Проф. Д. Н. ЗЕЙЛИГЕР

КОМПЛЕКСНАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГТТИ • 1934

Проф. Д. Н. ЗЕЙЛИГЕР

КОМПЛЕКСНАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПОВЕРХНОСТИ И КОНГРУЭНЦИИ

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД—1934—МОСКВА

Ответственный ред. Е. В. Пулькина Технич. ред. В. Д. Финити
Ленгорлит № 14151. Тираж 5000 экз. Заказ № 2458. Печать с матриц.
Статформ. бумаги 69×100. Бумажн. лист. 6¼. Г.Т.Т.И.—352

2-я тип. Изд-ва Леноблисполкома и Ленсовета. Ленинград, Улица 3-го Июля, 55.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Линейчатой геометрии, изучающей пространство, элементом которого служит прямая линия, посвящена огромная литература. В развитии этой области геометрии можно наметить следующие этапы. На первом плане следует поставить классическую работу I. Pluecker'a „Neue Geometrie des Raumes" etc., где впервые систематически изучена аналитическая геометрия линейчатого пространства. По богатству идей и результатов эта книга надолго останется источником новых исследований. Следующий этап представляют работы F. Klein'a, внесшие в эту область новые, поражающие своим изяществом, аналитические методы исследования и установившие замечательную связь между прямыми пространства 3-х измерений и точками пространства 4-х измерений. Совершенно новые идеи внесли работы S. Lie, посвященные открытой им связи линейчатой геометрии с шаровой. Последним этапом являются труды А. Котельникова и E. Study, связавшие линейчатую геометрию с теорией новых комплексных чисел вида $a+b\omega$, где ω — для пространств Эвклида, Римана и Лобачевского определяется равенствами:

$$\omega^2=0;\ \omega^2=1,\ \omega^2=-1.$$

Предлагаемое читателю настоящее исследование относится к последней категории.

Ограничиваясь эвклидовым пространством, я изучаю дифференциальную геометрию линейчатого пространства в связи с теорией вышеуказанных комплексных чисел. Плодотворность этого метода была мною выяснена в работе „Основные формулы комплексной геометрии прямой", 1897, 1908 и 1928 г. Для дифференциальной геометрии линейчатой поверхности и конгруэнции новые комплексные числа оказались драгоценными. Основанные из них методы внесли в эту область целый ряд, далеко не исчерпанный, новых и существенных результатов.

Здесь я даю сводку всего накопившегося за тридцать с лишним лет материала в виде цельного очерка этой стороны линейчатой геометрии.

Вся работа состоит из трех частей, содержание которых следующее.

В первой части, исходя из элементов теории векторов, я ввожу понятие об операции ω, преобразующей вектор в момент, и развиваю подробную теорию новых комплексных чисел. Отсюда введение числа $e^{a\omega}$, чрезвычайно упрощающего счет. Глава I этой части заканчивается изложением комплексной теории винтов, в основании которой лежит понятие о проекции винта на ось, впервые введенное в науку и изученное

А. Котельниковым. Отмечу разложение винта на два других, оси которых пересекаются под прямым углом. Это разложение сразу приводит к цилиндроиду. В следующей главе излагается теория прямоугольных и сферических комплексных координат винта и оси. Затем при помощи комплексных координат дается теория группы винтов 2-го порядка в новом изложении. Отмечу уравнение цилиндроида в сферических координатах. Ознакомив далее с формами уравнений комплексов, конгруэнций и поверхностей, я перехожу специально к комплексам 1-го и 2-го порядков. Отмечу новое построение общего комплекса 2-го порядка по двум группам винтов 2-го порядка. Эта глава заканчивается выводом комплексных уравнений однополого гиперболоида.

Вторая часть работы посвящена дифференциальной геометрии косой линейчатой поверхности и состоит из шести глав. Для ясности войдем в некоторые детали. Пусть a — образующая поверхности, O — точка встречи прямой a со стрикционной линией, Ob — перпендикулярная к a касательная к поверхности, Oc — нормаль к последней. Точка O — центр образующей a, прямые Ob и Oc — центральные касательная и нормаль, ортогональный триедр $O(a, b, c)$ — триедр образующей a, геометрическое место центральных нормалей — нормалия (a') поверхности (a).

Пусть O' — центр образующей Oc нормалии, $O'n$ и $O'd$ — центральные нормаль и касательная к нормалии (a'). Прямые $O'n$ и $O'd$ назовем главной нормалью и бинормалью поверхности (a); они соответствуют образующей a. Оказалось, как мы дальше увидим, что в изучении поверхности (a) главная нормаль и бинормаль играют существенную роль.

Пусть, далее, a' — бесконечно близкая к a образующая поверхности (a), ds_0 — элементарный угол между их направлениями, ds_1 — длина их кратчайшего расстояния. За элемент дуги поверхности (a) мы принимаем комплексное число

$$ds = ds_0 + \omega\, ds_1 = ds_0 e^{\omega p},$$

где p — параметр распределения, соответствующий прямой a. Пусть, наконец, R_0 — угол между направлениями образующей a и соответствующей бинормали $O'd$; R_1 — длина кратчайшего расстояния прямых a и $O'd$. Введем комплексное число

$$R = R_0 + \omega R_1$$

и положим:

$$\rho = \sin R, \quad \tau = \frac{dR}{ds}. \tag{a}$$

После этих необходимых пояснений перейдем к изложению второй части.

В главе I излагается общая теория поверхности. Отмечу следующие результаты. Дана общая теорема о касательных к поверхности (a) вдоль её образующей a, теорема, следствием которой является теорема Chasles'я относительно плоскостей, касательных к (a) вдоль образующей a. Наиболее важным я считаю тот результат, что прямоугольные координаты центральной нормали, главной нормали и бинормали удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые по внешнему виду тождественны известным формулам Serret-Frenet, если в последних все числа считать комплексными, а радиусы ρ и τ кривизны и кручения заменить числами ρ и τ, определенными формулой (a). Поэтому последние числа я называю радиусами кривизны и изгиба поверхности (a) в a.

Далее определяется эволюта поверхности (a), как геометрическое место ее бинормалей, причем поверхность (a) — эвольвента эволюты, и дается теория эволют и эвольвент. Глава заканчивается изучением развертывающихся поверхностей, которое приводит к новому изложению теории кривых Bertrand'a.

Глава II посвящена приложениям общей теории. Последовательно изучаются поверхности, у которых постоянны R или $\frac{\rho}{\tau}$; поверхности с общей нормалией, что приводит к решению обобщенной задачи Bertrand'a. Глава заканчивается изучением поверхностей, у которых общая главная нормалия — геометрическое место главных нормалей.

В главе III изучается кинематика прямой и твердого тела. Наиболее существенными я считаю следующие результаты: обобщение формулы Euler'a-Savary и решение задачи — по данным аксоидам движения твердого тела определить параметр π его мгновенного винта в данный момент.

Глава IV посвящена дифференциальной геометрии однополого гиперболоида. Последовательно изучаются: параметр, центральные нормали и касательная, стрикционная линия и нормалия, кривизна и бинормали. Глава заканчивается изучением интересных соотношений между образующими обеих систем.

В главе V изучаются поверхности с общей стрикционной линией (A).

Пусть r и t — радиусы кривизны и кручения линии (A) в ее точке A, p — параметр проходящей через A образующей a искомой поверхности (a). Задача определения поверхности (a) сводится к интегрированию уравнения типа Riccati. Это интегрирование проводится здесь до конца в случае

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}=0,$$

где α — постоянное число. Детально рассматриваются случаи, когда данная стрикционная линия служит для поверхности (a) геодезической, асимптотической или линией кривизны. Особо интересен последний случай, как наиболее сложный.

Глава VI и последняя части II содержат изложение нового метода изучения линейчатой поверхности при помощи декартовых координат, метода, во многом дополняющего ее теорию. В основании метода лежат дифференциальные уравнения, связывающие стрикционную линию поверхности с направлением ее образующей и параметром распределения. Главные результаты этой главы состоят в следующем. Коэффициенты обеих дифференциальных форм поверхности

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,\quad Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2,$$

выражены в отчетливой геометрической форме, содержащей лишь характерные для данной поверхности геометрические величины. Замечу, что коэффициенты D' и D'' до сих пор в окончательном виде получены не были.

Вторым результатом я считаю детальное изучение сферической индикатрисы данной линейчатой поверхности.

Перехожу к содержанию части III сочинения, содержащей теорию конгруэнций и состоящей из трех глав.

В главе I излагается общая теория конгруэнций. В основу кладется дифференциальная форма элемента дуги:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2\,Fdu\,dv + Gdv^2,$$

где

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

прямоугольные координаты луча d конгруэнции, выраженные через вещественные, независимые переменные u, v.

Главные результаты, полученные здесь, заключаются в следующем.

Через луч a конгруэнции проходит бесчисленное множество поверхностей (λ) конгруэнции, составленных каждая из ее лучей.

Центральные нормали к поверхностям (λ) в точках прямой a образуют цилиндроид, причем все свойства винтов группы 2-го порядка имеют место по отношению к центральным нормалям и параметрам распределения.

Среди поверхностей есть две поверхности кривизны конгруэнции, центральные нормали которых пересекаются под прямым углом в определенной точке O прямой a. Определение поверхностей кривизны требует интеграции обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка и 2-й степени.

Далее изучаются развертывающиеся поверхности конгруэнции, главная и средняя поверхности. Попутно указывается на изотропную конгруэнцию.

Глава заканчивается изучением случаев, когда цилиндроид нормалей вырождается.

В главе II излагаются различные системы координат и доказывается теорема, согласно которой, если проходящие через луч a конгруэнции поверхности (λ) имеют общую центральную нормаль, то их бинормали образуют цилиндроид.

Глава заканчивается исследованием связи между изотропной конгруэнцией и теорией функций обыкновенной комплексной переменной. Последняя глава работы в виде иллюстрации общей теории излагает свойства различных поверхностей конгруэнции 1-го порядка и класса.

В заключение несколько слов. Изложенное здесь содержание работы вполне, по моему мнению, достаточно для надлежащей оценки ресурсов и значения комплексной геометрии линейчатого пространства. Буду весьма рад, если настоящей работой удастся привлечь внимание наших молодых геометров к этой ветви геометрии.

Проф. *Д. Н. Зейлигер.*

Новочеркасск
25/VIII 1933 г.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Векторы и винты. Проекция винта. Комплексный угол.

1. Напомним здесь элементарную теорию векторов, причем будем считать известными определения вектора, геометрического равенства двух векторов и геометрической суммы совокупности векторов.

Два вектора назовем эквивалентными, если во всех построениях можно один вектор заменить другим. Эквивалентность двух векторов обозначим знаком $\equiv$.

Для нашей цели достаточно рассмотреть два типа векторов.

Два вектора $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ первого типа эквивалентны, если они геометрически равны, два вектора $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ второго типа эквивалентны, если они геометрически равны и, сверх того, лежат на одной и той же прямой.

Векторы первого типа назовем свободными, а второго приложенными или скользящими.

В силу данного определения свободный вектор можно перенести на любую параллельную прямую, сохраняя при этом его длину и направление; вектор приложенный можно при том же условии лишь переместить вдоль его прямой. В механике твердого тела свободными векторами будут — поступательная скорость v и момент G пары сил, а приложенными — угловая скорость Ω и сила R.

2. Сопоставим известные свойства свободных и приложенных векторов.

Совокупность свободных векторов эквивалентна их геометрической сумме. Совокупность двух свободных векторов эквивалентна нулю, если они одинаковой длины, параллельны и направлены в противоположные стороны.

Совокупность приложенных векторов $\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''$ с общим началом O эквивалентна приложенному вектору $\vec{R}$ с тем же началом. Вектор $\vec{R}$ — геометрическая сумма векторов $\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''$... Совокупность двух приложенных векторов эквивалентна нулю лишь в том случае, если они лежат на общем основании, равны по длине и направлены в противоположные стороны.

3. Совокупность двух приложенных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ образует пару, если фигура $ABCD$ — параллелограмм. Расстояние векторов —

плечо пары, а площадь $ABCD$ — момент пары. Момент пары изображается вектором, перпендикулярным к плоскости $ABCD$ и направленным в ту часть пространства, откуда точка, описывающая периметр $ABCD$ параллелограмма, кажется движущейся по часовой стрелке.

Напомним следующие свойства пар.

Две пары эквивалентны, если их моменты геометрически равны. Совокупность любого числа пар эквивалентна одной паре, момент которой — геометрическая сумма моментов первых пар. Совокупность двух пар эквивалентна нулю, если их моменты одинаковой длины, параллельны и противоположно направлены. Приложенный вектор не может быть эквивалентным паре.

Все эти свойства можно выразить теоремой:

Теорема. *Момент пары — свободный вектор.*

Согласно сказанному, мы можем пару заменить во всех построениях ее моментом. Иными словами, пара эквивалентна своему моменту.

Заметим, что, если плечо пары равно нулю, то, согласно сказанному в конце п. 2, пара эквивалентна нулю. Такую пару назовем нулевой.

4. Вся теория рассматриваемых здесь векторов строится на следующей аксиоме:

Основная аксиома. Если к данной системе (A) векторов присоединить нулевую пару, то полученная таким образом новая система (A') эквивалентна системе (A).

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с приложенными векторами $\vec{r}$ и моментами r пар. Поэтому термины „приложенный" и „свободный" нам не будут нужны.

Пусть $\vec{r}$ — вектор, лежащий на прямой a. На параллельной прямой a' построим нулевую пару, состоящую из двух векторов $\vec{r'}$ и $\vec{r''}$ с общим началом в точке O, причем первый из них $\vec{r'}$ геометрически равен данному вектору $\vec{r}$.

Согласно основной аксиомы

$$\vec{r} \equiv \vec{r} + \vec{r'} + \vec{r''}.$$

Но векторы $\vec{r}$ и $\vec{r''}$ образуют пару. Пусть r_1 — ее момент, за начало которого примем точку O. Предыдущее равенство мы можем поэтому переписать:

$$\vec{r} \equiv \vec{r'} + r_1.$$

Назовем момент r_1 с началом в точке O моментом вектора $\vec{r}$ относительно точки O. Этот момент r_1 перпендикулярен к плоскости (O, a), а длина его измеряется произведением длины вектора $\vec{r}$ на расстояние его от точки O. Назовем переносом вектора $\vec{r}$ в точку O построение геометрически равного вектора $\vec{r'}$ с началом в точке O.

Мы можем, следовательно сказать:

Вектор $\vec{r}$ можно перенести в любую точку O, если после переноса к нему присоединить его момент относительно точки O.

Замена вектора $\vec{r}$ совокупностью вектора $\vec{r'}$ и момента r_1 называется **приведением вектора** $\vec{r}$ **к точке** O.

Напомню основные свойства момента r_1.

a) Ортогональные проекции на произвольную прямую b моментов данного вектора $\vec{r}$ относительно различных точек O, O', O'' прямой b геометрически одинаковы.

Эта общая проекция моментов называется **моментом вектора** $\vec{r}$ **относительно прямой** b.

b) Момент суммы $\vec{R}$ векторов $\vec{r}$, $\vec{r'}$, $\vec{r''}$... относительно точки O есть сумма моментов слагающих векторов относительно точки O; момент суммы $\vec{R}$ относительно прямой b есть сумма моментов слагающих векторов относительно той же прямой b.

5. Винтом (r) называется совокупность вектора $\vec{r_0}$ и момента r_1, если они параллельны между собой. Отношение длины момента r_1 к длине вектора $\vec{r_0}$ называется **параметром** винта (r); будем параметр обозначать через p и считать p положительным, если векторы $\vec{r_0}$ и r_1 направлены в одну сторону, и отрицательным в противном случае. Прямую a, на которой лежит вектор $\vec{r_0}$, называют **осью** винта. Припишем ей направление вектора $\vec{r_0}$.

> **Примечание.** Всякий вектор $\vec{r}$ можно считать винтом с нулевым параметром; всякий момент r — винт бесконечно большого параметра, осью которого может служить любая прямая, параллельная моменту r.

Пусть дан винт

$$(r) \equiv \vec{r_0} + r_1,$$

прямая a — его ось. Приведем вектор $\vec{r_0}$ к произвольной точке O. Это даст: вектор $\vec{r'_0}$, геометрически равный $\vec{r_0}$, и момент r_2 вектора $\vec{r_0}$ относительно точки O. Поэтому

$$\vec{r_0} \equiv \vec{r'_0} + r_2$$

и, следовательно,

$$(r) \equiv \vec{r'_0} + r_1 + r_2.$$

Если наконец сложим моменты r_1 и r_2 в один, r', то получим окончательно:

$$(r) \equiv \vec{r'_0} + r'.$$

Данный винт (r) эквивалентен, следовательно, совокупности вектора $\vec{r'_0}$ с началом в точке O и момента r', вообще не параллельного вектору $\vec{r}_0'$. Такую совокупность вектора с моментом, не параллельным вектору, называют **бивектором**, а замену данного винта бивектором — **приведением винта к точке** O.

Обратно, по данному бивектору, состоящему из вектора $\vec{r}_0'$ и момента r', можно построить лишь один винт (r), приведением которого к точке O будет данный бивектор.

Пусть теперь даны винты (r_1), (r_2), ... (r_n). Приведем их к произвольной точке O. Это даст для каждого винта (r_i)

$$(r_i) = \vec{r}_{0i} + r_i',$$

т. е. определенный бивектор. Все векторы $\vec{r}_{0i}$ имеют общим началом точку O. Поэтому их можно сложить в один вектор $\vec{R}_0$ с тем же началом. Далее все моменты r_i' также можно сложить в один R'. В результате мы будем иметь один бивектор $(\vec{R}_0 + R')$, эквивалентный сумме всех данных винтов:

$$\vec{R}_0 + R' = \sum (r_i). \tag{a}$$

Винт (R), эквивалентный бивектору $(\vec{R}_0 + R')$, называется **суммой** данных винтов.

6. Пусть снова (r) — данный винт, O — произвольная точка и бивектор

$$(r) = \vec{r}_0' + r'$$

результат приведения винта (r) к точке O. Проведем через O произвольную прямую b и спроектируем на нее под прямым углом вектор $\vec{r}_0$ и момент r'. Проекцию вектора r_0' обозначим через b_0 и **будем считать вектором**, проекцию же момента r' обозначим через b_1 и **будем считать моментом**.

Винт (b), определяемый формулой:

$$(b) = \vec{b}_0 + b_1,$$

назовем **проекцией винта** (r) **на прямую** b. На основании сказанного в п. 4 под буквой (a), **винт** (b) **не зависит от точки приведения** O **и одинаков для всех точек прямой** b. Докажем теперь следующие теоремы:

Теорема. *Если винт (R) — сумма винтов (r_1), (r_2), ..., то проекции винта (R) на любую прямую b есть сумма проекций на ту же прямую всех слагаемых винтов.*

Для доказательства приведем винт (R) и каждый винт (r_i) к какой-либо точке O прямой b. Винт (R) дает бивектор $(\vec{A}_0 + A')$, а винт (r_i) — бивектор $(\vec{a}_0 + a_i')$. По определении винта (R)

$$\vec{A}_0 = \sum \vec{a}_{0i}, \quad A' = \sum a'_i. \qquad \text{(b)}$$

Пусть $\vec{B}_0 + B_1$ — проекция винта (R), $\vec{b}_{0i} + b_{1i}$ — проекция винта (r_i) на прямую b. По теореме о проекции геометрической суммы заключаем на основании (b):

$$\vec{B}_0 = \sum \vec{b}_{0i}; \quad B_1 = \sum b_{1i},$$

что доказывает теорему.

Теорема. *Винт (r) — сумма своих проекций на оси прямоугольной системы координат.*

Эта теорема становится очевидной, если винт (r) привести к началу координат.

Следствие. *Винты (r) и (r') с одинаковыми проекциями на осях прямоугольной системы координат одинаковы, т. е. у них общая ось и одинаковые векторы и моменты.*

Понятие о проекции винта на прямую при всей своей простоте является основным. Впервые оно было введено в науку А. Котельниковым (loc. cit. стр. 95); им же даны последние две теоремы (там же, стр. 96).

7. Назовем о с ь ю прямую, которой приписано определенное направление. Это направление может быть задано вектором единичной длины, лежащим на прямой.

С л о ж н ы м или к о м п л е к с н ы м углом между двумя осями a и b назовем фигуру, образованную осями a и b и их кратчайшим расстоянием AB, где A — точка оси a, B — точка оси b. Прямая, содержащая отрезок AB, — ось сложного угла, направленная от точки A к точке B. Сложный угол будем обозначать через (a, b), если в нем ось a считается первой его стороной, и через (b, a), если первой будет считаться ось b.

Сторону a угла (a, b) можно привести к совпадению со второй b вполне определенным винтовым движением, состоящим из поворота вокруг оси AB на угол φ_0 между направлениями осей и из поступательного перемещения вдоль вектора $\vec{AB}$ на его длину φ_1. В результате точка A совпадает с B, а ось a — с осью b.

Итак, сложным углом (a, b) вполне определяется винт (r)

$$(r) = \vec{\varphi}_0 + \varphi_1,$$

вектор $\vec{\varphi}_0$ которого ч и с л е н н о равен φ_0, а момент есть φ_1. Этот винт примем за меру угла (a, b), т. е. будем писать:

$$(a, b) = \vec{\varphi}_0 + \varphi_1.$$

Примечание. Параметр $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ числа (a, b) будем считать положительным, если винт (r) — п р а в ы й, т. е. если, смотря навстречу его поступательному перемещению φ_1, мы видим его вращение $\vec{\varphi}_0$ направленным в сторону движения часовой стрелки. Если же винт (r) окажется левым, то параметр его будем считать отрицательным.

Из данного определения, очевидно, следует:

$$(a, b) + (b, a) = 0.$$

Совокупность осей $a_1, a_2, a_3, \ldots$, пересекающих под прямыми углами ось b, называется **щеткой**, b — ось щетки, а оси $a_1, a_2, \ldots$ — **лучи** щетки.

Из данного выше определения угла (a, b), очевидно, следует теорема:

Теорема. *Углы между лучами щетки связаны условием:*

$$(a_1, a_2) + (a_2, a_3) + \ldots + (a_{n-1}, a_n) + (a_n, a_1) = 0.$$

Понятие о сложном или комплексном угле (a, b) впервые введено в науку А. Котельниковым (loc. cit., стр. 57), как и понятие о щетке (стр. 69). Кинематическое определение угла (a, b) и последняя теорема впервые даны здесь.

§ 2. Операция ω. Теория комплексных чисел.

8. **Операция** $\omega \vec{r}$. Так мы называем геометрическое построение, преобразующее вектор $\vec{r}$ в геометрически равный момент r.

Эта операция может быть сведена к следующим двум: 1) к вектору $\vec{r}$ на расстоянии, равном единице, присоединим вектор $\vec{r}'$, составляющий с $\vec{r}$ пару с моментом, длина которого равна длине вектора $\vec{r}$, а направление перпендикулярно к последнему; 2) полученную пару повернем вокруг ее плеча на прямой угол в такую сторону, чтобы ее момент после поворота стал геометрически равен вектору $\vec{r}$. Итак, можно написать:

$$\omega \vec{r} = r. \tag{a}$$

Мы можем сказать, что описанная здесь операция ω освобождает вектор от содержащей его прямой и делает его свободным вектором, сохраняя при этом его длину, направление и сторону.

Применим теперь операцию ω к моменту r. Так как пара моментов эквивалентна нулю, то уже первая составная часть операции ω даст нуль. Операция ω обладает, следовательно, замечательным свойством:

$$\omega r = 0. \tag{b}$$

Заменяя поэтому в (b) значение r из (a), получим:

$$\omega(\omega \vec{r}) = \omega^2(\vec{r}) = 0,$$

если через ω^2 обозначим повторное применение операции ω к вектору $\vec{r}$. Мы можем поэтому определить операцию ω символически равенством:

$$\omega^2 = 0.$$

Это обстоятельство ставит пред нами задачу: изучить числа вида

$$a+b\omega,$$

где a и b — вещественные числа, а число ω определяется равенством

$$\omega^2=0.$$

Этим мы сейчас и займемся, но уже теперь мы видим, что в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением одних векторов, рассматривая каждый момент, как результат операции ω над геометрически равным вектором. Иными словами, мы будем иметь дело лишь с векторами $\vec{r}$ и $\omega\vec{r}$. Поэтому мы будем теперь обозначать вектор одной буквой без стрелки над ней.

Примечание. Операция ω была введена Clifford'ом в 1873 г. в его мемуаре „Preliminary Sketch of Biquaternions" (Proceedings of London Math. Society, V. IV).

Предложенное здесь геометрическое истолкование было мною указано еще в 1896 г. (см. мой отзыв о диссертации А. Котельникова, стр. 3; ученые записки Казанского университета, 1896).

9. Перейдем к изучению комплексных чисел:

$$a=a_0+\omega a_1 \qquad (\omega^2=0). \tag{1}$$

Число a_0 — главная часть числа a и обозначается через $R\cdot a$; число a_1 — момент числа a и обозначается через $M\cdot a$; наконец отношение $\dfrac{a_1}{a_0}$ — параметр числа a и обозначается через $P\cdot a=p$.

Введя параметр, мы представим число a в виде:

$$a=a_0(1+\omega P\cdot a). \tag{1'}$$

Два комплексных числа

$$a=a_0+\omega a_1, \quad b=b_0+\omega b_1$$

равны, если порознь равны их главные части и их моменты.

Следствие I. *Комплексное число равно нулю лишь, если порознь равны нулю его главная часть и момент.*

Следствие II. *Равенство двух комплексных чисел a и b с различными параметрами возможно лишь, если каждое из них равно нулю.*

Действительно, если

$$a_0(1+\omega p)=b_0(1+\omega q),$$

то

$$a_0=b_0, \quad a_0p=b_0q.$$

Но p не равно q, следовательно a_0 и b_0 равны нулю.

10. Рассмотрим произвольную функцию $f(x, a, b,\dots)$ от комплексных чисел: $x, a, b,\dots$; условимся ее вычислять по формуле Taylo'ra:

$$f=f_0+\omega\left(x_1\frac{\partial f_0}{\partial x_0}+a_1\frac{\partial f_0}{\partial a_0}+b_1\frac{\partial f_0}{\partial b_0}+\dots\right), \tag{2}$$

в которых опущены все члены с коэффициентами $\omega^2, \omega^3, \ldots$; причем

$$f_0 = f(x_0, a_0, b_0, \ldots). \tag{3}$$

Полагая для краткости письма:

$$\delta f_0 = x_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial f_0}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial f_0}{\partial b_0} + \ldots, \tag{4}$$

получим для f выражение:

$$f = f_0 + \omega \delta f_0. \tag{5}$$

откуда следует:

$$P \cdot f = \frac{\delta f_0}{f_0} = \delta \ln f_0$$

на основании определения (4) операции δ. Поэтому можно также написать:

$$f = f_0 \cdot (1 + \omega \delta \ln f_0). \tag{6}$$

11. Примеры.

1. Для e^x получим:

$$e^x = e^{x_0} + \omega x_1 e^{x_0} = e^{x_0}(1 + \omega x_1),$$

откуда следует

$$e^{a\omega} = 1 + a\omega. \tag{7}$$

Сравнение этой формулы с (1′) показывает, что всякое комплексное число a имеет вид:

$$a = a_0 e^{\omega p}, \tag{8}$$

где p — параметр числа a. Это — основная формула. Из нее выводим:

$$P \cdot (abc \ldots) = P \cdot a + P \cdot b + P \cdot c + \ldots; \; P \cdot \frac{a}{b} = P \cdot a - P \cdot b. \tag{9}$$

Итак, параметр произведения равен сумме параметров множителей; параметр дроби равен разности параметров числителя и знаменателя. Заметим, что у числа ωa_1 параметр равен ∞; следовательно, к комплексным числам, не имеющим главных частей, предыдущие теоремы не применимы.

