

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК • ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

53

И62

ИНЖЕНЕРНЫЙ СБОРНИК

Том I, вып. 2

ENGINEERING REVIEW

Vol. I, № 2

05 +

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

аб-2204.

Д Б П

А К А Д Е М И Я Н А У К С О Ю З А С С Р
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК • ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ИНЖЕНЕРНЫЙ СБОРНИК

Том I, вып. 2

ENGINEERING REVIEW

Vol. I, № 2

Республиканская
научно-техническая
библиотека

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

1984

Ответственный редактор акад. *Б. Г. Галеркин*

Редактор Н. А. Т а л и ц к и х

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ЛУЧЕВАЯ ДИАГРАММА ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

Г. П. ЗАЙЦЕВ

(Запорожье)

Пластические свойства металла определяются тремя параметрами. Основным параметром является коэффициент упрочнения K , не зависящий от деформации металла.

Из двух остальных параметров равномерное удлинение δ_k определяет область равномерной пластичности и „приведенное“ сужение поперечного сечения ψ_2' — область сосредоточенной пластичности.

Знание этих трех параметров исходного металла дает возможность произвести аналитический или графический расчет механических свойств металла в холоднокатаном состоянии, а также позволяет оценить темп роста действующих и остаточных напряжений при пластической деформации, в том числе при знакопеременной.

При тождественных внешних условиях деформирования легко при этом установить, будет ли существовать подобие в распределении напряжений и деформаций или оно будет нарушаться.

Указанные параметры позволяют построить удобную графическую систему классификации металлов по их статическим свойствам, облегчающую нахождение взаимозаменяемых металлов, и наметить новый путь исследований в области термообработки.

Разработка перечисленных положений исходит из детального анализа общеизвестных статических характеристик металла, который приводится ниже.

1. Анализ общепринятых статических характеристик. а) Временное сопротивление σ_b . Для пластичных металлов касательная в точке максимума силы на диаграмме разрыва $P, \Delta l$ горизонтальна, т. е. $dP=0$, для хрупких (типа чугунов) и для весьма наклепанных (проволока) касательная наклонна и для них соответственно $dP>0$ и $dP<0$ в соответствии с фиг. 1. Для указанных трех случаев термин временное сопротивление

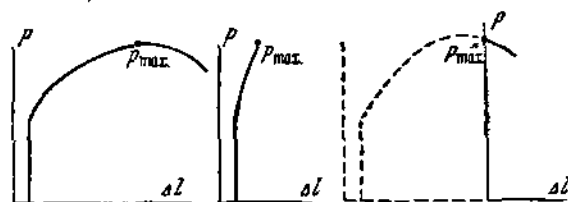
$$\sigma_b = P_{\max}/F \quad (1.1)$$

объединяет поэтому три различных по физическому смыслу понятия. Для пластичных металлов σ_b отмечает окончание равномерной деформации и начало образования шейки, для чугуна дает значение хрупкой прочности, для проволоки — своеобразный предел текучести.

При непараллельности касательной оси деформаций над обозначением временного сопротивления мы будем ставить волнистую черту $\tilde{\sigma}_b$.

Общность термина для этих различных понятий часто вызывает их ошибочное отождествление. Отсюда следуют заведомо бесплодные попытки многих авторов [1,2,3] установить связь между $\tilde{\sigma}_b$ и твердостью H_B у хрупких металлов.

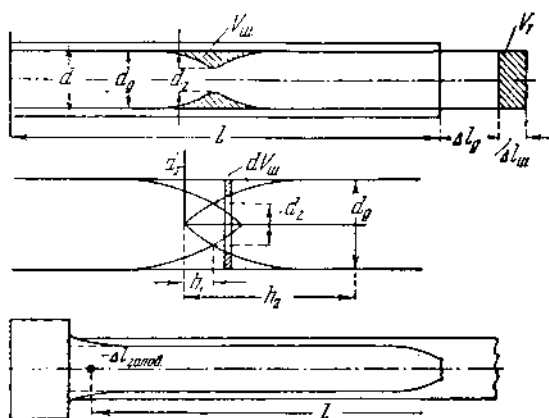
По той же причине часто ошибочно полагают, по аналогии с пластичными



Фиг. 1.

металлами, что для повышения пластичности чугуна следует снижать его временное сопротивление.

б) Удлинение δ_l и сужение поперечного сечения ϕ_z . При растяжении призматический стержень сначала увеличивает длину, сохраняя свою призматичность. Это отвечает развитию равномерного удлинения Δl_r . Затем начинается местная деформация образования шейки, за счет которой образец получает дополнительное удлинение Δl_m . Формирование удлинения представлено на фиг. 2.



Фиг. 2.

Удлинение δ_l на некоторой расчетной длине l и сужение в шейке ϕ_z являются, таким образом, результатом двух принципиально различных процессов пластической деформации, и характеристики δ_l и ϕ_z не определяют поэтому однозначно пластических свойств металла.

Аналитическая связь между δ_l и ϕ_z устанавливается из равенства заштрихованных на фиг. 2 объемов V_u и V_r и найденного Моллендорфом⁽⁴⁾ уравнения контура шейки образца

$$h = -(d_g/2) \ln(1 - d/d_g).$$

Из системы уравнений

$$V_r = \frac{1}{4} \pi d_g^2 \Delta l_m, \quad V_u = \pi \int_{h_1}^{h_2} (d_g^2 - d^2) dh, \quad V_r = V_u,$$

вводя в рассмотрение величины

$$\phi_z' = (F_g - F_z) / F_g = 1 - (d_z/d_g)^2, \quad \phi_g = (F - F_g) / F = 1 - (d_g/d)^2$$

и учитывая, что

$$\delta_l = (\Delta l_r + \Delta l_m - \Delta l_r) / l = \delta_g + (\Delta l_m - \Delta l_r) / l,$$

где Δl_r — тормозящее равномерную деформацию влияние головок образца (фиг. 2), для δ_l получим три выражения:

$$\delta_l = (d/d_g)^2 - 1 + (1 - d_z/d_g)(3d_g + d_z)/(2l) - \Delta l_r/l, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \delta_l &= \delta_g + \frac{1}{2k} \left[1 - \sqrt{1 - \phi_z'} \right] \left[\sqrt{1 - \phi_g} (3 + \sqrt{1 - \phi_z'}) \right] - \frac{\Delta l_r}{l} = \\ &= \delta_g + \frac{1}{2k} \left[1 - \sqrt{1 - \phi_z'} \right] \frac{3 + \sqrt{1 - \phi_z'}}{\sqrt{1 + \delta_g}} - \frac{\Delta l_r}{l}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\delta_l = \delta_g + \left[1 - \sqrt{(1 + \delta_g)(1 - \phi_z')} \right] \left[3 + \sqrt{(1 + \delta_g)(1 - \phi_z')} \right] : [2k\sqrt{1 + \delta_g}] - \Delta l_r/l, \quad (1.4)$$

где $k = l/d$ — кратность образца.

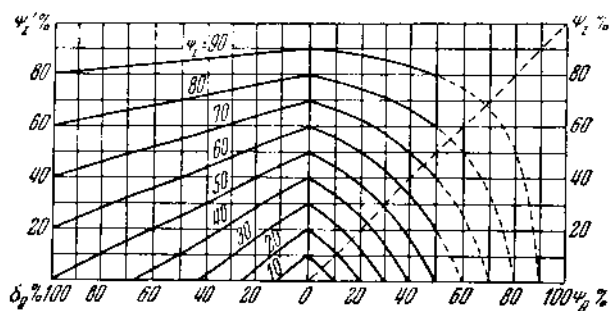
При разных расчетных длинах l_1 и l_2 , вводя $l_1/l_2 = n > 1$, из системы уравнений

$$\delta_{l_1} = \delta_g + (\Delta l_m - \Delta l_r) / l_1, \quad \delta_{l_2} = \delta_g + (\Delta l_m - \Delta l_r) / l_2$$

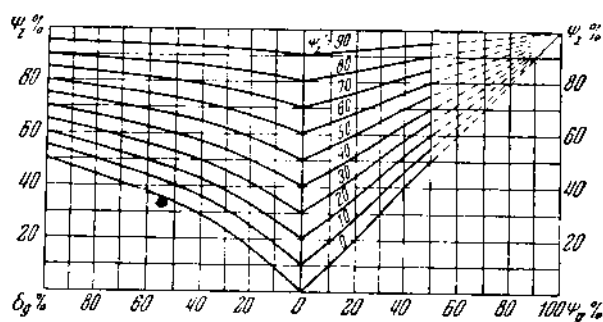
получаем формулу пересчета удлинений¹

$$\delta_{l_2} = n \delta_{l_1} - (n - 1) \delta_g \quad (1.5)$$

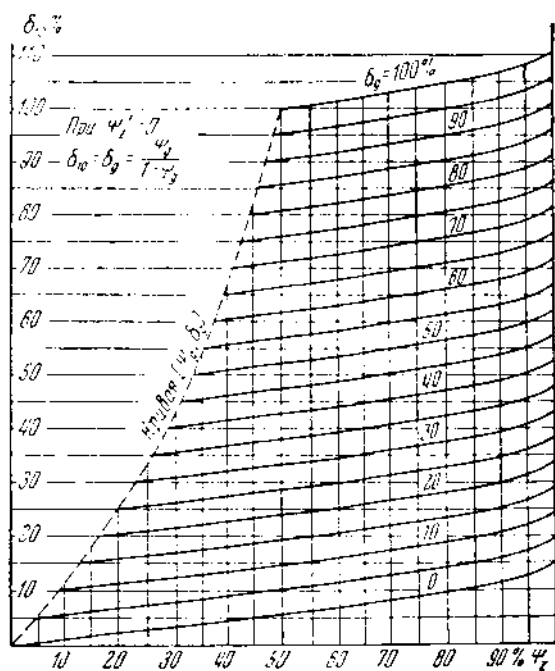
¹ Эта формула пересчета в несколько ином виде установлена экспериментально Янидким⁽³⁾.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

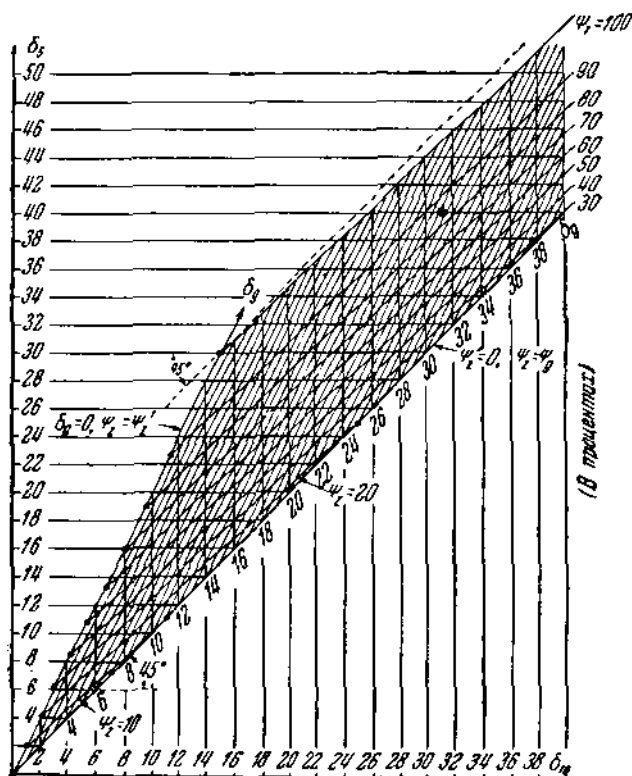
Графическое представление о связи между δ_g , ψ_g и ψ'_g при $\psi_z = \text{const}$ и δ_g , ψ_g и ψ_z при $\psi'_g = \text{const}$ дано соответственно на фиг. 3 и 4 и о связи δ_{10} , δ_b , δ_g и ψ на фиг. 5 и 6.

Формула пересчета верна только при независимости от длины образцов тормозящего деформацию влияния головок и при отсутствии торможения ими развития шейки. Отсюда следует, что у образцов с разной расчетной длиной головки и расстояния крайних меток расчетной длины от головок должны быть тождественны.

Составив по формуле (1.2) удлинения на двух разных расчетных длинах и учтя формулу (1.5) и закон сохранения постоянства объема при пластической деформации, получим:

$$d_z = \frac{d}{\sqrt{1+\delta_g}} \left[2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} k(\delta_t - \delta_g) \sqrt{1+\delta_g}} - 1 \right], \quad (1.6)$$

$$d_g = \frac{d}{\sqrt{1+\delta_g}}. \quad (1.7)$$



Фиг. 6.

Из чисто геометрических соображений и определений величин ψ_z , ψ_z' , δ_g и ψ_g легко установить, что ¹

$$\psi_z = \psi_g + \psi_z' - \psi_g \psi_z' = (\psi_z' + \delta_g) / (1 + \delta_g), \quad (1.8)$$

$$\psi_z' = \psi_z (1 + \delta_g) - \delta_g = (\psi_z - \psi_g) / (1 - \psi_g), \quad (1.9)$$

$$\psi_z' = -\delta_g$$

Рассмотрение всех вышеприведенных формул позволяет заключить, что общепринятые характеристики пластичности δ_t и ψ_z являются функциями величин δ_g и ψ_z' . Последние весьма просто и однозначно описывают два основных этапа деформации — равномерную и местную. Особенно замечательно, что δ_g и ψ_z' являются отсчетами на единой оси деформации, взятыми от некоторой, очевидно,

¹ По Шапошникову [8] $\psi_z = \psi_g + \psi_z'$, что является ошибочным.

принципиально важной точки влево и вправо, так как $\phi_z' = -\delta_g$. Эта точка отвечает значению

$$\phi_z' = \delta_g = 0,$$

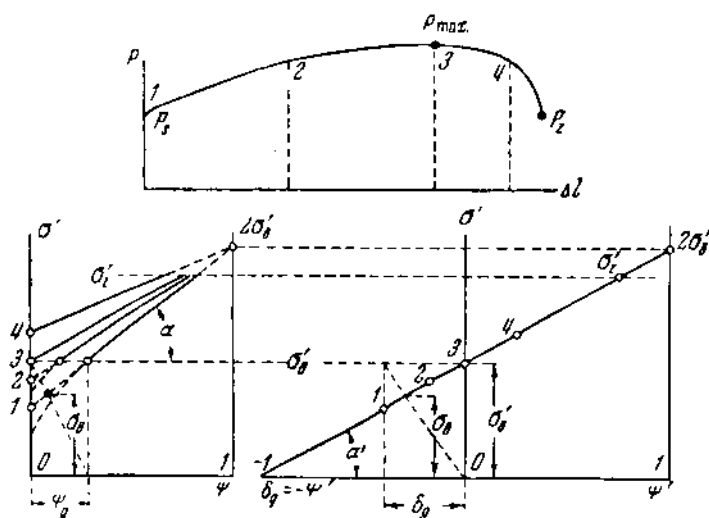
т. е. моменту исчерпания равномерной деформации и началу образования шейки, совпадающему с моментом достижения силой своего максимума. Отсюда следует, что диаграмма, связывающая напряжения с деформациями, должна состоять из двух областей: области равномерной деформации и области сосредоточенной деформации. Для установления связи между деформациями и напряжениями обратимся к анализу кривых истинных напряжений.

2. Анализ кривых (σ', ϕ) и (σ', ϕ') . В общеизвестной теории кривых истинных напряжений наиболее ценным является введенное Моллендорфом понятие о коэффициенте упрочнения металла $d\sigma' / d\phi$ при его пластической деформации.

Следуя указанному автору, мы повторим вывод значения коэффициента упрочнения, распространив его и на координатную систему σ', ϕ' .

При испытании на разрыв в любой момент времени приращение силы $P = \sigma' F$ будет:

$$dP = \sigma' dF + F d\sigma'.$$



Фиг. 7.

В момент прохождения силой максимума

$$dP = 0, \quad \sigma' = \sigma_b', \quad F = F_g;$$

откуда

$$\sigma_b' dF + F_g d\sigma' = 0.$$

Из определения величин ϕ и ϕ' следует, что

$$dF = -F d\phi = -F_g d\phi'.$$

Помня также, что

$$F_g = F / (1 + \delta_g), \quad \sigma_b' = P_{\max} / F_g = \sigma_b (1 + \delta_g),$$

получим:

$$d\sigma' / d\phi = \sigma_b' (1 + \delta_g) = \sigma_b (1 + \delta_g)^2, \quad d\sigma' / d\phi' = \sigma_b' = \sigma_b (1 + \delta_g) = K. \quad (2.1)$$

Различие значений этого коэффициента в системах координат σ', ϕ и σ', ϕ' свидетельствует об их принципиальном различии. Для выяснения причин этого различия проследим, как отразится на кривых истинных напряжений наклеп металла (фиг. 7).

Отметим на диаграмме разрыва ($P, \Delta l$) ряд точек 2, 3, 4, соответствующих постепенному исчерпанию пластичности образца. Если в промежуточном положении 2 принять образец за исходный, то он покажет пониженное равномерное удлинение при неизменности величины истинного временного сопротивления. Вследствие этого уменьшится и величина

$$\phi_g = \delta_g / (1 + \delta_g),$$

и для такого образца кривая истинных напряжений в системе σ', ϕ займет положение 2, характеризуемое меньшим значением коэффициента упрочнения. Еще сильнее снизится этот коэффициент в положении 3. Однако принятие образца в положении 2 за исходный не могло изменить течение процесса деформации в точке 3, а следовательно, не могло изменить и величину коэффициента упрочнения. Отсюда необходимо сделать заключение, что диаграмма (σ', ϕ) отображает не испытание металла как такового, а испытание образца как изделия. Поэтому и коэффициент упрочнения в этой системе характеризует не свойство металла, а свойство образца-изделия.

В системе σ', ϕ прочность металла в момент разрыва σ_z' отвечает сужению поперечного сечения ϕ_z . Продолжение прямолинейного участка кривых на ординате $\phi = 1$ отсекает в соответствии с правилом Кербера отрезок $2\sigma_b'$. Пересечение этого участка с ординатой $\phi = 0$ нами названо теоретическим пределом текучести и обозначено через σ_{st}' . Некоторые авторы^[1] отмечают, что для высоконаклепанного металла (положение 4) правило Кербера нарушается. На самом деле, нарушения нет, так как точка 4 дает не истинное временное сопротивление σ_b' , а теоретический предел текучести $\sigma_{st}' = \sigma_b'$.

В системе координат σ', ϕ' ординаты точек σ_{st}', σ_b' и σ_z' будут, очевидно, те же, что и в системе σ', ϕ . Их абсциссы будут соответственно $\delta_g, 0$ и ϕ_z' . Легко показать, что эти точки в системе σ', ϕ' также лежат на одной прямой. Удвоение напряжения σ_b' на ординате $\phi' = 1$ (правило Кербера) является прямым следствием равенства коэффициента упрочнения в этой системе истинному временному сопротивлению, так как $\lg \alpha_1 = \sigma_b' = K$ и $\phi'_{\max} = 1$. Отсюда же следует, что для любого металла прямой участок кривой (σ', ϕ') всегда пересекает ось абсцисс в одной и той же точке, отстоящей на единицу влево от начала координат, и что, следовательно, любой металл будет представлен одним из возможных лучей, выходящих из этой точки.

В системе координат σ', ϕ' коэффициент упрочнения, обозначаемый через K , равен истинному временному сопротивлению, не меняющему своей величины при изменении степени наклепа металла. Вследствие этого коэффициент упрочнения K (форм. 2.1) не зависит от степени наклепа и является параметром, определяющим металл как субстанцию. Параметр K , таким образом, абстрагирован от пластического состояния металла.

Если в системе σ', ϕ изменение степени наклепа металла вызывает изменение положения кривых истинных напряжений, в системе σ', ϕ' для всех состояний наклепа сохраняется один и тот же луч. Увеличение степени наклепа сопровождается только перемещением вправо по лучу точки σ_{st}' , определяющей состояние металла, соответствующее заданному наклепу.

На диаграмме (σ', ϕ') четко видны левая область равномерной деформации и правая — сосредоточенной деформации. Из диаграммы следует, что с увеличением наклепа сначала снижается величина равномерной деформации при сохранении величины ϕ_z' . С некоторого момента равномерная деформация исчезает, и наклеп начинает частично исчерпывать способность к сосредоточенной деформации, выражаемой через ϕ_z' . Отсюда же следует, что величина ϕ_z' , получаемая при испытании металла на разрыв, принципиально отличается от величины ϕ' , отложенной на оси абсцисс диаграммы (σ', ϕ') . Величина ϕ' на оси абсцисс определяет степень наклепа, получаемого металлом при хотя бы холодной прокатки. Поэтому в последующих диаграммах оси абсцисс будет приписываться условно индекс прокатки, т. е. будет писаться $\phi'_{пр}$. Легко видеть, что степень

прокатки, не исчерпавшая способности к равномерной деформации, будет определяться отрицательным значением абсциссы — $\phi_{np}' = \delta_g$.

Чем выше наклеп, т. е. чем выше ϕ_{np}' , тем меньше обычное сужение ϕ_z . Пока ϕ_{np}' изменяется в области своих отрицательных значений, величина приведенного сужения образца ϕ_z' остается неизменной и равной ϕ_{zo}' отожженного металла. При повышении ϕ_{np}' в области положительных значений величина ϕ_z' снижается и достигает нуля при максимальном возможном для металла наклепе.

3. Установление связи между деформациями и напряжениями. До сего времени часто считалось, что каждая из характеристик (предел текучести, временное сопротивление, удлинение, сужение поперечного сечения, ударная вязкость и т. д.) определяется в отдельности химическим составом металла и его состоянием^[5]. Такое воззрение как будто подтверждалось фактами: металлы с одинаковым временным сопротивлением могли иметь различные удлинения и наоборот. На самом же деле между пластическими и прочностными характеристиками без труда может быть установлена связь с помощью величины коэффициента упрочнения K , выражаемого в кг/мм². Действительно, так как

$$K = \sigma_b (1 + \delta_g), \quad \sigma_z' = K + \phi_{zo}' / \alpha_1 = K (1 + \phi_{zo}'),$$

то

$$\delta_g = K / \sigma_b - 1, \quad \phi_{zo}' = \sigma_z' / K - 1, \quad (3.1)$$

где ϕ_{zo}' относится к исходному ненаклепанному металлу.

Отсюда следует, что пластические характеристики, выражаемые в процентах, являются функциями напряжений. Это позволяет сделать заключение, что при известных свойствах отожженного металла по заданным деформациям холодной прокатки могут быть вычислены механические характеристики холоднокатаного металла.

4. Расчет механических свойств холоднокатаного металла. Расчет основан на предположении, что отожженный металл в виде штанги с диаметром D_0 доводится холодной прокаткой до диаметра d , после чего холоднокатаный пруток ставится на разрывную машину и испытывается. Величины, относящиеся к свойствам отожженного металла, в дальнейшем будут отмечаться индексом 0. Характеристики холоднокатаного металла не индексируются.

Пусть для исходного металла, если испытать на разрыв штангу с диаметром D_0 , имеют место некоторые значения:

$$\sigma_{b0}, \quad \delta_{g0} = (D_0 / d_g)^2 - 1, \quad \phi_{zo} = 1 - (d_z / D_0)^2,$$

и пусть обжатие при прокатке задано величиной

$$\phi_{np} = 1 - (d / D_0)^2.$$

Механические характеристики холоднокатаного металла будут:

$$\phi_{np}' = 1 - (d / d_g)^2 = \phi_{np} (1 + \delta_{g0}) - \delta_{g0} = (\phi_{np} - \phi_{g0}) / (1 - \phi_{g0}); \quad (4.1)$$

$$\phi_z = 1 - (d_z / d)^2 = (\phi_{zo} - \phi_{np}) / (1 - \phi_{np}) = (\phi_{zo}' - \phi_{np}') / (1 - \phi_{np}'); \quad (4.2)$$

$$\phi_z' = 1 - (d_z / d_g)^2 = \phi_{zo} (1 + \delta_{g0}) - \delta_{g0} = \phi_z (1 + \delta_g) - \delta_g = \text{const} \\ (\text{при } \phi_{np}' \leq 0), \quad (4.3)$$

$$\phi_z' = \phi_z \quad (\text{при } \phi_{np}' \geq 0);$$

$$\delta_g = (d / d_g)^2 - 1 = -\phi_{np}' = \delta_{g0} - \phi_{np} (1 + \delta_{g0}) = (\phi_{g0} - \phi_{np}) / (1 - \phi_{g0}); \quad (4.4)$$

$$\delta_l = \delta_g + \frac{1}{2k} \left(1 - \sqrt{1 - \phi_z'} \right) \frac{3 + \sqrt{1 - \phi_z'}}{\sqrt{1 + \delta_g}} \quad (\text{см. форм. 1.3}); \quad (4.5)$$

$$K = \sigma_b' = \sigma_{b0} (1 + \delta_{g0}) = \sigma_b (1 + \delta_g) = \text{const}; \quad (4.6)$$

$$\sigma_b = K / (1 + \delta_g) = \sigma_{b0} (1 + \delta_{g0}) / (1 + \delta_g); \quad (4.7)$$

$$\sigma_z' = K (1 + \psi_{z0}'); \quad (4.8)$$

$$\sigma_{st}' = K (1 + \psi_{np}') = K [\psi_{np} (1 + \delta_{g0}) + (1 - \delta_{g0})],$$

$$\sigma_{st}' = K (1 - \delta_g') = \sigma_b (1 - \delta_g^2) \quad (\text{при } \psi_{np}' \leq 0). \quad (4.9)$$

5. Графические методы расчета характеристик наклепанного металла. С помощью формул (4.1) — (4.9) расчет прокатки может быть проведен путем графического построения, представленного на фиг. 8 и не требующего специальных пояснений.

В табл. 1 значения различных характеристик металла при разных степенях наклепа приведены в отрезках (фиг. 8). Укажем только, что для исходного металла приняты $K = III - III_1$, $\delta_{g0} = I_1 - III_1$, $\psi_{z0} = 1 - 6$.

Таблица 1

Характеристика	Исходное состояние	Состояние наклепа для разных ψ_{np}						Примечание
ψ_{np}	I—I	I—2	I—3	I—4	I—5	I—6	I—I =	
ψ_{np}'	$I_1 - III_1$	$II_1 - III_1$	$III_1 - III_1$	$III_1 - IV_1$	$III_1 - V_1$	$III_1 - VI_1$	$III_1 - III_1 =$	
δ_g	$I_1 - III_1$	$II_1 - III_1$	$III_1 - III_1$	—	—	—	$= 6_1 - 6_1 = 0$	
ψ_z	$I_1 - 6_1$	$2_1 - 6_1$	$3_1 - 6_1$	$4_1 - 6_1$	$5_1 - 6_1$	$6_1 - 6_1$		
σ_{st}'	I—I ₁	II—II ₁	III—III ₁	IV—IV ₁	V—V ₁	VI—VI ₁		
σ_b	$a_1 - b_1$	$a_{II} - b_{II}$	$III - III_1$	—	—	—		
ψ_g	$b_1 - III_1$	$b_{II} - III_1$	$III_1 - III_1$	—	—	—		

Из построения следует, что начальное состояние металла определяется левой точкой области пластичности и что для любого наклепанного состояния, выражаемого какой-либо точкой на луче, может быть найден комплекс взаимно подчиненных характеристик, определяющих его состояние.

Вычисление характеристик наклепанного металла может быть осуществлено также применением номограмм, выполненных заранее. Последовательность вычислений соответствует последовательности расположения номограмм на фиг. 9.

6. Экспериментальная проверка методов расчета свойств холоднокатаного металла. Для проверки методов расчета из книги проф. Шапошникова^[5] были взяты экспериментальные данные Шварца о влиянии холодной прокатки на свойства красной меди и латуни. По свойствам металла в отожженном состоянии и по указанным степеням обжатия при холодной прокатке произведен расчет механических свойств красной меди:

а) аналитическим путем — см. табл. 2,

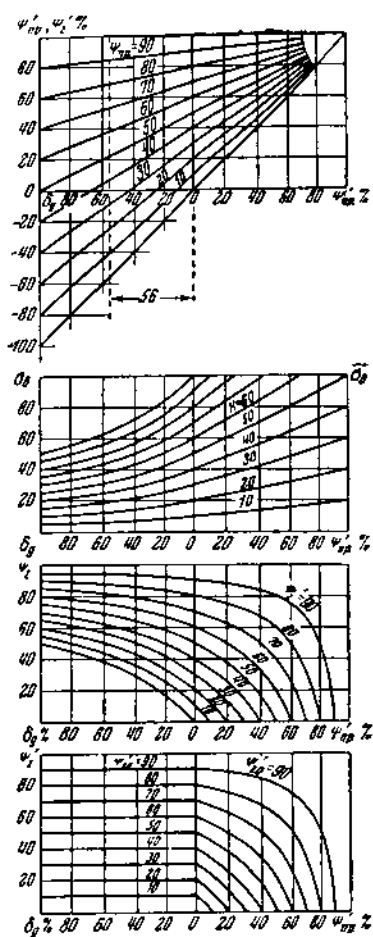
б) методом построения — см. фиг. 10.

Все результаты подсчетов и построений приводятся в табл. 2. В ней подсчитанные значения стоят в числителе, экспериментальные — в знаменателе. Там же приводятся их отношения.

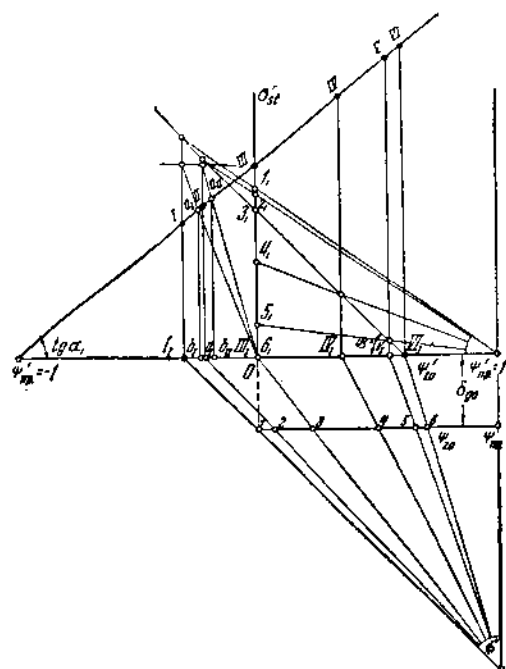
Анализ табл. 2 свидетельствует о грубой ошибочности экспериментального значения $\delta_g = 0.01$ для $\psi_{np} = 0.197$, так как теоретическое значение $\delta_g = 0.148$, использованное при подсчетах σ_b и ψ_z' , дало для последних характеристик верные результаты. Для того же обжатия $\psi_{np} = 0.197$ должны поэтому иметься и значительные расхождения в величине δ_{10} . Значения характеристик для высоких наклепов расходятся с экспериментальными за счет самоотпуска металла.

7. Учет самоотпуска металла. Для металлов с относительно низкой температурой плавления комнатная температура вызывает явления отпуска, снижающие напряжения и повышающие пластичность.

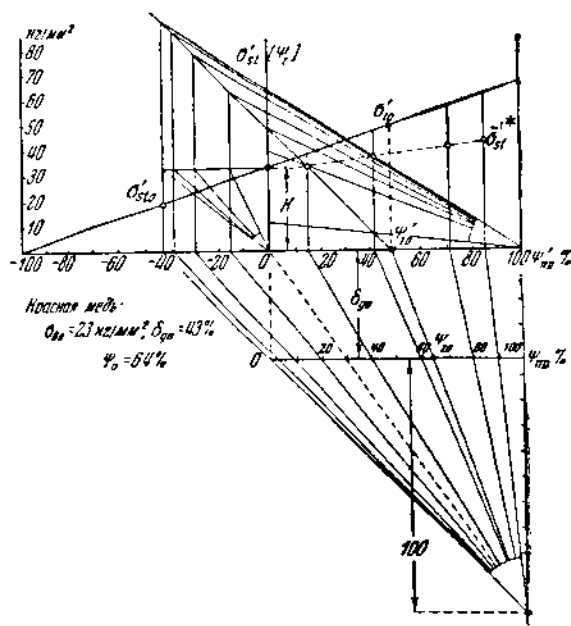
Для получения диаграммы, учитывающей самоотпуск, экспериментальное значение σ_{st}' высоконаклепанного металла, меньшее теоретического значения σ_{st}' , отвечающего заданному обжатию при холодной прокатке, проектируется на луч



Фиг. 9.



Фиг. 8.



Фиг. 10.

Таблица 2

Красная медь

ψ_{np}	0	0.027	0.091	0.197	0.405	0.595	0.796	0.895	Расчетная формула
ψ_{np}'	-0.430	-0.391	-0.298	-0.148	+0.149	+0.421	+0.710	+0.851	$\psi_{np}' = \delta_{go} - \psi_{np} \times$ $\times (1 + \delta_{go}) = 0.43 - 1.43 \psi_{np}$
δ_g	$\frac{0.430}{0.430}$	$\frac{0.391}{0.380}$	$\frac{0.298}{0.310}$	$\frac{0.148}{0.010}$	$\frac{0}{0.008}$	0	$\frac{0}{0.005}$	$\frac{0}{0.005}$	
K	32.9	32.9	32.9	32.9					$K = \delta_b (1 + \delta_g) =$ $= \delta_{go} (1 + \delta_{go}) = \text{const} = 32.9$
σ_b	$\frac{23.0}{23.0}$	$\frac{23.6}{23.8}$	$\frac{25.3}{25.3}$	$\frac{28.6}{28.6}$	$\frac{32.9}{32.9}$	$\frac{36.8}{36.8}$	$\frac{40.6}{40.6}$	$\frac{42.6}{42.6}$	$\sigma_b = \frac{K}{1 + \delta_g} = \frac{32.9}{1 + \delta_g}$
δ_{sf}'	$\frac{18.8}{-}$	$\frac{20.0}{-}$	$\frac{23.0}{-}$	$\frac{28.0}{-}$	$\frac{37.8}{32.9}$	$\frac{46.75}{36.8}$	$\frac{56.3}{40.6}$	$\frac{60.9}{42.6}$	$\delta_{sf}' = 32.9 (1.43 \psi_{np} - 0.57)$
ψ_z	$\frac{0.640}{0.640}$	$\frac{0.630}{0.626}$	$\frac{0.604}{0.620}$	$\frac{0.551}{0.540}$	$\frac{0.395}{0.485}$	$\frac{0.110}{0.370}$	$\frac{<0}{0.276}$	$\frac{<0}{0.144}$	$\psi_z = \frac{\psi_{zo} - \psi_{np}}{1 - \psi_{np}} = \frac{0.64 - \psi_{np}}{1 - \psi_{np}}$
ψ_{zo}'	0.485	0.485	0.485	0.485					$\psi_{zo}' = \psi_0 (1 + \delta_{go}) - \delta_{go} =$ $= 0.64 (1 + 0.43) - 0.43$
$\frac{\Delta l_w}{l_{10}}$	$\frac{0.044}{0.036}$	$\frac{0.045}{0.040}$	$\frac{0.046}{0.059}$	$\frac{0.049}{0.075}$	$\frac{0.042}{0.038}$	$\frac{0.011}{0.024}$	$\frac{0}{0.005}$	$\frac{0}{0.005}$	подсчитано по форм. (1.3)
ϵ_{10}	$\frac{0.474}{0.466}$	$\frac{0.436}{0.420}$	$\frac{0.346}{0.369}$	$\frac{0.197}{0.085}$	$\frac{0.042}{0.046}$	$\frac{0.011}{0.030}$	$\frac{0}{0.010}$	$\frac{0}{0.010}$	взято по фиг. 5

Примечание: из эксперимента взято $\frac{\Delta l_w}{l_{10}} = \epsilon_{10} - \epsilon_g$

влево по горизонтали. Вследствие этого кажется, что самоотпустившийся металл получил меньшее обжатие при прокатке, чем в действительности. Значение σ_{zo}' , получаемое при испытании на разрыв, не требует корректирования, так как при быстро идущем испытании в большинстве случаев влияние самоотпуска сильно не сказывается. Принцип корректирования основывается на предположении о независимости от самоотпуска металла коэффициента упрочнения и прочности в момент разрыва.

На корректированной диаграмме или на диаграмме не самоотпускающегося металла правой точкой будет всегда ϕ_{zo}' и наибольшим напряжением, действующим при деформации, прочность в момент разрыва σ_{zo}' . Если имеются значения ϕ_{np} , лежащие правее ϕ_{zo} (т. е. $\phi_{np} > \phi_{zo}$), это свидетельствует о способности металла к самоотпуску.

Указанные выше методы положены в основу построения „корректированных“ диаграмм фиг. 11—12 для красной меди и латуни, с учетом самоотпуска

Таблица 3

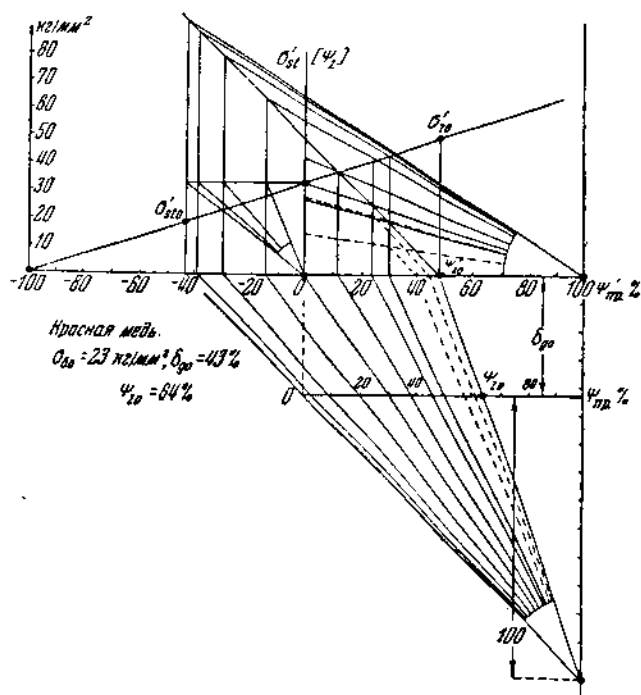
Латунь

ϕ_{np}	0	5.1	9.5	19.7	39.2	59.6	79.9	Примечание
ϕ_{zo}	0	5.1	9.5	19.7	38.9	52.0	63.5	$\phi_{zo} = 64.6$
ϕ_{np}^*	— 56.0	— 48.0	— 41.0	— 25.3	+ 5.0	+ 37.0	+ 68.7	$\phi_{zo}' = 45$
ϕ_{np}^{**}	— 56.0	— 48.0	— 41.0	— 25.3	+ 5.0	+ 25.7	+ 43.4	$K = 49.9$
σ_z	56.0	48.0	41.0	25.3	0.0	0.0	0.0	Значения величин
σ_b, σ_b^*	56.0	47.0	33.0	22.0	2.0	2.0	0.8	σ_b, σ_b^* и K при-
	32.0	34.0	35.4	40.0	52.4	62.7	71.6	ведены в кг/мм ² ,
	32.0	34.4	37.6	39.9	52.4	62.7	71.6	остальные выра-
	64.6	62.6	60.7	55.7	42.0	25.5	2.5	жены в процен-
ϕ_z	64.6	59.5	50.9	56.8	40.0	28.9	34.5	тах
δ_{10}	60.0	52.0	45.0	29.3	4.5	2.6	0.2	
	59.7	51.2	39.4	27.6	7.5	5.0	4.5	

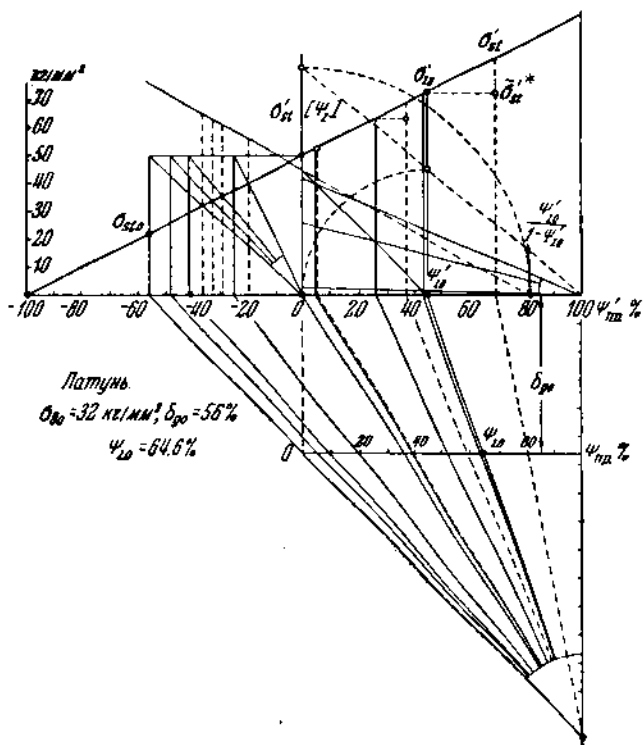
Таблица 4

Красная медь

ϕ_{np}	0	2.7	9.1	19.7	40.5	59.5	79.6	89.5	Примечание
ϕ_{zo}	0.0	2.7	9.1	19.7	30.0	38.0	46.3	50.7	$\phi_{zo} = 64.0$
ϕ_{np}^*	— 43.0	— 39.0	— 30.0	— 15.0	+ 15.0	+ 42.0	+ 71.0	+ 85.0	$\phi_{zo}' = 48.5$
ϕ_{np}^{**}	— 43.0	— 39.0	— 30.0	— 15.0	+ 0.0	11.7	23.7	29.6	$K = 32.9$
σ_z	43.0	39.0	30.0	15.0	0.0	0.0	0.0	0.0	Значения величин
σ_b, σ_b^*	43.0	38.0	31.0	1.0	0.8	0.6	0.5	0.5	σ_b, σ_b^* и K при-
	23.0	23.7	25.3	28.7	32.9	36.8	40.7	42.6	ведены в кг/мм ² ,
	23.0	23.8	25.3	28.6	32.9	36.8	40.6	42.6	остальные выра-
	64.0	63.0	60.3	55.0	48.5	41.7	32.4	26.7	жены в процентах
ϕ_z	64.0	62.6	62.0	50.0	48.5	37.0	27.6	14.4	
δ_{10}	47.5	43.5	34.5	20.0	5.3	4.5	3.5	2.7	
	46.6	42.0	36.9	8.5	4.6	3.0	1.0	1.0	



Фиг. 11.



Фиг. 12.

металла. Корректированные величины отмечены на них звездочкой. Результаты построений сведены в табл. 3 и 4, на которых, как и прежде, вычисленные величины стоят в числителе, экспериментальные — в знаменателе.

На фиг. 12 приведен полутно второй вариант графического определения величины ϕ_z малонаклепанного металла. Расстояния до оси абсцисс точек прямой, проходящей через точки

$$[\phi_{np}' = \phi_{zo}' / (1 - \phi_{zo}'), \sigma_{st}' = 0] \quad \text{и} \quad [\phi_{np}' = 0, \sigma_{st}' = \phi_{zo}'],$$

дают значения ϕ_z при отсчете по тем же вертикалям, по которым отсчитываются значения σ_b .

Точное совпадение вычисленных и экспериментальных значений $\tilde{\sigma}_b$ в табл. 3 и 4 является следствием принятой методики корректирования диаграмм и не позволяет судить о правильности принципа корректирования. Поэтому критерием правильности должно являться совпадение значений величины ϕ_z .

Для латуни это совпадение вполне удовлетворительно. Резкое расхождение величины ϕ_z для $\phi_{np} = 79.9\%$ определяется ошибочностью экспериментального значения ϕ_z , видной хотя бы из нарушения закономерности изменений экспериментальных значений этой величины, дающей неожиданный подъем при $\phi_{np} = 79.9\%$.

Для красной меди экспериментальные значения ϕ_z для высоких степеней наклепа несколько меньше вычисленных. Этого и следовало ожидать, так как деформация при холодной прокатке, превышающая величину ϕ_{zo} (фиг. 11), должна была сильно ослабить хрупкую прочность металла, чем деформация, предшествующая разрыву исходного металла ϕ_{zo} . При расчете ϕ_z мы же полагали, что прочность металла, наклепанного до $\phi_{np} = 0.895$ (т. е. до удлинения $\delta_{np} = \phi_{np} / (1 - \phi_{np}) = 850\%$), сохраняется той же, что и при $\phi_{zo} = 0.64$ (т. е. при $\delta_{zo} = \phi_{zo} / (1 - \phi_{zo}) = 178\%$).

Для совпадения теоретических и экспериментальных значений, как это следует из вспомогательного пунктирного построения на фиг. 11, достаточно положить, что прочность в момент разрыва σ_{zo}' снизилась для высшей степени наклепа прокаткой с 49 до 46,1 кг/мм², что вызвало бы снижение ϕ_{zo}^* до 58% и $\phi_{zo}'^*$ до 40%. Напомним, что значок * здесь является индексом корректирования.

Приведенный анализ расхождений вычисленных и экспериментальных значений характеристик позволяет заключить, что рассматриваемый метод расчета механических свойств холоднокатаного металла и принцип корректирования на самоотпуск металлов верны.

Расчет свойств холоднокатаной латуни был проведен также при помощи номограмм фиг. 8. Результаты, представленные в табл. 5, несмотря на малый масштаб номограмм, весьма близки к точным значениям табл. 3.

Таблица 5

ϕ_{np}^* (в проц.)	0.0	5.1	9.5	19.7	38.9	52	63.5	Примечание
$\phi_{np}'^*$ (в проц.)	—56.0	—48.0	—41.0	—25.0	5.0	26.0	43.0	$K = 49.9$ кг/мм ²
σ_b и $\tilde{\sigma}_b$ (кг/мм ²)	32.0	34.0	35.5	40.0	52.4	63.0	71.5	$\delta_{zo} = 56\%$
ϕ_z (в проц.)	65.0	63.0	60.5	56.0	42.0	26.0	0.0	$\phi_{zo} = 64.6\%$
ϕ_z' (в проц.)	45.0	45.0	45.0	45.0	42.0	25.0	0.0	

8. Лучевая диаграмма и классификация металлов. Лучевая диаграмма металлов (σ_{st}' , ϕ_{np}') весьма удобна для целей классификации металлов, так как дает наглядное представление о коэффициенте его упрочнения $K = \lg \alpha_1$ и об областях его равномерной и сосредоточенной пластичности.

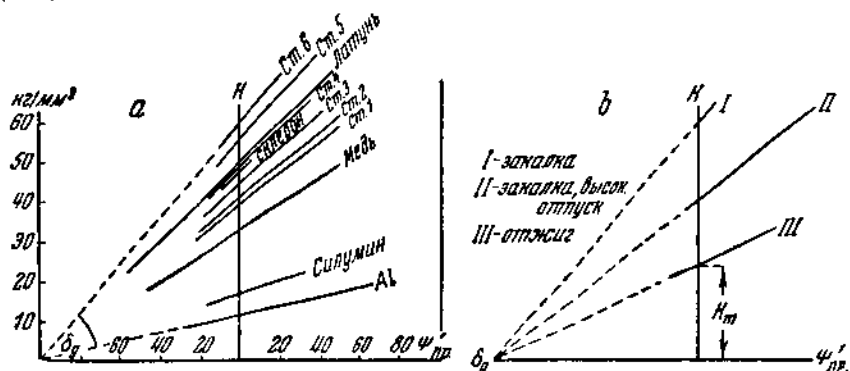
На фиг. 13а представлена лучевая диаграмма отожженных металлов, на фиг. 13б — влияние термообработки стали на коэффициент упрочнения и размер областей пластичности.

Высокая сосредоточенная пластичность, характеризующаяся посредством ϕ_{zo}' , обуславливает прочность металла ($\phi_{zo}' = \sigma_z' / K - 1$). Высокая равномерная пластичность, определяемая через δ_g , обеспечивает металлу способность к весьма большой равномерной деформации, предшествующей появлению „шейки“, быстро приводящей к разрушению длинных элементов ферм и т. д.

Для строительного металла, предназначенного на мосты, котлы, на глубокую штамповку (автолист), весьма ценна как равномерная, так и сосредоточенная пластичность. Последняя обеспечивает металлу прочность, важную и для автолиста, в котором при штамповке возникают значительные напряжения.

Металл для деталей моторов, шестерен и т. д. должен иметь высокую сосредоточенную пластичность, свидетельствующую о прочности, но для него вредно высокое равномерное удлинение, так как оно сопровождается низким пределом текучести.

Листовой металл с высоким пределом текучести, назначаемый для электросварки, должен иметь высокую прочность, а значит, и большие значения ϕ_{zo}' , так как в противном случае под действием температурных напряжений в нем возникнут трещины.



Фиг. 13.

Приведенные примеры показывают, что термин „пластичность“, суммирующий способность к равномерной и сосредоточенной деформации, следует изъять из употребления как способствующий грубым ошибкам при оценке качества металла и его пригодности для того или иного назначения. Вместо него необходимо ввести два термина: „равномерная“ и „сосредоточенная“ пластичность.

Лучевая диаграмма облегчает выбор металла и позволяет устанавливать металлы — аналоги по своим статическим свойствам.

9. О пределе текучести. Найти однозначную зависимость предела текучести от других статических характеристик нам пока не удалось. Однако его принципиальная связь с другими характеристиками должна быть та же, что и теоретического предела текучести. Отклонение обычного предела текучести от теоретического представлено на фиг. 14 и фиг. 16, где изображены зависимости между σ_h , σ_{st}' / σ_h , δ_g и ϕ_g . Уже приведенного материала достаточно, чтобы предел текучести σ_s определять как функцию величин K и δ_g или σ_{st}' и δ_g . Бесспорно, что и σ_s и величина отношения σ_s / σ_b при прочих равных условиях убывают с повышением величины равномерного удлинения.

Установление связи между σ_s и другими характеристиками требует предварительного пересмотра определения σ_s . Величина σ_s резко меняется при первой ничтожной пластической деформации металла.

Для металлов, сильно отличающихся по величине δ_g , определение условного предела текучести $\sigma_{0,2}$ на базе одинаковой остаточной деформации не верно с металловедческой точки зрения.

10. Закон вертикальных сечений лучевой диаграммы. Легко усмотреть, что точки, принадлежащие разным лучам и лежащие на одной вертикали, обладают значениями σ_{st}' и σ_b , пропорциональными коэффициентам упрочнения, определяющим эти лучи. Действительно, если значениям σ_{st}' отвечают $\delta_g = \text{const}$, то значения σ_b для этих состояний металла будут лежать на вертикали, отстоящей на

$$\phi_g = \delta_g / (1 + \delta_g) \quad (10.1)$$

от начала координат. Вертикальные сечения диаграммы (σ_{st}' , ϕ_{np}') представлены на фиг. 15. Из диаграммы следует, что распределение напряжений при штамповке тождественных изделий из металлов А и В будет подобным, причем

$$\sigma_{st}'(B) = \sigma_{st}'(A) K_B / K_A. \quad (10.2)$$

Временное сопротивление образцов, вырезанных из одинаковых мест изделий, будет подчиняться тому же закону

$$\sigma_b(B) = \sigma_b(A) K_B / K_A. \quad (10.3)$$

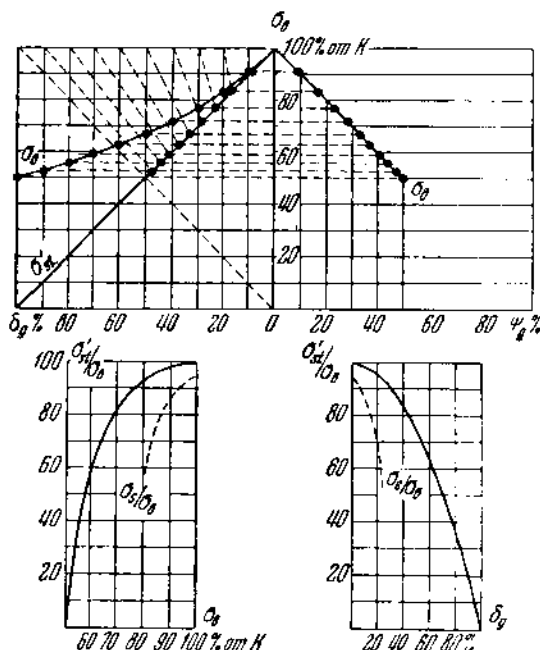
Форма шейки разрывных образцов определяется соотношением между деформацией и напряжениями. В момент начала развития шейки $\phi_{np}' = 0$, т. е. точки их состояния лежат на одной вертикали. При одинаковых значениях ϕ_z' подобие в распределении напряжений должно привести к подобию формы шеек. Отсюда понятно, почему формула Моллендорфа верна для совершенно различных металлов. Следует также ожидать, что она не будет верна для весьма наклепанных металлов, у которых левая точка области пластичности определяется через $\phi_{np}' > 0$.

11. Рост напряжений при разном начальном состоянии металлов. Если левые точки области пластичности металлов не лежат на одной вертикали, то одинаковые деформации вызовут у них совершенно различный рост напряжений даже в случае тождественности их коэффициентов упрочнения.

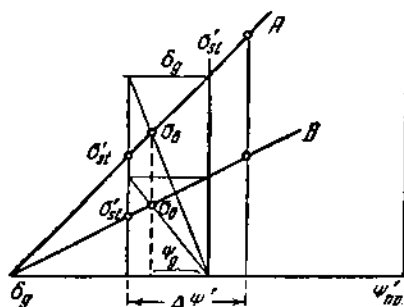
На фиг. 16 представлена диаграмма (соответствующие значения см. табл. 6) для трех металлов с одинаковым K и разными δ_g :

$$K = 50 = \text{const} \quad (\text{в кг/мм}^2); \quad \phi_{np}' = -50, -15, +20,$$

$$\phi_{z0}' = 40 \quad (\text{в проц.}).$$



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Оказывается, что при одинаковых деформациях наиболее резко растут напряжения в металлах с большим равномерным удлинением и соответственно малым пределом текучести. Отсюда следует сделать попутное заключение, что остаточные напряжения в изделиях из металла с низким пределом текучести (при $K = \text{const}$) должны быть выше, чем у металлов с высоким пределом текучести. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными акад. Н. Н. Давиденкова [6].

Вследствие отсутствия подобия напряжений в металлах с разным исходным состоянием (разными δ_x или ψ_{np}') у них пластически-деформированные объемы будут различны при изгибе тождественных образцов, при достижении одинакового погружения шарика при бринелировке и т. д. Специально поставленные

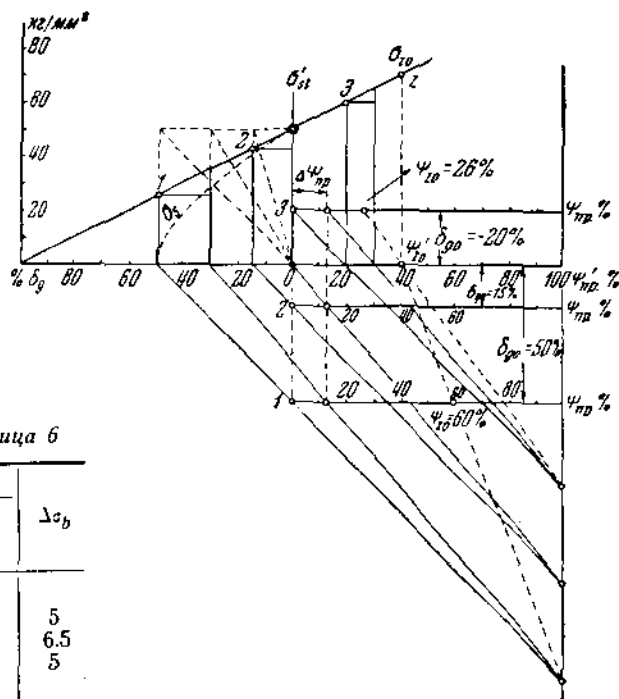


Таблица 6

Область пластичности	$\Delta \psi_{np} = 13^{\circ} 0'$		$\Delta \sigma_b$
	$\Delta \sigma_{st}'$	$\Delta \sigma_s$	
1-2	9.75	20	5
2-2	7.67	10	6.5
3-2	5.00	5	5

Фиг. 16.

опыты подтвердили изложенное. Во всех случаях деформированный объем тем больше, чем больше равномерное удлинение. Следует предположить, что равномерное удлинение находится в связи и с уширением разных металлов при прокатке. Проверка этого предположения производится.

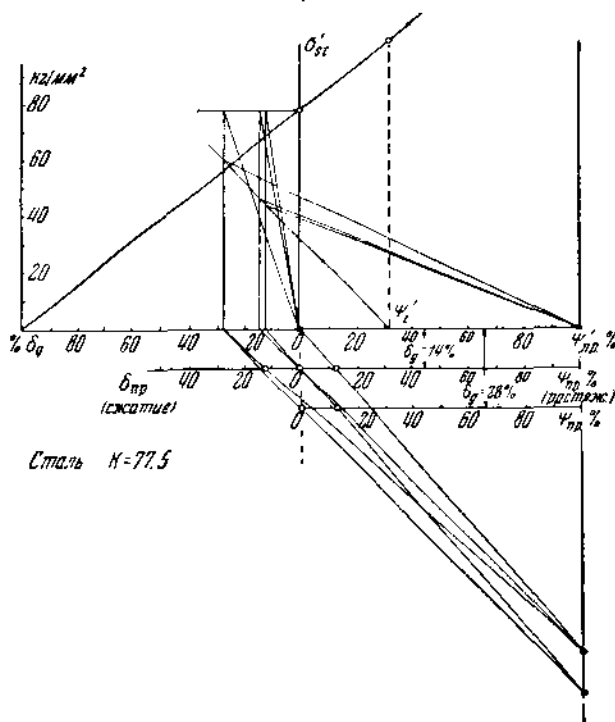
12. Обратимость лучевой диаграммы. Н. Н. Давиденков [7] показал, что равномерное удлинение стали, наклепанной предварительно растяжением до истощения способности к равномерной деформации, равно нулю, но что в случае эквивалентного по величине предварительного наклепа сжатием, при растяжении обнаруживается весьма большое равномерное удлинение, чуть меньшее удлинение исходного металла.

Этот парадоксальный факт позволяет предполагать, что наклеп сжатием не эквивалентен по своему упрочняющему влиянию наклепу растяжением, по крайней мере в случае последующего растяжения металла.

Наклеп растяжением перемещает точку, характеризующую состояние металла, *ниравно по лучу*. Если допустить, что диаграмма обладает свойством „обратимости“, т. е. наклеп сжатием перемещает эту точку влево, не меняя величины K , и если полагать, что наклеп растяжением и наклеп сжатием вполне эквивалент-

ны по своему упрочняющему влиянию, задачу можно было бы разрешить графически.

Исходя из начальных свойств металла и величин деформаций растяжения-сжатия, приведенных в работе Н. Н. Давиденкова, мы произвели это построение, представленное на фиг. 17. В основу построения принято, что при металле с $\delta_{g0} = 14\%$ деформация сжатием на $\psi_{np} = -12.3\%$ перемещает исходную точку



Фиг. 17.

ку металла влево, изменяя δ_g с 14 до 28% , но что возникающий при этом наклеп действует так же, как растяжение на $\psi_{np} = +12.3\%$ действует на металл, имеющий $\delta_g = 28\%$ (см. табл. 7).

Таблица 7

Состояние металла, согласно фиг. 17	δ_g (в проц.)	ψ_z (в проц.)	σ_b (кг/мм²)
1. Исходный металл	14	40	68
2. Предварительно растянутый на $\delta_{\text{раст.}} = 14$ (в проц.) . . .	0	31.6	77.5
3. Предварительно сжатый на $\delta_{\text{сжат.}} = 12.3$ (в проц.) . .	28	47	60.5
4. Предварительно сжатый на $\delta_{\text{сжат.}} = 12.3$ и растянутый затем на $\delta_{\text{раст.}} = 14$ (в проц.)	12	39	69.5

Проделанное построение показало, что наклеп сжатием мало изменяет начальные свойства металла, сдвигая их несколько в сторону большей жесткости.

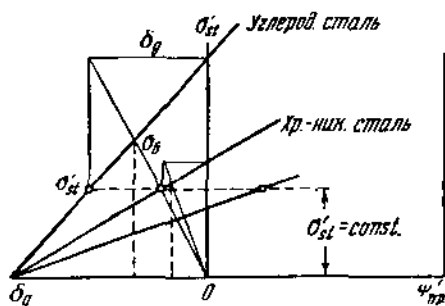
Сравнение подсчитанных и экспериментальных значений приведено в табл. 8, в которой в числителе стоят подсчитанные, а в знаменателе экспериментальные значения величин, полученных при испытании на растяжение.

Таблица 8

Состояние металла	σ_g	φ_z	σ_b	σ_s
	в процентах			кг/мм ²
Исходный металл	14	40	68	—
	14	46	62	29
Предварительно сжатый на $\varphi_{пр} = -12.3$ (в проц.)	12	39	69.5	—
	21.2	45	66.1	26.7

Некоторое расхождение цифр в таблицах объясняется тем, что из экспериментальных данных значения коэффициента упрочнения и величины ϕ_z' вполне точно установить не удалось.

Удовлетворительное совпадение подсчетов с экспериментальными данными позволяет признать возможным применение принципа обратимости для практических целей, хотя физические основы этого принципа еще недостаточно ясны.



Фиг. 18.

С точки зрения изложенного эффект Баушингера, выражающийся в снижении предела текучести при деформации разного знака, может быть объяснен и без привлечения теории остаточных напряжений, так как этот эффект стоит в самой тесной связи с изменением величины равномерного удлинения, определяющего, как это было показано, отношение σ_s/σ_b , а значит, и величину предела текучести.

Интересно также отметить, что в большинстве случаев остаточные напряжения растяжения оказываются по величине меньшими, чем остаточные напряжения сжатия. Учитывая, что обычно остаточные напряжения имеют обратный знак по отношению к действующим при деформации и что деформация сжатия мало повышает напряжения, приходится признать, что разница в величине остаточных напряжений подтверждает принцип обратимости лучевой диаграммы.

13. Горизонтальные сечения лучевой диаграммы. Нам удалось показать, что бринелевская твердость

$$H_B \approx 2.94\sigma_b(1 - \delta_g^2) = 2.94K(1 - \delta_g^2) = 2.94\sigma_{st}'. \quad (13.1)$$

Отклонения экспериментальных значений H_B от вычисленных по этой формуле укладываются в рамки колебаний твердости, вызываемых изменением диаметра $d_{от}$ отпечатка, поскольку

$$H_B = f(d_{от}). \quad (13.2)$$

Пропорциональность твердости теоретическому пределу текучести позволяет заключить, что состояния металла, определяемые точками, лежащими на одной горизонтали, характеризуются одинаковой твердостью. Отсюда становится понятным, почему при тождественной твердости временное сопротивление углеродистых сталей всегда выше, чем хромоникелевых. Углеродистая сталь обладает большим равномерным удлинением, чем хромоникелевая, вследствие чего согласно построениям, приведенным на фиг. 18, для постоянства σ_{st}' (и H_B) необходимо,

чтобы углеродистая сталь обладала большими значениями K и σ_b . Для сохранения постоянства H_B необходимо, чтобы рост равномерного удлинения сопровождался одновременным ростом временного сопротивления. Физический смысл этого правила заключается в том, что для тождественности H_B металл с большим коэффициентом упрочнения должен иметь лучший отжиг, т. е. большее δ_g .

Многие авторы отмечают удивительное отклонение величины отношения σ_b / H_B от «типовых чисел» 0.34—0.36 для ряда металлов типа стали Гатфильда. Так как

$$\frac{\sigma_b}{H_B} = \frac{K}{1 + \delta_g} \frac{1}{2.94 K (1 - \delta_g)} = 0.34 \frac{1}{1 - \delta_g}$$

и у стали Гатфильда $\delta_g \approx 60\%$, то для нее $\sigma_b / H_B = 0.53$.

Для описанной нами ранее латуни (табл. 3, фиг. 12) Шварц приводит экспериментальные значения:

$$\sigma_b = 32.0, \quad \delta_g = 56\%, \quad H_B = 60.9.$$

Из формулы (13.1) легко получим $\delta_g = 59.4\%$, что почти совпадает с приведенным экспериментальным значением H_B .

Отсюда следует, что значения σ_b и H_B позволяют судить о начальном состоянии металла, т. е. о δ_g . Поэтому-то отношениям σ_b / H_B весьма интересуются производственники, как индикатором качества отжига металла.

14. Лучевая диаграмма хрупких металлов. Определение коэффициента упрочнения $K = \sigma_b (1 + \delta_g)$ требует эксперимента, в котором прежде всего проявляется пластичность металла. Опыты на растяжение хрупких металлов не в состоянии поэтому дать оценку конституции металла. Чугун и цветной сплав, обладающие одинаковой хрупкой прочностью σ_b , будут казаться тождественными по статическим свойствам, несмотря на их глубокое различие.

Объемное напряженное состояние всестороннего сжатия, облегчающее развитие пластической деформации при бринелировке, позволяет сообщить хрупким металлам до $10 - 15\%$ деформации (в переводе на величину ϕ_{np}) без разрушения металла. Бринелирование хрупкого металла дает дополнительный эксперимент для суждения о его конституции и состоянии.

С помощью бринелевского числа H_B может быть установлена величина

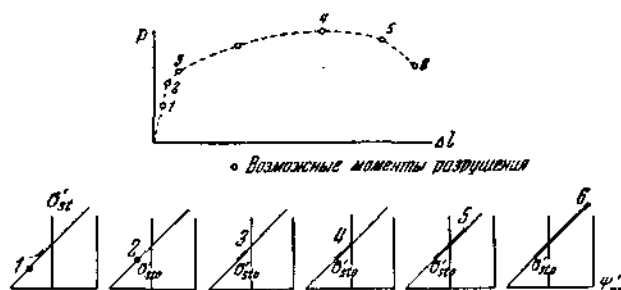
$$\sigma_{st}' \approx \frac{H_B}{2.94} = K(1 - \delta_g). \quad (14.1)$$

Определение величины δ_g из данных бринелирования основано на том, что δ_g , равно как и n в формуле Мейера $P = ad^n$, зависят от величины относительного упрочнения металла $(d\delta / d\phi_{np})(1 / \delta')$ при его пластической деформации. В формуле Мейера P — нагрузка на шарик, d — диаметр отпечатка и a — постоянная, зависящая от металла и диаметра шарика (уточнение связи между δ_g и n нами производится).

Определив δ_g по формуле (14.1) легко вычислить значение K , фиксирующее направление луча. У хрупкого металла δ_g может быть значительно больше нуля, хотя при испытании на разрыв оно не проявляется вследствие низкой прочности хрупкого металла. Значения K , δ_g и $\hat{\sigma}_b = \sigma_z'$ дают полную характеристику хрупкого металла и позволяют судить об основных моментах его технологии и термообработки.

Влияние понижения прочности металла на сужение области его пластичности показано на фиг. 19. Пусть диаграмма пластичного металла обрывается в точке 6. Если прочность в момент разрыва σ_z' почему-либо понижается, то точки, отвечающие разрушению, будут перемещаться в положения 5, 4, 3, 2, 1. При разрыве правее точки 2 металл обнаружит некоторую пластичность. При разрыве левее точки 2, т. е. до предела текучести, разрушению образца не будет предшествовать пластическая деформация, металл окажется вполне хрупким.

На лучевой диаграмме снижение прочности до точки 2 вызовет перемещение влево правого края пластичности при неподвижности ее левого края. Снижение прочности ниже предела текучести даст точку 1, чуждую диаграмме (σ_{st}' , ϕ_{np}'). Однако условно эту точку возможно спроектировать на луч. В этом случае ордината точки 1 даст значение $\bar{\sigma}_b$, абсцисса же не будет иметь смысла. Расстояние такой точки (1) по вертикали до гипотетической точки $\sigma_{st}' = 0.34 H_B$ даст



Фиг. 19.

оценку качества металла. Для конструктора качество металла должно определяться его прочностью $\bar{\sigma}_b$. Но одинаковыми значениями $\bar{\sigma}_b$ могут обладать металлы с разными коэффициентами упрочнения K . Металловедческая оценка металла, как критерий возможностей улучшения качества, должна поэтому основываться не только на величине $\bar{\sigma}_b$, но и на анализе отношений $\bar{\sigma}_b / H_B$ или $\bar{\sigma}_b / K$.

15. Зависимость между истинными напряжениями и деформацией, выраженной через приведенное удлинение при холодной прокатке δ_{np}' . Уравнение лучевой диаграммы

$$\sigma_{st}' = K(1 + \phi_{np}')$$

при замене переменных по формуле

$$\phi_{np}' = \delta_{np}' / (1 + \delta_{np}') \quad (15.1)$$

преобразуется в уравнение

$$\sigma_{st}' = K \frac{1 + 2\delta_{np}'}{1 + \delta_{np}'} = K \frac{1 - 2\phi_g}{1 - \phi_g}, \quad (15.2)$$

графическое изображение которого дано на фиг. 20.

Путем перенесения начала координат по формулам

$$\delta_{np}' = x - 1, \quad \sigma_{st}' = y + 2K, \quad (15.3)$$

легко показать, что кривые (σ_{st}' , δ_{np}') являются равноугловыми гиперболой (фиг. 21). Пересечение гипербол с главными осями отмечено на фиг. 20 черными точками.

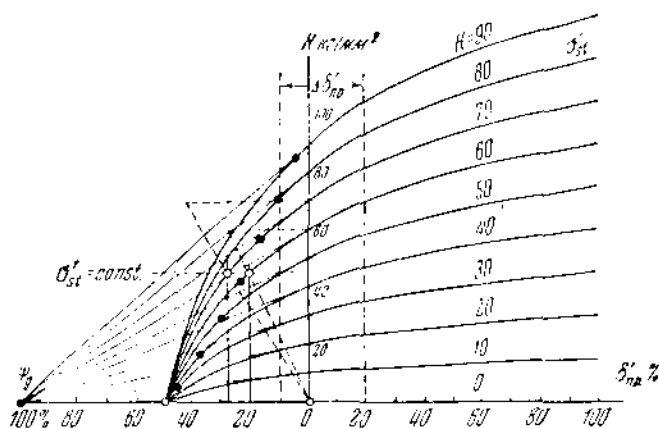
Диаграмма (σ_{st}' , δ_{np}') является так же, как и диаграмма (σ_{st}' , ϕ_{np}'), абстрагированной от образца. Вправо от нуля по оси абсцисс отложены значения δ_{np}' , влево — значения ϕ_g , причем $\phi_g = -\delta_{np}'$.

Удлинение металла при прокатке здесь выражается:

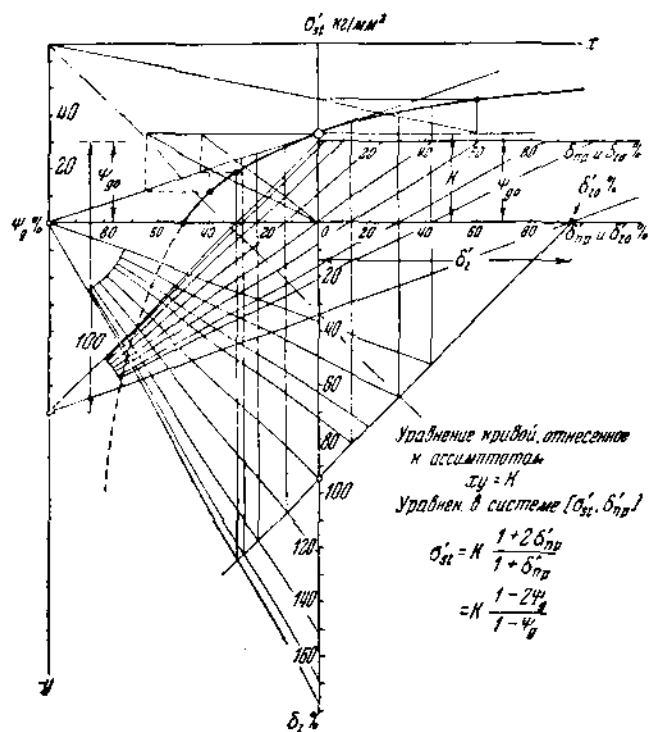
$$\delta_{np}' = l / L_0 - 1 = (D_0 / d)^2 - 1, \quad (15.4)$$

а приведенное удлинение

$$\delta_{np}' = l / l_0 - 1 = (d_0 / d)^2 - 1. \quad (15.5)$$



Фиг. 20.



Фиг. 21.

Система координат σ_{st}' , δ_{np}' менее удобна для решения задач графическим путем, но более наглядна. Для этой системы

$$\delta_z = (\delta_{z0} - \delta_{np}) / (1 + \delta_{np}), \quad (15.6)$$

$$\delta_z' = \delta_{z0} - \psi_{g0} (1 + \delta_{z0}) = \delta_z - \phi_g (1 + \delta_z) = \text{const.} \quad (\text{при } \delta_{np}' \leq 0), \quad (15.7)$$

$$\delta_{np}' = -\psi_g = \delta_{np} (1 - \psi_{g0}) - \psi_{g0}, \quad (15.8)$$

$$K = \sigma_{b0} / (1 - \psi_{g0}) = \sigma_b / (1 - \phi_g) \quad (\text{при } \delta_{np}' \leq 0), \quad (15.9)$$

$$\sigma_b = K (1 - \phi_g), \quad (15.10)$$

$$\sigma_{st}' = K (1 + 2\delta_{np}') / (1 + \delta_{np}') = K (1 - 2\phi_g) / (1 - \phi_g). \quad (15.11)$$

Метод графического расчета характеристик холоднокатаного металла не отличается от расчета в системе σ_{st}' , ϕ_{np}' . На фиг. 21 приведен расчет для холодной прокатки красной меди, давший полное совпадение с ранее полученными результатами. Пересчет экспериментальных данных, выраженных в ψ , проводился при этом по формуле $\delta = \psi / (1 - \psi)$.

В системе σ_{st}' , δ_{np}' особенно наглядна зависимость роста напряжений при тождественных деформациях от величины начального равномерного удлинения или величины ϕ_g . В этой системе, как и следовало ожидать, выполняются также законы вертикальных и горизонтальных сечений.

16. Аналогия формул упругости и пластичности. Связь между напряжениями и деформациями устанавливается в упругой области законом Гука

$$\sigma = \delta E,$$

в пластической области уравнением

$$\sigma_{st}' = (1 + \phi_{np}') K.$$

Внешнее сходство этих формул позволяет коэффициент упрочнения K называть „модулем пластичности“.

