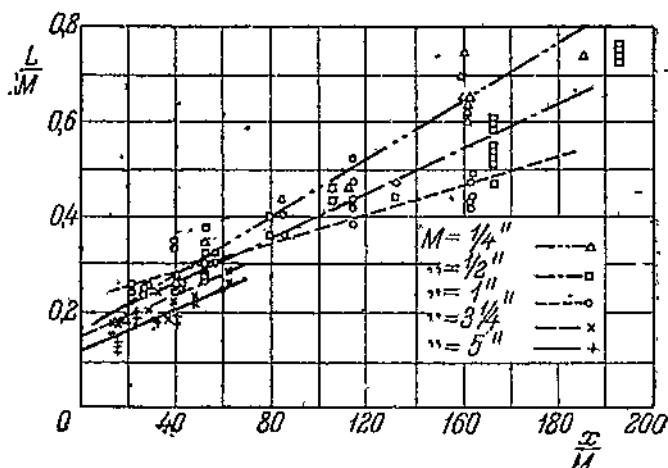


Рис. 154.

растают, затем u_m' и v_m' падают. Опыты проводились при очень малых числах Рейнольдса ($U_0 m / \nu \approx 8500$, где m — гидравлический радиус, U_0 — скорость на оси потока). Далее Фейджем установлена независимость интенсивности

турбулентности от скорости потока. Впоследствии Таунендом¹⁾ подтверждены выводы Фейджа, для потока воздуха в трубе квадратного сечения. Таунендом установлено весьма важное экспериментальное соотношение, показывающее, что среднее квадратичное значение пульсационной скорости приблизительно в три раза меньше максимального. Этим условием обычно пользуются для определения средних квадратичных, на основании опытов с ультрамикроскопом. Опыты в круглой трубе дали аналогичные результаты с той лишь разницей, что вблизи оси трубы продольная составляющая пульсационной скорости оказалась больше двух других²⁾.

Величина коэффициента корреляции между продольной и поперечной составляющей может быть вычислена, как отношение турбулентного трения (определяемого по перепаду давления) к произведению средних квадратичных значений продольной и поперечной составляющих пульсационной скорости.

Такие расчеты были проведены Карманом³⁾ на основании опытов Рейхардта и Ваттендорфа в плоских трубах, однако вместо произведения средних квадратичных значений обеих проекций в знаменатель подставлялся квадрат среднего квадратичного значения продольной составляющей. Результаты приведены на рис. 156, показывающем постоянство коэффициента корреляции почти по всему сечению трубы, за исключением областей, близких к оси и стенкам трубы. Для сравнения на том же графике приведены точные измерения коэффициента корреляции

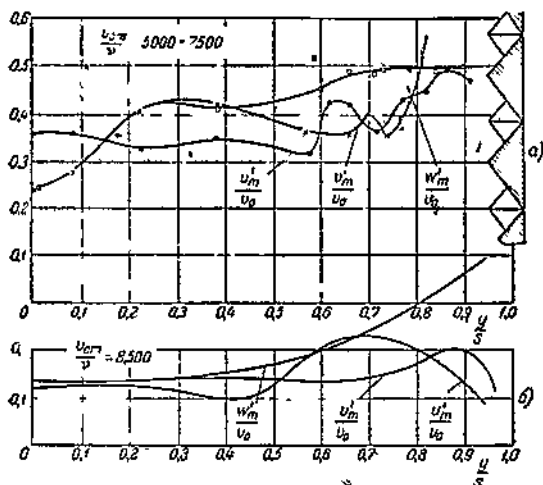


Рис. 155.

ции, сделанные Рейхардтом⁴⁾ с помощью термоанемометра. Полученные им значения оказались несколько выше вычисленных ранее, что объясняется установленным им превышением продольных пульсаций над поперечными.

Интересные сведения о корреляции между продольными составляющими пульсационной скорости в различных точках круглой трубы опубликованы Тэйлором⁵⁾. С помощью электродинмометра производились измерения коэффициентов корреляции между скоростями на оси, в трубе и в различных точках поперечного сечения. Полученная экспериментальная кривая приведена на рис. 157. Коэффициент корреляции, равный единице на оси, резко убывает по мере приближения к стенке, принимая малые отрицательные значения примерно на половине радиуса трубы. Отрицательные значения коэффициента корреляции вполне естественны. Легко доказать, из соображения неразрывности, равенство нулю интеграла $\int_0^a R \sqrt{u'^2} \cdot r \cdot dr$, где a — радиус трубы, R —

¹⁾ H. Townsend. loc. cit.

²⁾ A. Fage Turbulent Flow in Circular Pipe. Phil. Mag. № 138. 1936.

³⁾ T. v. Kármán. Turbulence and Skin Friction. Journ. Aero. Sc. v. 1. № 1 1934.

⁴⁾ Reichardt. Messungen turbulenter Schwankungen. Die Naturwissenschaften H. 24/25. 1938.

⁵⁾ G. Taylor. Proc. Roy. Soc. A. 157, № 892 (1936).

коэффициент корреляции между скоростями на оси трубы и в точке, лежащей на расстоянии r от оси, $\sqrt{\overline{u'^2}}$ — среднее квадратичное значение скорости в этой точке. Так как все величины, кроме R существенно положительны, необходимо, чтобы R принимало где-то и отрицательные значения.

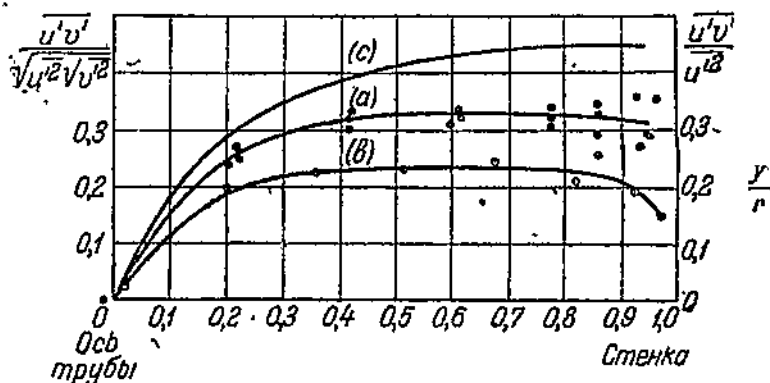


Рис. 156.

