

621315.2/3

K-56

6
102

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

В. И. КОВАЛЕНКОВ

ДБ

**УСТАНОВЛИВАЮЩИЕСЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
ПРОЦЕССЫ
ВДОЛЬ ПРОВОДНЫХ
ЛИНИЙ**

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

627.513
K-56
6
192
АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР
ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ

Д Е П
Генерал-майор В. И. КОВАЛЕНКОВ
Член-корреспондент Академии Наук СССР

45728
УСТАНОВЛИВАЮЩИЕСЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ
ПРОЦЕССЫ
ВДОЛЬ ПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

89,96,08

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва

1945

Ленинград

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского Совета АН СССР за № 2017*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Проблема устанавливающихся электромагнитных процессов вдоль проводных линий связи является одной из труднейших в электротехнике. Так называемые „телеграфные уравнения“ составлены Вильямом Томпсоном еще в середине прошлого столетия. Однако математические трудности, связанные с решением этих уравнений, являющихся основой поставленной проблемы, настолько велики, что наиболее важная и актуальная для практиков задача — линия с электромагнитным приемником на конце — до настоящего времени не решена. Общие математические решения даны лишь для частных случаев, из которых укажем на линию с концом, замкнутым накоротко или изолированным. Но и эти частные случаи недостаточно иллюстрированы соответствующими примерами, графиками и таблицами.

В настоящем труде задача доведена до конца, причем указанный общий случай — линия с электромагнитным приемником на конце — решена приближенным методом. Полученные приближенные решения, как показывают анализ и эксперимент, настолько близки к точным, что могут быть положены в основу инженерных решений.

Произведенный в настоящем труде подробный математический и физический анализ „телеграфных уравнений“ особенно важен при решении обобщенной системы уравнений, связывающих работу n -параллельных проводов. Для ряда случаев, имеющих практический интерес, решение обобщенной системы уравнений может быть сведено к решению ряда систем телеграфных уравнений, соответствующих каждой какой-то определенной одиночной линии со свойственными ей первичными параметрами. Эти решения будут даны в следующем труде автора, подготовляемом к печати.

В заключение автор приносит благодарность директору Ленинградского отделения Издательства Академии Наук СССР И. Е. Тыслеру и директору типографии „Печатный Двор“ Я. В. Нестерову за оказанную помощь по напечатанию настоящего труда, а также своему сотруднику Р. И. Юргенсону за труд по просмотру корректур.

АНАЛИЗ УСТАНОВЛИВАЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВДОЛЬ КАБЕЛЯ

Глава I

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ПРОВОДНОЙ ЛИНИИ С УЧЕТОМ ВСЕХ ПАРАМЕТРОВ ПОСЛЕДНЕЙ

§ 1. Общие решения для установившихся и переходных процессов

Уравнения, которым подчиняются законы распространения электромагнитных волн вдоль проводных линий, носят название „телеграфных“ уравнений и имеют, как известно, следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Представим искомые функции u и i как суммы соответственно двух функций

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \\ i &= i_1 + i_2, \end{aligned} \quad (1)$$

причем функции u_1 и i_1 представляют собой установившиеся значения электромагнитных процессов вдоль линии, u и i — полные устанавливающиеся, u_2 и i_2 — переходные процессы.

Очевидно, что функции u_1 и i_1 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= Ri_1, \\ \frac{di_1}{dx} &= Gu_1, \end{aligned} \quad (2)$$

и функции u_2 -и l_2 — полной системе-телеграфных уравнений

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u_2}{\partial x} &= Rl_2 + L \frac{\partial l_2}{\partial t}, \\ -\frac{\partial l_2}{\partial x} &= Gu_2 + C \frac{\partial u_2}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3)$$

Общие решения уравнений (2), как известно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}u_1 &= \varphi(x) = A_1 e^{-\beta x} + A_2 e^{\beta x}, \\ l_1 &= \Psi(x) = \frac{1}{Z_y} (A_1 e^{-\beta x} - A_2 e^{\beta x}),\end{aligned}$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования,

$$\beta = \sqrt{RG} \quad \text{и} \quad Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}.$$

Уравнения (3) легко сводятся к следующим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial u_2}{\partial t} - RG u_2 &= 0, \\ \frac{\partial^2 l_2}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 l_2}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial l_2}{\partial t} - RG l_2 &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Каковы бы ни были пограничные и временные условия функций u_2 и l_2 , они могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}u_2 &= u_3 s_1, \\ l_2 &= l_3 s_2,\end{aligned}$$

где u_3 и l_3 — функции как от x , так и от t , и s_1, s_2 — функции только от t . Функции s_1 и s_2 подберем таким образом, чтобы члены, содержащиеся в уравнениях (4) первые производные u_2 и l_2 по t , пропали.

Произведя соответствующую подстановку, находим

$$\begin{aligned}2LC \frac{ds_1}{dt} + (RC + LG) s_1 &= 0, \\ s_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - s_1 LC \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left[(RC + LG) \frac{ds_1}{dt} + LC \frac{d^2 s_1}{dt^2} + RG \right] u_3 &= 0, \\ 2LC \frac{ds_2}{dt} + (RC + LG) s_2 &= 0, \\ s_2 \frac{\partial^2 l_3}{\partial x^2} - s_2 LC \frac{\partial^2 l_3}{\partial t^2} - \left[(RC + LG) \frac{ds_2}{dt} + LC \frac{d^2 s_2}{dt^2} + RG \right] l_3 &= 0.\end{aligned}$$

Мы видим, что

$$s_1 = s_2 = s = e^{-bt},$$

где

$$b = \frac{RC + LG}{2LC}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left[RG - \frac{(RC + LG)^2}{4LC} \right] u_3 &= 0, \\ \frac{\partial^2 l_3}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 l_3}{\partial t^2} - \left[RG - \frac{(RC + LG)^2}{4LC} \right] l_3 &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Представим функции u_2 и l_2 в следующем виде:

$$u_2 = T_1 X_1,$$

$$l_2 = T_2 X_2,$$

причем

$$T_1 = A_1 \sin n_1 t + A_2 \cos n_1 t,$$

$$T_2 = B_1 \sin n_2 t + B_2 \cos n_2 t,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, n_1 и n_2 — постоянные, X_1 и X_2 — функции только от x . Подставляя в уравнения (5), получим

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \left[\frac{(RC + LG)^2}{4LC} + LCn_1^2 - RG \right] X_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} + \left[\frac{(RC + LG)^2}{4LC} + LCn_2^2 - RG \right] X_2 = 0.$$

Обозначим

$$\frac{(RC + LG)^2}{4LC} - RG + LCn_1^2 = m_1^2,$$

$$\frac{(RC + LG)^2}{4LC} - RG + LCn_2^2 = m_2^2.$$

или

$$m_1^2 = \frac{(RC - LG)^2}{4LC} + LCn_1^2,$$

$$m_2^2 = \frac{(RC - LG)^2}{4LC} + LCn_2^2.$$

Тогда

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + m_1^2 X_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} + m_2^2 X_2 = 0$$

Следовательно,

$$X_1 = C_1 \sin m_1 x + C_2 \cos m_1 x,$$

$$X_2 = D_1 \sin m_2 x + D_2 \cos m_2 x.$$

Таким образом, функции u_2 и l_2 могут быть представлены в следующем виде:

$$u_2 = e^{-bt} \sum T_1 X_1,$$

$$l_2 = e^{-bt} \sum T_2 X_2.$$

§ 2. Анализ общего решения для переходных процессов

Полученные выражения показывают, что функции u_2 и l_2 повторяются соответственно через каждый период времени, равный

$$\frac{2\pi}{n_1} \text{ и } \frac{2\pi}{n_2},$$

и через каждый отрезок длины, равный

$$\frac{2\pi}{m_1} \text{ и } \frac{2\pi}{m_2};$$

а так как вдоль линии мы имеем одни и те же электромагнитные волны, характеризующиеся процессами u_2 и i_2 , то

$$\frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi}{n_2} = \frac{2\pi}{v_k},$$

$$\frac{2\pi}{m_1} = \frac{2\pi}{m_2} = \frac{2\pi}{m_k},$$

причем

$$m_k^2 = \frac{(RC - LG)^2}{4LC} + LCy_k^2.$$

Таким образом;

$$T_1 = A_1 \sin v_k t + A_2 \cos v_k t,$$

$$T_2 = B_1 \sin v_k t + B_2 \cos v_k t,$$

$$X_1 = C_1 \sin m_k x + C_2 \cos m_k x,$$

$$X_2 = D_1 \sin m_k x + D_2 \cos m_k x,$$

$$u_2 = e^{-bt} \sum T_1 X_1,$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum T_2 X_2.$$

Подставляя в уравнения (3), приходим к следующим соотношениям:

$$-\frac{X_1'}{X_2} = \frac{(R - Lb) T_2 + L T_2'}{T_1},$$

$$-\frac{X_2'}{X_1} = \frac{(G - Cb) T_1 + C T_1'}{T_2}.$$

Левые части зависят только от x , а правые только от t , и так как x и t — переменные независимые, то оба полученные уравнения возможны только в том случае, если и левая и правая части каждого из них приводятся к соответствующему постоянному.

Пусть

$$-\frac{X_1'}{X_2} = k_1 = \frac{(R - Lb) T_2 + L T_2'}{T_1} = \text{const},$$

$$-\frac{X_2'}{X_1} = k_2 = \frac{(G - Cb) T_1 + C T_1'}{T_2} = \text{const}.$$

С другой стороны,

$$\frac{X_1'}{X_2} = m \frac{C_1 \cos mx - C_2 \sin mx}{D_1 \sin mx + D_2 \cos mx} = -k_1$$

(опускаем временно значок у m). Отсюда при любом значении переменной x

$$-D_1 k_1 \sin mx - D_2 k_1 \cos mx = m C_1 \cos mx - m C_2 \sin mx,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} D_1 k_1 &= m C_2, \\ D_2 k_1 &= m C_1, \end{aligned} \right| \frac{C_1}{C_2} = -\frac{D_2}{D_1},$$

$$k_1 = m \frac{C_2}{D_1} = -m \frac{C_1}{D_2}.$$

Точно так же

$$\frac{X_2'}{X_1} = m \frac{D_1 \cos mx - D_2 \sin mx}{C_1 \sin mx + C_2 \cos mx} = -k_2,$$

откуда при любом значении x

$$-C_1 k_2 \sin mx - C_2 k_2 \cos mx = D_1 m \cos mx - D_2 m \sin mx,$$

т. е.

$$\begin{cases} C_1 k_2 = D_2 m, \\ -C_2 k_2 = D_1 m, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \end{array} \right| = -\frac{D_2}{D_1},$$

$$k_2 = m \frac{D_2}{C_1} = -m \frac{D_1}{C_2}.$$

Перемножив же постоянные k_1 и k_2 , получим

$$k_1 k_2 = -m^2,$$

следовательно,

$$\frac{X_1' X_2'}{X_2 X_1} = k_1 k_2 = -m^2.$$

Так как

$$X_2 = -\frac{X_1'}{k_1} = \frac{1}{m k} \frac{D_2}{C_1} X_1',$$

то

$$u_2 = e^{-bt} \sum T_1 X_1,$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum \frac{D_2}{C_1} \frac{T_2}{m} X_1'.$$

Обозначим

$$T_1 = T_k = A_1 \sin v_k t + A_2 \cos v_k t,$$

$$\frac{D_2}{C_1} \frac{T_2}{m k} = \mathfrak{T}_k = a_1 \sin v_k t + a_2 \cos v_k t$$

$$X_1 = X_k = C_1 \sin m_k x + C_2 \cos m_k x,$$

причем

$$a_1 = \frac{D_2}{m_k C_1} B_1,$$

$$a_2 = \frac{D_2}{m_k C_1} B_2,$$

тогда

$$u_2 = e^{-bt} \sum T_k X_k,$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum \mathfrak{T}_k X_k',$$

где

$$v_k = \sqrt{\frac{m_k^2}{LC} - \left(\frac{RC - LG}{2LC}\right)^2}.$$

Введем еще обозначение

$$n_k = \sqrt{\left(\frac{RC - LG}{2LC}\right)^2 - \frac{m_k^2}{LC}}.$$

тогда

$$v_k = j n_k,$$

и мы получим

$$T_k = A_1 \sin j n_k t + A_2 \cos j n_k t,$$

$$\mathfrak{T}_k = a_1 \sin j n_k t + a_2 \cos j n_k t,$$

причем

$$\cos j n_k t = \operatorname{ch} n_k t,$$

$$\sin j n_k t = j \operatorname{sh} n_k t.$$

Обозначая в дальнейшем

$$\begin{aligned} jA_1 &= B_k, & A_2 &= A_k, \\ ja_1 &= D_k, & a_2 &= C_k, \\ C_1 &= E_k, & C_2 &= F_k, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} T_k X_k, \\ i_2 &= e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} \mathfrak{T}_k X_k', \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} T_k &= A_k \operatorname{ch} n_k t + B_k \operatorname{sh} n_k t, \\ \mathfrak{T}_k &= C_k \operatorname{ch} n_k t + D_k \operatorname{sh} n_k t, \\ X_k &= E_k \sin m_k x + F_k \cos m_k x, \\ n_k &= \sqrt{\left(\frac{RC-LG}{2LC}\right)^2 - \frac{m_k^2}{LC}}. \end{aligned} \quad (6_1)$$

§ 3. Соотношения между постоянными интегрирования общих решений для переходных процессов и общие решения телеграфных уравнений

Найдем соотношения между постоянными A_k , B_k , C_k и D_k , для чего подставим из (6) значения функций u_2 и i_2 в (3). Получим

$$\begin{aligned} -T_k &= R\mathfrak{T}_k + L(\mathfrak{T}_k' - b\mathfrak{T}_k), \\ -m_k^2 \mathfrak{T}_k &= GT_k + C(T_k' - bT_k), \end{aligned} \quad (a)$$

откуда приходим к следующим весьма важным соотношениям:

$$\frac{(G-bC)T_k + CT_k'}{\mathfrak{T}_k} = m_k^2, \quad (7)$$

$$\frac{(R-bL)\mathfrak{T}_k + L\mathfrak{T}_k'}{T_k} = -1. \quad (8)$$

Подставляя же в (a) значения функций T_k и $\mathfrak{T}_k$, находим

$$\begin{aligned} &-(A_k \operatorname{ch} n_k t + B_k \operatorname{sh} n_k t) = \\ &= [(R-bL)C_k + Ln_k D_k] \operatorname{ch} n_k t + [(R-bL)D_k + Ln_k C_k] \operatorname{sh} n_k t, \\ &m_k^2 C_k \operatorname{ch} n_k t + m_k^2 D_k \operatorname{sh} n_k t = \\ &= [(G-bC)A_k + Cn_k B_k] \operatorname{ch} n_k t + [(G-bC)B_k + Cn_k A_k] \operatorname{sh} n_k t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m_k^2 C_k &= (G-bC)A_k + Cn_k B_k, \\ m_k^2 D_k &= (G-bC)B_k + Cn_k A_k. \end{aligned} \quad (8_1)$$

Таким образом, приходим к следующим общим решениям телеграфных уравнений:

$$u = A_1 e^{-\beta x} + A_2 e^{\beta x} + e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} T_k X_k,$$

$$i = \frac{1}{Z_y} (A_1 e^{-\beta x} - A_2 e^{\beta x}) + e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} \mathfrak{T}_k X_k'.$$

Постоянные интегрирования, входящие в эти общие решения, определяются в каждом частном случае соответствующими пограничными и временными условиями.

Рассмотрим некоторые из возможных на практике случаев: в первой части — кабель, индуктивностью и проводимостью изоляции которого можно пренебречь, и во второй части — надземную линию с активным сопротивлением, индуктивностью, емкостью и утечкой.

Глава II

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВДОЛЬ КАБЕЛЯ ПРИ РАБОТЕ СИММЛЕКСОМ

§ 1. Общее решение телеграфных уравнений

Так как по условию $L=0$ и $G=0$, то уравнения волны для рассматриваемого случая имеют следующий вид:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri,$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (9)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - RC \frac{\partial i}{\partial t} = 0. \quad (9_1)$$

Рассматривая каждую из искомых функций u и i как сумму двух функций, из которых одна (u_1 или i_1) выражает собою установившийся процесс, а другая (u_2 и i_2) переходной, будем иметь

$$u = u_1 + u_2,$$

$$i = i_1 + i_2,$$

причем функции u_1 и i_1 должны удовлетворять уравнениям

$$-\frac{du_1}{dx} = Ri_1,$$

$$-\frac{di_1}{dx} = 0, \quad (9_2)$$

и функции u_2 и i_2

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_2}{\partial x} &= R i_2, \\ \frac{\partial i_2}{\partial x} &= C \frac{\partial u_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9_3)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} i_1 &= I = \text{const}, \\ u_1 &= \Delta - R I x = \varphi(x), \end{aligned}$$

где Δ — постоянная, зависящая от пограничных условий.

Возвращаясь к уравнениям (9₂), замечаем, что функции u_2 и i_2 могут быть выражены через вспомогательную функцию w , а именно:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{\partial w}{\partial x}, \\ i_2 &= -C \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned}$$

причем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - RC \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Выразим вспомогательную функцию w как сумму произведений двух функций X и T , причем X зависит только от x и T — только от t . Тогда

$$w = \sum XT.$$

Подставляя в (10), получим

$$\frac{X''}{X} = RC \frac{T'}{T} = -m^2 = \text{const},$$

откуда

$$\begin{aligned} X &= C_1 \sin mx + C_2 \cos mx, \\ T &= C_3 e^{-\frac{m^2}{RC}t}. \end{aligned}$$

Обозначая же

$$C_1 C_3 = A, \quad C_2 C_3 = B, \quad \mathfrak{X} = A \sin mx + B \cos mx,$$

приходим к следующему решению:

$$\begin{aligned} w &= \sum e^{-\frac{m^2}{RC}t} \mathfrak{X}, \\ u_2 &= \sum e^{-\frac{m^2}{RC}t} \mathfrak{X}', \\ i_2 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{R} \sum m^2 e^{-\frac{m^2}{RC}t} \mathfrak{X}. \end{aligned} \quad (11)$$

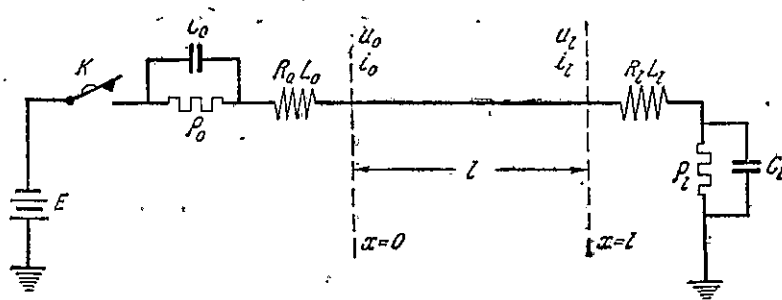
§ 2. Кабель с приемными и передающими устройствами

Рассмотрим случай присоединения к кабелю в начале и в конце по электромагниту с „землей Максвелла“ (фиг. 1). Пограничные условия для этого случая могут быть записаны в следующем виде:

при $x=0$

$$u_0 = E - C_0 L_0 \rho_0 \frac{d^2 i_0}{dt^2} - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) \frac{di_0}{dt} - (\rho_0 + R_0) i_0,$$

$$\begin{aligned}
 u_{10} &= E - (\rho_0 + R_0) i_{10}, \\
 u_{20} &= -C_0 L_0 \rho_0 \frac{d^2 i_{20}}{dt^2} - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) \frac{di_{20}}{dt} - (\rho_0 + R_0) i_{20}, \\
 \text{при } x=l \\
 u_1 &= C_l L_l \rho_l \frac{d^2 i_l}{dt^2} + (C_l R_l \rho_l + L_l) \frac{di_l}{dt} + (\rho_l + R_l) i_l, \\
 u_{1l} &= (\rho_l + R_l) i_{1l}, \\
 u_{2l} &= C_l L_l \rho_l \frac{d^2 i_{2l}}{dt^2} + (C_l R_l \rho_l + L_l) \frac{di_{2l}}{dt} + (\rho_l + R_l) i_{2l}.
 \end{aligned}$$



Фиг. 1

Подставляя значение функций u_2 и i_2 из (11) в приведенные выше начальные пограничные условия, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{x'_0}{x_0} &= -\frac{m^2}{R^3 C^2} [C_0 L_0 \rho_0 m^4 - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) R C m^2 + (\rho_0 + R_0) R^3 C^2], \\
 \text{но} \quad \frac{x'_0}{x_0} &= m \frac{A}{B},
 \end{aligned}$$

значит

$$\frac{A}{B} = -\frac{m}{R^3 C^2} [C_0 L_0 \rho_0 m^4 - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) R C m^2 + (\rho_0 + R_0) R^3 C^2]. \quad (a)$$

Произведя подобную же подстановку в выражения конечного пограничного условия, находим

$$\frac{x'_l}{x_l} = \frac{m^2}{R^3 C^2} [C_l L_l \rho_l m^4 - (C_l R_l \rho_l + L_l) R C m^2 + (\rho_l + R_l) R^3 C^2] = f(m). \quad (б)$$

И так как

$$\frac{x'_l}{x_l} = m \frac{A - B \operatorname{tg} ml}{A \operatorname{tg} ml + B},$$

то

$$\operatorname{tg} ml = \frac{\frac{A}{B} m - f(m)}{\frac{A}{B} f(m) + m} = \frac{\sigma m - f(m)}{\sigma f(m) + m}, \quad (12)$$

где

$$\sigma = \frac{A}{B}.$$

Подставляя сюда значения отношения $\frac{A}{B}$ из выражения (a) и функции $f(m)$ из (б), получим уравнение с одним неизвестным m , из которого

определим m графическим способом. Очевидно, мы будем иметь бесконечный ряд решений для m .

Определив значения постоянной m , переходим к постоянным A и B , отношение которых нам уже известно из соотношения (а).

Представим функцию $\mathcal{X}$ в следующем виде:

$$\mathcal{X} = B(\sigma \sin mx + \cos mx) = BP,$$

где $\sigma = \frac{A}{B}$; тогда

$$\begin{aligned} u_2 &= \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k', \\ i_2 &= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k. \end{aligned} \quad (11_1)$$

Для определения постоянной B' задаемся временными условиями:

для $t=0$ и $0 \leq x \leq l$

$$\begin{aligned} u &= 0, & i &= 0, \\ u_1 &= \varphi(x), & i_1 &= \Psi(x), \\ u_2 &= -\varphi(x), & i_2 &= -\Psi(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k P_k' &= -\varphi(x), \\ \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_k &= -R\Psi(x), \end{aligned}$$

где

$$P_k = \sigma_k \sin m_k x + \cos m_k x,$$

причем

$$P_k'' + m_k^2 P_k = 0.$$

Умножим обе части последнего равенства на $P_\mu dx$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l

$$\int_0^l P_\mu P_k'' dx = -m_k^2 \int_0^l P_\mu P_k dx,$$

но

$$\begin{aligned} \int_0^l P_\mu P_k'' dx &= \int_0^l P_\mu dP_k' = [P_k' P_\mu - \int P_k' P_\mu' dx]_0^l = \\ &= (P_k' P_\mu)_l - (P_k' P_\mu)_0 - \int_0^l P_k' P_\mu' dx, \end{aligned}$$

следовательно,

$$-m_k^2 \int_0^l P_\mu P_k dx + \int_0^l P_\mu' P_k' dx = (P_\mu P_k)_l - (P_\mu P_k)_0.$$

Взяв же равенство

$$P_{\mu}'' + m_{\mu}^2 P_{\mu} = 0,$$

также находим

$$-m_{\mu}^2 \int_0^l P_{\mu} P_k dx + \int_0^l P_{\mu}' P_k' dx = (P_k P_{\mu}')_l - (P_k P_{\mu}')_0.$$

Из обоих полученных равенств следует, что

$$\begin{aligned} (m_{\mu}^2 - m_k^2) \int_0^l P_{\mu} P_k dx &= (P_{\mu} P_k' - P_k P_{\mu}')_l - (P_{\mu} P_k' - P_k P_{\mu}')_0, \\ (m_{\mu}^2 - m_k^2) \int_0^l P_{\mu}' P_k' dx &= \\ &= (m_{\mu}^2 P_{\mu} P_k' - m_k^2 P_k P_{\mu}')_l - (m_{\mu}^2 P_{\mu} P_k' - m_k^2 P_k P_{\mu}')_0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{P_k}{P_k'} = \frac{1}{m_k} \frac{\sigma_k \sin m_k x + \cos m_k x}{\sigma_k \cos m_k x - \sin m_k x},$$

следовательно,

$$(P_k)_0 = \frac{1}{m_k \sigma_k} (P_k')_0,$$

$$(P_k)_l = \frac{1}{m_k} \frac{\sigma_k \sin m_k l + \cos m_k l}{\sigma_k \cos m_k l - \sin m_k l} (P_k')_l = \frac{1}{m_k} \frac{\sigma_k \operatorname{tg} m_k l + 1}{\sigma_k - \operatorname{tg} m_k l} (P_k')_l.$$

Но, как мы видели выше,

$$f(m_k) = m_k \frac{\sigma_k - \operatorname{tg} m_k l}{\sigma_k \operatorname{tg} m_k l + 1},$$

следовательно,

$$(P_k)_l = \frac{1}{f(m_k)} (P_k')_l.$$

Возвращаясь к формуле

$$\begin{aligned} (m_k^2 - m_{\mu}^2) \int_0^l P_k' P_{\mu}' dx &= \\ &= (m_{\mu}^2 P_{\mu} P_k' - m_k^2 P_k P_{\mu}')_0 - (m_{\mu}^2 P_{\mu} P_k' - m_k^2 P_k P_{\mu}')_l, \end{aligned}$$

выразим на основании вышеприведенных соотношений производные P_k' и P_{μ}' через первообразные функции P_k и P_{μ} . Получим

$$\begin{aligned} (m_k^2 - m_{\mu}^2) \int_0^l P_k' P_{\mu}' dx &= \\ &= [m_{\mu}^2 f(m_k) - m_k^2 f(m_{\mu})] P_{\mu} P_k - m_{\mu} m_k (m_{\mu} \sigma_k - m_k \sigma_{\mu}) P_{\mu 0} P_{k 0}. \end{aligned}$$

Произведя соответствующие преобразования, приходим к следующему результату:

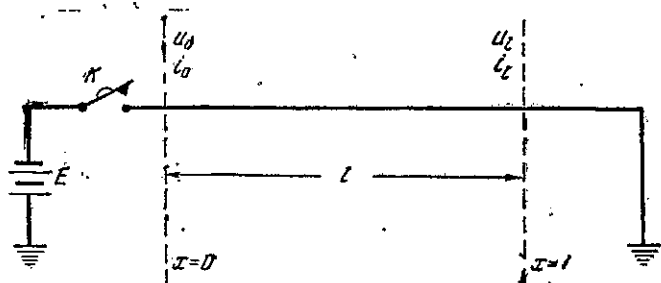
$$\begin{aligned} \int_0^l P_{\mu}' P_k' dx &= \frac{m_{\mu}^2 m_k^2}{R^2 C^2} [C_l L_l \rho_l (m_k^2 + m_{\mu}^2) - (C_l R_l \rho_l + L_l) R C] P_{\mu l} P_{k l} + \\ &+ \frac{m_{\mu}^2 m_k^2}{R^2 C^2} [C_0 L_0 \rho_0 (m_k^2 + m_{\mu}^2) - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) R C] P_{\mu 0} P_{k 0}. \end{aligned}$$

Приходим к не ортогональным функциям, весьма затрудняющим решение поставленной задачи. К ортогональным функциям мы придем только при следующих частных случаях:

$$1) \rho_0 = \rho_l = R_0 = R_l = 0, \quad L_0 = L_l = 0,$$

т. е. когда в начале линии включена батарея с нулевым внутренним сопротивлением, конец же линии накоротко замкнут (фиг. 2).

$$2) \rho_0 = \rho_l = 0, \quad L_0 = L_l = 0, \quad R_0 \neq 0, \quad R_l \neq 0,$$



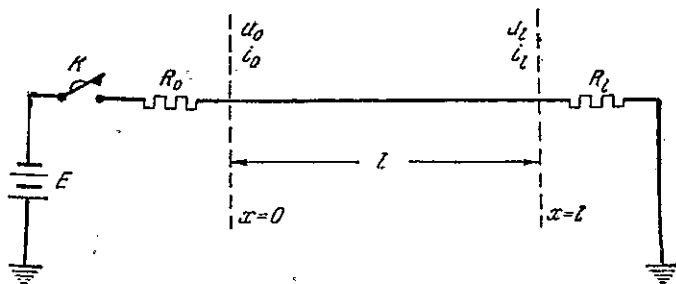
Фиг. 2.

т. е. при схеме фиг. 3, причем

$$0 \leq R_0 \leq \infty, \quad 0 \leq R_l \leq \infty;$$

следовательно, к ортогональным функциям мы приходим и в том случае, если один конец линии или оба конца изолированы, например схема фиг. 4.

$$3) C_0 = C_l = 0, \quad \rho_0 \neq 0, \quad \rho_l \neq 0, \quad L_0 \neq 0, \\ L_l \neq 0, \quad R_0 \neq 0, \quad R_l \neq 0,$$



Фиг. 3.

т. е. при схеме фиг. 5. Схемы фиг. 2, 3 и 4 приводят к интегралу

$$\int_0^l P_\mu' P_k' dx = 0, \quad (\alpha)$$

схема фиг. 5 — к интегралу

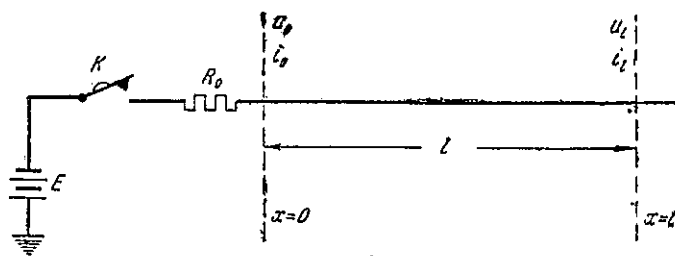
$$\int_0^l P_\mu' P_k' dx = -\frac{m_\mu^2 m_k^2}{R^2 C} L_l P_{\mu l} P_{kl} - \frac{m_\mu^2 m_k^2}{R^2 C} L_0 P_{\mu 0} P_{k0}. \quad (\beta)$$

Рассмотрим сначала схемы фиг. 2, 3 и 4. Вспомним, что для $t=0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} B_k P_k' = -\varphi(x).$$

Умножим обе части на $P_\mu' dx$ и проинтегрируем от 0 до l . Получим

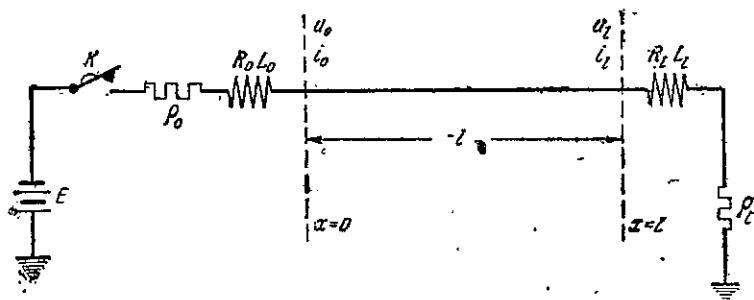
$$-\int_0^l \varphi(x) P_\mu' dx = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \int_0^l P_k' P_\mu' dx. \quad (\gamma)$$



Фиг. 4.

И так как интегралы правой части по условию равны нулю для $m_k \neq m_\mu$, то все члены, за исключением порядка $k=\mu$, пропадают, и мы имеем

$$\int_0^l \varphi(x) P_\mu' dx = -B_\mu \int_0^l P_\mu'^2 dx,$$



Фиг. 5.

откуда

$$B_\mu = - \frac{\int_0^l \varphi(x) P_\mu' dx}{\int_0^l P_\mu'^2 dx}. \quad (13)$$

Переходим к схеме фиг. 5. Определенный интеграл правой части равенства (γ) может быть заменен выражением (β). Подстановка эта

возможна, для всех значений k , кроме $k=\mu$, поэтому член порядка $k=\mu$ мы должны выделить. Получим

$$-\int_0^l \varphi(x) P'_\mu dx - B_\mu \int_0^l P_\mu'^2 dx = -\frac{m_\mu^2 L_l}{R^2 C} P_{\mu l} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_{kl} + \\ + \frac{m_\mu^4 L_l}{R^2 C} P_{\mu l}^2 B_\mu - \frac{m_\mu^2 L_0}{R^2 C} P_{\mu 0} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_{k0} + \frac{m_\mu^4 L_0}{R^2 C} P_{\mu 0}^2 B_\mu.$$

И так как для $t=0$ мы имеем из (11₁)

$$\frac{1}{R} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_k = -\Psi(x),$$

то

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_{kl} = -R\Psi(l),$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_{k0} = -R\Psi(0).$$

Следовательно,

$$-\int_0^l \varphi(x) P'_\mu dx - B_\mu \int_0^l P_\mu'^2 dx = \frac{m_\mu^2 L_l}{RC} P_{\mu l} \Psi(l) + \frac{m_\mu^4 L_l}{R^2 C} P_{\mu l}^2 B_\mu + \\ + \frac{m_\mu^2 L_0}{RC} P_{\mu 0} \Psi(0) + \frac{m_\mu^4 L_0}{R^2 C} P_{\mu 0}^2 B_\mu.$$

Тогда

$$B_\mu = -R \frac{m_\mu^2 [L_0 \Psi(0) P_{\mu 0} + L_l \Psi(l) P_{\mu l}] + RC \int_0^l \varphi(x) P'_\mu dx}{R^2 C \int_0^l P_\mu'^2 dx + m_\mu^4 (L_0 P_{\mu 0}^2 + L_l P_{\mu l}^2)}, \quad (14)$$

причем

$$\Psi(x) = \frac{E}{Rl + R_l},$$

$$\varphi(x) = E \frac{R(l-x) + R_l}{Rl + R_l}.$$

Так же легко решается задача о распределении вдоль кабеля устанавливающихся тока и напряжения при схеме фиг. 6. Действительно, граничные условия для этого случая могут быть сформулированы следующим образом.

При $x=0$

$$u_{20} = 0;$$

при $x=l$

$$\frac{du_{2l}}{dt} = \frac{i_{2l}}{C_l}.$$

После соответствующей подстановки находим

$$\frac{\mathfrak{X}_0'}{\mathfrak{X}_0} = m \frac{A}{B} = 0,$$

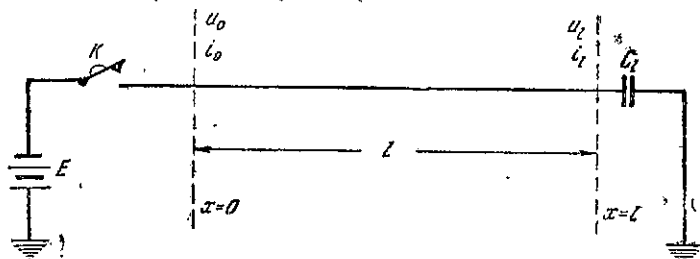
$$\frac{\mathfrak{X}_l'}{\mathfrak{X}_l} = -\frac{C}{C_l} = m \frac{A - B \operatorname{tg} ml}{A \operatorname{tg} ml + B},$$

т. е.

$$\frac{A}{B} = 0,$$

$$\operatorname{tg} ml = \frac{1}{m} \frac{C}{C_l}.$$

Отсюда графическим способом определяем бесконечный ряд значений постоянной m .



Фиг. 6.

Представляя, как мы делали выше, функцию $\mathfrak{X}$ в виде

$$\mathfrak{X} = BP,$$

где $P = \cos mx$, придем к выражению (11₁); имея в виду временные условия для $t=0$

$$u_2 = -\varphi(x) \text{ и } i_2 = -\psi(x),$$

находим

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} B_k P_k' = -\varphi(x),$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k P_k = -R\psi(x),$$

$$\int_0^l P_{\mu}' P_k' dx = -\frac{C_l}{C} P_{\mu}' P_{kl}',$$

$$-\int_0^l \varphi(x) P_{\mu}' dx = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \int_0^l P_k' P_{\mu}' dx.$$

Отсюда находим

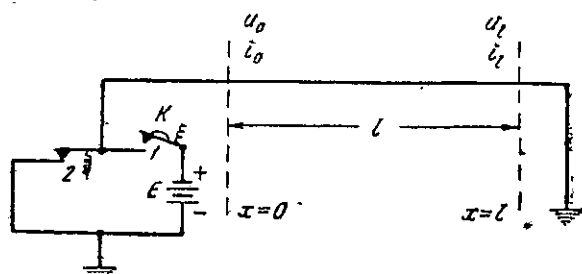
$$B_{\mu} = -\frac{C \int_0^l \varphi(x) P_{\mu}' dx + C_l \varphi(x) P_{\mu l}'}{C \int_0^l P_{\mu}^2 dx + C_l P_{\mu l}^2}.$$

Переходим к детальному анализу некоторых частных случаев, иллюстрирующих процесс распространения устанавливающихся напряжения и тока вдоль кабеля.

§ 3. Конец кабеля заземлен, в начале кабеля включена батарея E с нулевым внутренним сопротивлением

Не трудно видеть, что для рассматриваемого случая (фиг. 2) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} m_k l &= 0, & P &= \cos mx, \\ \varphi(x) &= E \frac{l-x}{l}, & \psi(x) &= \frac{E}{Rl}, \end{aligned}$$



Фиг. 7.

$$B_k = - \frac{\int_0^l \varphi(x) P'_k dx}{\int_0^l P_k'^2 dx},$$

$$m_k = \frac{k\pi}{l} \quad (\text{где } k=0, 1, 2, \dots),$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} B_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k',$$

$$i_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

После соответствующей подстановки получим

$$u_2 = -2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RC l^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$i_2 = \frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Таким образом, приходим к следующим результатам:

При нажатии ключа по схеме фиг. 2 и 7 (заряд кабеля)

$$\begin{aligned} u &= E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right], \\ i &= \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

При отпускании ключа по схеме фиг. 7 (разряд кабеля через оба заземленных конца)

$$\begin{aligned} u &= 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ i &= -2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (16)$$

При отпускании ключа по схеме фиг. 2 (разряд кабеля через один заземленный на приемной станции конец) распределение напряжения u и тока i будет иное. Выведем соответствующие формулы и для этого случая (фиг. 2).

Пограничные условия:

при $x=0$

$$i_{20}=0,$$

при $x=l$

$$u_{20}=0.$$

Временные условия:

для $t=0$

$$u_2 = E \frac{l-x}{l} - \varphi(x), \quad i_2 = \frac{E}{Rl}$$

для $t=\infty$

$$u_1=0, \quad i_1=0.$$

Пограничные условия приводят к следующим соотношениям:

$$\mathcal{X}(0)=0 \quad \text{и} \quad \mathcal{X}'(l)=0$$

и так как

$$\mathcal{X} = A \sin mx + B \cos mx,$$

то

$$B=0, \quad \cos ml=0, \quad m = \frac{(2k+1)\pi}{2l},$$

где $k=0, 1, 2, 3 \dots \infty$.

Таким образом,

$$\mathcal{X} = A \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = AP,$$

где

$$P = \sin mx = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

и

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k',$$

$$i_2 = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{\infty} m_k^2 A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k.$$

Для $t=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k' = E \frac{l-x}{l}.$$

Пользуясь формулой

$$A_k = \frac{\int_0^l \varphi(x) P_k' dx}{\int_0^l P_k'^2 dx},$$

находим

$$A_k = \frac{2E}{m_k^2 l} \frac{1 - \cos m_k l}{\sin m_k l \cos m_k l + m_k l}.$$

И так как $\cos m_k l = 0$, то

$$A_k = \frac{2E}{m_k^2 l^2}.$$

Окончательно

$$u = 2E \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m_k l)^2} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad (17)$$

$$i = 2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k l} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

где

$$m_k l = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

В связи с рассмотренным примером представляет интерес анализ распространения тока и напряжения вдоль кабеля при заряде и разряде последнего в случае работы токами двух направлений (фиг. 8). Пусть ключ нажат продолжительное время, ток в кабеле успел установиться. Теперь отпустим ключ, в начале линии батарея заменится равной батареей, но соединенной с кабелем противоположным полюсом. Пограничные и временные условия, соответствующие этому случаю, могут быть сформулированы следующим образом.

Пограничные условия:

при $x=0$

$$u = E_2, \quad u_1 = E_2, \quad u_2 = 0;$$

при $x=l$

$$u = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

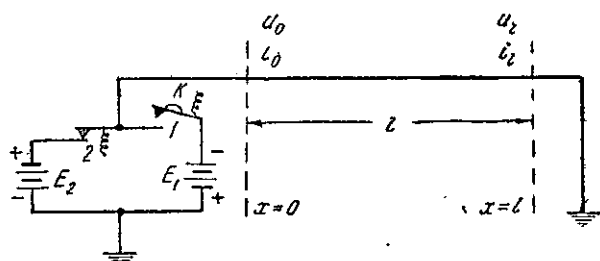
для $t=0$

$$u = E_1 \frac{l-x}{l}, \quad u_1 = -E_2 \frac{l-x}{l}, \quad u_2 = (E_1 + E_2) \frac{l-x}{l}.$$

Не трудно убедиться, что с помощью указанных выше выкладок мы придем к следующим формулам:

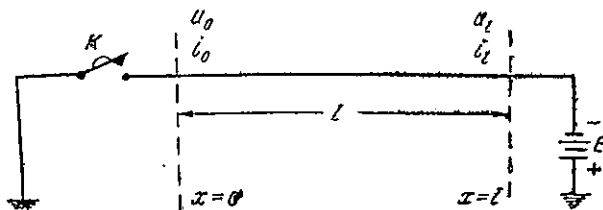
$$u = -E_2 \left[\frac{l-x}{l} - \frac{2(E_1 + E_2)}{E_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right],$$

$$i = -\frac{E_2}{Rl} \left[1 + \frac{2(E_1 + E_2)}{E_2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (18)$$



Фиг. 8.

Все рассмотренные выше примеры относятся к случаю, когда батарея E включена в начале линии. При посылке вызова на телефонную станцию представляет особый интерес работа кабеля с ключом на передающей и батареями на приемной станциях (фиг. 9). Для этого случая имеем следующие пограничные и временные условия.



Фиг. 9.

Пограничные условия:
при $x=0$

$$u = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

при $x=l$

$$u = -E, \quad u_1 = -E, \quad u_2 = 0.$$

Временные условия:
при $t=0$

$$u = -E, \quad u_1 = -E \frac{x}{l}, \quad u_2 = E \frac{x-l}{l}.$$

Приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} u &= -E \left[\frac{x}{l} + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right], \\ i &= \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, процесс распределения тока по кабелю при схемах фиг. 9 и 2 выражается одной и той же формулой.

Пользуясь выведенными формулами, мы имеем возможность вычислить таблицы распределения тока и напряжения вдоль кабеля и построить соответствующие графики. Наибольший же практический интерес представляет формула входящего тока (фиг. 2 и 7)

$$i_1 = I \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos k\pi \right],$$

где

$$I = \frac{E}{Rl}.$$

Обозначив

$$e^{-\frac{\pi^2}{RCl^2}t} = \vartheta$$

и имея в виду, что

$$\cos k\pi = (-1)^k,$$

получим

$$i_1 = I [1 - 2(\vartheta - \vartheta^4 + \vartheta^9 - \vartheta^{16} + \vartheta^{25} - \dots)]. \quad (20)$$

С прибавлением t к нулю, следовательно ϑ к единице, сумма ряда, входящего в формулу (20), стремится к половине, сила же входящего тока — к нулю. При малых значениях t член ϑ близок к единице, ток же i_1 — к нулю. Например, при том значении времени t , для которого $\vartheta = \frac{3}{4}$ (цифра, предложенная В. Томсоном), отношение $\frac{i_1}{I}$ выражается в тысячных долях, следовательно входящий ток i_1 составляет только часть процента от установившегося тока I . Практически долями процента от I можно пренебречь, в этом случае мы можем считать, что для $\vartheta \geq \frac{3}{4}$ ток на приемной станции равен нулю, что ток i_1 начинает нарастать только по прошествии времени $t = \tau$, соответствующего значению $\vartheta = \frac{3}{4}$, т. е.

$$\tau = \frac{CRl^2}{\pi^2} \ln \left(\frac{4}{3} \right) = 0.02915 RCl^2.$$

Если сопротивление R выражено в омах, емкость C в микрофарадах, то

$$\tau = 0.02915RCl^2 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

Эта величина τ носит название постоянной времени кабеля.

§ 4. Иллюстрации к предыдущему параграфу

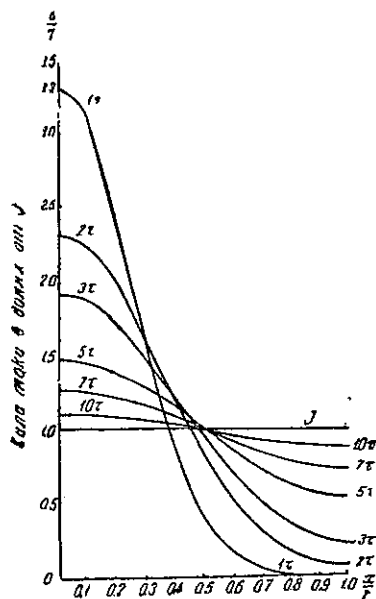
Выражая время в долях от постоянной времени, т. е. полагая

$$t = n\tau,$$

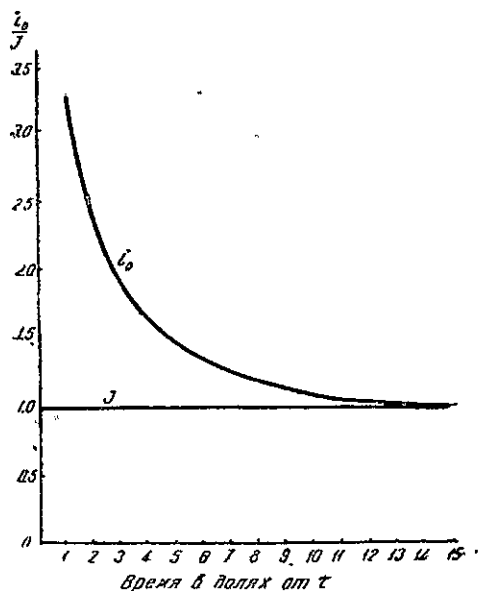
находим (фиг. 2):

$$i = I \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-0.02915k^2\pi^2n} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$

Отсюда мы видим, что форма нарастания тока в определенных пунктах кабеля, расстояния которых от начала последнего выражаются в соответствующих долях от общей длины кабеля, не зависит от его длины..



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Полагая

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x = 0; 0.1l; 0.2l; \dots 0.9l; l,$$

получим табл. 1 и график фиг. 10, представляющий картину распределения тока по длине кабеля. Нарастание исходящего и входящего

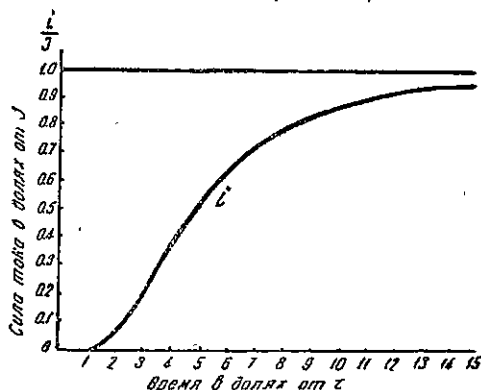
Таблица 1

l/l — распределение тока по длине кабеля; ток i выражен в долях от установившегося тока $I = \frac{E}{RI}$

$\frac{x/l}{n}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	3.306	3.034	2.345	1.527	0.8371	0.3866	0.1504	0.04896	0.01576	0.00332	0.00122
2	2.338	2.239	1.985	1.573	1.175	0.7995	0.5002	0.2705	0.1674	0.08538	0.06408
3	1.909	1.855	1.703	1.476	1.209	0.9364	0.6883	0.4926	0.3366	0.2477	0.2181
4	1.654	1.619	1.519	1.366	1.179	0.9799	0.7879	0.6213	0.4937	0.4158	0.3866
5	1.482	1.457	1.384	1.277	1.142	0.9938	0.8480	0.7188	0.6195	0.5532	0.5311
6	1.359	1.341	1.289	1.209	1.108	0.9980	0.8883	0.7897	0.7122	0.6626	0.6455
7	1.268	1.254	1.216	1.157	1.083	1	0.9173	0.8427	0.7838	0.7456	0.7325
8	1.201	1.191	1.162	1.118	1.062	1	0.9380	0.8820	0.8376	0.8191	0.7993
9	1.151	1.143	1.122	1.089	1.047	1	0.9535	0.9114	0.8782	0.8568	0.8494
10	1.113	1.109	1.091	1.066	1.035	1	0.9651	0.9336	0.9086	0.8906	0.8871
15	1.029	1.026	1.022	1.016	1.006	1	0.9944	0.9842	0.9783	0.9745	0.9712

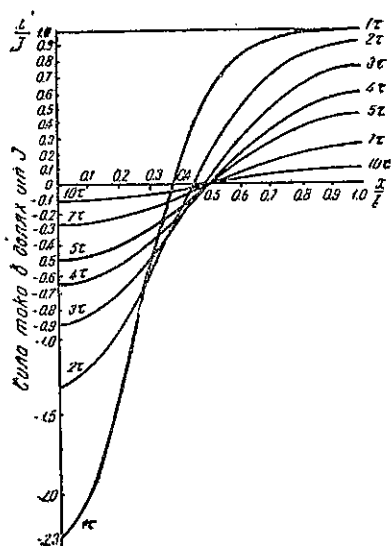
токов при этом, выражается графиками фиг. 11 и 12. С изменением длины кабеля l форма кривых нарастания тока вдоль кабеля не изменяется, изменяется лишь величина постоянной времени τ . Опыт показывает, что пренебрежение индуктивностью кабеля ($L=0$) приводит к тому, что распределение тока вдоль кабеля на первой его половине ($\frac{x}{l} < 0.5$) не вполне совпадает с действительным, для второй же половины ($\frac{x}{l} > 0.5$) оно довольно точно копирует действительное распределение, и для пунктов, близких к концу кабеля ($\frac{x}{l} \approx 1$), оно практически совпадает с полученным из опыта.

Приведенные графики характеризуют заряд кабеля, разряд же последнего зависит от условий его разрыва на передающей станции (фиг. 2, 7 и 8). Для удобства подсчетов приведем соответствующие формулы разряда в несколько измененном виде по сравнению с приведенными формулами. После длительного нажатия ключ K возвращается к заземленному контакту (фиг. 7)



Фиг. 12.

$$i = -2 \frac{E}{R} \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-0.02915 k^2 \pi^2 n} \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (16)$$



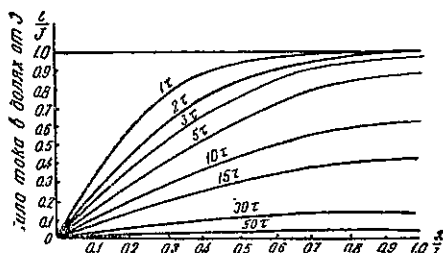
Фиг. 13.

Ключ K возвращается к изолированному контакту (фиг. 2)

$$i = 2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m_k l} e^{-0.02915 m_k^2 l^2 n} \sin m_k x, \quad (17)$$

где

$$m_k l = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$



Фиг. 14.

Ключ K возвращается к контакту, соединенному с батареей противоположного знака рабочей батареи (фиг. 8):

$$i = -\frac{E_2}{Rl} \left[1 + 2 \frac{E_1 + E_2}{E_2} \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-0.02915 k^2 \pi^2 n} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (18)$$

Выражая x в долях от полной длины кабеля l :

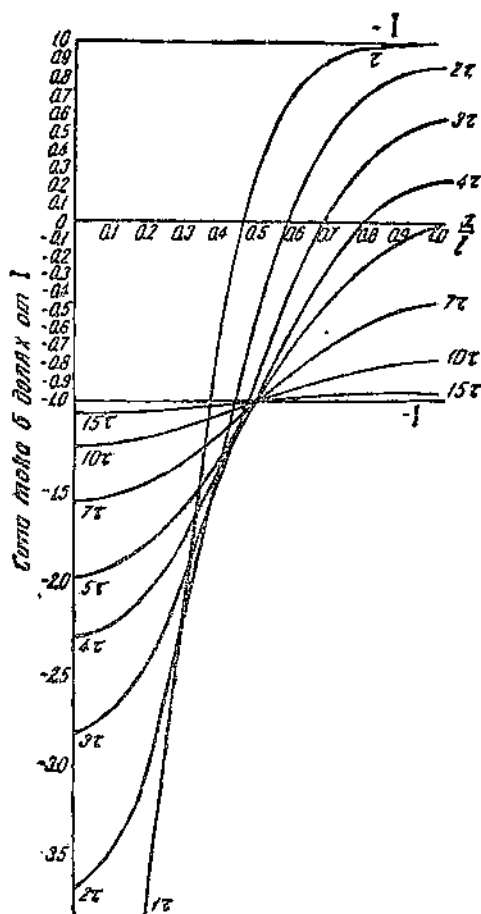
$$x = 0; 0.1l; 0.2l; \dots 0.9l; l,$$

полагая

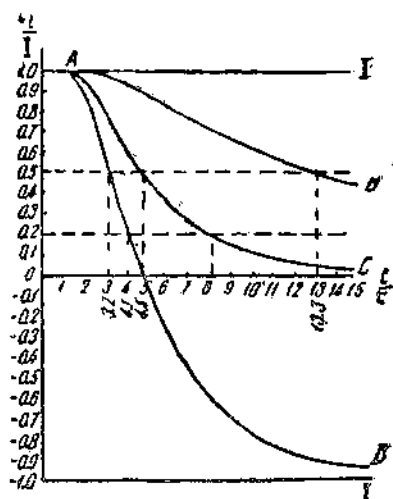
$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

и подставляя в приведенные формулы, вычислим соответствующие таблицы, по которым построим графики фиг. 13, 14, 15 [соответствуют формулам (16), (17), (18)].

Сопоставляя эти таблицы и графики, видим, что быстрее всего разряжается кабель в последнем случае, формула же (18) еще показывает, что разряд будет совершаться тем быстрее, чем напряжение отрицательно работающей батареи E_2 больше. Медленнее всего разряжается кабель, когда свободный контакт изолирован.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

Для большей ясности приведем кривые разрядных токов на приемной станции в одном масштабе и на одном графике (фиг. 16).

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВДОЛЬ КАБЕЛЯ ПРИ РАБОТЕ ДУПЛЕКСОМ

Разберем прежде более простые схемы.

§ 1. На концах кабеля включены батареи, соединяющиеся при нажатии ключа разноименными полюсами (фиг. 17)

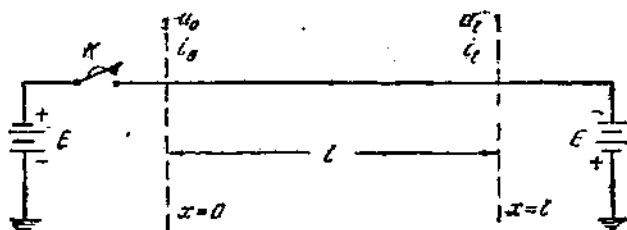
Пограничные условия:

при $x=0$

$$u = +E,$$

при $x=l$

$$u = -E.$$



Фиг. 17.

Временные условия: для $t=0$

$$u = -E.$$

Далее:

при $x=0$

$$u_1 = E, \quad u_2 = 0;$$

при $x=l$

$$u_1 = -E, \quad u_2 = 0;$$

для $t=0$

$$u_2 = -2E \frac{l-x}{l}.$$

Получим

$$m_k = \frac{k\pi}{l},$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k}{l} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} = -2E \frac{l-x}{l},$$

$$B_k = \frac{4l}{k^2\pi^2},$$

следовательно,

$$u = E \left[\frac{l-2x}{l} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right],$$

$$i = \frac{2E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right],$$
(21)

т. е. в цепи по схеме фиг. 17 ток будет вдвое больше тока в цепи по схеме фиг. 2; с точки зрения распределения тока вдоль кабеля ($L=0$, $G=0$) безразлично, как будут включены батареи, на одном конце кабеля, или на обоих.

§ 2. На обоих концах кабеля включены батареи, соединяющиеся при нажатии ключа одноименными полюсами (фиг. 18)

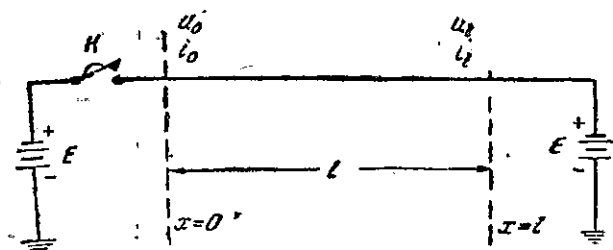
Пограничные условия:

при $x=0$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0;$$

при $x=l$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0.$$



Фиг. 18.

Временные условия:

для $t=0$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0.$$

Получим

$$u=E,$$

$$i=0.$$

(21)

Переходим к более сложным схемам.

§ 3. Вначале батареи соединены одноименными полюсами (фиг. 19), после нажатия ключа левой станции батареи соединяются разноименными полюсами (фиг. 20)

Пограничные условия:

при $x=0$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0;$$

при $x=l$

$$u=-E, \quad u_1=-E, \quad u_2=0.$$

Временные условия:

для $t=0$

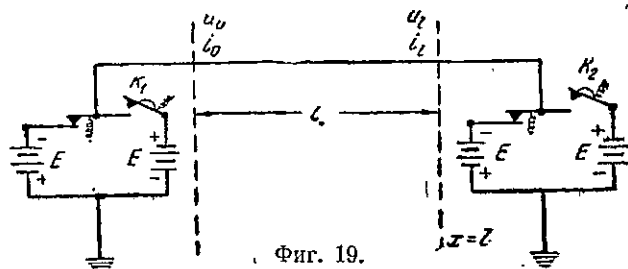
$$u=-E, \quad u_1=E \frac{l+2x}{l}, \quad u_2=-2E \frac{l-x}{l}.$$

Получим

$$u = E \left[\frac{l-2x}{l} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right],$$

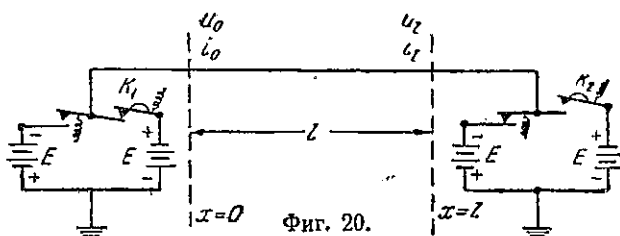
$$i = \frac{2E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$
(22)

Формулы тождественны с формулами (21).



Фиг. 19.

§ 4. Вначале батареи соединены отрицательными полюсами (фиг. 19), после одновременного нажатия ключей на обеих станциях батареи соединяются положительными полюсами (фиг. 21)



Фиг. 20.

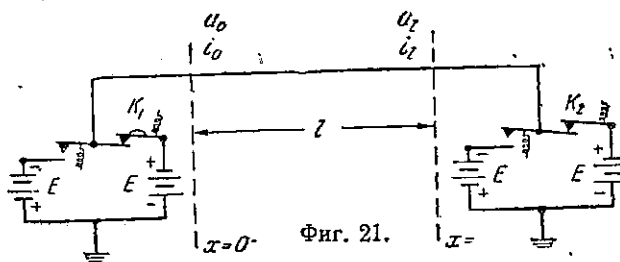
Пограничные условия:

при $x=0$

$$u = E, \quad u_1 = E, \quad u_2 = 0;$$

при $x=l$

$$u = E, \quad u_1 = E, \quad u_2 = 0.$$



Фиг. 21.

Временные условия:

для $t=0$

$$u = -E, \quad u_1 = E, \quad u_2 = -2E.$$

Получим

$$u = E \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} (1 - \cos k\pi) \sin \frac{k\pi x}{l} \right],$$

$$i = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} (1 - \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (23)$$

Для $x=0$ сила входящего тока i_0 равна

$$i_0 = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} (1 - \cos k\pi).$$

Для $x=l$ сила входящего тока i_l равна

$$i_l = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} (1 - \cos k\pi) \cos k\pi,$$

но $\cos^2 k\pi = 1$,

следовательно

$$i_l = -\frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} (1 - \cos k\pi).$$

Таким образом, исходящие токи на обеих станциях будут отличаться только знаками, по абсолютной же величине в каждый момент они равны.

Для середины кабеля, т. е. для $x=0.5l$, имеем

Фиг. 22.

$$i_{0.5l} = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} (1 - \cos k\pi) \cos 0.5k\pi,$$

или

$$i_{0.5l} = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos 0.5k\pi - \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos 0.5k\pi \cos k\pi.$$

Очевидно, что оба члена равны и сокращаются, следовательно $i_{0.5l} = 0$, т. е. по середине кабеля тока не будет.

Выражая время в долях от постоянного времени τ , перепишем формулу для тока в следующем виде:

$$i = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-0.02915k^2\pi^2\tau} (1 - \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l};$$

полагая

$$n=1, 2, 3, 4, \dots; \quad x=0; \quad 0.1l; \quad 0.2l; \quad \dots \quad 0.9l; \quad l,$$

построим график фиг. 22, причем силу тока выразим в долях от $I = \frac{2E}{Rl}$.

В рассмотренном примере устанавливание тока происходит медленнее, чем при работе симплексом.

§ 5. Батареи соединены разноименными полюсами (фиг. 23), после нажатия ключа на левой станции батареи соединяются одноименными полюсами (фиг. 21)

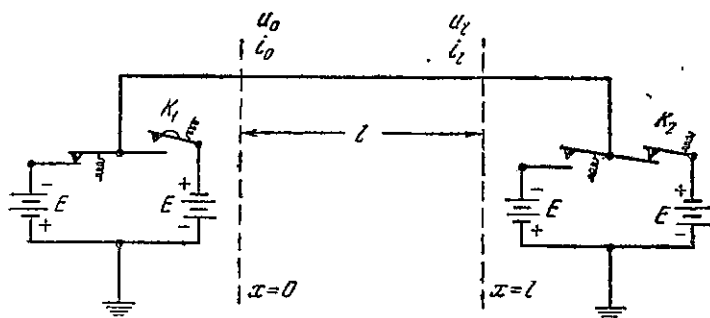
Пограничные условия:

при $x=0$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0;$$

при $x=l$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0.$$



Фиг. 23.

Временные условия: для $t=0$

$$u_2 = -2E \frac{l-x}{l}.$$

Получим

$$\begin{aligned} u &= E \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right], \\ i &= \frac{4E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (24)$$

Бесконечный ряд последней формулы тождественен с таковым же формулы (16).

§ 6. Батареи соединены разноименными полюсами (фиг. 23), после одновременного нажатия ключа на левой станции и отпускания на правой знаки у полюсов батарей меняются (фиг. 20)

Пограничные условия:

при $x=0$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0;$$

при $x=l$

$$u=-E, \quad u_1=-E, \quad u_2=0.$$

Временные условия: для $t=0$

$$u_2 = -2E \frac{l-2x}{l}.$$

Получим

$$u = E \left[\frac{l-2x}{l} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} (1 + \cos k\pi) \sin \frac{k\pi x}{l} \right],$$

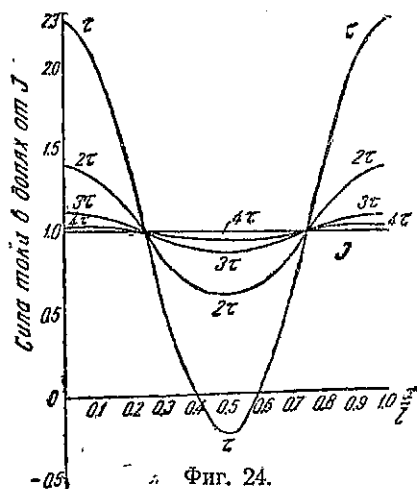
$$i = \frac{2E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} (1 + \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (25)$$

Ток на левой станции

$$i_0 = \frac{2E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} (1 + \cos k\pi); \right.$$

ток на правой станции

$$i_l = \frac{2E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} (1 + \cos k\pi) \cos k\pi \right],$$



Фиг. 24.

но

$$\cos^2 k\pi = 1,$$

следовательно токи на обеих станциях равны и по абсолютной величине и по знаку. Не трудно также убедиться, что

$$i_m = i_{l-m},$$

т. е. токи в симметрично расположенных по кабелю пунктах равны, при этом минимальный ток будет по середине кабеля. Выражая время в долях от τ , перепишем формулу для тока в следующем виде:

$$i = \frac{2E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-0,02915 k^2 \pi^2 n} (1 + \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$

На основании этой формулы построим график фиг. 24, причем сила тока i выражена в долях от установившегося тока $I = \frac{2E}{Rl}$. Таким образом, после 6τ ток можно считать установившимся; в данном случае установливание тока происходит быстрее, чем при работе симплексом.

Глава IV

КАБЕЛЬ С ИЗОЛИРОВАННЫМ КОНЦОМ (фиг. 25)

§ 1. Разряд кабеля (нажатый ключ К отпускается)

Пограничные условия: при $x=0$

$$u=0, \quad u_1=0, \quad u_2=0;$$

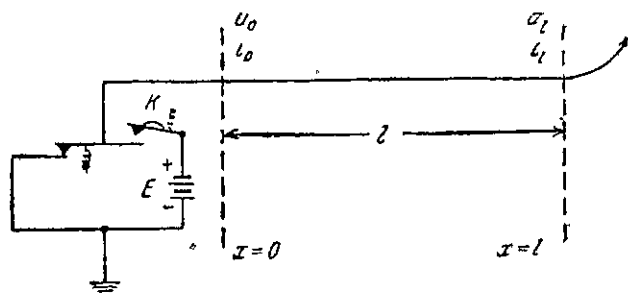
при $x=l$

$$i=0, \quad i_1=0, \quad i_2=0.$$

Временные условия:

для $t=0$

$$u=E, \quad u_1=E, \quad u_2=0.$$



Фиг. 25.

Получим

$$u = 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k l} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x, \quad (26)$$

$$i = -2 \frac{E}{R} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x.$$

§ 2. Заряд кабеля (кнопка К нажимается)

Находим

$$u = E \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k l} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x \right], \quad (27)$$

$$i = 2 \frac{E}{R} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x.$$

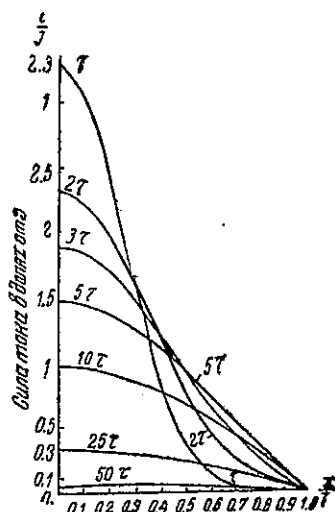
В обоих случаях

$$m_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}.$$

Выражая время в долях от постоянной времени τ , последней формуле тока придадим следующий вид:

$$i = 2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-0.02915 (m_k l)^2 n} \cos m_k x.$$

Отсюда — график фиг. 26.



Фиг. 26.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕРЫВИСТОГО ТОКА ПО КАБЕЛЮ ($L=0$, $G=0$)

До сих пор мы рассматривали устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль кабеля при нажатии или отпускании ключа на длительное время, в течение которого все анализируемые процессы придут к установившемуся уже состоянию. Теперь переходим к рассмотрению распространения вдоль кабеля прерывистого тока, когда время замыкания и размыкания цепи строго ограничено.

Прежде рассмотрим передачу прерывистого тока одного направления, потом перейдем к прерывистым токам обоих направлений.

А. ПЕРЕДАЧА ПО КАБЕЛЮ ($L=0$, $G=0$) ПРЕРЫВИСТЫХ ТОКОВ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ БЕЗ ПЕРЕРЫВА ЦЕПИ (фиг. 7)

На практике приходится передавать всевозможные комбинации из кратковременных и длительных токов (будем называть их, согласно телеграфной терминологии, точками и тире). Анализ проведем двумя методами: методом определения постоянных интегрирования и методом наложения кривых.

§ 1. Метод определения постоянных интегрирования

а) Передаются точки

Пусть в 1 сек. производится n замыканий и n размыканий, причем продолжительность замыкания и размыкания одинакова (θ). Тогда

$$\theta = \frac{1}{2n}.$$

Общие формулы замыкания и размыкания, выведенные выше, могут быть представлены в следующем виде:

напряжение при замыкании

$$u = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (28)$$

и при размыкании

$$u = E \frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (29)$$

Пусть вначале сила тока в цепи была установившейся. При первом размыкании будем иметь

$$A_k = \frac{2}{k\pi} E.$$

и

$$u = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

По прошествии времени θ после размыкания цепи нажмем ключ и этот момент примем за начало времени, тогда коэффициент A_k в формуле (29) определится из следующего равенства:

$$2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \sin \frac{k\pi x}{l} = E \frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (\alpha)$$

Разложим член $E \frac{l-x}{l}$ по $\sin \frac{k\pi x}{l}$:

$$E \frac{l-x}{l} = \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

откуда

$$C_k = \frac{2E}{k\pi}$$

и

$$E \frac{l-x}{l} = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Равенство (α) примет вид

$$2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \sin \frac{k\pi x}{l} = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

значит

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}\right),$$

и

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right].$$

По прошествии времени θ после нажатия ключа отпустим его и примем за начало времени этот момент; тогда

$$E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \sin \frac{k\pi x}{l} \right] = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

но

$$E \frac{l-x}{l} = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

следовательно

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}\right).$$

Формула для напряжения будет

$$u = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l};$$

через θ секунд опять нажмем ключ и момент нажатия примем за начало времени; тогда

$$\begin{aligned} 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ = E \frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \end{aligned}$$

откуда

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right)$$

и

$$\begin{aligned} u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right]. \end{aligned}$$

Продолжая выкладки и далее в этом же направлении, приходим к следующему результату.

Для n -го замыкания

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - \dots + e^{-\frac{2(n-1)k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right],$$

или, суммируя

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \frac{1 + e^{-\frac{(2n-1)k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}.$$

Подставляя в (28), получим

$$u = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{1 + e^{-\frac{(2n-1)k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Сила же тока i равна

$$i = -\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1 + e^{-\frac{(2n-1)k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (30)$$

Для установившегося явления передачи точек следует считать n равным бесконечности (на практике это будет после небольшого числа замыканий и размыканий цепи); в этом случае

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}$$

и

$$i = -\frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}t}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}} \cos \frac{k\pi x}{l};$$

Для n -го замыкания

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \dots + e^{-\frac{(2n-1)k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right],$$

или

$$A_k = \frac{1 + e^{-\frac{2nk^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}.$$

После соответствующей подстановки находим

$$\begin{aligned} u &= E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{1 + e^{-\frac{2nk^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right], \\ i &= \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1 + e^{-\frac{2nk^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Для установившегося явления передачи точек

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}$$

и

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}t}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$

Чем меньше θ , тем больше частота передачи. С уменьшением же θ уменьшается и постоянная A_k , причем в пределе при бесконечно большой частоте, очевидно, $A_k = 0.5$, так как член $e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}$ при бесконечном уменьшении θ стремится к единице.

В этом случае член

$$2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}t}}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}} \cos k\pi,$$

в котором t меняется от 0 до θ , стремится к постоянному значению 0.5, и сила входящего тока ($x=l$) размыкания равна силе тока замыкания. И та и другая равны

$$i = 0.5 \frac{E}{Rl}.$$

Таким образом, при бесконечно большой частоте мы будем иметь на приемной станции постоянный ток, равный половине установившегося тока при нажатии ключа на длительное время. Выражая продолжительность замыкания или размыкания в долях от постоянной времени кабеля τ

$$\theta = \alpha \tau = 0.02915 RCl^2 \alpha$$

и время t в долях от θ

$$t = m\theta,$$

преобразуем полученные формулы в следующие:

при размыкании

$$i = -\frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-0.02915k^2\pi^2 m\alpha}}{1 + e^{-0.02915k^2\pi^2 \alpha}} \cos \frac{k\pi x}{l};$$

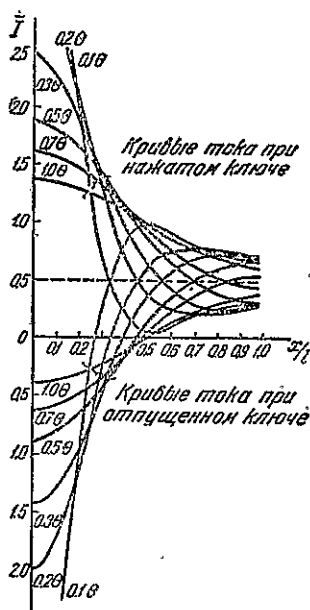
при замыкании

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{-0.02915k^2\pi^2 m\alpha}}{1 + e^{-0.02915k^2\pi^2 \alpha}} \cos \frac{k\pi x}{l} \right],$$

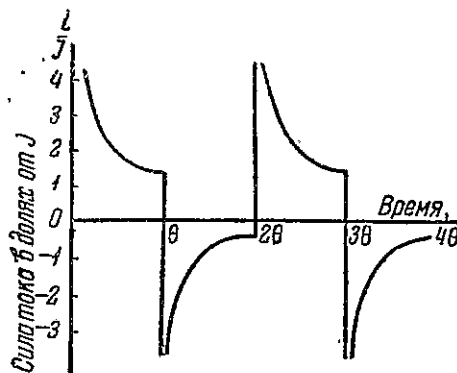
где m меняется от 0 до 1, α показывает частоту передачи. Для иллюстрации приведем несколько графиков, соответствующих различной частоте передачи.

