

НАРОДНЫЙ КОМИССАРИАТ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ №1

ТРУДЫ НИИ-1

№ 4

62413  
X-14

К РАСЧЕТУ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ  
СОПРОТИВЛЕНИЕ И ТЕПЛООТДАЧА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ  
В ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Л. Е. Калихман

ИЗДАТЕЛЬСТВО БЮРО НОВОЙ ТЕХНИКИ НКАП

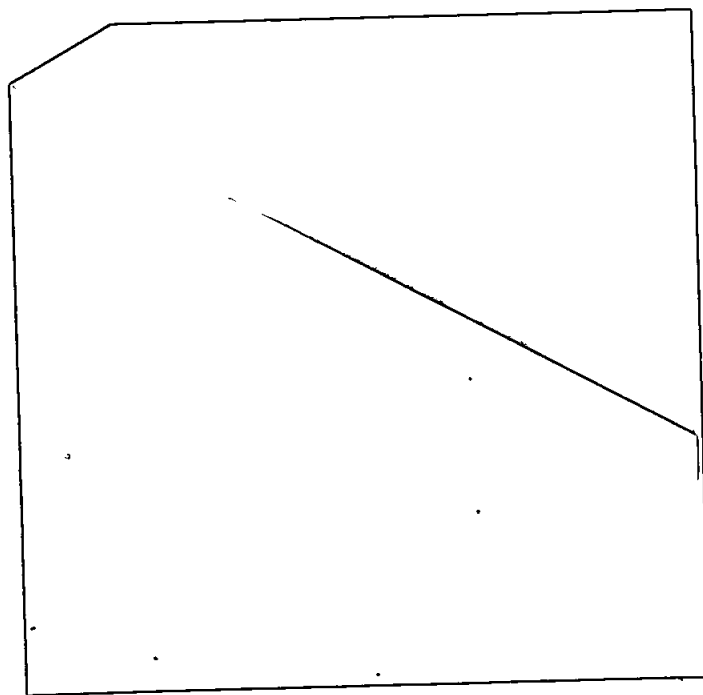
1945

Д В О

Республіканская  
навукова-тэхнічная  
бібліятэка

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  | Стр. |
|--|------|
| К расчету теплопередачи в турбулентном потоке несжимаемой жидкости . . . . .               | 1    |
| Сопротивление и теплоотдача плоской пластины в потоке газа при больших скоростях . . . . . | 8    |
| 1. Результаты, общие для ламинарного и турбулентного пограничного слоя . . . . .           | —    |
| 2. Ламинарный пограничный слой при наличии теплопередачи. . . . .                          | 12   |
| 3. Турбулентный пограничный слой при наличии теплопередачи. . . . .                        | 16   |



П Р О С В Е Р Е Н 010471

1917

1917



# К РАСЧЕТУ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. Е. КАЛИХМАН

В настоящей статье дано решение в конечном виде уравнения турбулентного теплового пограничного слоя на обтекаемом профиле и телах вращения. Вводится понятие "толщины потери теплосодержания" как основной тепловой характеристики пограничного слоя. Связь между толщиной потери теплосодержания и обратным числом Нуссельта ("логарифмический закон теплоотдачи") устанавливается на базе теории турбулентности Прандтля—Карманя. Предлагаемая простая квадратура позволяет легко находить местную и полную теплоотдачу произвольного тела в плоском или осесимметричном потоке несжимаемой жидкости.

Вопросы теплообмена между жидкостью (газом) и стенкой, имеющие существенное значение с точки зрения различных теплотехнических приложений, приобретают в настоящее время все больший практический интерес также и в авиации. Определение теплопередачи в предположении несжимаемости жидкости во многих случаях дает достаточное для целей практики приближение к действительности. В то же время такое предположение является необходимым этапом на пути к полному решению задачи.

Для расчета теплоотдачи произвольного тела, находящегося в потоке жидкости, имеются формулы В. А. Шваба, основанные на степенных законах распределения скоростей и температур в пограничном слое [1]. Однако степенные методы, обладающие рядом существенных недостатков (зависимость показателей степени от числа Рейнольдса, подобие профилей и пр.), в значительной мере устарели. В настоящее время общее признание получил метод расчета динамического слоя, основанный на более совершенном логарифмическом профиле скоростей и законе сопротивления [2]. Общность механизма переноса тепла и переноса количества движения в потоках вдоль твердых стенок, установленная трудами Рейнольдса [3], Прандтля [4] и Карманя [5], позволяет предположить, что и в теории теплообмена лучших результатов следует ожидать от применения логарифмического метода.

Уравнение турбулентного динамического слоя при логарифмическом законе сопротивления было приведено нами к форме квадратуры, позволяющей весьма просто и точно находить напряжение трения на стенке [6]. В настоящей статье предлагается аналогичная квадратура для расчета турбулентного теплового слоя, позволяющая по напряжению трения находить распределение теплоотдачи.

Рассмотрим безотрывное обтекание произвольного контура типа профиля крыла стационарным плоским потоком жидкости. Как обычно, отсчитываем координату  $x$  по дуге профиля от передней критической точки, координату  $y$  по нормали, обозначаем  $u, v$  компоненты скорости по осям  $x$  и  $y$ ,  $U(x)$ —скорость на границе динамического слоя,  $V$ —скорость набегающего потока. Пусть на стенке поддерживается постоянная температура  $T_w$ , отличная от температуры набегающего потока  $T_0$ . Так как жидкость мы считаем несжимаемой, а плотность  $\rho$  и физические постоянные — вязкость  $\mu$ , теплопроводность  $\lambda$  — не зависящими от температуры, динамические и тепловые переменные разделяются. Динамическую задачу, как уже упоминалось, можно считать решенной, распределение напряжения трения на стенке — известным.

Градиент температуры велик лишь в непосредственной близости от стенки, в тепловом пограничном слое, толщина которого  $\Delta(x)$  в большинстве практически важных случаев меньше толщины динамического слоя  $\delta(x)$ .

Требуется решить уравнение теплового слоя<sup>1</sup>

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial y}$$

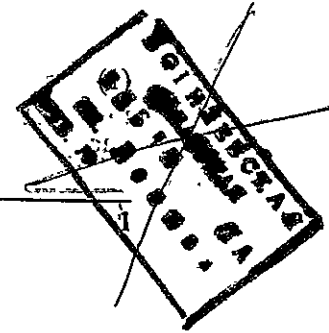
<sup>1</sup>Излучением и диссипацией пренебрегаем.

32357

Кр. 68

ПРОБЕЖЕ "В" 12/46

кр 53  
кр 531



( $c_p$ —массовая теплоемкость при постоянном давлении,  $q$ —теплопередача) при граничных условиях

$$\begin{aligned} y=0, & \quad T=T_w, \\ y=\Delta, & \quad T=T_0. \end{aligned}$$

Уравнение (1) легко приводится к виду интегрального соотношения (см., например, ссылку [1]):

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} \rho c_p (T_0 - T) u dy = q_w, \quad (2)$$

где  $q_w$ —интенсивность теплоотдачи на стенке.

Обозначим разность температур  $T - T_w = t$ , температурный напор  $T_0 - T_w = t_0$ .

По аналогии с основной характеристикой динамического пограничного слоя—толщиной потери импульса—введем понятие „толщины потери теплосодержания“:

$$\vartheta_{\tau} = \int_0^{\Delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) dy. \quad (3)$$

Толщина потери теплосодержания характеризует разность между тем теплосодержанием, которое имела бы масса жидкости, протекающая в единицу времени через данное сечение пограничного слоя, если бы ее температура равнялась температуре набегающего потока, и действительным теплосодержанием той же массы. Таким образом, величина  $\vartheta_{\tau}$  действительно представляет в линейных единицах „потерю“ теплосодержания вследствие наличия теплоотдачи (отнесенную к температурному напору  $t_0$ ).

С помощью  $\vartheta_{\tau}$  перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{dR_{\vartheta_{\tau}}}{dx} = \frac{Nu}{Pr}, \quad (4)$$

где  $R_{\vartheta_{\tau}} = \frac{U \vartheta_{\tau} \rho}{\mu}$  назовем первой тепловой характеристикой пограничного слоя,  $Nu = \frac{q_w L}{t_0 \lambda}$ —число Нусельта ( $L$ —хорда профиля,  $\bar{x} = \frac{x}{L}$ ),  $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ —число Прандтля.