а) Ваттендорф $\frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}}$. б) Рейхардт $\frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}}$. в) Рейхардт $\frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}}$

Некоторые сведения имеются также относительно влияния формы поперечного сечения и состояния стенок канала на структуру турбулентного течения. Так опытами Фейджа¹⁾, результаты которых приведены на рис. 155а, показано возрастание пульсаций, вызываемое искусственной шероховатостью стенок трубы, по сравнению с гладкой стенкой (рис. 155б). При этом распределение пульсационных скоростей по поперечному сечению выравнивается. Эти результаты подтверждаются и опытами Финдмана²⁾.

Расширение канала (диффузор) резко деформирует профиль пульсационных скоростей. По мере продвижения вдоль диффузора, максимальное значение пульсаций передвигается от стенки к оси трубы. На рис. 158 приведены результаты последних опытов Е. М. Минского, измерявшего пульсации с помощью термоанемометра в коническом диффузоре (с углом раствора $\alpha = 2^\circ$), установленном после длинного начального участка диаметром в 24 см. Число Рейнольдса отнесенное к максимальной скорости и радиусу начального сечения равнялось приблизительно $2 \cdot 10^5$. Кривая, отмеченная цифрой 1 представляет распределение пульсаций поперек сечения расположен-

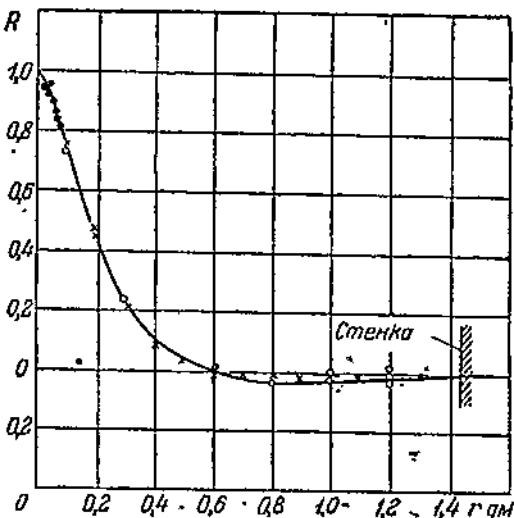


Рис. 157.

¹⁾ A. Fage. Fluid Flow in Rough Pipes. A. R. C. Rep. a. Mem. № 1585, 1934.

²⁾ Е. М. Минский и Б. А. Фидман. loc. cit.

ного в конце начального участка. Кривые отмеченные цифрами 2, 3, 4, 5, 6 и 7 представляют распределение пульсаций поперек сечений, расположенных соответственно на расстояниях 100, 200, 280, 320, 360, и 400 см от конца начального участка.

Все кривые отнесены к значению пульсационной скорости на оси соответствующего сечения. Для сравнения, на графике пунктиром показано распределение пульсационных скоростей, полученное в круглой трубе диаметром 24 см.

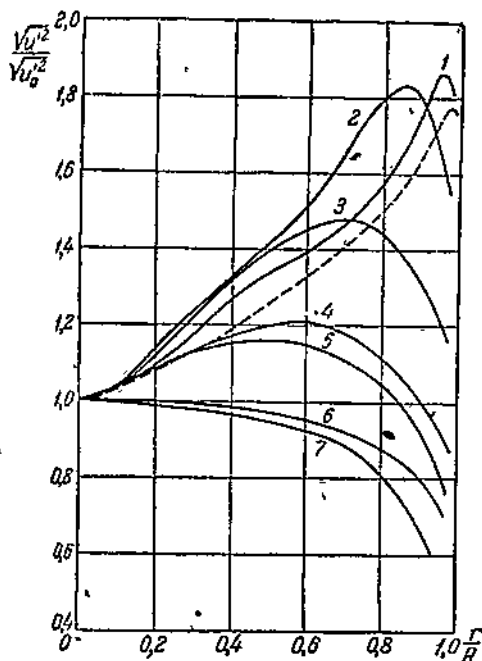


Рис. 158.

Отметим что нормальный диффузорный профиль средних скоростей устанавливается, начиная с сечения № 3.

Влияние конфузора исследовалось Фейджем¹⁾, установив-

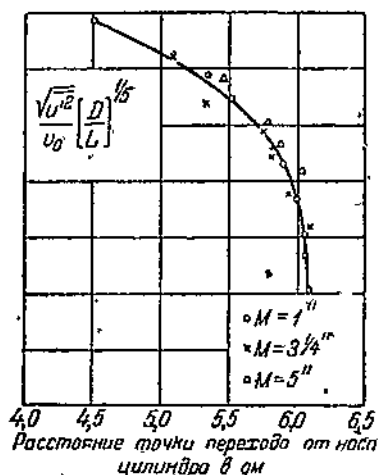


Рис. 159.

шим, что сужение потока снижает турбулентность, причем поперечные составляющие уменьшаются в большей степени, нежели продольная.

В заключение несколько слов о турбулентности в пограничном слое. Выше указывалась разница между характером пульсаций в ламинарном и турбулентном слоях и в особенности в переходной области. В последнее время это обстоятельство используется для определения точки перехода и в частности для изучения влияния турбулентности набегающего потока, на переходную область. На рис. 159 приводим зависимость положения точки перехода на эллиптическом цилиндре от турбулентности набегающего потока по опытам Драйдена²⁾; на рис. 71 ранее были приведены данные для крыла установившегося под различными углами атаки по опытам Минского³⁾.

Оба графика показывают сильный сдвиг области перехода вперед с ростом турбулентности набегающего потока, в полном соответствии с тем, что говорилось ранее.

¹⁾ A. Fage. Effect of Contraction on the Turbulence in a Fluid Stream, A. R. C. R. a. M. № 1584 (1934).

²⁾ H. Dryden. Journ. Aeron. Sc. v. 6, № 3 (1939).

³⁾ Е. М. Минский. Труды ЦАГИ вып. 415 (1939).