На фиг. 27, 28 и 29 приведены графики для того случая, когда продолжительность замыкания, а также размыкания в 5 раз больше постоянной времени кабеля

$$\theta = 5\tau;$$



Фиг. 27.



Фиг. 28.

фиг. 27 иллюстрирует распределение тока вдоль кабеля; фиг. 28 — изменение тока на передающей и фиг. 29 — на приемной станциях. Если

положить продолжительность замыкания (а также размыкания) равной постоянной времени кабеля ($\theta = \tau$), то распределение тока вдоль кабеля представится графиками фиг. 30, а если $\theta = 0.5 \tau$ — то графиком фиг. 31.

β) Передаются тире

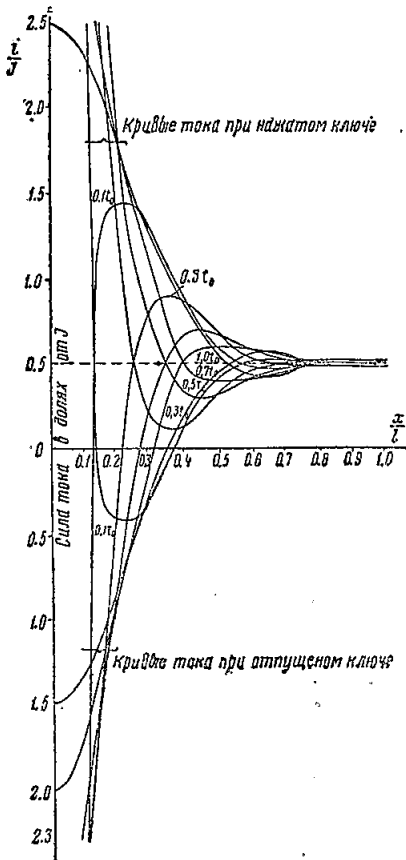
Вначале на кабеле имеется установившийся ток (ключ нажат); после первого отпускания ключа имеем

$$A_k = \frac{2E}{k\pi},$$

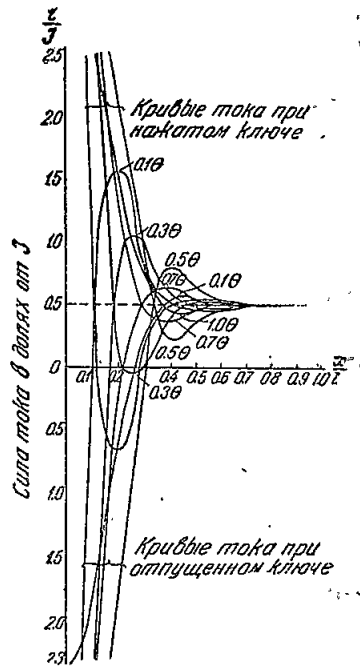
$$u = 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

По прошествии времени θ нажмем ключ; получим

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right)$$



Фиг. 30.



Фиг. 31.

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right].$$

Ключ нажат в течение 3θ , после чего цепь размыкается. Находим

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right),$$

$$u = 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Разомкнутой цепь остается в течение θ , после чего опять замкнем ее; тогда

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right),$$

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right].$$

После третьего размыкания (размыкание производится все время θ секунд, замыкание 3θ секунд) получим

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right);$$

после третьего замыкания

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{9k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right),$$

после n -го размыкания

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{11k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - \dots + e^{-\frac{4(n-1)k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right).$$

Принимая же $n = \infty$ и преобразуя, получим

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) \left(1 + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + \dots \right) \right].$$

Произведя суммирование ряда, окончательно получим

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}.$$

После n -го замыкания

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{9k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - \dots - e^{-\frac{(4n-3)k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right].$$

После некоторых преобразований получим для $n = \infty$

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}.$$

Таким путем приходим к следующим формулам.

При нажатии ключа

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right],$$

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right];$$

при отпускании ключа

$$u = 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Выражая θ в долях от постоянной времени τ и t в долях от θ , т. е. $\theta = \alpha\tau = 0.02915 RCl^2\alpha$ и $t = m\theta$, перепишем формулы для тока в следующем виде:

при нажатии ключа

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-0.02915k^2\pi^2\alpha}}{1 - e^{-4 \cdot 0.02915k^2\pi^2\alpha}} e^{-0.02915k^2\pi^2m\alpha} \cos \frac{k\pi x}{l} \right];$$

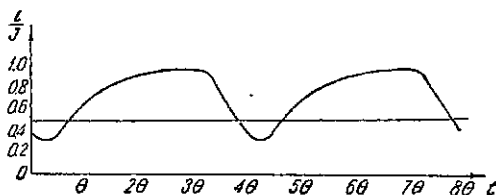
при отпускании ключа

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-3 \cdot 0.02915k^2\pi^2\alpha}}{1 - e^{-4 \cdot 0.02915k^2\pi^2\alpha}} e^{-0.02915k^2\pi^2m\alpha} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Пусть $\alpha=5$, т. е. время размыкания в 5 раз, а время замыкания в 15 раз больше постоянной времени кабеля τ . По последним формулам построим кривую фиг. 32, причем силу тока выражаем в долях от установившейся ($I = \frac{E}{RI}$).

γ) Передаются точки—тире

Длительность каждого размыкания пусть будет θ , длительность замыкания при передаче точки θ и при передаче тире 3θ . В цепи имеется вначале установившийся ток. Рассмотренным уже методом получим следующие выражения для постоянных A_k :



Фиг. 32.

первое размыкание

$$A_k = \frac{2E}{k\pi}$$

первое замыкание (точка)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

второе размыкание (после точки)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

второе замыкание (тире)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

третье размыкание (после тире)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

третье замыкание (точка)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

четвертое размыкание (после точки)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

четвертое замыкание (тире)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{9k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

n -ое размыкание (после тире)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{9k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{10k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{11k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{15k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{16k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{17k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{18k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - \dots + e^{-\frac{6nk^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right);$$

n -ое замыкание (точка)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{10k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{11k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{13k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \dots - e^{-\frac{(6n-5)k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right];$$

n -ое размыкание (после точки)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{11k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{13k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{14k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \dots \right. \\ \left. + \dots + e^{-\frac{2(3n-2)k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right];$$

n -ое замыкание (тире)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{7k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{8k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{9k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{12k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{13k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{14k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{15k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + \dots - e^{-\frac{3(2n-1)k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} \right].$$

Приняв $n = \infty$, произведя некоторые упрощения в полученных рядах и суммируя их, придем к следующим формулам:

размыкание (после тире)

$$A_k = \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}};$$

замыкание (точка)

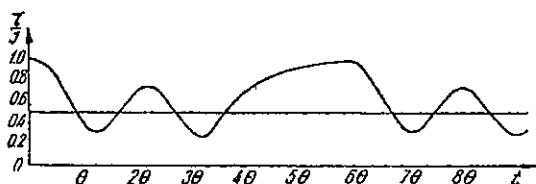
$$A_k = \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}};$$

размыкание (после точки)

$$A_k = \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}};$$

замыкание (тире)

$$A_k = \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCI^2}\theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCI^2}\theta}}.$$

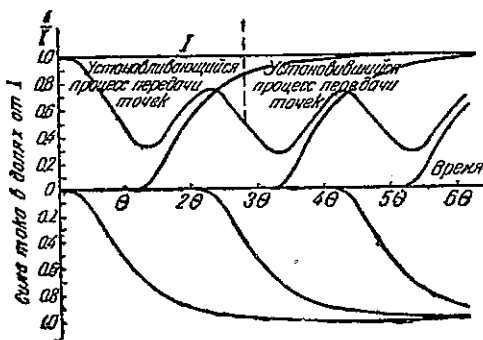


Фиг. 33.

Пользуясь этими формулами, построим график фиг. 33 изменения входящего тока i_t на приемной станции для случая передачи точки — тире (приняв $\alpha=5$ и выражая силу тока в долях от $I = \frac{E}{RI}$).

§ 2. Метод наложения кривых

Построенные выше кривые прерывистого тока можно получить графическим способом „наложения кривых“. Пусть по кабелю передаются точки, причем продолжительность замыкания размыкания по-прежнему остается θ . Отложим по оси абсцисс время, считая за θ единицу времени (фиг. 34). Приняв за начало времени последовательно



Фиг. 34.

точки 0, θ , 2θ , 3θ , 4θ ..., строим ряд кривых нарастающего тока по графику фиг. 12, при этом вверх от оси абсцисс откладываем кривые тока от точек θ , 3θ , 5θ , 7θ ..., вниз от оси абсцисс — от точек 0, 2θ , 4θ , 6θ ... Произведя суммирование ординат кривых, получим график входящего тока при передаче точек по кабелю (фиг. 34). Таким путем можно получить графики тока при передаче тире, точек — тире и вообще

любой комбинации знаков, лишь бы верно были выбраны точки, от которых следует откладывать кривые тока с положительными и отрицательными ординатами.

При рассмотренных выше условиях передачи точек и тире за начало времени для кривых тока с положительными ординатами при передаче тире следует принять точки (фиг. 35): θ , 5θ , 9θ , 13θ и т. д.; при пере-

даче же точек—тире (фиг. 36): 0, 30, 70, 90, 130, 150 и т. д.; для кривых тока с отрицательными ординатами при передаче тире: 0, 40, 80, 120 и т. д. и при передаче точек—тире: 0, 20, 60, 80, 120, 140 и т. д. При этом кривые нарастающего и убывающего тока можно для любого данного кабеля получить практически помощью, например, осциллографа.

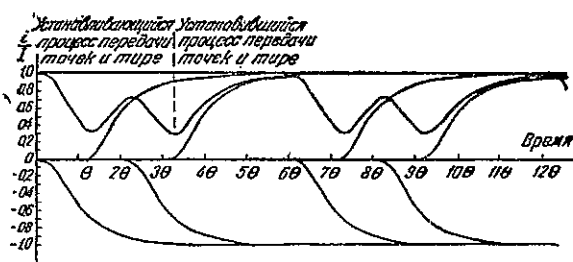
Покажем, что мы имеем право поступать таким образом. Разберем только случай передачи по кабелю точек, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Берем формулы нарастающего и убывающего токов: при размыкании цепи

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l}; \quad (\alpha)$$

при замыкании цепи

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right]. \quad (\beta)$$



Фиг. 36.

Пусть вначале на кабеле имеется установившийся уже ток. Для первого размыкания сила тока определяется формулой (α), как результат вычитания формулы (β) из установившегося тока $I = \frac{E}{Rl}$. По прошествии времени θ после размыкания замкнем ток. Заменяем t в (α) через $\theta + t$ и складываем с (β)

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

По прошествии времени θ от начала первого замыкания разомкнем ток. В полученной формуле заменяем t через $\theta + t$ и вычитаем из нее (β)

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} + e^{-\frac{2k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l}.$$

Заменяя в этой формуле t через $\theta + t$ и складывая с (β), находим формулу второго замыкания

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} \theta} + e^{-\frac{2k^2 \pi^2}{RCl^2} \theta} - e^{-\frac{3k^2 \pi^2}{RCl^2} \theta} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$

Заменяя t через $\theta + t$ и вычитая (β), получим формулу третьего замыкания и т. д.

Приходим к следующим формулам тока для установившегося процесса передачи точек:

при размыкании цепи

$$i = -\frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} \theta}} \cos \frac{k\pi x}{l};$$

при замыкании цепи

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} \theta}} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$

Сравнивая эти формулы с аналогичными формулами предыдущего параграфа (метод определения постоянных интегрирования), убеждаемся, что они тождественны.

Б. ПЕРЕДАЧА ПО КАБЕЛЮ ($L=0$, $G=0$) ПРЕРЫВИСТЫХ ТОКОВ ОБОИХ НАПРАВЛЕНИЙ БЕЗ ПЕРЕРЫВА ЦЕПИ (фиг. 8)

Переходя к анализу распространения по кабелю прерывистого тока двух направлений, т. е. чередующихся положительных и отрицательных импульсов, приведем прежде общие формулы распределения напряжения: при разряде кабеля (кабель соединяется с положительной батареей)

$$u = E \frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l};$$

при разряде кабеля (кабель соединяется с отрицательной батареей)

$$u = -E \frac{l-x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

§ 1. Метод определения постоянных интегрирования

а) Передаются точки

Если кабель вначале соединяется с положительным полюсом батареи, то

$$A_k = \frac{2E}{k\pi},$$

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right].$$

По прошествии времени θ кабель соединяется с отрицательным полюсом батареи

$$E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right] = -E \frac{l-x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Разлагая $2E \frac{l-x}{l}$ в ряд по $\sin \frac{k\pi x}{l}$, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left(2 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

откуда

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(2 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right).$$

При вторичном заряде кабеля таким же образом найдем (время соединения кабеля с положительным полюсом батареи по условию равно времени соединения кабеля с отрицательным полюсом батареи θ)

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(2 - 2e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right);$$

при вторичном разряде

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left(2 - 2e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + 2e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right);$$

при n -ом заряде

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[2 - 2e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + 2e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} - 2e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + \dots \right. \\ \left. + 2e^{-\frac{(2n-3)k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + e^{-\frac{(2n-1)k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right];$$

при n -ом разряде:

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \left[2 - 2e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + 2e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} - 2e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} + \dots \right. \\ \left. + 2e^{-\frac{2(n-1)k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} - e^{-\frac{(2n-1)k^2\pi^2}{RCl^2} \theta} \right].$$

Когда явление передачи равных положительных и отрицательных импульсов установится, можно положить $n = \infty$, тогда постоянные A_k после суммирования определяются по следующим формулам:

при заряде

$$A_k = \frac{4E}{k\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta}};$$

при разряде

$$A_k = \frac{4E}{k\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2} \theta}},$$

т. е. постоянная A_k при заряде и разряде определяется одной и той же формулой. После соответствующей подстановки находим:

при заряде:

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}} \sin \frac{k \pi x}{l} \right];$$

при разряде

$$u = -E \left[\frac{l-x}{l} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}} \sin \frac{k \pi x}{l} \right].$$

Формулы при заряде и разряде кабеля отличаются только знаком. От приведенных формул переходим к формулам для силы тока

$$i = \pm \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

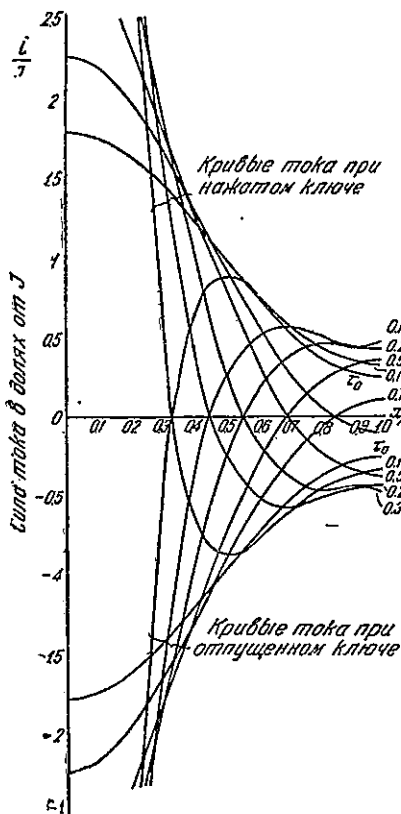
Плюс относится к заряду кабеля, минус к разряду. С увеличением частоты передачи импульсов, следовательно с уменьшением θ , член

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}} \cos k \pi$$

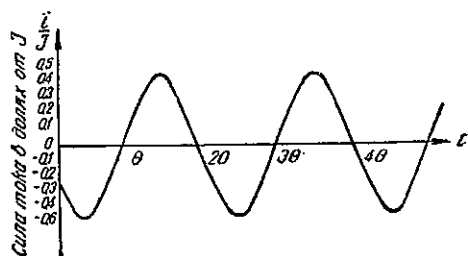
стремится к (-1) и так как время заряда и разряда не превышает θ , т. е. $t \leq \theta$, то с увеличением частоты передачи и член

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}} \cos k \pi$$

также стремится к (-1) , сила же входящего тока — к нулю. При бесконечно большой частоте передачи сила тока в конце кабеля будет равна нулю.



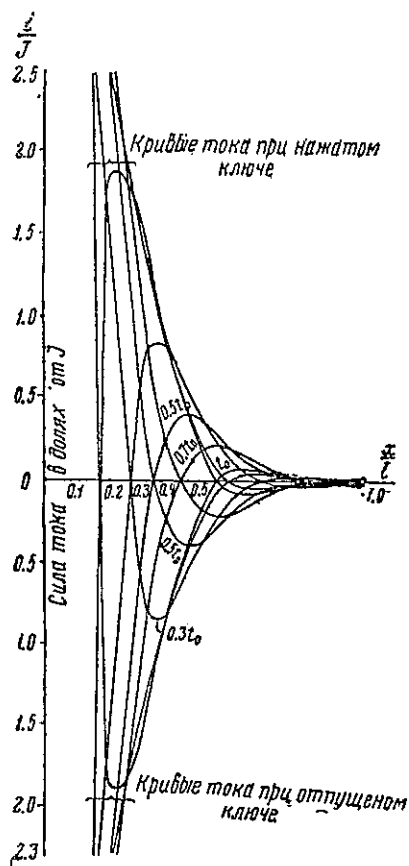
Фиг. 37.



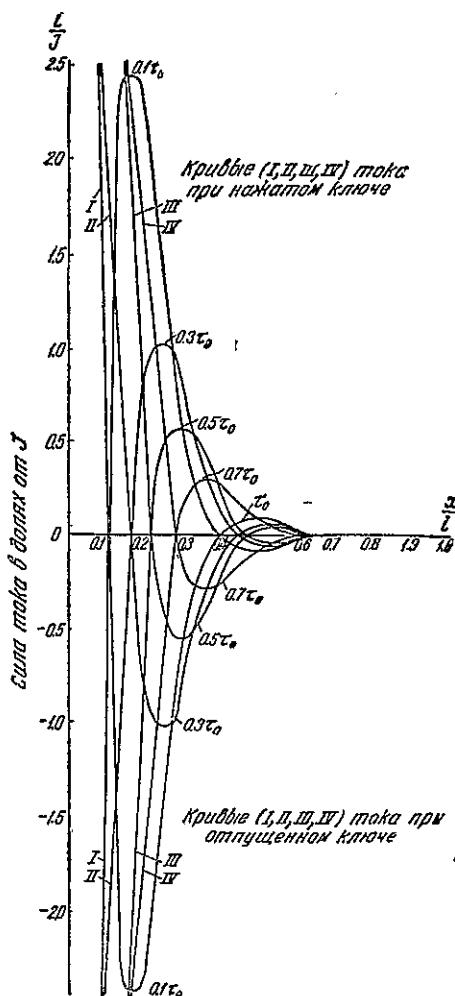
Фиг. 38.

Сравнивая выведенные формулы с аналогичными формулами раздела А, находим, что амплитуда колебаний тока при распространении по

кабелю прерывистого тока разного направления в два раза больше амплитуды прерывистого тока одного направления. Для иллюстрации приведем графики фиг. 37—40. Фиг. 37 и 38 соответствуют продолжительности заряда (разряда) в 5 раз большей постоянной времени кабеля; фиг. 39 — продолжительности заряда (разряда), равной постоянной времени, и фиг. 40 — равной ее половине.



Фиг. 39.



Фиг. 40.

в) Передаются тире

Приходим к следующим формулам (для установившегося уже процесса передачи тире):
при нажатии ключа

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}t}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right];$$

*

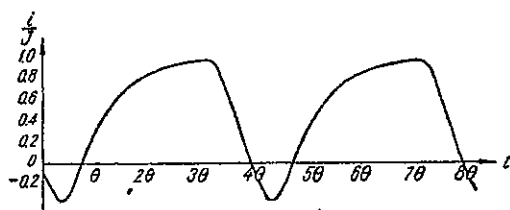
при отпускании ключа

$$u = -E \left[\frac{1-x}{l} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right].$$

От этих формул переходим к формулам для тока:
при нажатии ключа

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right],$$

$$i = -\frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$



Фиг. 41.

Выражая θ в долях от постоянной времени и t в долях от θ , т. е.

$$\theta = \alpha\tau = 0.02915 RCl^2 \alpha \quad \text{и} \quad t = m\theta,$$

получим для $\alpha=5$ график фиг. 41 для входящего тока.

γ) Передаются точки—тире

Продолжительность каждого размыкания и замыкания при послытке точки равна θ , продолжительность замыкания при послытке тире равна 3θ .

Размыкание после тире

$$i = -\frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{3k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right];$$

замыкание (точка)

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{4k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right];$$

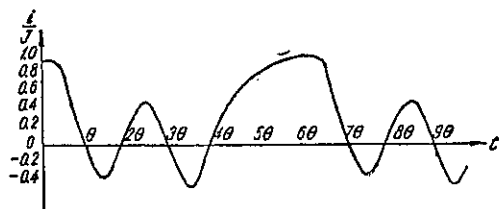
Размыкание (после точки)

$$i = -\frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} + e^{-\frac{2k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} - e^{-\frac{5k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right];$$

замыкание (тире)

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} + e^{-\frac{2k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} - e^{-\frac{3k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}}{1 - e^{-\frac{6k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta}} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

По этим формулам строим график фиг. 42 для входящего тока, приняв $\alpha = 5$.



Фиг. 42.

§ 2. Метод наложения кривых

Будем по кабелю передавать точки. Пусть вначале в цепи имеется установившийся отрицательный ток, т. е.

$$i = -\frac{E}{Rl}.$$

Взяв формулу нарастания тока

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right], \quad (\alpha)$$

удваивая ее и складывая с предыдущей, найдем силу тока при первом нажатии ключа

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

По прошествии времени θ отпускаем ключ. Заменяв в полученной формуле t через $\theta + t$ и вычитая из нее удвоенную формулу (α) , находим силу тока при первом отпуске ключа

$$i = -\frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

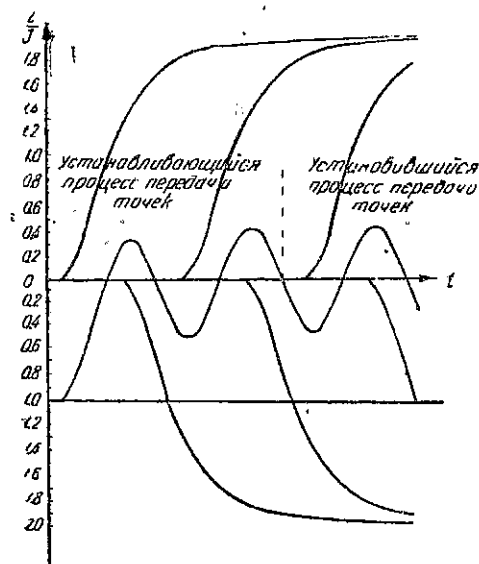
По прошествии времени θ после отпуске ключа опять нажмем ключ. В полученной формуле заменим t через $\theta + t$ и сложим с удвоенной формулой (α) ; тогда

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} + e^{-\frac{2k^2 \pi^2}{RC l^2} \theta} \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RC l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

Продолжая и далее таким же образом, т. е. заменяя в каждой полученной формуле t через $\theta + t$ и складывая ее при нажатии ключа с удвоенной формулой (а) или вычитая из нее формулу (а), получим следующую формулу для тока при установившемся режиме передачи точек:

$$i = \pm \frac{E}{Rl} \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} t}}{1 + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} \theta}} \cos \frac{k \pi x}{l} \right].$$

Плюс относится к нарастанию тока при нажатии ключа, минус — к убыванию тока при отпускании ключа. Сравнивая эту формулу с аналогичной формулой предыдущего раздела (метод определения



Фиг. 43.

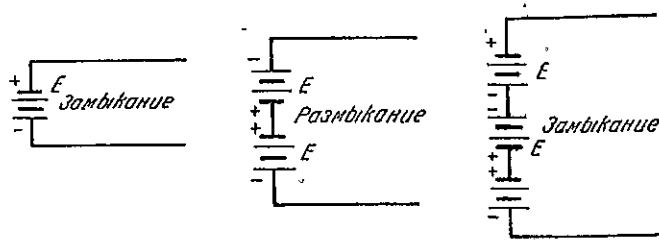
постоянных интегрирования), убеждаемся, что они тождественны. Тождественность результатов дает нам право следующим графическим способом строить кривые тока при передаче любой комбинации знаков. Пусть по кабелю передаются точки, причем продолжительность нажатия или отпускания ключа равна θ . Отложим по оси абсцисс время в долях от θ . От точек 0, 20, 40, 60 и т. д. строим вверх от оси абсцисс кривые тока по удвоенной формуле (а), от точек же θ , 30, 50 и т. д. — кривые тока по той же удвоенной формуле, но вниз от оси абсцисс. Суммируя ординаты всех этих кривых, получим график фиг. 43.

Таким же образом можно построить и графики при передаче тире и точек — тире, причем вверх от оси абсцисс строим кривые по удвоенной формуле (а) для первого случая (передача тире) от точек: 0, 40, 80, 120 и т. д.; для второго (передача точек — тире) 0, 40, 60, 100, 120, 160, 180 и т. д. и вниз для первого случая от точек: 30, 70, 110 и т. д., для второго — от 30, 50, 90, 110, 150, 170 и т. д.

В. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НАЛОЖЕНИЯ КРИВЫХ

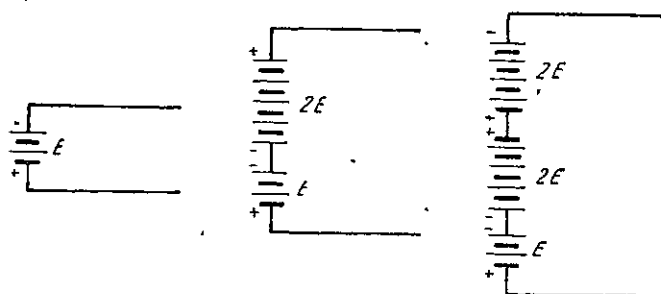
Сопоставления и совпадения результатов, полученных по обоим методам (определения постоянных интегрирования и наложения кривых), в рассмотренных выше примерах было вполне естественно и законно в силу принципа суперпозиции. Действительно, метод наложения кривых по существу сводится к тому, что в силу указанного принципа процессы при разряде линии по схеме фиг. 7 не зависят от того, каким

образом понижаем мы электродвижущую силу в начале линии до нуля, — вынося из линии батарею, или включая последовательно с ней равную и противоположного знака батарею (фиг. 44). Отсюда последовательные включения и выключения батарей можно рассматривать как последовательные включения в линию батарей разных знаков, независимо друг от друга создающих соответствующие процессы вдоль линии.



Фиг. 44.

При передаче сигналов токами противоположных направлений по схеме фиг. 8 мы имеем дело с подобным же явлением: переход от одной батареи к другой при нажатии и отпускании ключа аналогичен последовательному включению батарей, произведенному по схеме фиг. 45. Вначале в цепь включена батарея $-E$ (ключ отпущен), затем вносится двойная батарея противоположного знака $+2E$ (ключ нажат). Следующее отпускание ключа в электрическом отношении равносильно включению в цепь двойной отрицательной батареи $-2E$ и т. д.



Фиг. 45.

Метод наложения кривых может применяться только в тех случаях, когда принцип суперпозиции имеет силу при включении и выключении батареи. Может ли быть применен метод наложения кривых при передаче прерывистых токов по линии при схеме фиг. 2? Нет, этот метод в данном случае не применим, так как электромагнитные процессы вдоль линии при замыкании и размыкании цепи уже не являются независимыми. Анализ передачи прерывистых токов по кабелю при схеме фиг. 2 может быть проведен только на основе метода определения постоянных интегрирования. Иллюстрируем это следующими выкладками.

Общие формулы для напряжения при замыкании и размыкании цепи по схеме (фиг. 2) имеют следующий вид:
при замыкании

$$u = E \frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \sin \frac{k \pi x}{l}; \quad (\alpha)$$

при размыкании

$$u = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \cos \frac{(2k+1) \pi x}{2l}. \quad (\beta)$$

Пусть вначале в цепи был уже установившийся ток

$$I = \frac{E}{Rl}.$$

Не трудно убедиться, что при первом размыкании

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{8E}{(2k+1)^2 \pi^2}, \\ u &= 8E \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \cos \frac{(2k+1) \pi x}{2l}, \\ i &= -\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1) \pi} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \sin \frac{(2k+1) \pi x}{2l}. \end{aligned} \quad (\gamma)$$

По прошествии времени θ после размыкания цепи нажмем ключ и этот момент примем за начало времени; тогда

$$\begin{aligned} 8E \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4 R C l^2} \theta} \cos \frac{(2k+1) \pi x}{2l} &= \\ &= E \frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k \pi x}{l}. \end{aligned}$$

Отсюда определяем постоянную A_k и подставляем ее значение в формулу (α):

$$\begin{aligned} u &= E \left[\frac{l-x}{l} - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k \pi} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \sin \frac{k \pi x}{l} \right] + \\ &+ 8E \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4 R C l^2} \theta} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \cos \frac{(2k+1) \pi x}{2l}, \\ i &= -\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \cos \frac{k \pi x}{l} \right] + \\ &+ \frac{4E}{Rl} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1) \pi} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4 R C l^2} \theta} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{4 R C l^2} t} \sin \frac{(2k+1) \pi x}{2l}. \end{aligned} \quad (\gamma_1)$$

При втором размыкании получим

$$\begin{aligned}
 u &= 2E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}t} \sin \frac{k\pi x}{l} + \\
 &+ 8E \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{(2k+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}(\theta+t)} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \\
 i &= -\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta} \right) e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} + \\
 &+ \frac{4E}{Rl} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}\theta}}{(2k+1)\pi} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}(\theta+t)} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.
 \end{aligned}$$

Проведем то же самое, но методом наложения кривых. Напишем формулы для тока при длительных замыкании и размыкании цепи:

при замыкании

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]; \quad (\alpha_1)$$

при размыкании

$$i = \frac{4E}{Rl} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (\beta_1)$$

По условию вначале в цепи был установившийся ток

$$I = \frac{E}{Rl}.$$

Вычтем из тока I ток, дополнительный до установившегося для приведенного выше тока разряда (β_1) , т. е. ток

$$i = \frac{E}{Rl} \left[1 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right]. \quad (\beta_2)$$

Очевидно, получим разрядный ток (β_1) и (γ) ; заменяя в формуле первого размыкания (β_1) или (γ) время t через $\theta + t$ и складывая с (α_1) , получим ток первого замыкания

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{E}{Rl} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{RCl^2}t} \cos \frac{k\pi x}{l} \right] + \\
 &+ \frac{4E}{Rl} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4RCl^2}(\theta+t)} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (\beta_3)
 \end{aligned}$$

Сравнивая полученную формулу с точной формулой (γ_1) , убеждаемся, что уже при первом замыкании формула тока, полученная способом

наложения кривых, не сходится с формулой, полученной методом определения постоянных интегрирования. При каждом дальнейшем размыкании и замыкании эта разница будет все более и более возрастать. Так, при втором размыкании вместо формулы (7₂) получим

$$i = \frac{2E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{RCl^2} (t + \tau)} \cos \frac{k\pi x}{l} + \\ + \frac{4E}{Rl} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi} \left[1 + e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4RCl^2} 2\tau} \right] e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4RCl^2} t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Желая построить кривые прерывистого тока при передаче сигналов по схеме фиг. 2, мы должны базироваться только на методе определения постоянных интегрирования.

Глава VI

КАБЕЛЬ С ПРИЕМНИКОМ В КОНЦЕ

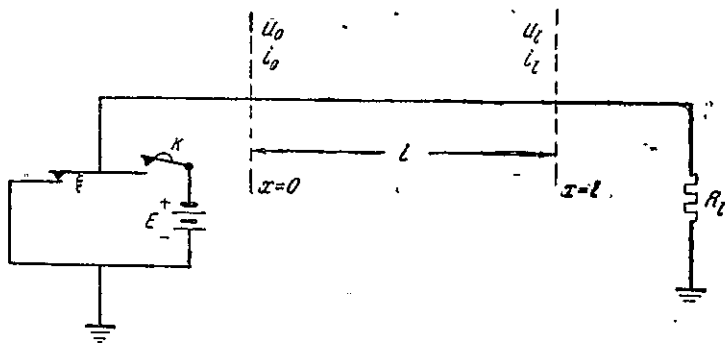
В параграфе втором главы II (стр. 12) мы привели уже общие решения для кабеля, нагруженного разного рода передаточными и приемными устройствами. В этом параграфе рассмотрим более детально некоторые из рассмотренных в общем виде случаев.

§ 1. Замыкание и размыкание цепи на длительное время.

а) В конце кабеля включено активное сопротивление R_l (фиг. 46)

В § 2 главы II (стр. 13) мы вывели формулу (12) для определения постоянной m_k :

$$\operatorname{tg} m_k l = \frac{\sigma_k m_k - f(m_k)}{\sigma_k f(m_k) + m_k},$$



Фиг. 46.

где (фиг. 1)

$$\sigma_k = -\frac{m_k}{R^2 C^2} [C_0 L_0 \rho_0 m_k^4 - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) R C m_k^3 + (\rho_0 + R_0) R^2 C^2], \quad (a)$$

$$f(m_k) = \frac{m_k^3}{R^2 C^2} [C_l L_l \rho_l m_k^4 - (C_l R_l \rho_l + L_l) R C m_k^3 + (\rho_l + R_l) R^2 C^2]. \quad (б)$$

Так как в рассматриваемом случае

$$\text{то } R_0 = p_0 = p_l = 0; \quad L_0 = L_l = 0; \quad R_l \neq 0,$$

$$\sigma_k = 0, \quad f(m_k) = \frac{m_k^2}{R} R_l;$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} m_k l = -m_k \frac{R_l}{R},$$

или

$$\operatorname{tg} m_k l = -\frac{R_l}{Rl} m_k l.$$

Трансцендентные уравнения, подобные полученному, решаются графически. Построим кривые, абсциссы точек пересечения которых давали бы искомые корни. Не трудно видеть, что такими кривыми будут

$$y_1 = \operatorname{tg} x,$$

$$y_2 = -\frac{R_l}{Rl} \frac{x}{57.3}.$$

Рассмотрим три случая, когда $R_l = 0.5Rl$, $R_l = Rl$ и $R_l = 2Rl$. Откладывая по оси абсцисс x и по оси ординат y_1 и y_2 , получим графики фиг. 47. Абсциссы точек a, b, c, d, e и т. д. будут корнями полученного нами трансцендентного уравнения. Мы видим, таким образом, что уравнение имеет бесконечный ряд положительных корней и что все эти корни можно объединить формулой

$$m_k l = (k - 0.5 + \beta) \pi,$$

где k — целые и положительные числа от 0 до ∞ , β меньше $\frac{\pi}{2}$ и с увеличением k стремится к нулю. Приведем в табл. 2 значения β в зависимости от k , причем k будем менять от 1 до 6.

Таблица 2

Зависимость β от k

k	$R_l = 0.5Rl$	$R_l = Rl$	$R_l = 2Rl$
1	0.230	0.145	0.084
2	0.119	0.065	0.033
3	0.078	0.040	0.020
4	0.055	0.029	0.015
5	0.045	0.021	0.010
6	0.036	0.018	0.009

Мы видим, что быстрота затухания ряда β увеличивается вместе с увеличением сопротивления R_l . В пределе, при $R_l = \infty$, мы получим $\beta = 0$, и формула для $m_k l$ превращается в следующую:

$$m_k l = (2k - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Для другого крайнего случая, когда $R_l = 0$, получим

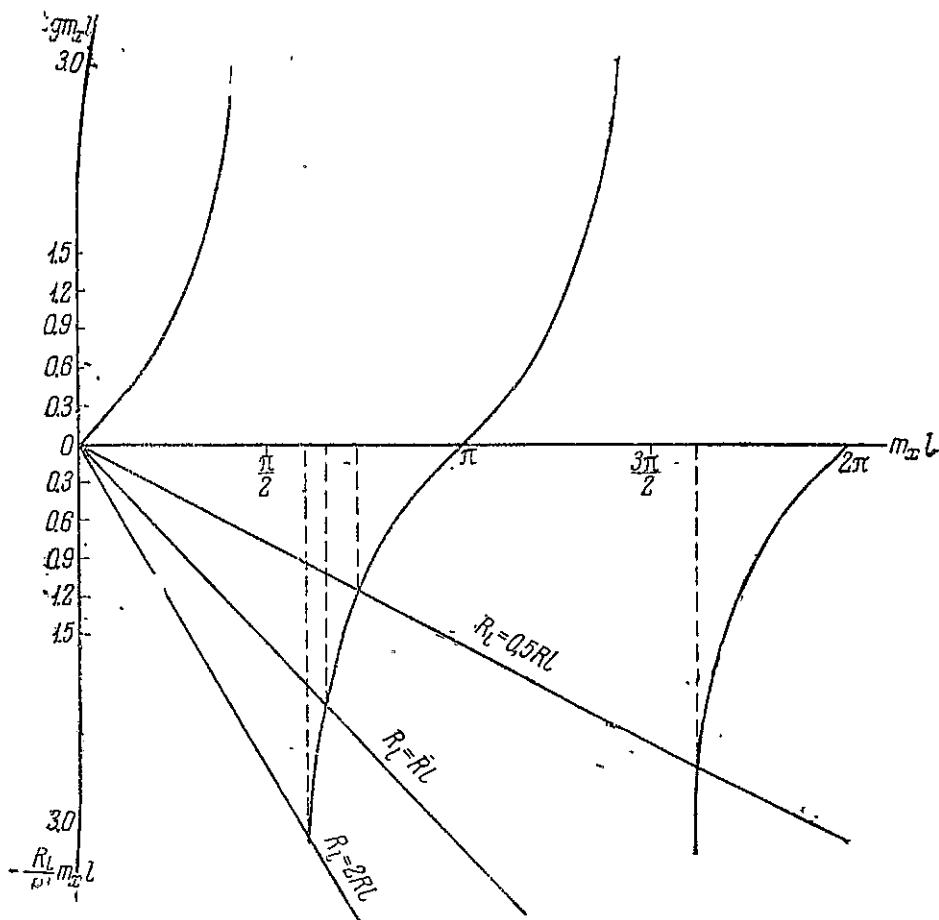
$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad m_k l = k\pi.$$

В § 2 главы II (стр. 14) мы имели формулы (11₁)

$$u_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k', \quad i_2 = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k^2 B_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} P_k,$$

где

$$P_k = \cos m_k x.$$



Следовательно,

$$B_k = \frac{2ERl}{(R_l + Rl)m_k^2 l} A_k,$$

где

$$A_k = \frac{1 + \frac{R_l}{Rl}(1 - \cos m_k l) - \frac{\sin m_k l}{m_k l}}{\frac{1}{m_k l} \sin m_k l \cos m_k l - 1}.$$

Подставляя в эту формулу:

$$\frac{R_l}{Rl} = -\frac{1}{m_k l} \operatorname{tg} m_k l$$

и преобразуя, получим:

$$A_k = \frac{1 + \frac{R_l}{Rl}}{\frac{\sin 2 m_k l}{2 m_k l} - 1}.$$

Таким путем приходим к следующим формулам:
при заряде кабеля

$$u = E \left[\frac{R_l + R(l-x)}{R_l + Rl} + 2 \frac{Rl}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{m_k l} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x \right],$$

$$i = \frac{E}{R_l + Rl} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x \right];$$

при разряде кабеля

$$u = -2E \frac{Rl}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{m_k l} e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x,$$

$$i = 2 \frac{E}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x.$$

Если $R_l = \infty$, то, как мы видели,

$$\beta = 0, \quad m_k l = (2k-1) \frac{\pi}{2},$$

и выведенные же формулы переходят в (27) и (26) для кабеля с изолированным концом [см. § 1 и 2 главы IV (стр. 35)].

Если $R_l = 0$, то

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad m_k l = k\pi,$$

и выведенные формулы превращаются в (15) и (16) для кабеля с заземленным концом [см. § 3 главы II (стр. 21)].

Выражая время в долях от постоянной времени τ , перепишем выведенные формулы тока i в следующем виде:

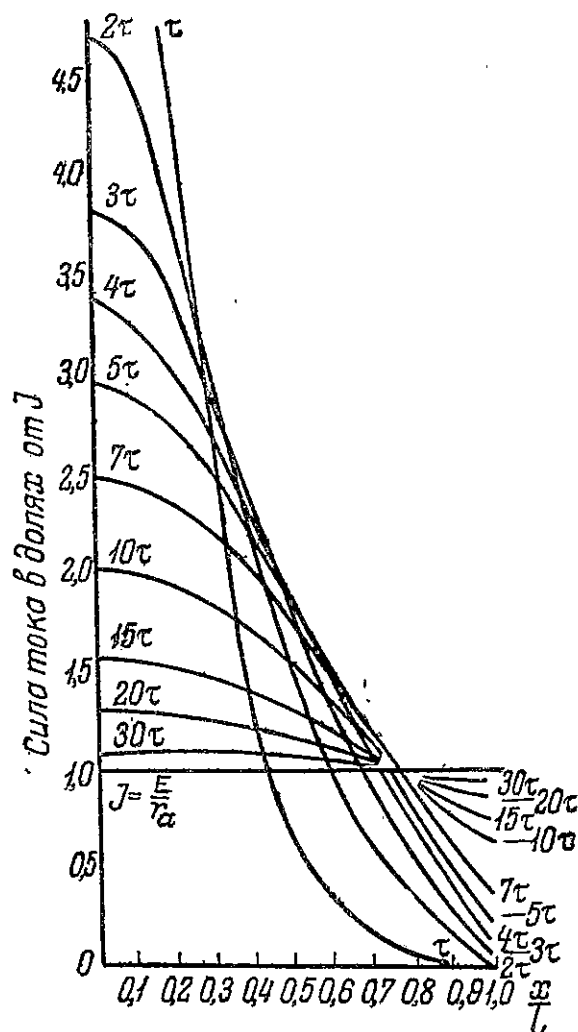
при заряде кабеля

$$i = \frac{E}{R_l + Rl} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-0.02915 (m_k l)^2 n} \cos m_k x \right];$$

при разряде кабеля

$$i = 2 \frac{E}{R_l + R_l} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-0.02915 (m_k l)^{0.9} n} \cos m_k x.$$

Для иллюстрации подсчитаем по формуле для тока при заряде кабеля соответствующие значения тока, полагая $R_l = Rl$, и построим графики (фиг. 48). Полагая же $R_l = 0$, $R_l = 0.5Rl$, $R_l = Rl$ и $R_l = 2Rl$, подсчитаем табл. 3 для входящего тока и построим графики (фиг. 49).



Фиг. 48.

Таблица 3

Входящий ток i_l в долях от I

n	$R_l = 0$	$R_l = 0.5Rl$
1	0.0012	0
2	0.0641	0.0290
3	0.2181	0.0792
4	0.3866	0.1544
5	0.5311	0.2560
6	0.6455	0.3531
7	0.7325	0.4391
8	0.7993	0.5169
9	0.8494	0.5830
10	0.8871	0.6407
15	0.9712	0.8328
20	0.9865	0.9213
30	1	0.9730
40	1	0.9967
50	1	0.9992

	$R_l = Rl$	$Rl = 2Rl$
1	0	0
2	0.0182	0.0173
3	0.0679	0.0497
4	0.1384	0.1083
5	0.2202	0.1814
6	0.2968	0.2481
7	0.3709	0.3265
8	0.4396	0.3849
9	0.5036	0.4420
10	0.5588	0.4954
15	0.7563	0.6955
20	0.8702	0.8159
30	0.9597	0.9236
40	0.9877	0.9765
50	0.9948	0.9910

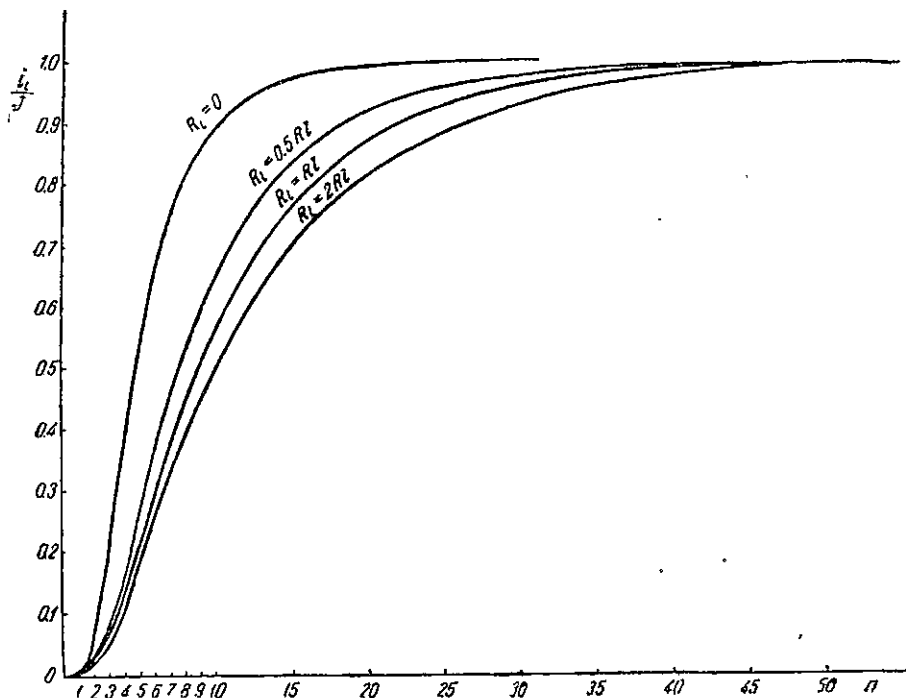
Чем больше сопротивление R_p , тем медленнее нарастает ток в конце кабеля.

б) В конце кабеля выключен конденсатор емкостью C_l (фиг. 50)

В § 2 главы II (стр. 19) мы пришли к следующей формуле для m_k :

$$\operatorname{tg} m_k l = \frac{Cl}{C_l} \frac{1}{m_k l}.$$

Корнями полученного трансцендентного уравнения будут абсциссы пе-

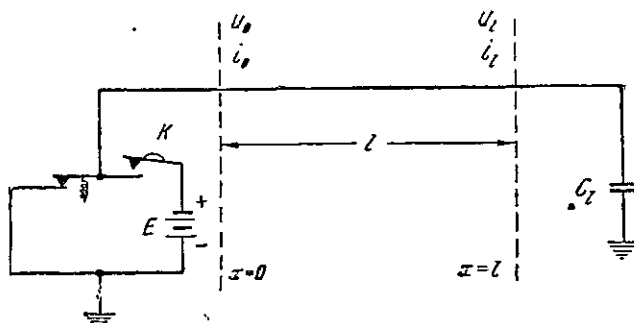


Фиг. 49.

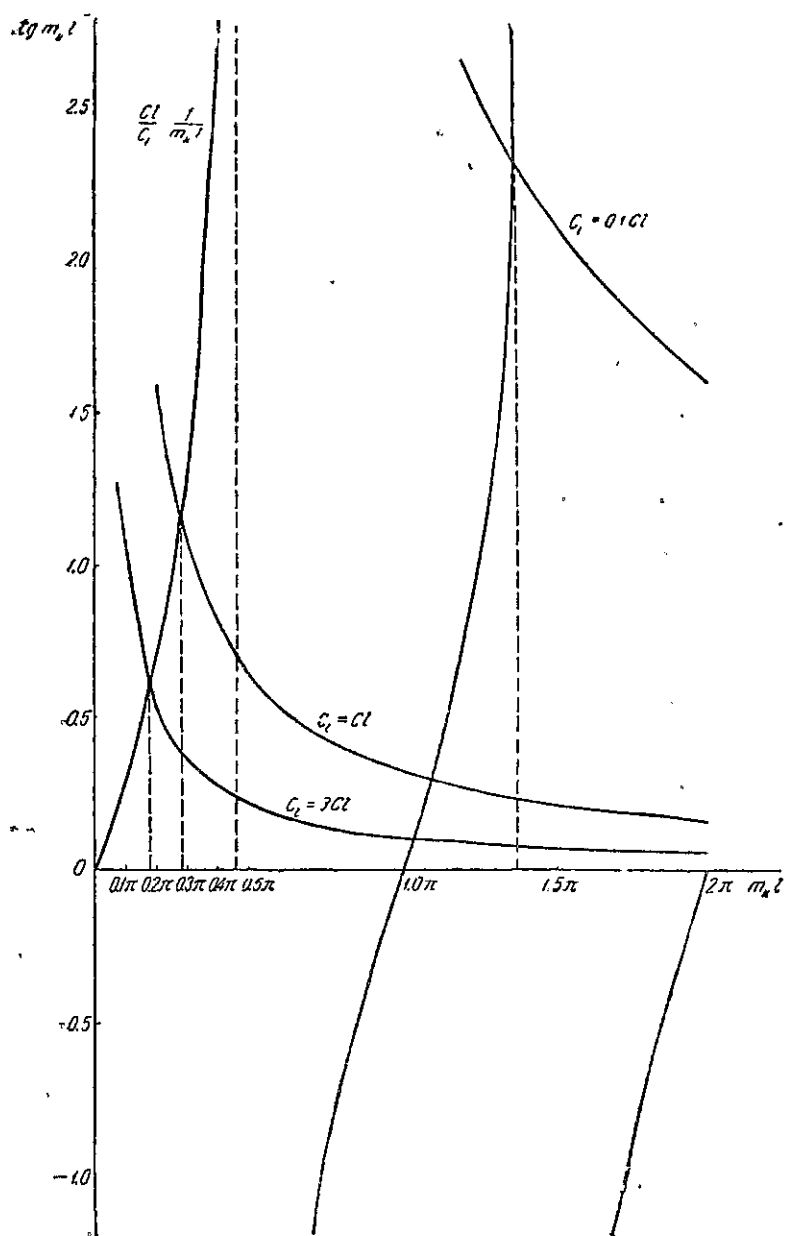
ресечения двух кривых (фиг. 51)

$$y_1 = \operatorname{tg} x,$$

$$y_2 = \frac{Cl}{C_l} \frac{57.3}{x}.$$



Фиг. 50.



Фиг. 51.

Из фиг. 51 видно, что все корни приведенного трансцендентного уравнения можно объединить формулой

$$m_k l = (k - 1 + \beta) \pi;$$

при условии

$$C_l = 0.1 Cl, \quad C_l = Cl, \quad C_l = 3Cl$$

получаем следующие значения β для k от 1 до 6 (табл. 4).

Таблица 4

Зависимость β от k			
k	$C_l = 0.1 Cl$	$C_l = Cl$	$C_l = 3Cl$
1	0.455	0.273	0.172
2	0.371	0.081	0.033
3	0.308	0.049	0.017
4	0.247	0.038	0.011
5	0.205	0.031	0.008
6	0.175	0.026	0.006

С увеличением C_l значение β уменьшается и в пределе, при $C_l = \infty$, $\beta = 0$; формула же для постоянных m_k примет вид

$$m_k l = (k - 1) \pi.$$

Задача теряет смысл, так как заданное временное условие (для $t = 0$ должно быть $u = E$) при $C_l = \infty$ не осуществимо. Действительно, при емкости $C_l = \infty$ мы имеем для начального условия выражение, соответствующее случаю заземления приемного конца кабеля, т. е.

для $t = 0$

$$u = E \frac{l - x}{l};$$

для $C_l = 0$

$$\beta = 0.5 \text{ и } m_k l = (k - 0.5) \pi,$$

т. е. случай кабеля с изолированным концом.

В § 2 главы II (стр. 19) мы видели, что постоянная B_k определяется формулой

$$B_k = - \frac{C \int_0^l \varphi(x) P_k' dx + C_l \varphi(x) P_{kl}'}{C \int_0^l P_k'^2 dx + C_l P_{kl}^2},$$

где

$$\varphi(x) = E.$$

Произведя соответствующие интегрирования, подстановку и упрощения, приходим к следующим результатам:

при заряде кабеля

$$u = E \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m_k l} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x \right],$$

$$i = 2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x;$$

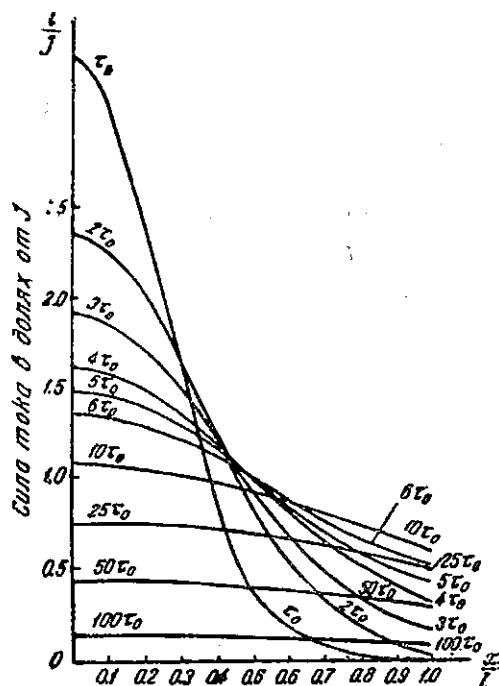
при разряде кабеля

$$u = 2E \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m_k l} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x,$$

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x,$$

где

$$A_k = \frac{1 - \cos m_k l + \frac{C_l}{Cl} m_k l \sin m_k l}{1 - \frac{1}{m_k^2 l} \sin m_k l \cos m_k l + 2 \frac{C_l}{Cl} \sin^2 m_k l}.$$



Фиг. 52.

Упростим последнюю формулу. Из формулы

$$\operatorname{tg} m_k l = \frac{Cl}{C_l} \frac{1}{m_k l}$$

получим

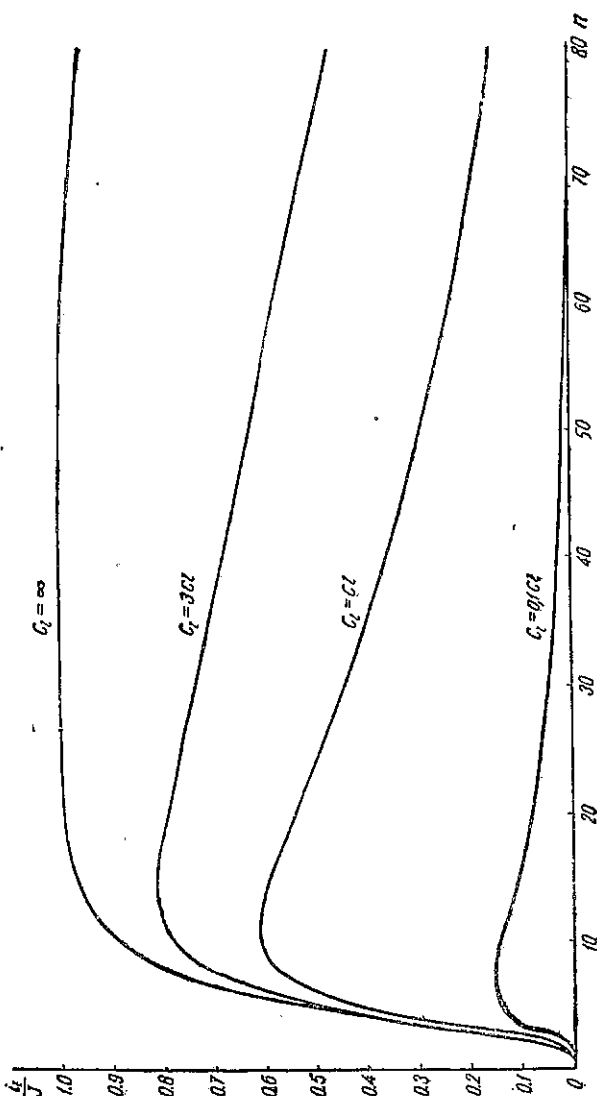
$$\frac{C_l}{Cl} m_k l = \frac{\cos m_k l}{\sin m_k l}$$

и

$$\frac{C_l}{Cl} = \frac{1}{m_k l} \frac{\cos m_k l}{\sin m_k l}.$$

Подставляя первое соотношение в числитель формулы для A_k , второе в знаменатель, получим

$$A_k = \frac{1 - \cos m_k l + \cos m_k l}{1 - \frac{1}{m_k l} \sin m_k l \cos m_k l + 2 \frac{1}{m_k l} \sin m_k l \cos m_k l},$$



Фиг. 53.

или

$$A_k = \frac{1}{1 + \frac{\sin 2m_k l}{2m_k l}}.$$

Выражая время t в долях от постоянной времени τ , по формуле для тока при заряде кабеля построим график фиг. 52.

*

Чтобы судить о зависимости входящего тока от величины емкости включенного в конце линии конденсатора, подсчитаем табл. 5 и построим график фиг. 53.

Таблица 5

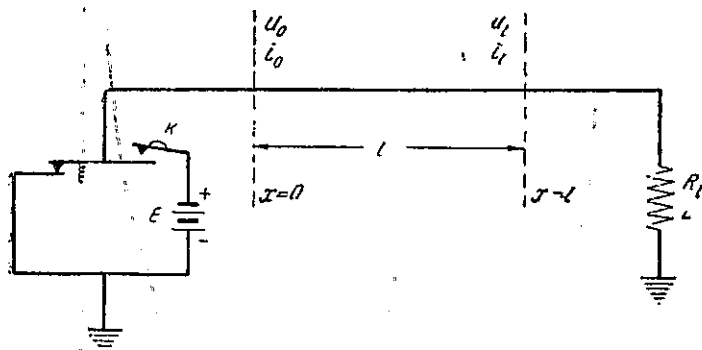
Входящий ток i_l в долях от $I = \frac{E}{Rl}$

n	$C_l = 0.1Cl$	$C_l = Cl$	$C_l = 3Cl$	$C_l = \infty$	n	$C_l = 0.1Cl$	$C_l = Cl$	$C_l = 3Cl$	$C_l = \infty$
1	0.0000	0.0000	0.0010	0.0001	20	0.0777	0.5373	0.7909	0.9865
2	0.0034	0.0372	0.0654	0.0641	30	0.0430	0.4392	0.7025	1
3	0.0814	0.1689	0.2094	0.2181	40	0.0238	0.3545	0.5740	1
4	0.1195	0.3247	0.3693	0.3866	50	0.0132	0.2878	0.5193	1
5	0.1403	0.4292	0.4966	0.5311	60	0.0073	0.2302	0.5694	1
6	0.1490	0.5020	0.5943	0.6455	70	0.0040	0.1878	0.5241	1
7	0.1510	0.5499	0.6662	0.7325	80	0.0020	0.1315	0.4817	1
8	0.1485	0.5828	0.7188	0.7993	90	0.0013	0.1212	0.4431	1
9	0.1452	0.6030	0.7567	0.8494	100	0.0007	0.0969	0.4072	1
10	0.1370	0.6105	0.1793	0.8871	150	0.0000	0.0000	0.2677	1
15	0.1041	0.5925	0.8120	0.9712	1000	0.0000	0.0000	0.0002	1

в) В конце кабеля включен электромагнитный приемник R_l , L_l (фиг. 54)

Исходя из основных решений § 2 главы II, приходим к следующей формуле

$$\operatorname{tg} m_k l = \frac{L_l}{(Rl)^2 Cl} (m_k l)^3 - \frac{R_l}{Rl} m_k l.$$



Фиг. 54.

Полученное трансцендентное уравнение определяет значения m_k для любого частного случая, причем все корни уравнения можно объединить формулой

$$m_k l = (k + \beta) \pi,$$

где

$$k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

и β определяется из чертежа, построенного по приведенному уравнению.

При заряде кабеля получим

$$u = E \left[\frac{R_l + R(l-x)}{R_l + Rl} + 2 \frac{Rl}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m_k l} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x \right],$$

$$i = \frac{E}{R_l + Rl} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x \right].$$

Разряд же кабеля выражается формулами

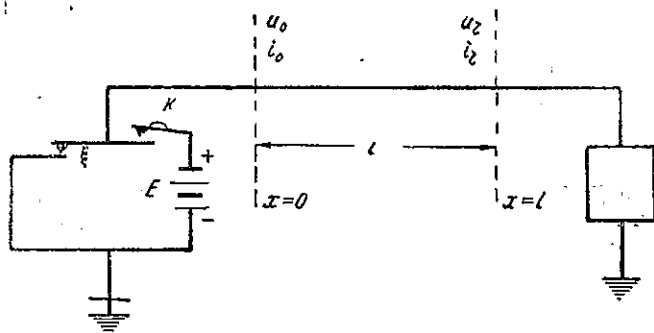
$$u = -2E \frac{Rl}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m_k l} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \sin m_k x,$$

$$i = 2 \frac{E}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k e^{-\frac{m_k^2}{RC} t} \cos m_k x,$$

причем A_k легко определяется указанным в предыдущих случаях методом.

§ 2. Передача прерывистого тока по кабелю с приемником на конце

Каковы бы ни были передающие и приемные устройства на кабеле, рассмотренный выше метод определения постоянных, интегрирования применим к любому случаю. Что касается метода наложения кривых,



Фиг. 55.

то им можно пользоваться, как мы уже убедились, лишь в тех случаях, когда к электромагнитным процессам вдоль кабеля при заряде и разряде кабеля может быть применен метод суперпозиции, например при схеме фиг. 55 и 56, которые мы и будем иметь в виду в дальнейшем.

а) В конце кабеля включено активное сопротивление

а) Передача сигналов (точек) с одной батареей (фиг. 46 и 55)

Приходим к следующим формулам:

при нажатии ключа

$$i = \frac{E}{R_l + Rl} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \frac{e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}}{1 + e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}} \cos m_k x \right];$$

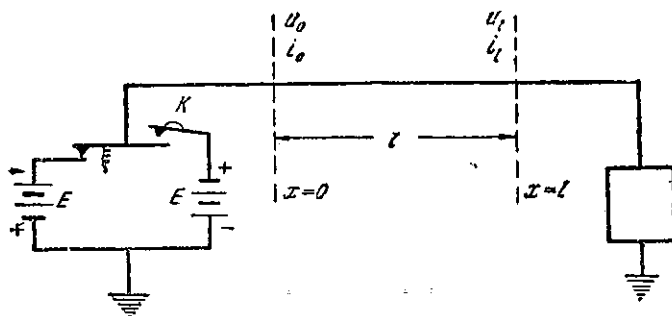
при отпускании ключа

$$i = 2 \frac{E}{R_l + Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \frac{e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}}{1 + e^{-\frac{m_k^2}{RC} \theta}} \cos m_k x.$$

- б) Передача сигналов (точек) с двумя батареями (фиг. 56)
Приходим к формуле

$$i = \pm \frac{E}{R_l + Rl} \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \frac{e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}}{1 + e^{-\frac{m_k^2}{RC} \theta}} \cos m_k x \right].$$

Значения постоянных m_k и A_k приведены в § 1 настоящей главы (пункт „а“).



Фиг. 56.

Иллюстрируем приведенные формулы. Пусть $R_l = Rl$, и продолжительность замыкания, а также размыкания, равна $\theta = 5\tau$. Подставляя в соответствующие формулы для тока, получим графики фиг. 57 (по схеме фиг. 55) и фиг. 58 (по схеме фиг. 56). На фиг. 59 приведены кривые входящего прерывистого тока (точки) по схемам фиг. 55 и 56.

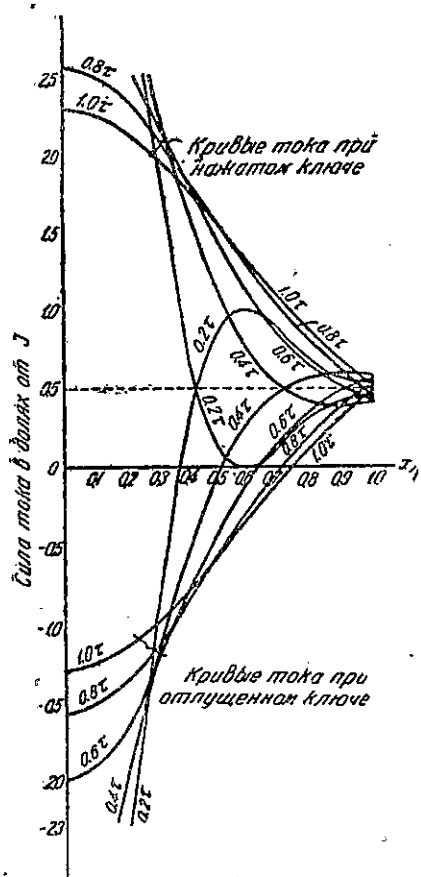
б) В конце кабеля включен разделительный конденсатор

- а) Передача сигналов (точек) с одной батареей (фиг. 50 и 55)

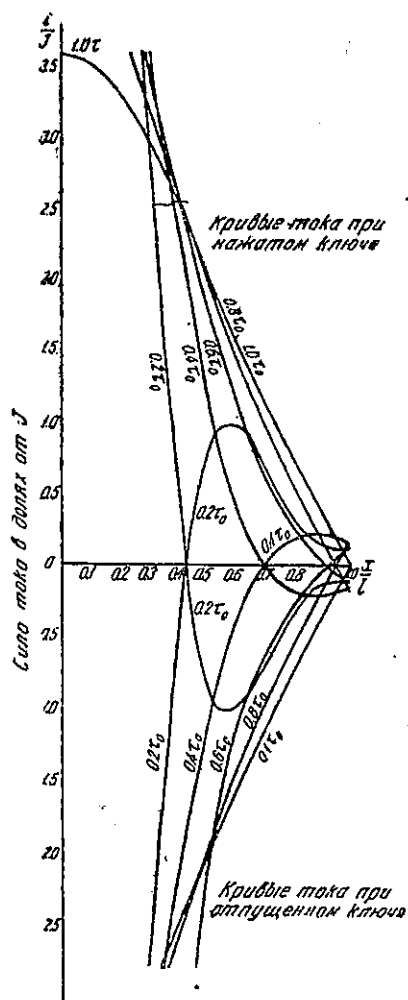
$$i = \pm 2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \frac{e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}}{1 + e^{-\frac{m_k^2}{RC} \theta}} \cos m_k x.$$

- б) Передача сигналов (точек) с двумя батареями (фиг. 56)

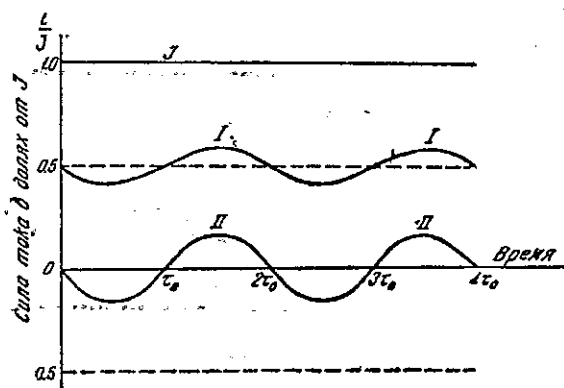
$$i = \pm 4 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \frac{e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}}{1 + e^{-\frac{m_k^2}{RC} \theta}} \cos m_k x.$$



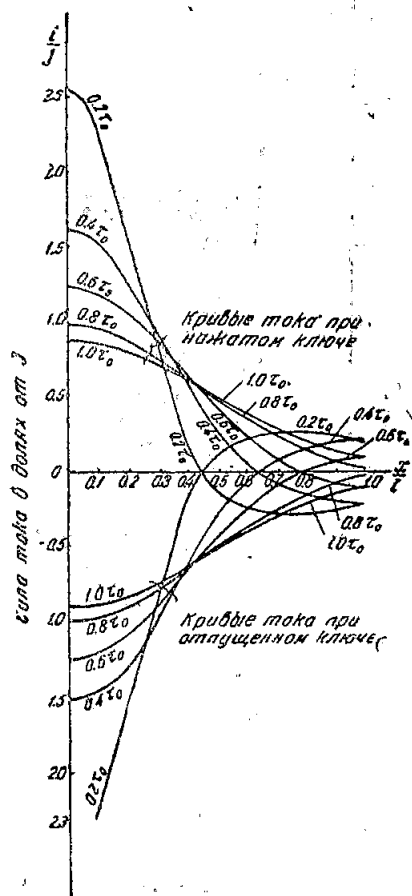
Фиг. 57.



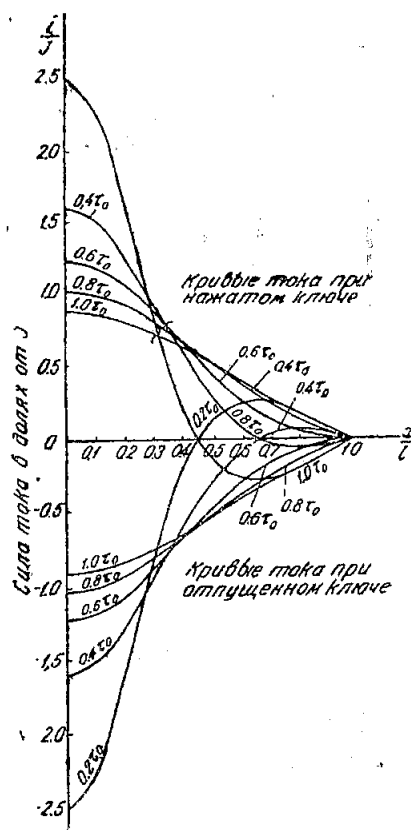
Фиг. 58.



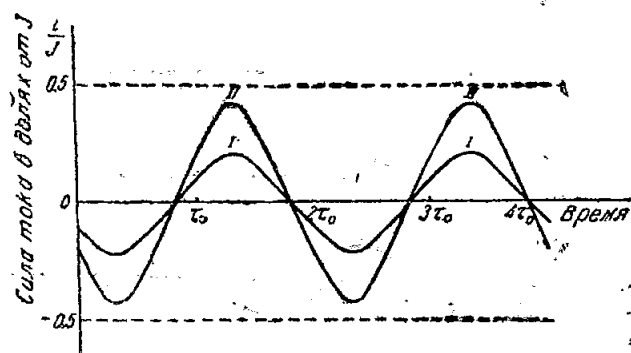
Фиг. 59.



Фиг. 60.



Фиг. 62.



Фиг. 61.

Плюс в обеих формулах относится к заряду кабеля, минус — к разряду; постоянные A_k и m_k определены в пункте „б“ § 1 настоящей главы.

Пусть

$$C_l = Cl \quad \text{и} \quad \theta = 5\tau.$$

При этих условиях будем иметь графики фиг. 60 для случая работы с одной батареей и графики входящего тока фиг. 61 для обоих рассмотренных режимов работы.

в) Конец кабеля изолпропан

При работе с одной батареей имеем

$$i = \pm 2 \frac{E}{Rl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k l} \frac{e^{-\frac{m_k^2}{RC} t}}{1 + e^{-\frac{m_k^2}{RC} \theta}} \cos m_k x.$$

Плюс относится к заряду кабеля, минус — к разряду; при работе с двумя батареями формула удваивается; значение постоянной m_k берется из главы IV. Полагая $\theta = 5\tau$, получим графики фиг. 62 при работе с одной батареей; при работе с двумя батареями следует на приведенных графиках удвоить силу тока.

На этом мы заканчиваем I часть монографии — анализ кабеля, индуктивностью L и проводимостью изоляции G которого можно пренебречь. Во II части проведем анализ общего случая — случая надземной линии с учетом всех ее первичных параметров.

АНАЛИЗ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ЛИНИИ

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВДОЛЬ НАДЗЕМНОЙ ЛИНИИ

Глава I

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ КОНЦОВ ЛИНИИ НА УСТАНОВЛИВАЮЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Общие положения

При выводе общих решений телеграфных уравнений

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

мы представляем искомые функции u и i как суммы функций

$$\begin{aligned}u &= u_1 + u_2, \\ i &= i_1 + i_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где функции u_1 и i_1 — установившиеся уже значения электромагнитных процессов вдоль линии, u_2 и i_2 — переходные процессы и u и i — полные устанавливающиеся процессы.