Интересно отметить, что параметрам упругости E , G и μ в области равномерной пластической деформации соответствуют величины K , σ_b и δ_g .

Если ввести в рассмотрение условное скалывающее напряжение τ_b , отвечающее временному сопротивлению σ_b , то

$$G = 0.5E / (1 + \mu), \quad \tau_b = \sigma_b / 2 = 0.5K' (1 + \delta_g).$$

17. Значение характеристик K , δ_g и ψ_z' для металловедения и термообработки. О качестве термообработки металловеды обычно судят по величинам δ_p , ψ_z , σ_s , σ_b , строя графики зависимости этих величин от температур закалки, отпуска и т. д.

Однако эти величины в свою очередь определяются величиной коэффициента упрочнения K (формулы 4.1 — 4.9).

Возможность учета раздельного влияния внешних факторов на величины K , δ_g и ψ_z' позволило бы не только вычислить обычные значения σ_b , ψ и δ_{10} , но и подойти к „расчету“ технологии и термообработки.

Для технолога весьма важно, например, знать, повышается ли временное сопротивление за счет повышения K или за счет снижения δ_g .

Опыт производства даже без постановки специальных работ позволяет предположить, что изменение условий горячей прокатки не меняет или почти не меняет величины K , которая вследствие этого является однозначной функцией химического состава.

Не меняют величины K , повидимому, процессы старения, действующие аналогично наклепу.

Процессы старения за счет снижения равномерного удлинения повышают отношение σ_s / σ_b . Поэтому введение в металл присадок, вызывающих процессы

старения, для сохранения постоянства временного сопротивления, требует снижения коэффициента упрочнения (фиг. 14). Снижение значения величины K достигается уменьшением содержания углерода. Введение в рассмотрение коэффициента упрочнения, как показывает этот пример, легко и быстро позволяет найти решения, наметившиеся только после накопления производственного опыта.

Величины K , δ_g и ϕ_z' настолько четко и однозначно определяют статические свойства металла, что следует считать рациональным при проведении исследовательских работ и приемо-сдаточных испытаний отказаться от определения комплекса общепринятых величин σ_s , σ_b , δ_{10} , ϕ_z , заменив их величинами σ_s , K , δ_g , ϕ_z' .

Определение последних так же просто, как и общепринятых, и, кроме того, образцы всех сечений могут при этом обладать одинаковой длиной. При определении δ_g и ϕ_z' по диаметрам отпадает также необходимость разметки образцов. В случае плоских образцов следует учесть, что

$$\delta_g = (b/b_0)^2 - 1, \quad \phi_z' \approx 1 - (b_z/b_g)^2, \quad (17.1)$$

где b и b_z — ширина образцов. Последние равенства установлены в предположении, что темп изменений толщины и ширины образцов одинаков до достижения временного сопротивления и почти одинаков во время развития шейки для достаточно толстых образцов).

Поступила в редакцию 5.X 1939. Доложена на Всесоюзном совещании по строительной механике в Институте механики Акад. Наук СССР (22-26 ноября 1939 г.).

Запорожский электрометаллургический завод «Днепрогоссталь».

PLASTISCHE GRUNDEIGENSCHAFTEN DER METALLE

G. P. SAIZEW

(Zusammenfassung)

Die Verformungseigenschaften der Metalle werden durch die Werte dreier unabhängiger Grössen bestimmt. Massgebend ist der Verfestigungsquotient K , durch das Verhältnis $\frac{d\sigma'}{d\phi_z'}$ ausgedrückt, in dem σ' und ϕ_z' die wahre Spannung und den bedingten Kaltverwalzungsgrad bemessen. Für den Betrag des Verfestigungsquotienten ist das Ausmass der Formänderung nicht von Bedeutung. Die gleichmässige Dehnung δ_g und die auf den Höchstlastpunkt bezogene Querschnittsverminderung ϕ_{z0}' kennzeichnen weiterhin das gleichmässige und örtliche Formänderungsvermögen der Metalle.

Die genannten drei Hauptgrössen ermöglichen Blosslegung des mathematischen Zusammenhanges zwischen den sich beim statischen Zugversuch ergebenden Gütewerten und rechnerische oder zeichnerische Ermittlung mechanischer Eigenschaften kaltverformter Metalle.

Die jedem Metalle eigene Zonenstärke plastischer Formänderung bei gleicher äusserer Beanspruchung wird von den Plastizitätskonstanten bestimmt. Damit ist die Möglichkeit gegeben, über Grösse und Gradient wirkender und bleibender Spannungen zu urteilen und die Bedingungen abzusehen, unter denen das Aehnlichkeitsgesetz in Verformung und Spannungen in Kraft tritt.

Unter Rücksichtnahme auf die erwähnten Grössen lässt sich ein neues Verfahren zur Klassifizierung der Metalle anwenden, das die Auswahl unter gegenseitig austauschbaren Metallen erheblich erleichtert.

ЛИТЕРАТУРА

1. Закс Г. Практическое металловедение. 1936. Т. I. [Стр. 224].
 2. Окинов М. Г. Металлография чугуна. 1938. [Стр. 87—89].
 3. Döhmer P. W. Die Brinellsche Kugelprobe. „J. Springer“. Berlin. 1925. [S. 61—62].
 4. Moellendorf W. Die Gestalt des FlieBkegels. „Mitteilungen aus dem Materialprüfungsamt“. 1923. Bd. 41. [S. 60—62].
 5. Шапошников Н. А. Методика механических испытаний. 1933. Ч. 1. [Стр. 268, 275—276, 19, 249—250].
 6. Давиденков Н. Н. и Шевандин Е. М. Исследование остаточных напряжений, создаваемых изгибом. „Журнал технической физики“. 1939. Т. IX. Вып. 12. [Стр. 1112].
 7. Давиденков Н. Н. О сравнительной прочности растянутых и сжатых образцов. „Журнал технической физики“. 1934. Т. IV. Вып. 5. [Стр. 925].
 8. Janitzky E. J. Conversion of Tensile Test Data from one Form of Test Piece to Another. „Trans. Amer. Soc. f. Met.“ 1937. XXV. N. 4. [P. 1149].
-

К РАСЧЕТУ БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ И ДРУГИХ МАШИН¹

В. М. МАЙЗЕЛЬ

(Харьков)

При определении напряжений в быстро вращающихся дисках произвольного профиля обычно пользуются методом Мизеса^[1], при котором расчет проводится следующим путем: 1) задаются окружным напряжением $(\bar{\sigma}_r)_{R_1}$ на внутреннем радиусе R_1 диска и помощью формул Стодола-Келлера в конечных разностях приближенным образом определяют радиальные и окружные напряжения $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_t$, которые соответствуют $(\bar{\sigma}_r)_{R_1}$; 2) затем, полагая, что диск не вращается ($\omega = 0$), те же подсчеты повторяют по тем же уравнениям и 3) картину распределения напряжений получают из сопоставления результатов подсчетов.

Для проверки диска на прочность требуется провести первые две операции, кстати сказать, довольно громоздкие, полностью и по крайней мере отчасти третью операцию, причем, если напряжения окажутся выше допускаемых, то следует усилить профиль диска и затем заново произвести расчет.

Таким образом на ряду с рядом достоинств метод Мизеса обладает тем недостатком, что перенапряженность в диске может быть обнаружена только после выполнения полностью или почти полностью всех подсчетов.

В настоящей статье приводится способ, при котором можно значительно сократить объем вычислительной работы при проверке дисков на прочность по сравнению со способом Мизеса в силу того, что перенапряженность, если она имеет место, может выявиться после значительно меньшего количества вычислений, чем у Мизеса.

Пусть рассчитываемый диск с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами, переменными нетто b и брутто b^* ширинами вращается с заданной угловой скоростью ω , при чем на радиусе R_1 приложено заданное "монтажное" напряжение $(\sigma_r)_{R_1}$.

Представим себе диск тех же самых размеров, что и первый, но находящийся в неподвижном состоянии ($\omega = 0$) и подверженный некоторым постоянным радиальным усилиям $(S')_{R_1}$, приложенным к внутренней поверхности (отверстия) диска. Обозначим через γ вес единицы объема материала диска, g — ускорение силы тяжести и ξ , ξ' — радиальные перемещения во вращающихся и неподвижных дисках на радиусе R и через $(\xi)_{R_1}$, $(\xi')_{R_1}$ то же на радиусе R_1 .

Применим теперь теорему Бетти-Максвелла о взаимности перемещений к обоим дискам; при этом получим, что работа сил инерции и заданного напряжения $(\sigma_r)_{R_1}$ в первом диске на перемещениях второго (воображаемого неподвижного) диска равняется работе усилий $(S')_{R_1}$ на перемещениях первого диска, или

$$-(\sigma_r)_{R_1} 2\pi R_1 (b)_{R_1} (\xi')_{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} (\gamma / g) \omega^2 R^2 2\pi R b^* dR = (S')_{R_1} 2\pi R_1 (b)_{R_1} (\xi)_{R_1}. \quad (1)$$

¹ Применяя схему вычисления автора, интеграл уравнения Стодола, по мнению редакции, во многих случаях удобнее, не прибегая к схеме Келлера, вычислять по более новым схемам, использующим готовые графики для дисков типичных профилей [3, 4].

Откуда получаем для перемещения

$$(\xi)_{R_1} = \frac{\gamma \omega^2}{g R_1^2 (b)_{R_1} (-S')_{R_1}} \int_{R_1}^{R_2} R^2 b^* \xi' dR - \frac{(\sigma_r)_{R_1}}{(S')_{R_1}} (\xi')_{R_1}. \quad (A)$$

По закону Гука для неподвижного и вращающегося дисков соответственно имеем:

$$\xi' = (R/E) (\sigma_r' - \nu \sigma_r'), \quad (2)$$

$$(\xi)_{R_1} = (R_1/E) [(\sigma_r)_{R_1} - \nu (\sigma_r)_{R_1}], \quad (3)$$

где E и ν — модули Юнга и Пуассона, σ_r' и σ_r' — радиальные и окружные напряжения в неподвижном диске, $(\sigma_r)_{R_1}$ и $(\sigma_r')_{R_1}$ — радиальное и окружное напряжения в вращающемся диске на внутренней окружности.

Из формул (A), (2) и (3) получаем:

$$(\sigma_r)_{R_1} = \frac{\gamma \omega^2}{g R_1^2 (b)_{R_1} (-S')_{R_1}} \int_{R_1}^{R_2} R^2 b^* (\sigma_r' - \nu \sigma_r') dR - (\sigma_r)_{R_1} \left[\frac{E (\xi')_{R_1}}{R_1 (-S')_{R_1}} + \nu \right]. \quad (B)$$

С помощью полученной формулы (B) вычисления могут быть произведены следующим образом:

1°. Задаваясь произвольным значением окружного напряжения $(\sigma_r')_{R_2}$ на периферии неподвижного диска и принимая во внимание, что $(\sigma_r')_{R_2} = 0$, с помощью формул Стодола-Келлера [2]

$$\begin{aligned} -\Delta \sigma_r' &= |\Delta R| \left[\frac{1}{R} (\sigma_r' - \sigma_r') - \frac{1}{b} \frac{db}{dR} \sigma_r' \right], \\ -\Delta \sigma_r' &= |\Delta R| \left[\frac{1+\nu}{R} (\sigma_r' - \sigma_r') + \nu \frac{\Delta \sigma_r'}{\Delta R} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

шаг за шагом, как это делается в способе Мизеса, но в обратном направлении, т. е. идя от R_2 к R_1 (поэтому $\Delta \sigma_r'$ и $\Delta \sigma_r'$ снабжены знаками минус), определяем напряжения σ_r' и σ_r' в неподвижном диске и, в частности, $(S')_{R_1} = (\sigma_r')_{R_1}$; затем по формуле (2) определяем $(\xi')_{R_1}$.

2°. По формуле (B), в правой части которой теперь все величины известны, определяем напряжение $(\sigma_r)_{R_1}$ во вращающемся диске.

Так как $(\sigma_r)_{R_1}$ обычно является максимальным возникающим в диске напряжением или близким к максимальному, то проверочный расчет по п. 1° и 2° уже дает суждение о наличии перенапряженности в диске. Поэтому, если быть уверенным, что $(\sigma_r)_{R_1}$ является максимальным напряжением, то при проверке дисков можно ограничиться вычислениями 1° и 2°.

3°. Если желательно иметь полную картину распределения напряжений в диске или мы не уверены, что $(\sigma_r)_{R_1}$ является максимальным напряжением, то определение полной картины распределения напряжений может быть произведено по формулам (идя от R_1 к R_2):

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r &= \Delta R \left[\frac{1}{R} (\sigma_r - \sigma_r) - \frac{1}{b} \frac{db}{dR} \sigma_r - \frac{\gamma}{g} \omega^2 R \frac{b^*}{b} \right], \\ \Delta \sigma_r &= \Delta R \left[\frac{1+\nu}{R} (\sigma_r - \sigma_r) + \nu \frac{\Delta \sigma_r}{\Delta R} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

так как величина напряжения $(\sigma_r)_{R_1}$ уже известна согласно вычислениям 2°.

Если вычисления 2° выявили перенапряженность, то вычисления 3° отпадают; следует усилить профиль диска и затем произвести заново проверочный расчет.

В качестве примера приведем проверку¹ прочности покрывающего диска рабочего колеса (фиг. 1) эксгаустера завода Jaeger, установленного на одном из коксо-химических заводов, при условии повышения числа оборотов и доведения его до $n = 3650$ мин.⁻¹.

¹ Подсчет примера был проведен ниж. А. И. Новичком.

Таблица 1

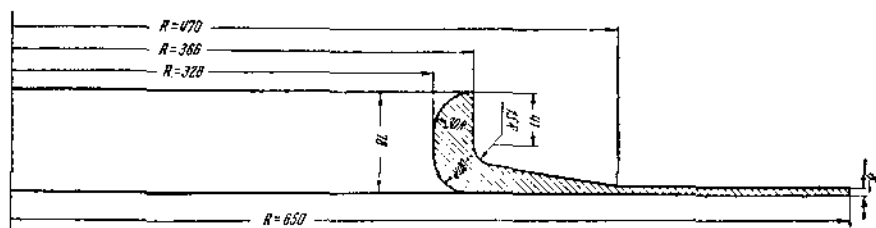
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
R (см)	ΔR	$\frac{\Delta b}{b}$	$\frac{\sigma_r'}{R}$	$\frac{\sigma_r'}{R}$	$\frac{3\sigma_r'}{\Delta R}$	$\frac{\Delta \sigma_r'}{\Delta R}$	$\Delta \sigma_r'$	$\frac{\sigma_r'}{R}$ кг/см ²	$1,3 \frac{\sigma_r' - \sigma_t'}{R}$	$0,3 \frac{\Delta \sigma_r'}{\Delta R}$	$\frac{\Delta \sigma_t'}{\Delta R}$	$\Delta \sigma_t'$	$\frac{\sigma_t'}{R}$ кг/см ²	ν_r'	$\frac{\sigma_t' - \sigma_r'}{-\sigma_r'}$	R^0	b^*	J
65	-4							0					2000		0-2000	274025	0,6	3,29
61	-4	0	32,4	0	0	32,4	-131	-131	-42,6	9,7	-32,9	131,5	2131	-39	2170	226981	0,6	2,96
56	-5	0	38,1	-2,4	0	40,5	-202,5	-333,5	-52,5	12,1	-40,4	202	2333	-100	2433	175616	0,6	2,56
51	-5	0	45,7	-6,5	0	52,2	-261,0	-594,5	-68,1	15,6	-52,5	262,5	2596	-178	2774	132651	0,6	2,20
47	-4	0	55,2	-12,6	0	67,8	-271,0	-865,5	-83,3	20,3	-68,0	272	2868	-260	3128	103823	0,6	1,95
45,5	-1,5	0,302	63,0	-19,0	174	-92	138,5	-727	-107,0	-	-134,6	202	3070	-218	3288	94196	0,80	2,66
44	-1,5	0,218	70,0	-16,5	106	-20	30	-697	-112,0	-	-118,0	177	3247	-209	3456	85184	1,10	3,23
42,5	-1,5	0,185	76,5	-16,5	86	7	10	-707	-121,0	2,0	-119,0	178	3425	-212	3637	76765	1,3	3,77
41	-1,5	0,156	83,5	-17,3	73,8	27	-40	-747	-131,0	8,0	-123,0	184	3609	-224	3833	68921	1,6	4,22
39,5	-1,5	0,126	91,0	-19,0	63,0	47	-70	-817	-143,0	14,0	-129,0	193	3802	-245	4047	61629	1,83	4,56
38	-1,5	0,129	100	-21,5	70,5	51	-76	-893	-158,0	15,0	-143,0	215	4017	-268	4285	54872	2,10	4,94
37	-1,0	0,250	109	-24,0	223	-90	90	-803	-172,0	-	-199,0	199	4216	-241	4457	50653	2,80	6,32
36,6	-0,4	0,263	115	-22,0	527	-390	156	-647	-178,0	-	-295,0	118	4334	-194	4528	49027	3,80	8,44
36,6	0							-315					4434	-94	4528	49027	7,80	17,35
35,8	-0,8	0	124	-8,8	0	132,8	-106	-421	-172,0	40	-132,0	106	4540	-126	4666	45882	7,80	16,70
34,1	-1,7	-0,164	133	-12,3	-40,5	183,8	-315	-736	-189,0	55,6	-133,4	226	4766	-221	4987	39651	6,70	13,28
33,1	-1,0	-0,396	144	-22,2	-292	458,2	-458,2	-1194	-216,0	138,0	-78,0	78	4844	-358	5202	36264	4,80	9,05
32,6	-0,5	-2,430	149	-36,6	-5800	5986	-2993	-4187	-241,0	1800,0	1559	-779	4065	-1255	5320	34645	1,40	2,58

Задаемся произвольным значением $(\sigma_r')_{R_2} = 2000 \text{ кг/см}^2$ окружного напряжения на периферии диска; затем по формулам (4) определяем σ_r' и σ_t' в неподвижном диске. В табл. 1 приведены подсчеты σ_r' и, в частности, также значение $(S')_{R_1} = (\sigma_r')_{R_1}$, которое получилось равным 4187 кг/см^2 ; в той же таблице (графа 14) приведены значения σ_t' ; при этом в том месте, где толщина диска резко меняется ($R = 36.6 \text{ см}$), напряжения определены по формулам:

$$(\sigma_r')_{R_1} = (\sigma_r')_{R_{1-1}} \frac{y_{1-1}}{y_1}, \quad (\sigma_t')_{R_1} = (\sigma_t')_{R_{1-1}} - \nu [(\sigma_r')_{R_{1-1}} - (\sigma_r')_{R_1}].$$

В графе 19 приведены значения J подинтегральной функции $R^3 b^* (\sigma_t' - \nu \sigma_r') 10^{-8}$ уравнения (B), по этим значениям был построен график и планиметрированием получено:

$$\int_{R_1}^{R_2} R^3 b^* (\sigma_t' - \nu \sigma_r') dR = 140 \times 10^8 \quad (\text{кг} \times \text{см}^3).$$



Фиг. 1.

По формуле (B), принимая во внимание, что в покрывающем диске „монтажное“ напряжение $(\sigma_r)_{R_1} = 0$, было получено

$$\begin{aligned} (\sigma_t)_{R_1} &= \frac{\omega^2}{g R_1^2 (b)_{R_1} (-S')_{R_1}} \int_{R_1}^{R_2} R^3 b^* (\sigma_t' - \nu \sigma_r') dR = \\ &= \frac{0.00785}{981 \times 32.6^2 \times 1.4 \times 4187} \left(\pi \frac{3650}{30} \right)^2 \times 140 \times 10^8 = 2610 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Так как это напряжение превышает обычные допускаемые в этом случае напряжения (для примененного материала — 2000 кг/см^2), то дальнейших подсчетов напряжений в диске производить нет надобности (тем более, что в покрывающем диске обычно $(\sigma_r)_{R_1}$ является максимальным). Таким образом проведенные вычисления сравнительно быстро позволили установить, что диск недостаточно прочен при работе с числом оборотов $n = 3650 \text{ мин.}^{-1}$.

Поступила в редакцию 2.X 1940.

ON THE COMPUTATION OF RAPIDLY ROTATING DISCS OF TURBO-COMPRESSORS AND OTHER MACHINES

В. М. МАЙСЕЛ

(Summary)

With the help of Beatty-Maxwell's theorem, the author gives a procedure for calculating tangential stresses on the opening of rapidly rotating discs. The advantage of this procedure over that of Mises lies in the fact that it makes it possible to determine over-stressing of materials at the very outset.

A numerical example of calculation is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eck Kearton. Turbo-Gebläse und Kompressoren, J. Springer, 1929. [S. 127].
2. Остергаг. Компрессоры и воздуходувки. 1929. Ч. II [Стр. 158].
3. Риз В. Ф. К расчету вращающихся дисков турбомашин. „Советское котлотурбостроение“, 1936. № 1. 1938. № 1.
4. Тумаркин С. А. Расчет дисков с произвольной симметричной радиальной нагрузкой. „Труды ЦАГИ“, 1939. Вып. 397.

К РАСЧЕТУ ДИСКОВ НА РАСТЯЖЕНИЕ

С. А. ТУМАРКИН

(Москва)

В статье В. М. Майзеля¹ содержится новая схема расчета турбинных дисков на растяжение, представляющая значительный интерес. При помощи теоремы взаимности Бетти-Максвелла им вычислено тангенциальное напряжение у отверстия диска. При этом потребовался расчет лишь одного напряженного состояния, в то время как обычная схема требует двух таких расчетов. Для многих дисков максимальное напряжение достигается, однако, не у отверстия, а внутри диска⁽¹⁾, причем это напряжение может быть как радиальным, так и тангенциальным. Возникает вопрос о том, нельзя ли получить оба напряжения в заранее указанном месте диска, рассчитав лишь один раз напряжения в неподвижном диске. Ниже приводится такое решение. Диск разбивается на две части, и к каждой части применяется теорема взаимности. Так получается решение при заданных напряжениях на внешнем и внутреннем радиусах диска. При других граничных условиях столь же просто напряжения можно получить, исходя из более общего метода решения краевых задач⁽²⁾.

1. Пусть дан диск с внешним радиусом b и с радиусом отверстия a . На этих радиусах приложены радиальные напряжения σ_{rb} и σ_{ra} . Пусть q — распределенная радиальная нагрузка (например, нагрузка от центробежных сил), отнесенная к единице длины радиуса и к одному радиану по дуге.

Радиус r делит диск на две части: часть (I) от a до r и часть (II) от r до b . Применим теорему взаимности сначала к части (I). Сопоставим действительные напряжения и смещение σ_r , σ_t и ξ с напряжениями и смещением σ'_r , σ'_t и ξ' , соответствующими начальному условию $\sigma'_{ra} = 0$, при любом σ'_{ta} (диск, следовательно, свободен от нагрузки у отверстия и от распределенной нагрузки).

Работа сил действительного напряженного состояния на перемещениях ξ' равна работе сил второго состояния на перемещениях ξ . Это дает (h — толщина диска):

$$\int_a^r \xi' q dr + rh \sigma_r \xi' - ah \sigma_{ra} \xi'_a = rh \sigma_r' \xi.$$

Выражая перемещения через напряжения по известным формулам, получим первое уравнение для искомых σ_r и σ_t :

$$\sigma_t' \sigma_r - \sigma_r' \sigma_t = \sigma_{ra} \sigma_{ta}' \frac{a^2 h_a}{r^2 h} - \frac{1}{r^2 h} \int_a^r qr (\sigma_t' - \mu \sigma_r') dr \quad (1)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Применяя теорему взаимности ко второй части диска, причем напряжения σ_r'' и σ_t'' соответствуют начальному условию $\sigma_{rb}'' = 0$, при любом σ_{tb}'' , получим

¹ Стр. 167 этого выпуска. Со статьей В. М. Майзеля автор ознакомился до написания этой заметки.

второе уравнение для искомых напряжений:

$$\sigma_r'' \sigma_r - \sigma_r' \sigma_r' = \sigma_{rb} \sigma_{tb}'' - \frac{b^2 h_b}{r^2 h} + \frac{1}{r^2 h} \int_r^b q r (\sigma_t'' - \mu \sigma_r'') dr. \quad (2)$$

Покажем, что определитель этой системы $\sigma_r' \sigma_t'' - \sigma_r'' \sigma_t'$ не равен нулю. Если бы он был равен нулю в одном сечении, то напряжения σ_r' , σ_t' были бы здесь пропорциональны напряжениям σ_r'' , σ_t'' , но тогда они были бы пропорциональны во всем диске, так как решения однородных уравнений пропорциональны, если пропорциональны начальные условия. В системе σ_r', σ_t' радиальное напряжение у отверстия равно нулю; в системе же σ_r'', σ_t'' равно нулю радиальное напряжение на внешнем радиусе. Так как напряжения пропорциональны, то в обеих системах отсутствовали бы радиальные напряжения как на внутреннем, так и на внешнем контуре. Существовали бы напряженные состояния при отсутствии какой-либо нагрузки, что мы исключаем.

Решая уравнения (1) и (2) относительно σ_r и σ_t , получим¹:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_r'}{k} \left[\sigma_{rb} b^2 h_b \sigma_{tb}'' + \int_r^b q r (\sigma_t'' - \mu \sigma_r'') dr \right] + \\ &+ \frac{\sigma_r''}{k} \left[-\sigma_{ra} a^2 h_a \sigma_{ta}' + \int_a^r q r (\sigma_t' - \mu \sigma_r') dr \right], \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_t'}{k} \left[\sigma_{rb} b^2 h_b \sigma_{tb}'' + \int_r^b q r (\sigma_t'' - \mu \sigma_r'') dr \right] + \\ &+ \frac{\sigma_t''}{k} \left[-\sigma_{ra} a^2 h_a \sigma_{ta}' + \int_a^r q r (\sigma_t' - \mu \sigma_r') dr \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$k = r^2 h (\sigma_r' \sigma_t'' - \sigma_r'' \sigma_t') = \text{const.} \quad (4)$$

Постоянство этой величины доказывается следующим образом. Выразив напряжения через радиальное смещение, получим:

$$k = -\frac{E^2 r h}{1 - \mu^2} \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = \xi' \frac{d\xi''}{dr} - \xi'' \frac{d\xi'}{dr}. \quad (5)$$

По известной теореме об определителе Вронского

$$\Delta = \Delta_0 \exp \left(- \int_{r_0}^r \frac{d}{dr} \ln(rh) dr \right) = \Delta_0 \frac{r_0 h_0}{r h}, \quad (6)$$

откуда и следует постоянство k . Здесь $d \ln(rh) / dr$ — коэффициент при $d\xi / dr$ в дифференциальном уравнении радиального смещения:

$$\frac{d^2 \xi}{dr^2} + \frac{d}{dr} \ln(rh) \frac{d\xi}{dr} + \frac{1}{r} \left(\mu \frac{d \ln h}{dr} - \frac{1}{r} \right) \xi = -\frac{1 - \mu^2}{E} \frac{q}{r h}. \quad (7)$$

Особенностью решения (3) является то, что определение напряжений на радиусе r не требует полного вычисления напряжений σ_r' , σ_t' и σ_r'' , σ_t'' во всем диске. Достаточно вычислить σ_r' , σ_t' на части (I) диска, а σ_r'' , σ_t'' на части (II).

Постоянная k вычисляется по формуле (4) на границе обеих частей диска, где известны обе системы напряжений.

¹ В решении (3) раздельно даны напряжения, вызываемые каждой из внешних нагрузок.

Тангенциальное напряжение на внутреннем или внешнем контуре может быть получено из (3) как частный случай. Для внутреннего контура, например,

$$\sigma_{ia} = \sigma_{ra} \frac{\sigma_{ia}''}{\sigma_{ra}''} - \frac{1}{a^2 h_a \sigma_{ra}''} \left[\sigma_{rb} b^2 h_b \sigma_{rb}'' + \int_a^b q r (\sigma_i'' - \mu \sigma_r'') dr \right]. \quad (8)$$

Эту формулу, при $\sigma_{rb} = 0$, получил В. М. Майзель [1]. Напряжения σ_r' , σ_i' и σ_r'' , σ_i'' удобно находить с помощью графиков В. Ф. Риза, построенных для дисков типичных профилей [1, 3]. Зная напряжения σ_r' и σ_i' на радиусе r , найдем напряжения $\bar{\sigma}_r'$ и $\bar{\sigma}_i'$ на радиусе $\bar{r}$ ($\bar{r} > r$):

$$\bar{\sigma}_r' = A \sigma_r' + B \sigma_i', \quad \bar{\sigma}_i' = C \sigma_r' + D \sigma_i'. \quad (9)$$

Коэффициенты A , B , C и D даны на графиках. Напряжения σ_r'' и σ_i'' вычисляются от больших радиусов к меньшим. Легко показать, что будет ($\bar{r} < r$):

$$\bar{\sigma}_r'' = \frac{r^2 h}{\bar{r}^2 \bar{h}} (D \sigma_r'' - B \sigma_i''), \quad \bar{\sigma}_i'' = \frac{r^2 h}{\bar{r}^2 \bar{h}} (-C \sigma_r'' + A \sigma_i''). \quad (10)$$

Для вычисления напряжений в направлении от больших радиусов пригодны, следовательно, те же графики. Решение (3) дает напряжения, когда известны радиальные напряжения на контурах диска. Выше указывалось, что можно получить решение и при других граничных условиях.

2. Описанный метод пригоден как для численного определения напряжений, так и для нахождения аналитических выражений максимального напряжения.

Рассмотрим для примера двухступенчатый вращающийся диск, состоящий из тонкого диска и ступицы.

В подобных дисках максимальным бывает обычно радиальное напряжение σ_{rc} в тонкой части диска у соединения со ступицей. Нетрудно получить формулу для σ_{rc} .

Пусть a — радиус отверстия ступицы, c — внешний радиус ступицы, b — внешний радиус диска, h_1 — ширина ступицы, h_2 — толщина диска.

Применяя изложенное выше решение, получим:

$$\sigma_{rc} = \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma_{rb}}{B_2} + \frac{\sigma_{ra}}{B_1} \frac{x_1^2}{2} + \frac{\gamma u^2}{g} (k_2 - k_1 x_2^2) \right],$$

где

$$\Delta = \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1} \frac{h_2}{h_1} + \mu \left(1 - \frac{h_2}{h_1} \right),$$

$$x_1 = \frac{a}{c}, \quad x_2 = \frac{c}{b}, \quad A_i = \frac{1 + x_i^2}{2}, \quad B_i = \frac{1 - x_i^2}{2},$$

$$k_1 = \frac{(1 - \mu) + (3 + \mu)x_1^2}{4}, \quad k_2 = \frac{(3 + \mu) + (1 - \mu)x_2^2}{4}$$

и $u = \omega b$ — окружная скорость на внешнем радиусе диска.

Рассмотрим числовой пример: требуется найти радиальное напряжение у соединения диска со ступицей. Число оборотов $n = 4000$ об/мин. Нагрузка на внешнем радиусе при этом равна $\sigma_{rb} = 400$ кг/см². У отверстия диска давления нет, т. е. $\sigma_{ra} = 0$. Диск из стали. Геометрические размеры (в миллиметрах): толщина диска $h_2 = 10$, ширина ступицы $h_1 = 100$ и $b = 245$, $c = 45$, $a = 25$.

Пользуясь предыдущей формулой, находим:

$$542 + 450 = 992 \text{ кг/см}^2,$$

причем первое слагаемое представляет собой напряжение от внешней нагрузки, а второе — от собственных центробежных сил диска.

Поступила в редакцию 12.XI 1940.

3 Инженерный сборник

ON THE CALCULATION OF STRESSES IN DISCS

S. A. TUMARKIN

(Summary)

By means of the Beatty-Maxwell theorem, the stresses in the given radius are determined. In the suggested procedure, the stresses in the disc need be calculated only once, the distribution of the load along the radius not being taken into consideration. This leads to the generalization of the procedure of V. M. Maisei, who in this way obtained the tangential stress at the opening of the disc (see the previous article in this issue).

The result is obtained when the radial stresses on the contours are known, with other boundary conditions, a more general procedure may be used ⁽²⁾.

ЛИТЕРАТУРА

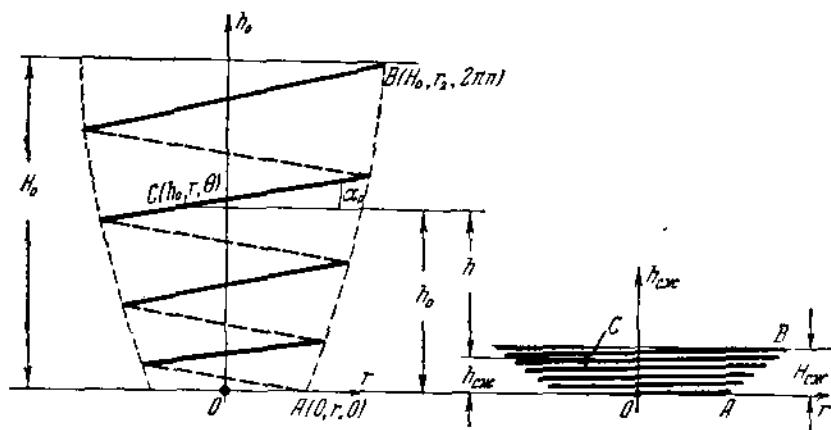
1. Тумаркин С. А. Расчет вентиляторов на прочность. „Труды ЦАГИ“. Вып. 496. 1940.
2. Тумаркин С. А. К решению неоднородных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. „Прикладная математика и механика“. 1941. Т. V.
3. Риз В. Ф. К расчету вращающихся дисков турбомашин. „Советское котлотурбостроение“. 1936. № 1.

К ТЕОРИИ СПИРАЛЬНЫХ ПРУЖИН СПЕЦИАЛЬНЫХ ТИПОВ

Е. П. ПОПОВ

(Москва)

В предыдущих работах [1] и [2], посвященных этому вопросу, все исследование нами проводилось в предположении посадки витков на опорную плоскость.



Фиг. 1.

Практически же витки пружины, свитой из проволоки диаметром d , могут ложиться на опорную плоскость только при условии

$$r(\theta) - r(\theta - 2\pi) \geq d. \quad (1)$$

Рассмотрим расчет осадки произвольных спиральных пружин и проектирование их специальных типов в случае посадки витков друг на друга, т. е. при условии

$$r(\theta) - r(\theta - 2\pi) < d. \quad (2)$$

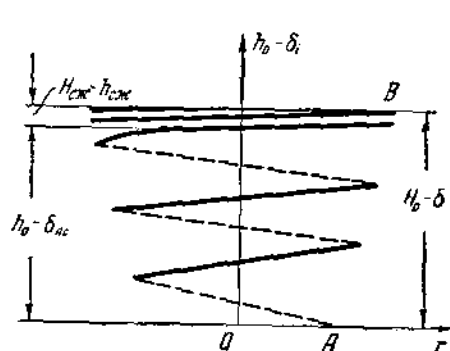
Пусть положение пружины в свободном состоянии определяется цилиндрическими координатами спирали h_0 , θ , r и углом наклона витков α_0 , а положение в сжатом до отказа состоянии — координатами $h_{сж}$, θ , r и $\alpha_{сж}$ (фиг. 1). Условимся, как и раньше¹, что $r_1 \leq r \leq r_2$ и что посадка витков друг на друга происходит постепенно и непрерывно, начиная с витка наибольшего радиуса r_2 и кончая витком r_1 , при нагрузках $P_1 \leq P \leq P_2$, которым соответствуют величины осадки пружины $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2$.

Возьмем некоторый промежуточный момент в процессе посадки витков пружины, когда посадке подвергается произвольная точка спирали C (фиг. 2). Из сравнения фиг. 1 и фиг. 2 видим, что наибольшая возможная для точки C осадка, составляющая в данный момент величину осадки нерабочей части пружины BC , будет:

¹ Работа [1], где необходимо отметить опечатку. На стр. 111, строка 21 снизу, напечатано „больше“, следует — „меньше“.

$$\delta_{BC} = (H_0 - h_0) - (H_{сж} - h_{сж}), \quad (3)$$

в то время как величина осадки рабочей части АС будет попрежнему



Фиг. 2.

$$\delta_{AC} = \frac{P}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta.$$

Введем понятие полезной высоты пружины в произвольной точке

$$h = h_0 - h_{сж} \quad (4)$$

и полной полезной высоты пружины (фиг. 1)

$$H = H_0 - H_{сж}. \quad (4a)$$

Выражение (3) для δ_{BC} приведет к прежнему виду [1], вследствие чего величина осадки пружины выразится также прежней формулой

$$\delta_{P_1 \leq P \leq P_2} = \delta_{AC} + \delta_{BC} = \frac{P}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta + H - h.$$

Условием посадки данного витка на предыдущий в произвольной точке будет:

$$\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_{сж}, \quad (5)$$

где $\Delta\alpha$ — уменьшение угла наклона витка в процессе деформации пружины. Попрежнему [1] имеем выражения:

$$\Delta\alpha = \frac{Pr^2}{C}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{r} \frac{dh_0}{d\theta}, \quad \alpha_{сж} = \frac{1}{r} \frac{dh_{сж}}{d\theta}. \quad (6)$$

В обозначениях (4) приходим к прежнему условию [1] посадки при данной нагрузке:

$$P = \frac{C}{r^3} \frac{dh}{d\theta}.$$

Угол

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_{сж} \quad (7)$$

можно назвать полезным углом наклона витков пружины.

Таким образом, если для данной спиральной пружины имеет место неравенство (2), то, оперируя с полезными параметрами пружины (4), (4a) и (7), можно воспользоваться всеми прежними выкладками и рассуждениями как в случае расчета осадки заданной спиральной пружины [1], так и в случае проектирования специальной пружины по заданному нелинейному закону для зависимости осадки от нагрузки [2].

Для каждой спиральной пружины, удовлетворяющей неравенству (2), необходимо определить параметры сжатого до отказа состояния $h_{сж}$ и $\alpha_{сж}$ в виде функций от θ или от r . Очевидно, что эти параметры зависят исключительно от формы пружины в плане, т. е. от $r = r(\theta)$. Длина образующей АВ (фиг. 1, справа) вследствие полного прижатия витков друг к другу будет: $l_{сж} = nd$.

В виду равномерной толщины проволоки по всей ее длине, переходя к дифференциалам, можем записать:

$$dl_{сж} = \frac{l_{сж}}{2\pi n} d\theta = \frac{d}{2\pi} d\theta.$$

Но

$$dh_{сж} = \sqrt{(dl_{сж})^2 - (dr)^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta, \quad (8)$$

или

$$dh_{\text{сж}} = \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi} \frac{d\theta}{dr}\right)^2 - 1} dr. \quad (9)$$

Поэтому из (6) и (8) для угла $\alpha_{\text{сж}}$ получим формулу:

$$\alpha_{\text{сж}} = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \quad (10)$$

а из (9)

$$h_{\text{сж}} = \int_{r_1}^r \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi} \frac{d\theta}{dr}\right)^2 - 1} dr, \quad H_{\text{сж}} = (h_{\text{сж}})_{r=r_2}. \quad (11)$$

Обратимся к примеру общего характера, рассмотренному ранее [1], в котором пружина характеризовалась уравнениями

$$h = H \frac{r^k - r_1^k}{r_2^k - r_1^k}, \quad \frac{dr}{d\theta} = mr^t, \quad (12)$$

причем вводилось обозначение $b = (4 - t) / k$, выражающее соотношение между показателями степени в (12). Его решение во всех трех случаях $b \leq 1$ справедливо и для посадки витков друг на друга, если считать h (13) полезной высотой пружины. Высота же ее в свободном состоянии согласно (4) должна быть

$$h_0 = h + h_{\text{сж}}, \quad (13)$$

где h определяется по первому из уравнений (12), а $h_{\text{сж}}$ согласно второму из уравнений (12) и (11), будет:

$$h_{\text{сж}} = \int_{r_1}^r \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi mr^t}\right)^2 - 1} dr, \quad (14)$$

что в частном случае при $t = 0$ (форма в плане — архимедова спираль) дает коническую форму:

$$h_{\text{сж}} = (r - r_1) \sqrt{\left(\frac{nd}{r_2 - r_1}\right)^2 - 1}, \quad (15)$$

а в частном случае при $t = 1$ (форма в плане — логарифмическая спираль)

$$h_{\text{сж}} = \int_{r_1}^r \sqrt{\left(\frac{nd}{r \ln(r_2 / r_1)}\right)^2 - 1} dr,$$

откуда

$$h_{\text{сж}} = \sqrt{p^2 - r^2} - p \ln \frac{p + \sqrt{p^2 - r^2}}{r} + C,$$

где

$$p = \frac{nd}{\ln(r_2 / r_1)}, \quad C = \sqrt{p^2 - r_1^2} - p \ln \frac{p + \sqrt{p^2 - r_1^2}}{r_1}.$$

Точно так же поступаем и в трех общих вариантах проектирования специальных пружин [2]. При этом в первом варианте, когда задана функция $r = r(\theta)$, изложенным ранее приемом определяем полезную высоту и угол:

$$h = \frac{1}{C} \int_0^x \varphi(x) dx, \quad a = \frac{r^2}{C} \varphi(x) \quad \left(\int_0^{\theta} r^2 d\theta = x, \quad P = \varphi(x) \right),$$

а во втором и третьем вариантах по заданной полезной высоте h определяется функция $r = r(\theta)$ соответственно:

$$\theta = C \int_{r_1}^r \frac{dh/dr}{r^{3/2}(H-h)} dr \quad \text{и} \quad r = \sqrt[3]{\frac{C}{\varphi(H-h)} \frac{dh}{d\theta}} \quad (P = \varphi(H-h)).$$

Затем во всех трех вариантах уже по новым формулам определяются $h_{сж}$ (11) и $a_{сж}$ (10), после чего находятся параметры пружины в ее свободном состоянии:

$$h_0 = h + h_{сж}, \quad a_0 = a + a_{сж}. \quad (16)$$

Так, для пружины в первом примере с синусоидальным законом осадки с формой в виде архимедовой спирали в плане величина $h_{сж}$ найдется по формуле (15), а угол $a_{сж}$ будет:

$$a_{сж} = \frac{1}{2\pi nr} \sqrt{(nd)^2 - (r_2 - r_1)^2}.$$

Для пружины в третьем примере с квадратичным законом осадки с формой в плане

$$\theta = \frac{2\pi n}{1-a^6} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^6 \right] \quad \left(a = \frac{r_1}{r_2} \right)$$

величина $h_{сж}$ согласно (11) получит выражение:

$$h_{сж} = \int_{r_1}^r \sqrt{\left(\frac{6r_1^6 nd}{(1-a^6)r^7} \right)^2 - 1} dr, \quad (17)$$

что представляет частный случай интеграла (14).

Интересно отметить, что рассматриваемый в этой статье вопрос является обобщением прежнего в следующем смысле. Верхним и нижним предельными случаями неравенства (2) являются соответственно условия (1) и равенство

$$r(\theta) - r(\theta - 2\pi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad r = \text{const}, \quad (18)$$

так как имеет место условие монотонности функции $r = r(\theta)$.

Следовательно, по отношению к исследуемым здесь пружинам с посадкой витков друг на друга [когда удовлетворяется неравенство (2)] ранее рассмотренные пружины, удовлетворяющие условию (1), с посадкой витков на плоскость [1, 2] являются частным случаем при $h_{сж} = 0$ и $a_{сж} = 0$, когда полезная высота пружины совпадает с ее высотой в свободном состоянии ($h = h_0$ и $a = a_0$).

Другим частным случаем произвольного вида спиральных пружин с посадкой витков друг на друга будут цилиндрические спиральные пружины, которые удовлетворяют равенству (18). В самом деле, если $r = \text{const}$, то интеграция (9) и уравнение (10) дают:

$$h_{сж} = \frac{\theta}{2\pi} d \quad \text{и} \quad a_{сж} = \frac{d}{2\pi r}, \quad (19)$$

что действительно отвечает до отказа сжатой цилиндрической пружине среднего радиуса r , свитой из проволоки диаметром d . При этом из (19) при $\theta = 2\pi$ получается $H_{сж} = nd$, что действительно соответствует превращению образующей $l_{сж}$ в вертикальную прямую.

Проектирование специальных цилиндрических спиральных пружин с нелинейной осадкой описано нами ранее [3]. Здесь отметим только в свете вышесказанного, что их проектирование можно вести целиком по первому из общих вариантов для произвольных спиральных пружин [2], откуда находится полезная высота

$$h = \frac{r^3}{C} \int_0^\theta \varphi(\theta) d\theta, \quad (20)$$

где функция $\varphi(\theta)$ определяется как $P = \varphi(\theta)$ из уравнения

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{r^3}{C} \theta, \quad (21)$$

где левая часть представляет некоторую известную функцию от P , соответствующую произвольно заданной зависимости $\delta = \delta(P)$, которой должна удовлетворять проектируемая пружина.

Определив, таким образом, по последним двум формулам (20), (21) полезную высоту h , путем последующего прибавления к ней величины $h_{сж}$ (19) получаем уравнение спирали $h_0 = h_0(\theta)$ для искомой цилиндрической пружины в ее свободном состоянии. Легко видеть, что уравнения (20), (21) идентичны с ранее полученными^[8], где h и θ соответствуют $H_0 - h_0$ и $2\pi n - \theta$.

В заключение необходимо отметить, что до сих пор мы имели в виду только такие пружины, для которых целиком имеет место либо условие (1), либо (2) с частным случаем (18). Однако, вообще говоря, возможна такая форма спирали, при которой для одной части витков будет справедливо условие (1), а для другой (2).

Здесь надо различать три случая:

$$\frac{d}{d\theta} [r(\theta) - r(\theta - 2\pi)] > 0, \quad (22)$$

$$\frac{d}{d\theta} [r(\theta) - r(\theta - 2\pi)] < 0, \quad (23)$$

$$\frac{d}{d\theta} [r(\theta) - r(\theta - 2\pi)] = 0. \quad (24)$$

В первом из них (22) витки меньших радиусов будут в плане пружины расположены теснее. Поэтому здесь возможен такой случай, когда эти витки, начиная от r_1 и кончая некоторым значением $r = r_3$, лежащим произвольно в интервале $r_1 \leq r_3 \leq r_2$, будут удовлетворять неравенству (2), в то время как витки больших радиусов ($r_3 \leq r \leq r_2$) отвечают условию (1).

Нагрузка P_3 , при которой садится точка $r = r_3$, будет:

$$P_3 = \frac{C}{r_3^3} \left(\frac{dh}{d\theta} \right)_{r=r_3}, \quad (25)$$

причем P_3 лежит в интервале $P_1 \leq P_3 \leq P_2$.

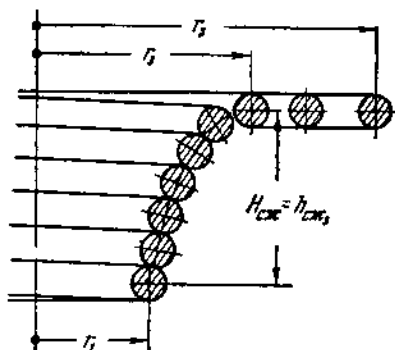
В таком случае процесс посадки витков сначала будет происходить на верхнюю (фиг. 1) опорную плоскость (витки $r_2 \geq r \geq r_3$, нагрузки $P_1 \leq P \leq P_3$), а затем уже друг на друга (витки $r_3 \geq r \geq r_1$, нагрузки $P_3 \leq P \leq P_2$). Соответствующий вид сжатой до отказа пружины изображен на фиг. 3.¹

Следовательно, для начальных витков пружины ($r_1 \leq r \leq r_3$) будем иметь величину $h_{сж}$, определяемую в соответствии с (11), и h_0 — (13), причем в точке $r = r_3$ получим:

$$h_{сж3} = \int_{r_1}^{r_3} \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi} \frac{d\theta}{dr} \right)^2 - 1} dr. \quad (26)$$

Так как все остальные витки ($r_3 \leq r \leq r_2$) легли на верхнюю опорную плоскость, то для любого из них $h_0 = h + h_{сж3}$ и, следовательно, для всей пружины в целом $H_{сж} = h_{сж3}$, что наглядно иллюстрируется фиг. 3.

¹ Заметим, что в тот момент, когда $P = P_3$, касание витков неустойчиво, возможно их взаимное скольжение, так что описываемая картина смешанной посадки витков интересна лишь с теоретической точки зрения.



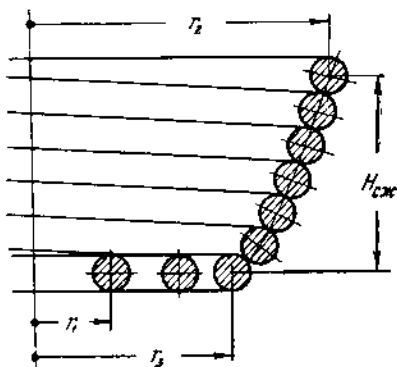
Фиг. 3.

Во втором случае (23) будет обратная картина посадки витков. А именно, сначала будет происходить посадка витков друг на друга (витки $r_2 \geq r \geq r_3$, нагрузки $P_1 \leq P \leq P_3$), а затем уже при $P_3 \leq P \leq P_2$ все остальные витки займут горизонтальное положение, будучи прижаты к нижней опорной плоскости на одном уровне с точкой $r = r_3$ (фиг. 4).

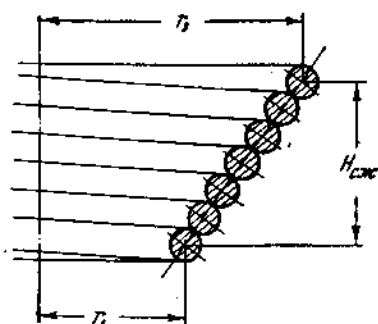
Поэтому для начальных витков пружины ($r_1 \leq r \leq r_3$) имеем $h_{сж} = 0$ и $h_0 = h$, а далее для витков $r_3 \leq r \leq r_2$ получим $h_0 = h + h_{сж}$, где

$$h_{сж} = \int_{r_3}^r \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi} \frac{d\theta}{dr}\right)^2 - 1} dr, \quad H_{сж} = \int_{r_3}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{d}{2\pi} \frac{d\theta}{dr}\right)^2 - 1} dr. \quad (27)$$

В последнем, третьем, случае (24) ни одного из только что описанных явлений быть не может, так как здесь теснота расположения витков пружины в плане всюду одинакова. Следовательно, в этом случае имеет место целиком для всей



Фиг. 4.



Фиг. 5.

пружины либо условие (1), либо (2), при котором сжатая до отказа пружина получает коническую форму (15) (фиг. 5). Этот случай (24) соответствует исключительно пружинам, имеющим в плане вид архимедовой спирали.

Поступила в редакцию 4.X 1940.

ON THE THEORY OF SPECIAL TYPES OF SPIRAL SPRINGS

Е. П. ПОПОВ

(Summary)

The author outlines the procedure of calculation of compression of arbitrary spiral springs, and the calculation of special types, when the coils approach contact with each other. This is a further development of the material given by the author in the two previous articles [1] and [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П. О расчете осадки нецилиндрических спиральных пружин. „Прикладная математика и механика“. 1940. Т. IV. Вып. 1.
2. Попов Е. П. К теории специальных типов спиральных пружин. „Прикладная математика и механика“. 1940. Т. IV. Вып. 4.
3. Попов Е. П. Цилиндрические пружины с нелинейной осадкой. „Вестник инженеров и техников“. 1940. № 7.

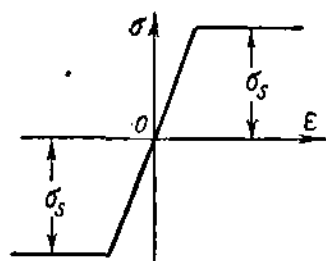
О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА БАЛОК, ДЛЯ КОТОРЫХ РЕШЕНИЕ НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ПОЛУЧЕНО В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

В. С. СВИДА

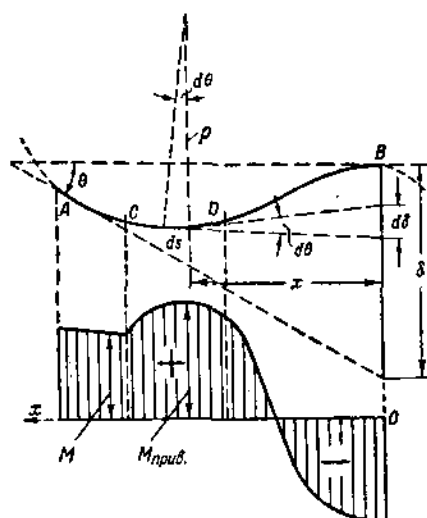
(Киев)

Предположим, что материал балки имеет длинную площадку текучести, позволяющую принять идеализированную диаграмму Прандтля (фиг. 1), что внешние силы лежат в одной из главных плоскостей, и рассмотрим изгиб балки прямоугольного поперечного сечения, сохранив гипотезу плоских сечений как основное допущение.

Пусть кривая AB есть часть изогнутой оси балки, некоторые участки которой (например, AC)



Фиг. 1.



Фиг. 2.

находятся в упругом состоянии, другие (например, CD) — в упруго-пластическом (фиг. 2).

Кривизна изогнутой оси для упругих участков будет:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ},$$

а для упруго-пластических

$$\frac{1}{r} = \frac{M_1}{EJ} \frac{1}{\sqrt{3 \mp 2M/M_1}}, \quad (1)$$

где M — изгибающий момент, EJ — жесткость балки при упругом изгибе, $M_1 = ch^2 \sigma_s / 6$ — момент, при действии которого текучесть должна начаться в крайних точках сечения, σ_s — предел текучести, c — ширина сечения, а h — его высота, причем знак минус относится к случаю положительных значений M , а плюс — отрицательных.

Предположим, что деформация осевой линии балки незначительна и что

горизонтальная ось x проходит параллельно первоначальной оси балки. Из чертежа легко видеть, что

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} \approx \frac{M_f}{EJ} \frac{dx}{\sqrt{3 \mp 2M/M_f}} \quad (2)$$

для упруго-пластических участков. Для упругих участков, как известно, можно принять $d\theta = [M/(EJ)] dx$. Очевидно, что для балки постоянного сечения угол между касательными в точках A и B

$$\theta = \frac{1}{EJ} \left(\sum \int_{l_i} M dx \pm \sum \int_{l_k} \frac{M_f dx}{\sqrt{3 \mp 2M/M_f}} \right) = \frac{1}{EJ} (F_e + F_k), \quad (3)$$

где l_i — длина одного из упруго-изогнутых участков балки, l_k — длина одного из участков изогнутых упруго-пластически. Верхние знаки относятся к участкам с положительными значениями изгибающего момента, а нижние — с отрицательными. Первый член, стоящий в скобках, представляет собой площадь F_e , ограниченную эпюрой моментов на упругих участках и осью x . Что касается второго, то его можно рассматривать как площадь F_k , ограниченную приведенной эпюрой моментов на упруго-пластических участках с ординатами

$$M_{np} = \frac{M_f}{\sqrt{3 \mp 2M/M_f}} \quad (4)$$

и осью x .

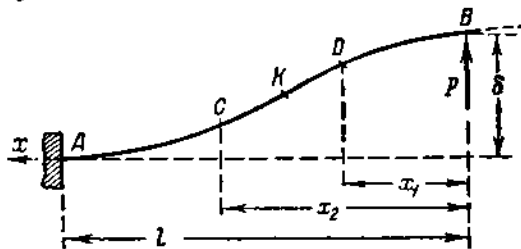
Далее из чертежа видно, что

$$d\delta = x d\theta.$$

Очевидно,

$$\delta = \frac{1}{EJ} \left(\sum \int_{l_i} M x dx \pm \sum \int_{l_k} \frac{M_f x dx}{\sqrt{3 \mp 2M/M_f}} \right) = \frac{1}{EJ} (S_e + S_k). \quad (5)$$

Первый член, стоящий в скобках, представляет собой статический момент S_e моментной площади упругих участков относительно вертикали точки B . Вто-



Фиг. 3.

рой член можно рассматривать как статический момент S_k относительно той же вертикали площади, ограниченной приведенной эпюрой моментов и осью x , для упруго-пластических участков.

Формулы вида (3), (5) нетрудно получить и иначе следующим образом. Предположим, что кривая AB есть часть упругой линии балки, жестко закрепленной концом A (фиг. 3). Участок CD находится

в упругом состоянии, AC и DB — в упруго-пластическом и K — точка перегиба. Приложим к точке B вертикальную фиктивную силу P и допустим, что справа от точки B балка не имеет закреплений. Потенциальная энергия изгиба участка AB будет:

$$U = \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^{x_1} M_f^2 \left(3 - 2 \sqrt{3 + \frac{2M}{M_f}} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} M^2 dx + \right. \\ \left. + \int_{x_2}^l M_f^2 \left(3 - 2 \sqrt{3 - \frac{2M}{M_f}} \right) dx \right].$$

Применяя принцип Кастилиано¹ и пользуясь формулой Лейбница для производной от интеграла с переменными пределами по параметру, получим:

$$\begin{aligned} \delta = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_{P=0} = \frac{1}{EJ} & \left\{ - \int_0^{x_1} \frac{M_f \partial M / \partial P}{\sqrt{3+2M/M_f}} dx + \int_{x_1}^{x_2} M \frac{\partial M}{\partial P} dx + \right. \\ & + \int_{x_2}^l \frac{M_f \partial M / \partial P}{\sqrt{3-2M/M_f}} dx + \frac{dx_1}{2dP} \left[M_f^2 \left(3-2\sqrt{3+\frac{2M}{M_f}} \right) \right]_{x=x_1} - \\ & \left. - \frac{dx_1}{2dP} (M^2)_{x=x_1} + \frac{dx_2}{2dP} (M^2)_{x=x_2} - \frac{dx_2}{2dP} \left[M_f^2 \left(3-2\sqrt{3-\frac{2M}{M_f}} \right) \right]_{x=x_2} \right\}_{P=0}. \end{aligned}$$

Последние четыре члена полученной формулы попарно уничтожаются, так как $M = M_f$ при $x = x_2$ и $M = -M_f$ при $x = x_1$. Принимая во внимание, кроме того, что для любого сечения $\frac{\partial M}{\partial P} = x$, получим формулу вида (5). Прикладывая к сечению B вместо силы P фиктивный момент и рассуждая аналогично предыдущему, придем к формуле вида (3).

Для балок, опертых по концам, полученные результаты удобнее несколько видоизменить. Пусть участки AC и DB такой балки (фиг. 4) деформированы упруго, CD — упруго-пластически и кривая AKB представляет собой энкуру моментов, ординаты которой соответственным образом изменены согласно (4) на части CD . Предположим далее, что кривая AFB есть веревочная кривая, построенная при полюсном расстоянии, равном EJ для моментной нагрузки, принятой за нагрузку. Дифференциальное уравнение этой кривой на участках AC и DB имеет вид:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M,$$

а на участке CD

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_f}{\sqrt{3-2M/M_f}}.$$

Так как последнее уравнение представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в упруго-пластическом состоянии, то очевидно, что веревочная кривая AFB есть упругая линия балки. Но произведение ординаты y этой кривой на полюсное расстояние EJ представляет собой изгибающий момент M' от моментной нагрузки (действительной на упругих участках, приведенной на участках упруго-пластических) для того сечения, которому соответствует эта ордината. Следовательно,

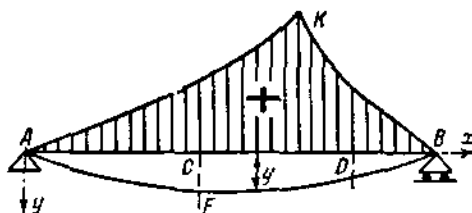
$$y = \frac{M'}{EJ}. \quad (6)$$

Очевидно также, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q'}{EJ}, \quad (7)$$

где Q' — перерезывающая сила от моментной нагрузки.

¹ Теорема Кастилиано для упруго-пластических деформаций впервые доказана Фриче [1].



Фиг. 4.

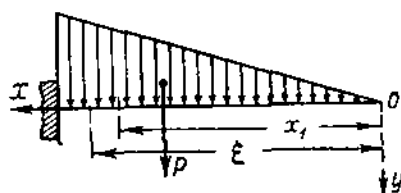
Формулы (6) и (7) аналогичны соответствующим формулам упругого изгиба.¹ В отношении формул (3) и (5) можно сделать весьма существенное замечание.

Выражения для деформаций балки только тогда могут быть получены в элементарных функциях, когда изгибающий момент M представляет собой функцию 1-й или 2-й степени от координаты x (сосредоточенные силы и пары, равномерно распределенная нагрузка). Если закон изменения M выражается целым алгебраическим полиномом степени выше 4-й, то определение деформаций балки приводит к нахождению гиперэллиптических интегралов. Наконец, если M выражается целой алгебраической функцией 3-й или 4-й степени от x (треугольная нагрузка, нагрузка по параболе 2-й степени), то решение задачи может быть получено в эллиптических интегралах Лежандра первого и второго рода, принадлежащих, как известно, к классу высших трансцендентных функций. Некоторые задачи последнего типа рассматриваются ниже.

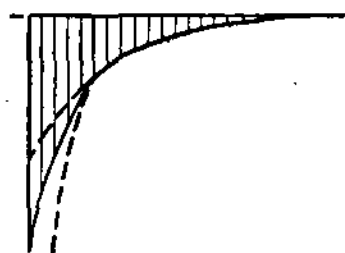
Консоль с треугольной нагрузкой

Момент M в любом сечении и расстояние x_1 (фиг. 5) до начала упруго-пластического участка балки будут:

$$M = Px^3 / (3l^2), \quad x_1 = \sqrt[3]{3M_f l^2 / P}.$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Приведенная эпюра моментов представлена на фиг. 6. Угол наклона касательной к изогнутой оси на конце консоли на основании (3):

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{EJ} \left(\int_0^{x_1} \frac{Px^3}{3l^2} dx + \int_{x_1}^l \frac{M_f dx}{\sqrt{3-2Px^3/(3M_f l^2)}} \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\int_0^{x_1} \frac{Px^3}{3l^2} dx + M_f l \sqrt{\frac{3M_f}{2P}} \int_{x_1}^l \frac{dx}{\sqrt{9M_f l^2/(2P) - x^3}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Второй из интегралов, стоящих в скобках, представляет собой эллиптический интеграл первого рода. Применим подстановку

$$x = \sqrt[3]{9M_f l^2 / (2P)} [1 - \sqrt[3]{3} \operatorname{tg}^2(\varphi/2)]. \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{9M_f l^2}{2P} - x^3 = \frac{27M_f l^2}{2P} \sqrt[3]{3} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \right) \sin^2 \varphi \right] \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \sec^4 \frac{\varphi}{2}$$

¹ Графоаналитический метод при исследовании упруго-пластического изгиба балок применял Гартман^[2] и несколько позже С. А. Бернштейн и В. С. Туркин^[3].

и угол θ может быть выражен в эллиптических интегралах Лежандра первого рода:

$$\theta = \frac{M_f}{EJ} \sqrt{\frac{3}{2P}} \left\{ \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} [F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)] \right\}. \quad (10)$$

Как здесь, так и в дальнейшем мы применяем обычные условные обозначения для эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Квадрат модуля интегралов $k^2 = 0.933$. Амплитуды φ_1 и φ_2 легко получить из (9), заменяя x через x_1 и l :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2 \arctg \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{6}{243}}} = 30^\circ 10', \\ \varphi_2 &= 2 \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - l \sqrt{\frac{3}{9M_f l^2}}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Нагрузка P_f , соответствующая началу текучести в заделке, и предельная нагрузка P_s определяются из уравнений:

$$P_f l / 3 = M_f, \quad P_s l / 3 = 3M_f / 2 = M_s. \quad (12)$$

(M_s — момент, соответствующий распространению текучести на всю высоту сечения).

При $P = P_f$

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

и угол наклона на основании (10)

$$\theta_f = \frac{P_f l^2}{12EJ}. \quad (13)$$

При $P = P_s$

$$\varphi_2 = 0$$

и первый из интегралов, стоящих в (10) в скобках, обращается в нуль. Модулярный угол второго интеграла 75° . По таблицам эллиптических интегралов¹ легко находим значения этого интеграла:

$$F(\varphi_1, k) = 0.550.$$

После подстановки в (10) получим значение угла θ_s при предельной нагрузке:

$$\theta_s = 0.102 \frac{P_s l^2}{EJ} = 0.153 \frac{P_f l^2}{EJ}. \quad (14)$$

Прогиб на конце консоли на основании (5) будет:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EJ} \left(\int_0^{x_1} \frac{Px^4}{3l^2} dx + \int_{x_1}^l \frac{M_f x dx}{\sqrt{3 - 2Px^3 / (3M_f l^2)}} \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\int_0^{x_1} \frac{Px^4}{3l^2} dx + M_f l \sqrt{\frac{3M_f}{2P}} \int_{x_1}^l \frac{x dx}{\sqrt{9M_f l^2 / (2P) - x^3}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Эллиптический интеграл второго рода, стоящий в скобках, путем подстановки

¹ См., например, Ю. С. Сикорский [4].

(9) может быть приведен к эллиптическим интегралам первого и второго рода в форме Лежандра. Окончательно получим:

$$\delta = \frac{M_f l^3}{EJ} \sqrt{\frac{M_f^2 l}{P^2}} \left\{ \frac{\sqrt[3]{9}}{5} + \frac{3\sqrt[12]{3}}{\sqrt[3]{4}} \left(2 \left[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k) \right] + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k) \right] \right) \right\}, \quad (16)$$

При $P = P_f$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

и прогиб будет:

$$\delta_f = \frac{P_f l^3}{15EJ}. \quad (17)$$

При $P = P_s$

$$\varphi_2 = 0, \quad E(\varphi_1, k) = 0.503$$

и прогиб при предельной нагрузке будет:

$$\delta_s = 0.0847 \frac{P_s l^3}{EJ} = 0.127 \frac{P_f l^3}{EJ}. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что θ и δ при предельной нагрузке примерно в два раза больше, чем при нагрузке P_f . Формулы (13) и (17) представляют собой не что иное, как хорошо известные выражения прогиба и угла поворота концевого сечения в случае только упругого изгиба консоли.

Уравнение изогнутой оси для упруго-пластического участка рассматриваемой балки можно написать в общем виде так:

$$y = \frac{1}{EJ} \int_x^l \frac{M_f(\xi - x)}{\sqrt{3 - 2P\xi^2/(3M_f^2)}} d\xi, \quad (19)$$

причем $l > \xi > x$, а $x > x_1$.

Уравнение семейства граничных поверхностей между упругой и пластической зоной будет:

$$z^2 + \frac{Px^3}{c\sigma_s l^2} - \frac{3h^2}{4} = 0, \quad (20)$$

где z — половина высоты упругого ядра в сечении, соответствующем координате x .

Балка на двух опорах с треугольной нагрузкой

Приравняв изгибающий момент

$$M = \frac{P}{3}x - \frac{P}{3l^2}x^3$$

моменту M_f , получим уравнение:

$$x^3 - l^2x + \frac{3M_f l^2}{P} = 0, \quad (21)$$

из которого находим расстояния x_1 и x_2 от левой опоры до границ упруго-пластического участка балки:

$$x_{1,2} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{3} \mp l \sin \frac{\pi}{3}, \quad (22)$$

причем

$$\cos \eta = \frac{9\sqrt{3}M_f}{2Pl}.$$

Третий корень

$$x_3 = -\frac{2l}{\sqrt{3}} \cos \frac{\eta}{3}$$

здесь не применим. Приведенная эпюра моментов показана на фиг. 7. Для угла наклона α , касательной к изогнутой оси на левой опоре, согласно (7) будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A'}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{x_1} M(l-x) dx + \int_{x_2}^l M(l-x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f(l-x) dx}{\sqrt{3-2M_f/M_f}} \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^{x_1} \left(\frac{P}{3}x - \frac{P}{3l^2}x^3 \right) (l-x) dx + \int_{x_2}^l \left(\frac{P}{3}x - \frac{P}{3l^2}x^3 \right) (l-x) dx + \right. \\ &\quad \left. + M_f l \sqrt{\frac{3M_f}{2P}} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + 9M_f l^2/(2P)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + 9M_f l^2/(2P)}} \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Приведем эллиптические интегралы первого и второго рода, стоящие в квадратных скобках, к эллиптическим интегралам в форме Лежандра. Подрадикальный трехчлен можно представить с помощью гиперболических функций так:

$$x^3 - l^2x + \frac{9M_f l^2}{2P} = \left(x + \frac{2l}{\sqrt{3}} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right) \left[x^2 - \frac{2xl}{\sqrt{3}} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} + \frac{l^2}{3} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\phi}{3} + 3 \operatorname{sh}^2 \frac{\phi}{3} \right) \right],$$

при этом

$$\operatorname{ch} \phi = \frac{27\sqrt{3}M_f}{4Pl}.$$

Применим подстановку

$$x = -\frac{2l}{\sqrt{3}} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} + lR \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (24)$$

где для краткости

$$R = \sqrt{3 \operatorname{ch}^2(\phi/3) + \operatorname{sh}^2(\phi/3)}.$$

Тогда

$$x^3 - l^2x + \frac{9M_f l^2}{2P} = l^3 R^3 \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{R} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right) \sin^2 \varphi \right] \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \sec^4 \frac{\varphi}{2}$$

и полученные выше эллиптические интегралы после ряда преобразований могут быть представлены в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + 9M_f l^2/(2P)}} = \frac{1}{\sqrt{lR}} [F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)],$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{x^3 - l^2x + 9M_f l^2/(2P)}} &= \sqrt{lR} \left\{ 2 \left[R_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_2}{2} - R_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_1}{2} - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}R} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right) [F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}, \quad R_2 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2}$$

и квадрат модуля интегралов

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{R} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right).$$

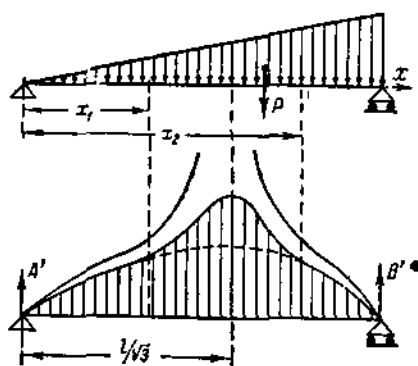
Амплитуды φ_1 и φ_2 легко найти из (24), заменяя x через x_1 и x_2 . Тогда, пользуясь (22), будем иметь:

$$\varphi_{1,2} = 2 \arctg \left\{ \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\eta}{3} \mp \sin \frac{\eta}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3}} \right\}.$$

Подставляя в (23) найденные выражения эллиптических интегралов, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{EJ} \left\{ \frac{l^3}{180} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{3} (x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4!} (x_2^4 - x_1^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{5!} (x_1^5 - x_2^5) \right] \right\} - \frac{M_f l}{EJ} \sqrt{\frac{3M_f R}{2Pl}} \left\{ 2 \left[R_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} - R_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - E(\varphi_2, k) + \right. \right. \\ \left. \left. + E(\varphi_1, k) \right] + \left[1 - \frac{1}{R} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right) \right] \left[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k) \right] \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, нетрудно выразить угол наклона β касательной на правой опоре и прогиб δ в месте действия наибольшего изгибающего момента (на расстоянии $x = l/\sqrt{3}$ от левой опоры) через эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода:



Фиг. 7.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{EJ} \left(\int_0^{x_1} Mx \, dx + \int_{x_2}^l Mx \, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f x \, dx}{\sqrt{3 - 2M/M_f}} \right) = \\ = \frac{P}{EJ} \left\{ \frac{2}{45} l^3 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} (x_1^3 - x_2^3) + \frac{1}{5!} (x_2^5 - x_1^5) \right] \right\} + \\ + \frac{M_f}{EJ} \sqrt{\frac{3M_f R}{2Pl}} \left\{ 2 \left[R_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} - R_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - E(\varphi_2, k) + E(\varphi_1, k) \right] + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}R} \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right) [F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{1}{EJ} \left[A' \frac{l}{\sqrt{3}} - \int_0^{x_1} M \left(\frac{l}{\sqrt{3}} - x \right) dx - \int_{x_1}^{l/\sqrt{3}} \frac{M_f (l/\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3} - 2M/M_f} dx \right] = \\ = & \frac{P}{EJ\sqrt{3}} \left\{ \frac{7l^3}{180} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} (x_2^3 + x_1^3 (\sqrt{3} - 1)) - \frac{l}{2} x_2^2 + \frac{1}{4l} x_2^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{5l^2} (x_1^5 (1 - \sqrt{3}) - x_2^5) \right] \right\} + \frac{M_f l}{EJ} \sqrt{\frac{M_f l R}{2P}} \left\{ 2 \left[\sqrt{3} R_3 \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2} - \right. \right. \\ & - R_3 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} + (1 - \sqrt{3}) R_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \sqrt{3} E(\varphi_3, k) + E(\varphi_2, k) + \\ & + (\sqrt{3} - 1) E(\varphi_1, k) \left. \right] + \left[\sqrt{3} - \frac{1}{R} \left(1 + 2 \operatorname{ch} \frac{\psi}{3} \right) \right] [F(\varphi_3, k) - F(\varphi_1, k)] + \\ & \left. + \left[\frac{1}{R} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ch} \frac{\psi}{3} \right) - 1 \right] [F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)] \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\varphi_3 = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + 2 \operatorname{ch} \frac{\psi}{3} \right)} \right\}, \quad R_3 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_3}.$$

Приравнявая максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = 2Pl / (9\sqrt{3}) \quad (28)$$

моментам M_f и $M_s = 3M_f/2$, найдем нагрузку P_f , соответствующую началу текучести, и предельную нагрузку P_s :

$$P_f = 9\sqrt{3}M_f / (2l), \quad P_s = 27\sqrt{3}M_f / (4l). \quad (29)$$

При $P = P_f$

$$x_1 = x_2 = l/\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

и из (25), (26) и (27) легко получаются известные выражения для деформаций упругого изгиба балки с треугольной нагрузкой:

$$\operatorname{tg} \alpha_f = \frac{7}{180} \frac{P_f l^2}{EJ}, \quad \operatorname{tg} \beta_f = \frac{2}{45} \frac{P_f l^2}{EJ}, \quad \delta_f = \frac{1}{45\sqrt{3}} \frac{P_f l^3}{EJ}.$$

Рассмотрим теперь случай предельной нагрузки P_s . Для $P = P_s$ на основании (22) находим:

$$x_1 = 0.279l \quad \text{и} \quad x_2 = 0.831l.$$

Далее очевидно, что

$$\operatorname{ch} \psi = 1, \quad \psi = 0, \quad \operatorname{ch} \frac{\psi}{3} = 1, \quad \operatorname{sh} \frac{\psi}{3} = 0$$

и подрадикальный трехчлен в (23) можно переписать так:

$$x^3 - l^2 x + 9M_f l^2 / (2P_s) = (x + 2l/\sqrt{3})(x - l/\sqrt{3})^2.$$

В таком случае стоящий в (23) эллиптический интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f (l - x) dx}{\sqrt{3 - 2M/M_f}}$$

вырождается в несобственный псевдоэллиптический интеграл

$$I_1 = M_f l \sqrt{\frac{3M_f}{2P_s}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(l - x) dx}{\sqrt{(x + 2l/\sqrt{3})(x - l/\sqrt{3})^2}},$$

у которого подинтегральная функция обращается в бесконечность при $x = l/\sqrt{3}$ и подрадикальный трехчлен имеет два равных корня. Применяя обычный прием, найдем $I_1 = \infty$.