ТАБЛИЦА I

η	f_1	f_1'	f_1''	f_3	f_3'	f_3''
0,0	0,0000	0,0000	1,23264	0,000	0,000	0,7246
0,1	0,0060	0,1183	1,1328	0,004	0,068	0,625
0,2	0,0233	0,2266	1,0345	0,013	0,125	0,529
0,3	0,0510	0,3252	0,9386	0,028	0,174	0,438
0,4	0,0881	0,4144	0,8463	0,048	0,213	0,354
0,5	0,1336	0,4946	0,7583	0,071	0,245	0,278
0,6	0,1867	0,5662	0,6751	0,096	0,269	0,211
0,7	0,2466	0,6298	0,5973	0,124	0,287	0,153
0,8	0,3124	0,6859	0,5251	0,154	0,300	0,104
0,9	0,3835	0,7350	0,4586	0,184	0,308	0,063
1,0	0,4592	0,7778	0,3980	0,215	0,313	0,029
1,1	0,5389	0,8149	0,3431	0,246	0,314	+0,003
1,2	0,6220	0,8467	0,2937	0,277	0,313	—0,017
1,3	0,7081	0,8739	0,2498	0,309	0,311	—0,031
1,4	0,7966	0,8968	0,2109	0,340	0,307	—0,041
1,5	0,8873	0,9161	0,1769	0,370	0,302	—0,048
1,6	0,9798	0,9324	0,1473	0,400	0,298	—0,051
1,7	1,0738	0,9457	0,1218	0,429	0,293	—0,052
1,8	1,1688	0,9569	0,0999	0,458	0,288	—0,051
1,9	1,2650	0,9659	0,0814	0,487	0,283	—0,048
2,0	1,3619	0,9732	0,0658	0,515	0,278	—0,045
2,1	1,4596	0,9792	0,0528	0,543	0,273	—0,040
2,2	1,5577	0,9841	0,0420	0,570	0,269	—0,036
2,3	1,6563	0,9876	0,0332	0,597	0,266	—0,032
2,4	1,7552	0,9905	0,0260	0,623	0,263	—0,028
2,5	1,8543	0,9928	0,0202	0,649	0,259	—0,023
2,6	1,9537	0,9946	0,0156	0,676	0,258	—0,020
2,7	2,0533	0,9960	0,0119	0,701	0,257	—0,017
2,8	2,1529	0,9971	0,0091	0,726	0,256	—0,013
2,9	2,2528	0,9979	0,0068	0,751	0,254	—0,011
3,0	2,3525	0,9985	0,0051	0,777	0,253	—0,010
3,1	2,4523	0,9988	0,0036	0,802	0,252	—0,008
3,2	2,5522	0,9992	0,0027	0,828	0,251	—0,007
3,3	2,6521	0,9994	0,0023	0,853	0,251	—0,005
3,4	2,7521	0,9996	0,0019	0,879	0,251	—0,004
3,5	2,8520	0,9997	0,0014	0,904	0,250	—0,003
3,6	2,9520	0,9998	0,0010	0,929	0,250	—0,002
3,7	3,0519	0,9999	0,0008	0,954	0,250	—0,002
3,8	3,1518	0,9999	0,0004	0,979	0,250	—0,001
3,9	3,2518	0,9999	0,0003	1,004	0,250	—0,001
4,0	3,3518	1,0000	0,0002	1,029	0,250	—0,001
4,1	3,4518	1,0000	0,0001	1,054	0,250	0,000
4,2	3,5518	1,0000	0,0001	1,079	0,250	0,000
4,3	3,6518	1,0000	0,0000	1,104	0,250	0,000

η	g_6	g_6'	g_6''	h_5	h_5'	h_5''	k_7	k_7'	k_7''
0,0	0,00	0,00	0,637	0,00	0,00	0,12	0,00	0,00	0,012
0,1	0,00	0,06	0,54	0,00	0,01	0,07	0,00	0,00	0,01
0,2	0,01	0,11	0,44	0,00	0,01	+0,03	0,00	0,00	0,02
0,3	0,03	0,15	0,35	0,00	0,02	-0,01	0,00	0,00	0,02
0,4	0,04	0,18	0,27	0,01	0,01	-0,04	0,00	0,01	0,02
0,5	0,06	0,20	0,20	0,01	0,01	-0,07	0,00	0,01	0,03
0,6	0,08	0,22	0,14	0,01	+0,00	-0,08	0,00	0,01	0,04
0,7	0,10	0,23	0,09	0,01	-0,01	-0,08	0,00	0,01	0,05
0,8	0,13	0,24	0,05	0,00	-0,02	-0,08	0,00	0,01	0,05
0,9	0,15	0,24	+0,02	0,00	-0,03	-0,08	0,00	0,02	0,05
1,0	0,17	0,24	-0,01	0,00	-0,03	-0,07	0,01	0,02	0,05
1,1	0,20	0,24	-0,03	-0,01	-0,04	-0,06	0,01	0,03	0,05
1,2	0,22	0,24	-0,04	-0,01	-0,05	-0,04	0,01	0,03	0,04
1,3	0,25	0,23	-0,05	-0,02	-0,05	-0,03	0,01	0,04	0,03
1,4	0,27	0,23	-0,06	-0,02	-0,05	-0,02	0,02	0,04	0,02
1,5	0,29	0,22	-0,06	-0,03	-0,05	-0,01	0,02	0,05	0,02
1,6	0,31	0,21	-0,07	-0,03	-0,05	0,00	0,02	0,05	0,01
1,7	0,34	0,21	-0,06	-0,04	-0,05	+0,01	0,03	0,05	0,01
1,8	0,36	0,20	-0,06	-0,04	-0,05	0,02	0,03	0,05	+0,01
1,9	0,38	0,19	-0,06	-0,05	-0,04	0,02	0,04	0,05	0,00
2,0	0,39	0,19	-0,06	-0,05	-0,04	0,03	0,04	0,05	0,00
2,1	0,41	0,19	-0,05	-0,05	-0,04	0,03	0,05	0,05	-0,01
2,2	0,43	0,18	-0,04	-0,05	-0,03	0,03	0,05	0,04	-0,02
2,3	0,45	0,18	-0,04	-0,05	-0,03	0,02	0,06	0,04	-0,03
2,4	0,46	0,18	-0,03	-0,05	-0,03	0,02	0,07	0,04	-0,04
2,5	0,48	0,18	-0,03	-0,05	-0,02	0,02	0,08	0,03	-0,04
2,6	0,49	0,18	-0,02	-0,05	-0,02	0,02	0,09	0,02	-0,03
2,7	0,51	0,18	-0,01	-0,05	-0,01	0,01	0,09	0,01	-0,02
2,8	0,53	0,17	-0,01	-0,05	0,00	0,01	0,09	0,00	-0,01
2,9	0,54	0,17	-0,00	-0,05	0,00	0,00	0,09	0,00	-0,01
3,0	0,56	0,17	-0,00	-0,05	0,00	0,00	0,09	0,00	0,00
3,1	0,58	0,17	-0,00	-0,05	0,00	0,00	0,09	0,00	0,00