Функции u_1 и i_1 должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}-\frac{du_1}{dx} &= Ri_1, \\ -\frac{di_1}{dx} &= Gu_1,\end{aligned}\tag{2}$$

а функции u_2 и i_2 — полной системе телеграфных уравнений

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u_2}{\partial x} &= Ri_2 + L \frac{\partial i_2}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i_2}{\partial x} &= Gu_2 + C \frac{\partial u_2}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3}$$

Общие решения последних уравнений (2) и (3) могут быть представлены в следующем виде:

а) уравнений (2)

$$u_1 = \varphi(x) = A_1 e^{-\beta x} + A_2 e^{\beta x},$$

$$i_1 = \psi(x) = \frac{1}{Z_y} (A_1 e^{-\beta x} - A_2 e^{\beta x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования

$$\beta = \sqrt{RG} \quad \text{и} \quad Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}};$$

б) уравнений (3)

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k,$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \mathfrak{T}_k X_k', \quad (4)$$

где

$$b = \frac{RC + LG}{2LC},$$

$$T_k = A_k \operatorname{ch} n_k t + B_k \operatorname{sh} n_k t,$$

$$\mathfrak{T}_k = C_k \operatorname{ch} n_k t + D_k \operatorname{sh} n_k t,$$

$$X_k = E_k \sin m_k x + F_k \cos m_k x,$$

$$n_k = \sqrt{\left(\frac{RC - LG}{2LC}\right)^2 - \frac{m_k^2}{LC}}.$$

Вспомним еще следующие соотношения:

$$\frac{(G - bC) T_k + C T_k'}{\mathfrak{T}_k} = m_k^2, \quad (5)$$

$$\frac{(R - bL) \mathfrak{T}_k + L \mathfrak{T}_k'}{T_k} = -1,$$

$$m_k^2 C_k = (G - bC) A_k + C n_k B_k, \quad (6)$$

$$m_k^2 D_k = (G - bC) B_k + C n_k A_k.$$

Общие же решения телеграфных уравнений имеют следующий вид:

$$u = A_1 e^{-\beta x} + A_2 e^{\beta x} + e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k,$$

$$i = \frac{1}{Z_y} (A_1 e^{-\beta x} - A_2 e^{\beta x}) + e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \mathfrak{T}_k X_k'.$$

§ 2. Линия с приемными и передающими устройствами (фиг. 1)

Задаемся пограничными и временными условиями.

Пограничные условия для процессов u_1 и i_1 :

при $x=0$

$$u_{10} = E - (R_0 + \rho_0) i_{10},$$

при $x=l$

$$u_{1l} = (Rl + \rho l) i_{1l}.$$

Таким пограничным условиям, как не трудно убедиться, соответствуют следующие решения:

$$u_1 = \varphi(x) = EZ_y \frac{(Rl + \rho l) \operatorname{ch} \beta(l-x) + Z_y \operatorname{sh} \beta(l-x)}{(R_0 + \rho_0 + Rl + \rho l) Z_y \operatorname{ch} \beta l + [(R_0 + \rho_0)(Rl + \rho l) + Z_y^2] \operatorname{sh} \beta l},$$

$$i_1 = \psi(x) = E \frac{(Rl + \rho l) \operatorname{sh} \beta(l-x) + Z_y \operatorname{ch} \beta(l-x)}{(R_0 + \rho_0 + Rl + \rho l) Z_y \operatorname{ch} \beta l + [(R_0 + \rho_0)(Rl + \rho l) + Z_y^2] \operatorname{sh} \beta l}.$$

Пограничные условия для полных процессов u и i :

при $x=0$

$$u_0 = E - C_0 L_0 \rho_0 \frac{d^2 i_0}{dt^2} - (C_0 R_0 \rho_0 + L_0) \frac{di_0}{dt} - (\rho_0 + R_0) i_0;$$

при $x=l$

$$u_l = C_l L_l \rho_l \frac{d^2 i_l}{dt^2} + (C_l R_l \rho_l + L_l) \frac{di_l}{dt} + (\rho_l + R_l) i_l.$$

И так как

$$u_2 = u - u_1,$$

то пограничные условия для переходных процессов u_2 и i_2 должны быть сформулированы следующим образом:

при $x=0$

$$u_{20} = -C_0 L_0 \rho_0 \frac{d^2 i_{20}}{dt^2} - (C_0 R_0 \rho_0 - L_0) \frac{di_{20}}{dt} - (\rho_0 + R_0) i_{20};$$

при $x=l$

$$u_{2l} = C_l L_l \rho_l \frac{d^2 i_{2l}}{dt^2} + (C_l R_l \rho_l + L_l) \frac{di_{2l}}{dt} + (\rho_l + R_l) i_{2l}.$$

Пользуясь решениями (4) и пограничными условиями для начала линии ($x=0$), а также имея в виду, что

$$\mathfrak{F}_k'' = -n_k^2 \mathfrak{F}_k,$$

напишем

$$\frac{X_{k0}}{X_{k0}'} = -\frac{a_1 \mathfrak{F}_k + a_2 \mathfrak{F}_k'}{T_k},$$

где

$$a_1 = R_0 + \rho_0 - L_0 b - C_0 \rho_0 [R_0 b - L_0 (b^2 - n_k^2)],$$

$$a_2 = L_0 + C_0 \rho_0 (R_0 - 2L_0 b).$$

Но $X_{k0} = F_k$; $X_{k0}' = m_k F_k$.

Обозначая

$$\frac{F_k}{E_k} = a_k,$$

получим

$$-\frac{a_1 \mathfrak{Z}_k + a_2 \mathfrak{Z}_k'}{T_k} = \frac{a_k}{m_k}. \quad (7)$$

Исходя же из пограничных условий для конца линии ($x=l$), получим

$$\frac{X_{kl}}{X'_{kl}} = \frac{a_3 \mathfrak{Z}_k + a_4 \mathfrak{Z}_k'}{T_k},$$

где

$$a_3 = R_l + \rho_l - L_l b - C_l \rho_l [R_l b - L_l (b^2 - n_k^2)],$$

$$a_4 = L_l + C_l \rho_l (R_l - 2bL_l).$$

И так как

$$X_{kl} = E_k (\sin m_k l + a_k \cos m_k l),$$

$$X'_{kl} = E_k m_k (\cos m_k l - a_k \sin m_k l),$$

то

$$\frac{a_3 \mathfrak{Z}_k + a_4 \mathfrak{Z}_k'}{T_k} = \frac{\operatorname{tg} m_k l + a_k}{m_k (1 - a_k \operatorname{tg} m_k l)}. \quad (8)$$

Выражения (7) и (8), а также (5) дают возможность определить постоянную a_k и постоянную m_k . Так как в нашу задачу не входит вывод сложнейших формул u и i для общего случая, то ограничимся рассмотрением лишь ряда частных случаев.

§ 3. Частные случаи

а) Пусть $R_0 = R_l = \rho_0 = 0$, $L_0 = L_l = 0$, т. е. оба конца линии заземлены. В этом случае

$$a_k = 0, \quad \operatorname{tg} m_k l = 0, \quad \text{т. е. } \sin m_k l = 0,$$

следовательно,

$$m_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Приходим к следующим выражениям для u_2 и i_2 :

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} E_k T_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (9)$$

$$i_2 = A_0 + e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} E_k m_k \mathfrak{Z}_k \cos \frac{k\pi x}{l},$$

где A_0 — некоторая функция от t , удовлетворяющая телеграфному уравнению

$$0 = RA_0 + LA_0'.$$

б) Пусть $R_0 = \rho_0 = 0$, $L_0 = 0$, $R_l = \infty$, т. е. начало линии замкнуто накоротко, конец изолирован; тогда

$$a_k = 0, \quad \operatorname{tg} m_k l = \infty, \quad \text{т. е. } \cos m_k l = 0,$$

следовательно,

$$m_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad \text{где } k=0, 1, 2, 3, \dots$$

и

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k T_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k m_k \mathfrak{F}_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

в) Пусть $R_0 = \infty$, $R_l = 0$, $L_l = 0$, т. е. начало линии изолировано, конец замкнут накоротко; тогда

$$a_k = \infty, \quad \operatorname{ctg} m_k l = 0, \quad \text{т. е. } \cos m_k l = 0,$$

значит

$$m_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad \text{где } k=0, 1, 2, 3, \dots$$

и

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} F_k T_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} F_k m_k \mathfrak{F}_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

г) Пусть $R_0 = \infty$, $R_l = \infty$, т. е. оба конца линии изолированы тогда

$$a_k = \infty, \quad \operatorname{ctg} m_k l = \infty, \quad \sin m_k l = 0,$$

значит

$$m_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \text{где } k=0, 1, 2, 3, \dots$$

и

$$u_2 = B_0 + e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} F_k T_k \cos \frac{k\pi x}{l},$$

$$i_2 = -e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} F_k m_k \mathfrak{F}_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

д) Пусть $R_0 = \rho_0 = 0$, $L_0 = 0$, $\frac{L_l}{R_l} = \frac{L}{R}$; тогда

$$a_k = 0, \quad \frac{R_l}{R} = \frac{1}{m_k} \operatorname{tg} m_k l,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} m_k l = m_k \frac{R_l}{R}.$$

Из последнего уравнения определим все значения постоянной m_k графическим способом, после чего получим

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k T_k \sin m_k x,$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k m_k \mathfrak{Z}_k \cos m_k x.$$

е) Пусть $\frac{R_0}{L_0} = \frac{R}{L}$, $R_l = 0$, $L_l = 0$;

тогда

$$a_k = \frac{R_0}{R} m_k, \quad \operatorname{tg} m_k l = m_k \frac{R_0}{R}.$$

Получим

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k T_k \left(\sin m_k x + \frac{R_0}{R} m_k \cos m_k x \right),$$

$$i_2 = e^{-bt} \sum_{k=0}^{k=\infty} E_k m_k \mathfrak{Z}_k \left(\cos m_k x - \frac{R_0}{R} m_k \sin m_k x \right).$$

ж) Пусть $\rho_0 = \rho_l = 0$ и $\frac{L_0}{R_0} = \frac{L_l}{R_l} = \frac{L}{R}$;

тогда

$$\frac{L_0}{R_0 - L_0 b} = \frac{L_l}{R_l - L_l b} = \frac{L}{R - Lb},$$

$$\begin{array}{l|l} a_1 = R_0 - L_0 b, & a_3 = R_l - L_l b, \\ a_2 = L_0, & a_4 = L_l. \end{array}$$

Из (5) находим

$$\frac{\mathfrak{Z}_k + \frac{L}{R - Lb} \mathfrak{Z}_k'}{T_k} = -\frac{1}{R - Lb}.$$

Из (7) и (8) получим

$$(R_0 - L_0 b) \frac{\mathfrak{Z}_k + \frac{L_0}{R_0 - L_0 b} \mathfrak{Z}_k'}{T_k} = -\frac{a_k}{m_k},$$

$$(R_l - L_l b) \frac{\mathfrak{Z}_k + \frac{L_l}{R_l - L_l b} \mathfrak{Z}_k'}{T_k} = \frac{\operatorname{tg} m_k l + a_k}{m_k (1 - a_k \operatorname{tg} m_k l)}.$$

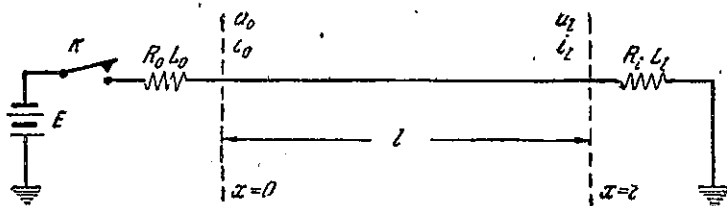
После соответствующей подстановки находим

$$a_k = m_k \frac{R_0}{R},$$

$$\operatorname{tg} m_k l = -m_k R \frac{R_0 + R_l}{R^2 - m_k^2 R_0 R_l},$$

откуда графическим путем определим все значения постоянной m_k .
Имеем

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-bt} \sum_{k=0}^{\infty} E_k T_k \left(\sin m_k x + \frac{R_0}{R} m_k \cos m_k x \right), \\ i_2 &= e^{-bt} \sum_{k=0}^{\infty} E_k m_k \mathfrak{Z}_k \left(\cos m_k x - \frac{R_0}{R} m_k \sin m_k x \right). \end{aligned} \quad (10)$$



Фиг. 63.

Остановимся подробнее на последнем и первом случаях.

§ 4. Линия с электромагнитным передатчиком и приемником (фиг. 63), причем $\frac{L_0}{R_0} = \frac{L_l}{R_l} = \frac{L}{R}$

Для определения неизвестных еще постоянных в приведенных выше решениях (10) необходимо задаться временными условиями:

для $t=0$, при $0 < x \leq l$,

$$u(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0,$$

причем $u_1 = \varphi(x)$ и $i_1 = \psi(x)$,

следовательно,

$$u_2(x, 0) = -\varphi(x),$$

$$i_2(x, 0) = -\psi(x).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} E_k A_k P_k &= -\varphi(x), \\ \sum_{k=0}^{\infty} E_k C_k P_k' &= -\psi(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$P_k = \sin m_k x + \frac{R_0}{R} m_k \cos m_k x,$$

причем

$$P_k'' + m_k^2 P_k = 0.$$

Методом, указанным в I части, придем к следующим соотношениям:

$$(m_\mu^2 - m_k^2) \int_0^l P_\mu P_k dx = (P_\mu P_k' - P_k P_\mu')_l - (P_\mu P_k' - P_k P_\mu')_0,$$

$$(m_\mu^2 - m_k^2) \int_0^l P_\mu' P_k' dx = \\ = (m_\mu^2 P_\mu P_k' - m_k^2 P_k P_\mu')_l - (m_\mu^2 P_\mu P_k' - m_k^2 P_k P_\mu')_0;$$

при этом имеем

$$\frac{P_k}{P_k'} = \frac{1}{m_k} \frac{R \sin m_k x + R_0 m_k \cos m_k x}{R \cos m_k x - R_0 m_k \sin m_k x},$$

следовательно,

$$(P_k)_0 = \frac{R_0}{R} (P_k')_0,$$

$$(P_k)_l = \frac{1}{m_k} \frac{R \operatorname{tg} m_k l + R_0 m_k}{R - R_0 m_k \operatorname{tg} m_k l} (P_k')_l.$$

Но, как мы видим,

$$\frac{1}{m_k} \frac{R \operatorname{tg} m_k l + m_k R_0}{R - R_0 m_k \operatorname{tg} m_k l} = -\frac{R_l}{R},$$

значит,

$$(P_k)_l = -\frac{R_l}{R} (P_k')_l.$$

Произведя соответствующую подстановку, получим

$$\int_0^l P_\mu P_k dx = 0,$$

$$\int_0^l P_\mu' P_k' dx = 0,$$

следовательно, находим

$$E_k A_k = - \frac{\int_0^l \varphi(x) P_\mu dx}{\int_0^l P_\mu^2 dx}, \\ E_k C_k = \frac{\int_0^l \psi(x) P_\mu' dx}{\int_0^l P_\mu'^2 dx}.$$

Остается определить интегралы, входящие в числитель и знаменатель правых частей полученных формул

$$\int_0^l P_\mu^2 dx = \int_0^l (\sin mx + a \cos mx)^2 dx,$$

где $a = m \frac{R_0}{R}$ (временны индексы у букв m и a опускаем),

но

$$\begin{aligned}\int_0^l \sin^2 mx \, dx &= \frac{l}{2} - \frac{\sin 2ml}{4m}, \\ \int_0^l \cos^2 mx \, dx &= \frac{l}{2} + \frac{\sin 2ml}{4m}, \\ \int_0^l \sin mx \cos mx \, dx &= \frac{\sin^2 ml}{2m},\end{aligned}$$

значит

$$\int_0^l P_{\mu}^2 dx = \frac{1}{4m} [(1 + a^2) 2ml - (1 - a^2) \sin 2ml + 4a \sin^2 ml].$$

Таким же путем получим

$$\int_0^l P_{\mu}'^2 dx = \frac{1}{4m} [(1 + a^2) 2ml - (1 - a^2) \sin 2ml - 4a \sin^2 ml].$$

Переходим к интегралам

$$\int_0^l \varphi(x) P_{\mu} dx \quad \text{и} \quad \int_0^l \psi(x) P_{\mu}' dx.$$

Обозначим

$$I_l = \frac{EZ_y}{(R_0 + R_l) Z_y \operatorname{ch} \beta l + (R_0 R_l + Z_y^2) \operatorname{sh} \beta l},$$

тогда

$$\varphi(x) = I_l [R_l \operatorname{ch} \beta(l-x) + Z_y \operatorname{sh} \beta(l-x)],$$

$$\psi(x) = \frac{I_l}{Z_y} [R_l \operatorname{sh} \beta(l-x) - Z_y \operatorname{ch} \beta(l-x)],$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^l \varphi(x) P_{\mu} dx &= I_l R_l \int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) \sin mx \, dx + \\ &+ I_l R_l a \int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) \cos mx \, dx + I_l Z_y \int_0^l \operatorname{sh} \beta(l-x) \sin mx \, dx + \\ &+ I_l Z_y a \int_0^l \operatorname{sh} \beta(l-x) \cos mx \, dx; \\ \int_0^l \psi(x) P_{\mu}' dx &= \frac{m I_l}{Z_y} R_l \int_0^l \operatorname{sh} \beta(l-x) \cos mx \, dx - \\ &- \frac{m I_l R_l}{Z_y} \int_0^l \operatorname{sh} \beta(l-x) \sin mx \, dx - m I_l \int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) \cos mx \, dx + \\ &+ I_l a \int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) \sin mx \, dx.\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) \sin mx \, dx &= \frac{m(\operatorname{ch} \beta l - \cos ml)}{\beta^2 + m^2}, \\ \int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) \cos mx \, dx &= \frac{\beta \operatorname{sh} \beta l + m \sin ml}{\beta^2 + m^2}, \\ \int_0^l \operatorname{sh} \beta(l-x) \sin mx \, dx &= \frac{m \operatorname{sh} \beta l - \beta \sin ml}{\beta^2 + m^2}, \\ \int_0^l \operatorname{sh} \beta(l-x) \cos mx \, dx &= \frac{\beta(\operatorname{ch} \beta l - \cos ml)}{\beta^2 + m^2}.\end{aligned}$$

После соответствующей подстановки находим:

$$\begin{aligned}\int_0^l \varphi(x) P_x \, dx &= \frac{I_l}{\beta^2 + m^2} [(mR_l + a\beta Z_y)(\operatorname{ch} \beta l - \cos ml) + \\ &+ (a\beta R_l + mZ_y) \operatorname{sh} \beta l + (amR_l - \beta Z_y) \sin ml], \\ \int_0^l \psi(x) P'_x \, dx &= \frac{mI_l}{(\beta^2 + m^2)Z_y} [(\beta R_l + amZ_y)(\operatorname{ch} \beta l - \cos ml) - \\ &- (amR_l + \beta Z_y) \operatorname{sh} \beta l + (a\beta R_l - mZ_y) \sin ml].\end{aligned}$$

Подставляя в формулы для постоянных $E_k A_k$ и $E_k C_k$, находим последние.

Имея же в виду выведенное выше соотношение (8), стр. 10, получим

$$\begin{aligned}Cn_k E_k B_k &= m_k^2 E_k C_k - (G - bC) E_k A_k, \\ m_k^2 E_k D_k &= (G - bC) E_k B_k + Cn_k E_k A_k;\end{aligned}$$

находим постоянные $E_k B_k$ и $E_k D_k$, после чего окончательно имеем

$$\begin{aligned}u &= \varphi(x) + e^{-bt} \sum_{k=0}^{\infty} (E_k A_k \operatorname{ch} n_k t + E_k B_k \operatorname{sh} n_k t) (\sin m_k x + a_k \cos m_k x), \\ i &= \psi(x) + e^{-bt} \sum_{k=0}^{\infty} m_k (E_k C_k \operatorname{ch} n_k t + E_k D_k \operatorname{sh} n_k t) (\cos m_k x - a_k \sin m_k x),\end{aligned}$$

где

$$a_k = \frac{F_k}{E_k} = m_k \frac{R_0}{R}.$$

Значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены выше.

Глава II

ЛИНИЯ, ЗАЗЕМЛЕННАЯ В КОНЦЕ, И С БАТАРЕЕЙ НУЛЕВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В НАЧАЛЕ (фиг. 2)

§ 1. Вывод точных решений

Не трудно убедиться, что для этого случая будем иметь

$$\begin{aligned}u_1 &= \varphi(x) = E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l}, \\ i_1 &= \varphi(x) = \frac{E}{Z_y} \frac{\operatorname{ch} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l},\end{aligned}$$

$$E_k A_k = - \frac{\int_0^l \varphi(x) P_\mu dx}{\int_0^l P_\mu^2 dx} = - 2E \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2},$$

$$E_k C_k = - \frac{\int_0^l \psi(x) P'_\mu dx}{\int_0^l P_\mu^2 dx} = - \frac{2EG\beta^2}{k\pi} \frac{1}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2},$$

$$E_k B_k = - 2E \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \frac{b}{n_k},$$

$$E_k D_k = \left(\frac{b}{n_k} - \frac{C}{G} \frac{b^2 - n_k^2}{n_k} \right) E_k C_k.$$

И так как

$$b^2 - n_k^2 = b^2 - \left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2 + \frac{m_k^2}{LC} = \frac{RGl^2 + k^2\pi^2}{LCl^2},$$

то

$$E_k D_k = - \frac{2EGl^2 b}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \frac{1}{k\pi n_k} + \frac{2E}{k\pi L n_k}.$$

Остается определить функцию A_0 . Эта функция должна удовлетворять первому уравнению из приведенной выше системы телеграфных уравнений, т. е.

$$0 = RA_0 + L \frac{dA_0}{dt},$$

следовательно,

$$A_0 = C_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

где постоянная C_0 , как известно, определяется формулой

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx = \frac{E}{lZ_y \operatorname{sh} \beta l} \int_0^l \operatorname{ch} \beta(l-x) dx = -\frac{E}{Rl}.$$

Таким образом,

$$A_0 = \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Для процессов u_2 и i_2 имеем следующие формулы:

$$u_2 = e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} (E_k A_k \operatorname{ch} n_k t + E_k B_k \operatorname{sh} n_k t) \sin m_k x,$$

$$i_2 = A_0 + e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} (E_k C_k \operatorname{ch} n_k t + E_k D_k \operatorname{sh} n_k t) \cos m_k x.$$

Подставляя сюда полученные значения для постоянных $E_k A_k$, $E_k B_k$, $E_k C_k$, $E_k D_k$ и A_0 , приходим к следующим формулам:

$$u_2 = -2Ee^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{b}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$i_2 = -\frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t} - 2EGle^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\operatorname{ch} n_k t + \frac{b}{n_k} \operatorname{sh} n_k t}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \cos \frac{k\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{2E}{Ll} e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Таким путем приходим к следующим, хорошо известным формулам:

$$u = E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - 2Ee^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{b}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$i = \frac{E}{Z_y} \frac{\operatorname{ch} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{2E}{Ll} e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \cos \frac{k\pi x}{l} -$$

$$- 2EGle^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{b}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Так как постоянная n_k равна

$$n_k = \sqrt{\left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2 - \frac{k^2\pi^2}{LCl^2}},$$

то, начиная с какого-то значения k , при котором

$$\frac{RC - LG}{2LC} < \frac{k\pi}{l\sqrt{LC}},$$

эта постоянная будет мнимой, и гиперболические функции приведенных формул перейдут в тригонометрические. Пусть это будет со значений $k > \mu$, тогда для всех значений $k > \mu$ будем иметь

$$n_k = j \sqrt{\frac{k^2\pi^2}{LCl^2} - \left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2} = j\nu_k,$$

$$\operatorname{ch} n_k t = \cos j n_k t = \cos \nu_k t,$$

$$\operatorname{sh} n_k t = -j \sin j n_k t = j \sin \nu_k t,$$

$$\frac{\operatorname{sh} n_k t}{n_k} = \frac{1}{\nu_k} \sin \nu_k t.$$

* А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Изд. Акад. Наук СССР, 1932.

Приведенные выше формулы для u и i мы должны теперь переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u &= E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - 2Ee^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{b}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l} - \\
 &= 2Ee^{-bt} \sum_{k=\mu}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\cos v_k t + \frac{b}{v_k} \sin v_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}; \\
 i &= \frac{E}{Z_y} \frac{\operatorname{ch} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{2E}{Ll} e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{1}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \cos \frac{k\pi x}{l} - \\
 &- 2Egl e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\operatorname{ch} n_k t + \frac{b}{n_k} \operatorname{sh} n_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l} + \\
 &+ \frac{2E}{Ll} e^{-bt} \sum_{k=\mu}^{k=\infty} \frac{1}{v_k} \sin v_k t \cos \frac{k\pi x}{l} - \\
 &- 2Egl e^{-bt} \sum_{k=\mu}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\cos v_k t + \frac{b}{v_k} \sin v_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.
 \end{aligned}$$

Если параметры линии удовлетворяют хивисайдовскому соотношению, т. е. $RC = LG$, то

$$v_k = \frac{k\pi}{l\sqrt{LC}}, \quad b = \frac{R}{L} = \frac{G}{C},$$

и мы приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 u &= E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - \\
 &- 2Ee^{-\frac{R}{L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi \left(\cos \frac{k\pi}{l\sqrt{LC}} t + \frac{Rl}{k\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{k\pi t}{l\sqrt{LC}} \right)}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \sin \frac{k\pi x}{l}, \\
 i &= \frac{E}{Z_y} \frac{\operatorname{ch} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t} + \\
 &+ \frac{2E}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{l\sqrt{LC}} \cos \frac{k\pi x}{l} - \\
 &- 2Egl e^{-\frac{R}{L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\cos \frac{k\pi}{l\sqrt{LC}} + \frac{Rl}{k\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{k\pi t}{l\sqrt{LC}} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.
 \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на этих формулах.

§ 2. Переход от конечной линии к бесконечно длинной

Будем непрерывно увеличивать длину линии l . Перейдя от конечной линии к бесконечно длинной, мы, очевидно, вместо приведенных формул сложного электромагнитного процесса, зависящего как от пара-

метров линии, так и от параметров приемно-передающих устройств, получим формулы бегущей волны, зависящей только от параметров линии.

Воспользуемся для дальнейших преобразований следующими формулами:

$$2 \cos \frac{k\pi t}{l\sqrt{LC}} \sin \frac{k\pi x}{l} = \sin \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) - \sin \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right),$$

$$2 \sin \frac{k\pi t}{l\sqrt{LC}} \sin \frac{k\pi x}{l} = \cos \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) - \cos \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right).$$

Подставляя в формулу u (при условии: $RC=LG$), находим

$$u = E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - E e^{-\frac{R}{L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 - \beta^2 l^2} \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) - \right. \\ \left. - \sin \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) + \frac{Rl}{k\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\cos \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) \right] \right\}.$$

Имея же в виду нижеприведенные формулы,* справедливые в указанных выше пределах x и t , преобразуем последнюю формулу для u

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \cos \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) = \\ = \frac{1}{2\beta l} \frac{\operatorname{ch} \beta \left(l - x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l} - \frac{1}{2\beta^2 l^2},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) = \\ = \frac{1}{2\beta l} \frac{\operatorname{ch} \beta \left(l - x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l} - \frac{1}{2\beta^2 l^2},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \beta \left(l - x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \sin \frac{k\pi}{l} \left(x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \beta \left(l - x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l}.$$

* А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. 1932, стр. 380 и 381.

Имеем

$$u = E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} -$$

$$- \frac{E}{2} e^{-\frac{R}{L}t} \frac{1}{\operatorname{sh} \beta l} \left[\operatorname{sh} \beta \left(l-x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right) - \operatorname{sh} \beta \left(l-x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right) \right] -$$

$$- \frac{E}{2} e^{-\frac{R}{L}t} \frac{1}{\operatorname{sh} \beta l} \left[\operatorname{ch} \beta \left(l-x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right) - \operatorname{ch} \beta \left(l-x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right) \right].$$

При непрерывном увеличении длины линии получим

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} \right] = e^{-\sqrt{RG}x},$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \beta \left(l-x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l} \right] = e^{-\beta \left(x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)},$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \beta \left(l-x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l} \right] = e^{-\beta \left(x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)},$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \beta \left(l-x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l} \right] = e^{-\beta \left(x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)},$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \beta \left(l-x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}{\operatorname{sh} \beta l} \right] = e^{-\beta \left(x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}.$$

Подставляя в формулу для u , получим

$$u = E e^{-\sqrt{RG}x} - \frac{E}{2} e^{-\frac{R}{L}t} \left[e^{-\beta \left(x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)} - e^{-\beta \left(x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)} \right] -$$

$$- \frac{E}{2} e^{-\frac{R}{L}t} \left[e^{-\beta \left(x-\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)} - e^{-\beta \left(x+\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)} \right] = E e^{-\sqrt{RG}x}.$$

Итак

$$u = E e^{-\sqrt{RG}x}.$$

Таким же путем получим

$$i = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\sqrt{RG}x}.$$

Мы пришли к известным формулам бегущей волны вдоль бесконечно длинной (или вообще согласованной) линии, удовлетворяющей условию

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}.$$

Если параметры линии этому условию не удовлетворяют, то выкладки при переходе от конечной линии к бесконечно длинной значительно

осложняются входящей в формулы для i и u иррациональностью. Используя метод интегральных вычетов, придем к следующим формулам бегущей волны ($t \geq t_0$):

$$u = E \left[e^{-bt_0} + \sigma t_0 \int_{t_0}^t \frac{e^{-b\tau} I_1(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2})}{j \sqrt{\tau^2 - t_0^2}} d\tau \right], \quad (12)$$

$$i = E \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} I_0(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}) + vG \int_0^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}) d\tau \right], \quad (13)$$

где

$$t_0 = x \sqrt{LC}, \quad \sigma = \frac{RC - LG}{2LC}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка, I_1 — функция Бесселя первого порядка.

Для $t = t_0$, т. е. в первый момент достижения волною пункта x , значения напряжения и тока (головная волна напряжения и тока) определяются, очевидно, следующими формулами:

$$\Gamma_u = E e^{-bt_0} = E e^{-\frac{RC + LG}{2\sqrt{LC}} x},$$

$$\Gamma_i = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{RC + LG}{2\sqrt{LC}} x}.$$

Если параметры линии удовлетворяют условиям Хивисайда:

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G},$$

то

$$\frac{RC + LG}{2\sqrt{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = R \sqrt{\frac{G}{R}} = \sqrt{RG} = \beta$$

и

$$\Gamma_u = E e^{-\sqrt{RG} x}, \quad \Gamma_i = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\sqrt{RG} x},$$

т. е. выведенные выше формулы.

§ 3. Анализ электромагнитных процессов вдоль линии с замкнутым накоротко концом и батареей нулевого сопротивления в начале (фиг. 7)

Для железных проводов диаметром в 4 и 5 мм постоянная γ всегда действительна; следовательно, для таких линий имеем следующие решения:

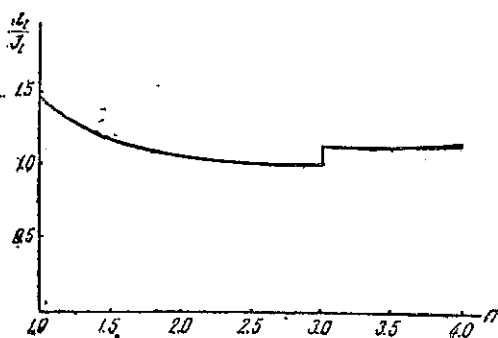
$$u = E \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x)}{\operatorname{sh} \beta l} - 2E e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\cos v_k t + \frac{b}{v_k} \sin v_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (14)$$

$$i = \frac{E \operatorname{ch} \beta(l-x)}{Z_y \operatorname{sh} \beta l} - \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{L}t} +$$

$$+ \frac{2E}{Ll} e^{-bt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k} \sin v_k t \cos \frac{k\pi x}{l} -$$

$$- 2EGle^{-bt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{k^2\pi^2 + \beta^2 l^2} \left(\cos v_k t + \frac{b}{v_k} \sin v_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (15)$$

Чтобы не связывать себя конкретными значениями параметров линии и длиной последней, введем следующие обозначения:



Фиг. 64.

$$a = \frac{1}{\beta^2 l^2}, \quad \delta = \frac{1}{l} \frac{2\pi \sqrt{LC}}{RC - LG}$$

и будем выражать время t в долях от $t_0 = l\sqrt{LC}$, т. е. от времени, которое необходимо для того, чтобы после замыкания в начале линии ключа электромагнитная волна успела достигнуть конца линии

$$t = nt_0.$$

Положив

$$a = 4 \text{ и } \delta = 3,$$

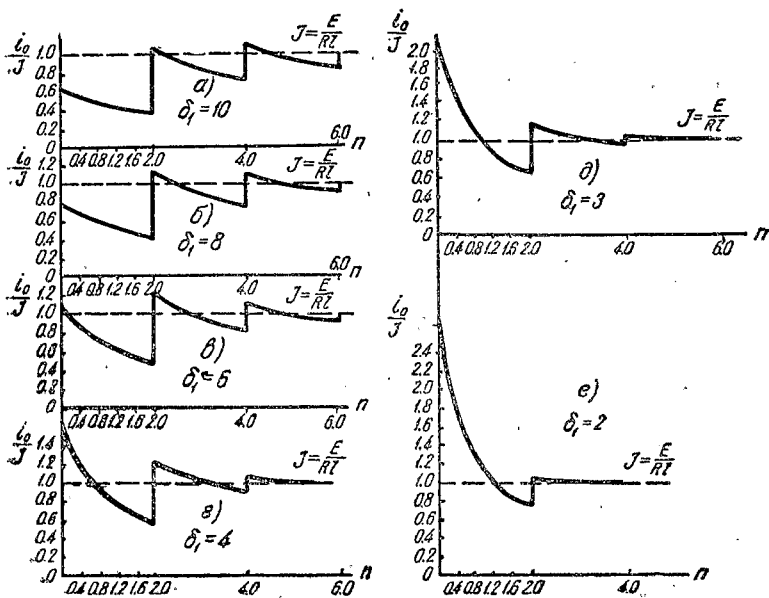
подсчитаем табл. 6 значений входящего тока i_l , выразив последний в долях от установившегося тока I_l , и построим график фиг. 64.

Таблица 6

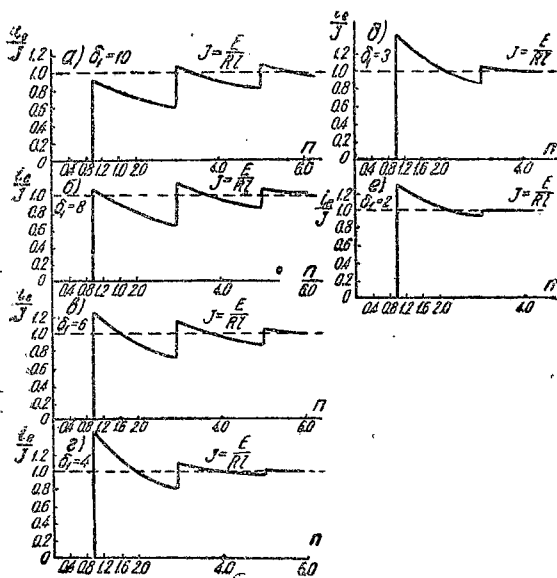
Входящий ток в долях от I_l

n	i_l/I_l	n	i_l/I_l	n	i_l/I_l	n	i_l/I_l
1	1.436	1.8	1.083	2.6	0.9298	3.4	1.020
1.1	1.397	1.9	1.054	2.7	0.9154	3.5	1.019
1.2	1.318	2.0	1.029	2.8	0.9047	3.6	1.017
1.3	1.263	2.1	1.009	2.9	0.8989	3.7	1.015
1.4	1.226	2.2	0.982	3.0	0.8931	3.8	1.013
					1.0235		
1.5	1.186	2.3	0.978	3.1	1.028	3.9	1.010
1.6	1.151	2.4	0.961	3.2	1.023	4.0	1.007
1.7	1.117	2.5	0.946	3.3	1.021	—	—

Вычисление приведенной кривой связано с очень большими трудностями. Бесконечные ряды, входящие в формулы для тока, весьма слабо сходящиеся. Для дальнейшей иллюстрации электромагнитных процессов, происходящих вдоль линии, желательно упростить формулу для тока.



Фиг. 65.



Фиг. 66.

Возьмем линию вполне изолированную, т. е. положим $G=0$, тогда формулы для напряжения u и тока i примут следующий вид:

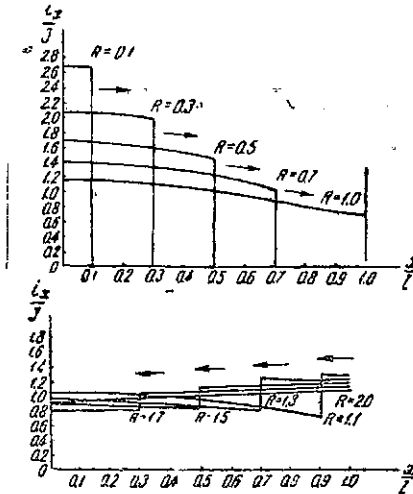
$$u = E \left\{ \frac{l-x}{l} - 2e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\sin \left(\frac{n\pi}{\delta_1} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \right)}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \left(\frac{n\pi}{\delta_1} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \right) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}; \quad (14_1)$$

$$i = I \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + 4e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{\delta_1} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \right)}{k^2 \delta_1^2 - 1} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]; \quad (15_1)$$

где $I = \frac{E}{Rl}$, $\delta_1 = \frac{2\pi}{Rl} \sqrt{\frac{L}{C}}$, $n = \frac{t}{t_0}$.

Исходя из этих формул, подсчитаем табл. 7 исходящего и табл. 8 входящего токов, задаваясь следующими значениями параметра δ_1 :

$$\delta_1 = 10, 8, 6, 4, 3, 2.$$



Фиг. 67.

По этим таблицам строим графики: фиг. 65 для исходящего тока и фиг. 66 для входящего.

Не довольствуясь графиками временного изменения исходящего и входящего токов, приведем табл. 9 и графики фиг. 67 временного и пространственного изменения тока.

Для этого остановимся на значении $\delta_1 = 2$, соответствующем наиболее часто встречающимся на практике междугородним телеграфным линиям.

Приведенные таблицы и графики наглядно иллюстрируют как движение вдоль линии бегущей волны, так и отражение волны от

концов линии, а также сложение прямых и отраженных волн.

Применяемые на практике линии характеризуются параметром δ_1 , всегда большим 2 ($\delta_1 > 2$), и, чем короче линия, тем больше параметр δ_1 , как это видно из формулы

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{Rl} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При достаточно короткой линии δ_1 получает такие значения, при которых ($\delta_1 \geq 10$) единицей можно пренебречь по сравнению с членом $k^2 \delta_1^2$. В этом случае мы можем положить

$$\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \approx k \delta_1,$$

и формулы (14₁) и (15₁) примут следующий вид:

$$u = E \left[\frac{l-x}{l} - 2e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\sin k\pi n}{k\delta_1} + \cos k\pi n \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \right], \quad (14_2)$$

$$i = I \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + \frac{4}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\pi x}{k} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (15_2)$$

Таблица 7

i_0/I — временная зависимость исходящего тока i_0 , выраженного в долях от I

$k \backslash \delta_1$	10	8	6	4	3	2
0	0.6282	0.7852	1.0470	1.571	2.094	3.141
0.1	0.6042	0.7495	0.9838	1.439	1.874	2.665
0.2	0.5865	0.7221	0.9051	1.337	1.718	2.308
0.3	0.5682	0.6957	0.8929	1.246	1.551	2.036
0.4	0.5522	0.6712	0.8532	1.169	1.430	1.830
0.5	0.5431	0.6491	0.8174	1.100	1.330	1.665
0.6	0.5203	0.6275	0.7829	1.035	1.233	1.525
0.7	0.5056	0.6069	0.7500	0.9761	1.148	1.386
0.8	0.4919	0.5866	0.7188	0.9220	1.070	1.287
0.9	0.4787	0.5684	0.6894	0.8717	1.003	1.195
1.0	0.4664	0.5502	0.6621	0.8247	0.9449	1.110
1.1	0.4544	0.5344	0.6371	0.7890	0.8974	1.053
1.2	0.4441	0.5191	0.6156	0.7571	0.8577	1.007
1.3	0.4339	0.5046	0.5954	0.7477	0.8345	0.9677
1.4	0.4242	0.4912	0.5720	0.6880	0.8072	0.9280
1.5	0.4154	0.4767	0.5565	0.6707	0.7534	0.8868
1.6	0.4081	0.4622	0.5383	0.6437	0.7187	0.8433
1.7	0.4013	0.4499	0.5198	0.6166	0.6860	0.8062
1.8	0.3944	0.4387	0.5045	0.5951	0.6633	0.7795
1.9	0.3886	0.4286	0.4927	0.5820	0.6515	0.7677
2.0	{ 0.3865	{ 0.4199	{ 0.4834	{ 0.5777	{ 0.6509	{ 0.7505
2.1	{ 1.057	{ 1.136	{ 1.219	{ 1.231	{ 1.167	{ 1.02
2.2	1.023	1.086	1.145	1.156	1.128	1.019
2.3	0.9981	1.075	1.195	1.147	1.106	1.013
2.4	0.9757	1.052	1.119	1.133	1.086	1.014
2.5	0.9542	1.031	1.096	1.115	1.084	1.019
2.6	0.9338	1.010	1.075	1.099	1.077	1.023
2.7	0.9150	0.9907	1.052	1.082	1.067	1.024
2.8	0.8965	0.9717	1.031	1.061	1.056	1.022
2.9	0.8795	0.9576	1.007	1.044	1.043	1.020
3.0	0.8634	0.9267	0.9890	1.028	1.031	1.017
3.1	0.8481	0.9136	0.9785	1.012	1.021	1.014
3.2	0.8272	0.8974	0.9536	1.005	1.014	1.013
3.3	0.8206	0.8826	0.9377	0.9883	1.006	1.011
3.4	0.8079	0.8681	0.9241	0.9772	0.9990	1.009
3.5	0.7959	0.8537	0.9047	0.9653	0.9908	1.007
3.6	0.7855	0.8393	0.8953	0.9535	0.9826	1.004
3.7	0.7753	0.8255	0.8806	0.9408	0.9703	0.9996
3.8	0.7659	0.8119	0.8664	0.9288	0.9560	0.9955
3.9	0.7574	0.7987	0.8540	0.9186	0.9546	0.9920
4.0	0.7484	0.7814	0.8445	0.9123	0.9523	0.9896
	{ 0.7394	{ 0.7804	{ 0.8387	{ 0.9005	{ 0.9789	{ 0.9884
	{ 1.097	{ 1.107	{ 1.097	{ 1.036	{ 1.013	{ 1.000

Т а б л и ц а 8.

Временная зависимость входящего тока i_I , выраженного в долях I
Значения i_I/I

$k \backslash i_1$	10	8	6	4	3	2
1.0	0.9178	1.061	1.241	1.433	1.470	1.307
1.1	0.8951	1.023	1.180	1.363	1.391	1.263
1.2	0.8707	0.9917	1.144	1.298	1.325	1.228
1.3	0.8469	0.9642	1.105	1.247	1.273	1.181
1.4	0.8250	0.9383	1.070	1.192	1.248	1.167
1.5	0.8039	0.9130	1.037	1.163	1.197	1.155
1.6	0.7849	0.8902	1.006	1.125	1.162	1.138
1.7	0.7657	0.8655	0.9756	1.087	1.127	1.116
1.8	0.7479	0.8418	0.9456	1.051	1.091	1.093
1.9	0.7312	0.8200	0.9182	1.018	1.059	1.072
2.0	0.7154	0.8004	0.8923	0.9884	1.032	1.055
2.1	0.7005	0.7661	0.8689	0.9629	1.009	1.042
2.2	0.6867	0.7546	0.8484	0.9410	0.9780	1.032
2.3	0.6737	0.7479	0.8285	0.9209	0.9728	1.022
2.4	0.6615	0.7328	0.8097	0.9009	0.9532	1.009
2.5	0.6504	0.7153	0.7892	0.8796	0.9342	0.9954
2.6	0.6394	0.7011	0.7717	0.8582	0.9137	0.9807
2.7	0.6303	0.6869	0.7534	0.8385	0.8950	0.9667
2.8	0.6210	0.6789	0.7395	0.8235	0.8804	0.9555
2.9	0.6127	0.6609	0.7251	0.8115	0.8718	0.9486
3.0	{ 0.6091	{ 0.6491	{ 0.7160	{ 0.8062	{ 0.8693	{ 0.9468
	{ 1.099	{ 1.133	{ 1.152	{ 1.404	{ 1.050	{ 1.003
3.1	1.062	1.107	1.125	1.098	1.038	0.9974
3.2	1.048	1.087	1.104	1.070	1.030	0.9963
3.3	1.029	1.069	1.089	1.062	1.028	0.9977
3.4	1.011	1.054	1.075	1.055	1.027	0.999
3.5	0.9926	1.038	1.064	1.049	1.026	1.002
3.6	0.9762	1.023	1.049	1.043	1.025	1.003
3.7	0.9605	1.008	1.035	1.035	1.021	1.003
3.8	0.9458	0.9932	1.021	1.026	1.018	1.003
3.9	0.9321	0.9821	1.008	1.019	1.014	1.003
4.0	0.9120	0.9646	0.9962	1.011	1.010	1.003
4.1	0.9068	0.9520	0.9850	1.005	1.007	1.003
4.2	0.8953	0.9400	0.9748	0.9998	1.004	1.003
4.3	0.8841	0.9291	0.9662	0.9977	1.003	1.003
4.4	0.8747	0.9180	0.9555	0.9883	0.9998	1.002
4.5	0.8653	0.9060	0.9454	0.9817	0.9962	1.002
4.6	0.8566	0.8952	0.9375	0.9748	0.9921	1.001
4.7	0.8486	0.8843	0.9355	0.9681	0.9884	1.000
4.8	0.8415	0.8731	0.9162	0.9623	0.9847	0.9988
4.9	0.8349	0.8661	0.9096	0.9584	0.9824	0.9981
5.0	{ 0.8300	{ 0.8612	{ 0.9025	{ 0.9514	{ 0.9803	{ 0.9977
	{ 1.080	{ 1.057	{ 1.051	{ 1.016	{ 1.004	{ 1.000
5.1	1.072	0.9617	1.047	1.014	1.003	1.000
5.2	1.059	0.9553	1.041	1.012	1.003	1.000
5.3	1.046	0.9510	1.036	1.010	1.002	1.000
5.4	1.035	0.9488	1.032	1.005	1.002	1.000
5.5	1.023	0.9436	1.028	1.005	1.002	1.000
5.6	1.013	0.9420	1.023	1.004	1.002	1.000
5.7	1.004	0.9401	1.018	1.004	1.002	1.000
5.8	0.9941	0.9362	1.013	1.003	1.002	1.000
5.9	0.9851	0.9324	1.009	1.003	1.002	1.000
6.0	0.9769	1.028	1.004	1.002	1.002	1.000

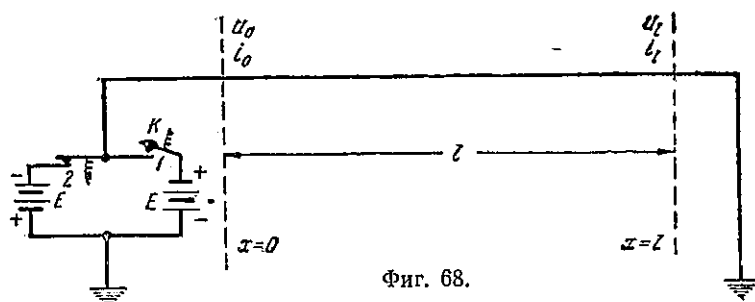
Таблица 9

Изменение тока i_x по длине провода, характеризующегося параметром $\delta_1 = 2$. Значения i_x/I

k	$\frac{x}{l_1}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0		3.141	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.1		2.665	2.685	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.2		2.308	2.308	2.295	—	—	—	—	—	—	—	—
0.3		2.036	2.029	2.008	—	—	—	—	—	—	—	—
0.4		1.830	1.818	1.784	1.962	1.676	—	—	—	—	—	—
0.5		1.665	1.650	1.609	1.556	1.499	1.433	—	—	—	—	—
0.6		1.525	1.511	1.485	1.417	1.355	1.300	1.224	—	—	—	—
0.7		1.386	1.375	1.343	1.265	1.240	1.181	1.126	1.046	—	—	—
0.8		1.287	1.280	1.259	1.226	1.175	1.116	1.049	0.9781	0.8944	—	—
0.9		1.195	1.192	1.178	1.155	1.113	1.056	0.9825	0.9094	0.8365	0.7644	—
1.0		1.110	1.109	1.101	1.085	1.050	0.9994	0.9320	0.8542	0.7868	0.7359	{ 0.6533 1.307
1.1		1.053	1.050	1.041	1.023	0.9898	0.9447	0.8870	0.8218	0.7663	{ 0.7125 1.178	1.263
1.2		1.007	1.003	1.083	0.9655	0.9319	0.8935	0.8505	0.8059	{ 0.7662 1.243	1.217	1.208
1.3		0.9677	0.9609	0.9412	0.9146	0.8819	0.8513	0.8248	{ 0.7990 1.207	1.203	1.184	1.181
1.4		0.9280	0.9504	0.8997	0.8733	0.8453	0.8242	{ 0.8102 1.159	1.156	1.160	1.164	1.167
1.5		0.8868	0.8788	0.8624	0.8424	0.8242	{ 0.8118 1.110	1.112	1.122	1.137	1.149	1.155
1.6		0.8433	0.8398	0.8319	{ 0.8229 0.8118	{ 0.8148 1.069	1.072	1.084	1.100	1.118	1.132	1.133
1.7		0.8062	0.8067	0.8092	{ 1.029	1.038	1.051	1.067	1.085	1.100	1.112	1.116
1.8		0.7795	0.7839	{ 0.7941 0.9801	0.9969	1.018	1.038	1.056	1.073	1.084	1.091	1.093
1.9		0.7677	{ 0.7729 0.9319	0.9587	0.9658	1.003	1.028	1.047	1.052	1.076	1.071	1.072
2.0		{ 0.7505 1.022	0.9132	0.9333	0.9594	0.9896	1.015	1.034	1.047	1.053	1.055	1.055

При сигнализации токами противоположных направлений (фиг. 68) получим

$$u = \pm E \left\{ \frac{l-x}{l} - 4e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}\right) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}, \quad (16)$$



Фиг. 68.

$$i = \pm \frac{E}{Rl} \left[1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} + 8e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (17)$$

Плюс берем при нажатии ключа, минус — при отпускании.

Для всех значений параметра $\delta_1 \geq 10$, имеем

$$u = \pm E \left[\frac{l-x}{l} - 4e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\sin k\pi n}{k\delta_1} + \cos k\pi n \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \right], \quad (16_1)$$

$$i = \pm \frac{E}{Rl} \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}t} + \frac{8}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\pi n}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (17_1)$$

Для иллюстрации приведенных формул задаемся параметром $\delta_1 = 10$ [формула (17₁)] и $\delta_1 = 2$ [формула (17)]. В первом случае получим графики фиг. 69 при нажатии ключа, во втором фиг. 70. При отпущенном ключе, после того как электромагнитные процессы вдоль линии придут к установившемуся уже состоянию, распространение тока представится теми же графиками с ординатами противоположного знака.

Глава III

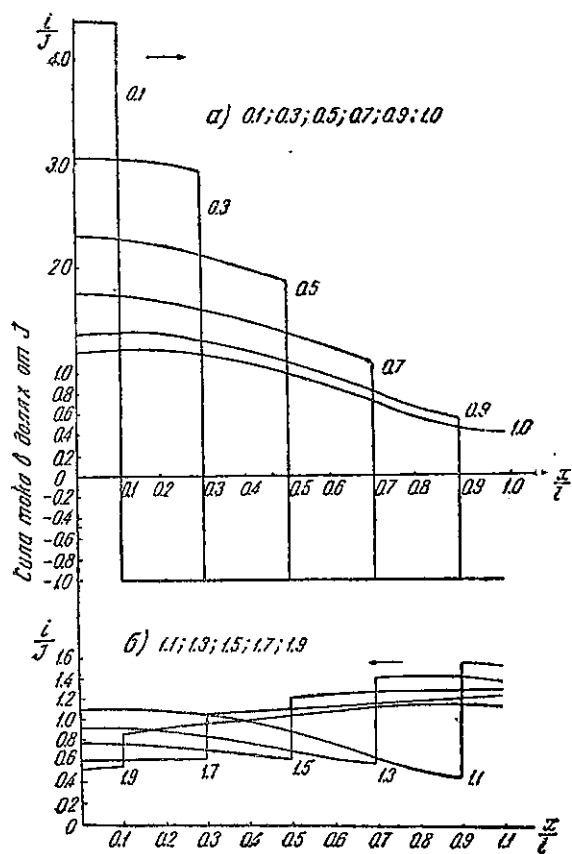
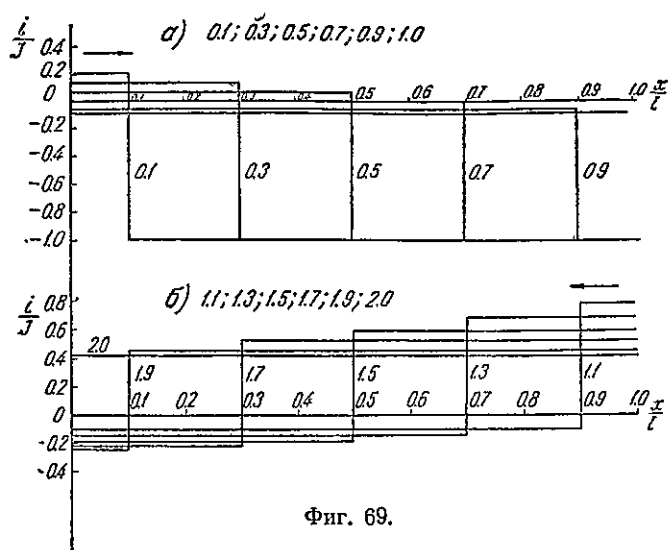
РАБОТА ДУПЛЕКСОМ ($G=0$)

§ 1. Батареи в начале соединены одноименными полюсами (—и—); при нажатии ключа на одной из станций батареи соединяются разноименными полюсами

Пограничные условия для любого t :

$$\text{при } x=0 \quad u = +E;$$

$$\text{при } x=l \quad u = -E.$$



Временные условия:

при $t=0$ $u=-E$; $i=0$.

Пограничные условия для процессов u_1 и i_1 :

при $x=0$ $u_1=+E$;

при $x=l$ $u_1=-E$.

Пограничные условия для процессов u_2 и i_2 :

при $x=0$

$$u_2=0;$$

при $x=l$

$$u_2=0.$$

Временные условия:

для $t=0$

$$u_2=-2E \frac{l-x}{l}, \quad i_2=0.$$

Пользуясь разобранными выше методами, получим

$$u = E \left[\frac{l-2x}{l} - 4Ee^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}\right) \right] \sin \frac{k\pi x}{l};$$

$$i = 2 \frac{E}{Rl} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} + 4e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \cos \frac{k\pi x}{l} \right].$$

Полученные формулы показывают, что ток будет распространяться по проводу точно таким же образом, как и для того случая, когда в начале провода включается батарея и конец соединен непосредственно с землей; разница лишь в амплитудах тока, — в рассматриваемом случае амплитуда тока в два раза больше.

§ 2. Батареи в начале соединены разноименными полюсами; после нажатия ключа батареи соединяются одноименными полюсами

Не трудно убедиться, что в этом случае ток распространяется по проводу точно так же, как при работе симплексом во время разряда линии через землю, только с удвоенными амплитудами.

§ 3. Батареи соединены разноименными (+ и -) полюсами; после одновременного нажатия ключей на той и другой станциях батареи меняют знаки (- и +)

Пограничные условия для общих процессов u и i для любого $t > 0$:

при $x=0$ $u=-E$;

при $x=l$ $u=+E$.

Временные условия:

для $t=0$

$$u = E \frac{l-2x}{l}, \quad i = 2 \frac{E}{Rl}.$$

Пограничные условия для процессов u_1 и i_1 :

при $x=0$ $u_1 = -E;$

при $x=l$ $u_1 = +E.$

Пограничные условия для процессов u_2 и i_2 для любого $t > 0$:

при $x=0$

$$u_2 = 0;$$

при $x=l$

$$u_2 = 0.$$

Временные условия:

для $t=0$

$$u_2 = 2E \frac{l-2x}{l}, \quad i_2 = 0.$$

Исходя из приведенных условий, приходим к следующим формулам:

$$u = -E \left\{ \frac{l-2x}{l} - 4e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}\right) \right] (1 + \cos k\pi) \sin \frac{k\pi x}{l} \right\};$$

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} + \right.$$

$$\left. + 4e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2\delta_1^2 - 1}} (1 + \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l} \right];$$

для $\delta_1 \geq 10$

$$i = -2 \frac{E}{Rl} \left[1 - 2e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \sin k\pi n (1 + \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l} \right],$$

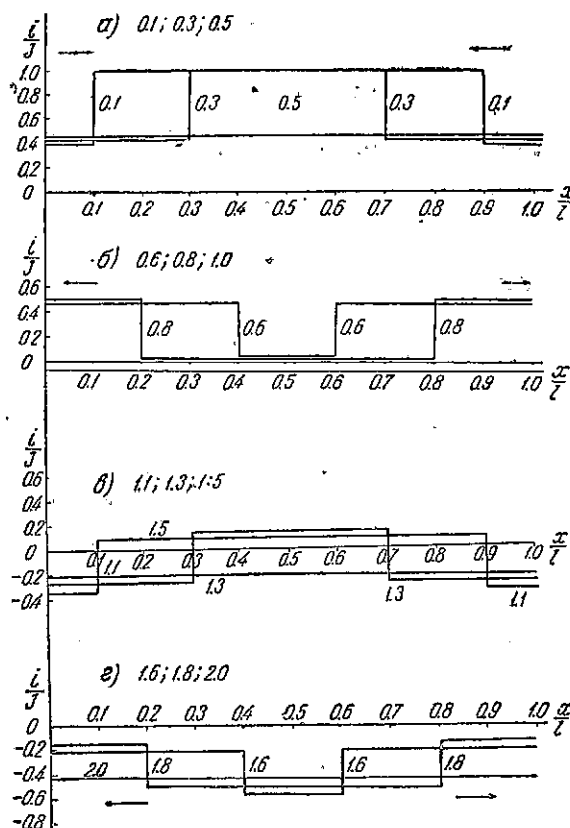
где

$$n = \frac{t}{l\sqrt{LC}}.$$

Из этих формул видим, что в каждый данный момент вдоль линии имеются две совершенно одинаковые волны, идущие в противоположном направлении: одна волна идет от начала линии к ее концу, другая —

от конца к началу, встречаясь с первой на середине. Достигая концов линии, обе волны отражаются и идут в обратном направлении, все время понижая силу тока и приводя его в конце концов к установившемуся отрицательному значению:

$$I = -\frac{2E}{Rl}$$



Фиг. 71.

Иллюстрируем выведенные формулы графиками фиг. 71 для $\delta_1 = 10$ и фиг. 72 для $\delta_1 = 2$.

§ 4. Батареи соединены одноименными полюсами (— и —); после одновременного нажатия ключей на обеих станциях батареи меняют знаки (+ и +)

Пограничные условия для процессов u и i для любого $t > 0$:
при $x = 0$

$$u = E;$$

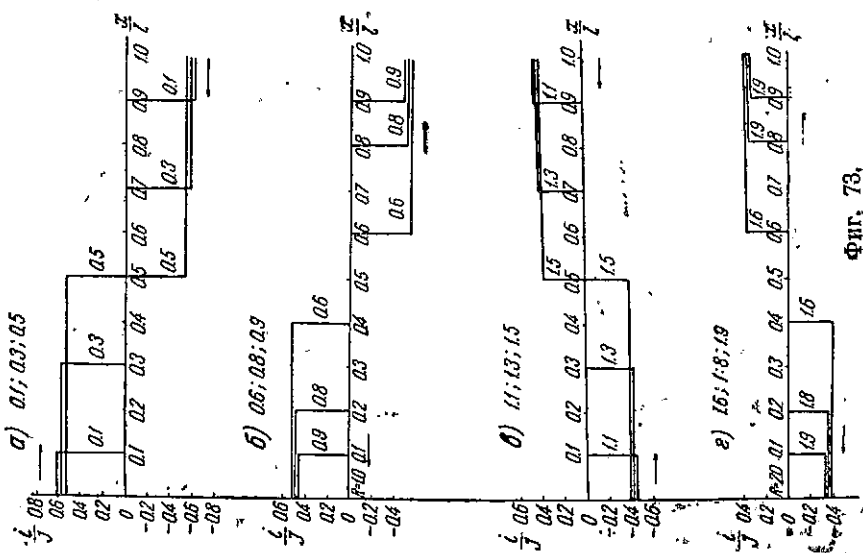
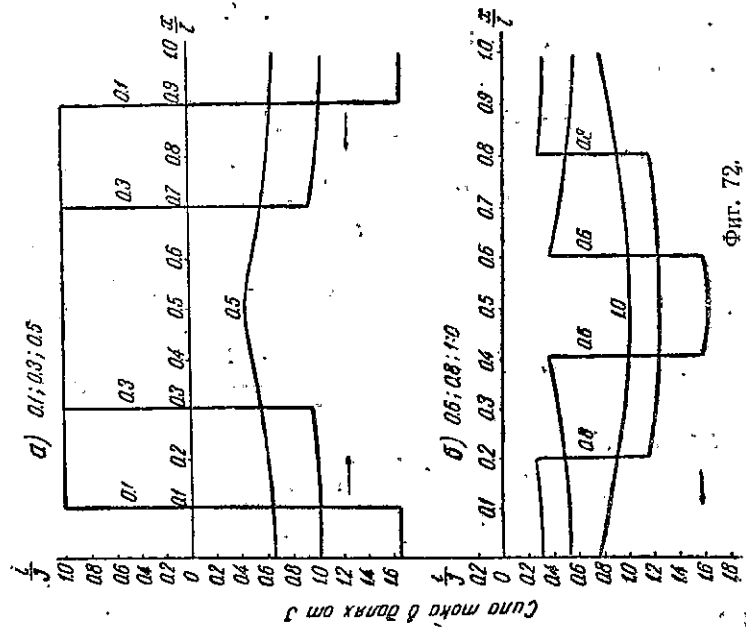
при $x = l$

$$u = E.$$

Временные условия:

для $t = 0$

$$u = -E \text{ и } i = 0.$$



Пограничные условия для процессов u_1 и i_1 :
при $x=0$

$$u_1 = E;$$

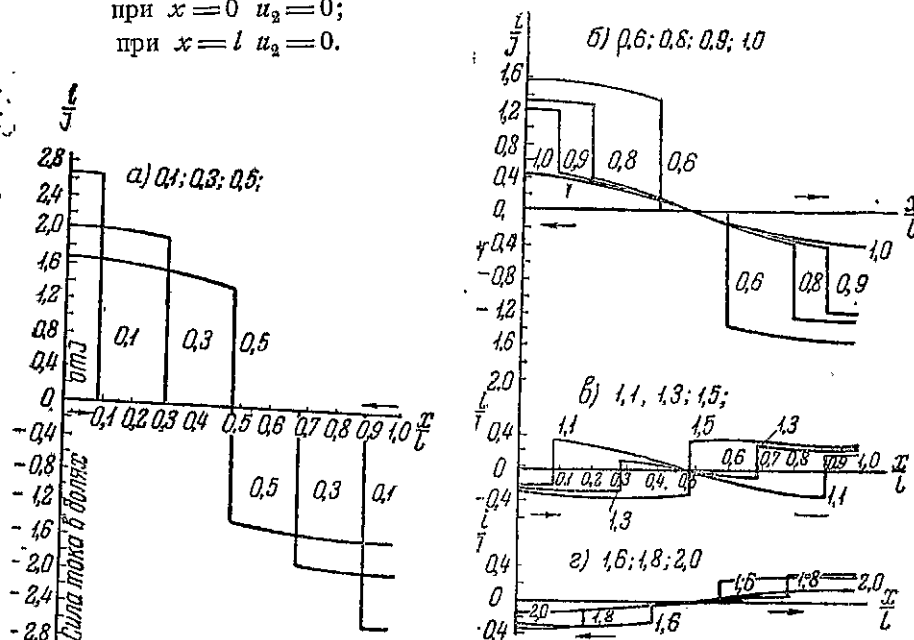
при $x=l$

$$u_1 = E.$$

Пограничные условия для процессов u_2 и i_2 для любого $t > 0$:

при $x=0$ $u_2=0$;

при $x=l$ $u_2=0$.



Фиг. 74.

Временные условия:
для $t=0$

$$u_2 = -2E \text{ и } i_2 = 0.$$

Приходим к следующим формулам.

$$u = E \left\{ 1 - 4E e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}\right) \right] (1 - \cos k\pi) \sin \frac{k\pi x}{l} \right\};$$

$$i = 8 \frac{E}{Rl} e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{Rt}{2L} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} (1 - \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l};$$

для $\delta_1 \geq 10$

$$i = 8 \frac{E}{Rl} \frac{1}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi n}{k} (1 - \cos k\pi) \cos \frac{k\pi x}{l},$$

где

$$n = \frac{t}{l\sqrt{LC}}.$$

Выведенные формулы показывают, что вдоль линии имеются две волны тока противоположного знака и направления: одна положительная идет от начала линии к ее концу, другая отрицательная — от конца к началу; волны встречаются по середине линии и в этом пункте взаимно уничтожаются. При дальнейшем следовании они сильно понижают (практически при $\delta_1 \geq 10$ совсем уничтожают) друг друга и, достигнув концов линии, отражаются и идут друг другу навстречу, но от начала к концу идет уже отрицательная волна тока, а от конца к началу — положительная. Достигнув опять концов, линии снова отражаются и т. д. Все это иллюстрируется графиками фиг. 73 для $\delta_1 = 10$ и фиг. 74 для $\delta_1 = 2$.

Глава IV

ПЕРЕДАЧА ПО ЛИНИИ ПРЕРЫВИСТОГО ТОКА

§ 1. Метод определения постоянных интегрирования

Как мы видели, при нажатии ключа по схеме фиг. 2, общие формулы для напряжения и тока имеют следующий вид:

$$u = E \frac{l-x}{l} + e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \sin v_k t + B_k \cos v_k t) \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l};$$

$$i = I + C_1 e^{-2bt} + C e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} [(v_k A_k - b B_k) \cos v_k t - (v_k B_k + b A_k) \sin v_k t] \cos \frac{k\pi x}{l}$$

и при отпускании ключа

$$u = -e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \sin v_k t + B_k \cos v_k t) \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$i = -C_1 e^{-2bt} - C e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} [(v_k A_k - b B_k) \cos v_k t - (v_k B_k + b A_k) \sin v_k t] \cos \frac{k\pi x}{l},$$

где $b = \frac{R}{2L}$, $I = \frac{E}{Rl}$, $v_k = b \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}$, $\delta_1 = \frac{2\pi}{Rl} \sqrt{\frac{L}{C}}$,

C_1 , A_k и B_k — постоянные интегрирования.

Напишем формулу μ -го размыкания при передаче точек

$$u_\mu = -e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_{k\mu} \sin v_k t + B_{k\mu} \cos v_k t) \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$i_\mu = C_{1\mu} e^{-2bt} - C e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} [(v_k A_{k\mu} - b B_{k\mu}) \cos v_k t - (v_k B_{k\mu} + b A_{k\mu}) \sin v_k t] \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Через время $t=0$ после начала размыкания замкнем цепь; тогда

$$-e^{-b\theta} \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_{k\mu} \sin v_k \theta + B_{k\mu} \cos v_k \theta) \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} =$$

$$= E \frac{l-x}{l} + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k (\mu+1) \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и

$$\begin{aligned} C_{1\mu} e^{-2b\theta} - C e^{-b\theta} \sum_{k=1}^{k=\infty} [(\nu_k A_{k\mu} - b B_{k\mu}) \cos \nu_k \theta - \\ - (\nu_k B_{k\mu} + b A_{k\mu}) \sin \nu_k \theta] \cos \frac{k\pi x}{l} = \\ = I + C_{1(\mu+1)} + C \sum_{k=1}^{k=\infty} [(\nu_k A_{k(\mu+1)} - b B_{k(\mu+1)}) \cos \frac{k\pi x}{l}]. \end{aligned}$$

Но

$$E \frac{l-x}{l} = - \sum_{k=1}^{k=\infty} B_{k1} \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} B_k (\mu+1) &= B_{k1} - A_{k\mu} e^{-b\theta} \sin \nu_k \theta - B_{k\mu} e^{-b\theta} \cos \nu_k \theta, \\ A_{k(\mu+1)} &= \frac{b}{\nu_k} B_{k(\mu+1)} - \frac{1}{\nu_k} e^{-b\theta} [A_{k\mu} (\nu_k \cos \nu_k \theta - b \sin \nu_k \theta) - \\ &\quad - B_{k\mu} (\nu_k \sin \nu_k \theta + b \cos \nu_k \theta)], \\ C_{1(\mu+1)} &= -I - C_{1\mu} e^{-2b\theta}. \end{aligned}$$

Исходя из этих формул, можно написать

$$\begin{aligned} C_{11} &= -I, \\ C_{12} &= -I + I e^{-2b\theta} = -I(1 - e^{-2b\theta}), \\ C_{13} &= -I(1 - e^{-2b\theta} + e^{-4b\theta}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$C_{1\mu} = -I[1 - e^{-2b\theta} + e^{-4b\theta} - \dots + (-1)^{\mu+1} e^{-(\mu-1)2b\theta}].$$

Далее,

$$B_{k2} = B_{k1} - A_{k1} e^{-b\theta} \sin \nu_k \theta - B_{k1} e^{-b\theta} \cos \nu_k \theta,$$

и так как

$$A_{k1} = \frac{b}{\nu_k} B_{k1},$$

то

$$\begin{aligned} B_{k2} &= B_{k1} \left(1 - \frac{b}{\nu_k} e^{-b\theta} \sin \nu_k \theta - e^{-b\theta} \cos \nu_k \theta \right), \\ A_{k2} &= \frac{b}{\nu_k} B_{k2} + \frac{1}{\nu_k} e^{-b\theta} B_{k1} \left(\nu_k + \frac{b^2}{\nu_k} \right) \sin \nu_k \theta = \\ &= B_{k1} \left[\frac{b}{\nu_k} (1 - e^{-b\theta} \cos \nu_k \theta) + e^{-b\theta} \sin \nu_k \theta \right], \\ B_{k3} &= B_{k1} [1 - e^{-b\theta} \cos \nu_k \theta + e^{-2b\theta} \cos 2\nu_k \theta - \\ &\quad - \frac{b}{\nu_k} (e^{-b\theta} \sin \nu_k \theta - e^{-2b\theta} \sin 2\nu_k \theta)], \end{aligned}$$

$$A_{k2} = B_{k1} \left[\frac{b}{v_{k1}} (1 - e^{-b\theta} \cos v_k \theta + e^{-2b\theta} \cos 2v_k \theta) + \right. \\ \left. + e^{-b\theta} \sin v_k \theta - e^{-2b\theta} \sin 2v_k \theta \right],$$

.....

Для установившегося уже состояния передачи импульсов тока мы получим постоянные интегрирования, если приравняем $\mu = \infty$ (практически несколько замыканий и размыканий) и вспомним, что

$$\cos v_k \theta = \frac{e^{jv_k \theta} + e^{-jv_k \theta}}{2},$$

$$\sin v_k \theta = \frac{e^{jv_k \theta} - e^{-jv_k \theta}}{2j},$$

имеем

$$B_k = B_{k1} \frac{1 + e^{-b\theta} \cos v_k \theta - \frac{b}{v_k} e^{-b\theta} \sin v_k \theta}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos v_k \theta},$$

$$A_k = B_{k1} \frac{e^{-b\theta} \sin v_k \theta + \frac{b}{v_k} (1 + e^{-b\theta} \cos v_k \theta)}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos v_k \theta},$$

$$C_1 = -I \frac{1}{1 + e^{-2b\theta}}$$

$$v_k A_k - b B_k = \left(v_k + \frac{b^2}{v_k} \right) B_{k1} \frac{e^{-b\theta} \sin v_k \theta}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos v_k \theta},$$

$$v_k B_k + b A_k = \left(v_k + \frac{b^2}{k} \right) B_{k1} \frac{1 + e^{-b\theta} \cos v_k \theta}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos v_k \theta},$$

причем

$$B_{k1} = -\frac{2El}{k^2 \pi^2}.$$

Подставляя в общую формулу для силы тока при нажатии ключа, получим

$$i_{\text{зам}} = I \left\{ 1 - \frac{e^{-2bt}}{1 + e^{-2b\theta}} + \right. \\ \left. + 4e^{-bt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos v_k \theta} \frac{\sin v_k t}{\sqrt{k^2 v_1^2 - 1}} - \right. \\ \left. - 4e^{-b(t+\theta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos v_k \theta} \frac{\sin v_k (\theta - t)}{\sqrt{k^2 v_1^2 - 1}} \right\}.$$

Сила тока размыкания, как не трудно убедиться, определится из равенства

$$i_{\text{разм}} = I - i_{\text{зам}}.$$

Переходим к методу наложения кривых. Покажем, что он применим и в рассматриваемом случае.