	θ	δ	θ_s	δ_s
Консоль; нагрузка силой P на конце	$\frac{M_f^2}{2PEJ} \left(3-2\sqrt{3-\frac{2Pl}{M_f}} \right)$	$\frac{M_f^3}{3P^2EJ} \left[5-\left(3+\frac{Pl}{M_f}\right) \sqrt{3-\frac{2Pl}{M_f}} \right]$	$\frac{P_f l^2}{EJ}$	$\frac{20}{27} \frac{P_f l^3}{EJ}$
Консоль; равномерная нагрузка q	$\frac{M_f}{EJ} \sqrt{\frac{M_f}{q}} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{q}{3M_f}} \right] + \arcsin \left(\sqrt{\frac{q}{3M_f}} \right)$	$\frac{M_f^2}{2qEJ} \left[3-2\sqrt{3-\frac{ql^2}{M_f}} \right]$	$0.314 \frac{q_f l^3}{EJ}$	$-\frac{q_f l^4}{4EJ}$
Балка на двух опорах; равномерная нагрузка q	$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{qx_1^2}{12} (3l-2x_1) + M_f \sqrt{\frac{M_f}{q} K} \right] + M_f \sqrt{\frac{M_f}{q} K}$ где $K = \frac{1}{2} \ln \left(3 - \frac{ql^2}{4M_f} \right) - \ln \left[1 - \sqrt{\frac{ql^2}{4M_f} - 2} \right]$	$\frac{1}{EJ} \left\{ \frac{qx_1^3}{24} (4l-3x_1) + M_f \sqrt{\frac{M_f}{q}} \times \left[\sqrt{\frac{M_f}{q}} \left(\sqrt{3-\frac{ql^2}{4M_f}} - 1 \right) + \frac{l}{2} K \right] \right\}$	$\operatorname{tg} \theta_1 = \infty$ при $q \rightarrow q_s$	$\delta = \infty$ при $q \rightarrow q_s$
Балка на двух опорах; момент m на правом конце	$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{M_f l}{3m^2 EJ} \left[\frac{9m}{2M_f} - 5 + \sqrt{\left(3 - \frac{2m}{M_f} \right)^3} \right] + \frac{M_f^2 l}{3m^2 EJ} \left[5 - \left(3 + \frac{m}{M_f} \right) \sqrt{3 - \frac{2m}{M_f}} \right]$	$\frac{M_f^2 l^2}{6m^2 EJ} \left[\frac{9m}{2M_f} - 5 + \sqrt{\left(3 - \frac{2m}{M_f} \right)^3} \right] - \frac{ml^2}{48EJ}$	$\frac{7M_f l}{27EJ}$ $\frac{20}{27} \frac{M_f l}{EJ}$	$\frac{85}{864} \frac{M_f l^2}{EJ}$

Рассуждая аналогично, нетрудно доказать, что получающийся в (26) при $P = P_s$ несобственный псевдоэллиптический интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{M_f x dx}{\sqrt{3 - 2M_f/M_f}}$$

также обращается в бесконечность. Стоящий в (27) интеграл

$$\int_{x_1}^{l/\sqrt{3}} \frac{M_f (l/\sqrt{3} - x) dx}{\sqrt{3 - 2M_f/M_f}}$$

имеет конечное значение.

В таком случае очевидно, что

$$\lim_{P \rightarrow P_s} \operatorname{tg} \alpha = \infty, \quad \lim_{P \rightarrow P_s} \operatorname{tg} \beta = \infty, \quad \lim_{P \rightarrow P_s} \delta = \infty. \quad (30)$$

Конечно, результаты (30) имеют лишь условное значение, потому что формулы (3), (5), (6) и (7) верны только для малых деформаций. Однако интересно отметить, что при нагрузке $P = 26.98\sqrt{3}M_f/(4l)$, т. е. при нагрузке, отличающейся от предельной только на 0.08% , прогиб

$$\delta = 0.061 P l^3 / (EJ).$$

Как видим, этот прогиб представляет собой еще очень малую величину, хотя он и превосходит в 4.7 раза прогиб от нагрузки P_f .

Результаты (30) легко получить и иначе, рассматривая найденные в (25), (26) и (27) в развернутом виде значения $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ и δ . Нетрудно видеть, что при $P = P_s$ квадрат модуля интегралов $k^2 = 1$, а амплитуды их соответственно будут:

$$\varphi_1 = 84^\circ 32', \quad \varphi_2 = 93^\circ 52', \quad \varphi_3 = 90^\circ.$$

Стоящая в (25), (26) и (27) разность эллиптических интегралов

$$F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)$$

в этом случае вырождается в несобственный псевдоэллиптический интеграл:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varphi_1}^{\pi/2 - \epsilon} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \int_{\pi/2 + \epsilon}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \right) = \infty.$$

Множители при этом интеграле, а также и все остальные члены в (25), (26) и (27) имеют при $P = P_s$, как это непосредственно можно видеть, конечные значения, за исключением произведения

$$\left[\sqrt{3 - \frac{1}{R} \left(1 + 2 \operatorname{ch} \frac{\phi}{3} \right)} \right] [F(\varphi_3, k) - F(\varphi_1, k)],$$

принимającego неопределенную форму $0 \cdot \infty$. Раскрытие этой неопределенности дает нуль, и, следовательно, результаты (30) имеют место.

В прилагаемой таблице для ряда случаев нагрузки приведены некоторые окончательные выражения для деформаций, легко получаемые в элементарных функциях при помощи формул (3—7).

В таблице приняты обозначения: θ — угол наклона касательной к изогнутой оси на конце консоли, δ — прогиб на конце консоли или посередине пролета в балке, опертой по концам, θ_1 и θ_2 — углы поворота концевых сечений на левой и правой опоре в балке, опертой по концам, θ_s и δ_s — предельные углы и прогибы, P_f и q_f — значения нагрузок, соответствующих началу текучести в наиболее опасных сечениях, x_1 — расстояние от левой опоры до начала упруго-пластического участка в балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, определяемое по формуле:

$$x_1 = l/2 - \sqrt{l^2/4 - 2M_f/q}.$$

Поступила в редакцию 20. VI 1939.

ON PROBLEMS OF PLASTIC BENDING OF BEAMS WHOSE SOLUTIONS CANNOT BE EXPRESSED IN ELEMENTARY FUNCTIONS

V. S. SVIDA

(Summary)

The paper outlines an application of the familiar graphic-analytic procedure of solving problems of bending of beams in a elastic plastic state. This procedure is a development of the results of J. Fritsche who proved that the theory of work may be applied to elastic-plastic bending.

The author solves the problem of a cantilever, and of beams resting on two supports, with a triangularly distributed load.

At the end of the work, a table of final results is given, both for the above-mentioned cases, as well as for a cantilever with a load concentrated on the end, and for a beam resting on two supports loaded on the right end.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fritsche J. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 1931. № 3.
2. Hartmann. Schweizerische Bauzeitung, 18 Februar. 1933.
3. Бернштейн С. А. и Туркин В. С. Труды конференции по пластическим деформациям. Академия Наук СССР, 1938, а также статья В. С. Туркина в сборнике "Расчет металлических конструкций с учетом пластических деформаций". 1938.
4. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. 1936 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВНЕЦЕНТРЕННОСЖАТОГО СТЕРЖНЯ В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ К СИЛОВОЙ ПЛОСКОСТИ

М. В. РУБИНИН

(Москва)

Внецентренносжатый стержень следует проверять на устойчивость равновесной формы не только в плоскости действия изгибающего момента, но и в плоскости, перпендикулярной к первой.

Необходимость такой проверки обусловлена тем, что практически внецентренносжатое сечение развивают в направлении эксцентриситета, почему такое сечение оказывается, как правило, значительно более жестким в плоскости момента, нежели в плоскости, перпендикулярной к ней.

Действовавшие до 1934 г. Технические Условия и Нормы на проектирование металлических конструкций практически объединяли проверки на устойчивость внецентренносжатого стержня в одну, предлагая таковую производить по формуле:

$$\frac{M}{W} + \frac{N}{\varphi F} \leq R_d, \quad (1)$$

где M — изгибающий момент, N — нормальная сила, F — площадь поперечного сечения, W — момент сопротивления сечения, φ — коэффициент снижения основного допускаемого напряжения, R_d — допускаемое напряжение на сжатие.

Так как в нормах отсутствовали какие-либо уточнения относительно φ , то практикой проектных контор естественно было установлено, что φ надо определять по минимальному моменту инерции сечения.¹

Необоснованность такого решения вопроса нами уже отмечалась в 1931 г. [1]. Указывая на необходимость выделения вопроса об устойчивости внецентренносжатого стержня в направлении, перпендикулярном к силовой плоскости, в самостоятельную проверку, мы предлагали производить ее по формуле простого продольного изгиба, т. е.

$$\frac{N}{\varphi F} \leq R_d. \quad (2)$$

Такой метод исходит, конечно, из предположения о том, что изгибающий момент не влияет на устойчивость стержня в направлении перпендикулярном к плоскости момента.

Совершенно аналогичные указания мы находим в книге К. С. Завриева [2].

Изданные в 1934 г. и действующие по настоящее время Технические Условия и Нормы на проектирование металлических конструкций уточнили вопрос о φ , предлагая формулу (1) применять для проверки устойчивости в силовой плоскости, почему и φ брать по гибкости в этой плоскости. Кроме того, если

¹ В настоящей статье совершенно не затрагивается вопрос о проверке устойчивости внецентренносжатого стержня в силовой плоскости. Этот вопрос достаточно освещен работами Кармана [5], Хваллы [6], Роша [3] и Ежека [4]. Отметим лишь, что формула (1) не имеет никакого теоретического обоснования.

гибкость в перпендикулярном направлении больше, то нормы предписывают проверять стержень вторично по формуле (2).

Таким образом нормы 1934 г. пренебрегают влиянием изгибающего момента на устойчивость в направлении перпендикулярном к силовой плоскости.

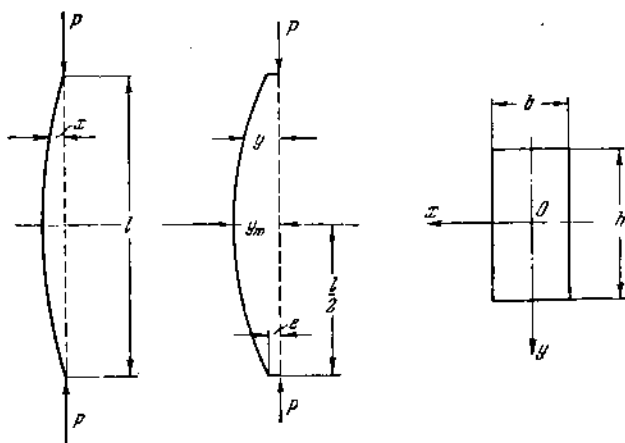
Такое решение вопроса, как видно будет из дальнейшего, является правильным лишь для упругой стадии работы материала, а потому должно быть признано немогущественным.

Исследованием затронутого вопроса в упругопластической стадии занимались Рош [3] и Ежек [4].

Рошем разработан метод определения критических усилий для рассматриваемого случая. Однако метод этот, связанный с необходимостью повторных, пробных подсчетов (при значительной их громоздкости) и исключающий возможность составления готовых расчетных таблиц или графиков, надо признать практически неприменимым.

Исследования Ежека в интересующей нас области ограничиваются установлением выражения максимально допускаемой гибкости в плоскости, перпендикулярной к силовой, в функции от критического напряжения, определенного из условия устойчивости в силовой плоскости:

$$\max \lambda_y^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_k} \left[1 - \frac{2e\sigma_k}{h(\sigma_s - \sigma_k)} \right], \quad (3)$$



Фиг. 1.

где e — начальный эксцентриситет нагрузки, σ_s — предел текучести материала, h — размер сечения, параллельный силовой плоскости, σ_k — критическое напряжение для силовой плоскости, определенное по методу Ежека.

Формула Ежека оставляет открытым весьма существенный вопрос о несущей способности стержня в случае, когда $\lambda_y > \max \lambda_y$, определенной по формуле (3).

Ниже излагается способ определения критических усилий для перпендикулярного к силовой плоскости направления как в упругой, так и в упругопластической стадии, независимо от того, достигнуто ли уже критическое состояние в силовой плоскости или нет.

Результаты могут быть представлены графиками зависимости $\lambda_y = f(\sigma)$ совершенно аналогично тому, как это выполнено рядом авторов (Хвалла, Рош, Ежек) для гибкостей в силовой плоскости.

Этот способ излагается применительно к прямому стержню постоянного прямоугольного поперечного сечения, шарнирно опертому по концам, нагруженному эксцентрично приложенными силами в плоскости симметрии (фиг. 1), и базируется на следующих допущениях:

1. Действительная диаграмма работы материала заменена идеализированной диаграммой Прандтля и принята в качестве закона распределения напряжений по сечению при изгибе.

2. Поперечные сечения стержня остаются плоскими после деформации как в упругой, так и в упругопластической стадии.

3. Форма изгиба внецентренносжатого стержня принимается по синусоиде.

4. Ввиду практически малых прогибов принимается $1/\rho = y''$.

5. Приведенный модуль упругости в упругопластической стадии определяется из рассмотрения плоской формы изгиба, принимаемой стержнем вследствие эксцентрично приложенной нагрузки.

6. Приведенный модуль упругости наиболее напряженного сечения принимается за модуль упругости для всего стержня.

1. Определение критических напряжений для направления, перпендикулярного к силовой плоскости

Выражение критического напряжения для плоскости xoz найдем из того условия, что при критическом значении нагрузки для конструкции возможны две качественно отличные друг от друга равновесные формы.

Этими формами в нашем случае являются исходная прямолинейная и бесконечно близкая к ней изогнутая форма равновесия. Предполагая последнюю уже осуществившейся, напишем:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{Px}{TJ_y}, \quad (4)$$

где T — приведенный модуль упругости.

Интеграция уравнения (4) с учетом условий закрепления приводит к известной формуле:

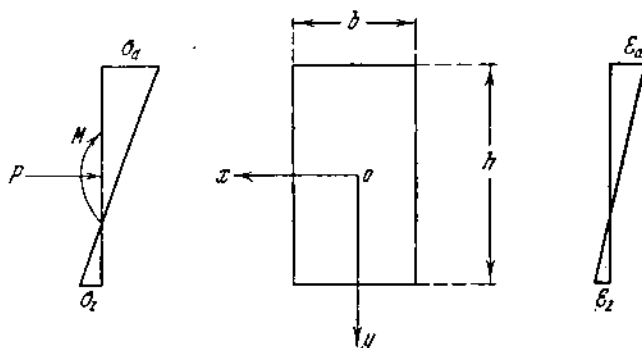
$$\sigma_k = \frac{\pi^2 T}{\lambda_y^2}, \quad (5)$$

где λ_y — гибкость стержня в направлении оси x .

Теперь задача сводится к определению приведенного модуля T , для чего рассмотрим различные варианты распределения напряжений по сечению.

2. Упругая стадия

Эпюра напряжений показана на фиг. 2.



Фиг. 2.

В этом случае, очевидно, $T = E$ (модуль Юнга). Отсюда

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}, \quad (6)$$

т. е. в упругой стадии внецентренность нагрузки не влияет на величину критической силы.

Из условия

$$\sigma_a = \frac{P}{bh} + \frac{6Py_m}{bh^2} = \sigma_s \quad (7)$$

находим то значение стрелы прогиба $y_m = y_I$, вплоть до которого стержень будет находиться целиком в упругой стадии:

$$y_I \leq (\sigma_s / \sigma_a - 1) h / 6, \quad (8)$$

где $\sigma_a = P / (bh)$.

3. Упругопластическая стадия, первый вариант

Часть сечения в сжатой зоне пластически деформирована.

Эпюра напряжений показана на фиг. 3.

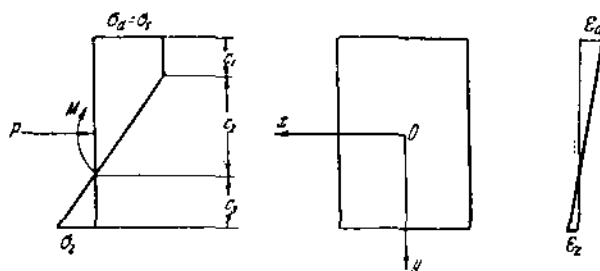
Находим выражение для стрелы прогиба y_m , для чего сопоставим выражение кривизны, получаемое из принятой нами синусоидальной формы изогнутой оси и из рассмотрения эпюры напряжений.

В первом случае имеем:

$$y = (y_m - e) \sin(\pi z / l) + e. \quad (9)$$

Из (9) после двукратного дифференцирования и подстановки $z = l / 2$ получаем:

$$1 / \rho_m = y'' = -\pi^2 (y_m - e) / l^2. \quad (10)$$



Фиг. 3.

Из эпюры напряжений по фиг. 3 имеем:

$$1 / \rho = y'' = -\sigma_s / (Ec_2). \quad (11)$$

Значение c_2 определяется из условий равновесия сил, приложенных к сечению ($\sum z = 0$ и $\sum M = 0$):

$$c_2 = \frac{9h [(\sigma_s - \sigma_a) - 2M / (bh^2)]^2}{8(\sigma_s - \sigma_a)^3} \sigma_s, \quad (12)$$

где

$$M = Py = bh \sigma_a y. \quad (13)$$

Подставляя в (11) найденное значение c_2 , получим для середины стержня:

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{8(\sigma_s - \sigma_a)^3}{9Eh [(\sigma_s - \sigma_a) - 2\sigma_a y_m / h]^2}. \quad (14)$$

Из сопоставления этой формулы с (10) получаем уравнение для определения y_m :

$$\bar{y}^3 - (m + k)\bar{y}^2 + \left(\frac{k^2}{4} + km\right)\bar{y} - \left[\frac{k^3 m}{4} + \frac{\lambda_k^2}{54\pi^2} \frac{k^3 \sigma_s}{E(1 + k)}\right] = 0, \quad (15)$$

где

$$\bar{y} = y_m / h, \quad m = e / h, \quad \lambda_x = l \sqrt{12} / h, \quad h = \sigma_s / \sigma_a - 1.$$

В дальнейшем будет показано, что с помощью относительного прогиба y легко определяется приведенный модуль T , но до того следует выяснить вопрос о пределах применимости уравнения (15).

Очевидно, эти пределы определяются из условий:

$$\sigma_0 = \sigma_s \quad \text{и} \quad \sigma_z \leq \sigma_s.$$

Первое условие непосредственно определяется ранее выведенным уравнением (8), а второе предельное значение прогиба получается из уравнения проекций всех сил, приложенных к сечению, на продольную ось:

$$bh\sigma_s - (h - c_1)(\sigma_z + \sigma_s) b / 2 - P = 0, \quad (16)$$

где

$$c_1 = \frac{3M}{bh(\sigma_s - \sigma_a)} - \frac{h}{2} \quad (17)$$

(определена аналогичным путем, как и c_2).

Подставляя (17) в (16), заменяя

$$P = bh\sigma_a, \quad M = bh\sigma_a y_m, \quad \sigma_s = \sigma_s$$

и решая уравнение относительно y_m , получаем:

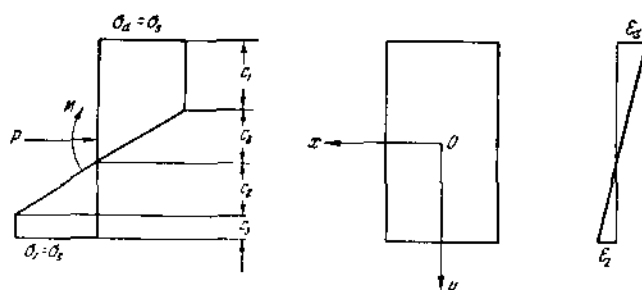
$$|y_m|_{\sigma_z = \sigma_s} = \left(\frac{2\sigma_a}{\sigma_s} + 1 \right) \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_a} - 1 \right) \frac{h}{6}. \quad (18)$$

Таким образом пределы применимости уравнения (15) будут:

$$\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_a} - 1 \right) \frac{h}{6} \leq y_m \leq \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_a} - 1 \right) \left(\frac{2\sigma_a}{\sigma_s} + 1 \right) \frac{h}{6}. \quad (19)$$

4. Упругопластическая стадия, второй вариант

Пластичностью пропитана не только часть сжатой, но и часть растянутой зоны сечения. Эпюра напряжений будет иметь вид, представленный на фиг. 4.



Фиг. 4.

Аналогично предыдущему находим выражение для максимального прогиба y_m (точнее, стрела прогиба плюс начальный эксцентриситет) в функции гибкости λ_x , начального эксцентриситета нагрузки e и основного напряжения $\sigma_a = P / (bh)$. Из условий синусоидальной формы изгиба имеем:

$$1 / \rho_m = y'' = -\pi^2 (y_m - e) / l^2. \quad (20)$$

Из эпюры напряжений фиг. 4 имеем:

$$1 / \rho = y'' = -\sigma_s / (Ec_2). \quad (21)$$

Для значения c_2 найдем из тех же условий, что и в предыдущем случае:

$$c_2 = h \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_s^2} \right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_s}}. \quad (22)$$

Подставляя в (21) значение c_2 и M , получим для середины стержня:

$$\frac{1}{\rho_m} = - \frac{\sigma_s}{Eh \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_s^2} \right) - \frac{3\sigma_a y_m}{h\sigma_s}}}. \quad (23)$$

Сопоставляя (23) с (20), получим уравнение для определения y_m :

$$\bar{y}^3 + \left(\frac{a}{4} - \frac{1}{4a} - 2m \right) \bar{y}^2 + \left(\frac{m}{2a} - \frac{am}{2} + m^2 \right) \bar{y} + \left(\frac{\lambda_x^4 \sigma_s^2}{4l^2 800 a E^2} + \frac{am^2}{4} - \frac{m^2}{4a} \right) = 0, \quad (24)$$

где

$$\bar{y} = y_m / h, \quad m = e / h, \quad \lambda_x = l \sqrt{12} / h, \quad a = \sigma_a / \sigma_s.$$

Область применения уравнения (24) ограничена условиями:

$$\sigma_x = \sigma_s \quad \text{и} \quad c_2 \geq 0.$$

Первое условие определяется равенством (18).

Второе предельное значение y_m найдем, приравнявая (22) нулю при одновременной замене:

$$M = P y_m = bh \sigma_a y_m.$$

Таким образом предельные значения для y_m , определяемые из уравнения (24), будут:

$$(\sigma_s / \sigma_a - 1)(2\sigma_a / \sigma_s + 1) h / 6 \leq y_m \leq (\sigma_s / \sigma_a - \sigma_a / \sigma_s) h / 4. \quad (25)$$

5. Определение приведенного модуля

Для кривизны в середине стержня имеем, исходя из синусоидальной формы изогнутой оси, выражение (10); с другой стороны, эта же кривизна может быть выражена через момент внешних сил:

$$1 / \rho_m = - P y_m / (T J_x). \quad (26)$$

Приравняв правые части и решая полученное уравнение относительно T , получим:

$$T = \frac{P y_m}{J_x \pi^2} \frac{l^2}{y_m - e}, \quad (27)$$

или, подставляя

$$P = bh \sigma_a, \quad y_m / h = \bar{y}, \quad e / h = m, \quad l \sqrt{12} / h = \lambda_x,$$

имеем окончательно:

$$T = \frac{\sigma_a \bar{y} \lambda_x^2}{\pi^2 (\bar{y} - m)}. \quad (28)$$

6. Определение критической гибкости

Принимая полученное значение T за модуль упругости для всего стержня и подставив его в формулу (5), получим

$$\sigma_k = \pi^2 T / \lambda_y^2. \quad (29)$$

Здесь значение σ_k уже не является определяемой величиной. Очевидно, значение σ_k должно быть принято равным тому значению σ_a , по которому определялись сначала y_m , а затем и T . Поэтому формула (29) используется теперь для решения обратной задачи, а именно, для определения критической гибкости по заданному напряжению, т. е.

$$(\lambda_y)_{kp} = \sqrt{\pi^2 T / \sigma_a}. \quad (30)$$

7. Практическое применение

Изложенным способом подсчитаны критические гибкости λ_y и построена соответствующая кривая для стали с модулем упругости $E = 2.1 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ и пределом текучести $\sigma_s = 3300 \text{ кг/см}^2$ при постоянных параметрах $\lambda_x = 75$ и $m = 0.5$.

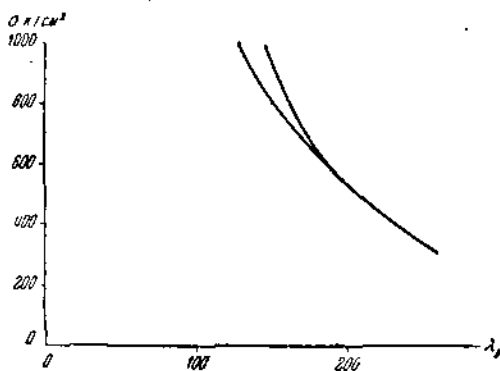
Кривая $(\lambda_y)_{kp} = f(\sigma_a)$ приведена на фиг. 5 (нижняя кривая), где для сопоставления показана также кривая критических гибкостей λ_y , построенная без учета влияния изгибающего момента (верхняя кривая).

Пока $\sigma_a = P/(bh) \leq 600 \text{ кг/см}^2$, весь стержень находится в упругодеформированном состоянии, и поэтому обе кривые до $\sigma_a = 600 \text{ кг/см}^2$ сливаются в одну.

Кривые рассчитаны и построены только до $\sigma_a = 1000 \text{ кг/см}^2$, так как примерно при этом значении основного напряжения σ_a стержень теряет устойчивость в плоскости действия изгибающего момента.

Из графика следует, что в интервале $125 < \lambda_y < 175$ значения критических напряжений сильно расходятся. Так например, если $\lambda_y = 150$, то $\sigma_k = 800 \text{ кг/см}^2$ по нижней кривой и $\sigma_k = 920 \text{ кг/см}^2$ по верхней кривой, т. е. при неучете влияния начального эксцентриситета мы имеем преувеличение критического напряжения на 15%.

В настоящее время в лаборатории испытания материалов Московского института химического машиностроения проводится на специально запроектированной и построенной установке экспериментальная проверка изложенного в статье способа.



Фиг. 5.

Поступила в редакцию 7. V 1940

STABILITY OF AN ECCENTRICALLY COMPRESSED BAR IN A DIRECTION PERPENDICULAR TO THE FORCE PLANE

M. V. RUBININ

(Summary)

The author gives the procedure for the solution of the above-mentioned problem, based on consideration of elastico-plastic deformations of a bar of rectangular cross-section.

Graphs, applicable in practice, of the relationship between critical flexibility and the so-called basic stress ($\sigma_a = P/F$) are obtained as a result.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинин М. В. О проверке внецентренножатых стоек. „Бюллетень № 5 треста Заводострой“. М. 1931.
 2. Запrieв К. С. Расчетные формулы прочности в особых случаях. М. ОНТИ. 1935.
 3. Rös. Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückten Stäbe auf Knickung. Wien. 1929.
 4. Jezek. Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Wien. 1937.
 5. Karman. Untersuchungen über Knickfestigkeit. 1910.
 6. Chwalla. „Stahlbau“. 1934. N. 21—23.
-

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

З. Б. КАНТОРОВИЧ

(Москва)

Как известно, определение напряжений в конической оболочке постоянной толщины, нагруженной симметричной системой сил, распределенных по ее поверхности, производится весьма просто для всех практически важных случаев: газовое давление, центробежная сила, собственный вес, гидростатическое давление и т. д.

К значительно большим трудностям приводит задача определения усилий и напряжений в случае конической оболочки, нагруженной системой сил в равновесии, распределенной по ее свободному краю (краевая задача).

Точное решение задачи, произведенное на основе работ Рейснера и Мейснера, впервые было дано в 1917 г. Дюбуа в его диссертации „Über die Festigkeit der Kegelschalen“.

Однако решение это, формально весьма простое, практически почти неприменимо вследствие большой вычислительной работы, которой оно требует. Ниже приводится приближенное решение задачи, относительно простое и весьма быстро ведущее к цели.

В дальнейшем прием обозначения (фиг. 1).

α — половина угла раствора конуса;

R_2 — второй радиус кривизны конуса;

r — радиус кривизны параллельного круга конуса;

x — расстояние точки от вершины конуса вдоль образующей;

s — длина образующей конуса;

δ — толщина стенки оболочки;

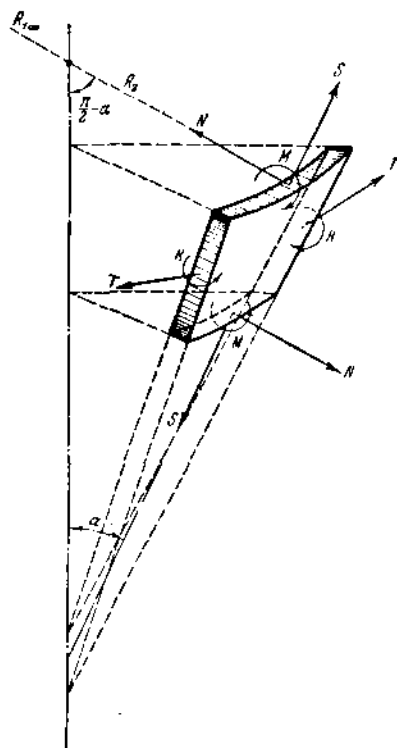
$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;

E — модуль упругости;

ν — модуль Пуассона;

θ — угол поворота касательной к меридиану вследствие деформации стенок;

N — усилие среза на единицу длины параллельного круга. N положительно, если оно направлено к центру кривизны и действует на элемент, внешняя нормаль которого направлена в сторону возрастающих x , или же



Фиг. 1.

направлено в сторону, обратную направлению к центру кривизны, и действует на площадку, внешняя нормаль которого направлена в сторону убывающих x (к вершине конуса);

S — сила растяжения (+) или сжатия (—), действующая на единицу длины параллельного круга в направлении образующей конуса (меридиональная сила);

T — сила растяжения (+) или сжатия (—), действующая на единицу длины образующей конуса (кольцевая сила);

M — момент, действующий на единицу длины параллельного круга в плоскости, проходящей через образующую и ось конуса (меридиональный момент);

K — момент, действующий на единицу длины образующей конуса и лежащий в плоскости параллельного круга (кольцевой момент).

M и K будем считать положительными, если они стремятся изогнуть конус наружу (уменьшить кривизну).

$$\sigma_1 = \frac{S}{\delta}, \quad \sigma_2 = \frac{T}{\delta}, \quad \sigma_M = \pm \frac{6M}{\delta^2}, \quad \sigma_K = \pm \frac{6K}{\delta^2}, \quad \tau = \frac{N}{\delta}.$$

Если мы положим $Nx = W$, то основные уравнения краевой задачи конической оболочки постоянной толщины принимают вид:

$$x\ddot{W} + \dot{W} - \frac{W}{x} = E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha \vartheta, \quad x\ddot{\vartheta} + \dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{x} = -\frac{W}{D}, \quad (1)$$

где точками обозначены производные относительно x . Далее в точке на расстоянии x от вершины имеем:

$$N = \frac{W}{x}, \quad S = -N \operatorname{tg} \alpha, \quad T = -\dot{W} \operatorname{tg} \alpha, \\ M = -D \left(\ddot{\vartheta} + \nu \frac{\vartheta}{x} \right), \quad K = -D \left(\nu \ddot{\vartheta} + \frac{1}{x} \dot{\vartheta} \right). \quad (2)$$

1. О точном решении краевой задачи для конической оболочки постоянной толщины

§ 1. Введем оператор Мейснера

$$L(W) = x\ddot{W} + \dot{W} - \frac{1}{x}W. \quad (3)$$

Уравнения (1) примут вид:

$$L(W) = E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha \vartheta, \quad L(\vartheta) = -\frac{W}{D}. \quad (4)$$

Приложим теперь оператор L к $L(W)$ и $L(\vartheta)$ в уравнениях (4). Получим:

$$LL(W) = E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha L(\vartheta), \quad LL(\vartheta) = -\frac{1}{D}L(W). \quad (5)$$

Подставляя теперь вместо $L(\vartheta)$ и $L(W)$ их значения из (4), получим систему двух однородных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$LL(W) = -\frac{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha}{D}W, \quad LL(\vartheta) = -\frac{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha}{D}\vartheta. \quad (6)$$

Подставляя вместо D его значение и полагая

$$\mu^2 = 12(1 - \nu^2) \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\delta^2},$$

получим симметричную систему из двух однородных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$LL(W) + \mu^2 W = 0, \quad LL(\vartheta) + \mu^2 \vartheta = 0. \quad (7)$$

Достаточно рассмотреть одно из этих уравнений, так как решение второго будет отличаться лишь значениями постоянных, как это легко усмотреть из уравнений (1).

Рассмотрим поэтому первое из уравнений (7). Как известно, оно распадается на два сопряженных уравнения второго порядка:

$$L(W) \mp i\mu W = 0, \quad \text{или} \quad x\dot{W} + \dot{W} - \frac{1}{x} W \mp i\mu W = 0. \quad (8)$$

Произведя замену переменных по формуле

$$z = (1 \mp i)\sqrt{2\mu x} = (1 \mp i)\sqrt{2y}, \quad (9)$$

получим в обоих случаях дифференциальное уравнение Бесселя второго порядка от комплексного аргумента:¹

$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + z \frac{dW}{dz} + (z^2 - 2^2) W = 0. \quad (10)$$

§ 2. Как известно из теории функций Бесселя, уравнение (10) для переменных z и $\bar{z}$ имеет сопряженные частные интегралы:

$$\begin{aligned} W_1 = J_2(z) &= X_1 + iY_1, & W_3 = J_2(\bar{z}) &= X_1 - iY_1, \\ W_2 = Y_2(z) &= X_2 + iY_2, & W_4 = Y_2(\bar{z}) &= X_2 - iY_2, \end{aligned}$$

где X_1 , X_2 , Y_1 и Y_2 — действительные и мнимые части разложений, определяющих функцию Бесселя второго порядка первого рода $J_2(z)$ и функцию Бесселя второго порядка второго рода $Y_2(z)$ (функцию Вебера):

$$\begin{aligned} J_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2}, \\ Y_2(z) &= \frac{2}{\pi} J_2(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)!}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2+2n} \left[\sum_{m=1}^{2+n} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где $C = 0.577215664 \dots$ — постоянная Маскерони.

Так как, очевидно, X и Y , каждый в отдельности, также удовлетворяют уравнениям (8), то они являются вещественными интегралами первого из уравнений (7). Общий интеграл последнего будет поэтому:

$$W = aX_1 + bY_1 + cX_2 + dY_2, \quad (12)$$

где a , b , c и d — постоянные, зависящие от начальных условий.

§ 3. Перейдем теперь к определению Φ . В силу первого уравнения (4) имеем:

$$\Phi = \frac{1}{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha} L(W) = \frac{1}{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha} [aL(X_1) + bL(Y_1) + cL(X_2) + dL(Y_2)]. \quad (13)$$

Подставляя W_1 и W_2 в (8), имеем:

$$L(X_1) + iL(Y_1) = i\mu X_1 - \mu Y_1, \quad L(X_2) + iL(Y_2) = i\mu X_2 - \mu Y_2;$$

откуда, разделяя действительные и мнимые части, имеем:

$$L(X_1) = -\mu Y_1, \quad L(X_2) = -\mu Y_2; \quad L(Y_1) = \mu X_1, \quad L(Y_2) = \mu X_2.$$

Следовательно, подставляя в (12), окончательно имеем:

$$\Phi = \frac{\mu}{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha} (bX_1 - aY_1 + dX_2 - cY_2). \quad (14)$$

¹ Подстановка (9) и вывод уравнения (10) заимствованы нами из работы Д. Э. Экстрема "Тонкостенные симметричные купола". Приведенное им решение значительно проще и легче, чем оригинальное решение Дюбуа.

Задача, таким образом, принципиально решена. Зная W и ϑ , уравнения (12) и (14), можно по формулам (2) определить силы и моменты в любой точке оболочки, а затем и напряжения.

В настоящей работе мы остановимся на случае конической оболочки, замкнутой в вершине. Легко показать, что в этом случае $c=d=0$.

Интеграл уравнения (10) можно написать в виде:

$$W = c_1 J_2(z) + c_2 Y_2(z),$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Известно, что

$$J_2(0) = 0, \quad Y_2(0) = \infty,$$

следовательно, в вершине конуса будет:

$$W_{z=0} = (xN)_{x=0} = \infty,$$

что быть не может, так как $N_{x=0} = 0$. Следовательно, $c_2 = 0$

и

$$W = c J_2(z),$$

т. е. остаются лишь члены, содержащие X_1 и Y_1 . Следовательно, для замкнутой конической оболочки мы имеем:

$$W = aX + bY, \quad \vartheta = \frac{\mu}{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha} (bX - aY), \quad (15)$$

где индексы при X и Y опущены, как излишние.

§ 4. Подставляя в (11) значение z и разделяя действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{aligned} X &= \frac{y^2}{1!3!} - \frac{y^4}{3!5!} + \frac{y^6}{5!7!} - \frac{y^8}{7!9!} + \dots - \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n+1)!} y^{2n} + \dots, \\ Y &= -\frac{y}{0!2!} + \frac{y^3}{2!4!} - \frac{y^5}{4!6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n-2)!(2n)!} y^{2n-1} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Ясно, что эти ряды сходятся для всех значений y . Однако сходимость быстрая для малых значений

$$y = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{x}{\delta} \operatorname{ctg} \alpha$$

весьма медленна для больших значений y , что обычно имеет место на краю оболочки и вблизи него. Ограничиваясь обычными в конструкциях значениями $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, $\nu = 0.3$ и $x:\delta \geq 50$, получим на краю:

$$3.3 \times 50 \times (1 \div 1.73) = 165 \div 285.$$

На практике часто $y = 500 \div 1000$ и даже больше.

Исследование рядов (16) показывает, что уже при относительно небольших значениях y , чтобы получить достаточное приближение, необходимо суммировать весьма значительное число членов ряда. Так при $y \leq 87$, если допустить погрешность в оценке суммы ряда, равную 100, минимальное число членов ряда X будет равно десяти, а при $y \leq 279$ оно возрастает до двадцати.

2. Приближенное решение для замкнутой оболочки

§ 1. В результате неудачных попыток упростить основную систему уравнений, подобно тому, как это сделал, например, Геккелер в своем решении для шара, автор пришел к заключению о целесообразности внести упрощения в окончательное точное решение.

Тут на помощь приходят следующие обстоятельства. Во-первых, незначительная, относительно, степень точности, которая требуется от обычных инженерных расчетов (приближение в $5-10\%$ можно считать вполне достаточным). Во-вторых, тот факт, что нас интересуют в основном значения

сил и деформаций на краю оболочки и в весьма узкой зоне у края, т. е. в точках, для которых $y = \mu x$ весьма велико, на практике, по крайней мере, порядка 200 и выше.

Последнее обстоятельство позволяет нам заменить $J_2(z)$ его асимптотическим приближением с небольшим числом членов, а именно:

$$J_2(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{5\pi}{4}\right) - \sin\left(z - \frac{5\pi}{4}\right) \frac{15}{8z} \right]. \quad (17)$$

Так как $z = (1 - i)\sqrt{2y}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{y}} e^{\frac{\pi i}{8}} = \frac{0.70711}{\sqrt[4]{y}} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = \frac{0.70711}{\sqrt[4]{y}} (0.92388 + 0.38268i),$$

$$\frac{1}{z} = \frac{0.35355}{\sqrt[4]{y}} (1 + i), \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.79789,$$

$$\cos z = \cos \sqrt{2y} \cos i\sqrt{2y} + \sin \sqrt{2y} \sin i\sqrt{2y},$$

$$\sin z = \sin \sqrt{2y} \cos i\sqrt{2y} - \cos \sqrt{2y} \sin i\sqrt{2y}.$$

В силу известных соотношений $\cos iy = \operatorname{ch} y$, $\sin iy = i \operatorname{sh} y$ получаем:

$$\cos z = \cos \sqrt{2y} \operatorname{ch} \sqrt{2y} + i \sin \sqrt{2y} \operatorname{sh} \sqrt{2y},$$

$$\sin z = \sin \sqrt{2y} \operatorname{ch} \sqrt{2y} - i \cos \sqrt{2y} \operatorname{sh} \sqrt{2y}.$$

Откуда

$$\cos z + \sin z = \operatorname{ch} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} + \sin \sqrt{2y}) - i \operatorname{sh} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} - \sin \sqrt{2y}),$$

$$\cos z - \sin z = \operatorname{ch} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} - \sin \sqrt{2y}) + i \operatorname{sh} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} + \sin \sqrt{2y}).$$

Подставляя полученные выражения и величины в (17), получим:

$$J_2(z) = -\frac{0.39894}{\sqrt[4]{y}} (0.92388 + 0.38268i) \times \\ \times \left\{ [\operatorname{ch} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} + \sin \sqrt{2y}) + i \operatorname{sh} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} - \sin \sqrt{2y})] + \right. \\ \left. + [\operatorname{ch} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} - \sin \sqrt{2y}) + i \operatorname{sh} \sqrt{2y} (\cos \sqrt{2y} + \sin \sqrt{2y})] \frac{0.66291(1+i)}{\sqrt[4]{y}} \right\}.$$

Для больших значений аргумента без большой погрешности можно принять:

$$\operatorname{ch} \sqrt{2y} = \operatorname{sh} \sqrt{2y} = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2y}};$$

тогда получим:

$$J_2(z) = -\frac{0.19947}{\sqrt[4]{y}} e^{\sqrt{2y}} (0.92388 + 0.38268i) \left\{ [\cos \sqrt{2y} (1 - i) + \right. \\ \left. + \sin \sqrt{2y} (1 + i)] + [\cos \sqrt{2y} (1 + i) - \sin \sqrt{2y} (1 - i)] \frac{0.66291}{\sqrt[4]{y}} (1 + i) \right\}.$$

Произведя вычисления и сравнивая действительные и мнимые части последнего результата с выражениями (16), получим¹:

$$X = -\frac{0.19947}{\sqrt[4]{y}} e^{\sqrt{2y}} (A \cos \sqrt{2y} + B \sin \sqrt{2y}), \\ Y = -\frac{0.19947}{\sqrt[4]{y}} e^{\sqrt{2y}} (-B \cos \sqrt{2y} + A \sin \sqrt{2y}), \quad (18)$$

¹ Таблица значений A и B приведена в конце статьи.

где

$$A = 1.30656 - \frac{0.50726}{\sqrt{y}}, \quad B = 0.54120 - \frac{1.22490}{\sqrt{y}}. \quad (19)$$

§ 2. В целях иллюстрации степени точности выражений (18) для рядов (16), были произведены вычисления для $y=100$, т. е. для сравнительно небольшого значения y . Как известно, с возрастанием y точность приближенного значения возрастает.

Все значащие цифры были вычислены точно до сотен включительно (остальные знаки значения практически не имеют).

Приводим отношения значений, полученных из разложений (16) и по формулам (18) соответственно для X и для Y :

$$36557:36302 = 1.007; \quad 110163:109834 = 1.003.$$

Совпадение получилось вполне удовлетворительное.

Проверка, произведенная для $y=10$, т. е. для точки, весьма близкой от вершины конуса, дала для X приближение порядка 8% , а для Y — порядка 2% .

§ 3. Для производных от X и Y по x , необходимых для определения моментов и кольцевых сил, как это видно из уравнения (2), имеем:

$$\dot{X} = \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dy} \frac{dy}{dx} = \mu X', \quad \dot{Y} = \mu Y',$$

где точкой обозначена производная по x , а штрихом — по y .

Из выражений (18) получаем:

$$\begin{aligned} X' &= -\frac{0.19947}{\sqrt[4]{y}} e^{\sqrt{2y}} (K_1 \cos \sqrt{2y} + K_2 \sin \sqrt{2y}), \\ Y' &= -\frac{0.19947}{\sqrt[4]{y}} e^{\sqrt{2y}} (-K_2 \cos \sqrt{2y} + K_1 \sin \sqrt{2y}), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= A \times C + A' + B \times D, \quad K_2 = B \times C + B' - A \times D, \\ A' &= \frac{0.25363}{y\sqrt{y}}, \quad B' = \frac{0.61245}{y\sqrt{y}}, \quad C = \frac{0.70711}{\sqrt{y}} - \frac{0.25}{y}, \quad D = \frac{0.70711}{\sqrt{y}}, \end{aligned}$$

а A и B , как раньше (таблица значений A , B , C и D приведена в конце статьи).

§ 4. Для сравнения точности получаемых результатов были вычислены значения производных по формулам (19) и с помощью рядов (16) для $y=100$.

Приводим отношения полученных значений соответственно для X' и Y' :

$$5117:5238 = 0.977; \quad 10106:10085 = 1.002.$$

Или другим путем, автор нашел несколько лучшее приближение для X' и Y' :

$$X' = \frac{0.70711}{\sqrt{y}} (X^{(1)} + Y^{(1)}) - \frac{X}{y}; \quad Y' = \frac{0.70711}{\sqrt{y}} (Y^{(1)} - X^{(1)}) - \frac{Y}{x},$$

где $X^{(1)}$ и $Y^{(1)}$ — действительные части и коэффициенты при мнимых частях асимптотического приближения функции Бесселя первого рода первого порядка $J_1(z)$. Однако вычисление по последним формулам относительно громоздко; для практических же целей формулы (19) вполне достаточны.

3. Приложение к расчету сосудов

§ 1. Имеем:

$$\begin{aligned} W &= aX + bY, \quad \dot{W} = \mu (aX' + bY'); \\ \vartheta &= \frac{\mu}{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha} (bX - aY), \quad \dot{\vartheta} = \frac{\mu^2}{E\delta \operatorname{ctg}^2 \alpha} (bX' - aY') \end{aligned} \quad (21)$$

и, подставляя в (2), получим:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{x} (aX + bY), & S &= -N \operatorname{tg} \alpha, & T &= -\mu (aX' + bY') \operatorname{tg} \alpha, \\ M &= -\frac{1}{\mu} \left[\mu (bX' - aY') + \frac{\nu}{x} (bX - aY) \right], \\ K &= -\frac{1}{\mu} \left[\mu \nu (bX' - aY') + \frac{1}{x} (bX - aY) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Мы можем также подсчитать перемещение Δ края оболочки в направлении радиуса параллельного круга. Если u и w составляющие деформации по меридиану и по нормали к поверхности, то

$$\Delta = -u \sin \alpha + w \cos \alpha. \quad (23)$$

Отметим, что u положительно, если оно направлено в сторону возрастающих x , а w — если оно направлено вне оболочки. Последнее относится и к Δ .

Как известно,

$$\begin{aligned} u &= A \cos \alpha + \frac{1}{\delta E} \int (S - \nu T) dx, \\ w &= A \sin \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\delta E} \int (S - \nu T) dx - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{\delta E} (T - \nu S). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (23), получим:

$$\Delta = \frac{x \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\delta E} \left[\mu (aX' + bY') - \nu N \right]. \quad (24)$$

§ 2. Рассмотрим коническую оболочку, к свободному краю которой приложены моменты M_0 на единицу длины параллельного круга. Пользуясь формулами (22), для $x=s$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left[a(M_0) X_s + b(M_0) Y_s \right] &= 0, \\ -\frac{1}{\mu} \left\{ \mu [b(M_0) X'_s - a(M_0) Y'_s] + \frac{\nu}{s} [b(M_0) X_s - a(M_0) Y_s] \right\} &= M_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $a(M_0)$ и $b(M_0)$ — постоянные, относящиеся к случаю загрузки края моментами M_0 .

Если по краю распределены усилия среза N_0 , мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left[a(N_0) X_s + b(N_0) Y_s \right] &= N_0, \\ \mu [b(N_0) X'_s - a(N_0) Y'_s] + \frac{\nu}{s} [b(N_0) X_s - a(N_0) Y_s] &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Если на краю действуют поперечные силы P (т. е. силы, направленные по радиусу параллельного круга), то в уравнении (26)

$$N_0 = P \cos \alpha.$$

Системы уравнений (25) или (26) позволяют вычислить постоянные a и b в функции от M_0 или N_0 .

§ 3. Пример. Дано:

$$\begin{aligned} s &= 100 \text{ см}, & \nu &= 0.3, \\ \alpha &= 45^\circ, & E &= 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2, \\ y_s &= 330, & \mu &= 3.3 \frac{1}{\text{см}}, \\ \delta &= 1 \text{ см}, & \sqrt{2y} &= 25.69, & \sqrt[4]{y} &= 4.262. \end{aligned}$$

По краю распределены моменты M_0 (кг $\times$ см/см).

Формулы (19) и дальнейшие дают:

$$A=1.27864, \quad B=0.47377, \quad A'=0.00004, \quad B'=0.00010;$$

$$e^{25.69}=1435192 \times 10^5, \quad \cos \sqrt{2y}=0.99605, \quad \sin \sqrt{2y}=0.08868;$$

$$D=\frac{0.70711}{\sqrt{330}}=0.03892, \quad C=\frac{0.70711}{\sqrt{330}}-\frac{0.25}{330}=0.03816;$$

$$K_1=AC+A'+BD=0.06727; \quad K_2=BC+B'-AD=-0.03158.$$

Подставляя все эти величины в (18) и (19), получим:

$$X_s=-8836 \times 10^5, \quad X'_s=-4312 \times 10^5,$$

$$Y_s=2444 \times 10^5, \quad Y'_s=-2112 \times 10^5.$$

Подставляя эти значения в (25), получим:

$$8836 a(M_0) - 2444 b(M_0) = 0,$$

$$6896 a(M_0) - 14495 b(M_0) = -33 \times 10^{-6} M_0.$$

Откуда найдем:

$$a(M_0)=725 \times 10^{-12} M_0, \quad b(M_0)=2621 \times 10^{-12} M_0.$$

Для тех же данных, в случае когда к краю приложены поперечные силы, система уравнений (26) приводится к виду:

$$8836a(P) - 2444b(P) = -10^{-4} P \cos \alpha,$$

$$6896a(P) - 14495b(P) = 0.$$

Откуда найдем:

$$a(P) = -130 \times 10^{-10} P \cos \alpha, \quad b(P) = -62 \times 10^{-10} P \cos \alpha.$$

Положим $M_0 = 10$ кг см / см. Тогда

$$a(M_0) = 725 \times 10^{-11}, \quad b(M_0) = 2621 \times 10^{-11}.$$

Кольцевое усилие на краю будет согласно (22):

$$T_s = 3.3(725 \times 4312 + 2621 \times 2112) 10^{-6} = 28.7 \text{ кг / см}.$$

Для $y=100$, т. е. на расстоянии от вершины $x=y/\mu$, или на расстоянии 70 см от края, будет:

$$X_{30} = -36557, \quad X'_{30} = 5117, \quad Y_{30} = -110163, \quad Y'_{30} = -10106.$$

Подставляя в формулу (22) для T , найдем:

$$T_{30} = -3.3(725 \times 5117 - 2621 \times 10106) 10^{-11} = 0.0002 \text{ кг / см} \approx 0,$$

как это и можно было предвидеть.

Меридиональный момент в этом же сечении также равен нулю:

$$M_{30} = -0.3[3.3(2621 \times 5117 + 725 \times 10106) -$$

$$-0.01 \times (2621 \times 36557 - 725 \times 110163)] 10^{-11} = 0.00028 \frac{\text{кг см}}{\text{см}} \approx 0.$$

§ 4. Рассмотрим сосуд под газовым давлением, состоящий из цилиндрического корпуса с коническими днищами. На края сечения стыка сосуда действуют распорные силы P , внутренние краевые поперечные силы P_0 и моменты M_0 . Для определения P_0 и M_0 мы имеем систему из двух уравнений:

$$\Delta_{\Delta\Delta}^{(1)} + \Delta_P^{(1)} + \Delta_{P_0}^{(1)} + \Delta_{M_0}^{(1)} = \Delta_{\Delta\Delta}^{(2)} + \Delta_P^{(2)} + \Delta_{P_0}^{(2)} + \Delta_{M_0}^{(2)},$$

$$\vartheta_{\Delta\Delta}^{(1)} + \vartheta_P^{(1)} + \vartheta_{P_0}^{(1)} + \vartheta_{M_0}^{(1)} = \vartheta_{\Delta\Delta}^{(2)} + \vartheta_P^{(2)} + \vartheta_{P_0}^{(2)} + \vartheta_{M_0}^{(2)}, \quad (27)$$

где Δ и ϑ — радиальные перемещения и углы поворота краевых сечений; нижние индексы показывают силы, которыми эти деформации вызваны, и верхние — рассматриваемую оболочку. Индекс 1 мы относим к конусу, 2 — к цилиндру. Индекс „вн“ относится к внешним силам, распределенным по поверхности сосуда (в нашем случае — газовое давление).

Пусть будет радиус цилиндра $r = 71$ см и угол при вершине конуса $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$. Положим $\delta = 1$ см, $\delta_2 = 1.2$ см — толщины стенок конуса и цилиндра соответственно. Имеем конус предыдущего примера. Примем $E = 2 \times 10^6$ кг/см² и $p = 10$ кг/см².

Деформация края цилиндра.

$$\begin{aligned}\Delta_{вн}^{(2)} &= -\frac{2-\nu}{2\delta_2 E} p r^2 = -17700 \times 10^{-6}, & \vartheta_{вн}^{(2)} &= 0, \\ \Delta_{P_0}^{(2)} &= -\frac{2k_1 r^2}{\delta_2 E} P_0 = -583 \times 10^{-6} P_0, & \vartheta_{P_0}^{(2)} &= \frac{2k_1^2 r^2}{\delta_2^2 E} P_0 = 82 \times 10^{-6} P_0, \\ \Delta_P^{(2)} &= -\frac{2k_1 r^2}{\delta_2 E} P = 207000 \times 10^{-6}, & \vartheta_P^{(2)} &= \frac{2k_1^2 r^2}{\delta_2^2 E} P = -29100 \times 10^{-6}, \\ \Delta_{M_0}^{(2)} &= -\frac{2k_1^2 r^2}{\delta_2^2 E} M_0 = -82 \times 10^{-6} M_0, & \vartheta_{M_0}^{(2)} &= \frac{4k_1^3 r^2}{\delta_2^3 E} M_0 = 23 \times 10^{-6} M_0,\end{aligned}$$

где

$$P = \frac{1}{2} p s \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = 355 \text{ кг/см.}$$

и направлено к оси сосуда, т. е. положительно для конуса и отрицательно для цилиндра

$$k_1 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{r\delta_2}} = \frac{1.29}{\sqrt{85.2}} = 0.14.$$

Деформации края конуса (для краевых сил) определяются формулой (24) и третьей (21), в которых нужно подставить соответствующие значения постоянных a и b . Деформации от внутреннего давления известны из моментной теории оболочек, которая дает решения для всех практически важных случаев.

Следует при этом иметь в виду, что N в формуле (24) в случае сил P , P_0 и моментов M_0 соответственно будет равным:

$$P \cos \alpha, \quad P_0 \cos \alpha, \quad 0$$

Таким образом для деформаций края конуса получим:

$$\begin{aligned}\Delta_{вн}^{(1)} &= -\frac{(2-\nu) \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{2\delta_1 E} p s^2 = -30175 \times 10^{-6}, \\ \Delta_{P_0}^{(1)} &= \frac{s \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{\delta_1 E} \{ \mu [a(P_0) X_s' + b(P_0) Y_s'] - \nu P_0 \cos \alpha \} = 566 \times 10^{-6} P_0, \\ \Delta_{M_0}^{(1)} &= -\frac{s \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{\delta_1 E} \mu [a(M_0) X_s' + b(M_0) Y_s'] \operatorname{tg} \alpha = -101 \times 10^{-6} M_0, \\ \vartheta_{вн}^{(1)} &= -\frac{3ps \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\delta_1 E} = -750 \times 10^{-6}, \\ \vartheta_{P_0}^{(1)} &= \frac{\mu}{\delta_1 E \operatorname{ctg}^2 \alpha} [b(P_0) X_s - a(P_0) Y_s] = 101 \times 10^{-6} P_0, \\ \vartheta_{M_0}^{(1)} &= \frac{\mu}{E \delta_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha} [b(M_0) X_s - a(M_0) Y_s] = -41 \times 10^{-6} M_0.\end{aligned}$$

Величины $\Delta_P^{(1)}$ и $\vartheta_P^{(1)}$ получаются непосредственно из Δ_{P_0} и ϑ_{P_0} подстановкой вместо P_0 значения $P = +355$ кг/см,

$$\Delta_P^{(1)} = 201000 \times 10^{-6}, \quad \vartheta_P^{(1)} = 35850 \times 10^{-6}.$$

Подставляя полученные значения деформаций в (28), получим:

$$1149 P_0 - 19 M_0 - 18425 = 0,$$

$$19 P_0 - 64 M_0 - 64750 = 0.$$

Откуда

$$P_0 = 33 \text{ кг/см}, M_0 = 1020 \text{ кг} \times \text{см/см}.$$

По последнему результату без дальнейшего исследования видно, что напряжения в сосуде будут чрезмерные и неизбежно вызовут разрыв сосуда.

На практике между крышкой и цилиндром всегда существует плавный переход, вследствие которого фактически мы имеем сосуд, состоящий из цилиндра, соединенного с днищем частью кругового тора. Подробные исследования этого вопроса выходят за рамки настоящей работы. Мы ограничимся поэтому определением краевых сил в предположении, что распорные силы P отсутствуют. Из уравнения (28) выпадут тогда члены Δ_p и ϑ_p , и система уравнений примет вид:

$$1149 P_0 - 19 M_0 - 12475 = 0,$$

$$19 P_0 - 64 M_0 - 750 = 0.$$

Откуда

$$P_0 = 11 \text{ кг/см}, M_0 = -8.5 \text{ кг} \times \text{см/см}.$$

Как видно, влияние распорных сил очень велико.

Рассмотрим теперь случай, когда толщина стенок цилиндра δ_2 очень велика по сравнению с δ_1 . Пренебрегая деформацией цилиндра, мы получим случай конической оболочки, заделанной по краям, и правая часть уравнения (28) будет равна нулю. Получим:

$$566 P_0 - 101 M_0 + 170825 = 0,$$

$$101 P_0 - 41 M_0 + 35100 = 0.$$

Откуда

$$P_0 \approx -268 \text{ кг/см}, M_0 \approx 190 \text{ кг} \times \text{см/см}.$$

Кроме того, на край оболочки действует распорная сила $P = 355 \text{ кг/см}$, что вместе с P_0 составляет:

$$P_1 = -268 + 355 = 87 \text{ кг/см}.$$

Определим напряжения в краевом сечении. Имеем:

$$a(P_1) = -130 \times 10^{-10} \times 87 \times 0.71 = -8030 \times 10^{-10},$$

$$b(P_1) = -62 \times 10^{-10} \times 87 \times 0.71 = -3830 \times 10^{-10},$$

$$a(M_0) = 725 \times 10^{-12} \times 190 = 1377 \times 10^{10},$$

$$b(M_0) = 2621 \times 10^{-12} \times 190 = 4980 \times 10^{10}.$$

От действия силы P_1 на краю возникают усилия:

$$(N_0)_{P_1} = 87 \times \cos 45^\circ = 62 \text{ кг/см},$$

$$(S_0)_{P_1} = -62 \times \tan 45^\circ = -62 \text{ кг/см},$$

$$(T_0)_{P_1} = -\mu [a(P_1) X_s' + b(P_1) Y_s'] \tan 45^\circ \approx -1400 \text{ кг/см},$$

$$(K_0)_{P_1} = -\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{s} [b(P_1) X_s - a(P_1) Y_s] + \mu \nu [b(P_1) X_s' - a(P_1) Y_s'] \right\} \approx \\ \approx -15 \text{ кг} \times \text{см/см}.$$

Аналогично для нагрузки края моментом M_0 , подставляя в последние формулы $a(M_0)$ и $b(M_0)$ вместо $a(P_1)$ и $b(P_1)$, найдем:

$$(N_0)_{M_0} = 0, \quad (S_0)_{M_0} = 0, \quad (K_0)_{M_0} = 70.3 \text{ кг} \times \text{см/см},$$

$$(T_0)_{M_0} = 544 \text{ кг} \times \text{см}, \quad (M_0)_{M_0} = 190 \text{ кг} \times \text{см/см}.$$

Напряжения в краевом сечении конуса будут:

$$\sigma_1 = \frac{\rho s \operatorname{tg} \alpha}{2\delta} \pm \frac{(S_0)_{P_1}}{\delta} \pm \frac{(S_0)_{M_2}}{\delta} \pm \frac{6(M_0)_{P_1}}{\delta^2} \pm \frac{6(M_0)_{M_2}}{\delta^2} = \begin{cases} -702 \text{ кг/см}^2 \\ +1578 \text{ кг/см}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho s \operatorname{tg} \alpha}{\delta} \pm \frac{(T_0)_{P_1}}{\delta} \pm \frac{(T_0)_{M_2}}{\delta} \pm \frac{6(K_0)_{P_1}}{\delta^2} \pm \frac{6(K_0)_{M_2}}{\delta^2} = \begin{cases} +476 \text{ кг/см}^2 \\ -188 \text{ кг/см}^2 \end{cases}$$

Решение для усеченных конусов производится совершенно так же, как и для полных.

Таблица значений величин A и B , входящих в форм. (18)

y	$\sqrt{y}$	$\sqrt[4]{y}$	$\sqrt{2y}$	A	B
100	10	3.1623	14.1421	1.25583	0.41871
120	10.9545	3.3097	15.4919	1.26016	0.42932
140	11.8322	3.4397	16.7332	1.26369	0.43768
160	12.6491	3.5564	17.8885	1.26646	0.44437
180	13.4164	3.6628	18.9737	1.26875	0.44991
200	14.1421	3.7609	20.0000	1.27069	0.45459
220	14.8324	3.8512	20.9762	1.27237	0.45862
240	15.4919	3.9358	21.9089	1.27382	0.46214
260	16.1245	4.0155	22.8035	1.27511	0.46524
280	16.7332	4.0906	23.6643	1.27625	0.46800
300	17.3205	4.1618	24.4949	1.27727	0.47048
320	17.8885	4.2318	25.2982	1.27820	0.47273
340	18.4391	4.2977	26.0768	1.27905	0.47478
360	18.9737	4.3558	26.8328	1.27982	0.47665
380	19.4936	4.4151	26.5681	1.28094	0.47838
400	20.0000	4.4721	28.2843	1.28120	0.47995
420	20.4939	4.5203	28.9828	1.28181	0.48148
440	20.9762	4.5799	29.6648	1.28237	0.48280
460	21.4476	4.6311	30.3315	1.28292	0.48409
480	21.9089	4.6806	30.9839	1.28341	0.48525
500	22.3607	4.7287	31.6228	1.28388	0.48642

Таблица значений величин A' , B' , C и D , входящих в форм. (19)

y	$e \sqrt{2y}$	A'	B'	C	D
100	$13860 \cdot 10^2$	0.00025	0.00061	0.06821	0.07071
120	$53453 \cdot 10^2$	0.00019	0.00046	0.06279	0.06455
140	$18492 \cdot 10^3$	0.00015	0.00037	0.05797	0.05976
160	$58744 \cdot 10^3$	0.00012	0.00029	0.05436	0.05590
180	$17381 \cdot 10^4$	0.00010	0.00024	0.05138	0.05270
200	$48507 \cdot 10^4$	0.00009	0.00021	0.04875	0.05000
220	$12875 \cdot 10^5$	0.00008	0.00019	0.04653	0.04767
240	$32720 \cdot 10^5$	0.00007	0.00017	0.04460	0.04564
260	$80044 \cdot 10^5$	0.00006	0.00014	0.04289	0.04385
280	$18931 \cdot 10^6$	0.00005	0.00013	0.04136	0.04225
300	$43440 \cdot 10^6$	0.00005	0.00012	0.03999	0.04082
320	$96996 \cdot 10^6$	0.00004	0.00010	0.03875	0.03953
340	$21132 \cdot 10^7$	0.00004	0.00010	0.03760	0.03834
360	$45000 \cdot 10^7$	0.00004	0.00010	0.03657	0.03726
380	$93875 \cdot 10^7$	0.00003	0.00007	0.03561	0.03627
400	$19212 \cdot 10^8$	0.00003	0.00007	0.03472	0.03535
420	$38632 \cdot 10^8$	0.00003	0.00006	0.03390	0.03450
440	$76450 \cdot 10^8$	0.00002	0.00006	0.03314	0.03371
460	$14882 \cdot 10^9$	0.00002	0.00006	0.03243	0.03297
480	$28575 \cdot 10^9$	0.00002	0.00005	0.03175	0.03227
500	$54133 \cdot 10^9$	0.00002	0.00005	0.03112	0.03162

Поступила в редакцию 2.X 1940.

**AN APPROXIMATE SOLUTION FOR CONICAL SHELLS OF UNIFORM THICKNESS
LOADED WITH SHEARING FORCES AND BENDING MOMENTS UNIFORMLY DISTRI-
BUTED ALONG THE EDGE**

S. B. KANTOROVITCH

(Summary)

The author examines the solution of a conical shell loaded by forces distributed symmetrically along the edge, in the form given by Ekström.

Replacing Bessel's functions by their asymptotic expressions, the author derives simple approximate formulae for closed cones, instead of the complicated series yielded by the Ekström solution.

Illustrative examples of the application of the formulae to the calculation of cylindrical shells with conical heads are given.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЕКТРОАНАЛОГИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

С. А. ЕНГАЛЫЧЕВ

(Харьков)

Решение задачи кручения цилиндрических стержней в общем случае, как известно, сводится к нахождению функции, удовлетворяющей во всей области поперечного сечения уравнению Лапласа:¹

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

и принимающей на контуре заданные значения:

$$\phi_s = (x_s^2 + y_s^2) / 2 + c = r_s^2 / 2 + c, \quad (2)$$

где для односвязных контуров постоянная c принимается обычно равной нулю.

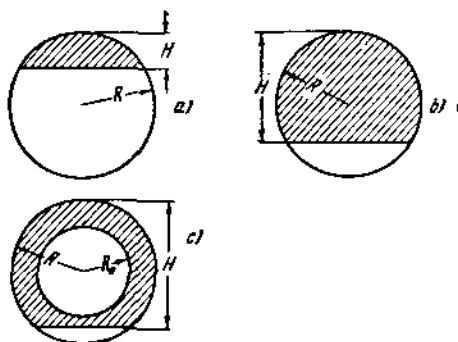
Нахождение такой функции удобно осуществить экспериментально с помощью электроанalogии. Как известно, потенциал V стационарного электрического тока тоже удовлетворяет уравнению Лапласа.

Поэтому, если создать плоский стационарный электрический ток по проводнику, имеющему форму, соответствующую поперечному сечению скручиваемого стержня, и добиться того, чтобы на контуре соблюдалось уравнение:

$$V_s = \phi_s = r_s^2 / 2 + c, \quad (3)$$

то во всей области будет справедливо равенство

$$V = \phi. \quad (4)$$



Фиг. 1.

Поэтому, исследуя экспериментально распределение потенциала в проводнике, мы этим самым решим задачу о значении искомой гармонической функции кручения ϕ в рассматриваемой области.

Метод электроанalogии был впервые предложен Н. Н. Павловским^[2] в применении к решению гармонической задачи движения грунтовых вод и затем распространен на область теории упругости в различных вариантах Биенцо и Кохом^[3], Кранцем^[4] в Германии и С. Г. Гутманом^[5] в СССР. Заметим, что способ Гутмана и способы германских ученых отличаются, главным образом, только методом создания контурных потенциалов.

Настоящая работа имеет цель применить метод электроанalogии к исследованию одной задачи кручения призматических стержней с поперечными сечениями одно- и двухсвязной формы, ограниченных окружностью и прямой (фиг. 1) (сегментовидный профиль, вал с лыской, полый вал с лыской).

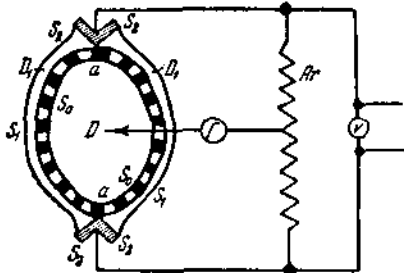
Как известно, теоретическое решение для сечений указанной формы имеется лишь для полукруга^[6,7].

¹ См., например, акад. А. Н. Динник [1].

Заметим, что применение метода электроанalogии к неразрешенным задачам нам пока неизвестно и все опубликованные работы касаются лишь вопроса разработки самого метода и оценки его точности на основе сопоставления результатов эксперимента с данными расчета для задач, имеющих теоретическое решение.¹

1. Создание контурных потенциалов

Для создания контурных потенциалов нами применялся способ С. Г. Гутмана вследствие его значительных преимуществ по сравнению с непосредственным подводом требуемых потенциалов (способ Коха, Биенено, Крайца).



Фиг. 2.

Исследуемое поперечное сечение (фиг. 2) моделировалось в виде области из электролита слабой концентрации D , окруженной трубками тока D_1 , образованных электролитом сильной концентрации. При этом жидкости областей D и D_1 разделяются между собой стенкой, но имеют прерывистый электрический контакт по контурной линии S_0 . Все это осуществлялось с помощью коллекторных разделяющих шин.

Благодаря такому устройству контурные потенциалы исследуемой области определяются шириной d обтекающей трубки тока, которая для этого должна подчиняться условию:

$$d = \text{const} \left\{ \frac{\partial \phi_s}{\partial s} \right\}^{-1} = \text{const} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r_s^2}{2} + c \right) \right\}^{-1} = \text{const} \left\{ r_s \frac{\partial r_s}{\partial s} \right\}^{-1}, \quad (5)$$

где $\partial \phi_s / \partial s$ — значение производной функции кручения ϕ на контуре и ds — элемент контура.

В местах, где $\partial \phi_s / \partial s$ равно нулю, ставятся питающие шины (электроды) в виде прямых, наклоненных под углом 45° к касательной к контуру.

Измерение потенциалов осуществлялось с помощью изображенного на фиг. 2 мостика Уитстона, перекинутого от исследуемой точки электролита к распределительному реостату-агметру Ar .

Для удобства работы измерения производились для относительных потенциалов:

$$V_1 = \frac{V - V_{s \min}}{V_{s \max} - V_{s \min}}, \quad (6)$$

соответствующих относительной гармонической функции кручения

$$\phi_1 = \frac{\phi - \phi_{s \min}}{\phi_{s \max} - \phi_{s \min}} = \frac{2\phi - r_{s \min}^2}{r_{s \max}^2 - r_{s \min}^2}, \quad (7)$$

где $r_{s \max}$ и $r_{s \min}$ — экстремальные радиусы точек контура относительно выбранного начала координат.²

При этом значения $V_1(\phi_1)$ определяются во время опыта непосредственно по делениям агметра, изменяющимся от нуля до единицы, через 0.01.

Наконец, заметим еще, что критерием правильной работы с электромоделями является прежде всего достижение требуемых контурных потенциалов V_s или V_{1s}

$$V_s = \frac{r_s^2}{2} \text{ или } V_{1s} = \phi_{1s} = \frac{\phi_s - \phi_{s \min}}{\phi_{s \max} - \phi_{s \min}} = \frac{r_s^2 - r_{s \min}^2}{r_{s \max}^2 - r_{s \min}^2}, \quad (8)$$

без проверки которых производить измерения нельзя.

¹ Исключение составляет лишь недавно вышедшая работа Н. М. Фигурнова^[8], в которой он применил метод электроанalogии для нахождения сумм нормальных напряжений в одной плоской задаче при использовании оптического метода.

² Все последующие выводы относятся к односвязным контурам.

2. Изготовление электромоделей

В ящик размерами $500 \times 800 \times 30$ мм заливается слой совершенно расплавленного воска ($T^\circ = 100 \div 130^\circ$) приблизительно 8 мм глубиной.

Затем вычерченный на тонкой бумаге чертеж электромоделей перскаливается на затвердевший воск.

По чертежу электромоделей на воске устанавливались коллекторные отдельные шины S_0 и ограничительные эбонитовые пластинки, выточенные по линии S_1 . Промежуток между эбонитовыми пластинками и отдельными шинами образует трубку тока D_1 (фиг. 2).

Вслед за этим заливается второй тонкий слой воска.

После затвердения второго слоя ставились все остальные детали электромоделей (питающие шины — электроды, изолирующие стенки из стекла) и заливается последний слой воска.

Работа электромоделей существенно зависит также от вида электролитов и электродов, так как от последних зависит интенсивность вредных токов в электромоделях (емкостные токи, токи поляризации, контактные разности потенциалов), искажающих общую картину распределения потенциалов. Нами был исследован ряд электролитов и электродов и было выяснено, что лучшим электролитом для контурной трубки тока является водный раствор лимонно-кислого никеля,¹ а лучшими электродами являются латунные или тщательно отшлифованные пластинки из хромоникелевой стали. Для исследуемой области применялась, как обычно, дистиллированная вода, несколько постоявшая на воздухе.