ТАБЛИЦА II

η	f_1	f_1'	f_1''	f_2	f_2'	f_2''
0,0	0,0000	0,0000	1,23264	0,000	0,000	0,7982
0,1	0,0060	0,1183	1,1328	0,004	0,075	0,699
0,2	0,0233	0,2266	1,0345	0,015	0,140	0,602
0,3	0,0510	0,3252	0,9386	0,032	0,195	0,509
0,4	0,0881	0,4144	0,8463	0,054	0,242	0,423
0,5	0,1336	0,4946	0,7583	0,080	0,280	0,344
0,6	0,1867	0,5662	0,6751	0,109	0,311	0,273
0,7	0,2466	0,6298	0,5973	0,142	0,336	0,210
0,8	0,3124	0,6859	0,5251	0,175	0,353	0,156
0,9	0,3835	0,7350	0,4586	0,212	0,367	0,109
1,0	0,4592	0,7778	0,3980	0,249	0,375	0,070
1,1	0,5389	0,8149	0,3431	0,287	0,381	0,037
1,2	0,6220	0,8467	0,2937	0,325	0,384	+0,012
1,3	0,7081	0,8739	0,2498	0,363	0,384	-0,007
1,4	0,7966	0,8968	0,2109	0,402	0,382	-0,021
1,5	0,8873	0,9161	0,1769	0,440	0,380	-0,032
1,6	0,9798	0,9324	0,1473	0,477	0,377	-0,039
1,7	1,0738	0,9457	0,1218	0,515	0,373	-0,042
1,8	1,1688	0,9569	0,0999	0,552	0,368	-0,043
1,9	1,2650	0,9659	0,0814	0,588	0,364	-0,043
2,0	1,3619	0,9732	0,0658	0,625	0,361	-0,041
2,1	1,4596	0,9792	0,0528	0,661	0,357	-0,038
2,2	1,5577	0,9841	0,0420	0,696	0,353	-0,034
2,3	1,6563	0,9876	0,0332	0,731	0,350	-0,030
2,4	1,7552	0,9905	0,0260	0,766	0,346	-0,026
2,5	1,8543	0,9928	0,0202	0,801	0,344	-0,022
2,6	1,9537	0,9946	0,0156	0,835	0,342	-0,019
2,7	2,0533	0,9960	0,0119	0,870	0,340	-0,016
2,8	2,1529	0,9971	0,0091	0,904	0,338	-0,014
2,9	2,2528	0,9979	0,0068	0,938	0,337	-0,011
3,0	2,3525	0,9985	0,0051	0,972	0,336	-0,009
3,1	2,4523	0,9988	0,0036	1,006	0,335	-0,007
3,2	2,5522	0,9992	0,0027	1,040	0,335	-0,006
3,3	2,6521	0,9994	0,0023	1,073	0,335	-0,005
3,4	2,7521	0,9996	0,0019	1,106	0,334	-0,003
3,5	2,8520	0,9997	0,0014	1,139	0,334	-0,003
3,6	2,9520	0,9998	0,0010	1,172	0,334	-0,002
3,7	3,0519	0,9999	0,0008	1,205	0,334	-0,001
3,8	3,1518	0,9999	0,0004	1,238	0,333	-0,001
3,9	3,2518	0,9999	0,0003	1,271	0,333	-0,001
4,0	3,3518	1,0000	0,0002	1,304	0,333	-0,001
4,1	3,4518	1,0000	0,0001	1,337	0,333	0,000
4,2	3,5518	1,0000	0,0001	1,370	0,333	0,000
4,3	3,6518	1,0000	0,0000	1,403	0,333	0,000