§ 2. Метод наложения кривых

Произведя известным уже нам способом суммирование ординат, отложенных вверх и вниз от оси абсцисс кривых тока при передаче точек, придем к следующим формулам:

$$\begin{aligned} i_{\text{зам}} = I & \left\{ 1 - e^{-2bt} (1 - e^{-2b\theta} + e^{-4b\theta} - e^{-6b\theta} + \dots) + \right. \\ & + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \left[e^{-bt} \sin bt \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \left(1 - e^{-b\theta} \cos b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} + \right. \right. \\ & + e^{-2b\theta} \cos 2b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} - e^{-3b\theta} \cos 3b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} + \dots \Big) - \\ & - e^{-bt} \cos bt \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \left(e^{-b\theta} \sin b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} - \right. \\ & \left. \left. - e^{-2b\theta} \sin 2b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} + e^{-3b\theta} \sin 3b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} - \dots \right) \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned} i_{\text{зам}} = I & \left\{ 1 + e^{-2bt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2k\theta} + \right. \\ & + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \left[e^{-bt} \sin bt \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \times \right. \\ & \times \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h e^{-hb\theta} \cos (hb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}) + \\ & \left. \left. + e^{-bt} \cos bt \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h e^{-b\theta} \sin (hb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Сила тока размыкания равна

$$i_{\text{разм}} = I - i_{\text{зам}}.$$

Имея в виду, что

$$\cos hb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} = \frac{e^{jhb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} + e^{-jhb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}}{2},$$

$$\sin hb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} = \frac{e^{jhb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} - e^{-jhb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}}{2j},$$

получим

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} (-1)^h e^{-hb\theta} \cos hb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} =$$

$$= \frac{1 + e^{-b\theta} \cos b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}},$$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} (-1)^h e^{-hb\theta} \sin hb\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} =$$

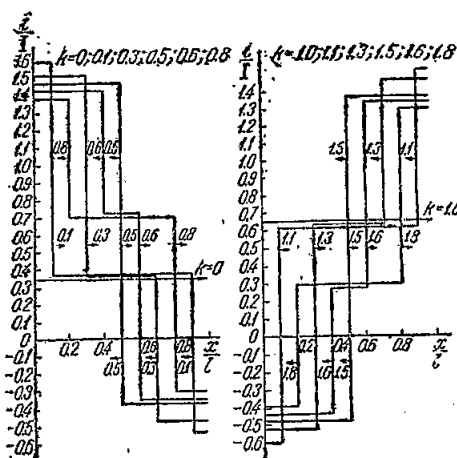
$$= -\frac{e^{-b\theta} \sin b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}},$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k e^{-2k\theta} = \frac{1}{1 + e^{-2b\theta}}.$$

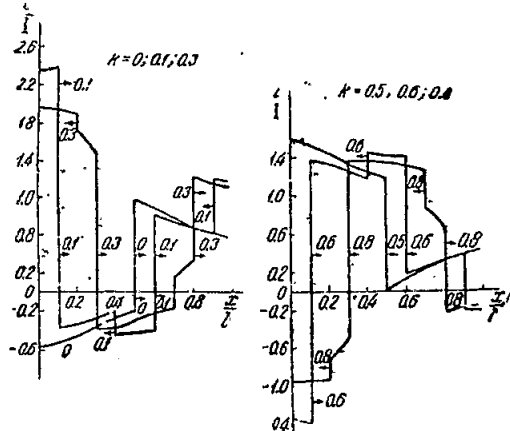
Подставляя в формулу для $i_{\text{зам}}$, находим

$$\begin{aligned} i_{\text{зам}} = I & \left[1 - \frac{e^{-2bt}}{1 + e^{-2b\theta}} + \right. \\ & + 4e^{-bt} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin bt \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} - \\ & \left. - 4e^{-b(t+\theta)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin b(\theta - t) \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \frac{\cos \frac{k\pi x}{l}}{1 + e^{-2b\theta} + 2e^{-b\theta} \cos b\theta \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \right]. \end{aligned}$$

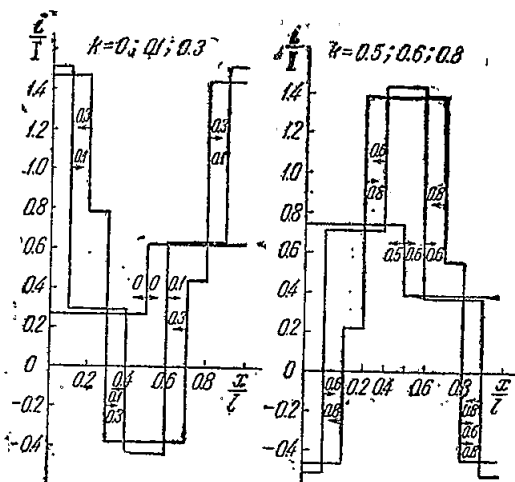
Пришли к той же формуле, что и методом определения постоянных интегрирования.



Фиг. 75.



Фиг. 78.



Фиг. 76.

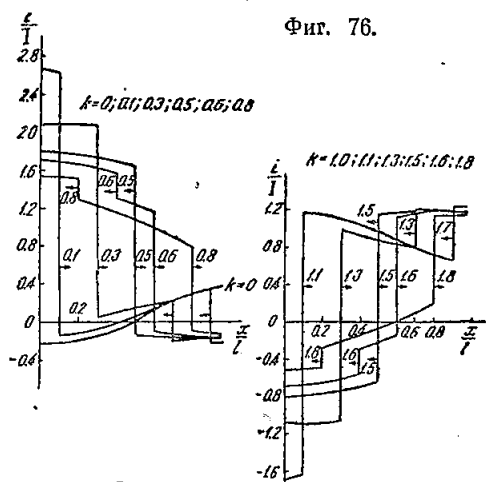
Для иллюстрации изложенного приведем графики распространения прерывистого тока вдоль линии при следующих условиях:

а) $\delta_1 = 10$,
 $\theta = l\sqrt{LC}$
 (фиг. 75),

б) $\delta_1 = 10$,
 $\theta = 0.5l\sqrt{LC}$
 (фиг. 76),

в) $\delta_1 = 2$,
 $\theta = l\sqrt{LC}$
 (фиг. 77),

г) $\delta_1 = 2$,
 $\theta = 0.5l\sqrt{LC}$
 (фиг. 78),



Фиг. 77.

причем время выражаем в долях от $l\sqrt{LC}$ ($t = nl\sqrt{LC}$).

ТОК И НАПРЯЖЕНИЕ ГОЛОВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

§ 1. Вывод формулы тока головной волны, исходя из решения для заземленной линии (фиг. 7)

Для вполне изолированной надземной линии мы имели для тока решение (15₁)

$$i = I \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + 4e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{\delta_1} \sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}}{\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1}} \cos \frac{k\pi x}{l} \right], \quad (15_1)$$

где

$$I = \frac{E}{Rl}, \quad \delta_1 = \frac{2\pi}{Rl} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad n = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = l\sqrt{LC}.$$

Имеющиеся на практике линии характеризуются параметрами δ_1 , всегда большими $2 (\delta_1 > 2)$, и, чем короче линия, тем больше δ_1 , как это видно из формулы для δ_1

$$\delta_1 = \frac{1}{l} \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При достаточно короткой линии параметр δ_1 получает такие значения, при которых единицей можно пренебречь по сравнению с членом $k^2 \delta_1^2$. В этом случае

$$\sqrt{k^2 \delta_1^2 - 1} \approx k \delta_1,$$

и формула (15₁) примет вид (15₂)

$$i = I \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + \frac{4}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin n\pi k}{k} \cos \frac{k\pi x}{l} \right]. \quad (15_2)$$

Головная волна тока Γ_i и напряжения Γ_u характеризуется, как показывает табл. 9 и графики фиг. 65, 66 и 67, величинами скачков напряжения и тока в местах разрыва функций u и i , причем длина линии, влияя на число разрывов функций в определенный период времени (чем короче линия, тем большее количество разрывов), совсем не влияет на значение самой головной волны. Поэтому отыскание математического выражения головной волны значительно облегчается, если мы остановимся на короткой линии, для которой справедлива формула (15₂). Обозначим сумму, входящую в формулу (15₂), буквой S

$$S = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi vt}{l} \cos \frac{k\pi x}{l},$$

тогда, как известно, *

$$\text{при } -\frac{x}{l} < \frac{vt}{l} < +\frac{x}{l}$$

$$S = -\frac{\pi vt}{2l};$$

* В. И. Коваленков. Устанавливающиеся процессы и распространение прерывистого тока по телеграфным проводам. Изд. ЭТИ, 1912, стр. 27.

$$\text{при } \frac{x}{l} < \frac{vt}{l} < 2 - \frac{x}{l}$$

$$S = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi vt}{2l}.$$

С дальнейшим увеличением t функция S начинает повторяться.

Теперь не трудно определить головную волну тока по скачкам тока в местах разрыва функции i .

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= I \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + \frac{4}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi vt}{2l} \right) \right] - \\ &- I \left[1 - e^{-\frac{2\pi n}{\delta_1}} + \frac{4}{\delta_1} e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} \left(-\frac{\pi vt}{2l} \right) \right] = \\ &= \frac{2\pi}{\delta_1} I e^{-\frac{\pi n}{\delta_1}} = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0}, \end{aligned}$$

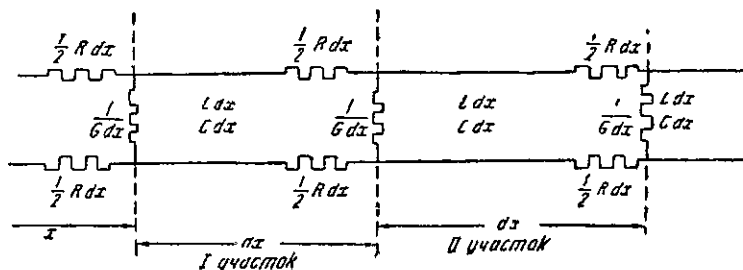
где

$$b = \frac{R}{2L} \quad \text{и} \quad t_0 = x \sqrt{LC},$$

т. е. пришли к выведенной уже выше формуле.

§ 2. Вывод формул напряжения и тока головной волны методом проф. Л. Б. Слепяна

Заменим элемент длины dx действительной линии эквивалентным ему элементом dx идеальной линии (т. е. линии без сопротивления и утечки), сопротивления же проводов линии Rdx и ее изоляции $\frac{1}{Gdx}$ сосредоточим в конце участка (фиг. 79). При таком изображении эле-



Фиг. 79.

ментов длины линии электромагнитная волна при переходе из участка I в участок II должна частью отразиться, при этом коэффициент отражения N_x , как известно, будет определяться формулой

$$N_x = \frac{Z_x - Z}{Z_x + Z},$$

где $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ есть волновое сопротивление идеальной линии, Z_x — сопротивление в конце I участка, встречаемое волной. Это сопротивление Z_x может быть представлено схемой фиг. 80, следовательно

$$Z_x = Rdx + \frac{Z}{1 + ZGdx}.$$

Коэффициент же отражения может быть выражен следующим образом:

$$N_x = \frac{(1 + ZGdx)Rdx - Z^2Gdx}{(1 + ZGdx)Rdx + Z(2 + ZGdx)}.$$

Отбрасывая бесконечно малые второго порядка, получим

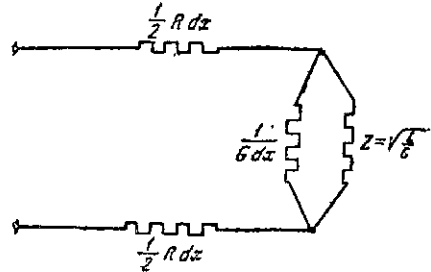
$$N_x = \frac{(R - Z^2G)dx}{2Z + (R + Z^2G)dx} \approx \frac{R - Z^2G}{2Z} dx.$$

Обозначим напряжение и ток падающей волны через u_a и i_a , тогда напряжение u_b и ток i_b волны, проходящей через сопротивление Z_x , будут равны

$$u_b = u_a(1 + N_x),$$

$$i_b = i_a(1 - N_x).$$

Напряжение же u_c и ток i_c волны, вступающей на участок II , очевидно, выражаются следующими соотношениями:



Фиг. 80.

$$\begin{aligned} u_c &= u_a + \frac{du}{dx} dx = u_b - i_b R dx = \\ &= u_a(1 + N_x) - i_a(1 - N_x) R dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_c &= i_a + \frac{di}{dx} dx = i_b \frac{Z \frac{1}{Gdx}}{Z + \frac{1}{Gdx}} = \frac{i_b}{1 + ZGdx} = \\ &= i_a \frac{1 - N_x}{1 + ZGdx} \approx i_a(1 - N_x)(1 - ZGdx) = \\ &= i_a \left(1 - N_x - ZGdx + ZGdx \frac{R - Z^2G}{2Z} dx \right). \end{aligned}$$

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получим

$$i_c = i_a(1 - N_x - ZGdx)$$

и так как

$$i_a = \frac{u_a}{Z},$$

то

$$\frac{du}{dx} dx = u_a \left(N_x - \frac{1 - N_x}{Z} R dx \right).$$

Подставив значение коэффициента N_x и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получим

$$\frac{du}{dx} dx = u_a \left(\frac{R - Z^2 G}{2Z} - \frac{R}{Z} \right) dx = -\frac{u_a}{2} \left(\frac{R}{Z} + GZ \right) dx,$$

$$\frac{di}{dx} dx = -i_a \left(\frac{R - Z^2 G}{2Z} + ZG \right) dx = -\frac{i_a}{2} \left(\frac{R}{Z} + GZ \right) dx,$$

или

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z} + GZ \right) = -b \sqrt{LC},$$

$$\frac{1}{i} \frac{di}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z} + GZ \right) = -b \sqrt{LC}.$$

Интегрируя полученные уравнения, находим:

$$\Gamma_u = u_0 e^{-b \sqrt{LC} x} = u_0 e^{-bt_0},$$

$$\Gamma_i = i_0 e^{-b \sqrt{LC} x} = i_0 e^{-bt_0} = \frac{u_0}{Z} e^{-bt_0}.$$

Таким путем мы пришли к формулам головной волны, уже полученным нами другими методами.

§ 3. Анализ кривых напряжения и тока бегущей волны

Иллюстрируем бегущую волну, исходя из имеющихся у нас таблиц и графиков.

До тех пор, пока электромагнитная волна не достигла конца линии, она движется вдоль нее так, как если бы эта линия была бесконечно длинной, т. е. до момента достижения волною конца линии мы имеем вдоль последней бегущую волну. И только после отражения волны от концов линии картина усложняется суммированием прямых и отраженных волн.

Табл. 9 дает возможность выделить головную часть бегущей волны в пределах времени от $n=0$ до $n=1$ и изменение тока последней во времени для пункта $x=0$ от $n=0$ до $n=2$; для $x=0.1$ от $n=0.1$ до $n=(2-0.1)=1.9$; для $x=0.2$ от $n=0.2$ до $n=(2-0.2)=1.8$ и т. д. Приводим табл. 10 и график фиг. 81 для значений тока головной волны, выражая Γ_i в долях от I .

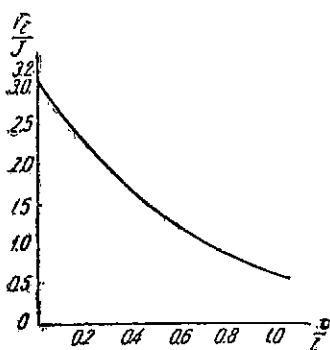
Таблица 10

Зависимость головной волны Γ_i от расстояния x

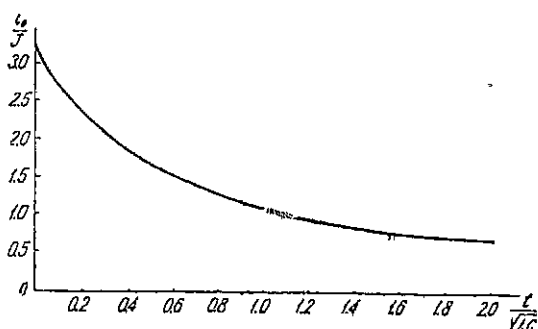
x/l	Γ_i/I	x/l	Γ_i/I
0	3.114	0.5	1.224
0.1	2.685	0.7	1.046
0.2	2.295	0.8	0.8944
0.3	1.962	0.9	0.7644
0.4	1.676	1.0	0.6533
0.5	1.433	—	—

Приведенные значения Γ_i , как и следовало ожидать, в точности совпадают с соответствующими значениями, вычисленными по выведенной выше формуле для Γ_i .

Чтобы иллюстрировать временную зависимость тока бегущей волны, возьмем значения исходящего тока i_0 в пределах от $n=0$ до $n=2$ из табл. 9 и построим по ним график фиг. 82. Иллюстрациями же временного изменения тока головной волны могут служить также первые участки кривых фиг. 66 и 65. Кривые эти показывают, что головное значение начального тока в зависимости от длины линии может быть больше, меньше или равно значению установившегося тока для



Фиг. 81.



Фиг. 82.

данной линии. Покажем это математически. Возьмем пункт $x=0$. Для этого пункта изменение тока во времени при разных значениях параметра β_1 приведены на графике фиг. 65. Посмотрим, при каких условиях возможны соотношения

$$\Gamma_i^0 \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} I_0, \quad I_0 \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} I_\infty^0 \quad \text{и} \quad \Gamma_i^0 \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} I_\infty^0,$$

где Γ_i^0 — ток головной волны в начале линии, I_∞^0 — установившееся значение тока бегущей волны в начале линии (установившееся значение тока при $x=0$ в случае бесконечно длинной однородной линии) и I_0 — установившееся значение линии конечной длины в ее начале.

Так как

$$\Gamma_i^0 = E \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad I_\infty^0 = E \sqrt{\frac{G}{R}} \quad \text{и} \quad I_0 = E \sqrt{\frac{G}{R}} \operatorname{cth} \beta l,$$

то первое соотношение ($\Gamma_i^0 \leq I_0$) возможно при условии

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \leq \sqrt{\frac{G}{R}} \operatorname{cth} \beta l,$$

или

$$R \frac{\operatorname{th} \beta l}{\beta} \leq \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Если при этом $G=0$, т. е. рассматриваемая линия вполне изолирована ($G=0$), как это было принято при построении графиков фиг. 65, то $\beta=0$ и

$$\left| \frac{\operatorname{th} \beta l}{\beta} \right|_{\beta=0} = \left| \frac{l}{\operatorname{ch}^2 \beta l} \right|_{\beta=0} = l,$$

и мы получим соотношения

$$\Gamma_i^0 \leq I_0,$$

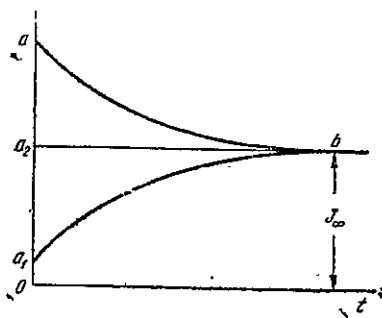
если $Rl \leq \sqrt{\frac{L}{C}}$.

При коротких линиях (δ_1 велико) полное сопротивление линии RL будет меньше волнового сопротивления $\sqrt{\frac{L}{C}}$, следовательно, начальное значение тока при $x=0$ (т. е. Γ_i) будет меньше установившегося тока (I_0); с увеличением длины линии l , значит с уменьшением параметра δ_1 , значение Γ_i^0 приближается к I_0 ; при какой-то предельной длине $l_{пр}$ делается равным I_0 ; при дальнейшем увеличении l ($l > l_{пр}$) начальное значение тока Γ_i будет больше установившегося тока I_0 , и тем больше, чем длиннее линия. Все это подтверждается графиками фиг. 65.

Второе соотношение (I_0 больше равно меньше I_∞) справедливо при условии

$$\text{cth } \beta l \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} 1,$$

и так как при любой конечной длине линии ($l > 0$) $\text{cth } \beta l > 1$, то установившееся значение тока конечной линии (конец линии по условию замкнут накоротко) всегда больше установившегося значения тока бегущей волны, что также подтверждается графиками фиг. 65.



Фиг. 83.

Третье соотношение (Γ_i^0 больше равно меньше I_∞^0) справедливо, если

$$\sqrt{\frac{L}{C}} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} \sqrt{\frac{G}{R}},$$

или

$$RC \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} LG.$$

Так как для надземных линий, применяемых на практике, мы имеем $RC > LG$, то для пункта $x=0$ будем всегда иметь кривую тока ab (фиг. 83); если бы мы создали условия $RC < LG$, то получили бы кривую a_1b и, наконец, в случае хивисайдовского условия ($RC = LG$), имели бы кривую a_2b . Кривые фиг. 65 построены для линии, характеризующейся соотношением $RC > LG$, и мы видим, что при любых значениях параметра δ_1 начальное значение тока (Γ_i^0) больше установившегося значения тока бегущей волны (I_∞).

Рассмотрим условия соотношения Γ_i больше равно меньше I_∞ для общего случая, когда $x \geq 0$. В этом случае

$$\Gamma_i = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{RC+LC}{2\sqrt{LC}} x},$$

$$I_\infty = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x},$$

следовательно, искомое условие будет выражаться следующим образом:

$$\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{RC+LC}{2\sqrt{LC}} x} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x},$$

или

$$\ln \sqrt{RC} - \ln \sqrt{LG} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} \frac{(\sqrt{RC} - \sqrt{LG})^2}{2\sqrt{LC}} x.$$

Если $RC > LC$, то возможны три случая:

а) при длине линии, меньшей какой-то предельной $x_{\text{пр}}$ ($x < x_{\text{пр}}$),

$$\Gamma_i^0 > I_{\infty};$$

б) при длине линии $x = x_{\text{пр}}$

$$\Gamma_i = I_{\infty};$$

в) при длине линии $x > x_{\text{пр}}$

$$\Gamma_i < I_{\infty}.$$

Построение кривых тока и напряжения бегущей волны значительно упрощается, если имеется возможность строить их начальные касательные. Попробуем вывести соответствующие формулы. Выше мы пришли к следующим точным формулам напряжения и тока бегущей волны:

$$u = E \left[e^{-bt_0} + \sigma^2 t_0 \int_{t_0}^t e^{-b\tau} \frac{I_1(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2})}{j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}} d\tau \right],$$

$$i = E \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} I_0(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}) + vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}) d\tau \right].$$

Возьмем производную u по t

$$\frac{du}{dt} = E\sigma^2 t_0 e^{-bt} \frac{I_1(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2})}{j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}}.$$

Обозначим

$$j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2} = \theta,$$

тогда

$$\frac{du}{dt} = E\sigma^2 t_0 e^{-bt} \frac{I_1(\theta)}{\theta},$$

но

$$I_1(\theta) = \frac{\theta}{2} \left[1 - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right],$$

$$\lim \left| \frac{I_1(\theta)}{\theta} \right|_{\substack{\theta \rightarrow 2 \\ (t \rightarrow t_0)}} = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} = \frac{E}{2} \sigma^2 t_0 e^{-bt_0},$$

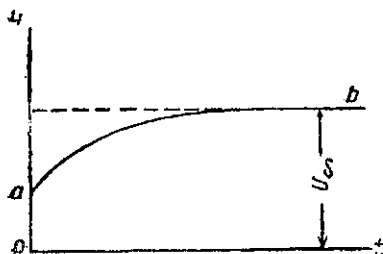
где

$$\sigma = \frac{RC - LG}{2LC} \quad \text{и} \quad t_0 = x \sqrt{LC}.$$

Подставляя значения σ и t_0 , получим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{E}{2} \left(\frac{RC-LG}{2LC}\right)^2 x \sqrt{LC} e^{-bt_0}.$$

Таким образом, наклон начальной касательной в кривых напряжения бегущей волны, во-первых, зависит от расстояния x рассматриваемого пункта, во-вторых, тангенс этого угла наклона всегда положителен, независимо от соотношений параметров RC и LG . Это может быть лишь в том случае, если временная зависимость напряжения бегущей волны изображается кривой ab (фиг. 84), т. е. напряжение головной волны всегда меньше установившегося значения напряжения U_∞ . Под-



твердим это еще следующим анализом.

Так как $\Gamma_u = Ee^{-bt_0}$ и $U_\infty = Ee^{-\beta x}$, то Γ_u больше, равно, меньше U_∞ , если

$$e^{-b\sqrt{LC}x} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} e^{-\beta x},$$

или

$$e^{-\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)x} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} e^{-\sqrt{RG}x}.$$

И так как

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} > 2\sqrt{RG},$$

или

$$R^2 \frac{C}{L} - 2RG + G^2 \frac{L}{C} = \left(R\sqrt{\frac{C}{L}} - G\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 \geq 0,$$

то для $RC \neq LG$ всегда

$$\Gamma_u < U_\infty.$$

Переходим к току бегущей волны.

$$\frac{di}{dt} = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} \left[\left(\frac{G}{C} - b\right) I_0(\theta) - \sigma^2 t \frac{I_0'(\theta)}{\theta} \right],$$

где

$$\theta = j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}.$$

И так как

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ t \rightarrow t_0}} \left| \frac{I_0'(\theta)}{\theta} \right| = -\frac{1}{2}, \quad \frac{G}{C} - b = \frac{LG - RC}{2LC},$$

то

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} = -E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{RC-LG}{2LC} e^{-bt_0} \left(1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x\right).$$

Пусть $RC > LG$, тогда до некоторого предельного значения $x = x_{пр}$ получим (для $x < x_{пр}$)

$$1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} < 0,$$

т. е. в этом случае $\Gamma_i > I_\infty$; для $x > x_{пр}$

$$1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x < 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} > 0,$$

т. е. $\Gamma_i < I_\infty$;

наконец, для предельной длины $x = x_{\text{пр}}$

$$1 - \frac{RC - LG}{4\sqrt{LC}} x = 0, \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} = 0 \quad \text{и} \quad \Gamma_i = I_\infty.$$

Если $RC = LG$, то при любой длине линии

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} = 0 \quad \text{и} \quad \Gamma_i = I_\infty;$$

если же $RC < LG$, то при любой длине линии

$$1 - \frac{RC - LG}{4\sqrt{LC}} x > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} > 0,$$

т. е. $\Gamma_i < I_\infty$.

Возвращаясь к кривым тока фиг. 66, 65 и 82, замечаем, что временная зависимость тока бегущей волны весьма близка к показательной кривой и может быть с достаточной для практики точностью заменена соответствующей показательной кривой. Имея же значения тока и напряжения головной волны, зная, что с приближением времени t к бесконечности они стремятся к установившимся значениям I_∞ и U_∞ , наконец, принимая, что во времени они изменяются по показательным кривым, легко построить соответствующие кривые тока и напряжения.

§ 4. Волновое сопротивление и волновая проводимость бегущей волны

Между напряжением u и током i какого угодно пункта бесконечно длинной линии, независимо от времени, справедливо следующее соотношение:

$$u = Z_x i,$$

где Z_x — сопротивление, встречаемое бегущей волной.

Сопротивление Z_x (или обратная ему проводимость $G_x = \frac{1}{Z_x}$) — важнейший параметр бегущей вдоль данной линии волны. Так как это сопротивление справедливо для любого момента времени, то оно справедливо и для $t = t_0$ и для $t = \infty$. Но для $t = t_0$ напряжение $u = \Gamma_u = u_0 e^{-bt_0}$ и ток $i = \Gamma_i = \frac{u_0}{Z} e^{-bt_0}$; следовательно, для начального момента времени $t = t_0$ волновое сопротивление бегущей волны равно:

$$Z_x = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Для $t = \infty$ напряжение $u = u_0 e^{-\beta x}$ и ток $i = \frac{u_0}{Z_y} e^{-\beta x}$ следовательно, для $t = \infty$ сопротивление Z_x равно

$$Z_x = Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}.$$

Для промежуточных значений времени t сопротивление Z_x может быть определено, исходя из выведенных выше формул для напряжения u и тока i бегущей волны

$$Z_x = \frac{u}{i} = \frac{e^{-bt_0} + \sigma t_0 \int_{t_0}^t \frac{e^{-b\tau} I_1(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2})}{j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}} d\tau}{\sqrt{\frac{c}{L}} e^{-bt_0} (j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}) + vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}) d\tau}.$$

Из формулы видно, что значения волнового сопротивления, действительно, заключаются между Z и Z_y . Для встречающихся на практике линий связи ($RC > LG$) мы имеем:

$$Z \leq Z_x \leq Z_y.$$

Кроме начального и конечного значений сопротивления Z_x , весьма характерной является начальная касательная к временной кривой сопротивления бегущей волны. Эта начальная касательная определится производной Z_x по времени t

$$\left(\frac{dZ_x}{dt}\right)_{t=t_0} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{i}\right)\right]_{t=t_0} = \left[\frac{u'i - i'u}{i^2}\right]_{t=t_0}.$$

И так как

$$(i)_{t=t_0} = u_0 \frac{1}{Z} e^{-bt_0},$$

$$(u)_{t=t_0} = u_0 e^{-bt_0},$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0} = -u_0 \frac{\sigma}{Z} \left(1 - \frac{\sigma t_0}{2}\right) e^{-bt_0},$$

то

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_0} = u_0 \frac{\sigma^2 t_0}{2} e^{-bt_0},$$

$$\left(\frac{dZ_x}{dt}\right)_{t=t_0} = \sigma Z.$$

Таким же путем легко убедиться, что начальная касательная к кривой волновой проводимости выражается формулой

$$\left(\frac{dG_x}{dt}\right)_{t=t_0} = -\frac{\sigma}{Z}.$$

Итак, начальная касательная к кривой волнового сопротивления, так же как начальное и конечное значения последнего, не зависят от x , т. е. от положения того пункта бесконечно длинной линии, с которого производится измерение волнового сопротивления. Вполне естественно сделать предположение, что вообще измеренное волновое сопротивление Z_x не зависит от координаты x . Физически трудно представить, чтобы измеренное волновое сопротивление Z_x зависело от положения

на линии пункта, из которого мы производим его измерение. А раз это так, то для определения сопротивления Z_x мы можем выбрать любое значение координаты x . Удобнее всего положить $x=0$. В этом случае

$$G_x = \frac{1}{Z_x} = \frac{i_0}{u_0} = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} I_0(j\sigma t) + vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma\tau) d\tau.$$

В таком виде формула весьма неудобна для практического применения. Попытаемся представить ее в более удобном для практиков виде.

Обозначим

$$\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} I_0(j\sigma t) = G_1,$$

$$vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma\tau) d\tau = G_2,$$

тогда

$$G_x = G_1 + G_2.$$

Произведя интегрирование, получим

$$G_2 = \frac{G}{\sqrt{LC}} \frac{1}{b} \left[(1 - e^{-bt}) \left(1 + \frac{2! \sigma^2}{2^2 (1!)^2 b^2} + \frac{4! \sigma^4}{2^4 (2!)^2 b^4} + \frac{6! \sigma^6}{2^6 (3!)^2 b^6} + \dots \right) \right] +$$

$$+ \frac{G}{\sqrt{LC}} \frac{\sigma^2 e^{-bt}}{b} t \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{t}{2!} \right) \left(\frac{2!}{2^2 (1!)^2} + \frac{4! \sigma^2}{2^4 (2!)^2 b^2} + \frac{6! \sigma^4}{2^6 (3!)^2 b^4} + \dots \right) - \right.$$

$$- \sigma^2 t^2 \left(\frac{1}{3! b} + \frac{t}{4!} \right) \left(\frac{4!}{2^4 (2!)^2} + \frac{6! \sigma^2}{2^6 (3!)^2 b^2} + \frac{8! \sigma^4}{2^8 (4!)^2 b^4} + \dots \right) +$$

$$+ \sigma^4 t^4 \left(\frac{1}{5! b} + \frac{t}{6!} \right) \left(\frac{6!}{2^6 (3!)^2} + \frac{8! \sigma^2}{2^8 (4!)^2 b^2} + \frac{10! \sigma^4}{2^{10} (5!)^2 b^4} + \dots \right) -$$

$$- \sigma^6 t^6 \left(\frac{1}{7! b} + \frac{t}{8!} \right) \left(\frac{8!}{2^8 (4!)^2} + \frac{10! \sigma^2}{2^{10} (5!)^2 b^2} + \frac{12! \sigma^4}{2^{12} (6!)^2 b^4} + \dots \right) +$$

$$\dots \dots \dots$$

Что касается проводимости G_1 , то она равна

$$G_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} \left[1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2^2 (1!)^2} - \frac{\sigma^4 t^4}{2^4 (2!)^2} + \frac{\sigma^6 t^6}{2^6 (3!)^2} - \frac{\sigma^8 t^8}{2^8 (4!)^2} + \dots \right];$$

для $t=t_0=0$

$$G_1 = \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad G_2 = 0;$$

для $t=\infty$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{G}{\sqrt{LC}} \frac{1}{b} \left(1 + \frac{2! \sigma^2}{2^2 b^2} + \frac{4! \sigma^4}{2^4 (2!)^2 b^4} + \frac{6! \sigma^6}{2^6 (3!)^2 b^6} + \dots \right).$$

Рассмотрим последний бесконечный ряд, написав его в следующем виде:

$$1 + \frac{2!}{2^2} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^2 + \frac{4!}{2^4 (2!)^2} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^4 + \frac{6!}{2^6 (3!)^2} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^6 + \frac{8!}{2^8 (4!)^2} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^8 +$$

$$+ \dots = 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^2 + \frac{3^2}{4!} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^4 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^6 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \left(\frac{\sigma}{b} \right)^8 + \dots$$

Обозначим $y = -\left(\frac{\sigma}{b}\right)^2$, тогда рассматриваемый ряд может быть переписан в таком виде:

$$1 - \frac{1}{2!} y + \frac{3^2}{4!} y^2 - \frac{3^2 5^2}{6!} y^3 + \frac{3^2 5^2 7^2}{8!} y^4 - \dots = \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{b^2}}}.$$

Итак

$$1 + \frac{2!}{2^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{4!}{2^4 (2!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \frac{6!}{2^6 (3!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^6 + \dots = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}},$$

следовательно, для $t = \infty$

$$G_2 = \frac{G}{\sqrt{LC}} \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}}.$$

Подставляя

$$\sigma = \frac{RC - LG}{2LC}, \quad b = \frac{RC + LG}{2LC},$$

получим для $t = \infty$

$$G_2 = \frac{1}{Z_y} = \sqrt{\frac{G}{R}}.$$

Просуммировав первый бесконечный ряд в формуле для G_2 , легко представить остальные ряды той же формулы в удобном для подсчетов виде.

Действительно,

$$\begin{aligned} & \frac{2!}{2^2 (1!)^2} + \frac{4!}{2^4 (2!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{6!}{2^6 (3!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \frac{8!}{2^8 (4!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^6 + \dots = \\ & = \frac{1}{2!} + \frac{3^2}{4!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^6 + \dots = \\ & = -\frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \left[1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{3^2}{4!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^6 + \dots \right] = \\ & = -\frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} = -\frac{b^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4!}{2^4 (2!)^2} + \frac{6!}{2^6 (3!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{8!}{2^8 (4!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots = \\ & = \frac{3^2}{4!} + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{10!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^6 + \dots = \\ & = -\frac{1}{2!} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \left[\frac{1}{2!} + \frac{3^2}{4!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^6 + \dots \right] = \\ & = -\frac{1}{2!} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \left(-\frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right) = \\ & = -\frac{1}{2!} \frac{b^2}{\sigma^2} - \frac{b^4}{\sigma^4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6!}{2^6(3!)^2} + \frac{8!}{2^8(4!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{10!}{2^{10}(5!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots = \\
& = \frac{3^2 5^2}{6!} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{10!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots = \\
& = -\frac{3^2}{4!} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \left(\frac{3^2}{4!} + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots \right) = \\
& = -\frac{3^2}{4!} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \left(-\frac{1}{2!} \frac{b^2}{\sigma^2} - \frac{b^4}{\sigma^4} + \frac{b^4}{\sigma^4} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right) = \\
& = -\frac{3^2}{4!} \frac{b^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2!} \frac{b^4}{\sigma^4} - \frac{b^6}{\sigma^6} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right); \\
& \frac{8!}{2^8(4!)^2} + \frac{10!}{2^{10}(5!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{12!}{2^{12}(6!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots = \\
& = -\frac{3^2 5^2}{6!} \frac{b^2}{\sigma^2} - \frac{3^2}{4!} \frac{b^4}{\sigma^4} - \frac{1}{2!} \frac{b^6}{\sigma^6} - \frac{b^8}{\sigma^8} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right); \\
& \frac{10!}{2^{10}(5!)^2} + \frac{12!}{2^{12}(6!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{14!}{2^{14}(7!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots = \\
& = -\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \frac{b^2}{\sigma^2} - \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \frac{b^4}{\sigma^4} - \frac{3^2}{4!} \frac{b^6}{\sigma^6} - \frac{1}{2!} \frac{b^8}{\sigma^8} - \frac{b^{10}}{\sigma^{10}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right); \\
& \frac{12!}{2^{12}(6!)^2} + \frac{14!}{2^{14}(7!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{16!}{2^{16}(8!)^2} \left(\frac{\sigma}{b}\right)^4 + \dots = \\
& = -\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{10!} \frac{b^2}{\sigma^2} - \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} \frac{b^4}{\sigma^4} - \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \frac{b^6}{\sigma^6} - \frac{3^2}{4!} \frac{b^8}{\sigma^8} - \\
& \quad - \frac{1}{2!} \frac{b^{10}}{\sigma^{10}} - \frac{b^{12}}{\sigma^{12}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2}} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя, находим

$$\begin{aligned}
G_2 &= vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma\tau) d\tau = \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \\
& - \frac{G}{\sqrt{LC}} bte^{-bt} \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{t}{2} \right) \Delta - \sigma^2 t^2 \left(\frac{1}{3!b} + \frac{t}{4!} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{\sigma^2} \Delta \right) + \right. \\
& + \sigma^4 t^4 \left(\frac{1}{5!b} + \frac{t}{6!} \right) \left(\frac{3^2}{4!} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{b^4}{\sigma^4} \Delta \right) - \sigma^6 t^6 \left(\frac{1}{7!b} + \frac{t}{8!} \right) \left(\frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3^2}{4!} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{b^4}{\sigma^4} + \frac{b^6}{\sigma^6} \Delta \right) + \\
& \left. + \sigma^8 t^8 \left(\frac{1}{9!b} + \frac{t}{10!} \right) \left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{8!} + \frac{3^2 \cdot 5^2}{6!} \frac{b^2}{\sigma^2} + \frac{3^2}{4!} \frac{b^4}{\sigma^4} + \frac{1}{2} \frac{b^6}{\sigma^6} + \frac{b^8}{\sigma^8} \Delta \right) - \right.
\end{aligned}$$

.....

где

$$\Delta = 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - \sigma^2}} = - \frac{(\sqrt{RC} - \sqrt{LG})^2}{2\sqrt{RGLC}}.$$

Полученное выражение представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma\tau) d\tau &= \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \\
 - \frac{G}{\sqrt{LC}} bt e^{-bt} &\left[\Delta \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b^2 t^2}{3!} + \frac{b^4 t^4}{5!} - \frac{b^6 t^6}{7!} + \frac{b^8 t^8}{9!} - \dots \right) + \right. \\
 + t \Delta &\left(\frac{1}{2} - \frac{b^2 t^2}{4!} + \frac{b^4 t^4}{6!} - \frac{b^6 t^6}{8!} + \frac{b^8 t^8}{10!} - \dots \right) - \\
 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \frac{1}{b} &\left(\frac{1}{3!} - \frac{b^2 t^2}{5!} + \frac{b^4 t^4}{7!} - \frac{b^6 t^6}{9!} + \dots \right) - \\
 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} t &\left(\frac{1}{4!} - \frac{b^2 t^2}{6!} + \frac{b^4 t^4}{8!} - \frac{b^6 t^6}{10!} + \dots \right) + \\
 + \frac{\sigma^4 t^4 3^2}{4!} \frac{1}{b} &\left(\frac{1}{5!} - \frac{b^2 t^2}{7!} + \frac{b^4 t^4}{9!} - \frac{b^6 t^6}{11!} + \dots \right) + \\
 + \frac{\sigma^4 t^4 3^2}{4!} t &\left(\frac{1}{6!} - \frac{b^2 t^2}{8!} + \frac{b^4 t^4}{10!} - \frac{b^6 t^6}{12!} + \dots \right) - \\
 - \frac{\sigma^6 t^6 3^2 5^2}{6!} \frac{1}{b} &\left(\frac{1}{7!} - \frac{b^2 t^2}{9!} + \frac{b^4 t^4}{11!} - \frac{b^6 t^6}{13!} + \dots \right) - \\
 - \frac{\sigma^6 t^6 3^2 5^2}{6!} t &\left(\frac{1}{8!} - \frac{b^2 t^2}{10!} + \frac{b^4 t^4}{12!} - \frac{b^6 t^6}{14!} + \dots \right) + \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Просуммируем входящие в приведенное выражение бесконечные ряды

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{b^2 t^2}{3!} + \frac{b^4 t^4}{5!} - \frac{b^6 t^6}{7!} + \frac{b^8 t^8}{9!} - \dots &= \frac{\sin bt}{bt}, \\
 \frac{1}{2} - \frac{b^2 t^2}{4!} + \frac{b^4 t^4}{6!} - \frac{b^6 t^6}{8!} + \frac{b^8 t^8}{10!} - \dots &= \frac{1 - \cos bt}{b^2 t^2}, \\
 \frac{1}{3!} - \frac{b^2 t^2}{5!} + \frac{b^4 t^4}{7!} - \frac{b^6 t^6}{9!} + \dots &= \frac{1}{b^2 t^2} \left(1 - \frac{\sin bt}{bt} \right), \\
 \frac{1}{4!} - \frac{b^2 t^2}{6!} + \frac{b^4 t^4}{8!} - \frac{b^6 t^6}{10!} + \dots &= \frac{1}{b^2 t^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \cos bt}{b^2 t^2} \right), \\
 \frac{1}{5!} - \frac{b^2 t^2}{7!} + \frac{b^4 t^4}{9!} - \frac{b^6 t^6}{11!} + \dots &= \frac{1}{b^2 t^2} \left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{b^2 t^2} \left(1 - \frac{\sin bt}{bt} \right) \right], \\
 \frac{1}{6!} - \frac{b^2 t^2}{8!} + \frac{b^4 t^4}{10!} - \frac{b^6 t^6}{12!} + \dots &= \frac{1}{b^2 t^2} \left[\frac{1}{4!} - \frac{1}{b^2 t^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \cos bt}{b^2 t^2} \right) \right], \\
 \frac{1}{7!} - \frac{b^2 t^2}{9!} + \frac{b^4 t^4}{11!} - \frac{b^6 t^6}{13!} + \dots &= \frac{1}{b^2 t^2} \left\{ \frac{1}{5!} - \frac{1}{b^2 t^2} \left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{b^2 t^2} \left(1 - \frac{\sin bt}{bt} \right) \right] \right\}, \\
 \frac{1}{8!} - \frac{b^2 t^2}{10!} + \frac{b^4 t^4}{12!} - \frac{b^6 t^6}{14!} + \dots &= \frac{1}{b^2 t^2} \left\{ \frac{1}{6!} - \frac{1}{b^2 t^2} \left[\frac{1}{4!} - \frac{1}{b^2 t^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \cos bt}{b^2 t^2} \right) \right] \right\}, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Подставляя, находим

$$\begin{aligned}
 vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma\tau) d\tau &= \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \\
 &- \frac{G}{\sqrt{LC}} bt e^{-bt} \left\{ t\Delta (1 + \sin bt - \cos bt) - \sigma^2 t^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{3^2 \sigma^2}{4! b^2} + \right. \right. \\
 &+ \frac{3^2 5^2 \sigma^4}{6! b^4} + \dots \left. \right) \left(\frac{1}{b} + \frac{t}{2} - \frac{1 + \sin bt - \cos bt}{b^2 t} \right) + \\
 &+ \frac{\sigma^4 t^4}{b} \left[\frac{3^2}{4! 3!} - \frac{3^2 5^2 \sigma^2 t^2}{6!} \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3! b^2 t^2} \right) + \dots \right] + \\
 &+ \sigma^4 t^6 \left[\frac{3^2}{4! 4!} - \frac{3^2 5^2 \sigma^2 t^2}{6!} \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{4! b^2 t^2} \right) + \dots \right] \left. \right\} \frac{1}{b^3 t^3} = \\
 &= \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \frac{G}{\sqrt{LC}} \frac{e^{-bt}}{bt} \frac{1}{b} \left\{ \Delta \left(1 + \frac{bt}{2} \right) b^3 t^3 + \right. \\
 &+ \frac{\sigma^4 t^4}{b} \left[\frac{3^2}{3! 4!} - \frac{3^2 5^2 \sigma^2 t^2}{6!} \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3! b^2 t^2} \right) + \dots + \right. \\
 &+ \frac{3^2 5^2 7^2 \sigma^4 t^4}{8!} \left(\frac{1}{7!} - \frac{1}{5! b^2 t^2} + \frac{1}{3! b^4 t^4} \right) - \\
 &- \frac{3^2 5^2 7^2 9^2 \sigma^6 t^6}{10!} \left(\frac{1}{9!} - \frac{1}{7! b^2 t^2} + \frac{1}{5! b^4 t^4} - \frac{1}{3! b^6 t^6} \right) + \\
 &+ \dots \left. \right] + \\
 &+ \sigma^4 t^8 \left[\frac{3^2}{4! 4!} - \frac{3^2 5^2 \sigma^2 t^2}{6!} \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{4! b^2 t^2} \right) + \right. \\
 &+ \frac{3^2 5^2 7^2}{8!} \sigma^4 t^4 \left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{6! b^2 t^2} + \frac{1}{4! b^4 t^4} \right) - \\
 &- \frac{3^2 5^2 7^2 9^2}{10!} \sigma^6 t^6 \left(\frac{1}{10!} - \frac{1}{8! b^2 t^2} + \frac{1}{6! b^4 t^4} - \frac{1}{4! b^6 t^6} \right) + \\
 &+ \dots \left. \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Обозначая последние ряды через $\psi(t)$, получим

$$vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma\tau) d\tau = \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} t \left(1 + \frac{bt}{2} \right) e^{-bt} + \psi(t).$$

Итак, проводимость G_x бегущей волны равна

$$G_x = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} I_0(j\sigma t) + \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} t \left(1 + \frac{bt}{2} \right) e^{-bt} + \psi(t).$$

Функция $\psi(t)$ для начального момента времени $t=0$ равна нулю, равна нулю она и для $t=\infty$. При каком-то значении времени $t=t_m$ она проходит через максимум. Чтобы оценить влияние этой функции на величину проводимости G_x , приведем численный пример. Возьмем железную однопроводную 5-миллиметровую линию с параметрами: $R=7.36 \Omega$; $L=0.0238 H$; $C_1=0.0113 \cdot 10^{-6} F$ и $G=0.5 \cdot 10^{-6} \Omega$. Для такой

линии функция $\psi(t)$ проходит через максимум для $t=t_m=500\sqrt{LC}$, причем максимум $\psi(t)$ равен $\psi_m(t)=0.0207\frac{1}{Z_y}$, или $Z_y f_m(t)=0.0207$. Проводимость же G_x меняется в пределах

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \leq G_x \leq \sqrt{\frac{G}{R}}, \text{ или } \sqrt{\frac{RC}{LG}} \leq G_x Z_y \leq 1.$$

Для нашего примера

$$2.645 \leq G_x Z_y \leq 1.$$

Максимальное значение функции $Z_y \Psi(t)$ составляет от наименьшего значения функции $Z_y G_x$ всего лишь 2.07% . Такой величиной практически можно пренебречь. В этом случае проводимость G_x может быть выражена следующей формулой:

$$G_x = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} I_0(j\sigma t) + \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) - \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} t \left(1 + \frac{bt}{2}\right) e^{-bt}.$$

Формула эта выведена для начала линии ($x=0$). Исходя же из положения, что волновая проводимость не зависит от положения рассматриваемого пункта на бесконечно длинной линии (практически не зависит), перепишем полученную формулу в следующем виде:

$$G_x = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-b(t-t_0)} I_0[j\sigma(t-t_0)] + \\ + \sqrt{\frac{G}{R}} [1 - e^{-b(t-t_0)}] - \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} (t-t_0) \left[1 + \frac{b(t-t_0)}{2}\right] e^{-b(t-t_0)}.$$

Посмотрим, удовлетворяет ли полученная формула выведенным выше основным особенностям волновой проводимости G_x . Эти особенности могут быть сформулированы следующим образом:

а) Для $t=t_0$

$$G_x = \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \frac{dG_x}{dt} = -\frac{\sigma}{Z};$$

б) для $t=\infty$

$$G_x = \sqrt{\frac{G}{R}}, \quad \frac{dG_x}{dt} = 0;$$

в) для $RC=LG$, при любом значении t ,

$$G_x = \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{G}{R}}.$$

Не трудно убедиться, что наша формула удовлетворяет всем приведенным условиям.

Ясно, что для $t=t_0$ проводимость $G_x = \sqrt{\frac{C}{L}}$ и для $t=\infty$ проводимость $G_x = \sqrt{\frac{G}{R}}$.

Если $RC=LG$, то $\sigma=0$, $\Delta=0$,

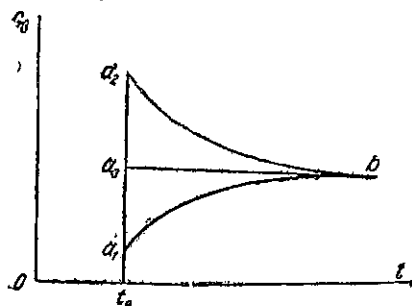
$$I_0[j\sigma(t-t_0)] = 1, \quad \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{G}{R}},$$

и мы имеем

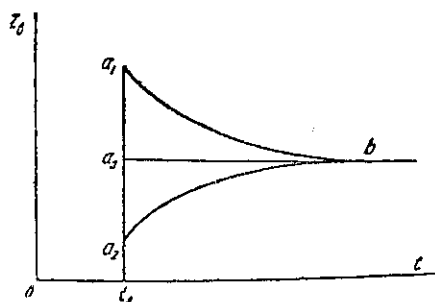
$$G_x = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-b(t-t_0)} + \sqrt{\frac{G}{R}} [1 - e^{-b(t-t_0)}] = \sqrt{\frac{G}{R}} = \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Возьмем теперь производную проводимости G_x по времени

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} = e^{-b(t-t_0)} & \left\{ b \sqrt{\frac{G}{R}} - b \sqrt{\frac{C}{L}} I_0[j\sigma(t-t_0)] + \right. \\ & \left. + j\sigma \sqrt{\frac{C}{L}} I_0'[j\sigma(t-t_0)] - \right. \\ & \left. - \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} \left[1 + \frac{b}{2}(t-t_0) \right] [1 - b(t-t_0)] - \frac{Gb\Delta}{2\sqrt{LC}} (t-t_0) \right\}. \end{aligned}$$



Фиг. 85.



Фиг. 86.

Для $t=t_0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dG_x}{dt} \right)_{t=t_0} = b \left(\sqrt{\frac{G}{R}} - \sqrt{\frac{C}{L}} \right) - \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} = -b \frac{\sqrt{RC} - \sqrt{LG}}{\sqrt{RL}} + \\ + \frac{G}{\sqrt{LC}} \frac{(\sqrt{RC} - \sqrt{LG})^2}{2\sqrt{RGLC}} = -\frac{RC - LG}{2LC} \sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{\sigma}{Z}. \end{aligned}$$

Для $t=\infty$

$$\left(\frac{dG_x}{dt} \right)_{t=\infty} = 0.$$

Таким образом, полученная формула удовлетворяет всем основным особенностям функции G_x .

Графически временную зависимость волнового сопротивления Z_x и проводимости G_x можно изобразить фиг. 85 и 86.

Если $RC > LG$, то мы имеем кривые a_1b ; если $RC < LG$, то — кривые a_2b и если $RC = LG$, то — прямые a_0b .

АНАЛИЗ УСТАНОВЛИВАЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРО- МАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВДОЛЬ ЛИНИИ НОВЕЙШИМИ МЕТОДАМИ

Глава VI

§ 1. Предисловие

Весь предыдущий анализ был проведен на основе классического метода. В настоящее время, на ряду с классическим методом, применяются иные методы, целью которых является задача упростить те слож-

ные математические решения, с которыми мы встречались выше. Рассмотрим только три метода:

- а) метод операторный,
- б) метод двойного интеграла Фурье,
- в) метод комплексных амплитуд.

При этом для иллюстрации этих методов рассмотрим только один наиболее простой случай — линии без отражения электромагнитной волны от ее концов.

§ 2. Решение телеграфных уравнений для линии бесконечно длинной операторным методом

Приведенные выше телеграфные уравнения

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

приводим к операторному виду

$$-\frac{du}{dx} = (R + Lp)i,$$

$$-\frac{di}{dx} = (G + Cp)u.$$

Берем вторую производную i по x :

$$-\frac{d^2 i}{dx^2} = (G + Cp) \frac{du}{dx}.$$

Подставляя значение $\frac{du}{dx}$ из первого уравнения, получим

$$\frac{d^2 i}{dx^2} = (R + Lp)(G + Cp)i.$$

Таким же путем приходим ко второму уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = (R + Lp)(G + Cp)u.$$

Обозначим

$$(R + Lp)(G + Cp) = \gamma^2,$$

тогда

$$\frac{d^2 i}{dx^2} = \gamma^2 i, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \gamma^2 u,$$

откуда находим

$$u = u_a e^{-\gamma x} + u_b e^{\gamma x},$$

$$i = \frac{\gamma}{R + Lp} (u_a e^{-\gamma x} - u_b e^{\gamma x}) = \frac{G + Cp}{\gamma} (u_a e^{-\gamma x} - u_b e^{\gamma x}).$$

При отсутствии отражения от конца линии имеем

$$u = u_a e^{-\gamma x},$$

$$i = \frac{G + Cp}{\gamma} u_a e^{-\gamma x}.$$

Так как при $x=0$ напряжение $u=E$, то $u_a=E$, и мы получим

$$u = E e^{-\gamma x},$$

$$i = E \frac{G + Cp}{\gamma} e^{-\gamma x} = \frac{Ep}{\gamma} \left(C + \frac{G}{p} \right) e^{-\gamma x}.$$

Преобразуем параметр γ ,

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= (R + Lp)(G + Cp) = LC \left(p + \frac{R}{L} \right) \left(p + \frac{G}{C} \right) = \\ &= LC \left(p^2 + 2p \frac{RC + LG}{2LC} + \frac{RG}{LC} \right) = \\ &= LC \left[\left(p + \frac{RC + LG}{2LC} \right)^2 - \left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{RC + LG}{2LC} = b, \quad \frac{RC - LG}{2LC} = \sigma,$$

тогда

$$\gamma = \frac{1}{v} \sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}.$$

Подставляя в полученные выше решения для u и i , находим

$$u = E e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}},$$

$$i = E \left(C + \frac{G}{p} \right) p v \frac{e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}}}{\sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}}.$$

Обозначим

$$\Pi = \frac{p e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}}}{\sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}},$$

и возьмем производную этой функции по x

$$\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{p}{v} e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}};$$

тогда

$$e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p + b)^2 - \sigma^2}} = -\frac{v}{p} \frac{d\Pi}{dx},$$

следовательно,

$$u = -E \frac{v}{p} \frac{d\Pi}{dx}, \quad (a)$$

$$i = E \left(C + \frac{G}{p} \right) v \Pi,$$

или

$$u = -Ev \int_0^t \frac{\partial \Pi}{\partial x} dt,$$

$$i = Ev \left(C + \int_0^t dt \right) \Pi.$$

Пользуясь таблицей интегралов, приводимых в любом курсе операторного исчисления, получим

$$\frac{e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2}}}{\sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2}} = \int_{\frac{x}{l}}^{\infty} e^{-pt} e^{-bt} I_0 \left(j\sigma \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) dt, \quad (6)$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

С другой стороны, как видно из приведенной выше формулы для функции Π , имеем

$$\frac{e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2}}}{\sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2}} = \frac{1}{p} \Pi,$$

т. е.

$$\frac{e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2}}}{\sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2}} = \int_0^{\infty} \Pi(t) e^{-pt} dt. \quad (в)$$

Сравнивая правые части соотношений (6) и (в), находим:

для $t < \frac{x}{l}$

$$\Pi(t) = 0;$$

для $t > \frac{x}{l}$

$$\Pi(t) = e^{-bt} I_0 \left(j\sigma \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right).$$

Переходя к решениям (а), получим:

для $t < \frac{x}{l}$

$$u = 0 \quad \text{и} \quad i = 0;$$

для $t > \frac{x}{l}$

$$u = E \left[e^{-b\frac{x}{v}} + \sigma^2 \frac{x}{v} \int_{\frac{x}{l}}^t \frac{e^{-b\tau} I_0 \left(j\sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j\sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}} d\tau \right],$$

$$i = E \left[\sqrt{\frac{C}{L}} \Pi(t) + vG \int_{\frac{x}{l}}^t \Pi(\tau) d\tau \right],$$

где I_1 — функция Бесселя первого порядка.

Имея в виду, что $\frac{x}{v} = t_0$, и подставляя значение функции $\Pi(t)$, приходим к знакомым уже нам формулам (12) и (13), стр. 89:

$$u = E \left[e^{-bt} + \sigma^2 t_0 \int_{t_0}^t \frac{e^{-b\tau} I_1(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2})}{j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}} d\tau \right],$$

$$i = E \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} I_0(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}) + vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}) d\tau \right].$$

§ 3. Двойной интеграл Фурье и его применение в электротехнике

Насколько проста теория передачи по линиям для установившегося режима, настолько она сложна для устанавливающегося режима. Не может ли быть разработан метод перехода от известных уже законов установившихся процессов к неизвестным устанавливающимся? Зная, например, законы передачи электромагнитной энергии вдоль линии с определенными приемно-передающими устройствами для установившегося процесса, нельзя ли от него перейти к соответствующим устанавливающимся процессам? Такой метод имеется: указанный переход осуществляется с помощью двойного интеграла Фурье. В отличие от гармонического анализа Фурье (ряды Фурье), двойной интеграл Фурье дает возможность разложить любую, как угодно изменяющуюся функцию, следовательно и не периодическую, в бесконечный непрерывный ряд гармонических установившихся колебаний. Разлагая таким образом в непрерывный бесконечный ряд гармоник постоянную электродвижущую силу E , прилагая к каждой из полученных гармоник хорошо изученные законы установившегося режима передачи при синусоидальной электродвижущей силе, мы перейдем от процессов установившихся к процессам устанавливающимся. К сожалению, несмотря на принципиальную простоту указанного метода, он при практическом использовании связан с такими тяжелыми математическими выкладками, что воспользоваться им можно лишь для наиболее простых частных случаев, как, например, для бесконечно длинной линии.

Итак, любая электродвижущая сила $E(t)$, как угодно меняющаяся во времени, может быть разложена в бесконечный непрерывный ряд установившихся гармоник

$$E(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau;$$

при этом функция $E(t)$, помимо условий Дирихле, должна удовлетворять дополнительному условию — она должна быть абсолютно интегрируема в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) d\tau = \text{const.}$$

Подставляя

$$\cos \omega(t - \tau) = \cos \omega t \cos \omega \tau + \sin \omega t \sin \omega \tau,$$

получим

$$E(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (a)$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) \sin \omega \tau d\tau,$$

причем бесконечно малые амплитуды непрерывного ряда гармоник могут быть определены из формул

$$\frac{1}{\pi} A(\omega) d\omega = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$\frac{1}{\pi} B(\omega) d\omega = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Эти гармоники будут установившимися, потому что разложение функции $E(t)$ произведено для пределов времени от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Возвращаясь к выражению (a), преобразуем его. Так как

$$\begin{aligned} A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t &= A(\omega) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - jB(\omega) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} = \\ &= \frac{e^{j\omega t}}{2} [A(\omega) - jB(\omega)] + \frac{e^{-j\omega t}}{2} [A(\omega) + jB(\omega)], \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] e^{j\omega t} d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] e^{-j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] e^{j\omega t} d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(-\omega) - jB(-\omega)] e^{j\omega t} d(-\omega). \end{aligned}$$

Имея в виду, что $A(\omega)$ — функция четная и $B(\omega)$ — нечетная, подставим

$$A(-\omega) = A(\omega) \quad \text{и} \quad B(-\omega) = -B(\omega),$$

тогда

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] e^{j\omega t} d\omega.$$

Обозначим

$$C(\omega) = A(\omega) - jB(\omega);$$

подставляя значения $A(\omega)$ и $B(\omega)$, получим

$$C(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

для функции же $E(t)$

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Так как электродвижущая сила $E(t)$ представлена бесконечным непрерывным рядом установившихся гармоник с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{2\pi} C(j\omega) d\omega$, то, зная полное комплексное сопротивление $Z(j\omega)$ рассматриваемой электрической цепи, легко написать формулу для установившегося тока в этой цепи, а именно:

$$i(t) = \frac{E(t)}{Z(j\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(j\omega)}{Z(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Определить спектральную характеристику $C(j\omega)$ электродвижущей силы $E(t)$ и полное комплексное сопротивление $Z(j\omega)$ для анализируемых в настоящей монографии случаев не представляет труда; основную трудность представляет интегрирование в пределах от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$. Только в наиболее простых случаях удастся произвести это интегрирование. В общем же случае — для линии с приемно-передающими устройствами — мы встречаемся с непреодолимыми в настоящее время трудностями.

В ряде случаев* в электротехнике приходится встречаться с функциями, которые не удовлетворяют условиям применимости интеграла Фурье.

К числу таких случаев относится включение постоянной ЭДС на бесконечно большое время, т. е. если при $t \geq 0$; $f(t) = E$. В самом деле

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |E| d\tau = \infty,$$

т. е. условие абсолютной интегрируемости не выполнено.

Для случая включения синусоидальной ЭДС на бесконечно большое время не выполняется условие абсолютной интегрируемости и, кроме того, не удовлетворяется условие Дирихле о конечности числа максимумов и минимумов в пределах интеграции.

* Дальнейшая часть настоящего параграфа составлена доктором технических наук Г. В. Добровольским.

В самом деле, если при $t \leq 0$; $f(t) = 0$, а при

$$t = 0; f(t) = E \sin \omega_0 t, \text{ то } \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau = 0, \text{ а } \int_0^{\infty} |E \sin \omega_0 \tau| d\tau = \infty$$

и число максимумов и минимумов за время от 0 до ∞ равно ∞ . Решение вопроса в 1-м случае может быть получено следующим путем. Заменяем рассмотрение функции $f(t)$ заданной условием, что при $t \leq 0$; $f(t) = 0$ и при $t \geq 0$; $f(t) = E$ функцией $\frac{1}{2} E + f_1(t)$, где $f_1(t)$ задается условием, что при $t \leq 0$; $f_1(t) = -\frac{1}{2} E e^{st}$, а при $t \geq 0$; $f_1(t) = \frac{1}{2} E e^{-st}$, где s есть вещественная положительная величина.

Нетрудно видеть, что

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{E}{2} + f_1(t) \right] \quad (6)$$

функция $f_1(t)$ абсолютно интегрируема и поэтому к ней может быть применен интеграл Фурье.

Найдем функцию $C(\omega)$.

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 -\frac{E}{2} e^{-(s+j\omega)\tau} d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E}{2} e^{-(s+j\omega)\tau} d\tau = \frac{E}{2\pi(-s+j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-z} dz + \\ &+ \frac{E}{2\pi(s+j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-z} dz = \left| \frac{-E}{2\pi(-s+j\omega)} e^{-z} \right|_0^{\infty} + \\ &+ \left| \frac{-E}{2\pi(s+j\omega)} e^{-z} \right|_0^{\infty} = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{-s+j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = -j \frac{\omega E}{\pi(s^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{+j\omega t} d\omega = -j \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{j\omega t}}{s^2 + \omega^2} d\omega = \\ &= -j \frac{E}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2} d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{s^2 + \omega^2} d\omega \right] = \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{s^2 + \omega^2} d\omega. \quad (B) \end{aligned}$$

Последнее получается вследствие равенства нулю 1-го интеграла; так как подынтегральная функция нечетная.

Делая подстановку $x = \frac{\omega}{s}$; $st = m$, получим

$$f_1(t) = \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx = \frac{E}{\pi} \frac{\pi}{2} e^{-mx} = \frac{E}{2} e^{-st}.$$

Последнее будет при $t \geq 0$ ($m > 0$).

При $t \leq 0$ ($m < 0$) получим

$$f_1(t) = -\frac{E}{2} e^{st},$$

т. е. получим отображение заданной функции.

Теперь найдем

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{E}{2} e^{-st} \right) = \frac{E}{2}.$$

Аналогичное выражение получим и для (6). Для удобства нахождения тока замыкания найдем $\lim_{s \rightarrow 0}$ выражения (в) при $s \rightarrow 0$ до интегрирования, что не изменит конечного результата. Имеем

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{s^2 + \omega^2} d\omega = \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{E}{2},$$

т. е. имеем выражение для интегрального синуса

$$\text{si } x = \text{si } \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда окончательно можно написать

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{E}{2} + f_1(t) \right] = \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (г)$$

Рассмотрим теперь выражение для коэффициентной функции $C(\omega)$ при предельном значении $s = 0$.

Из приведенной выше формулы для $C(\omega)$ имеем:

$$C(\omega) = -j \frac{\omega E}{\pi(s^2 + \omega^2)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} C(\omega) = \frac{E}{j\pi\omega}.$$

Определим теперь $f_1(t)$ путем подстановки предельного значения $C(\omega)$.

Имеем:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{j\pi\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{E}{2\pi} \left[\frac{1}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right].$$

Первый интеграл принадлежит к числу так называемых несобственных интегралов, так как он внутри области интегрирования обращается в бесконечность.

Поэтому найдем его значение.

Можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega \right]. \quad (д)$$

Делая в 1-м интеграле подстановку $\omega t = -y$ и переставляя верхний и нижний пределы, а во втором полагая $\omega t = y$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| - \int_{\varepsilon t}^{\infty} \frac{\cos y}{y} dy + \int_{\varepsilon t}^{\infty} \frac{\cos y}{y} dy \right| = 0.$$

Таким образом получаем так же, как и раньше, выражение (г).

Определим теперь ток замыкания при включении постоянной ЭДС на некоторые сопротивления $Z(\omega)$, входная проводимость которого равна $\frac{1}{Z(\omega)} = a(\omega) + jb(\omega)$. Из (г) получим напряжение частоты ω

$$de = \frac{E \sin \omega t}{\pi \omega} d\omega. \quad (e)$$

Это напряжение вызывает ток замыкания

$$\begin{aligned} dl &= \frac{de}{Z(\omega)} = \frac{E}{\pi \omega |Z(\omega)|} \sin(\omega t + \varphi) d\omega = \\ &= \frac{E}{\pi} \frac{a(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{E}{\pi} \frac{b(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Суммарный ток замыкания будет

$$i = \int_0^{\infty} dl = \frac{E}{2} a(0) + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (ж)$$

Таково будет выражение для $t \geq 0$.

При $t \leq 0$ имеем

$$f(-t) = i_{-t} = \frac{E}{2} a(0) - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (з)$$

Так как $f(-t) \equiv 0$, то

$$\begin{aligned} i &= f(t) - f(-t) = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = f(t) + f(-t) = \\ &= Ea(\omega) + \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (и)$$

Найдем, например, ток замыкания в цепи, содержащей индуктивность и сопротивление, включенное последовательно. Тогда

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = a(\omega) + jb(\omega).$$

Следовательно,

$$i = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R}{(R^2 + \omega^2 L^2) \omega} \sin \omega t d\omega.$$

Делая подстановку $\frac{L}{R} = a$; $m = \frac{t}{a}$; $x = a\omega$, получим

$$i = \frac{2}{\pi} \frac{E}{R} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega (1 + a^2 \omega^2)} d\omega = \frac{2E}{\pi R} \left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1 + x^2} dx \right] = \\ = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right),$$

т. е. получили формулу Гельмгольца.

Аналогичный результат может быть получен и при непосредственном вычислении по формуле (ж).

Рассмотрим теперь метод определения тока замыкания на выходе четырехполюсника, если постоянная ЭДС включена на его входе. Если на входе четырехполюсника имеется ЭДС частоты ω , выражаемая формулой (е), то на выходе эквивалентного генератора ЭДС будет

$$de' = \frac{E}{\pi} \frac{e^{-b'(\omega)}}{\omega} \sin \omega(t - T) d\omega,$$

где

$$T = \frac{da'(\omega)}{d\omega}.$$

Здесь $b'(\omega)$ и $a'(\omega)$ — вносимое затухание и вносимый фазный угол четырехполюсника по напряжению.

Если суммарное выходное сопротивление четырехполюсника и нагрузки равно $Z(\omega)$, причем $\frac{1}{Z(\omega)} = a(\omega) + jb(\omega)$, то ток замыкания на выходе четырехполюсника будет равен

$$di' = \frac{E}{\pi} \frac{1}{Z(\omega)} \frac{e^{-b'(\omega)}}{\omega} \sin \omega(t - T) d\omega = \frac{E}{\pi} \frac{a(\omega)}{\omega} e^{-b'(\omega)} \sin \omega(t - T) d\omega + \\ + \frac{E}{\pi} \frac{b(\omega)}{\omega} e^{-b'(\omega)} \cos \omega(t - T) d\omega.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$i' = \frac{ET_0}{2} a(0) e^{-b_0} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a(\omega)}{\omega} e^{-b'(\omega)} \sin \omega(t - T) d\omega + \\ + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b(\omega)}{\omega} e^{-b'(\omega)} \cos \omega(t - T) d\omega. \quad (\kappa)$$

Знак T_0 указывает, что первый член необходимо учитывать при $t \geq T_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{da'(\omega)}{d\omega}$.

Не трудно видеть, что если к выражению (к) применить преобразование, применявшееся в выражениях (д), (з) и (и), то члены, содержащие $b(\omega)$, т. е. мнимую составляющую входной проводимости четырехполюсника, сохраняются в отличие от предыдущего.

Необходимо также учитывать то обстоятельство, что первый член выражения (к) возникает не в точке $t = 0$, а в точке T_0 . Поэтому, если $i' = f(+t)$ имеет вид (к), то $i' = f(-t)$ не может быть опреде-

лен путем изменения знака t только во 2-м и 3-м членах выражения (к).

Следовательно, для вычисления i' более удобно воспользоваться непосредственно выражениями (к).

Это положение особо наглядно видно для случая включения синусоидальности ЭДС, что будет изложено ниже.

Теперь остановимся лишь на вычислении интегралов, входящих в выражение (к).

Обозначим

$$a(\omega) e^{-b'(\omega)} = A(\omega); \quad b(\omega) e^{-b'(\omega)} = B(\omega),$$

тогда имеем интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \sin \omega(t-T) d\omega; \quad \int_0^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} \cos \omega(t-T) d\omega.$$

Так как $A(\omega)$ и $B(\omega)$, вообще говоря, весьма сложные функции, то эти интегралы не могут быть вычислены в конечном виде.

Но можно найти приблизительное значение этих интегралов, если весь спектр частот $0 \div \infty$ разбить на ряд интервалов, в каждом из которых $A(\omega)$ и T , $B(\omega)$ и T , попарно постоянны (что может быть принято с известной степенью точности).

Тогда выше приведенные интегралы могут быть приведены к совокупности интегралов вида

$$A_k(\omega) \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\sin \omega(t-T_k)}{\omega} d\omega; \quad B_k(\omega) \int_{\omega_m}^{\omega_{m+1}} \frac{\cos \omega(t-T_m)}{\omega} d\omega,$$

где $A_k(\omega)$ и T_k — постоянные величины в интервале $\omega_k \div \omega_{k+1}$ и $B_m(\omega)$ и T_m — постоянные величины в интервале $\omega_m \div \omega_{m+1}$.