3. Определение на основе данных электроанalogии касательных напряжений и углов закручивания стержня

Расчет стержней (валов) на кручение практически сводится к определению относительного угла закручивания θ и наибольшего касательного напряжения $\tau_{\max}$. Для определения их выпишем известные из теории упругости выражения:

$$M = 2G\theta \iint \varphi \, dx \, dy, \quad (9)$$

$$\tau_x = G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_y = -G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau = -G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (10)$$

где M — крутящий момент, τ_x и τ_y — координатные составляющие касательного напряжения τ , G — модуль упругости второго рода, φ — функция напряжений, связанная с гармонической функцией кручения равенством

$$\varphi = \psi - r^2 / 2, \quad (11)$$

n — нормаль к траектории касательных напряжений, проведенная внешним образом, т. е. в сторону уменьшения функции напряжений φ .

Подставляя теперь в равенства (9) и (10) вместо φ ее выражение через функцию ψ согласно формуле (11), а затем, заменяя ψ функцией ψ_1 из уравнения (7), получим:

$$M = G\theta \left[(r_{s \max}^2 - r_{s \min}^2) \iint \psi_1 \, dx \, dy + r_{s \min}^2 \iint dx \, dy - \iint r^2 \, dx \, dy \right], \quad (12)$$

$$\tau = -G\theta \left[\frac{1}{2} (r_{s \max}^2 - r_{s \min}^2) \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - r \frac{\partial r}{\partial n} \right]. \quad (13)$$

¹ Неплохие, хотя и худшие результаты, чем лимоннокислый никель, дает также применяемый С. Г. Гутманом раствор соды.

Вынося теперь за скобки в уравнении (12) $r_{s \max}^4$, а в уравнении (13) $r_{s \max}$ и обозначая через λ отношение $r_{s \min}$ к $r_{s \max}$, через F площадь, а через I момент инерции поперечного сечения относительно выбранного начала координат, получим:

$$M = G\theta r_{s \max}^4 \left[\frac{F}{r_{s \max}^2} \lambda^2 + \frac{1 - \lambda^2}{r_{s \max}^2} \int \int \phi_1 dx dy - \frac{I}{r_{s \max}^4} \right], \quad (14)$$

$$\tau_{\max} = -G\theta r_{s \max} \left[\frac{1}{2} (r_{s \max} - \lambda r_{s \min}) \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{r}{r_{s \max}} \frac{\partial r}{\partial n} \right]_{\max}. \quad (15)$$

Для получения безразмерных величин введем обозначения:

$$F_0 = \frac{F}{r_{s \max}^2}, \quad I_0 = \frac{I}{r_{s \max}^4}, \quad \Psi_0 = \frac{1}{r_{s \max}^2} \int \int \phi_1 dx dy, \quad (16)$$

$$\text{grad}_0 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{r_{s \max}} = \frac{1}{2} (r_{s \max} - \lambda r_{s \min}) \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{r}{r_{s \max}} \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (17)$$

Тогда

$$\theta = \frac{M}{G r_{s \max}^4 (F_0 \lambda^2 + (1 - \lambda^2) \Psi_0 - I_0)}, \quad (18)$$

$$\tau_{\max} = G\theta r_{s \max} \text{grad}_0 \varphi. \quad (19)$$

Назовем теперь коэффициентами формы сечения величины:

$$A = F_0 \lambda^2 + (1 - \lambda^2) \Psi_0 - I_0, \quad (20)$$

$$B = \frac{1}{A} \text{grad}_0 \varphi. \quad (21)$$

Тогда

$$\theta = \frac{M}{G r_{s \max}^4 A}, \quad (22)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M}{r_{s \max}^3} B. \quad (23)$$

Полученные формулы годны для всех поперечных сечений с любой формой и любыми размерами.¹

Для подсчета по этим формулам необходимо, как видно, только подсчитать коэффициенты формы A и B , названные так нами потому, что они не зависят от размеров поперечного сечения, а только от его формы. Практический подсчет сводится к нахождению на основе экспериментальных линий $V_1 = \phi_1 = \text{const}$ градиентов функции $\phi_1 = V_1$ и интегралов $\int \int \phi_1 dx dy$ методами численного дифференцирования и интегрирования.

4. Оценка точности метода электроанalogии

Для оценки точности результатов экспериментальное исследование было проведено вначале по отношению контуров, для которых теоретические решения известны. Приводим окончательные результаты.

Равносторонний треугольник

Результаты, полученные с помощью электроанalogии:

$$\tau_{\max} = 21 \frac{M}{a^3}, \quad \theta = \frac{M}{0.0218 a^4 G},$$

где a — сторона треугольника.

¹ Произвольность выбора начала координат отзывается, конечно, на величинах коэффициентов формы A и B , но величины θ и $\tau_{\max}$ остаются инвариантными относительно выбора начала координат.

Точные теоретические значения:

$$\tau_{\max} = 20 \frac{M}{a^3}, \quad \theta = \frac{M}{0.0217 a^4 G}.$$

Полукруг

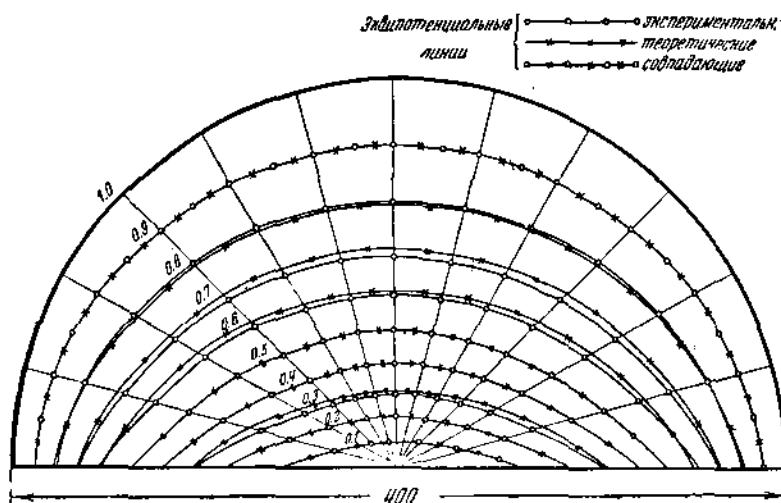
Результаты, полученные с помощью электроанalogии:

$$\tau_{\max} = 2.77 \frac{M}{a^3}, \quad \theta = \frac{M}{0.301 a^4 G},$$

где a — радиус.

Точные теоретические значения:

$$\tau_{\max} = 2.86 \frac{M}{a^3}, \quad \theta = \frac{M}{0.296 a^4 G}.$$



Фиг. 3.

Укажем также, что графическим путем было получено

$$\tau_{\max} = 2.91 \frac{M}{a^3}, \quad \theta = \frac{M}{0.286 a^4 G}.$$

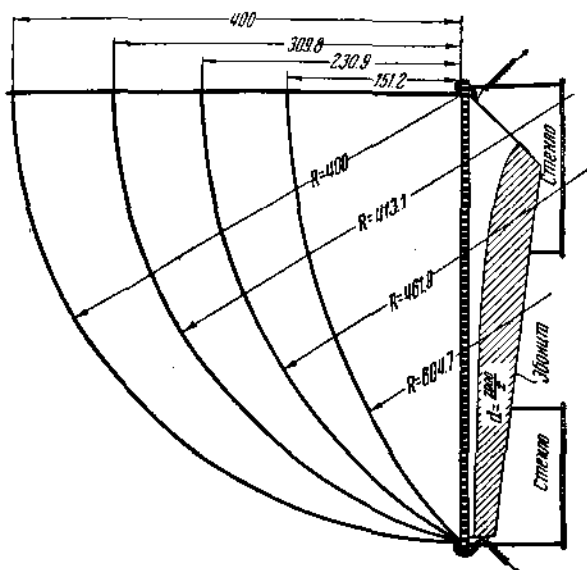
Для оценки точности метода электроанalogии в случае кручения полукруга были построены также экспериментальные и теоретические эквипотенциальные линии (фиг. 3). В расположении этих линий, как видно, имеет место весьма небольшое расхождение.

Из приведенных данных видно, что отклонения результатов, получаемых методом электроанalogии, для относительного угла закручивания θ составляют $1-2\%$, а для наибольшего касательного напряжения $\tau_{\max}$ около $3-5\%$.

5. Применение метода электроанalogии к задаче кручения призматических стержней с поперечным сечением в виде кругового сегмента

Электромодель была сконструирована с таким расчетом, чтобы на ней можно было исследовать сегменты с различными соотношениями стрелки H к радиусу круга R ($H < R$). Для этой цели хорда сегмента (вернее полусегмента, так как в виду симметричности достаточно рассматривать половину профиля) для всех H/R была выбрана одинаковой длины, причем начало координат каждый раз выбиралось в центре соответствующего круга.

На изображенной на фиг. 4 модели сегмента ось симметрии представлена изолирующей стеклянной шиной. Это сделано вследствие того, что при выбранном начале координат ось симметрии является линией тока нашего электрического



Фиг. 4.

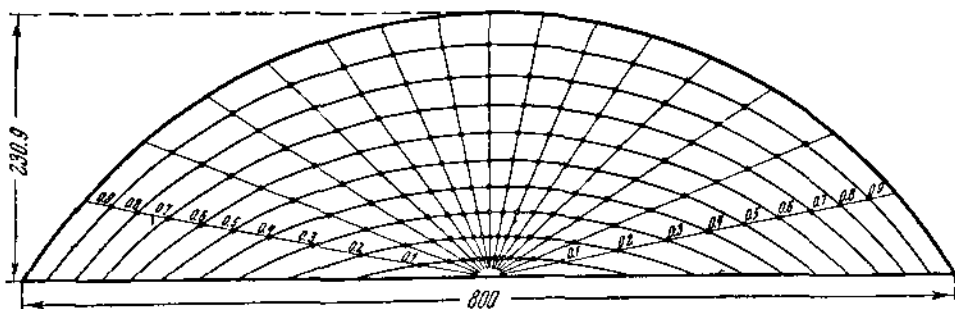
потока. Дуги сегментов представлены здесь в виде металлических шин, имеющих постоянный потенциал

$$V = r_{s \max}^2 / 2 = R^2 / 2,$$

что соответствует постоянному относительному потенциалу $V_1 = \phi_1 = 1$.

Для достижения требуемых потенциалов вдоль длины хорды сегмента, одинаковых для всех H/R и равных

$$V_1 = \phi_1 = \frac{r_s^2 - r_{s \min}^2}{r_{s \max}^2 - r_{s \min}^2} = \frac{r_s^2 - b^2}{R^2 - b^2} = \frac{x^2}{R^2 - b^2}, \quad (24)$$



Фиг. 5.

устанавливалась общая для всех сегментов обтекающая трубка тока толщиной

$$d = \text{const} \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right\}^{-1} = \frac{2000}{x}. \quad (25)$$

В формулах (24) и (25) x — расстояние точки хорды от оси сегмента, а $b = R - H$.

С помощью модели были получены эквипотенциальные линии для отношений $H/R = 1/4; 2/4; 3/4; 4/4$. Эквипотенциальные линии для $H/R = 0.5$ изображены на фиг. 5. В этом случае было установлено

$$\tau_{\max} = 21.5 \frac{M}{R^3} = 0.56 G \theta R,$$

$$\theta = \frac{M}{0.026 R^4 G}.$$

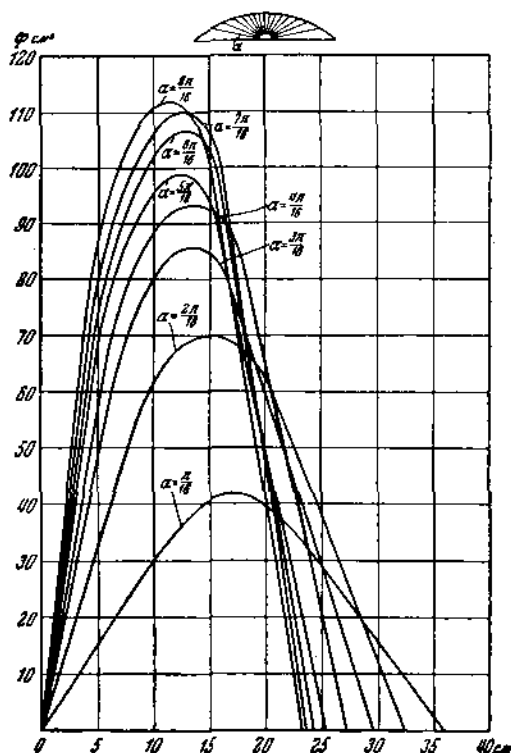
Для этого же случая $H/R = 0.5$, используя полученные линии $\phi_1 = \text{const}$ и связь между функциями ϕ , ψ и ϕ_1 , были построены эпюры изменения функции напряжений ϕ вдоль лучей (фиг. 6), а затем траектории и эпюры касательных напряжений по контуру и оси симметрии сегмента (фиг. 7).

Из фиг. 7 видно, что максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ находится в точке контура, лежащей на середине хорды.

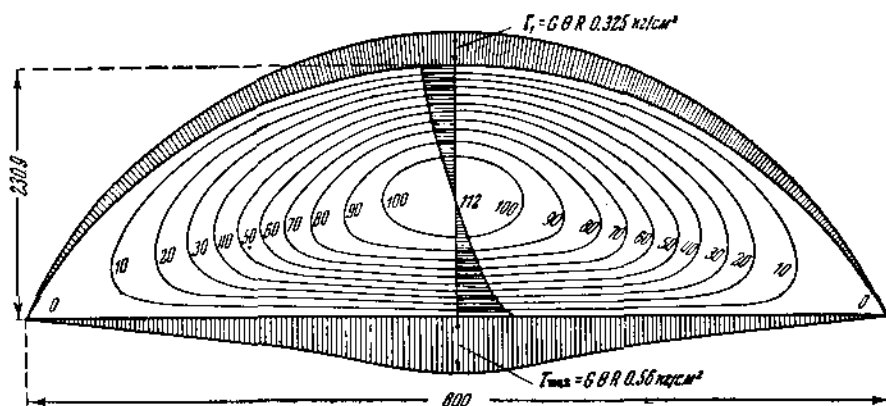
Последующее исследование сводилось к нахождению коэффициентов формы A и B . Для этого прежде всего на основе полученных линий находились величины интегралов $\iint \psi_1 dx dy$ путем за-

мены их суммами $\sum_{i=1}^n \psi_{1cp} \Delta F_i$. За-

метим, что ввиду сравнительно прямолинейного характера изменения функции ϕ_1 по нормали к эквипотенциальным линиям такая замена давала весьма точные результаты ($1/2\%$ при числе площадок $n=10$).



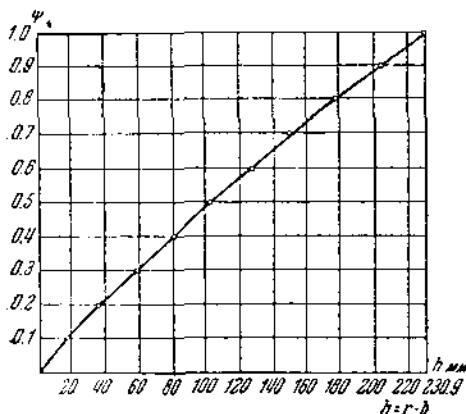
Фиг. 6.



Фиг. 7.

Затем находились величины градиентов функции $\partial \phi_1 / \partial n$ для точек контура на оси симметрии (точки наибольших напряжений). С этой целью строились графики изменения функции ϕ_1 по оси симметрии. На фиг. 8 приведен график для $H/R = 0.5$.

Наконец, для получения общей формулы для кругового сегмента строились на логарифмической бумаге графики коэффициентов формы A и B в зависимости от H/R (фиг. 9).



Фиг. 8.

При этом оказалось возможным с большой точностью представить последние в виде следующих функций от H/R :

$$A = 0.296 (H/R)^{3.35},$$

$$B = 2.86 (H/R)^{-2.82}$$

Причем отметим, что

$$\text{grad}_0 \varphi' = 0.849 (H/R)^{0.53},$$

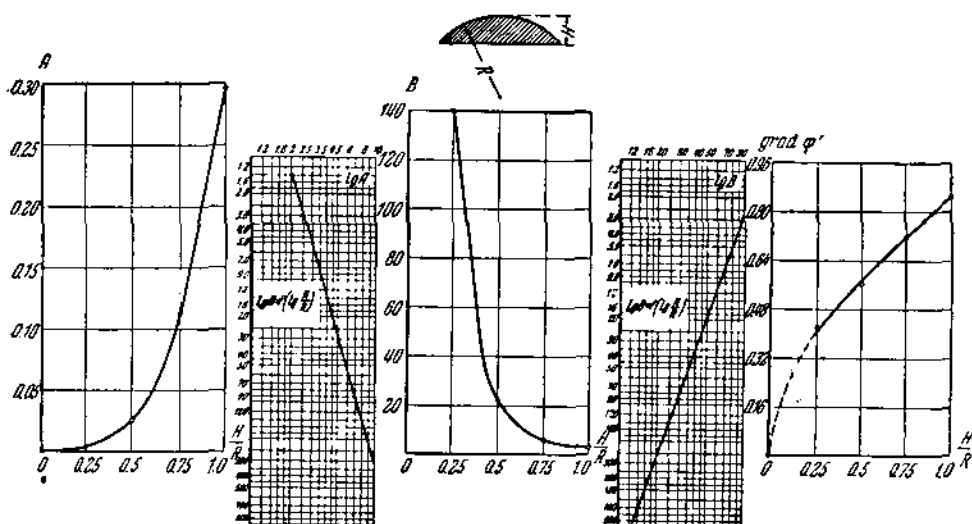
т. е.

$$\begin{aligned} \tau &= G\theta R \text{ grad}_0 \varphi' = \\ &= G\theta R 0.849 (H/R)^{0.53}. \end{aligned}$$

Таким образом формулы для относительного угла закручивания и наибольшего касательного напряжения получились в виде:

$$\theta = \frac{M}{0.296 R^4 G} \left(\frac{H}{R} \right)^{-3.35}, \quad (26)$$

$$\tau_{\max} = 2.86 \frac{M}{R^3} \left(\frac{H}{R} \right)^{-2.82}, \quad (27)$$



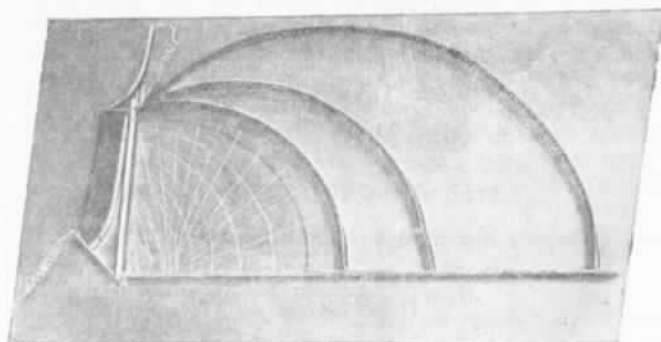
Фиг. 9.

6. Применение метода электроанalogии к задаче кручения вала с лыской

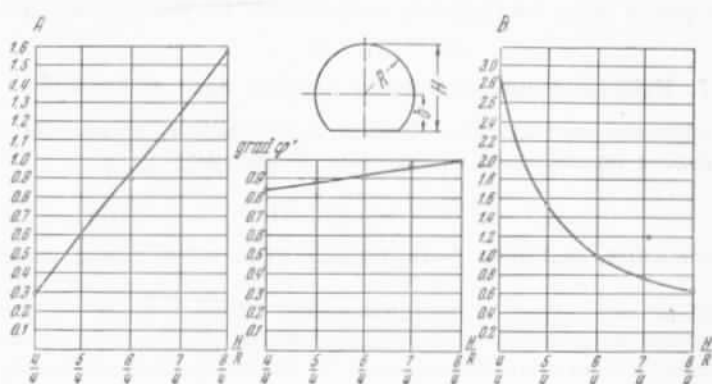
Общий вид электроаналогии для вала с лыской ($H > R$) приведен на фиг. 10. Исследование было выполнено для случаев:

$$\frac{H}{R} = \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}.$$

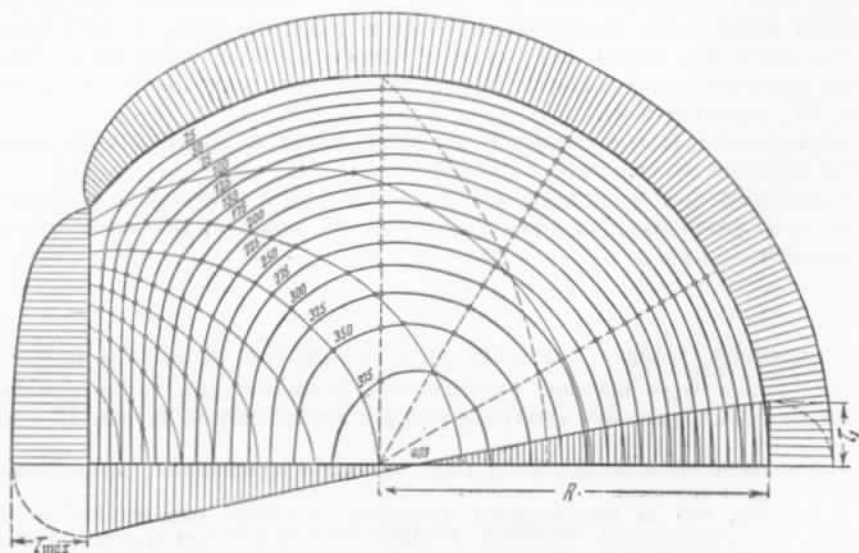
Не останавливаясь на промежуточных вычислениях и графиках, в результате выполнения которых аналогично указанному выше были найдены коэффициенты



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

A и B в зависимости от H/R , укажем лишь, что эти зависимости отличны от подобных же зависимостей для кругового сегмента. Результаты исследования представлены на фиг. 11, причем оказалось

$$A = 1.3(H/R) - 1,$$

$$B = \frac{0.15(H/R) + 0.7}{1.3(H/R) - 1},$$

$$\operatorname{grad}_0 \varphi' = 0.15(H/R) + 0.7,$$

т. е. расчетные формулы для вала с лыской согласно (22) и (23) имеют вид:

$$\Theta = \frac{M}{(1.3H/R - 1) R^2 G}, \quad (28)$$

$$\tau_{\max} = \frac{0.15 H/R + 0.7}{1.3 H/R - 1} \frac{M}{R^3}. \quad (29)$$

Для суждения о распределении касательных напряжений по всему сечению вала с лыской было произведено тем же способом, что и для сегмента, построение траекторий и эпюр касательных напряжений по контуру и оси симметрии (фиг. 12).

7. Исследование кручения полого вала с лыской

Задача кручения многосвязного сечения, как известно, приводится к краевой задаче Дирихле с неизвестными контурными условиями:

$$\psi_s = r_s^2 / 2 + c_s,$$

где c_s — постоянная, могущая быть определенной лишь после решения всей задачи.

При этом обычно задаются последовательно рядом значений c_s и после решения прибегают к проверке правильности выбранного значения на основе критерия однозначности осевого перемещения w вдоль каждого из контуров^[9]

$$\oint \frac{\partial w}{\partial s} ds = 0. \quad (30)$$

В данной работе была поставлена задача использовать¹ для решения таких случаев метод электроанalogии и создать способ автоматической самоустанавливаемости необходимых контурных потенциалов, а стало быть, и постоянных c_s .

Это нами достигнуто для решения одного наиболее часто встречающегося случая кручения двухсвязных профилей, для которых один контур — окружность (фиг. 13, случаи a и b).

Этот способ был проверен и применен далее к практическому решению задачи кручения полого вала с лыской.

Если рассматривать условие однозначности (30) в применении к электрическому полю потенциала (электроаналогия), то, как известно, оно должно перейти в уравнение

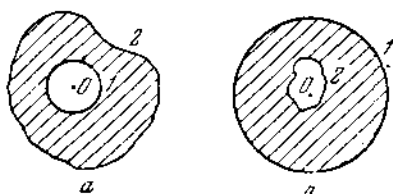
$$\oint \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial s} ds = 0, \quad (30')$$

представляющее условие равенства нулю расхода тока на каждом из контуров модели² (здесь $\bar{\psi}_s$ — значение функции тока $\bar{\psi}$ на контуре). Таким образом нам предстоит сконструировать электроаналогии для изображенных на фиг. 13 сечений,

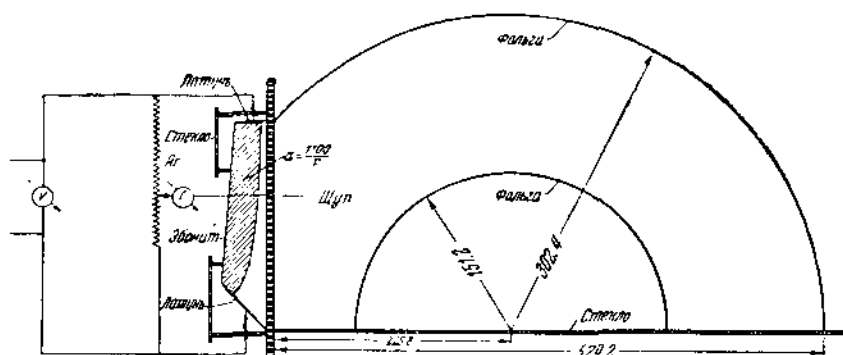
¹ Насколько нам известно, метод электроаналогии еще практически не применялся к многосвязным сечениям.

² Заметим, что из рассмотрения потенциала кручения, равного $\Phi = w/\Theta + i\bar{\psi}$, следует, что сопряженной функцией к гармонической функции кручения $\bar{\psi}$ является величина w/Θ ; последняя и представляет функцию тока $\bar{\psi}$.

основываясь не только на том, чтобы на контурах потенциалы равнялись $\phi_s = V_s = r_s^2 / 2 + c$, но чтобы также выполнялось уравнение (30'). Для решения такой задачи условимся, во-первых, начало координат выбирать в центре круглого контура; во-вторых, одну из постоянных, а именно постоянную для некруглого контура, принимать равной нулю. Тогда электроаналогия некруглого контура не будет встречать принципиальных затруднений и для его осуществления необходимо будет создать на контуре трубку тока с распределением потенциала, удовлетворяющего условию $V = r_s^2 / 2 + 0$.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Круглый же контур для достижения требуемых условий лучше всего представить в виде изолированной металлической шины, высокая электропроводность которой обеспечит требуемое постоянство потенциала на круглом контуре постоянного радиуса R_0 :

$$V_s = R_0^2 / 2 + c = \text{const.} \quad (31)$$

Изолированность же контура обеспечит выполнение условия (30'), а потому автоматически установит на круглом контуре потенциалы согласно уравнению (31), выраженные через искомую постоянную c .

Измерив контурный потенциал на металлической шине, из уравнения (31) найдем неизвестную постоянную c .

Дальнейшее исследование и обработка результатов почти не отличается от таковой для односвязных контуров, а именно прежде всего находятся эквипотенциальные линии, а затем подсчитываются относительный угол закручивания Θ и наибольшее касательное напряжение $\tau_{\max}$ по формулам (22) и (23).

Следует отметить, что коэффициент формы A будет здесь несколько иным:¹

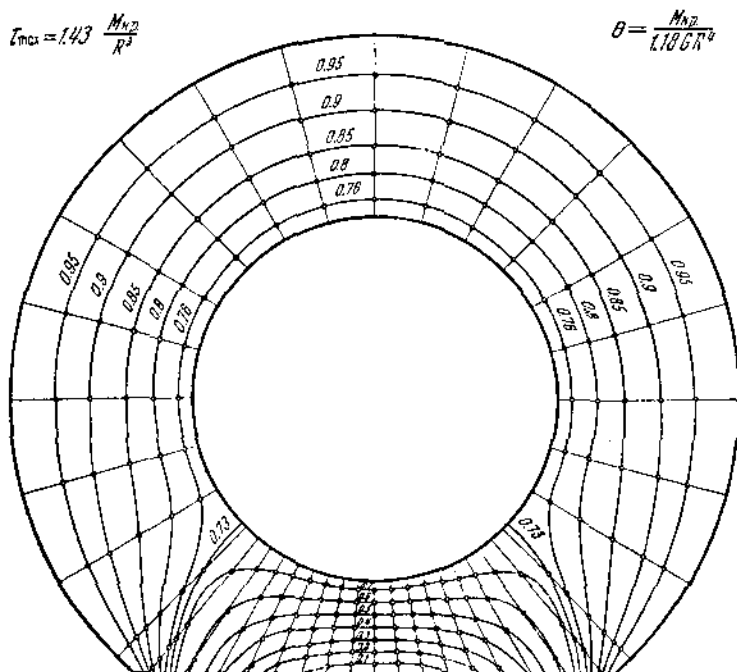
$$A = F_0 \lambda^2 + (1 - \lambda^2) \phi_0 - J_0 \pm 2\pi R_0^2 / r_{s \max}^4. \quad (32)$$

¹ Это следует из известного уравнения для момента внутренних сил, которое для нашего случая будет представляться в виде:

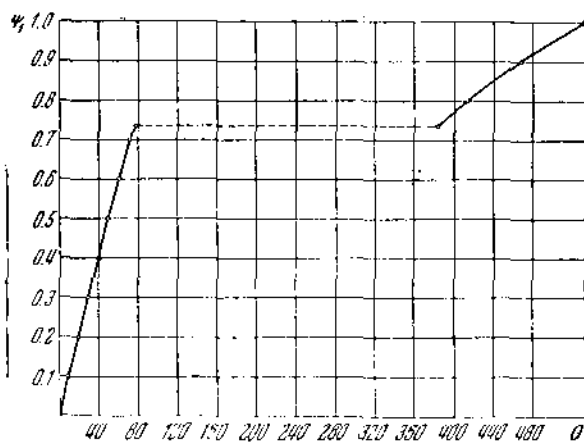
$$M = 2G\Theta \left(\iint \varphi dx dy \pm \pi R_0^3 \right),$$

причем знак плюс соответствует случаю а, знак минус — случаю б.

Значения $r_{s \max}$ и $r_{s \min}$ относятся здесь к экстремальным значениям потенциала V , а так как таковые при принятых условиях моделирования будут на некруглом контуре, то и $r_{\varphi \max}$, $r_{\varphi \min}$ относятся к некруглому контуру; заметим, что величина s имеет размерность $[\text{см}^2]$, а потому величина A безразмерна.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

Этим способом была практически исследована задача кручения полого вала с лыской для случая

$$\frac{R}{R_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{H}{R} = \frac{1}{4},$$

где R — радиус внешнего круга, R_0 — радиус внутреннего круга, H — стрелка хорды.

Схема электро модели, примененная для этой цели, изображена на фиг. 14. Эквипотенциальные линии, полученные в результате измерений, представлены на фиг. 15.

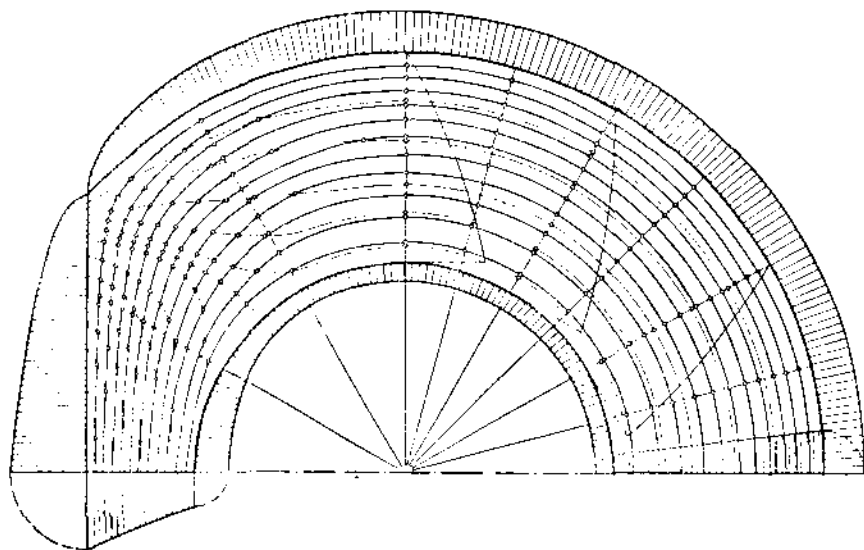
Причем для рассматриваемого случая были получены формулы:

$$\tau_{\max} = 1.43 \frac{M}{R^3} = 1.7 G \theta R,$$

$$\theta = \frac{M}{1.18 G R^4}.$$

График изменения относительной гармонической функции кручения ψ_1 приведен на фиг. 16.

Наконец, на фиг. 17 представлены траектории и эпюры касательных напряжений, построенные для этого же случая.



Фиг. 17.

Как видно из полученных формул и эпюр касательных напряжений, лыска значительно повышает коэффициент концентрации напряжений в полем вале. Поступила в редакцию 28. X 1940.

Работа выполнена в 1939 — 1940 г. в Лаборатории сопротивления материалов Харьковского механико-машиностроительного института.

INVESTIGATION OF THE TORSION OF BARS (SHAFTS) BY MEANS OF ELECTRICAL ANALOGY

S. A. YENGALICHEV

(Summary)

The author investigates the torsion of solid and hollow bars with circular cross-section, and with a cross-section formed by a circle and a straight line (fig. 1).

Formulae for the relative angle of torsion and maximum torsional stress are obtained as results of the investigation.

The solution of the problem of the hollow shaft (see fig. 1, c) is an example of the application of the method of electrical analogy to a complex contour, provided one part of the contour is a circle.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динник А. Н. Кручение. 1938.
2. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Петроград. 1922.
3. Biezeno C. B. und Koch J. J. „Ingenieur Archiv“. 1933. Bd. IV. [S. 384].
4. Cranz H. „Ingenieur Archiv“. 1933. Bd. IV. [S. 506].
5. Гутман С. Г. Приложение метода электроанalogии к решению задач теории упругости. „Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений“. Л. 1937.
6. Saint Venant. „Compte rendu“. 1878. Т. 87. [Р. 849 et 893].
7. Динник А. Н. „Известия Донского политехнического института“. Новочеркасск. Т. 1. [Стр. 309].
8. Фигурнов Н. М. Прикладная математика и механика. 1939. Т. III. Вып. 4.
9. Griffith A. and Taylor G. „Techn. Rep. Nat. Adv. Comm. Aeronautics“. 1917—18. Vol. 3.

РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТАЛЬНОМ КОЛЬЦЕ

Б. М.РОВИНСКИЙ

(Москва)

Применимость рентгенографического метода определения напряжений в инженерной практике может быть установлена путем экспериментальных исследований напряжений в таких объектах, в которых распределение напряжений легко определить на основании решений, даваемых теорией упругости. Подобные исследования сыграли в свое время значительную роль в развитии оптического метода исследования напряжений. Аналогичный путь может оказать также известное влияние на развитие рентгенографического метода. При постановке таких исследований необходимо, однако, учесть характерные особенности, которые в корне отличают рентгеновский структурный метод определения напряжений первого рода — рентгенотензометрию — от оптического и других экспериментальных методов определения напряжений.

Настоящая работа посвящена рентгенографическому исследованию распределения напряжений в стальном кольце при чистом изгибе. Точное решение этой плоской задачи теории упругости было дано рядом авторов⁽¹⁾, а изложение экспериментальной проверки ее оптическим методом приводится в известной монографии Кокера и Файлона⁽²⁾.

1. В кольце постоянного сечения в виде узкого прямоугольника можно вырезать часть, заключенную между двумя смежными радиусами, которые соответствуют значениям угла

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = 2\pi - \varepsilon,$$

где ε — небольшой угол. При повороте радиуса на угол ε до совмещения с другим радиусом в кольце вследствие дислокации появятся напряжения, которые сохранятся, если плоскости сечения соединить каким-либо способом. Напряжения в таком кольце могут быть определены из рассмотрения симметричного решения плоской задачи теории упругости.

Общее решение ее, как известно, имеет вид:

$$F = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D, \quad (1)$$

где A , B , C и D — некоторые произвольные постоянные интегрирования.

Из условий на контуре определяются произвольные постоянные в функции изгибающего момента M пары сил, приложенных к плоскостям выреза кольца:

$$\begin{aligned} A &= - (4M/N) a^2 b^2 \ln(b/a), & B &= - (2M/N) (b^2 - a^2), \\ C &= (M/N) [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \ln^2(b/a).$$

Для напряжений получаются значения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= - \frac{4M}{N} \left(- \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Составляющие перемещения в радиальном u и в тангенциальном v направлениях имеют значения:

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \ln r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right], \quad (4)$$

$$v = -\frac{4Br\theta}{E}.$$

Так как угол ε малый, следовательно, тангенциальное перемещение будет $v = \varepsilon r$, а перемещение по формуле (4) при $\theta = 2\pi$ будет $v = 2\pi(4Br/E)$, то из этих выражений находится:

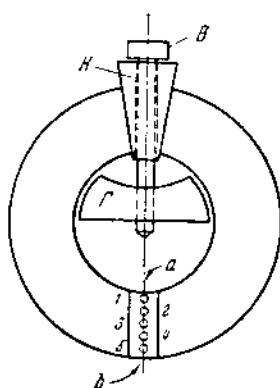
$$B = \varepsilon E / (8\pi). \quad (5)$$

Подставляя значения (5) во второе уравнение (2), получаем:

$$M = -\frac{\varepsilon E}{8\pi} \frac{N}{2(b^2 - a^2)}. \quad (6)$$

Выражения (3), (4) и (6) полностью определяют распределение напряжений в кольце.

2. Для экспериментальной проверки этого решения рентгенографическим методом было изготовлено стальное кольцо. Практически представлялось более



Фиг. 1.

удобным изготовить кольцо с большим вырезом, а дислокацию его произвести путем поворота радиуса на угол ε в направлении увеличения выреза. Осуществлено было такое увеличение выреза кольца при помощи простого устройства, которое схематически представлено на фиг. 1. В вырез, заключенный между двумя смежными радиусами, был вставлен клин K , у которого угол между боковыми гранями был больше выреза в кольце на угол ε . Дислокация в кольце осуществлялась путем вдавливания клина внутрь выреза до полного совмещения граней выреза кольца и клина. Вдавливание производилось путем затягивания болта B , который проходил через канал в клине и ввинчивался в вставленную внутрь кольца полукруглую гайку G . Форма затяжной гайки обусловлена необходимостью предохранить внутреннюю поверхность

кольца от смятия. После затяжки клина до требуемого положения клин и кольцо были соединены пайкой, а винт и полукруглая гайка были удалены. Канал в клине служил в дальнейшем при рентгеновских снимках для пропуска рентгеновских лучей нормально к внутренней поверхности кольца в точке a .

Для получения полной характеристики механических свойств материала кольца из той же стали были изготовлены образцы, которые вместе с кольцом подверглись до рентгеновских снимков одновременной термической обработке: закалка в масло с 850°C , последующий отпуск при температуре 650°C — 2 часа и медленное охлаждение с печью.

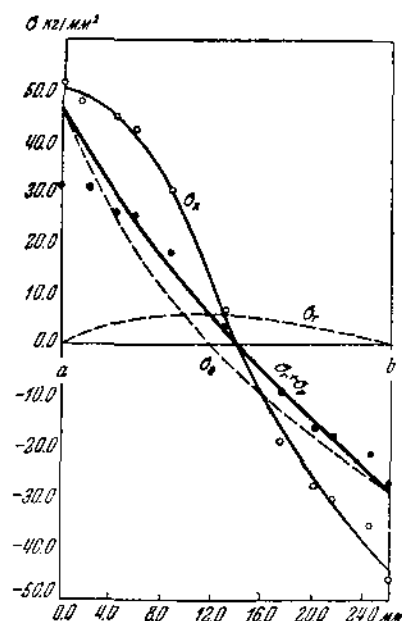
Термическая обработка производилась для снятия искажений кристаллической решетки, которые обычно возникают при обработке металла резцом на станке, а также для получения более однородной и мелкозернистой структуры. Химический состав стали: $\text{C} — 0.23\%_0$, $\text{Si} — 0.31\%_0$, $\text{S} — 0.040\%_0$, $\text{P} — 0.034\%_0$, $\text{Mn} — 0.91\%_0$, $\text{Cr} — 0.60\%_0$ (сумма — $2.124\%_0$). Механические испытания дали следующие результаты:

Предел пропор.	Предел течуч.	Врем. сопрог.	Модуль упругости	Модуль сдвига	Кoeff. Пуассона
σ_p	σ_s	σ_B	E	G	ν
60.2	67.0	76.3	20440	7970	0.26
± 2.0	± 1.1	± 1.0	± 190	± 120	

Определение модуля нормальной упругости E , модуля сдвига G и коэффициента Пуассона ν производилось на образцах разной формы. Так как коэффициент Пуассона по формуле $\nu = E / (2G) - 1$ оказывается равным 0.28, то в дальнейших расчетах для ν принято среднее значение 0.27.

Совмещение граней выреза кольца и клина было установлено по специальной метке на боковой грани клина и контролировалось симметричностью кольца после деформирования. Для этого кольцо после пайки было промерено по диаметру в различных направлениях. Промеры производились микрометром с отсчетом 0.01 мм. Размеры кольца и начальные напряжения в нем после запайки приведены в табл. 1. Угол $\epsilon = 1.9^\circ$. Толщина кольца 5.96 мм. Наружный диаметр кольца до деформирования — 104.78 мм, а после деформации — 105.20 мм. Таким образом радиальное перемещение u оказалось 0.21 мм, а по формуле (4) имеем 0.206 мм. Общее распределение σ_r , σ_θ и суммы главных напряжений $\sigma_r + \sigma_\theta$ представлены графически на фиг. 2.

3. Распределение первой серии экспериментальных точек a , 1, 2, 3, 4, 5, b по кольцу представлено схематически на фиг. 1. Локализация отдельных участков поверхности кольца производилась при помощи накладываемых на поверхность тонких серебряных пластинок с круглыми отверстиями диаметром около 3 мм. Вещество этих пластинок (серебро) служило также эталоном при рентгеноисследованиях



Фиг. 2.

Таблица 1

Обознач. эксперим. точек	Радиус кольца r (в мм)	Расстояние от внутр. края (в мм)	Напряжения в кольце		
			σ_r (в кг/мм²)	σ_θ (в кг/мм²)	$\sigma_r + \sigma_\theta$ (в кг/мм²)
a	26.21	0.00	0.0	45.8	45.8
1—II	27.80	1.59	2.4	36.9	39.3
1—I	30.68	4.47	4.9	23.8	28.7
2—II	32.14	5.93	5.7	17.9	23.6
2—I	34.95	8.74	6.2	8.4	14.6
3—I	39.15	12.94	5.8	— 3.7	2.1
4—I	43.56	17.35	4.4	— 13.4	— 9.0
5—II	46.31	20.13	3.4	— 18.7	— 15.3
5—I	47.75	21.54	2.4	— 21.4	— 19.0
6—II	50.85	24.64	1.0	— 26.6	— 25.6
b	52.39	26.18	0.0	— 28.9	— 28.9

($4.0776 \text{ \AA}$). Исследуемая поверхность устанавливалась при рентгеноисследованиях нормально к рентгеновскому лучу (фиг. 3), и таким образом определялась только сумма главных напряжений. Способ раздельного определения главных напряжений

с помощью косых съемок разработан в настоящее время уже достаточно полно (3). Не являясь, однако, принципиально необходимым в настоящем исследовании, он не был использован во избежание значительного снижения точности исследования.

Период кристаллической решетки металла кольца в состоянии, свободном от напряжений, был определен предварительно рентгеновской до деформирования кольца. Толщина серебряных пластинок (эталона) промерялась микрометром и в дальнейшем учитывалась так же, как и кривизна контуров вблизи точек a и b . Серебряные пластинки были предварительно отожжены, а стальное кольцо после термической обработки протравлено. Контрольными рентгеновскими без вращения пленки было установлено, что линии серебра (420) сплошные, а отражения a_1 и a_2 от плоскости (310) решетки α -железа сплошные и слабо размытые. Рентгенограммы промерялись компаратором с малым увеличением.

Результаты измерений периода кристаллической решетки представлены в табл. 2. В этой таблице приведены также значения абсолютных $a - a_0$ и относительных деформаций $\varepsilon_{\perp} = \Delta a / a$ периода кристаллической решетки. Сумма главных напряжений σ_R определялась по формуле

$$\varepsilon_{\perp} = -(\sigma_r + \sigma_{\theta}) \nu / E.$$

При подсчете напряжений по этой формуле для модуля нормальной упругости E и коэффициента Пуассона ν приняты значения, полученные при механических испытаниях материала кольца:

$$(E \nu)_M = 20440 : 0.27 = 75700 \text{ кг/мм}^2.$$

Таблица 2

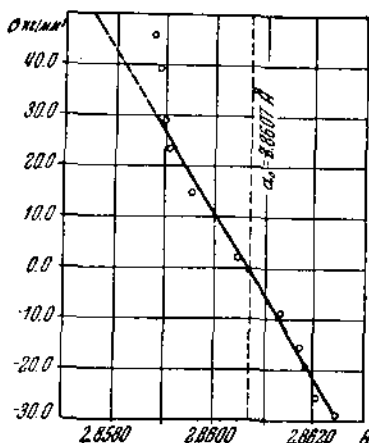
Экспериментальные точки	$\sigma_M = \sigma_r + \sigma_{\theta}$	a Å	$\Delta a = a - a_0$ Å	$\varepsilon_{\perp}$	σ_R (в кг/мм ²)	$\frac{\sigma_R}{\sigma_M}$	σ_R' (в кг/мм ²)	$\sigma_M - \sigma_R'$ (в кг/мм ²)
a	45.8	2.8587 ₅	- 0.0019 ₅	- 0.00068 ₂	51.6	(1.13)	30.7	+ 15.1
1—II	39.3	2.8589 ₀	- 0.0018 ₀	- 0.00062 ₉	47.6	(1.21)	28.3	+ 11.0
1—I	28.7	2.8590 ₀	- 0.0017 ₀	- 0.00059 ₄	45.0	1.57	26.3	+ 2.4
2—II	23.6	2.8591 ₀	- 0.0016 ₀	- 0.00055 ₉	42.3	1.79	25.2	- 1.6
2—I	14.6	2.8595 ₅	- 0.0011 ₅	- 0.00040 ₂	30.4	(2.08)	18.1	- 3.5
3—I	2.1	2.8604 ₅	- 0.0002 ₅	- 0.00008 ₇	6.6	(3.14)	3.9	- 1.8
4—I	- 9.0	2.8613 ₀	+ 0.0006 ₀	+ 0.00020 ₉	- 15.8	1.75	- 9.4	- 0.4
5—II	- 15.3	2.8617 ₅	+ 0.0010 ₅	+ 0.00036 ₇	- 27.8	1.82	- 16.5	- 1.2
5—I	- 19.0	2.8618 ₅	+ 0.0011 ₅	+ 0.00040 ₂	- 30.4	1.60	- 18.1	+ 0.9
6—II	- 26.6	2.8620 ₅	+ 0.0013 ₅	+ 0.00047 ₂	- 35.7	1.39	- 21.3	+ 4.3
b	- 28.9	2.8624 ₅	+ 0.0017 ₅	+ 0.00061 ₂	- 46.3	1.55	- 27.5	+ 2.4
0—I	0.0	2.8607 ₀	—	—	—	—	—	—

Распределение суммы главных напряжений σ_R по данным рентгенографических измерений представлено на фиг. 2 тонкой сплошной кривой. Кривые σ_R

и σ_M указывают на значительное расхождение экспериментальных и расчетных напряжений по абсолютным значениям. Оценка точности измерений может быть произведена с помощью фиг. 4, на которой представлена зависимость между деформацией кристаллической ячейки и напряжениями σ_M в поликристаллическом металле. При этом оказывается, что зависимость, выражаемая законом Гука, охватывает в пределах ошибок измерений все экспериментальные точки, кроме тех, которые близки к внутреннему контуру кольца. Отклонения от прямой (кроме точек a и $1-II$) нигде не превышают $\pm 0.0002 \text{ \AA}$. Точность определения σ_R достигает, таким образом, $\pm 5.3 \text{ кг/мм}^2$.

Отношение «рентгенографических» напряжений к «расчетным» достигает в среднем значения около 1.65. При расчете «рентгенографических» напряжений в предположении, что $(E/\nu)_R = 45\,000 \text{ кг/мм}^2$, получаем некоторые значения σ_R' (см. табл. 2), которые достаточно удовлетворительно согласуются с напряжениями σ_M . Точки эти σ_R' показаны на фиг. 2 сплошными кружками. Точность определения σ_R' достигает около $\pm 3.1 \text{ кг/мм}^2$, а разность $\sigma_M - \sigma_R'$ не превышает 4.3 кг/мм^2 .

4. Результаты рентгенографического исследования напряжений в стальном кольце можно сопоставить с данными аналогичного исследования оптическим методом напряжений в целлюлозном кольце (2). Сопоставление обоих экспериментальных исследований показывает, что точность проверки решения задачи рентгенографическим методом примерно такая же, как и при оптическом методе. Распределение σ_R' соответствует в основном решению, даваемому теорией упругости. Резкое расхождение между экспериментальными и расчетными данными имеется только вблизи внутреннего контура. Однако такое же расхождение вблизи контуров наблюдается и в работе, проводившейся оптическим методом. Таким образом несоответствие экспери-



Фиг. 4.

ментальных и расчетных напряжений вблизи внутреннего контура кольца может быть обусловлено граничными условиями. Резкое несоответствие экспериментальных и расчетных данных именно вблизи внутреннего края кольца, где напряжения достигают наибольшего своего значения, может быть также обусловлено более высокими абсолютными значениями рентгенографических напряжений по сравнению с расчетными. Такое превышение расчетных напряжений рентгенографическими, хотя и менее значительное, чем в настоящей работе, наблюдалось уже и ранее некоторыми исследователями (4). Имеющиеся в литературе указания дают основание отнести это превышение хотя бы частично за счет анизотропии кристаллической решетки. Полного разрешения, однако, вопрос этот еще не имеет, несмотря на то, что он привлек в последнее время внимание ряда авторов (5).

Широкое внедрение рентгенотензометрии в инженерную практику представляется, как показывает настоящее исследование, несколько преждевременным. Необходимо предварительно более глубокое изучение физических основ и некоторое усовершенствование техники рентгенографического метода определения напряжений.

Поступила в редакцию 20. IX 1940.

Институт механики
Академии Наук СССР.

X-RAY INVESTIGATION OF THE DISTRIBUTION OF INITIAL STRESSES IN STEEL RINGS

B. M. ROWINSKY

(Summary)

As is known, an exact solution of this plane problem of the theory of elasticity has been given by various authors. Experimental verification by optical methods is described in Koker and Filon's work.

The present work deals with the X-Ray analysis of distribution of stresses in steel rings on bending.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. 1937.
2. Кокер Э. и Файлон Л. Оптический метод исследования напряжений. Пер. с англ. 1936.
3. Möller H. „Mitt. K.-Wilh. Inst. Eisenforschg“. 1939. Bd. 21. [S. 295—308].
Glocker R. u. Osswald E. „Zeitschr. techn. Physik“. 1935. Bd. 16. [S. 237—242].
Giesen F., Glocker R. u. Osswald E. „Zeitschr. techn. Physik“. 1936. Bd. 17. [S. 145—155].
Glocker R., Hess B. u. Schaaber O. „Zeitschr. techn. Physik“. 1938. Bd. 19. [S. 194—200].
Ромберг В. „Журнал технической физики“. 1937. № 17. [Стр. 1728—1735].
4. Möller H. u. Barbers I. „Mitt. K.-Wilh. Inst. Eisenforschg“. 1934. Bd. 16. [S. 21—31].
Möller H. u. Barbers I. „Mitt. K.-Wilh. Inst. Eisenforschg“. 1935. Bd. 17. [S. 157—166].
Wever B. u. Möller H. „Mitt. K.-Wilh. Inst. Eisenforschg“. 1936. Bd. 18. [S. 27—30].
Möller H. u. Strunk G. „Mitt. K.-Wilh. Inst. Eisenforschg“. 1937. Bd. 19. [S. 305—315].
5. Glocker R. „Zeitschr. techn. Physik“. 1938. Bd. 19. [S. 289—293].
Лифшиц И. „Журн. эксперимент. и теоретич. физики“. 1938. № 5 [Стр. 581—592].
Bollentraht F. u. Osswald E. „Zeitschr. f. Metallkunde“. 1939. Bd. 31. [S. 151—159].
Möller H. u. Martin G. „Mitt. K.-Wilh. Inst. Eisenforschg“. 1939. Bd. 21. [S. 261—269].

СВЕРХСИЛЬНЫЕ УНИКАЛЬНЫЕ ИСПЫТАТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Ю. Н. МОРОЗОВ

(Москва)

Создание очень сильных испытательных машин больших размеров вызвано необходимостью подвергать испытанию большие детали и узлы в натуральную величину, теоретический расчет которых не внушает доверия из-за сложной конфигурации их и влияния масштабного фактора — несостоятельность закона подобия в проблемах прочности и пластичности. К сверхсильным мы относим машины, рассчитанные на нагрузку большую 500 т при условии, что их размеры на много превышают размеры ходовых машин. Подобные машины не находят себе большого спроса: применение их ограничено специальными опытами, и стоимость довольно велика. Поэтому фирмы, изготавливающие такие машины, выпускают их по индивидуальным заказам. Это обстоятельство в большинстве случаев позволяет приспосабливать каждую вновь изготавливаемую машину к специфическим требованиям лаборатории в части конструкции, габаритов, максимальной силы, приспособлений. Можно утверждать, что почти каждая такая машина имеет свои оригинальные особенности. На земном шаре сверхсильные машины насчитываются единицами. Все изложенные обстоятельства говорят за то, что эти машины следует рассматривать как уникальные.

В Европе сверхсильных уникальных машин очень мало. В США их можно насчитать больше десятка. В настоящее время самой большой испытательной машиной в мире является пресс Olsen на 4500 т, установленный в Национальном бюро стандартов (Вашингтон). Незадолго до появления этого пресса, в 1909 г., выдающийся американский конструктор испытательных машин Эмери (Emery) разработал проект еще большей универсальной машины в 10 000 т при сжатии и в 5000 т при растяжении. Машина была приспособлена для испытания образцов длиной до 30 м. Тогда же в Национальный конгресс США был внесен проект билля о постройке этой гигантской машины для государственных надобностей. Билль, однако, не был утвержден, несмотря на склонность американцев к рекордам. Повидимому, высокая стоимость машины (около 2 млн. долларов) и отсутствие конкретных доводов в ее необходимости заставили конгресс отклонить предложение. Таким образом чертежи этой самой большой машины до сих пор лежат неиспользованными.

Ниже дается описание наиболее интересных сверхсильных машин. На многих очень сильных экземплярах прессов Amsler, Mohr и Federhaff, MAN, достигающих 1000 т и выше, мы, например, не останавливались, поскольку они представляют точную копию таких же хорошо известных прессов для малых нагрузок. Мы пропустили также машины, которые, имея все основания считаться уникальными, или устарели по своей конструкции, или не получили хороших отзывов. Опускается также описание машин запроектированных, но почему-либо не осуществленных.

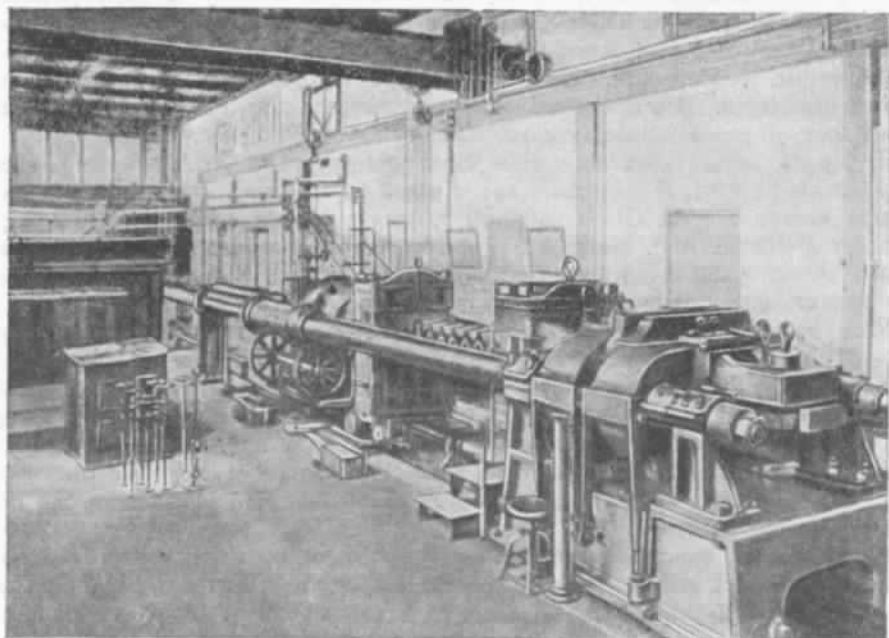
Так, к первой категории из числа опущенных нами машин относится: универсальная машина J. Eads силой 800 т горизонтального типа с гидравлическим нагружением и динамометром в виде упругого стержня (построена в 1868—1871 гг. в США для испытания частей мостов); машины рычажные Fairbanks силой до 500 т (США, 1880—1890 гг.); машины Kellog гидравлические, горизонтальные,

с измерением силы ртутными манометрами и манометрами Бурдона силой 600, 1200 и 2000 т (строились в США в период с 1890 по 1904 г. несколькими мостостроительными обществами). Несмотря на ряд недостатков, затрудняющих постановку опытов, большинство из них существует и поныне, давая вполне удовлетворительные по правильности показания. Здесь же отметим, что некоторые машиностроительные предприятия подготавливались к выпуску больших машин, но по тем или иным причинам не доводили дело до конца. Существуют очень интересные проекты универсальной машины Amsler горизонтального типа силой 3000 т и вертикального пресса с шестью плунжерами на ту же нагрузку. К этой категории никогда не осуществленных машин относятся многие конструкции Olsen, рекламируемые в его каталогах.

Несколько отступая от данного выше определения сверхсильных уникальных машин, считаем необходимым уделить особое внимание двум старейшим машинам, имевшим исключительное значение в развитии испытательного дела, а именно машинам Emery и Werder. Они рассчитаны всего лишь для нагрузок в 450 т и 100 т, но конструктивная их сторона заслуживает того, чтобы быть изученной.

1. Машины Emery

Из числа машин, выполненных по принципу Emery, к уникальным должны быть отнесены два экземпляра: универсальная машина арсенала Watertown (США) и универсальная машина National Bureau of Standards (США).



Фиг. 1.

Причисляя первую из них к классу сверхсильных уникальных машин, надо сделать оговорку. С современной точки зрения сила машины арсенала Watertown не представляет собой ничего из ряда вон выходящего. Машин с нагрузкой до 500 т очень много. Однако в свое время она была самой большой машиной по силе и размерам (фиг. 1). Конструктивные же особенности ее, сохраненные целиком или с изменениями в некоторых современных машинах, имеют так много необычного и оригинального, что заслуживают особо обстоятельного опи-

сания и позволяют даже рассматривать машину как образцовую. По крайней мере в Америке такая точка зрения держалась довольно долго.

Машина принадлежит к типу универсальных гидравлических машин с горизонтальной грузовой осью и комбинированной схемой силоизмерения. Характеристики машины следующие.

Сила машины (создаваемая нагрузка) при растяжении 360 т, при сжатии 450 т.

Габариты машины: длина 16 200 мм, ширина 2400 мм, высота 1950 мм. Кроме того, довольно значительная площадь занимает измерительной установкой и рабочей площадкой вокруг машины.

Фундамент под машиной имеет в поперечнике 2,8 м и по глубине заложения около 2,5 м. Крепление осуществляется длинными анкерными болтами.

Размеры винтовых тяг: диаметр 215 мм, длина 11 400 мм, расстояние в осях 1270 мм.

Высота грузовой оси над полом 1200 мм.

Размеры образцов до 9 м по длине при сжатии.

Собственный вес машины 80 т.

Проектирование и изготовление машины заняло 7 лет (1872—1878 гг.), и стоимость ее выразилась очень большой по тому времени суммой в 86 000 долларов.

Машина состоит из двух блоков, нагружающего и силоизмерительного, связанных двумя винтовыми тягами (фиг. 2). Передний неподвижный левый блок, в котором сосредоточено силоизмерительное устройство, закреплен на массивном цоколе анкерными болтами. Подвижной блок А при вращении гаек, сидящих на резьбе тяг В, перемещается по рельсам на катках и может подойти почти вплотную к неподвижному. Вращение гайки получают от зубчатой передачи и вала, расположенного внизу параллельно оси машины С. Один конец вала сопряжен зубчатым перебором со ступенчатым шкивом. Последние смонтированы в самостоятельной неподвижной бабке за подвижным блоком D.

Провисание винтовых тяг предотвращается тремя парами поддержек особого устройства. Поддержки посажены на пальцах, имеют противовесы и убираются по мере продвижения блока. На чертеже две из поддержек показаны опущенными.

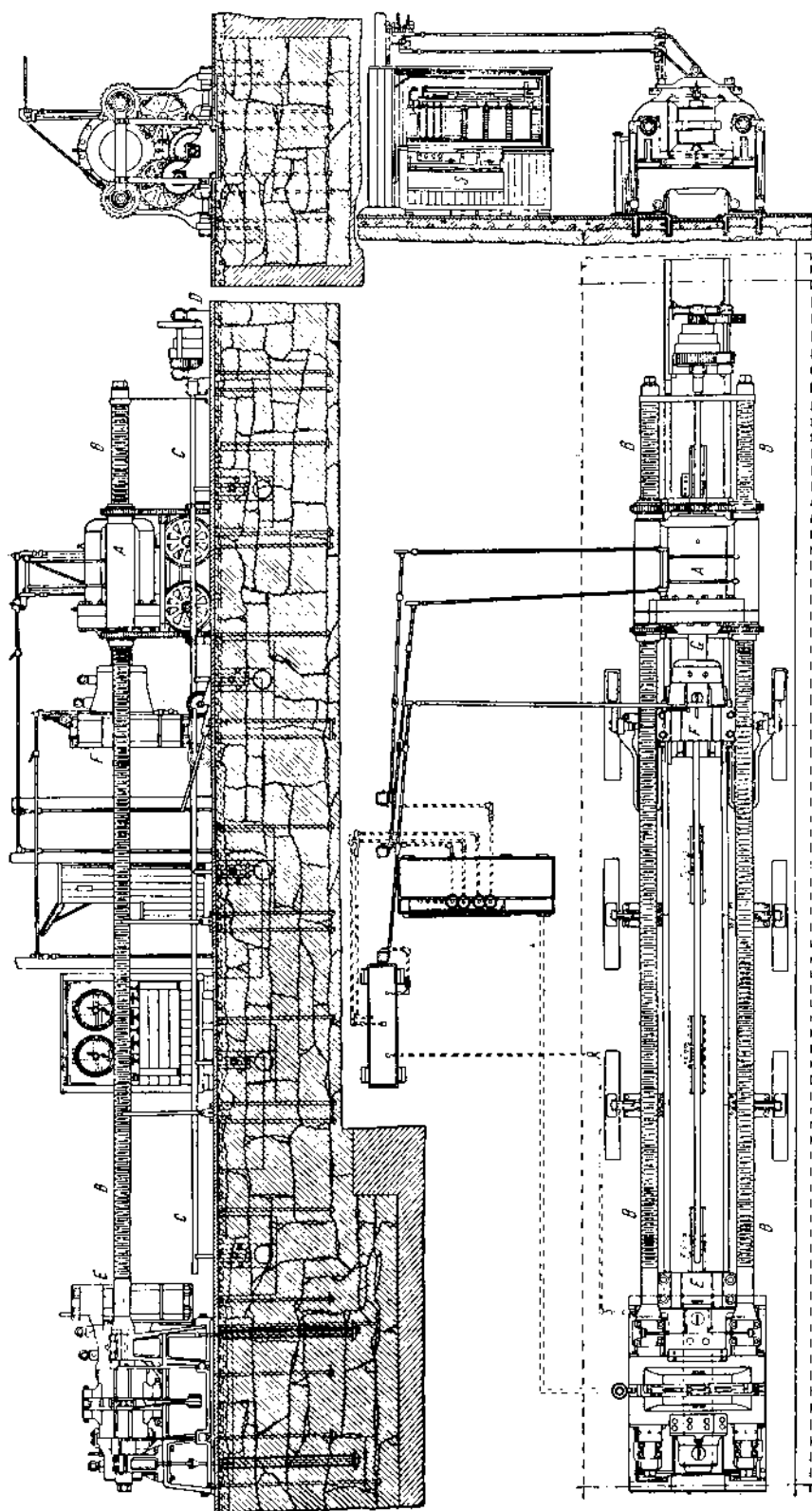
В подвижном блоке расточен цилиндр, в котором находится двусторонний поршень. Диаметр поршня — 500 мм, ход — 600 мм. Поршень уплотнен двойным кожаным манжетом и покрыт медной рубашкой, предохраняющей его от коррозии, так как рабочей жидкостью является вода. Челюсть¹ подвижного блока F, имеющая отдельную тележку, соединяется с поршнем при помощи штока G диаметром 250 мм. Захват — гидравлический, другими словами, крепление образца достигается не самозатяжкой, а нажатием на боковую поверхность его головки плашками с силой в 500 т. Такое же устройство принято и для подвесной челюсти неподвижного блока.

Перемещение поршня, а следовательно, скорость деформирования можно регулировать вентилями в пределах от 25 мм/мин до $1\frac{1}{2}_{1200}$ мм/мин.

Вода подается в цилиндр из грузового аккумулятора давления, который в свою очередь питается двухступенчатым паровым скальчатым насосом. Диаметры скалок — 250 и 140 мм.

В неподвижном блоке сосредоточен силоизмерительный механизм, который и является особенностью машины Emery, отличающей ее от всех прочих машин и способствующей исключительной чувствительности измерения. Этот механизм состоит из двух сопряженных между собой мембранных преобразователей гидро-

¹ Челюсть — поковка с полостью для размещения захватов: клиньев, чашек и т. д. В машине мы различаем две челюсти — активную, связанную с нагружающим механизмом и создающую таким образом деформацию, и пассивную, сопряженную с силоизмерительным органом машины или сидящую неподвижно на станине.

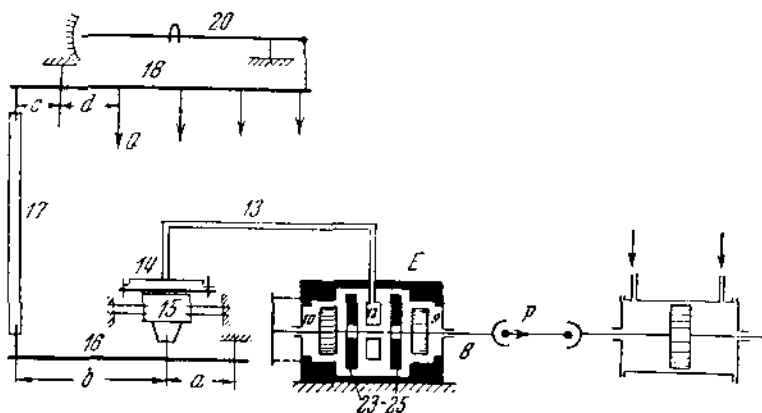


Фиг. 2.

статического давления¹ и рычажно-весовой системы. Принципиальная схема механизма в целом представлена на фиг. 3, а схематическое сочленение некоторых его деталей — на фиг. 4—6.

Согласно принципиальной схеме шток 8 пассивной левой челюсти вместе с двумя поршнями 9 и 10, жестко насаженными на нем, расположен в полости неподвижного блока *Е*. Эту полость можно условно назвать цилиндром. Кроме поршней, в цилиндре расположена кольцевая тонкостенная коробка 12, нажимные подвижные 23—25 и неподвижные детали, упорные выступы. При растяжении образца поршень 10 получает перемещение слева направо и коробка обжимается между нажимными деталями благодаря тому, что крайняя правая из них 25 встречает на своем пути одноименный упор. При испытании на сжатие компрессия тонкостенной коробки совершается в обратном порядке.

Тонкостенная коробка 12 есть не что иное, как мембранный преобразователь, заполненный жидкостью. Благодаря компрессии жидкость выдавливается по трубке 13 в другой преобразователь 14, имеющий несколько отличное устройство. Его можно назвать преобразователем обратного действия, потому что мембрана этого преобразователя передает давление на поршень 15, а отсюда на рычаг 16



Фиг. 3.

весового механизма. Тяга 17, второй рычаг 18 с поддонами для разновесов и стрелка 20 с рейтером довершают устройство этого механизма, предназначенного для уравнивания силы *P*. Обозначив площади соприкосновения поршней с мембранами через F_1 и F_2 и пользуясь обозначениями длин коромысел по схеме, зависимость между силой *P* и разновесами *Q* можно выразить равенством:

$$P = Q \frac{F_1}{F_2} \frac{bd}{ac} = kQ,$$

где *k* — передаточное число силоизмерительного механизма.

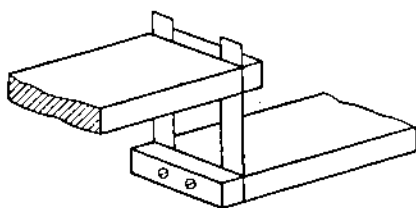
Так как площади F_1 и F_2 не сохраняют постоянного отношения и объемы преобразователей и соединяющего их трубопровода меняются с возрастанием давления по неустановленному закону, это число *k* меняется, и пользоваться им для градуировки не представляется возможным. Поэтому градуировать машину после сборки приходится непосредственно экспериментальным путем.

Расхождение действительного передаточного числа с теоретическим в данном случае никак нельзя объяснить потерями на трение в шарнирах. Если даже потери имеются, то они очень незначительны благодаря особому устройству шарниров, составляющих вторую, не менее важную особенность машин Емелю.

¹ Термин применяется взамен укоренившейся в технической литературе „Мессдозы“. Применение буквальной транскрипции этого немецкого слова в подобных случаях безусловно неудачно.

Сочленение всех рычагов здесь осуществлено на тонких упругих пластинках, работающих либо на растяжение, либо на сжатие. Ширина пластинок, при толщине их от 0,13 мм до 1,5 мм, подобрана с расчетом на допускаемое напряжение в 45 кг/мм². Свободная длина сжатых пластинок не превышает 5 мм, чем и объясняется их достаточная устойчивость (фиг. 4).

Более детальное представление об устройстве всего силоизмерительного блока дает фиг. 5, на которой блок показан в двух схематических разрезах.

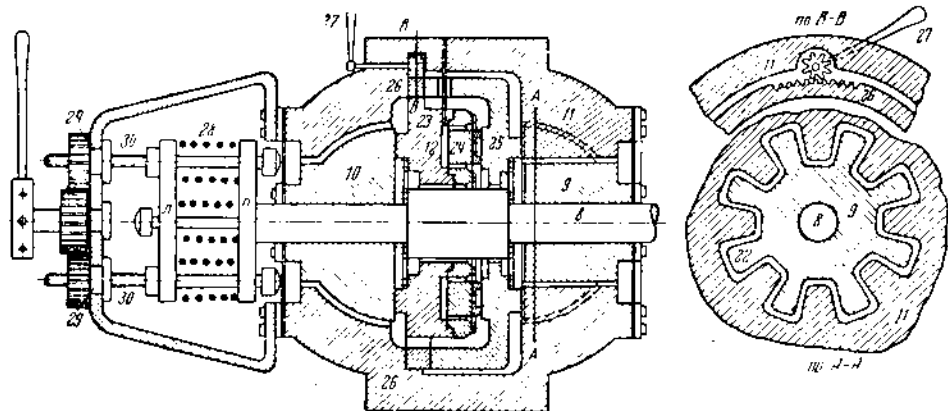


Фиг. 4.

Здесь под 8 значится шток, находящийся в полости блока. Стенки полости по внутренней стороне имеют гнезда для фасонных поршней 9 и 10, жестко сидящих на валу; поршни имеют на периферии ребристый венец. Венец виден в разрезе по АА. Высота ребер значительна. На левом чертеже разрез поршня 10 проходит по его ребру, поршня 9 — по впадине. Назначение ребер будет понятно из нижеследующего.

При испытании на растяжение поршень 10 выходит из своего гнезда и передает своими ребрами усилие нажимному кольцу 23, в виточке которого уложены четыре тонкостенных камеры преобразователя давления. С противоположной стороны камеры встречают сопротивление от поршенька 24 и кольца 25. Кольцо находит упор на ребрах стенок блока. Ребра поршня 9 отходят при этом по своему гнезду несколько вправо, образуя зазор порядка 0,005 мм.

При испытании на сжатие порядок взаимодействия частей должен меняться на обратный. Чтобы обеспечить эту возможность, необходимо кольцу 25 предоставить свободу перемещения в левую сторону. Для этого между его торцевой



Фиг. 5.

кромкой и стенкой блока помещен клин 26. Этот кольцевой клин выполнен в виде спирального витка и разделен на две части, каждая из которых занимает менее полуокружности и расположена симметрично относительно другой. Клин переставляется зубчатой передачей от рукоятки 27. Он устанавливается с таким расчетом, чтобы при испытании на растяжение кольцо 25 подходило почти вплотную к правой стенке гнезда, а при испытании на сжатие — между ним и этим кольцом устанавливался зазор, равный ранее указанному, т. е. в 0,005 мм. Этим приспособлением ограничивается ход поршней 9 и 10 и их разбег при отдаче после разрушения образца, а одновременно предохраняется тонкая оболочка преобразователя от чрезмерно большой динамической нагрузки.

Чтобы свести трение к возможному минимуму, во всей конструкции широко использован метод подвешивания поршней и колец на мембранах и гибких пластинках. Этот метод почти всегда применяется в хороших преобразователях небольших размеров. На мембранах подвешены оба поршня 9 и 10 вместе с валом к стенкам блока, кольца 23 и 25 к валу, поршень 24 к кольцу 23, поршень 15 к стенкам своего цилиндра (фиг. 3). На схеме мембраны показаны жирными линиями.

Очень важным органом для правильной работы механизма является набор пружин, скрытых в обойме, слева на фиг. 5. Назначение их заключается в том, чтобы держать все части силоизмерительного механизма во взаимном напряженном состоянии. При испытании на растяжение пружины должны быть так настроены, чтобы отжимать все части вправо, при сжатии пружины перестраиваются и отжимают части влево.