η	g_3	g_3'	g_3''	h_3	h_3'	h_3''	k_4	k_4'	k_4''
0,0	0,000	0,000	0,725	0,00	0,00	0,166	0,00	0,00	-0,019
0,1	0,004	0,068	0,625	0,00	0,01	0,12	0,00	0,00	-0,02
0,2	0,013	0,125	0,529	0,00	0,02	0,07	0,00	0,00	-0,02
0,3	0,028	0,174	0,438	0,01	0,03	+0,03	0,00	-0,01	-0,01
0,4	0,048	0,213	0,354	0,01	0,03	-0,01	0,00	-0,01	-0,01
0,5	0,071	0,245	0,278	0,01	0,03	-0,04	0,00	-0,01	0,00
0,6	0,096	0,269	0,211	0,01	0,02	-0,05	0,00	-0,01	0,00
0,7	0,124	0,287	0,153	0,02	0,02	-0,07	-0,01	0,00	+0,01
0,8	0,154	0,300	0,104	0,02	+0,01	-0,07	-0,01	0,00	0,02
0,9	0,184	0,308	0,063	0,02	0,00	-0,07	-0,01	0,00	0,03
1,0	0,215	0,313	0,029	0,02	-0,01	+0,07	-0,01	0,00	0,03
1,1	0,246	0,314	+0,003	0,02	-0,01	-0,06	-0,01	0,00	0,04
1,2	0,277	0,313	-0,017	0,01	-0,02	-0,05	-0,01	+0,01	0,04
1,3	0,309	0,311	-0,031	0,01	-0,02	-0,04	0,00	0,01	0,04
1,4	0,340	0,307	-0,041	0,01	-0,03	-0,03	0,00	0,01	0,04
1,5	0,370	0,302	-0,048	+0,01	-0,03	-0,02	0,00	0,02	0,03
1,6	0,400	0,298	-0,051	0,00	-0,03	0,00	0,00	0,02	0,03
1,7	0,429	0,293	-0,052	0,00	-0,03	0,00	0,00	0,02	0,02
1,8	0,458	0,288	-0,051	0,00	-0,03	+0,01	+0,01	0,03	0,01
1,9	0,487	0,283	-0,048	-0,00	-0,03	0,02	0,01	0,03	+0,01
2,0	0,515	0,278	-0,045	-0,01	-0,03	0,03	0,01	0,03	0,00
2,1	0,543	0,273	-0,040	-0,01	-0,02	0,03	0,02	0,03	-0,01
2,2	0,570	0,269	-0,036	-0,01	-0,02	0,03	0,02	0,03	-0,01
2,3	0,597	0,266	-0,032	-0,01	-0,02	0,03	0,02	0,02	-0,02
2,4	0,623	0,263	-0,028	-0,01	-0,02	0,04	0,02	0,02	-0,02
2,5	0,649	0,259	-0,023	-0,02	-0,01	0,03	0,03	0,02	-0,03
2,6	0,676	0,258	-0,020	-0,02	-0,01	0,03	0,03	0,02	-0,03
2,7	0,701	0,257	-0,017	-0,02	-0,01	0,02	0,03	0,02	-0,03
2,8	0,726	0,256	-0,013	-0,02	-0,01	0,02	0,03	0,01	-0,02
2,9	0,751	0,254	-0,011	-0,02	0,00	0,02	0,03	0,01	-0,02
3,0	0,777	0,253	-0,010	-0,02	0,00	0,02	0,03	0,00	-0,01
3,1	0,802	0,252	-0,008	-0,02	0,00	0,02	0,03	0,00	0,00
3,2	0,828	0,251	-0,007	-0,02	0,00	0,01	0,03	0,00	0,00
3,3	0,853	0,251	-0,005	-0,02	0,00	0,01	0,03	0,00	0,00
3,4	0,879	0,251	-0,004	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
3,5	0,904	0,250	-0,003	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
3,6	0,929	0,250	-0,002	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
3,7	0,954	0,250	-0,002	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
3,8	0,979	0,250	-0,001	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
3,9	1,004	0,250	-0,001	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
4,0	1,029	0,250	-0,001	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00
4,1	1,054	0,250	0,000	-0,02	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00

ТАБЛИЦА III

η	f_0	f_0'	f_0''	f_1	f_1'	f_1''
0,0	0,00000	0,00000	1,32824	0,00000	0,00000	1,02054
0,1	0,00664	0,13282	1,32795	0,00494	0,09705	0,92054
0,2	0,02656	0,26553	1,32589	0,01908	0,18411	0,82054
0,3	0,05974	0,39788	1,32033	0,04142	0,26116	0,72057
0,4	0,10611	0,52942	1,30957	0,07098	0,32823	0,62073
0,5	0,16557	0,65957	1,29204	0,10674	0,38532	0,52125
0,6	0,23795	0,78756	1,26637	0,14771	0,43250	0,42258
0,7	0,32298	0,91253	1,23147	0,19291	0,46989	0,32545
0,8	0,42032	1,03352	1,18666	0,24137	0,49768	0,23094
0,9	0,52952	1,14953	1,13173	0,29214	0,51621	0,14045
1,0	0,65003	1,25954	1,06701	0,34432	0,52596	0,05565
1,1	0,78120	1,36263	0,99341	0,39706	0,52759	-0,02161
1,2	0,92230	1,45798	0,91237	0,44959	0,52195	-0,08948
1,3	1,07252	1,54492	0,82582	0,50124	0,51006	-0,14633
1,4	1,23099	1,62303	0,73603	0,55143	0,49309	-0,19093
1,5	1,39682	1,69210	0,64544	0,59973	0,47231	-0,22262
1,6	1,56911	1,75218	0,55651	0,64581	0,44900	-0,24145
1,7	1,74696	1,80354	0,47151	0,68949	0,42442	-0,24817
1,8	1,92954	1,84666	0,39234	0,73059	0,39972	-0,24418
1,9	2,11605	1,88224	0,32050	0,76946	0,37588	-0,23138
2,0	2,30576	1,91104	0,25694	0,80592	0,35367	-0,21198
2,1	2,49806	1,93392	0,20208	0,84027	0,33363	-0,18827
2,2	2,69238	1,95174	0,15589	0,87273	0,31608	-0,16240
2,3	2,88826	1,96537	0,11793	0,90357	0,30116	-0,13625
2,4	3,08534	1,97558	0,08748	0,93305	0,28879	-0,11130
2,5	3,28329	1,98309	0,06363	0,96141	0,27882	-0,08861
2,6	3,48189	1,98849	0,04537	0,98889	0,27098	-0,06879
2,7	3,68094	1,99231	0,03171	1,01566	0,26496	-0,05212
2,8	3,88031	1,99496	0,02173	1,04192	0,26045	-0,03855
2,9	4,07990	1,99675	0,01459	1,06779	0,25715	-0,02785
3,0	4,27964	1,99795	0,00961	1,09338	0,25480	-0,01965
3,1	4,47948	1,99873	0,00620	1,11878	0,25315	-0,01356
3,2	4,67938	1,99922	0,00392	1,14403	0,25203	-0,00914
3,3	4,87931	1,99944	0,00243	1,16919	0,25128	-0,00603
3,4	5,07928	1,99973	0,00148	1,19430	0,25079	-0,00389
3,5	5,27926	1,99984	0,00088	1,21936	0,25048	-0,00245
3,6	5,47925	1,99991	0,00051	1,24440	0,25029	-0,00151
3,7	5,67924	1,99995	0,00029	1,26942	0,25017	-0,00091
3,8	5,87924	1,99997	0,00017	1,29443	0,25010	-0,00054
3,9	6,07923	1,99999	0,00009	1,31944	0,25005	-0,00031
4,0	6,27923	1,99999	0,00005	1,34444	0,25003	-0,00018
4,1	6,47923	2,00000	0,00003	1,36944	0,25002	-0,00010
4,2	6,67923	2,00000	0,00001	1,39444	0,25001	-0,00005
4,3	6,87923	2,00000	0,00001	1,41944	0,25000	-0,00003
4,4	7,07923	2,00000	0,00000	1,44445	0,25000	-0,00002