Последние же интегралы могут быть приведены к интегральным синусам и косинусам при помощи подстановки

$$\omega(t-T) = y.$$

Тогда 1-й интеграл может быть приведен к виду

$$\int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\sin \omega(t-T_k)}{\omega} d\omega = \int_{\omega_k(t-T_k)}^{\omega_{k+1}(t-T_k)} \frac{\sin y}{y} (t-T_k) \frac{1}{(t-T_k) - \omega \frac{dT_k}{d\omega}} dy,$$

так как $\omega = \frac{y}{t-T_k}$; и $dy = (t-T_k) d\omega - \omega \frac{dT_k}{d\omega} d\omega$.

Если в интервале $\omega_k \div \omega_{k+1} \dots T_k = \text{const}$, то $\frac{dT_k}{d\omega} = 0$ и тогда

$$\begin{aligned} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\sin \omega(t-T_k)}{\omega} d\omega &= \int_0^{\omega_{k+1}(t-T_k)} \frac{\sin y}{y} dy - \int_0^{\omega(t-T_k)} \frac{\sin y}{y} dy = \\ &= \text{si} [\omega_{k+1}(t-T_k)] - \text{si} [\omega_k(t-T_k)]. \end{aligned}$$

Соответственно 2-й интеграл может быть приведен к следующему виду

$$\begin{aligned} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \frac{\cos \omega(t-T_m)}{\omega} d\omega &= \int_{\omega_m(t-T_m)}^{\omega_{m+1}(t-T_m)} \frac{\cos y}{y} (t-T_m) \frac{1}{(t-T_m) - \omega \frac{dT_m}{d\omega}} dy = \\ &= \int_{\omega_m(t-T_m)}^{\omega_{m+1}(t-T_m)} \frac{\cos y}{y} dy = \int_{\omega_m(t-T_m)}^{\infty} \frac{\cos y}{y} dy - \int_{\omega_{m+1}(t-T_m)}^{\infty} \frac{\cos y}{y} dy = \\ &= Ci[\omega_{m+1}(t-T_m)] - Ci[\omega_m(t-T_m)]. \end{aligned}$$

Таким образом, если известны функции $A(\omega)$, $B(\omega)$ и T , то задача нахождения тока на выходе четырехполюсника с любой степенью точности сводится к производству ряда элементарных вычислений, так как определение интегральных синусов и косинусов по таблицам не представляет затруднений.

При вычислении интегралов вида

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{a(\omega)}{\omega} e^{-b'(\omega)} \sin \omega(t-T) d\omega \quad \text{и} \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{b(\omega)}{\omega} e^{-b'(\omega)} \cos \omega(t-T) d\omega,$$

для получения большой точности результатов при меньшем количестве вычислений, можно функции $a(\omega)e^{-b'(\omega)}$ и $b(\omega)e^{-b'(\omega)}$ представлять в виде ломаных прямых, не параллельных оси координат, а являющихся синусами кривых.

Легко видеть, что в этом случае можно получить гораздо большую точность. В этом случае каждый прямолинейный отрезок может быть выражен уравнением

$$F(\omega) = A + B\omega.$$

Подставляя это выражение в первый интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(A+B\omega) \sin \omega(t-T)}{\omega} d\omega &= A \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin \omega(t-T)}{\omega} d\omega + B \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin \omega(t-T) d\omega = \\ &= A \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin \omega(t-T)}{\omega} d\omega + B \frac{\cos \omega_1(t-T) - \cos \omega_2(t-T)}{t-T}. \end{aligned}$$

Первый интеграл при $T = \text{const}$ может быть приведен к интегральным синусам. Таким образом, расчет сводится опять к оперированию таблицами.

Аналогичным образом может быть преобразован и второй интеграл. Рассмотрим теперь случай включения синусоидальной ЭДС.

Пусть при $t \leq 0$; $f(t) = 0$, а при $t \geq 0$; $f(t) = E \sin \omega t$.

Такая функция не удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau \neq \infty$ и не удовлетворяет условию Дирихле, так как имеет в интервале $0 \rightarrow \infty$ бесконечное число максимумов и минимумов.

Поэтому умножением функции $f(t)$ на e^{-st} нельзя достигнуть надлежащего результата, позволяющего применять интеграл Фурье, так как условие Дирихле остается не выполненным.

Вследствие этого рассмотрим вначале периодические импульсы переменного тока конечной продолжительности, удовлетворяющие условиям абсолютной интегрируемости и Дирихле, а затем найдем предел выражения при длительности импульса стремящейся к бесконечности.

Пусть $f(t) = E \sin \omega_0 t$ при $0 \leq t \leq T_0$; $2T_0 \leq t \leq 3T_0$ и т. д.
 „ $f(t) = 0$ „ $-T_0 \leq t \leq 0$; $T_0 \leq t \leq 2T_0$ и т. д.

Для упрощения выкладок возьмем, что $2T_0 = 2nT$, где n целое число.

Тогда

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad F = \frac{1}{2T_0}; \quad \Omega = 2\pi F = \frac{\pi}{T_0}.$$

Определим коэффициент b_k

$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(\tau) \sin k \frac{\pi}{T_0} \tau d\tau = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(\tau) \sin k\Omega\tau d\tau.$$

При $k \neq 2n$; $b_k \equiv 0$, что может быть проверено непосредственной подстановкой.

При $k = 2n$

$$b_{2n} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E \sin \omega_0 \tau \sin 2n\Omega\tau d\tau = \frac{E}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2 \omega_0 \tau d\tau = \frac{E}{2}.$$

Определим коэффициенты a_k

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} f(\tau) \cos k\Omega\tau d\tau = \frac{E}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \omega_0 \tau \cos k\Omega\tau d\tau.$$

Так как $\omega_0 = 2n\Omega$ и полагая $\Omega\tau = x$, получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2nx \cos kx dx = \frac{E}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin (2n+k)x dx + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\pi} \sin (2n-k)x dx \right] = -\frac{E}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2n+k} \cos Z \Big|_0^{(2n+k)\pi} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2n-k} \cos Z \Big|_0^{(2n-k)\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Последнее получится, если в 1-м интеграле положить

$$(2n+k)x = Z, \text{ а во 2-м... } (2n-k)x = Z.$$

Если $k = 2m$, то

$$a_k = a_{2m} = 0.$$

Если $k = 2m + 1$, то

$$a_k = \frac{E}{\pi} \left(\frac{1}{2n+k} + \frac{1}{2n-k} \right) = \frac{E}{\pi} \frac{4n}{(2n)^2 - k^2}.$$

Так как $2n = \frac{\omega_0}{\Omega}$ и k -я гармоника $\omega = k\Omega$, т. е. $k = \frac{\omega}{\Omega}$, то

$$a_k = \frac{E}{\pi} \frac{2\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Если $T \rightarrow \infty$ и $a_k \neq 0$ только при $k = 2m + 1$, то $\Omega = \frac{\omega_{k+2} - \omega_k}{2}$ и $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \Omega = \frac{d\omega}{2}$. Следовательно,

$$a_k = \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0 d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

итак,

$$\begin{aligned} e = f(t) &= b_{2n} \sin 2n\Omega t + \lim_{\Omega \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{k=\infty} a_k \cos k\Omega t = \\ &= \frac{E}{2} \sin \omega_0 t + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициентная функция в данном случае равна

$$C(\omega) = \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Определим ток замыкания на входе четырехполюсника. ЭДС с частотой ω равна

$$de = \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t d\omega.$$

Следовательно,

$$di = \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

откуда

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{2} a(\omega_0) \sin \omega_0 t + \frac{E}{2} b(\omega_0) \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} b(\omega) \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Можно поступить так же, как и для случая включения постоянной ЭДС, т. е. найти величину

$$\begin{aligned} i = f(-t) &= 0 = -\frac{E}{2} a(\omega_0) \sin \omega_0 t + \frac{E}{2} b(\omega_0) \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} a(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} b(\omega) \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая (22) и (23), получим:

$$\begin{aligned} i(t) + i(-t) &= i(t) - i(-t) = Eb(\omega_0) \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} a(\omega) \cos \omega t d\omega = \\ &= Ea(\omega_0) \sin \omega_0 t + \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} b(\omega) \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Найдем теперь ток на выходе четырехполюсника. Так же как и ранее, можно написать, что ЭДС частоты ω на выходе четырехполюсника будет равна

$$de' = \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-b'(\omega)} \cos \omega(t - T) d\omega,$$

где $b'(\omega)$ и T имеют прежнее значение.

Тогда

$$\begin{aligned} di' &= \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-b'(\omega)} \frac{1}{Z(\omega)} \cos \omega(t - T) d\omega = \\ &= \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-b'(\omega)} a(\omega) \cos \omega(t - T) d\omega + \\ &+ \frac{E}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-b'(\omega)} b(\omega) \sin \omega(t - T) d\omega. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} i' &= \frac{E}{2} a(\omega_0) \sin \omega_0(t - T_0) + \frac{E}{2} b(\omega_0) \cos \omega_0(t - T_0) + \\ &+ \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-b'(\omega)} a(\omega) \cos \omega(t - T) d\omega + \\ &+ \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{-b'(\omega)} b(\omega) \sin \omega(t - T) d\omega. \end{aligned} \quad (л)$$

Если применить выше приведенный метод упрощения, добавив к (26) величину $i'(-t)$, то в данном случае никакого упрощения не получится, и сохраняются все члены, содержащие как $a(\omega)$, так и $b(\omega)$, а так же $a(\omega_0)$ и $b(\omega_0)$.*

Вычисление интегралов, входящих в (л), может быть сделано по методу, изложенному выше.

Формула для нарастания или спадания тока в случае включения синусоидальной ЭДС может быть также получена, исходя из формулы Люшена-Кюпфмюллера,** имеющей вид

$$i = \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\lambda) \Phi(t - \lambda) d\lambda,$$

* Сравните аналогичный случай для тока замыкания на выходе четырехполюсника для включения постоянной ЭДС.

** См.: В. И. Коваленков. Основы теории связи, часть I. Гос. Научно-техн. изд., 1931.

где $\varphi(\lambda)$ — закон нарастания ЭДС;
 $\Phi(t - \lambda)$ — закон нарастания тока для внезапного включения постоянной ЭДС в момент времени $t = 0$.

Но при применении этой формулы к практическим случаям сохраняются все трудности вычисления интегралов, и поэтому при определении тока замыкания или размыкания приходится прибегать к приближенным вычислениям.

Предыдущий метод удобен тем, что все интегралы сводятся к интегральным синусам и косинусам, для которых составлены таблицы, и следовательно расчеты могут быть произведены элементарными методами.

Значительное преимущество метода интеграла Фурье перед методом дифференциальных уравнений заключается в том, что при помощи интеграла Фурье можно определить переходные процессы через вторичные параметры четырехполюсника (b , a , Z), причем можно совершенно не интересоваться конфигурацией этого четырехполюсника. Следовательно, можно, не выбирая схемы четырехполюсника, определить наиболее выгодные и допустимые величины b , a и Z , а затем подобрать такие схемы, чтобы эти определенные величины были выдержаны.

Таким образом, в данном случае вместо анализа большого числа схем и последующего их сравнения переходных процессов, что имеет место при методе дифференциальных уравнений, можно рассматривать вопрос в общем виде, синтетически, не связывая его ни с какой конкретной схемой.

Необходимо отметить, что если в выражении для $Z(a)$, [или $a(\omega)$ и $b(\omega)$], $a'(\omega)$, $b'(\omega)$, например в выражении (к), подставить аналитическое выражение этих величин через первичные параметры четырехполюсника, то, за исключением простейших случаев, получаются интегралы, которые не могут быть взяты в конечном виде и для которых не имеется таблиц.

Поэтому более целесообразно задавать все эти значения в табличном виде и разбивать область интегрирования на ряд частичных областей, как это было показано выше.

Следует отметить, что выражать вышеуказанные величины через первичные параметры очень часто не имеет смысла, так как в тех случаях, когда полученные интегралы могут быть взяты в конечном виде, обычно решение легко может быть получено и методом дифференциальных уравнений.

Основная сила метода интеграла Фурье заключается в том, что он позволяет определить переходной процесс через вторичные параметры четырехполюсника, не связанные непосредственно с его конфигурацией — схемой.

Эта возможность имеет особенно большое значение при исследовании переходных процессов в сложных каналах связи.

§ 4. Анализ бегущей электромагнитной волны методом комплексных амплитуд*

Предположим, что линия конечной длины характеризуется параметрами R , L , C и G , нагружена сопротивлением Z_L , а в начале включен

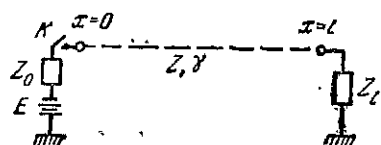
* Настоящий параграф составлен доктором технических наук, проф. Л. А. Котовым.

генератор, обладающий внутренним сопротивлением Z_0 (фиг. 87), причем

$$Z_l = Z_0 = Z,$$

т. е. Z_l и Z_0 равны волновому сопротивлению линии, что соответствует согласованному включению, когда отраженные волны отсутствуют.

Мгновенные значения напряжения и тока в пункте x линии в любой момент времени при включении в начале источника тока с постоянной электродвижущей силой, равной E , соответственно определяются из формул



$$u(t, x) = \frac{E}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{e^{pt}}{pN(p)} dp,$$

$$i(t, x) = \frac{E}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{e^{pt}}{pZ(p)} dp.$$

Фиг. 87.

В согласованной с приемно-передающими устройствами линии

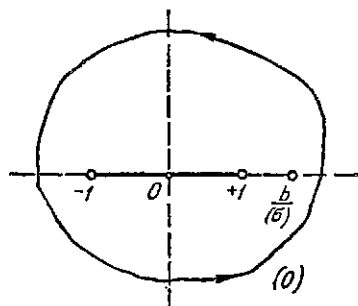
$$N(p) = \frac{1}{Z} \frac{(Z_0 + Z)(Z_l + Z)e^{\gamma l} - (Z_0 - Z)(Z_l - Z)e^{-\gamma l}}{(Z_l + Z)e^{\gamma(l-x)} - (Z_l - Z)e^{-\gamma(l-x)}} = 2e^{\gamma x}$$

$$Z(p) = \frac{(Z_0 + Z)(Z_l + Z)e^{\gamma l} - (Z_0 - Z)(Z_l - Z)e^{-\gamma l}}{(Z_l + Z)e^{\gamma(l-x)} - (Z_l - Z)e^{-\gamma(l-x)}} = 2Ze^{\gamma x}.$$

Подставляя, находим:

$$u(t, x) = \frac{E}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{e^{pt-\gamma x}}{2p} dp,$$

$$i(t, x) = \frac{E}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{\gamma e^{pt-\gamma x}}{2p(R+pL)} dp,$$



Фиг. 88.

где $\gamma = \sqrt{(R+pL)(G+pC)}$

$$Z = \sqrt{\frac{R+pL}{G+pC}} = \frac{R+pL}{\gamma}.$$

В дальнейшем функции $u(t, x)$ и $i(t, x)$ будем обозначать просто через u и i .

Функция $\gamma(p)$, как многозначная функция переменной p , имеет две критические точки (точки разветвления)

$$p = -\frac{R}{L} \quad \text{и} \quad p = -\frac{G}{C}.$$

Эти точки соединим разрезом (фиг. 88) и тем самым подинтегральную функцию превратим в однозначную функцию переменной p .

Через $\gamma(p)$ будем обозначать ту ветвь радикала γ , которая при $|p| \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к $\sqrt{LC}p$.

Вполне очевидно, что эта ветвь будет однозначной во всей плоскости с разрезом.

Для дальнейших рассуждений и выводов нам необходимо доказать, что при всех вещественных составляющих независимого переменного p , большего нуля, вещественная составляющая функции $\gamma(p)$ также будет больше нуля. Это обстоятельство коротко можно записать следующим образом:

при $R_L p > 0$

$$R_L \gamma(p) > 0.*$$

В самом деле, сделав следующие преобразования радикала:

$$\sqrt{(R+ pL)(G+ pC)} = \sqrt{LC} \sqrt{\left[p - \left(-\frac{R}{L}\right)\right] \left[p - \left(-\frac{G}{C}\right)\right]} \quad (a),$$

и положив

$$\arg \left[p - \left(-\frac{G}{C}\right)\right] = \alpha_1, \quad \arg \left[p - \left(-\frac{R}{L}\right)\right] = \alpha_2,$$

не трудно заметить, что при $R_L p > 0$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Это наглядно также видно из фиг. 89. Если точку p перемещать во всей правой полуплоскости ($R_L p > 0$), то углы α_1 и α_2 будут меняться в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Из последних двух неравенств находим

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) < \frac{\pi}{2},$$

т. е. аргумент $\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$ радикала (a) при $R_L p > 0$ также меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Далее, так как $\frac{R}{L}$ и $\frac{G}{C}$ конечны, то отсюда также следует, что

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} (\alpha_1 - \arg p) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{|p| \rightarrow \infty} (\alpha_2 - \arg p) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \arg p\right] = 0.$$

Как уже было отмечено, мы выбираем такую ветвь радикала, которая при $|p| \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к $\sqrt{LC}p$. Имея в виду

* Здесь $R_L p$ означает вещественную часть комплексного числа p .

это, а также последнее равенство, мы видим, что аргумент выбранной ветви равен $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$. А так как $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ подчинено условию

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) < \frac{\pi}{2},$$

то этим самым доказывается положение:

при $R_L p > 0$

$$R_L \gamma(p) > 0.$$

Из формулы (а) также видно, что если одна ветвь радикала имеет аргумент $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, то аргумент другой ветви равен

$$\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Теперь, чтобы приступить к интегрированию, необходимо найти асимптотическое выражение для функции $\gamma(p)$.

Эту функцию можно представить в следующем виде:

$$\gamma(p) = \sqrt{LC} p \sqrt{\left(1 + \frac{R}{L} \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{G}{C} \frac{1}{p}\right)}.$$

Так как мы выбрали ветвь, имеющую предельное значение $\sqrt{LC} p$ при $|p| \rightarrow \infty$, то, стало быть, в написанном выражении для радикала нужно брать значение $\rightarrow 1$ при $|p| \rightarrow \infty$.

Вычитая и прибавляя $\sqrt{LC} p$ к правой части последнего выражения для $\gamma(p)$, получим

$$\gamma(p) = \sqrt{LC} p + \sqrt{LC} p \left[\sqrt{\left(1 + \frac{R}{L} \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{G}{C} \frac{1}{p}\right)} - 1 \right].$$

Разделив и умножив второй член правой части последнего уравнения на

$$\left[\sqrt{\left(1 + \frac{R}{L} \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{G}{C} \frac{1}{p}\right)} + 1 \right]$$

и сделав небольшие преобразования, получим

$$\gamma(p) = \sqrt{LC} p + \frac{\sqrt{LC} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} + \frac{RG}{LC} \frac{1}{p} \right]}{\sqrt{\left(1 + \frac{R}{L} \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{G}{C} \frac{1}{p}\right)} + 1},$$

или, обозначая второй член последнего равенства через E_p ,

$$\gamma(p) = \sqrt{LC} p + E_p,$$

причем,

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} E_p = \sqrt{LC} \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) = \frac{b}{v},$$

где $b = \frac{RC + LG}{2LC}$ и $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Подставив найденное выражение для $\gamma(p)$ в приведенные в начале параграфа формулы для u и i , получим

$$u = \frac{E}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{e^{p(t-x\sqrt{LC})-xE_p}}{2p} dp, \quad (6)$$

$$i = \frac{E}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1 + \frac{E_p}{\sqrt{LC}p}}{p \left(1 + \frac{R}{Lp}\right)} e^{p(t-x\sqrt{LC})-xE_p} dp.$$

Так как E_p остается ограниченной при $|p| \rightarrow \infty$, то совершенно очевидно, что при всех значениях времени $t < x\sqrt{LC}$ эти интегралы хорошо сходятся в правой полуплоскости $R_p > 0$, а при $t > x\sqrt{LC}$ хорошо сходятся в левой полуплоскости $R_p < 0$. Но в правой полуплоскости, когда $R_p > 0$, подинтегральные функции не имеют особенностей, так как разрез функции $\gamma(p)$ лежит в левой полуплоскости и ее полюсы (0 для первого интеграла и $-\frac{R}{L}$ для второго) также находятся левее прямой S . Стало быть, рассматриваемые интегралы (6) при всех значениях времени, удовлетворяющих условию $t - x\sqrt{LC} < 0$, будут тождественно равны нулю

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= 0 \\ i(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } t < x\sqrt{LC}.$$

Таким образом, из этого соотношения видно, что в пункте x линии напряжение и ток появляются не сразу после включения напряжения в начале линии, а через промежуток времени, равный $t = x\sqrt{LC} = \frac{x}{v}$.

Отсюда следует, что

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

характеризует скорость распространения напряжения и тока в линии, нагруженной в начале и в конце на сопротивления, равные волновому сопротивлению этой линии.

Займемся теперь вычислением интегралов (6) для времени $t > x\sqrt{LC}$.

Согласно теореме Коши, путь интегрирования ($s-j\infty$, $s+j\infty$) мы можем заменить следующим (фиг. 89):

$$[(s-j\infty)A, AB, BA, AC, CB, BC, C(s+j\infty)]$$

и, стало быть, первый интеграл (6) разбить на сумму интегралов по отдельным участкам

$$\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} e^{pt-\gamma x} \frac{dp}{2p} = \int_{s-j\infty}^A + \int_A^B + \int_B^A + \int_A^C + \int_C^B + \int_B^C + \int_C^{s+j\infty} =$$

$$= \left[\int_{s-j\infty}^A + \int_A^B + \int_B^C + \int_C^{s+j\infty} \right] + \left[\int_B^A + \int_A^C + \int_C^B \right] =$$

$$= \int_{(s-j\infty, A, B, C, s+j\infty)} e^{pt-\gamma x} \frac{dp}{2p} + \oint_{(BAC)} e^{pt-\gamma x} \frac{dp}{2p}.$$

Интеграл, взятый по контуру $[(s-j\infty), A, B, C, (s-j\infty)]$ при $t > x\sqrt{LC}$ тождественно равен нулю, так как слева от контура подинтегральная функция никаких особенностей не имеет.

Таким образом, рассматриваемый первый интеграл (б) может быть приведен к следующему виду:

$$u = \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} e^{pt-\gamma x} \frac{dp}{2p}. \quad (б_1)$$

Аналогичным образом можно произвести преобразование второго интеграла:

$$i = \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} \frac{\gamma(p) e^{pt-\gamma x}}{R+pL} \frac{dp}{2p}. \quad (б_2)$$

Интеграл (б₁) по замкнутому контуру (BAC) можно привести к такому виду:

$$u = \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} e^{pt-\gamma x} \frac{dp}{2p} - \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} e^{p\frac{x}{v}-\gamma x} \frac{dp}{2p} + \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} e^{p\frac{x}{v}-\gamma x} \frac{dp}{2p} =$$

$$= \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} \frac{e^{pt} - e^{p\frac{x}{v}}}{2p} e^{-\gamma x} dp + \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} \frac{e^{(p-\gamma v)\frac{x}{v}}}{2p} dp.$$

Дифференцируя первый интеграл по параметру t и меняя порядок интегрирования* по переменным p и t (при этом во избежание путаницы мы обозначим через τ), последнюю формулу можно привести к виду

$$u = \int_{\frac{x}{v}}^t \left[\frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} \frac{1}{2} e^{p\tau-\gamma x} dp \right] d\tau + \frac{E}{2\pi j} \oint_{(BAC)} \frac{e^{(p-\gamma v)\frac{x}{v}}}{2p} dp.$$

В полученном интеграле сделаем замену переменных, положив

$$p = -b + |\sigma|w.$$

В этом случае контур (BAC) фиг. 89 переходит в контур (O), охватывающий разрез $(-1, 1)$ и полюс (фиг. 90),

$$w = \frac{b}{|\sigma|} > 1.$$

* Мы можем менять порядок интегрирования по p и t , так как интегралы по p и t берутся в конечных пределах.

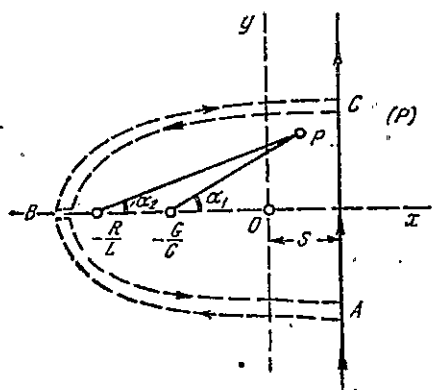
Формула для u после подстановки значения $p = -b + |\sigma|w$ будет иметь следующий вид:

$$u = \frac{E}{2} \left[\int_{\frac{x}{v}}^t e^{-i\tau} \left(\frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(O)} e^{|\sigma|w\tau - \tau x} d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-b\frac{x}{v} \frac{1}{2\pi j}} \oint_{(O)} \frac{e^{\left(w - \frac{v}{|\sigma|}\right) \frac{|\sigma|}{v} x}}{w - \frac{b}{|\sigma|}} dw \right] \right]. \quad (B)$$

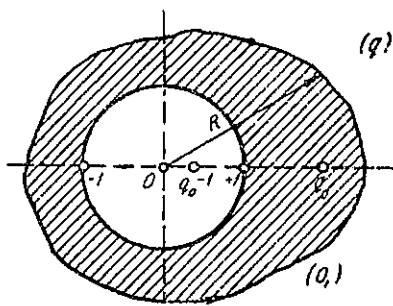
Для вычисления последних интегралов сделаем замену переменных, положив

$$w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right).$$

Это преобразование переводит плоскость комплексной переменной w с разрезом $(-1, 1)$ в часть плоскости q вне или внутри круга радиуса $|q|=1$, соответственно двум ветвям q , как функции от w .



Фиг. 89.



Фиг. 90.

Мы будем рассматривать ту ветвь q , которая отображает часть плоскости $|q| > 1$ на плоскость переменной w с разрезом $(-1, 1)$. На чертеже фиг. 90 эта область заштрихована. В этом случае преобразование

$$w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)$$

отображает плоскость (w) с разрезом в область $|q| > 1$, при этом контур (O) переходит в контур (O_1) , охватывающий окружность радиуса $|q|=1$ и точку

$$q_0 = \frac{b}{|\sigma|} + \sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2} - 1}, *$$

* Числа $q_0 = \frac{b}{|\sigma|} + \sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2} - 1}$ и $q_0^{-1} = \frac{b}{|\sigma|} - \sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2} - 1}$ являются корнем уравнения $w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)$, которое может быть приведено к виду

$$q^2 - 2wq + 1 = 0;$$

при этом вместо w подставлено его значение из

$$p = -b + |\sigma|w \quad \text{при} \quad p = 0 \left(w = \frac{b}{|\sigma|} \right).$$

в которую переходит, как это не трудно проверить, точка $\frac{b}{|\sigma|}$ плоскости w .

Точка

$$q_0^{-1} = \frac{b}{|\sigma|} - \sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2} - 1}$$

находится внутри окружности радиуса $|q| = 1$. Это другая ветвь функции q .

При подстановке новых переменных выражение для $\gamma = \gamma(p)$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma(p) &= \frac{1}{v} \sqrt{(p+b)^2 - \sigma^2} = \frac{|\sigma|}{v} \sqrt{w^2 - 1} = \\ &= \frac{|\sigma|}{v} \sqrt{\frac{1}{4} \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 1} = \pm \frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q}\right). \end{aligned} \quad (r)$$

Теперь требуется выбрать знак.

Из формулы

$$w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q}\right)$$

видно, что при больших $|q|$ величина w асимптотически приближается к $\frac{1}{2}q$, т. е.

$$w \sim \frac{1}{2}q. *$$

Из равенства же

$$p = -b + |\sigma|w,$$

пренебрегая при больших значениях w членом b , получим

$$p \sim \frac{|\sigma|}{2}q.$$

Асимптотическое равенство для функции

$$\gamma(p) = \sqrt{LC} \, p + E_p$$

получит вид

$$\gamma(p) \sim \frac{1}{v}p,$$

или, подставив сюда

$$p \sim \frac{|\sigma|}{2}q,$$

получим

$$\gamma(p) \sim \frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2}q.$$

На основании полученного равенства для $\gamma(p)$ приходим к выводу, что в уравнении (r) нужно взять знак $+$, и тогда мы получим

$$\gamma(p) = \frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q}\right). \quad (r_1)$$

* Знак $\sim$ соответствует асимптотическому равенству.

Подставив выражения

$$w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)$$

и (Γ_1) в уравнение (в) и имея в виду, что

$$dw = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq,$$

получим

$$u = \frac{E}{2} \left\{ \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} \left[\frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(O_1)} e^{\frac{|\sigma|}{2}\tau \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{|\sigma|}{2v}x \left(q - \frac{1}{q} \right)} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq \right] d\tau + \right. \\ \left. + e^{-b\frac{x}{v}} \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v}x \frac{1}{q}}}{\frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{\delta}{|\sigma|}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq \right\}. \quad (B_1)$$

Для вычисления первого интеграла уравнения (B_1) по q воспользуемся известными формулами Сонина (несколько преобразованными), связывающими интегралы с функциями Бесселя: *

$$(\xi - \lambda)^n \frac{I_n(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2})}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} = \frac{(-1)^n}{2\pi j} \int_{(C)} e^{\frac{\xi}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)} q^{n-1} dq, \quad (D_1)$$

$$(\xi + \lambda)^n \frac{I_n(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2})}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{(C)} e^{\frac{\xi}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)} q^{-n-1} dq, \quad (D_2)$$

где ξ и λ — комплексные числа, причем $\xi \neq \pm \lambda$, а n — целое число.

Первый интеграл уравнения (B_1) , который обозначим через A , разобьем на два

$$A = \frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(O_1)} e^{-\frac{|\sigma|}{2v}x \left(q - \frac{1}{q} \right) + \frac{|\sigma|}{2}\tau \left(q + \frac{1}{q} \right)} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq = \\ = \frac{|\sigma|}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} e^{\frac{\xi}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)} dq - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} e^{\frac{\xi}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)} q^{-2} dq \right\},$$

где положено $\xi = -\frac{|\sigma|}{v}x$ и $\lambda = |\sigma|\tau$.

Применяя к первому интегралу формулу (D_1) , а ко второму (D_2) при $n=1$, получим

$$A = \frac{|\sigma|}{2} \left\{ -(\xi - \lambda) \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2})}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} - (\xi + \lambda) \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2})}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} \right\} = \\ = \frac{|\sigma|}{2} (-2\xi) \frac{I_1(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2})}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}},$$

* См.: Кузьмин. Функции Бесселя, 1935, стр. 91; а также Эфрос и Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы. 1937, стр. 86.

или, подставив значения ξ и λ ,

$$A = \frac{x}{v} |\sigma|^2 \frac{I_1 \left(|\sigma| \sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \tau^2} \right)}{|\sigma| \sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \tau^2}} = \frac{x}{v} \frac{|\sigma| I_1 \left(j |\sigma| \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}}.$$

Так как

$$I_1(Z) = \frac{Z}{2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}Z\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}Z\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{1}{2}Z\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right\}$$

является нечетной функцией аргумента Z , стало быть, произведение $Z I_1(Z)$ будет четной функцией. Поэтому, вместо $|\sigma|$ можно написать просто σ .

Итак мы получим

$$\frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(O_1)} e^{\frac{|\sigma|}{2} \tau \left(q + \frac{1}{q}\right) - \frac{|\sigma|}{2v} x \left(q - \frac{1}{q}\right)} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) dq = \frac{x}{v} \frac{I_1 \left(j \sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}}.$$

Для вычисления второго интеграла по q умножим числитель и знаменатель на $2q$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} \frac{x}{q}}}{\frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q}\right) - \frac{b}{|\sigma|}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) dq = \\ & = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} \frac{x}{q}}}{q^2 - 2 \frac{b}{|\sigma|} q + 1} \left(q - \frac{1}{q}\right) dq = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} \frac{x}{q}} \left(q - \frac{1}{q}\right)}{(q - q_0)(q - q_0^{-1})} dq, \end{aligned}$$

где q_0 и q_0^{-1} — корни уравнения

$$q^2 - 2 \frac{b}{|\sigma|} q + 1 = 0,$$

равные

$$q_0 = \frac{a}{|\sigma|} + \sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2} - 1},$$

$$q_0^{-1} = \frac{b}{|\sigma|} - \sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2} - 1};$$

при этом

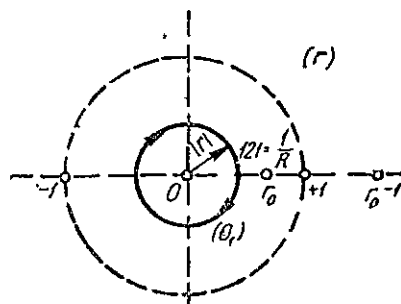
$$q_0 q_0^{-1} = 1.$$

Полученный интеграл легко вычислить с помощью вычетов, так как вне контура интегрирования (O_1) подынтегральная функция на конечном расстоянии не имеет особенностей, так как полюса O , q_0 и q_0^{-1} лежат внутри контура (O_1) (фиг. 90), а $q = \infty$ является полюсом первого порядка. В самом деле, если мы сделаем замену переменной

$$q = \frac{1}{r},$$

тогда контур (O_1) перейдет [если заменить его кругом большего радиуса R в плоскости (r)] в малый круг радиуса $|r| = \frac{1}{R}$, обходимый в отрицательном направлении, и плоскость вне круга радиуса R (фиг. 90) переводится в плоскость внутри круга радиуса $|r| = \frac{1}{R}$ (фиг. 91). Таким образом, после замены переменной имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} \frac{x}{q}}}{\frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{b}{|\sigma|}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq = \\ = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} \frac{x}{q}} \left(q - \frac{1}{q} \right)}{(q - q_0)(q - q_0^{-1})} dq = \\ = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} x r} \left(r - \frac{1}{r} \right)}{(1 - q_0 r)(1 - q_0^{-1} r)} dr. \end{aligned}$$



Фиг. 91.

Подинтегральная функция малого радиуса $|r| = \frac{1}{R}$ имеет единственный однократный полюс $r = 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} x r} \left(r - \frac{1}{r} \right)}{(1 - q_0 r)(1 - q_0^{-1} r)} dr = -\operatorname{Res}_{r=0} \left(\frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} x r} \left(r - \frac{1}{r} \right)}{(1 - q_0 r)(1 - q_0^{-1} r)} \right) = 1.$$

Подставляя полученное значение интегралов в уравнение (в₁), получим окончательно

$$u(x, t) = \frac{E}{2} \left\{ e^{-b \frac{x}{v}} + \sigma \frac{x}{v} \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} \frac{I_1 \left(j\sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}} d\tau \right\} \quad (e)$$

Теперь сделаем аналогичное преобразование интеграла для тока i [формула (б)].

В результате этих преобразований получим

$$\begin{aligned} i = \frac{E}{2} \left\{ \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} \left[\frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(O)} \frac{\gamma(p)}{(\sigma + |\sigma| w) L} e^{|\sigma| w\tau - \gamma(p) x} dw \right] d\tau + \right. \\ \left. + e^{-b \frac{x}{v}} \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O)} \frac{\gamma(p)}{(\sigma + |\sigma| w) L} \frac{e^{\left[w - \frac{v}{|\sigma|} \gamma(p) \right] \frac{|\sigma|}{v} x - b \frac{x}{v}}}{w - \frac{b}{|\sigma|}} dw \right\}. \end{aligned}$$

Произведя замену переменной, согласно условию

$$w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right),$$

можно привести последнюю формулу к виду

$$i = \frac{E}{2} \left\{ \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} \left[\frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(0_1)} \frac{\frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right)}{\left[\sigma + \frac{|\sigma|}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) \right] L} e^{\frac{|\sigma|}{2} \tau \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{|\sigma|}{2v} x \left(q - \frac{1}{q} \right)} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq \right] d\tau + e^{-b \frac{x}{v}} \frac{1}{2\pi j} \oint_{(0_1)} \frac{\frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right)}{\left[\sigma + \frac{|\sigma|}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) \right] L} \times \\ \left. \times \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} \frac{x}{q}}}{\frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{|\sigma|}{2}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq \right\}.$$

Для выполнения интегрирования сделаем некоторые преобразования. Имея в виду, что $\sigma = \pm |\sigma|$, один из сомножителей подынтегральной функции первого интеграла может быть приведен к такому виду:

$$\frac{\frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right)}{\left[\sigma + \frac{|\sigma|}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) \right] L} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) = \frac{1}{vL} \frac{q - \frac{1}{q}}{q + \frac{1}{q} \pm 2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) = \\ = \frac{1}{vL} \frac{q^2 - 1}{(q \pm 1)^2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) = \frac{1}{2vL} \frac{(q \pm 1)^2}{q^2} = \frac{1}{vL} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2} \right).$$

Теперь первый интеграл по q , который мы обозначим через B , после подстановки в него только что проделанного преобразования будет иметь следующее выражение:

$$B = \frac{|\sigma|}{2\pi j} \oint_{(0_1)} \frac{1}{vL} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2} \right) e^{\frac{|\sigma|}{2} \tau \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{|\sigma|}{2v} x \left(q - \frac{1}{q} \right)} dq.$$

Применяя далее формулы (∂_1) и (∂_2) , последний интеграл можно привести к виду

$$B = \frac{|\sigma|}{2vL} \left[- \left(-\frac{|\sigma|}{v} x - |\sigma| \tau \right) \frac{I_1 \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 x^2}{v^2} - \sigma^2 \tau^2} \right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 x^2}{v^2} - \sigma^2 \tau^2}} + \right. \\ \left. + 2I_0 \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 x^2}{v^2} - \sigma^2 \tau^2} \right) + \left(-\frac{|\sigma|}{v} x + |\sigma| \tau \right) \frac{I_1 \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 x^2}{v^2} - \sigma^2 \tau^2} \right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 x^2}{v^2} - \sigma^2 \tau^2}} = \right. \\ \left. = \frac{1}{vL} \left[|\sigma| \tau \frac{|\sigma| \sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \tau^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \tau^2}} - (\pm |\sigma|) I_0 \left(|\sigma| \sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \tau^2} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\frac{\sigma I_1 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}} \tau - \sigma I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{C}{L}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) \right] - \sigma I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Вычислим второй интеграл по q

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{\frac{|\sigma|}{v} \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right)}{L \left[\sigma + \frac{|\sigma|}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) \right]} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} x \frac{1}{q}}}{\frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) - \frac{b}{|\sigma|}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) dq = \\
&= \frac{1}{vL} \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O_1)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} x \frac{1}{q}}}{(q - q_0)(q - q_0^{-1})} \left(q + 2 + \frac{1}{q} \right) dq,
\end{aligned}$$

где q_0 и q_0^{-1} — корни уравнения

$$w = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) \quad \text{при } p = 0,$$

т. е.

$$q^2 - \frac{2b}{|\sigma|} q + 1 = 0.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $q = \frac{1}{r}$, тогда получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{vL} \frac{1}{2\pi j} \oint_{(O)} \frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} xr}}{(1 - q_0 r)(1 - q_0^{-1} r)} \left(\frac{1}{r} + 2 + r \right) (-1) dr = \\
&= -\sqrt{\frac{C}{L}} \operatorname{Res}_{r=0} \left[\frac{e^{\frac{|\sigma|}{v} xr}}{(1 - q_0 r)(1 - q_0^{-1} r)} \frac{-1}{r} \right] = \sqrt{\frac{C}{L}}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения интегралов в формулу для i , получим

$$\begin{aligned}
i &= \frac{E}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left\{ \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) - \sigma I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + e^{-b \frac{x}{v}} \right\} = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left\{ e^{-bt} I_0 \left(\sigma j \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) - e^{-b \frac{x}{v}} + \right. \\
&\quad \left. + b \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) d\tau - \sigma \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau} I_0 \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) d\tau + e^{-b \frac{x}{v}} \right\},
\end{aligned}$$

или окончательно

$$i(x, t) = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left\{ e^{-btI_0} \left(\sigma j \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{G}{C} \int_{\frac{x}{v}}^t e^{-b\tau I_0} \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) d\tau \right\}. \quad (\text{ж})$$

Рассматривая полученные выражения для u и i , видим, что до пункта, удаленного на расстояние x от начала линии, напряжение и ток доходят через промежуток времени $t = \frac{x}{v}$, причем в этот момент ($t = \frac{x}{v}$) напряжение сразу достигает величины, равной

$$u = \frac{E}{2} e^{-b \frac{x}{v}},$$

а ток

$$i = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-b \frac{x}{v}}.$$

Эти величины, как известно, называются напряжением и током головной волны и обозначаются соответственно через Γ_u и Γ_i , т. е.

$$\Gamma_u = \frac{E}{2} e^{-b \frac{x}{v}},$$

$$\Gamma_i = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-b \frac{x}{v}}.$$

Выведенные формулы для напряжения [формула (е)] и тока [формула (ж)] могут быть еще упрощены, если принять во внимание следующие соотношения:

$$e^{-b \frac{x}{v}} + \sigma \frac{x}{v} \int_{\frac{x}{v}}^{\infty} e^{-b\tau} \frac{I_1 \left(j\sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}} d\tau = e^{-x \sqrt{RG}}, \\ vG \int_{\frac{x}{v}}^{\infty} e^{-b\tau} I_0 \left(j\sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) d\tau = \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-x \sqrt{RG}}.$$

В этом случае получим

$$u(x, t) = \frac{E}{2} \left\{ e^{-x \sqrt{RG}} - \sigma \frac{x}{v} \int_{\frac{x}{v}}^{\infty} e^{-b\tau} \frac{I_1 \left(j\sigma \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right)}{j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}}} d\tau \right\}_{t \geq \frac{x}{v}},$$

$$i(x, t) = \frac{E}{2} \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-x\sqrt{RG}} + \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-btI_0} \left(\sigma j \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) - \right. \\ \left. - vG \int_t^\infty e^{-b\tau I_0} \left(\sigma j \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) d\tau \right\}_{t \geq \frac{x}{v}}.$$

Полученные в этом параграфе решения справедливы не только для согласованного включения линии ($Z_l = Z_0 = Z$). Они справедливы еще для двух случаев, а именно:

1) для бесконечно длинной линии, в начале которой включен источник тока электродвижущей силы E и сопротивления $Z_0 = Z$,

2) для линии бесконечно длинной, в начале которой включен источник тока электродвижущей силы E и сопротивления $Z_0 = 0$.

В самом деле, положив $l = \infty$ в формулах

$$N(p) = \frac{1}{Z} \frac{(Z_0 + Z)(Z_l + Z)e^{\gamma l} - (Z_0 - Z)(Z_l - Z)e^{-\gamma l}}{(Z_l + Z)e^{\gamma(l-x)} - (Z_l - Z)e^{-\gamma(l-x)}}, \\ Z(p) = \frac{(Z_0 + Z)(Z_l + Z)e^{\gamma l} - (Z_0 - Z)(Z_l - Z)e^{-\gamma l}}{(Z_l + Z)e^{\gamma(l-x)} - (Z_l - Z)e^{-\gamma(l-x)}},$$

получим

$$N(p) = \frac{1}{Z} \frac{Z_0 + Z}{e^{-\gamma x}} = 2e^{\gamma x}, \\ Z(p) = \frac{Z_0 + Z}{e^{-\gamma x}} = 2Ze^{\gamma x},$$

так как по условию $Z_0 = Z$.

Мы получили те же формулы, что и для конечной, согласованной с приемно-передающими устройствами ($Z_0 = Z_l = Z$) линии. Стало быть, полученные выражения для u и i справедливы для бесконечно длинной линии, в начале которой включен источник тока с внутренним сопротивлением $Z_0 = Z$.

Положив же, помимо $l = \infty$, еще $Z_0 = 0$, находим

$$N(p) = e^{\gamma x} \quad Z(p) = Ze^{\gamma x}.$$

Мы получили решения, отличающиеся от основных (для $Z_0 = Z_l = Z$) только постоянными множителями, стало быть, полученные решения для u и i справедливы и для бесконечно длинной линии, в начале которой включен источник тока с электродвижущей силой E и с сопротивлением $Z_0 = 0$. Необходимо только полученные решения для согласованной конечной линии умножить на два.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ НАДЗЕМНЫХ ЛИНИЙ

Глава I

ВЫВОД ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ БЕГУЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ

§ 1. Введение

Основной характеристикой работы аппаратуры на телемеханических линиях, и в особенности на телеграфных, является кривая входящего тока. Только на основе анализа кривой входящего тока можно произвести полную оценку телемеханической работы по данной цепи, разобравшись в искажениях передаваемых сигналов, наметить пути борьбы с этими искажениями. Однако вывод соответствующих формул входящего тока связан, как мы видели в предыдущих двух частях этой монографии, с весьма тяжелой задачей анализа электромагнитных процессов вдоль проводных линий. Несмотря на восьмидесятилетнюю давность этой задачи и участие в ней выдающихся ученых Европы и Америки, * мы до настоящего времени не имеем полного ее решения. Даже для наиболее простых частных случаев полученные точные формулы для входящего тока имеют весьма тяжеловесный, неудобный для практического использования вид (см. первые две части монографии). Анализ же особо интересного для практиков случая — проводной линии с электромагнитной аппаратурой по концам — до настоящего времени не доведен до практически приемлемого результата.

Трудности, связанные с получением точных и удобных формул входящего тока, направили научную мысль на путь упрощенных, приближенных решений. Из всех сделанных в этом направлении работ ** наиболее простые и близкие к действительности результаты дает метод бегущей волны. *** В основном он сводится к выводу удобных, хотя бы

* Вильям Томсон, Ваши, проф. К. А. Поссе, проф. В. И. Коваленков, К. В. Вагнер, Карлсон, Хивисайд, акад. А. Н. Крылов и др.

** В нашей литературе см. работы проф. А. Ф. Гаврилова и проф. В. И. Коваленкова.

*** Работы проф. В. И. Коваленкова.

и приближенных формул бегущей волны вдоль бесконечно длинной линии и при переходе от бесконечно длинной линии к конечной, к изучению процессов отражения этой бегущей волны от концов линии.

В настоящей главе рассмотрим первую часть задачи — вывод приближенных формул бегущей волны.

§ 2. Точные характеристики головной электромагнитной волны

Точные формулы бегущей волны, как мы видели во II части настоящей монографии, сложны, тяжелы для практического их применения и имеют следующий вид:

$$u = E \left[e^{-bt_0} + \sigma t_0 \int_{t_0}^t \frac{e^{-b\tau} I_1(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2})}{j \sqrt{\tau^2 - t_0^2}} d\tau \right], \quad (1)$$

$$i = E \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} I_0(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}) + vG \int_{t_0}^t e^{-b\tau} I_0(j\sigma \sqrt{\tau^2 - t_0^2}) d\tau \right],$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка, I_1 — функция Бесселя первого порядка,

$$\sigma = \frac{RC - LG}{2LC}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad t_0 = x \sqrt{LC}.$$

Анализ этих формул показывает, что в момент достижения электромагнитной волной данного пункта линии ток и напряжение делают скачок от 0 до значения $i_{t_0} = \Gamma_i$ и $u_{t_0} = \Gamma_u$, затем меняют свои значения по закону, весьма близкому к показательному, асимптотически приближаясь к установившимся их значениям: I_∞ и U_∞ .

Начальное значение тока (для $t = t_0$) носит название тока головной волны Γ_i и начальное значение напряжения Γ_u — напряжения головной волны. Их значения определяются следующими точными формулами:

$$\Gamma_u = E e^{-bt_0},$$

$$\Gamma_i = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0},$$

$$\text{где } b = \frac{RC + LG}{2LC}.$$

Установившиеся же значения тока и напряжения бегущей волны, как известно, выражаются формулами

$$U_\infty = E e^{-\beta x},$$

$$I_\infty = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x},$$

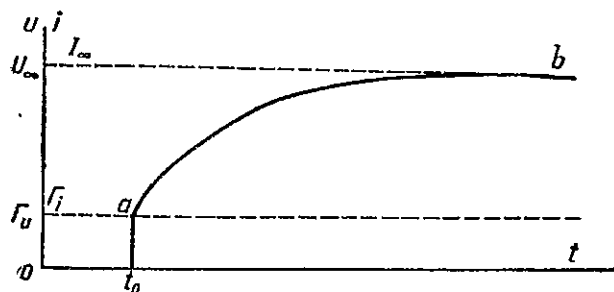
$$\text{где } \beta = \sqrt{RG}.$$

Не трудно также из точных формул бегущей волны определить (см. II часть монографии) наклон начальных касательных к кривым тока и напряжения

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} = \frac{E}{2} \left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2 x \sqrt{LC} e^{-bt_0},$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_0} = E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{LG - RC}{2LC} e^{-bt_0} \left(1 - \frac{RC - LG}{4 \sqrt{LC}} x \right).$$

Таким образом, тангенс угла наклона начальной касательной к временной кривой напряжения бегущей волны всегда положителен, независимо от соотношений параметров RC и LG . Это может быть лишь в том случае, если временная зависимость напряжения бегущей волны изображается кривой ab (фиг. 92), т. е. головное значение Γ_u напряжения бегущей волны всегда меньше установившегося значения напряже-



Фиг. 92.

ния U_∞ . В этом можно убедиться (см. II часть) также следующим образом. Посмотрим, при каких условиях Γ_u больше равно меньше U_∞ или Ee^{-bt_0} больше равно меньше $Ee^{-\beta x}$. Имея в виду, что

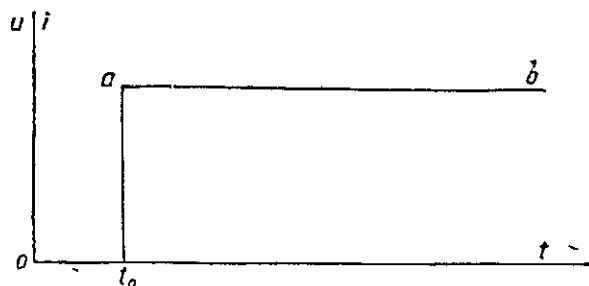
$$b = \frac{RC + LG}{2LC} \quad \text{и} \quad t_0 = x\sqrt{LC},$$

напишем

$$e^{-\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)x} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} e^{-\sqrt{RG}x}$$

и так как

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} > 2\sqrt{RG},$$



Фиг. 93.

или

$$R^2\frac{C}{L} - 2RG + G^2\frac{L}{C} = \left(R\sqrt{\frac{C}{L}} - G\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 \geq 0,$$

то всегда

$$\Gamma_u \leq U_\infty.$$

Очевидно, что $\Gamma_u = U_\infty$, когда $RC = LG$. В этом случае временная кривая напряжения изобразится прямой ab (фиг. 93).

Переходим к тангенсу угла начальной касательной к кривой тока бегущей волны.

Производная $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0}$ отрицательна, если

$$RC > LG \text{ и } \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} < 1,$$

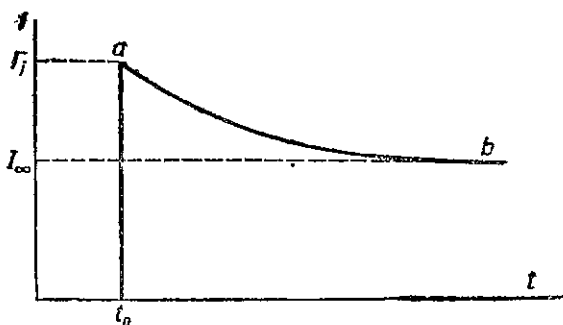
и мы имеем кривую ab (фиг. 94).

Производная $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0}$ равна нулю, если $RC=LG$ или же $RC > LG$,

но $\frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x=1$, и мы имеем кривую фиг. 93.

Та же производная положительна, если $RC < LG$ или же $RC > LG$,

но $\frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} > 1$, и мы имеем кривую фиг. 92.



Фиг. 94.

Соотношение между током головной волны и установившимся его значением I_∞ может быть выведено из следующего сопоставления.

$$\Gamma_i \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} I_\infty,$$

если

$$E\sqrt{\frac{C}{L}}e^{-bt_0} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} E\sqrt{\frac{G}{R}}e^{-\beta x},$$

или

$$\sqrt{\frac{RC}{LG}}e^{-bt_0} \begin{matrix} \text{больше} \\ \text{равно} \\ \text{меньше} \end{matrix} e^{-\beta x}.$$

Для надземных линий, применяемых на практике, мы имеем $RC > LG$, следовательно, для них мы всегда будем иметь до определенного расстояния пункта x кривую тока фиг. 94, затем при каком-то значении x — фиг. 93, потом кривую фиг. 92.

Все эти выводы полностью совпадают с результатами экспериментального исследования кривых тока на существующих телеграфных линиях.

§ 3. Общее решение для бегущей электромагнитной волны

Мы видим, таким образом, что теоретический и экспериментальный анализ кривых тока и напряжения бегущей волны показывает, что в момент достижения электромагнитной волной какого-либо пункта линии напряжение и ток делают скачок, после чего значение того и другого начинают изменяться по кривым, весьма близким к показательным. Начальные значения этих кривых определяются головной частью электромагнитной волны; конечные — установившимися значениями тока и напряжения. Но если кривые временного изменения тока и напряжения бегущей волны могут быть приняты за показательные кривые, то, очевидно, что напряжения и ток i бегущей волны должны подчиняться следующему закону:

$$\begin{aligned} u &= U_{\infty} + e^{-\delta t} (C_1 e^{-\eta x} + C_2 e^{\eta x}), \\ i &= I_{\infty} + \frac{e^{-\delta t}}{Z} (C_1 e^{-\eta x} - C_2 e^{\eta x}), \end{aligned} \quad (2)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, δ и η — параметры временного и пространственного затухания.

Обозначим

$$\begin{aligned} U_{\infty} &= E e^{-\beta x} = u_1, \\ I_{\infty} &= E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x} = i_1, \end{aligned} \quad (2_1)$$

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} (C_1 e^{-\eta x} + C_2 e^{\eta x}) &= u_2, \\ \frac{e^{-\delta t}}{Z} (C_1 e^{-\eta x} - C_2 e^{\eta x}) &= i_2; \end{aligned} \quad (2_2)$$

тогда

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \\ i &= i_1 + i_2, \end{aligned}$$

где u_1 и i_1 выражают установившиеся электромагнитные процессы вдоль бесконечно длинной линии и u_2 и i_2 — переходные процессы. Приведенные решения u и i должны удовлетворять уравнениям электромагнитной волны („телеграфным“ уравнениям):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R i + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G u + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Не трудно убедиться, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям при условии

$$\begin{aligned} Z &= \frac{R - L\delta}{\eta} = \frac{\eta}{G - C\delta} = \sqrt{\frac{R - L\delta}{G - C\delta}}, \\ \eta &= \sqrt{(R - L\delta)(G - C\delta)}. \end{aligned}$$

§ 4. Особенности общего решения для бегущей волны

Обращает на себя внимание ряд особенностей общего решения (2). Мы знаем, что при установившемся режиме вдоль конечной однородной линии существуют в общем случае две волны: прямая от начала линии к ее концу и обратная — от конца к началу. Обратная волна обуславливается исключительно отражением прямой волны от приемника на конце линии, не согласованного с последней. Если приемник согласован с линией, то отраженная волна отсутствует, и вдоль линии движется только прямая волна.

В случае бесконечно длинной однородной линии отраженной волны, очевидно, быть не может. Формулы (2) установившегося процесса действительно фиксируют только одну прямую волну. Процесс же, устанавливающийся, изображенный решениями (2₂), складывается из двух волн — прямой $C_1 e^{-\delta t e^{-\gamma x}}$ и обратной $C_2 e^{-\delta t e^{\gamma x}}$. Где источник образования последней волны?

Чтобы разобраться в этом вопросе, рассмотрим первичные параметры линии. Предположим, что нам удалось получить линию с хивисайдовским соотношением ее первичных параметров

$$RC = LG$$

или

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}.$$

Последнее соотношение показывает, что постоянная времени по проводу $\frac{L}{R}$ равна постоянной времени по изоляции $\frac{C}{G}$. Изменение тока в любом пункте линии, вызываемое индуктивностью L и сопротивлением R линии, в любой момент времени полностью компенсируется противоположным изменением тока, вызываемым емкостью C и проводимостью изоляции G . В результате и ток и напряжение в любом пункте бесконечно длинной линии мгновенно нарастают до своего установившегося состояния, обратной волны не получается (фиг. 93).

Если постоянные времени $\frac{L}{R}$ и $\frac{C}{G}$ не равны, то указанной компенсации не происходит: ток и напряжение в любом пункте бесконечно длинной линии достигают своего установившегося состояния уже не мгновенно, причем, в зависимости от соотношений в цепи емкости и индуктивности, кривая тока во времени меняет свой характер. Если в линии преобладает емкость $\left(\frac{C}{G} > \frac{L}{R}\right)$, то мы можем получить в зависимости от расстояния x кривые тока, приведенные на фиг. 92, 93 и 94, если индуктивность $\left(\frac{L}{R} > \frac{C}{G}\right)$, то — кривую фиг. 92.

При несогласованных параметрах линии каждый элемент линии является источником отражения; отражение происходит непрерывно по всей длине линии.

§ 5. Определение постоянных интегрирования приближенных решений для бегущей волны

Переходим к определению постоянных интегрирования, входящих в решение (2₂).

Так как $u_2 = u - u_1$, то для какого-то пункта линии $x = x_0$ и для $t = t_0$ должно быть

$$u_2 = \Gamma_u - U_\infty = E(e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}),$$

$$i_2 = \Gamma_i - I_\infty = E\left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0}\right).$$

С другой стороны, для того же пункта $x = x_0$ и для $t = t_0$ в силу решения (2₂) имеем

$$u_2 = e^{-\delta t_0} (C_1 e^{-\eta x_0} + C_2 e^{\eta x_0}), \quad i_2 = \frac{1}{Z} e^{-\delta t_0} (C_1 e^{-\eta x_0} - C_2 e^{\eta x_0}).$$

Таким образом,

$$C_1 e^{-\eta x_0} + C_2 e^{\eta x_0} = E e^{\delta t_0} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}),$$

$$C_1 e^{-\eta x_0} - C_2 e^{\eta x_0} = E Z e^{\delta t_0} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right),$$

откуда

$$C_1 = \frac{E}{2} e^{\eta x_0 + \delta t_0} \left[\left(1 + Z \sqrt{\frac{C}{L}} \right) e^{-bt_0} - \left(1 + Z \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\beta x_0} \right],$$

$$C_2 = \frac{E}{2} e^{-\eta x_0 + \delta t_0} \left[\left(1 - Z \sqrt{\frac{C}{L}} \right) e^{-bt_0} - \left(1 - Z \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\beta x_0} \right].$$

После подстановки в решение (2₂) и соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned} u_2 &= E e^{-\delta(t-t_0)} \left[(e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}) \operatorname{ch} \eta(x - x_0) - \right. \\ &\quad \left. - Z \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \operatorname{sh} \eta(x - x_0) \right], \\ i_2 &= \frac{E}{Z} e^{-\delta(t-t_0)} \left[Z \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \operatorname{ch} \eta(x - x_0) - \right. \\ &\quad \left. - (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}) \operatorname{sh} \eta(x - x_0) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Пункт $x = x_0$ на линии мы выбрали произвольным, расстоянию x_0 мы можем придавать любое значение от 0 до ∞ . И какое бы значение длине x_0 мы ни придавали, напряжение u_2 и ток i_2 в этом пункте будут иметь для $t = t_0$ значения, равные напряжению Γ_u и току Γ_i головной волны, соответствующей пункту x_0 , и для $t = \infty$ установившиеся их значения U_∞ , I_∞ , причем переход от одного значения к другому будет происходить по показательному закону.

* Для $t < t_0$ значения u_2 и i_2 физического смысла не имеют, так как волна достигает пункта x_0 только через время $t = t_0$ после включения в начале линии источника тока; все значения u_2 и i_2 для $t < t_0$, как не имеющие физического смысла, отбрасываем.

Практически только эти кривые нас и интересуют, поэтому в приведенном решении положим $x = x_0$; тогда, вместо полного решения (3), будем иметь следующее частное решение для заданного пункта $x = x_0$, [при этом значение x_0 может быть какое угодно, от 0 до ∞ ; изменение значения x_0 не отражается на решении (2); при любом значении x_0 решения (3) удовлетворяют уравнениям электромагнитной волны]:

$$\begin{aligned} u_2 &= E e^{-\delta(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}), \\ i_2 &= E e^{-\delta(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right), \end{aligned} \quad (3_1)$$

причем $t \geq t_0$.

Полное решение для пункта $x = x_0$ будет выражаться суммой

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{и} \quad i = i_1 + i_2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} u &= E [e^{-\beta x_0} + e^{-\delta(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})], \\ i &= E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3_2)$$

§ 6. Определение временных параметров приближенного решения

Неопределенным в приведенном решении остается только параметр δ . Для его определения вспомним, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} &= \frac{E}{2} \left(\frac{RC-LG}{2LC} \right)^2 x_0 \sqrt{LC} e^{-bt_0}, \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_0} &= E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{LG-RC}{2LC} e^{-bt_0} \left(1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x_0 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Взяв производные по t от решений (3₂), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} &= -E\delta (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}), \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_0} &= -E\delta \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Приравниваем соответствующие правые части, обозначая параметр δ , определяемый из производных $\frac{du}{dt}$ через δ_u и из производных $\frac{di}{dt}$ через δ_i ;

$$\frac{1}{2} \left(\frac{RC-LG}{2LC} \right)^2 x_0 \sqrt{LC} e^{-bt_0} = -\delta_u (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}),$$

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{RC-LG}{2LC} e^{-bt_0} \left(1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x_0 \right) = \delta_i \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right),$$

откуда

$$\delta_u = \frac{1}{2} \left(\frac{RC-LG}{2LC} \right)^2 x_0 \sqrt{LC} \frac{e^{-bt_0}}{e^{-\beta x_0} - e^{-bt_0}},$$

$$\delta_i = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{RC-LG}{2LC} \left(1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x_0 \right) \frac{e^{-bt_0}}{\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0}}. \quad (6)$$

Очевидно, что в общем случае $\delta_u \neq \delta_i$, следовательно показатель временного затухания напряжения бегущей волны отличается от такового же для тока; при пользовании формулой для u необходимо брать параметр δ_u и формулой для i параметр δ_i .

Таким образом, и наклон начальной касательной к кривой напряжения и к кривой тока будет равен соответствующему наклону действительной кривой. Кривые напряжения и тока бегущей волны, построенные по приближенным формулам (3₂), отражают все выведенные выше особенности действительных кривых: то же значение головной волны, то же установившееся ее значение и тот же наклон начальных касательных.

§ 7. Иллюстрации к предыдущим параграфам

Иллюстрируем результаты анализа движения электромагнитной волны вдоль бесконечно длинной линии числовыми подсчетами и соответствующими графиками. Остановимся на наиболее распространенном в практике железном проводе, диаметром в 5 мм. Для однопроводной линии среднего качества имеем следующие первичные параметры:

$$R = 7.36 \Omega, L = 0.0238 H, C = 0.0113 \times 10^{-6} F, G = 0.5 \times 10^{-6} \Omega.$$

Приведем основные формулы предыдущих параграфов:

$$\begin{aligned} u &= E [e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_u(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})], \\ i &= E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3_2)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} &= \frac{E}{2} \left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2 x_0 \sqrt{LC} e^{-bt_0}, \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_0} &= E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{LG - RC}{2LC} e^{-bt_0} \left(1 - \frac{RC - LG}{4\sqrt{LC}} x_0 \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} &= -E \delta_u (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0}), \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_0} &= -E \delta_i \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right); \end{aligned} \quad (5_1)$$

$$\begin{aligned} \delta_u &= \frac{1}{2} \left(\frac{RC - LG}{2LC} \right)^2 x_0 \sqrt{LC} \frac{e^{-bt_0}}{e^{-\beta x_0} - e^{-bt_0}}, \\ \delta_i &= \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{RC - LG}{2LC} \left(1 - \frac{RC - LG}{4\sqrt{LC}} x_0 \right) \frac{e^{-bt_0}}{\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Прежде всего вычислим показатели временного затухания δ_u и δ_i . Имеем в виду, что $bt_0 > \beta x_0$, вычисляем параметр δ_u без каких-либо затруднений (табл. 11).

Таблица 11

Показатель временного затухания δ_u напряжения бегущей волны

x_0	δ_u	x_0	δ_u	x_0	δ_u
0	146.8	600	106.7	1200	75.92
100	138.5	700	100.6	1300	71.95
200	131.5	800	95.81	1400	67.20
300	125.4	900	90.38	1500	63.47
400	119.0	1000	85.35		
500	112.8	1100	80.67		

Пользуясь при подсчетах кривых напряжения для любого пункта x_0 соответствующими значениями параметра δ_u из этой таблицы, получаем наклон начальной касательной к кривой напряжения, в точности соответствующий действительному ее наклону.

Труднее с параметром δ_i . В формулу для него входит отношение

$$\frac{1 - \frac{RC - LG}{4\sqrt{LC}} x_0}{\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0}},$$

или

$$\frac{1 - \frac{RC - LG}{4\sqrt{LC}} x_0}{\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{RC + LG}{2\sqrt{LC}} x_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\sqrt{RG} x_0}}.$$

Это отношение зависит от расстояния x_0 рассматриваемого пункта бесконечно длинной линии.

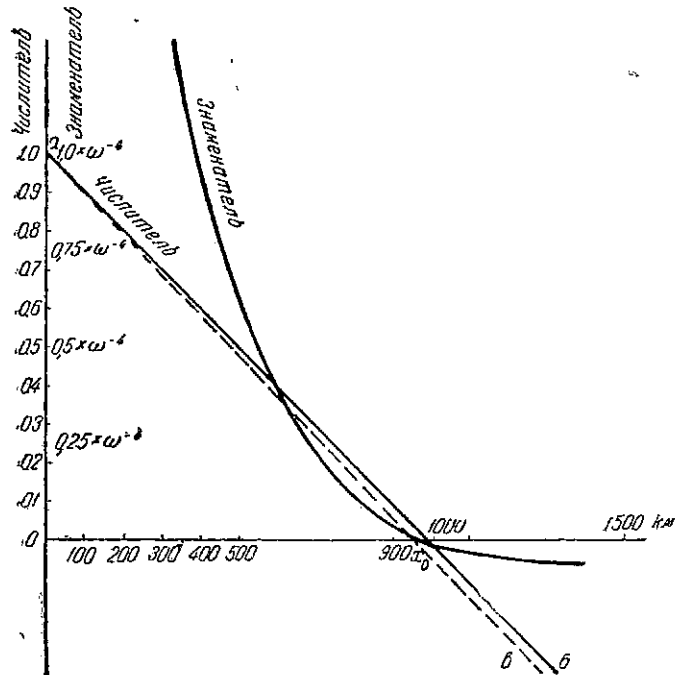
Если $RC > LG$, как это обычно бывает на линиях, применяемых на практике, то при $x_0 = 0$ (т. е. в начале линии) это отношение будет

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}}} > 0.$$

С увеличением расстояния x_0 числитель и знаменатель стремятся к нулю; при дальнейшем увеличении x_0 они меняют свой знак. Если бы формула (β_1) для тока была вполне точна, то числитель и знаменатель рассматриваемого отношения проходили бы через нуль при одном и том же значении x_0 , так как в противном случае параметр δ_i на некотором участке линии приобретал бы отрицательные значения, чего физически быть не может. Расхождения значения x_0 , при котором числитель и знаменатель проходят через нуль, являются следствием расхождения приближенной формулы для i с соответствующей точной. Для иллюстрации приводим табл. 12 значений числителя и зна-

Таблица 12

x_0	$1 - \frac{RC-LG}{4\sqrt{LC}} x_0$	$\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0}$
0	1	$4.286 \cdot 10^{-4}$
100	0.8989	$3.004 \cdot 10^{-4}$
200	0.7978	$2.080 \cdot 10^{-4}$
300	0.6968	$1.420 \cdot 10^{-4}$
400	0.5957	$0.9480 \cdot 10^{-4}$
500	0.4946	$0.6151 \cdot 10^{-4}$
600	0.3935	$0.3832 \cdot 10^{-4}$
700	0.2924	$0.2201 \cdot 10^{-4}$
800	0.1914	$0.1133 \cdot 10^{-4}$
900	0.09028	$0.0402 \cdot 10^{-4}$
964.3	0.02529	0
989.3	0	$-0.0144 \cdot 10^{-4}$
1000	-0.01080	$-0.0148 \cdot 10^{-4}$
1100	-0.1119	$-0.0343 \cdot 10^{-4}$
1200	-0.2130	$-0.0507 \cdot 10^{-4}$
1300	-0.3140	$-0.0576 \cdot 10^{-4}$
1400	-0.4151	$-0.0608 \cdot 10^{-4}$
1500	-0.5162	$-0.0591 \cdot 10^{-4}$



Фиг. 95.

менателя рассматриваемого отношения. По этой таблице построены графики фиг. 95. Расхождение, как мы видим, не велико, числитель проходит через нуль при значении $x_0 = 989.3$ км, знаменатель при $x_0 = 964.3$ км. Между этими пунктами линии для параметра δ_i получаем отрицательные значения, чего, как мы уже заметили, физически быть не может.

Чтобы избежать отрицательных значений δ_i , изменим числитель рассматриваемого отношения: вместо прямой ab (фиг. 95) возьмем прямую av (пунктирную на фиг. 95), исходящую из точки a и проходящую через точку $x_0 = 964.3$ км, т. е. соответствующую нулевому значению знаменателя. Для выбранной нами линии точное значение числителя (прямая ab на фиг. 95) будет равно $1 - 0.0010108x_0$ и приближенное (пунктирная прямая av) значение $1 - 0.001037x_0$. Очевидно, вместо точного значения δ_i , получим приближенное, приближенные же значения получим и для производной $\left(\frac{dt}{dt}\right)_{t=t_0}$.

Для параметра δ_i вычисляем табл. 13.

Таблица 13

x_0	δ_i	x_0	δ_i	x_0	δ_i
0	213.5	600	165.3	1200	118.4
100	204.9	700	157.2	1300	112.4
200	196.5	800	149.3	1400	107.5
300	188.1	900	141.1	1500	103.1
400	180.3	1000	133.1		
500	172.7	1100	125.9		

Базируясь на полученных значениях параметра δ_i , придем к приближенным значениям производной $\left(\frac{dt}{dt}\right)_{t=t_0}$.

Насколько эти приближенные значения производной отличаются от точных?

Вычислим те и другие (табл. 14).