Настройка пружин производится шестернями 29. Очевидно, работа пружин должна сочетаться с работой клина 26. Необходимо отметить, что в натуре набор пружин получил несколько иное конструктивное оформление.

Весь блок, сквозь который проходят концы винтовых тяг, крепящихся на мощных кронштейнах, подвешен дополнительно на вертикальных плоских рессорах, предназначенных для амортизации отдачи в момент разрушения образца.

Для более отчетливого представления о работе измерительной системы Emery приводим некоторый цифровой материал. Толщина слоя жидкости в оболочке преобразователя составляет 0,5 мм. В качестве жидкости применен спиртовой раствор глицерина.

Внутренний диаметр соединительной трубки 13 не превышает 1,5 мм.

Толщина самой мембраны 0,125 мм.

Количество жидкости, выдавливаемое при нагрузке в 400 т, приблизительно составляет 80 мм³. Линейное перемещение мембраны при этой нагрузке не превышает $5 \cdot 10^{-4}$ мм.

Общее передаточное число комбинированной силоизмерительной системы, включая рычажные весы, близко к 420 000.

Переходя к деталям рычажно-весового механизма (фиг. 3), необходимо отметить, что поддоны главного коромысла были названы так при общем описании машины в целях упрощения. По существу это не поддоны, а штанги с опорными наконечниками, на которых укладываются разновесы. Наборы разновесов расположены на этажерках, обслуживающих соответствующие штанги (фиг. 6). Принцип работы такого механизма сейчас можно встретить во многих контрольных машинах. В данном случае к главному коромыслу подвешены 4 штанги, а следовательно, имеется столько же этажерок. На схеме фиг. 6 показана лишь одна из них в боковом виде.

Первые три поддона имеют по 9 разновесов, четвертый поддон — 7 разновесов. Каждый разновес эквивалентен:

на 1-м поддоне . . .	100	англ. фунт., всего .	900	англ. фунт.
на 2-м . . .	1 000	. . .	9 000	. . .
на 3-м . . .	10 000	. . .	90 000	. . .
на 4-м . . .	100 000	. . .	700 000	. . .

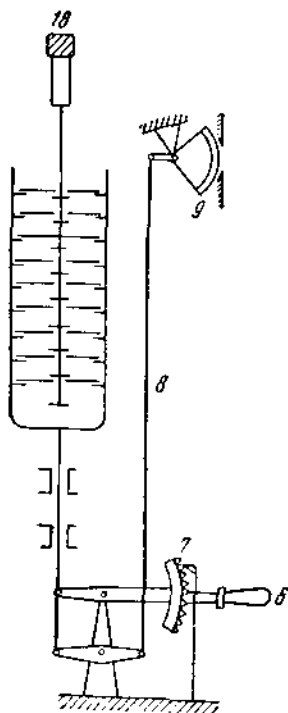
Итого 799 900 англ. фунт.

Нехватющие до 800 000 англ. фунт., или до 450 т, еще 100 англ. фунт. уравниваются рейтером на стрелке. Благодаря рейтеру абсолютная погрешность отсчетов ΔT может быть оценена примерно в 0,5 англ. фунт. в силу того, что стрелка имеет 100 делений. Одновременно с этим абсолютная погрешность чувствительности $\Delta \tau$ в самом начале шкалы при нагрузке порядка 100 кг составляет всего лишь $4 \cdot 10^{-5}$ кг по весу рейтеру, или 16 кг на образце, если учесть передаточное число в 420 000. С увеличением нагрузки, повидимому, чувствительность еще уменьшается. Таким образом машина Emery не удовлет-

норяет требованию $\Delta T > \Delta t$, а за действительную погрешность отсчетов ее следует принять не 0.5 кг, а 16—20 кг. Однако для машины столь больших размеров точность отсчетов в 20 кг более чем достаточна и практически даже не требуется.

Постоянство показаний машины также стоит очень высоко, так как величина в $4 \cdot 10^{-5}$ кг была получена как максимальное из отклонений в семи случаях¹.

Возвращаясь к конструктивной стороне устройства поддонов и этажерок (фиг. 6), необходимо остановиться на приспособлении, упрощающем процесс взвешивания. Рукоятка рычага 6, перемещающего этажерку по вертикали, зацепляется собачкой храповика 7 при пересадке каждого разновеса с этажерки на штангу. Далее каждая из 4 рукояток связана тягой 8 с сектором 9. На секторе проставлены значения грузов, и все секторы собраны вместе так, чтобы отсчет читался сразу.



Фиг. 6.

Весы смонтированы в небольшом застекленном шкафу (фиг. 2 дет. S), из которого выведены только наружу рукоятки. Разновесы латунные, золоченные. Управление весами требует большого опыта и внимания со стороны обслуживающего машину персонала. О внешнем виде их можно судить по фотографии, относящейся к менее сильной машине Emery-Sellers позднейшего происхождения (фиг. 7). На общем виде, кроме трубопроводов к измерительным механизмам, показан еще второй шкаф с распределительными органами гидравлической сети.

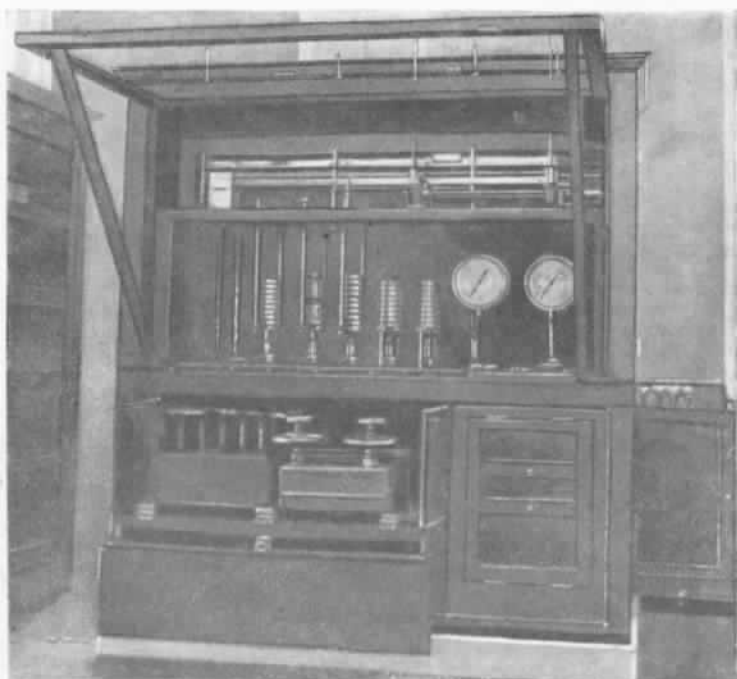
Для калибровки машины Emery и последующих ее проверок пришлось одновременно построить вторую машину. Эта машина, вертикального типа, была использована как контрольная. Принцип силоизмерения в контрольной машине остался тем же. Благодаря расположению ее грузового стола в горизонтальной плоскости представилась возможность вести калибровку контрольной машины естественными грузами. Для этого была использована всего лишь одна гиря весом в 4.5 т, которая позволила при наличии специальных домкратов применить ступенчатый метод тарировки и провести калибровку по всей шкале до 450 т.

Калибровка горизонтальной машины Emery заключалась в том, что вынутые из нее четыре преобразователя давления, соединенные с преобразователем обратного действия и рычажно-весовой системой, обжимались на контрольной машине, по показаниям которой подбирались разновесы поверяемой машины.

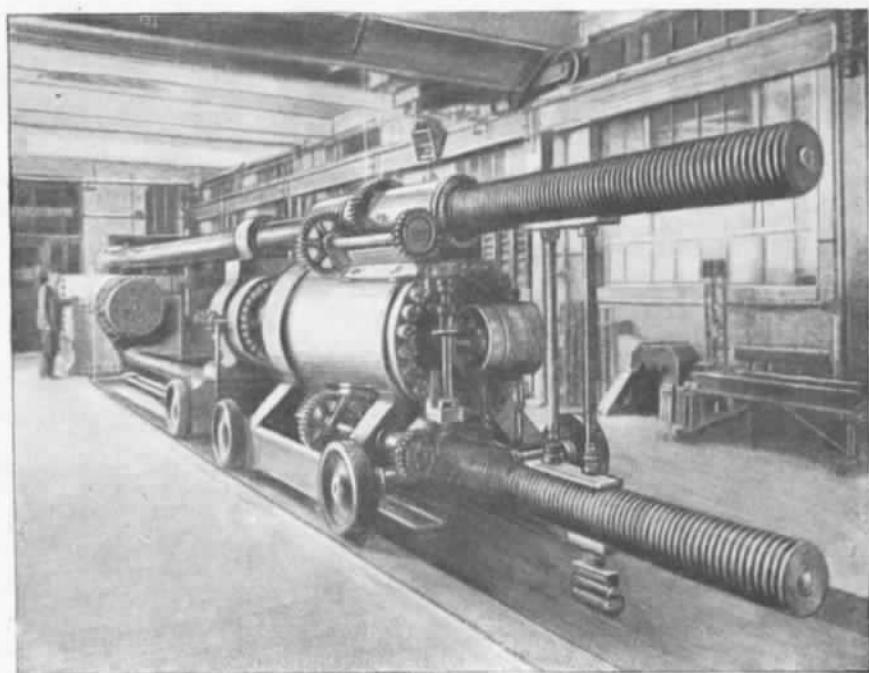
Упомянутая ранее вторая сверхсильная машина Emery была построена уже в начале нашего столетия для Национального бюро стандартов США. Она получила несколько иное внешнее оформление (фиг. 8) и превосходила первую по силе: 1000 т на сжатие и 525 т на растяжение. Устройство ее измеритель-

¹ Данные, имеющиеся в книге Unwin W. C. The Testing of Materials of Construction, 1898 г., на которые ссылаются многие авторы, могут быть приняты лишь после некоторого анализа, в результате которого приходится остановиться на вышеприведенных цифрах и выводах. Unwin оценивает абсолютную погрешность чувствительности в

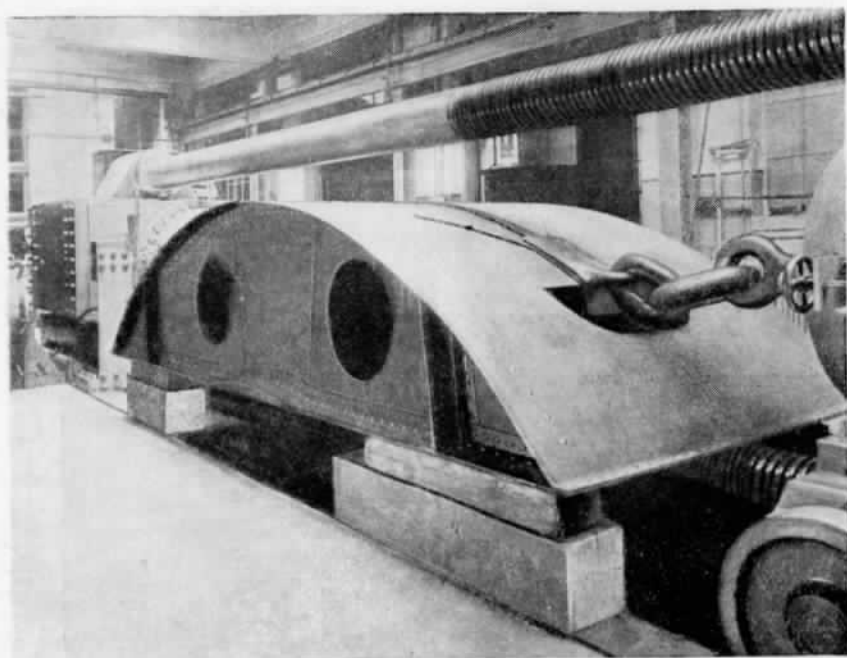
¹ от нагрузки в 200 англ. фунт. Если это понять в буквальном смысле, то 2 250 000 выходит, что вес рейтера во время испытания машины менялся на 1×10^{-7} г, или что рейтер смещался на 2.5×10^{-6} деления шкалы. Оба случая представляются совершенно невероятными.



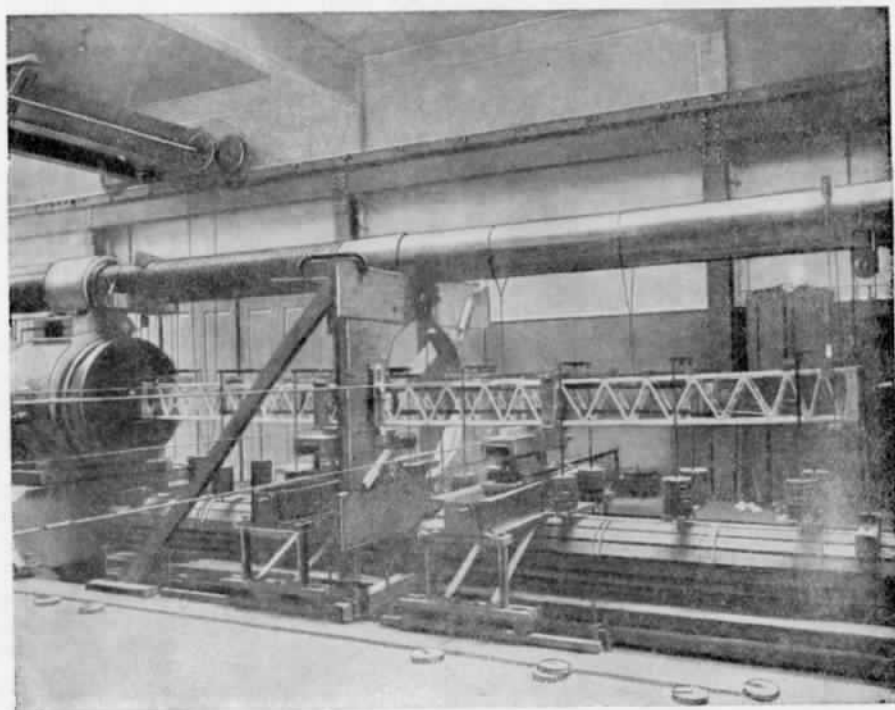
Фиг. 7.



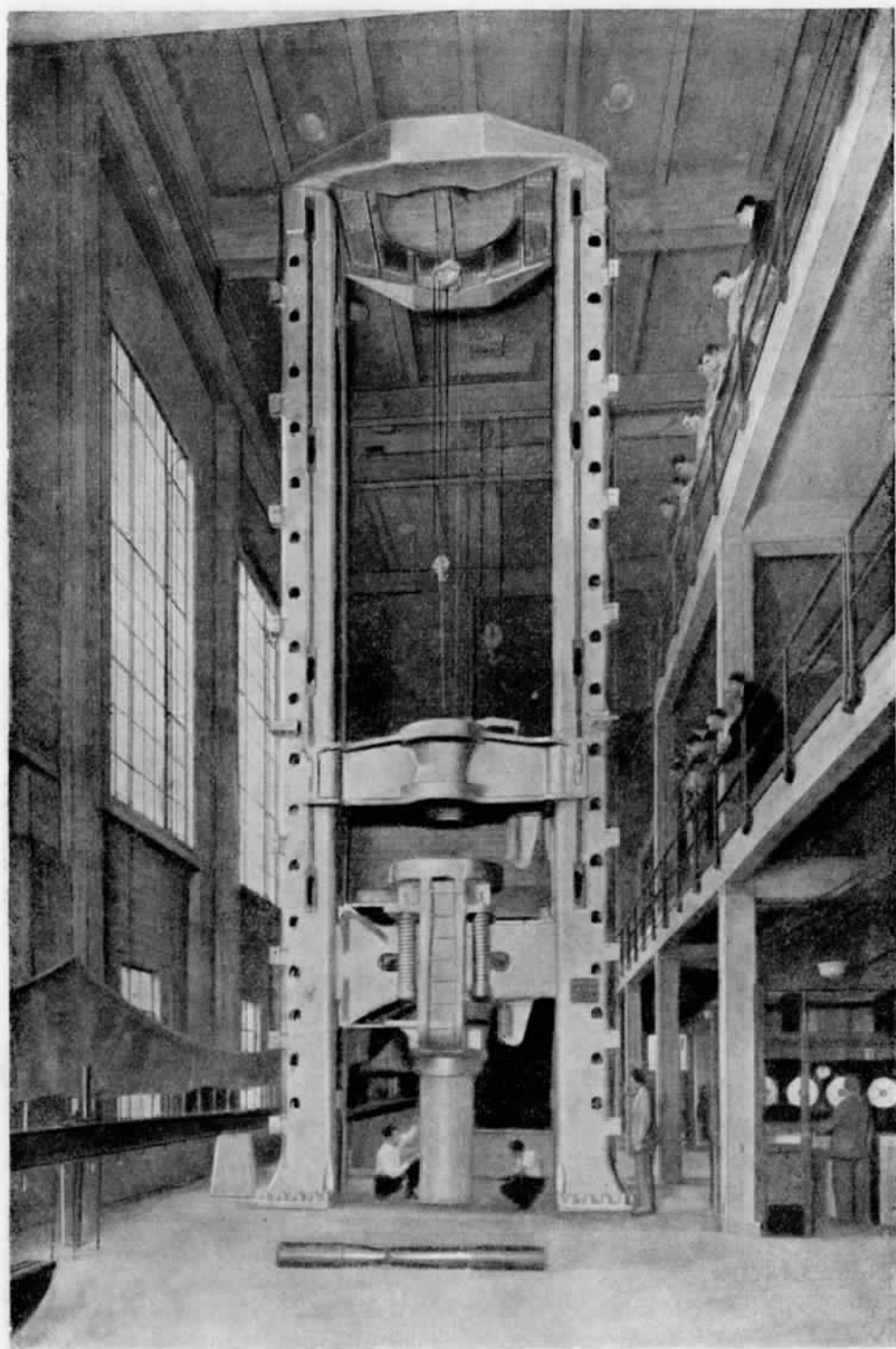
Фиг. 8.



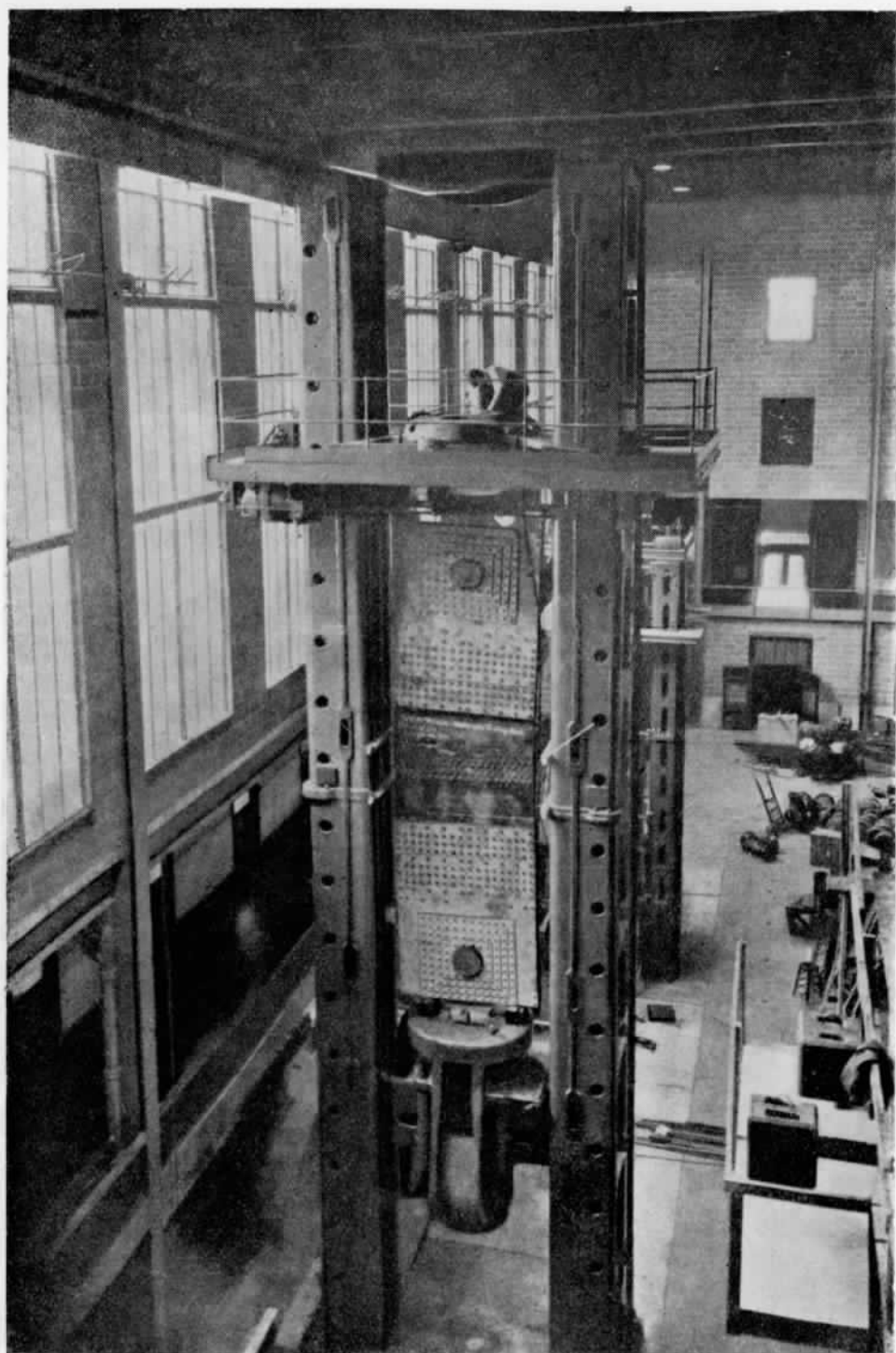
Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

ной системы, очень усовершенствованное с конструктивной стороны, принципиально осталось тем же. Фиг. (9) и (10) дают представление о постановке опытов на ней: на фиг. 9 показано проводимое испытание части подводной лодки в натуральную величину, на фиг. 10 показано испытание на продольную устойчивость решетчатой стойки из алюминиевого сплава.

Интересно отметить, что одна из машин Emery позднейших выпусков (зав. Sellers) имеется в Ленинградском политехническом институте им. т. Калинина. Правда, она значительно меньших размеров и рассчитана на силу в 100 т.

2. Машины Baldwin-Emery

Из числа уникальных сверхсильных машин наиболее современной является машина системы Baldwin-Emery силой до 1800 т. Она была изготовлена в 1932 г. фирмой Baldwin Southwark Corp. (Philadelphia, США) по заказу Калифорнийского университета и установлена в Механической лаборатории в Berkeley.

Фирма Baldwin S. Corp., располагая патентами Emery, с 1928 г. строит по выработанной ею конструкции большие вертикальные испытательные машины универсального типа, начиная от 150 т и выше. По силе машина Калифорнийского университета считается самой большой из этой серии (фиг. 11). За нею следуют машина Иллинойского университета силой в 1350 т (фиг. 12), имеющая высоту, не уступающую первой, и машина, принадлежащая Chesapeake & Ohio Railway Road (Huntington), силой в 450 т. Далее идет множество более мелких машин этой серии силой в 275 т, установленных в лабораториях высших школ и исследовательских институтов Америки. Из них в первую очередь следует отметить Oregon State Agricultural College, U. S. A. Navy Model Bassin; City of Northford Columbia University (Con-cut) и др. В 1937 г. одна из таких машин была поставлена в Австралию — Council of Scientific and Industrial Research Australian.

Сверхсильная машина Baldwin-Emery относится к типу вертикальных универсальных машин. Сила ее при сжатии достигает 1800 т (4 000 000 англ. фунт.), при растяжении 1350 т.

Габаритные размеры машины следующие.

В надземной части: высота 14.330 м, ширина 5.256 м, длина 3.660 м; в подземной части (колодезь): глубина 5.800 м, ширина 4.600 м, длина 5.920 м.

Вес всей машины 220 т.

Максимальная высота образцов, колонн или стержней, одинаковая при опытах на растяжение и сжатие, 12.5 м.

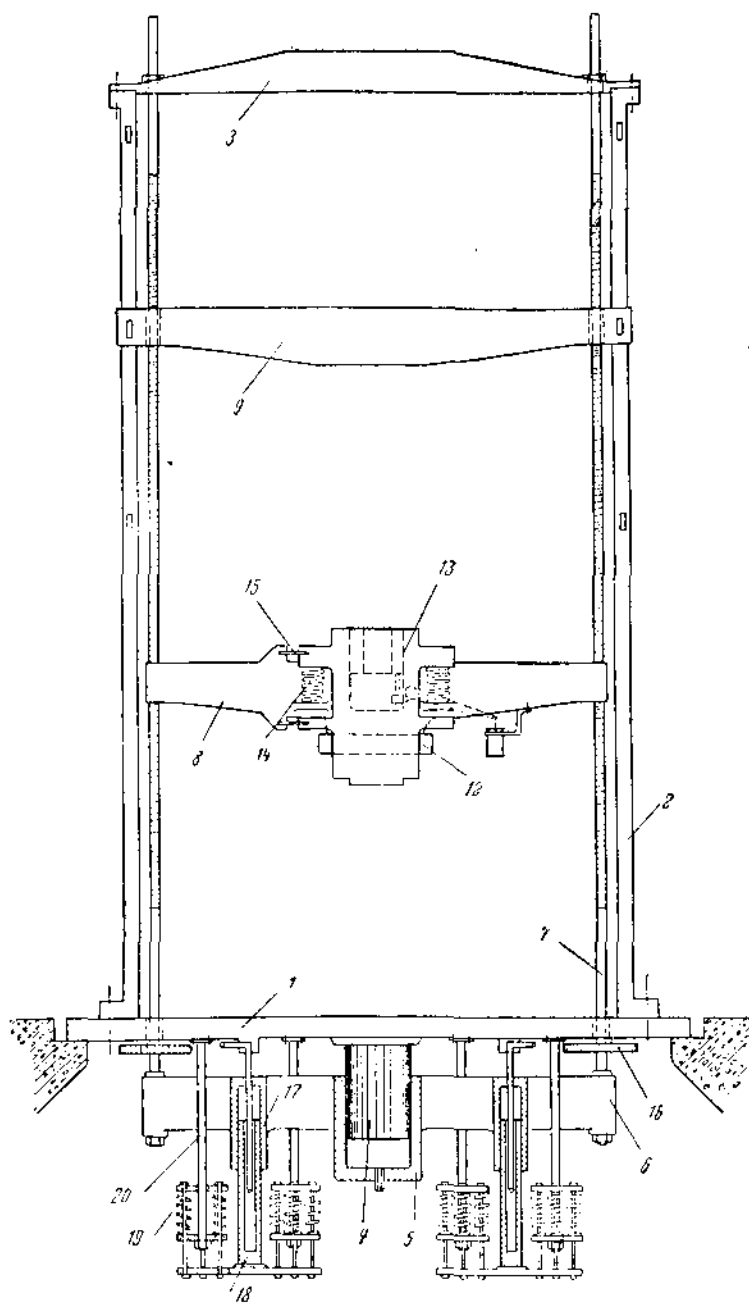
Пролет стола для поперечного изгиба балок 3.600 м.

Расстояние между колоннами в свету 3.000 м.

По внешнему виду машина Baldwin-Emery несколько напоминает сверхсильную машину Riehle. В действительности она построена и работает по совершенно иному принципу и имеет много особенностей, выделяющих ее среди прочих машин. Схема этой машины приведена на фиг. 13.

Станина машины представляет собой замкнутую жесткую раму, состоящую из цокольной плиты 1, двух колонн 2 и архитрава 3. Попытки изготовлять эти части литыми из чугуна закончились неудачно: одна из колонн иллинойской машины дала трещину. Вследствие этого для последующих машин применяется стальное литье и даже фасонный прокат со сваркой.

Цокольная плита, изготовленная в виде составной ребристой коробки, опирается с трех сторон на фундамент, а с четвертой поддерживается двутавровыми балками, перекрывающими колодезь. Плита является центральной частью машины; к ней крепятся сверху колонны станины на 18 болтах каждая, снизу — все детали нагружающего механизма; одновременно она дает упор образцам, подвергающимся испытанию на сжатие, и служит мостом для испытания на изгиб. Будучи совершенно неподвижной и жестко связанной с фундаментом анкерными болтами, плита приспособлена самым выгодным образом для несения перечисленных функций.



Фиг. 13.

Для упрощения заправки в машину громоздких образцов верхняя плоскость плиты совмещается с плоскостью пола лаборатории. Отсюда присвоенное этой серии машин название *Floor type*. Благодаря такому устройству образцы могут завозиться на плиту в тележках, на катках и даже на грузовых автомобилях. В качестве частного примера можно сослаться на испытания в этой машине целого танка с гусеничным ходом, самостоятельно зашедшего на цокольную плиту.

Поверхность плиты калифорнийской машины снабжена приспособлениями для крепления образцов и опор, а именно: отверстиями и пазами. Нижележащие механизмы предохраняются от загрязнения тем, что щели между плитой и полом прикрываются листовым рифленным железом.

Вес плиты и всех подвешенных к ней деталей подобран с расчетом на устойчивость машины в целом, для чего общий центр тяжести сосредоточен ниже опорных поверхностей плиты. При высоте машины в 14,5 м это обстоятельство весьма существенно.

Колонны, установленные на плите, принимают на себя усилия, развивающиеся при испытаниях, направляют активную траверзу 8 и служат для укрепления пассивной траверзы 9. Кроме того, они представляют возможность экспериментатору располагаться на любой высоте для проведения необходимых наблюдений. Для этого имеются два пути: во-первых, круглые отверстия в отливках позволяют устраивать дощатые настилы, на которые можно взобраться по лестницам. Крепление последних упрощается приливами, ясно видимыми на всех фотографиях и чертеже (фиг. 14). Во-вторых, подъем экспериментаторов и прислуги можно организовать устройством лифта по примеру Иллинойского университета (фиг. 12).

Каждая колонна — составная, состоит из двух привернутых болтами частей. Верхние концы колонн стянуты массивным архитравом 3, обращающим станину в жесткую раму. Архитрав имеет окна для пропуска крюка от подъемного крана и кронштейн для талей.

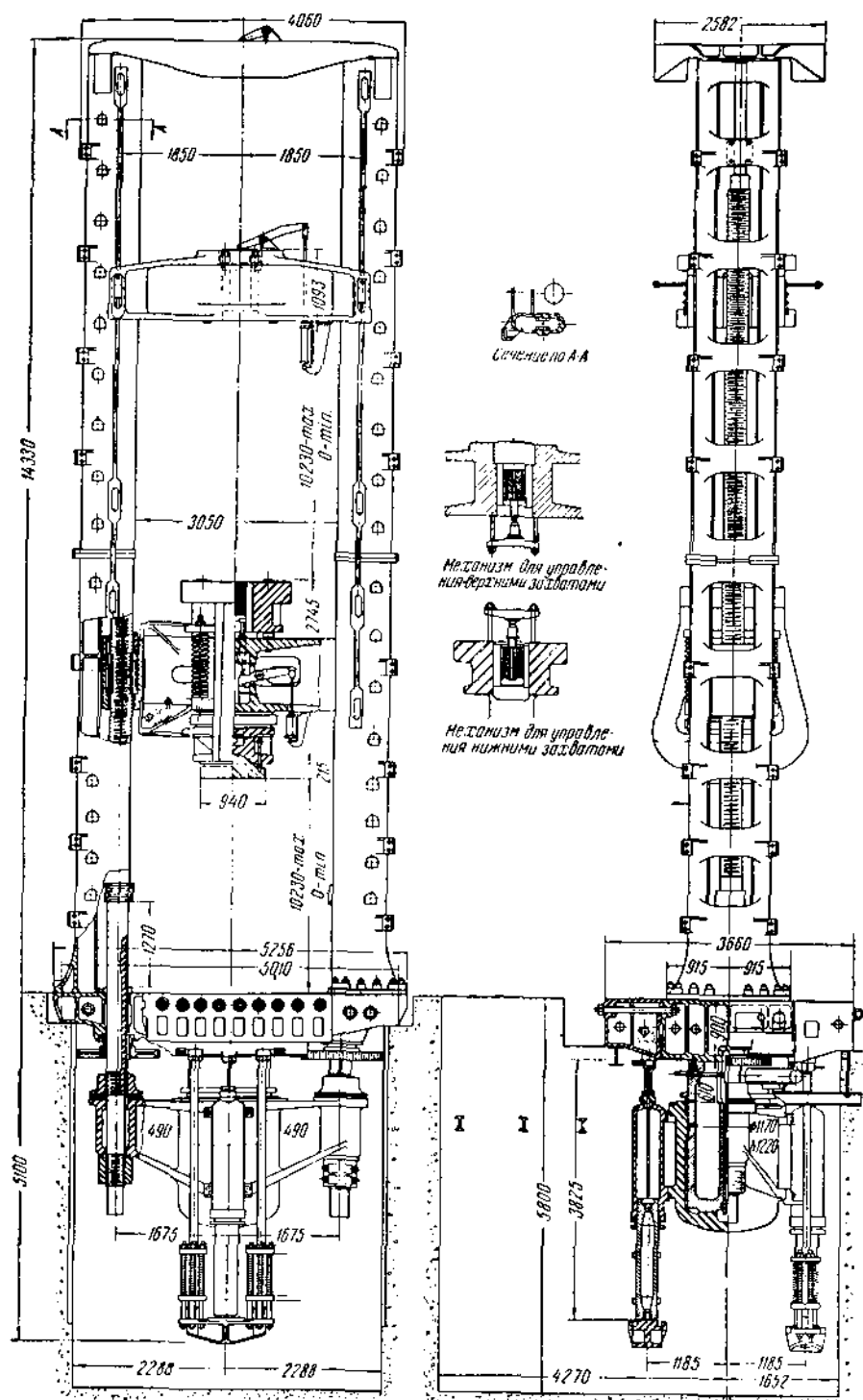
Распределение сил в машине таково, что при испытаниях на растяжение колонны воспринимают сжимающие усилия, а при прочих видах испытания вовсе не принимают участия в работе. Что касается плиты, то во время опытов на сжатие она только обжимается, в остальных случаях она изгибается выпуклостью вверх.

Нагружающий механизм машины относится к числу гидравлических. Неподвижный плунжер 4 подвешен к плите 1. По плунжеру ходит грузовой цилиндр 5, лапы которого 6 связаны с двумя массивными вертикальными тягами 7. Тяги скрыты в полости колонн (фиг. 14). По мере подачи масла по каналу, проходящему сквозь плунжер, цилиндр 5 вместе с тягами и активной траверзой 8 перемещается книзу, благодаря чему осуществляется желаемая деформация испытуемого образца. При креплении последнего между траверзами активной и пассивной 9 происходит растяжение. При креплении его между той же активной траверзой и цокольной плитой — сжатие. Испытание балок на изгиб достигается нажатием на них со стороны траверзы.

Для дальнейшего уяснения конструкции машины необходимо перейти к траверзам. Траверза 9 целиком может быть отнесена к числу захватно-центрирующих органов машины. Она крепится к колоннам намертво при помощи клиньев и пропускает свободно тяги 7. Окна для клиньев в количестве пяти на каждой колонне расположены по строганной дорожке, ясно видной на всех фотографиях. В средней части траверза имеет гнездо для клиньев или других захватных приспособлений (выноски на чертеже фиг. 14).

Траверза 8 несет более сложные функции. Во-первых, она совершает перемещение вместе с тягами, создавая усилие для деформации образцов. Во-вторых, она имеет захватное приспособление, обращенное вверх, и нажимную подушку, обращенную книзу. В-третьих, она располагает возможностью перемещаться независимо от тяг. Наконец, в качестве четвертой функции, траверза 8 несет в себе основной силовой измерительный орган машины — мембранный преобразователь давления системы Emery, 12. Захватные приспособления и нажимная подушка не заделаны непосредственно в траверзу, а принадлежат особой детали — ядру 13, которое охватывает траверзу кольцом.

Перемещаясь вдоль тяг при условии, что последние не участвуют в поступательном движении, активная траверза совершает холостой ход. Он используется для подгонки к размерам образцов, для подъема и установки их, для



Фиг. 14.

перенесения пассивной траверзы 9 на разные высоты. Холостой ход достигается вращением тяг 7, на которых имеется резьба. На тягах насажены бронзовые гайки, заложенные и неподвижно укрепленные в траверзе. Направляющие дорожки для траверзы внутри колонн показаны на фиг. 14, сечение А—А.

Данные по тягам таковы: материал — ванадиевая сталь, вес каждой тяги порядка 11 т, длина 17,5 м, диаметр нарезанной части 305 мм, шаг резьбы 75 мм. Резьба прямоугольная, двухзаходная. Глубина резьбы 12,5 мм.

Напряжения, остающиеся растягивающими при всех видах испытаний, при максимальных нагрузках достигают:

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{1800000}{2 \times 61575} = 14.8 \text{ кг/мм}^2.$$

При этом упругое удлинение тяг составляет:

$$\Delta l = \sigma \frac{l}{E} = \frac{15 \times 15000}{2 \cdot 10^4} = 11 \text{ мм.}$$

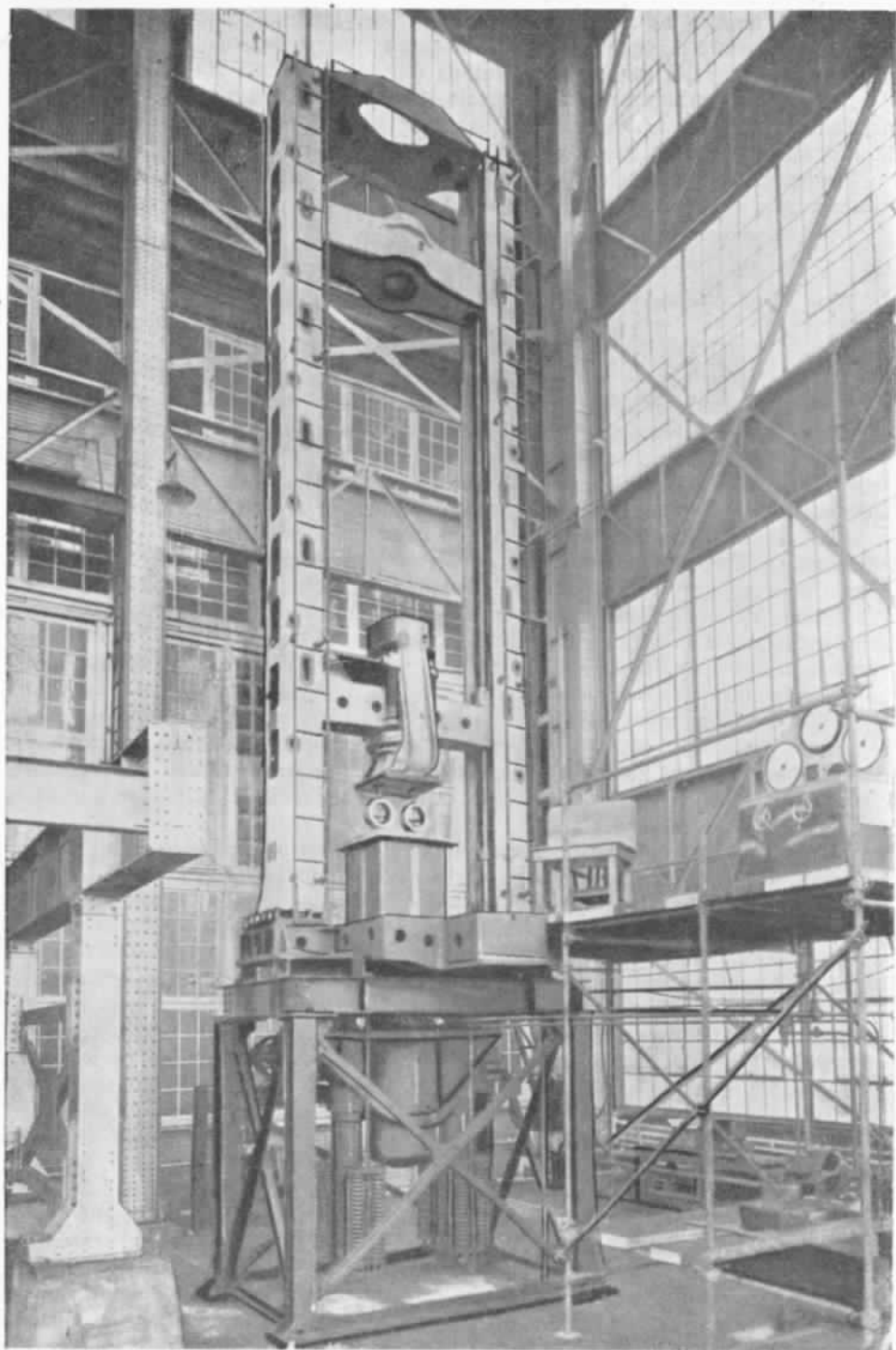
Вращение тяг осуществляется системой цилиндрических шестерен 16 совместно с червячным редуктором, которые приводятся отдельным электромотором мощностью в 15 квт. Шестерни и редуктор видны на боковом разрезе машины (фиг. 14). Мотор виден на заднем плане фотографии (фиг. 15), представляющей машину Колумбийского университета во время сборки на стапелях завода.

Изменение в направлении холостого хода активной траверзы достигается реверсированием самого мотора. Скорость холостого хода равняется 20—90 см/мин, в зависимости от установленного мотора и редуктора.

Детали крепления тяг и шестерен чрезвычайно просты. Тяги упираются на лапы цилиндра 6 посредством роликовых подшипников, рассчитанных на их вес, включая и траверзу. В верхней и нижней части они не имеют резьбы, так как на некоторой длине, соответствующей ходу цилиндра, они получают направление в бронзовых втулках. Шестерни не посажены непосредственно на тягах, а имеют отдельные втулки, которые своими фланцами заложены в цокольную плиту (фиг. 14). В свою очередь втулки соединены с тягами шпонками на скользящей посадке. Это устройство обеспечивает осевое движение тяг независимо от вращательного.

Возвращаясь к основным деталям нагружающего механизма, необходимо отметить, что рабочий ход траверзы, тяг и главного цилиндра равняется 1220 мм, а диаметр главного плунжера — 1700 мм. Скорость подачи регулируется бесступенчато в пределах от 0 до 50 мм/мин. Плунжер уплотнен специальными кожаными манжетами, которые, по свидетельству фирмы, гарантируют от просачивания масла при минимальных потерях на трение. Последние, однако, не создают в данной конструкции особой опасности, так как масло не применяется для измерения силы. Масло, лучше всего минеральное тяжелой марки, подается насосом под давлением порядка 175 атм. Калифорнийская машина снабжена ротационным насосом с радиальными поршнями системы Hele-Shaw мощностью в 37 кв. Подача насоса регулируется бесступенчато.

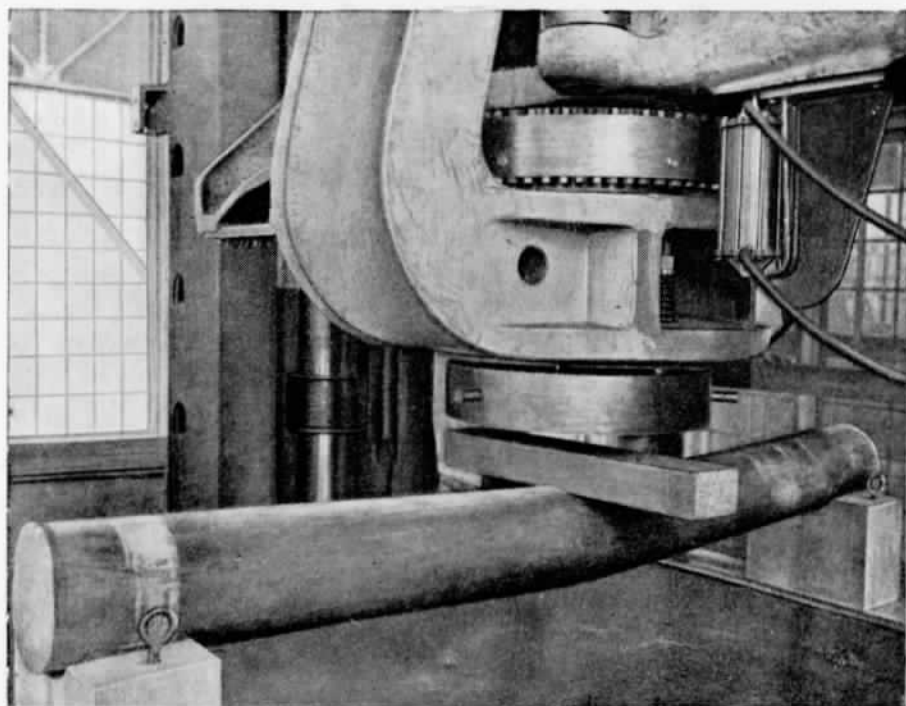
Последним звеном нагружающего механизма являются два малых обратных цилиндра 17. Они расположены симметрично по обе стороны главного цилиндра и служат для возвращения последнего вместе со связанными с ним деталями в исходное положение. Это достигается благодаря тому, что обратные цилиндры, также подвижные, могут в случае надобности отжиматься маслом в сторону, противоположную главному цилиндру. Их плунжеры 18 крепятся к станине через посредство спиральных цилиндрических пружин 19. Пружины амортизируют отдачу потенциальной энергии образца в момент его разрушения. Машина Калифорнийского университета имеет 24 пружины; машины, предназначенные для меньших нагрузок, удовлетворяются меньшим количеством пружин. Например, колумбийская машина силой 275 т имеет всего лишь 8 пружин (фиг. 15). Пружины 19 опираются на шайбы, которые поддерживаются тягами 20.



Фиг. 15.

Придерживаясь установленного порядка в описании конструкций испытательных машин, необходимо задержаться еще на двух узлах — силоизмерительном и захватно-центрирующем, которые уже были затронуты в предыдущем изложении.

Силовизмерительный механизм сосредоточен, как было указано, в активной траверзе. Он состоит из преобразователя Emery 12, коробка которого заложена между траверзой и ярмом 13. Это простое устройство способствует тому, что при всех видах испытания преобразователь работает всегда в одном и том же направлении. Пластины 15 предназначены для центральной установки ярма, которое должно иметь некоторую игру. Четыре пружины 14 создают перво-



Фиг. 16.

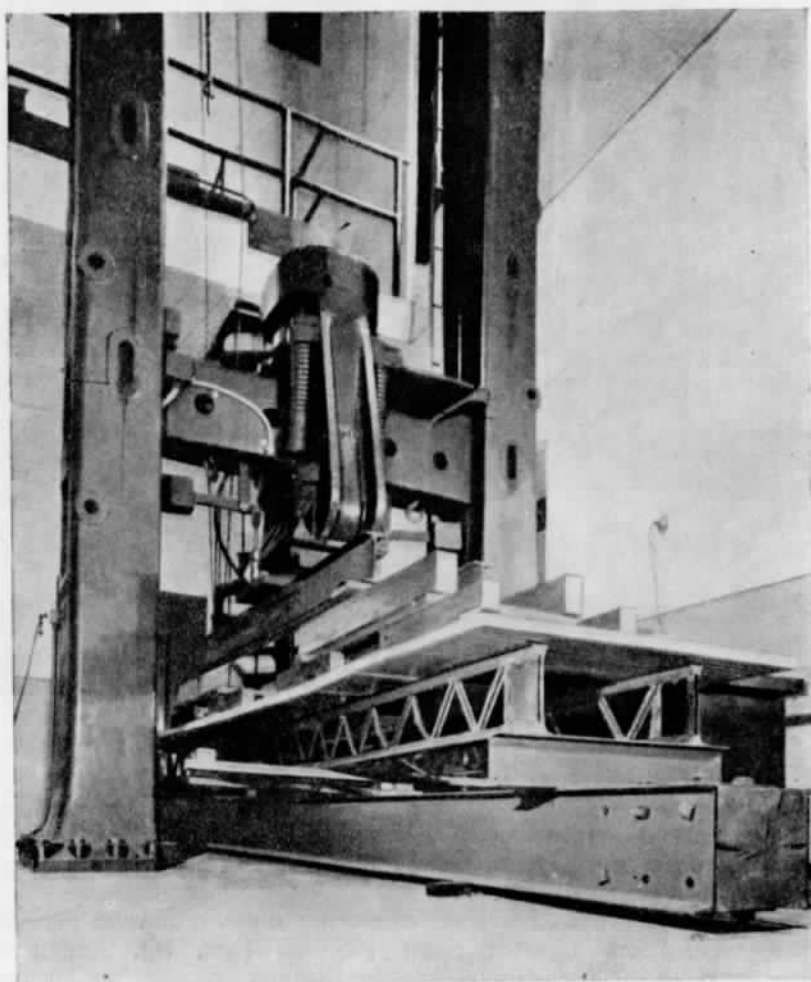
начальное обжатие мембран преобразователя с постоянной силой и возвращают ярмо в исходное положение после испытания. Одновременно им принадлежит роль амортизаторов. На боковых стенках ярма имеются перекладки, упрощающие обслуживание машины (фиг. 11).

Преобразователь в данной машине отличается очень большими размерами — наружный диаметр его коробки равен 1250 мм (фиг. 16). Для измерения давления жидкости под мембраной преобразователь соединяется специальной гибкой трубой с пультом, который располагается на полу в некотором отдалении от машины. На пульте сосредоточены все органы управления машиной и силоизмерительные прецизионные манометры, изготавливаемые по особому заказу заводом Heise Bourdon tube Laboratory. Преобразователь совместно с манометром тарируется на контрольных машинах в лаборатории А. Н. Emery. Для увеличения точности отсчета циферблаты манометров делаются большого диаметра — 406 мм.

На пульте калифорнийской машины имеется четыре манометра с такими циферблатами и дополнительными приспособлениями для автоматической регули-

ровки скорости нагружения. Каждый манометр предназначен для своей максимальной нагрузки. Приводим данные по манометрам:

№№ пп.	Диапазон нагрузки (в т)	Число делений	Цена деления (в кг)	Линей- ный раз- мер деле- ния в (мм)
1	100	500	200	6.4
2	280	560	500	2.56
3	720	720	1000	1.78
4	1800	900	2000	1.42



Фиг. 17.

Практически точность отсчета на двух последних циферблатах может быть принята равной $\frac{1}{4}$ номинальной цены их делений.

Манометры отличаются изумительной чувствительностью. Автор лично имел возможность наблюдать, как манометры подобных машин меняли положение нуля в ответ на увеличение столба жидкости в соединительном шланге по мере подъема активной траверзы.

Правильность показаний машины гарантируется максимальной ошибкой в $\frac{3}{4}\%$, начиная с нагрузки в 270 т и выше. До этой нагрузки ошибка может быть несколько большей.

При всех преимуществах этой измерительной системы она имеет один недостаток, а именно необходимость связывать траверсу с пультом гибкой трубой.

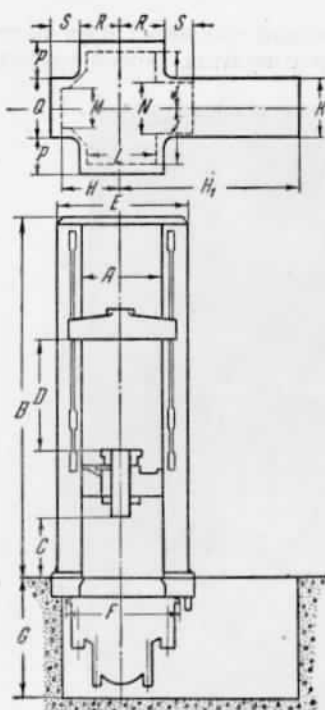


Фиг. 18.

Значительные давления не позволяют применять гибкий шланг, а изменение расстояния между ними приводит к необходимости выгибать трубу и не позволяет крепить ее намертво на колоннах. Расположение трубы видно на фиг. 15.

Из числа устройств, предназначенных для крепления образцов, заслуживает внимания механизм управления захватами: значительный вес их, достигающий 100 кг в одном клине, потребовал соответствующей механизации: клинья перемещаются рычагами от пневматического поршня (фиг. 11, 13, 14) под давлением воздуха в 5.5 ати. В качестве обязательного ассортимента машина снабжается клиньями разных размеров. Самые большие захватывают штангу до 220 мм.

Работа на машине Baldwin-Emery начинается с установки траверз по размерам образца. Для этого активная траверза подводится на холостом ходу вплотную к пассивной и транспортирует ее на необходимую высоту. После крепления клиньями пассивная траверза остается на месте, а активная отходит книзу. Образец подносится краном. Последний желательно иметь на подъемную силу в 20 т, которая диктуется также монтажными условиями. Вместе с краном могут работать тали, принадлежащие машине. При настройке опытов на сжатие иногда бывает удобным использование активной траверзы как подъемного приспособления. Для этого в нижней ее части предусмотрены крюки и кольца (фиг. 17). Испытание на поперечный изгиб настраивается таким же образом. Здесь нужно иметь в виду, что нормальный пролет изгибаемого образца допускается конструкцией машины в 3,6 м. В случае больших пролетов опоры приходится выносить за пределы машины и тем самым отказываться от уравнивания усилий и реакций в пределах контура самой машины. Последнее обстоятельство не позволяет поднимать нагрузку выше 200 т, так как в противном случае машина может оказаться во взвешенном положении и опрокинуться. Собственный вес машины 220 т.

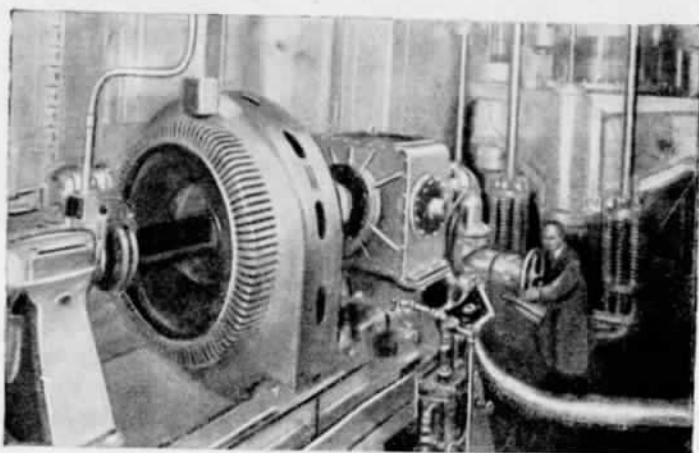


Фиг. 19.

балки длиной в 12—20 м. Наиболее выгодное решение дает ребристая железобетонная балка; на ней можно раздвигать опоры как угодно.¹

Во всех прочих случаях машина очень жестка, устойчива и надежно рассчитана не только на осевое, но и на внецентренное приложение нагрузки. По-

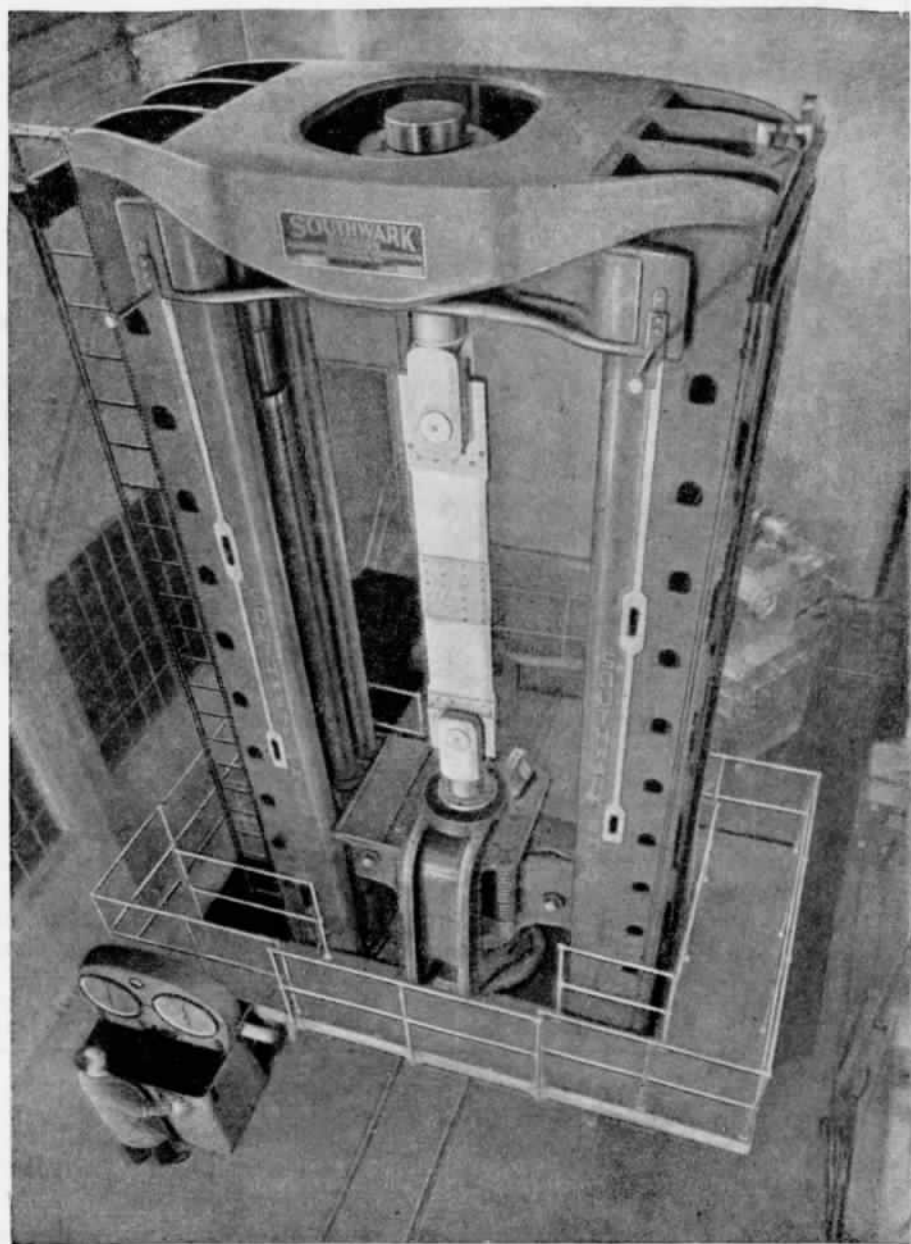
В качестве меры, исключающей эту опасность и позволяющей вести опыты на изгиб под полной нагрузкой и при любом пролете, следует указать на подведение под машину и прочного соединения с ней фундамента в виде мощной



Фиг. 20.

¹ Предложение дано инж. Д. Д. Сергеевым, сделавшим все надлежащие расчеты (Академпроект при Управл. кап. строит. Акад. Наук СССР, Москва).

пытки крепить колонны ее к стенам здания обычно приводили к уменьшению устойчивости, так как машины обращались в несущую конструкцию для здания. Прочность и устойчивость машины отлично подтвердились приемочными ис-



Фиг. 21.

пытаниями, которым она подвергалась в лаборатории Berkley. Для выяснения вопроса, как реагирует машина на горизонтальные составляющие, был изготовлен пятиметровый образец из мощной двутавровой балки, торцы которой были косо срезаны и приварены к подушкам (фиг. 18). Нажатие на него силой в 900 т создало пару горизонтальных составляющих в 45 т с моментом 8*

В начале 1940 г. в исследовательской лаборатории Aluminum Co. of America вступила в строй еще одна новая машина Baldwin-Emerу силой 450 (— 1350) т.¹ Обладая значительно меньшими размерами, чем калифорнийская машина (высота над полом 7.6 м, под полом 4.5 м), она отличается от последней небывалым диапазоном скоростей подачи под полной нагрузкой от 0 до 900 мм/мин. Такую подачу обеспечивает очень мощный насос с мотором в 300 л. с. (фиг. 20). Фотография машины с птичьего полета (фиг. 21) дает представление о ряде ее деталей, не получивших достаточно ясного освещения из предыдущих материалов. Заодно уточняется представление о лифте-площадке для наблюдения, охватывающей машину кольцом.

Машина, которой присвоено имя Templin — известного исследователя в области алюминиевых сплавов, предназначается для форсирования опытов по внедрению алюминия в широкие отрасли промышленности: машиностроение, гражданские сооружения, подвижной состав железных дорог и т. д.

Наравне с универсальными машинами Baldwin Southwark Corp. выпускает сверхсильные прессы, в которых удастся сохранить все особенности конструкций, разобранных выше. Самый большой из них, силой в 2000 т (фиг. 22), был использован для испытания бетонных кубов при постройке пластины Boulder Dam (Colorado, США). Пресс был изготовлен в 1931 г. и установлен в лаборатории Denver бюро рекламаций.

3. Пресс Olsen

Пресс вертикальный гидравлический T. Olsen Co., силой до 4500 т, пока является самой большой испытательной машиной в мире (фиг. 23). Он был построен в 1910 г. по заказу Американского геологического надзора для механической лаборатории Arsenal Grounds (Питтсбург). Здесь он простоял до 1921 г., затем был перенесен в National Bureau of Standards (Вашингтон).

Основные характеристики прессы таковы.

Габариты прессы в надземной части: высота 13.0 м, длина 3.0 м, ширина 2.2 м.

Размеры колодца под прессом: глубина 2.1 м, длина 5.1 м, ширина 3.6 м, включая толщину облицовочной кладки 0.3 м.

Глубина колодца (фиг. 24) под прессом выбрана с таким расчетом, чтобы плоскость опорной плиты лежала в уровне с полом. Глубина заложения фундамента (выступающего на 200 мм над уровнем пола колодца) — не менее 1.4 м. Цоколь связан с фундаментом двумя сквозными анкерными болтами. Колодезь частично перекрыт настилом из рифленого железа.

Размеры сторон плиты прессы 150×175 см.

Станина прессы состоит из цоколя и четырех колонн с резьбой. Расстояние между центрами колонн по длине 2075 мм, по ширине 850 мм. Диаметр колонн 342 мм. Длина их около 15 м. Максимальная высота образца 9 м.

Диаметр грузового плунжера 1.25 м, ход его 0.6 м.

Давление масла 375 ати.

Скорость подачи плунжера от 0.4 до 12.5 мм/мин.

Скорость холостого хода траверзы 250 мм/мин.

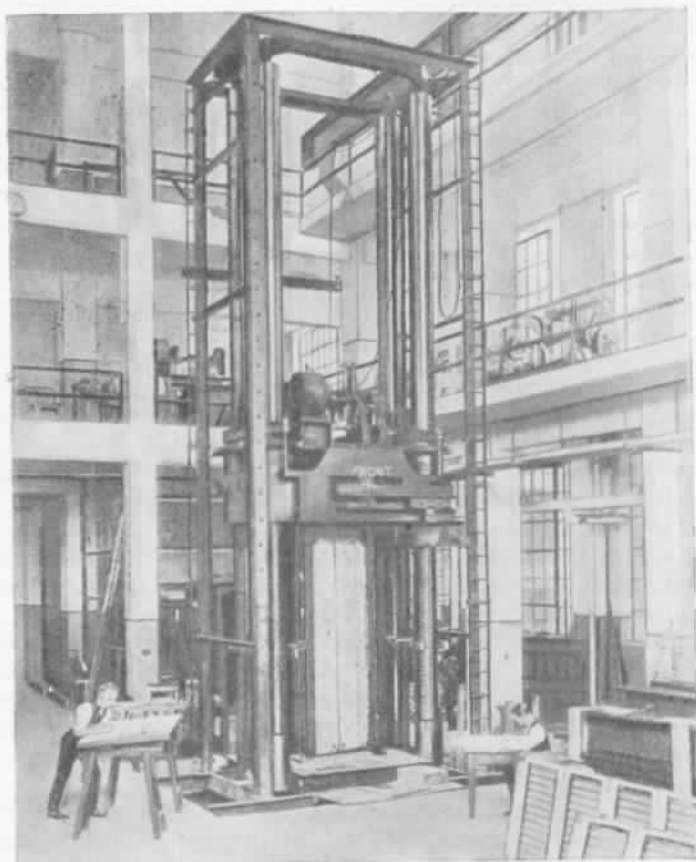
Вес прессы 130 т, вес траверзы 22 т, вес колонны 12 т и вес цилиндра — 7.5 т.

Пресс обслуживается двумя электромоторами. Один из них, на 20 л. с., приводит в движение насос, другой, в 15 л. с., служит для перемещения траверзы посредством червяков и четырех утопленных в ней гаек. Этот мотор установлен на самой траверзе.

Плунжер поставлен со специальным уплотнением (патент Olsen), исключаящим, по свидетельству фирмы, просачивание масла и сводящим потери на трение до минимума. Это обстоятельство очень существенно, так как давление масла под плунжером используется для измерения развиваемой нагрузки посредством

¹ Перед скобками указаны величины растягивающих усилий, в скобках — сжимающих.

бурдоновой трубки. К этому способу измерения, обычно не рекомендуемому в испытательных машинах, Бюро стандартов пришло не сразу. Оригинальный фирменный механизм представлял собой мембранный преобразователь давления обращенного типа, в которой мембрана, перекрывающая вспомогательный цилиндр малого диаметра, передавала усилие на рычажную систему посредством специального небольшого поршня. Отношение площади этого поршня к площади грузового плунжера составляло $\frac{1}{80}$. Таким образом наибольшее усилие, передаваемое рычажно-весовой системе, редуцировалось с 4500 т примерно до 55 т.

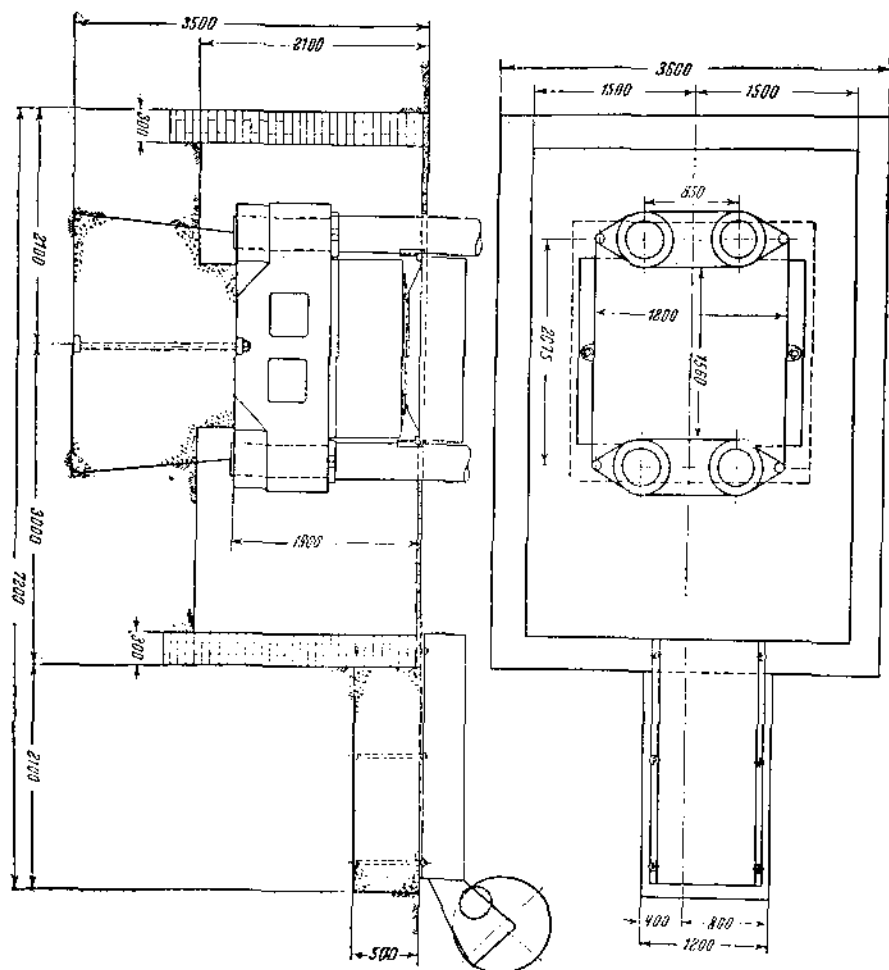


Фиг. 23.

Набор из 9 гирь, подвешиваемых к свободному концу главного коромысла, из которых каждая была эквивалентна 450 т, и бегунок позволяли довести цену наименьшего деления до 45 кг при нормальной для машин Olsen длине коромысла. Однако этот механизм не оправдал себя: предполагаемая ошибка показаний в $\frac{1}{1000}$, начиная с 45 т, оказалась значительно большей; обращение с гирями было затруднительным, мембрана часто выходила из строя. Переход на обычный манометр при этих условиях принес только пользу, давая возможность вести работу бесперебойно.

Останавливаясь несколько подробнее на правильности показаний этого пресса, необходимо отметить, что динамометрическая поверка его производилась всего лишь до 855 т. Для этого под пресс были поставлены кольцевые динамометры: три кольца на 135 т в каждом и пять колец на 90 т в каждом (фиг. 25).

Размеры плиты, очевидно, не позволили установить большее число приборов. Далее, эти динамометры не могли быть отнесены к классу эталонных или образцовых вследствие того, что естественными грузами в Америке могут тарироваться динамометры лишь до 50 т. Следовательно, примененные динамометры тарировались косвенным путем. Это заставляет относиться к показаниям пресса со значительной осторожностью, особенно при нагрузках выше 1000 т. В Бюро стандартов имеется неофициальное мнение, что ошибка силовизмерительного



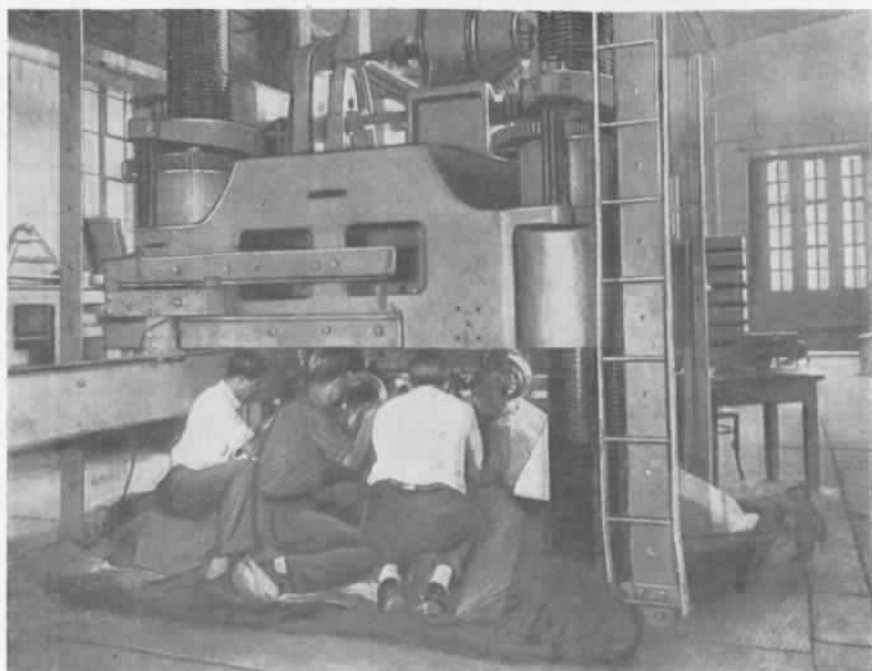
Фиг. 24.

устройства пресса на больших нагрузках может достигать 10⁰%. Очень возможно, что большие ошибки имеют место и в других сверхсиловых машинах, вопрос о проверке которых в литературе умалчивается.

Первоначально пресс был рассчитан для испытания образцов длиной до 18.3 м и имел высоту от пола, равную 21.4 м. За отсутствием подходящего помещения в Бюро стандартов высоту пресса пришлось сократить, отняв часть колонн по месту их стыка. Колонны были изготовлены составными для упрощения технологии. Стык осуществлялся разрезными гайками, стянутыми болтами и центральной шпилькой (диаметром 75 мм) по схеме, представленной на фиг. 26.

Общий вид пресса в его современном состоянии показан на фиг. 23. Колонны с резьбой и опорная плита в большом масштабе видны на фиг. 27,

изображающей испытание на устойчивость пилона из профилей нержавеющей стали. Траверза и приспособление на изгиб показаны на фиг. 28. Вид траверзы с другой стороны во время динамометрической поверки дается на фиг. 25.

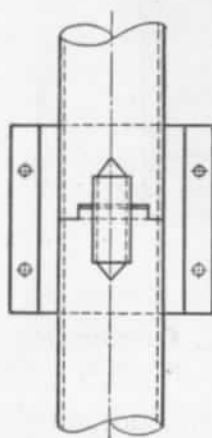


Фиг. 25.

На всех фигурах обращает на себя внимание металлический каркас, которым окружен пресс. Этот каркас предназначен для лестниц и площадок, необходимых при укреплении образцов и при всевозможных измерениях во время опытов.

Фирма рекомендует верхние концы колонн, связанных между собой рамой, крепить дополнительно к неподвижным частям здания. В Бюро стандартов это условие не выдержано.

Для обслуживания пресса и монтажа необходим мостовой кран грузоподъемностью в 25 т. Высота помещения должна быть на 6—7 м больше высоты пресса.



Фиг. 26.

4. Машина Riehlé

Основные характеристики сверхсильной машины Riehlé¹ таковы.

Машина универсальная, вертикальная, с механическим нагружением и рычажно-весовым силонизмерением. Сила машины 1120 т при растяжении и сжатии.