Для решения задачи необходимо установить дополнительное соотношение между  $R_{\vartheta_{\tau}}$  и  $Nu$ . Это соотношение—назовем его „законом теплоотдачи“—выводим так, как если бы мы имели плоскую пластину, т. е., без учета влияния градиента давления. Результаты, полученные таким путем в области динамического слоя, оказались вполне удовлетворительными, а общность процессов переноса тепла и количества движения в потоках вдоль твердых стенок дает основание распространить эту идею и в теорию теплообмена.

Схематизируем явление согласно фиг. 1. Допускаем существование вблизи стенки чисто ламинарного подслоя толщиной  $\Delta_l$ , в котором происходит только молекулярный перенос тепла,  $q = q_{\text{ламп.}}$ . Здесь имеет место линейное распределение температур

$$t = \frac{q_w}{\lambda} y. \quad (5)$$

В основной части сечения пограничного слоя пренебрегаем молекулярным переносом тепла, принимаем чисто турбулентную теплопередачу,  $q = q_{\text{турб.}}$ , согласно Прандтлевской формуле

$$q = \rho c_p l^2 \frac{du}{dy} \frac{dt}{dy}. \quad (6)$$

В соответствии с намеченным планом решения в духе логарифмического метода принимаем постоянную интенсивность теплопередачи поперек слоя  $q = q_w$  и линейное распределение пути смещения  $l = ky$  ( $k_1 = 0,391$ ).

Принятой схеме отвечает логарифмический профиль скоростей

$$\frac{u}{U_*} = 1 + \frac{1}{k\zeta} \ln \frac{y}{\delta}, \quad (7)$$

где  $\zeta = \frac{U}{v_*}$ ,  $v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ ,  $\tau_w$  — напряжение трения на стенке.

Подставляя соответствующие выражения для  $\frac{du}{dy}$  и  $l$  в формулу (6) и интегрируя от  $y$  до  $\Delta$ , получаем приближенный профиль температур<sup>1</sup>

$$t = t_0 + \frac{q_w U}{c_p \tau_w k \zeta} \ln \frac{y}{\Delta}. \quad (8)$$

Приравнивая значения  $t$  на границе ламинарного теплового подслоя, согласно формулам (5) и (8) получаем

$$t_0 + \frac{q_w U}{c_p \tau_w k \zeta} \ln \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{q_w}{\lambda} \Delta_n. \quad (9)$$

Это соотношение представляет собой по сути дела формулу Прандтля [4].

Обычно в работах по гидродинамической теории теплообмена толщина ламинарного теплового подслоя принимается равной толщине динамического подслоя. При этом, однако, замечена общая тенденция к ухудшению результатов при числах  $Pr$ , существенно превышающих единицу: Последнее обстоятельство побудило Кармана сделать попытку ввести между ламинарным подслоем и турбулентным слоем еще третий промежуточный слой, в котором учитывается как молекулярный, так и турбулентный перенос тепла [7].

Сохраняя изложенную выше простую схему, можно предложить для оценки толщины ламинарного теплового подслоя следующую гипотезу.

Соотношение между долей ламинарного и турбулентного трения на некотором расстоянии  $y$  от стенки, отвечающее данному профилю скоростей  $u(y)$ , можно выразить формулой

$$\frac{\tau_l}{\tau_T} = \frac{\mu \frac{du}{dy}}{\rho k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2} = \frac{\nu}{k^2 y^2 \frac{du}{dy}}$$

Действительные значения  $\frac{du}{dy}$  при  $y$ , близких к  $\delta_n$ , нам неизвестны, но можно дать следующую оценку (см. фиг. 1):

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{\text{схем. турб}} < \frac{du}{dy} < \left(\frac{du}{dy}\right)_{\text{схем. лам}}$$

т. е.

$$\frac{\nu^2}{k^2 v_*^2 y^2} < \frac{\tau_l}{\tau_T} < \frac{\nu}{k v_* y}$$

В частности, при  $y = \delta_n$  в силу критерия Кармана  $\frac{v_* \delta_n}{\nu} = \alpha$  ( $\alpha = 11,5$ )

$$\frac{1}{k^2 \alpha^2} < \frac{\tau_l}{\tau_T} \Big|_{y=\delta_n} < \frac{1}{k\alpha}$$

<sup>1</sup> Для значений  $y < \delta_n$  следовало бы на участке от  $y$  до  $\delta_n$  подставлять  $\left(\frac{du}{dy}\right)_{\text{схем. лам}} = \frac{v_*}{y}$ , но так как удельный вес интервала  $\delta_n - \Delta_n$  во всем интеграле ничтожен, то этим обстоятельством можно пренебречь и подставлять  $\left(\frac{du}{dy}\right)_{\text{схем. турб}} = \frac{v_*}{ky}$  для всех значений  $\Delta_n < y < \Delta$ .

В случае  $\Delta > \delta$  здесь и в дальнейшем пренебрегаем погрешностью, происходящей от небольшого возрастания  $\frac{u}{U}$ , которое дает формула (7) при  $y > \delta$ .

Представление о порядке величин, вероятно, дает промежуточная степень

$$\frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\tau}} \Big|_{y=\delta_{\lambda}} \approx \frac{1}{(k\alpha)^{3/2}}$$

Определим границу теплового ламинарного подслоя условием

$$\frac{q_{\lambda}}{q_{\tau}} \Big|_{y=\Delta_{\lambda}} = \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\tau}} \Big|_{y=\delta_{\lambda}}$$

Имеем

$$\frac{q_{\lambda}}{q_{\tau}} = \frac{\lambda \frac{dt}{dy}}{\rho c_p k^2 y^2 \frac{du}{dy} \frac{dt}{dy}};$$

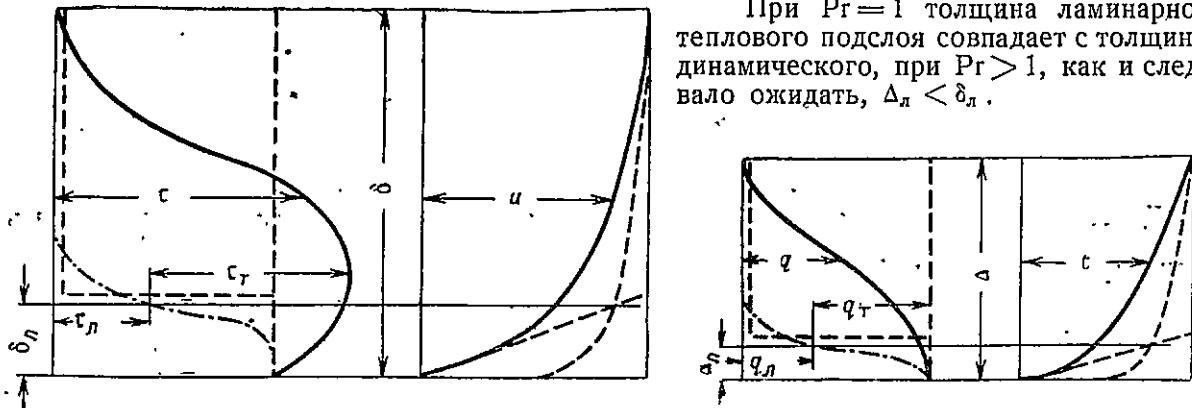
$$\frac{\nu^2}{k^2 v_*^2 \Delta_{\lambda}^2} < \frac{q_{\lambda}}{q_{\tau}} \Big|_{y=\Delta_{\lambda}} \text{Pr} < \frac{\nu}{k v_* \Delta_{\lambda}}$$

Принимая, как и раньше,

$$\frac{q_{\lambda}}{q_{\tau}} \Big|_{y=\Delta_{\lambda}} \text{Pr} \approx \frac{1}{\left(k \frac{v_* \Delta_{\lambda}}{\nu}\right)^{3/2}}$$

получаем окончательно

$$\frac{v_* \Delta_{\lambda}}{\nu} = \alpha_1; \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\text{Pr}^{2/3}} \quad (10)$$



При  $\text{Pr} = 1$  толщина ламинарного теплового подслоя совпадает с толщиной динамического, при  $\text{Pr} > 1$ , как и следовало ожидать,  $\Delta_{\lambda} < \delta_{\lambda}$ .