Таблица 14

x_0 , км	$-\frac{1}{E} \left(\frac{dt}{dt}\right)_{t=t_0}$		x_0 , км	$-\frac{1}{E} \left(\frac{dt}{dt}\right)_{t=t_0}$	
	точные	приблиз.		точные	приблиз.
0	0.09152	0.09151	800	0.00172	0.00169
100	0.06156	0.06155	900	0.00061	0.00057
200	0.04088	0.04087	1000	—0.00005	—0.00020
300	0.02672	0.02671	1100	—0.00042	—0.00043
400	0.01709	0.01709	1200	—0.00060	—0.00060
500	0.01062	0.01062	1300	—0.00066	—0.00065
600	0.00631	0.00631	1400	—0.00065	—0.00065
700	0.00351	0.00346	1500	—0.00061	—0.00061

Распределение напряжений (в долях от E , т. е. $\frac{u}{E}$) бегущей электромагнитной волны вдоль однородной однопроводной железной 5-миллиметровой линии бесконечной длины

$x, \text{ см}$ $\frac{t}{\sqrt{LC}}$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
0	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
100	1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7483 \\ 0.7641 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5599 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4190 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
200	1	0.7641	0.5837	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4190 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
300	1	0.7767	0.6029	0.4459	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.3185 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
400	1	0.7867	0.6184	0.4677	0.3405	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2345 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
500	1	0.7948	0.6308	0.4855	0.3626	0.2598	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1755 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---
600	1	0.8011	0.6408	0.5000	0.3808	0.2808	0.1983	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1314 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---	---
700	1	0.8062	0.6489	0.5118	0.3958	0.2983	0.2175	0.1514	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0983 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---	---
800	1	0.8102	0.6554	0.5213	0.4081	0.3130	0.2335	0.1684	0.1155	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0735 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---	---
900	1	0.8135	0.6607	0.5291	0.4183	0.3249	0.2470	0.1827	0.1302	0.0880	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0550 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---	---
1000	1	0.8160	0.6649	0.5355	0.4266	0.3350	0.2594	0.1949	0.1427	0.1005	0.0671	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0412 \end{Bmatrix}$	---	---	---	---
1100	1	0.8181	0.6683	0.5406	0.4335	0.3433	0.2679	0.2051	0.1534	0.1113	0.0777	0.0513	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0412 \end{Bmatrix}$	---	---	---
1200	1	0.8197	0.6711	0.5449	0.4391	0.3503	0.2759	0.2140	0.1626	0.1207	0.0868	0.0600	0.0390	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0412 \end{Bmatrix}$	---	---
1300	1	0.8210	0.6733	0.5483	0.4437	0.3560	0.2826	0.2214	0.1704	0.1287	0.0948	0.0677	0.0463	0.0298	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0172 \end{Bmatrix}$	---
1400	1	0.8229	0.6751	0.5511	0.4476	0.3608	0.2881	0.2277	0.1771	0.1356	0.1017	0.0745	0.0527	0.0357	0.0226	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0129 \end{Bmatrix}$
1500	1	0.8261	0.6825	0.5633	0.4653	0.3844	0.3176	0.2628	0.2165	0.1789	0.1478	0.1221	0.1009	0.0832	0.0688	0.0583

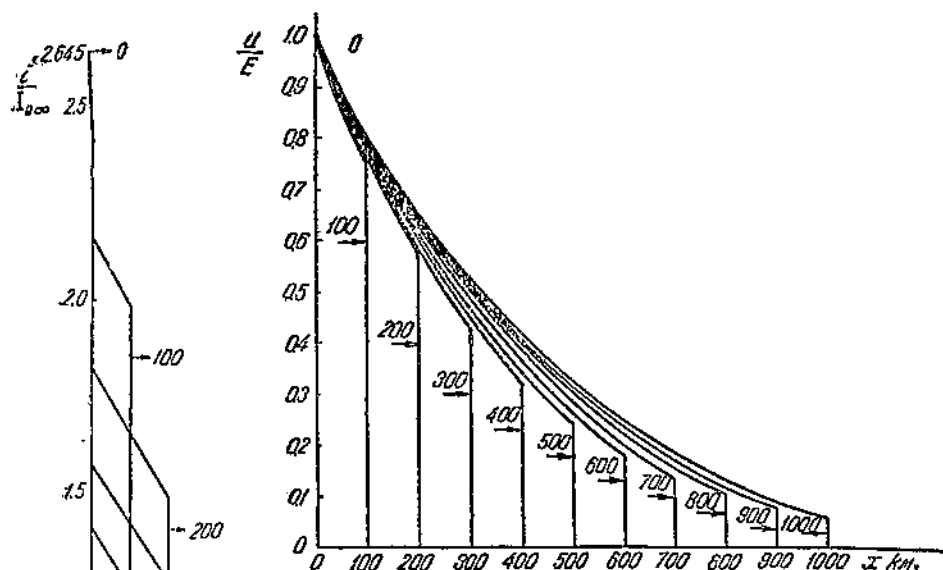
Распределение тока (в долях от $I_{0\infty} = E \cdot \sqrt{\frac{G}{R}}$, т. е. $\frac{i}{I_{0\infty}}$) бегущей электромагнитной волны вдоль однородной однопро-

водной железной 5-миллиметровой линии бесконечной длины

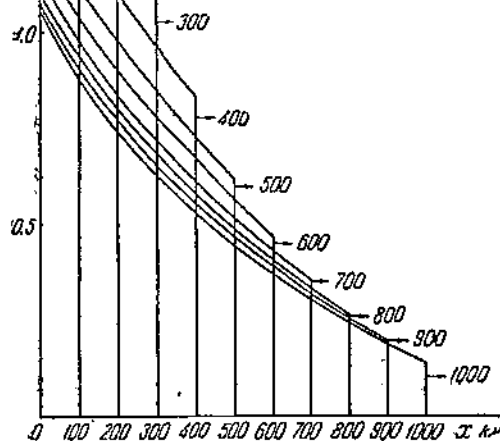
$x, \text{ км}$ $\frac{t}{\sqrt{LC}}$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
0	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 2,645 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	2,459	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1,378 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
200	1,817	1,650	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1,480 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300	1,575	1,415	1,261	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,108 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
400	1,406	1,247	1,101	0,9635	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,8291 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
500	1,285	1,127	0,9858	0,8571	0,7359	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,6204 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
600	1,201	1,041	0,9024	0,7793	0,6668	0,5622	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,4646 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
700	1,142	0,9796	0,8418	0,7218	0,6151	0,5184	0,4297	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,3547 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—
800	1,100	0,9358	0,7979	0,6769	0,5768	0,4852	0,4031	0,3339	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,2600 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—
900	1,071	0,9048	0,7661	0,6488	0,5483	0,4604	0,3828	0,3177	0,2506	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1943 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—
1000	1,050	0,8821	0,7433	0,6265	0,5270	0,4417	0,3673	0,3052	0,2432	0,1912	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1421 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—
1100	1,035	0,8659	0,7261	0,6096	0,5114	0,4274	0,3555	0,2956	0,2374	0,1886	0,1432	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1090 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—
1200	1,025	0,8548	0,7143	0,5973	0,4994	0,4169	0,3466	0,2882	0,2328	0,1866	0,1441	0,1114	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0814 \end{Bmatrix}$	—	—	—
1300	1,017	0,8466	0,055	0,5882	0,4908	0,4089	0,3397	0,2824	0,2283	0,1850	0,1449	0,1134	0,0849	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0611 \end{Bmatrix}$	—	—
1400	1,012	0,8403	0,6992	0,5816	0,4842	0,4030	0,3344	0,2779	0,2265	0,1838	0,1454	0,1150	0,0877	0,0648	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0455 \end{Bmatrix}$	—
1500	1,009	0,8366	0,6947	0,5768	0,4793	0,3983	0,3304	0,2745	0,2244	0,1828	0,1459	0,1164	0,0893	0,0679	0,0493	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0341 \end{Bmatrix}$
	1,000	0,8261	0,6825	0,5633	0,4653	0,3844	0,3176	0,2628	0,2165	0,1789	0,1478	0,1221	0,1009	0,0832	0,0688	0,0568

За исключением пункта $x_0 = 1000$ км, приближенные и точные значения производной $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0}$ почти совпадают, разница между ними находится в пределах погрешности подсчетов.

Определив значения параметров δ_u и δ_i , можем перейти к подсчету таблиц для напряжения и тока бегущей волны вдоль выбранной нами



Фиг. 96.



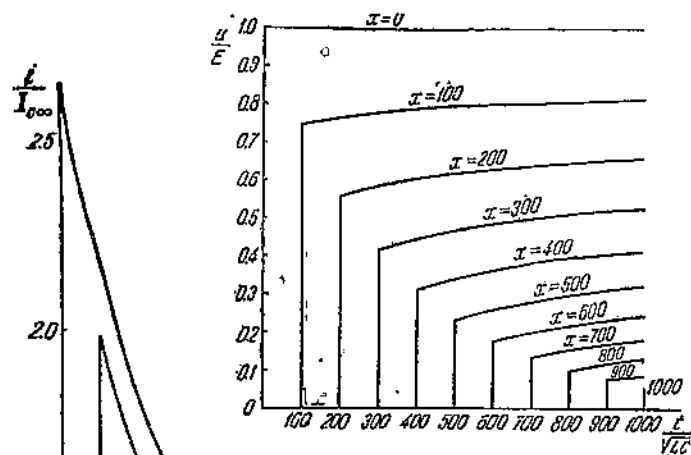
Фиг. 97.

линии бесконечно большой длины. Приходим к табл. 15 и 16, по которым строим графики фиг. 96 и 97. Эти графики хорошо иллюстрируют процесс распространения электромагнитной волны вдоль рассматриваемой линии, но недостаточно процесс установивания напряжения и тока в данном пункте линии. Для иллюстрации последнего процесса приводим графики фиг. 98 и 99.

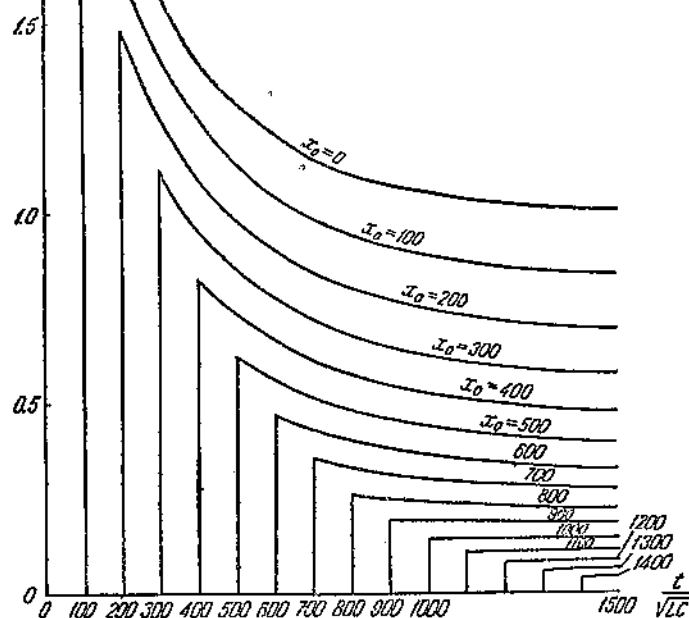
Весьма характерны графики фиг. 99 для тока бегущей волны. Кривые начинаются резко выражен-

ным убыванием тока во времени, постепенно наклон начальной касательной уменьшается, проходит через нуль, затем кривые тока начинают во времени возрастать. Эти временные процессы напряжения и

тока более наглядно иллюстрируются сопоставлением их головных и установившихся значений. В табл. 17 приведены эти значения, по которым построены графики фиг. 100 и 101.

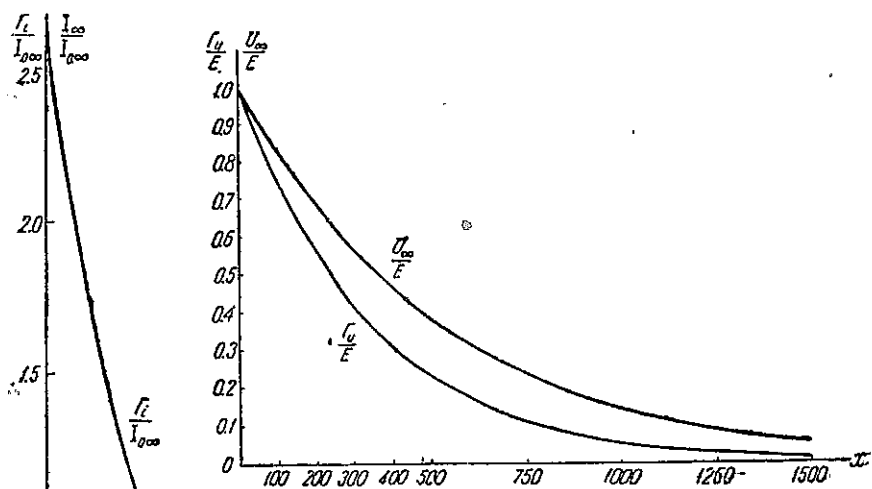


Фиг. 98.

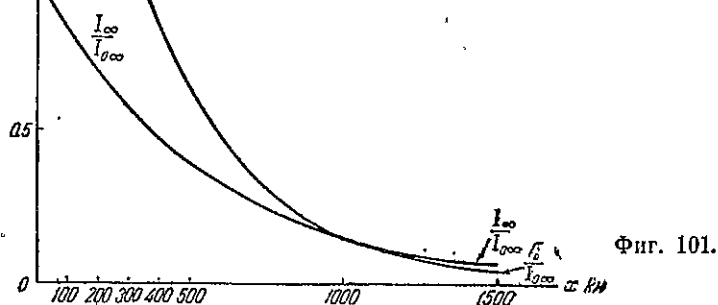


Фиг. 99.

Любая временная кривая напряжения и тока бегущей волны начинается с соответствующего пункту x_0 значения головной волны и асимптотически приближается к установившемуся значению напряжения и тока того же пункта x_0 . На фиг. 101 кривые тока головной волны и установившегося значения пересекаются. Вначале кривая тока головной волны



Фиг. 100.



Фиг. 101.

Таблица 17

Значения напряжения и тока головной волны, а также установившиеся их значения (в долях E и I_{00})

x_0 , км	Напряжение $\frac{u}{E}$		Ток i/I_{00} , где $I_{00} = E\sqrt{\frac{G}{R}}$	
	головная волна $\frac{U_{00}}{E}$	установившееся значение $\frac{U_{\infty}}{E}$	головная волна $\frac{I_i}{I_{00}}$	установившееся значение $\frac{I_{\infty}}{I_{00}}$
0	1	1	2.645	1
100	0.7483	0.8261	1.979	0.8261
200	0.5599	0.6825	1.481	0.6825
300	0.4190	0.5633	1.108	0.5633
400	0.3135	0.4653	0.8292	0.4653
500	0.2346	0.3844	0.6205	0.3844
600	0.1755	0.3176	0.4643	0.3176
700	0.1313	0.2628	0.3472	0.2628
800	0.0983	0.2165	0.2600	0.2165
900	0.0735	0.1789	0.1944	0.1789
1000	0.0550	0.1478	0.1421	0.1478
1100	0.0412	0.1221	0.1089	0.1221
1200	0.0308	0.1009	0.0815	0.1009
1300	0.0231	0.0832	0.0611	0.0832
1400	0.0172	0.0688	0.0455	0.0688
1500	0.0129	0.0568	0.0341	0.0568

располагается выше кривой установившихся значений, после пересечения — ниже. Для участка от $x_0 = 0$ до пункта пересечения кривые тока понижаются во времени, после пункта пересечения повышаются от кривой Γ_i/I_0^∞ до кривой $\frac{I_\infty}{I_0^\infty}$. В пункте пересечения кривых ток мгновенно достигает своего установившегося значения.

Глава II

ПЕРЕХОД ОТ РЕШЕНИЙ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЛИНИИ К РЕШЕНИЮ ДЛЯ ЛИНИИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

§ 1. Установившиеся вдоль линии процессы и их связь с устанавливающимися

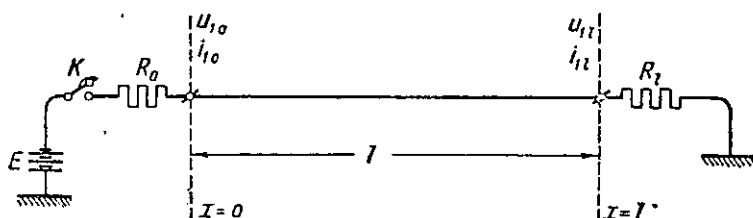
Рассмотрим самый общий случай (фиг. 102) — линию с сопротивлением R_0 в начале и R_l в конце. Общие решения для установившихся напряжения u_1 и тока i_1 имеют следующий вид:

$$u_1 = A_1 e^{-\beta x} + A_2 e^{\beta x},$$

$$i_1 Z_y = A_1 e^{-\beta x} - A_2 e^{\beta x},$$

где

$$Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}, \quad \beta = \sqrt{RG},$$



Фиг. 102.

A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, определяемые из следующих граничных условий:

при $x=0$

$$u_0 = E - R_0 i_0.$$

при $x=l$

$$u_l = R_l i_l.$$

Подставляя в общие решения для u_1 и i_1 , находим

$$A_1 = E \frac{Z_y (R_l + Z_y) e^{\beta l}}{(R_0 + Z_y) (R_l + Z_y) e^{\beta l} - (R_0 - Z_y) (R_l - Z_y) e^{-\beta l}},$$

$$A_2 = E \frac{Z_y (R_l - Z_y) e^{-\beta l}}{(R_0 + Z_y) (R_l + Z_y) e^{\beta l} - (R_0 - Z_y) (R_l - Z_y) e^{-\beta l}}.$$

После соответствующей подстановки приходим к следующим решениям:

$$u = U_{0\infty} \frac{e^{\beta(l-x)} + N_l e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - N_0 N_l e^{-\beta l}},$$

$$i = I_{0\infty} \frac{e^{\beta(l-x)} - N_l e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - N_0 N_l e^{-\beta l}},$$
(7)

где

$$U_{0\infty} = \frac{EZ_y}{R_0 + Z_y}, \quad I_{0\infty} = \frac{E}{R_0 + Z_y},$$

$$N_0 = \frac{R_0 - Z_y}{R_0 + Z_y}, \quad N_l = \frac{R_l - Z_y}{R_l + Z_y}.$$
(8)

Разлагаем правые части полученных решений для u_1 и i_1 в бесконечные ряды и переставляем соответствующим образом их члены:

$$u = U_{0\infty} e^{-\beta x} + U_{0\infty} N_l e^{-\beta l} e^{-\beta(l-x)} + U_{0\infty} N_l N_0 e^{-2\beta l} e^{-\beta x} +$$

$$+ U_{0\infty} N_l^2 N_0 e^{-3\beta l} e^{-\beta(l-x)} + U_{0\infty} N_0^2 N_l^2 e^{-4\beta l} e^{-\beta x} +$$

$$+ U_{0\infty} N_0^3 N_l^3 e^{-5\beta l} e^{-\beta(l-x)} + U_{0\infty} N_0^3 N_l^3 e^{-6\beta l} e^{-\beta x} + \dots;$$

$$i = I_{0\infty} e^{-\beta x} - I_{0\infty} N_l e^{-\beta l} e^{-\beta(l-x)} + I_{0\infty} N_l N_0 e^{-2\beta l} e^{-\beta x} -$$

$$- I_{0\infty} N_l^2 N_0 e^{-3\beta l} e^{-\beta(l-x)} + I_{0\infty} N_0^2 N_l^2 e^{-4\beta l} e^{-\beta x} -$$

$$- I_{0\infty} N_0^3 N_l^3 e^{-5\beta l} e^{-\beta(l-x)} + I_{0\infty} N_0^3 N_l^3 e^{-6\beta l} e^{-\beta x} - \dots$$

Каждый член приведенных рядов представляет собой установившееся значение той или иной электромагнитной волны, образующейся вследствие отражений от концов линии. * Рассмотрим их:

1) первая прямая волна (от начала линии к ее концу) равна:

$$U_{0\infty} e^{-\beta x} \quad \text{и} \quad I_{0\infty} e^{-\beta x};$$

2) первая отраженная волна (от конца линии к ее началу):

$$N_l U_{0\infty} e^{-\beta l} e^{-\beta(l-x)} \quad \text{и} \quad -N_l I_{0\infty} e^{-\beta l} e^{-\beta(l-x)};$$

3) вторая прямая волна:

$$N_l N_0 U_{0\infty} e^{-2\beta l} e^{-\beta(l-x)} \quad \text{и} \quad N_l N_0 I_{0\infty} e^{-2\beta l} e^{-\beta(l-x)};$$

4) вторая отраженная волна:

$$N_l N_0 N_l U_{0\infty} e^{-3\beta l} e^{-\beta(l-x)} \quad \text{и} \quad -N_l N_0 N_l I_{0\infty} e^{-3\beta l} e^{-\beta(l-x)};$$

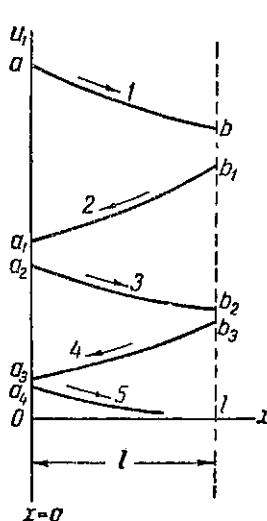
5) третья прямая волна:

$$N_0 N_l N_0 N_l U_{0\infty} e^{-4\beta l} e^{-\beta x} \quad \text{и} \quad N_0 N_l N_0 N_l I_{0\infty} e^{-4\beta l} e^{-\beta x}$$

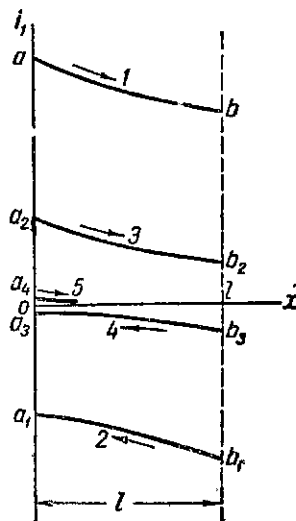
и т. д.

* В. И. Коваленков. Теория передачи по линиям электросвязи, т. I. Связьтехиздат, 1937.

Процесс этот можно изобразить кривыми фиг. 103 и 104. Кривые ab представляют собой движение первой прямой волны от начала линии к ее концу; кривые a_1b_1 — обратное движение первой отраженной волны; кривые a_2b_2 — движение второй прямой волны и т. д.



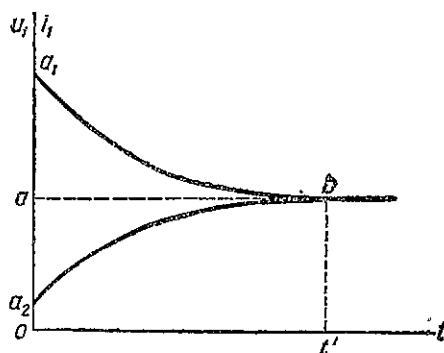
Фиг. 103.



Фиг. 104.

Кривые на фиг. 103 и 104 представляют собой установившиеся уже значения прямых и отраженных волн. Однако все физические процессы, прежде чем прийти к своему установившемуся состоянию, проходят через процесс устанавливания. При нажатии ключа K (фиг. 102) начинается движение электромагнитной волны от начала линии к ее концу. Движение это совершается с определенной конечной скоростью. Волна достигает пункта x на линии не мгновенно, а через определенный промежуток времени, тем больший, чем дальше отстоит этот пункт от начала линии.

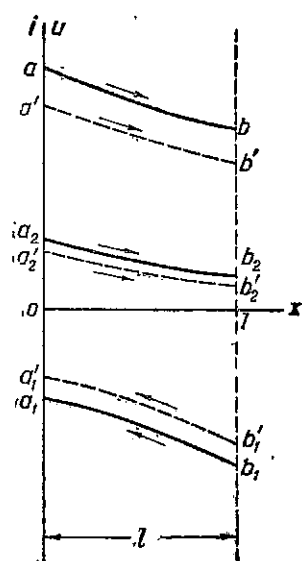
Достигнув данного пункта, волна, вообще говоря, устанавливается не сразу. Для этого требуется, как мы видели в предыдущей главе, некоторое время (математически бесконечно большое), зависящее от соотношений параметров R , L , G и C . Например, ток в первый момент достижения волной пункта x определяется ординатой Oa_1 или Oa_2 (фиг. 105), напряжение — ординатой Oa_2 . Затем эти значения начинают меняться, асимптотически приближаясь к пунктирной линии, изображающей установившееся значение тока или напряжения. Хотя сплошные



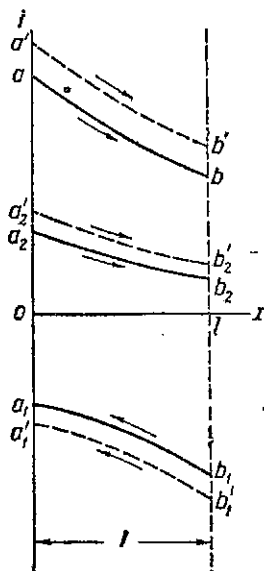
Фиг. 105.

линии (фиг. 105) математически сольются с пунктирной только через бесконечно большое время, практически это произойдет через сравнительно малый промежуток времени t' .

Начальные значения напряжения и тока Oa_1 и Oa_2 (фиг. 105) определяют фронт движущейся волны (напряжение и ток головной волны), конечные значения напряжения и тока Oa — установившуюся волну. Эти-то установившиеся процессы можно изобразить приведенными графиками фиг. 103 и 104. Но желая указать наличие в линии стадии устанавливания, мы должны усложнить график, нанося на фиг. 103 и 104, вместо одинарных кривых 1, 2, 3 ..., двойные, из которых одна обозначала бы начальные значения напряжения и тока (напряжение



Фиг. 106.



Фиг. 107.

и ток головной волны), а другая — конечные (установившиеся значения напряжения и тока). Для тока это показано на фиг. 106 ($\Gamma_t > 1$), и 107 ($\Gamma_t < 1$), для напряжения на фиг. 107 ($\Gamma_u < 1$) пунктирные линии изображают начальные его значения, сплошные — конечные.

§ 2. Линия конечной длины с полным отражением волны от концов линии

- а) Линия с замкнутым накоротко концом и нулевым сопротивлением в начале (фиг. 108, 109)

Подставляя $R_0 = R_l = 0$ в (8), находим $U_0 = E$,

$$I_0 = \frac{E}{Z_y} = E \sqrt{\frac{G}{R}},$$

$$N_0 = N_l = -1;$$

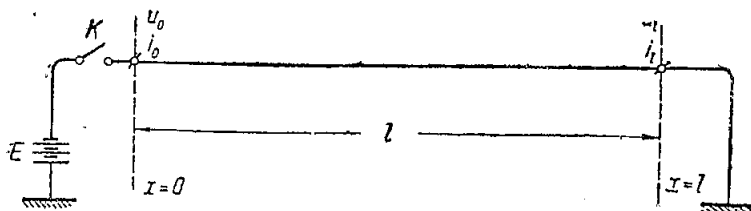
формулы же (7) получают следующий вид:

$$u = E \frac{e^{\beta(x-l)} - e^{-\beta(x-l)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}},$$

$$i = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(x-l)} + e^{-\beta(x-l)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}. \quad (9)$$

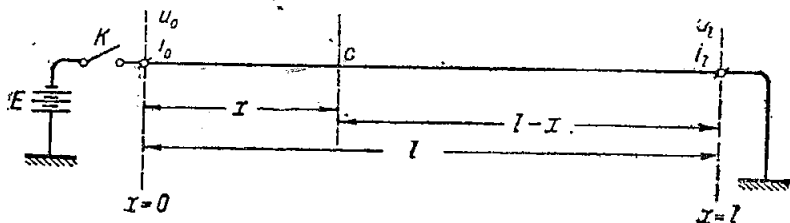
Разлагая указанным в предыдущем параграфе способом правые части приведенных формул в бесконечные ряды, получим

$$u = Ee^{-\beta x} - Ee^{-\beta l}e^{-\beta(l-x)} + Ee^{-2\beta l}e^{-\beta x} - Ee^{-3\beta l}e^{-\beta(l-x)} + \\ + Ee^{-4\beta l}e^{-\beta x} - Ee^{-5\beta l}e^{-\beta(l-x)} + Ee^{-6\beta l}e^{-\beta x} - \dots;$$



Фиг. 108.

$$i = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x} + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} e^{-\beta(l-x)} + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-2\beta l} e^{-\beta x} + \\ + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-3\beta l} e^{-\beta(l-x)} + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-4\beta l} e^{-\beta x} + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-5\beta l} e^{-\beta(l-x)} + \\ + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-6\beta l} e^{-\beta x} + \dots$$



Фиг. 109.

Графически эти ряды представлены кривыми фиг. 110 и 111. В случае бесконечно длинной линии вдоль последней движется только одна прямая (бегущая) волна

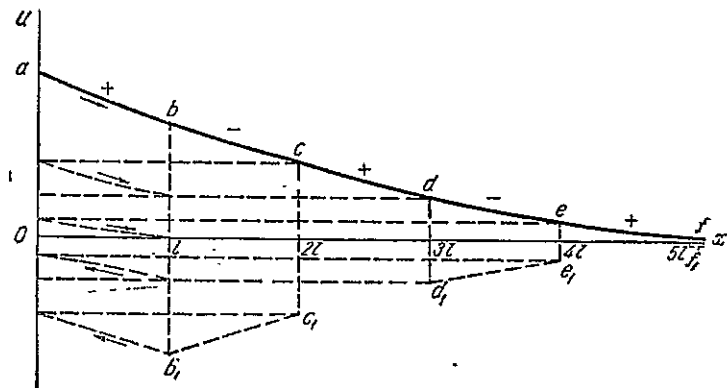
$$u = Ee^{-\beta x},$$

$$i = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x}.$$

The diagram shows a continuous beam of length $2l$ with three spans. The beam is supported at $x=0$, $x=l$, and $x=2l$. The load is triangular, with a peak at $x=l$. The beam profile is shown with dashed lines, and the load distribution is shown with solid lines. The reaction forces at the supports are indicated by arrows.

Diagram illustrating the forces and moments on a beam element of length L . The beam is divided into segments by points 1, 3, 5, 6, 4, 2. The horizontal axis is labeled x , with $x=0$ at the left end and $x=L$ at the right end. The vertical axis is labeled u . A horizontal line is labeled "линия". Arrows indicate internal forces and moments.

линии. Восстановим в конце каждого участка перпендикуляр и продолжим его до пересечения с кривой. Последняя разобьется на части: ab , bc , cd , de , ef и т. д. Повернем все четные части кривой напряжения на 180° , получим отрезки кривых b_1c_1 , d_1e_1 и т. д.

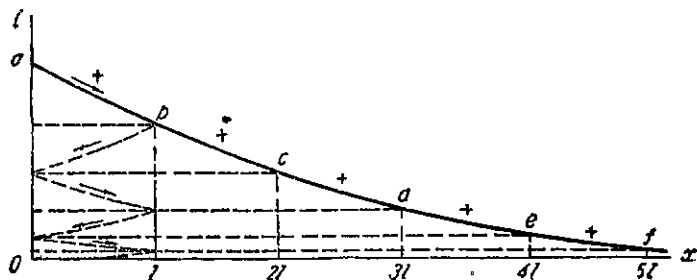


Сравним отрезки ab , b_1c_1 , cd , d_1c_1 , ef и т. д. (фиг. 112) с отдельными членами бесконечного ряда для напряжения и отрезки ab , bc , cd , ef и т. д. (фиг. 113) с отдельными членами бесконечного ряда для тока.

178

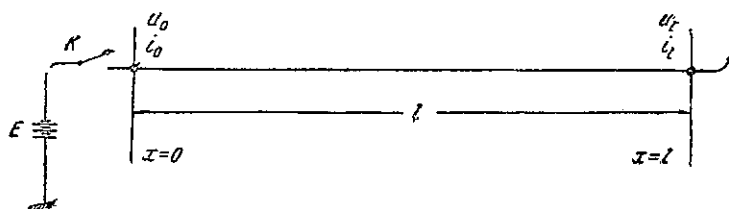
ния соответствуют отрезкам b_1c_1 , d_1e_1 и т. д., четные члены тока — отрезкам bc , de и т. д.

Иными словами, все нечетные отрезки кривых соответствуют нечетным членам бесконечных рядов, а четные отрезки — четным членам тех же рядов, причем знакам перед членами рядов соответствует определенное положение отрезков: положительным знакам — положение отрезка над осью абсцисс, отрицательным знаком — под осью абсцисс. Переносим все отрезки кривых на первый участок (фиг. 112 и 113),



Фиг. 113.

придем к графикам фиг. 110 и 111. Переходя к кривым тока и напряжения головной волны (пунктирные линии на фиг. 106 и 107), мы могли бы повторить только что описанные построения с кривыми устанавливающихся значений тока и напряжения. Получили бы график, аналогичный графикам фиг. 112 и 113. Процесс устанавливания заключался бы в соответствующем переходе от кривых графика для головной волны к кривым графика для установившихся значений тока и напряжения.



Фиг. 114.

Таким образом, для линии с нулевым сопротивлением в начале и конце ее (фиг. 108) имеется весьма легкая возможность построения устанавливающихся кривых тока и напряжения в любом пункте линии, если только известен процесс устанавливания электромагнитной волны вдоль той же линии, но бесконечной длины.

б) Линия с изолированным концом и нулевым сопротивлением в начале (фиг. 114)

Так как в рассматриваемом случае $R_0 = 0$ и $R_l = \infty$, то $N_0 = -1$, $N_l = 1$, $U_0 = E$, $I_0 = \frac{E}{Z_v} = E \sqrt{\frac{G}{R}}$ и формулы (7) распределения

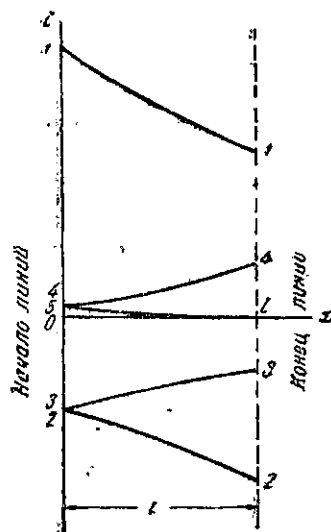
вдоль линии напряжения и тока примут следующий вид:

$$u = E \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}},$$

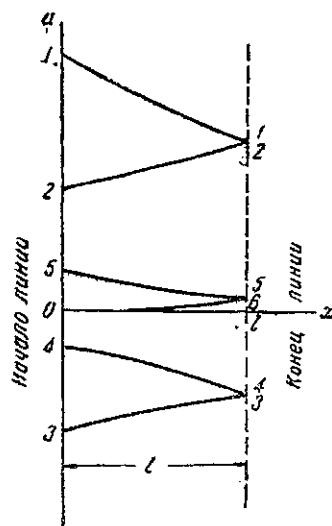
$$i = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}. \quad (10)$$

Разлагая правые части в ряды, получим

$$u = Ee^{-\beta x} + Ee^{-\beta l}e^{-\beta(l-x)} - Ee^{-2\beta l}e^{-\beta x} - Ee^{-3\beta l}e^{-\beta(l-x)} + \\ + Ee^{-4\beta l}e^{-\beta x} + Ee^{-5\beta l}e^{-\beta(l-x)} - Ee^{-6\beta l}e^{-\beta x} - \dots;$$



Фиг. 115.



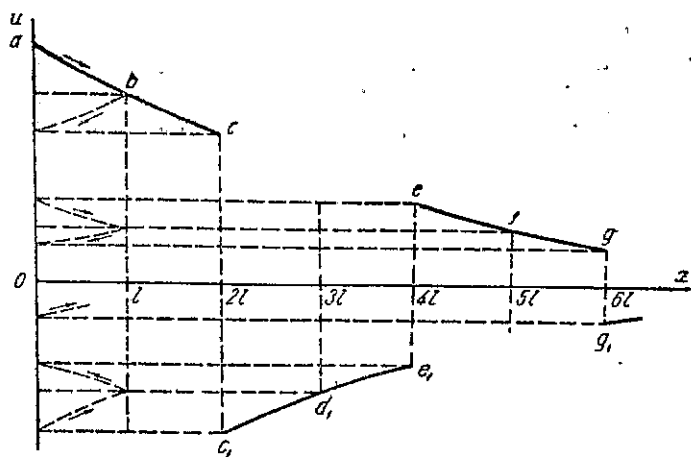
Фиг. 116.

$$i = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x} - E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} e^{-\beta(l-x)} - E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-2\beta l} e^{-\beta x} + \\ + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-3\beta l} e^{-\beta(l-x)} + \\ + E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-4\beta l} e^{-\beta x} - E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-5\beta l} e^{-\beta(l-x)} - \\ - E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-6\beta l} e^{-\beta x} + \dots$$

Трафически эти ряды представляются кривыми фиг. 115 и 116. Построим кривую установившихся значений напряжения и тока вдоль бесконечно длинной линии, нанесем вдоль нее участки, по длине равные рассматриваемой линии, и перевернем соответствующие отрезки кривой согласно знакам у членов приведенных бесконечных рядов (фиг. 117 и 118).

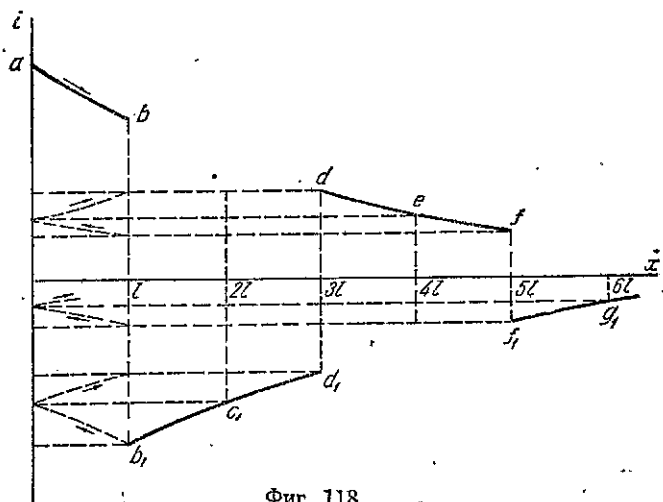
Переносим их на первый участок, придём к графикам фиг. 115 и 116. То же можем проделать и с кривыми напряжения и тока головной волны.

Приведенные примеры показывают, что кривые распределения напряжения и тока вдоль бесконечно длинной линии в процессе их уста-



Фиг. 117.

навливания являются основными, что, исходя из них, не трудно построить более сложные кривые, соответствующие разного ряда частным случаям конечной линии с полным отражением волны от концов линии.



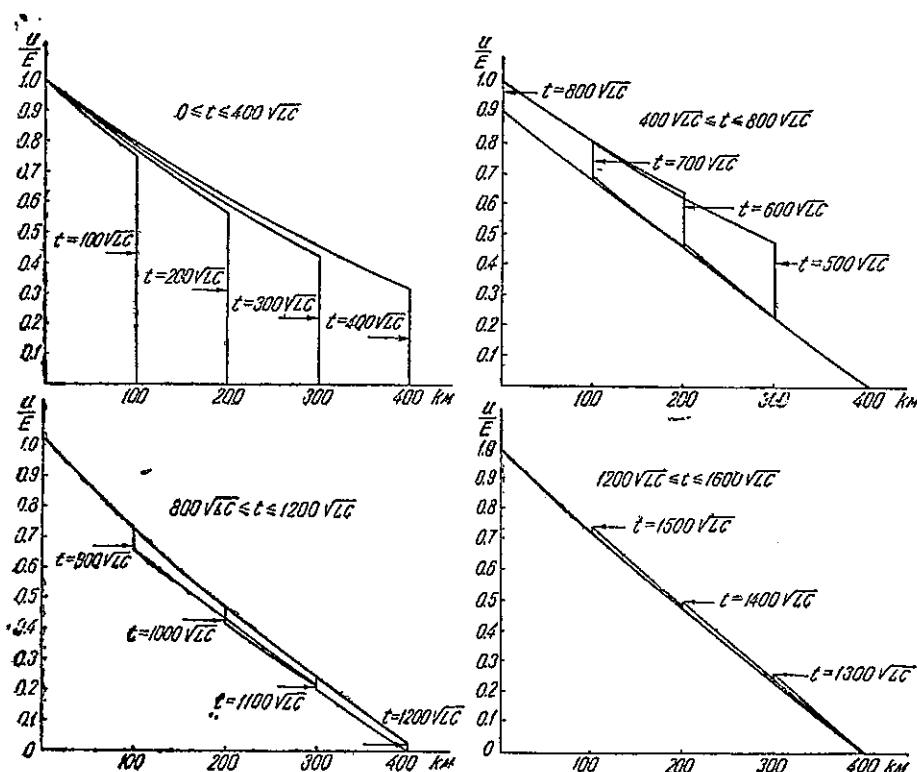
Фиг. 118.

Пользуясь произведенным анализом, попытаемся на основе приведенных выше приближенных формул бегущей волны вывести соответствующие формулы для устанавливающихся напряжения и тока вдоль линии с полным отражением волны от ее концов.

§ 3. Вывод формул для устанавливающихся напряжения и тока вдоль линии с полным отражением волны от ее концов на основе законов отражения электромагнитной волны

а) Линия с нулевыми сопротивлениями на ее концах

Выберем на линии какой-либо пункт C (фиг. 109), находящийся от начала линии на расстоянии x ; очевидно, что первая прямая волна выражается теми же формулами, что и волна вдоль бесконечно длинной линии. Влияние этой одиночной первой волны в пункте C будет



Фиг. 119.

сказываться до тех пор, пока до этого пункта не дойдет первая, отраженная от конца линии волна. С этого момента в пункте C будет сказываться одновременное влияние двух волн: первой прямой плюс первой отраженной.

Обозначим через T время пробега волною всей длины рассматриваемой линии; тогда одиночное действие первой прямой волны на пункте C будет сказываться в пределах времени, выражаемых неравенством

$$t_0 \leq t \leq 2T - t_0.$$

Таким образом, первая прямая волна в указанных пределах времени для пункта C выражается формулами

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= E [e^{-\beta x_0} + e^{-\delta u(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})], \\ \vec{i}_1 &= E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta i(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Действие на пункт C первой отраженной волны начнется с момента времени $t = 2T - t_0$, причем длина пройденного волною пути от начала нажатия ключа равна $2l - x_0$. Действие этой волны, совместное только с первой прямой волной, продолжается до тех пор, пока отраженная от начала линии волна (вторая прямая волна) не достигнет рассматриваемого пункта линии C , т. е. в пределах времени

$$2T - t_0 \leq t \leq 2T + t_0.$$

Начиная с момента времени $t = 2T + t_0$ на пункт C действуют совместно три волны: первая прямая, плюс первая отраженная, плюс вторая прямая.

Итак, в установленных пределах времени мы имеем первую отраженную волну, выражаемую формулами

$$\begin{aligned} \overleftarrow{u}_1 &= E \{ e^{-\beta(2l-x_0)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2l-x_0)}] \}, \\ \overleftarrow{i}_1 &= E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l-x_0)} + e^{-\delta i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l-x_0)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким же путем найдем, что в пределах времени

$$2T + t_0 \leq t \leq 4T - t_0$$

вторая прямая волна определится формулами

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= E \{ e^{-\beta(2l+x)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2l+x)}] \}, \\ \vec{i}_2 &= E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l+x)} + e^{-\delta i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l+x)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Вторая обратная волна для пункта C в пределах

$$4T - t_0 \leq t \leq 4T + t_0$$

будет

$$\begin{aligned} \overleftarrow{u}_2 &= -E \{ e^{-\beta(4l-x_0)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(4l-x)}] \}, \\ \overleftarrow{i}_2 &= E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(4l-x_0)} + e^{-\delta i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(4l-x)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Для n -ой прямой волны в пределах времени

$$2(n-1)T + t_0 \leq t \leq 2nT - t_0$$

имеем

$$\vec{u}_n = E \{ e^{-\beta(2nl-2l+x)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2nl-2l+x_0)}] \},$$

$$\begin{aligned} \vec{(i)}_n = & E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl - 2l + x_0)} + \right. \\ & \left. + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl - 2l + x_0)} \right] \right\}; \end{aligned}$$

для n -ой обратной волны в пределах

$$2nT - t_0 \leq t \leq 2nT + t_0$$

получим

$$\overleftarrow{(u)}_n = -E \left\{ e^{-\beta(2nl - x_0)} + e^{-\delta_u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2nl - x_0)}] \right\},$$

$$\overleftarrow{(i)}_n = E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl - x_0)} + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl - x_0)} \right] \right\}.$$

Сумма всех n прямых волн в пределах времени

$$2(n-1)T + t_0 \leq t \leq 2nT - t_0$$

выразится формулой

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \vec{(u)}_k = & E [e^{-\beta x_0} + e^{-\beta(2l + x_0)} + e^{-\beta(4l + x_0)} + \\ & + e^{-\beta(6l + x_0)} + \dots + e^{-\beta(2nl - 2l + x_0)}] + \\ & + En e^{-\delta_u(t-t_0)} e^{-\beta t_0} - E e^{-\delta_u(t-t_0)} [e^{-\beta x_0} + e^{-\beta(2l + x_0)} + \\ & + e^{-\beta(4l + x_0)} + e^{-\beta(6l + x_0)} + \dots + e^{-\beta(2nl - 2l + x_0)}] = \\ = & E \left[\frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_u(t-t_0)} \left(n e^{-bt_0} - \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \vec{(i)}_k = & E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} + \right. \\ & \left. + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left(n \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Сумма всех n обратных волн в пределах

$$2nT - t_0 \leq t \leq 2nT + t_0$$

выразится формулами

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \overleftarrow{(u)}_k = & -E \left\{ \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l - x_0)} + \right. \\ & \left. + e^{-\delta_u(t-t_0)} \left[n e^{-bt_0} - \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l - x_0)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \overleftarrow{(i)}_k = & E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l - x_0)} + \right. \\ & \left. + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left[n \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l - x_0)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Общая сумма всех n прямых и n обратных волн в пределах

$$2nT - t_0 \leq t \leq 2nT + t_0$$

равна

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{u} + \overleftarrow{u})_k = E \left\{ \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} [e^{-\beta x_0} - e^{-\beta (2l - x_0)}] - \right. \\ \left. - e^{-\delta_H(t - t_0)} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} [e^{-\beta x_0} - e^{-\beta (2l - x_0)}] \right\} = \\ = E \frac{e^{\beta(l - x_0)} - e^{-\beta(l - x_0)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} (1 - e^{-2n\beta l}) [1 - e^{-\delta_H(t - t_0)}];$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{i} + \overleftarrow{i})_k = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(l - x_0)} + e^{-\beta(l - x_0)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} (1 - e^{-2n\beta l}) [1 - e^{-\delta_H(t - t_0)}].$$

Таблица 18

Распределение напряжения $\frac{u}{E}$ вдоль железной однопроводной 5-миллиметровой линии, длиной в 400 км накоротко замкнутой в конце

$\frac{t}{\sqrt{LC}}$ \diagdown $x_0, \text{ км}$	0	100	200	300	400
0	{ 0 1	—	—	—	—
100	1	{ 0 0.7483	—	—	—
200	1	0.7641	{ 0 0.5599	—	—
300	1	0.7767	0.5837	{ 0 0.4190	—
400	1	0.7867	0.6029	0.4459	{ 0 0.3135
500	1	0.7948	0.6184	{ 0.4677 0.2332	0
600	1	0.8011	{ 0.6308 0.4553	0.2257	0
700	1	{ 0.8062 0.6748	0.4425	0.2192	0
800	{ 0.9017 1	0.6588	0.4314	0.2135	0
900	1	{ 0.6451 0.7186	0.4219	0.2083	0
1000	1	0.7213	{ 0.4137 0.4687	0.2042	0
1100	1	0.7237	0.4736	{ 0.2005 0.2417	0
1200	1	0.7259	0.4781	0.2486	{ 0.0308 0
1300	1	0.7277	0.4820	{ 0.2546 0.2315	0
1400	1	0.7293	{ 0.4855 0.4683	0.2302	0
1500	1	{ 0.7308 0.7179	0.4661	0.2290	0

Таблица 19

Распределение тока $\left(\frac{I}{I_{0\infty}}\right)$ вдоль железной однопроводной 5-миллиметровой линии, длиной в 400 км, накоротко замкнутой в конце

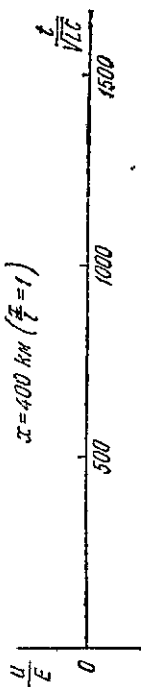
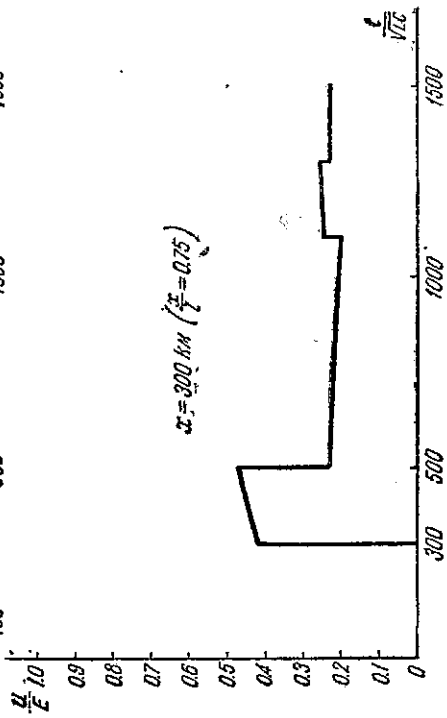
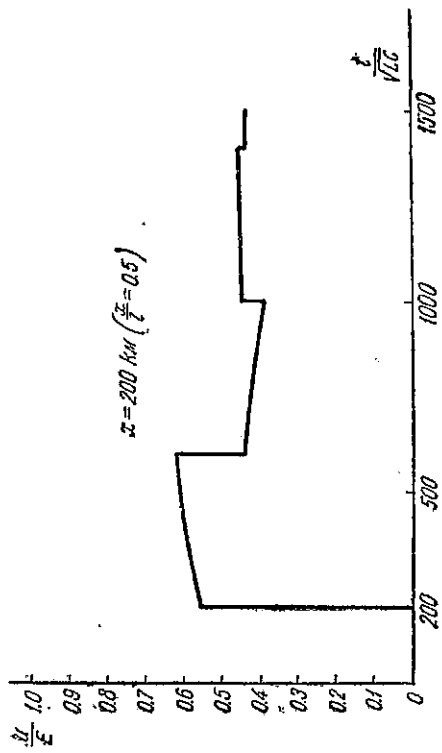
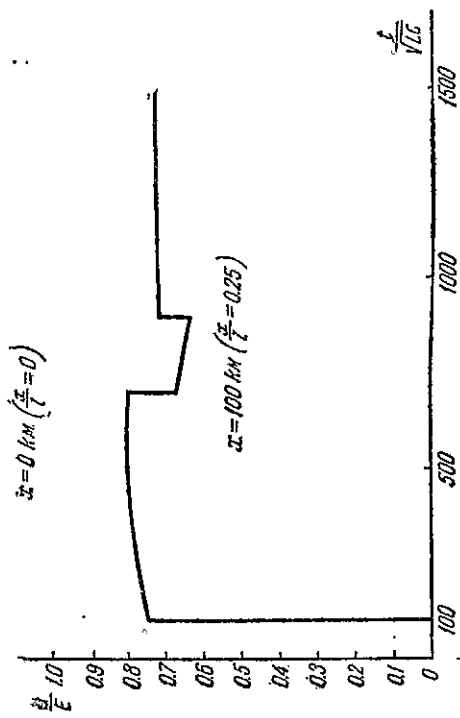
x_0 , км $\frac{t}{\sqrt{LC}}$	0	10	200	300	400
0	{ 0 2.645	—	—	—	—
100	2.159	{ 0 1.978	—	—	—
200	1.817	1.650	{ 0 1.480	—	—
300	1.575	1.415	1.261	{ 0 1.108	—
400	1.406	1.247	1.101	0.9635	{ 0.8291 1.656
500	1.286	1.127	0.9858	{ 0.8571 1.478	1.472
600	1.201	1.041	{ 0.9024 1.367	1.342	1.334
700	1.142	{ 0.9796 1.334	1.272	1.240	1.230
800	{ 1.100 1.640	1.270	1.201	1.165	1.154
900	1.572	{ 1.223 1.417	1.149	1.109	1.097
1000	1.536	1.378	{ 1.111 1.253	1.068	1.054
1100	1.510	1.350	1.225	{ 1.037 1.146	1.023
1200	1.490	1.330	1.205	1.126	{ 1.080 1.162
1300	1.476	1.324	1.190	{ 1.110 1.172	1.151
1400	1.465	1.302	{ 1.179 1.224	1.164	1.144
1500	1.460	{ 1.294 1.328	1.220	1.161	1.139

Для вполне установившегося процесса $n=\infty$ и $t=\infty$, в этом случае имеем

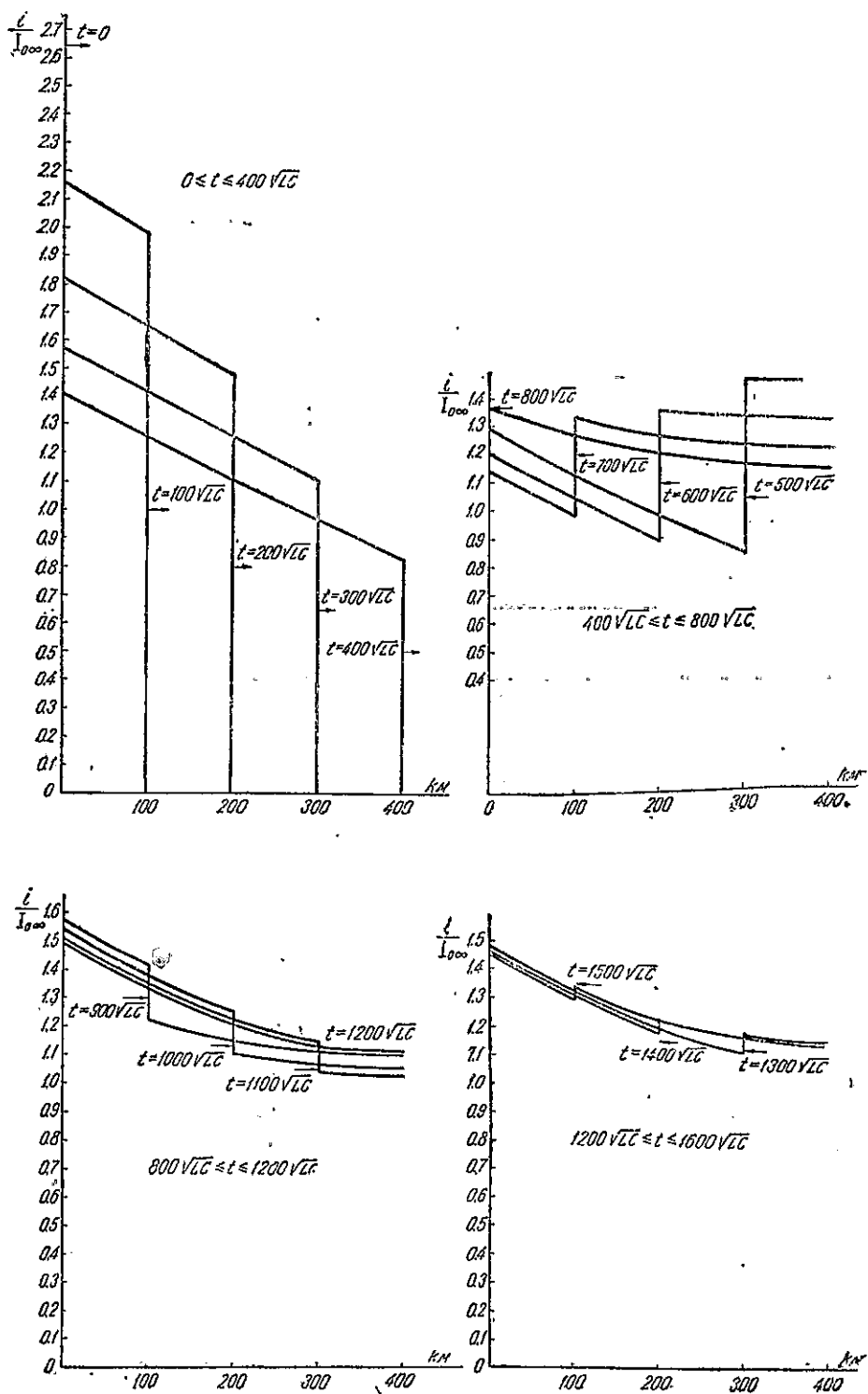
$$u_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} (\vec{u} + \overleftarrow{u})_k = E \frac{e^{\beta(l-x_0)} - e^{-\beta(l-x_0)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}},$$

$$i_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} (\vec{i} + \overleftarrow{i})_k = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(l-x_0)} + e^{-\beta(l-x_0)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}.$$

На основании всего изложенного легко построить графики, рисующие картину распространения электромагнитной волны вдоль линии в процессе установивания. Взяв линию с теми же первичными параметрами, что и для разобранных примеров главы I, вычислим табл. 18 и 19 распре-

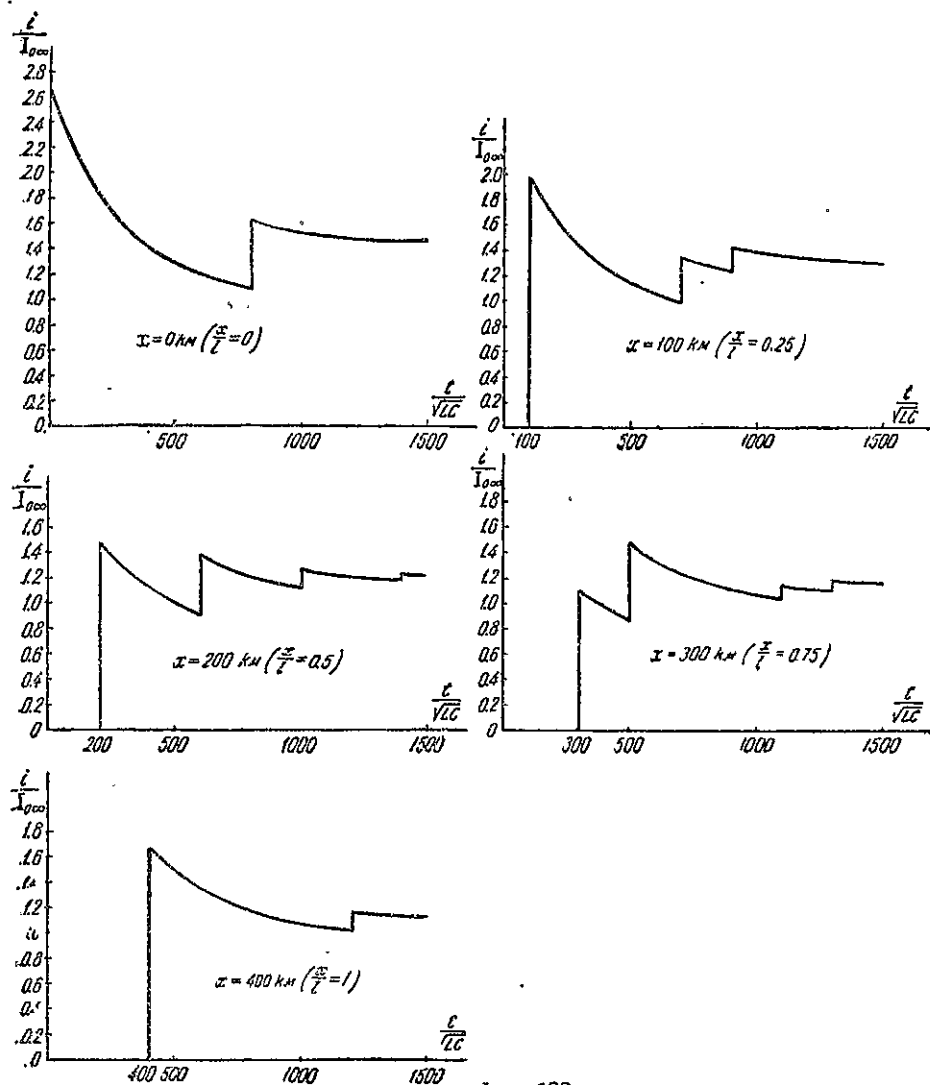


Фиг. 120.



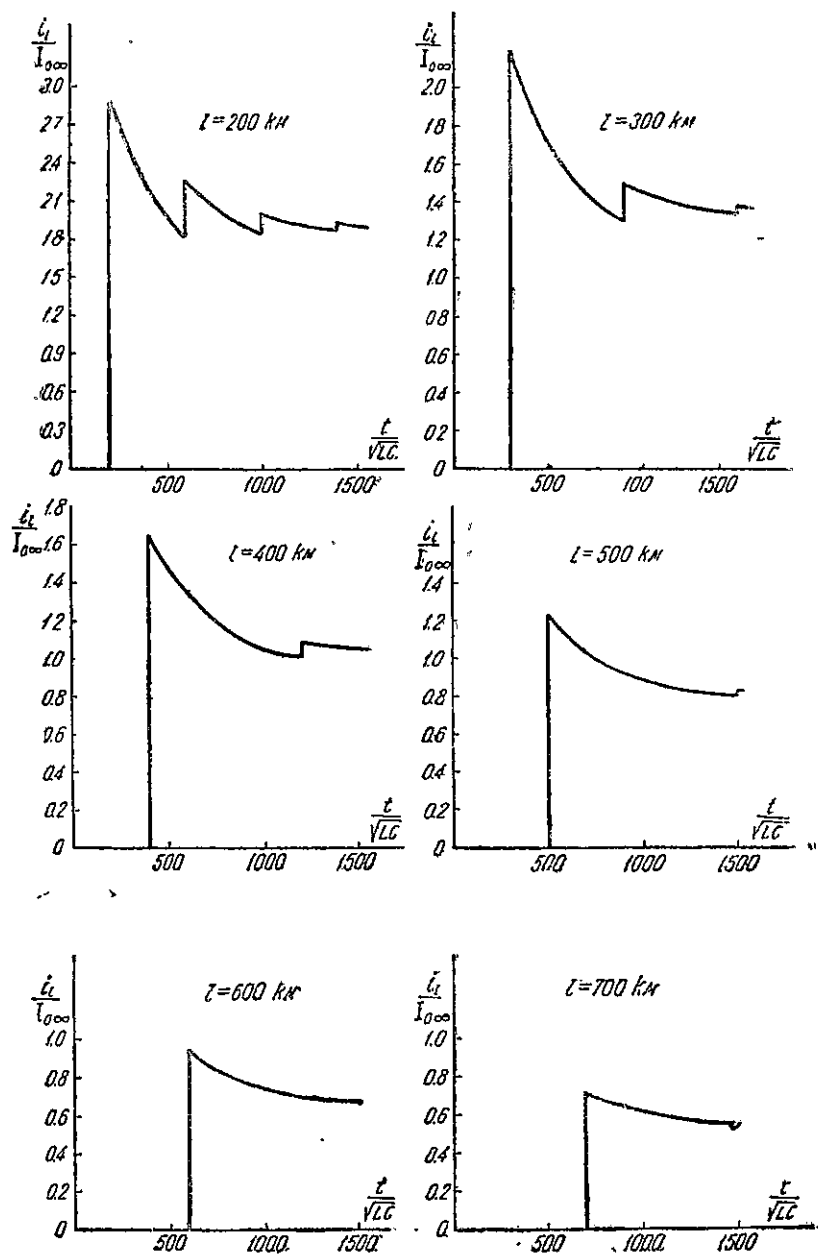
Фиг. 121.

деления устанавливающегося напряжения и тока вдоль линии длиной $l=400$ км, а по ним построим графики фиг. 119—122. Графики фиг. 119 и 121 иллюстрируют движение вдоль линии напряжения и тока волны, отражения последней от начала и конца линии, суммирование прямых и отраженных волн, приближения электромагнитной волны к ее установившемуся состоянию. Графики фиг. 120 и 122 иллюстрируют процессы



Фиг. 122.

устанавливания напряжения и тока в разных пунктах линии, влияния отраженных от концов линии волн на процессы устанавливания, процесс приближения напряжения и тока к их установившемуся состоянию. Графики эти приведены для линии с определенной длиной (400 км). Желая показать влияние длины линии на процесс устанавливания тока



Фиг. 123.

в конце линии, приводим табл. 20, вычисленную для различных длин линии (от 100 до 700 км), и графики фиг. 123, показывающие, что на процесс устанавливания тока в конце линии влияют главным образом первые отраженные волны и что с увеличением длины линии влияние дальнейших отраженных волн быстро падает. Для рассматриваемой линии, начиная с 500 км, влиянием первой отраженной от начала линии

Т а б л и ц а 20

Влияние длины линии на процесс устанавливания тока в конце на коротко замкнутой однопроводной железной 5-миллиметровой линии с нулевым сопротивлением в начале

$\frac{t}{\sqrt{LC}}$ \diagdown $l, \text{ км}$	100	200	300	400	500	600	700
0	—	—	—	—	—	—	—
100	{ 0 3.956	—	—	—	—	—	—
200	3.300	{ 0 2.960	—	—	—	—	—
300	{ 2.830 3.938	2.522	{ 0 2.216	—	—	—	—
400	3.461	2.202	1.927	{ 0 1.658	—	—	—
500	{ 3.111 3.731	1.971	1.714	1.471	{ 0 1.241	—	—
600	3.423	{ 1.805 2.269	1.559	1.333	1.124	{ 0 0.9292	—
700	{ 3.199 3.554	2.113	1.444	1.230	1.037	0.8594	{ 0 0.7094
800	3.371	1.939	1.359	1.153	0.9704	0.8062	0.6678
900	{ 3.237 3.431	1.915	{ 1.298 1.492	1.094	0.9208	0.7656	0.6354
1000	3.329	{ 1.854 1.996	1.444	1.054	0.8834	0.7346	0.6104
1100	{ 3.253 3.362	1.951	1.408	1.023	0.8548	0.7110	0.5912
1200	3.310	1.919	1.381	{ 0.9988 1.080	0.8338	0.6932	0.5764
1300	{ 3.271 3.332	1.876	1.361	1.067	0.8178	0.6794	0.5648
1400	3.308	{ 1.878 1.924	1.347	1.056	0.8060	0.6688	0.5558
1500	{ 3.290 3.324	1.915	{ 1.336 1.371	1.048	{ 0.7966 0.8307	0.6608	0.5490

волной (вторая прямая волна) уже можно пренебречь. С этим придется особенно считаться при учете влияния приемника в конце линии на устанавливающиеся вдоль нее электромагнитные процессы.

б) Линия с изолированным концом и нулевым сопротивлением в начале (фиг. 114)

Следуя методу, развитому в предыдущем параграфе, придем к следующим результатам.

Первая прямая волна для пункта С (фиг. 123а) в пределах времени

$$t_0 \leq t \leq 2T - t_0$$

выражается формулами

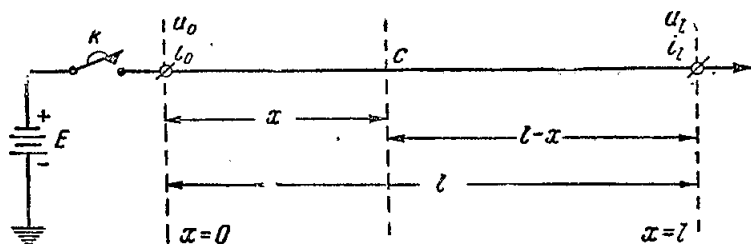
$$\begin{aligned}\overrightarrow{(u)}_1 &= E [e^{-\beta x_0} + e^{-\delta u(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})], \\ \overrightarrow{(i)}_1 &= E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta i(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \right].\end{aligned}$$

Первая обратная волна для пункта C в пределах времени

$$2T - t_0 \leq t \leq 2T + t_0$$

равна

$$\begin{aligned}\overleftarrow{(u)}_1 &= E \{ e^{-\beta(2l-x_0)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2l-x_0)}] \}, \\ \overleftarrow{(i)}_1 &= -E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l-x_0)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\delta i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l-x_0)} \right] \right\}.\end{aligned}$$



Фиг. 123 а.

Вторая прямая волна для пункта C в пределах времени

$$2T + t_0 \leq t \leq 4T - t_0$$

равна

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(u)}_2 &= -E \{ e^{-\beta(2l+x_0)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2l+x_0)}] \}, \\ \overrightarrow{(i)}_2 &= -E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l+x_0)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\delta i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2l+x_0)} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Вторая обратная волна для пункта C в пределах времени

$$4T - t_0 \leq t \leq 4T + t_0$$

равна

$$\begin{aligned}\overleftarrow{(u)}_2 &= -E \{ e^{-\beta(4l-x_0)} + e^{-\delta u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(4l-x_0)}] \}, \\ \overleftarrow{(i)}_2 &= E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(4l-x_0)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\delta i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(4l-x_0)} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Для n -ой прямой волны в пределах времени

$$2(n-1)T + t_0 \leq t \leq 2nT - t_0$$

имеем

$$\vec{(u)}_n = -(-1)^n E \{ e^{-\beta(2nl-2l+x_0)} + e^{-\delta_u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2ln-2l+x_0)}] \},$$

$$\begin{aligned} \vec{(i)}_n = & -(-1)^n E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl-2l+x_0)} + \right. \\ & \left. + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl-2l+x_0)} \right] \right\}; \end{aligned}$$

для n -ой обратной волны в пределах времени

$$2nT - t_0 \leq t \leq 2nT + t_0$$

получим

$$\vec{(u)}_n = -(-1)^n E \{ e^{-\beta(2nl-x_0)} + e^{-\delta_u(t-t_0)} [e^{-bt_0} - e^{-\beta(2nl-x_0)}] \},$$

$$\begin{aligned} \vec{(i)}_n = & +(-1)^n E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl-x_0)} + \right. \\ & \left. + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left[\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta(2nl-x_0)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Сумма всех прямых волн в пределах времени

$$n(n-1)T + t_0 \leq t \leq 2nT - t_0$$

при n четном определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \vec{(u)}_k = & E [e^{-\beta x_0} - e^{-\beta(2l+x_0)} + e^{-\beta(4l+x_0)} - e^{-\beta(6l+x_0)} + \dots - \\ & - (-1)^n e^{-\beta(2nl-2l+x_0)}] [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}] = \\ & = E \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}]; \end{aligned}$$

при n нечетном

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{(u)}_k = E \left\{ \frac{1 + e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}] + e^{-\delta_u(t-t_0)} e^{-bt_0} \right\}.$$

Подобным же образом находим для n четного

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{(i)}_k = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} [1 - e^{-\delta_i(t-t_0)}]$$

и для n нечетного

$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{(i)}_k = E \left\{ \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 + e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta x_0} [1 - e^{-\delta_i(t-t_0)}] + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\delta_i(t-t_0)} e^{-bt_0} \right\}.$$

Сумма всех n обратных волн в пределах

$$2nT - t_0 \leq t \leq 2nT + t_0$$

при n четном имеет вид

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overleftarrow{(u)}_k = E \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l-x_0)} [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overleftarrow{(i)}_k = -E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 - e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l-x_0)} [1 - e^{-\delta_i(t-t_0)}];$$

при n нечетном

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overleftarrow{(u)}_k = E \left\{ \frac{1 + e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l-x_0)} [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}] + e^{-\delta_u(t-t_0)} e^{-bt_0} \right\}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overleftarrow{(i)}_k = - \left\{ E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{1 + e^{-2n\beta l}}{1 + e^{-2\beta l}} e^{-\beta(2l-x_0)} [1 - e^{-\delta_i(t-t_0)}] + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\delta_i(t-t_0)} e^{-bt_0} \right\}.$$

Общая сумма всех n прямых и n обратных волн в пределах времени

$$2nT - t_0 \leq t \leq 2nT + t_0$$

при n четном равна

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{u} + \overleftarrow{u})_k = E \frac{e^{\beta(t-x_0)} + e^{-\beta(t-x_0)}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} (1 - e^{-2n\beta l}) [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{i} + \overleftarrow{i})_k = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(t-x_0)} - e^{-\beta(t-x_0)}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} (1 - e^{-2n\beta l}) [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}];$$

при n нечетном

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{u} + \overleftarrow{u})_k = E \left\{ \frac{e^{\beta(t-x)} + e^{-\beta(t-x)}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} (1 - e^{-2n\beta l}) [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}] + \right. \\ \left. + 2e^{-\delta_u(t-t_0)} e^{-bt_0} \right\},$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{i} + \overleftarrow{i})_k = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(t-x_0)} - e^{-\beta(t-x_0)}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} (1 - e^{-2n\beta l}) [1 - e^{-\delta_u(t-t_0)}].$$

Для вполне установившегося процесса $n=\infty$ и $t=\infty$ в этом случае имеем

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (\vec{u} + \overleftarrow{u})_k = u_1 = E \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{e^{+\beta l} + e^{-\beta l}},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (\vec{i} + \overleftarrow{i})_k = i_1 = E \sqrt{\frac{G}{R}} \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{+\beta l} + e^{-\beta l}}.$$

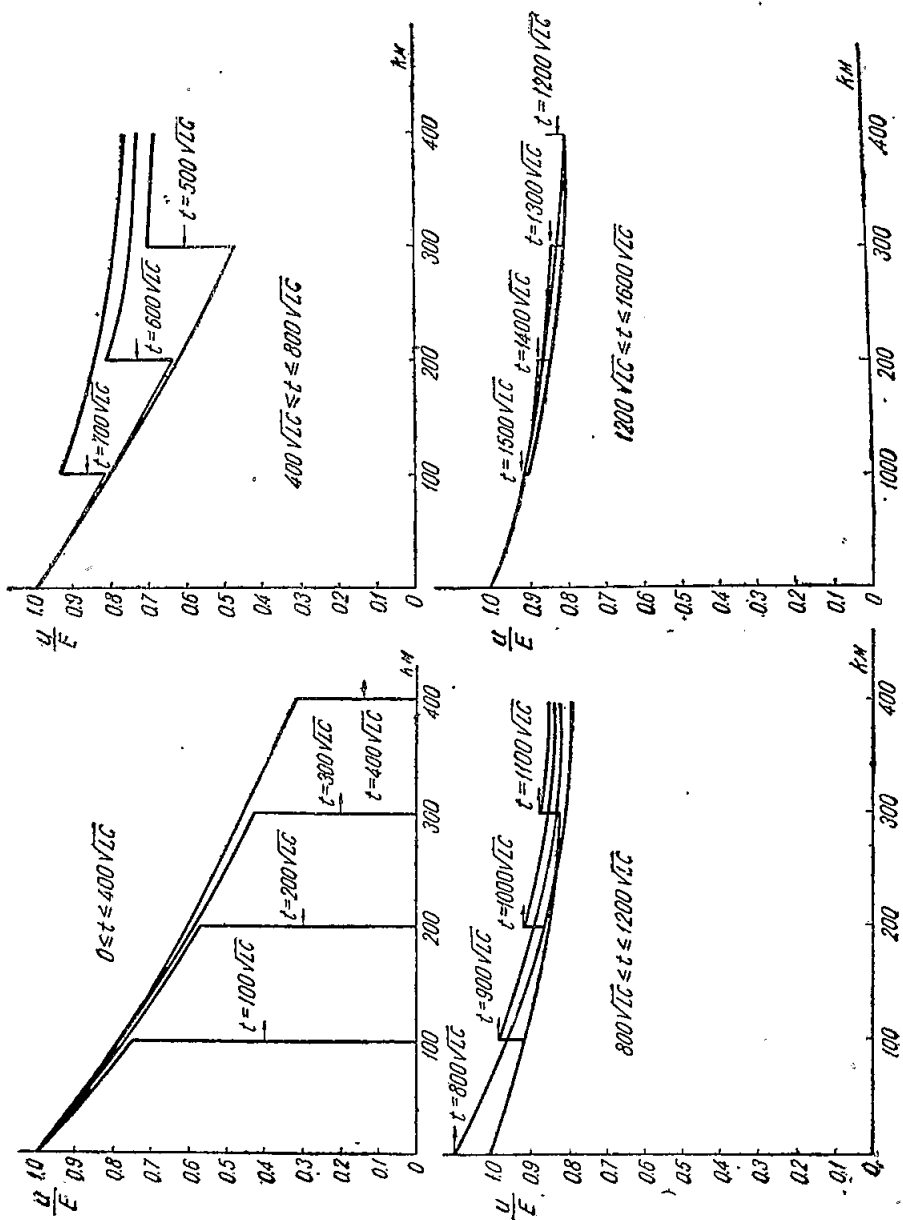
Взяв однопроводную железную 5-миллиметровую линию длиной 400 км, подсчитаем табл. 21, 22 и построим по ним графики фиг. 124—127.