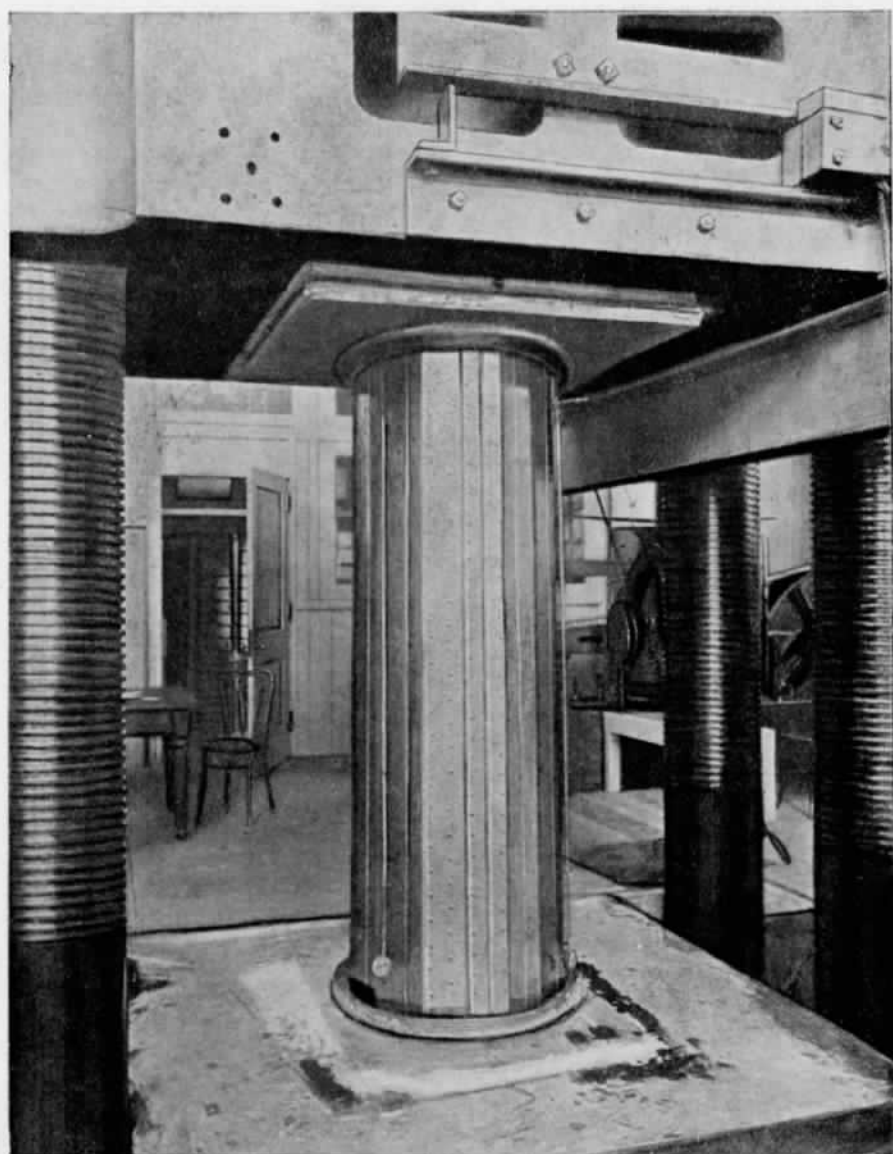
Габариты машины в надземной части: высота 10.225 м, длина 5.500 м, ширина 2.400 м.

Габариты колодца: глубина 2.950 м, длина 8.900 м, ширина 5.150 м. Колодезь обмуровывается стенкой толщиной в 0.3 м.

¹ Riehlé Testing Machine Division of American Machine & Metals, Inc.

Размеры фундамента под машину ниже уровня колодца: длина 6.7 м, ширина 4.0 м, глубина 1.5 м.

Расстояние между колоннами в свету 1.925 м. Длина грузового стола (что то же — моста для изгиба) — 4 м.



Фиг. 27.

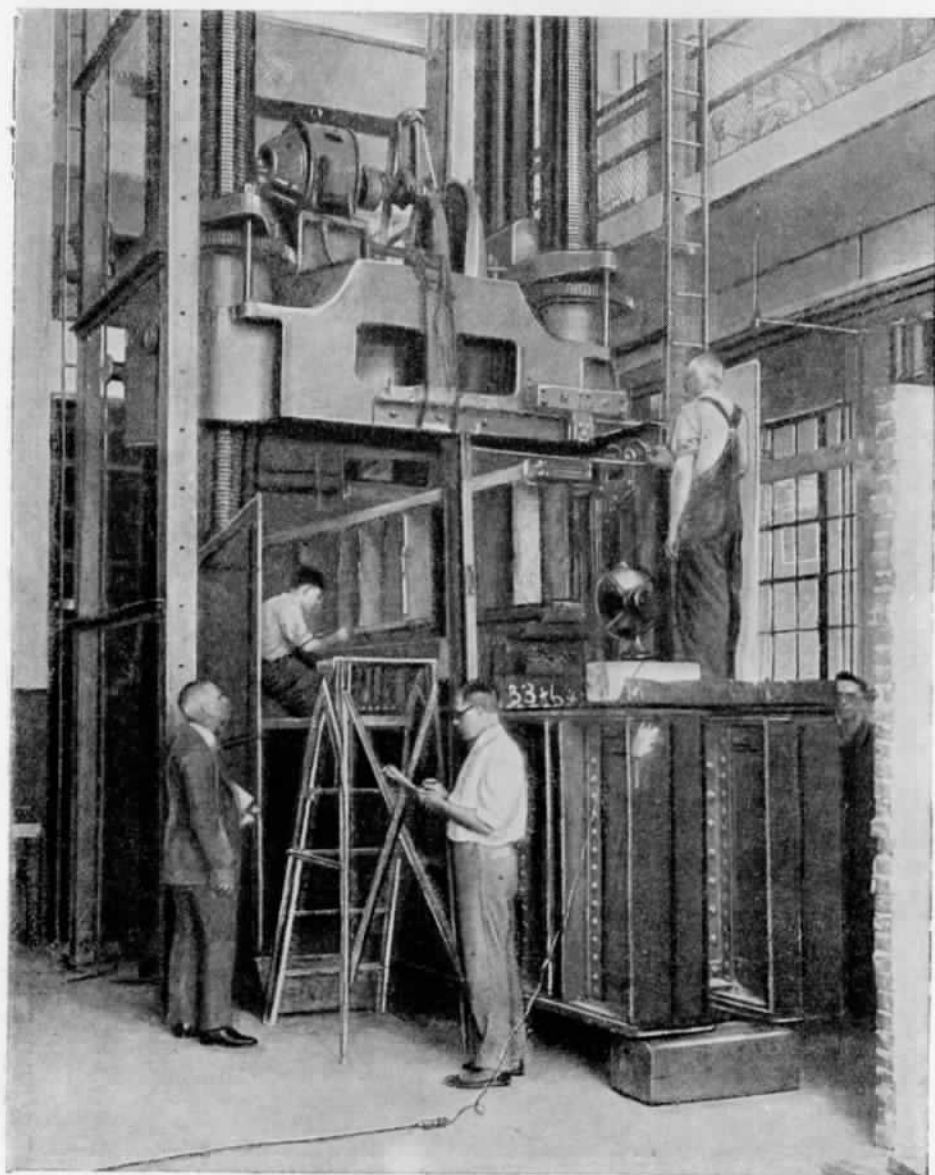
Длина образцов: при растяжении 7.0 м, при сжатии 7.5 м.

Полная высота машины 13.075 м.

Полный вес машины 125 т.

Машина была построена в период между 1920 — 1930 гг. по заказу заводов J. Roebling's Sons Co (Trenton N. Y.), принявших на себя поставку стальных канатов для нового висячего моста через р. Гудзон у Нью-Йорка. Схема машины Riehle показана на фиг. 30, общий вид ее — на фиг. 29.

Станину машины следует рассматривать состоящей из двух основных частей — надземной и подземной. В надземной части имеются три массивных колонны стального литья — головная большего сечения и боковые меньшего. Колонны составные, собраны на болтах, в сечении имеют коробчатый профиль. В верхней



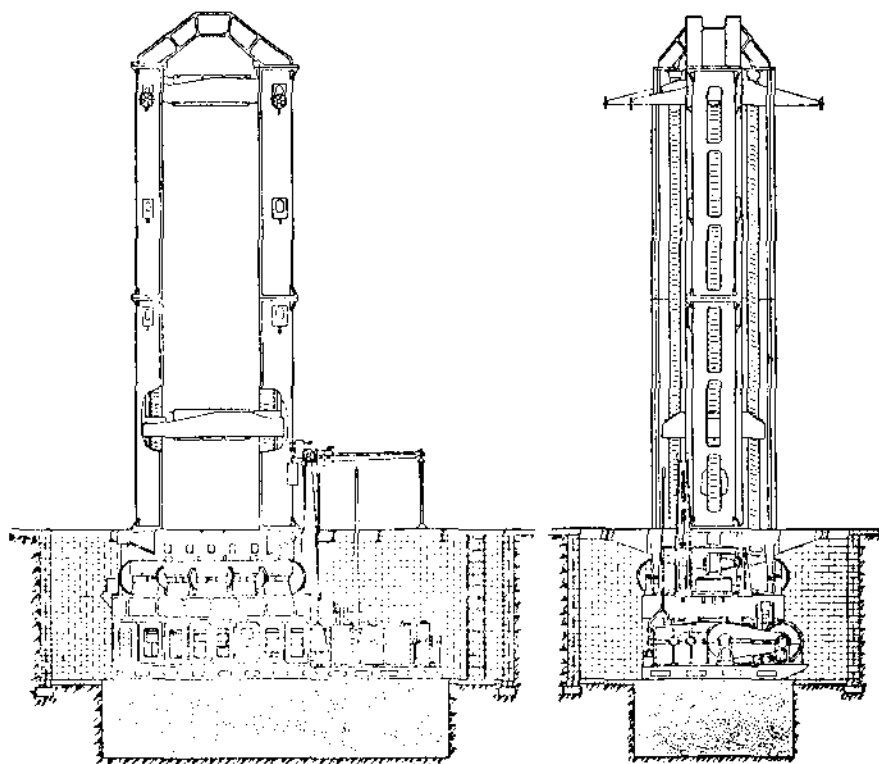
Фиг. 28.

части они стянуты архитравом сложного профиля с центральным окном для прохода крюка крана.

По высоте каждая из колонн имеет три окна, предназначенных для крепления пассивной траверзы. Траверза крепится в этих окнах клиньями, которые загоняются и выжимаются винтовыми домкратами. Домкраты выполнены в виде дереставных кронштейнов в количестве трех штук по числу колонн.

Перемещение пассивной траверзы в одно из трех возможных положений выполняется при помощи активной траверзы, которая получает перемещение вдоль вертикальной оси машины со сравнительно большой скоростью. Обе траверзы представляют собой массивные стальные отливки толщиной до 600 мм и весом до 11 т. В средней части каждой из них имеется прямоугольное отверстие для пропуска захватной части образца, а на торцах Т-образные пазы для крепежных приспособлений (фиг. 31). Обычные для испытательных машин клинья в данном случае отсутствуют.

В нижней своей части колонны приболчены к грузовому столу стального литья, опирающемуся на призмы рычагов измерительной системы. Размеры грузового стола 4×3.4 м, вес 22 т.



Фиг. 29.

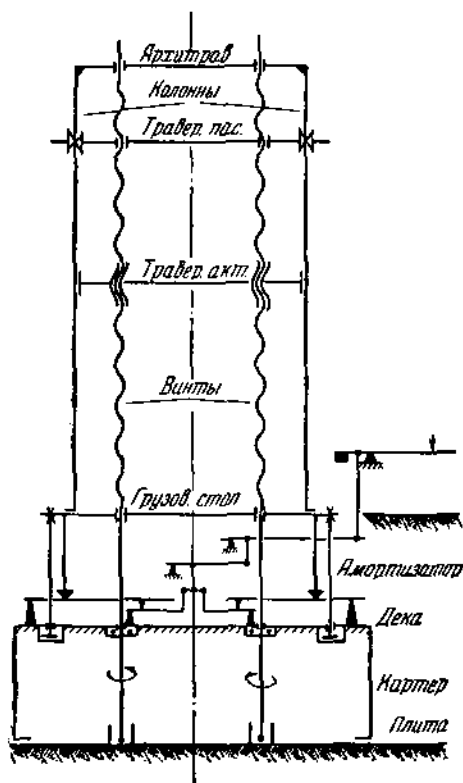
Рычаги покоятся на деке картера, представляющей собой массивную ребристую отливку стального литья весом в 19 т. В картере расположены детали нагружающего механизма. Картер, несущий на себе вес всей машины, и коробка скоростей смонтированы на общей фундаментной плите. Для смягчения ударов при внезапном разрушении образца и мгновенной отдаче накопившейся упругой работы грузовой стол соединен с декой картера, а следовательно, и с фундаментом специальными амортизаторами. Эти амортизаторы патентованной конструкции Riehlé устроены по принципу жидкостных катарактов. Присутствие их не оказывает вредного действия на работу измерительного механизма отчасти из-за конструктивных особенностей, отчасти из-за ничтожно малых перемещений грузового стола.

Нагружающий механизм машины состоит из трех кованых нарезных винтов, расположенных по вершинам равнобедренного треугольника с основанием в 1.52 м и высотой 2.15 м (фиг. 32). Винты скрыты в полостях колонн коробчатого

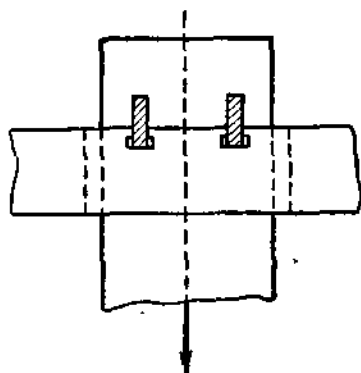
профиля. В верхней части винты направляются роликовыми опорными подшипниками, гнезда которых расточены в архитраве. В нижней части винты на значительной длине не имеют резьбы. Они проходят свободно через грузовой стол и деку, опускаются в картер, где опираются на подпятники, смонтированные в фундаментной плите.

Винты получают вращательное движение от зубчатой передачи, описание которой дается ниже. Благодаря этому вращению массивные бронзовые гайки, надетые на винты и нераздельно связанные с активной траверзой, получают принужденное осевое перемещение вместе с последней. Поступательное движение траверзы обеспечивает при условии достаточного по величине вращающего

момента деформацию образца, находящегося на испытании. Образец при испытании на растяжение укрепляется своими концами в траверзы, при испытании на сжатие располагается между грузовым столом и активной траверзой. Испытание на изгиб балок ведется на грузовом столе, на котором устанавливаются опоры с пролетом до 3,5 м. Для получения больших пролетов опоры могут быть вынесены за пределы машин и укреплены на фундаменте. Однако этот прием ограничивает величину нагрузки некоторой долей от собственного



Фиг. 30.



Фиг. 31.

веса машины. Как скоро нагрузка превысит это значение, машина окажется во взвешенном положении.

Упор, противодействующий реакции образца, создается для винтов декой картера. При этом используются шестерни, надетые на нижние концы винтов. Шестерни подпираются круглыми гайками, посаженными на резьбе и заstopоренными. Между верхней ступицей шестерни и декой помещаются специальные роликовые упорные подшипники с самоустанавливающимися сферическими подушками. Подшипники частично утоплены в гнездах, расточенных в ступицах шестерен, частично в гнездах, расточенных в деках. Нажим в подшипниках регулируется круглыми гайками. Что касается гаек, заложенных в активную грузовую траверзу, то крепление их достигается тугой посадкой и клиновым замком.

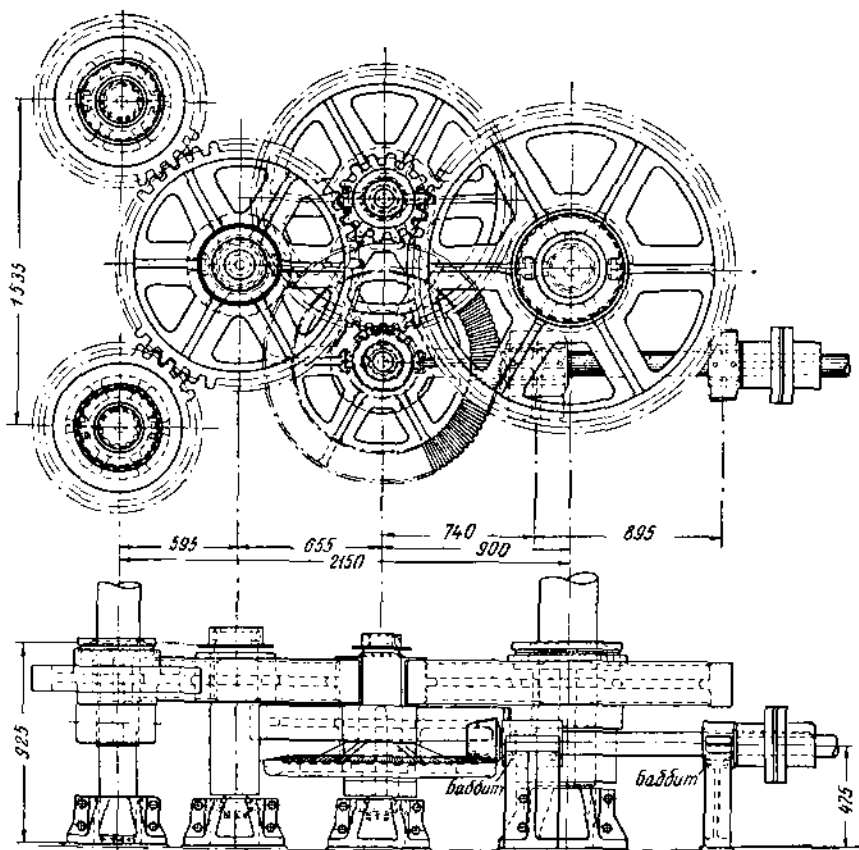
Наличие трех винтов, свойственных большинству машин Riehle, обеспечивает устойчивое положение траверзы. С тем чтобы уравновесить моменты от сил трения в гайках, головной винт получает вращение в одном направлении,

а боковые винты в противоположном. Винты, как и колонны машины, не одинакового размера. Головной винт имеет диаметр живого сечения в 290 мм. Вес его составляет 6.1 т. Нагрузка, приходящаяся на головной винт, равна 560 т. Два других боковых винта диаметром до 215 мм несут в равных долях остальную нагрузку, т. е. по 280 т. Вес этих винтов — 3.4 т в каждом. Длина винтов 11.65 м.

Проверка винтов на прочность приводит к следующим значениям рабочих напряжений:

σ головного винта 840 кг/см²
 σ бокового винта 760 .

Распределение нагрузок между винтами неравномерно в силу того, что равнодействующая проходит не через центр тяжести треугольника, по вершинам



• Фиг. 32.

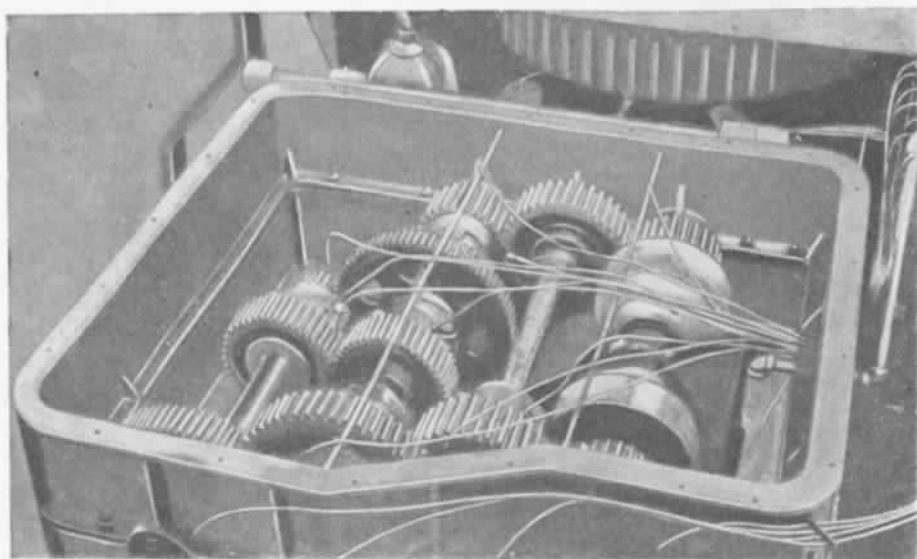
которого они расположены, а через середину его высоты. Первоначально машина, о которой идет речь, была рассчитана на меньшую нагрузку, а именно на 900 т, и напряжение винтов ее равнялось соответственно 670 и 615 кг/см². Очевидно, благоприятные результаты первых лет работы машины позволили фирме расценивать ее как более сильную.

Кроме винтов, в состав нагружающего механизма входит зубчатый перебор (фиг. 32). Передача состоит из пары конических шестерен и семи цилиндрических, из которых одна, находящаяся в зацеплении с шестернями боковых винтов, паразитная. Шестерни подобраны с таким расчетом, чтобы уменьшать число

оборотов винтов и увеличивать их вращающий момент. Передаточное число перебора между ведущей конической шестерней и шестерней, сидящей на головном винте, равно $1/100$, для боковых винтов передаточное число равно $1/50$. Это обстоятельство вызвано необходимостью сообщать головному винту момент вдвое больший, чем каждому из боковых. Одновременно должны быть приняты меры для компенсации разности угловых скоростей винтов: иначе не может быть поставлен вопрос о перемещении траверзы. Эти меры сводятся, очевидно, к тому, что угол подъема резьбы на головном винте делается вдвое круче, шаг вдвое больше, чем на боковых.

Все шестерни стальные, кованные, разъемные на болтах. Посажены шестерни на шпонках. Их оси направляются с обоих концов роликовыми опорными подшипниками. Подпятники осей также роликовые.

Коническая ведущая шестерня сидит на валу, соединенном полугибкой муфтой с коробкой скоростей. Коробка дает четыре скорости и управляется двумя



Фиг. 33.

рычагами, из которых один предназначен для реверсивного хода, включения и выключения (фиг. 33).

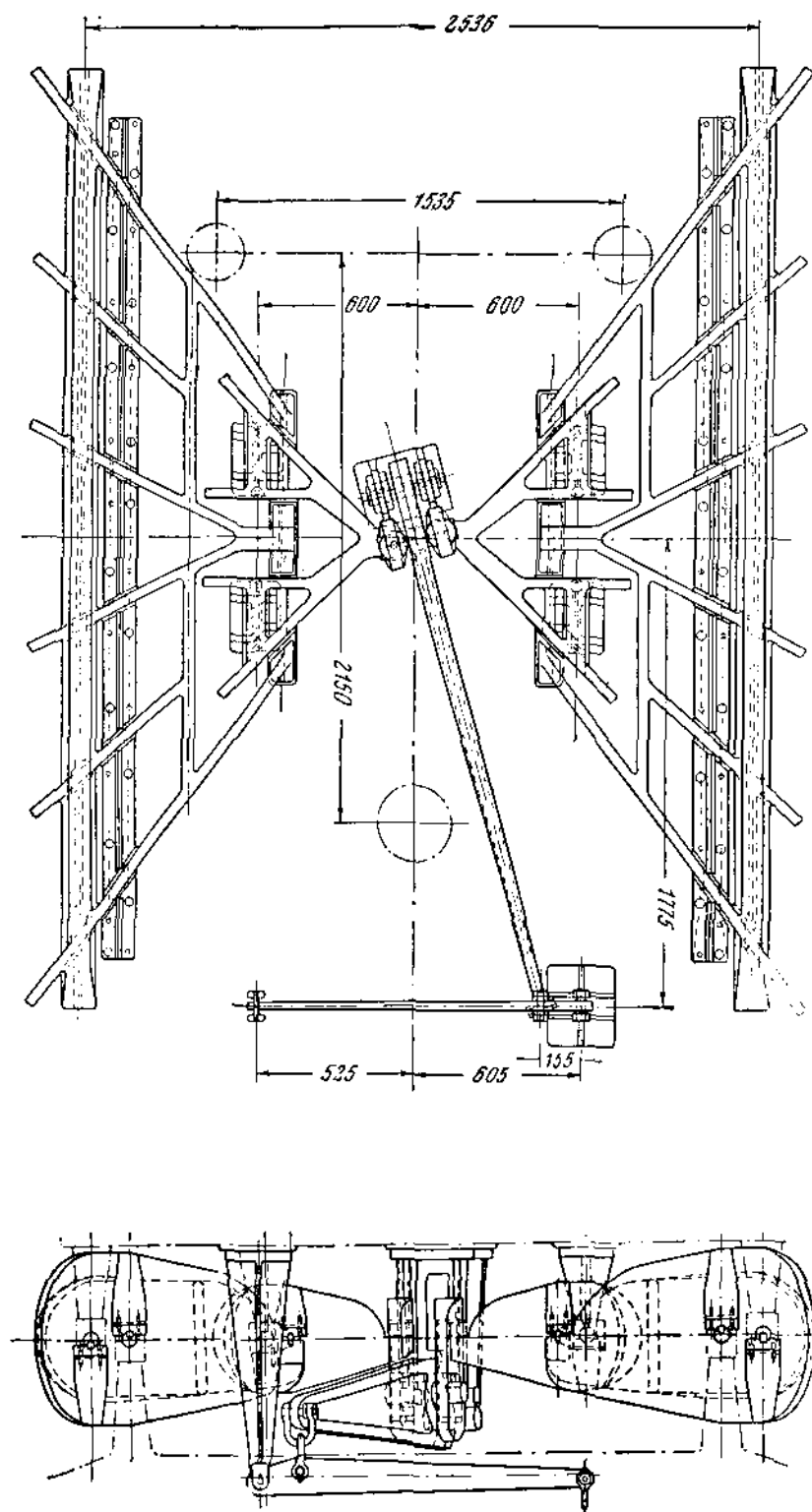
Электромотор на 75 л. с. смонтирован на общей фундаментной плите. Привод от мотора осуществляется бесшумной цепью. Мотор может быть пущен со скоростью в 800 и 1600 об/мин, в соответствии с чем активная траверза может иметь восемь скоростей передачи. Приводим значения этих скоростей:

Число оборотов мотора	800 об/мин				1600 об/мин			
Скорости траверзы в мм/мин	127	25.4	6.4	1.3	254	50.8	12.7	2.5

Все подшипники и цепь получают смазку под давлением от небольшой масляной помпы. Шестерни от этой же помпы получают капельную смазку.

Рычажно-весовая система измерительного механизма сохраняет все черты, присущие вообще машинам Riehlé. Разница заключается лишь в конструктивном оформлении самих рычагов и в количестве их. Рычаги, как это видно на схеме фиг. 30, расположены в несколько ярусов. Особого внимания заслуживают рычаги первого и второго ярусов (фиг. 34). В каждом из этих ярусов имеется по паре одинаковых рычагов, обращенных головками к центру машины. Их можно назвать лапчатыми.

Рычаг первого яруса состоит из шести плоских коромысел второго рода,



Фиг. 34.

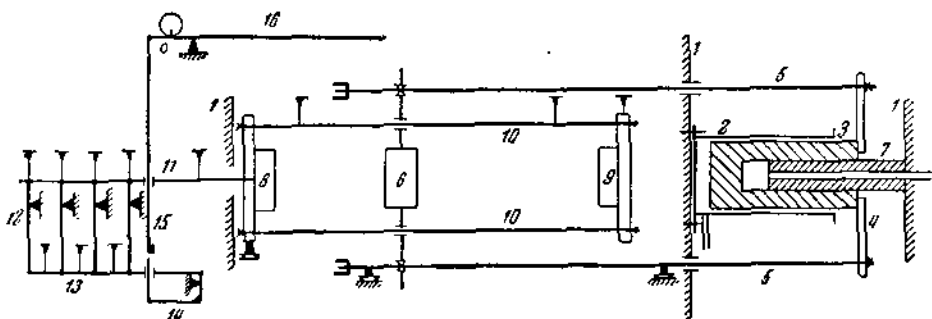
отлитых заодно с поперечными связями. Некоторые из этих связей несут на себе призмы. Лапы второго яруса имеют меньшие размеры и состоят из четырех коромысел.

Призмы выполнены из высококачественной инструментальной стали и рассчитаны на удельное давление в 2850 кг/см. Таким образом общая длина призмы первого ряда в одном лапчатом большом рычаге составляет 2.5 м, чем и объясняется необходимость в столь необычной форме рычагов.

Полное уравнивание нагрузки достигается бегунком на длинном коромысле, расположенном вдоль рабочей площадки машины.

5. Машина Avery

Сверхсильная машина фирмы W. & T. Avery Lt. Soho Foundry была построена в период с 1924 по 1926 гг. по заказу завода Dorman, Long & Co Britania Works (Middlesbrough, Англия), заготовлявшего части к мосту в Сиднее (Harbow Bridge, Австралия). Машина универсальная, горизонтального типа, с гидравлическим нагружением и рычажно-силовым измерением.



Фиг. 35.

Сила машины 1250 т при всех видах деформации.

Габариты машины: по длине 37.5 м, по ширине 7.1 м, по высоте 4.125 м. Под машинной заложен солидный фундамент, усиленный по концам.

Предельные размеры образцов: на растяжение 15.25 по длине и 150 мм по диаметру в случае круглого сечения, 300×75 мм в случае прямоугольного сечения.

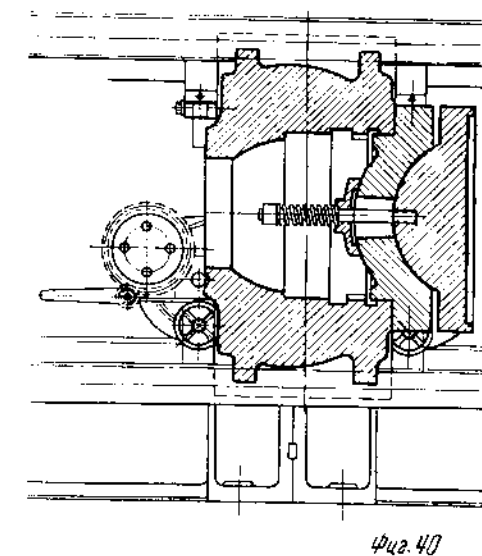
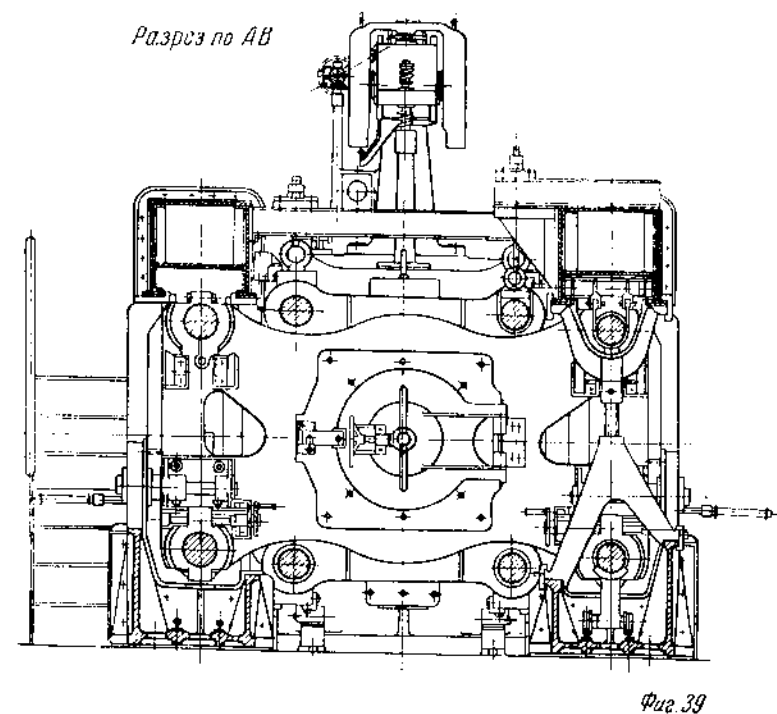
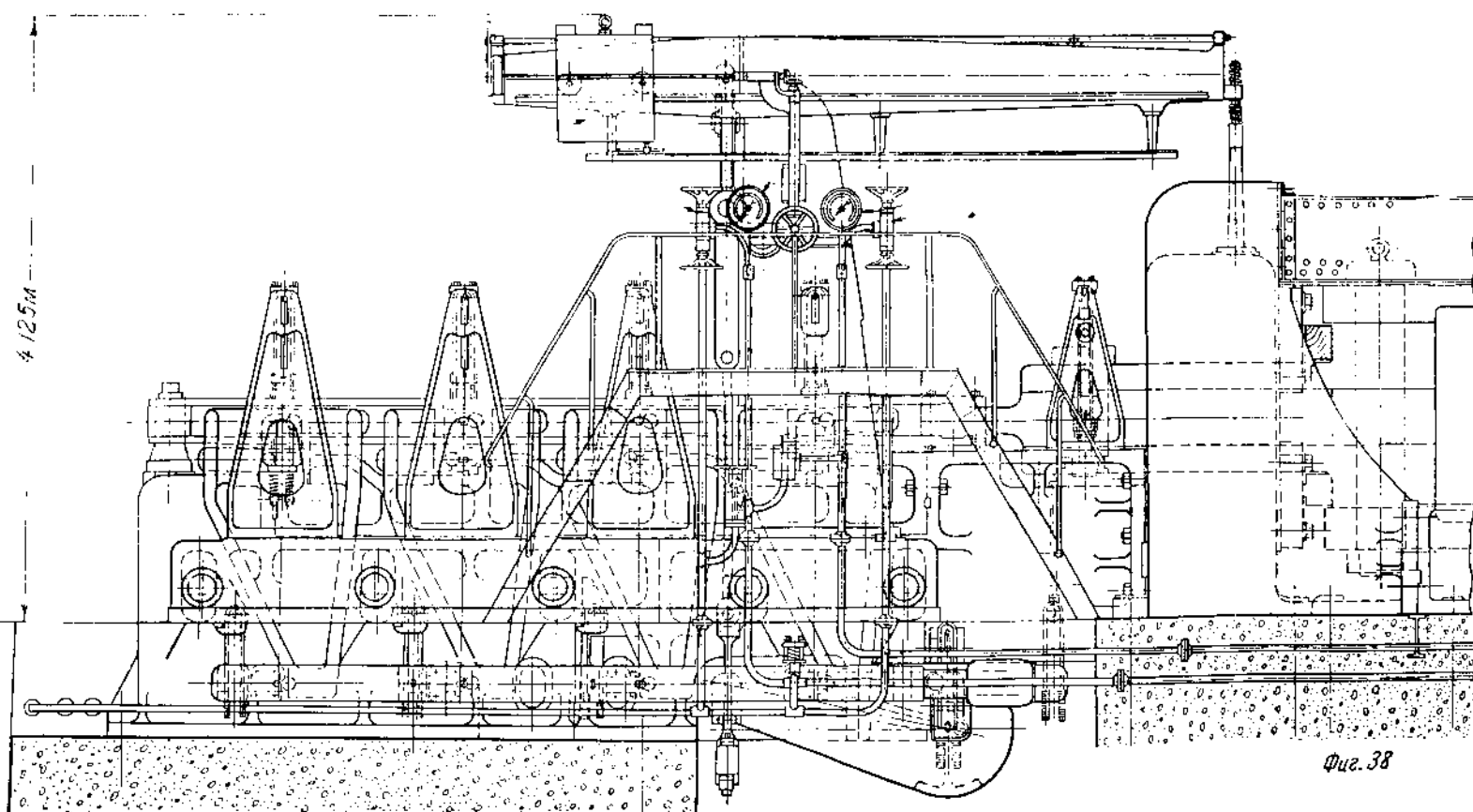
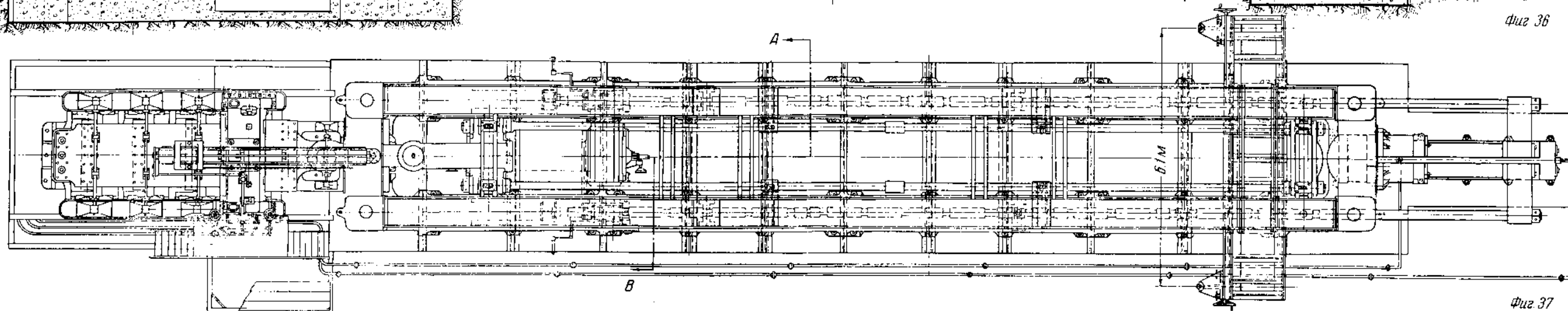
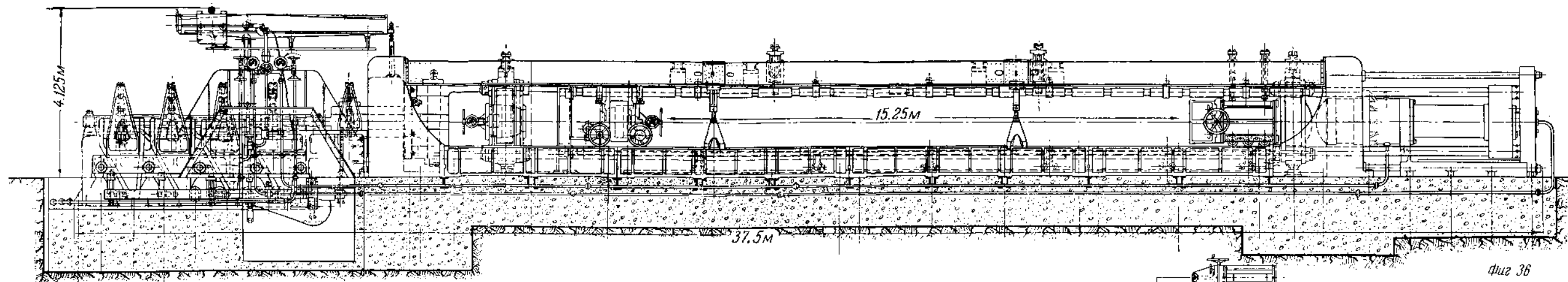
Размеры образцов на сжатие 15.25 м по длине и 1.15×1.15 м в поперечнике.

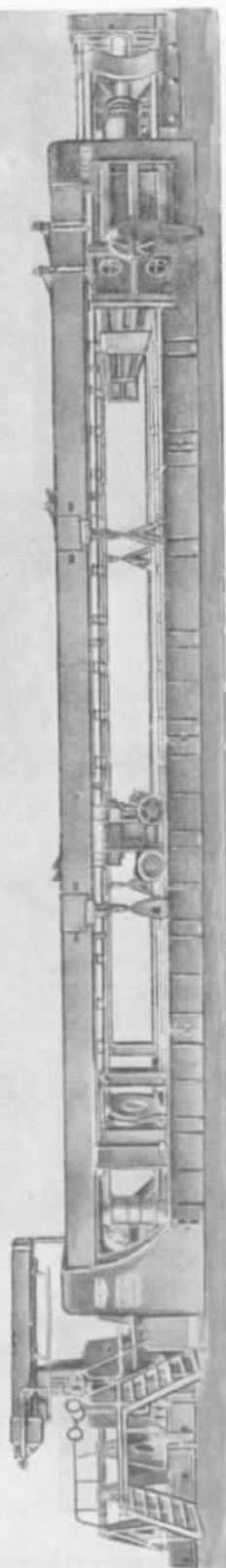
Размеры образцов на изгиб 6.1 м в пролете, ширина в 1.05 м, высота до 15 м.

Принципиальная схема машины изображена на фиг. 35, к которой будут относиться без особой ссылки курсивные обозначения цифрами в тексте; общие чертежи приведены на фиг. 36—40. В виде дополнительного материала на фиг. 41—50 даются фотографии как общего вида, так и отдельных частей машины.

Станина машины состоит из двух желобов фасонного профиля (фиг. 39 и 41), связывающих концевые устои (фиг. 39, 41, 42). Желоба расположены непосредственно на фундаменте и укреплены анкерными болтами. Желоба и устои стального литья. Вес последних по 33 т в каждом. Верхние части устоев расперты двумя клепаными балками (фиг. 39, 41). Массивность этой коробчатой станины объясняется тем, что она при всех видах нагружения работает на сжатие и, следовательно, должна гарантировать полную устойчивость.

Боковые и верхний просветы в станине создают большое удобство для экспериментатора как в процессе самого испытания, так и во время заправки в машину



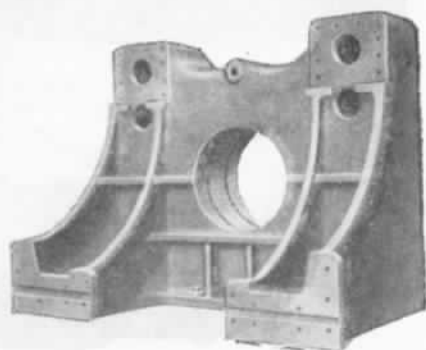


Фиг. 41.

образцов. Наличие верхнего просвета позволяет подносить тяжелые образцы к захватам при помощи подъемного мостового крана без дополнительных приспособлений. Благодаря этому же просвету экспериментатор, стоящий на мостике у вентилей управления, может наблюдать за поведением образца (фиг. 43).

На этой же фигуре видны сверху небольшие поперечные балочки, назначение которых будет выяснено ниже. На время заправки образца в машину балочки могут убираться.

Боковые распорные домкраты (фиг. 36, 39, 41) предназначены для увеличения устойчивости рамы при больших нагрузках. Из чертежей ясно, что эти домкраты во время испытания должны занимать вполне определенное положение, но при закладке образца могут быть перемещены или вовсе сняты со станины.

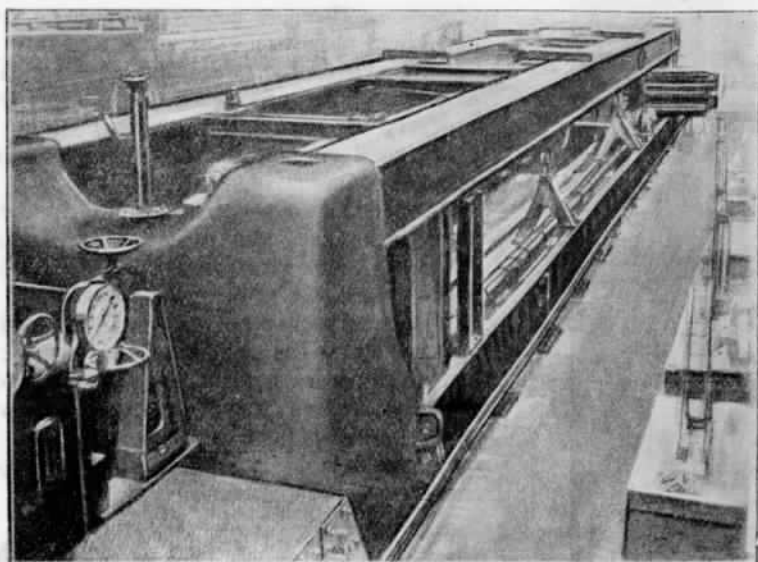


Фиг. 42.

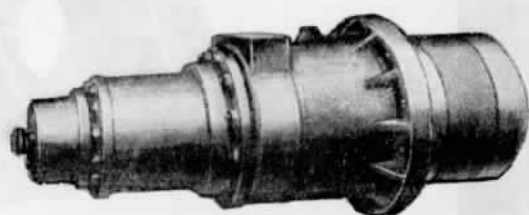
К станине должны быть также отнесены некоторые неподвижные детали, вынесенные за пределы описанной выше рамы, но жестко с ней связанные. Так, в головной части станины расположена массивная ребристая отливка, в которой сосредоточены детали силоизмерительного механизма. Со стороны плунжера станина заканчивается упорной плитой, связанной двумя тягами с ближайшим боковым устоем. На схеме фиг. 35 все части, относящиеся к раме, помечены 1.

Нагружающий механизм машины Avery отличается значительной сложностью. Принцип нагружения гидравлический. Главный цилиндр 2 этого механизма помещается на заднем устое рамы с внешней стороны (фиг. 35). Цилиндр выполнен в виде отдельной отливки стального литья с плоским днищем, посажен на 0.4 своей высоты в гнездо, расточенное в устое, и притянут болтами. На фиг. 44 он показан вместе с плунжерами перед сборкой.

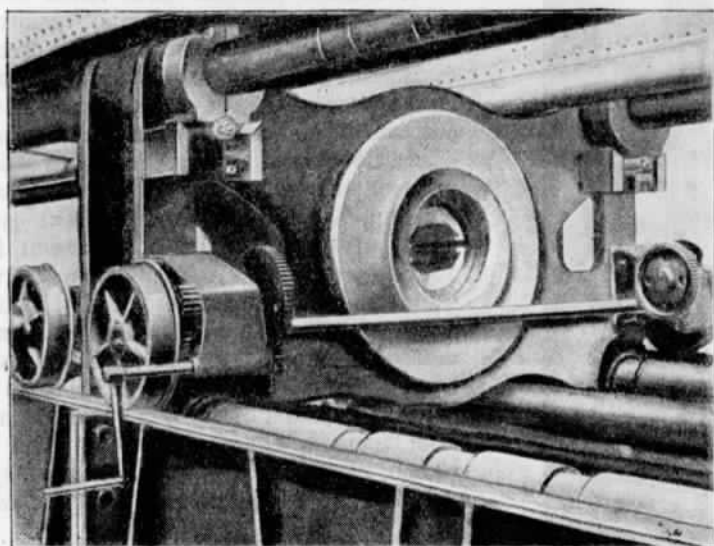
Грузовой плунжер главного цилиндра 3 связан с крестовиной 4, которая скользит по на-



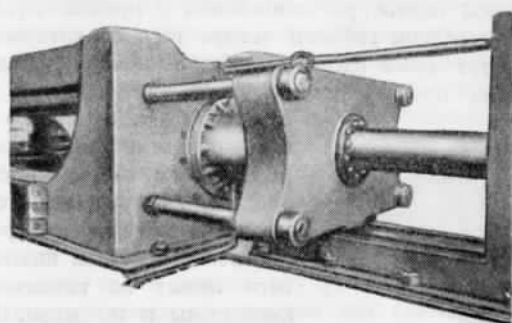
Фиг. 43.



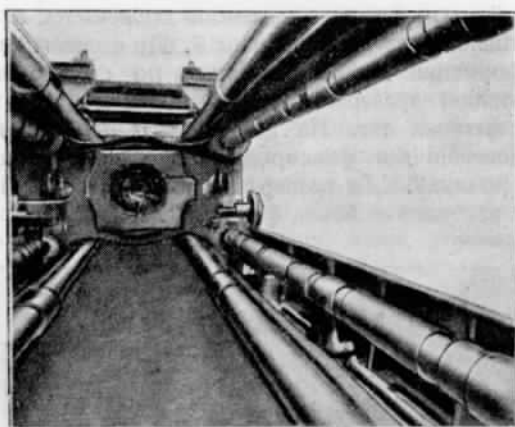
Фиг. 44.



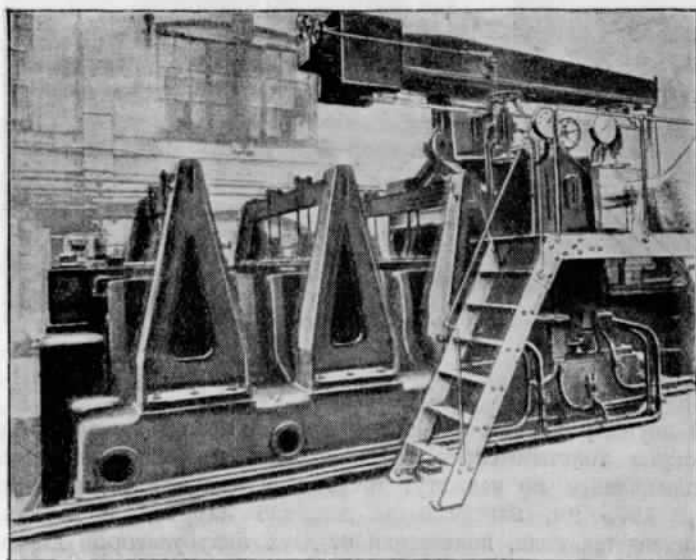
Фиг. 45.



Фиг. 46.

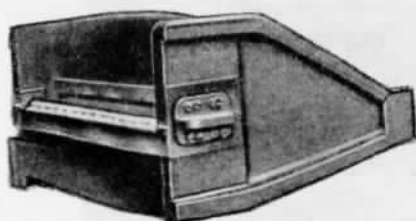


Фиг. 47.



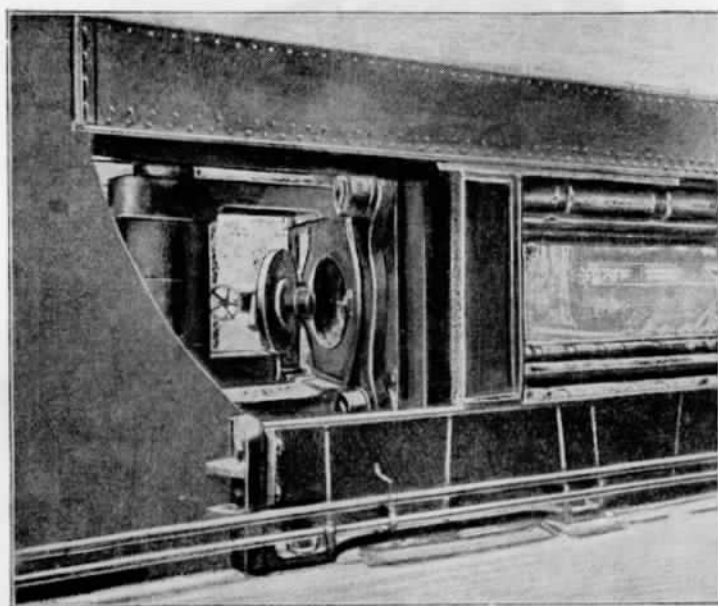
Фиг. 48.

правляющим отдельной плиты, расположенной в правой части фундамента. По углам крестовины закреплены гайками четыре тяги 5, которые свободно проходят через устои и идут далее вдоль желобов и клепаных балок рамы до стоек, видимых на многих из представленных фигур. О положении тяг в поперечном сечении машины можно составить вполне ясное представление по фиг. 39. В этом разрезе усматривается восемь тяг. Четыре внешние как раз являются тягами 5 нагружающего механизма. При ближайшем рассмотрении чертежа видно, что две нижние тяги лежат на тележках, а две верхние подвешены к тележкам. Ролики нижних тележек перемещаются по верхней кромке станины, а ролики верхних — по полкам клепаной балки.



Фиг. 49.

Назначение тяг 5 нагружающего механизма заключается в том, чтобы связывать плунжер с активной траверзой машины 6. По схеме видно, что траверза 6 при всех видах деформации должна двигаться по стрелке вправо. Способ сопряжения тяг с активной траверзой можно видеть на фиг. 45; здесь видны замки, входящие в выточки тяг. На каждой тяге имеется по 26 выточек, из которых 20 предназначено для фиксирования траверзы в разных положениях, а 6 для подвеса к роликам. Сама траверза представляет собой отливку в форме плиты, покоящейся на тележке (фиг. 35, 36, 37 и 45).



Фиг. 50.

Грузовой плунжер диаметром 810 мм уплотнен неподвижными кожаными манжетами и покрыт толстым слоем красной меди, уменьшающей износ кожи и скорее притирающейся по манжете. Медь осаждена электролитическим путем. Ход плунжера 1675 мм, максимальное давление 310 ат. В качестве рабочей жидкости применяется вода, подаваемая от двух аккумуляторов давления, — одного высокого давления, другого низкого. Аккумуляторы питаются двумя насосами двойного действия.

Обратный ход грузового плунжера для возвращения его в исходное положение достигается следующим образом: плунжер расточен и представляет собой цилиндр с днищем. В этот цилиндр входит неподвижная скалка 7, укрепленная в упорной плите, упомянутой ранее (фиг. 46). По оси скалки 7 расточен канал, в который может подаваться вода, подведенная отдельной трубой. Давление воды 10 атм. Диаметр скалки 500 мм. Поступающая в малый цилиндр вода отжимает грузовой плунжер в исходное положение после испытания при условии, если давление в большом цилиндре упало и вода из него получает свободный выход.

Преимущество этой конструкции по сравнению с плунжерами двойного действия заключается в том, что в данном случае плунжер соприкасается по всей своей длине со стенками цилиндра, повышая тем самым плотность и уменьшая возможность перекосов. Шток не дает этих преимуществ и усложняет как систему уплотнения, так и смену уплотняющих манжетов.

Нагружающий механизм воспроизводит растяжение образца в том случае, если последний укреплен между активной траверзой 6 и пассивной челюстью 8. Сжатие будет иметь место в том случае, когда образец будет помещен между траверзами 6 и 9. При этом нагрузка, воспринимаемая траверзой 9, передается пассивной челюсти 8 и далее уравнивается силоизмерительным механизмом в том же порядке, как при растяжении. Челюсть 8 и траверза 9 сопряжены четырьмя тягами 10. В поперечном разрезе машины (фиг. 38) сечения тяг расположены по вершинам внутреннего прямоугольника. Тяги видны также и на остальных фигурах; в частности, на фиг. 45 показаны лишь две из них, лежащие в заднем плане. Две другие, лежащие в переднем плане, убраны. Эти тяги отличаются от четырех тяг 5 отсутствием выточек. Все восемь тяг при всех видах деформации работают только на растяжение. В ракурсе тяги первой и второй групп отчетливо видны на фиг. 47. Здесь же видны соединительные муфты на тягах, так как тяги изготовлены не сплошными, а свертными.

Если расположение тяг первой группы 5 на катках не вызывает никаких сомнений в части потерь на трение, то с тягами второй группы 10 дело обстоит несколько иначе. Малейшие перекосы и сопротивление в их направляющих неизбежно должны отразиться на правильности показаний машины и на ее чувствительности. Поэтому тяги второй группы подвешены на призмах к поперечным балочкам, перекинутым между клепанymi балками рамы. Подвески и поперечные балочки видны на фиг. 35, 36, 37, 38, 39. Всего имеется четыре пары таких подвесок. Крепление тяг второй группы 10 на подвесках и призмах возможно в силу того, что продольное перемещение их вместе с деталями 8 и 9 измеряется долями миллиметра.

Силоизмерительный механизм машины Avery построен на рычажно-весовом принципе. Однозначное усилие челюсти 8 передается якорю 11. Якорь распределяет усилие в равных долях между четырьмя коромыслами 12, работающими по принципу рычагов первого рода. Длинные плечи коромысел шарнирно связаны с нижним якорем 13, который в свою очередь воздействует на коленчатый рычаг 14. Отсюда усилие, пониженное в 30 раз, передается вертикальной штангой 15 главному коромыслу измерительного механизма 16, выполненному по типу классических английских машин Buxton-Wicksteed, выпускавшихся еще в прошлом столетии.

Весь механизм собран в массивной коробчатой отливке, примыкающей к левому устою рамы. Кроме схемы, об устройстве его позволяют судить фиг. 36, 37, 38, 48. Особенно детально все устройство показано на фиг. 38. Сложность его вызвана необходимостью передать на призмы очень большую нагрузку. Принимая за допускаемое удельное давление на погонный сантиметр ребра призмы 2000 кг, общая длина призм первого порядка, которые должны быть размещены на коромыслах 16, составляет 6,25 м. В машине Avery эта задача решена примерно так же, как в машине Riehle, где применены лопчатые рычаги. Каждое из коромысел 12 принимает одну четвертую часть реакции образца

через призму длиной в 1560 мм. Опорные призмы коромысел имеют ту же длину, а следовательно, нагружены в $\frac{7}{8}$ раза больше, так как отношение плечей коромысел 12 составляет $\frac{1}{6}$. Фотография одного из коромысел дается на фиг. 49. Здесь видны обе нажимные призмы первого и второго порядка. Седла для них помещены в верхнем и нижнем якорях, седло же опорной призмы укреплено на станине.

Правильное вертикальное положение коромысел 12, имеющих большой вес, достигается подвеской их на призмах и пружинах с помощью расчалок. Якоря также подвешены на расчалках. Расположение подвесок, поперечные балочки для них и боковые стойки видны на всех фигурах, относящихся к силоизмерительному механизму.

Коленчатый рычаг 14 с передаточным числом в $\frac{1}{8}$ также имеет подвески. Под этим рычагом имеется колодезь, служащий одновременно для осмотра всего механизма. Штанга 15, рабочая длина которой может регулироваться гайками на резьбе, проходит через литую пустотелую стойку, на которой покоится главное коромысло 16 через посредство призмы. По главному коромыслу для равновесия должен перемещаться бегунок весом в 1 т. Привод его осуществляется винтом, который связан системой валиков и шестеренок с ручным маховиком. Для облегчения хода бегунку установлен на шариковых подшипниках. Амплитуда колебания коромысла регулируется колонкой с пружинным амортизатором.

Равномерная шкала коромысла имеет 1250 делений ценой в 1 т. Нониус обеспечивает точность отсчета в 0.1 т, хотя чувствительность механизма значительно выше: он реагирует даже на нажим от руки.

Верхний якорь перекрыт стальной плитой (фиг. 36 и 38), предохраняющей ответственные части силоизмерительного механизма от всяких случайностей. В непосредственной близости от него расположена также площадка управления, к которой ведут два трапа. Экспериментатор, находящийся на этой площадке, может одновременно следить за ходом всего испытания и вести управление машиной, т. е. начинать и заканчивать нагружение, менять скорость хода поршня, возвращать его обратно, поддерживать равновесие главного коромысла и вести отсчеты.

Опорно-захватные приспособления машины сосредоточены в челюсти 8 и траверзах 6 и 9. В первых двух имеются сменные клинья для захвата образцов на растяжение, в двух последних опорные плиты. Для тех и других предусмотрены центрирующие сферические гнезда. Крепление опорной плиты в траверзе 6 показано на фиг. 40. Клинью для растяжения в этом разрезе убраны.

Для перемещения траверзы 6 вдоль оси машины и для подведения ее к соответствующим расточкам на тягах первой группы 5 имеется специальная тележка с приводной рукояткой и зубчатой передачей (фиг. 45). Челюсть 8 покоится на специальных катках. В обеих деталях имеются приспособления для амортизации отдачи при разрушении образца. Эти приспособления состоят из плоских пружин со сменными дубовыми подушками, которые прижимаются с тыльной стороны к захватам, будучи укрепленными на подвесной дверке по фиг. 50. Кроме того, для амортизации между головной частью якоря и передним упором укреплен дубовый брус (фиг. 38). Этим же целям служат спиральные пружины, участвующие в подвеске коромысел и якорей.

Испытание на поперечный изгиб обеспечено в машине для балок с пролетом в 6.1 м. Для этого вплотную к задней траверзе 9 может быть приболчен мост, представляющий собой массивную ребристую отливку. Мост виден на ряде фигур. Для устойчивости мост подвешен на расчалках и призмах к клепаным балкам рамы. На мосту имеются две опоры. Перемещение их достигается ходовым винтом, а крепление на мосте — четырьмя маховиками.

Правильность показаний машины была достигнута индивидуальной поверкой всех рычагов естественными гириями до их сборки и до окончательной тарировки машины посредством набора упругих динамометров.

Машина установлена в помещении размерами 52×14 м. В торцевых стенках по оси машины имеются высокие ворота для пропуска деталей, предназначенных к испытанию. Машина обслуживается мостовым краном с подъемной силой в 30 т.

6. Машина государственной германской испытательной станции

В начале этого столетия по инициативе Германской ассоциации мостостроителей (Brückenbauverein) была построена сверхсильная испытательная машина для государственной испытательной станции в Grosslichterfeld, ныне Staatliches Materialprüfungsamt, Berlin — Dahlem. Машина проектировалась и строилась в течение десяти лет — с 1900 по 1910 г. — фирмой Hanke & Lueg в Дюссельдорфе под непосредственным руководством председателя ассоциации д-ра Зейферта (Selfert). С конструктивной стороны ее можно считать самой простой из существующих сверхсильных машин. Зато по правильности показаний она уступает многим.

Машина относится к числу гидравлических универсальных машин горизонтального типа. Наибольшая развиваемая ею нагрузка 3000 т при сжатии и 1500 т при растяжении. Габариты в плане 28×4.5 м. Расстояние между крайними точками в вертикальной плоскости 4.1 м. Положение грузовой оси над уровнем пола 1.250 м. Общий вес машины, не считая насосной установки, 350 т.

Длина образцов при сжатии до 15 м, при растяжении до 13 м.

Станина машины заложена в котлован глубиной 1.75 м.

Конструкция машины показана в чертежах на фиг. 51, принципиальная схема на фиг. 52.

Рама машины состоит из двух тяг *a*, связанных массивными концевыми устоями со станиной. Последняя представляет собой две клепаные двутавровые балки с распорными ребрами. Для большей жесткости тяги имеют промежуточную обвязку *g*. Тяги составные, поставлены на соединительных муфтах; наружный диаметр их 600 мм, диаметр в резьбе 480 мм; вес каждой около 20 т; расстояние между осями тяг 3000 мм. Плоскость, проходящая через оси тяг, наклонена к горизонту; это открывает доступ к машине преимущественно с одной стороны.

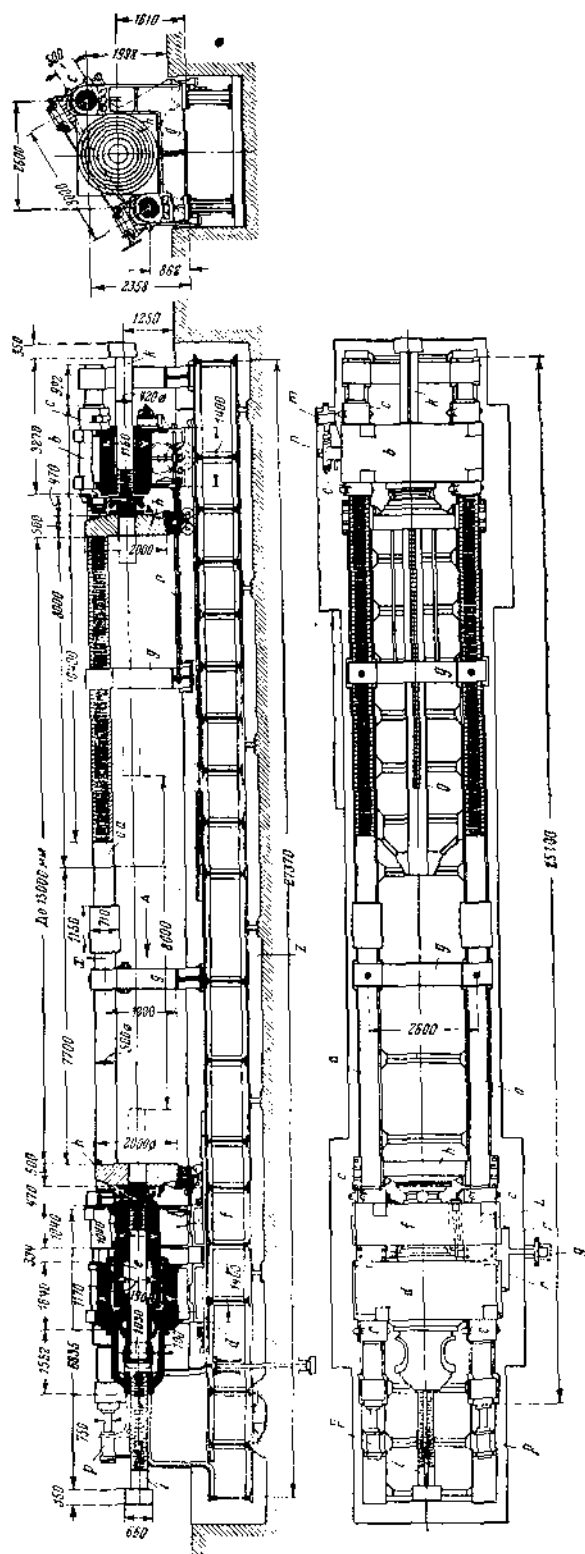
С помощью мотора *m* посредством червячного редуктора *n* и гаек *c* резьба на тягах позволяет перемещать 32-тонный устой *b*, расположенный на катках. Перемещение, рассчитанное на 8 м, позволяет располагать этот устой вместе с опорной плитой или захватом в нужном положении по размерам образца.

В другом устое сосредоточены цилиндр *d* и его плунжер *e*. Когда цилиндр, связанный с тягами посредством своих фланцев, неподвижен, плунжер может перемещаться; машина настроена на испытание сжатием (фиг. 52 — А). Для испытания на растяжение плунжер крепится намертво к тягам посредством траверзы (фиг. 52 — В), а цилиндр, расположенный на пружинящей тележке, получает возможность перемещаться. Внешний диаметр цилиндра 1900 мм; внутренний диаметр 1200 мм; вес отливки 40 т; диаметр плунжера 1170 мм. Цилиндр снабжен кожаным манжетом и предназначен для работы посредством воды под давлением до 300 атм.

В качестве опор для образцов на сжатие служат плиты *h* — *h* со сферическими подпятниками. Самоустанавливаемость их повышается смазкой под давлением. Размер плиты 2×2 м. Вес каждой 15 т. При испытаниях на растяжение плиты убираются и заменяются челюстями. Последние крепятся на резьбе болтов *i* — *k*.

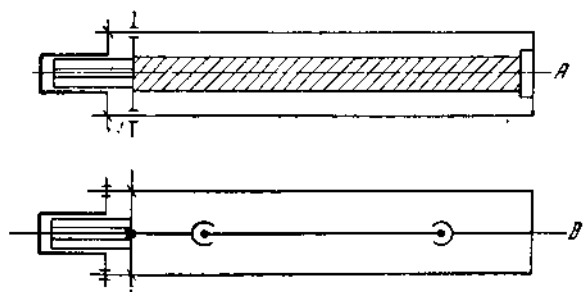
Измерение нагрузки производится с помощью манометра от грузового цилиндра. При наличии кожаных манжетов этот способ не может обеспечить достаточной правильности показаний.

Управление основными органами машины сосредоточено в непосредственной близости к грузовому цилиндру — стойка *q*. Через *r* на чертеже обозначены



Фиг. 51.

трубопроводы, через L — вспомогательный цилиндр и поршень, служащие для возвращения частей нагружающего механизма в исходное положение. Таких вспомогательных цилиндров имеется два. Они работают на давление в 4 ат. Упругая отдача принимается в машине двумя гидравлическими буферами p , рассчитанными на силу в 200 т для каждого.



Фиг. 52.

В качестве материала для всех отливок применено стальное литье. Плунжер, тяга и шпинделя изготовлены из ковanej стали. Все направляющие чугунные.

В этой же лаборатории стоит еще одна сверхсильная машина системы Норре. Машина рассчитана на 500 т. Она много старше, чем машина Seifert, и напоминает собой машину Werder.

7. Машина Werder

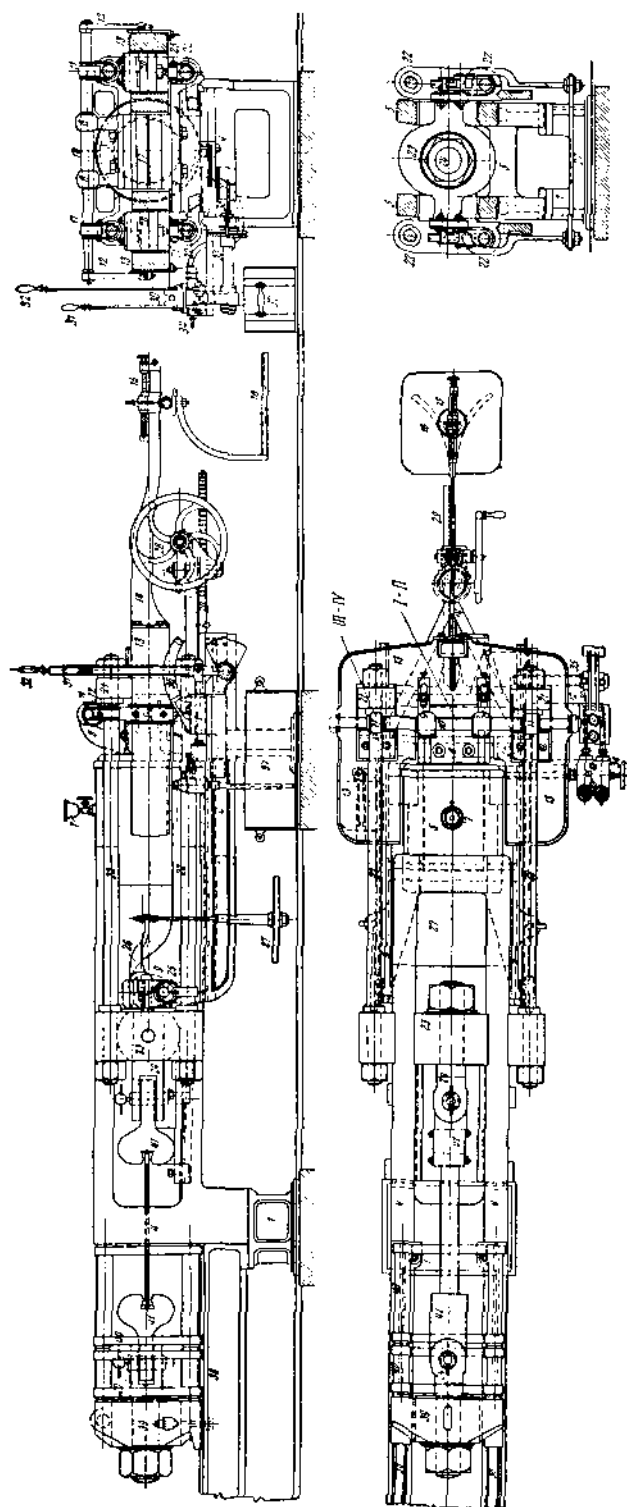
В 1852—1853 гг. по инициативе Баушингера (Bauschinger) в Германии была построена одна из самых больших по тому времени машин силой в 100 т. Конструктором машины являлся Вердер (Werder), место исполнения — завод Klett & Co, ныне Maschinenfabrik Augsburg, Nürnberg (MAN). Вскоре лучшие лаборатории Европы и, в частности, механические лаборатории трех учебных заведений в России обзавелись подобными машинами.

Благодаря тонко продуманной конструкции и прекрасному исполнению машина Werder послужила образцом для многих последующих машин: ее плоский подвешенный рычаг можно встретить у большинства современных горизонтальных машин, ее призмы повторялись в сотнях конструкций. Все машины Werder, включая даже первую, работают до настоящего времени, не вызывая особых нареканий в течение 88 лет. Поэтому, несмотря на некоторую устарелость, главным образом из-за недостаточной автоматизации, этой прекрасной машине стоит уделить внимание наравне с уникальными современными машинами.

Машина Werder (фиг. 53) универсальная, гидравлическая, горизонтального типа. Ее рычажно-весовой механизм для измерения нагрузок отличается тем, что он непосредственно связан с нагружающим механизмом в один узел. Принципиальная схема машины приведена на фиг. 54, причем обозначения на этой схеме находятся в соответствии с обозначениями фиг. 53.

Цилиндр машины 5 неподвижно укреплен на станине. Плунжер его 5', подаваясь гидравлическим способом вперед, вправо, продвигает вместе с собой кронштейн 11, который укреплен на нем. На кронштейне подвешен массивный колесчатый рычаг 13—14, имеющий форму П-образного стола, очень развитого в плоскости. Продвигаясь и деформируя образец, плунжер нажимает через призмы I—II на этот подвешенный рычаг и заставляет его перемещаться.

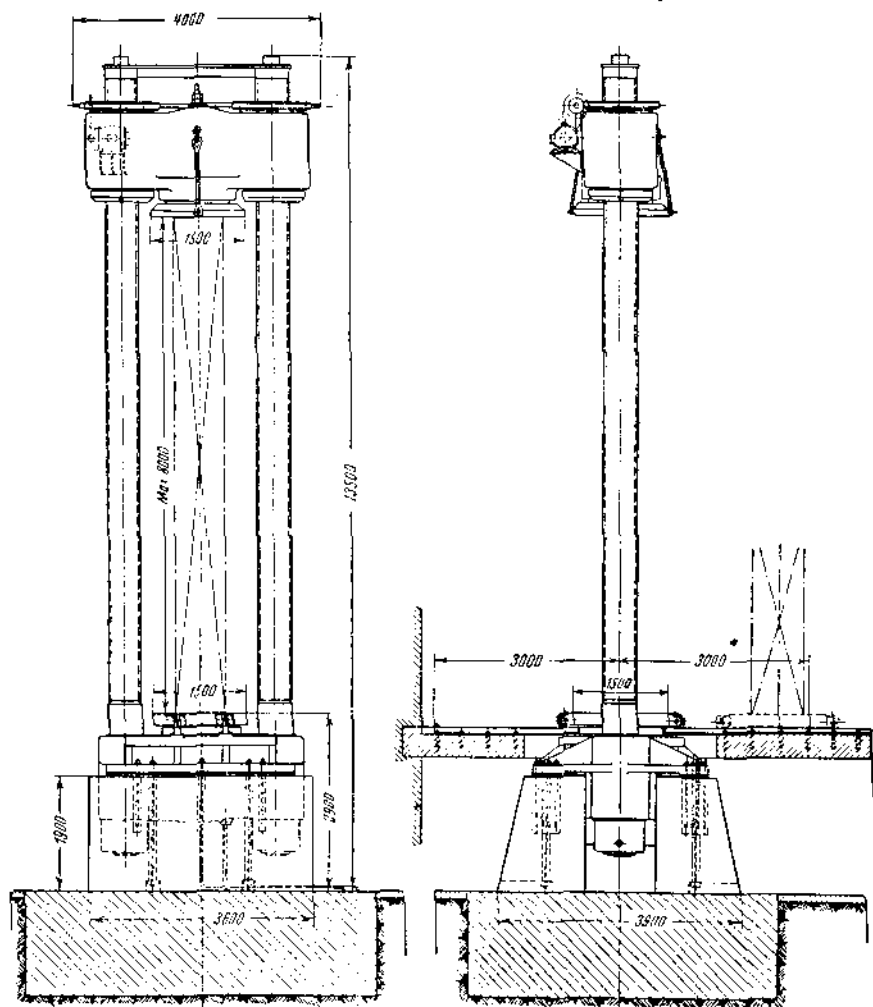
Рычаг в свою очередь вовлекает в движение поперечину 21, тяжи 22 и поперечину 8 через другую пару призм III—IV. Заметим, что ребро призмы III—IV лежит несколько выше ребра I—II, благодаря чему сила плунжера и реакции тяжей, а следовательно и образца, приводятся к паре с плечом в 3 мм.



Фиг. 53.