Фиг. 1. Схематическое изображение профилей напряжения трения, скоростей, теплопередачи и разности температур в турбулентном пограничном слое. Действительный характер профилей показан сплошными линиями, схематизация, соответствующая логарифмическому методу, показана пунктиром. Штрихпунктирные линии характеризуют соотношение между молекулярным и турбулентным трением (теплопередачей), отвечающее данному профилю скоростей (температур)

С помощью критерия (10) уравнение (9) принимает вид

$$\frac{U\Delta}{\nu} = \frac{\alpha_1}{k} e^{-k\alpha_1 \text{Pr}} k \zeta e^{\frac{c_p t_0 \tau_w k \zeta}{q_w U}} \quad (11)$$

Остается исключить  $\Delta$ . Подставляя профиль скоростей (7) и профиль температур (8) в формулу (3), найдем

$$\frac{\partial \tau}{\Delta} = \frac{q_w U}{c_p t_0 \tau_w k \zeta} \left(1 + \frac{1}{k \zeta} \ln \frac{\Delta}{\delta}\right) - \frac{2q_w U}{c_p t_0 \tau_w k^2 \zeta^2} \quad (12)$$

Напомним, что толщина динамического слоя определяется формулой

$$\frac{U\delta}{\nu} = \frac{\alpha}{k} e^{-kx} k\zeta e^{kx}. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение наряду с первой тепловой характеристикой  $R_{\theta_T}$  вторую тепловую характеристику

$$\zeta_1 = \frac{Pe}{Nu} \frac{\bar{U}}{\zeta}, \quad (14)$$

где  $Pe = Re Pr$  — число Пекле,  $Re = \frac{VL}{\nu}$  — число Рейнольдса.

Из формул (11) — (14) получим закон теплоотдачи

$$R_{\theta_T} = C_1 e^{k\zeta_1} \left(1 - \frac{m}{k\zeta_1}\right), \quad (15)$$

где

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{k} e^{-k\alpha_1 Pr} = \frac{\alpha}{k Pr^{1/2}} e^{-k\alpha Pr^{1/2}};$$

$$m = 2 + k(\alpha_1 Pr - \alpha) + \ln \frac{\alpha}{\alpha_1} = 2 + k\alpha(Pr^{1/2} - 1) + \frac{2}{3} \ln Pr.$$

При  $Pr = 1$ ,  $C_1 = 0,326$ ,  $m = 2$ .

Интересно отметить, что при  $Pr = 1$  уравнение, связывающее введенные нами тепловые характеристики  $R_{\theta_T}$  и  $\zeta_1$ , в точности совпадает с законом сопротивления, связывающим характеристики динамического слоя  $R_{\theta}$  и  $\zeta$  ( $R_{\theta} = \frac{U\delta}{\nu}$ ,  $\delta$  — толщина потери импульса).

Перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{dR_{\theta_T}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{U} Re}{\zeta_1} \quad (16)$$

или, используя (15),

$$C_1 e^{k\zeta_1} \left(k\zeta_1 - m + \frac{m}{k\zeta_1}\right) d k\zeta_1 = \frac{k\bar{U} Re}{\zeta} d\bar{x}.$$

Отсюда следует окончательная квадратура

$$z_1 = C + \frac{k Re}{C_1} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{U}}{\zeta} d\bar{x}, \quad (17)$$

где

$$z_1 = e^{k\zeta_1} (k\zeta_1 - m - 1) + m Ei(k\zeta_1). \quad (17')$$

Методика расчета крайне проста. По распределению напряжения трения находим  $\frac{\bar{U}}{\zeta} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho V^2}}$ . Раз навсегда (для данного  $Pr$ ) могут быть построены вспомогательные графики  $\lg z_1$  по  $k\zeta_1$  и  $\lg R_{\theta_T}$  по  $k\zeta_1$ . При полностью турбулентном слое постоянную  $C$  следует положить равной нулю. При наличии ламинарного участка начальное значение  $(R_{\theta_T})_{турб}$  при  $\bar{x} = \bar{x}_0$  следует принимать равным  $(R_{\theta_T})_{лам}$ . По  $\lg (R_{\theta_T})_{лам}$  находится  $(k\zeta_1)_0$ , по  $(k\zeta_1)_0$  находится  $(\lg z_1)_0$  и  $C = (z_1)_0$ . Вычисляем распределение  $z_1, \lg z_1$  по  $\bar{x}$  и по графикам

кам находим распределение  $k\zeta_1$  и  $R_{0\tau}$ . Наличие интегрального логарифма  $Ei(k\zeta_1) = \int_{-\infty}^{k\zeta_1} \frac{e^x}{x} dx$ , являющегося хорошо известной табличной функцией, никаких осложнений не вносит<sup>1</sup>.

При осевом обтекании тела вращения вместо уравнения (16) будем иметь

$$\frac{dR_{0\tau}}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{r}}{dx} R_{0\tau} = \frac{\bar{U}Re}{\zeta_1}, \quad (18)$$

где  $x$  отсчитывается по дуге меридианального сечения от передней кромки,  $y$  по нормали к поверхности,  $r(x)$  представляет радиус поперечного сечения тела вращения, остальные обозначения прежние.

Уравнение (18) с помощью подстановки  $z = R_{0\tau} \zeta_1$  приводится к линейному ( $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{r} = r/L$ ,  $Re = VL/\nu$ ,  $L$  — длина тела вращения):

$$\frac{dz}{d\bar{x}} + \left( K_1 \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{d\bar{x}} - \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\bar{x}} \right) z = K_1 \bar{U}Re. \quad (19)$$

Так как величина  $k\zeta_1$  изменяется по длине теплового слоя в весьма узких пределах (5–10), мы с большой степенью точности принимаем

$$K_1 = \frac{1 - m/k\zeta_1 + 1/k\zeta_1}{1 - m/k\zeta_1 + m/k^2\zeta_1^2} = \text{const} \quad (K_1 \cong 1,15 \text{ при } Pr = 1).$$

Из (19) следует окончательная формула для расчета теплоотдачи тела вращения<sup>2</sup>

$$e^{k\zeta_1} (k\zeta_1 - m) = \frac{1}{r^{K_1}} \left( C + \frac{kK_1}{C_1} Re \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \frac{\bar{U}}{\zeta} \bar{r}^{K_1} d\bar{x} \right). \quad (20)$$

Мы не располагаем в настоящее время экспериментальными данными по распределению интенсивности теплоотдачи, которые позволили бы оценить точность предлагаемой квадратуры при различных числах  $Pr$ , — такие опыты нам неизвестны. Единственный существующий эксперимент А. С. Чашихина [8] мало пригоден для целей сравнения, так как вследствие малых чисел  $Re$  ( $6,69 \times 10^4 - 18,8 \times 10^4$ ) длина турбулентного участка в этих опытах очень мала. Тем не менее приводим на фиг. 2 сравнение коэффициентов тепло-

<sup>1</sup> См., например, Янке — Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. ОНТИ НКТП, Харьков — Киев, 1934. Впрочем, вместо формулы (17) можно также пользоваться формулой (20), опуская  $\bar{r}^{K_1}$  в числителе и знаменателе.