2. При x комплексном получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x = \sin x_0 + \omega x_1 \cos x_0; \; P \cdot \sin x = x_1 \operatorname{ctg} x_0, \\
&\cos x = \cos x_0 - \omega x_1 \sin x_0; \; P \cdot \cos x = -x_1 \operatorname{tg} x_0, \\
&\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 + \frac{\omega x_1}{\cos^2 x_0}; P \cdot \operatorname{tg} x = \frac{x_1}{\sin x_0 \cos x_0} = \frac{2x_1}{\sin 2x_0}, \\
&\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - \frac{\omega x_1}{\sin^2 x_0}; \; P \cdot \operatorname{ctg} x = -\frac{x_1}{\sin x_0 \cos x_0} = -\frac{2x_1}{\sin 2x_0}
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эти формулы необходимы для справок.

12. Свойства символа δf_0. Пусть f и φ — две функции от одних и тех же комплексных чисел: x, a, b, c; f_0 и φ_0 — их главные части. Из определения (4) символа δf_0 выводим прежде всего:

$$\delta f_0 - \delta \varphi_0 = \delta (f_0 - \varphi_0). \tag{11}$$

Из той же формулы (4) выводим:

$$\frac{\partial(\delta f_0)}{\partial x_0}=x_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}+a_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial a_0\partial x_0}+b_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial b_0\partial x_0}+\dots$$

$$\delta\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)=x_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}+a_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0\partial a_0}+b_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0\partial b_0}+\dots,$$

следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(\delta f_0)=\delta\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right). \tag{12}$$

т. е., операции δ и $\frac{\partial}{\partial x_0}$ коммутативны.

13. Вернемся к функциям f и φ. Согласно определению (5),

$$f-\varphi=f_0-\varphi_0+\omega\,\delta(f_0-\varphi_0),$$

откуда заключаем: если главные части функций f и φ тождественно равны, то тождественно одинаковыми будут функции f и φ.

Этим доказывается теорема:

Теорема. *В области комплексных чисел сохраняются все тождества обыкновенной алгебры и тригонометрии.*

Так например, тождества

$$e^{a+b}=e^a\cdot e^b,\quad e^{ia}=\cos a+i\sin a,$$

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ \sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b,$$

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b,$$

$$\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b}{1\mp\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

остаются справедливыми, если все входящие в них вещественные числа заменить комплексными.

14. Комплексное переменное число x называется бесконечно малым, если бесконечно малы его главная часть и момент. Число a — предел переменного x, если разность $(x-a)$ — бесконечно малое число. Это мы запишем так:

$$a=\lim x.$$

Теорема. *При бесконечно малом x, параметр которого стремится к конечному пределу l,*

$$\lim\frac{\sin x}{x}=1.$$

В самом деле,

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x_0+\omega x_1\cos x_0}{x_0+\omega x_1}=\frac{\dfrac{\sin x_0}{x_0}+\omega\cos x_0\dfrac{x_1}{x_0}}{1+\omega\dfrac{x_1}{x_0}}.$$

Положим

$$\lim x_0 = 0, \quad \lim \frac{x_1}{x_0} = l.$$

Предыдущая формула при переходе к пределу даст

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \frac{1+\omega l}{1+\omega l} = 1.$$

15. Далее при переменном

$$x = x_0 + \omega x_1.$$

формула (5) дает:

$$df = df_0 + \omega \left\{ \frac{\partial (\delta f_0)}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial (\delta f_0)}{\partial x_1} dx_1 \right\}.$$

Но по формулам (4) и (12)

$$\frac{\partial (\delta f_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f_0}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial (\delta f_0)}{\partial x_0} = \delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right),$$

а кроме того

$$df_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} dx_0,$$

поэтому выражение df будет:

$$df = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} (dx_0 + \omega dx_1) + \omega dx_0 \delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right).$$

Но так как $\omega^2 = 0$, то

$$\omega dx_0 \delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) = \omega \delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) (dx_0 + \omega dx_1),$$

поэтому

$$df = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \omega \delta \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) (dx_0 + \omega dx_1) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \omega \delta \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right) dx.$$

Откуда заключаем:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} + \omega \delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right). \tag{13}$$

По этой формуле вычисляется производная $f(x)$ по x. Пусть теперь φ — произвольная функция. Тогда

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \delta \varphi_0.$$

Сравнение с (13) дает:

$$\frac{df}{dx} - \varphi = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \varphi_0 + \omega \delta \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} - \varphi_0 \right).$$

Отсюда заключаем:

Если $\frac{\partial f_0}{\partial x_0}$ и φ_0 тождественно равны, то производная $\frac{df}{dx}$ тождественно равна функции φ. Это доказывает теорему:

Теорема. *Все теоремы дифференциального исчисления сохраняются в области комплексных чисел.*

16. Примеры. Формулы:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \tag{14}$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d\operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

остаются справедливыми, если мы в них будем x считать комплексным числом.

17. Пусть f — данная функция от комплексного числа x и постоянных $a, b, c, \ldots$, тоже комплексных. Функцию F от тех же чисел, удовлетворяющую тождественно уравнению

$$dF = f dx,$$

назовем интегралом от $f(x)\,dx$ и обозначим так:

$$F = \int f dx = F_0 + \omega\delta F_0. \tag{15}$$

Из уравнения, определяющего dF, следует:

$$F_0 = \int f_0 dx_0. \tag{16}$$

Если теперь φ — функция от тех же чисел: $x, a, b, c, \ldots$, то снова

$$F - \varphi = F_0 - \varphi_0 + \delta(F_0 - \varphi_0).$$

Отсюда снова придем к заключению, что если функции φ_0 и F_0 одинаковы, то и функции F, φ тождественно одинаковы. Этим доказывается теорема:

Теорема. *Все формулы интегрального исчисления сохраняются в области комплексных чисел.*

18. Примеры. Формулы:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad \int e^{x+a} dx = e^{x+a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + C, \quad \int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C,$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C, \ldots$$

остаются справедливыми, если входящие в них числа x, a, C заменим комплексными числами.

19. Отметим в заключение некоторые особенности исчисления комплексных чисел.

a) Произведение комплексных чисел равно нулю не только при равенстве нулю одного из множителей, но и если у двух множителей главные части нули. Это значит, что если дано:

$$ab = 0,$$

то заключение, что a или b непременно равны нулю, было бы неверно, так как возможно, что

$$a = \omega a_1, \quad b = \omega b_1.$$

b) Деление на $a\omega$ при любом a исключается.

Примечание. Изложенная теория комплексных чисел появляется здесь впервые. В диссертации В. Котельникова (loc. cit., стр. 33—38) эта теория построена на иных основаниях, причем теорема п. 12 дана без доказательства и в неполном виде, теоремы же пп. 15 и 17 отсутствуют. Новыми я считаю следующие результаты: а) свойства введенного мною символа δf_0; б) упомянутые уже теоремы пп. 15 и 17 и в) формулы — (8) п. 11, теорему п. 14 и формулу (13) и (15) п. 15.

§ 3. Теория винтов.

20. Рассмотрим винт

$$(r) \equiv r_0 + \omega r_1,$$

состоящий из вектора r_0 и момента ωr_1, параллельного вектору r_0. Число $\frac{r_1}{r_0}$ — параметр p винта (r), а прямая a, отрезком которой является вектор r_0, — ось винта. Прямой a припишем направление вектора r_0.

Назовем тензором винта (r) комплексное число r, определяемое формулой:

$$r = r_0 + \omega r_1 = r_0 e^{\omega p}. \tag{17}$$

Частные случаи: а) при $p = 0$ винт (r) обращается в вектор r_0, при $p = \infty$ винт обращается в момент ωr_1, ось винта — любая прямая, параллельная моменту ωr_1.

21. Для определенности будем предполагать, что началом винтового момента ωr_1 служит начало O винтового вектора r_0. Точку O назовем началом винта (r).

Основываясь на свойствах вектора и момента, заключаем:

Винт (r) можно перенести в любую точку его оси; иными словами, винты с общей осью, отличающиеся друг от друга лишь положением своих начал, эквивалентны. Как хорошо известно, у двух эквивалентных винтов — общая ось, и как векторы, так и моменты одинаковы.

Мы можем, следовательно, сказать, что у таких винтов и тензоры одинаковы.

22. Проекция винта на ось. Пусть (r) — винт, определяемый формулой

$$(r) \equiv r_0 + \omega r_1;$$

b — его ось, a — произвольная ось, AB — ось комплексного угла (a, b). Определим проекцию винта (r) на ось a.

Для этого, согласно определению (§ 2, п. 6), приведем винт к точке O оси a и полученный бивектор

$$r'_0 + \omega r'_1$$

спроектируем на a. Это даст винт:

$$(a) \equiv a_0 + \omega a_1. \tag{a}$$

Вектор r'_0, как мы знаем, геометрически равен вектору r_0 винта, поэтому, если φ_0 — угол между направлениями осей a, b, то

$$a_0 = r_0 \cos \varphi_0. \tag{b}$$

Далее заметим, что момент $\omega r'_1$, полученного бивектора есть геометрическая сумма двух: момента ωr_1 винта (r) и момента $\omega r''$ вектора r_0 относительно точки O. Поэтому

$$a_1 = \text{проекции } r_1 + \text{проекция } r''. \tag{c}$$

Но момент ωr_1 параллелен оси винта, поэтому его проекция равна $r_1 \cos \varphi_0$. Что же касается момента $\omega r''$, то если φ_1 — длина оси AB угла (a, b),

$$r'' = r_0 \varphi_1$$

и, кроме того, момент $\omega r''$ перпендикулярен к плоскости (AB, r_0) и поэтому с осью a образует угол $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, следовательно его проекция на a равна $-r_0 \varphi_1 \sin \varphi_0$, т. е.

$$-r'' \sin \varphi_0 = -r_0 \varphi_1 \sin \varphi_0,$$

следовательно, формула (c) дает:

$$a_1 = r_1 \cos \varphi_0 - r_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 = r_0 (p \cos \varphi_0 - \varphi_1 \sin \varphi_0),$$

если введем параметр p винта. На основании этой формулы и (a) получим для тензора a винта (a):

$$a = r_0 [\cos \varphi_0 + \omega (p \cos \varphi_0 - \varphi_1 \sin \varphi_0)]. \tag{d}$$

Но, пользуясь тем, что $\omega^2 = 0$, находим тождество:

$$\cos \varphi_0 + \omega (p \cos \varphi_0 - \varphi_1 \sin \varphi_0) = (\cos \varphi_0 - \omega \varphi_1 \sin \varphi_0)(1 + \omega p) =$$

$$= e^{\omega p} \cos (\varphi_0 + \omega \varphi_1)$$

на основании формул (8) и (10) § 2 (п. 11). Положим:

$$(a, b) = \varphi = \varphi_0 + \omega \varphi_1.$$

Тогда формула (d) дает в силу предыдущего тождества:

$$a=r_0 e^{\omega p}\cos\varphi.$$

Но тензор r винта (r) равен

$$r=r_0 e^{\omega p},$$

поэтому окончательно

$$a=r\cos\varphi. \tag{18}$$

Мы пришли к основной теореме теории винтов:

Теорема. *Тензор проекции винта (r) на ось a равен тензору винта (r), умноженному на cosinus комплексного угла между осью a и осью винта (r).*

Следствие I. *Проекция винта (r) на ось a равна нулю лишь, если оси винта и a пересекаются под прямым углом.*

В самом деле, для того, чтобы тензор a проекции данного винта (r) на ось a равнялся нулю, необходимо, чтобы

$$\cos\varphi=\cos\varphi_0-\omega\varphi_1\sin\varphi_0=0.$$

А это равенство разлагается на два:

$$\cos\varphi_0=0,\ \varphi_1\sin\varphi_0=0,$$

откуда следует:

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2},\ \varphi_1=0.$$

Следствие II. *Если винт (r) — сумма винтов (r_1), $(r_2)\ldots(r_n)$, то тензор проекции винта (r) на ось a равен алгебраической сумме тензоров проекций на ту же ось слагаемых винтов.*

Здесь предполагается, что положительным или отрицательным будет считаться тензор проекции, если ее вектор имеет одно направление с осью проекции или прямо противоположное.

Мы можем, следовательно, сказать: если

$$(r)=\sum_{i=1}^{i=n}(r_i),$$

то

$$r\cos\varphi=\sum r_i\cos\varphi_i,$$

где φ_i — комплексный угол между осью проекций и осью винта (r_i).

Это предложение прямо вытекает из теоремы п. 6, § 1.

Доказанная здесь теорема впервые дана А. Котельниковым (loc. cit., стр. 95).

23. Произведением винта (r) на комплексное число a назовем винт (t), у которого общая ось с (r), а тензор равен ar.

Теорема. *Если каждый из винтов (r_1), (r_2), ..., (r_n), умножим на одно и то же число a, то сумма (r) этих винтов умножится на то же число a.*

В самом деле, пусть

$$(r) \equiv \sum (r_i), \quad R \equiv \sum (ar_i).$$

Через точку O оси z винта (r) проведем оси Ox, Oy, перпендикулярные друг к другу и к оси z винта r. Спроектируем на эти оси все винты (r_i). Это дает:

$$0 = \sum r_i \cos(a_i, x), \quad 0 = \sum r_i \cos(a_i, y), \quad r = \sum r_i \cos(a_i, z),$$

где a_i — ось винта (r_i). Так как умножение на комплексное число a винта (r_i) оси последнего не изменяет, то, проектируя на те же оси винты (ar_i), получим:

$$\sum ar_i \cos(a_i, x) = R \cos(l, x); \quad \sum ar_i \cos(a_i, y) = R \cos(l, y);$$
$$\sum ar_i \cos(a_i, z) = R \cos(l, z),$$

где l — ось винта (R). Сравнение этих равенств с предыдущими влечет за собой:

$$R \cos(l, x) = 0; \; R \cos(l, y) = 0; \; R \cos(l, z) = ar.$$

Эти формулы доказывают, что у винтов (R) и (ar) — одинаковые проекции на прямоугольные оси Ox, Oy и Oz. Следовательно, винты эти одинаковы на основании п. 6, § 1 (следствие).

Отсюда выводим:

Если параметр каждого винта (r_i) увеличить на одно и то же число q, то на то же число q увеличится параметр суммы их (r).

Для доказательства достаточно умножить каждый винт (r_i) на $e^{\omega q}$ и применить только-что доказанную теорему.

Последняя теорема была установлена Ball'ем в The Theory of screws (Dublin, 1876, ch. IV).

24. Дадим здесь лишь одно приложение.

Даны два винта (a) и (b), оси которых l и m пересекаются под прямым углом в точке A. Требуется найти их сумму — винт (c).

Пусть

$$a = a_0 e^{\omega p_1}; \; b = b_0 e^{\omega p_2}; \; c = c_0 e^{\omega p} \tag{a}$$

— тензоры винтов, n — ось винта (c), причем, согласно заданию

$$(l, m) = \frac{\pi}{2}. \tag{b}$$

За ось угла (a, b) примем перпендикуляр d к плоскости (a, b) в точке A и направим d в ту часть пространства, откуда видно, что вращение вокруг оси d, приводящее к совпадению ось a с осью b, происходит в сторону движения часовой стрелки.

Спроектируем на d все три винта. Это даст

$$c \cos(d, n) = a \cos(d, l) + b \cos(d, m) = 0,$$

так как по построению оси l и m встречает ось d под прямыми углами. Но (c) — винт, следовательно,

$$\cos(d, n) = 0,$$

т. е. винт (c) встречает ось d тоже под прямым углом в точке, скажем, B. Спроектируем все три винта сначала на ось l винта (a), а затем на ось m винта (b). Это дает:

$$c \cos(l, n) = a \cos(l, l) + b \cos(l, m),$$
$$c \cos(m, n) = a \cos(m, l) + b \cos(m, m).$$

Но

$$\cos(l, l) = \cos(m, m) = 1; \ \cos(l, m) = \cos(m, l) = 0$$

по заданию, поэтому полученные уравнения будут:

$$c \cos(l, n) = a; \ c \cos(m, n) = b. \qquad \text{(c)}$$

Но оси l, m принадлежат, как мы только что видели, щетке с осью d, поэтому

$$(l, m) + (m, n) + (n, l) = 0$$

по свойству лучей щетки (§ 1, п. 7). Отсюда выводим:

$$(m, n) = (l, n) - (l, m) = (l, n) - \frac{\pi}{2}; \ \cos(m, n) = \sin(l, n).$$

Следовательно, полагая:

$$(l, n) = \theta = \theta_0 + \omega\theta_1, \ (\theta_1 = AB), \qquad \text{(d)}$$

получим, вместо уравнений (c):

$$a = c \cos\theta; \ b = c \sin\theta. \qquad (18)$$

Из этих формул выводим:

$$c^2 = a^2 + b^2; \ \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}; \ \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{b_0}{a_0}. \qquad (18')$$

По этим формулам определяется винт (c) и его ось n.

Возьмем параметры обеих частей у каждой формулы (18). На основании правил, выраженных формулами (9) п. 11, § 2, и (10) того же п. 11, получим, пользуясь определениями (a) настоящего пункта:

$$p_1 = p - \theta_1 \operatorname{tg}\theta_0; \ p_2 = p + \frac{\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_0},$$

откуда выводим:

$$p = p_1 \cos^2\theta_0 + p_2 \sin^2\theta_0; \ \theta_1 = \frac{p_2 - p_1}{2} \sin 2\theta_0 = AB. \qquad (19)$$

По этим формулам определим параметр p и точку B пересечения оси n винтом (c), предварительно, разумеется, вычислив угол θ_0 по третьей из формул (18′). Примем оси l, m и d за оси координат x, y, z соответственно с началом в точке A. Если у данных винтов будем менять только их главные части a_0, b_0, оставляя неизменными их параметры и оси, то каждому значению дроби $\frac{b_0}{a_0}$ будет отвечать определенный угол θ, т. е. определенный винт (c). Мы получим, следовательно, ∞ винтов (c), оси которых встречают под прямыми углами ось z и образуют поверхность цилиндроида. Уравнение последнего найдем по второй из формул (19) подстановкой

$$\theta_1 = z, \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{y}{x},$$

что даст

$$z(x^2 + y^2) = (p_2 - p_1)\, xy. \tag{20}$$

Решим теперь обратную задачу: дана сумма двух винтов — винт (c) и одно слагаемое — винт (a), причем

$$a = c \cos(l, n) = c \cos\theta. \tag{e}$$

Требуется определить другое слагаемое — винт (b). Здесь смысл обозначений — прежний. Обозначим через d — ось угла (l, n) между осями винтов (a) и (c). Спроектируем все винты на d. Это даст:

$$c\cos(d, n) = a\cos(d, l) + b\cos(d, m),$$

но, по определению оси d,

$$\cos(d, n) = \cos(d, l) = 0,$$

следовательно, равняется нулю произведение $b\cos(d, m)$; но (b) — винт, поэтому

$$\cos(d, m) = 0,$$

т. е. ось m винта (b) встречает под прямым углом ось d.

Спроектируем теперь все винты на ось l винта (a). Это дает:

$$c\cos(l, n) = a\cos(l, l) + b\cos(l, m).$$

Но

$$\cos(l, l) = 1,$$

поэтому, так как по заданию (e)

$$a = c\cos(l, n),$$

то полученное уравнение дает:

$$0 = b\cos(l, m),$$

откуда заключаем, что $\cos(l, m)$ равен нулю, т. е. что ось m винта (b) встречает под прямым углом ось l винта (a). Отсюда, на основании только-что доказанного, заключаем:

Ось m винта (b) проходит через точку A пересечения осей l и d и перпендикулярна к плоскости (l, d).

Отсюда, как и раньше, найдем:

$$b = c\cos(m, n) = c\sin\theta.$$

Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Если винт (c) — сумма двух винтов (a) и (b), оси которых пересекаются под прямым углом, то каждое слагаемое есть проекция на его ось винта (c), и обратно, если винт (c) — сумма двух винтов (a) и (b), причем первый есть проекция на его ось винта (c), то и второй винт (b) — тоже проекция на его ось винта (c), причем оси слагаемых винтов пересекаются под прямым углом.*

Глава II.

§ 4. Прямоугольные координаты винта и оси.

1. Отнесем пространство к ортогональному триедру $O(x, y, z)$ осей координат, причем ось Oz направим в ту часть пространства, откуда вращение вокруг Oz, приводящее ось Ox к совпадению с осью Oy, кажется направленным в сторону движения часовой стрелки.

Пусть (R) — винт с осью l и с тензором

$$\left.\begin{aligned} R &= R_0 e^{\omega p} \\ x = \cos(l, x);\ & y = \cos(l, y);\ z = \cos(l, z) \\ X = X_0 + \omega X_1;\ & Y = Y_0 + \omega Y_1;\ Z = Z_0 + \omega Z_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

— тензоры проекций (X), (Y), (Z) винта (R) на оси координат. Числа X, Y, Z назовем прямоугольными координатами винта (R), причем вещественные числа X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1 — его Плюккеровы координаты, а именно: X_0, Y_0, Z_0 — проекции на осях координат вектора R_0, X_1, Y_1, Z_1 — проекции на тех же осях момента того бивектора, который получится от приведения винта (R) к началу координат. На основании теоремы (гл. 1, § 3, п. 22) между тензорами винта и его проекцией на ось имеем соотношение

$$X = Rx;\ Y = Ry;\ Z = Rz, \tag{2}$$

так как

$$(x, y) = (y, z) = (z, x) = \frac{\pi}{2}.$$

Но

$$(R) = (X) + (Y) + (Z)$$

в силу теоремы п. 6, § 1, гл. I. Спроектируем винты (X), (Y), (Z) на ось l. Это дает:

$$R = Xx + Yy + Zz$$

или в силу формул (2)

$$R = R(x^2 + y^2 + z^2),$$

откуда следует основное соотношение:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 = \sum x^2. \tag{3}$$

Возведем каждую из формул (2) в квадрат и сложим произведения. Пользуясь равенством (3), получим:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{4}$$

что на основании формул (1) примет вид:

$$R_0^2 e^{2\omega p} = (X_0 + \omega X_1)^2 + (Y_0 + \omega Y_1)^2 + (Z_0 + \omega Z_1)^2.$$

Раскрывая обе части и приравнивая порознь их главные части и моменты, найдем:

$$R_0 = +\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}; \quad p \cdot R_0 = X_0 X + Y_0 Y + Z_0 Z. \tag{5}$$

Из этих формул вычислим длину винтового вектора R_0 и параметр p винта (R).

Обратимся к оси l винта (R). За ее координаты примем числа x, y, z, определенные равенствами (1) и связанные соотношением (3).

По данным X, Y, Z мы определим координаты оси l помощью формул:

$$x = \frac{X}{R}; \quad y = \frac{Y}{R}; \quad z = \frac{Z}{R}, \tag{6}$$

где R определяется по второй из формул (4), где корень квадратный берется со знаком $+$.

2. Положим:

$$x = x_0 + \omega x_1; \quad y = y_0 + \omega y_1; \quad z = z_0 + \omega z_1. \tag{7}$$

На основании (3) получаем:

$$(x_0 + \omega x_1)^2 + (y_0 + \omega y_1)^2 + (z_0 + \omega z_1)^2 = 1,$$

откуда следует:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1; \quad x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1 = 0. \tag{8}$$

Числа x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 — прямоугольные Плюккеровы координаты оси l, а именно: x_0, y_0, z_0 — проекции на оси координат единичного вектора, лежащего на оси l и направленного в одну с ней сторону; числа x_1, y_1, z_1 — проекции на оси момента этого вектора относительно начала координат. Заметим, что этот момент перпендикулярен к вектору, что и выражается вторым из ур-ний (8).

Уравнения оси l в декартовых координатах (α, β, γ) ее точек будут:

$$x_1 = \beta z_0 - \gamma y_0; \quad y_1 = \gamma x_0 - \alpha z_0; \quad z_1 = \alpha y_0 - \beta x_0. \tag{9}$$

Обозначим через δ расстояние оси l от начала координат. Момент (x_1, y_1, z_1) единичного вектора оси l относительно начала координат численно равен δ; поэтому

$$\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \tag{10}$$

3. Пусть (R) и (R') — два винта с проекциями X, Y, Z и X', Y', Z' соответственно, $l(x, y, z)$ и $l'(x', y', z')$ — их оси,

Так как

$$(R') \equiv (X') + (Y') + (Z'),$$

то, проектируя на ось l винта (R) винты (X'), (Y'), (Z') и (R'), получим:

$$R' \cos(l, l') = X'x + Y'y + Z'z.$$

Умножим обе части этого уравнения на R. Тогда на основании (2) найдем:

$$RR' \cos(l, l') = XX' + YY' + ZZ'. \qquad (11)$$

Левая часть этого равенства — скалярное произведение винтов (R) и (R'); обозначим его через $S(R, R')$. Итак

$$S(R, R') = RR' \cos(l, l') = R_0 R_0' e^{\omega(p+p')} \cos(l, l'), \qquad (12)$$

где $R_0' e^{\omega p'}$ — тензор винта (R'). Свойства числа S следующие:

1) Оно обращается в нуль, если оси множителей пересекаются под прямым углом.

2) От порядка множителей оно не зависит:

$$S(R, R') = S(R', R).$$

3) Так как выражение (11) скалярного произведения линейно относительно X, Y, Z, с одной стороны, и относительно X', Y', Z', с другой, то

$$S(R+P, R') = S(R, R') + S(P, R).$$

Положим

$$S = S_0 + \omega S_1; \ (l, l') = \varphi.$$

Формула (12) дает:

$$S_0 = R_0 R_0' \cos\varphi_0; \ S_1 = R_0 R_0' [\cos\varphi_0 \, (p+p') - \varphi_1 \sin\varphi_0]. \qquad (13)$$

Заметим, что выражение в прямых скобках есть возможный коэффициент винтов (R) и (R') по определению Ball'я (loc. cit. стр. 13).

Винтовым произведением $V(R, R')$ винтов (R) и (R') назовем винт (V) координаты X_1, Y_1, Z_1 которого определяются формулами:

$$X_1 = YZ' - ZY'; \ Y_1 = ZX' - XZ'; \ Z_1 = XY' - YX'. \qquad (14)$$

Пусть l_1 — ось винта (V). Заметим, прежде всего, что у координат винта (V), знаки изменяются на противоположные, если порядок множителей изменяется.

Поэтому для тензоров $V(R, R')$ и $V(R', R)$ получим:

$$V(R, R') = -V(R', R).$$

Оси этих винтов совпадают по положению, но направления их противоположны.

Далее заметим, что в правые части формул (14) координаты каждого множителя входят линейно, поэтому

$$V(P+Q, R) = V(P, R) + V(Q, R).$$

Далее из (14) выводим:

$$\sum XX_1 = \sum X'X_1 = 0,$$

откуда включаем: о с ь l_1 в и н т о в о г о п р о и з в е д е н и я (V) в и н т о в (R) и (R') с о в п а д а е т с о с ь ю у г л а (l, l') между осями множителей.

Нетрудно проверить, что ось l_1 винта (V) направлена от оси первого множителя к оси второго.

Возвысим формулы (14) в квадрат и сложим. Это даст

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = (YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2$$

или по известному тождеству Euler'a

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - \\ -(XX' + YY' + ZZ')^2,$$

что на основании формул (4) и (11) даст для тензора винта (V):

$$V^2 = R^2R'^2 - (RR' \cos\varphi)^2$$

или после приведения и извлечения квадратного корня со знаком $+$:

$$V = RR' \sin\varphi. \tag{15}$$

4. Применим сказанное к единичным векторам осей $l(x, y, z)$ и $l'(x', y', z')$. Полагая в формуле (11) R и R' равными единице и обозначая вновь через φ угол (l, l'), получим:

$$\cos\varphi = xx' + yy' + zz' = \sum xx'. \tag{16}$$

По этой формуле определяется угол между осями l и l', т. е. угол φ_0 между их направлениями, и их кратчайшее расстояние φ_1.