8. Новые германские сверхсильные машины

Повышенный интерес к постановке опытов на образцах больших размеров и на целых деталях, подчас очень громоздких, привел к тому, что в Германии в настоящее время проектируется и, повидимому, строится несколько новых сверхсильных машин. Нам известна, например, конструкция большого вертикального прессы силой в 2000 т общества Tohnindustrie. Пресс состоит из двух колонн



Фиг. 55.

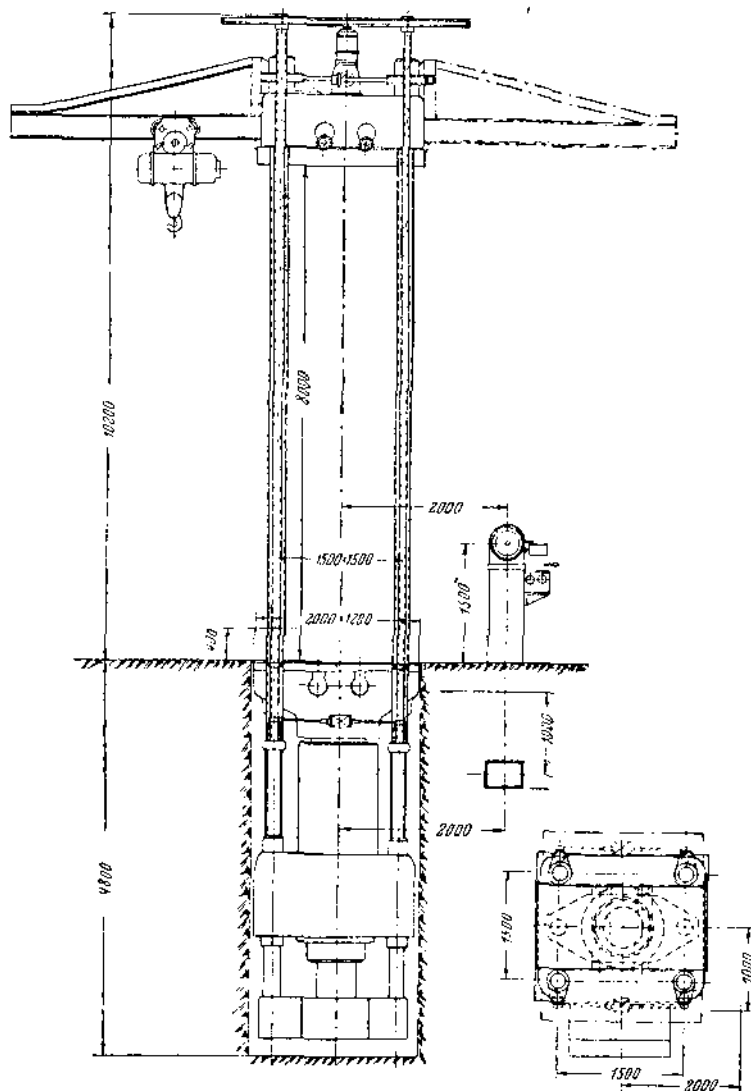
с резьбой имеет подвижную верхнюю траверзу, приводимую от мотора, и цилиндр, уплотненный кожаным манжетом. Силоизмерение манометрическое (фиг. 55).

Значительно больший интерес представляет собой универсальная машина общества MAN, общий вид которой дается на фиг. 56. Машина рассчитана на развитие 1000 т при сжатии и 500 т при растяжении.

Она состоит из: 1) вертикальной пространственной рамы с четырех колоннах с резьбой — станины; 2) двух расположенных на общей геометрической оси цилиндров; цилиндры укреплены на цоколе станины так, что один из них, предназначенный для сжатия, обращен кверху, другой, для растяжения, книзу; 3) двух плунжеров, связанных между собой общей рамой в одну подвижную систему.

Взаимодействие частей понятно из схемы фиг. 57.

Крепление, или упор образцов, производится между верхней неподвижной траверзой и нижним столом, сидящим на головной части плунжера сжатия. Растяжение сообщается образцу при подаче масла под нижний плунжер. Он увлекает за собой верхний плунжер и тянет образец. Сжатие сообщается образцу при реверсировании в подаче масла, когда верхний плунжер совершает рабочий



Фиг. 56.

ход, а нижний увлекается им вхолостую. Для изгиба служит также верхний плунжер, на головную часть которого накатывается мост с опорами. Верхняя пассивная траверза может устанавливаться на любой высоте благодаря резьбе на колоннах и электромотору.

Шлифованные плунжеры без манжетных уплотнений в соединении с маятниковым динамометром обеспечивают правильность показаний машины. Не совсем удачным следует признать расположение одного из цилиндров обращенным книзу. Это не может не отразиться на способности машины держать давление, которая и без того невелика из-за отсутствия уплотняющих манжетов. В связи с этим

напрашивается само собой пожелание снабжать машину автоматическим стабилизатором давления.

Нагрузки в 1000 т для сжатия и в 500 т для изгиба и на растяжение допускаются по той причине, что площадь верхнего плунжера взята вдвое больше площади нижнего из конструктивных соображений, а мост для изгиба при пролете в 3 м получил габариты, лежащие на пределе приемлемых.

Четыре вертикальные неподвижные колонны, связанные в пространственную раму, не только воспринимают нагрузку, но служат одновременно в качестве направляющих для верхней траверзы, которая ходит по ним благодаря имеющейся резьбе. Это обычный прием, используемый фирмой MAN в высоких машинах. Он требует очень точной центровки колонн. Малейший перекос вызывает за-

сдание траверзы, что наблюдается часто на практике. Перекосу колонн способствует возможное боковое выпучивание их от продольного изгиба при испытаниях образцов на растяжение.

Необходимой частью машины является лифт, для перемещения экспериментатора на любую высоту машины. На фиг. 56 площадка лифта убрана, остались только винты, расположенные параллельно колоннам. Там же показаны тельферы грузоподъемностью 35 т для подноски образцов.

Даем основную характеристику машины: ход плунжера 500 мм,

длина образца при растяжении 0—5,8 м, длина стойки при сжатии 0—6,85 м, пролет балки при изгибе 0,7—3,0 м, расстояние между колоннами в свету 2,5 м, размеры опорной плиты при сжатии $2 \times 1,2$ м, вес машины 100 т.

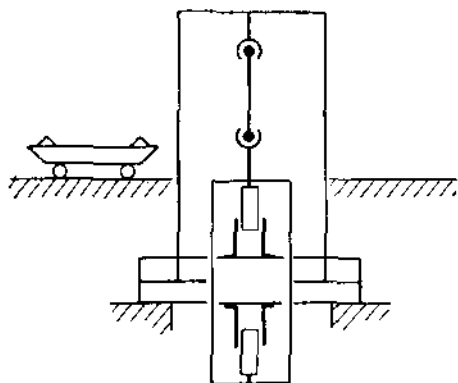
Машина обслуживается пятью электромоторами 30 квт.

Говоря о новых немецких уникальных машинах, нельзя не остановиться на универсальной машине, поставленной в 1933 г. японскому адмиралтейству акционерным обществом Schloemann (завода Haniel & Lueg в Дюссельдорфе). Машина той же силы, что на испытательной станции в Berlin — Dahlern, т. е. на 3000 т при сжатии и на 1500 т при растяжении. Зато по габаритам она значительно больше и имеет ряд конструктивных усовершенствований.

9. Уникальные машины Amsler

Заводу A. J. Amsler & Co (Швейцария), выпустившему свою первую испытательную машину более 50 лет назад, не приходилось строить особо сильных уникальных машин в нашем понимании, если только не считать прессов силой до 1000 т с мостами для изгиба, приспособленных к испытанию строительных материалов в виде целых блоков и балок. Эти прессы представляют собой полную копию прессов меньших размеров, пользующихся настолько широкой известностью, что останавливаться на них в рамках настоящей статьи нет никакого смысла. Тем не менее проекты уникальных машин у Амслера разрабатывались. Здесь можно указать на многоплунжерные машины: высокий пресс на четырех колоннах с шестью плунжерами силой в 1000 т и горизонтальную машину на 3000 т с двенадцатью плунжерами, которые вводятся в работу по мере надобности (обе конструкции не были осуществлены).

На таком фоне за реальное достижение для Амслера надо признать появление в 1939 г. в Европе, накануне военных событий, новой универсальной гидравлической машины горизонтального типа силой до 800 т. Машина напоминает



Фиг. 57.

собой хорошо известную горизонтальную машину ZBDH Амслера на 200 т, которую уже можно встретить в некоторых наших лабораториях. В отличие от нее в новой машине балки, составляющие ее раму, лежат в одном горизонте, а не смещены по вертикали. Машина обслуживается классическим маятниковым динамометром Амслера с четырьмя диапазонами измерения. Мощность мотора — 11 л. с.

Машина была установлена в июле 1939 г. в лаборатории заводов „Association des Industriels de Belgique“ (Брюссель), в связи с постановкой исследований шахтных цепей и канатов. Размеры ее таковы: длина — 31,5 м, ширина — 2,8 м, высота — 2,2 м; пролет между балками рамы 1,9 м в осях.

Размеры образцов: длина на растяжение — 19,5 м, диаметр для канатов и тросов — 120 мм, ширина для ленточных цепей — 500 мм, сечение при растяжении для полосового железа — 200×40 мм, длина на сжатие — 2,5 м, сечение на сжатие 500×500 мм.

Вес машины — 90 т, скорость подачи — до 70 мм/мин.

Приспособлений для изгиба машина не имеет. К машине разработана целая система захватов клиновых, чашечных и др. Устройство их не позволяет испытывать цепи под нагрузкой, превышающей 400 т.

Ход плунжера машины очень велик — 2 м. Это обстоятельство заставило принять особые меры с амортизацией упругой отдачи образцов: рама машины поставлена на специальных упругих ребрах, кроме того используются дубовые буфера.

При изготовлении машины была широко использована сварка.

10. Сверхсильная установка Freyssinet

В недавно отстроенной лаборатории инженерных сооружений в Париже (Laboratoires du Bâtiment et des travaux publics, Paris 12, rue Brancion) вопрос об испытании массивных железобетонных и стальных конструкций был решен постройкой специальной испытательной установки. Конструкция этой установки, которую трудно подвести под категорию машины, пресса и даже стенда, поконится на совершенно новых, до сих пор не применявшихся в испытательном деле принципах, разработанных М. Freyssinet и уже внедрившихся в мостостроение.

В основу проекта было положено применение железобетона в качестве материала для станины, принимающей на себя все реакции. Установка в целом представляет собой тоннель с массивными стенками. Длина рабочей части ее 10 м, поперечные размеры в чистоте $3,5 \times 3,5$ м; максимальная сосредоточенная нагрузка 2000 т.

Схематический чертеж этого испытательного тоннеля дается в масштабе 1:200 на фиг. 58 в двух разрезах. Днище тоннеля имеет форму эллиптического цилиндра. Такой же цилиндр верхнего перекрытия усечен. На торцах тоннель заканчивается полукруглыми порогами с. Весь он покоится на плоских ребристых перемычках f с шагом в 1 м. Толщина перемычки 0,15 м. Две продольные балки, имеющие профиль в виде уголка, являются опорными для этих перемычек и со своей стороны лежат на шести бетонных сваях, заложенных в грунт. Общий вес массива 700 т.

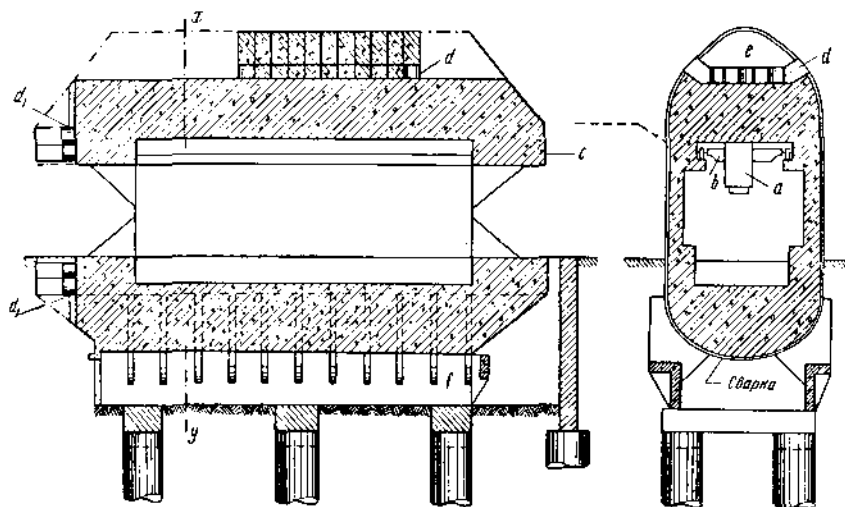
Силовое оборудование тоннеля сводится к пяти гидравлическим домкратам а, подвешенным на катучих тележках б. Средняя тележка несет домкрат силой в 2000 т, две крайние, с обеих сторон, — по домкрату в 100 т. Расстояние между тележками и взаиморасположение их могут меняться в зависимости от условий опыта. Рельсы тележек укреплены на горизонтальных ребрах, выступающих из стенок тоннеля. При нагружении домкраты упираются тыловой частью в верхнее перекрытие и прижимают испытываемые конструкции или их опоры к днищу.

Создающееся распределение сил таково, что без надлежащих предупреждающих мероприятий наиболее тонкие вертикальные стенки тоннеля получили бы значительные растягивающие напряжения, недопустимые в железобетоне. Эти мероприятия по существу и являются тем оригинальным приемом, которым

воспользовался Freyssinet для того, чтобы относительно легкая железобетонная конструкция оказалась пригодной для указанных целей. Заключаются они в том, что стенки тоннеля уже при его изготовлении подвергаются предварительному сжатию, сохраняющемуся на все время существования установки. Возникающие же в процессе испытания растягивающие напряжения накладываются на сжимающие и создают эффект разгрузки.

Процесс создания предварительных сжимающих напряжений в установке весом до 700 т настолько необычен, что на нем следует несколько задержаться.

Обжатие цилиндрического тела тоннеля радиальными силами создавалось не сразу, а посекционно. После изготовления тела на верхней его площадке, образованной усеченным цилиндром, последовательно устанавливались замыкающие блоки *e*. При этом блок располагался на трех гидравлических домкратах *d* и затягивался бандажом, опоясывающим весь тоннель. Бандаж сборный, состоял из 64 колец прутковой стали высоких механических свойств диаметром 10 мм, сваренных со стороны, противоположной блоку *d*. Каждый домкрат



Фиг. 58.

был рассчитан на нагрузку до 350 т. Опираясь ими по очереди в определенном порядке и доводя окончательную суммарную нагрузку до 600 т, которая целиком воспринималась бандажом, удавалось постепенно заменять домкраты бетонной набивкой. В первую очередь удалялся средний домкрат, а затем два боковых. По мере этого освобождающиеся полости бетонировались за два приема для ослабления вредного влияния усадки бетона.

В результате этих операций в каждом бандаже оставалось усилие в 500 т, которое и обеспечивало необходимые сжимающие напряжения. Правильность расчетных данных подтверждалась тензометрическими измерениями.

Последовательная затяжка тоннеля 20 одинаковыми бандажками создала конечное усилие в 10 000 т. По длине тоннель затянут точно таким же образом пятью бандажками по нижней и верхней линии. Домкраты для них обозначены через *d*₁. Сила этой затяжки составила 2500 т. Таким образом все тело тоннеля оказалось в объемном напряженном состоянии сжатия, которое несколько разгружается во время производства опытов.

Внутреннее оборудование тоннеля, кроме уже отмеченных пяти домкратов на тележках, состоит из сети маслопроводов с манометрами и запорными вентильями, набора опорных цоколей на разные нагрузки вплоть до 2000 т, динамометров с автоматической записью диаграмм изменения усилий в функции времени или деформации и ряда других приспособлений. Сеть маслопроводов стацпо-

нарно расположена на внутренней вертикальной стенке тоннеля, а непосредственная подводка масла под поршни домкратов осуществлена трубами с шарнирными плотными сочленениями. Насос и аккумулятор давления с точной автоматической регулировкой вынесены за пределы тоннеля.

Испытательный тоннель успел себя оправдать меньше чем за полгода после открытия лаборатории (1935 г.). С его помощью были произведены весьма ответственные опыты, совершенно не доступные до этого времени.

11. Прочие уникальные машины

До сих пор изложение касалось машин хотя и универсальных, но приспособленных только для статических испытаний. Встречаются, однако, уникальные машины и в других областях испытательного дела, а именно: в области динамических испытаний на выносливость при переменных нагрузках, в области динамических испытаний однократным ударом, наконец в области испытания на износ при истирании. Не находя нужным в рамках настоящей статьи останавливаться сколько-нибудь подробно на их конструктивной стороне, разбор которой должен идти параллельно с расчетными выкладками и с анализом тех режимов, в которых работают исследуемые детали на практике и при испытаниях, ограничимся лишь для полноты картины самыми общими данными.

Среди машин для испытания на выносливость по мощности первое место в настоящее время занимают американские станы для испытания на изгиб при вращении железнодорожных осей в натуральную величину. Таких станов имеется три в исследовательском секторе заводов Тимкен (Timken Roller Bearing Co). Они построены в 1936—37 г. и предназначаются один для осей электровозов с диаметром подступичной части до 350 мм, два других — для вагонных осей. В каждый стан заправляются консольно две оси, запрессованные в центры колес. По длине станы занимают до 9 м. Мощность их моторов достигает 75 квт. Еще больший стан строится сейчас в СССР. Стан несколько иной конструкции работает на заводах Крупна в Эссене. На нем испытывается на выносливость целый скат, получающий симметричную нагрузку на обе шейки.

Надо вообще сказать, что усложнение технических проблем на транспорте в связи с увеличением скорости, переходом на большегрузные вагоны и усилением тяги встретило живой отклик среди экспериментаторов. Кроме упомянутых станов сейчас интенсивно ведется изучение выносливости рельсов на переменные нагрузки и на износ. В этом отношении уже зарекомендовала себя кривошипная машина Н. Ф. Moore (Illinoise University, USA), построенная в нескольких вариантах. Искусственные условия, в которые ставится рельс при испытании на ней, привели к появлению многочисленных проектов других машин, стенов и даже опытных участков пути в виде замкнутых колец, приспособленных для длительного пробега специальных тележек (разные исследовательские организации НКПС).

В литературу еще не проникли результаты испытаний узлов на новой большой пульсационной машине Lehr. (построена заводами MAN). Машина эта пневматическая, дает амплитуду нагружения до ± 100 т при частотах до 20 Hz. Размах ее активной челюсти под нагрузкой достигает 5 мм. Применение этой машины для испытания коленчатых валов дизелей дало настолько интересные результаты, что сейчас в Германии приступлено к постройке второй аналогичной машины, но больших размеров, для нагрузок до ± 300 т.

Копры для испытания ударом по конструктивным признакам разделяются на несколько видов. Очень мощные вертикальные копры с запасом энергии до 10 000 кгм пользуются достаточным распространением на металлургических заводах для приемочных испытаний рельсов, бандажей и осей. Зато равноценных им маятниковых копиров еще немного. Уникальным представителем их пока является баллистический маятниковый копер с двумя маятниками, принадлежащий Националь-

ной физической лаборатории (Англия). На одном маятнике подвешен шайбот весом 4.5 т, на другом, вращающемся навстречу первому, молот весом 2.25 т.

Длина маятников, имеющих общую ось привеса, — 3.65 м. Копер был построен по заказу Индусских железных дорог (Alipore Test House, India) для разработки технических условий на испытание винтовых стяжек ударом. По всей вероятности еще большим копром будет скоро располагать НКПС.

Наконец, совершенно особо надлежит отметить оригинальный пневматический копер Ильюшина. Он сконструирован в лаборатории испытания материалов Московского университета. Мы не останавливаемся на описании его конструкции и характере проводимых испытаний (удар, деформации при больших скоростях), так как их можно найти в работах проф. А. А. Ильюшина, С. М. Попова, опубликованных в Инженерном сборнике, вып. 1. Укажем только, что применение пневматического принципа открывает широкие перспективы для постройки копров с большой энергией и скоростью.

Поступила в редакцию 5. XII 1940.

Институт механики
Акад. Наук СССР.

HÖCHSTMÄCHTIGE UNIKALE MATERIALPRÜFUNGSMASCHINEN

J. N. MOROSOW

(Zusammenfassung)

Die Uebersicht befasst sich mit den in bezug auf ihre Grösse und die entwickelte Leistung stärksten Materialprüfungsmaschinen, die der Verfasser höchstmögliche unikale Maschinen nennt.

Für jede Maschine sind ihre Grösse, die Beschreibung ihrer Konstruktion, die wichtigsten Charakteristiken, Ersatzbilder, Entwürfe u. s. w., ebenso auch einige Berechnungseinzelnheiten angegeben.

РЕГУЛИРОВАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРЕРЫВИСТОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И ВОСЬМИТОЧЕЧНЫЙ РЕГУЛЯТОР ТЕМПЕРАТУРЫ АЭРОПЫЛИ БАРАБАННОГО КОТЛА

Ю. Г. КОРНИЛОВ

(Ленинград)

1. Введение

1.1. Прерывистый принцип действия в технике автоматического регулирования нашел применение с момента ее зарождения, т. е. со времени Уатта, будучи использован в регуляторах скорости паровых машин.

Этот принцип соответствует и самому характеру их работы в виду того, что потребление ими пара осуществляется с перерывами и большинство машин управляется изменением продолжительности выпуска пара за ход.

В сравнении с дросселированием такой метод дает повышение коэффициента полезного действия машины. Это и послужило причиной его применения.

Уже в девятисотые годы прерывистое регулирование машин, иначе говоря, регулирование на отсечку, имело достаточно разработанную теорию. Однако в дальнейшем, в связи с увеличением быстроходности машин и в особенности с переходом на турбины, эта теория перестала находить практическое применение.

Применение в последние годы в технике регулирования электрической энергии возвратило к жизни этот тип регуляторов, но уже по иным соображениям. Он дает возможность ввести конструктивные упрощения в регулировочную аппаратуру, увеличить чувствительность регулятора и т. д.

Благодаря этому вновь возник интерес и к теории прерывистого регулирования, учитывающей особенности новой аппаратуры.

1.2. Первый, кто при анализе динамики регулирования обратил внимание на прерывистость действия регуляторов скорости, был Каргль.

В работе [1], опубликованной в 1871 г., он фактически поставил задачу регулирования скорости паровой машины на отсечку. Влияние прерывистого регулирования он выясняет сравнением его с непрерывным регулированием и только с качественной стороны, причем применяет для этой цели графические приемы анализа.

Рассмотрим несколько фигур, заимствованных у Каргля. Все они изображают зависимости действующей силы T и силы сопротивления W , приложенных к пальцу кривошипа машины от пути S , пройденного им.

На фиг. 1 приведена для случая непрерывного регулирования кривая усилий и, кроме того, соответствующая ей кривая скорости v пальца кривошипа. Заштрихованная площадь I пропорциональна избытку работы сил, приложенных к машине, и идет на увеличение ее скорости.

Имеем, очевидно, на основании закона живой силы:

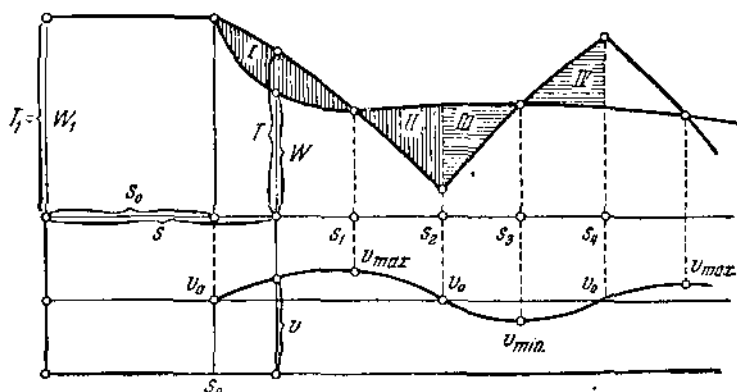
$$\text{Площ. } I = \int_{s_2}^{s_1} (T - W) ds = M(v_{\max}^2 - v_0^2) / 2, \quad (1)$$

где M — приведенная масса движущихся частей машины, $v_{\max}$, v_0 — соответственно ее максимальная и нормальная скорости.

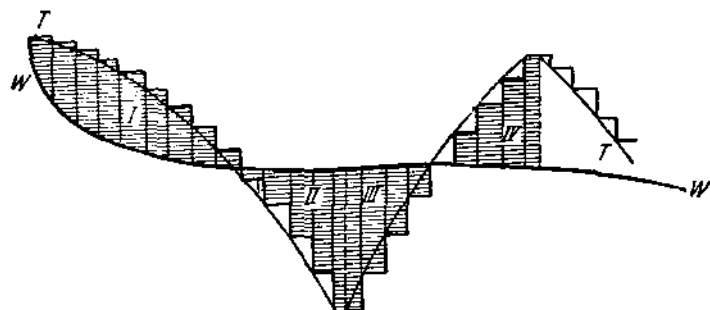
На фиг. 2 изображена аналогичная диаграмма для случая прерывистого регулирования. Основой для ее построения послужили допущения Каргля о постоянстве вращающего момента (момента силы T) за время хода поршня, который определяется положением регулятора в начале этого хода, и постоянстве периода регулирования.¹

Площадь I (фиг. 2), ограниченная сверху ступенчатой кривой, соответствующей прерывистому регулированию, увеличивается по сравнению с непрерывным регулированием, обеспечивающим плавное изменение T .

Избыток работы этой силы T характеризуется на диаграмме площадью треугольников, отсекаемых плавной кривой. Отсюда, учитывая уравнение (1), Каргль делает заключение об увеличении колебаний скорости при переходе на прерывистое регулирование. «Однако, — пишет он, — этим вопрос о практической



Фиг. 1.



Фиг. 2.

пригодности регулятора не исчерпывается, и необходимо выяснить, будут ли эти колебания затухающими».

Далее Каргль приводит диаграммы, изображенные на фиг. 3 и 4, откуда видно, что влияние прерывистого действия регулятора сказывается тем сильнее, чем меньше разность сил T — W , приложенных к машине, и чем менее эффективно действие регулятора, т. е. чем больше степень неравномерности.

Переходя к рассмотрению регуляторов непрямого действия, он и здесь сравнивает работу их при непрерывном и прерывистом регулировании и выясняет графически условия устойчивости для последнего случая. Приведем основные его соображения по этому вопросу.

Прежде всего напомним характер работы регуляторов непрямого действия

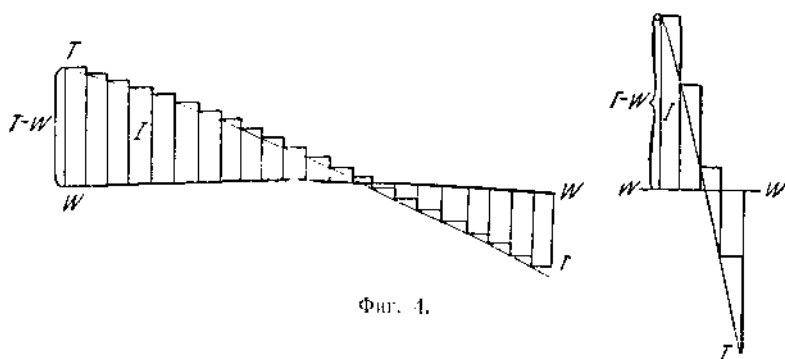
¹ Эти допущения — приближенные, как будет видно из рассматриваемой ниже работы Хорта.

того времени, использующих энергию самой машины. Задача регулятора заключалась в этом случае в подсоединении в соответствующем направлении передачи регулирующего органа к валу машины.

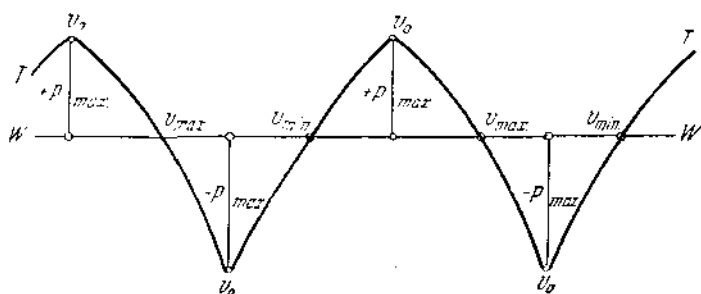
Тогда перемещение регулирующего органа оказывается пропорциональным пути, пройденному пальцем кривошипа s , а знак его определяется направлением подключения. Отсюда следует, что кривые изменения действующей силы машины T ,



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

пропорциональные перемещению регулирующего органа для обоих направлений подключения, будут выражаться кривыми, симметричными относительно горизонтальной оси. То есть при постоянстве противодействующей силы W получим для непрерывного регулирования диаграмму, изображенную на фиг. 5, откуда видно, что колебания не затухают.

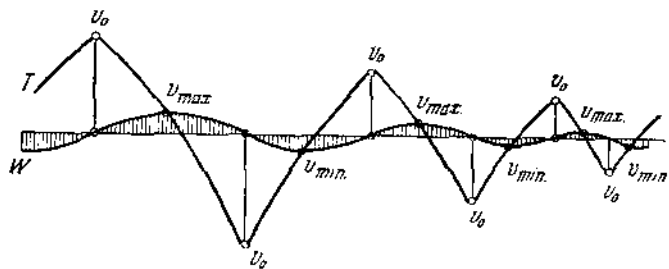
В действительности W возрастает с возрастанием скорости, и фиг. 5 заменяется фиг. 6, где колебания затухают благодаря влиянию заштрихованных площадей.

Для прерывистого регулирования имеем соответственно фиг. 7. Пока упомянутые выше заштрихованные площади, соответствующие рассматриваемой

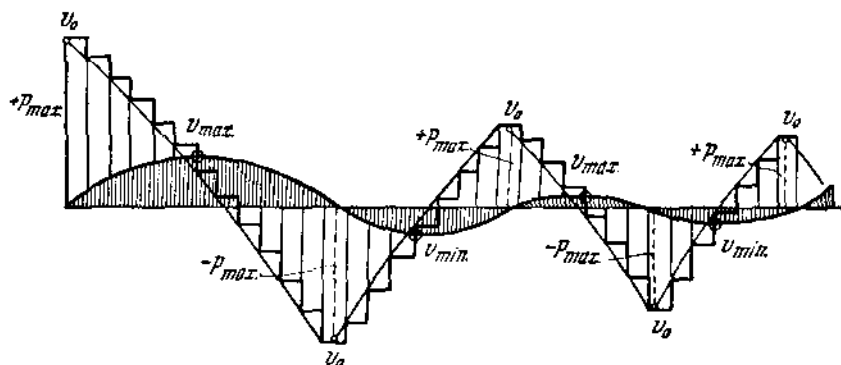
волне, будут больше площади треугольничков, вносимых прерывистым регулированием для той же волны, процесс и здесь будет затухать.

Однако первая площадь убывает быстрее (она убывает и от уменьшения длительности волны и от уменьшения ее амплитуды), чем вторая (размеры треугольничков почти не меняются, изменяется лишь их число), поэтому в некоторый момент они станут равными и дальнейшее затухание колебаний прекратится.

Таким образом, по Карглю, прерывистое не прямое регулирование в отличие от непрерывного приводит к некоторым остающимся колебаниям, и вопрос о практической пригодности регулятора прерывистого действия определяется величиной амплитуды этих колебаний. Одной из мер их уменьшения является увеличение степени неравномерности регулятора.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Грасгоф^[2] в своем курсе выполняет расчет переходного процесса при прерывистом регулировании для одного частного случая по методу от хода к холу. У Сидорова^[3] находим совершенно правильные замечания относительно некоторых допущений, которые приняты Карглем, но специально им не оговорены. Это касается действующего усилия T за время хода и величин промежутков времени от отсечки до отсечки, которые принимаются постоянными. В действительности они меняются вследствие колебания скорости машины и изменения продолжительности выпуска пара в связи с перемещением муфты регулятора.

1.3. Хорт^[4] в 1904 г. первый применил к исследованию прерывистого регулирования разностные уравнения. Таким путем он сделал возможным вести исследование, в частности, выяснять устойчивость процесса регулирования в общем виде, не прибегая к чрезвычайно громоздкому, ранее применявшемуся приему перехода от хода к холу, который к тому же можно было использовать только при цифровых подсчетах.

Свое исследование прерывистого регулирования Хорт начинает с указания, что теория непрерывного регулирования, основоположником которой считается

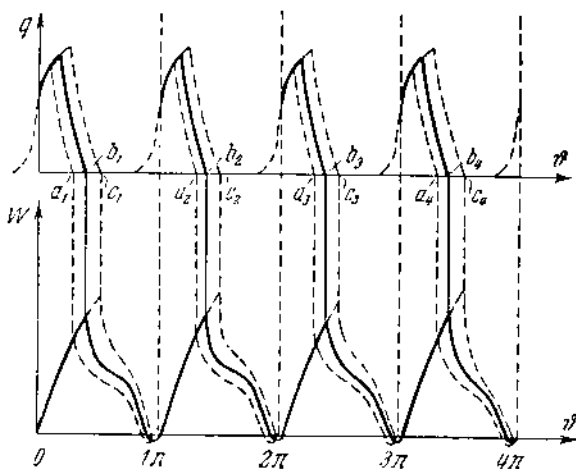
Вышнеградский [6], строго говоря, справедлива только в приложении к турбинам.

Далее он приводит диаграмму, показанную на фиг. 8, где изображены кривые подачи пара в машину q и развиваемого ею вращающего момента W в функции от угла поворота ϑ вала двухцилиндровой машины при различных положениях отсечки. Вращающий момент в течение каждого хода меняется два раза от нуля и до максимума. Площадь кривой момента и соответствующий ей средний момент за полхода, фигурирующий в расчетах, меняется с изменением отсечки.

Составляя уравнения регулятора и машины, Хорт не ограничивает себя вначале принятием постоянства промежутков времени от отсечки до отсечки, как это допустил Каргль. Однако, придя окончательно к трем разностным уравнениям, он это предположение вынужден был принять. В противном случае уравнения у него оказывались трансцендентными, что затрудняло дальнейшее исследование.

На основании своих исследований, Каргль приходит к следующим выводам.

«Условия устойчивости процесса регулирования скорости машины с прерывистым регулированием могут быть найдены исследованием „характеристического“ уравнения третьего порядка. Для получения устойчивого регулирования необходимо иметь абсолютные значения корней этого уравнения меньше единицы. При наличии только положительных корней переходный процесс к новому установившемуся режиму происходит без колебаний и тем быстрее, чем ближе корни к нулю. Если же корни хотя бы частично отрицательны (или комплексны. — Ю. К.),



Фиг. 8.

то новый установившийся режим возникает после нескольких колебаний».

В книге, [5] изданной значительно позже, Хорт, излагая в сокращенном виде свою первую работу, дает некоторые интересные дополнения.

В частности, он приводит цифровой пример регулирования скорости машины (регулятор с массой и без трения), для которого при прерывистом действии регулятора, в противоположность непрерывному, процесс оказывается устойчивым.

1.4. В очень наглядной и простой форме изложен теоретический анализ прерывистого регулирования скорости машин с применением разностных уравнений у Н. Е. Жуковского [7], который, как и Хорт, приходит окончательно к разностному уравнению третьего порядка.

Преобразуя это уравнение для случая малой продолжительности хода, когда можно ограничиться первой степенью этой величины, Жуковский приводит его к уравнению Толле [8] для случая непрерывного регулирования. Отсюда он делает заключение о применимости для быстроходных машин условий устойчивости, полученных на основе теории непрерывного регулирования.

В отличие от Хорта, Жуковский рассмотрел случай прерывистого регулирования при условии постоянной силы трения, действующей на муфту регулятора, и не пропорциональной скорости ее движения. Однако при определении условий устойчивости Жуковский ограничился случаем, когда трения вовсе нет.

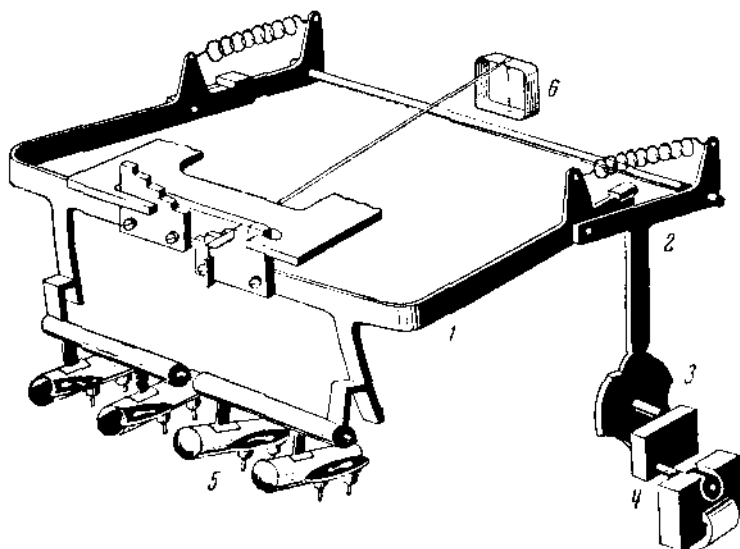
1.5. Анализ работы одного из новых электрических регуляторов прерывистого действия находим, например, у Штейна [9]. Однако у него задача сведена к непрерывному регулированию.

В последние годы особенно в связи с регулированием медленно протекающих процессов, к которым обычно можно отнести тепловые, получил распространение особый вид регулирования, характерным отличием которого является конечное число возможных положений сервомотора.

Некоторые¹ этот вид регулирования также относят к прерывистому. Однако здесь имеем дело с прерывистостью положения регулирующего органа, в то время как рассмотренный нами выше вид характеризуется прерывистостью во времени.

Неясность с обозначениями в этом вопросе усугубляется отчасти еще тем, что некоторые регуляторы сочетают в себе оба эти вида одновременно.

Подобным примером может служить контактный гальванометр завода „Пирометр“, используемый непосредственно (т. е. без промежуточных сервомоторов) для регулирования температуры.



Фиг. 9.

Для регулирования с перерывами во времени считаем более целесообразным сохранить название „прерывистое регулирование“. Второй случай называть иногда встречающимся термином „ступенчатое регулирование“.

Заметим, что последний вид регулирования является специальным вопросом и здесь не рассматривается.

1.6. Из новых работ только у Ланга [10] находим теоретический анализ прерывистого регулирования с применением подобно Хорту разностных уравнений.

В его статье приведена теория прерывистого регулирования, которая относится, по мнению автора, к таким установкам, как генераторы пара, промышленные печи и т. д., т. е. к объектам, обладающим резко выраженными аккумуляющими свойствами.

Основным регулирующим аппаратом прерывистого действия в схеме Ланга является контактный гальванометр фирмы Сименс. Принципиальная схема его механизма показана на фиг. 9.

На фиг. 9 цифрами обозначены: 1 — падающая дужка; 2 — связывающий рычаг; 3 — профилированная шайба; 4 — моторный привод с редуктором; 5 — ртутные контакты; 6 — измерительный элемент. Два контактных рычага гальванометра приводятся в периодическое движение вверх и вниз через рычажную систему от

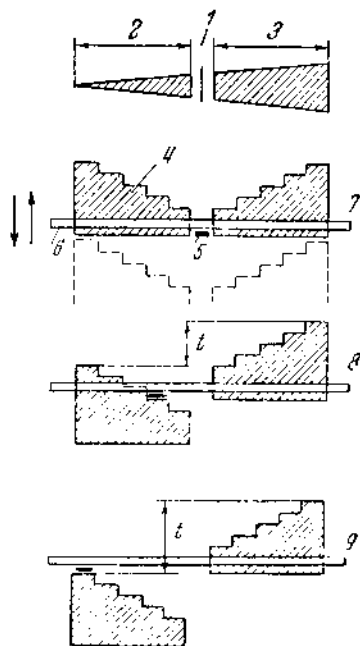
¹ Например Ланг [10].

маленького вспомогательного моторчика. Отклонение стрелки прибора приводит к включению соответствующей пары ртутных контактов, обеспечивающих определенное направление вращения электрического мотора, управляющего положением регулирующего органа, например, парового клапана.

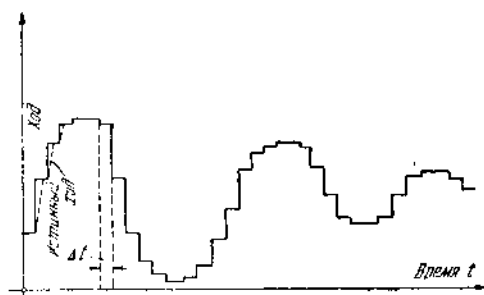
Длительность включения ртутных контактов за период регулирования и связанное с этим изменение положения регулирующего органа пропорционально отклонению стрелки благодаря наличию ступеней на контактных рычагах.

Это видно из фиг. 10, где приведена зависимость длительности включения ртутных контактов мостикового регулятора фирмы Сименс от отклонения стрелки прибора.

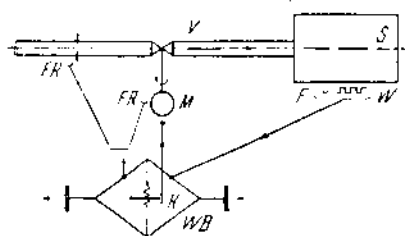
На фиг. 10 цифрами обозначены: 1 — заданное значение; 2 — регулятор открывает; 3 — регулятор закрывает; 4 — ступенчатая пластина; 5 — указатель;



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

6 — падающая дужка; 7 — указатель в нулевом положении; продолжительность включения ртутных контактов $t=0$; 8 — небольшое отклонение указателя, незначительное отклонение параметра от требуемого значения, малая продолжительность включения t ; 9 — большое отклонение указателя, сильное отклонение параметра от требуемого значения; большая продолжительность включения t .

Контактный гальванометр со ступенчатой падающей дужкой, примененный в восьмиточечном регуляторе температуры аэропыли, рассматриваемый ниже, отличается от мостикового регулятора фирмы Сименс лишь конструктивно. Принципы их действия полностью совпадают.

На фиг. 11 изображена заимствованная из статьи Ланга диаграмма, представляющая зависимость перемещений регулирующего органа от времени. Она показывает, что Ланг пренебрегает длительностью включения ртутных контактов относительно периода регулирования (пунктиром у него показано на этой же диаграмме действительное перемещение сервомотора).

На фиг. 12 приведена схема регулирования.

На ней приняты следующие обозначения: S — регулируемая установка (объект регулирования), V — регулирующий орган, M — электрический серво-

мотор, K — мостиковый регулятор Сименса, WB — измерительный мостик Уитстона, FW — электрический термометр сопротивления с добавочным сопротивлением, фиксирующий значение регулируемого параметра (командующий орган), FR — сопротивление, играющее роль выключателя по положению (если фиксирует положение регулирующего органа) или по количеству (на фиг. 12 показан этот импульс от измерительной дроссельной шайбы).

Соответственно трем элементам системы: объекту регулирования, регулятору и регулирующему органу Ланг приводит три уравнения

$$-\varphi/\delta = \beta\mu + T_s\mu', \quad (2)$$

$$\mu = \varphi + T_k\varphi', \quad (3)$$

$$\bar{\mu} = \mu - T_V\mu' + T_V^2\mu''/2, \quad (4)$$

где приняты следующие обозначения: φ — регулируемый параметр; μ — количество, проходящее через регулирующий орган; $\bar{\mu}$ — количество, поступающее к объекту регулирования; δ — коэффициент неравномерности; β — коэффициент выключателя; T_k — постоянная времени аккумуляирования объекта; T_V — время запаздывания регулирующего импульса; T_s — время закрытия сервомотора.

Уравнение (2) получается из трех уравнений Толля для командующего органа, золотника и сервомотора с переменной скоростью закрытия.

Уравнение (3) есть уравнение объекта с саморегулирующим членом, например, уравнение нагревания тела, когда температура во всех его точках принята одинаковой.

Последнее уравнение (4) есть так называемое уравнение запаздывания Штейн-Ланга.

Ланг следующим путем ведет теоретическое исследование прерывистого регулирования. Сначала он использует уравнения непрерывного регулирования (2), (3) и (4). Далее, исключает из них $\bar{\mu}$ и φ и получает уравнения, куда входит только μ . Затем преобразовывает его в разностное, указывая, что μ меняется только через определенные промежутки времени Δt .

Подобное преобразование равносильно замене всех трех исходных уравнений (2), (3) и (4) разностными. На примере уравнения объекта покажем, что такой метод, вообще говоря, неверен. По Лангу, разностное уравнение объекта, получаемое из (3), имеет вид:

$$\varphi_{t+\Delta t} = (1 - \Delta t/T_k)\varphi_t + \mu_t\Delta t/T_k. \quad (5)$$

Найдем теперь истинное разностное уравнение объекта.

Следуя Лангу и пренебрегая длительностью включения мотора относительно периода регулирования Δt , будем иметь $\bar{\mu}_t$ в (3) постоянным.

Интегрируя это уравнение и полагая в начале периода $\mu = \mu_t$ и $\varphi = \varphi_t$, получим:

$$\varphi = e^{-t/T_k}\varphi_t + (1 - e^{-\Delta t/T_k})\mu_t. \quad (6)$$

Откуда искомое уравнение будет:

$$\varphi_{t+\Delta t} = e^{-\Delta t/T_k}\varphi_t + (1 - e^{-\Delta t/T_k})\mu_t. \quad (7)$$

Сравнивая (5) и (7), убеждаемся, что они не отличаются друг от друга, когда $\Delta t/T_k$ весьма мало и можно пренебречь всеми членами, куда входит эта величина в степени выше первой. Однако Ланг такой существенной оговорки не делает.

Для восьмиточечного регулятора температуры аэропыли $\Delta t/T_k = 120:143 = 0.84$. При этом использование уравнения (5) вместо (7) приводит к погрешности для коэффициента при φ_t на 63% и при μ_t на 47% , что, естественно, недопустимо.

Кроме формального сведения дифференциальных уравнений к разностным, что может привести, как это было показано, к значительным погрешностям, Ланг делает еще одну грубую ошибку. Он неправильно учитывает явление запаздывания,¹ используя для этой цели уравнение (4).

1.7. Настоящая статья представляет попытку дать элементы теории электрических регуляторов прерывистого действия, широко применяемых в настоящий момент в таких установках, как котельные, промышленные печи и т. д., где процессы протекают достаточно медленно в сравнении с периодом регулирования.

2. Постановка задачи и общая теория прерывистого регулирования

2.1. Особенностью регуляторов прерывистого действия является периодический контроль за регулируемым режимом и в связи с этим воздействие на приток энергии или количества в течение каждого периода регулирования по состоянию этого режима в один из его моментов.

Главные допущения Каргля — основоположника теории прерывистого регулирования скорости машин — заключались в учете лишь среднего значения вращающего момента, создаваемого паром, за период регулирования, а не мгновенных его значений и принятии постоянным времени от отсечки до отсечки, т. е. периода регулирования.²

Эти исходные положения сохраняются и нами.³

Тогда математически прерывистое регулирование кратко можно охарактеризовать так: среди переменных величин, определяющих процесс в автоматизированной системе, имеется одна или несколько переменных (это могут быть положения поршней сервомоторов, движков реостатов, открытие шиберов и т. д. и связанные с ними количества притекающей или утекающей материи или энергии), которые в отличие от других изменяются во времени по ступенчатой кривой с неизменной продолжительностью ступеней.

2.2. Наличие среди переменных, определяющих процесс, величин, меняющихся по ступенчатой кривой, т. е. присутствии разрывных функций, приводит к тому, что весь переходный режим при регулировании не может быть удобно описан интегралом системы дифференциальных уравнений. Это остается возможным лишь в пределах каждого периода, причем переход от одного из них к следующему требует определения каждый раз новых постоянных произвольных. Естественно, что такой путь перехода от периода к периоду слишком громоздкий и практически не дает возможности анализировать процесс в общем виде.

Применение разностных уравнений, не отражающих процесса внутри каждого периода и фиксирующих лишь изменения, происшедшие за каждый из них, позволяет преодолеть указанные трудности и выразить аналитически ступенчатую кривую.

Разностное уравнение этой кривой и будет первым уравнением системы. Для получения остальных разностных уравнений исследование ведется следующим образом.

Составляется система дифференциальных уравнений, связывающих изменение переменных в пределах периода. Затем они сводятся к одному дифференциаль-

¹ На ряду с критикой уравнения запаздывания Штейна-Ланга в диссертации автора указан способ учета этого явления.

² Кажущиеся на первый взгляд грубыми допущения Каргля вследствие изменения мгновенного значения вращающего момента и периода регулирования в широких пределах (фиг. 8) в действительности не вносят заметных искажений в анализ явления вследствие малости периода регулирования относительно времени разгона машины.

³ Например, применительно к восьмиточечному регулятору температуры аэропыли период регулирования может меняться максимум на 3%. Далее для того же регулятора изменение регулируемого им количества топлива происходит не более чем в течение 3% периода регулирования. Остальные 97% каждого периода подача топлива сохраняется неизменной.

ному уравнению, которое для n -го периода в общем случае будет иметь вид:

$$\phi^{(m)} + a_1 \phi^{(m-1)} + \dots + a_{m-1} \phi' + a_m \phi + a_{m+1} \tau_n = 0, \quad (8)$$

где ϕ — одна из переменных, характеризующих состояние автоматизированной системы, меняющаяся плавно, τ — переменная, изменяющаяся по ступенчатой кривой.

Интегрируя уравнение (8), найдем выражение для ϕ , куда войдут m постоянных произвольных. Последние исключаем, полагая известными значения функции ϕ и ее производных до $(m-1)$ -го порядка для начала n -го периода.

Зная зависимость ϕ от времени, в результате интегрирования уравнения (8) найдем и все ее производные до $(m-1)$ -го порядка. Далее, полагая в выражениях для ϕ и ее производных время равным периоду регулирования, получим m разностных уравнений, которые с указанным выше уравнением ступенчатой кривой дают систему из $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными (переменная ϕ и ее производные до m -го порядка).

Дальнейшее исследование приходится вести различно для двух возможных случаев: переменной и постоянной средней скорости сервомотора за период.

2.3. Переменная средняя скорость регулирующего органа за период регулирования. Этот случай соответствует конструктивному выполнению восьмиточечного регулятора температуры аэроплана (регулирующий гальванометр со ступенчатой дужкой), для которого длительность включения ртутных контактов изменяется в зависимости от отклонения стрелки прибора.

Введем следующие обозначения:

x_n — отклонение стрелки гальванометра в начале n -го периода (положительное отклонение примем соответственно закрытию сервомотора); y_n — перемещение сервомотора, управляемого гальванометром в начале n -го периода; k — постоянный безразмерный коэффициент, характеризующий длительность включения ртутных контактов и скорость сервомотора.

Тогда будем иметь:

$$x_{n+1} = y_n - kx_{n+1}, \quad (9)$$

если включение ртутных контактов происходит в конце периода.¹

Все остальные m разностных уравнений, полученных из дифференциального уравнения системы (8), как и (9), будут линейные однородные.

Из условия совместности уравнений, входящих в эту систему, приравняем нулю ее главный определитель, откуда получим характеристическое уравнение $(m+1)$ -го порядка.

Если его корни будут $z_1, z_2, \dots, z_{m+1}$, то, например, для переменной ϕ общий интеграл по конечным разностям будет:

$$\phi_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_{m+1} z_{m+1}^n. \quad (10)$$

Характер переходных процессов будет зависеть от вида корней z аналогично случаю непрерывного регулирования.

Процесс регулирования будет устойчив, если абсолютные значения всех вещественных корней и модули всех комплексных корней меньше единицы, т. е. условие устойчивости будет:

$$\text{mod } z < 1. \quad (11)$$

Устойчивый апериодический процесс будет иметь место, когда все корни будут вещественны, положительны и меньше единицы, т. е. условие апериодичности будет:

$$0 < z < 1. \quad (12)$$

2.4. Постоянная средняя скорость регулирующего органа за период регулирования. Переходим ко второму случаю, когда на ступенчатой кривой, упомянутой выше, высота всех ступеней одинакова.

¹ Этот случай взят как наименее благоприятный.

В случае регулирующего гальванометра это соответствует постоянной длительности включения ртутных контактов, независимо от величины отклонения стрелки прибора. Тогда вместо (9), сохраняя прежние обозначения, получим:

$$y_{n+1} = y_n \pm k, \quad (13)$$

где тот или иной знак перед k принимается в зависимости от знака отклонения стрелки гальванометра. Остальные m разностных уравнений получаем, как и в первом случае.

Таким образом здесь уже из $m+1$ разностных уравнений одно [уравнение (13)] получается неоднородным и, кроме того, с каждым изменением знака отклонения распределительного органа (например, стрелка регулирующего гальванометра) меняется знак последнего члена уравнения (13). Это приводит к необходимости вести анализ иначе, чем в первом случае.

Покажем, как здесь могут быть определены условия устойчивости и апериодичности.

Для простоты обратимся к конкретному примеру — восьмиточечному регулятору температуры аэропыли. Для него ниже получены следующие два исходных уравнения (61) и (62)

$$T^0 \psi' + \psi - \eta_n = 0, \quad (14)$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n - k \psi_{n+1}, \quad (15)$$

где ψ — относительное изменение температуры термометра; η — относительное изменение температуры аэропыли (величина, меняющаяся по ступенчатой, как и положение регулировочного реостата мотора питателя угольной пыли); T^0 — постоянная времени термометра; k — коэффициент, физический смысл которого разъяснен выше.

В данном случае длительность включения ртутных контактов гальванометра принята постоянной, поэтому (15) на основании (13) заменяется на

$$\eta_{n+1} = \eta_n \pm k \quad (16)$$

и знак перед k определяется знаком ψ в (14).

В начальный момент значения η и ψ могут быть любыми.

Однако характерным является случай, когда $\psi = 0$ при $t = 0$.

Итак, начальные условия принимаем:

$$\psi = 0, \quad \eta = \eta_0 \quad (17)$$

и знак перед k в (16) берем минус. Тогда до момента, когда ψ вновь обратится в нуль, будем иметь на основании (16):

$$\eta_n = \eta_0 - kn. \quad (18)$$

Интегрируем далее (14) и преобразовываем его в разностное уравнение. Учитывая (18) и решая это разностное уравнение, получаем:

$$\psi_{n+1} = \{\eta_0 + k: (1 - e^{-T/T^0})\} \{1 - e^{-(n+1)T/T^0}\} - k(n+1). \quad (19)$$

Процесс будет устойчив, если каждое новое максимальное отклонение η , соответствующее моменту, когда ψ обращается в нуль [и меняется знак перед k в (16)], будет меньше предыдущего его значения по абсолютной величине.

Если при некотором n (или в течение n -го периода) ψ обращается в нуль, то в случае устойчивого процесса должно быть:

$$-\eta_n < \eta_0, \quad (20)$$

так как η_n и η_0 разных знаков.

Или, учитывая (18), получаем:

$$\eta_0 > kn/2. \quad (21)$$

Полагая далее ϕ_{n+1} в (19) равным нулю и находя из него η_0 , подставляем его в (21), получаем:

$$k(n+1)[1 - e^{-(n+1)T/T^0}]^{-1} - k[1 - e^{-T/T^0}]^{-1} > kn/2. \quad (22)$$

Откуда после преобразований находим:

$$n > 2e^{-T/T^0} [1 - e^{-T/T^0}]^{-1} [1 + e^{-(n+1)T/T^0}]^{-1} [1 - e^{-nT/T^0}] = A. \quad (23)$$

Правая часть неравенства (23) с возрастанием n от 1 до ∞ непрерывно растет, но остается ограниченной:

$$2e^{-T/T^0} [1 + e^{-2T/T^0}]^{-1} \leq A \leq 2e^{-T/T^0} [1 - e^{-2T/T^0}]^{-1}. \quad (24)$$

Система, характеризующая отношением T/T^0 , будет устойчива при любых переходных процессах, если неравенство (23) будет выполняться при всех значениях n , начиная с единицы.

Переходим к определению условия аperiodичности.

Опять, как и в предыдущем случае, берем начальные условия (17).

Здесь ψ должно обратиться в нуль в первый раз после начального, когда η только пройдет через нуль. Итак, имеем из (19):

$$\phi_{n+1} = [\eta_0 + k(1 - e^{-T/T^0})^{-1}] [1 - e^{-(n+1)T/T^0}] - k(n+1) = 0 \quad (25)$$

и

$$-\eta_n = -\eta_0 + kn \leq k, \quad (26)$$

так как считаем, что $\eta_0 > 0$ и $k > 0$. Из (25) находим η_0 и, подставляя в (26), получаем:

$$n \geq e^{(n+1)T/T^0} (2e^{-T/T^0} - 1) (1 - e^{-T/T^0})^{-1} - e^{-T/T^0} (1 - e^{-T/T^0})^{-1}. \quad (27)$$

Неравенство (27) выполняется при любых значениях n , когда

$$2e^{-T/T^0} - 1 \leq 0. \quad (28)$$

Откуда находим условие аperiodичности:

$$T/T^0 \geq 0.695. \quad (29)$$

Для восьмиточечного регулятора температуры имеем:

$$T/T^0 = 120:143 = 0.84, \quad (30)$$

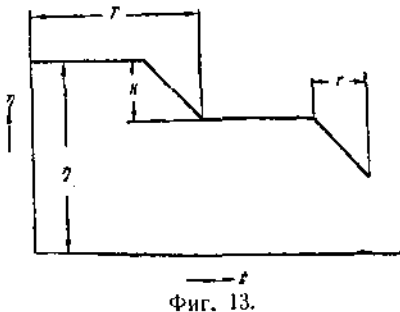
т. е. условие аperiodичности (29) оказывается выполненным.

2.5. Учет влияния времени перестановки регулирующего органа.

При изложении общей теории прерывистого регулирования, приведенной выше, было принято, что регулирующий орган перемещается в зависимости от времени по ступенчатой кривой прямоугольной формы со сторонами, параллельными осям координат. Это равносильно предположению о мгновенном переходе регулирующего органа со ступени на ступень.

В действительности этот переход совершается в течение некоторого конечного времени, в связи с чем прямоугольная форма кривой положения регулирующего органа заменяется трапециoidalной согласно фиг. 13, на которой приведена зависимость перемещений η регулирующего органа от времени t при прерывистом регулировании и учете длительности включения ртутных контактов.

Выясним влияние времени τ на случае, когда средняя скорость регулирующего органа за период регулирования постоянна, т. е. остается неизменной высота ступени k .



Фиг. 13.

Для этой цели используем аппарат операционного исчисления.¹

Составляем вначале изображение для производной $\dot{\eta}$. На основании теоремы запаздывания, учитывая характер кривой, изображенной на фиг. 13, имеем, принимая во внимание, что $\eta = \eta_0$ при $t = 0$:

$$\dot{\eta}' \leftarrow p [\eta(p) - \eta_0] = -e^{-p(T-\tau)}k \mid \tau + e^{-pT}k \mid \tau - e^{-p(2T-\tau)}k \mid \tau + \dots = -(e^{-p(T-\tau)} - e^{-pT})k \mid \tau - (e^{-p(2T-\tau)} - e^{-p2T})k \mid \tau - \dots, \quad (31)$$

где p — оператор.

Из (31) находим изображение η для n -го периода:

$$\eta_n(p) = \eta_0 - \frac{k}{p^2} [(e^{-p(T-\tau)} - e^{-pT}) + \dots + (e^{-p(nT-\tau)} - e^{-pnT})]. \quad (32)$$

На основании (14) с учетом (32) получаем изображение для искомой переменной ψ :

$$\psi_{n+1}(p) = \frac{\eta_0}{T^0 p + 1} - \frac{k}{\tau} \frac{1}{p(T^0 p + 1)} [(e^{-p(T-\tau)} - e^{-pT}) + \dots + (e^{-p(nT-\tau)} - e^{-pnT})]. \quad (33)$$

Далее

$$\frac{1}{T^0 p + 1} = \frac{1}{T^0} \frac{1}{p} \frac{p}{p + 1/T^0} \rightarrow \frac{1}{T^0} \int_0^t e^{-t/T^0} dt = 1 - e^{-t/T^0}. \quad (34)$$

Поэтому на основании теоремы деления на оператор и теоремы запаздывания получаем оригинал ψ для конца горизонтальной части $(n+1)$ -й ступени, соответствующей $t = (n+1)T - \tau$:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} = & \eta_0(1 - e^{-(n+1)T/T^0}) \mid T^0 + \\ & + (e^{t/T^0} - 1)(1 - e^{-T/T^0})^{-1}(1 - e^{-(n+1)T/T^0}) T^0 k \mid \tau - \\ & - (e^{t/T^0} - 1) T^0 k \mid \tau - kn. \end{aligned} \quad (35)$$

Найденное выражение для ψ_{n+1} переходит в формулу (19), если положить в (35) $\tau = 0$ и раскрыть неопределенность.

Выясним степень точности формулы (19) применительно к регулятору температуры аэроплана, для которого

$$T^0 = 143 \text{ сек.}, \quad \tau_{\max} = 5 \text{ сек.}, \quad T = 120 \text{ сек.} \quad (36)$$

Если в (35) $e^{t/T^0} - 1$ заменить через $\tau \mid T^0$, что является первым членом разложения этой разности в бесконечный ряд, то получим (19).

Производя указанную замену во втором и третьем членах выражения ψ_{n+1} в (35), допускаем максимальную погрешность [с учетом (36)]:

$$(e^{t/T^0} - 1 - \tau \mid T^0) : (e^{t/T^0} - 1) \times 100 = 1.7\%_0. \quad (37)$$

Также незначительную поправку дает учет τ в первом члене выражения для ψ_{n+1} в (35).

Действительно, в самом неблагоприятном случае $n = 1$. Тогда замена $2T - \tau$ через $2T$ вводит относительную погрешность:

$$\tau \mid (2T^0) \times 100 \approx 2\%_0. \quad (38)$$

Таким образом для регулятора температуры вполне допустимо пользоваться формулой (19), т. е. пренебрегать длительностью включения ртутных контактов.

¹ См., например, А. И. Лурье. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. ОНТИ. 1938.

3. Исследование восьмиточечного регулятора температуры аэропыли

3.1. Схема регулирования. Восьмиточечный регулятор температуры аэропыли,¹ детально рассматриваемый в настоящей работе, является одним из элементов системы регулирования процесса горения барабанного котла, установленной Центральным котлотурбинным институтом на Каширской ГРЭС.

Для выяснения роли и значения регулятора температуры упомянем вкратце о всей системе регулирования в целом.

Автоматизированный котел работает на угольной пыли. Изменение подачи топлива воздуха и тяги осуществляется воздействием на восемь пылевых форсунок, два вентилятора, два дымососа и два привода демперов. Постоянный уровень в барабанах котла и температура перегрева пара поддерживаются регуляторами, не связанными с остальной системой.

Для ведения процесса горения применена электрическая регулирующая аппаратура. Ее основными элементами являются контактные гальванометры завода „Пирометр“ с введенными в них небольшими конструктивными изменениями.

Эти гальванометры дают прерывистое регулирование с периодом 15 сек.

Первое и главное требование, предъявляемое к системе регулирования горения, сводится к поддержанию постоянства давления пара, разрежения в топке и состава CO_2 в отходящих газах.

Второе — выдвигается в связи со стремлением максимального повышения к. п. д. котельного агрегата и требует осуществления синхронной работы приводов котла.

Для вентиляторов, дымососов и демперов эта синхронизация осуществляется просто с помощью специальной электрической блокировки, так как здесь приходится поддерживать одинаковый режим работы только двух элементов.

Задача поддержания одинаковой нагрузки форсунок оказывается значительно сложной. Их имеется на котле восемь, и, кроме того, непостоянство характеристик питателей не позволяет использовать число оборотов в качестве критерия нагрузки.

В форсунки подается одинаковое количество горячего воздуха. Температура топлива во всех бункерах также одинакова. Это дает возможность использовать температуру аэропыли по отдельным форсункам в качестве величины, фиксирующей их относительную нагрузку.

Схема связей системы регулирования горения приведена на фиг. 14. Там же показана принципиальная схема синхронизации форсунок, осуществляемая регулятором температуры аэропыли.

Эта температура замеряется с помощью электрического термометра сопротивления *I*, который является одним из плеч измерительного мостика, смонтированного внутри контактного гальванометра *II*. В нулевую ветвь мостика включена одна из его рамок. Температура аэропыли немного меняется с нагрузкой котла. Автоматическая корректировка гальванометра по этому фактору выполняется подачей импульса от регулятора давления пара во вторую обмотку рамки. Для получения длительности включения ртутных контактов гальванометра, пропорциональной отклонению температуры, применена ступенчатая падающая дужка.

Контактный гальванометр *II* воздействует на питатель пыли *IV* с помощью моторчика *III*, который через редуктор перемещает движок регулировочного реостата.

После того как период регулирования гальванометра, равный 15 сек., закончился, его падающая дужка включает ртутный контакт, дающий питание электромагнитному переключателю, который подключает к гальванометру измерительные и исполнительные цепи следующей форсунки.

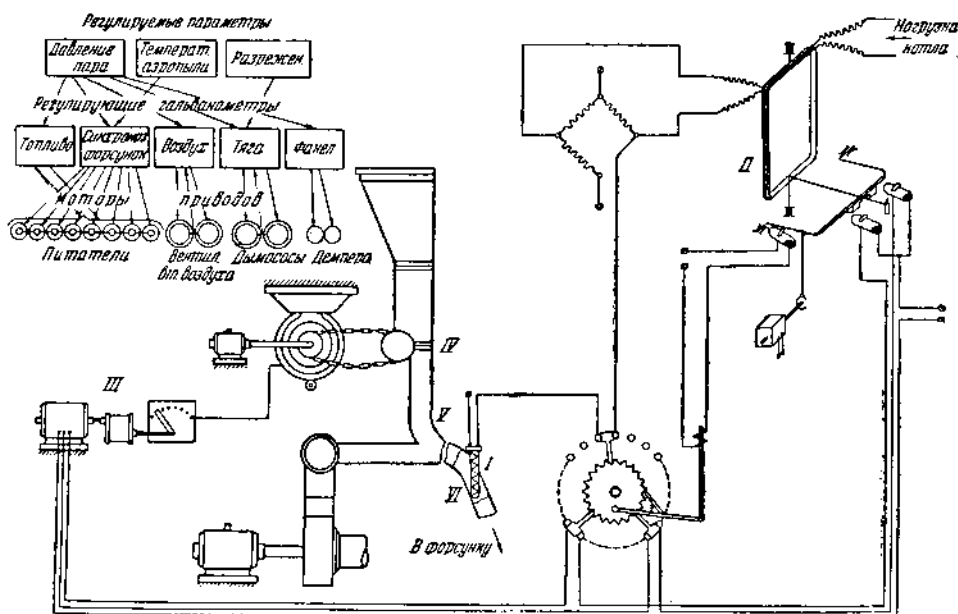
Контроль работы каждой форсунки повторяется через каждые две минуты.

Детальная схема регулятора температуры аэропыли приведена на фиг. 15.

¹ Этот регулятор разработан автором и инж. Е. П. Фельдмаком.

На ней приняты следующие обозначения:

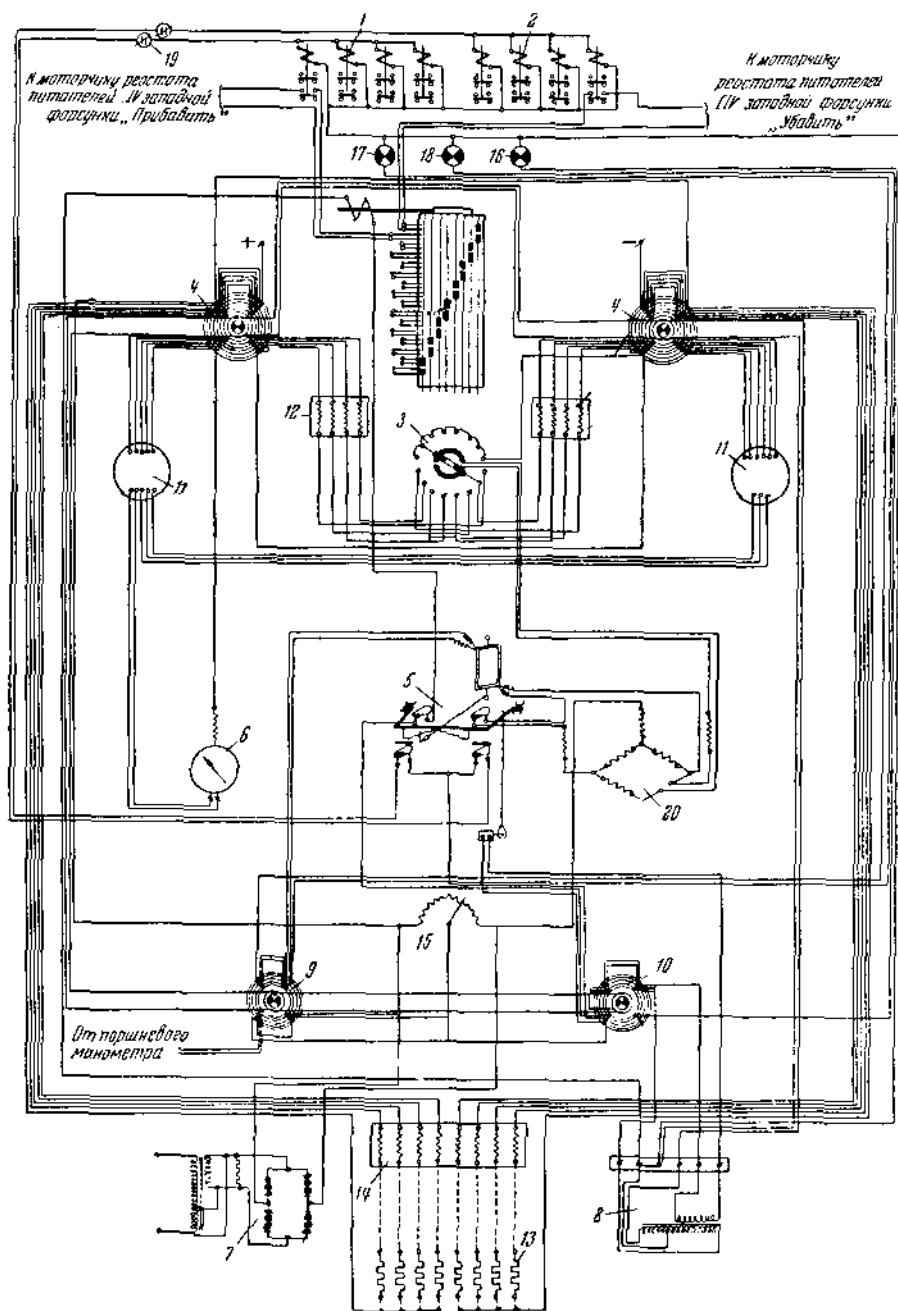
- 1— исполнительные реле „прибавить топливо“.
- 2— исполнительные реле „убавить топливо“.
- 3— электромагнитный переключатель измерительных и исполнительных цепей.
- 4— шестипакетный командосигнальный аппарат для переключения измерительных цепей с регулятора на указывающий прибор (завод „Электропульс“).
- 5— контактный гальванометр завода „Пирометр“ с небольшими конструктивными изменениями.
- 6— указывающий прибор температуры аэропыли.
- 7— электромагнитный стабилизатор напряжения с купроксным выпрямителем.
- 8— трансформатор 220/60/12 вольт.
- 9— четырехпакетный командосигнальный аппарат измерительных цепей.
- 10— четырехпакетный командосигнальный аппарат исполнительных цепей.
- 11— десятипакетный переключатель указывающего прибора, служащий для подключения к нему одного из термометров.



Фиг. 14.

- 12— регулировочные катушки.
- 13— термометры сопротивления.
- 14— добавочное сопротивление термометров.
- 15— потенциометр для ручной корректировки температуры аэропыли.
- 16, 17, 18— сигнальные лампы.

При изменении температуры аэропыли стрелка контактного гальванометра с помощью падающей дужки замыкает ртутный контакт „прибавить“ или „убавить“, включая тем самым четыре реле 1 „прибавить“ либо четыре реле 2 „убавить“ топливо. Эти реле являются распределительными. Они служат для включения не связанных между собой электрических цепей восьми моторчиков реостатов от одного ртутного контакта. В каждом реле используется два нормально разомкнутых контакта, что привело к необходимости установить по четыре реле на каждое направление вращения восьми моторчиков. Однако включение четырех реле приводит к подаче напряжения постоянного тока только на один моторчик реостата, так как один из питающих проводов проходит через контакты электромагнитного переключателя. Последний, подключая к контактному гальванометру измерительные цепи какой-либо форсунки, одновременно подготавливает только ее исполнительные цепи „прибавить“ или „убавить“.



Фиг. 15.

На щите регулятора температуры имеется световая сигнализация. Зеленая лампа 18 сигнализирует включение регулятора и автоматическую корректировку температуры аэропыли по нагрузке котла.

Синяя лампа указывает на ручную корректировку, и, наконец, красная лампа фиксирует выключение регулятора.

3.2. Основная аппаратура. На фиг. 16 изображен механизм контактного гальванометра регулятора температуры аэропыли в изготовлении завода

„Пирометр“ с внесенными конструктивными изменениями и дополнениями. Он является основным регулирующим элементом.

Рамка магнитоэлектрической системы 1 контактного гальванометра состоит из двух обмоток, намотанных на одном каркасе. Стрелка 11 магнитоэлектрической системы несет на конце ударничек 12, который периодически опускается под воздействием падающей дужки 4. Ртутные контакты „прибавить“ 3 и „убавить“ 2 закреплены на контактных рычагах 14 и могут перемещаться вдоль шкалы 13.

К концам контактных рычагов 14 прикреплены два указателя температуры.

Если стрелка гальванометра отклоняется в сторону красного указателя 15, то температура регулируемого объекта ниже нормальной.

Отклонение стрелки в сторону зеленого указателя означает повышение температуры. Замыкание ртутных контактов 3 „прибавить“ и 2 „убавить“ зависит от взаимного расположения стрелки 11 и площадок 16, 17 контактных рычагов.

Процесс включения ртутных контактов протекает в следующем порядке. Синхронный моторчик Варрена 9 через сменные шестерни 10 приводит во вращение профилированную шайбу 8, по которой катится ролик 18, расположенный на конце рычага 19. Он перемещает падающую дужку 4, в середине которой закреплена ступенчатая дужка 5. Когда она опускается вниз, то нажимает на ударничек 12 стрелки, который в свою очередь передает усилие на одну из находящихся под ним Г-образных площадок.