<sup>2</sup> Напоминаем формулы для расчета динамического слоя. В случае плоского потока

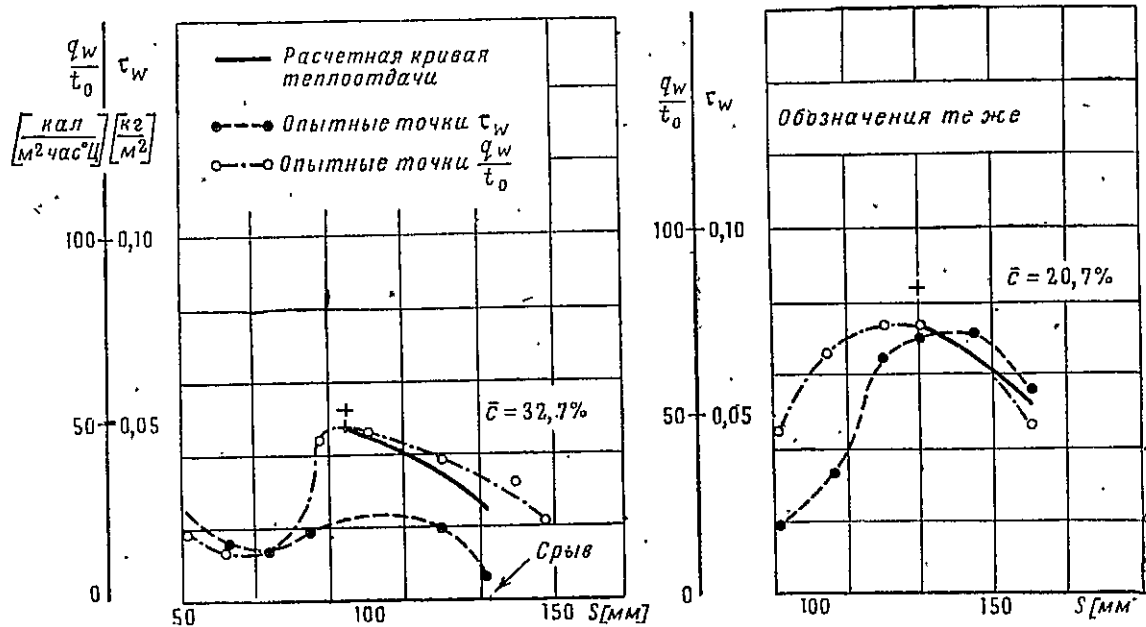
$$z = \frac{C + 1,2Re \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{U}^4 d\bar{x}}{\bar{U}^3}$$

где  $C = z_0 \bar{U}_0^3$  определяется из условия  $R_{0\text{турб}} = R_{0\text{ламина}}$  при  $\bar{x} = \bar{x}_0$  (если  $\bar{x}_0 = 0$ , то  $C = 0$ ), а вспомогательные графики  $\lg z$  по  $\zeta$  и  $\lg R_0$  по  $\zeta$  согласно формулам  $z = 0,2454e^{0,3914\zeta} \zeta^2$  и  $R_0 = 0,2454e^{0,3914\zeta}$  строятся в большом масштабе раз навсегда.

В случае тела вращения

$$z = \frac{C + 1,2Re \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{U}^4 \bar{r}^{1,2} d\bar{x}}{\bar{U}^3 \bar{r}^{1,2}} \quad (C = z_0 \bar{U}^3 \bar{r}^{1,2}).$$

отдачи<sup>1</sup>. Совпадение удовлетворительное, особенно если принять во внимание большую толщину профилей (симметричные профили Жуковского с относительной толщиной 20,7 и 32,7%) и связанное с этим наличие больших градиентов давления, а также непосредственную близость места срыва потока.



Фиг. 2. Сравнение результатов расчета теплоотдачи по опытным значениям  $\tau_w$  с опытными коэффициентами теплоотдачи. Крестиком отмечено начало турбулентного пограничного слоя (участок возрастания кривых  $\tau_w$  и  $\frac{q_w}{t_0}$  соответствует области перехода от ламинарного режима к турбулентному)

Мы не переоцениваем результаты сравнения теории с данными единичного, весьма ограниченного эксперимента. Наибольшие основания рассчитывать на удовлетворительную точность полученной квадратуры дает высокая точность аналогичной формулы для расчета динамического слоя, базирующейся на той же схеме и аналогичных представлениях о механизме явления.

<sup>1</sup> Опыты Чащихина проведены в аэродинамической трубе Ленинградского политехнического института; стенка профиля нагревалась до температуры кипящей воды. При расчете мы приняли число  $Pr = 1$ , значения физических постоянных взяли для  $50^\circ C$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шваб В. А. К теории теплоотдачи в турбулентном потоке. Труды Ленинградского индустриального института, том 1, 1937.
2. Squire H. B. & Young A. D. The Calculation of the Profile Drag of Aerofoils. ARC R & M, № 1838, 1938.
3. Reynolds O. On the Passage of Heat between Metal Surface and Liquids in Contact with them. Phil. Trans. of the Royal Society, 1900.
4. a) Prandtl L. Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit. Phys. Zeitschrift, 11, p. 1072, 1910.  
b) Prandtl L. Bemerkungen über den Wärmeübergang in Rohr. Phys. Zeitschrift, 29, p. 487, 1928.
5. Karman T. Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM, v. 1, № 4, 1921.
6. Калихман Л. Е. Новый метод расчета турбулентного пограничного слоя крыла. "Техника воздушного флота", № 1, 1942. См. также "Доклады Академии Наук СССР", т. 38, № 5—6, 1943.
7. Karman T. Some Aspects of the Theory of turbulent Motion, Proc. 4th. Intern. Congress for Applied Mechanics. Cambridge, 1934. Подробнее: Modern developments in Fluid Dynamics ed. by S. Goldstein, Oxford, 1938.
8. Чащихин А. С. Приложение гидродинамической теории теплообмена к изучению теплоотдачи (не опубликовано). См. в книге: Федяевский К. К. Тепловой пограничный слой крыла. Труды ЦАГИ, вып. 361, Москва, 1938.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ И ТЕПЛОТДАЧА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

В настоящей статье дано решение задачи о ламинарном и турбулентном пограничном слое потока газа, обтекающего с большими скоростями плоскую пластину при наличии теплопередачи между газом и стенкой. Получены формулы для местных и полных коэффициентов сопротивления, местной и полной теплоотдачи (чисел Нуссельта), найдены профили скоростей и температур, диссипация, изменение теплосодержания газа, определены предельные числа Маха, при которых прекращается охлаждение нагретого газа стенкой или нагретой стенки газом.

Задача об обтекании пластины потоком сжимаемой жидкости (газом) при наличии теплообмена между газом и стенкой рассматривалась в работах Л. Крокко, А. Буземана, Т. Кармана и Тзяна. Крокко [1] обратил внимание на то обстоятельство, что при постоянном отношении абсолютных температур набегающего потока и нагретой пластины теплоотдача последней падает с ростом числа Маха вследствие притока тепла за счет работы внутренних сил трения и, начиная с некоторого числа Маха, вместо охлаждения стенки имеет место ее нагревание. Бузман [2] составил дифференциальное уравнение, являющееся обобщением уравнения Блазиуса на случай газа, движущегося с большими скоростями при наличии теплопередачи между ламинарным пограничным слоем и стенкой. Уравнение Буземана, кроме числа Маха, содержит еще отношение „температур торможения“ стенки и набегающего потока, однако проинтегрировано им лишь для случая, когда последнее отношение равно единице (и для одного числа Маха), что соответствует отсутствию теплообмена между газом и пластиной. Карман и Тзян [3], следуя методу Мизеса и применяя процесс последовательных приближений, рассчитали один пример обтекания пластины газом при больших скоростях, а именно: случай ламинарного пограничного слоя при отношении абсолютных температур стенки и набегающего потока, равном  $1/4$ .

Применительно к турбулентному пограничному слою потока газа, обтекающего с большими скоростями плоскую пластину при наличии теплообмена между газом и стенкой, не было опубликовано, насколько нам известно, даже предварительных решений.

Задача об учете влияния сжимаемости на пограничный слой при отсутствии теплопередачи между газом и стенкой была решена А. Дородницыным [4]. Указанный Дородницыным прием упрощения уравнений путем замены переменных используется в настоящей работе.

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ОБЩИЕ ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО И ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим обтекание гладкой плоской пластины равномерным установившимся потоком газа. Пусть на пластине поддерживается постоянная температура  $T_w$ .

Вне пограничного слоя имеем всюду постоянную скорость  $U$ , давление  $p_0$ , температуру  $T_0$ , плотность  $\rho_0$ . Направим ось  $x$  по длине пластины, ось  $y$  по перпендикуляру к пластине, назовем  $u, v$  — компоненты скорости по осям  $x, y$ . Число Прандтля принимаем

равным единице как в случае ламинарного слоя  $\left( Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, c_p \text{ — массовая теплоемкость при постоянном давлении, } \mu \text{ — коэффициент вязкости, } \lambda \text{ — коэффициент теплопроводности} \right)$ ,

так и в случае турбулентного слоя  $\left( Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda_{турб}} \right)$ .