Следствие I. *Оси l и l' пересекаются под прямым углом, если*

$$\sum xx' = 0. \tag{17}$$

Следствие II. *Если a, b, c — координаты оси щетки, причем*

$$\sum a^2 = 1,$$

то лучи (x, y, z) щетки удовлетворяют своими координатами уравнению:

$$\sum ax = 0. \tag{18}$$

Это — уравнение щетки.

Следствие III. *Если оси l, l' пересекаются, но не под прямым углом, то*

$$\sum xx' = \text{вещественному числу.} \tag{19}$$

Следствие IV. *Если оси l, l' параллельны, то*

$$\sum xx' = \pm 1;\ x'_0 = \pm x_0;\ y'_0 = \pm y_0;\ z'_0 = \pm z_0.$$

Кратчайшее расстояние δ определим следующим образом. Пусть $A(\alpha, \beta, \gamma)$ и $A'(\alpha', \beta', \gamma')$ — основания перпендикуляров, опущенных из начала O координат на параллельные оси l и l' соответственно. Очевидно,

$$\delta = AA',$$

откуда

$$\delta^2 = \sum(\alpha' - \alpha)^2. \tag{a}$$

Заметим, прежде всего, что углы OAl и $OA'l'$ — прямые, поэтому

$$\sum \alpha\, x_0 = 0; \quad \sum \alpha'\, x'_0 = \sum \alpha'\, x_0 = 0. \tag{b}$$

Далее, так как A — точка прямой l, A' — точка прямой l', то в силу (9)

$$x_1 = \beta z_0 - \gamma y_0;\ y_1 = \gamma x_0 - \alpha z_0;\ z_1 = \alpha y_0 - \beta x_0$$
$$x'_1 = \beta'(\pm z_0) - \gamma'(\pm y_0);\ y'_1 = \gamma'(\pm x_0) - \alpha(\pm z_0);\ z'_1 = \alpha'(\pm y_0) - \beta'(\pm x_0),$$

откуда следует:

$$x'_1 \mp x_1 = (\beta' - \beta)z_0 - (\gamma' - \gamma)y_0;\ y'_1 \mp y_1 = (\gamma' - \gamma)x_0 - (\alpha' - \alpha)z_0;$$
$$z'_1 \mp z_1 = (\alpha' - \alpha)y_0 - (\beta' - \beta)x_0.$$

Следовательно

$$\sum (x'_1 \mp x_1)^2 = \sum[(\beta' - \beta)z_0 - (\gamma' - \gamma)y_0]^2$$

или по тождеству Euler'а

$$\sum(x'_1 \mp x_1)^2 = \sum x_0^2 \cdot \sum(\alpha' - \alpha)^2 - \left(\sum x_0(\alpha' - \alpha)\right)^2.$$

Но сумма $\sum x_0^2 = 1$, поэтому на основании (a) и (b) получим:

$$\delta^2 = \sum(x'_1 \mp x_1)^2. \tag{20}$$

Верхний знак относится к тому случаю, когда оси l и l' направлены в одну сторону, нижний — применяется тогда, когда направления осей прямо противоположны.

5. К тем же единичным векторам осей l, l', как угодно лежащим в пространстве, применим формулы (14) и (15). Пусть x_1, y_1, z_1 — координаты оси комплексного угла (l, l')

$$(l, l') = \varphi,$$

причем ось эта н а п р а в л е н а о т о с и l к о с и l'. Формулы (14) и (15) дают:

$$\sin\varphi \cdot x_1 = yz' - zy';\ \sin\varphi \cdot y_1 = zx' - xz';\ \sin\varphi \cdot z_1 = xy' - yx', \tag{19}$$

так как тензор винта (V) равен $\sin\varphi$, и следовательно его проекциями на осях координат будут винты с тензорами $x_1 \sin\varphi$, $y_1 \sin\varphi$, $z_1 \sin\varphi$ соответственно.

6. **Сферические координаты винта и оси.** Пусть снова дан (R) и (X), (Y), (Z) — его проекции на оси координат. По предыдущему

$$(R) \equiv (X) + (Y) + (Z). \tag{a}$$

Построим винт

$$(P) \equiv (X) + (Y), \tag{b}$$

ось которого образует угол φ с осью X. Так как оси винтов (X), (Y) пересекаются под прямым углом, то по теореме главы I, § 3, п. 24 тензоры винтов (X) и (Y) связаны с тензором винта (P) соотношениями

$$X = P\cos\varphi; \quad Y = P\sin\varphi. \tag{c}$$

Но из (a) и (b) следует:

$$(R) \equiv (Z) + (P),$$

причем, если θ — угол между осью винта (Z) и осью винта (R), то

$$Z = R\cos\theta. \tag{d}$$

Поэтому на основании той же теоремы

$$P = R\sin\theta,$$

и, кроме того, ось винта (P) и ось угла (z, R) пересекают ось z под прямым углом в одной и той же точке. Пользуясь этой формулой, получим на основании (c) и (d):

$$X = R\sin\theta\cos\varphi; \quad Y = R\sin\theta\sin\varphi; \quad Z = R\cos\theta. \tag{21}$$

Числа R, θ и φ — сферические координаты винта (R). Для координат x, y, z оси l получим:

$$x = \sin\theta\cos\varphi; \quad y = \sin\theta\sin\varphi; \quad z = \cos\theta. \tag{21'}$$

7. **Преобразование прямоугольных координат.** На ряду с координатным триедром $O(x, y, z)$ введем другой $O'(x', y', z')$. Пусть положение осей последнего относительно осей первого дается таблицей.

	x'	y'	z'
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

(A)

где a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 — координаты осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ соответственно относительно осей Ox, Oy и Oz. На основании предыдущего и предполагая, что триедр $O'(x', y', z')$ тоже прямоугольный, получим:

$$\left.\begin{array}{c} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1;\ \ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1;\ \ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0;\ \ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0; \\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Замечая, что относительно осей нового триедра координатами осей прежнего будут: a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 соответственно, получим соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} \sum_i a_i^2=1;\ \ \sum_i b_i^2=1;\ \ \sum_i c_i^2=1 \\ \sum b_ic_i=0;\ \ \sum c_ia_i=0;\ \ \sum a_ib_i=0. \end{array}\right\} \qquad (22')$$

Пусть теперь (X), (Y), (Z) и (X'), (Y'), (Z') — проекции винта (R) на оси обоих триедров, т. е.,

$$(R)\equiv(X)+(Y)+(Z)\equiv(X')+(Y')+(Z').$$

Спроектируем винт (R) на ось x. Это даст, по предположению, винт (X). С другой стороны, тот же винт (X) мы должны получить, проектируя на ось винты (X'), (Y') и (Z'). Так как первый из них лежит на оси x', второй на оси y', а третий на оси z', то по теореме о проекции суммы и слагающих винтов на ось x получим первую из формул:

$$\left.\begin{array}{l} X=a_1X'+a_2Y'+a_3Z' \\ Y=b_1X'+b_2Y'+b_3Z' \\ Z=c_1X'+c_2Y'+c_3Z' \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Остальные две получаются проектированием винта (R) на оси y и z. Таким же образом, проектируя винт (R) на оси x', y', z', получим:

$$\left.\begin{array}{l} X'=a_1X+b_1Y+c_1Z \\ Y'=a_2X+b_2Y+c_2Z \\ Z'=a_3X+b_3Y+c_3Z \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Пусть

$$D=\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \qquad (25)$$

Решая уравнения (23) относительно X', получим:

$$DX'=X(b_2c_3-c_2b_3)+Y(c_2b_3-a_2c_3)+Z(a_2b_3-b_2a_3).$$

Сравнение этой формулы с первой из (24) дает:

$$a_1D=b_2c_3-c_2b_3;\ \ b_1D=c_2a_3-a_2c_3;\ \ c_1D=a_2b_3-a_3b_2, \qquad (a)$$

откуда выводим:

$$D^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2)=\sum(b_2c_3-c_2b_3)^2=(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)-$$
$$-(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)^2$$

по тождеству Euler'a. Это равенство на основании формул (22') дает:

$$D^2=1;\ D=\pm 1.$$

Итак определитель D имеет независимое от положения триедра $O'(x, y, z)$ значение. На этом основании для вычисления знака у D предположим, что триедры конгруэнтны, и совместим второй с первым. Тогда значения чисел: $a_1, a_2, \ldots c_3$ будут:

$$a_1=b_2=c_3=1;\ a_2=a_3=b_1=b_3=c_1=c_2=0.$$

Но в таком случае

$$D=+1.$$

Следовательно и при любом положении триедра $O(x', y', z')$, если только он конгруэнтен триедру $O(x, y, z)$, определитель D равен $+1$: обратно, если определитель D равен положительной единице, то триедры конгруэнтны.

Этим предложением мы будем часто пользоваться.

Заметим, что формулы (а) дают:

$$a_1=b_2c_3-c_2b_3;\ b_1=c_2a_3-a_2c_3;\ c_1=a_2b_3-b_2a_3. \tag{26}$$

Таким же способом мы могли бы найти выражения остальных элементов таблицы (А). Но эти выражения нам не понадобятся.

Формулы перехода (23) и (24) от одного координатного триедра к другому, разумеется, применимы и к координатам оси.

> *Примечание.* Все формулы этого параграфа имеются в диссертации А. Котельникова. Здесь они выведены вновь для удобства читателя. Связь определителя D с координатными триедрами, давно установленная в аналитической геометрии точки, по-видимому, здесь впервые указана для комплексных координат винта и оси.

§ 5. Группа винтов 2-го порядка.

8. Пусть (R_1) и (R_2) — два винта, оси которых $l_1(x_1, y_1, z_1)$ и $l_2(x_2, y_2, z_2)$, а тензоры —

$$R_1=e^{\omega a};\ R_2=e^{\omega b}. \tag{a}$$

Рассмотрим винт

$$(R)=(uR_1)+(vR_2), \tag{b}$$

где u, v — вещественные числа, причем u — длина вектора винта (u, R_1), v — длина вектора винта (v, R_2). Давая числам u, v, независимо друг от друга, всевозможные значения, мы получим бесчисленное множество винтов (R), образующих так называемую группу винтов 2-го порядка. Свойства ее давно и хорошо известны. Здесь мы займемся ее изучением по двум соображениям: свойства нам дальше будут необходимы, а кроме того это даст новое приложение комплексной теории винтов. Два винта группы условимся считать различными, лишь если у них различные оси и параметры. Отсюда, опираясь на теорему п. 23 (глава 1, § 3), заключаем:

Два винта (R) и (R') группы различны, если соответствующие им числа $(u, v,)$ (u', v') друг другу не пропорциональны, т. е., если

$$\frac{v}{u} \gtrless \frac{v'}{u'}.$$

Таким образом винты группы определяются лишь отношением $\frac{v}{u}$.

Следовательно различных винтов в группе лишь ∞^1, оси их поэтому образуют некоторую поверхность.

9 Назовем винты (R_1) и (R_2), на которых построена группа, основными. Эти винты тоже принадлежат группе. Первый отвечает значениям: $u=1$, $v=0$, второй — значениям: $u=0$, $v=1$.

Пусть l — ось винта (R) группы, d — ось угла

$$(l_1, l_2)=\theta=\theta_0+\omega\theta_1.$$

Спроектируем на ось d винты (R), (R_1) и (R_2). Это даст:

$$R\cos(d, l)=R_1\cos(d, l_1)+R_2\cos(d, l_2).$$

Но, по определению оси d,

$$\cos(d, l_1)=\cos(d, l_2)=0,$$

поэтому и

$$\cos(d, l)=0.$$

Следовательно, оси всех винтов группы встречают под прямым углом ось d.

Назовем d осью группы.

10. Пусть теперь X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 — координаты винтов (R_1) и (R_2), X, Y, Z — координаты винта (R). Тогда в силу (b)

$$X=uX_1+vX_2;\ Y=uY_1+vY_2;\ Z=uZ_1+vZ_2. \tag{27}$$

Если X', Y', Z' — координаты другого винта (R') группы, то

$$X'=u'X_1+v'X_2;\ Y'=u'Y_1+v'Y_2;\ Z'=u'Z_1+v'Z_2. \tag{27'}$$

Составим скалярное произведение винтов (R) и (R'), т. е. сумму

$$XX'+YY'+ZZ',$$

которую для краткости письма обозначим через $\sum XX'$.

Из (27) и (27') выводим:

$$\sum XX'=uu'\sum X_1^2+vv'\sum X_2^2+(uv'+vu')\sum X_1X_2$$

Но по формулам (4) и (11) § 4

$$\sum X_1^2 = R_1^2;\quad \sum X_2^2 = R_2^2;\quad \sum X_1 X_2 = R_1 R_2 \cos\theta.$$

Поэтому, заменяя R_1 и R_2 их значениями (а), получим:

$$\sum XX' = RR' \cos\varphi = uu'e^{2\omega a} + vv'e^{2\omega b} + (uv' + vu')e^{\omega(a+b)}\cos\theta, \tag{28}$$

где φ — угол между осями винтов (R) и (R'). Полученная формула доказывает, что оси винтов (R) и (R') пересекутся под прямым углом, если можно подобрать 4 **вещественных** числа u, v, u', v', обращающих в нуль правую часть формулы (28). Для определения этих чисел, следовательно,

$$uu'e^{2\omega a} + vv'e^{2\omega b} + (uv' + vu')\, e^{\omega(a+b)} \cos\theta = 0$$

или по разделении на $uu'e^{\omega(a+b)}$

$$e^{\omega(a-b)} + \lambda\mu\, e^{\omega(b-a)} + (\lambda + \mu) \cos\theta = 0, \tag{29}$$

где для удобства положено

$$\lambda = \frac{v}{u};\ \mu = \frac{v'}{u'}.$$

Ур-ние (29) распадается на два:

$$1 + \lambda\mu + (\lambda + \mu)\cos\theta_0 = 0$$

$$(a - b)(1 - \lambda\mu) - (\lambda + \mu)\,\theta_1 \sin\theta_0 = 0,$$

откуда

$$\lambda + \mu = \frac{2(a - b)}{\theta_1 \sin\theta_0 - (a - b)\cos\theta_0};$$

$$\lambda\mu = -\frac{\theta_1 \sin\theta_0 + (a - b)\cos\theta_0}{\theta_1 \sin\theta_0 - (a - b)\cos\theta_0} \tag{30}$$

и после простых преобразований

$$(\lambda - \mu)^2 = \frac{4\sin^2\theta_0\,[(a - b)^2 + \theta_1^2]}{[\theta_1 \sin\theta_0 - (a - b)\cos\theta_0]^2}.$$

Так как правая часть последней формулы существенно положительна, то числа λ, μ вещественны и при произвольных значениях чисел θ_0, θ_1, a и b, т. е. в общем случае, различны.

Следовательно, **в общем случае среди винтов группы всегда имеются два винта, (R') и (R''), оси которых пересекаются под прямым углом.**

Винты (R') и (R'') называются **главными** винтами группы, их параметры p_1 и p_2 — **главными** параметрами, а точка O пересечения их осей — **центром** группы.

11. Примем ось винта (R') за ось Ox, ось винта (R'') — за ось Oy, а ось d группы за ось Oz. Координаты X', Y', Z' и X'', Y'', Z'' винтов (R') и (R'') будут:

$$X'=R';\ Y'=0;\ Z'=0$$

$$X''=0;\ Y''=R'';\ Z''=0.$$

Пусть u', v', u'', v'' — значения u, v, определяющие винты (R') и (R''). Тогда формулы (27) дадут:

$$R'=u'X_1+v'X_2;\ 0=u'Y_1+v'Y_2;\ Z'=0. \tag{c}$$

$$0=u''X_1+v''X_2; R''=u''Y_1+v''Y_2;\ Z''=0 \tag{d}$$

и для любого винта (R) группы

$$X=uX_1+vX_2;\ Y=uY_1+uY_2;\ Z=0. \tag{e}$$

Первые уравнения этих систем — однородны и линейны относительно чисел: 1, X_1, X_2, а вторые уравнения тех же систем — однородны и линейны относительно чисел: 1, Y_1, Y_2. Следовательно должны равняться нулям их определители, т. е.

$$\begin{vmatrix} X, & u, & v, \\ R', & u', & v' \\ 0, & u'', & v'' \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} Y, & u, & v \\ 0, & u', & v' \\ R'', & u'', & v'' \end{vmatrix}=0$$

Определяя отсюда X, Y, найдем

$$X=kR';\ Y=lR'';\ Z=0. \tag{f}$$

где k и l, очевидно, вещественные числа. Эти формулы доказывают, что

$$(R)\equiv(kR')+(lR'').$$

Поэтому, если φ — угол между осью x и осью l винта (R),

$$R'=a'e^{\omega p_1};\ R''=b'e^{\omega p_2};\ R=R_0e^{\omega p},$$

то, вместо формул (f), получим, полагая:

$$a'k=u,\ b'l=v$$

$$R_0e^{\omega p}\cos\varphi=u\,e^{\omega p_1};\ R_0e^{\omega p}\sin\varphi=v\,e^{\omega p_2}, \tag{31}$$

на основании теоремы п. 24, § 3, гл. I [см. формулы (18)]. Ур-ния (31) назовем каноническими уравнениями группы винтов 2-го порядка, отнесенной к ее главным винтам.

Сравнение главных частей ур-ний (31) дает:

$$R_0\cos\varphi_0=u,\ R_0\sin\varphi_0=v,$$

откуда следует, что u, v равны проекциям вектора R_0 винта (R) группы на оси главных винтов. Подставив значения u, v в (31), найдем:

$$e^{\omega p}\cos\varphi=\cos\varphi_0e^{\omega p_1};\ e^{\omega p}\sin\varphi=\sin\varphi_0\,e^{\omega p_2}$$

откуда выводим:

$$e^{2\omega p}=\cos^2\varphi_0\, e^{2\omega p_1}+\sin^2\varphi_0\, e^{2\omega p_2}$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\varphi_0\, e^{\omega(p_2-p_1)} \tag{32}$$

Первое из этих уравнений определяет параметр p винта (R) группы, второе — его ось l по углу φ_0 между направлениями оси Ox и оси l.

Ур-ния (32) можно написать в следующем виде:

$$1+2\omega p=\cos^2\varphi_0\,(1+2\omega p_1)+\sin^2\varphi_0\,(1+2\omega p_2)=$$
$$=1+2\omega\,(p_1\cos^2\varphi_0+p_2\sin^2\varphi_0).$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0+\frac{\omega\varphi_1}{\cos^2\varphi_0}=\operatorname{tg}\varphi_0\,[1+\omega\,(p_2-p_1)]=\operatorname{tg}\varphi_0+\omega(p_2-p_1)\operatorname{tg}\varphi_0,$$

откуда

$$p=p_1\cos^2\varphi_0+p_2\sin^2\varphi_0;\ \varphi_1=\frac{p_2-p_1}{2}\sin 2\varphi_0. \tag{33}$$

Мы вновь пришли к результатам вышеупомянутого п. 24, § 3:

a) Оси l винтов (R) группы — образующие цилиндроида, построенного на главных винтах группы.

b) Каждая образующая цилиндроида — ось винта (R) группы, параметр которого определяется первой из формул (33).

12. Выведем теперь некоторые свойства винтов группы, которые нам понадобятся дальше.

a′) Отметим прежде всего, что второе из ур-ний (32)

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\varphi_0\, e^{\omega(p_2-p_1)},\ \varphi=\varphi_0+\omega\varphi_1 \tag{32′}$$

— комплексное уравнение цилиндроида, отнесенного к его осям Ox, Oy, Oz и к центру.

b′) Пусть A — точка встречи с осью Oz оси l винта (R). Тогда

$$\varphi_1=OA.$$

Предположим для определенности:

$$p_2>0;\ p_2>p_1,$$

и пусть

$$p_2-p_1=2a.$$

Когда угол φ_0 изменяется от нуля до $\frac{\pi}{4}$, точка A описывает отрезок $\overrightarrow{OA_1}$ положительной полуоси Oz, равный a. При дальнейшем изменении угла φ_0 от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ точка описывает отрезок $\overrightarrow{A_1O}$ и совпадает с O при $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$. Когда угол φ_0 увеличивается от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$, точка A описывает отрезок OA_2 отрицательной полуоси Oz', равный по длине a. Наконец при изменении угла φ_0 от $\frac{3\pi}{4}$ до π точка A описывает отрезок $\overrightarrow{A_2O}$ и совпадает вновь с центром O при $\varphi_0=\pi$.

Так как оси l винтов группы встречают ось z под прямыми углами, то весь цилиндроид заключен между двумя плоскостями, проведенными через точки A_1 и A_2 параллельно плоскости xy.

Отрезок $\overrightarrow{A_1A_2}$ оси состоит в силу сказанного из двойных точек цилиндроида.

c′) Через каждую точку A отрезка $\overrightarrow{OA_1}$ проходят оси l и l' двух винтов (R) и (R') группы. Оси эти, как показывает вторая из формул (33), образуют с направлением оси Ox углы

$$\varphi_0 \text{ и } -\frac{\pi}{2}-\varphi_0,$$

следовательно одинаково наклонены к биссектрисе Ok координатного угла xOy. Параметры p и p' соответствующих винтов будут по первой из формул (33):

$$p=p_1\cos^2\varphi_0+p_2\sin^2\varphi_0;\quad p'=p_1\sin^2\varphi_0+p_2\cos^2\varphi_0,$$

откуда выводим:

сумма параметров винтов (R) и (R'), оси которых пересекаются, равна сумме главных параметров.

Проходящие чрез точку A_1 оси l, l' сливаются в одну l_1, очевидно, параллельную биссектрисе Ok. Полагая в первой из (33):

$$\varphi_0=\frac{\pi}{4},$$

получим значение параметра этого винта группы, осью которого служит l_1:

$$p=\frac{p_1+p_2}{2}.$$

Точно также убедимся, что через каждую точку A отрезка OA_2 оси z проходят две образующих m и m' цилиндроида, одинаково наклоненных к биссектрисе Ok' координатного угла $x'Oy$, где Ox' — отрицательная полуось x. Проходящие через точку A_2 оси m и m' сливаются в одну m_1 параллельную биссектрисе Ok'.

Мы видим, что крайние образующие l_1 и m_1 цилиндроида скрещиваются под прямым углом, причем их кратчайшее расстояние A_1A_2 делится центром O пополам.

d) Если главный параметр p_1 отрицателен, то в группе есть два винта (K) и (K') с нулевым параметром каждый. Направления их осей l'' и m'' определяются из уравнения:

$$\operatorname{tg}^2\varphi_0=-\frac{p_1}{p_2}, \tag{34}$$

откуда по второй из формул (33) без труда найдем:

$$\varphi_1 = \pm\sqrt{-p_1 p_2}. \qquad (34')$$

Соответствующие точки A' и A'' лежат, следовательно, первая на отрезке OA_1, а вторая — на отрезке OA_2, причем центр O делит отрезок $A'A''$ пополам. Что же касается направлений осей l'' и m'' винтов (K) и (K'), то с осью Ox они образуют углы

$$\varphi_0' \text{ и } \pi - \varphi_0',$$

т. е. одинаково наклонены к оси Oy.

Прямые l'' и m'', очевидно, одинаково отстоят от плоскости xy и в общем случае скрещиваются под углом, неравным прямому. Только при

$$\varphi_0' = \frac{\pi}{4}$$

этот угол будет равен прямому, что следует из одинакового наклона к оси Oy осей l'' и m''. Но тогда

$$p_1 + p_2 = 0,$$

как показывает формула (34). Кроме того, в этом случае точки A' и A'' совпадут с крайними точками A_1 и A_2, так как последним отвечают те же значения угла φ_0.

На этом мы остановимся.

§ 6. Комплексы, конгруэнции и поверхности.

13. Каждая прямая вполне определяется прямоугольными координатами x, y, z, связанными соотношением:

$$\sum x^2 = 1. \qquad (35)$$

Только две из них, например

$$x = x_0 + \omega x_1, \qquad y = y_0 + \omega y_1,$$

могут быть произвольны, третья же определяется из указанного соотношения.

Давая числам x_0, y_0, x_1, y_1 всевозможные значения под условием:

$$-1 < x_0 < 1, \qquad -1 < y_0 < 1,$$

мы получим ∞^4 прямых. Мы можем, следовательно, считать пространство, за элемент которого взята прямая, пространством 4-х измерений.

а) Положим:

$$x = x(u, v, w); \; y = y(u, v, w); \; z = z(u, v, w); \; \sum x^2 = 1, \qquad (36)$$

где u, v, w — вещественные переменные, могущие принимать, независимо одна от другой, всевозможные значения, $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ — комплексные функции от u, v, w, связанные соотношением (36). Принимая x, y, z за координаты прямой l и давая u, v, w все доступные им значения, получим так называемый **комплекс** прямых — пространственную форму, содержащую ∞^3 прямых пространства. Эти прямые назовем **лучами комплекса**, ур-ния (36) — **уравнениями комплекса**, а числа u, v, w — **вещественными координатами лучей**.

Пусть A — произвольная точка, $l(u, v, w)$ — луч комплекса, проходящий через A. В таком случае числа u, v, w должны удовлетворить двум условиям:

$$f_1(u, v, w)=0; \ f_2(u, v, w)=0.$$

Следовательно, одно из них, например u, останется совершенно произвольным, т. е. существует ∞^1 лучей комплекса, проходящих через точку A. Иными словами каждая точка A — вершина конуса, образующие которого — лучи комплекса (36).

Допустим, что конус — алгебраический, пусть n — степень его уравнения и порядок конуса.

Рассмотрим теперь лучи конуса, лежащие в произвольной плоскости (α). И в этом случае числа (u, v, w) должны удовлетворить двум условиям:

$$\varphi_1(u, v, w)=0; \ \varphi_2(u, v, w)=0.$$

Следовательно и теперь лишь одно из них, например u, остается совершенно произвольным, т. е. существует ∞^1 лучей комплекса, лежащих в плоскости (α). Пусть (l) — обертываемая этими лучами кривая плоскости (α), m — класс линии (l).

Теорема. *Порядок n конуса лучей, проходящих через точку A, и класс m обертки (l) лучей, лежащих в плоскости (α), одинаковы.*

В самом деле, пусть A — произвольная точка плоскости (α). По предыдущему, точка A — вершина конуса (A) лучей комплекса. Так как этот конус — порядка n, то с плоскостью (α) он пересечется по n лучам, каждый из которых будет, по определению, касательной к линии (l). Итак из произвольной точки A плоскости (α) можно провести n касательных к линии (l). Класс последней, следовательно, равен n.

Это — давно известная теорема.

См. например, C. M. Jessop, A treatise on the line complex, 1903, стр. 25.

Работа Jessop'а и сейчас является первоклассным источником для ознакомления с теорией комплексов 1-го и 2-го порядка, в основу которой положены координаты F. Klein'а.

Уравнение комплекса может быть также задано в следующем виде:

$$f(x, y, z, u)=0, \ \sum x^2=1, \tag{37}$$

где u — вещественное переменное число, f — комплексная функция.

В самом деле, пусть

$$z=v+\omega w.$$

Из (37) находим:

$$x=x(u, z); \ y=y(u, z)$$

или

$$x=x(u,\ v+\omega w);\ y=y(u,\ v+\omega w).$$

Мы вновь пришли к уравнениям, имеющим вид (36), правда, специального типа.

b) Уравнениями

$$x=x(u,\ v);\ y=y(u,\ v);\ z=z(u,\ v);\ \sum x^2=1 \tag{38}$$

определяется система, состоящая из ∞^2 прямых. Это так называемая конгруэнция. Прямые (38) — ее лучи.