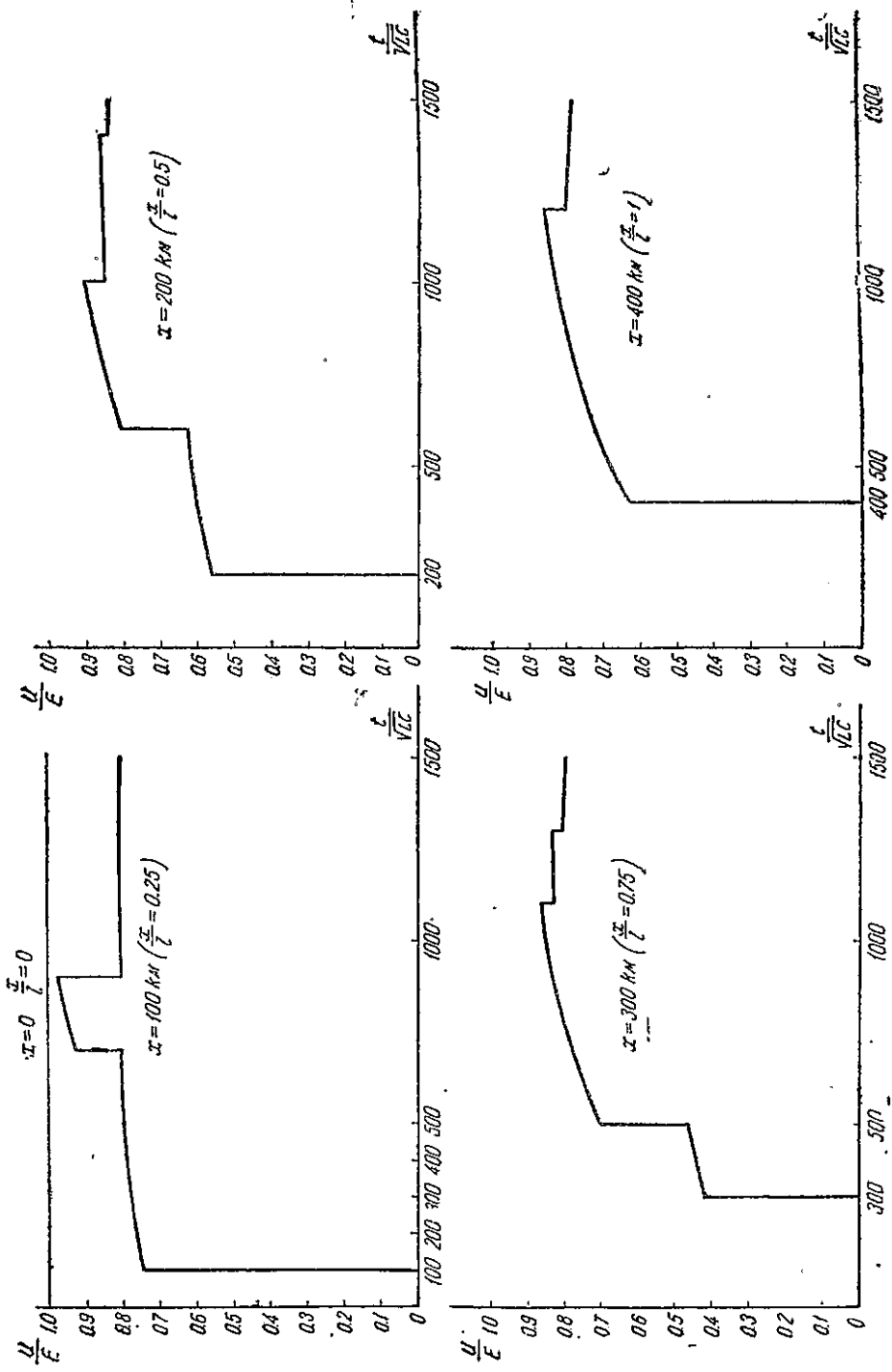
Таблица 21

Распределение напряжения $\left(\frac{u}{E}\right)$ вдоль железной однопроводной 5-миллиметровой линии, длиной в 400 км, изолированной в конце

$\frac{t}{\sqrt{LC}}$ \diagdown $x_0, \text{ км}$	0	100	200	300	400
0	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—
100	1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.7483 \end{Bmatrix}$	—	—	—
200	1	0.7641	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5599 \end{Bmatrix}$	—	—
300	1	0.7767	0.5837	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4170 \end{Bmatrix}$	—
400	1	0.7867	0.6029	0.4459	$\begin{Bmatrix} 0.3135 \\ 0.6270 \end{Bmatrix}$
500	1	0.7948	0.6184	$\begin{Bmatrix} 0.4677 \\ 0.7022 \end{Bmatrix}$	0.6810
600	1	0.8011	$\begin{Bmatrix} 0.6308 \\ 0.8055 \end{Bmatrix}$	0.7453	0.7252
700	1	$\begin{Bmatrix} 0.8062 \\ 0.9314 \end{Bmatrix}$	0.8391	0.7808	0.7616
800	$\begin{Bmatrix} 1.0983 \\ 1 \end{Bmatrix}$	0.9616	0.8664	0.8101	0.7916
900	1	$\begin{Bmatrix} 0.9819 \\ 0.9084 \end{Bmatrix}$	0.8889	0.8343	0.8162
1000	1	0.9107	$\begin{Bmatrix} 0.9077 \\ 0.8527 \end{Bmatrix}$	0.8540	0.8366
1100	1	0.9125	0.8562	$\begin{Bmatrix} 0.8705 \\ 0.8293 \end{Bmatrix}$	0.8532
1200	1	0.9135	0.8585	0.8326	$\begin{Bmatrix} 0.8570 \\ 0.8055 \end{Bmatrix}$
1300	1	0.9143	0.8602	$\begin{Bmatrix} 0.8352 \\ 0.8121 \end{Bmatrix}$	0.8001
1400	1	0.9147	$\begin{Bmatrix} 0.8611 \\ 0.8439 \end{Bmatrix}$	0.8068	0.7949
1500	1	$\begin{Bmatrix} 0.9150 \\ 0.9021 \end{Bmatrix}$	0.8389	0.8017	0.7899

Фиг. 124.





Фиг. 125

Таблица 22

Распределение тока $\left(\frac{i}{I_{0\infty}}\right)$ вдоль железной однопроводной 5-миллиметровой линии, длиной в 400 км, изолированной в конце

$x_0, \text{ км}$ $\frac{t}{\sqrt{LC}}$	0	100	200	300	400
0	{ 0 2.645	—	—	—	—
100	2.159	{ 0 1.978	—	—	—
200	1.817	1.650	{ 0 1.480	—	—
300	1.575	1.415	1.261	{ 0 1.08	—
400	1.406	1.247	1.101	0.9635	{ 0 0.8291
500	1.286	1.127	0.9858	{ 0.8571 0.2367	0
600	1.201	1.041	{ 0.9024 0.4382	0.2171	0
700	1.141	{ 0.9796 0.6249	0.4121	0.2034	0
800	{ 1.100 0.5778	0.6019	0.3948	0.1947	0
900	0.5694	{ 0.5871 0.3927	0.3833	0.1884	0
1000	0.5633	0.3857	{ 0.3760 0.2339	0.1849	0
1100	0.5603	0.3817	0.2274	{ 0.1823 0.0733	0
1200	0.5590	0.3800	0.2235	0.0690	0
1300	0.5588	0.3792	0.2209	{ 0.0659 0.1270	0
1400	0.5582	0.3791	{ 0.2194 0.2649	0.1284	0
1500	0.5580	{ 0.3794 0.4135	0.2676	0.1300	0

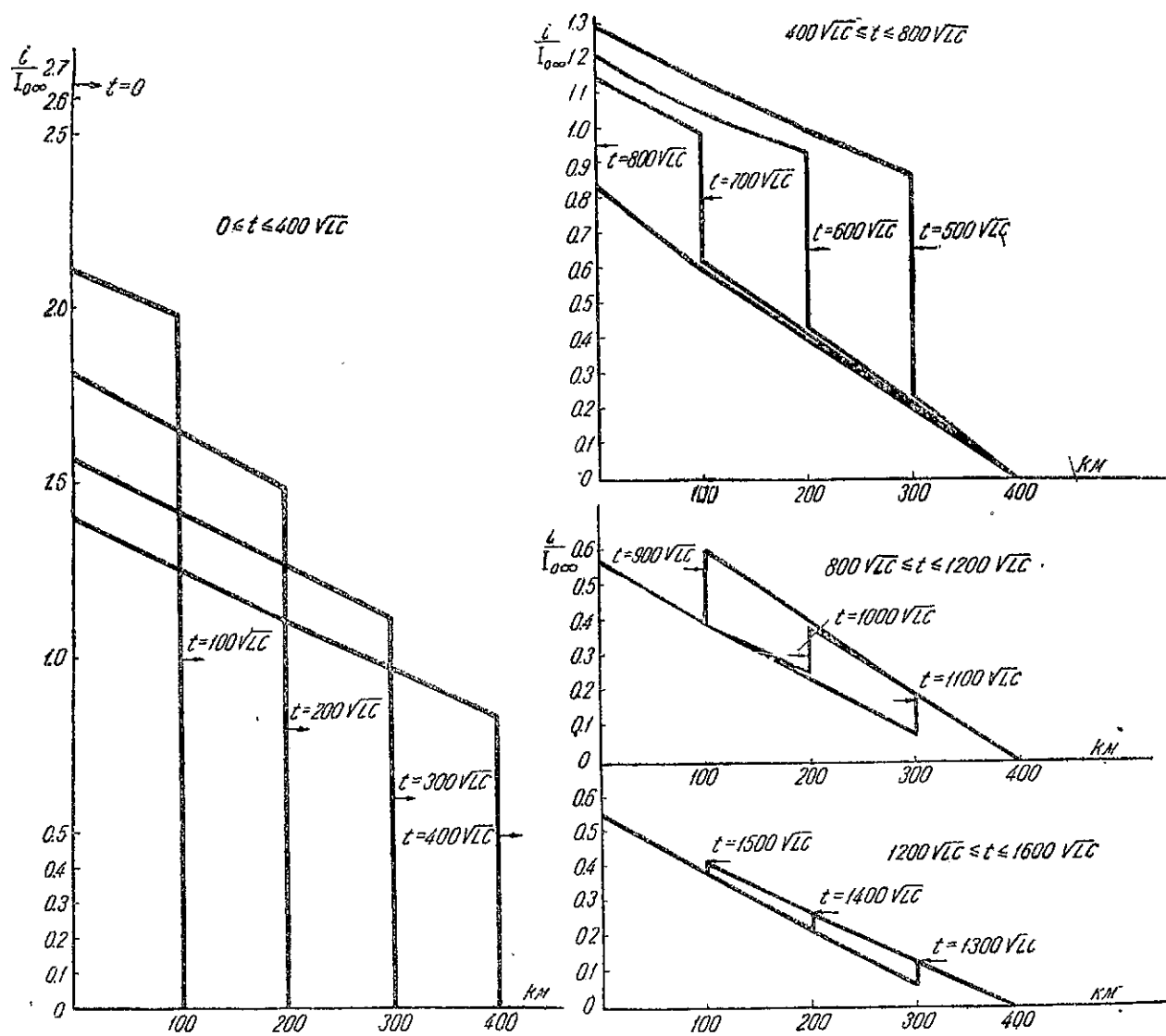
Графики фиг. 124 и 126. рисуют картину движения устанавливающейся волны вдоль линии, графики фиг. 125 и 127 — изменение напряжения и тока во времени для разных пунктов рассматриваемой линии.

§ 4. Линия конечной длины с неполным отражением волны от концов линии

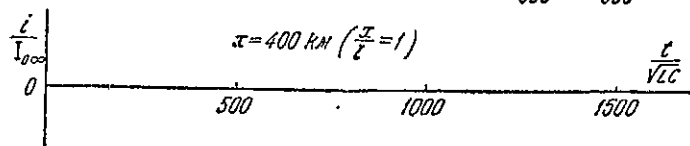
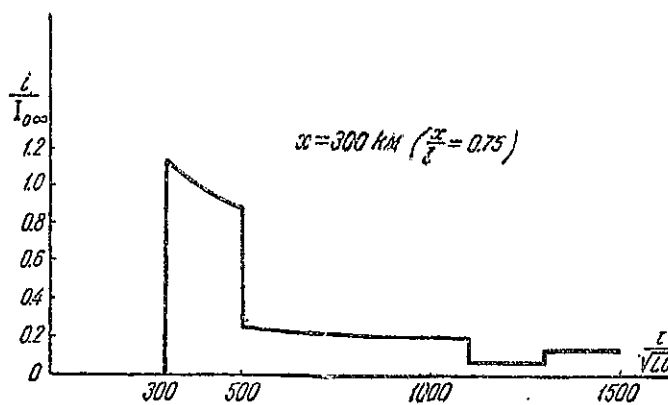
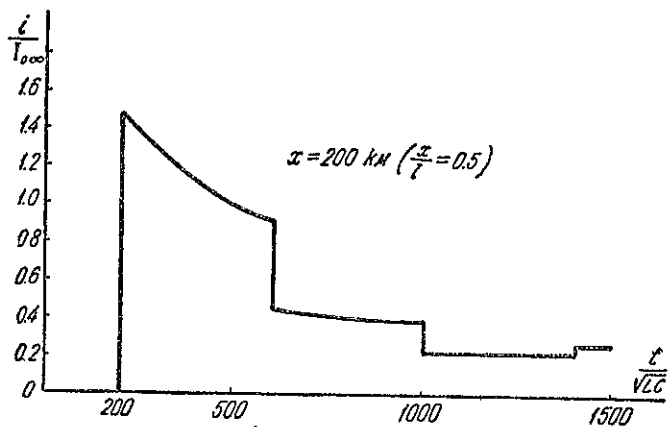
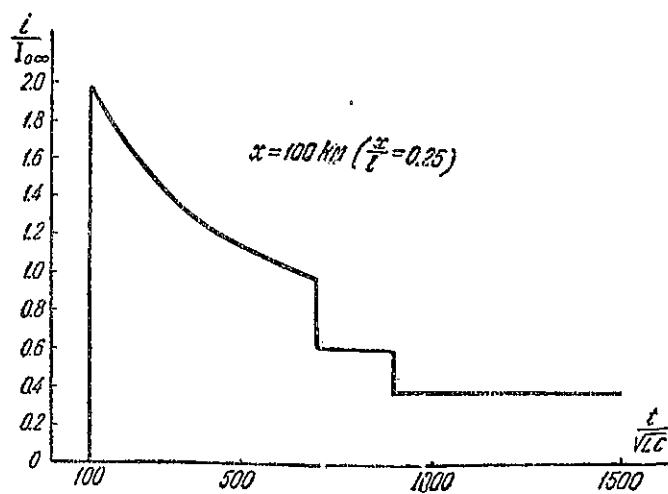
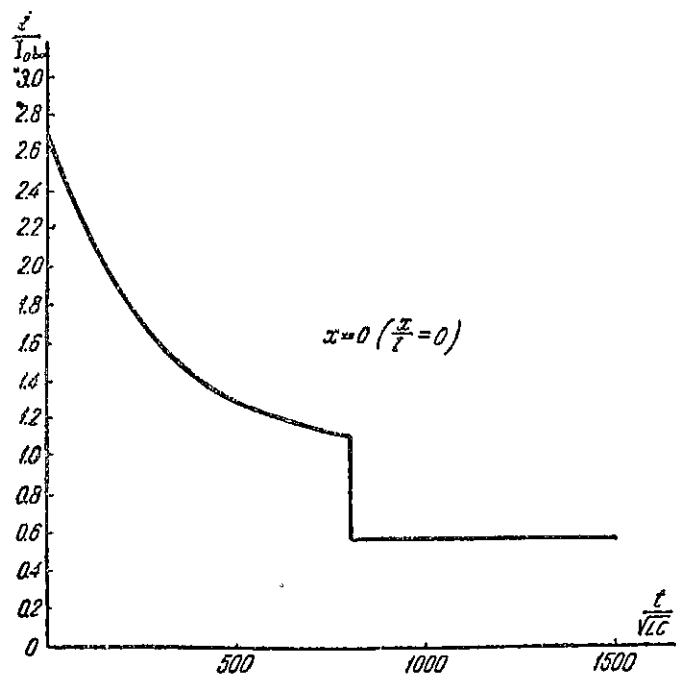
а) Линия с активным сопротивлением в конце (фиг. 128)

Обозначим напряжение и ток первой прямой волны в конце линии через $(\vec{u}_l)_1$ и $(\vec{i}_l)_1$, коэффициент отражения от сопротивления через N_l , тогда напряжение $(\vec{u}_l)_1$ и ток $(\vec{i}_l)_1$ отраженной волны будут равны

$$\begin{aligned}(\vec{u}_l)_1 &= N_l (\vec{u}_l)_1, \\ (\vec{i}_l)_1 &= -N_l (\vec{i}_l)_1,\end{aligned}$$



Фиг. 126.



Фиг. 127.

искомые же входные напряжения u_l и i_l в пределах времени $t_0 \leq t \leq 3t_0$ равны

$$u_l = (\vec{u}_l)_1 + N_l (\vec{u}_l)_1 = (1 + N_l) (\vec{u}_l)_1,$$

$$i_l = (\vec{i}_l)_1 - N_l (\vec{i}_l)_1 = (1 - N_l) (\vec{i}_l)_1.$$

С другой стороны, если сопротивление R_l — сопротивление, включенное в конце линии, то

$$u_l = i_l R_l,$$

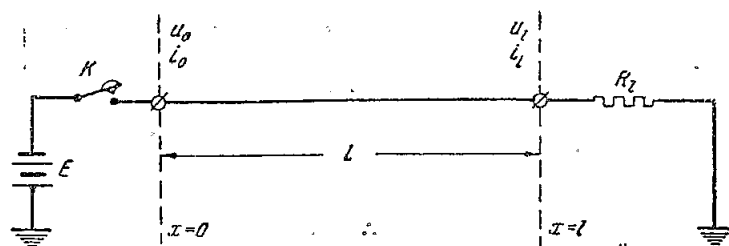
значит

$$u_l = (1 + N_l) (\vec{u}_l)_1 = (1 - N_l) (\vec{i}_l)_1 R_l,$$

где

$$(\vec{u}_l)_1 = E [e^{-\beta x_0} + e^{-\delta(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})],$$

$$(\vec{i}_l)_1 = E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right) \right].$$



Фиг. 128.

Производя соответствующую подстановку, находим

$$N_l = \frac{Z[R_l - Z_y - R_l e^{-\delta_i(t-t_0)} + Z_y e^{-\delta_u(t-t_0)}] e^{-\beta x_0} + Z_y [R_l e^{-\delta_i(t-t_0)} - Z e^{-\delta_u(t-t_0)}] e^{-bt_0}}{Z[R_l - Z_y - R_l e^{-\delta_i(t-t_0)} - Z_y e^{-\delta_u(t-t_0)}] e^{-\beta x_0} + Z_y [R_l e^{-\delta_i(t-t_0)} + Z e^{-\delta_u(t-t_0)}] e^{-bt_0}},$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}.$$

Таким образом, коэффициент отражения N_l , даже в случае включения на конце линии только сопротивления R_l , есть сложная функция от длины линии x_0 и времени t . При установившемся уже электромагнитном процессе в рассматриваемой цепи, т. е. для $t = \infty$, имеем известную уже нам формулу

$$N_l = \frac{R_l - Z_y}{R_l + Z_y}.$$

Зная формулу для коэффициента N_l , находим искомые u и i по приведенным выше формулам

$$u = (1 + N_l) (\vec{u}_l)_1, \quad i = (1 - N_l) (\vec{i}_l)_1.$$

б) Линия с электромагнитным приемником на конце (фиг. 129)

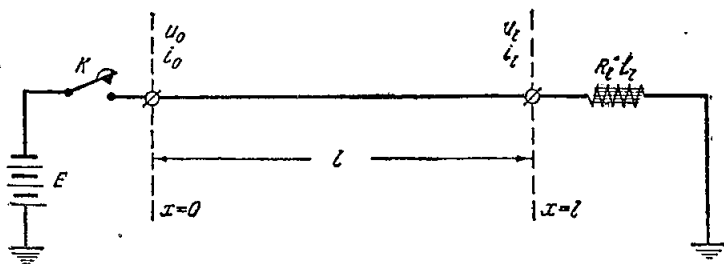
Так же как и в предыдущем пункте, пишем, что в пределах времени $t_0 \leq t \leq 3t_0$ входные на приемной станции напряжение u_l и ток i_l равны

$$u_l = (\vec{u}_l)_1 + N_l (\vec{u}_l)_1,$$

$$i_l = (\vec{i}_l)_1 - N_l (\vec{i}_l)_1,$$

и так как коэффициент отражения $N_l = \frac{(\vec{u}_l)_1}{(\vec{u}_l)_1}$, то

$$i_l = (\vec{i}_l)_1 - \frac{(\vec{i}_l)_1}{(\vec{u}_l)_1} (\vec{u}_l)_1.$$



Фиг. 129.

Отношение же напряжения $(\vec{u}_l)_1$ к току $(\vec{i}_l)_1$ представляет собой волновое сопротивление устанавливающейся электромагнитной волны. Обозначим его через Z_{l1} , тогда

$$Z_{l1} = \frac{(\vec{u}_l)_1}{(\vec{i}_l)_1} = \frac{e^{-\beta l} + e^{-\delta_u(t-t_0)}(e^{-bt_0} - e^{-\beta l})}{\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} \right)}.$$

Таким образом, входящий ток i_l может быть выражен следующим соотношением:

$$i_l = (\vec{i}_l)_1 - \frac{1}{Z_{l1}} (\vec{u}_l)_1.$$

Вообще же волновое сопротивление Z_b бегущей волны определяется формулой

$$Z_b = \frac{e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_u(t-t_0)}(e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})}{\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_i(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x} \right)}.$$

Так как в конце линии включен электромагнитный приемник с сопротивлением R_l и индуктивностью L_l , то

$$u_l = R_l i_l + L_l \frac{di_l}{dt}.$$

или
$$(\vec{u}_l)_1 + (\overleftarrow{u}_l)_1 = R_l \left[(\vec{i}_l)_1 + \frac{1}{Z_{l1}} (\vec{u}_l)_1 \right] + L_l \frac{d}{dt} \left[(\overleftarrow{i}_l)_1 - \frac{1}{Z_{l1}} (\overleftarrow{u}_l)_1 \right].$$

Обозначим

$$(\vec{u}_l)_1 = u_a, \quad (\overleftarrow{u}_l)_1 = u_b, \quad (\vec{i}_l)_1 = i_a,$$

тогда после некоторых преобразований получим

$$\frac{du_b}{dt} + \left[Z_{l1} \left(\frac{dG_{l1}}{dt} + \frac{1}{L_l} \right) + \frac{R_l}{L_l} \right] u_b + \frac{Z_{l1}}{L_l} \left(u_a - R_l i_a - L_l \frac{di_a}{dt} \right) = 0,$$

где

$$G_{l1} = \frac{1}{Z_{l1}} = (G_b)_{x_0=l}.$$

Проводимость G_b бегущей волны выражается формулой

$$G_b = \frac{1}{Z_b} = \frac{\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_l(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta x_0} \right)}{e^{-\beta x_0} + e^{-\delta_u(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta x_0})}.$$

Обозначим

$$Z_{l1} \left(\frac{dG_{l1}}{dt} + \frac{1}{L_l} \right) + \frac{R_l}{L_l} = f(t);$$

$$\frac{Z_{l1}}{L_l} \left(u_a - R_l i_a - L_l \frac{di_a}{dt} \right) = \varphi(t),$$

тогда

$$\frac{du_b}{dt} + f(t) u_b + \varphi(t) = 0. \quad (11)$$

Получили линейное уравнение, из которого находим искомую функцию u_b :

$$u_b = e^{-\int f(t) dt} \left\{ -\int [\varphi(t) e^{\int f(t) dt}] dt + A \right\}, \quad (11)$$

где A — постоянная интегрирования.

в) Волновое сопротивление и проводимость бегущей волны

В выражения для функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ входят сопротивление Z_{l1} и проводимость G_{l1} ; необходимо рассмотреть их временную зависимость. Начнем с численного примера, для чего остановимся на 5-миллиметровой железной однородной линии, первичные параметры которой были приведены выше. Для общности будем рассматривать не Z_{l1} и G_{l1} , соответствующие линии длиной l км, а Z_b и G_b , соответствующие любому пункту бесконечно длинной линии. Пользуясь численными значениями параметров линии, приведенными выше, и формулами для Z_b и G_b , подсчитаем табл. 23 и 24, причем волновое сопротивление Z_b выражаем в долях от Z_y (т. е. подсчитываем отношение $\frac{Z_b}{Z_y}$, где Z_y — установившееся значение волнового сопротивления Z_b , равное $Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}$) и проводимость G_b в долях от $\frac{1}{Z_y}$ (т. е. вычисляем произведение $G_b Z_y$).

Таблица 23

Значения $\frac{Z_b}{Z_y}$ волнового сопротивления Z_b бегущей волны, выраженные

$$\text{в долях от } Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

$\frac{t}{\sqrt{LC}}$ \diagdown x_0 , км	0	100	200	300	400	500
0	0.3782	—	—	—	—	—
100	0.4632	0.3782	—	—	—	—
200	0.5504	0.4632	0.3782	—	—	—
300	0.6347	0.5491	0.4630	0.3782	—	—
400	0.7114	0.6328	0.5474	0.4628	0.3782	—
500	0.7779	0.7057	0.6274	0.5457	0.4627	0.3782
600	0.8325	0.7696	0.6990	0.6230	0.5438	0.4621
700	0.8758	0.8230	0.7612	0.6927	0.6191	0.5417
800	0.9092	0.8658	0.8133	0.7528	0.6862	0.6148
900	0.9341	0.8991	0.8555	0.8035	0.7443	0.6798
1000	0.9526	0.9251	0.8889	0.8445	0.7937	0.7356
1100	0.9662	0.9448	0.9157	0.8784	0.8342	0.7839
1200	0.9759	0.9589	0.9356	0.9052	0.8681	0.8235
1300	0.9829	0.9698	0.9513	0.9264	0.8946	0.8567
1400	0.9880	0.9777	0.9629	0.9428	0.9164	0.8834
1500	0.9915	0.9837	0.9718	0.9555	0.9333	0.9059

Таблица 24

Значения $G_b Z_y$ волновой проводимости G_b бегущей волны, выраженные

$$\text{в долях } \frac{1}{Z_y} = \sqrt{\frac{G}{R}}$$

$\frac{t}{\sqrt{LC}}$ \diagdown x_0 , км	0	100	200	300	400	500
0	2.645	—	—	—	—	—
100	2.159	2.645	—	—	—	—
200	1.817	2.159	2.645	—	—	—
300	1.575	1.821	2.160	2.645	—	—
400	1.406	1.584	1.826	2.161	2.645	—
500	1.286	1.417	1.594	1.833	2.161	2.645
600	1.201	1.299	1.430	1.605	1.839	2.164
700	1.142	1.215	1.314	1.444	1.615	1.846
800	1.100	1.155	1.230	1.328	1.457	1.626
900	1.071	1.112	1.169	1.245	1.344	1.471
1000	1.050	1.081	1.125	1.184	1.260	1.359
1100	1.035	1.058	1.092	1.138	1.199	1.275
1200	1.025	1.043	1.069	1.105	1.152	1.214
1300	1.017	1.031	1.051	1.079	1.118	1.167
1400	1.012	1.023	1.039	1.061	1.091	1.132
1500	1.009	1.017	1.029	1.047	1.071	1.104

Сравним цифры первого столбца ($x_0=0$) приведенных таблиц с соответствующими цифрами остальных столбцов. Мы замечаем, что все столбики начинаются одной и той же цифрой ($\frac{Z_b}{Z_y} = 0.3782$; $G_b Z_y = 2.645$), затем последующие цифры каждого столбца с небольшим отклонением повторяются. Наибольшее отклонение в приведенных таблицах приходится на последнюю цифру столбца $x_0 = 500$ км. Но и это наибольшее отклонение не достигает 5%. Отсюда естественно предположить, что если заменить приближенные формулы для измеренных Z_b и G_b точными, то все вертикальные столбцы будут повторяться. Это предположение не расходится с физикой движения бегущей волны. Почему волновое сопротивление в процессе устанавливания напряжения и тока бегущей волны должно отличаться для разных пунктов бесконечно длинной линии? Очевидно, что волновое сопротивление бесконечно длинной линии не должно зависеть от того, с какого пункта линии производится его измерение. Но если измеренное волновое сопротивление бегущей волны в процессе ее устанавливания выражается для всех пунктов линии одной и той же формулой, то, вместо общих формул для Z_b и G_b , соответствующих любому пункту линии, мы можем взять формулы, соответствующие одному какому-либо пункту линии, наиболее для нас удобному. Взяв, например, начало линии ($x_0=0$, $t_0=0$), получим

$$(G_b)_{x=0} = \sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta t}$$

$$(Z_b)_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta t}}$$

Переносим эти формулы на любой пункт линии, мы должны заменить в них t на $t-t_0$

$$G_b = \sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta(t-t_0)}, \quad (12)$$

$$Z_b = \frac{1}{\sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta(t-t_0)}}$$

причем временный показатель затухания δ должен выражаться формулой

$$\delta = \sqrt{\frac{C}{L} \frac{RC - LG}{2LC}} \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}}} = \frac{\sigma Z_y}{Z_y - Z},$$

где

$$\sigma = \frac{RC - LG}{2LC}.$$

В этом случае все вертикальные столбцы табл. 23 и 24 должны быть заменены первым столбцом, соответствующим началу линии ($x_0=0$).

Имеем:

для $t=t_0$

$$G_b = \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad Z_b = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

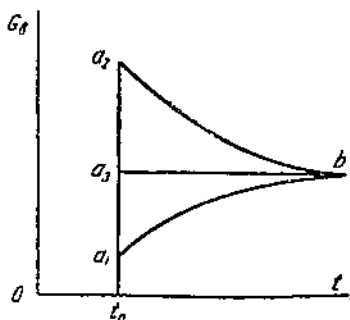
для $t = \infty$

$$G_b = \sqrt{\frac{G}{R}}, \quad Z_b = \sqrt{\frac{R}{G}}.$$

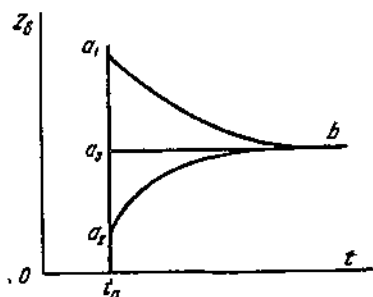
Таким образом, во времени волновая проводимость G_b меняется от начального значения $\sqrt{\frac{C}{L}}$ до конечного $\sqrt{\frac{G}{R}}$, и сопротивление Z_b — от $\sqrt{\frac{L}{C}}$ до $\sqrt{\frac{R}{G}}$; при этом соответствующие начальные касательные, очевидно, определяются из формул

$$\begin{aligned} \left(\frac{dG_b}{dt} \right)_{t=t_0} &= -\frac{RC - LG}{2LC} \sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{\sigma}{Z} u \left(\frac{dZ_b}{dt} \right)_{t=t_0} = \\ &= \frac{RC - LG}{2LC} \sqrt{\frac{L}{C}} = \sigma Z. \end{aligned}$$

Если первичные параметры линии связаны хвизайдовским соотношением $RC = LG$, то $\sigma = 0$, $\sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{G}{R}}$ и $G_b = \sqrt{\frac{G}{R}}$. Не трудно видеть,



Фиг. 130.



Фиг. 131.

что графически временную зависимость волнового сопротивления Z_b и проводимости G_b можно изобразить фиг. 130 и 131: если $RC > LG$, то кривыми $a_1 b$; если $RC < LG$, то кривыми $a_2 b$, и если $RC = LG$, то прямыми $a_3 b$.

г) Сравнение точной и приближенной формул волновой проводимости

Во II части нашей монографии был приведен вывод волновых сопротивлений Z_b и проводимости G_b , исходя из точных формул напряжения и тока бегущей волны. Мы получили следующую формулу:

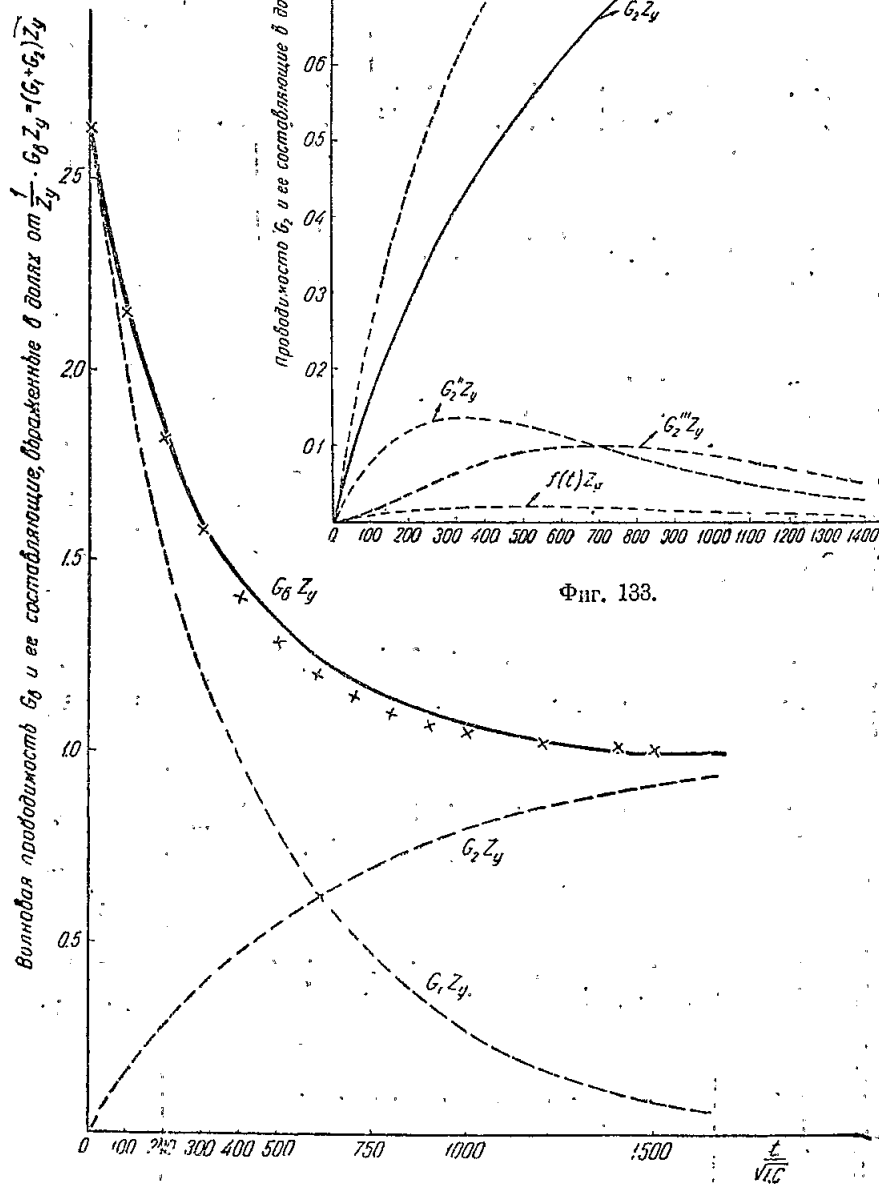
$$G_b = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} J_0(j\sigma t) + \sqrt{\frac{G}{R}} (1 - e^{-bt}) + \frac{G\Delta}{\sqrt{LC}} \left(1 + \frac{bt}{2}\right) t e^{-bt}, \quad (12_1)$$

где

$$\Delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{b^2 - \sigma^2}} = -\frac{(\sqrt{RC} - \sqrt{LG})^2}{2\sqrt{RCLG}}.$$

Таблица 25

$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$G_1 Z_y$	$G_2' Z_y$	$G_2'' Z_y$	$G_2''' Z_y$	$G_2 Z_y$	$f(t)$	$G_b Z_y$ по форм. (12 _а)	$G_b Z_y$ по форм. (12 _б)	% расхо- ждения
0	2.645	0	0	0	0	0	2.645	2.645	0
100	2.001	0.2517	0.08062	0.01169	0.1594	0.0087	2.160	2.159	0.04
200	1.549	0.4401	0.12 6	0.03499	0.2845	0.0147	1.834	1.817	0.92
300	1.194	0.5810	0.1354	0.05891	0.3867	0.0183	1.581	1.575	0.38
400	0.9779	0.6865	0.1351	0.07836	0.4730	0.0203	1.451	1.406	3.1
500	0.7899	0.7654	0.1264	0.09163	0.5474	0.0207	1.337	1.285	3.8
600	0.6410	0.8245	0.1134	0.09870	0.6122	0.0202	1.253	1.201	4.1
700	0.5209	0.8687	0.09902	0.1005	0.6692	0.0189	1.190	1.142	4.0
800	0.4219	0.9017	0.08403	0.09828	0.7187	0.0173	1.141	1.100	3.5
900	0.3400	0.9265	0.07127	0.09301	0.7622	0.0156	1.102	1.071	2.8
1000	0.2727	0.9450	0.05926	0.08592	0.7998	0.0138	1.073	1.050	2.1
1200	0.1710	0.9692	0.03982	0.06929	0.8601	0.0103	1.031	1.025	0.58
1400	0.1034	0.9828	0.02594	0.05267	0.9042	0.0074	1.008	1.012	0.4
1500	0.0795	0.9871	0.02085	0.04534	0.9209	0.0059	1.000	1.009	0.9
	0	1	0	0	1	0	1.000	1.000	0
	$G_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt} I_0(jat)$	$G_2'' = \frac{GA}{\sqrt{LC}} t e^{-bt}$	$G_2''' = \frac{GA}{\sqrt{LC}} \frac{bt^2}{2} e^{-bt}$	$G_2 = G_2' - (G_2'' + G_2''')$	$G_2 = G_2' - (G_2'' + G_2''')$	$f(t) - \text{пренебрегаемый}$	$f(t)$ — пренебрегаемый		
	$G_1' = \sqrt{\frac{C}{L}} (1 - e^{-bt})$	$G_2''' = \frac{GA}{\sqrt{LC}} (1 - e^{-bt})$		$G_2 = G_1 + G_2$	$G_b = G_1 + G_2$		член в формуле для G_b		



Все характерные особенности волновой проводимости G_b , выведенные из формул (12) и (12₁), полностью совпадают. Необходимо еще сравнить временные кривые проводимостей G_b , построенные по формулам (12) и (12₁). В случае их практического совпадения, очевидно, удобнее при практических подсчетах пользоваться формулой (12). Взяв однопроводную железную 5-миллиметровую линию с первичными параметрами, приведенными выше, получим

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1451 \Omega; \quad Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}} = 3837 \Omega, \quad b = 176.8, \\ \frac{G}{\sqrt{LC}} = 0.3049, \quad \frac{\sigma}{b} = 0.7494, \quad \Lambda = 0.5616.$$

Чтобы оценить значение каждого из входящих в формулу волновой проводимости членов, а также отброшенного во второй части монографии дополнительного члена $\psi(t)$ и сравнить численные значения проводимости G_b , вычисленные по формулам (12) и (12₁), приводим табл. 25. По этой таблице построим графики фиг. 132 и 133. Крестиками на фиг. 132 показаны значения $G_b Z_y$, вычисленные по приближенной формуле (12). Мы видим, что совпадение кривых $G_b Z_y$, вычисленных по формулам (12) и (12₁), можно считать практически вполне приемлемым. Это дает возможность при практических подсчетах пользоваться, вместо тяжелой для подсчетов формулы (12₁), простой и удобной приближенной формулой (12). На фиг. 133 приведены кривые $G_2 Z_y$ и ее составляющие

$$G_2 Z_y = [G_2' + G_2'' + G_2''' + \psi(t)] Z_y.$$

Этот график наглядно показывает малые значения отбрасываемого члена $\psi(t)$ на проводимость G_2 , а тем более на полную волновую проводимость G_b .

д) Упрощенная формула волнового сопротивления

Переходя от волновой проводимости G_b к волновому сопротивлению Z_b , вычислим последнее (табл. 26) по приближенной формуле

$$Z_b = \frac{1}{\sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{G}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\sigma(t-t_0)}}, \quad (13)$$

Таблица 26

Зависимость волнового сопротивления Z_b бегущей волны от времени

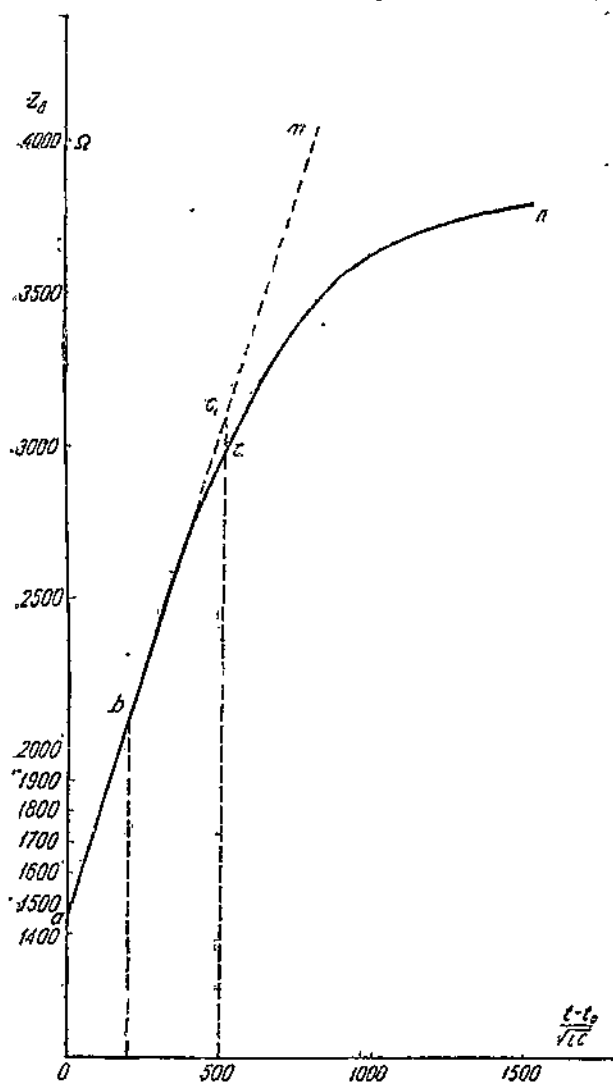
$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$Z_b \Omega$	$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$Z_b \Omega$	$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$Z_b \Omega$
0	1451	400	2730	1000	3655
30	1547	500	2985	1100	3707
60	1645	600	3194	1200	3745
100	1777	700	3360	1300	3771
200	2112	800	3489	1400	3791
300	2435	900	3584	1500	3804

где

$$\delta = \frac{\sigma Z y}{Z y - Z},$$

и построим график фиг. 134.

График показывает, что на некотором промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$



Фиг. 134.

кривая волнового сопротивления Z_b и начальная к ней касательная abc_1m практически сливаются. В пределах же

$$0 \leq \frac{t-t_0}{\sqrt{LC}} \leq \frac{t_2-t_0}{\sqrt{LC}} = 500$$

Расхождение между ними не превосходит 4% . Действительно, для времени $\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}=500$ мы имеем по кривой значение $Z_b=2985\Omega$, по касательной же $Z_b=3101\Omega$, разница 3.88% .

Тангенс угла наклона начальной касательной, как мы видели выше, выражается формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dZ_b}{dt} \right)_{t=t_0} = \sigma Z = \frac{RC-LG}{2LC} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Если же время выражать в долях от $\sqrt{LC}$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{RC-LG}{2\sqrt{LG}} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Пусть масштаб ординат в n раз меньше масштаба абсцисс, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n} \frac{RC-LG}{2\sqrt{LG}} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На графике фиг. 134 масштабы ординат и абсцисс равны, следовательно $n=1$. Подставляя числовые значения параметров R , L , G и C для выбранной нами линии, получим численное значение $\operatorname{tg} \alpha$ и формулу для касательной (имея в виду, что для $t=t_0$ сопротивления $Z_b=Z=1451\Omega$)

$$Z_b = 1451 + \frac{t-t_0}{\sqrt{LC}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Вообще же в пределах $0 \leq t-t_0 \leq t_0$ волновое сопротивление Z_b можно вычислить по формуле

$$Z_b = Z + \frac{t-t_0}{\sqrt{LC}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (13_1)$$

е) Математические трудности, связанные с анализом процессов вдоль линии с электромагнитным приемником на ее конце

Выше мы видели, что

$$\begin{aligned} u_l &= (\vec{u}_l)_1 + (\overleftarrow{u}_l)_1, \\ i_l &= (\vec{i}_l)_1 - \frac{1}{Z_{l1}} (\overleftarrow{u}_l)_1, \end{aligned}$$

где неизвестной является функция $(\overleftarrow{u}_l)_1$. Общее решение для этой неизвестной функции может быть представлено следующей формулой:

$$(\overleftarrow{u}_l)_1 = u_b = e^{-\int f(t) dt} \left\{ -\int [\varphi(t) e^{\int f(t) dt}] dt + A \right\}, \quad (11_1)$$

причем

$$\begin{aligned} f(t) &= Z_{l1} \left(\frac{dG_{l1}}{dt} + \frac{1}{L_l} \right) + \frac{R_l}{L_l}, \\ \varphi(t) &= \frac{Z_{l1}}{L_l} \left(u_a - R_l i_a - L_l \frac{di_a}{dt} \right), \\ i_a &= (\vec{i}_l)_1, \quad u_a = (\vec{u}_l)_1. \end{aligned}$$

Взяв для волновых проводимости и сопротивления бегущей волны формулы

$$G_b = \sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta_i(t-t_0)},$$

$$Z_b = \frac{1}{\sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta_i(t-t_0)}},$$

получим

$$f(t) = \frac{1}{L_l} \left[\frac{1 - \delta_i L_l \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta_i(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta_i(t-t_0)}} + R_l \right],$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{L_l} \frac{u_a - R_l i_a - L_l \frac{di_a}{dt}}{\sqrt{\frac{G}{R}} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\delta_i(t-t_0)}}.$$

Подставляя в общее решение (11), приходим к весьма большим математическим трудностям и сложностям, не приемлемым для практики.

Попробуем упростить задачу, сделав предположение, что наша линия вполне изолирована, т. е. что для нее $G=0$; тогда получим

$$G_b = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\delta_i(t-t_0)},$$

$$Z_b = \sqrt{\frac{L}{C}} e^{\delta_i(t-t_0)}.$$

С изменением времени t от t_0 до ∞ проводимость G_b , как и следовало ожидать, меняется от $\sqrt{\frac{C}{L}}$ до 0, и сопротивление Z_b — от $\sqrt{\frac{L}{C}}$ до ∞ . В этом случае

$$f(t) = \frac{1}{L_l} \left[\sqrt{\frac{L}{C}} - L_l \delta_i e^{-\delta_i(t-t_0)} \right] + \frac{R_l}{L_l}$$

$$\varphi(t) = \frac{E}{L_l} \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\delta_i(t-t_0)} \left[1 - (1 - e^{-\delta_i t_0}) e^{-\delta_i(t-t_0)} - \sqrt{\frac{C}{L}} (R_l - L_l \delta_i) e^{-\delta_i t_0} e^{-\delta_i(t-t_0)} \right].$$

Эти функции могут быть представлены в более простом виде:

$$f(t) = a_1 + a_2 e^{-\delta_i t},$$

$$\varphi(t) = b_1 + b_2 e^{(\delta_i - \delta_m) t} + b_3 e^{\delta_i t},$$

где a_1 , a_2 , b_1 , b_2 и b_3 — постоянные. Подставляя в решение (11), приходим к следующим интегралам:

$$\int f(t) dt = a_1 t - \frac{a_2}{\delta_i} e^{-\delta_i t},$$

$$\int \varphi(t) e^{-\int f(t) dt} dt = \int \left[b_1 + b_2 e^{(\delta_i - \delta_u) t} + b_3 e^{0 t} \right] e^{\left(a_1 t - \frac{a_2}{\delta_i} e^{-\delta_i t} \right)} dt.$$

Последний интеграл мы, к сожалению, взять не можем. Наконец, воспользовавшись формулой (13₁)

$$Z_b = Z + \frac{t - t_0}{\sqrt{LC}} \operatorname{tg} \alpha,$$

или в общем виде

$$Z_b = m + nt,$$

находим

$$f(t) = \frac{(m + nt)^2 - bL_l}{(m - nt)L_l} + \frac{R_l}{L_l},$$

$$\varphi(t) = \frac{m + nt}{L_l} \left(u_a - R_l i_a - L_l \frac{di_a}{dt} \right).$$

Подставляя в решение (11₁), опять приходим к интегралу, взять который мы не можем.

Таким образом, при выведенной нами временной зависимости Z_b и G_b решить задачу в удобном для практиков виде невозможно. Необходимо изыскать обходные пути, дающие возможность получить искомые решения более простыми способами. Этим вопросом мы и займемся в следующем параграфе.

§ 5. Устанавливающиеся электромагнитные процессы в конце линии с электромагнитным приемником

Волновое сопротивление Z_b , как мы видели выше, меняется во времени от начального значения $\sqrt{\frac{L}{C}} = Z$ до конечного значения $\sqrt{\frac{R}{G}} = Z_y$, причем временная зависимость Z_b выражается сравнительно простой формулой

$$Z_b = \frac{1}{a + be^{-\delta_i t}},$$

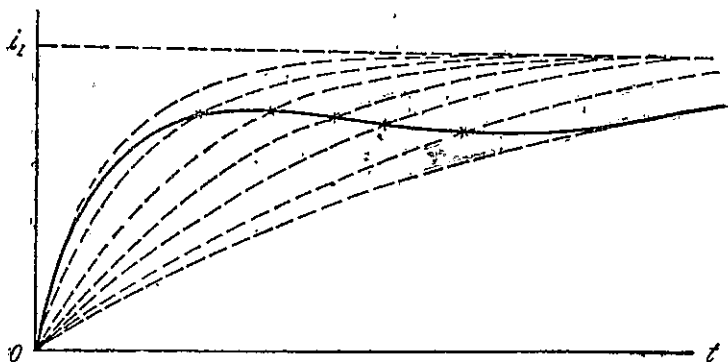
где

$$a = \sqrt{\frac{G}{R}} \quad \text{и} \quad b = \left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{\delta_i t_0}.$$

Несмотря на простоту формулы волнового сопротивления Z_b решение уравнения (11₁), дающего возможность определить входящие на приемную станцию напряжение u_l и ток i_l , представляет большие трудности. Приходится, как мы уже отметили, изыскать обходные пути, приводящие нас к искомым функциям u_l и i_l . В качестве такого обходного пути может быть в данном случае предложен следующий способ.

Задача решалась бы весьма просто, если бы волновое сопротивление Z_b и проводимость G_b были постоянными во времени. Начальное

значение сопротивления Z_b , как мы знаем, равно $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$; конечное равно $Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}$; промежуточные значения определяются приведенной формулой для Z_b . Зададимся каким-либо значением Z_b и, считая его во времени постоянным, вычислим соответствующую кривую тока i_l . Проведем это для ряда значений Z_b , заключенных между $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и $Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}$. Для каждого взятого значения Z_b построим кривую тока или напряжения (фиг. 135). Взяв n значений Z_b , получим n кривых. На каждой из этих кривых отметим только одну точку (крестиком на фиг. 135) для того момента времени, которому соответствует взятое при построении этой кривой сопротивление Z_b . Соединив все отмеченные точки на приведенных кривых, получим искомую кривую (сплошная на фиг. 135) входящего тока i_l или напряжения u_l .



Фиг. 135.

Очевидно, что мы можем и не строить целиком каждую из вспомогательных кривых, довольствуясь лишь одной ее точкой, интересующей нас (крестик на фиг. 135).

Таким образом, основным является решение уравнения (11) при постоянном волновом сопротивлении. Полагая же $Z_b = \text{const}$, $G_b = \text{const}$, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{Z_{11} + R_l}{L_l} u_b + \frac{Z_{11}}{L_l} \left(u_a - R_l i_a - L_l \frac{di_a}{dt} \right) = 0,$$

или, обозначая

$$\frac{L_l}{Z_{11} + R_l} = \tau_1; \quad E \frac{Z_{11}}{L_l} \left(1 - R \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\beta t} = n,$$

$$E \frac{Z_{11}}{L_l} \left(e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t} \right) e^{\delta u t_0} = m_1,$$

$$E \frac{Z_{11}}{L_l} \left(R_l - \delta_l L_l \right) \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\beta t_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta t} \right) e^{\delta i t_0} = m_2,$$

имеем

$$\frac{du_b}{dt} + \frac{1}{\tau_l} u_b + m_1 e^{-\delta_u t} - m_2 e^{-\delta_i t} + n = 0, \quad (14)$$

откуда находим

$$u_b = e^{-\frac{t}{\tau_l}} \left[- \int (m_1 e^{-\delta_u t} - m_2 e^{-\delta_i t} + n) e^{-\frac{t}{\tau_l}} dt + A \right],$$

или

$$u_b = \frac{m_1 \tau_l}{\tau_l \delta_u - 1} e^{-\delta_u t} - \frac{m_2 \tau_l}{\tau_l \delta_i - 1} e^{-\delta_i t} - n \tau_l + A e^{-\frac{t}{\tau_l}},$$

где A — постоянная интегрирования.

Для $t = t_0$ входящий ток $i_l = 0$; так как в конце линии включен электромагнитный приемник (R_l, L_l) и так как

$$i_l = i_a - \frac{u_b}{Z_{l1}},$$

то для $t = t_0$

$$(u_b)_0 = Z_{l1} (i_a)_0 = E Z_{l1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0}.$$

Подставляя, получим

$$A e^{-\frac{t}{\tau_l}} = \left(E Z_{l1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} + n \tau_l - \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} + \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} \right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}}.$$

Таким путем приходим к следующему выражению для напряжения отраженной волны u_b :

$$u_b = E Z_{l1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} - n \tau_l (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}}) + \\ + \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} \left[e^{-\delta_u (t-t_0)} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} \right] - \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} \left[e^{-\delta_i (t-t_0)} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} \right].$$

Имея же в виду, что

$$u_l = u_a + u_b,$$

$$i_l = i_a - \frac{1}{Z_{l1}} u_b.$$

Подставляя значения функций u_a, u_b, i_a , приходим к следующим формулам:

$$u_l = E e^{-\beta l} + E Z_{l1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} - n \tau_l (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}}) + \\ + E (e^{-\beta i_0} - e^{-\beta l}) e^{-\delta_u (t-t_0)} + \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} \left[e^{-\delta_u (t-t_0)} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} \right] - \\ - \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} \left[e^{-\delta_i (t-t_0)} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} \right];$$

$$\begin{aligned}
i_l = & E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} - E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} + \frac{n\tau_l}{Z_{l1}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}}\right) + \\
& + E \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} \right) e^{-\delta_i(t-t_0)} - \\
& - \frac{1}{Z_{l1}} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} \left[e^{-\delta_u(t-t_0)} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} \right] + \\
& + \frac{1}{Z_{l1}} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} \left[e^{-\delta_i(t-t_0)} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} \right].
\end{aligned}$$

Для $t = \infty$

$$U_l = E e^{-\beta l} - n\tau_l,$$

$$I_l = E \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} + \frac{n\tau_l}{Z_{l1}}.$$

Подставляя значения параметров n и τ_l , получим

$$U_l = E \frac{R_l(Z_y + Z_{l1})}{Z_y(R_l + Z_{l1})} e^{-\beta l},$$

$$I_l = \frac{E Z_y + Z_{l1}}{Z_y R_l + Z_{l1}} e^{-\beta l},$$

т. е. установившиеся значения напряжения и тока в конце линии с электромагнитным приемником для того случая, когда энергией второй отраженной от приемника волны можно пренебречь. Обозначим

$$EZ_{l1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} + n\tau_l - \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} + \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} = a_1 U_l,$$

$$E(e^{-bt_0} - e^{-\beta l}) + \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} = a_2 U_l,$$

$$\frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} = a_3 U_l,$$

$$E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} + \frac{n\tau_l}{Z_{l1}} - \frac{1}{Z_{l1}} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} + \frac{1}{Z_{l1}} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} = b_1 I_l = \frac{a_1 U_l}{Z_{l1}},$$

$$E \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} \right) + \frac{1}{Z_{l1}} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_i t_0}}{\tau_l \delta_i - 1} = b_3 I_l,$$

$$\frac{1}{Z_{l1}} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} = b_2 I_l.$$

Тогда

$$\frac{U_l}{U_l} = 1 + a_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} + a_2 e^{-\delta_u(t-t_0)} - a_3 e^{-\delta_i(t-t_0)},$$

$$\frac{I_l}{I_l} = 1 + b_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} - b_2 e^{-\delta_u(t-t_0)} + b_3 e^{-\delta_i(t-t_0)}.$$

(15)

Подставляя в полученные решения $Z_{i_1} = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$, получим первые кривые напряжения и тока; подставляя $Z_{i_1} = Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}$, получим вторые кривые; действительное решение будет находиться, как было указано выше, между первыми и вторыми кривыми (фиг. 135).

Так как для $t = t_0$

$$i_l = 0,$$

то

$$b_1 + b_2 - b_3 = 1.$$

С другой стороны, как не трудно убедиться,

$$a_1 + a_2 - a_3 = \frac{E Z_{i_1} + Z}{U_l} e^{-bt_0} - 1;$$

если $Z_{i_1} = Z$, то

$$a_1 + a_2 - a_3 = \frac{2\Gamma_u}{U_l} - 1,$$

если $Z_{i_1} = Z_y$, то

$$a_1 + a_2 - a_3 = \frac{E}{U_l} \frac{Z_y + Z}{Z} e^{-bt_0} - 1.$$

Эти соотношения весьма полезны при проверке подсчитанных численных значений постоянных a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 и b_3 .

§ 6. Иллюстрации к предыдущему параграфу

Формулы (15) для входящих напряжения u_l и тока i_l выведены для интервала времени $t_0 \leq t < 3t_0$. Легко убедиться, что в течение этого времени ток i_l даже для короткой линии $l = 100$ км успеет нарасти до рабочего тока $(i_l)_p$, при котором якорь приемного электромагнитного реле притянется. Действительно, взяв для численного примера 5-миллиметровую железную однопроводную линию с приведенными выше параметрами и полагая $R_l = 200 \text{ } \Omega$, $L_l = 1.5 \text{ Н}$, получим для линии длиной в 100 км в момент времени $t = 3t_0$ отношение $\frac{i_l}{I_l} > 0.9$. Чем длиннее линия, тем больше время $t = 3t_0$, тем ближе отношение $\frac{i_l}{I_l}$ к единице.

Если рабочий ток реле $(i_l)_p$, при котором реле притянет свой якорь, будет меньше I_l , то реле сработает раньше, чем придет вторая прямая волна и произойдет второе отражение от приемного конца линии. Сравним величину рабочего тока, например линейного реле Бодо с величиной тока I_l . Нормально аппарат Бодо работает при установившемся токе $I_l = 25 \text{ мА}$, сработает же реле Бодо уже при 2 мА, т. е. рабочий ток реле Бодо составляет 0.08 от установившегося. Выразим величину I_l в долях от установившегося тока I_l , причем

$$I_l = \frac{2EZ_y}{(R_0 + Z_y)(R_l + Z_y)e^{\beta l} - (R_0 - Z_y)(R_l - Z_y)e^{-\beta l}}$$

и

$$I_l = E \frac{(Z_v + Z_{II})e^{-\beta l}}{(R_0 + Z_y)(R_l + Z_{I_1})}.$$

Полагая $R_0 = R_l$, подсчитаем для выбранной нами линии значения $\frac{I_l}{I_l}$ (табл. 27).

Т а б л и ц а 27

l , км	$\frac{I_l}{I_l}$	l , км	$\frac{I_l}{I_l}$
100	0.6346	600	0.9819
200	0.7916	700	0.9940
300	0.8783	800	1.000
400	0.9300	900	1.000
500	0.9614	1000	1.000

Рабочий ток $(i_l)_p$ составляет 0.08 от установившегося тока I_l , отношение же $\frac{I_l}{I_l}$ уже для длины линии $l=100$ км, составляет 0.6346; следовательно

$$\frac{(i_l)_p}{I_l} < \left(\frac{I_l}{I_l} \right)_{l=100 \text{ км}},$$

т. е. даже при линии длиной 100 км реле сработает раньше, чем пройдет второе отражение электромагнитной волны от приемного конца линии. Практически же нас интересует форма кривой входящего тока только до момента срабатывания реле; дальнейшая форма кривой (ток продолжает нарастать) нас не интересует.

Если проанализировать отношение токов $\frac{I_l}{I_l}$ при длинах l , меньших 100 км, то мы убедимся, что с приближением l к нулю отношение $\frac{I_l}{I_l}$ для выбранной нами линии стремится к значению 0.317, большему 0.08. Таким образом, выведенными в предыдущем параграфе формулами, по крайней мере при 5-миллиметровой железной однопроводной линии и при значениях параметров реле $R_0 = R_l = 200 \text{ } \Omega$, $L_l = 1.5 \text{ Н}$, можно пользоваться для линии любой длины.

Подсчитаем кривую входящего тока i_l для линии длиной в 600 км, при значениях $R_0 = 0$, $R_l = 200 \text{ } \Omega$ и $L_l = 1.5 \text{ Н}$, пользуясь формулами

$$Z_{l_1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} + n\tau_l - \frac{1}{E} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} + \frac{1}{E} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_l t_0}}{\tau_l \delta_l - 1} = \frac{b_1 Z_{l_1} I_l}{E},$$

$$Z_{l_1} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} \right) + \frac{1}{E} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_l t_0}}{\tau_l \delta_l - 1} = \frac{b_2 Z_{l_1} I_l}{E},$$

$$\frac{1}{E} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} = \frac{b_2 Z_{l_1} I_l}{E}, \quad \frac{L_l}{Z_{l_1} + R_l} = \tau_l,$$

$$\frac{Z_{l_1}}{L_l} \left(1 - R_l \sqrt{\frac{G}{R}} \right) e^{-\beta l} = \frac{n}{E}, \quad \frac{Z_{l_1}}{L_l} (e^{-bt_0} - e^{-\beta l}) e^{\delta_u t_0} = \frac{m_1}{E},$$

$$\frac{Z_{l_1}}{L_1}(R_l - \delta_l L_l) \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta t} \right) e^{\delta_l t_0} = \frac{m_2}{E},$$

$$I_l = \frac{E}{Z_y} \frac{Z_y + Z_{l_1}}{R_l + Z_{l_1}} e^{-\beta t},$$

$$\frac{i_l}{I_l} = 1 - b_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} - b_2 e^{-\delta_u(t-t_0)} + b_3 e^{-\delta_l(t-t_0)}.$$

Чтобы оценить значение того или иного члена, входящего в формулы для коэффициентов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ и в формулу для входящего тока i_l , приведем табл. 28 и 29.

Табл. 28 показывает, что члены

$$\frac{1}{E} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1}, \quad \frac{1}{E} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_l t_0}}{\tau_l \delta_l - 1} \quad \text{и} \quad \frac{n \tau_l}{E}$$

почти не зависят от времени; так, для $\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}} = 0$ эти члены соответственно равны 0.1382, 0.001899 и 0.2646 и для $\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}} = 600$ равны 0.1404, 0.001864 и 0.2833. Практически возможно взять средние значения; тогда формула для $b_1 Z_{l_1} \frac{I_l}{E}$ примет следующий вид:

$$b_1 Z_{l_1} \frac{I_l}{E} = Z_{l_1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} + A,$$

где A — среднее значение членов

$$n \tau_l - \frac{1}{E} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} + \frac{1}{E} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_l t_0}}{\tau_l \delta_l - 1},$$

не зависящее уже от времени; $A = \text{const.}$ Та же табл. 28 показывает, что членом $\frac{1}{E} \frac{m_2 \tau_l e^{-\delta_l t_0}}{\tau_l \delta_l - 1}$ можно пренебречь по сравнению с

$$Z_{l_1} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta t} \right),$$

т. е. положить

$$b_3 \frac{I_l}{E} = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta t} = \text{const.}$$

И так как член $\frac{1}{E} \frac{m_1 \tau_l e^{-\delta_u t_0}}{\tau_l \delta_u - 1} = B$, как мы видели, почти не зависит от времени, то

$$b_2 Z_{l_1} \frac{I_l}{E} = B = \text{const.}$$

Подсчитав по формуле

$$\frac{i_l}{I_l} = 1 - b_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_l}} - b_2 e^{-\delta_u(t-t_0)} + b_3 e^{-\delta_l(t-t_0)},$$

Таблица 28

$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	Z_{L1}	$\frac{1}{E} \frac{m_1 \tau_L e^{-\delta_u t_0}}{\tau_L \delta_u - 1}$	$\frac{1}{E} \frac{m_2 \tau_L e^{-\delta_i t_0}}{\tau_L \delta_i - 1}$	$\frac{n \tau_L}{E}$	$Z_{L1} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0}$	$A Z_{L1}^*$
0	1451	0.1382	0.001899	0.2646	0.1756	0.05557
12	1489	0.1384	0.001898	0.2654	0.1802	0.05703
24	1528	0.1386	0.001897	0.2665	0.1849	0.05851
36	1566	0.1387	0.001895	0.2670	0.1895	0.05998
48	1605	0.1388	0.001894	0.2678	0.1943	0.06149
60	1645	0.1388	0.001891	0.2684	0.1990	0.06299
72	1684	0.1389	0.001890	0.2691	0.2038	0.06451
84	1724	0.1389	0.001888	0.2698	0.2086	0.06604
96	1764	0.1390	0.001888	0.2704	0.2134	0.06756
108	1804	0.1391	0.001886	0.2710	0.2183	0.06910
120	1844	0.1391	0.001885	0.2716	0.2232	0.07064
132	1885	0.1391	0.001884	0.2721	0.2281	0.07218
144	1925	0.1392	0.001883	0.2727	0.2329	0.07372
156	1965	0.1393	0.001882	0.2732	0.2378	0.07526
168	2006	0.1393	0.001880	0.2737	0.2427	0.07682
180	2045	0.1394	0.001880	0.2749	0.2475	0.07834
200	2112	0.1395	0.001879	0.2757	0.2549	0.08066
300	2435	0.1398	0.001873	0.2782	0.2946	0.09326
400	2730	0.1401	0.001869	0.2805	0.3303	0.01046
500	2985	0.1403	0.001867	0.2821	0.3612	0.01143
600	3194	0.1404	0.001864	0.2833	0.3865	0.01223

Таблица 29

$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$b_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_L}}$	$b_2 e^{-\delta_u(t-t_0)}$	$b_3 e^{-\delta_i(t-t_0)}$	$\frac{i_0}{(I_L)_{Z_{L1}}}$	$\frac{(I_L)_{Z_{L1}}}{E} \cdot 10^4$	$\frac{i_L}{(I_L)_Z}$
0	0.7910	0.3597	0.1507	0	2.648	0
12	0.6370	0.3487	0.1467	0.1610	2.610	0.1587
24	0.5075	0.3365	0.1433	0.2993	2.585	0.2923
36	0.4024	0.3284	0.1414	0.4106	2.538	0.3927
48	0.3149	0.3186	0.1389	0.5054	2.495	0.4763
60	0.2436	0.3089	0.1362	0.5837	2.460	0.5423
72	0.1867	0.2998	0.1337	0.6472	2.425	0.5928
84	0.1414	0.2907	0.1311	0.6990	2.392	0.6316
96	0.1060	0.2822	0.1286	0.7404	2.361	0.6601
108	0.07866	0.2739	0.1260	0.7734	2.330	0.6806
120	0.05766	0.2658	0.1235	0.8000	2.300	0.6950
132	0.04171	0.2579	0.1209	0.8213	2.272	0.7048
144	0.02992	0.2504	0.1185	0.8382	2.244	0.7106
156	0.02143	0.2432	0.1159	0.8513	2.218	0.7132
168	0.01503	0.2366	0.1138	0.8622	2.188	0.7132
180	0.01059	0.2294	0.1110	0.8710	2.168	0.7133
200	0.00738	0.2189	0.1011	0.8838	2.133	0.7135
300	0.00016	0.1724	0.08791	0.9153	1.970	0.6811
400	0.00000	0.1374	0.07112	0.9337	1.855	0.6542
500	0.00000	0.1105	0.05658	0.9461	1.773	0.6335
600	0.00000	0.08969	0.04456	0.9549	1.715	0.6184
	0.00000	0.00000	0.00000	1.0000	1.573	0.5935

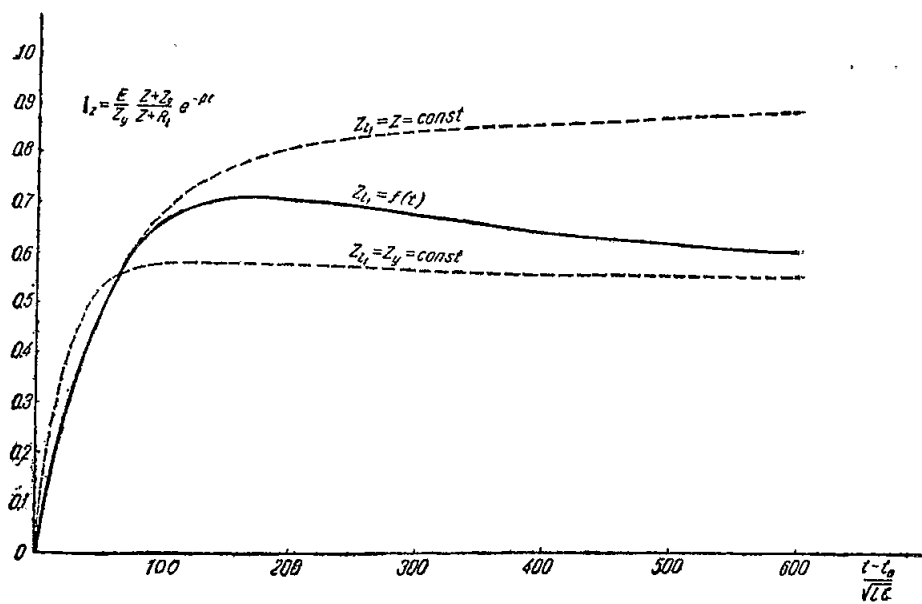
$$* A = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta t}$$

значение отношения $\frac{i_l}{I_l}$ (пятый вертикальный столбец табл. 29), мы должны помнить, что установившийся ток I_l — не постоянная величина (шестой столбец табл. 29), он зависит от значения волнового сопротивления Z_{l1} , которое есть функция от времени. Чтобы сравнить между собою полученные численные значения отношения $\frac{i_l}{I_l}$, надо выразить ток i_l в зависимости от какой-то постоянной величины, например в зависимости от установившегося тока, соответствующего сопротивлению $Z_{l1} = Z$. Для этого необходимо каждое значение отношения $\frac{i_l}{(I_l)_{Z_{l1}}}$ умножить на отношение $\frac{(I_l)_{Z_{l1}}}{(I_l)_Z}$. Результат этого перемножения приведен в седьмом (последнем) столбце табл. 29.