η	f_2	f_2'	f_2''	f_3	f_3'	f_3''
0,0	0,0000	0,0000	-0,0693	0,0000	0,0000	0,0560
0,1	-0,0004	-0,0075	-0,0816	0,0003	0,0056	0,0560
0,2	-0,0015	-0,0163	-0,0932	0,0011	0,0112	0,0560
0,3	-0,0037	-0,0261	-0,1031	0,0025	0,0168	0,0559
0,4	-0,0068	-0,0368	-0,1108	0,0045	0,0224	0,0556
0,5	-0,0111	-0,0482	-0,1156	0,0070	0,0279	0,0551
0,6	-0,0165	-0,0599	-0,1170	0,0101	0,0334	0,0541
0,7	-0,0230	-0,0715	-0,1144	0,0137	0,0387	0,0524
0,8	-0,0307	-0,0826	-0,1077	0,0178	0,0438	0,0499
0,9	-0,0395	-0,0928	-0,0965	0,0224	0,0486	0,0463
1,0	-0,0493	-0,1018	-0,0812	0,0275	0,0530	0,0414
1,1	-0,0598	-0,1089	-0,0620	0,0330	0,0569	0,0352
1,2	-0,0710	-0,1141	-0,0397	0,0388	0,0600	0,0275
1,3	-0,0825	-0,1168	-0,0152	0,0450	0,0623	0,0185
1,4	-0,0943	-0,1171	0,0100	0,0513	0,0637	0,0082
1,5	-0,1059	-0,1148	0,0346	0,0577	0,0639	-0,0028
1,6	-0,1171	-0,1102	0,0571	0,0640	0,0631	-0,0142
1,7	-0,1278	-0,1035	0,0762	0,0702	0,0611	-0,0252
1,8	-0,1378	-0,0951	0,0908	0,0762	0,0581	-0,0352
1,9	-0,1468	-0,0855	0,1005	0,0818	0,0541	-0,0437
2,0	-0,1549	-0,0752	0,1049	0,0870	0,0494	-0,0500
2,1	-0,1619	-0,0647	0,1046	0,0917	0,0442	-0,0540
2,2	-0,1678	-0,0544	0,1000	0,0958	0,0387	-0,0555
2,3	-0,1728	-0,0448	0,0922	0,0994	0,0332	-0,0547
2,4	-0,1768	-0,0361	0,0822	0,1025	0,0278	-0,0519
2,5	-0,1800	-0,0284	0,0710	0,1050	0,0228	-0,0476
2,6	-0,1825	-0,0219	0,0595	0,1071	0,0183	-0,0422
2,7	-0,1844	-0,0165	0,0484	0,1087	0,0144	-0,0363
2,8	-0,1859	-0,0122	0,0384	0,1100	0,0111	-0,0304
2,9	-0,1869	-0,0088	0,0296	0,1109	0,0083	-0,0247
3,0	-0,1876	-0,0062	0,0222	0,1107	0,0061	-0,0195
3,1	-0,1882	-0,0048	0,0163	0,1122	0,0044	-0,0150
3,2	-0,1885	-0,0029	0,0116	0,1126	0,0031	-0,0112
3,3	-0,1888	-0,0019	0,0081	0,1128	0,0021	-0,0082
3,4	-0,1889	-0,0012	0,0055	0,1130	0,0014	-0,0059
3,5	-0,1890	-0,0003	0,0037	0,1131	0,0010	-0,0041
3,6	-0,1891	-0,0005	0,0024	0,1132	0,0006	-0,0028
3,7	-0,1891	-0,0003	0,0015	0,1132	0,0004	-0,0018
3,8	-0,1891	-0,0002	0,0009	0,1133	0,0002	-0,0012
3,9	-0,1891	-0,0001	0,0006	0,1133	0,0001	-0,0007
4,0	-0,1892	-0,0001	0,0003	0,1133	0,0001	-0,0005
4,1	-0,1892	-0,0000	0,0002	0,1133	0,0001	-0,0003
4,2	-0,1892	-0,0000	0,0001	0,1133	0,0000	-0,0002
4,3	-0,1892	-0,0000	0,0001	0,1133	0,0000	-0,0001
4,4	-0,1892	-0,0000	0,0000	0,1133	0,0000	-0,0001

η	f_4	f_4'	f_4''	f_5	f_5'	f_5''
0,0	0,0000	0,0000	-0,0372	0,0000	0,0000	0,0272
0,1	-0,0002	-0,0037	-0,0372	0,0001	0,0027	0,0272
0,2	-0,0007	-0,0074	-0,0371	0,0005	0,0054	0,0272
0,3	-0,0017	-0,0111	-0,0369	0,0012	0,0082	0,0270
0,4	-0,0030	-0,0148	-0,0365	0,0022	0,0109	0,0267
0,5	-0,0046	-0,0184	-0,0358	0,0034	0,0135	0,0262
0,6	-0,0067	-0,0220	-0,0348	0,0049	0,0162	0,0254
0,7	-0,0090	-0,0254	-0,0334	0,0067	0,0187	0,0243
0,8	-0,0117	-0,0286	-0,0314	0,0087	0,0210	0,0228
0,9	-0,0147	-0,0316	-0,0289	0,0109	0,0232	0,0210
1,0	-0,0180	-0,0344	-0,0258	0,0133	0,0251	0,0186
1,1	-0,0216	-0,0368	-0,0220	0,0160	0,0268	0,0159
1,2	-0,0254	-0,0388	-0,0175	0,0187	0,0282	0,0127
1,3	-0,0293	-0,0403	-0,0124	0,0216	0,0293	0,0090
1,4	-0,0334	-0,0412	-0,0066	0,0245	0,0300	0,0049
1,5	-0,0376	-0,0416	-0,0004	0,0276	0,0303	0,0006
1,6	-0,0417	-0,0413	0,0060	0,0307	0,0301	-0,0038
1,7	-0,0458	-0,0404	0,0125	0,0336	0,0295	-0,0083
1,8	-0,0498	-0,0388	0,0186	0,0365	0,0285	-0,0125
1,9	-0,0535	-0,0367	0,0241	0,0394	0,0271	-0,0163
2,0	-0,0571	-0,0340	0,0286	0,0420	0,0253	-0,0195
2,1	-0,0603	-0,0310	0,0319	0,0445	0,0232	-0,0221
2,2	-0,0633	-0,0277	0,0339	0,0466	0,0209	-0,0237
2,3	-0,0659	-0,0243	0,0346	0,0485	0,0185	-0,0244
2,4	-0,0681	-0,0208	0,0339	0,0503	0,0161	-0,0243
2,5	-0,0700	-0,0175	0,0321	0,0518	0,0138	-0,0233
2,6	-0,0716	-0,0144	0,0294	0,0531	0,0115	-0,0217
2,7	-0,0729	-0,0116	0,0262	0,0541	0,0094	-0,0197
2,8	-0,0740	-0,0092	0,0226	0,0549	0,0075	-0,0171
2,9	-0,0748	-0,0071	0,0190	0,0555	0,0059	-0,0147
3,0	-0,0754	-0,0054	0,0155	0,0560	0,0046	-0,0123
3,1	-0,0759	-0,0040	0,0124	0,0564	0,0034	-0,0101
3,2	-0,0762	-0,0029	0,0096	0,0567	0,0025	-0,0080
3,3	-0,0765	-0,0021	0,0073	0,0569	0,0019	-0,0061
3,4	-0,0766	-0,0014	0,0054	0,0571	0,0013	-0,0046
3,5	-0,0767	-0,0010	0,0039	0,0572	0,0009	-0,0034
3,6	-0,0768	-0,0006	0,0027	0,0573	0,0006	-0,0025
3,7	-0,0769	-0,0004	0,0019	0,0573	0,0004	-0,0018
3,8	-0,0769	-0,0003	0,0011	0,0573	0,0003	-0,0012
3,9	-0,0769	-0,0002	0,0008	0,0573	0,0002	-0,0008
4,0	-0,0770	-0,0001	0,0005	0,0573	0,0001	-0,0005
4,1	-0,0770	-0,0001	0,0003			
4,2	-0,0770	-0,0000	0,0002			
4,3	-0,0770	-0,0000	0,0001			
4,4	-0,0770	-0,0000	0,0001			