Через произвольную точку A проходит, как нетрудно доказать, определенное число m лучей конгруэнции, равным образом в любой плоскости (α) лежит вполне определенное число n лучей конгруэнции Числа m и n определяют порядок и класс конгруэнции.

Устанавливая между u, v определенное соотношение:

$$\lambda(u,\ v)=0,$$

где λ — вещественная функция, мы выделим ∞^1 лучей конгруэнции, т. е. получим определенную линейчатую поверхность (λ), образующие которой — лучи конгруэнции. Поверхность (λ) — поверхность конгруэнции. В виду произвольности функций λ конгруэнция обладает бесчисленным множеством поверхностей (λ).

Конгруэнция может быть также представлена уравнениями:

$$f(x,\ y,\ z)=0;\ \sum x^2=1, \tag{38'}$$

где f — комплексная функция. Полагая, как выше,

$$z=v+\omega w,$$

получим, разрешая ур-ния (38'),

$$x=x(v+\omega w);\ y=y(v+\omega w);\ z=v+\omega w,$$

т. е. x, y, z — функции от двух независимых вещественных переменных, правда, частного типа.

Пусть наконец

$$x=x(u,\ v,\ w);\ y=y(u,\ v,\ w);\ z=z(u,\ v,\ w);\ \sum x^2=1$$

— некоторый комплекс. Полагая в этих уравнениях:

$$w=a,$$

где a — постоянное вещественное число, мы получим некоторую конгруэнцию, состоящую из лучей комплекса. Давая w бесчисленное множество значений, мы получим ∞^1 конгруэнций, входящих в состав данного комплекса. Последний можно поэтому рассматривать, как описанный построенными конгруэнциями:

$$w=\text{const}.$$

Еще более обще пусть

$$f(u,\ v;\ w)=0$$

(f — вещественная функция) — произвольно установленное между u, v, w соотношение. Определяя из него w и вставляя в уравнение данного комплекса, мы опять получим конгруэнцию (f). Таких конгруэнций в данном комплексе — бесчисленное множество.

Можно наконец получить конгруэнцию как совокупность лучей, общих двум данным комплексам (A) и (B). В этом случае говорят, что комплексы пересекаются по конгруэнции. Если комплексы (A) и (B) заданы уравнениями:

$$f_1(x, y, z, u) = 0; \; f_2(x, y, z, v) = 0; \quad \sum x^2 = 1,$$

где снова u, v — вещественные переменные, а f_1 и f_2 — комплексные функции, то, разрешив эти уравнения, получим:

$$x = x(u, v); \; y = y(u, v); \; z = z(u, v),$$

т. е. уравнения искомой конгруэнции, по которой пересекаются комплексы (A) и (B).

Если же последние заданы уравнениями:

$$x = x(u, v, w); \; y = y(u, v, w); \; z = z(u, v, w), \; \sum x^2 = 1, \quad (A)$$

$$x' = x'(u', v', w'); \; y' = y'(u', v', w'), \; z = z'(u', v', w'); \; \sum x^2 = 1, \quad (B)$$

тогда придется предварительно определить 6 чисел u, v, w, u', v', w' так, чтобы они были вещественны и, сверх того, обращали в тождества уравнения:

$$x = x', \; y = y'.$$

Каждое из этих комплексных уравнений распадается на два вещественных. Всего, следовательно, у нас окажется четыре вещественных уравнений, а неизвестных шесть. Два из них, например, u, v, останутся произвольными, а остальные будут через них выражены. Определив, например, w через u и v и подставив в уравнения (A), получим уравнения искомой конгруэнции.

c) Уравнения:

$$x = x(u); \; y = y(u); \; z = z(u); \; \sum x^2 = 1 \qquad (39)$$

при u — вещественном и переменном представляют ∞' прямых, т. е. линейчатую поверхность.

И здесь могут представиться различные способы задания последней, но мы на этом не будем останавливаться. Перейдем к примерам.

§ 7. Комплексы 1-го и 2-го порядка.

14. Простейшим комплексом будет л и н е й н ы й, в котором чрез каждую точку A проходят лучи, образующие плоский пучок, равным образом лучи комплекса, лежащие в произвольной плоскости (α), образуют также плоский пучок:

Линейный комплекс, следовательно 1-го порядка и класса. Точка A — п о л ю с плоскости пучка лучей, проходящих через A, а плоскость пучка — п о л я р н а я плоскость точки A. Исходя из этих свойств линейного комплекса, можно чисто геометрически построить всю его теорию. Это впервые было выполнено Mannheim'ом в его классическом мемуаре: „Etude sur le déplacement d'une figure invariable“ (Journal de l'école Polytechnique (cah. 43).

Краткое, но достаточно полное изложение этих методов читатель найдет в моей статье: „Из курса линейчатой геометрии“, Казань, 1923 (Изв. Физ.-мат. об-ва, стр. 6—9, 12—13).

15. Проще всего построить линейный комплекс следующим образом. Пусть (R) — винт с осью m и тензором

$$R = e^{\omega p},$$

l — произвольная прямая, (a) — проекция винта (R) на l. Тогда, если φ — угол (l, m), то тензор винта (a) определится формулой:

$$a = e^{\omega p} \cos \varphi.$$

Теорема. *Прямые l, на которых проекция винта (R) — вектор u, образуют линейный комплекс.*

В самом деле, пусть A — произвольная точка. Приведем к ней винт (R). Это даст бивектор

$$r_0 + \omega r_1,$$

где r_0 — вектор единичной длины, параллельный оси m винта, ωr_1 — момент. Проведем через точку A прямую l, перпендикулярную к моменту ωr_1. Проекция на l данного винта будет, очевидно, вектор-проекция r_0 на l. Но прямые l, по построению, образуют плоский пучок с центром в точке A. Плоскость этого пучка — полярная плоскость точки A.

Пусть теперь (α) — произвольная плоскость. A и B — две каких-либо ее точки, (a) и (b) — их полярные плоскости. Каждая из этих плоскостей пересекается с (α) по прямым AC и BC. Докажем, что C — полюс плоскости (α). Действительно, линии AC и BC, по заданию, лучи комплекса — поэтому проекции на них винта R будут векторы. Если, следовательно, мы приведем винт к точке C, то момент полученного бивектора должен быть перпендикулярным как к AC, так и к BC. Следовательно, этот момент перпендикулярен к плоскости (α) в точке C и поэтому перпендикулярен ко всем лучам пучка прямых, лежащим в (α) и проходящим чрез C. C — поэтому полюс плоскости.

Итак, винт (R) определяет линейный комплекс прямых (l). Этот комплекс назовем комплексом винта (R), ось и параметр последнего — осью и параметром комплекса.

На основании вышесказанного для каждого луча l комплекса имеет место соотношение:

$$e^{\omega p} \cos \varphi = u, \tag{40}$$

где u — длина вектора — переменное, вещественное число.

Беря параметры обеих частей этого уравнения, получим:

$$p = \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_0, \tag{41}$$

т. е. у всех лучей комплекса расстояния их от оси комплекса обратно-пропорциональны тангенсам углов, образуемых с осью комплекса их направлениями.

Отсюда заключаем:

1. Щетка, осью которой служит ось комплекса, составлена его лучами.

2. Лучи комплекса, одинаково отстоящие от его оси, касательны к винтовым линиям цилиндра, для которого осью служит ось комплекса. Эти винтовые линии пересекают образующие цилиндра под углом φ_0, а радиус цилиндра равен расстоянию φ_1, всех этих лучей комплекса от его оси.

16. Пусть a, b, c — прямоугольные координаты оси комплекса, x, y, z — координаты его луча.

Ур-ние (40) примет вид:

$$e^{\omega p}(ax+by+cz)=u, \tag{42}$$

где

$$\sum a^2=1;\ \sum x^2=1. \tag{43}$$

Частный случай: $p=0$. Ур-ние (42) будет:

$$ax+by+cz=u,$$

которое доказывает, что все лучи комплекса пересекают его ось.

Такой комплекс называют выродившимся.

Вернемся к общему случаю. Линейный комплекс вполне определяется пятью вещественными числами: четыре из них определяют ось комплекса, пятая — его параметр.

Ур-ние (42) комплекса упростится, если за ось z принять ось комплекса. Так как тогда

$$a=0,\ b=0,\ c=1,$$

то уравнение комплекса будет:

$$e^{\omega p}z=u. \tag{44}$$

Пользуясь этим уравнением, можно было бы дать исчерпывающую теорию линейного комплекса. Но мы этого делать не станем, так как это отвлекло бы нас от нашей прямой задачи.

17. Обозначим через A_1 и A_2 — комплексы винтов (R_1) и (R_2), через B_{12} — конгруэнции, по которой пересекаются комплексы (R_1) и (R_2).

Теорема. *Конгруэнция B_{12} принадлежит всем комплексам винтов группы, построенной на винтах (P_1) и (P_2).*

Действительно, пусть

$$R=(uR_1)+(vR_2)$$

какой-нибудь винт группы, l — луч конгруэнции B_{12}. Спроектируем на l винты (uR_1), (vR_2) и (R). Обозначая через m_1, m_2, m их оси, получим:

$$R\cos(l,m)=uR_1\cos(l,m_1)+vR_2\cos(l,m_2).$$

Но l — общий луч комплексов A_1 и A_2, следовательно, согласно уравнению (40) $R_1\cos(l,m_1)$ и $R_2\cos(l_1 m_2)$ — вещественные числа,

u и v — тоже вещественные числа, поэтому и $R \cos(l, m)$ — вещественное число, т. е. луч l — луч комплекса винта (R).

Следствие I. *Полярные плоскости, соответствующие данной точке A как полюсу, в комплексах винтов группы 2-го порядка образуют пучок плоскостей.* В самом деле, пусть (α_1) и (α_2) — полярные плоскости точки A в комплексах A_1 и A_2 винтов (R_1) и (R_2). Их общая прямая AA' будет, следовательно, лучом конгруэнции B_{12} и, по доказанной теореме, будет лучом комплекса любого винта (R) группы. Поэтому чрез прямую AA' должна пройти и полярная плоскость (α) точки A в комплексе винта (R).

Следствие II. *Полюсы данной плоскости* (α), *соответствующие последней в комплексах винтов группы 2-го порядка, лежат на прямой.*

Действительно, пусть A_1 и A_2 — полюсы плоскости (α) в комплексах винтов (R_1) и (R_2). Прямая A_1A_2 будет, следовательно, лучом конгруэнции B_{12} и по доказанной теореме будет лучом комплекса любого винта (R) группы. Поэтому, на прямой A_1A_2 должен лежать полюс A плоскости (α) в комплексе винта R.

Следствие III. *Через точку A проходит один луч AA' конгруэнции B_{12}; в каждой плоскости (α) лежит один луч той же конгруэнции. Конгруэнция B_{12}—1-го порядка и класса.*

Рассмотрим в заключение тот частный случай, когда в группе винтов 2-го порядка имеются два винта нулевого параметра (R') и (R'').

Мы видели (п. 17), что комплексы таких винтов составлены из прямых, пересекающих их оси. Следовательно, *если в группе имеются два винта (R') и (R'') нулевого параметра, то конгруэнция B_{12} состоит из всех прямых, пересекающих оси винтов (R') и (R'').*

18. Пользуясь этими давно известными предложениями, мы дадим новое построение общего комплекса 2-го порядка.

Построим две группы винтов 2-го порядка: одну на главных винтах (R_1), (R_1') с параметрами p_1 и p_1', другую — на главных винтах (R_2) и (R_2') с параметрами p_2 и p_2'. Пусть (R_λ) и (R_μ) — винты обеих групп, определяемые формулами:

$$(R_\lambda) \equiv (R_1) + (\lambda R_1'); \quad (R_\mu) \equiv (R_2) + (\mu R_2'), \tag{a}$$

где λ и μ — вещественные числа. Между λ и μ установим соотношение:

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0, \tag{b}$$

где A, B, C, D — данные вещественные числа. Каждому значению числа λ будет отвечать одно определенное значение числа μ, следовательно, каждому винту (R_λ) первой группы будет отвечать определенный винт (R_μ) второй.

Обозначим через B_λ конгруэнцию, по которой пересекаются комплексы винтов (R_λ) и (R_μ). Конгруэнция B_λ, очевидно, вполне определяется значением числа λ.

Теорема. *Конгруэнция B_λ при изменении числа λ от $-\infty$ до $+\infty$ опишет общий комплекс 2-го порядка и класса.*

Докажем прежде всего, что полученный комплекс, который обозначим буквой A, действительно 2-го порядка и класса.

Пусть C — произвольная точка, CC_1 — общий луч всех комплексов винтов 1-й группы, CC_2 — общий луч всех комплексов винтов 2-й группы.

Точка C в комплексе винта (R_λ) будет полюсом определенной плоскости (α_λ), проходящей через прямую CC_1; та же точка C в комплексе винта (R_μ) будет полюсом другой плоскости (α_μ), проходящей через CC_2. Прямая пересечения плоскостей (α_λ) и (α_μ) будет, следовательно, лучом конгруэнций B_λ, проходящим через точку C. Будем теперь менять λ. Плоскость α_λ будет описывать пучок с осью CC_1, равным образом и плоскость (α_μ) будет описывать пучок с осью CC_2. Но эти пучки в силу соотношения (b) проективны, кроме того их оси пересекаются в точке C, поэтому соответствующие плоскости (α_λ) и (α_μ) пучков пересекаются по образующим конуса 2-го порядка с вершиной в точке C. Но эти образующие — лучи всех конгруэнций B_λ, следовательно, одна часть теоремы доказана. Пусть (α) — произвольная плоскость, a_1 — общий луч всех комплексов винтов 1-й группы, лежащий в (α), a_2 — общий луч всех комплексов винтов 2-й группы, тоже лежащий в плоскости (α). В комплексе винта (R_λ), плоскость (α) будет полярной для определенной точки C_λ прямой a_1, та же плоскость (α) в комплексе винта (R_μ) будет полярной для определенной точки C_μ прямой a_2. Поэтому прямая $C_\lambda C_\mu$ — луч конгруэнции B_λ, лежащий в плоскости (α). Будем теперь менять λ. Точка C_λ опишет ряд точек прямой a_1, а точка C_μ — ряд точек прямой a_2. Но эти ряды в силу того же соотношения (b) проективны, поэтому прямые $C_\lambda C_\mu$ обертывают кривую 2-го порядка. Так как прямые $C_\lambda C_\mu$ — лучи всех конгруэнций B_λ, то и вторая часть теоремы доказана.

Итак, проходящие через точку C лучи комплекса A образуют конус 2-го порядка, а лежащие в плоскости (α) его лучи обертывают кривую 2-го порядка.

Докажем теперь, что полученный комплекс — общий.

Для этого напомним, что общий комплекс 2-го порядка определяется 19 независимыми постоянными (I. Pluecker, Neue Geometrie des Raumes, стр. 150). Сосчитаем число независимых постоянных в нашем построении комплекса A. Главные винты (R_1) и (R_1') 1-й группы определяются восемью постоянными, из них две — параметры p_1 и p_2, шесть остальных необходимы для построения пересекающихся под прямым углом осей главных винтов. Равным образом, восемью постоянными определятся главные винты (R_2) и (R'_2) 2-й группы. Наконец в соотношении (b) независимых коэффициентов только три, так как любой из них можно приравнять единице.

Итак, комплекс A определяется 19 постоянными, очевидно независимыми. A, следовательно, — общий комплекс 2-го порядка.

19. Выведем его уравнение. Пусть l — луч конгруэнции B_λ, т. е. луч комплекса A. Луч l, по определению конгруэнции B_λ, есть луч комплекса винта (R_λ) и в то же время — луч комплекса винта (R_μ). Поэтому на основании ур-ния (40) (п. 16),

$$R_\lambda \cos (m_\lambda, l) = u; \; R_\mu \cos (m_\mu, l) = v, \tag{c}$$

где m_λ и m_μ — оси винтов (R_λ) и (R_μ), а числа u, v вещественны. Но из (a) проектированием на l выводим:

$$\begin{gathered} R_\lambda \cos (m_\lambda, l) = R_1 \cos (m_1, l) + \lambda R_1' \cos (m_1', l) \\ R_\mu \cos (m_\mu, l) = R_2 \cos (m_2, l) + \mu R_2' \cos (m_2', l), \end{gathered}$$

где m_1 и m_1' — оси главных винтов (R_1) и (R_1') 1-й группы, m_2 и m_2' — оси главных винтов (R_2) и (R_2') — 2-й.

Сопоставляя эти уравнения с (c), найдем:

$$\left.\begin{aligned} R_1 \cos (m_1, l) + \lambda R_1' \cos (m_1', l) = u \\ R_2 \cos (m_2, l) + \mu R_2' \cos (m_2', l) = v \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Обозначим через a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1' — координаты осей винтов (R_1) и (R_1'), через a_2, b_2, c_2 и a_2', b_2', c_2' — координаты осей винтов (R_2) и (R_2'), через x, y, z — координаты луча C комплекса A, а также положим:

$$R_1 = e^{\omega p_1}, \; R_1' = e^{\omega p_1'}, \; R_2 = e^{\omega p_2}, \; R_2' = e^{\omega p_2'}.$$

Ур-ния (d) комплекса примут вид:

$$\left.\begin{aligned} e^{\omega p_1} \sum a_1 x + \lambda e^{\omega p_1'} \sum a_1' x = u; \\ e^{\omega p_2} \sum a_2 x + \mu e^{\omega p_2'} \sum a_2' x = v; \; \sum x^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где для краткости принято

$$ax + by + cz = \sum ax. \tag{e}$$

К ур-ниям (45) надо присоединить соотношение (b):

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0. \tag{45'}$$

Разрешив ур-ния (45) относительно x, y, z, исключением числа μ помощью соотношения (45′) получим x, y, z как функции λ, u, v.

§ 8. Однополый гиперболоид.

20. Докажем, что уравнения:

$$x = x_0 e^{\omega a}; \; y = y_0 e^{\omega b}; \; z = z_0 e^{\omega c}; \sum x^2 = 1. \tag{46}$$

определяют однополый гиперболоид. Здесь a, b, c — данные числа, x_0, y_0, z_0 — переменные, вещественные числа, смысл которых ясен — это направляющие косинусы прямой a (x, y, z).

Подставляя значения x, y, z в последнее из (46), получим:

$$x_0^2 e^{2\omega a} + y_0^2 e^{2\omega b} + z_0^2 e^{2\omega c} = 1,$$

которое распадается на два

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1; \; ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=0. \qquad (47)$$

Из этих равенств следует, что среди переменных чисел x_0, y_0, z_0 лишь одно может изменяться произвольно в промежутке $(-1, +1)$. Поэтому формулы (46) представляют ∞^1 прямых, т. е. определенную линейчатую поверхность (a).

Точно также числа

$$x'=x'_0e^{-\omega a}; \; y'=y'_0e^{-\omega b}; \; z'=z'_0e^{-\omega c}; \; \sum x'^2=1,$$

где снова

$$x'^2_0+y'^2_0+z'^2_0=1; \; ax'^2_0+by'^2_0+cz'^2_0=0,$$

будут координатами некоторой прямой b, образующей линейчатую поверхность (b).

Теорема. Прямые a и b всегда пересекаются.

В самом деле

$$\sum xx'=\sum x_0x'_0=\text{вещественному числу.}$$

Следствие. *Прямые a и b — образующие разных систем однополого гиперболоида, который одновременно является поверхностью (a) и (b).*

Для доказательства достаточно взять три образующие: b_1, b_2, b_3 поверхности (b). Поверхность (a) будет геометрическим местом прямых, пересекающих все три прямые b_1, b_2, b_3.

Примечание. В силу второго из равенств (47) гиперболоид будет вещественным лишь при условии, что знаки a, b, c не одинаковы.

Выведем уравнение гиперболоида. Положим для прямой a (x, y, z):

$$x=x_0+\omega x_1; \; y=y_0+\omega y_1; \; z=z_0+\omega z_1.$$

Тогда в силу (46)

$$x_1=ax_0; \; y_1=by_0; \; z_1=cz_0.$$

Поэтому уравнения прямой a будут:

$$ax_0=Yz_0-Zy_0; \; by_0=Zx_0-Xz_0; \; cz_0=Xy_0-Yx_0,$$

где X, Y, Z — координаты любой точки прямой a. Из этих уравнений линейных и однородных относительно x_0, y_0, z_0, выведем на основании первого из ур-ний (47):

$$\begin{vmatrix} a, & Z, & -Y \\ -Z, & b, & X \\ Y, & -X, & c \end{vmatrix}=0=aX^2+bY^2+cZ^2+abc.$$

Это — уравнение однополого гиперболоида, отнесенного к центру и осям.

Этим мы заканчиваем часть I, которая по существу является введением к следующим двум.

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

Глава I.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ.

§ 1. Центральная касательная и нормаль; дуга поверхности.

1. Пусть

$$x=x\ (u);\ y=y\ (u);\ z=z\ (u) \tag{1}$$

—координаты образующей a линейчатой поверхности (a), причем аргумент u функций x, y, z — вещественное число, а

$$x^2+y^2+z^2=\sum x^2=1 \tag{2}$$

тождественно. Функции $x\ (u)$, $y\ (u)$ и $z\ (u)$ — однозначны, непрерывны и допускают производные по u любого порядка.

2. Построим образующую $a'\ (x', y', z')$ той же поверхности (a), определяемую значением u' аргумента u. Положим:

$$x'-x=\Delta x;\ y'-y=\Delta y;\ z'-z=\Delta z, \tag{3}$$

где Δ — символ приращения. Пусть $b'\ (x'_1, y'_1, z'_1)$ — ось комплексного угла

$$\angle\ (a, a')=\theta=\theta_0+\omega\,\theta_1,$$

встречающая прямые a и a' в точках A и A' соответственно.

Тогда, как мы видели (ч. I, глава II, § 4, пп. 4 и 5)

$$\left.\begin{array}{c}\cos\theta=\sum xx' \\ x_1'\sin\theta=yz'-zy';\ y_1'\sin\theta=zx'-xz';\ z_1'\sin\theta=xy'-yx'. \\ \text{Но} \\ \sum(x'-x)^2=\sum x'^2+\sum x^2-2\sum xx'.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Поэтому, если воспользуемся формулами (2) и (3), то, вместо (4), получим:

$$\begin{gathered}2\ (1-\cos\theta)=\sum(\Delta x)^2 \\ x_1'\sin\theta=y\Delta z-z\Delta y;\ y_1'\sin\theta=z\Delta x-x\Delta z;\ z_1'\sin\theta= \\ =x\Delta y-y\Delta x.\end{gathered} \tag{5}$$

3. Положим, что образующая a' бесконечно близка к прямой a.

Угол $\angle(a, a')$ будет бесконечно мал. Обозначим его через

$$ds = ds_0 e^{\omega p}, \tag{6}$$

где

$$p = \lim_{\theta_0 \to 0} \frac{\theta_1}{\theta_0}$$

—введенный французским геометром Chasles'ем параметр распределения касательных плоскостей к поверхности (a) в точках ее образующей a. Мы будем называть p просто **параметром** образующей a. Предельное положение A точки A назовем **центром** прямой a. Геометрическое место этих центров называется **стрикционной линией** поверхности (a).

Определим предельное положение b (x_1, y_1, z_1) прямой b'. Так как последняя проходит через две точки A и A' поверхности (a), пересекая a под прямым углом, то ее предельное положение b будет касаться поверхности (a) в центре A прямой a и пересекать последнюю под прямым углом.

Прямую b назовем **центральной** касательной. Согласно сказанному, когда разность $u' - u$ стремится к нулю,

$$\lim \frac{\theta}{ds} = 1;\ x_1 = \lim x'_1;\ y_1 = \lim y'_1;\ z_1 = \lim z'_1.$$

Заменяя на этом основании в формулах (5) символы Δ на символы d дифференцирования и подставляя вместо $\sin\theta$ и $\cos\theta$ соответственно:

$$\sin\theta = \theta = ds;\ \cos\theta = 1 - \frac{ds^2}{2},$$

получим:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum dx^2 \tag{7}$$

$$x_1 = y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds};\ y_1 = z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds};\ z_1 = x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds};\ \sum x_1^2 = 1.$$

Построим, кроме того, прямую c с координатами:

$$\alpha = \frac{dx}{ds};\ \beta = \frac{dy}{ds};\ \gamma = \frac{dz}{ds};\ \sum \alpha^2 = 1. \tag{8}$$

Тогда вторая строчка формул (7) перейдет в следующую:

$$x_1 = y\gamma - z\beta;\ y_1 = z\alpha - x\gamma;\ z_1 = x\beta - y\alpha;\ \sum x_1^2 = 1. \tag{9}$$

Теорема. *Прямая c (α, β, γ) нормальна к поверхности (a) в центре A образующей a.*

В самом деле, из тождества (2) и формул (8) и (9) следует:

$$\sum x\alpha = \sum x\frac{dx}{ds} = 0;\ \sum xx_1 = 0.$$

Эти формулы доказывают, что прямая c — общий перпендикуляр к прямым a и b, и, следовательно, нормальна к плоскости (a, b) в точке A встречи прямых a и b. Но плоскость (a, b) касается поверхности (a) в A, поэтому c — нормаль к (a) в A.

Прямую c назовем **центральной нормалью** к (a), а плоскость (a, b) — центральной касательной плоскостью. Геометрическое место прямых c — нормалия, а прямых b — сопряженная с a поверхность.

4. Прямые a, c и b образуют ортогональный триедр $A\,(a, c, b)$, который будем называть **триедром образующей** a. Легко убедиться в том, что этот триедр конгруэнтен координатному триедру $O\,(x, y, z)$. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix} = 1,$$

на основании формул (9).

Отметим, что центральная нормаль c — ось угла $\angle\,(b, a)$.

5. Полагая:

$$\frac{dx}{du} = x'; \ \frac{dy}{du} = y'; \ \frac{dz}{du} = z',$$

получим для ds выражение:

$$ds = du\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

в котором квадратный корень условимся брать со знаком $+$.

Введем теперь число s по формуле

$$s = \int_{u_0}^{u} du \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \qquad (10)$$

Это число s назовем **дугой** поверхности (a), заключенной между образующими $a_0\,(u_0)$ и $a\,(u)$; число ds мы назовем элементом дуги s.

6. Для удобства ссылок мы сведем в таблицу (A) основные формулы настоящего параграфа

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a)}\ \ s = \int_{u_0}^{u} du \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}; \ \ ds = ds_0\, e^{p\omega}, \ \ ds^2 = \sum dx^2; \\[2mm]
\text{b)}\ \ x = x\,(u),\ y = y\,(u),\ z = z\,(u); \ \sum x^2 = 1; \\[2mm]
\text{c)}\ \ \alpha = \dfrac{dx}{ds},\ \beta = \dfrac{dy}{ds},\ \gamma = \dfrac{dz}{ds}; \ \sum \alpha^2 = 1; \\[2mm]
\text{d)}\ \ x_1 = y\gamma - z\beta,\ y_1 = z\alpha - x\gamma,\ z_1 = x\beta - y\alpha; \ \sum x_1{}^2 = 1; \\[2mm]
\text{e)}\ \ \sum x\alpha = \sum x x_1 = \sum \alpha x_1 = 0; \\[2mm]
\text{f)}\ \ \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix} = 1.
\end{array}\right\} \ (A)$$

7. Если поверхность a — развертывающаяся, но не цилиндр и не конус, то параметр p ее образующих равен нулю, элемент дуги ds — вещественное число ds_0. Стрикционная линия будет ребром возврата (A) поверхности. Прямая a (x, y, z), обратится в касательную к ребру возврата в точке его A; прямая b (x_1, y_1, z_1) будет бинормалью в A к ребру возврата, так как по определению, прямая b — ось вещественного угла ds_0, очевидно лежащего в плоскости соприкосновения кривой (A) в точке ее A. Наконец, прямая c будет главной нормалью ребра возврата в A, направленной к центру кривизны, так как триедр A (a, c, b) конгруэнтен координатному.