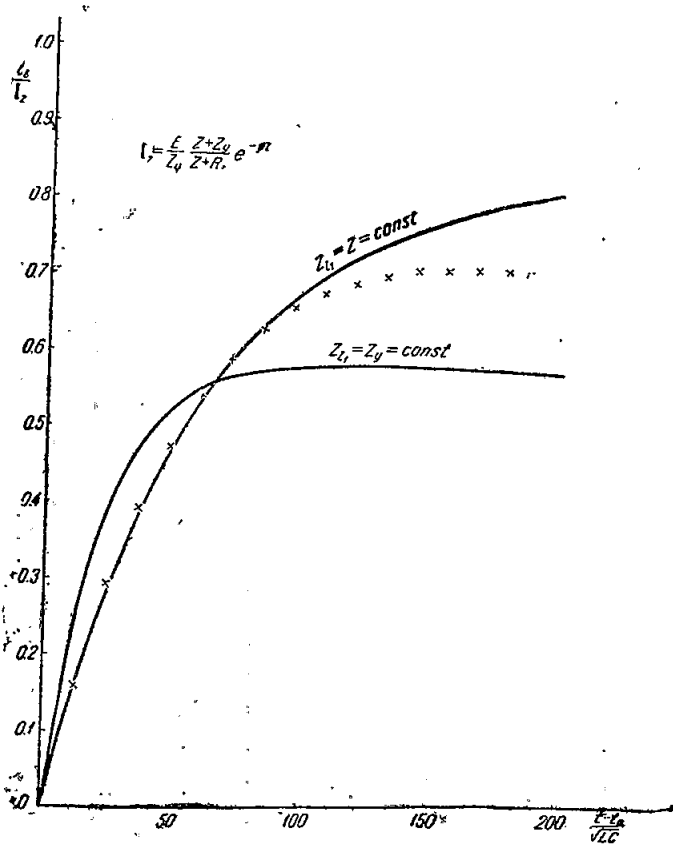
Для момента времени $t = t_0$ волновое сопротивление Z_{l1} равно Z . Если бы волновое сопротивление не менялось во все время установливания входящего тока ($Z_{l1} = Z = \text{const}$), то мы получили бы кривую тока (назовем ее „начальной“ кривой), которая в начальный для приемной станции момент времени $t = t_0$ касалась бы кривой тока, приведенного в табл. 29 (последний столбец). Для времени $t = \infty$ волновое сопротивление Z_{l1} равно Z_y ; полагая $Z_{l1} = Z_y = \text{const}$ во все время нарастания тока, мы пришли бы к кривой тока („конечная“ кривая), к которой асимптотически стремилась бы кривая тока, числовые значения которого приведены в табл. 29.

Таблица 30

$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	Значения i_l/I_l		Значения $i_l/(I_l)_Z$	
	$Z = \text{const}$	$Z_y = \text{const}$	$Z = \text{const}$	$Z_y = \text{const}$
0	0	0	0	0
10	0.1330	0.3595	0.1330	0.2134
20	0.2440	0.5900	0.2440	0.3502
30	0.3373	0.7369	0.3373	0.4374
40	0.4154	0.8311	0.4154	0.4933
50	0.4810	0.8905	0.4810	0.5285
60	0.5359	0.9281	0.5359	0.5508
70	0.5822	0.9518	0.5822	0.5649
80	0.6214	0.9663	0.6214	0.5735
90	0.6546	0.9752	0.6546	0.5788
100	0.6822	0.9802	0.6822	0.5817
110	0.7061	0.9831	0.7061	0.5835
120	0.7260	0.9843	0.7260	0.5842
130	0.7432	0.9847	0.7432	0.5844
140	0.7586	0.9858	0.7586	0.5851
150	0.7702	0.9837	0.7702	0.5838
160	0.7811	0.9829	0.7811	0.5834
170	0.7906	0.9820	0.7906	0.5828
180	0.7987	0.9811	0.7987	0.5823
190	0.8059	0.9802	0.8059	0.5817
200	0.8121	0.9796	0.8121	0.5812
300	0.8500	0.9716	0.8500	0.5767
400	0.8720	0.9677	0.8720	0.5744
500	0.8886	0.9670	0.9036	0.5739
600	0.9036	0.9670	0.9036	0.5739



Фиг. 136.



Фиг. 137.

Вычислим эти две кривые (табл. 30): начальную кривую тока $\left(\frac{i_t}{I_t}\right)_{Z_{t1}=Z}$ и конечную кривую тока $\left(\frac{i_t}{I_t}\right)_{Z_{t1}=Z_y}$. Приведем их к одному и тому же установившемуся току I_y , соответствующему сопротивлению $Z_{t1}=Z$ (последние два столбца табл. 30) и построим три кривых (фиг. 136), соответствующих значениям волновых сопротивлений $Z_{t1}=Z=\text{const}$, $Z_{t1}=f(t)$ и $Z_{t1}=Z_y=\text{const}$. Как видно из графиков, наиболее ответственная часть кривой действительного тока (для $Z_{t1}=f(t)$) совпадает с кривой, вычисленной для $Z_{t1}=Z=\text{const}$. В большем масштабе начальная и конечная кривые тока в диапазоне времени $0 \leq \frac{t-t_0}{\sqrt{LC}} \leq 200$ приведены на фиг. 137. Крестиками показаны точки действительной кривой входящего тока. Очевидно, что для рассматриваемого случая реле сработает раньше, чем разойдутся кривые, начальная ($Z_{t1}=Z=\text{const}$) и действительная ($Z_{t1}=f(t)$).

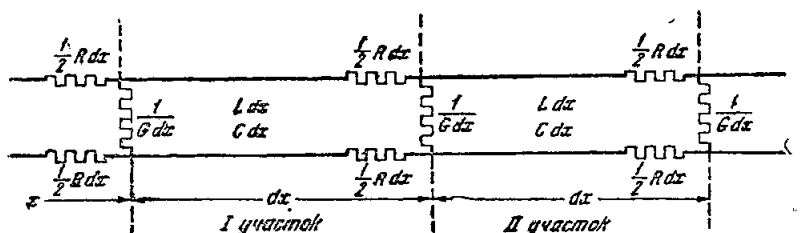
Следовательно, для рассматриваемого случая можно было бы ограничиться подсчетом лишь начальной кривой тока ($Z_{t1}=Z=\text{const}$).

Глава III

АНАЛИЗ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ НА ОСНОВЕ ИМЕЮЩЕГОСЯ ВЫРАЖЕНИЯ ЕЕ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 1. Вывод формул бегущей волны

Во II части монографии в главе V, § 2 (головная волна тока и напряжения) была приведена схема линии, в которой каждый элемент длины dx действительной линии заменен эквивалентным ему эле-



Фиг. 138.

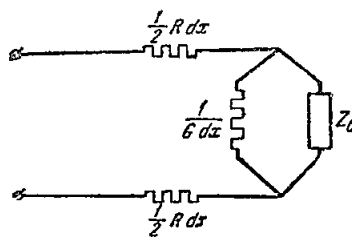
ментом dx идеальной линии (т. е. линии без сопротивления и утечки), сопротивление же проводов линии $R dx$ и ее изоляции $\frac{1}{G dx}$ сосредоточено в конце рассматриваемого участка линии (фиг. 138). При таком изображении элементов длины линии коэффициент отражения N_x электромагнитной волны будет определяться формулой

$$N_x = \frac{Z_a - Z_b}{Z_a + Z_b},$$

где Z_b — волновое сопротивление бегущей волны, Z_a — сопротивление, встречаемое волной в конце первого участка. Это сопротивление Z_a может быть представлено схемой фиг. 139, следовательно

$$Z_a = R dx + \frac{Z_b \frac{1}{G dx}}{Z_b + \frac{1}{G dx}} = R dx + \frac{1}{G_b + G dx}.$$

Коэффициент же отражения может быть выражен следующим образом:



$$N_x = \frac{RG_b(G_b + G dx) dx - G dx}{RG_b(G_b + G dx) dx + 2G_b + G dx}.$$

Отбрасывая бесконечно малые второго порядка, получим

$$N_x = \frac{(RG_b^2 - G) dx}{2G_b + (RG_b^2 + G) dx} \approx \frac{RG_b^2 - G}{2G_b} dx.$$

Фиг. 139.

Обозначим напряжение и ток падающей волны через u_a и i_a , тогда напряжение u_b и ток i_b волны, проходящей через сопротивление Z_a , будут равны

$$u_b = u_a(1 + N_x),$$

$$i_b = i_a(1 - N_x).$$

Напряжение же u_l и ток i_l волны, вступающей на участок II, очевидно, выразятся следующим соотношением:

$$u_c = u_a + \frac{du}{dx} dx = u_b - i_b R dx = u_a(1 + N_x) - i_a(1 - N_x) R dx,$$

$$i_c = i_a + \frac{di}{dx} dx = i_b \frac{Z_b \frac{1}{G dx}}{Z_b + \frac{1}{G dx}} \frac{1}{Z_b} = \frac{i_b}{1 + Z_b G dx} =$$

$$= i_a \frac{1 - N_x}{1 + Z_b G dx} \approx i_a(1 - N_x)(1 - Z_b G dx) =$$

$$= i_a(1 - N_x - Z_b G dx + N_x Z_b G dx) \approx i_a(1 - N_x - Z_b G dx).$$

Итак,

$$u_c = u_a + \frac{du}{dx} dx = u_a(1 + N_x) - i_a(1 - N_x) R dx,$$

$$i_c = i_a + \frac{di}{dx} dx = i_a(1 - N_x - Z_b G dx).$$

Имея же в виду, что

$$i_a = \frac{u_a}{Z_b},$$

напишем

$$\frac{du}{dx} dx = u_a \left(N_x - \frac{1 - N_x}{Z_b} R dx \right),$$

$$\frac{di}{dx} dx = -i_a(N_x + Z_b G dx).$$

Подставляя значение N_x и пренебрегая бесконечно малыми, второго порядка, получим

$$\frac{du}{dx} dx = u_a \left(\frac{RG_b^2 - G}{2G_b} - RG_b \right) dx = -\frac{u_a}{2} \left(\frac{G}{G_b} + RG_b \right) dx,$$

$$\frac{di}{dx} dx = -\frac{ia}{2} \left(\frac{G}{G_b} + RG_b \right) dx,$$

или

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \left(\frac{G}{G_b} + RG_b \right) dx,$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{G}{G_b} + RG_b \right) dx.$$

Вспомня, что волновая проводимость G_b не зависит от x , и интегрируя полученные уравнения, находим

$$u = C_1 e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x}$$

$$i = C_2 e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x},$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, постоянные по отношению к переменной x ; C_1 и C_2 могут быть функциями от переменной t и определяются из следующих условий. При каких угодно значениях переменных x и t между током i и напряжением u справедливо соотношение

$$i = G_b u,$$

следовательно, $C_2 = G_b C_1$. Таким образом,

$$u = C_1 e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x},$$

$$i = C_1 G_b e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x}.$$

Выше мы имели

$$\frac{du}{dt} = u_0 \sigma^2 t_0 \frac{e^{-bt} I_1(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2})}{j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}},$$

следовательно,

$$\frac{du}{dt} = \left[\frac{dC_1}{dt} + C_1 \left(\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x \right)' \right] e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x} = u_0 \sigma^2 t_0 \frac{e^{-bt} I_1(j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2})}{j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2}},$$

где

$$G_b = \frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta(t-t_0)},$$

$$\left(\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x \right)' = -\frac{\sigma x}{2Z} e^{-\delta(t-t_0)} \left\{ R - \frac{G}{\left[\frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta(t-t_0)} \right]^2} \right\}.$$

Производя упрощения и имея в виду, что для $t=t_0$

$$G_b = \frac{1}{Z}, \quad G_b' = -\frac{\sigma}{Z}, \quad \frac{G + RG_b^2}{2G_b} x = bt_0,$$

$$\left(\frac{G + RG_b^2}{2G_b} x \right)' = -\sigma^2 t_0,$$

получим

$$C_1 \approx u_0 e^{-\frac{\sigma^2 t_0}{2} (t-t_0) e^{-\delta(t-t_0)}} = u_0 e^{-\eta},$$

где

$$\eta = \frac{\sigma^2 t_0}{2} (t-t_0) e^{-\delta(t-t_0)}.$$

Подставляя, получим

$$u = u_0 e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x - \eta}, \quad (16)$$

$$i = u_0 G_b e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b} x - \eta},$$

где

$$G_b = \frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta(t-t_0)}, \quad t_0 = x \sqrt{LC}$$

$$Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}, \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \delta = \frac{\sigma Z}{Z_y - Z},$$

$$\sigma = \frac{RC - LG}{2LC}, \quad \eta = \frac{\sigma^2 t_0}{2} (t-t_0) e^{-\delta(t-t_0)}.$$

§ 2. Анализ полученного решения

В первый момент достижения электромагнитной волной данного пункта бесконечно длинной однородной линии, т. е. для $t=t_0$, волновая проводимость G_b и член η , как легко видеть, равны

$$(G_b)_{t=t_0} = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{C}{L}},$$

$$\eta = 0.$$

Произведя подстановку, получим

$$-\frac{G + RG_b^2}{2G_b} x - \eta = -bt_0,$$

где

$$b = \frac{RC + LG}{2LC}.$$

Таким образом, для $t=t_0$

$$u = u_0 e^{-bt_0} = \Gamma_u,$$

$$i = u_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-bt_0} = \Gamma_i.$$

Для $t=\infty$ мы имеем вдоль линии установившийся процесс, причем

$$(G_b)_{t=\infty} = \frac{1}{Z_y} = \sqrt{\frac{G}{R}},$$

$$\eta = 0.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x+\eta\right)_{t=t_0}=\sqrt{RG}x=\beta x,$$

значит, для $t=\infty$

$$u=u_0e^{-\beta x}=U.$$

$$i=u_0\sqrt{\frac{G}{R}}e^{-\beta x}=I.$$

В случае хивисайдовского соотношения ($RC=LG$) получим

$$G_b=\frac{1}{Z_g}=\sqrt{\frac{G}{R}}=\sqrt{\frac{C}{L}},$$

$$\sigma=\frac{RC-LG}{2LC}=0.$$

В этом случае

$$\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x+\eta=\frac{R}{Z}x=GZx=\sqrt{RG}x=\beta x,$$

т. е. электромагнитный процесс вдоль линии мгновенно устанавливается в любом достигнутом волной пункте.

Начальный наклон касательной к временным кривым напряжения u и тока i определяется производными $\frac{du}{dt}$ и $\frac{di}{dt}$ для начального момента времени $t=t_0$, причем

$$\frac{du}{dt}=-u_0e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x-\eta}\left[\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x+\eta\right]',$$

$$\frac{di}{dt}=u_0e^{-\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x-\eta}\left[G_b'-G_b\left(\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x+\eta\right)'\right].$$

Имея в виду, что для $t=t_0$ справедливы соотношения

$$\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x+\eta=bt_0,$$

$$\left(\frac{G+RG_b^2}{2G_b}x+\eta\right)'=-\sigma^2t_0+\frac{\sigma^2t_0}{2}=-\frac{\sigma^2t_0}{2}.$$

Получим

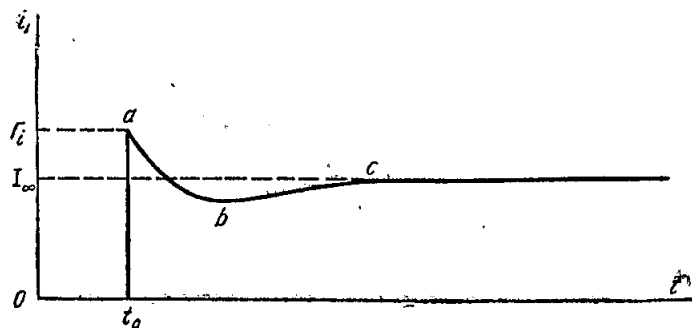
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_0}=\frac{u_0}{2}\sigma^2t_0e^{-bt_0},$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0}=-u_0\frac{\sigma}{Z}\left(1-\frac{\sigma t_0}{2}\right)e^{-bt_0}.$$

Так как σ^2 при любых соотношениях первичных параметров линии R , L , G и C положительно, то при любом положении рассматриваемого пункта x на бесконечно длинной линии временная кривая напряжения

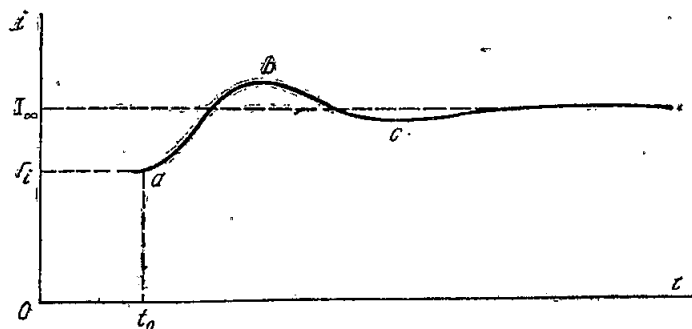
будет иметь вид кривой ab фиг. 92. Так как σ при $RC > LG$ положительна, то при соблюдении соотношения $1 > \frac{\sigma t_0}{2}$ временная кривая тока будет иметь вид кривой ab фиг. 94. Равенство $1 = \frac{\sigma t_0}{2}$ соответствует расстоянию пункта от начала линии, равному

$$x = \frac{2}{\sigma \sqrt{LC}}.$$



Фиг. 140.

Если $RC > LG$, то для любого расстояния $x < \frac{2}{\sigma \sqrt{LC}}$ мы имеем для тока i кривую, подобную ab фиг. 92 или abc фиг. 140, если $x > \frac{2}{\sigma \sqrt{LC}}$, то подобную кривой ab фиг. 92 или кривой abc фиг. 141. Кривые



Фиг. 141.

нарастания тока, подобные кривым фиг. 140 и 141, соответствуют кривым тока, полученным из точной формулы тока бегущей волны. Исходя из формулы (16) для тока i , получим следующее условие, при котором производная $\frac{di}{dt}$ равна нулю:

$$G_b' = G_b \left(\frac{G + RG_b^2}{2G_b} x + \eta \right),$$

причем

$$G_b' = -\delta \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_b} \right) e^{-\delta(t-t_0)},$$

$$\left(\frac{G + R G_b^2}{G_b} \right)' = G_b' \left(R - \frac{G}{G_b^2} \right),$$

$$\eta' = \frac{\sigma^2 t_0}{2} [1 - \delta(t - t_0)] e^{-\delta(t-t_0)}.$$

Не трудно видеть, что для $t = t_0$ производная $\frac{di}{dt}$ равна нулю только в том случае, если $t = \frac{2}{\sigma}$. Для значений $t \neq \frac{2}{\sigma}$ производная $\frac{di}{dt}$ может быть равна нулю для $t > t_0$, причем в том случае, когда $t_0 < \frac{2}{\sigma}$, ток i может пройти только через минимум; если же $t_0 > \frac{2}{\sigma}$, то через максимум или через максимум и минимум. Если исходить из точной формулы для тока i бегущей волны, то производная $\frac{di}{dt}$ равна нулю при условии

$$I_0(0) = -\delta t \frac{I_0'(0)}{\theta},$$

где

$$\theta = j\sigma \sqrt{t^2 - t_0^2},$$

или иначе:

$$1 + \frac{\sigma^2 (t^2 - t_0^2)}{2^2 (1!)^2} + \frac{\sigma^4 (t^2 - t_0^2)^2}{2^4 (2!)^2} + \frac{\sigma^6 (t^2 - t_0^2)^3}{2^6 (3!)^2} + \dots =$$

$$= \sigma t \left[\frac{1}{2} + \frac{4\sigma^2 (t^2 - t_0^2)}{2^4 (2!)^2} + \frac{6\sigma^4 (t^2 - t_0^2)^2}{2^6 (3!)^2} + \dots \right].$$

Очевидно, что и в этом случае мы придем к тем же выводам.

Если $RC < LG$, то при любом расстоянии рассматриваемого пункта x бесконечно длинной линии мы получаем кривые тока бегущей волны, подобные кривой ab фиг. 92. Таким образом, полученное решение приводит к выводам, полностью совпадающим с выводами, получаемыми из точных формул для напряжения и тока бегущей волны. Взяв для иллюстрации изложенного железную однопроводную 5-миллиметровую линию с теми же параметрами, что и в предыдущих примерах, составим табл. 31 и 32 для напряжения и тока бегущей волны. Сравнивая эти таблицы с аналогичными табл. 15 и 16, замечаем, что практически разницей между ними можно пренебречь. Графики фиг. 96—101, построенные по табл. 15 и 16, полностью отражают только что вычисленные табл. 31 и 32. Для иллюстрации же прохождения тока i через минимум и максимум приводим табл. 33. Так как расстояние $x = \frac{2}{\sigma \sqrt{LC}}$,

которому соответствует равенство $t_0 = \frac{2}{\sigma}$, находится между 900 и 1000 км, то в таблице приведены значения тока i для $x = 800$ и 900 км, меньших $x = \frac{2}{\sigma \sqrt{LC}}$ и $x = 1000$ и 1100 км, больших $x = \frac{2}{\sigma \sqrt{LC}}$.

Для значений $x = 800$ и 900 км мы имеем по одному минимуму тока и для $x = 1000$ и 1100 км по максимуму и минимуму.

Распределение напряжений (в долях от u_0 , т. е. $\frac{u}{u_0}$) бегущей электромагнитной волны вдоль однородной однопроводной

железной 5-миллиметровой линии бесконечной длины

$\frac{x, \text{ км}}{t} \backslash \frac{VtG}{c}$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
0	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.7483 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
200	1	0.7649	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5599 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300	1	0.7780	0.5781	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4190 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
400	1	0.7890	0.6096	0.4471	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.3135 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
500	1	0.7977	0.6225	0.4714	0.3420	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2345 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
600	1	0.8083	0.6357	0.4916	0.3671	0.2616	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1755 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
700	1	0.8082	0.6460	0.5071	0.3879	0.2859	0.2001	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1314 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—
800	1	0.8122	0.6533	0.5189	0.4041	0.3081	0.2222	0.1529	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0983 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—
900	1	0.8155	0.6597	0.5283	0.4173	0.3224	0.2415	0.1733	0.1171	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0735 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—
1000	1	0.8179	0.6643	0.5358	0.4274	0.3352	0.2569	0.1905	0.1347	0.0895	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0550 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—
1100	1	0.8195	0.6683	0.5417	0.4352	0.3458	0.2693	0.2049	0.1503	0.1049	0.0684	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0412 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—
1200	1	0.8204	0.6710	0.5466	0.4418	0.3574	0.2794	0.2165	0.1633	0.1181	0.0816	0.0524	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0308 \end{Bmatrix}$	—	—	—
1300	1	0.8220	0.6737	0.5495	0.4466	0.3602	0.2874	0.2258	0.1739	0.1303	0.0937	0.0635	0.0400	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0231 \end{Bmatrix}$	—	—
1400	1	0.8228	0.6757	0.5527	0.4507	0.3653	0.2938	0.2334	0.1827	0.1400	0.1039	0.0739	0.0492	0.0305	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0172 \end{Bmatrix}$	—
1500	1	0.8237	0.6771	0.5549	0.4538	0.3690	0.2985	0.2393	0.1894	0.1476	0.1125	0.0828	0.0583	0.0384	0.0235	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0129 \end{Bmatrix}$
	1	0.8261	0.6825	0.5633	0.4653	0.3844	0.3176	0.2628	0.2165	0.1789	0.1473	0.1221	0.1009	0.0832	0.0688	0.0568

Распределение тока (в долях $I_{0\infty} = u_0 \sqrt{\frac{G}{R}}$, т. е. $\frac{i}{I_{0\infty}}$) бегущей электромагнитной волны вдоль однородной однопроводной

5-миллиметровой линии бесконечной длины

$x, \text{ км}$ $\frac{t}{\sqrt{LC}}$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
0	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 2.645 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	2.459	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1.978 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
200	1.817	1.651	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1.480 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300	1.575	1.414	1.248	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1.108 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
400	1.406	1.243	1.108	1.9653	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.8291 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
500	1.286	1.122	0.9804	0.8565	0.7884	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.6204 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
600	1.201	1.033	0.8938	0.7743	0.6670	0.5648	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4646 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
700	1.142	0.9704	0.8303	0.7130	0.6109	0.5195	0.4320	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.3547 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—	—
800	1.100	0.9275	0.7852	0.6673	0.5682	0.4821	0.4038	0.3301	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2600 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—	—
900	1.071	0.8970	0.7534	0.6345	0.5369	0.4533	0.3804	0.3149	0.2528	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1943 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—	—
1000	1.050	0.8760	0.7307	0.6119	0.5133	0.4311	0.3612	0.3000	0.2447	0.1932	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1421 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—	—
1100	1.035	0.8605	0.7157	0.5959	0.4970	0.4153	0.3463	0.2881	0.2367	0.1906	0.1477	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1090 \end{Bmatrix}$	—	—	—	—
1200	1.025	0.8991	0.7046	0.5854	0.4882	0.4082	0.3356	0.2784	0.2296	0.1860	0.1483	0.1131	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0814 \end{Bmatrix}$	—	—	—
1300	1.017	0.8425	0.6973	0.5774	0.4783	0.3962	0.3282	0.2711	0.2236	0.1832	0.1476	0.1154	0.0864	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0311 \end{Bmatrix}$	—	—
1400	1.012	0.8268	0.6926	0.5720	0.4732	0.3912	0.3233	0.2665	0.2194	0.1800	0.1461	0.1164	0.0894	0.0659	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0455 \end{Bmatrix}$	—
1500	1.009	0.8336	0.6886	0.5683	0.4697	0.3875	0.3197	0.2632	0.2163	0.1765	0.1447	0.1163	0.0897	0.0698	0.0507	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0341 \end{Bmatrix}$
	1.000	0.8261	0.6825	0.5633	0.4153	0.3844	0.3176	0.2628	0.2165	0.1789	0.1478	0.1221	0.1009	0.0832	0.0633	0.0532

Числовые значения $\frac{i}{u_0}$

$\frac{t}{t-t_0} \backslash x, \text{ км}$	800	900	1000	1100
0	0.2600	0.1943	0.1421	0.1090
100	0.2528	0.1932	0.1477	0.1131
200	0.2447	0.1906	0.1483	0.1154
300	0.2367	0.1860	0.1476	0.1164
400	0.2296	0.1832	0.1461	0.1164
500	0.2236	0.1800	0.1447	0.1163
600	0.2194	0.1765	0.1434	0.1160
700	0.2163	0.1759	0.1429	0.1161
800	0.2146	0.1749	0.1426	0.1163
900	0.2139	0.1748	0.1430	0.1170
1000	0.2131	0.1746	0.1431	0.1173
1100	0.2130	0.1749	0.1435	0.1178
1200	0.2135	0.1753	0.1441	0.1185
1300	0.2136	0.1755	0.1444	0.1188
1400	0.2137	0.1760	0.1448	0.1193
1500	0.2141	0.1764	0.1453	0.1197
	0.2165	0.1789	0.1478	0.1221

§. 3. Согласованное включение аппарата в линию

Полное совпадение результатов анализа точных формул бегущей волны с результатами подобного же анализа формул (16), базирующихся на полученной нами формуле проводимости бегущей волны, показывает, что приближенная формула проводимости G_b весьма близка к точной и может быть положена в основу решения весьма важного вопроса о согласовании приемного устройства с линией. Чтобы согласовать приемное устройство с линией, необходимо так подобрать его электромагнитные параметры, чтобы проводимость приемного устройства как раз равнялась проводимости бегущей волны. Но, как мы видели, проводимость бегущей волны выражается следующей формулой:

$$G_b = \frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta(t-t_0)},$$

причем

$$Z_y = \sqrt{\frac{R}{G}}, \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \delta = \frac{\sigma Z}{Z_y - Z},$$

$$\sigma = \frac{RC - LG}{2LC} \quad \text{и} \quad t_0 = l\sqrt{LC},$$

где l — длина рассматриваемой линии. Формула эта показывает, что в момент достижения электромагнитной волной приемного устройства ($t=t_0$) сопротивление последнего должно равняться Z , при установившемся же режиме ($t=\infty$) это сопротивление должно равняться Z_y . Очевидно, что этим условиям удовлетворяет схема фиг. 142. Действи-

тельно, по этой схеме для $t=0$ (момент, соответствующий $t=t_0$), ток $i=\frac{E}{Z}$ и для $t=\infty$, установившийся ток $i=I=\frac{E}{r+\frac{RZ}{R+Z}}$. Для

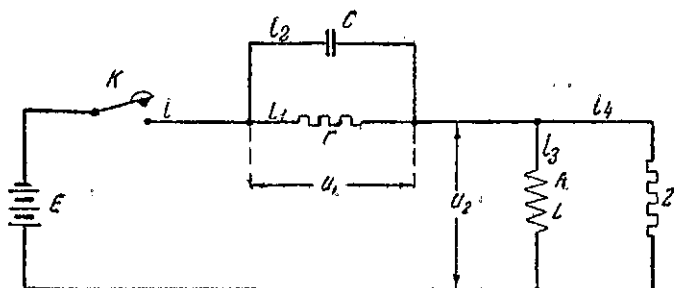
того чтобы $I=\frac{E}{Z_y}$, надо положить

$$r+\frac{RZ}{R+Z}=Z_y.$$

Полагая параметры R и L электромагнитного реле заданными, имеем

$$r=Z_y-\frac{RZ}{R+Z}.$$

Таким образом, в начальный и конечный моменты устанавливания тока проводимости приемного устройства по схеме фиг. 142 как раз равны проводимости бегущей волны. Теперь надо подобрать емкость кон-



Фиг. 142.

денсатора C так, чтобы обе проводимости совпадали в любой момент устанавливания тока. Для этой цели необходимо вывести уравнение для тока i (фиг. 142), решить его и проанализировать полученное решение.

Очевидно, что

$$i=i_1+i_2=i_3+i_4,$$

$$u_1=E-Ri_3-L\frac{di_3}{dt}.$$

С другой стороны,

$$u_1=r i_1=r i-r i_2,$$

$$\frac{du_1}{dt}=\frac{i_2}{C}=-R\frac{di_2}{dt}-L\frac{d^2i_2}{dt^2},$$

т. е.

$$i_2=-RC\frac{di_2}{dt}=-LC\frac{d^2i_2}{dt^2}.$$

И так как

$$E=u_1+Ri_3+L\frac{di_3}{dt}=r i-r i_2-Ri_3+L\frac{di_3}{dt},$$

то

$$E=(r+R)i_3+(L+RrC)\frac{di_3}{dt}+LCr\frac{d^2i_3}{dt^2}+r i_4.$$

Но

$$Zi_k = Ri_3 + L \frac{di_3}{dt},$$

т. е.

$$ri_k = \frac{Rr}{Z} i_3 + \frac{Lr}{Z} \frac{di_3}{dt},$$

следовательно,

$$E = \left(r + R + \frac{Rr}{Z}\right) i_3 + \left(L + \frac{Lr}{Z} + RrC\right) \frac{di_3}{dt} + LCr \frac{d^2 i_3}{dt^2}. \quad (a)$$

Выведем теперь второе уравнение для тока i_k . Так как

$$E = u_1 + Zi_k = ri - ri_2 + Zi_k,$$

то

$$\frac{du_1}{dt} = -Z \frac{di_k}{dt} = \frac{i_2}{C},$$

откуда

$$i_2 = -ZC \frac{di_k}{dt}.$$

Подставляя в уравнение

$$E = ri + Zi_k - ri_2,$$

получим

$$E = ri + Zi_k + ZrC \frac{di_k}{dt} = r(i_k + i_3) + Zi_k + ZrC \frac{di_k}{dt},$$

откуда

$$i_3 = \frac{E}{r} - \frac{r+Z}{r} i_k - ZC \frac{di_k}{dt},$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{r+Z}{r} \frac{di_k}{dt} - ZC \frac{d^2 i_k}{dt^2}.$$

И так как

$$Zi_k = Ri_3 + L \frac{di_3}{dt},$$

то после подстановки получим

$$E = \left(r + R + \frac{Rr}{Z}\right) i_k + \left(rZC + L \frac{r+Z}{R}\right) \frac{di_k}{dt} + LC \frac{rZ}{R} \frac{d^2 i_k}{dt^2}. \quad (б)$$

Умножим уравнение (а) на Z и уравнение (б) на R

$$EZ = (RZ + rZ + Rr) i_3 + (RrZC + LZ + Lr) \frac{di_3}{dt} + LCrZ \frac{d^2 i_3}{dt^2},$$

$$ER = (RZ + rZ + Rr) i_k + (RrZC + LZ + Lr) \frac{di_k}{dt} + LCrZ \frac{d^2 i_k}{dt^2}.$$

Имея в виду, что

$$i_3 + i_k = i,$$

сложим полученные уравнения

$$E \frac{R+Z}{LCrZ} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{CRrZ + L(r+Z)}{LCrZ} \frac{di}{dt} + \frac{Rr + RZ + rZ}{LCrZ} i.$$

Обозначая

$$\frac{C R r Z + L(r + Z)}{L C r Z} = m, \quad \frac{R r + R Z + r Z}{L C r Z} = n,$$

$$E \frac{R + Z}{L C r Z} = A,$$

получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + m \frac{di}{dt} + ni = A. \quad (17)$$

Общее решение данного уравнения имеет следующий вид:

$$i = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$

C_1 и C_2 — функции времени t , определяемые из уравнений

$$e^{\alpha_1 t} \frac{dC_1}{dt} + e^{\alpha_2 t} \frac{dC_2}{dt} = 0,$$

$$\alpha_1 e^{\alpha_1 t} \frac{dC_1}{dt} + \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \frac{dC_2}{dt} = A,$$

откуда

$$C_1 = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} \int e^{-\alpha_1 t} dt = -\frac{A}{\alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_2)} e^{-\alpha_1 t} + A_1,$$

$$C_2 = -\frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} \int e^{-\alpha_2 t} dt = \frac{A}{\alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} e^{-\alpha_2 t} + A_2,$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования. Ток же i и его производная по времени $\frac{di}{dt}$ выражается соотношениями

$$i = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{A}{\alpha_1 \alpha_2},$$

$$\frac{di}{dt} = A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 имеем следующие условия

для $t = 0$

$$u = 0, \quad i_3 = 0, \quad i_k = \frac{E}{Z},$$

$$i = i_3 + i_k = \frac{E}{Z} \quad \text{и} \quad \frac{di_3}{dt} = \frac{E}{L}.$$

При этих условиях из уравнения

$$r i_3 = E - (r + Z) i_k - C Z r \frac{di_k}{dt}$$

находим для $t = 0$

$$\frac{di_k}{dt} = -\frac{E}{Z^2 C}.$$

Итак, для $t=0$

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{E}{L}, \quad \frac{di_4}{dt} = -\frac{E}{Z^2 C},$$

следовательно,

$$\frac{d(i_3 + i_4)}{dt} = \frac{dt}{dt} = E \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{Z^2 C} \right) = E \frac{Z^2 C - L}{Z^2 LC}.$$

Таким образом, для $t=0$

$$A_1 + A_2 = \frac{E}{Z} - \frac{A}{\alpha_1 \alpha_2},$$

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = E \frac{Z^2 C - L}{Z^2 CL}.$$

Имея же в виду, что $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{n}$, получим

$$\frac{A}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{A}{n} = E \frac{R + Z}{Rr + RZ + rZ} = I,$$

где I — установившееся значение тока в цепи фиг. 142. Подставляя, находим

$$A_1 + A_2 = \frac{E}{Z} - I = -E \frac{Z^2 - r(R + Z)}{Z(Rr + RZ + rZ)},$$

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = E \frac{Z^2 C - L}{Z^2 LC}.$$

Из этих двух уравнений получим

$$A_1 = \frac{E}{Z(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\frac{Z^2 - r(R + Z)}{RZ + r(R + Z)} \alpha_2 + \frac{Z^2 C - L}{ZLC} \right],$$

$$A_2 = -\frac{E}{Z(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\frac{Z^2 - r(R + Z)}{RZ + r(R + Z)} \alpha_1 + \frac{Z^2 C - L}{ZLC} \right].$$

Отметим тот частный случай, когда электромагнитные параметры рассматриваемой схемы связаны следующими соотношениями:

$$C = \frac{L}{Z^2},$$

$$r = \frac{Z^2}{R + Z}.$$

В этом случае постоянные интегрирования A_1 и A_2 равны нулю, и ток в цепи (фиг. 143) мгновенно устанавливается

$$i = \frac{A}{\alpha_1 \alpha_2} = I.$$

Случай этот соответствует хивисайдовскому соотношению первичных параметров линии, с которой согласуется наше приемное устройство.

Пусть $C \neq \frac{L}{Z^2}$ и $r \neq \frac{Z^2}{R + Z}$. Преобразуем полученные формулы для постоянных A_1 и A_2 . При анализе точных решений для бегущей

волны мы пришли к следующему выражению для начальной касательной тока i_0 (для $x=0$) по времени

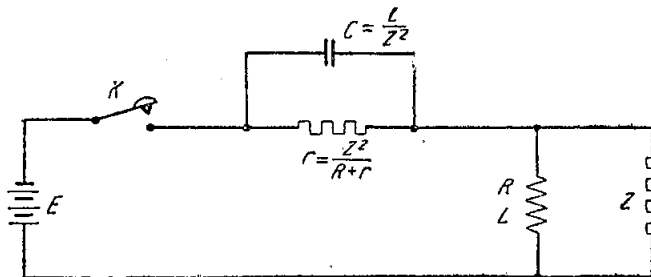
$$\left(\frac{di_0}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{E\sigma}{Z};$$

теперь же имеем

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = E \frac{Z^2 C - L}{Z^2 LC}.$$

Производные будут равны, если

$$\sigma = \frac{L - Z^2 C}{ZLC}.$$



Фиг. 143.

Если $C = \frac{L}{Z^2}$, то действительно $\sigma = 0$, и устанавливающийся режим в цепи отсутствует. Имея в виду, что для общего случая

$$r = Z_y - \frac{RZ}{R+Z}$$

и подставляя значение $\sigma = \frac{L - Z^2 C}{LCZ}$, приходим к следующим формулам:

$$A_1 = -E \frac{(Z_y - Z) \alpha_2 + \sigma Z_y}{ZZ_y (\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$A_2 = E \frac{(Z_y - Z) \alpha_1 + \sigma Z_y}{ZZ_y (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Если при этом

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma Z_y}{Z_y - Z} = -\delta,$$

то

$$A_2 = 0, \quad A_1 \neq 0,$$

$$i = I + A_1 e^{-\delta t} = E \left[\frac{1}{Z_y} - \frac{(Z_y - Z) \alpha_2 + \sigma Z_y}{ZZ_y (\alpha_1 - \alpha_2)} e^{-\delta t} \right].$$

Проводимость цепи будет равна

$$\frac{i}{E} = \frac{1}{Z_y} - \frac{(Z_y - Z) \alpha_2 + \sigma Z_y}{ZZ_y (\alpha_1 - \alpha_2)} e^{-\delta t}.$$

Подставляя сюда $\alpha_1 = -\frac{\sigma Z_y}{Z_y - Z}$, получим

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta t} = G_b,$$

т. е. проводимость схемы фиг. 142 будет как раз равна волновой проводимости бегущей волны.

Рассмотрим последнее условие согласования приемного устройства с линией

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma Z_y}{Z - Z} = -\delta.$$

Так как в общем случае ($m^2 \neq 4n$)

$$\alpha_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}, \quad \alpha_2 = \delta - m,$$

то

$$\sqrt{m^2 - 4n} = m - 2\delta,$$

откуда после соответствующей подстановки получим

$$C = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R - \delta L} \right), \quad (\alpha)$$

где

$$r = Z_y - \frac{RZ}{R + Z},$$

$$R_1 = \frac{rZ}{r + Z} = Z \frac{R(Z_y - Z) + ZZ_y}{RZ_y + (Z_y + Z)Z}.$$

С другой стороны, исходя из условия

$$\sigma = \frac{L - Z^2 C}{ZLC},$$

находим

$$C = \frac{L}{Z(Z + \sigma L)}. \quad (\beta)$$

Формулы (α) и (β) должны быть согласованы между собою, т. е.

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R - \delta L} \right) = \frac{L}{Z(Z + \sigma L)}. \quad (\gamma)$$

Равенство это возможно только при одном условии — когда для любого момента времени напряжение u_2 равно $u_2 = Zi$. Достичь этого можно двумя способами. Мы можем положить $L = \infty$, тогда $u_2 = Zi$, но схема фиг. 142 обращается в этом случае в схему фиг. 144, причем

$$\frac{\sigma}{\delta} = \frac{R_1}{Z},$$

и так как

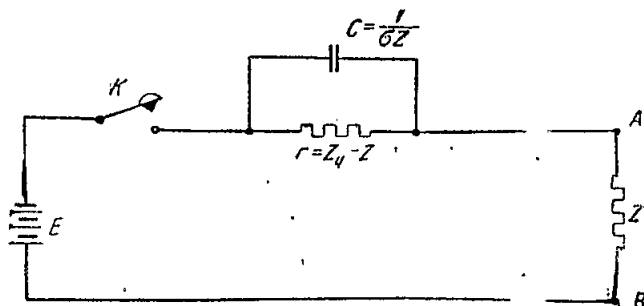
$$\frac{\sigma}{\delta} = \frac{Z_y - Z}{Z_y},$$

то

$$R_1 = Z \frac{Z_y - Z}{Z_y}.$$

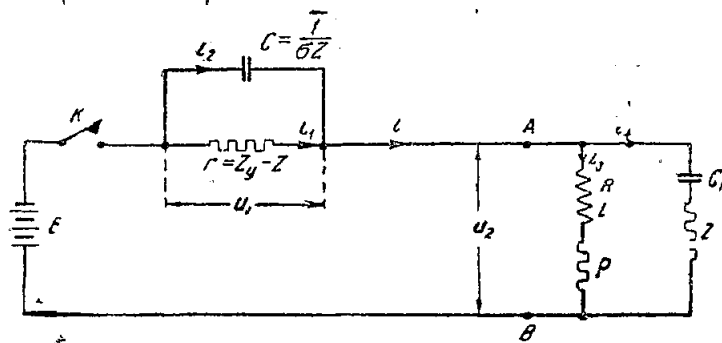
Но

$$R_1 = Z \frac{R(Z_y - Z) + ZZ_y}{RZ_y + (Z_y + Z)Z},$$



Фиг. 144.

следовательно, $R = \infty$, причем $C = \frac{1}{\sigma Z}$. Схема фиг. 144 для рассматриваемого случая бесполезна, так как не включает в себе реле, которое нам необходимо согласовать с линией. Оставляя же реле в схеме, мы должны так изменить схему, чтобы $u_2 = Zi$. Получить это мы сможем, если включим (фиг. 145) в ветвь сопротивления Z



Фиг. 145.

конденсатор C_1 и в ветвь реле сопротивление p , причем подберем их таким образом, чтобы $R + p = Z$ и

$$\frac{L}{Z} = C_1 Z.$$

В этом случае постоянные ветвей реле и сопротивления будут равны, комбинированная же проводимость обеих ветвей при любом значении напряжения u_2 будет равна $\frac{1}{Z}$. Иными словами, схемы фиг. 144 и 145 по отношению к току i будут идентичны, сопротивление участков сети

AB в любой момент времени будут равны. Покажем это. Для схемы фиг. 146 напомним следующее уравнение:

$$\frac{di_3}{dt} + \frac{Z}{L} i_3 - \frac{u_2}{L} = 0,$$

где u_2 — некоторая функция от времени t . Общее решение этого линейного уравнения имеет следующий вид:

$$i_3 = e^{-\frac{Z}{L}t} \left(A_1 + \frac{1}{L} \int u_2 e^{\frac{Z}{L}t} dt \right),$$

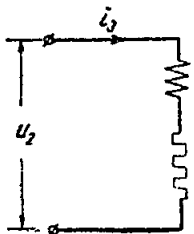
где A_1 — постоянная интегрирования.

Для схемы фиг. 147 имеем

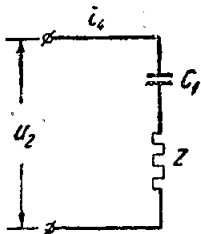
$$\frac{di_4}{dt} + \frac{i_4}{ZC} - \frac{u_2'}{Z} = 0,$$

$$i_4 = e^{-\frac{t}{ZC}} \left(A_2 + \frac{1}{Z} \int u_2' e^{\frac{t}{ZC}} dt \right),$$

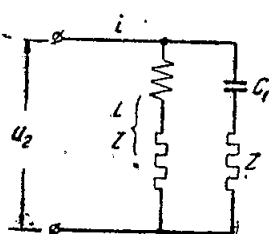
где A_2 — постоянная интегрирования.



Фиг. 146.



Фиг. 147.



Фиг. 148.

Имея в виду, что

$$(u_2 e^{\frac{t}{ZC}})' = u_2' e^{\frac{t}{ZC}} + \frac{u_2}{ZC} e^{\frac{t}{ZC}},$$

перепишем решение для тока i_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned} i_4 &= A_2 e^{-\frac{t}{ZC}} + \frac{e^{-\frac{t}{ZC}}}{Z} \int (u_2 e^{\frac{t}{ZC}})' dt - \frac{e^{-\frac{t}{ZC}}}{Z^2 C} \int u_2 e^{\frac{t}{ZC}} dt = \\ &= A_2 e^{-\frac{t}{ZC}} + \frac{u_2}{Z} - \frac{e^{-\frac{t}{ZC}}}{Z^2 C} \int u_2 e^{\frac{t}{ZC}} dt. \end{aligned}$$

Теперь легко написать выражение для тока i (фиг. 148).

$$\begin{aligned} i &= A_1 e^{-\frac{Z}{L}t} + A_2 e^{-\frac{t}{ZC}} + \frac{u_2}{Z} + \frac{e^{-\frac{Z}{L}t}}{L} \int u_2 e^{\frac{Z}{L}t} dt - \\ &\quad - \frac{e^{-\frac{t}{ZC}}}{Z^2 C} \int u_2 e^{\frac{t}{ZC}} dt. \end{aligned}$$

Если при этом $\frac{L}{Z} = CZ = b$, то

$$\frac{e^{-\frac{Z}{L}t}}{L} \int u_2 e^{\frac{Z}{L}t} dt = \frac{e^{-\frac{t}{ZC}}}{Z^2 C} \int u_2 e^{\frac{t}{ZC}} dt$$

и

$$i = (A_1 + A_2) e^{-bt} + \frac{u_2}{Z}.$$

Для $t=0$ должно быть $i = \frac{u_2}{Z}$, следовательно,

$$A_1 + A_2 = 0 \quad \text{и} \quad i = \frac{u_2}{Z}$$

при любом значении времени t .

Возвращаясь к схеме фиг. 145, выведем формулу для напряжения u_2 .

Так как

$$E = u_1 + u_2$$

и

$$u_1 = r(i - i_2) = \frac{1}{C} \int i_2 dt,$$

то

$$E = ri - ri_2 + u_2.$$

Но

$$i = \frac{u_2}{Z},$$

следовательно,

$$E = \frac{r+Z}{Z} u_2 - ri_2,$$

т. е.

$$i_2 = \frac{r+Z}{Zr} u_2 - \frac{E}{r}.$$

С другой стороны,

$$ri - ri_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt,$$

или

$$\frac{r}{Z} u_2 - ri_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt,$$

откуда

$$\frac{r}{Z} \frac{du_2}{dt} - r \frac{di_2}{dt} - \frac{i_2}{C} = 0.$$

Подставляя сюда значение тока i_2 , находим

$$\frac{du_2}{dt} + u_2 \frac{r+Z}{rZC} - \frac{E}{rc} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$u_2 = A e^{-\frac{r+Z}{rZC}t} + \frac{EZ}{r+Z},$$

где A — постоянная интегрирования.

Для $t=0$ должно быть $u_2=E$, следовательно,

$$A=E \frac{r}{r+Z}$$

и

$$u_2 = \frac{E}{r+Z} \left(Z + r e^{-\frac{r+Z}{ZrC} t} \right).$$

Так как

$$r=Z_y-Z, \quad C=\frac{1}{\sigma Z}=\frac{1}{\delta Z} \frac{Z_y}{Z_y-Z},$$

то

$$u_2 = E \left(\frac{Z}{Z_y} + \frac{Z_y-Z}{Z_y} e^{-\delta t} \right)$$

и

$$i = \frac{u_2}{Z} = E \left[\frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta t} \right].$$

Проводимость же схемы фиг. 145 равна

$$\frac{i}{E} = \frac{1}{Z_y} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_y} \right) e^{-\delta t} = G_b.$$

Проверим наше решение, составив уравнение для схемы, фиг. 145, и подставляя в него полученное нами решение.

Имея в виду, что

$$u_1 = E - Ri_3 - L \frac{di_1}{dt} = ri_1 = ri - ri_2,$$

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4,$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{i_2}{C} = -R \frac{di_3}{dt} - L \frac{d^2 i_3}{dt^2},$$

$$u_2 = Ri_3 + L \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{C_1} \int i_4 dt + Ri_4,$$

получим

$$\begin{aligned} E = (r+R)i_3 + (L+rRC+R^2C_1+2rRC_1) \frac{di_3}{dt} + \\ + [RC_1(L+rRC)+Lr(C+C_1)] \frac{d^2 i_3}{dt^2} + LCC_1 Rr \frac{d^3 i_3}{dt^3}. \end{aligned} \quad (a)$$

С другой стороны,

$$E = r(i-i_2) + Ri_4 + \frac{1}{C_1} \int i_4 dt,$$

$$i_2 = -RC \frac{di_4}{dt} - \frac{C}{C_1} i_4,$$

$$i_3 = \frac{E}{r} - \frac{1}{C_1 r} (rC_1 + RC_1 + rC) i_4 - RC \frac{di_4}{dt} - \frac{1}{rC_1} \int i_4 dt,$$

$$Ri_3 + L \frac{di_3}{dt} = Ri_4 + \frac{1}{C_1} \int i_4 dt.$$

Подставляя, находим

$$0 = (r + R) i_4 + (L + rRC + R^2 C_1 + 2rRC_1) \frac{di_4}{dt} + [RC_1(L + rRC) + Lr(C + C_1)] \frac{d^2 i_4}{dt^2} + LCC_1 Rr \frac{d^3 i_4}{dt^3}. \quad (6)$$

Складывая уравнение (а) и (б), получим

$$(r + R) i + (L + rRC + R^2 C_1 + 2rRC_1) \frac{di}{dt} + [RC_1(L + rRC) + Lr(C + C_1)] \frac{d^2 i}{dt^2} + LCC_1 Rr \frac{d^3 i}{dt^3} = E.$$

В разобранном нами частном случае мы имели

$$R = Z, \quad L = Z^2 C_1, \quad r = Z_y - Z, \quad C = \frac{1}{\delta Z} = \frac{Z_y}{Z(Z_y + Z)\delta}.$$

Подставляя, находим

$$\begin{aligned} r + R &= Z_y, \\ L + R^2 C_1 + RrC + 2RrC_1 &= \left(\frac{1}{\delta} + \frac{2L}{Z}\right) Z_y, \\ R_1 C_1 (L + rRC_1) + Lr(C + C_1) &= \left(\frac{2}{\delta} + \frac{L}{Z}\right) \frac{LZ_y}{Z}, \\ LCC_1 Rr &= \frac{L^2 Z_y}{Z^2 \delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$Z_y i + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{2L}{Z}\right) Z_y \frac{di}{dt} + \left(\frac{2}{\delta} + \frac{L}{Z}\right) \frac{LZ_y}{Z} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L^2 Z_y}{Z^2 \delta} \frac{d^3 i}{dt^3} = E. \quad (в)$$

И так как

$$i = E \left(\frac{1}{Z_y} + \frac{Z_y - Z}{Z_y Z} e^{-\delta t} \right),$$

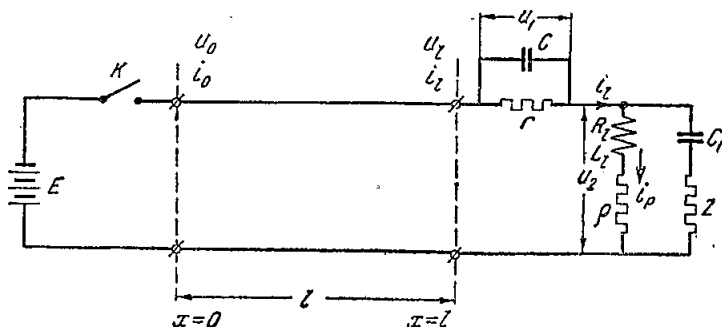
то, подставляя, убеждаемся, что приведенное решение удовлетворяет уравнению (в).

§ 4. Ток в приемном реле при согласованном включении

Так как приемное устройство согласовано с линией (фиг. 149), то напряжение на зажимах приемной станции u_l и полный ток i_l приемного устройства должны определяться формулами для напряжения и тока бегущей волны вдоль бесконечно длинной линии в пункте, отстоящем от начала линии на расстоянии l км, или формулами [см. формулы (3₂), стр. 164]

$$u_l = E [e^{-\beta l} + e^{-\delta u(t-t_0)} (e^{-bt_0} - e^{-\beta l})], \quad (а)$$

$$i_l = E \left[\sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} + e^{-\delta_l(t-t_0)} \left(\sqrt{\frac{G}{L}} e^{-bt_0} - \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\beta l} \right) \right],$$



Фиг. 149.

или [см. формулы (16), стр. 224]

$$u_l = E e^{-\frac{G + R G_b^2}{2 G_b} l - \eta},$$

$$i_l = E G_b e^{-\frac{G + R G_b^2}{2 G_b} l - \eta}, \quad (6)$$

где

$$\eta = \frac{\sigma^2 t_0}{2} (t - t_0) e^{-\delta(t-t_0)}$$

и

$$\delta = \frac{\sigma Z}{Z_y - Z}.$$

Мы видели, что результаты вычисления по формулам (а) и (б) практически совпадают. Это обстоятельство дает возможность в дальнейшем анализе пользоваться любой из приведенных формул (а) и (б). Если воспользоваться формулами (а), то для напряжения u_2 (фиг. 149) мы должны написать следующее выражение:

$$u_2 = i_l Z = E Z \left[\frac{e^{-\beta l}}{Z_y} + e^{-\delta_l(t-t_0)} \left(\frac{e^{-bt_0}}{Z} - \frac{e^{-\beta l}}{Z_y} \right) \right] =$$

$$= m + n e^{-\delta_l(t-t_0)},$$

где

$$m = E \frac{Z}{Z_y} e^{-\beta l}, \quad n = E Z \left(\frac{e^{-bt_0}}{Z} - \frac{e^{-\beta l}}{Z_y} \right).$$

Уравнение для ветви приемного реле, как мы видели выше, имеет следующий вид (вспомним, что $R_l + p = Z$):

$$\frac{di_p}{d(t-t_0)} + \frac{Z}{L_l} i_p - \frac{u_2}{L_l} = 0.$$

Следовательно,

$$i_p = e^{-\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} \left[A_1 + \frac{1}{L_l} \int u_2 e^{\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} d(t-t_0) \right],$$

где A — постоянная интегрирования. Но

$$\int u_2 e^{\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} d(t-t_0) = \int [m + n e^{-\delta_i(t-t_0)}] e^{\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} d(t-t_0) = \\ = \left[\frac{m L_l}{Z} + \frac{n L_l}{Z - L_l \delta_i} e^{-\delta_i(t-t_0)} \right] e^{\frac{Z}{L_l}(t-t_0)},$$

значит,

$$i_p = A_1 e^{-\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} + \frac{m}{Z} + \frac{n}{Z - L_l \delta_i} e^{-\delta_i(t-t_0)}.$$

Для $t=t_0$ должно быть $i_p=0$, следовательно,

$$A_1 = - \left(\frac{m}{Z} + \frac{n}{Z - L_l \delta_i} \right).$$

Подставляя, находим

$$i_p = \frac{E}{Z_y} e^{-\beta t} \left[1 - e^{-\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} \right] + \\ + E \frac{Z_y e^{-\beta t_0} - Z e^{-\beta t}}{Z_y (Z - L_l \delta_i)} \left[e^{-\delta_i(t-t_0)} - e^{-\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} \right]. \quad (18)$$

Для железной однопроводной 5-миллиметровой линии длиной в 600 км и с приведенными выше первичными параметрами и реле Бодо на приемном конце имеем: $R_l=200 \text{ } \Omega$, $\rho=1251 \text{ } \Omega$, $L_l=1.5 \text{ Н}$, $Z=1451 \text{ } \Omega$, $Z_y=3837 \text{ } \Omega$, $\frac{Z}{L_l}=967.3 \frac{\Omega}{\text{Н}}$, $\delta_l L_l=165.3 \cdot 1.5 \text{ } \Omega=247.8 \text{ } \Omega$. Подставляя

Таблица 34

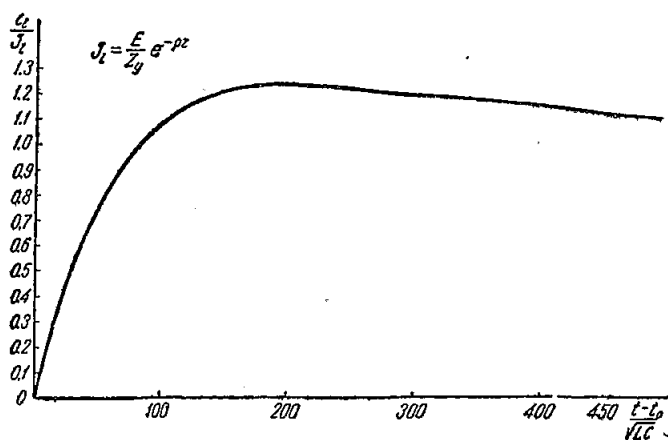
$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$\frac{i_1}{I}$	$\frac{i_2}{I}$	$\frac{i_p}{I}$	$\frac{t-t_0}{\sqrt{LC}}$	$\frac{i_1}{I}$	$\frac{i_2}{I}$	$\frac{i_p}{I}$
0	0	0	0	120	0.8500	0.3188	1.1688
10	0.1470	0.0671	0.2141	140	0.8901	0.3197	1.2098
20	0.2717	0.1220	0.3937	160	0.9195	0.3160	1.2355
30	0.3787	0.1676	0.5463	180	0.9410	0.2991	1.2500
40	0.4695	0.1998	0.6693	200	0.9554	0.2991	1.2545
50	0.5475	0.2341	0.7816	300	0.9914	0.2422	1.2336
60	0.6140	0.2582	0.8722	400	1.0000	0.1884	1.1884
70	0.6704	0.2770	0.9474	500	1.0000	0.1435	1.1435
80	0.7189	0.2917	1.0106	600	1.0000	0.1094	1.1094
90	0.7607	0.3031	1.0638		1.0000	0.0000	1.0000
100	0.7953	0.3107	1.1060				

$$i_1 = \frac{E}{Z_y} e^{-\beta t} \left[1 - e^{-\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} \right],$$

$$i_2 = \frac{E}{Z_y} \frac{Z_y e^{-\beta t_0} - Z e^{-\beta t}}{Z - L_l \delta_i} \left[e^{-\delta_i(t-t_0)} - e^{-\frac{Z}{L_l}(t-t_0)} \right],$$

$$I = \frac{E}{Z_y} e^{-\beta t}.$$

эти значения в формулу (18), получим табл. 34 и график фиг. 150. Для того же, чтобы сравнить влияние первого и второго члена формулы (18) на силу тока реле i_p , приводим в той же таблице значение и этих членов.



Фиг. 150.

§ 5. Искусственная линия, копирующая естественную при устанавливающемся режиме

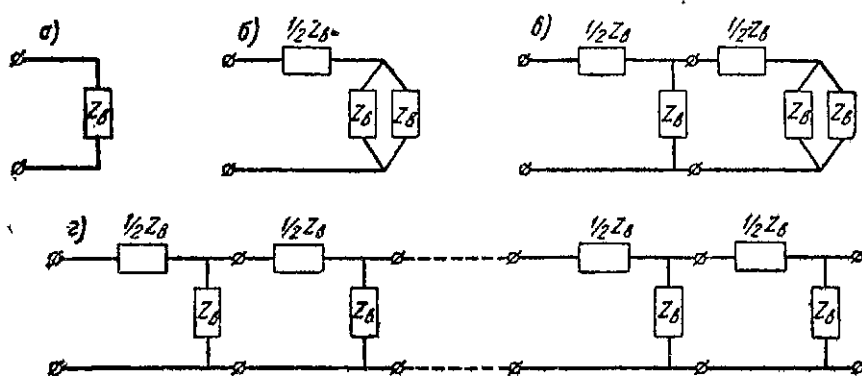
На фиг. 148 приведена схема приемного устройства, сопротивление которой равно волновому сопротивлению бесконечно длинной линии при установившемся режиме. Обозначим это сопротивление прямоугольником Z_b (фиг. 151,а). Схема фиг. 151,а может быть заменена эквивалентной ей схемой фиг. 151,б. Заменяя же одно из сопротивлений Z_b последней схемы эквивалентной ему полной схемой фиг. 151,б, получим схему фиг. 151,в, сопротивление которой также равно Z_b . Продолжая и дальше подобную же замену, получим схему фиг. 151,г, сопротивление которой при каком угодно числе звеньев будет оставаться равным Z_b . Применим этот метод к схеме фиг. 144.

Так как

$$G_b = \frac{1}{Z_b} = \frac{1}{Z(r+Z)} \left(Z + re^{-\frac{r+Z}{rZC}t} \right),$$

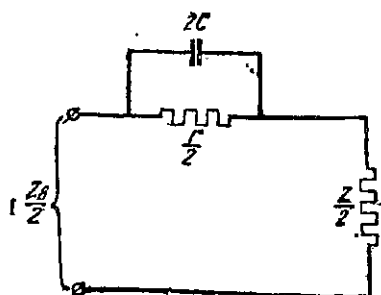
то, заменив в схеме фиг. 144 сопротивление r на $\frac{r}{2}$, Z на $\frac{Z}{2}$, емкость C на $2C$, получим проводимость схемы с новыми параметрами (фиг. 152), равную

$$\frac{1}{\frac{Z}{2} \left(\frac{r}{2} + \frac{Z}{2} \right)} \left(\frac{Z}{2} + \frac{r}{2} e^{-\frac{\frac{r}{2} + \frac{Z}{2}}{\frac{r}{2} \frac{Z}{2} 2C} t} \right) = 2G_b = \frac{2}{Z_b},$$

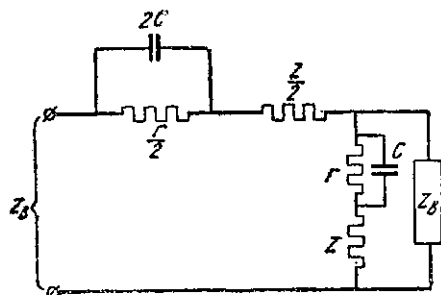


Фиг. 151.

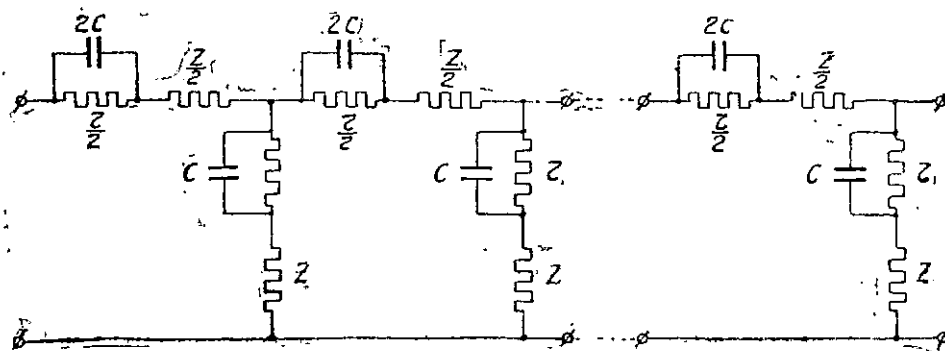
т. е. сопротивление схемы фиг. 152 будет равно половине волнового сопротивления бегущей волны. Это обстоятельство дает возможность



Фиг. 152.



Фиг. 153.



Фиг. 154.

заменить схему фиг. 144 эквивалентной ей схемой фиг. 153. Применяя же метод построения цепочки фиг. 151, придем к искусственной линии фиг. 154, копирующей естественную линию при устанавливающемся режиме.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть первая

Анализ устанавливающихся электромагнитных процессов вдоль кабеля

	<i>Стр.</i>
Глава I. Общее решение уравнений электромагнитной волны вдоль проводной линии с учетом всех параметров последней	5
§ 1. Общие решения для установившихся и переходных процессов	—
§ 2. Анализ общего решения для переходных процессов	7
§ 3. Соотношения между постоянными интегрирования общих решений для переходных процессов и общие решения телеграфных уравнений	10
Глава II. Анализ электромагнитных процессов вдоль кабеля при работе симплексом	11
§ 1. Общее решение телеграфных уравнений	—
§ 2. Кабель с приемными и передающими устройствами	12
§ 3. Конец кабеля заземлен, в начале кабеля включена батарея E с нулевым внутренним сопротивлением	20
§ 4. Иллюстрации к предыдущему параграфу	25
Глава III. Анализ электромагнитных процессов вдоль кабеля при работе дуплексом	29
§ 1. На концах кабеля включены батареи, соединяющиеся при нажатии ключа разноименными полюсами	—
§ 2. На обоих концах кабеля включены батареи, соединяющиеся при нажатии ключа одноименными полюсами	30
§ 3. Вначале батареи соединены одноименными полюсами; после нажатия ключа левой станции батареи соединяются разноименными полюсами	—
§ 4. Вначале батареи соединены отрицательными полюсами; после одновременного нажатия ключей на обеих станциях батареи соединяются положительными полюсами	31
§ 5. Батареи соединены разноименными полюсами; после нажатия ключа на левой станции батареи соединяются одноименными полюсами	33
§ 6. Батареи соединены разноименными полюсами; после одновременного нажатия ключа на левой станции и отпускания на правой — знаки у полюсов батарей меняются	—
Глава IV. Кабель с изолированным концом	34
§ 1. Разряд кабеля (нажатый ключ K отпускается)	—
§ 2. Заряд кабеля (ключ K нажимается)	35
Глава V. Распространение прерывистого тока по кабелю ($L=0$, $G=0$)	36
А. Передача по кабелю ($L=0$, $G=0$) прерывистых токов одного направления без перерыва цепи	—
§ 1. Метод определения постоянных интегрирования	—
§ 2. Метод наложения кривых	46

	<i>Стр.</i>
Б. Передача по кабелю ($L=0$, $G=0$) прерывистых токов обоих направлений без перерыва цепи	48
§ 1. Метод определения постоянных интегрирования	—
§ 2. Метод наложения кривых	53
В. Границы применения метода наложения кривых	54
Глава VI. Кабель с приемником в конце	58
§ 1. Замыкание и размыкание цепи на длительное время	—
§ 2. Передача прерывистого тока по кабелю с приемником на конце	69

Часть вторая

Анализ точных решений уравнений электромагнитной волны вдоль линии

<i>Классический метод анализа электромагнитных процессов вдоль над- земной линии</i>	<i>74</i>
Глава I. Учет влияния концов линии на устанавливающиеся процессы	—
§ 1. Общие положения	—
§ 2. Линия с приемными и передающими устройствами	76
§ 3. Частные случаи	77
§ 4. Линия с электромагнитными передатчиком и приемником, причем $\frac{L_0}{R_0} = \frac{L_1}{R_1} = \frac{L}{R}$	80
Глава II. Линия, заземленная в конце, и с батареей нулевого сопро- тивления в начале	83
§ 1. Вывод точных решений	—
§ 2. Переход от конечной линии к бесконечно длинной	86
§ 3. Анализ электромагнитных процессов вдоль линии с замкну- тым на коротко концом и батареей нулевого сопротивления в начале	89
Глава III. Работа дуплексом ($G=0$)	96
§ 1. Батареи в начале соединены одноименными полюсами ($-u-$); при нажатии ключа на одной из станций батареи соединяются разноименными полюсами	—
§ 2. Батареи в начале соединены разноименными полюсами; после нажатия ключа батареи соединяются одноименными полюсами	98
§ 3. Батареи соединены разноименными ($+u-$) полюсами; после одновременного нажатия ключей на той и другой станциях батареи меняют знаки ($-u+$)	—
§ 4. Батареи соединены одноименными полюсами ($-u-$); после одновременного нажатия ключей на обеих станциях батареи меняют знаки ($+u+$)	100
Глава IV. Передача по линии прерывистого тока	103
§ 1. Метод определения постоянных интегрирования	—
§ 2. Метод наложения кривых	106
Глава V. Ток и напряжение головной электромагнитной волны	109
§ 1. Вывод формулы тока головной волны, исходя из решения для заземленной линии	—
§ 2. Вывод формул напряжения и тока головной волны методом проф. Л. Б. Слепаяна	110
§ 3. Анализ кривых напряжения и тока бегущей волны	112
§ 4. Волновое сопротивление и волновая проводимость бегущей волны	117
<i>Анализ устанавливающихся электромагнитных процессов вдоль линии новейшими методами</i>	<i>125</i>
Глава VI	—
§ 1. Предисловие	—
§ 2. Решение телеграфных уравнений для линии бесконечно длин- ной операторным методом	126
§ 3. Двойной интеграл Фурье и его применение в электротехнике	129
§ 4. Анализ бегущей электромагнитной волны методом комплекс- ных амплитуд	141
	247

Часть третья

Приближенные решения уравнений электромагнитной волны вдоль надземных линий

	Стр.
Глава I. Вывод приближенных формул бегущей электромагнитной волны вдоль проводных линий	156
§ 1. Введение	—
§ 2. Точные характеристики головной электромагнитной волны	157
§ 3. Общее решение для бегущей электромагнитной волны	160
§ 4. Особенности общего решения для бегущей волны	161
§ 5. Определение постоянных интегрирования приближенных решений для бегущей волны	162
§ 6. Определение временных параметров приближенного решения	163
§ 7. Иллюстрации к предыдущим параграфам	164
Глава II. Переход от решений для бесконечно длинной линии к решению для линии конечной длины	173
§ 1. Установившиеся вдоль линии процессы и их связь с устанавливающимися	—
§ 2. Линия конечной длины с полным отражением волны от концов линии	176
§ 3. Вывод формул для устанавливающихся напряжения и тока вдоль линии с полным отражением волны от ее концов на основе законов отражения электромагнитной волны	182
§ 4. Линия конечной длины с неполным отражением волны от концов линии	198
§ 5. Устанавливающиеся электромагнитные процессы в конце линии с электромагнитным приемником	211
§ 6. Иллюстрации к предыдущему параграфу	215
Глава III. Анализ бегущей волны на основе имеющегося выражения ее волнового сопротивления	221
§ 1. Вывод формул бегущей волны	—
§ 2. Анализ полученного решения	224
§ 3. Согласованное включение аппарата в линию	230
§ 4. Ток в приемном реле при согласованном включении	241
§ 5. Искусственная линия, копирующая естественную при устанавливаемом режиме	244

Подписано к печати 11/VII 1945 г. Печ. л. 15,5 + 1 вкл. Уч.-изд. л. 22. М 02845.
Тираж 2 000. Заказ № 152.

2-я типография „Печатный Двор“ им. А. М. Горького, треста „Полиграфкина“
ОГИЗ'а при СНК РСФСР. Ленинград. Гатчинская, 26.

621-315

K-56

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
112	Таблица 10, 3-я графа, 6-я снизу 10-я сверху	0.5	0.6
214		$I_l = \frac{EZ_y + Z_{l1}}{Z_y R_l + Z_{l1}} e^{-\beta l}$	$I_l = \frac{E}{Z_v} \frac{Z_y + Z_{l1}}{R_l + Z_{l1}} e^{-\beta l}$
240	10-я снизу	$u_1 = E - Ri_2 - L \frac{di_1}{dt} =$ $= ri_1 = ri - ri_2,$	$u_1 = E - Ri_2 - Z \frac{di_2}{dt} =$ $= ri_1 = ri - ri_2,$