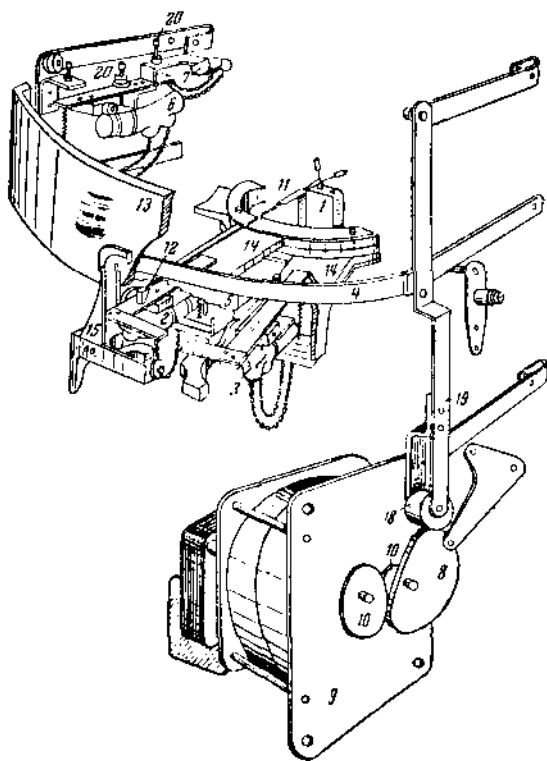
Ртутные контакты „прибавить“ и „убавить“ остаются разомкнутыми при опускании падающей дужки, если стрелка с ударничком находится в промежутке между площадками 16 и 17. Кроме ртутных контактов 2 и 3, имеются еще два ртутных контакта 6 и 7, которые размыкаются с каждым опусканием падающей дужки.

Ртутный контакт 6 включает в цепь питания переменным током 220 вольт электромагнитного переключателя 3 (фиг. 15).

Ртутный контакт 7 разрывает цепь стабилизированного напряжения постоянного тока 15 вольт моста гальванометра на время переключения термометров сопротивления для предотвращения заброса стрелки.

Настройка ртутных контактов 6, 2, 3 производится регулировочными винтами 20 с таким расчетом, чтобы при подъеме падающей дужки 4 сначала размыкались контакты 2 и 3, а затем замыкался контакт 6 и при опускании дужки 4 сначала размыкался контакт 6 и далее замыкались контакты 2 и 3.

При такой последовательности включений электромагнитный переключатель разрывает исполнительные цепи всегда обесточенными, что весьма упрощает его конструкцию, уменьшает габариты и облегчает работу контактов.



Фиг. 16.

Включение и выключение исполнительных цепей под током осуществляется контактами реле 1 и 2 (реле типа АРЭ-2 завода им. Казиского).

Ступенчатая дужка 5 имеет десять ступеней по пять с каждой стороны, соответственно которым получается столько же различных времен включения ртутных контактов 2 и 3. Последние можно регулировать винтом 20 и изменением конфигурации профилированной шайбы 8.

Сменными шестернями 10 можно менять период регулирования (в гальванометрах завода „Пирометр“ предусмотрены шестеренки, дающие периоды падающей дужки, равные 15 и 30 сек.).

Вторым не менее существенным аппаратом системы регулирования является электромагнитный переключатель. Не останавливаясь на детальном описании, укажем, что он выполнен на шестнадцать дополнительных цепей (соответственно восьми направлениям „прибавить“ и „убавить“) и восемь измерительных цепей, собран в основном из стандартных элементов и состоит из следующих частей: контактной системы (детали использованы от токораспределителей завода „Красная заря“), электромагнита переменного тока (от маятникового реле завода ХЭТЗ), храпового механизма, контактной панели и шкалы, указывающей номер подкаченной форсунки.

Непрерывное перемещение щеток по неподвижным контактам обеспечивает чистоту контактных поверхностей.

3.3. Уравнения динамики автоматизированной системы.

3.3.1. Как было указано выше, командующим органом регулятора температуры аэропыли является электрический термометр сопротивления.

В связи с составлением уравнения динамики упомянем о его конструктивном выполнении. Собственно термометр представляет платиновую проволоку диаметром 0,2 мм, сопротивление которой меняется с изменением температуры.

Проволока наматывается на два фарфоровых стержня длиной приблизительно 300 мм и диаметром 4 мм, которые вкладываются в тонкую металлическую плотно охватывающую их оболочку и в то же время, благодаря примененной изоляции, не дающую электрического контакта с проволокой.

Далее все это помещается в стальную цилиндрическую гильзу толщиной ~ 7 мм для защиты термометра от механических повреждений и истирания его аэропылью.

От движущейся аэропыли, обеспечивающей достаточно высокий коэффициент теплопередачи, температура сообщается стальной гильзе, материал которой обладает хорошей теплопроводностью. Затем, пройдя через неподвижную воздушную оболочку и изоляцию, отличающиеся плохой теплопроводностью, тепловая волна достигает уже самого термометра — хорошего проводника тепла.

Принимая во внимание вышесказанное, можно принять в первом приближении для гильзы и термометра равномерное поле температур.

Используем следующие обозначения:

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — соответственно температуры аэропыли, гильзы и термометра.

φ и ψ — соответствующие θ_1 и θ_3 относительные изменения температур.

Q_1 — секундное количество тепла, перешедшее от аэропыли к гильзе или обратно.

Q_2 — то же для гильзы и термометра.

k_2 — коэффициент теплопередачи между аэропылью и гильзой

k_3 — то же для гильзы и термометра.

c_3 — теплоемкость гильзы.

c_2 — теплоемкость термометра.

Уравнение теплопередачи между аэропылью и гильзой.

$$Q_1 = k_2 (\theta_1 - \theta_2). \quad (39)$$

Уравнение теплопередачи между гильзой и термометром

$$Q_2 = k_3 (\theta_2 - \theta_3). \quad (40)$$

Уравнение теплового состояния гильзы

$$Q_1 - Q_2 = c_2 d\theta_2 / dt. \quad (41)$$

Уравнение теплового состояния термометра

$$Q_2 = c_3 d\theta_3 / dt. \quad (42)$$

Исключая из (39), (40), (41) и (42) Q_1 , Q_2 и θ_2 , находим:

$$\theta_1 = \frac{c_2 c_3}{k_2 k_3} \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + \left(\frac{c_2}{k_2} + \frac{c_3}{k_3} + \frac{c_3}{k_2} \right) \frac{d\theta_3}{dt} + \theta_3. \quad (43)$$

Не трудно убедиться, что c_2 / k_2 является постоянной времени гильзы T' и c_3 / k_3 — постоянной времени самого термометра относительно гильзы T° .

Согласно соображениям, высказанным выше, имеем:

$$c_3 < c_2, \quad k_2 \gg k_3. \quad (44)$$

Поэтому

$$c_3 / k_3 \gg c_3 / k_2 \ll c_2 / k_2 \quad (45)$$

и, пренебрегая членом c_3 / k_2 в (43), можно переписать так:

$$\theta_1 = T' T^\circ \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + (T' + T^\circ) \frac{d\theta_3}{dt} + \theta_3. \quad (46)$$

Величины T° и T' были определены экспериментально — расчетным путем.

Испытание сводилось к выключению мотора одной из форсунок и замеру температуры аэропыли через определенные промежутки времени с помощью указывающего прибора, подключенного к электрическому термометру сопротивления, обслуживающему регулятор.

Составим для этого случая переходного процесса дифференциальное уравнение, используя (46).

Характеристическое уравнение для него будет:

$$W^2 + (1 / T^\circ + 1 / T') W + 1 / (T^\circ T') = 0. \quad (47)$$

Корни его

$$W_1 = -1 / T^\circ, \quad W_2 = -1 / T'. \quad (48)$$

Принимая во внимание, что

$$\theta_3 = 66^\circ, \quad t = 0; \quad \theta_3 = 191^\circ, \quad t = \infty, \quad (49)$$

получим:

$$\theta_3 = 191 + A e^{-t / T^\circ} - (125 + A) e^{-t / T'}. \quad (50)$$

Величины A , T° и T' были найдены подбором, пользуясь экспериментальными данными

$$A = 167, \quad T^\circ = 143 \text{ сек.}, \quad T' = 40 \text{ сек.}, \quad (51)$$

и окончательно

$$\theta_3 = 191 - 167 e^{-t / 143} + 42 e^{-t / 40}. \quad (52)$$

Кривая θ_3 по (52) хорошо согласуется с экспериментально полученной зависимостью.

Третий член в (52) относительно быстро затухает в сравнении со вторым членом.

Действительно, для периода регулирования $T = 120$ сек. имеем:

$$e^{-120 / 40} = 0.05, \quad e^{-120 / 143} = 0.43. \quad (53)$$

Поэтому при прерывистом регулировании с периодом T влияние этого члена будет мало, и им можно пренебречь.

Тогда вместо (46) получаем следующее уравнение термометра:

$$\theta_1 = T^\circ \frac{d\theta_3}{dt} + \theta_3. \quad (54)$$

Или в относительных величинах, относя приращения обеих температур к общей максимальной температуре $\theta_{\max}$, получим:

$$\eta = T^0 \psi' + \psi. \quad (55)$$

3.3.2. Рамка контактного гальванометра включена в нейтральную ветвь измерительного мостика, одним из плеч которого является термометр сопротивления. Поэтому отклонение стрелки гальванометра будет пропорционально изменению температуры. Обозначая относительную величину этого отклонения через σ , можем написать уравнение гальванометра:

$$\sigma = \psi. \quad (56)$$

3.3.3. Перемещение движка реостата мотора питателя происходит с помощью маленького вспомогательного моторчика — реверсивного, с постоянной скоростью вращения. Время его разгона¹ составляет десятки доли секунды, и им можно пренебречь. Контактный гальванометр в течение каждого периода включает этот моторчик на время, пропорциональное отклонению стрелки благодаря применению ступенчатой дужки. Поэтому, обозначая через μ относительное положение движка реостата, можем написать для него уравнение в конечных разностях:

$$\mu_{n+1} = \mu_n + k\tau_{n+1}, \quad (57)$$

где через n обозначен номер периода, $k = T/T_s$ есть постоянный коэффициент. Физический смысл его будет подробно выяснен ниже (T_s — время перемещения движка реостата с учетом перерывов).

3.3.4. Положение реостата определяет собой число оборотов мотора питателя. Время разгона этого мотора на основании экспериментальных данных¹ составляет около 1 сек. В сравнении с временем перемещения движка реостата, равным 100 сек., это величина малая, и ее влиянием можно пренебречь.

Тогда, обозначая через φ относительное изменение угловой скорости мотора питателя, можем написать

$$\mu = \varphi. \quad (58)$$

3.3.5. Специальные испытания пылевых питателей (дисковые питатели „Бейли“) показали, что зависимость расхода пыли через них от числа оборотов линейна. Обозначая относительное изменение этого расхода через γ , получаем:

$$\varphi = \gamma. \quad (59)$$

3.3.6. Угольная пыль, прошедшая через питатель, падает по трубопроводу вниз, подхватывается далее горячим воздухом и вдувается в толку. При данном количестве поступающего воздуха температура аэропыли будет меняться с изменением подачи топлива. Знаки этих изменений будут противоположны.

Следовательно,

$$\gamma = -\tau. \quad (60)$$

3.4. Динамика процесса регулирования.

3.4.1. Уравнения (55)–(60) сводятся к двум уравнениям:

$$\eta_n = T^0 \psi' + \psi, \quad (61)$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n - k\psi_{n+1}. \quad (62)$$

Интегрируя уравнение (61) и принимая во внимание, что $\psi = \psi_0$ и $\eta = \eta_0$ при $t = 0$, найдем:

$$\psi = e^{-t/T^0} \psi_0 + (1 - e^{-t/T^0}) \eta_0 \quad (63)$$

и

$$\psi_{n+1} = e^{-T/T^0} \psi_n + (1 - e^{-T/T^0}) \eta_n. \quad (64)$$

¹ Детально этот вопрос разобран в диссертации автора.

Уравнения (62) и (64) представляют два совместных линейных однородных разностных уравнения первого порядка.

Переходим к их решению. Полагаем:

$$\phi_n = Ch_1 z^n, \quad \eta_n = Ch_2 z^n \quad (65)$$

и, следовательно,

$$\phi_{n+1} = Ch_1 z^{n+1}, \quad \eta_{n+1} = Ch_2 z^{n+1}. \quad (66)$$

Подставляя (65), (66) в (62) и (64), после сокращений получим:

$$h_2 z = h_2 - k h_1 z, \quad h_1 z = e^{-T/T^0} h_1 + (1 - e^{-T/T^0}) h_2. \quad (67)$$

Все члены двух последних уравнений содержат какую-либо из неизвестных h_1 или h_2 . Следовательно, из условия совместности этих уравнений их определитель должен равняться нулю:

$$\lambda(z) = \begin{vmatrix} kz & z-1 \\ z-e^{-T/T^0} & -1+e^{-T/T^0} \end{vmatrix} = 0. \quad (68)$$

Откуда

$$z^2 - [(1 + e^{-T/T^0}) - k(1 - e^{-T/T^0})]z + e^{-T/T^0} = 0. \quad (69)$$

Корни его будут:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-T/T^0}) - \frac{k}{2}(1 - e^{-T/T^0}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(1 + e^{-T/T^0}) - \frac{k}{2}(1 - e^{-T/T^0}) \right]^2 - e^{-T/T^0}}. \quad (70)$$

Общий интеграл по конечным разностям для ϕ_n и η_n представляется как сумма частных интегралов, т. е.

$$\phi_n = C'h_1' z_1^n + C''h_1'' z_2^n, \quad \eta_n = C'h_2' z_1^n + C''h_2'' z_2^n, \quad (71)$$

где z_1 и z_2 определяются согласно (70).

3.4.2. Придерживаясь Раутса [13] в определении устойчивости движения, приведем некоторые соображения, касающиеся вопроса устойчивости процесса регулирования, который относится к той же общей задаче.

Сущность теоретического исследования устойчивости регулирования заключается в определении состояния системы координатами $x_1, x_2, \dots$ при стационарном режиме работы, координатами $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots$ при возмущенном динамическом режиме и в исследовании характера изменения приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$, в зависимости от времени.¹

Если все эти приращения с течением времени стремятся к нулю, то процесс считается устойчивым, в противном случае он неустойчив. При этом исследование проводится в предположении, что внешние условия после возникновения переходного режима неизменны.

Применительно к регулятору температуры аэропыли последнее означает, например, что при исследовании протекания переходного режима температура топлива, поступающего в пилотаж, так же как и температура воздуха, засасываемого вентилятором, неизменны.

Сохраняя для прерывистого регулирования то же определение устойчивости, что и для непрерывного, следует указать на недостаточность исследования для решения этого вопроса только характера изменения величин ϕ_n и η_n по уравнениям (71), т. е. значений переменных через определенные промежутки времени. С течением времени при увеличении n переменные ϕ_n и η_n могут стре-

¹ Под параметрами или координатами системы понимаем любые переменные, как то: давление, температуру, скорость, линейное перемещение, электрическое напряжение и т. д., которые определяют режим работы установки. Среди них различаем регулируемые параметры, т. е. величины, которые система регулирования должна поддерживать постоянными в заранее заданных узких пределах.

миться к нулю, однако в промежуточных точках, в которых значения этих переменных не фиксируются уравнениями (71), отклонение их от нуля может сохраниться. Очевидно, в таком случае процесс приходится считать также неустойчивым.

Возвращаемся вновь к анализу регулирования температуры аэропыли. Изменение величины ϕ за время $(n+1)$ -го периода определяется уравнением (63), в котором следует лишь ϕ_0 и η_0 заменить соответственно через ϕ_n и η_n .

Получаем:

$$\phi = e^{-t/T^0} \phi_n + (1 - e^{-t/T^0}) \eta_n. \quad (72)$$

Откуда следует, что если ϕ_n и η_n стремятся к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, то ϕ и η стремятся к нулю и для всех промежуточных точек $(n+1)$ -го периода. Поэтому в данном случае условие стремления к нулю ϕ и η , когда $n \rightarrow \infty$, является не только необходимым, но и достаточным.

3.4.3. При исследовании решений (71) возможны два случая.

Первый соответствует вещественным корням z_1 и z_2 . Тогда, учитывая вышесказанное из (71), находим условия устойчивости:

$$|z_1| < 1, \quad |z_2| < 1. \quad (73)$$

Второй случай отвечает комплексным значениям z_1 и z_2 .

Тогда

$$z_1 = \alpha + \beta i = r(\cos \gamma + i \sin \gamma), \quad z_2 = \alpha - \beta i = r(\cos \gamma - i \sin \gamma) \quad (74)$$

и с помощью формулы Муавра для ϕ_n и η_n находим:

$$\phi_n = r^n (A \cos n\gamma + B \sin n\gamma), \quad \eta_n = r^n (C \cos n\gamma + D \sin n\gamma). \quad (75)$$

Здесь, очевидно, условие устойчивости будет:

$$r < 1. \quad (76)$$

Найдем условия устойчивости для регулятора температуры аэропыли.

3.4.4. Рассмотрим три возможных случая.

1. Корни $z_{1,2}$ — комплексные.

Напомним, что квадрат модуля комплексных корней равен свободному члену квадратного уравнения, когда коэффициент при z^2 равен единице.

Поэтому на основании (69) и (76) условие устойчивости будет:

$$e^{-T/T^0} < 1. \quad (77)$$

Оно всегда выполнено, так как $T > 0$ и $T^0 > 0$.

2. Корни $z_{1,2}$ — положительные. Из (70) не трудно видеть, что в случае вещественных корней они не могут быть разных знаков. Здесь опять находим всегда выполняемое условие устойчивости (77).

3. Корни $z_{1,2}$ — отрицательные.

На основании (70) и (76) получаем условие устойчивости:

$$k < 2(1 + e^{-T/T^0}) : (1 - e^{-T/T^0}) = 2 \operatorname{cth} \frac{T}{2T^0}. \quad (78)$$

Теперь необходимо проверить, действительно ли значение k , соответствующее границе устойчивости, т. е.

$$k = 2 \operatorname{cth} [T / (2T^0)] \quad (79)$$

даёт отрицательные корни.

Подставляя значение k из (79) в (70), находим:

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -e^{-T/T^0}. \quad (80)$$

Таким образом условие устойчивости (78) остается в силе.

3.4.5. Подставляя значения $T = 120$ сек., $T^0 = 143$ сек., для регулятора температуры аэропыли получаем условие устойчивости:

$$k < 5. \quad (81)$$

Переходим к определению условий аperiodичности.

Из (71) не трудно видеть, что при отрицательных и комплексных корнях переходный процесс протекает с колебаниями. При положительных корнях z колебаний не будет.

Таким образом граница аperiodичности будет соответствовать границе положительных корней уравнения (69). На основании этого находим условие аperiodичности:

$$k < \tanh[T/(4T^0)]. \quad (82)$$

Подставляя в него значения $T=120$ и $T^0=143$, получаем:

$$k < 0.205. \quad (83)$$

Определим теперь, при каком значении коэффициента k работает регулятор на основании следующих дополнительных данных:

1. Время перемещения движка реостата $T_s'=100$ сек.
2. Максимальное изменение температуры аэропыли $\theta_{\max}=150^\circ$.
3. Длительность включения ртутных контактов гальванометра $\Delta t=3$ сек. при изменении температуры аэропыли на $\Delta\theta=15^\circ$.

Из (62) находим:

$$k = (\eta_{n+1} - \eta_n) / \psi_{n+1} = (\Delta t / T_s') : (\Delta\theta / \theta_{\max}) = 0.03 : 0.1 = 0.3.$$

Принимая во внимание (81) и (83), приходим к заключению, что регулятор для принятой настройки должен работать устойчиво и переходные процессы имеют вид затухающих колебаний, близких к аperiodическому движению.

4. О влиянии прерывистого регулирования на динамику процесса

4.1. Факторы, влияющие на выбор регуляторов прерывистого действия. Применение прерывистого регулирования к паровым машинам давало возможность повысить экономичность за счет замены дросселирования пара количественным его регулированием.

В дальнейшем увеличение мощности машин, переход на турбины и требование от регуляторов повышенного качества работы привели к применению непрямого непрерывного регулирования. Прерывистое регулирование вновь возродилось в текущем веке в связи с применением электрических регуляторов. Здесь прерывистый принцип действия давал возможность в некоторых случаях упростить конструкцию аппаратуры. В то же время применение подобных регуляторов для управления тепловыми и иными процессами, где объект обладает резко выраженными аккумулярующими свойствами, не ухудшает существенно динамики процесса в сравнении с непрерывным регулированием.

Последние годы в основном в связи с применением техники авторегулирования к сложным системам, где приходится регулировать несколько параметров и применять связанные схемы регулирования,¹ некоторые иностранные фирмы² искусственно создают периодические перерывы в работе регулятора.

Здесь это приводит уже к усложнению аппаратуры, так как регуляторы являются непрерывными, и прерывистость достигается установкой дополнительного аппарата. Однако таким путем пытаются улучшить качество процесса регулирования. Выясним, какие причины побуждают к этому.

Рассмотрим, например, схему регулирования процесса горения в топке парового котла.

Изменение подачи топлива и воздуха в топку котла должно происходить в соответствии одно с другим.

¹ Связанной называем такую схему, где на некоторые или на все регулирующие органы воздействует более одного командующего органа.

² Например, немецкая фирма Askania, изготавливающая гидравлические регуляторы.

Если использовать обычные регуляторы с жесткими выключателями по положению регулирующих органов, то даже при воздействии на них общего импульса по давлению пара нельзя быть уверенным, что пропорция между топливом и воздухом будет сохранена.

Действительно, хотя указанная схема и может обеспечить одинаковое положение регулирующих органов, но последнее не определяет еще в должной мере одинакового расхода.

Это приводит к стремлению использовать для целей выключения импульс, непосредственно отражающий количество. Например, для фиксирования воздушного потока используется перепад на дроссельной шайбе.

Однако импульс по расходу в отличие от импульса по положению всегда достигает регулятора с некоторым отставанием, что отрицательно сказывается на динамике процесса регулирования.

Вводя перерывы, подбирают их так, чтобы к моменту каждого нового воздействия регулятора изменение количества за предыдущее время было им в основном уже зафиксировано.

Такое решение вопроса нельзя признать наилучшим. Значительно эффективней считаем схему, в которой осуществлено выключение по положению с изодромом и одновременно выключение по количеству.

Если отвлечься от количественного выключения и связанного с ним отставания импульса, то переход на прерывистое регулирование, как правило, ухудшает динамику регулирования.¹ Пример, приведенный Хортом^[9], в котором прерывистое регулирование в противоположность непрерывному дает устойчивое регулирование, не является характерным. Им была принята в расчет масса регулятора, которая при отсутствии катаракта и непрерывном регулировании приводила к неустойчивому процессу. В обычно применяемых регуляторах прямого действия масса регулятора пренебрежимо мала, а в этом случае как катаракт, так и прерывистый принцип действия только ухудшают работу регулятора.

На основе сказанного приходим к следующим выводам:

1. Прерывистое регулирование при отсутствии отставания в передаче импульсов, как правило, ухудшает качество переходных процессов и понижает их устойчивость.

2. Некоторые случаи, где при отсутствии отставания применение прерывистого регулирования за счет затягивания переходных процессов дает повышение устойчивости режима работы установки, не являются характерными, так как существуют и иные более эффективные мероприятия.

3. Основными факторами, влияющими на выбор регуляторов прерывистого действия, следует признать конструктивные и экономические соображения.

4. Когда отставание вносится выключающим импульсом по количеству, который целесообразно использовать особенно в сложных системах регулирования, то наиболее правильным решением вопроса с точки зрения качества работы следует признать применение не прерывистого регулирования, а одновременно с выключателем по количеству еще и выключателя по положению с изодромом.

4.2. Непрерывное регулирование как граница прерывистого.

4.2.1. Рассмотрим затрагиваемый вопрос на примере регулятора температуры аэроплана.

Возьмем вначале случай постоянной средней скорости сервомотора, соответствующий неизменной длительности включения ртутных контактов независимо от отклонения стрелки гальванометра.

Для сервомотора имеем уравнение, найденное выше:

$$\tau_n = \tau_0 - k\lambda. \quad (18)$$

¹ В диссертации автора рассмотрен ряд конкретных примеров, подтверждающих это заключение.

Вводя понятие средней скорости сервомотора T_s , можем переписать (18) подобно соответствующей формуле непрерывного регулирования, т. е.

$$\eta_n = \eta_0 - t / T_s. \quad (84)$$

Откуда

$$kn = t / T_s. \quad (85)$$

Далее очевидно

$$t = nT. \quad (86)$$

Из (84) и (85) получаем:

$$k = T / T_s. \quad (87)$$

Для прерывистого регулирования имели выше

$$\phi_{n+1} = [\eta_0 + k(1 - e^{-T/T_0}) - 1][1 - e^{-(n+1)T/T_0}] - k(n+1). \quad (19)$$

При переходе на непрерывное регулирование $T \rightarrow 0$ и, следовательно, согласно (87) $k \rightarrow 0$.

Раскрывая неопределенность выражения

$$k(1 - e^{-T/T_0}),$$

входящего в (19) при $T=0$ и $k=0$, находим:

$$[k(1 - e^{-T/T_0})]_{T \rightarrow 0} = T^0 / T_s. \quad (88)$$

Тогда из (19), учитывая выражения (85) и (86), получим:

$$\phi = (\eta_0 + T^0 / T_s)^{-1} (1 - e^{-t/T_0}) - t / T_s. \quad (89)$$

С другой стороны, для непрерывного регулирования вместо (14) и (18) имеем исходные уравнения:

$$\eta = \eta_0 - t / T_s, \quad T^0 \phi' + \phi - \eta = 0. \quad (90)$$

Откуда при том же начальном условии $\phi_0 = 0$, находим вновь (89).

4.2.2. Переходим ко второму возможному случаю, когда длительность включения ртутных контактов меняется пропорционально отклонению регулируемого параметра.

Рассмотрим условия устойчивости и апериодичности.

Для прерывистого регулирования имеем исходные формулы (61) и (62), которые для непрерывного регулирования переходят в следующие:

$$\eta = T^0 \phi' + \phi, \quad \eta' = -\phi / T_s. \quad (91)$$

Сравнивая (62) и последнее уравнение (91), не трудно убедиться, что значение коэффициента k получается то же, что и ранее по (87).

Система уравнений непрерывного регулирования (91) имеет характеристическое уравнение:

$$\omega^2 + (1 / T^0) \omega + 1 / (T^0 T_s) = 0. \quad (92)$$

Откуда вытекает, что процесс всегда устойчив.

Для прерывистого регулирования согласно (78) с учетом (87) получаем условие устойчивости:

$$T_s > \frac{1}{2} T \operatorname{th} \frac{T}{2T_0}. \quad (93)$$

Когда $T \rightarrow 0$, правая часть обращается в нуль и условие устойчивости всегда выполняется. Таким образом полученный результат совпадает с найденным выше для непрерывного регулирования. Переходим к рассмотрению условия апериодического регулирования.

Для непрерывного регулирования из (92) вытекает условие апериодичности, совпадающее с условием вещественности корней:

$$T_s \geq 4 T^0. \quad (94)$$

Для прерывистого регулирования было найдено выше условие аperiodичности (82).

Откуда, учитывая значение $k = T/T_s$, согласно (87), полагая $T=0$ и раскрывая неопределенность, находим снова условие (94).

Подобным же образом можно показать и далее, как уравнения прерывистого регулирования плавно переходят в уравнения непрерывного регулирования по мере приближения к нулю периода регулятора.

Применительно к регулированию скорости машин на отсечку это показал в 1909 г. Н. Е. Жуковский [1].

Поступила в редакцию 31.VIII 1940.

DIE ANALYTISCHE THEORIE DER UNSTETIGEN REGELUNG UND DER ACHTPUNKTIGE TEMPERATURREGLER DES KOHLENSTAUBES FÜR KESSELVERSTAUBER.

G. G. KORNILOW.

Zusammenfassung.

Der einleitende Teil der Abhandlung klärt den Stand der Frage in der Theorie der unstetigen Regelung. Es werden die früheren grundlegenden Arbeiten von Kargl, Hort und Joukowsky über die unstetige Geschwindigkeitsregelung der Maschinen, sowie eine neue, der Meinung des Verfassers nach fehlerhafte Arbeit von Lang über die Regelung der Wärmeprozesse behandelt.

Weiterhin wird die allgemeine Theorie der unstetigen Regelung für zwei bestimmte Fälle behandelt, nämlich für konstante und variable Geschwindigkeit des Servomotors.

Diese Theorie wird im weiteren zur Analyse der Arbeit eines auf einem Kessel aufmontierten achtpunktigen Temperaturreglers für Kohlenstaub angewandt.

Der letzte Abschnitt behandelt die allgemeinen, die Wahl der unstetigen Regler bestimmenden Faktoren, und in Verbindung damit auch die Frage über die Einwirkung der unstetigen Regelung auf die Dynamik des Prozesses.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kargl Z. Zur Lösung der Regulatorfragen. „Civilingenieur“. 1871.
2. Grashof F. Theoretische Maschinenlehre. 1883.
3. Сидоров А. И. Плоские регуляторы быстроходных машин. 1900.
4. Hort W. Entwicklung der stetigen Kraftmaschinenregelung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Regelungsvorgänge. „Zeitschr. f. Math. u. Phys.“ 1904. Bd. 50.
5. Hort W. Technische Schwingungslehre. 1922.
6. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия. „Известия С.-Петербургского технологического института“. 1877, продолжение, О регуляторах непрямого действия. В том же журнале. 1878.
7. Жуковский Н. Е. Теория регулирования хода машин. 1909.
8. Tolle M. Die Regelung der Kraftmaschinen. 1921.
9. Штейн Г. Регулирование и выравнивание в паросиловых установках. Пер. с нем. 1931.
10. Lang M. Die Theorie der ausschlagsabhängigen Schrittregelung. „Zeitschr. f. technische Physik“. 1937, N 10.
11. Корнилов Ю. Г. и Фельдман Е. П. Многоточечный регулятор температуры. „Точная индустрия“. 1940. № 2.
12. Корнилов Ю. Г. Автоматика горения котла № 5 Каширской ГРЭС. Сборник ЦКТИ. 1941. № 1.
13. Routh A. Treatise on the Stability of a given State of Motion. 1877.

ГИДРОМЕХАНИКА

О ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ (ДВУСЛОЙНОМ) ГРУНТЕ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

(Москва)

Точное решение задачи о фильтрации под гидротехническими сооружениями в неоднородной среде представляет значительные математические трудности^[1]. Поэтому получение точного решения для какого-нибудь частного случая уже представляет известный интерес. В этой статье приводятся некоторые результаты вычислений, произведенных по точным формулам, полученным автором для двух простейших задач о плоском установившемся движении в двуслойном грунте, и указывается приближенный способ решения более сложных задач такого типа. При решении принимаются обычные предположения о применимости закона Дарси и о малости скоростей фильтрации.

1. Шпунт в двух слоях одинаковой толщины с различными коэффициентами фильтрации.

Пусть имеем два горизонтальных слоя грунта, из которых нижний находится на непроницаемом основании. Глубину каждого слоя обозначим через h , глубину забивки шпунта через d . Коэффициент фильтрации верхнего слоя пусть будет α_1 , нижнего α_2 . Величину действующего напора обозначим через H .

В полученные при решении этой задачи формулы в качестве параметра входит величина, которую мы обозначим через ϵ , зависящая от отношения коэффициентов фильтрации следующим образом:

$$\operatorname{tg} \pi \epsilon = \sqrt{\alpha_2 / \alpha_1}$$

или

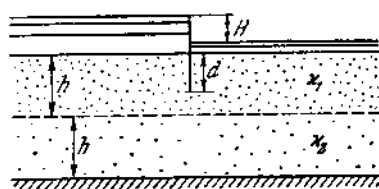
$$\epsilon = 1 / \pi \arctg \sqrt{\alpha_2 / \alpha_1}. \quad (1)$$

Поэтому при вычислении расходов и выходных скоростей я рассматриваю в качестве независимой переменной не отношение коэффициентов фильтрации, а именно эту величину ϵ , которая меняется в промежутке от 0 до $1/2$. Для перехода от α_2 / α_1 к ϵ может служить табл. 1 (или график, построенный с помощью этой таблицы).

Таблица 1

α_2 / α_1	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5
ϵ	0	0.00318	0.0101	0.0316	0.0975	0.196
α_2 / α_1	1	10	100	1000	10000	∞
ϵ	0.250	0.402	0.468	0.490	0.497	0.5

Обозначим через Q' приведенный расход, т. е. расход при коэффициенте фильтрации α_1 и действующем напоре H , равных единице. Тогда расход Q при



Фиг. 1.

произвольных x_1 и H будет:

$$Q = x_1 H Q'. \quad (2)$$

Под v' будем понимать „приведенную“ выходную скорость, т. е. скорость в точке A (фиг. 1) при $x_1 = 1$ и общей глубине слоя, равной единице, т. е. $2h = 1$. Если обозначить через v скорость в точке A при про-

извольных x_1 и h , то по определению будем иметь:

$$v = x_1 v' / (2h). \quad (3)$$

В табл. 2 и 3 Q' и v' даны в функциях от ϵ и $d / (2h)$.

Таблица 2

Значения Q'

$d / (2h)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
ϵ							
0	0.734	0.500	0.340	0	0	0	0
0.05	0.742	0.504	0.344	0.083	0.036	0.023	0.012
0.10	0.763	0.519	0.357	0.162	0.0769	0.0498	0.0346
0.15	0.783	0.548	0.399	0.256	0.161	0.107	0.077
0.20	0.863	0.612	0.479	0.363	0.268	0.208	0.153
0.25	0.958	0.734	0.600	0.500	0.417	0.340	0.261
0.30	1.113	0.888	0.785	0.688	0.615	0.533	0.425
0.35	1.42	1.19	1.08	1.01	0.925	0.844	0.650
0.40	1.896	1.629	1.57	1.539	1.50	1.453	1.40
0.45	16.17	16.08	15.99	15.91	15.83	15.74	15.66
0.50	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 3

Значения v'

$d / (2h)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
ϵ						
0	2.512	1.196	0.708	0	0	0
0.05	2.513	1.200	0.712	0.051	0.026	0.010
0.10	2.517	1.206	0.719	0.136	0.0646	0.0431
0.15	2.522	1.220	0.754	0.247	0.142	0.093
0.20	2.528	1.235	0.789	0.344	0.239	0.171
0.25	2.536	1.256	0.822	0.458	0.354	0.264
0.30	2.546	1.274	0.868	0.564	0.479	0.368
0.35	2.560	1.302	0.909	0.678	0.602	0.502
0.40	2.575	1.338	0.963	0.798	0.744	0.652
0.45	2.590	1.372	1.020	0.902	0.869	0.819
0.50	2.613	1.414	1.082	1	1	1

Некоторые числа этих таблиц получены не непосредственным вычислением, но интерполированием, так как хотя формулы для Q' и v' не очень сложны, но все же требуют длительных вычислений^[1]. Отметим три значения ε , для которых формулы сильно упрощаются.

1. $\varepsilon=0$. При этом $x_2=0$, т. е. нижний слой непроницаем, и мы имеем обтекание шпунта в однородном грунте в слое толщины h .

Введем новые обозначения: S для глубины забивки шпунта и T для глубины слоя. Пользуясь известными методами (см., например, ^[1] или ^[4]), не трудно получить такие формулы для скоростей фильтрации для однородной среды с коэффициентом фильтрации α :

$$v_x - iv_y = -\frac{\alpha H \pi i}{4TK} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \sin^2 [\pi z / (2Ti)]}}. \quad (4)$$

Здесь $z = x + iy$,

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \sin \frac{\pi S}{2T}, \quad k' = \cos \frac{\pi S}{2T}. \quad (5)$$

Зная выражение для скоростей, нетрудно вычислить расход и выходную скорость. А именно:

$$Q = \frac{\alpha H K'}{2K}, \quad v = \frac{\alpha H}{4T} \frac{\pi}{Kk} = \frac{\alpha H}{T} v', \quad (6)$$

где

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

или

$$Q' = \frac{K'}{2K}, \quad v' = \frac{\pi}{4Kk}. \quad (7)$$

Очевидно, что для неоднородного грунта при $\varepsilon=0$ и $d < h$ мы можем пользоваться формулами (6) и (7), полагая в них $S=d$, $T=h$. Если же $d \geq h$, то движение жидкости невозможно, скорости и расходы будут равны нулю, так что, в частности,

$$Q' = 0, \quad v' = 0.$$

2. Положим $\varepsilon=1/4$. Тогда $x_2=x_1$, и мы опять имеем однородный грунт, но уже глубины $T=2h$.

В табл. 4 приведены значения Q' и v' в зависимости от отношения T/S . В последней строке даны значения величины $v''=(S/T)v'$, т. е. скорости, отнесенной к единице длины шпунта, при $\alpha=1$.

Таблица 4

T/S	1.01	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$	1.5	1.6	1.75	2	2.5	$2\frac{2}{3}$
Q'	0.141	0.261	0.310	0.340	0.391	0.417	0.451	0.500	0.578	0.600
v'	0.141	0.264	0.318	0.354	0.420	0.458	0.511	0.599	0.768	0.822
v''	0.140	0.235	0.254	0.266	0.280	0.286	0.292	0.300	0.307	0.308
T/S	3	4	5	8	10	20	30	40	50	∞
Q'	0.639	0.734	0.808	0.958	1.026	1.255	1.380	1.452	1.542	∞
v'	0.933	1.256	1.580	2.536	3.18	6.36	9.54	12.72	15.90	∞
v''	0.311	0.314	0.316	0.317	0.318	0.318	0.318	0.318	0.318	0.318

3. Пусть теперь $\varepsilon = 1/2$. Тогда $x_2 = \infty$, т. е. в нижнем слое отсутствует сопротивление. Здесь вдоль линии раздела между верхним и нижним слоем напор сохраняет постоянное значение (он равен полусумме напоров верхнего и нижнего бьефов). Задачами аналогичного характера занимался Н. К. Гиринский [1].

Для нашего примера при $\varepsilon = 1/2$ будем иметь равенства:

$$v_x - iv_y = -\frac{xH}{2h} \frac{\sin[\pi z / (2hi)]}{V \sin^2[\pi z / (2hi)] - k'^2}, \quad (8)$$

$$v' = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sin[\pi d / (2h)]}, \quad Q' = \infty. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) справедливы лишь при $d < h$. Если же $d \geq h$, то при $\varepsilon = 1/2$ движение будет происходить с постоянной вертикальной скоростью, направленной вниз в левой половине области движения и вверх в правой половине. А именно:

$$v_y = \pm \frac{xH}{2h},$$

так что приведенная выходная скорость будет равна единице:

$$v' = 1. \quad (10)$$

Расход будет бесконечно большим:

$$Q' = \infty. \quad (11)$$

В обоих случаях, $d < h$ и $d \geq h$, при ε , очень близких к $1/2$, величина Q' приближенно равна $1/2 \operatorname{tg} \pi \varepsilon$:

$$Q' = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{x_1 x_2}. \quad (12)$$

Точнее

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2}} \{Q' : \operatorname{tg} \pi \varepsilon\} = \frac{1}{2}. \quad (12')$$

На фиг. 2—5 даны графики зависимости Q' и v' от ε и $d / (2h)$.

II. Плоский незаглубленный флютбет в двух слоях одинаковой толщины с различными коэффициентами фильтрации.

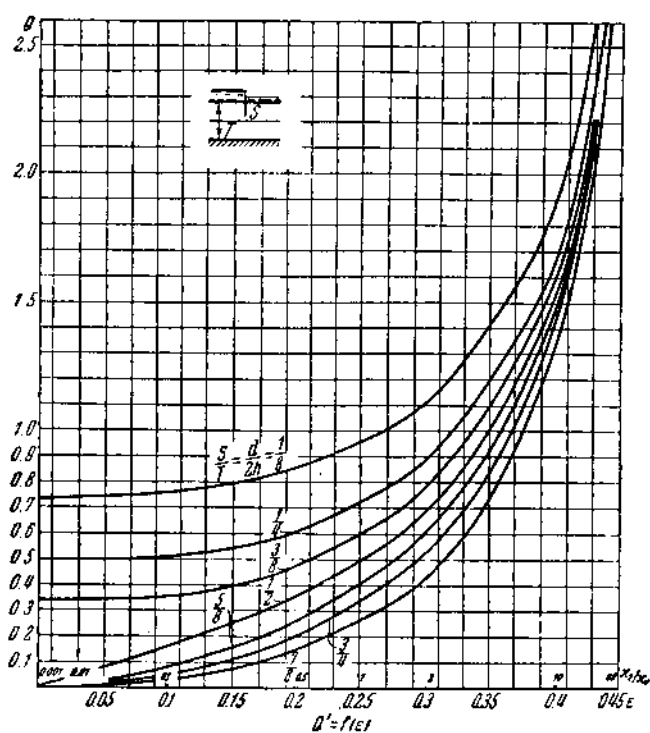
Длину флютбета обозначим через $2l$ (фиг. 6). Остальные обозначения те же, что и в задаче 1.

Здесь мною вычислены лишь величины расходов в зависимости от ε и $l / (2h)$. Выходная скорость, т. е. скорость в точке А, получается равной бесконечности. Этот результат является следствием предположения о малости скоростей фильтрации, при котором мы отбрасываем в дифференциальных уравнениях движения малые члены высшего порядка.

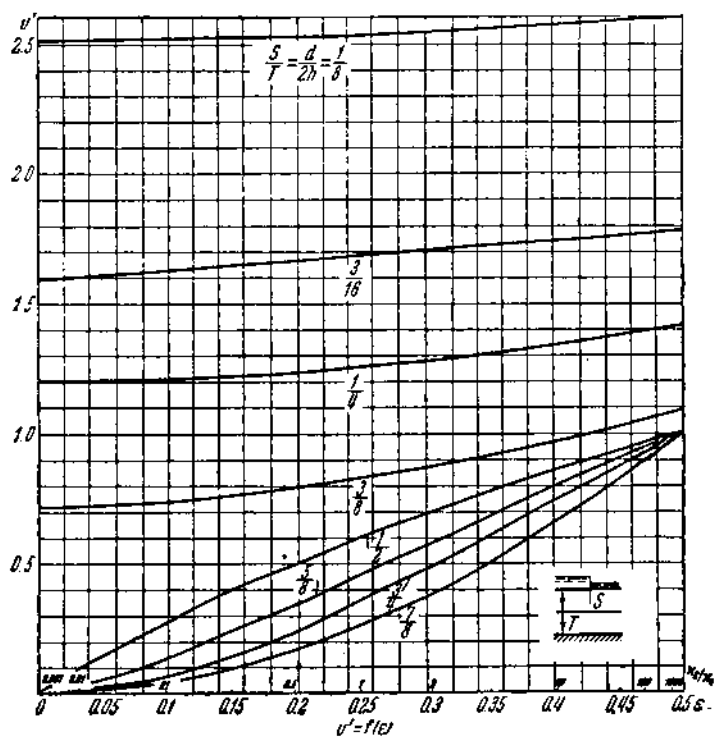
Табл. 5 дает зависимость Q' от $l / (2h)$, причем для ε взяты лишь значения $\varepsilon = 0, 0.25$ и 0.40 . Таким образом специальные вычисления для неоднородного грунта проделаны лишь для $\varepsilon = 0.40$.

Таблица 5

$\varepsilon \backslash l/(2h)$	0	0.1	0.25	0.50	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0	∞	0.812	0.533	0.330	0.204	0.145	0.113	0.092	0.078	0.067	0.050
0.25	∞	1.031	0.743	0.533	0.330	0.258	0.204	0.170	0.145	0.126	0.113
0.40	∞	1.963	1.657	1.416	1.106	0.915	0.784	0.673	0.604	0.542	0.491



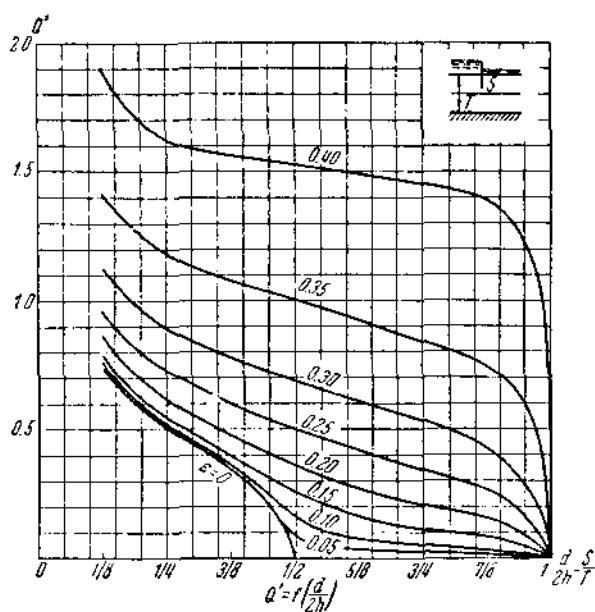
Фиг. 2.



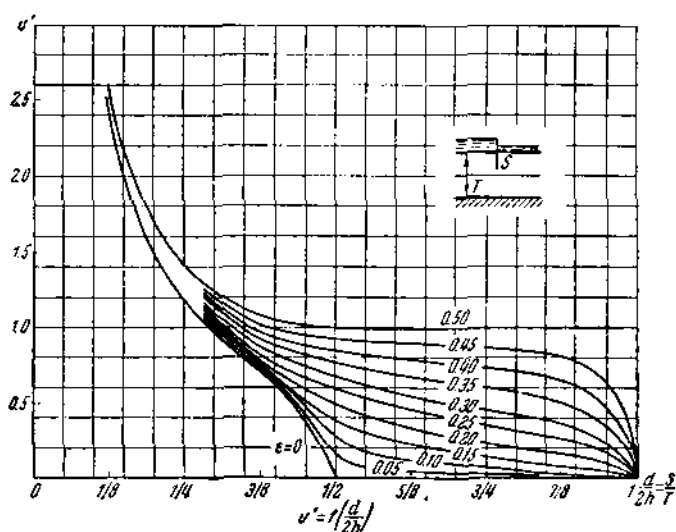
Фиг. 3.

По данным этой таблицы построены графики фиг. 7 и 8. При этом принято во внимание, что при $\epsilon \rightarrow 1/2$ величина Q' стремится к бесконечности, как $1:(2 \cos \pi \epsilon)$, или, что то же, как $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi \epsilon$. Точное равенство имеет вид:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \frac{1}{2}} (Q' \cos \pi \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{Q'}{\operatorname{tg} \pi \epsilon} = \frac{1}{2}.$$



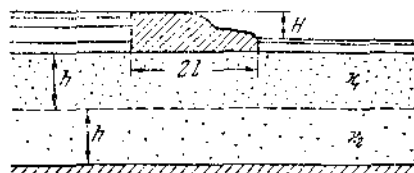
Фиг. 4.



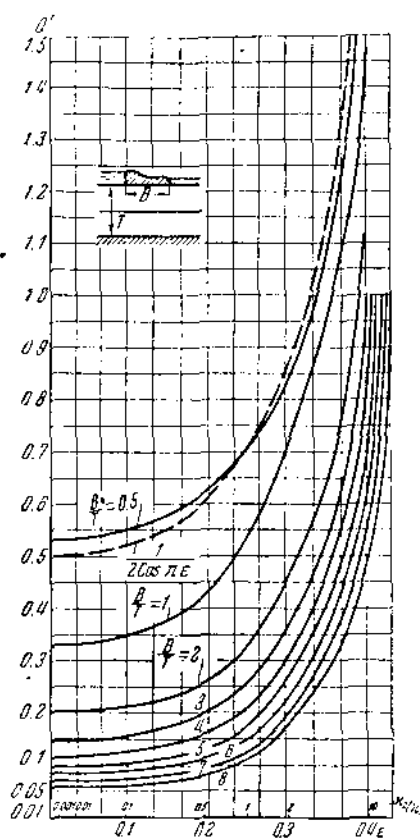
Фиг. 5.

III. Ориентировочный способ определения элементов фильтрации в двухслойном грунте.

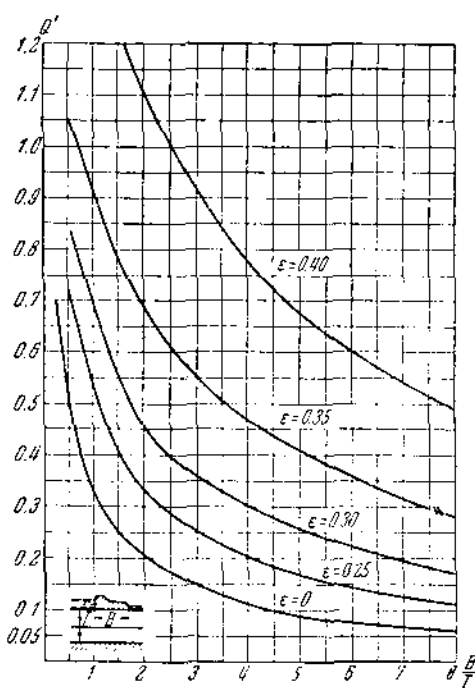
Предположим, что мы знаем решение некоторой задачи о фильтрации в однородном грунте конечной глубины. Тогда мы можем решить задачу



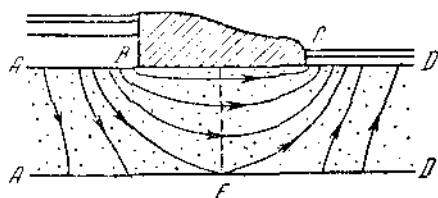
Фиг. 6.



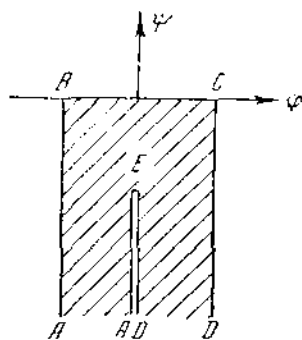
Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

о движении грунтовых вод под тем же сооружением при условии постоянства напора вдоль нижней границы области движения. Действительно, область движения (мы предполагаем, что она представляет собой многоугольник) одна и та же в обеих задачах, на плоскости же комплексного потенциала при наличии водоупорного слоя имеем прямоугольник, при постоянстве же напора вдоль основания эта область имеет вид (фиг. 10). (Мы принимаем, что потенциал скорости φ равен $-\chi H/2$ на линии AB фиг. 9, $\varphi = \chi H/2$ на линии CD и $\varphi = 0$ на $A'D'$.)

Решив указанные две задачи, мы будем иметь для всех элементов движения, не обращающихся в бесконечность, три точки: $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.25$ и $\varepsilon = 0.5$. Для Q' , которое обращается в бесконечность при $\varepsilon = 0.5$, мы будем иметь лишь две точки. Кроме того, можно использовать то обстоятельство, что кривая для Q' приближается асимптотически к тангенсоиде:

$$Q' \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \frac{1}{2}.$$

По этим значениям можно построить график, который позволит, конечно, грубо, найти значения Q' и v' для любого ε . При ε , очень близком к $1/2$, можно воспользоваться формулой (12) для Q' . Интерполированием можно получить также величины скоростей в любой точке верхнего слоя грунта. Этот способ можно применять лишь в тех случаях, когда есть уверенность в монотонности зависимости рассматриваемого элемента от ε .

Поступила в редакцию 23. IX 1940.

Институт механики
Акад. Наук СССР

ON FILTRATION IN NON-HOMOGENEOUS (TWO-LAYERED) SOILS

P. J. POLOUBARINOVA-KOCHINA

(Summary)

An exact solution of the problem of filtration under hydro-technical structure in a non-homogeneous medium presents considerable difficulty in mathematics (1). For this reason, an exact solution for any special case is of immediate interest.

In this article, the author gives the results of calculations carried out according to exact formulae deduced for two of the simplest problems of plane steady flow in two-stratified soils. The author also points out an approximate procedure of solving more complex problems of this type.

In the solution, the usual assumptions are made—that of the applicability of Darcy's law, and that the velocity of filtration be small.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменский Г. Н., Корчебохов Н. А. и Разин К. И. Движение подземных вод в неоднородных пластах. ОНТИ. 1935.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. О простейших случаях фильтрации в двухслойной среде. Доклады Академии Наук СССР. 1940. Т. XXVI. № 8.
3. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Пгр. 1922.
4. Христианович С. А., Михлин С. Г. и Девисон В. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. 1937.
5. Гиринский Н. К. Основы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями при наличии по нижней поверхности грунта напора постоянной величины. „Гидротехн. строит.“ 1936. № 6.

ОБЗОР СПОСОБОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕЖИМА ОТКРЫТЫХ ВОДОТОКОВ В СЛУЧАЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ

В. А. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

(Москва)

Все расчеты в области неустановившегося движения до настоящего времени основываются на системе дифференциальных уравнений Сен-Венана:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad (1)$$

$$-i_g - \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{g} \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{u^2}{c^2 R}, \quad (2)$$

где предполагается положительное направление оси s по течению потока, оси z вверх, и приняты обозначения:

F — площадь живого сечения,	R — гидравлический радиус,
q — расход воды в данном створе,	g — ускорение силы тяжести,
i_g — уклон дна потока,	c — коэффициент в формуле Шези.
H — глубина потока,	s — расстояние от начального створа.
u — средняя скорость течения,	

Так как

$$-i_g - \frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial z}{\partial s},$$

где z — отметка поверхности потока, то уравнение (2) может быть также представлено в виде:

$$-\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{u^2}{c^2 R} + \frac{1}{2g} \frac{\partial u^2}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Уравнение (1) выражает условие неразрывности при неустановившемся движении; уравнение же (2) есть динамическое; как известно, оно может быть получено применением к неустановившемуся движению одного из общих принципов механики (принципа Даламбера, закона сохранения энергии).

Принимая, как обычно, призматичность русла в пределах отдельного расчетного участка, имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial s},$$

где B — ширина русла поверху.

Подставив $q = uF$ в уравнении (1) и вводя обозначение

$$g \left(i_g + \frac{u^2}{c^2 R} \right) = -N,$$

запишем систему (1), (2) в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{g}{B} \frac{\partial F}{\partial s} = N. \quad (4)$$

В таком виде уравнения движения представляют собой систему нелинейных гиперболических уравнений в частных производных от функций u и F по независимым переменным s и t . Вообще говоря, эта система не имеет решения, выражающегося в простой аналитической форме. Такое решение существует для частного случая, если допустить горизонтальность дна, пренебречь трением и предположить постоянство расхода, соответствующее постоянной площади живого сечения.

В этих предположениях для средней скорости течения u и скорости распространения W постоянной глубины H в русле прямоугольной формы Сен-Венаном получены формулы:

$$u = \pm [2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gH_0} \pm u_0], \quad (5)$$

$$W = \pm [3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gH_0} \pm u_0], \quad (6)$$

где H_0 — глубина установившегося движения, предшествующего распространению волн, а u_0 — средняя скорость этого движения; знаки $+$ и $-$ относятся к случаям распространения по течению и против него.

Отсюда при $H = H_0$ вытекает известная формула Лагранжа для скорости распространения возмущения:

$$W = u_0 \pm \sqrt{gH_0}. \quad (7)$$

В работах С. А. Христиановича дается обобщение формул (5), (6), (7) для русел любой формы поперечного сечения. В частности, для скорости распространения фронта волны им была получена формула:

$$W = u \pm \sqrt{g \frac{F}{B}}, \quad (8)$$

справедливая и в случае учета сил трения. Легко видеть, что для русла прямоугольной формы эти формулы переходят в формулы Лагранжа.

Расчеты с учетом трения производятся приближенным интегрированием. При этом можно различать два направления в разработке расчетных приемов.

Первое из них основано на теории уравнений в частных производных. Как известно, уравнения в частных производных имеют так называемые характеристики, или характеристические совокупности; последние определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть получены из основных; следовательно, решения характеристик являются в то же время и решениями основных уравнений.

Система уравнений (3), (4) гиперболического типа обладает двумя совокупностями вещественных и различных характеристик.

Первый путь и заключается в замене уравнений (3), (4) уравнениями характеристик и решении последних приемами приближенного интегрирования; самый метод уместно назвать методом характеристик.

Второй путь заключается в том, что, вводя некоторые дополнительные допущения, систему уравнений (1), (2) заменяют соответствующими уравнениями в конечных разностях. Для решения получаемой системы существует ряд приемов, в результате которых получают эпюры распределения по длине потока расходов и уровней (мгновенные профили) на расчетные моменты времени, которые задаются заранее. Многочисленные приемы, дающие решение таким способом, уместно объединить под общим наименованием метода мгновенных эпюр.

Всестороннее и глубокое исследование системы уравнений (3), (4) и разработка их решений методом характеристик произведены С. А. Христиановичем и опубликованы им в период 1933—1938 гг. в ряде отдельных работ и в виде сводной монографии [1]. Независимым от этих работ является исследование французского инженера М. Анри [2].

Система уравнений характеристик, данная С. А. Христиановичем, имеет вид:

$$ds = W dt, \quad (9)$$

$$du \pm \sqrt{\frac{g}{BF}} dF = N dt. \quad (10)$$

С точки зрения физической сущности уравнение (9) дает закон распространения фронта волны по течению и против него в зависимости от выбора знака в выражении (8) для W , а уравнения (10) — изменения средней скорости и площади живого сечения в створах, соответствующих перемещающемуся фронту волны.

В координатной плоскости s, t уравнению (9) соответствуют два семейства различных кривых, для которых угловые коэффициенты касательных будут:

$$W = \frac{ds}{dt} = u \pm \sqrt{\frac{F}{gB}}. \quad (11)$$

Возьмем в этой плоскости (фиг. 1) две точки a и b , в которых значения функций u и F заданы, и проведем через эти точки прямые с угловыми коэффициентами (11) до пересечения в точках m и n . Уравнение (10) дает закон изменения величин u и F вдоль отрезков $a-m$, $b-m$, $a-n$ и $b-n$. Выражая уравнения системы (9), (10) в конечных разностях и присваивая входящим в нее величинам индексы в соответствии с теми точками, к которым эти величины относятся, можно переписать ее для точки m следующим образом:

$$\begin{aligned} s_m - s_a &= W_{cp} (t_m - t_a), \\ s_m - s_b &= W_{cp} (t_m - t_b), \\ u_m - u_a + \left(\sqrt{\frac{g}{BF}} \right)_{cp} (F_m - F_a) &= N (t_m - t_a), \\ u_m - u_b + \left(\sqrt{\frac{g}{BF}} \right)_{cp} (F_m - F_b) &= N (t_m - t_b). \end{aligned} \quad (12)$$

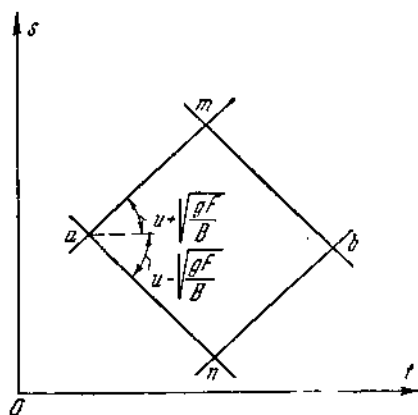
Здесь индекс (ср) означает, что для соответствующих величин принимаются их средние значения в интервале между двумя точками.

Аналогичную же систему уравнений можно получить для точки n .

Соотношения (12) представляют собой систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными (s_m, t_m, u_m, F_m), из которой эти неизвестные однозначно определяются. В этом и заключается идея применения характеристик к решению системы уравнений (3), (4).

Поскольку в уравнениях системы (12) участвуют средние значения их коэффициентов, зависящие от определяемых неизвестных, то решение с намеченной степенью точности может быть получено путем последовательных приближений.

Совместное решение системы (12) может быть получено как аналитическим, так и графо-аналитическим приемами; в практике обычно пользуются последним. При этом в качестве расчетных формул применяются уравнения характеристик, в которых функции u и F заменены через q и z ; идея этой замены принадлежит инж. Н. Г. Мелещенко (Ленинград); работа последнего в печати не опубликована, но расчетные зависимости, полученные им в результате указанной замены, имеют широкое распространение в практике.



Фиг. 1.

Метод характеристик позволяет производить расчеты неустановившегося движения при любой форме задания необходимых граничных и начальных условий и является в этом смысле универсальным аппаратом для проектирования неустановившегося движения.

Приемы расчетов неустановившегося движения, объединенные нами общим названием — способ мгновенных эпюр, имеют довольно длительную историю развития; указанного типа приемы расчетов применялись еще в прошлом столетии бельгийским инженером Харенсом (Haerens) и в последнее время немецкими инженерами Ольтjen и Рейнеке (Oltjen, Reinecke). Эти приемы были аналитическими и в достаточной степени громоздкими. Большой интерес представляют приемы расчетов этого типа, предложенные в СССР инж. Н. М. Бернадским [3].

Автором настоящей статьи разработан графо-аналитический прием проектирования, позволяющий распространить применение этого способа для граничных условий любого вида [4].

При всех расчетах приемами мгновенных эпюр производится деление расчетной длины бьефа на участки постоянной длины, и подбором определяется режим в пределах этих участков для заданных моментов времени, удовлетворяющий уравнениям неразрывности и продольного равновесия. В последнем чаще всего пренебрегают инерционным членом, т. е. в конечно-разностной форме оно имеет вид:

$$\delta z = \frac{u^2}{c^2 R} \Delta s, \quad (13)$$

где δz — падение на участке. В тех же случаях, когда пренебрежение инерционным членом ведет к большим погрешностям, учет его производится по приближенной формуле вида:

$$\Delta \delta z = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\Delta q \Delta s}{\Delta t F}, \quad (14)$$

где $\Delta \delta z$ — дополнительное падение на участке, обуславливаемое изменением кинетической энергии и неустановившимся характером движения, u_2 и u_1 — средние скорости течения в концевых створах участка, Δq — увеличение среднего в пределах участка значения расхода, происшедшее за расчетный интервал времени.

Величина $\Delta \delta z$, вычисленная по формуле (14), алгебраически прибавляется к величине падения, определяемого по формуле (13).

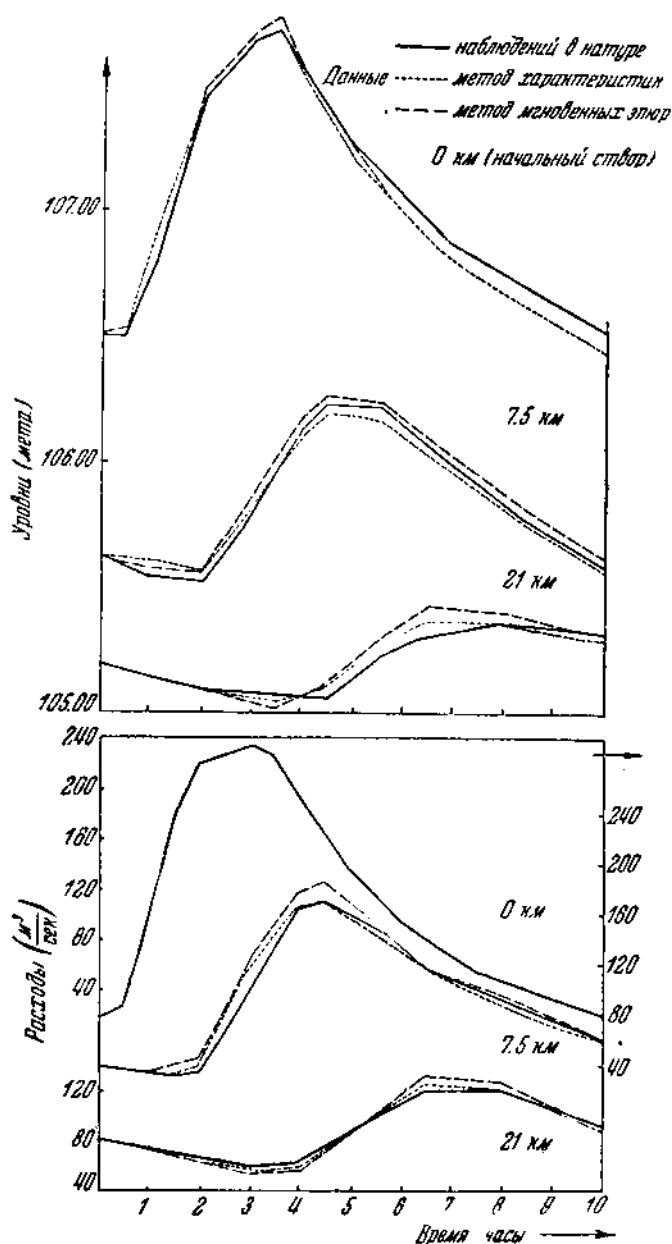
Помимо удовлетворения условиям движения в пределах каждого участка искомый мгновенный режим должен удовлетворять также граничным условиям на концах. Для этого, рассматривая неизвестный в начальном створе бьефа элемент режима (расход или уровень) как параметр, путем подбора определяют единственно возможное значение этого параметра в конечном створе согласно заданному граничному условию. Этот процесс двойного подбора, требующийся в приемах мгновенных эпюр, весьма облегчается применением упоминавшегося выше графо-аналитического приема.

Допущения, свойственные приемам мгновенных эпюр, ограничивают их область применения теми случаями проектирования, при которых эти допущения не могут значительно отразиться на точности результатов. К таким случаям относятся проектирование движения, в котором отсутствуют резкие изменения режима в течение коротких интервалов времени, так как при этом разбивка бьефа на участки постоянной длины не может существенно исказить результат. Кроме того, для таких движений можно пренебрегать инерционным членом в уравнении продольного равновесия, а для случая такого допущения разработана прием расчета, дающий быстрое решение (изложение приема еще не опубликовано).

Мы не останавливаемся на приеме проектирования путем фрагментирования волны на ее лоб и тело (по терминологии И. В. Егизарова), применяемом в СССР И. В. Егизаровым, во Франции Фавром [5] и в Германии Франком и Шюллером, так как этот прием, дающий хорошие результаты при расчетах волн одного

направления, становится громоздким и не может обеспечить такие же результаты в случаях сложных изменений режима.

Графо-аналитическим приемом мгновенных эпюр можно получить довольно быстро хорошие результаты при проектировании движения при разрушенной



Фиг. 2.

(т. е. имеющей ярко выраженный лоб) волне одного направления в бьефе с первоначальным установившимся режимом. С такими случаями приходится встречаться в практике проектирования при резких попусках, при прорыве плотин и т. п.

Расчет движения в форме прерывной волны в общем случае производится методом характеристик; исследование этого движения для случая пренебрежения силами трения дано в работах С. А. Христиановича^[1], а изложение приема расчета в случае учета этих сил в упоминавшейся выше статье инж. М. Анри^[2].

В заключение остановимся на вопросе о точности результатов расчетов при проектировании изложенными выше способами. Суждение о степени точности может быть получено лучше всего путем сравнения результатов с данными натурных наблюдений над неустановившимся движением. Подобные сопоставления производились неоднократно как за границей, так и в СССР. Наиболее полными из известных автору статьи работ подобного рода являются (произведенные при его ближайшем участии) сравнения результатов расчетов, исполненных методами характеристик и мгновенных эпюр, режима в нижнем бьефе одной из гидроэлектростанций на р. Волге при ее суточном регулировании и данных наблюдений над этим режимом в натуре.

На фиг. 2 дано сопоставление графиков расхода и графиков хода уровней в ряде створов бьефа, полученных расчетом и наблюдаемых.

Несмотря на то, что при расчетах приемом мгновенных эпюр в динамическом уравнении член, учитывающий силы инерции, был опущен, результаты расчетов обоими методами оказались весьма близки между собой и дали очень хорошее приближение к данным наблюдений. Аналогичные же сопоставления производились и для движения в бьефе, закрытом льдом, причем приближения к наблюдениям получились также хорошие.

Изложенное в настоящей статье показывает, что, имея описанные выше методы расчета, гидравлика неустановившегося движения располагает аппаратом для решения всевозможных задач, который обеспечивает необходимую точность расчетов. Следует пожелать, чтобы этот аппарат стал возможно скорее известен широким кругам работников в области гидротехники.

Поступила в редакцию 12. XII 1940.

Институт механики
Акад. Наук СССР.

REVIEW OF METHODS OF CALCULATION OF UNSTEADY FLOW OF WATER IN CANALS

V. A. ARCHANGELSKY

(Summary)

The article presents a brief review of method of calculation of unsteady flow of water in canals, the fundamentals of modern methods of calculation by characteristics of corresponding differential equations and by special graphical procedures.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Неустановившееся движение в каналах и реках. В сборнике „Некоторые новые вопросы механики сплошной среды“. Москва—Ленинград. 1938.
2. Henry M. Propagation des intumescences dans un canal rectangulaire. *Revue générale de l'Hydraulique*, 1938, N 19—20.
3. Бернадский Н. М. Теория и расчет речного паводка с применением к расчету суточного регулирования р. Волхова. „Материалы по исследованию р. Волхова“. 1926. Вып. XVII.
- Бернадский Н. М. Речная гидравлика, ее теория и методология. Москва—Ленинград. 1930.
4. Архангельский В. А. К расчетам неустановившегося движения в открытых водотоках. „Инженерный сборник Института механики Академии Наук СССР“. Т. I.
5. Favre H. Etude théorique et expérimentelle des ondes de translation dans les canaux découverts. Paris, 1935.

ad-2204

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

	Стр.
Строительная механика	
Г. П. Зайцев. Лучевая диаграмма пластичности металлов	143
В. М. Майзель. К расчету быстро вращающихся дисков турбокомпрессоров и других машин	167
С. А. Тумаркин. К расчету дисков на растяжение	171
Е. П. Попов. К теории спиральных пружин специальных типов	175
В. С. Свидя. О некоторых случаях пластического изгиба балок, для которых решение не может быть получено в элементарных функциях	181
М. В. Рубинин. Устойчивость внецентренножатого стержня в направлении, перпендикулярном к силовой плоскости	193
З. Б. Канторович. Приближенное решение краевой задачи для конических оболочек постоянной толщины	201
С. А. Енгальчев. Применение метода электроанalogии к исследованию кручения стержней	213
Б. М. Ровинский. Рентгенографическое исследование распределения начальных напряжений в стальном кольце	227
Ю. Н. Морозов. Сверхсильные уникальные испытательные машины	233

Регулирование

Ю. Г. Корнилов. Аналитическая теория прерывистого регулирования и восьмиконтурный регулятор температуры аэропыли барабанного котла	287
--	-----

Гидромеханика

П. Я. Полубаринова-Кочина. О фильтрации в неоднородном (двуслойном) грунте	313
В. А. Архангельский. Обзор способов проектирования режима открытых водотоков в случае неустановившегося движения	321

	Page
Applied Mechanics	
G. P. Saizew. Plastische Grundeigenschaften der Metalle	165
B. M. Maisel. On the Computation of Rapidly Rotating Discs of Turbo-Compressors and Other Machines	170
S. A. Tumarkin. On the Calculation of Stresses in Discs	174
E. P. Popov. On the Theory of Special Types of Spiral Springs	180
V. S. Svida. On Problems of Plastic Bending of Beams whose Solutions Cannot Be Expressed in Elementary Function	192
M. V. Rubinin. Stability of an Eccentrically Compressed Bar in a Direction Perpendicular to the Force Plane	199
S. B. Kantorovitch. An approximate solution for conical shells of uniform thickness loaded with shearing forces and bending moments uniformly distributed along the edge	212
S. A. Yengalichev. Investigation of the Torsion of Bars (Safits) by Means of Electrical Analogy	225
B. M. Rovinsky. X-Ray Investigation of the Distribution of Initial Stresses in Steel Rings	232
J. N. Morosow. Höchstmächtige unikale Materialprüfungsmaschinen	286

Regulation

G. G. Kornilow. Die analytische Theorie der un stetigen Regelung und der achtpunktige Temperatur-regler des Kohlenstaubes für Kesselerstauber	312
---	-----

Hydro-Mechanics

P. J. Polubarinova-Kochina. On Filtration in Non-Homogeneous (Two-Layered) Soils	320
V. A. Archangelsky. Review of Methods of Calculation of Unsteady Flow of Water in Canals	326

Подписано к печати 9/V 1941 г. РИСО № 1762—826
А38624 Объем 11^{1/2} печ. л. и 1^{1/2} п. л. вкл. 15.98 уч.-изд. л. Тираж 2000 экз. Цена книги 9 руб. 50 к.
4-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига“. Москва, Валовая, 28. Заказ № 586.

СОДЕРЖАНИЕ СЛЕДУЮЩЕГО ВЫПУСКА

- П. М. Огибалов, И. С. Ерохин и Е. Ф. Николаева. К вопросу о динамической хрупкости металлов.
- Г. П. Зайцев. О связи предела текучести с параметрами лучевой диаграммы пластичности металлов.
- Б. С. Ковальский. Напряжения на площадке местного смятия при учете силы трения.
- Г. Э. Проктор, Н. И. Глаголев и С. М. Попов. К вопросу о механических характеристиках резины.
- Н. Н. Бабаев. К вопросу о расчете гармониковых мембран регуляторов давления паровых турбин.
- В. А. Боднер. К вопросу о влиянии вибраций бака на скорость его опорожнения.
- Н. А. Кильчевский. Об осесимметричных деформациях и упругой устойчивости круглой трубы, находящейся под действием продольных сжимающих сил.
- Н. В. Зволинский. О жесткости кручения тонкостенной балки, подкрепленной упругими перегородками.
- Е. П. Попов. Расчет гибких брусьев при больших перемещениях.
- М. Р. Фельдман. О применении метода академика Б. Г. Галеркина к кощечно-разностным уравнениям.
- Я. Б. Шор. О применении начертательной геометрии в пространственной механике.
- Н. Ф. Четверухин. Аксонометрическая интерпретация метода проекций с векторными отметками.
- Д. Д. Баркан. Экспериментальные исследования экранирования волн распространяющихся в грунте.
- Ю. Н. Морозов. Серия машин Шенка для испытания на переменный изгиб и кручение.
- А. А. Соколов. Метод исследования устойчивости линейных систем регулирования с распределенными параметрами и его приложения.
- М. А. Каспаров. Исследование распределения давлений на вращающихся лопастях гидромашин.
- Л. А. Симонов. Взаимодействие потоков в спирали, направляющем аппарате и рабочем колесе гидротурбины.