§ 2. Свойство касательных. Теорема Chasles'я. Свойства подвижного угла.

8. Через точку M образующей a проведем прямую m (X, Y, Z), касательную к поверхности (a) в точке M. Прямая m должна пересечь бесконечно близкую к a образующую a'. Следовательно, будут вещественными $\sum Xx$ и $\sum Xx'$, вещественной будет поэтому их разность

$$\sum X\,(x'-x)=\sum Xdx=ds\sum X\alpha=ds_0e^{\omega p}\sum X\alpha$$

на основании формул (a) и (c) таблицы (A). Но ds_0 — вещественное число, поэтому вещественной должна быть сумма

$$e^{\omega p}\sum X\alpha.$$

Положим:

$$S=S_0+\omega S_1$$

— угол (m, c). Так как

$$\sum X\alpha=\cos S,$$

то, в силу вышесказанного, должно быть вещественным произведение $e^{\omega p}\cos S$, но его вещественная часть равна $\cos S_0$, поэтому окончательно:

$$e^{\omega p}\cos S=\cos S_0. \tag{11}$$

Доказана, следовательно,

Теорема. *Касательная m к поверхности (a) — луч комплекса, осью которого служит центральная нормаль c, а тензор равен $e^{\omega p}$.*

Следствие 1. *Беря параметры обеих частей формулы (11), получим:*

$$p=S_1\ \mathrm{tg}\ S_0. \tag{12}$$

Следствие 2. *Если касательная m в точке касания M перпендикулярна к образующей a, то*

$$S_1=AM$$

и формула (12) *даст:*

$$p = AM \operatorname{tg} S_0. \tag{13}$$

Это — хорошо известная теорема Chasles'я.

9. Обратно, исходя из теоремы Chasles'я, можно вывести доказанную теорему.

В самом деле, пусть ε — угол между центральной нормалью c и касательной плоскостью (a, m) в точке M. Тогда, по теореме Chasles'я,

$$AM \operatorname{tg} \varepsilon = p.$$

На поверхности шара радиуса 1 с центром в начале координат построим сферические изображения A', C' и M' образующей a, центральной нормали c и касательной m соответственно. В сферическом треугольнике $A'C'M'$

$$\smile A'C' = \frac{\pi}{2}; \ \angle C'A'M' = \varepsilon.$$

Продолжим дугу $A'M'$ до $\frac{\pi}{2}$ и обозначим полученную точку через N. Так как A' — полюс дуги $C'N$, то в треугольнике $C'M'N$

$$\smile C'N = \varepsilon; \ \angle C'MN' = \frac{\pi}{2}; \ \smile C'M' = S_0,$$

если попрежнему обозначим чрез S_0 угол между направлениями прямых c и m.

Полагая

$$\angle NC'M' = m',$$

получим

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} S_0 \cos m.$$

Нетрудно заметить, что угол m между плоскостями дуг $C'N$ и $C'M'$ равен углу между образующей a и прямой, по которой измеряется кратчайшее расстояние S_1 прямых m и c.

Далее, очевидно, отрезок S_1 — ортогональная проекция отрезка AM; поэтому

$$S_1 = AM \cos m.$$

Отсюда и из предыдущего равенства выведем:

$$S_1 \operatorname{tg} S_0 = AM \operatorname{tg} \varepsilon = p.$$

Но если попрежнему S — комплексный угол $\angle (c, m)$, то

$$S = S_0 + \omega S_1.$$

Поэтому

$$\cos S = \cos S_0 - \omega S_1 \sin S_0 = \cos S_0 \ (1 - \omega p) = \cos S_0 e^{-\omega p},$$

что и требовалось доказать.

10. Пусть стороны a (x', y', z') и b (x'', y'', z'') комплексного угла θ описывают поверхности (a) и (b). Назовем их траекториями сторон.

Теорема. *Если в каждом положении угла* θ *траектории его сторон имеют общую центральную нормаль, то угол* θ *не изменяется.*

В самом деле, согласно заданию, центральные нормали $c'(\alpha', \beta', \gamma')$ и $c''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ к (a) и (b), соответствующие образующим a и b, совпадают, т. е.

$$\alpha' = \varepsilon\alpha'', \ \beta' = \varepsilon\beta'', \ \gamma' = \varepsilon\gamma'', \ (\varepsilon = \pm 1), \tag{a}$$

где

$$\alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \ \beta' = \frac{dy'}{ds'}, \ \gamma' = \frac{dz'}{ds'}$$

$$\alpha'' = \frac{dx''}{ds''}, \ \beta'' = \frac{dy''}{ds''}, \ \gamma'' = \frac{dz''}{ds''},$$

причем

$$\sum \alpha' x' = \sum \alpha'' x'' = 0. \tag{b}$$

Но

$$\sum x' x'' = \cos\theta,$$

поэтому

$$d \cos\theta = ds' \sum \alpha' x'' + ds'' \sum \alpha'' x',$$

или в силу (a)

$$d \cos\theta = \varepsilon\, ds' \sum \alpha'' x'' + \varepsilon\, ds'' \sum \alpha' x' = 0$$

в силу (b).

Примечание. В рассматриваемом случае общей центральной нормалью траекторий (a) и (b), очевидно, служит ось угла θ.

Обратная теорема. *Если у траектории* (a) *стороны* a *неизменного угла* $\theta = \angle(a, b)$ *центральная нормаль всегда совпадает с осью* $t\,(X, Y, Z)$ *угла* θ, *то прямая* t *будет центральной нормалью траектории* (b) *другой стороны* b *угла.*

Сохраним прежние обозначения. По определению оси t

$$\sum X x' = \sum X x'' = 0, \tag{a'}$$

кроме того, по заданию

$$X = \alpha'; \ Y = \beta'; \ Z = \gamma' \tag{b'}$$

$$\sum x' x'' = \cos\theta = \text{const}. \tag{c}$$

Отсюда выводим:

$$ds' \sum \alpha' x'' + ds'' \sum \alpha'' x' = 0. \tag{c'}$$

Но, согласно формулам (b′) и (a′),

$$\sum \alpha' x'' = \sum X x'' = 0,$$

поэтому уравнение (c′) дает:

$$\sum \alpha'' x' = 0$$

Но всегда

$$\sum \alpha'' x'' = 0,$$

поэтому, сопоставив последние два уравнения с (a′), выводим:

$$\frac{X}{\alpha''} = \frac{Y}{\beta''} = \frac{Z}{\gamma''} = \pm 1, \tag{d}$$

так как

$$\sum X^2 = \sum \alpha''^2 = 1.$$

Равенство (d) доказывает теорему.

Следствие I. *Существует ∞^2 поверхностей (a), для которых данная поверхность (c) — общая нормалия. Система поверхностей (a) вполне определяется одной из них. Иными словами, определение поверхностей (a) приводится к квадратуре.*

Следствие II. *Если твердая щетка движется так, что ось ее описывает нормалию (c) траектории одного своего луча, то для траекторий всех лучей (c) — общая нормалия.*

§ 3. Главная нормаль и бинормаль. Радиус кривизны. Мера кривизны поверхности. Свойства сопряженной поверхности.

11. Пусть c (α, β, γ) — центральная нормаль поверхности (a) и образующая нормалии (c) последней, B — центр прямой (c), n (ξ, η, ζ) и d (λ, μ, ν) — центральная нормаль и касательная к (c) в B. Прямую n назовем **главной нормалью**, прямую d — **бинормалью** поверхности (a), а точку B — **центром кривизны** поверхности (a) в точке A.

Обозначая через

$$ds' = ds_0' e^{\omega p'} \tag{14}$$

— элемент дуги нормалии (c) при c, получим на основании (c) и (b) таблицы (A):

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{d\alpha}{ds'}; \quad \eta = \frac{d\beta}{ds'}; \quad \zeta = \frac{d\gamma}{ds'}; \quad \sum \xi^2 = 1 \\ &\lambda = \beta\zeta - \gamma\eta; \ \mu = \gamma\xi - \alpha\zeta; \ \nu = \alpha\eta - \beta\xi; \sum \lambda^2 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\sum \alpha\xi = \sum \xi\lambda = \sum \lambda\alpha = 0.$$

Кроме того, триедр B (c, n, d) должен быть, подобно триедру $A(a, c, b)$, конгруэнтным координатному триедру O (x, y, z), поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \xi, \eta, \zeta \\ \lambda, \mu, \nu \end{vmatrix} = 1. \tag{16}$$

12. Пусть

$$R = \angle (a, d) \tag{17}$$

— комплексный угол между образующей a и ее бинормалью d. Так как, по предыдущему, триедры A (a, c, b) и B (c, n, d) конгруэнтны друг другу, а ось c у них общая, то, сообщив первому винтовое перемещение на угол R вокруг оси c, мы заставим его совпасть со вторым, причем совпадут — прямая a с d, а прямая b с n. Отсюда выводим:

$$\angle (b, n) = R; \ \angle (a, n) = R + \frac{\pi}{2}; \ \angle (b, d) = R - \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Отсюда и из (17) заключаем:

$$\left.\begin{aligned} \sum x\xi = -\sin R; \ \sum x_1\xi = \cos R \\ \sum x\lambda = \cos R; \ \sum x_1\lambda = \sin R \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Замечая, что прямые n и d встречают ось c под прямым углом в точке B, легко получим:

$$\left.\begin{aligned} \xi = x_1 \cos R - x \sin R; \ \eta = y_1 \cos R - y \sin R; \ \zeta = z_1 \cos R - z \sin R; \\ \lambda = x_1 \sin R + x \cos R; \ \mu = y_1 \sin R + y \cos R; \ \nu = z_1 \sin R + z \cos R. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Угол R будем называть **мерой кривизны** данной поверхности.

13. Положим:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\rho}, \tag{21}$$

число ρ назовем **радиусом кривизны** поверхности (a) в точке A.

Так как по формуле (a) таблицы (A)

$$ds'^2 = \sum d\alpha^2,$$

то

$$\frac{1}{\rho} = +\sqrt{\sum \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2} = +\sqrt{\sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}, \tag{22}$$

где корень всегда будем считать **положительным**.

Пользуясь определением (21) радиуса первой кривизны, получим, вместо первой строки формул (15):

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho}; \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\rho}; \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\rho}, \tag{23}$$

откуда на основании формулы (19) выводим:

$$\sum x \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\sin R}{\rho}.$$

Но дифференцирование по s формулы $\sum \alpha x = 0$ дает на основании (23) и формулы (c) таблицы (A):

$$0 = \sum x \frac{d\alpha}{ds} + \sum \alpha \frac{dx}{ds} = -\frac{\sin R}{\rho} + \sum \alpha^2 = -\frac{\sin R}{\rho} + 1,$$

откуда

$$\rho = \sin R, \tag{24}$$

т. е. радиус кривизны поверхности (a), соответствующий ее образующей a, равен синусу угла R между образующей a и бинормалью d.

Формулы (21) и (23) будут теперь:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\sin R}; \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\sin R}; \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\sin R}; \quad \frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\sin R}. \tag{25}$$

Беря параметры обеих частей последней формулы, получим на основании (14):

$$p' = p - \frac{R_1}{\operatorname{tg} R_0}. \tag{26}$$

14. Перейдем к изучению сопряженной с (a) поверхности (b), описываемой центральной касательной b (x_1, y_1, z_1).

Пусть l (α_1, β_1, γ_1) — центральная нормаль к (b) в центральной точке, образующей b. На основании обратной теоремы § 2 прямые l и центральная нормаль c к (a) должны совпасть. Положим поэтому

$$\alpha_1 = \varepsilon\alpha; \quad \beta_1 = \varepsilon\beta; \quad \gamma_1 = \varepsilon\gamma \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{27}$$

Кроме того, центр A образующей a будет одновременно центром образующей в поверхности (b). Следовательно, доказана

Теорема. *У поверхности* (a) *и* (b) — *общая стрикционная линия и общая нормалия.*

Обозначим через m (x'_1, y'_1, z'_1) центральную касательную к поверхности (b) в центре ее образующей b. Вычисляя по формулам (d) таблицы (A) координаты x'_1, y'_1, z'_1, легко найдем на основании (27):

$$x'_1 = -\varepsilon x; \quad y'_1 = -\varepsilon y; \quad z'_1 = -\varepsilon z,$$

т. е. прямые m и a совпадают. Выберем теперь ε под условием, чтобы и направления этих прямых были одинаковы, т. е. чтобы

$$x'_1 = x; \quad y'_1 = y; \quad z'_1 = z,$$

откуда

$$\varepsilon = -1; \quad \alpha_1 = -\alpha; \quad \beta_1 = -\beta, \quad \gamma_1 = -\gamma. \tag{28}$$

Итак при сделанном условии образующие поверхности (a) служат центральными касательными поверхности (b). Иными словами, **поверхности (a) и (b) взаимно сопряжены.**

Вычислим элемент ds_1 дуги поверхности (b). Для этого заметим прежде всего, что в силу (28) и формул (с) таблицы (А):

$$\frac{dx_1}{ds_1} = -\alpha, \ \frac{dy_1}{ds_1} = -\beta, \ \frac{dz_1}{ds_1} = -\gamma. \tag{29}$$

Но из формул (d) и (е) той же таблицы

$$\sum xx_1 = 0; \quad \sum \alpha x_1 = 0, \quad \sum x_1^2 = 1$$

дифференцированием по s получаем, пользуясь формулами (25) настоящего параграфа и формулами (с) и (е) той же таблицы:

$$\sum x\frac{dx_1}{ds} = 0, \ \sum \alpha\frac{dx_1}{ds} = -\frac{1}{\sin R}\sum x_1\xi, \ \sum x_1\frac{dx_1}{ds} = 0.$$

Кроме того, по формулам (19) настоящего параграфа,

$$\sum x_1\xi = \cos R,$$

поэтому окончательно

$$\sum x\frac{dx_1}{ds} = 0, \quad \sum \alpha\frac{dx_1}{ds} = -\operatorname{ctg} R, \quad \sum x_1\frac{dx_1}{ds} = 0.$$

Отсюда, умножая эти уравнения сначала на x, α и x_1 и затем на y, β и y_1, и наконец на z, γ и z_1, получим, складывая каждый раз произведения:

$$\frac{dx_1}{ds} = -\alpha\operatorname{ctg} R, \quad \frac{dy_1}{ds} = -\beta\operatorname{ctg} R, \quad \frac{dz_1}{ds} = -\gamma\operatorname{ctg} R. \tag{30}$$

При этом использовано то обстоятельство, что у триедра $O\ (x, y, z)$ оси координат Ox, Oy и Oz, по отношению к осям триедра $A\,(a, c, b)$, обладают координатами: ось Ox — x, α и x_1, ось Oy — y, β и y_1, ось Oz — z, γ и z_1.

Сравнение формул (29) и (30) дает:

$$ds_1 = ds\ \operatorname{ctg}\ R = ds_{10}e^{\omega p_1}. \tag{31}$$

Беря параметры обеих частей, получим:

$$p_1 = p - \frac{R_1}{\sin R_0\ \cos\ R_0}. \tag{32}$$

15. Из формул (26) и (32) выводим последовательно:

$$p'_1 - p = -\frac{R_1}{\operatorname{tg}\ R_0}; \ p' - p_1 = R_1\ \operatorname{tg}\ R_0,$$

откуда следует:

$$(p'-p)(p'-p_1)=-R_1^2; \quad \frac{p'-p_1}{p'-p}=-\operatorname{tg}^2 R_0, \tag{33}$$

чем доказывается

Теорема. *Параметр p' нормалии всегда заключается между параметрами p и p_1, сопряженных поверхностей (a) и (b).*

§ 4. Элементарное перемещение триедра образующей вдоль стрикционной линии.

16. Построим триедры A (a, c, b) и A' (a', c', b') двух бесконечно близких образующих a и a' поверхности (a). Вершины A и A' этих триедров — бесконечно близкие точки стрикционной линии (A). Положим:

$$AA'=d\sigma; \quad \angle\,(a,\ AA')=\theta.$$

Ребра a и a' наших триедров встречают прямую b в точках A и A' под прямыми углами, причем a' встречает b' тоже под прямым углом в точке A'. Образующая a' будет поэтому содержать центральную касательную к поверхности (b), но совпадет с ней по направлению лишь, если угол θ острый. В этом — геометрический смысл сделанного в § 3 условия относительно знака ε.

Далее заметим, что угол $\angle\,(a, a')$ равен ds, а угол $\angle\,(b, b')=ds_1$. Поэтому, сообщив триедру A (a, c, b) винтовое перемещение ds вокруг b как оси, мы заставим его грань $(a,\ b)$ совпасть с $(a',\ b)$. Сообщив в этом положении тому же триедру винтовое перемещение ds_1, вокруг a', как оси, мы заставим его совпасть с триедром A' $(a',\ c',\ b')$. Но в пределе ось a' перемещения ds_1 совпадет с a, а угол θ будет углом между образующей a и касательной в A к стрикционной линии (A). Доказана, следовательно,

Теорема. *Элементарное перемещение триедра A $(a,\ c,\ b)$, вдоль элемента $d\sigma$ стрикционной линии состоит из двух винтовых перемещений—одного ds с осью b и другого ds_1 с осью a.*

Это — основная теорема; аналитический ее вывод будет дан дальше.

17. Последняя из формул (25) и (31)

$$ds'=\frac{ds}{\sin R}, \quad ds_1=ds\operatorname{ctg} R$$

дают:

$$ds=ds'\sin R, \quad ds_1=ds'\cos R, \tag{34}$$

откуда следует:

$$ds^2+ds_1^2=ds'^2; \quad \frac{ds_1}{ds}=\operatorname{ctg} R, \tag{35}$$

но ds' — винт параметра p'. Полученными формулами доказывается

Теорема. *Элементарное перемещение триедра A $(a,\ c,\ b)$ образующей a есть винт $e^{\omega p'}$, вокруг бинормали d.*

§ 5. Обобщение формулы Frenet-Serret. Радиус изгиба поверхности. Свойства поверхности бинормалей. Эвольвента и эволюта. Уравнение Riccati.

18. Обратимся к формулам (20)

$$\xi = x_1 \cos R - x \sin R; \ \lambda = x_1 \sin R + x \cos R.$$

Беря производные по s и пользуясь формулами

$$\frac{dx}{ds} = \alpha; \ \frac{dx_1}{ds} = -\alpha \operatorname{ctg} R,$$

получим после небольших переделок:

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\sin R} - \lambda \frac{dR}{ds}; \ \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{\sin R} - \mu \frac{dR}{ds};$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\sin R} - \nu \frac{dR}{ds};$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \xi \frac{dR}{ds}; \ \frac{d\mu}{ds} = \eta \frac{dR}{ds}, \ \frac{d\nu}{ds} = \zeta \frac{dR}{ds}.$$

Формулы для $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$ и $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$ получаются таким же путем из остальных формул (20).

19. Для удобства ссылок мы сведем в таблицу (B) следующие формулы:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a) } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho}, \ \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\rho}, \ \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\rho}; \ ds' = \frac{ds}{\sin R}; \rho = \sin R. \\
\text{b) } \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{r}, \ \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{r}, \ \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{r}; \\
\quad \frac{1}{r} = \frac{dR}{ds}. \\
\text{c) } \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{r}, \ \frac{d\mu}{ds} = \frac{\eta}{r}, \frac{d\nu}{ds} = \frac{\zeta}{r}. \\
\text{d) } \frac{dx_1}{ds} = -\alpha \operatorname{ctg} R, \frac{dy_1}{ds} = -\beta \operatorname{ctg} R, \frac{dz_1}{ds} = -\gamma \operatorname{ctg} R; \\
\quad ds_1 = ds \operatorname{ctg} R. \\
\text{e) } \xi = x_1 \cos R - x \sin R, \eta = y_1 \cos R - y \sin R; \zeta = z_1 \cos R - z \sin R, \\
\quad \sum x\xi = -\sin R, \ \sum \xi x_1 = \cos R, \\
\text{f) } \lambda = x_1 \sin R + x \cos R, \mu = y_1 \sin R + y \cos R, \nu = z_1 \sin R + z \cos R, \\
\quad \sum x\lambda = \cos R, \ \sum x_1 \lambda = \sin R.
\end{array}\right\} \quad (B)$$

20. Число τ, определяемое равенством

$$\frac{1}{\tau}=\frac{dR}{ds}, \tag{36}$$

назовем по аналогии **радиусом изгиба** поверхности (a). Первые три строчки формул (В) по внешнему виду одинаковы с формулами Frenet-Serret. Для перехода от последних к первым достаточно все числа считать комплексными и, сверх того, радиусы ρ и τ кривизны и кручения кривой линии заменить радиусом кривизны и изгиба поверхности (a).

Итак **в дифференциальной геометрии линейчатой поверхности сохраняются формулы Frenet-Serret с указанными значениями радиусов первой и второй кривизны.**

21. Обозначим через ds'' элемент дуги при бинормали d поверхности (d) — геометрического места бинормалей. Так как эта поверхность, по определению (§ 3, п. 11), сопряжена с нормалией (c), то

$$\frac{d\lambda}{ds''}=-\xi.$$

Но по первой формуле (c) таблицы (В) $d\lambda=\xi dR$. Поэтому $-\xi ds''=\xi dR$, откуда $dR+ds''=0$, следовательно,

$$R+s''=a, \tag{37}$$

где a — произвольное постоянное. Доказана, следовательно,

Теорема. *Вдоль поверхности (a) остается постоянной сумма $R+s''$ угла R образующей с бинормалью и дуги s'' поверхности (d) бинормалей.*

Поверхность (d) назовем по аналогии **эволютой** поверхности (a), а последнюю — **эвольвентой** поверхности (d).

22. Каждая поверхность (a) обладает лишь одной эволютой (d), но у данной поверхности (d) есть ∞^2 эвольвент (a), так как, согласно формуле (37), a — комплексное постоянное число.

Замечая, что центральная нормаль c поверхности (a) встречает образующую a под прямым углом, а для поверхности (d) служит центральной касательной, заключаем на основании теорем § 2, п. 10:

Теорема. *Эвольвенты (a) данной поверхности (d) описываются лучами твердой щетки, ось с которой описывает сопряженную с (d) поверхность (c). Луч a щетки, описывающей эвольвенту (a), определяется своим углом*

$$R=a-s''$$

с прямой d.

23. Определим эвольвенты данной поверхности (d). Пусть

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u),\ \sum \chi^2=1$$

—уравнения поверхности (d), а (x', y', z') — координаты образующей (a) эвольвенты (a). Применим к (d) обозначения § 1. Обозначим, следовательно, через s ее дугу, через α, β, γ — координаты ее центральной нормали c_1, а через x_1, y_1, z_1 — координаты ее центральной касательной b_1 в точке D ее стрикционной линии.

На основании только что доказанной теоремы

$$x' = x\cos(a-s) + \alpha\sin(a-s),\ y' = y\cos(a-s) + \beta\sin(a-s),$$
$$z' = z\cos(a-s) + \gamma\sin(a-s), \tag{38}$$

где a — произвольное постоянное. Эти формулы решают задачу.

Исследование помощью них системы поверхностей (a) будет изложено дальше.

24. Пусть d и d' — две образующих эволюты (d), s и s' — соответствующие им дуги поверхности, D (d, c_1, b_1) — триедр образующей d. На прямой b_1 возьмем точку k и проведем через нее перпендикулярно к b_1 прямую l так, чтобы

$$\angle(d, l) = s' - s.$$

Координаты x'', y'', z'' прямой l будут, очевидно, определяться формулами:

$$x'' = x\cos(s'-s) + \alpha\sin(s'-s),\ y'' = \ldots,\ z'' = \ldots$$

Давая s' всевозможные значения, получим коноид прямых l с осью b_1. Назовем этот коноид **развертывающим** коноидом поверхности (d) при d. Нетрудно доказать, что, *если принять поверхность (d) за неподвижный аксоид, а коноид, только-что построенный, за подвижной аксоид движения твердого тела M, то лучи последнего, входящие в состав щетки с осью b_1, опишут эвольвенты поверхности (d).*

На доказательстве этой теоремы кинематической геометрии останавливаться не будем.

25. Формулы (a), (b) и (c) таблицы (B) показывают, что числа

$$\alpha, \xi, \lambda;\ \beta, \eta, \mu;\ \gamma, \zeta, \nu$$

— три системы интегралов следующих уравнений:

$$\frac{dl}{ds} = \frac{m}{\rho},\ \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{\rho} - \frac{n}{\tau},\ \frac{dn}{ds} = \frac{m}{\tau} \tag{38a}$$

при условии

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Можно поэтому, следуя Darboux, свести три дифференциальных уравнения относительно l, m, n к одному уравнению относительно S, определив S формулой:

$$S = \frac{l + im}{1 - n} = \frac{1 + n}{l - im} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{39}$$

Дифференцируя S по s и пользуясь ур-ниями (38а), получим после небольших преобразований:

$$\frac{dS}{ds}+\frac{iS}{\rho}+\frac{i(S^2-1)}{2\tau}=0. \tag{40}$$

Это — уравнение типа Riccati. Здесь предполагается, что даны функции

$$s=s(u),\ R=R(u) \quad (u \text{ — вещественно}). \tag{40a}$$

Проинтегрировав ур-ние (40), найдем l, m и n из (39), сравнивая порознь члены, не содержащие i и содержащие i.

Ур-ния (40а) называются **внутренними** уравнениями искомой поверхности (a). Определение последней по заданным внутренним ее уравнениям приводится, следовательно, к уравнению Riccati (40).

26. Положим:

$$x'=\frac{dx}{ds},\ y'=\frac{dy}{ds},\ z'=\frac{dz}{ds};$$

$$x''=\frac{d^2x}{ds^2},\ y''=\frac{d^2y}{ds^2},\ z''=\frac{d^2z}{ds^2};$$

$$x'''=\frac{d^3x}{ds^3},\ y'''=\frac{d^3y}{ds^3},\ z'''=\frac{d^3z}{ds^3}$$

и вычислим определители:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix}=\Delta_1,\quad \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}=\Delta_2. \tag{41}$$

На основании формул таблиц (А) и (В), получим:

$$x'=\alpha,\ y'=\beta,\ z'=\gamma$$

$$x''=\frac{\xi}{\sin R},\ y''=\frac{\eta}{\sin R},\ z''=\frac{\zeta}{\sin R}$$

$$x'''=-\frac{1}{\sin^2 R}\left(\alpha+\lambda\sin R\frac{dR}{ds}+\xi\cos R\frac{dR}{ds}\right),\ y'''=\dots,\ z'''=\dots$$

Подставляя эти значения в (41), получим:

$$\Delta_1=\operatorname{ctg}R,\quad \Delta_2=-\frac{1}{\sin^2 R}\frac{dR}{ds}=\frac{d(\operatorname{ctg}R)}{ds}. \tag{42}$$

§ 6. Стрикционная линия. Теоремы O. Bonnet.

27. Пусть A — центр образующей a поверхности (a), b — центральная касательная в A, θ — угол между образующей a и касательной At к стрикционной линии,

$$ds=ds_0e^{\omega p};\ ds_1=ds_{10}e^{\omega p_1}$$

элементы дуг при A поверхности (a) и сопряженной поверхности (b), $d\sigma$ — элемент дуги при A стрикционной линии.