Задача состоит в решении системы уравнений (см., например, [5]):

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \epsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0; \quad (2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \epsilon) \frac{\partial T^*}{\partial y} \right] \quad (3)$$

(где  $T^* = T + \frac{u^2}{2Ic_p}$  — так называемая температура торможения,  $I$  — механический эквивалент тепла) при граничных условиях

$$\begin{aligned} y=0, \quad u=v=0, \quad T=T_w, \\ y=\delta_y, \quad u=U, \quad T=T_0. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (1) и (3) коэффициент турбулентного обмена  $\epsilon$  в случае ламинарного слоя следует положить равным нулю; наоборот, в случае турбулентного слоя коэффициент вязкости  $\mu$  пренебрежимо мал по сравнению с  $\epsilon$ .

Интегралом уравнения (3), удовлетворяющим условию отсутствия теплопередачи

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \text{ является}$$

$$T^* = \text{const}$$

или

$$T + \frac{u^2}{2Ic_p} = \frac{i_0}{Ic_p}, \quad (5)$$

где  $i_0$  — полная энергия:

$$i_0 = Ic_p T_0 + \frac{U^2}{2}. \quad (6)$$

Интеграл (5) показывает, что при отсутствии теплопередачи температура стенки равна температуре торможения набегающего потока

$$T_{00} = T_0 + \frac{U^2}{2Ic_p}. \quad (7)$$

Таким образом, при  $T_w \neq T_{00}$ , т. е. при наличии теплопередачи, интеграл (5) не удовлетворяет условиям на стенке и поэтому не может быть использован для решения задачи.

Как известно, существует другой интеграл уравнения (3): непосредственной проверкой можно убедиться в том, что выражение  $T^* = au + b$  в силу (1) удовлетворяет уравнению (3). Используя граничные условия (4) для определения  $a$  и  $b$ , получаем:

$$T = T_{00} \left[ 1 - \bar{u}^2 + \left( \frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\bar{u}}{U} \right) \right], \quad (8)$$

где обозначено

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{2i_0}}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\sqrt{2i_0}}.$$

Плотность газа определим по уравнению состояния

$$\rho = \rho_{00} \frac{p}{p_{00}} \frac{T_{00}}{T},$$

где постоянная  $\frac{p}{p_{00}} = (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}$  по уравнению Бернулли,  $x = \frac{c_p}{c_v}$ , следовательно,

$$p = p_{00} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}}{1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1\right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)} \quad (9)$$

Принимая для вязкости формулу

$$\mu = \mu_{00} \left(\frac{T}{T_{00}}\right)^n \quad (n = 0,75),$$

получаем

$$\mu = \mu_{00} \left[1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1\right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\right]^n \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (1) по  $y$  от 0 до  $\delta_y$ , получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_y} \rho u (U - u) dy = \tau_w, \quad (11)$$

где

$$\tau_w = \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w \quad (12)$$

Подставляя в (11) выражение  $\rho$  (9), получаем

$$p_{00} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_y} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} u (U - u)}{1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1\right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)} dy = \tau_w \quad (13)$$

Вводим новую независимую переменную

$$\eta = \int_0^y \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}}{1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1\right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)} dy \quad (14)$$

Тогда уравнение (13) принимает вид

$$p_{00} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (U - u) d\eta = \tau_w, \quad (15)$$

где  $\delta$  — значение переменной  $\eta$ , соответствующее границе слоя.

Определим толщину потери импульса в плоскости  $x\eta$  формулой

$$\delta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \quad (16)$$

Тогда

$$\frac{d\bar{\delta}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_{00} U^2}, \quad (17)$$

где  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{L}$ ,  $\bar{x} = \frac{x}{L}$ ,  $L$  — длина пластины.

Подготовим выражения для местного  $c_f = \frac{\tau_w}{\rho_0 \frac{U^2}{2}}$  и суммарного  $C_f = \int_0^1 c_f d\bar{x}$  коэффициентов сопротивления. Заменяя  $\rho_0$  согласно (9) (вне пограничного слоя  $u=U$ ), получим

$$c_f = 2 \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{1}{1-\kappa}}; \quad (18)$$

$$C_f = 2 \bar{\delta}_\kappa (1 - \bar{U}_\kappa^2)^{\frac{1}{1-\kappa}}. \quad (19)$$

Заменяя в  $\frac{U}{\sqrt{2i_0}}$  полную энергию  $i_0$  согласно (6), найдем

$$\bar{U}^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2}, \quad (20)$$

где  $\text{Ma} = \frac{U}{a}$  — число Маха набегающего потока.

Подготовим также формулы для местной и полной теплоотдачи. Из формул (8) и (12) получаем количество тепла, проходящее в единицу времени через единицу площади пластины:

$$q_w = \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \frac{c_p (T_{00} - T_w)}{U} \tau_w. \quad (21)$$

Будем характеризовать теплообмен между газом и стенкой числом Нусельта, отнесенным к величинам набегающего потока

$$N_0 = \frac{q_w L}{\lambda_0 T_0}.$$

Тогда, учитывая, что согласно (8) и (20)

$$T_0 = T_{00} \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2}, \quad (22)$$

найдем

$$N_0 = \frac{1}{2} c_f \text{Re} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \left( 1 - \frac{T_w}{T_{00}} \right), \quad (23)$$

где  $\text{Re} = \frac{UL\rho_0}{\mu_0}$  — число Рейнольдса.

Полное количество тепла  $Q$ , проходящее в единицу времени через пластину длины  $L$

и единичной ширины, равно  $\int_0^L q_w dx$ , поэтому для суммарного числа Нусельта  $N = \frac{Q}{\lambda_0 T_0}$  имеем<sup>1</sup>

$$N = \frac{1}{2} C_f \text{Re} \left( 1 + \frac{\mu - 1}{2} \text{Ma}^2 \right) \left( 1 - \frac{T_w}{T_{00}} \right). \quad (24)$$

Установим вытекающие из системы (1)–(3) основные формулы баланса тепла в пограничном слое.

Умножая уравнение (1) на  $-\frac{u^2}{\rho c_p}$  и складывая его с уравнением (3), получим

$$\rho \left( u \frac{\partial}{\partial x} c_p T + v \frac{\partial}{\partial y} c_p T \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ c_p (\mu + \varepsilon) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{1}{I} (\mu + \varepsilon) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (25)$$

Интегрируя это уравнение по всему объему, занятому пограничным слоем, получим

$$Q_1 = \Phi - Q, \quad (26)$$

где

$$Q_1 = \left| \int_0^{\delta_y} \rho u c_p (T - T_0) dy \right|_{x=L} \quad (27)$$

представляет изменение теплосодержания газа в единицу времени в объеме пограничного слоя на пластине длины  $L$  и шириною 1;

$$\Phi = \frac{1}{I} \int_0^L \int_0^{\delta} (\mu + \varepsilon) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy dx \quad (28)$$

представляет количество тепла, выделяющееся в том же объеме в единицу времени за счет работы сил трения (диссипация),

$$Q = \int_0^L q_w dx \quad (29)$$

теплоотдача, считаемая положительной при переходе тепла от газа к стенке.

## 2. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Следуя Польгаузену, представим профиль скоростей в виде

$$\frac{\bar{u}}{U} = A \frac{\eta}{\delta} + B \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^2 + C \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^3 + D \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^4. \quad (30)$$

Для определения коэффициентов имеем следующие условия:

при  $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

при  $y=\delta_y$ ,

$$u = U, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

<sup>1</sup> Для чисел Нусельта, отнесенных к температурному напору, имеем

$$\text{Nu} = \frac{q_w L}{\lambda_0 (T_{00} - T_w)} = \frac{1}{2} C_f \text{Re}; \quad \text{NU} = \frac{Q}{\lambda_0 (T_{00} - T_w)} = \frac{1}{2} C_f \text{Re}.$$

Преобразуя выражение  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  к независимой переменной  $\eta$  с помощью (10), (14),

получаем:

$$\text{при } \frac{\eta}{\delta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \frac{\bar{u}}{U}}{\partial \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^2} + \alpha \left( \frac{\partial \frac{\bar{u}}{U}}{\partial \frac{\eta}{\delta}} \right)^2 = 0, \quad \text{где } \alpha = (1-n) \frac{T_w - T_{00}}{T_w}; \quad (31)$$

$$\text{при } \frac{\eta}{\delta} = 1$$

$$\frac{\bar{u}}{U} = 1, \quad \frac{\partial \frac{\bar{u}}{U}}{\partial \frac{\eta}{\delta}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \frac{\bar{u}}{U}}{\partial \left( \frac{\eta}{\delta} \right)^2} = 0.$$