ТАБЛИЦА V

λ	$f(\lambda)$	$g(\lambda)$	$h(\lambda)$	λ	$f(\lambda)$	$g(\lambda)$	$h(\lambda)$
12,0	∞	∞	∞	3,0	19,40	0,0334	3,30
11,0	-62,20	0,4395	64,18	2,0	24,00	0,0275	2,11
10,0	-27,25	0,2133	31,33	+ 1,0	28,88	0,0225	+ 1,023
9,0	-13,88	0,1375	20,14	0,0	34,05	0,0180	0,000
8,0	-5,80	0,0994	14,36	- 1,0	39,61	0,0140	- 0,986
7,8	-4,46	0,0939	13,51	- 2,0	45,66	0,0102	- 1,96
7,6	-3,20	0,0889	12,73	- 3,0	52,33	0,0065	- 2,94
7,4	-1,99	0,0843	12,02	- 4,0	59,77	+ 0,0029	- 3,95
7,2	-0,831	0,0801	11,35	- 5,0	68,17	- 0,00074	- 5,02
7,052	-0,00	0,0772	10,89	- 6,0	77,31	- 0,0045	- 6,16
6,8	+ 1,37	0,0727	10,16	- 7,0	88,95	- 0,0085	- 7,42
6,6	2,43	0,0693	9,62	- 8,0	102,28	- 0,0131	- 8,84
6,4	3,46	0,0662	9,11	- 9,0	118,36	- 0,0183	- 10,43
6,2	4,47	0,0633	8,63	- 10,0	138,31	- 0,0244	- 12,44
6,0	5,45	0,0606	8,18	- 11,0	163,88	- 0,0319	- 14,51
5,0	10,19	0,0492	6,23	- 12,0	198,00	- 0,0417	- 18,00
4,0	14,76	0,0404	4,65				

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрамович 289, 290, 327.
 Адамс 154, 159.
 Александров 189.
 Алексеева 108.
 Альборн 255.
 Батурин 289.
 Баулин 289.
 Бейль 178, 249.
 Бернулли 76, 155, 207, 213, 253, 349.
 Биклей 118.
 Бикнел 247.
 Блянуз 69, 76, 77, 79, 80, 81, 85, 86, 87, 89, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 103, 104, 105, 106, 108, 111, 114, 118, 119, 122, 134, 135, 141, 151, 154, 156, 157, 159, 160, 163, 168, 174, 178, 204, 205, 301, 302, 303, 308, 343.
 Больцпе 69, 205.
 Большаков 141.
 Бриджмен 50.
 Буземан 49, 56, 103, 104, 105, 106, 107, 111.
 Бури 368, 370, 372, 373.
 Буссиеск 91, 92, 96, 118.
 Вучинский 352, 360.
 Бюргерс 86, 87, 91, 92, 96, 231, 232, 233, 234, 238, 241, 314, 315, 352.
 Бэрстоу 38, 40, 49, 113.
 Вав-дер-Хаеге-Цайнен 87, 231, 238.
 Ватсон 143, 145.
 Ваттендорф 401.
 Вигхарт 246.
 Визельсбергер 255, 308.
 Виллом 151, 216.
 Гаусс 24, 34, 124, 326, 394.
 Геберс 303, 309.
 Гельмгольц 14, 15, 36, 42, 316, 329.
 Гермайн 300.
 Гласс 381.
 Голубев 158, 190.
 Гольдштейн 119, 120, 319, 326, 326, 328, 334, 367, 395, 397.
 Горошенко 228, 314, 347, 381.
 Гран Ольсон 326.
 Грушини 353, 372, 373, 374.
 Гурженко 362, 365, 366, 379.
 Гухман 41, 47.
 Даламбер 28, 300.
 Данилевский 141, 146.
 Дарси 231, 296.
 Дель-Нунцио 235.
 Денхоф 247.
 Джонс 248.
 Дбих 373, 377.
 Драйден 50, 235, 236, 241, 243, 244, 245, 250, 262, 265, 361, 389, 397, 402.
 Дюранд 231.
 Жуковский 7, 242, 351.
 Захаров 388, 389, 391.
 Иванов 289.
 Писков 36.
 Калихман 134, 351, 352, 379, 381.
 Карман 56, 69, 70, 73, 74, 83, 84, 87, 88, 91, 93, 94, 95, 97, 106, 107, 108, 109, 111, 116, 117, 118, 119, 134, 140, 158, 171, 177, 191, 195, 196, 201, 203, 205, 207, 214, 219, 226, 228, 293, 302, 306, 308, 310, 314, 315, 318, 328, 329, 332, 333, 334, 335, 336, 345, 364, 376, 385, 386, 387.
 Келлер 275, 382, 383.
 Кельзон 163.
 Кемпф 221, 310, 336.
 Кент—111, 112.
 Кибель 44, 50, 52, 112.
 Кинг 91, 338.
 Кирхгоф 7.
 Кладейрон 33, 38.
 Клейн 257, 258.
 Косьюмодемьянский 177, 300, 301.
 Кохран 221.
 Кочин 9, 50, 52.
 Кошляков 214.
 Красильников 254, 257, 259, 264, 265.
 Кружиклин 117, 118, 254.
 Куммер 144.
 Купо 352.
 Купер 245, 381.
 Кызов 250, 262, 265, 287, 361, 389.
 Лаплас 141.
 Левн Чингта 7, 134.