Согласно основной теореме § 4, элементарное перемещение триедра образующей a вдоль $d\sigma$ слагается из двух винтовых перемещений: 1) ds — вокруг оси b и 2) ds_1 — вокруг оси a. Но прямые a и b встречаются в точке A под прямым углом, поэтому перемещение $d\sigma$ точки A слагается из двух взаимно-перпендикулярных перемещений: $d\sigma_1$ — вдоль b и $d\sigma_2$ — вдоль a, причем

$$d\sigma_1 = ds_0 p; \quad d\sigma_2 = ds_{10} p_1.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = \frac{ds_{10} p_1}{ds_0 p}.$$

Но, как мы знаем:

$$ds_1 = ds \operatorname{ctg} R,$$

поэтому

$$ds_{10} = ds_0 \operatorname{ctg} R_0.$$

Кроме того,

$$p_1 - p = \frac{-R_1}{\sin R_0 \cos R_0},$$

поэтому формула для $\operatorname{ctg} \theta$ примет следующий вид:

$$\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{ctg} R_0 - \frac{R_1}{p \sin^2 R_0}. \tag{43}$$

В виду основного значения этой формулы, дадим ее аналитический вывод. Касательная $At(x', y', z')$ лежит в плоскости угла (a, b), поэтому ее координаты будут:

$$x' = x \cos \theta + x_1 \sin \theta; \; y' = y \cos \theta + y_1 \sin \theta; \; z' = z \cos \theta + z_1 \sin \theta.$$

Отсюда, дифференцируя по s и пользуясь формулами таблиц (А) и (В), получим:

$$\frac{dx'}{ds} = \alpha \sin \theta (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} R) + \frac{d\theta}{ds}(-x \sin \theta + x_1 \cos \theta); \tag{44}$$

$$\frac{dy'}{ds} = \ldots; \; \frac{dz'}{ds} \ldots$$

Угол θ должен быть определен из условия, что касательная At к стрикционной линии должна описать развертывающую поверхность (t), для которой стрикционная линия служит ребром возврата. Поэтому элемент ds' поверхности (t) должен быть вещественным. Но из (44) следует по формулам таблицы (А):

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2 \theta (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} R)^2.$$

Отсюда

$$ds'^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta \, ds^2 (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} R)^2.$$

Но ds' и $d\theta$ вещественны, вещественным должно быть поэтому

$$ds(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R) = ds_0 e^{\omega p}(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R).$$

Отсюда заключаем:

$$\begin{gathered} e^{\omega p}(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R) = \operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0, \\ ds'^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, ds_0^2 (\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)^2. \end{gathered} \tag{45}$$

Определяя из первой $\operatorname{ctg}\theta$, вновь придем к формуле (43).

28. Положим:

$$\frac{dx'}{ds'} = \alpha', \quad \frac{dy'}{ds'} = \beta', \quad \frac{dz'}{ds'} = \gamma';$$

$$x'_1 = y'\gamma' - z'\beta',\ y'_1 = z'\alpha' - x'\gamma',\ z'_1 = x'\beta' - y'\alpha'.$$

Напомним, что теперь α', β', γ' — координаты главной нормали AN, а x'_1, y'_1, z'_1, — координаты бинормали AB стрикционной линии (§ 1, п. 7). Но

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{ds} = \alpha'\frac{ds'}{ds},$$

поэтому из (44) получим на основании (45):

$$\alpha' = \alpha \sin\theta(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)\frac{ds_0}{ds'} - \frac{d\theta}{ds'}(x\sin\theta - x_1\cos\theta),$$

$$\beta' = \beta \sin\theta(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)\frac{ds_0}{ds'} - \frac{d\theta}{ds'}(y\sin\theta - y_1\cos\theta),$$

$$\gamma' = \gamma \sin\theta(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)\frac{ds_0}{ds'} - \frac{d\theta}{ds'}(z\sin\theta - z_1\cos\theta).$$

Обозначим через

$$x'' = \sum x\alpha',\ y'' = \sum a\alpha',\ \ z'' = \sum x_1\alpha'$$

координаты главной нормали AN относительно триедра A $(a,\ c,\ b)$ образующей a.

Предыдущие формулы, на основании таблицы (A), дают:

$$\begin{gathered} x'' = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds'};\ y'' = \sin\theta(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)\frac{ds_0}{ds'}, \\ z'' = \cos\theta\frac{d\theta}{ds'};\ \sum x''^2 = 1. \end{gathered} \tag{46}$$

Заметим, что касательная At к стрикционной линии обладает относительно того триедра A $(a,\ c,\ b)$ координатами: $\cos\theta$, 0, $\sin\theta$. Но триедр A $(t,\ N,\ B)$, составленный касательной At, главной нормалью AN и бинормалью AB в A к стрикционной линии, конгруэнтен координатному триедру $O\,(x,\ y,\ z)$. Поэтому если $x''',\ y''',\ z'''$ — координаты относительно триедра $A\,(a,\ c,\ b)$ бинормали AB, то

$$\begin{vmatrix} \cos\theta, & 0, & \sin\theta \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix} = 1,$$

откуда в силу формул (46):

$$x''' = -\sin^2\theta\,(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)\frac{ds_0}{ds'}, \quad y''' = -\frac{d\theta}{ds'},$$

$$z''' = \sin\theta\cos\theta\,(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}R_0)\frac{ds_0}{ds'};\ \sum x'''^2 = 1. \tag{47}$$

Пусть r — радиус первой кривизны в A стрикционной линии. Элемент ds', как угол между двумя смежными касательными, равен углу кривизны, поэтому

$$ds' = \frac{d\sigma}{r}. \tag{48}$$

29. Из формул (46) и (47) выводим следующие предложения (O. Bonnet)[1].

Теорема. *Стрикционная линия поверхности* (a) *будет и геодезической, если она пересекает все образующие под одним и тем же углом* θ.

Верна и обратная теорема.

В самом деле, если угол θ не изменяется, то по формулам (46)

$$x'' = z'' = 0,$$

т. е. главная нормаль в A к стрикционной совпадает с центральной нормалью в A к поверхности (a).

30. **Теорема.** *Если стрикционная линия — асимптотика поверхности* (a), *то*

$$\theta = R_0 = -\int\frac{d\sigma}{r}. \tag{49}$$

В самом деле, в этом случае бинормаль $AB\,(x''',\ y''',\ z''')$ должна быть направлена по центральной нормали к поверхности, т. е. должно быть:

$$x''' = z''' = 0;\ y''' = 1.$$

Но ур-ния (47) дают при этом предположении:

$$\theta = R_0;\quad \frac{d\theta}{ds'} = r\frac{d\theta}{d\sigma} = -1,$$

что доказывает теорему.

---

[1] *Bianchi*, Lezioni di Geometria differentiale (P. I, p. 386., 3 ed.).

§ 7. Развертывающиеся поверхности. Кривые Bertrand'а.

31. Применим полученные результаты к развертывающейся поверхности (a). В этом случае ее стрикционной линией будет ее **ребро возврата** (A). Пусть $d\sigma$ — элемент дуги, r и t — радиусы кривизны и кручения линии (A) в ее точке A. Триедр A (a, c, b) поверхности (a) в a составлен теперь из касательной a (x_1, y_1, z_1), главной нормали c (α, β, γ) и бинормали b (x, y, z), линии (A) в точке A. Обозначим через ds и ds_1 попрежнему элементы дуг при A поверхности (a) и сопряженной поверхности (b);

$$ds = ds_0 e^{\omega p}; \quad ds_1 = ds \operatorname{ctg} R$$

согласно общей теории. Но в данном случае параметр p равен нулю, поэтому

$$ds = ds_0, \; ds_1 = ds_0 \operatorname{ctg} R.$$

Заметим, что ds_0, как угол между двумя бесконечно близкими касательными линии (A), равен углу $\frac{d\sigma}{r}$ ее кривизны в точке A. Поэтому

$$ds = \frac{d\sigma}{r}; \quad ds_1 = \frac{d\sigma}{r} \operatorname{ctg} R. \tag{50}$$

Элементарное перемещение триедра A (a, c, b) вдоль линии (A) состоит, как мы видели (§ 4, п. 16), из двух:

1) вращения ds вокруг b, как оси, и

2) вращения ds_1 вокруг касательной a.

Первое в данном случае — чистое вращение, второе — винтовое, состоящее, как хорошо известно из теории кривых двойной кривизны, из угловой скорости $-\frac{1}{t}$, вращающей триедр вокруг a на элементарный угол $-\frac{d\sigma}{t}$, и поступательной скорости вдоль a, сообщающей триедру поступательное перемещение $d\sigma$. Отсюда заключаем:

$$ds_1 = -\frac{d\sigma}{t} + \omega\, d\sigma = -\frac{d\sigma}{t} e^{-\omega t}. \tag{51}$$

Сравнение с (50) дает:

$$\operatorname{ctg} R = -\frac{r}{t} e^{-\omega t}. \tag{52}$$

Заметим, что в данном случае бинормаль d поверхности (a) служит для линии (A) осью угла ds' между бесконечно близкими нормалями c и c' к (A).

Обратимся теперь к формулам:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha; \quad \frac{dx_1}{ds} = -\alpha \operatorname{ctg} R = \alpha \frac{r}{t} e^{-\omega t}.$$

Вставляя сюда вместо ds его значение $\frac{d\sigma}{r}$, получим первую из формул:

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{\alpha}{r},\ \frac{dy}{d\sigma}=\frac{\beta}{r},\ \frac{dz}{d\sigma}=\frac{\gamma}{r}$$

$$\frac{dx_1}{d\sigma}=\frac{\alpha}{t}e^{-\omega t};\ \frac{dy_1}{d\sigma}=\frac{\beta}{t}e^{-\omega t};\ \frac{dz_1}{d\sigma}=\frac{\gamma}{t}e^{-\omega t}. \tag{C}$$

Остальные получатся тем же путем. Далее, из формул

$$\sum x\alpha=0;\quad \sum x_1\alpha=0;\quad \sum \alpha^2=1$$

дифференцированием по σ получим на основании (C):

$$\sum x\frac{d\alpha}{d\sigma}=-\sum\alpha\frac{dx}{d\sigma}=-\frac{1}{r};\ \sum x_1\frac{d\alpha}{d\sigma}=-\sum\alpha\frac{dx_1}{d\sigma}=$$
$$=-\frac{1}{t}e^{-\omega t},\ \sum\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma}=0.$$

Отсюда, применяя обычный прием, найдем:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}=-\frac{x}{r}-\frac{x_1}{t}e^{-\omega t},\ \frac{d\beta}{d\sigma}=-\frac{y}{r}-\frac{y_1}{t}e^{-\omega t},$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma}=-\frac{z}{r}-\frac{z_1}{t}e^{-\omega t}. \tag{C'}$$

Формулы (C) и (C′) — основные. По ним оси триедра A (a, c, b) линии (A) в точке A определяются как по положению в пространстве, так и по направлению. Если в них сравнить вещественные части, то получатся формулы Frenet-Serret. Мы будем поэтому называть формулы (C) и (C′) **обобщением формул** Frenet-Serret.

32. В виду важности формул (C) и (C′) дадим здесь их вывод, непосредственно исходя из формул Frenet-Serret.

Пусть линия (A) дана уравнениями:

$$X=X(\sigma);\ Y=Y(\sigma);\ Z=Z(\sigma),$$

где X, Y и Z — координаты точки A. Пусть направляющими косинусами касательной a, главной нормали c и бинормали (b) будут соответственно:

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\ \xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0;\ \lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0.$$

При этом обозначении получим:

$$x=\alpha_0+\omega(Y\gamma_0-Z\beta_0),\quad \alpha=\xi_0+\omega(Y\zeta_0-Z\eta_0),$$
$$x_1=\lambda_0+\omega(Y\nu_0-Z\mu_0). \tag{a}$$

Причем, как известно,

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0=\frac{dX}{d\sigma}; \quad \beta_0=\frac{dY}{d\sigma}; \quad \gamma_0=\frac{dZ}{d\sigma};\\ &\frac{d\alpha_0}{d\sigma}=\frac{\xi_0}{r},\ \frac{d\beta_0}{d\sigma}=\frac{\eta_0}{r},\ \frac{d\gamma_0}{d\sigma}=\frac{\zeta_0}{r};\\ &\frac{d\lambda_0}{d\sigma}=\frac{\xi_0}{t},\ \frac{d\mu_0}{d\sigma}=\frac{\eta_0}{t},\ \frac{d\nu_0}{d\sigma}=\frac{\zeta_0}{t}. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Дифференцируя по σ первую и третью формулы (a), получим на основании формул (b):

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{\xi_0+\omega(Y\zeta_0-Z\eta_0)}{r};\ \frac{dx_1}{d\sigma}=\frac{\xi_0+\omega(Y\zeta_0-Z\eta_0)}{t}+\omega(\beta\nu_0-\gamma\mu_0).$$

Первая из этих формул дает прямо:

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{\alpha}{r}. \tag{c}$$

По второй

$$\frac{dx_1}{d\sigma}=\frac{\alpha}{t}-\omega\xi_0, \tag{c'}$$

так как

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0,\\ \xi_0, & \eta_0, & \zeta_0,\\ \lambda_0, & \mu_0, & \nu_0 \end{vmatrix}=1.$$

Но $\omega^2=0$, поэтому, как показывает вторая из формул (a):

$$\omega\alpha=\omega\xi_0,$$

следовательно, вместо формулы (c′), получим:

$$\frac{dx_1}{d\sigma}=\frac{\alpha}{t}-\omega\alpha=\frac{\alpha}{t}e^{-\omega t}. \tag{d}$$

Формулы (c) и (d) совпадают с первыми из формул (C).

33. Дадим здесь приложение формул (C) и (C′) к решению задачи Bertrand'a.

Для данной линии (L) найти другую (L') так, чтобы их главные нормали в соответствующих точках A и A' совпадали.

Обозначим значком $'$ все числа и буквы, относящиеся к кривой L'. Пусть A (a, c, b) и $A'(a', c', b')$ — триедры обеих кривых в точках A и A'. По заданию прямые c и c' совпадают. Для определенности примем, что они одинаково направлены, т. е. что

$$\alpha'=\alpha;\ \beta'=\beta;\ \gamma'=\gamma. \tag{a'}$$

Обозначим через ε угол $\angle(a, a')$ На основании только-что сказанного, винтовое перемещение триедра A (a, c, b) вокруг оси c на угол ε приведет его к совпадению с триедром $A'(a', c', b')$.

Теорема. *Угол ε — постоянная величина.*

Иными словами, триедры неизменно связаны друг с другом.

Эта теорема прямо следует из теоремы § 2 (п. 10). Нетрудно доказать ее непосредственно. В самом деле,

$$\sum xx' = \cos\varepsilon,$$

откуда дифференцированием получим в силу (C):

$$d\cos\varepsilon = \frac{d\sigma}{r}\sum \alpha x' + \frac{d\sigma'}{r'}\sum \alpha' x,$$

или на основании формул (a'):

$$d\cos\varepsilon = \frac{d\sigma}{r}\sum \alpha' x' + \frac{d\sigma'}{r'}\sum \alpha x = 0.$$

Из доказанной теоремы вытекают хорошо известные свойства линий (L) и (L'): *расстояние AA' их соответствующих точек, угол между направлениями касательных, а также между их плоскостями соприкосновения в точках A и A' постоянны.*

34. Далее, заметим, что

$$\sum x'x = \cos\varepsilon; \quad \sum x'x_1 = \sin\varepsilon; \quad \sum x'\alpha = 0.$$

Отсюда выведем:

$$x' = x\cos\varepsilon + x_1\sin\varepsilon;\ y' = \ldots,\ z' = \ldots \tag{b'}$$

Но, так как

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ x_1', & y_1', & z_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix} = 1,$$

то отсюда на основании (a') выводим:

$$x_1' = -x\sin\varepsilon + x_1\cos\varepsilon. \tag{c'}$$

Возьмем производную по σ от формул (b'). На основании формул (C) и (a') получим:

$$\frac{1}{r'}\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{\sin\varepsilon}{t}e^{-\omega t}.$$

Левая часть — вещественное число; таковой же поэтому должна быть и правая часть. Приравняв нулю коэффициент при ω в правой части, находим:

$$\frac{\varepsilon_1\sin\varepsilon_0}{r} - \varepsilon_1\frac{\cos\varepsilon_0}{t} + \sin\varepsilon_0 = 0. \tag{d'}$$

Здесь ε_0 и ε_1 определяются равенством:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \omega\varepsilon_1.$$

Уравнением (d′) доказывается характерное свойство линий (L) Bertrand'а: их кривизна и кручение линейно связаны друг с другом.

Обратно, если дана кривая Bertrand'а уравнением:

$$\frac{A}{r}+\frac{B}{t}+C=0,$$

где A, B и C — данные постоянные, то угол ε найдем из формул:

$$\operatorname{tg}\varepsilon_0=-\frac{A}{B};\quad \varepsilon_1=\frac{A}{C};\quad \varepsilon=\varepsilon_0+\omega\varepsilon_1.$$

35. Возьмем производную по σ от обеих частей формулы (c′) (п. 34). Это дает на основании тех же формул (c):

$$\frac{1}{t'}e^{-\omega t'}\frac{d\sigma'}{d\sigma}=-\frac{\sin\varepsilon}{r}+\frac{\cos\varepsilon}{t}e^{-\omega t}.$$

Сравнение вещественных частей и коэффициентов при ω даст:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{t'}\frac{d\sigma'}{d\sigma}&=-\frac{\sin\varepsilon_0}{r}+\frac{\cos\varepsilon_0}{t},\\ \frac{d\sigma'}{d\sigma}&=\varepsilon_1\frac{\cos\varepsilon_0}{r}+\frac{\varepsilon_1\sin\varepsilon_0}{t}+\cos\varepsilon_0.\end{aligned}\right\}\tag{e′}$$

Перепишем уравнение (d′) (п. 34):

$$0=\frac{\varepsilon_1\sin\varepsilon_0}{r}-\frac{\varepsilon_1\cos\varepsilon_0}{t}+\sin\varepsilon_0.$$

Сравнение с (e′) дает:

$$\frac{1}{t'}\frac{d\sigma'}{d\sigma}=\frac{\sin\varepsilon_0}{\varepsilon_1};\quad \cos\varepsilon_0\frac{d\sigma'}{d\sigma}=1+\frac{\varepsilon_1}{r}.\tag{f′}$$

Переход от триедра линии (L) к триедру линии (L') определяется углом ε. Очевидно, что обратный переход будет определяться углом

$$-\varepsilon=-\varepsilon_0-\omega\varepsilon_1.$$

Но в таком случае формулы (f′) перейдут в следующие:

$$\frac{1}{t}\frac{d\sigma}{d\sigma'}=\frac{\sin\varepsilon_0}{\varepsilon_1},\quad \cos\varepsilon_0\frac{d\sigma}{d\sigma'}=1-\frac{\varepsilon_1}{r'}.\tag{g′}$$

Из (f′) и (g′) перемножением получаем:

$$\frac{1}{tt'}=\frac{\sin^2\varepsilon_0}{\varepsilon_1^2};\quad \cos^2\varepsilon_0=\left(1+\frac{\varepsilon_1}{r}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r'}\right).\tag{k′}$$

Доказаны, следовательно, теоремы Schell'я и Mannheim'a.[1]

[1] Ср. *Blanchi,* loc. cit., p. 65.

ГЛАВА II.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ.

§ 8. $R = \mathrm{const}$.

1. Здесь мы займемся решением ряда задач по определению поверхностей (a) в различных случаях.

Найдем поверхности (a) с постоянным углом R. Обращаясь к формулам таблицы (В) (гл. 1, § 5, п. 19), заметим, что

$$\rho = \sin R; \quad \frac{1}{r} = 0. \tag{1}$$

Поэтому на основании формул (с) той же таблицы:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\mu}{ds} = \frac{d\nu}{ds} = 0,$$

откуда заключаем:

$$\lambda = a; \ \mu = b; \ \nu = c, \tag{2}$$

где a, b и c — произвольные постоянные, конечно, комплексные. Этими формулами доказывается

Теорема. *У поверхностей (a) бинормаль (d) — неизменная прямая в пространстве.*

Следствие. *Образующие поверхности (a) наклонены под неизменным углом R к прямой d.*

Примем ее за ось z координат. Тогда

$$\lambda = 0; \ \mu = 0; \ \nu = 1. \tag{3}$$

Но, по определению, R — угол между образующей a и бинормалью (d). Следовательно,

$$\cos R = \sum x\lambda = z. \tag{4}$$

Так как $\sum x^2$ равна единице, то можно положить:

$$x = \sin R \cos\varphi; \ y = \sin R \sin\varphi; \ z = \cos R, \tag{5}$$

откуда для центральной нормали c получим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds} = -\sin R \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}; \\ \beta &= \frac{dy}{ds} = \sin R \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds}, \ \gamma = \frac{dz}{ds} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Но сумма $\sum \alpha^2$ равна тоже единице, поэтому

$$\sin^2 R \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1,$$

откуда

$$\varphi=\frac{\varepsilon s}{\sin R}+m \quad (\varepsilon=\pm 1, \ m=\mathrm{const}). \tag{7}$$

Подстановка этого значения в (5) дает:

$$x=\sin R\cos\left(\frac{\varepsilon s}{\sin R}+m\right), \ y=\sin R\sin\left(\frac{\varepsilon s}{\sin R}+m\right), \ z=\cos R. \tag{8}$$

Эти формулы решают задачу.

§ 9. Поверхности с постоянным отношением $\frac{\rho}{r}$.

2. В этом случае постоянно отношение

$$\frac{\rho}{r}=\sin R\frac{dR}{ds}.$$

Полагая:

$$\frac{\rho}{r}=\operatorname{tg} a \qquad (a=\mathrm{const}), \tag{9}$$

получаем:

$$\sin R\,\frac{dR}{ds}=\operatorname{tg} a, \tag{10}$$

откуда

$$\cos R=-s\operatorname{tg} a+a' \qquad (a'=\mathrm{const}). \tag{11}$$

Далее формулы (a) и (c) таблицы (B) дают посредством деления

$$\frac{d\lambda}{d\alpha}=\frac{d\mu}{d\beta}=\frac{d\nu}{d\gamma}=\frac{\rho}{r}=\operatorname{tg} a,$$

откуда интегрированием получим:

$$\lambda-\alpha\operatorname{tg} a=b, \ \mu-\beta\operatorname{tg} a=b', \ \nu-\gamma\operatorname{tg} a=b'',$$

где b, b' b'' — произвольные постоянные. Примем за ось z ось винта (b, b', b'').

Тогда

$$b=0, \ b'=0,$$

и предыдущие формулы примут вид:

$$\lambda-\alpha\operatorname{tg} a=0; \ \mu-\beta\operatorname{tg} a=0; \ \nu-\gamma\operatorname{tg} a=b''. \tag{12}$$

Так как

$$\sum\lambda^2=\sum\alpha^2=1; \ \sum\lambda\alpha=0,$$

то из (12) следует:

$$1+\operatorname{tg}^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}=b''^2.$$

Подставляя значение

$$b''=\frac{\varepsilon}{\cos a} \quad (\varepsilon=\pm 1)$$

в (12), придадим им следующий вид:

$$\lambda - \alpha \operatorname{tg} a = 0;\ \mu - \beta \operatorname{tg} a = 0;\ \nu - \gamma \operatorname{tg} a = \frac{\varepsilon}{\cos a} \tag{12'}$$

3. Умножим эти уравнения сначала на x, y, z, затем на α, β, γ и наконец на λ, μ, ν.

Складывая каждый раз результаты, получим:

$$z = \varepsilon \cos a \cos R;\ \gamma = -\varepsilon \sin a;\ \nu = \varepsilon \cos a, \tag{13}$$

потому что

$$\sum x\lambda = \cos R; \quad \sum x\alpha = 0; \quad \sum \alpha\lambda = 0.$$

Так как $\sum \alpha^2 = 1$, то можно положить на основании значения γ:

$$\alpha = \cos a \cos \varphi;\ \beta = \cos a \sin \varphi;\ \gamma = -\varepsilon \sin a, \tag{14}$$

откуда, дифференцируя по s, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\xi}{\sin R} = -\cos a \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}; \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\eta}{\sin R} = \cos a \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds};\quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\sin R} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Но сумма $\sum \xi^2 = 1$, поэтому

$$\frac{1}{\sin^2 R} = \cos^2 a \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2;\quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon'}{\cos a \sin R} \quad (\varepsilon' = \pm 1). \tag{15'}$$

Из формулы (10) следует:

$$\frac{ds}{\cos a \sin R} = \frac{dR}{\sin a}, \tag{15''}$$

поэтому $d\varphi = \varepsilon' \dfrac{dR}{\sin a}$,

откуда

$$\varphi = \frac{\varepsilon' R}{\sin a} + C \quad (C = \text{const}). \tag{16}$$

Вставляя это значение в (15), найдем:

$$\xi = -\varepsilon' \sin \varphi,\ \eta = \varepsilon' \cos \varphi,\ \zeta = 0, \tag{17}$$

т. е. главные нормали искомых поверхностей образуют щетку с осью z.

Вычислим теперь числа λ, μ, ν по формулам (12'). Это даст:

$$\lambda = \sin a \cos \varphi;\ \mu = \sin a \sin \varphi;\ \nu = \varepsilon \cos a. \tag{18}$$

4. Обратимся теперь к формулам (e) и (f) таблицы (B) (гл. 1, § 5, п. 19).

$$\xi = -x \sin R + x_1 \cos R;\ \eta = -y \sin R + y_1 \cos R;$$
$$\zeta = -z \sin R + z_1 \cos R;$$

$$\lambda = x\cos R + x_1 \sin R;\ \mu = y\cos R + y_1 \sin R;$$
$$\nu = z\cos R + z_1 \sin R.$$

Из них выводим:

$$x = \lambda\cos R - \xi\sin R;\ y = \mu\cos R - \eta\sin R;\ z = \nu\cos R - \zeta\sin R.$$

Подставляя выше найденные значения чисел ξ, η, ζ, λ, μ и ν, получим:

$$\left.\begin{aligned} &x = \sin a\cos\varphi\cos R + \varepsilon'\sin\varphi\sin R;\\ &y = \sin a\sin\varphi\cos R - \varepsilon'\cos\varphi\sin R,\ z = \varepsilon\cos a\cos R. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Эти формулы решают задачу, так как, согласно формулам (11) и (16),

$$\cos R = -s\operatorname{tg} a + a';\ \varphi = \frac{\varepsilon' R}{\sin a} + C.$$

Заметим, что при a, равном нулю, выражение функции φ становится иллюзорным. В этом случае R постоянно, поэтому для определения φ следует обратиться ко второй из формул (15′), которая даст:

$$\varphi = \frac{\varepsilon' s}{\sin R} + C,$$

а формулы (19) обратятся в формулы (8) § 8, чего и следовало ожидать.

§ 10. Определение поверхностей с общей нормалией. Обобщенная задача Bertrand'a.

5. Пусть поверхность (a) — общая нормалия поверхностей (m'), заданная уравнениями:

$$x = x(u);\ y = y(u);\ \ z = z(u);\ \sum x^2 = 1.$$

Сохраним все прежние обозначения и условимся значком $'$ указывать числа, относящиеся к определенной поверхности (m'). Заметим прежде всего, что на основании свойств подвижного угла (гл. 1, § 2, 10) образующие искомых поверхностей, соответствующие одной и той же образующей a данной поверхности, — лучи твердой щетки с осью a. Поэтому, если m' и m'' — соответствующие a образующие двух поверхностей (m') и (m''), то

$$\angle(m', m'') = \varepsilon = \text{const.} \quad (20)$$

Далее, согласно заданию, для поверхности (m') центральной нормалью в центре M' прямой m' служит образующая a, поэтому бинормалью в m' поверхности (m') будет центральная касательная b, а главной нормалью — центральная нормаль c к (a) в центре A образующей a. Следовательно, для поверхности (m') имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' = x,\ \ \beta' = y,\ \gamma' = z,\\ &\xi' = \alpha,\ \ \ \eta' = \beta,\ \zeta' = \gamma,\\ &\lambda' = x_1,\ \mu' = y_1,\ \nu' = z_1. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Отсюда в силу формул (e) и (f) таблицы (B) (гл. 1, § 5, п. 19) и формул (c) таблицы (A) (гл. 1, § 1, п. 6) для образующей m' (x', y', z') поверхности (m'):

$$\sum x'x = 0, \quad \sum \dot{x}' \alpha = -\sin R', \quad \sum x' x_1 = \cos R',$$

где R' — угол между m' и ее бинормалью — в данном случае есть угол между прямыми m' и b,

$$\angle R' = \angle (m', b). \tag{22}$$

Из предшествующих уравнений обычным путем придем к следующим:

$$\left.\begin{array}{c} x' = x_1 \cos R' - \alpha \sin R'; \; y' = y_1 \cos R' - \beta \sin R'; \\ z' = z_1 \cos R' - \gamma \sin R'. \end{array}\right\} \tag{23}$$

Остается вычислить R'. Пусть

$$s_1 = \int_0^s ds \operatorname{ctg} R \tag{24}$$

— дуга поверхности (b), сопряженной с данной поверхностью. Согласно общей теореме (гл. 1, § 5, п. 21), должна оставаться постоянной сумма $(R' + s_1)$ вдоль поверхности (m'). Итак

$$R' + s_1 = c' \qquad (c' = \text{const}), \tag{25}$$

откуда следует:

$$\frac{dR'}{ds} + \operatorname{ctg} R = 0. \tag{26}$$

Формулами (23) и (26) задача вполне решена. Давая числу c' различные значения, получим все поверхности (m). Каждая из них отвечает определенному параметру c'.