После элементарных выкладок находим

$$A = \frac{3 - \sqrt{9 - 12\alpha}}{\alpha}, \quad B = 6 - 3A, \quad C = -8 + 3A, \quad D = 3 - A. \quad (32)$$

Имея профиль скоростей, исключим  $\delta$ :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{1260} (-5A^2 + 12A + 144), \quad (33)$$

а также, используя (10), (14), определим  $\tau_w$ . Подставляя результаты в (17), получаем основное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{\delta}}{dx} = \frac{1}{\text{Re}_{00}} \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{n-1} \frac{A(-5A^2 + 12A + 144)}{1260 \bar{U} \bar{\delta}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}. \quad (34)$$

Здесь

$$\text{Re}_{00} = \frac{\sqrt{2i_0} L \rho_{00}}{\mu_{00}} = \text{Re} \frac{1}{U} (1 - \bar{U}^2)^{n - \frac{1}{x-1}} = \text{Re} \left( 1 + \frac{x-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{x+1}{2(x-1)} - n} \left( \frac{x-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Интегрируя, получаем окончательно

$$\bar{\delta} = \sqrt{\left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{1260} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\text{Re}}} \left( 1 + \frac{x-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{n}{2} - \frac{x+1}{2(x-1)}}}. \quad (36)$$

Теперь по формулам (18) — (20) получаем

$$c_f = \sqrt{\left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{1260} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left( 1 + \frac{x-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}}. \quad (37)$$

$$C_f = \sqrt{\left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{315} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left( 1 + \frac{x-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}}. \quad (38)$$

Перепишем формулу (38) в виде:

$$C_f = F_1 \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right) \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}. \quad (38')$$

Здесь

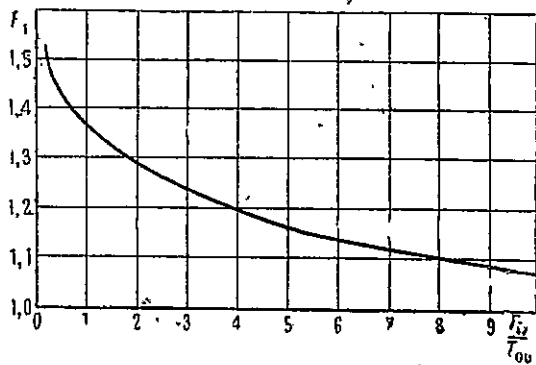
$$F_1 \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right) = \sqrt{\left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{315}}; \quad (39)$$

$$A = \frac{12 \frac{T_w}{T_{00}} - 4 \sqrt{\frac{T_w}{T_{00}} \left( 6 \frac{T_w}{T_{00}} + 3 \right)}}{\frac{T_w}{T_{00}} - 1}; \quad (40)$$

$$\frac{T_w}{T_{00}} = \frac{T_w}{T_0} \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2}. \quad (41)$$

График функции  $F_1 \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)$  представлен на фиг. 1. При отсутствии теплопередачи  $\left( \frac{T_w}{T_{00}} = 1 \right)$  получаем, естественно, то самое значение коэффициента  $F_1 = 1,371$ , которое дает метод Польгаузена для данного случая.

Если пластина отдает тепло газу  $\left( \frac{T_w}{T_{00}} > 1 \right)$ , ее сопротивление меньше, чем при отсутствии теплообмена; если пластина служит для отвода тепла от газа  $\left( \frac{T_w}{T_{00}} < 1 \right)$ , ее сопротивление больше, чем при отсутствии теплообмена. Сопротивление „холодной“ по сравнению с набегающим потоком пластины  $\left( \frac{T_w}{T_0} < 1 \right)$  всегда больше, чем при отсутствии теплообмена. Сопротивление „нагретой“



Фиг. 1. Зависимость  $\frac{C_f \sqrt{\text{Re}}}{\left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right]^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}}$  от отношения температур торможения

пластины  $\left( \frac{T_w}{T_0} > 1 \right)$  меньше, чем при отсутствии теплообмена, лишь в пределах чисел Маха, при которых пластина отдает тепло,  $\frac{T_w}{T_{00}} > 1$ .

При больших числах Маха сопротивление нагретой пластины превышает сопротивление пластины без теплообмена.

Для малых чисел Маха формула (38) дает

$$C_f = F_1 \left( \frac{T_w}{T_0} \right) \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (42)$$

Фиг. 1 при малых Ма характеризует изменение сопротивления пластины в результате изменения физических свойств газа вследствие теплообмена.

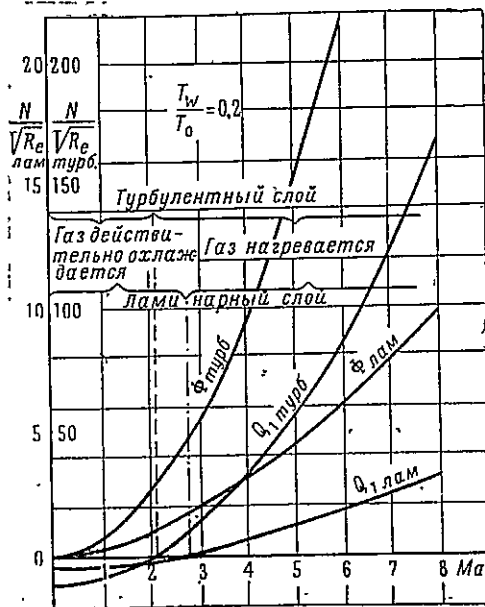
Используя полученный профиль скорости (30)–(32) и зависящий от него профиль температур (8) в формулах (27)–(29), найдем:

$$\frac{N_Q}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{1}{2} F_1 \left( 1 - \frac{T_w}{T_{00}} \right) \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}; \quad (43)$$

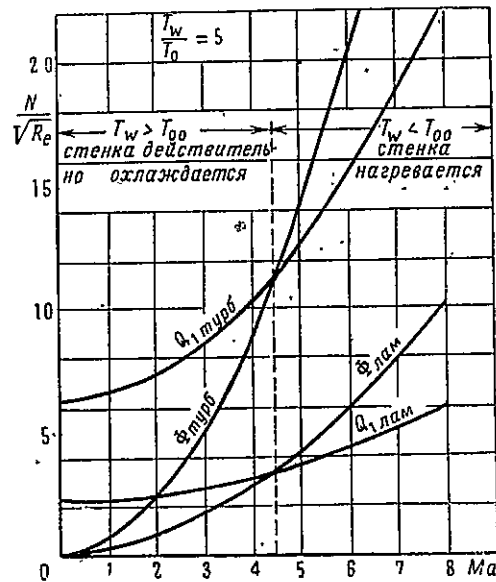
$$\frac{N_{\Phi}}{\sqrt{Re}} = \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-1} A \left(\frac{3504}{7} + \frac{292}{7} A - \frac{253}{21} A^2 - A^3\right) \frac{x-1}{2} Ma^2 \left(1 + \frac{x-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}; \quad (44)$$

$$\frac{N_{Q_1}}{\sqrt{Re}} = \frac{N_{\Phi}}{\sqrt{Re}} - \frac{N_Q}{\sqrt{Re}}. \quad (45)$$

Формулы (43) — (45) определяют баланс тепла в ламинарном пограничном слое газа при произвольном отношении температур и произвольном числе Маха. Для примера приводим на фиг. 2 и 3 графики, характеризующие распределение тепла при двух отношениях температур, а именно: при  $\frac{T_w}{T_0} = \frac{1}{5}$  и  $\frac{T_w}{T_0} = 5$ . Кривая  $\Phi_{\text{лам}}$  представляет тепло, выделяющееся вследствие работы сил трения (диссипацию), кривая  $Q_1 \text{ лам}$  — тепло, остающееся в газе (изменение теплосодержания газа). Разность ординат первой и второй кривой характеризует теплопередачу между газом и стенкой. Как видно из фиг. 2, в случае  $\frac{T_w}{T_0} = \frac{1}{5}$  при малых Ма  $Q_1$  отрицательно и газ охлаждается, однако с увеличением Ма интенсивность охлаждения газа падает и при Ма = 2,75 охлаждение прекращается,  $Q_1 = 0$ . Начиная с этого „предельного“ Ма, приток тепла за счет работы сил трения превышает количество тепла, которое отводится через стенку, вследствие чего газ нагревается. Фиг. 3 иллюстрирует процесс изменения теплосодержания газа в случае нагретой стенки:



Фиг. 2. Баланс тепла при  $\frac{T_w}{T_0} = \frac{1}{5}$   
(стенка охлаждает газ)



Фиг. 3. Баланс тепла при  $\frac{T_w}{T_0} = 5$   
(газ охлаждает стенку)

с ростом Ма возрастает роль тепла, выделяющегося за счет работы сил трения, и уменьшается теплоотдача стенки. При числе Маха 4,45, соответствующем при  $\frac{T_w}{T_0} = 5$  условию  $\frac{T_w}{T_0} = 1$ , теплообмен прекращается,  $Q = 0$  (все тепло, выделяющееся вследствие диссипации, остается в газе), при больших числах Ма имеет место поток тепла в обратном направлении, и не только газ, но и стенка нагревается. По формулам (43) — (45) легко рассчитать предельные числа Ма, определяемые условием  $N_{Q_1} = 0$  при охлаждении газа и  $N_Q = 0$  при охлаждении стенки, для любых других отношений температур. Заметим, что в частном случае  $\frac{T_w}{T_0} = 1/4$  полученные нами формулы дают результаты, хорошо согласующиеся с расчетом Кармана — Тзяна примерно до чисел Маха 4 — 5.

### 3. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Решение задачи требует установления закона сопротивления — зависимости между  $\theta$  и  $\tau_w$ . Будем исходить из общепринятого в настоящее время „логарифмического“ метода Прандтля — Кармана. Принимаем, что напряжение трения в турбулентном слое выражается Прандтлевской формулой „пути смещения“

$$\tau = \rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (46)$$

Иными словами, в правых частях формул (1) и (3) полагаем  $\varepsilon = \rho l^2 \frac{du}{dy}$ .

Допускаем существование вблизи стенки ламинарного подслоя, толщина которого определяется критическим числом Рейнольдса

$$\frac{u_l \delta_{yl} \rho_w}{\mu_w} = \alpha^2 \quad (\alpha = 11,5). \quad (47)$$

В совокупности с предположением о линейности профиля скоростей в ламинарном подслое

$$\tau_w = \mu_w \frac{u_l}{\delta_{yl}} \quad (48)$$

условие (47) даёт

$$\frac{\sqrt{\tau_w \rho_w} \delta_{yl}}{\mu_w} = \alpha, \quad (49)$$

где  $\delta_{yl}$  — значение толщины ламинарного подслоя в обычном смысле, т. е. по переменной  $y$ .

Преобразуем последнюю формулу к переменной  $\eta$ :

$$\delta_{yl} = \int_0^{\delta_{yl}} dy = \int_0^{\delta_{yl}} \frac{1 - \bar{u}^2 + \left( \frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right)}{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}} d\eta \cong \frac{T_w}{T_{00}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \delta_{\bar{U}}$$

$$\rho_w = \rho_{00} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{T_w}{T_{00}}}, \quad \mu_w = \mu_0 \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^n$$

Подставляя эти выражения в (49), получаем

$$\frac{\delta_{yl}}{\delta} = \frac{\alpha^2}{R_0} \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^n, \quad (50)$$

где введены обозначения

$$R_0 = \text{Re}_{00} \bar{U} \delta;$$

$$\zeta = \frac{\bar{U}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_{00}}}} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{2(x-1)}}}{\left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Преобразуем формулу (46). Имеем:

$$\tau = \rho_{00} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{3x}{x-1}} l^2}{\left[ 1 - \bar{u}^2 + \left( \frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right) \right]^2} \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2 \quad (51)$$

Обозначая

$$\bar{l}^2 = \frac{l^2 (1 - \bar{U}^2)^{\frac{3x}{x-1}}}{\left[ 1 - \bar{u}^2 + \left( \frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right) \right]^{\frac{3}{2}}},$$

получаем

$$\tau = \rho_{00} \bar{l}^2 \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2. \quad (52)$$

Исследуем поведение функции  $\bar{l}$  вблизи стенки. Здесь  $\bar{u}^2$  и  $\frac{\bar{u}}{\bar{U}}$  малы,

$$l = ky \quad (k = 0,3914), \quad y \cong \left[ 1 - \bar{u}^2 + \left( \frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right) \right] (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \eta \cong \frac{T_w}{T_{00}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \eta,$$

поэтому

$$\bar{l} = k\eta \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{2(x-1)}}}{\left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (53)$$

Таким образом, при близких к стенке значениях  $\eta$  имеет место линейное распределение пути смещения по формуле (53), а трение мало отличается от трения на стенке  $\tau_w$ . В соответствии с основной идеей логарифмического метода мы примем постоянное напряжение трения  $\tau = \tau_w$  и линейный закон (53) для всей толщины турбулентного слоя, полагая, что, как и в случае несжимаемой жидкости, будет иметь место взаимная компенсация ошибок, допускаемых в распределении  $\tau$  и  $\bar{l}$ . Итак,

$$\tau_w = \rho_{00} k^2 \eta^2 \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{T_w}{T_{00}}} \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2. \quad (54)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (54) в пределах от  $\eta$  до  $\delta$ , получаем профиль скоростей

$$\frac{\bar{u}}{\bar{U}} = 1 + \frac{1}{k\zeta} \ln \frac{\eta}{\delta}. \quad (55)$$

Из (48) получаем скорость на границе ламинарного подслоя

$$\frac{\bar{u}_l}{\bar{U}} = \frac{\alpha}{\zeta}. \quad (56)$$

Условие равенства скоростей (55) и (56) на границе ламинарного подслоя приводит к закону сопротивления

$$1 + \frac{1}{k\zeta} \ln \frac{\delta_l}{\delta} = \frac{\alpha}{\zeta}. \quad (57)$$

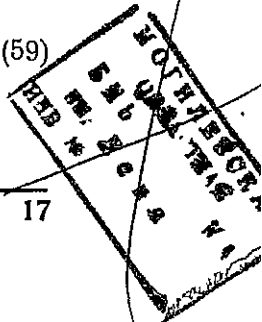
Для исключения вспомогательной переменной  $\delta$  — значения  $\eta$ , соответствующего границе слоя, используем профиль скоростей (55) в формуле (16). Получаем

$$\frac{\delta_l}{\delta} = \frac{1}{k\zeta} \left( 1 - \frac{2}{k\zeta} \right). \quad (58)$$

Формулы (50) и (58) позволяют представить закон сопротивления окончательно в следующем виде:

$$R_0 = \frac{\alpha e^{-k\alpha}}{k} \left( \frac{T_w}{T_{00}} \right)^n e^{k\zeta} \left( 1 - \frac{2}{k\zeta} \right), \quad (59)$$

где  $\frac{\alpha e^{-k\alpha}}{k} = 0,326$ .



Подставляя закон сопротивления (59) в уравнение (17), получаем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^{-n-1} \operatorname{Re} (1 - \bar{U}^2)^{n+1} d\bar{x} = \frac{1}{q} e^{k\zeta} k^2 \zeta^2 \left(1 - \frac{2}{k\zeta} + \frac{2}{k^2 \zeta^2}\right) k d\zeta, \quad (60)$$

где  $\frac{1}{q} = \frac{\alpha e^{-kx}}{k^3} = 2,126$ .

Интегрируя и выражая попутно  $\bar{U}$  через  $Ma$  по (20), получаем

$$\left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^{-n-1} \left(1 + \frac{x-1}{2} Ma^2\right)^{-n-1} \operatorname{Re} \bar{x} = \frac{1}{q} e^{k\zeta} (k^2 \zeta^2 - 4k\zeta + 6) + \text{const.} \quad (61)$$

По этой формуле находится распределение  $\zeta$  по длине пластины. Если на некоторой части пластины имеется ламинарный пограничный слой, значение const находится из условия равенства  $R_{\text{турб}} = R_{\text{лам}}$  в точке перехода.

При полностью турбулентном пограничном слое постоянную следует положить равной нулю.