Лейбензон 189.

Лидзвол 395.

Лойцманский 134, 141, 142, 188,
213, 235, 250, 266, 333, 340,
347, 386.Ляйон 187, 189, 205, 208, 212,
252.

Лямз 18.

Ляховский 289, 290.

Лурье 141.

Лэмб 36, 317.

Мельников 176, 376.

Мяес 63, 89, 90, 91, 92, 95,
107, 134, 201, 355, 365.Милликен 89, 91, 93, 94, 95, 97,
103, 134, 158, 191, 195, 196,
201, 203, 204, 205, 210, 214,
257, 258, 355, 365.

Миллионщиков 386, 397.

Минский 246, 387, 388, 389,
391, 396, 401, 402.

Мок 285, 397.

Морган 245, 381.

Мур 363, 365, 366.

Мюллер 349, 369.

Навье 32, 52, 58, 61, 129, 135, 218.

Никурдазе 187, 275, 294, 296,
299, 300, 301, 328, 332, 337,
341, 342, 344, 370, 373, 377.

Нуссальт 266, 300.

Ньютон 30, 35.

Овсен 44, 46, 55, 95, 98, 117,
120, 135, 142, 213, 317.

Омбек 300.

Оуэр 361.

Пашковский 381.

Петров 231, 239, 319.

Пирси 117.

Пито 87.

Польгаузен 69, 70, 83, 85, 87,
88, 97, 102, 107, 115, 118, 124,
140, 170, 172, 173, 174, 175,
176, 177, 180, 181, 183, 184,
187, 188, 189, 191, 192, 203,
204, 208, 209, 211, 252, 353,
374.Пранцль 7, 26, 38, 39, 55, 57,
58, 61, 62, 65, 67, 68, 69, 72,
73, 75, 80, 82, 85, 89, 91, 113,
115, 116, 117, 119, 120, 121,
152, 155, 181, 187, 189, 230,
250, 256, 263, 273, 279, 280,286, 288, 291, 292, 296, 297,
301, 303, 309, 310, 314, 315,
322, 325, 327, 328, 331, 332,
333, 340, 344, 358, 374, 376.

Предводителей 289.

Претч 381.

Пуазель 184, 229.

Пэннел 300.

Райт 178, 249.

Рейпольдс 38, 40, 43, 44, 111,
112, 116, 117, 228, 229, 230,
231, 240, 246, 272, 273, 286,
291, 301, 302, 315, 322, 338,
351, 363.

Рейхардт 401.

Рикатти 168.

Ричардсон 274, 275.

Розе 44, 50, 52.

Руден 287.

Салрон 340.

Свалл 326.

Северленд 38, 39.

Серби 245, 381.

Симмонс 361, 391.

Скремстедт 265.

Сремский 118.

Стокс 32, 37, 52, 55, 58, 61,
129, 135, 218.

Струхал 38, 47, 48, 62.

Стэнтон 241, 300.

Сыркин 289, 290.

Сэттон 190.

Таунсенд 257, 261, 395, 398.

Телфер 78, 105, 114.

Тэви 56, 107, 111, 116, 117.

Титленс 68, 238.

Толлмен 62, 72, 120, 122, 238,
281, 287, 288, 319.

Томотика 252.

Торба 363.

Третьяков 216, 267.

Трубинов 326, 394.

Туркус 239.

Тэйлор 246, 248, 263, 317, 322,
323, 325, 327, 331, 333, 384,
385, 386, 391, 394.

Уиттекер 143, 145.

Уиттекер 143, 145.

Фалькнер 322, 324, 325, 351,
370, 378.Федяевский 177, 314, 347, 348,
353, 350, 361, 363, 370, 373,
374, 376, 379, 391.Фейдж 83, 241, 242, 244, 245,
251, 253, 254, 322, 324, 325,
351, 378, 395, 401, 398.

Феррари 390.

Фидман 396.

Филиппов 388, 389, 391.

Флюгель 239, 289.

Фомин 347, 352, 353, 360.

Фортман 235.

Франкл 103, 107, 118.

Франс 257, 260.

Френкель 9.

Фридман 36, 382, 383.

Фруд 48, 50.

Хаген 231.

Хансен 87, 88, 234, 241.

Ханович 314, 348.

Хаттон 361.

Хипсайд 141.

Хизлоп 326.

Хименс 69, 154, 155, 156, 173,
174.

Холл 326.

Хорнер 254, 265.

Хоуэрс 152, 153, 154, 156, 157,
158, 159, 160, 163, 166, 169,
170, 177, 203, 327, 372, 385.

Христианович 103.

Хукер 260.

Циглер 389.

Чапман 7.

Чугунов 395.

Шваб 254, 255, 266, 267.

Шиллер 183, 184, 187, 300,

Шлихтинг 125, 313, 314, 322,
337, 344, 346.

Шмидт 117, 275.

Шибхер 310, 337.

Штейнберг 319.

Шубауэр 169, 175, 176, 189,
204, 265, 327, 394, 397.Шульц-Грюнон — 221, 222, 223,
338.

Якоб 300.

Якоб 300.

Эббот 362.

Эйлер 43, 46, 49.

Эйфель 231, 250.

Элиас 102, 115.

Эрк 300.

Эрмит 144, 145.

Эфрос 141, 146.