6. Пусть $d\sigma'$ — элемент дуги поверхности (m'), p — параметр образующей a данной поверхности. Так как последняя служит для (m') нормалией, то

$$ds = \frac{d\sigma'}{\sin R'}, \tag{27}$$

откуда вытекает:

$$p = \pi' - \frac{R_1'}{\operatorname{tg} R_0'}, \tag{28}$$

где π' — параметр образующей m' поверхности (m'). Далее, заметим, что центральная касательная (b) поверхности (a) — тоже луч щетки с осью a. Поэтому

$$\angle (b, m') + \angle (m', m'') + \angle (m'', b) = 0,$$

что в силу равенств (20) и (22) дает:

$$R'' = R' + \varepsilon, \tag{29}$$

где

$$R'' = \angle (b, m'').$$

Но для поверхности (m'') формула (25) дает:

$$R'' + s_1 = c'', \qquad (c'' = \text{const}),$$

следовательно,

$$c'' - c' = \varepsilon, \tag{30}$$

7. Радиус изгиба r' поверхности (m') в m' определяется формулой

$$\frac{1}{r'} = \frac{dR'}{d\sigma'}.$$

Поэтому из формул (26) и (27) выводим:

$$\frac{\sin R'}{r'} + \operatorname{ctg} R = 0. \tag{31}$$

Далее заметим, что стрикционная линия (t') поверхности (m') — ортогональная траектория поверхности (a). Обозначим через S' угол (t', c) между касательной к (t') в центре M' прямой (m') и центральной нормалью (c) в центре A образующей a поверхности (a). На основании общей теоремы (гл. 1, § 2, п. 8)

$$e^{\omega p} \cos S' = \cos S_0'. \tag{32}$$

Беря параметры обеих частей этого уравнения и замечая, что в данном случае

$$S_1' = AM' = R_1',$$

получим:

$$p = R_1' \operatorname{tg} S_0'. \tag{33}$$

Введем угол θ' между образующей m' и касательной t'. Нетрудно доказать, что

$$S' = \frac{\pi}{2} + R' - \theta'. \tag{34}$$

Поэтому формулы (32) и (33) примут вид:

$$e^{\omega p} \sin (R' - \theta') = \sin (R_0' - \theta') \tag{32'}$$

$$p + \frac{R_1'}{\operatorname{tg} (R_0' - \theta')} = 0. \tag{33'}$$

8. Соотношения (27), (28), (31), (32) и (32') объединим в следующем предложении:

Теорема. *Вдоль образующей a данной поверхности у всех поверхностей (m') одинаковы:*

1) *Отношения* $\dfrac{d\sigma'}{\sin R'} = ds.$

2) *Разности* $\pi' - \dfrac{R_1'}{\operatorname{tg} R_0'} = p.$

3) *Отношения* $\dfrac{\sin R'}{r'} = -\operatorname{ctg} R.$

4) *Отношения* $\dfrac{\cos S'}{\cos S_0'}=e^{-\omega p}$.

5) *Отношения* $\dfrac{\sin(R'-\theta')}{\sin(R_0'-\theta')}=e^{-\omega p}$.

9. Исследуем те поверхности (m'), у которых соответствующие прямой a данной нормалии (a) образующие обладают одним и тем же параметром. Пусть (m') и (m'') — две таких поверхности, m' и m'' — их образующие, являющиеся лучами твердой щетки с осью a, M' и M'' — их центральные точки, лежащие на прямой a, A — центр последней; следовательно,

$$AM'=R_1';\ AM''=R_1''.$$

Согласно полученной теореме,

$$\frac{ds'}{\sin R'}=\frac{ds''}{\sin R''}$$

или

$$\frac{ds''}{ds'}=\frac{\sin R''}{\sin R'}=\frac{\sin(R'+\varepsilon)}{\sin R'} \tag{35}$$

в силу (29). Кроме того, параметры π' и π'' равны, следовательно, в силу (28):

$$\frac{R_1'}{\operatorname{tg} R_0'}=\frac{R_1''}{\operatorname{tg} R_0''}=\frac{R_1'+\varepsilon_1}{\operatorname{tg}(R_0'+\varepsilon_0)} \tag{36}$$

и

$$\frac{R_1'}{\operatorname{tg} R_0'}=\pi'-p. \tag{37}$$

Решая уравнение (36), найдем для поверхности (m'):

$$R_1'=\frac{\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_0}\sin R_0''\cos(R_0'+\varepsilon_0). \tag{38}$$

Заменяя в этой формуле ε_0 и ε_1 соответственно через $-\varepsilon_0$ и $-\varepsilon_1$, получим для поверхности (m''):

$$R_1''=\frac{\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_0}\sin R_0'\cos(R_0''+\varepsilon_0). \tag{38'}$$

Поверхности (m') и (m'') с общей нормалией и общим параметром соответствующих образующих назовем в з а и м н ы м и. Доказана, следовательно.

Теорема. *Для того чтобы поверхность (m') допускала взаимную поверхность (m''), необходимо соотношение (38) между элементами R_0' и R' угла R'. Триедры соответствующих образующих двух взаимных поверхностей неизменно связаны друг с другом. Отношения* $\dfrac{R_1'}{\operatorname{tg} R_0'}$ и $\dfrac{R_1''}{\operatorname{tg} R_0''}$, *а также отношения* $\dfrac{\sin R'}{r'}$ и $\dfrac{\sin R''}{r''}$ *одинаковы у обеих поверхностей.*

Решенная задача, очевидно, является обобщением задачи Bertrand'a, в которую она перейдет, если принять равным нулю общий параметр π'.

§ 11. Эвольвенты и эволюты данной поверхности.

10. Пусть (a) — поверхность, заданная уравнениями:

$$x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u);\ \sum x^2 = 1.$$

Для координат x', y', z', образующей a' одной из эвольвент (a') мы нашли [гл. 1, § 5, п. 23, ур-ния (39)] следующие выражения:

$$x' = x\cos(a-s) + \alpha\sin(a-s);\ y' = y\cos(a-s) + \beta\sin(a-s);$$
$$z' = z\cos(a-s) + \gamma\sin(a-s),$$

где s — дуга поверхности (a), отсчитываемая от определенной ее образующей a (a_0). Определенному значению числа a отвечает одна эвольвента. Давая числу a всевозможные значения, получим ∞^2 эвольвент данной поверхности. Заметим прежде всего, что угол R' эвольвенты определяется формулой:

$$R' = a - s.$$

Далее, так как у всех эвольвент (a') общей нормалией служит, как мы видели, поверхность (b), сопряженная с (a), то эвольвенты (a') обладают всеми свойствами поверхности (m'), изученными в предшествующем параграфе, и к ним может быть полностью приложена теорема, там доказанная (п. 8).

11. Перейдем теперь к решению следующей задачи. Дана поверхность (a); ее эволютой будет поверхность (d) — геометрическое место ее бинормалей (d). Найдем эволюту (d_1) поверхности d.

Сохраним для поверхностей (a) и (d) обычные обозначения. Тогда, как известно, для элементов ds' и ds'' дуг поверхности (c) нормалии и поверхности (d), получим:

$$ds' = \frac{ds}{\sin R};\quad ds'' = -dR.$$

Но, согласно определению, поверхности (c) и (d) сопряжены. Поэтому, обозначая через R_1 — угол, соответствующий эволюте (d_1), поверхности (d), получим

$$ds' = ds''\operatorname{ctg} R_1.$$

Сопоставляя это равенство с двумя предшествующими, найдем:

$$\operatorname{tg} R_1 = \frac{d\cos R}{ds};\ ds'' = -Rd, \tag{39}$$

или иначе

$$\frac{\sin R}{r} = -\operatorname{tg} R_1. \tag{40}$$

Этими формулами задача разрешается вполне. В самом деле, пусть $d_1(x_1', y_1', z_1')$ — образующая поверхности (d_1), соответствующая образующей a поверхности (a). К прямой d_1 можно применить формулы (f) таблицы (B), заменив в них, согласно вышесказанному, x, y, z на λ, μ, ν, а x_1, y_1, z_1 — на α_1, β_1, γ_1 соответственно. Итак

$$x_1' = \lambda\cos R_1 + \alpha\sin R_1;\ y_1' = \ldots;\ z_1' = \ldots.$$

§ 12. Определение поверхности по главной нормалии.

12. Главной нормалией поверхности (a) назовем поверхность (n) — геометрическое место ее главных нормалей n.

Пусть поверхность (n) задана уравнениями:

$$x = x(u);\; y = y(u);\; z = z(u);\; \sum x^2 = 1.$$

Значком $'$ укажем числа, относящиеся к искомой поверхности (a'). Согласно заданию, главной нормалью $n'(\xi', \eta', \zeta')$ последней должна служить образующая $a(x, y, z)$ данной поверхности. Положим поэтому:

$$\xi' = x;\; \eta' = y;\; \zeta' = z. \tag{41}$$

Но

$$\sum \alpha'\xi' = \sum \alpha' x = 0,$$

поэтому можно положить:

$$\alpha' = \alpha \cos \varepsilon' + x_1 \sin \varepsilon';\; \beta' = \ldots,\; \gamma' = \ldots, \tag{42}$$

где ε' — угол между центральными нормалями поверхностей (a') и (n). Но

$$\lambda' = \beta'\zeta' - \gamma'\eta';\quad \mu' = \ldots;\quad \nu' = \ldots,$$

поэтому на основании формул (41) и (42)

$$\lambda' = \alpha \sin \varepsilon' - x_1 \cos \varepsilon',\quad \mu = \ldots,\quad \nu' = \ldots \tag{43}$$

Беря производную по s от каждой формулы (42), получим на основании формул таблиц (A) и (B):

$$\frac{\xi'}{\sin R'}\frac{ds'}{ds} = \frac{\xi \cos \varepsilon'}{\sin R} - \alpha \operatorname{ctg} R \sin \varepsilon' - \lambda' \frac{d\varepsilon'}{ds};\; \frac{y'}{\sin R'}\frac{ds'}{ds} = \ldots;$$
$$\frac{\zeta'}{\sin R'}\frac{ds'}{ds} = \ldots \tag{a}$$

Умножим эти формулы на α, β, γ соответственно и сложим результаты. Это даст:

$$0 = -\operatorname{ctg} R \sin \varepsilon' - \frac{d\varepsilon'}{ds}\sin \varepsilon',$$

так как в силу формул (41), (42) и (43)

$$\sum \xi'\alpha = \sum x\alpha = 0;\; \sum \alpha\xi = 0,\; \sum \alpha^2 = 1,\; \sum \alpha\lambda' = \sin \varepsilon'.$$

Сокращая в полученном уравнении общий множитель $\sin \varepsilon'$, получим для определения ε' уравнение

$$\frac{d\varepsilon'}{ds} + \operatorname{ctg} R = 0. \tag{44}$$

Подставляя в (a), вместо $\frac{d\varepsilon'}{ds}$, его значение из (44), получим, замечая что

$$\xi' = x; \quad \frac{\xi}{\sin R} - x_1 \operatorname{ctg} R = -x, \tag{b}$$

$$\frac{ds'}{ds} = -\cos\varepsilon' \sin R'. \tag{45}$$

Пусть $\rho' = \sin R'$ — радиус кривизны поверхности (a'). Дифференцируя (43) и пользуясь (44) и второй формулой (b), легко найдем:

$$d\lambda' = -x \sin\varepsilon' \, ds.$$

С другой стороны, по общей теории

$$d\lambda' = \xi' \, dR'.$$

Но ξ' равно x, поэтому, сравнивая два выражения $d\lambda'$, получим:

$$\frac{dR'}{ds} + \sin\varepsilon' = 0. \tag{46}$$

Применим к поверхности (a') общие формулы (e) и (f) таблицы (B). Это дает:

$$\xi' = -x' \sin R' + x_1' \cos R' = x$$
$$\lambda' = x' \cos R' + x_1' \sin R',$$

отсюда выводим:

$$x' = \lambda' \cos R' - x \sin R', \; y' = \mu' \cos R' - y \sin R',$$
$$z' = \nu' \cos R' - z \sin R'. \tag{47}$$

Эти формулы содержат полное решение задачи в виду формул (43), (44) и (46), выражающих функции λ', ε' и R' через параметр и данной поверхности (a).

В заключение заметим, что

$$\frac{dR'}{ds} = \frac{dR'}{ds'} \frac{ds'}{ds},$$

т. е.

$$\frac{dR'}{ds} = -\frac{\sin R'}{r'} \cos\varepsilon'$$

по определению функции r' и значению (45) производной $\frac{ds'}{ds}$.

Поэтому формуле (46) можно дать вид:

$$\frac{\sin R'}{r'} = \operatorname{tg}\varepsilon', \tag{48}$$

ГЛАВА III.

КИНЕМАТИКА ПРЯМОЙ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.

§ 13. Скорость и ускорение прямой. Сложное движение прямой.

1. Здесь мы займемся кинематикой движущейся прямой и твердого тела, имея в виду прежде всего ввести в линейчатую геометрию метод подвижного триедра, огромное значение которого для всей геометрии превосходно выяснено в классическом труде G. Darboux. Кроме того, исследования настоящей главы приведут нас к новым, крайне общим теоремам кинематической геометрии.

Пусть прямая a (x, y, z) движется, описывая некоторую поверхность (a), которую для краткости назовем **траекторией** прямой a. Для определенности можно допустить, что координаты прямой даны в функции от времени t. По аналогии с кинематикой точки, мы, следуя указаниям А. П. Котельникова, введем следующие определения:

Определение 1. Скоростью прямой $a\,(x, y, z)$ назовем винт V, проекции V_x, V_y, V_z которого на осях координат определяются формулами:

$$V_x=\frac{dx}{dt}; \qquad V_y=\frac{dy}{dt}; \qquad V_z=\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

Определение 2. Ускорением прямой a назовем винт G с проекциями G_x, G_y, G_z на осях координат, причем

$$G_x=\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad G_y=\frac{d^2y}{dt^2}; \qquad G_z=\frac{d^2z}{dt^2}, \tag{2}$$

(ср. А. Котельников, loc. cit, стр. 162). Так как

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\alpha\frac{ds}{dt},$$

то формулам (1) можно дать вид:

$$V_x=\alpha\frac{ds}{dt}; \quad V_y=\beta\frac{ds}{dt}; \quad V_z=\gamma\frac{ds}{dt},$$

откуда заключаем:

$$V=\frac{ds}{dt}; \; V_x=V\alpha; \; V_y=V\beta; \; V_z=V\gamma. \tag{3}$$

Этими формулами доказывается

Теорема. *Скорость прямой a есть винт, тензор V которого равен производной по времени от дуги s траектории прямой, а осью служит центральная нормаль к траектории. Параметр скорости равен параметру прямой m.*

2. Обратимся к ускорению G. Замечая, что

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(V\alpha)=\alpha\frac{dV}{dt}+V\frac{d\alpha}{dt}.$$

Кроме того,

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{\xi}{\rho}V,$$

поэтому формулам (2) можно дать вид:

$$G_x=\alpha\frac{dV}{dt}+\xi\frac{V^2}{\rho},\ G_y=\beta\frac{dV}{dt}+\eta\frac{V^2}{\rho},\ G_z=\gamma\frac{dV}{dt}+\zeta\frac{V^2}{\rho}. \quad (4)$$

Этими формулами доказывается

Теорема. *Ускорение G слагается из двух винтов: тензор одного равен производной по времени от скорости V, а осью служит центральная нормаль, тензор другого винта равен отношению $\frac{V^2}{\rho}$ квадрата скорости к радиусу кривизны, а осью служит главная нормаль к траектории.*

На основании формул (e) таблицы (B)

$$\xi=x_1\cos R-x\sin R,\ \eta=y_1\cos R-y\sin R,\ \zeta=z_1\cos R-z\sin R$$

мы можем преобразовать формулы (4) в следующие:

$$G_x=\alpha\frac{dV}{dt}+V^2(-x+x_1\operatorname{ctg}R),\quad G_y=\beta\frac{dV}{dt}+V^2(-y+y_1\operatorname{ctg}R),$$

$$G_z=\gamma\frac{dV}{dt}+V^2(-z+z_1\operatorname{ctg}R), \quad (5)$$

чем доказывается

Теорема. *Ускорение G прямой a слагается также из трех винтов с тензором $\frac{dV}{dt}$, V^2 и $V^2\operatorname{ctg}R$, причем ось первого совпадает с центральной нормалью, ось второго — с прямой a, но направлена в противоположную сторону, ось же третьего винта совпадает с центральной касательной к траектории прямой a.*

3. Пусть координаты прямой a (x, y, z) заданы уравнениями:

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v);\ \sum x^2=1, \quad (6)$$

где u и v — вещественные переменные, зависящие от времени t.

$$u=f_1(t);\ v=f_2(t). \quad (7)$$

Скорость V движения прямой a определится формулами:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt},\ V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

$$V_z=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \quad (8)$$

Обозначим теперь через V' скорость того движения, которым обладала бы та же прямая, если бы в формулах (6) изменялось со временем только число u, а v оставалось бы неизменным. Равным образом, через V'' обозначим скорость того давления прямой a, которым она обладала бы, если бы в тех же формулах (6) изменялось со временем лишь число v, а неизменным оставалось бы число u. Мы скажем, что движение прямой, заданное формулами (6) и (7), — сложное движение и слагается из двух движений — одного со скоростью V' и другого со скоростью V''. Но, по определению, для скоростей V' и V'' получим:

$$V_x' = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}, \quad V_y' = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}, \quad V_z' = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

$$V_x'' = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \quad V_y'' = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \quad V_z'' = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Сравнение этих формул с (8) дает:

$$V_x = V_x' + V_x'', \quad V_y = V_y' + V_y'', \quad V_z = V_z' + V_z'',$$

чем доказывается теорема:

Теорема. *Скорость сложного движения прямой есть геометрическая сумма скоростей слагающих движений.*

Иными словами, чтобы получить скорость V сложного давления, надо сложить геометрически винты V' и V''. В результате получится искомый винт V.

§ 14. Скорости прямых твердого тела. Комплекс прямых, нормальных к скоростям своих точек. Комплекс прямых, касательных к стрикционным линиям своих траекторий.

4. Перейдем к движению твердого тела M. Предположим, что в момент t тело M обладает мгновенным винтовым движением вокруг оси l (a, b, c), а тензор винта есть

$$A = A_0 e^{\omega p}. \tag{9}$$

Проекции P, Q, R на осях координат винта будут:

$$P = Aa; \; Q = Ab; \; R = Ac. \tag{10}$$

Определим скорость

$$V = \frac{ds}{dt}$$

любой прямой m (x, y, z) тела в тот же момент t. Обозначим через θ угол $\angle(l, m)$, ось которого встречают прямые l и m в точках L и M. Через M перпендикулярно к плоскости (LM, m) проведем прямую n, которой сообщим такое направление, чтобы ось LM угла θ была осью угла $\angle(n, m)$.

Разложим теперь винт A на сумму двух винтов A' и A''

$$A = A' + A'',$$

из которых первый лежит на оси m, второй на оси n. Как мы видели в части I (гл. I, § 3, п. 24),

$$A' = A\cos\theta; \; A'' = A\sin\theta. \tag{11}$$

Первый из этих винтов

$$A' = A_0' + \omega A_1'$$

сообщит точкам своей оси элементарное перемещение вдоль m на величину $A_1'dt$ и, следовательно, координат прямой не изменит; второй же

$$A'' = A_0'' + \omega A_1''$$

повернет прямую m вокруг точки M на элементарный угол

$$ds_0 = A_0''dt$$

в плоскости (LM, m) и, сверх того, сообщит ей элементарное поступательное перемещение

$$ds_1 = A_1''dt$$

вдоль оси n. Поэтому для перемещения ds прямой m

$$ds = ds_0 + \omega ds_1$$

найдем:

$$ds = dt(A_0'' + \omega A_1'') = dt \cdot A'',$$

откуда следует для тензора скорости V прямой m:

$$V = \frac{ds}{dt} = A'' = A \sin\theta = A_0 e^{\omega p} \sin\theta \tag{12}$$

по формуле (9) и (11). На основании всего изложенного заключаем:

Ось n винта A'' — центральная касательная в точке M к траектории (m) прямой m, следовательно, центральная нормаль к (m) в M, которая всегда — ось угла между центральной касательной и образующей, будет направлена по оси $\overline{LM}$ угла θ. Замечая, что геометрическое произведение винта A и оси m — винт с тензором $A \sin\theta$ и осью $\overline{LM}$, заключаем на основании теоремы п. 1 и формулы (12):

Теорема. *Скорость V прямой m тела есть геометрическое произведение винта A и оси m.*

Следствие I. *Центральная нормаль, проведенная в момент t к траектории (m) прямой m в центре M последней, встречает под прямым углом ось l мгновенного винта A.*

Иными словами, если в данном положении прямых m тела M проведем к их траекториям в центрах прямых m нормали, то получим щетку с осью l.

Следствие II. *Параметр p' прямой m определяется формулой:*

$$p' = p + \frac{\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_0}, \tag{13}$$

где предполагается:

$$\theta = \theta_0 + \omega\theta_1.$$

Формула (13) получается из (12), если взять параметры обеих частей. Из (13) заключаем:

Теорема. *Прямые m тела M, касательные к стрикционным линиям своих траекторий в данный момент t, удовлетворяют условию*

$$0 = p + \frac{\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_0}. \tag{14}$$

Обращаясь к формуле (12), можем сказать:

Теорема. *Прямые m тела M, касательные в данный момент t к стрикционным линиям своих траекторий, — лучи комплекса*

$$e^{\omega p}\sin\theta = \sin\theta_0. \tag{15}$$

Это — комплекс 2-го порядка, на чем останавливаться не будем.

5. Пусть снова A — мгновенный винт тела M, A' и A'' — его слагающие вдоль прямых m и n. Рассмотрим скорости точек прямой m. Винт A'', очевидно, сообщает этим точкам скорости, нормальные к m, винт же A' сообщает им скорости u вдоль m, причем, как мы видели выше,

$$u = A_1'.$$

Доказана, следовательно, хорошо известная теорема:

Теорема. *Проекции на прямую m тела M скоростей ее точек в каждый момент одинаковы.*

Следствие. *Прямые числа M, нормальные в данный момент к скоростям всех своих точек, — лучи комплекса 1-го порядка*

$$e^{\omega p}\cos\theta = \cos\theta_0. \tag{16}$$

Это тоже — давно известная теорема.

§ 15. Обобщенные формулы Euler'a. Скорости прямых относительно подвижных осей. Перемещение триедра образующей данной поверхности.

6. Сохраним все обозначения первых двух параграфов. Мы видели, что скорость V прямой m твердого тела M в каждый момент t равна геометрическому произведению мгновенного винта A тела и оси m. Эти два винта должны, следовательно, обладать одинаковыми проекциями на осях координат. Но, как мы видели (часть I, гл. II, § 4, п. 3), проекции геометрического произведения равны соответственно:

$$Qz - Ry;\ Rx - Pz;\ Py - Qx;$$

проекции же скорости V равны соответственно:

$$V\alpha,\ V\beta,\ V\gamma.$$

Следовательно

$$V\alpha = Qz - Ry,\ V\beta = Rx - Pz,\ V\gamma = Py - Qx;\ V = A\sin\theta. \tag{17}$$

Эти формулы — основные. Назовем их в честь великого геометра Euler'a **обобщенными формулами** Euler'a, так как он впервые дал формулы, одинаковые по внешнему виду, для случая вращения твердого тела вокруг точки.

Мы могли бы получить формулы (17), дифференцируя по времени формулы преобразования координат прямой

$$\left.\begin{aligned} x &= x'a_1 + y'a_2 + z'a_3, \\ y &= x'b_1 + y'b_2 + z'b_3, \\ z &= x'c_1 + y'c_2 + z'c_3, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где x, y, z — координаты прямой относительно неподвижных осей координат, x', y', z' — координаты той же прямой относительно подвижного триедра осей, неизменно связанных с телом M. Числа же $a_1, \ldots c_3$ имеют обычное значение косинусов углов, образуемых осями одной системы с осями другой.

7. Пусть снова

$$A = A_0 e^{\omega p}$$

— мгновенный винт движения тела M в момент t; p, q, r — проекции винта A на подвижные оси x', y', z'; $m(x', y', z')$ — прямая, с телом M не связанная и движущаяся произвольно в пространстве со скоростью V', проекции которой на подвижных осях — u', v', w'. Движение прямой m будем считать сложным, составленным из двух движений: одного — со скоростью V_1, при котором прямая m сохраняла бы свое положение в теле M, и другого — со скоростью V_2, с которым прямая m двигалась бы относительно неподвижного тела M. По формулам (17) проекции первой скорости V_1 на подвижных осях равны

$$qz' - ry'; \quad rx' - pz'; \quad py' - qx'$$

соответственно; проекциями же скорости V_2 на те же оси будут:

$$\frac{dx'}{dt}; \quad \frac{dy'}{dt}; \quad \frac{dz'}{dt}$$

по определению. На основании доказанного выше закона сложения скоростей получаем:

$$u' = \frac{dx'}{dt} + qz' - ry', \quad v' = \frac{dy'}{dt} + rx' - pz', \quad w' = \frac{dz'}{dt} + py' - qx'. \tag{19}$$

8. Эти формулы применим к неподвижной оси x. Так как ее координаты относительно подвижных осей соответственно равны a_1, a_2, a_3, то из (19) получаем первую строчку формул (20):

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= ra_2 - qa_3, & \frac{da_2}{dt} &= a_3 p - a_1 r, & \frac{da_3}{dt} &= qa_1 - pa_2, \\ \frac{db_1}{dt} &= rb_2 - qb_3, & \frac{db_2}{dt} &= b_3 p - b_1 r, & \frac{db_3}{dt} &= qb_1 - pb_2, \\ \frac{dc_1}{dt} &= rc_2 - qc_3, & \frac{dc_2}{dt} &= c_3 p - c_1 r, & \frac{dc_3}{dt} &= qc_1 - pc_2, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

остальные две строчки получим, применяя (19) к неподвижным осям y и z. Пользуясь известными соотношениями между косинусами $a_1, \ldots c_3$, легко выведем из полученных только что формул:

$$p = \sum a_3 \frac{da_2}{dt} = -\sum a_2 \frac{da_3}{dt}, q = \sum a_1 \frac{da_3}{dt} = -\sum a_3 \frac{da_1}{dt},$$

$$r = \sum a_2 \frac{da_1}{dt} = -\sum a_1 \frac{da_2}{dt}. \tag{21}$$

9. Применим формулы (21) к движению триедра A (a, c, b) образующей a произвольной поверхности (a). Сохраним все обозначения гл. I. Пусть за оси x', y', z' принимаются прямые a, c и b соответственно. В данном случае

$$a_1 = x, \quad b_1 = y, \quad c_1 = z,$$
$$a_2 = \alpha, \quad b_2 = \beta, \quad c_2 = \gamma,$$
$$a_3 = x_1, \; b_3 = y_1, \; c_3 = z_1$$

Обозначим через V дробь $\frac{ds}{dt}$. Тогда

$$V = \frac{ds_0}{dt} e^{\omega p}$$

и примем, сверх того,

$$\frac{ds_0}{dt} = 1, \; V = e^{\omega p}. \tag{22}$$

Формулы (21) дадут:

$$p = -\sum \alpha \frac{dx_1}{dt}, \; q = -\sum x_1 \frac{dx}{dt}, \; r = -\sum x \frac{d\alpha}{dt}$$

или в силу (22)

$$p = -e^{\omega p} \sum \alpha \frac{dx_1}{ds}, \; q = -e^{\omega p} \sum x_1 \frac{dx}{ds}, \; r = -e^{\omega p} \sum x \frac{d\alpha}{ds}.$$

Но на основании формул таблиц (А) и (В) главы I

$$\frac{dx_1}{ds} = -\alpha \operatorname{ctg} R, \; \frac{dx}{ds} = \alpha, \; \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\sin R}$$

$$\sum \alpha^2 = 1, \; \sum x_1 \alpha = 0, \; \sum x \xi = -\sin R,$$

поэтому выражения p, q, r будут соответственно:

$$p = e^{\omega p} \operatorname{ctg} R, \quad q = 0, \quad r = e^{\omega p}.$$

Так как в силу (22) и по общим формулам:

$$dt = ds_0, \quad ds_0 e^{\omega p} = ds, \quad ds \operatorname{ctg} R = ds_1,$$

то полученным формулам можно дать вид:

$$pdt = ds_1, \quad q = 0, \quad rdt = ds.$$

Этими формулами доказывается вновь основная теорема об элементарном передвижении триедра A (a, c, b) (гл. I, § 4, п. 16).