Учитывая (41), перепишем формулу (61) в виде

$$\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{-n-1} \operatorname{Re} \bar{x} = \frac{1}{q} e^{k\zeta} (k^2 \zeta^2 - 4k\zeta + 6). \quad (62)$$

Зная распределение  $\zeta$ , находим распределение  $c_f$ :

$$c_f = \frac{2}{\zeta^2} \frac{1 - \bar{U}^2}{\frac{T_w}{T_{00}}} \quad \text{или} \quad c_f = \frac{2}{\zeta^2} \frac{T_w}{T_0}. \quad (63)$$

Уравнение (62) при  $\bar{x} = 1$  определяет  $\zeta_k$  — значение  $\zeta$  на конце пластины. Зная  $\zeta_k$ , по формулам (59) и (19) получаем:

$$C_f = \frac{2k^2}{q} \left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^n e^{k\zeta_k} \left(1 - \frac{2}{k\zeta_k}\right) \frac{\left(1 + \frac{x-1}{2} Ma^2\right)^n}{\operatorname{Re}}$$

или окончательно

$$C_f = \frac{2k^2}{q} e^{k\zeta_k} \left(1 - \frac{2}{k\zeta_k}\right) \frac{\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^n}{\operatorname{Re}}. \quad (64)$$

Рассматривая полученные формулы (62)–(64), мы обнаруживаем весьма интересный факт: в случае турбулентного слоя как местный, так и полный коэффициент сопротивления пластины при данном числе Рейнольдса не зависит от числа Маха, а зависит только от отношения абсолютных температур стенки и набегающего потока.

В частности, оказывается безразлично, достигнуто ли данное отношение температур за счет больших чисел  $Ma$  при отсутствии теплопередачи или за счет подогрева стенки при малых  $Ma$ , или, наконец, действуют оба фактора одновременно, — сопротивление пластины во всех этих случаях при одинаковом  $\frac{T_w}{T_0}$  будет одинаковым. Так же, как в случае ламинарного слоя, сопротивление пластины меньше, чем при отсутствии теплообмена, если пластина отдает тепло газу, и больше, чем при отсутствии теплообмена, если пластина воспринимает тепло от газа.

Заметим еще одно следствие установленного факта: с увеличением числа  $Ma$  при отсутствии теплообмена коэффициент сопротивления пластины падает, а стенка нагревается; если путем отвода части тепла, выделяющегося при диссипации, поддерживать температуру стенки постоянной, сопротивление будет также оставаться постоянным, при этом доля тепла, подлежащая отводу, не зависит от числа  $Ma$ , а зависит только от  $Re$  (и составляет, например, 0,545 при  $Re = 10 \times 10^6$ ).

Формулы для  $c_f$  и  $C_f$  можно с известным приближением представить в форме, аналогичной принятой для несжимаемой жидкости без теплопередачи.

Так как значения  $k\zeta$  велики при больших  $Re$ , то, отбрасывая младшие степени  $k\zeta$  по сравнению с  $k^2\zeta^2$ , имеем:

$$Re \bar{x} \left( \frac{T_w}{T_0} \right)^{-n-1} \cong \frac{1}{q} e^{k\zeta} k^2 \zeta^2$$

или

$$\frac{0,241}{\sqrt{C_f} \sqrt{\frac{T_w}{T_0}}} = \lg(Re \bar{x} c_f) - n \lg \frac{T_w}{T_0} + \text{const.}$$

Выбирая постоянную путем сопоставления полученной формулы при  $\frac{T_w}{T_0} = 1$  с формулой Кармана—Кемпфа, имеем

$$\frac{0,241}{\sqrt{C_f} \sqrt{\frac{T_w}{T_0}}} = \lg(Re \bar{x} c_f) - n \lg \frac{T_w}{T_0} + 0,41. \quad (65)$$

Отбрасывая в формуле (64)  $\frac{2}{k\zeta}$  по сравнению с 1 и выбирая постоянные из условия совпадения при  $\frac{T_w}{T_0} = 1$  с формулой Кармана—Шенхерра, получаем

$$\frac{0,242}{\sqrt{C_f} \sqrt{\frac{T_w}{T_0}}} = \lg(Re C_f) - n \lg \frac{T_w}{T_0}. \quad (66)$$

При отсутствии теплопередачи  $\left( \frac{T_w}{T_0} = 1 \right)$  формула (66) совпадает с формулой Кармана [6]:

$$\begin{aligned} & \frac{0,242}{\sqrt{C_f} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \\ & = \lg(Re C_f) - n \lg \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 \right). \end{aligned}$$

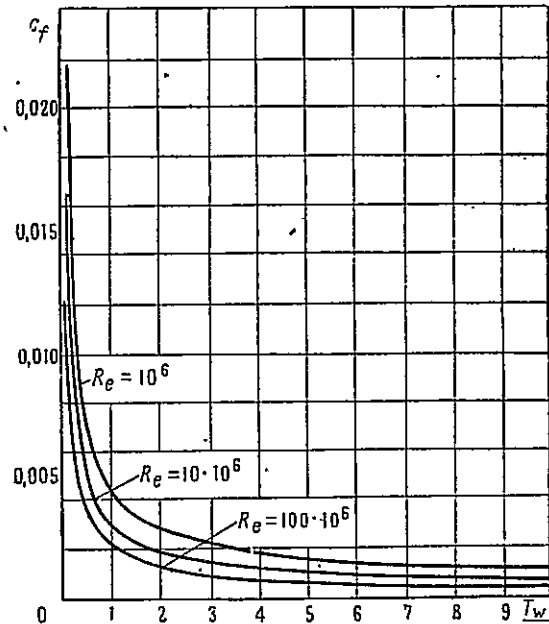
На фиг. 4 представлены кривые  $C_f$  в функции от  $\frac{T_w}{T_0}$  для трех чисел Рейнольдса. В отличие от случая ламинарного слоя мы наблюдаем весьма сильную зависимость сопротивления от отношения температур.

Зная профиль скоростей (55), а следовательно, и профиль температур (8), находим диссипацию, теплоотдачу и изменение теплосодержания газа:

$$N_\Phi = \frac{2k^2}{q} \left( \frac{T_w}{T_0} \right)^n e^{k\zeta} \left( 1 - \frac{3}{k\zeta} + \frac{3}{k^2\zeta^2} \right) \frac{\kappa-1}{2} Ma^2; \quad (67)$$

$$N_Q = \frac{1}{2} C_f Re \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 - \frac{T_w}{T_0} \right); \quad (68)$$

$$N_{Q_1} = N_\Phi - N_Q. \quad (69)$$



Фиг. 4. Зависимость сопротивления при турбулентном слое от отношения абсолютных температур

1948

Полученные формулы позволяют найти баланс тепла в турбулентном слое пластины при произвольном отношении температур и при произвольных числах Маха, а также определить предельные числа Маха, соответствующие прекращению охлаждения газа или стенки вследствие диссипации. Кривые  $\Phi_{\text{турб}}$ ,  $Q_{1\text{турб}}$ , иллюстрирующие баланс тепла в турбулентном пограничном слое пластины при  $\frac{T_w}{T_0} = \frac{1}{5}$  и  $\frac{T_w}{T_0} = 5$  при  $Re = 10 \times 10^6$ , приведены на фиг. 2 и 3<sup>1</sup>. Обращает на себя внимание значительно более интенсивный, нежели в ламинарном слое, характер тепловых процессов, особенно в случае  $\frac{T_w}{T_0} < 1$ , когда оба фактора — турбулентность и подогрев газа — действуют в одном направлении, а именно: усиливают перемешивание.

<sup>1</sup> Деление на  $\sqrt{Re}$  в случае турбулентного слоя, конечно, не устраняет зависимость от  $Re$  и сделано лишь для удобства сравнения с кривыми ламинарного слоя.



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Crocco L. Sulla Transmissione del calore da una lamina plana a un-fluido scorrente ad alta velocita L'Aerotecnica, vol. 12, fasc. 181—197, 1932.
2. Busemann A. Gasströmung mit laminärer Grenzschicht entlang einer Platte, ZAMM, vol. 15, S23, 1935.
3. Karman T. and Tsien H. Boundary Layer in Compressible Fluids. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 5, № 6, p. 227—232, 1938.
4. Дороницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. Прикладная математика и механика, том VI, вып. 6, 1942.
5. Франкль Ф. И., Христианович С. А., Алексеева Р. Н. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ, вып. 354, 1938.
6. Karman T. The Problem of Resistance in Compressible Fluids. V Convegno della Fondazione Volta, Reale Accademia D'Italia, Rome.