§ 16. Свойство бинормалей траекторий.

10. Здесь мы займемся изучением свойств бинормалей траекторий прямых a твердого тела M. Обратимся к формулам (17) § 15 (п. 6):

$$V\alpha = Qz - Ry,\ V\beta = Rx - Pz,\ V\gamma = Py - Qx;\ V = A\sin\theta, \tag{d}$$

где V — скорость прямой a (x, y, z) в момент t, α, β, γ — координаты центральной нормали c к траектории (a) прямой, P, Q, R — проекции на оси координат мгновенного винта A, которым тело M обладает в момент t, θ — угол между прямой a и осью l (a, b, c) винта. Прямая l при движении тела опишет неподвижный аксоид (l). Пусть $d\sigma$ — элемент дуги последнего при l,

$$W = \frac{d\sigma}{dt} \tag{b}$$

скорость в момент t прямой l, c' $(\alpha';\ \beta',\ \gamma')$ — центральная нормаль к аксоиду в центре его образующей l. Тогда имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = \alpha' W,\ \frac{db}{dt} = \beta' W,\ \frac{dc}{dt} = \gamma' W,\\ &P = Aa,\ Q = Ab,\ R = Ac;\ \cos\theta = \sum ax. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Формулы (a) будут поэтому

$$\alpha\sin\theta = bz - cy,\ \beta\sin\theta = cx - az,\ \gamma\sin\theta = ay - bx. \tag{d}$$

Вычислим теперь координаты центральной касательной $c(x_1,\ y_1,\ z_1)$ к траектории (a) в центре образующей a. По общим формулам

$$x_1 = y\gamma - z\beta,\ y_1 = z\alpha - x\gamma,\ z_1 = x\beta - y\alpha.$$

Пользуясь формулами (d), получаем:

$$\sin\theta\, x_1 = y\ (ay - bx) - z\ (cx - az) = a\ (y^2 + z^2) - x\ (by + cz).$$

Так как $\sum x^2$ равна единице, то окончательно получим первую из формул:

$$\sin\theta\, x_1 = a - x\cos\theta,\ \sin\theta\, y_1 = b - y\cos\theta, \sin\theta\, z_1 = c - z\cos\theta \tag{e}$$

остальные две получаются таким же образом. Из них выведем:

$$\sin\theta \sum x_1 a = \sum a^2 - \cos\theta \sum ax = 1 - \cos^2\theta,$$

следовательно

$$\sum x_1 a = \sin\theta. \tag{f}$$

1. Из (d) следует:

$$\sum a\alpha = 0,$$

что впрочем очевидно. Возьмем производную от обеих частей по t. Это даст:

$$\sum \alpha \frac{da}{dt} + \sum a \frac{d\alpha}{dt} = 0. \tag{g}$$

Но по формулам (c)

$$\frac{da}{dt} = W\alpha', \ \frac{db}{dt} = W\beta', \ \frac{dc}{dt} = W\gamma'.$$

Кроме того

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}V = V\ \frac{\xi}{\sin R} = V\ (-x + x_1\ \operatorname{ctg} R), \frac{d\beta}{dt} = \ldots, \frac{d\gamma}{dt} = \ldots$$

где $\sin R$ — радиус кривизны траектории (a) при a. Поэтому, вместо формулы (g) получим, обозначая через φ угол (c, c')

$$W\cos\varphi + V\ (-\cos\theta + \operatorname{ctg}\ R\ \sin\theta) = 0,$$

на основании формулы (f) и определения угла φ. Подставляя в полученное уравнение значение $A\ \sin\theta$ скорости V, найдем после элементарных преобразований:

$$\frac{A}{W} = \frac{\cos\varphi \sin R}{\sin\theta \sin(R-\theta)}. \tag{h}$$

Пусть d — бинормаль траектории (a) в a, θ' — угол между прямой d и осью l винта A. Так как прямые a, l и d встречают под прямыми углами одну и ту же прямую — центральную нормаль c, то в формуле (h) можно положить:

$$R = \theta \pm \theta',$$

что даст:

$$\cos\varphi\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \mp \frac{1}{\operatorname{tg}\theta'}\right) = \frac{A}{W}. \tag{23}$$

Это — искомое соотношение. Оно аналогично формуле Euler'a — Savary, имеющей место в кинематике плоского движения твердого тела.

§ 17. Связь аксоидов с параметром мгновенного винта в любом движении твердого тела.

12. Известны[1] следующие свойства общего движения твердого тела:

I. В каждый момент времени t тело обладает определенным мгновенным винтовым движением вокруг определенной оси l_1 пространства (Mozzi, Chasles).

---

[1] См. например Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1879, Bd. I, Kap. VII.

Пусть l_2 — прямая тела, совпадающая с l_1.

II. При непрерывном движении последнего прямая l_2 описывает в нем линейчатую поверхность (l_2) — подвижной аксоид, прямая же (l_1) описывает в пространстве линейчатую поверхность (l_1) — неподвижный аксоид (Poncelet).

III. В каждый момент t аксоиды (l_1) и (l_2) касаются друг друга вдоль общей образующей (l_1, l_2), т. е. в момент t две бесконечно близких образующих l_2 и l_2' аксоида (l_2) совпадают соответственно с двумя бесконечно близкими образующими l_1 и l_1' аксоида (l_1) (Poncelet).

Пусть

$$ds_1 = \angle (l_1, l_1'); \quad ds_2 = \angle (l_2, l_2')$$

соответствующие элементы дуг аксоидов. Тогда последняя теорема Poncelet утверждает, что

$$ds_1 = ds_2 = d\sigma = d\sigma_0 e^{\omega \pi}, \tag{24}$$

где π — общий параметр аксоидов. Из сказанного вытекает теорема Bour'a:

IV. Общей образующей (l_1, l_2) аксоидов отвечает общая центральная точка A и общая центральная плоскость.

Приведем наконец еще одну теорему Bour'a:

V. В течение мгновения dt, следующего за моментом t, подвижной аксоид (l_2) скользит своей образующей l_2' по образующей l_1' неподвижного аксоида до совпадения их центров A_1' и A_2' и вращается вокруг l_1' до совпадения соответствующих центральных плоскостей.

Пусть C_{12} — общая центральная касательная аксоидов в момент t, C_1' и C_2' — центральные касательные к ним в точках A_1' и A_2' соответственно,

$$dw = dw_0 e^{\omega p} \tag{25}$$

— элементарное винтовое перемещение подвижного аксоида в момент $t+dt$ вокруг общей образующей (l_1', l_2'). Тогда мгновенный винт, очевидно, равен $\frac{dw_0}{dt} e^{\omega p}$. Согласно теореме Bour'a, если через ds_1', ds_2' обозначим комплексные углы $\angle (C_{12}, C_1')$ и $\angle (C_{12}, C_2')$, то

$$dw = ds_1' \pm ds_2'. \tag{26}$$

Но, согласно формул (B) гл. I,

$$ds_1' = ds_1 \operatorname{ctg} R_1; \quad ds_2' = ds_2 \operatorname{ctg} R_2,$$

где R_1 и R_2 относятся к подвижному и неподвижному аксоидам соответственно. Из (1), (2) и (3) выводим:

$$dw_0 e^{\omega p} = d\sigma (\operatorname{ctg} R_1 \pm \operatorname{ctg} R_2), \tag{27}$$

откуда для параметра p мгновенного винта найдем, беря параметры обеих частей, в силу (24)

$$p = \pi + P (\operatorname{ctg} R_1 \pm \operatorname{ctg} R_2). \tag{28}$$

Пусть θ_1 и θ_2 — углы между общей образующей l аксоидов и касательными к их стрикционным линиям.

Но из формулы 45 (гл. I, § 6, п. 27) следует для первого аксоида:

$$\operatorname{ctg} R_1 = \operatorname{ctg} R_{01} - \omega\pi\ (\operatorname{ctg} R_{01} - \operatorname{ctg} \theta_1).$$

Равным образом для второго аксоида получим:

$$\operatorname{ctg} R_2 = \operatorname{ctg} R_{02} - \omega\pi\ (\operatorname{ctg} R_{02} - \operatorname{ctg} \theta_2).$$

Из этих формул сейчас же выведем:

$$P\ (\operatorname{ctg} R_1 \pm \operatorname{ctg} R_2) = -\pi\left(1 - \frac{\operatorname{ctg} \theta_1 \pm \operatorname{ctg} \theta_2}{\operatorname{ctg} R_{01} \pm \operatorname{ctg} R_{02}}\right).$$

Подстановка этого значения в (28) дает:

$$p = \pi \frac{\operatorname{ctg} \theta_1 \pm \operatorname{ctg} \theta_2}{\operatorname{ctg} R_{01} \pm \operatorname{ctg} R_{02}}. \tag{29}$$

На основании формул (24) и (29) мы можем объединить все полученные результаты в следующей теореме.

Теорема. *Во всяком движении твердого тела M его подвижной аксоид катится без скольжения своей комплексной дугой по дуге неподвижного аксоида.* В каждый момент осью мгновенного винта служит общая образующая l_1, $l_2 = l_{12}$ аксоидов, а параметр винта зависит лишь от общего параметра аксоидов в l_{12} и от углов, образуемых прямой l_{12} с бинормалями аксоидов, с одной стороны, и с касательными к стрикционным линиям аксоидов — с другой.

Формула (29) была мною доказана геометрически и аналитически еще в 1897 г., т. е. 37 лет тому назад. Несмотря на свою крайнюю простоту и общность, она осталась до сих пор не отмеченной в литературе.

Глава IV.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОПОЛОГО ГИПЕРБОЛОИДА.

§ 18. Координаты образующей. Длина и направление перпендикуляра из центра на образующую.

1. В качестве примера займемся изучением однополого гиперболоида. Пусть a (x, y, z) — его образующая одной системы, a' (x', y', z') — другой. Как мы видели (часть I, гл. II, § 8, п. 20), координаты прямых a и a' определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 e^{\omega a},\ y = y_0 e^{\omega b},\ z = z_0 e^{\omega c};\ \sum x^2 = 1, \\ x' = x_0' e^{-\omega a},\ y' = y_0' e^{-\omega b},\ z' = z_0' e^{-\omega c};\ \sum x'^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a, b, c — данные вещественные числа, числа же x_0, y_0, z_0 и x_0', y_0', z_0' — тоже вещественные, но переменные числа, связанные соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\sum x_0^2 = 1, \sum a x_0^2 = 0; \\ &\sum x_0'^2 = 1, \sum a x_0'^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Уравнение гиперболоида имеет вид:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + abc = 0. \tag{3}$$

Гиперболоид будет вещественным лишь при условии

$$abc < 0.$$

Во всем дальнейшем положим для определенности:

$$a > b > 0 > c. \tag{4}$$

Согласно ур-ния (3) и этому условию, оси эллипсоида совпадают с осями координат, причем мнимой будет ось z. Центр гиперболоида, следовательно, в начале O координат.

2. Займемся системой прямых a. Полагая:

$$x = x_0 + \omega x_1; \quad y = y_0 + \omega y_1; \quad z = z_0 + \omega z_1, \tag{5}$$

найдем из (1)

$$x_1 = a x_0; \quad y_1 = b y_0; \quad z_1 = c z_0. \tag{6}$$

Уравнения прямой a будут поэтому:

$$a x_0 = Y z_0 - Z y_0; \quad b y_0 = Z x_0 - X z_0; \quad c z_0 = X y_0 - Y x_0 \tag{6'}$$

Из центра O гиперболоида опустим перпендикуляр OA_1 на прямую a. Полагая

$$OA_1 = u,$$

найдем по известной формуле:

$$u^2 = \sum x_1^2 = \sum a^2 x_0^2. \tag{7}$$

Присоединяя это уравнение к (2), мы можем вычислить x_0^2, y_0^2, z_0^2 через u^2. Положим:

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c, \\ a^2, & b^2, & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)\,(c-a)\,(a-b) < 0 \tag{8}$$

на основании (4). Для x_0^2, y_0^2, z_0^2 легко найдем следующие выражения:

$$A x_0^2 = -(b-c)\,(u^2 + bc), \quad A y_0^2 = -(c-a)\,(u^2 + ca),$$
$$A z_0^2 = -(a-b)(u^2 + ab). \tag{9}$$

Так как A меньше нуля, то из (9) следует:

$$-bc \leqslant u^2 \leqslant -ca. \tag{10}$$

3. Пусть k, l, m — координаты перпендикуляра OA_1. Эти числа вещественны, так как O — начало координат. Но OA_1 — перпендикуляр к a, следовательно,

$$\cos\ (OA_1,\ a) = \sum kx = 0,$$

откуда

$$\sum kx_0 = 0, \quad \sum akx_0 = 0. \tag{11}$$

Отсюда выводим:

$$\frac{k}{\begin{vmatrix} y_0, & z_0 \\ by_0, & cz_0 \end{vmatrix}} = \frac{l}{\begin{vmatrix} z_0, & x_0 \\ cz_0, & ax_0 \end{vmatrix}} = \frac{m}{\begin{vmatrix} x_0, & y_0 \\ ax_0, & by_0 \end{vmatrix}} \tag{a}$$

Но $\sum k^2$ равна единице, а по тождеству Euler'а—Lagrange'а

$$\sum \begin{vmatrix} y_0, & \\ by_0, & cz_0 \end{vmatrix}^2 = \sum x_0^2 \sum a^2x_0^2 - \left(\sum ax_0^2\right) = u^2,$$

в силу (1), (2) и (7) поэтому ур-ния (a) дают:

$$ku = \varepsilon (b-c)\, y_0z_0, lu = \varepsilon (c-a)\, z_0x_0,\ mu = \varepsilon\ (a-b)\ x_0y_0;\ \varepsilon = \pm 1. \tag{b}$$

Значение ε найдем из того соображения, что точка A_1 с координатами

$$X_1 = uk;\ Y_1 = ul;\ Z_1 = um \tag{12}$$

лежит на прямой a, следовательно, на основании ур-ний (6):

$$ax_0 = Yz_0 - Zy_0 = u\ (lz_0 - my_0). \tag{c}$$

Но из (b) следует:

$$u\,(lz_0 - my_0) = \varepsilon x_0 \left[z_0^2 (c-a) - y_0^2 (a-b)\right] = \varepsilon x_0 \left[\sum ax_0^2 - a \sum x_0^2\right],$$

т. е. в силу (1) и (2)

$$u\ (lz_0 - my_0) = -\varepsilon\, ax_0.$$

Сравнение с формулой (c) дает для ε значение -1, поэтому окончательно

$$ku = -(b-c)y_0z_0,\ lu = -(c-a)\,z_0x_0,\ mu = -(a-b)\,x_0y_0; \tag{13}$$

$$ax_0 = u\,(lz_0 - my_0),\ by_0 = u(mx_0 - kz_0),\ cz_0 = u\,(ky_0 - lx_0). \tag{13'}$$

4. **Следствие I.** Из этих формул выведем без труда:

$$u^2 \sum ax_0^2 = x_0^2y_0^2z_0^2 \sum \frac{a\ (b-c)^2}{k^2}.$$

Но левая часть этого равенства — нуль по (2), поэтому

$$\sum \frac{a\,(b-c)^2}{k^2}=0\,. \tag{14}$$

Сопоставляя это уравнение с (12), найдем для конуса прямых OA_1 уравнение:

$$\sum a\,(b-c)^2 Y_1^2 Z_1^2=0. \tag{15}$$

5. **Следствие II.** Далее выводим:

$$\sum bc\,(b-c)^2 y_0^2 z_0^2=\sum \begin{vmatrix} y_0\sqrt{b}, & z_0\sqrt{c} \\ y_0 b\sqrt{b}, & z_0 c\sqrt{c}\end{vmatrix}^2=$$

$$=\sum a x_0^2 \sum a^3 x_0^2-\left\{\sum a^2 x_0^2\right\}^2=-u^4$$

по формулам (2) и (7). Поэтому в силу (13)

$$\sum bck^2=-u^2. \tag{16}$$

Заметим наконец, что точка A с координатами (12) лежит на гиперболоиде, поэтому на основании (3)

$$\sum ak^2=-\frac{abc}{u^2}. \tag{17}$$

§ 19. Параметр образующей. Центральная нормаль и касательная.

6. Пусть

$$ds=ds_0 e^{\omega p} \tag{18}$$

— элемент комплексной дуги гиперболоида, p — параметр его образующей a.

По общей формуле

$$ds^2=\sum dx^2=\sum dx_0^2 e^{2\omega a}$$

на основании формул (1). Следовательно

$$ds^2=\sum dx_0^2+2\omega\sum a dx_0^2.$$

Сравнение с (18) дает:

$$ds_0^2=\sum dx_0^2;\quad p ds_0^2=\sum a dx_0^2. \tag{19}$$

Но формулы (2) дают:

$$\sum x_0 dx_0=0\,;\ \sum a x_0 dx_0=0.$$

Сравнивая эти равенства с (11), найдем:

$$\frac{dx_0}{k}=\frac{dy_0}{l}=\frac{dz_0}{m}=ds_0, \tag{20}$$

так как $\sum k^2$ равна единице. Заметим, что для определенности при ds_0 берем знак $+$.

Из (20) следует:

$$\sum a\,dx_0^2=ds_0^2; \quad \sum ak^2=-ds_0^2\frac{abc}{u^2}$$

на основании формулы (17). Сопоставляя это значение $\sum adx_0^2$ с (19), получаем:

$$p=-\frac{abc}{u^2}, \tag{21}$$

чем доказывается теорема:

Теорема. *Параметр образующей a гиперболоида обратно пропорционален квадрату ее расстояния от центра поверхности.*

Заметим, что в силу условия (4) у всех образующих a первой системы параметры — положительны, у образующих второй — они отрицательны.

7. Из формул (1) и (20) следует:

$$dx=dx_0e^{a\omega}=kds_0e^{a\omega};\ dy=lds_0e^{b\omega},\ dz=mds_0e^{c\omega}.$$

Но по общей теории для центральной нормали c (α, β, γ) к гиперболоиду в центре M прямой a:

$$\alpha=\frac{dx}{ds};\ \beta=\frac{dy}{ds};\ \gamma=\frac{dz}{ds},$$

поэтому из предыдущих формул и (18) следует:

$$\alpha=ke^{\omega(a-p)},\ \beta=le^{\omega(b-p)},\ \gamma=me^{\omega(c-p)}. \tag{22}$$

Этими формулами доказывается теорема;

Теорема. *Нормаль к гиперболоиду в центре образующей a параллельна перпендикуляру, опущенному на прямую a из центра гиперболоида.*

Построим триедр M (a, c, b) образующей a. Грань (a, c) этого триедра содержит перпендикуляр OA_1, на основании доказанной теоремы, следовательно, грани (a, c) триедров всех образующих гиперболоида обертывают центр последнего.

8. Для координат x_1, y_1, z_1, центральной касательной c к гиперболоиду в M найдем, пользуясь общими формулами:

$$x_1=y\gamma-z\beta;\ y_1=\ldots,\ z_1=\ldots$$

и формулами (1) (22):

$$x_1=e^{\omega(b+c-p)}(y_0m-z_0l),\ y_1=\ldots,\ z_1=\ldots,$$

откуда на основании первой из формул (13′) получим первую формулу (23):

$$-ux_1 = ax_0 e^{\omega(b+c-p)}, \quad -uy_1 = by_0 e^{\omega(c+a-p)},$$
$$-uz_1 = cz_0 e^{\omega(a+b-p)}. \tag{23}$$

9. Заметим в заключение, что посредством формулы (21) можно во все предыдущие формулы ввести вместо u^2 параметр p, что дает:

$$Apx_0^2 = bc(b-c)(a-p), \; Apy_0^2 = ca(c-a)(b-p),$$
$$Apz_0^2 = ab(a-b)(c-p); \; b \leqslant p \leqslant a \tag{24}$$
$$Apk^2 = -a\frac{(b-c)\Pi}{a-p}, \; Apl^2 = -b\frac{(c-a)\Pi}{b-p}, \; Apm^2 = -c\frac{(a-b)\Pi}{c-p};$$
$$\Pi = (a-p)(b-p)(c-p). \tag{25}$$

Через Π и p очень просто выражается расстояние U центральной нормали c от центра гиперболоида. В самом деле, из выражений (22) координат прямой c следует:

$$U^2 = \sum k^2(a-p)^2.$$

Но из (25) выводим:

$$Ap\sum k^2(a-p)^2 = -\Pi\sum a(b-c)(a-p) = A\Pi,$$

так как, очевидно:

$$\sum a^2(b-c) = A; \; \sum a(b-c) = 0.$$

Следовательно,

$$U^2 = \frac{\Pi}{p}. \tag{26}$$

§ 20. Стрикционная линия. Нормалия гиперболоида.

10. Пусть $M\,(X, Y, Z)$ — центральная точка образующей $a\,(x, y, z)$ гиперболоида. Числа X, Y, Z должны одновременно удовлетворять уравнениям (6) прямой a.

$$ax_0 = Yz_0 - Zy_0; \; by_0 = Zx_0 - Xz_0; \; cz_0 = Xy_0 - Yx_0 \tag{a}$$

и уравнениям центральной нормали bM, имеющим вид на основании формул (22):

$$k(a-p) = Ym - Zl, \; l(b-p) = Zk - Xm, \; k(c-p) = Xl - Yk. \tag{b}$$

Но, если в ур-ниях (a) заменим их левые части значениями (13′), то сейчас же получим:

$$\frac{X-uk}{x_0} = \frac{Y-ul}{y_0} = \frac{Z-um}{z_0}. \tag{c}$$

Обозначая через λ общее значение этих дробей, получим:

$$X = uk + \lambda x_0, \; Y = ul + \lambda y_0, \; Z = um + \lambda z_0. \tag{27}$$

Подстановка этих значений в первое из уравнений (b) дает для определения числа λ уравнение

$$k(a-p)=\lambda(my_0-lz_0)=-\frac{\lambda a x_0}{u},$$

на основании первой из формул (13'). Заменяя здесь p его значением $-\frac{abc}{u^2}$, получим:

$$\lambda x_0=-k\left(u+\frac{bc}{u}\right), \tag{d}$$

и точно также

$$\lambda y_0=-l\left(u+\frac{ca}{u}\right),\ \lambda z_0=-m\left(u+\frac{ab}{u}\right), \tag{e}$$

что даст в силу (27):

$$X=-\frac{k}{u}bc,\ Y=-\frac{l}{u}ca,\ Z=-\frac{m}{u}ab. \tag{28}$$

Подставляя в ур-ние (14) (§ 18, п. 4) значения k, l, m, из (28), получим:

$$\sum\frac{bc(b-c)^3}{X^2}=0. \tag{29}$$

Это — уравнение конуса, пересекающего данный гиперболоид по стрикционной линии последнего.

Ур-ние (28) дано без вывода и в несимметричной форме G. Salmon'ом в Treatise on the Analytic Geometry of three dimensions (4 ed., p. 425).

11. Вернемся к формулам (27). Мы видели в § 18, п. 3, что проекция начала O на образующую a гиперболоида есть точка A_1 с координатами

$$X_1=uk,\ Y_1=ul,\ Z_1=um.$$

Построим точку A_2 (X_2, Y_2, Z_2) с координатами:

$$X_2=\lambda x_0,\ Y_2=\lambda y_0,\ Z_2=\lambda z_0.$$

Тогда формулы (27) примут вид:

$$X=X_1+X_2,\ Y=Y_1+Y_2,\ Z=Z_1+Z_2.$$

Эти равенства показывают, что фигура OA, MA_2 — параллелограмм. Но A_1 — проекция точки O на A_1M, следовательно, упомянутая фигура — прямоугольник. Так как сторона его A_2M параллельна OM_1, то MA_2 — отрезок центральной нормали в M к гиперболоиду, равный u, точка A_2 — проекция начала O на центральную нормаль, а прямая OA_2 параллельна образующей a. Итак, доказана теорема:

Теорема. *Центральная нормаль с встречает под прямым углом параллель к образующей a, проведенную через центр гиперболоида.*

12. Возьмем на центральной нормали c гиперболоида в центре M образующей a произвольную точку M' (X', Y', Z'). Так как, по предыдущему, отрезок MM' параллелен перпендикуляру OM_1, то

$$X' = X + rk;\ Y' = Y + rl;\ Z' = Z + rm,$$

где r — длина отрезка MM'. Подставляя значения (28) чисел X, Y, Z, получим:

$$X' = \frac{k}{u}(ru - bc),\ Y' = \frac{l}{u}(ru - ca),\ Z' = \frac{m}{u}(ru - ab). \tag{30}$$

Положим для краткости письма:

$$ru = \delta. \tag{31}$$

Определяя из полученных уравнений k, l, m и подставив их в ур-ния (14) и (16) § 18 (п. 5), получим:

$$\sum \frac{a(b-c)^2(\delta - bc)^2}{X'^2} = 0,\quad \sum \frac{bcX'^2}{(\delta - bc)^2} + 1 = 0. \tag{32}$$

Исключение δ между этими уравнениями дает уравнение нормали гиперболоида. Заметим, что при данном δ второе из ур-ний (32) представляет однополый гиперболоид. Мы приходим, следовательно, к любопытному свойству нормалии (c). Пусть A_2 — проекция центра гиперболоида на образующую c нормалии, M — лежащая на (c) точка стрикционной линии гиперболоида и M' — точка прямой c, определяемая соотношением

$$A_2M \cdot MM' = \text{постоянному} = \delta.$$

Так как, по предыдущему, отрезок A_2M равен u, то вторым из ур-ний (32) доказывается:

Теорема. *Точка M' нормалии лежит на однополом гиперболоиде.*

13. Построим триедр M (a, c, b) образующей a любой поверхности (a). У начала O координат построим конгруэнтный триедр $O(A, C, B)$, ребра которого соответственно параллельны ребрам первого. Конусы (OA) и (OC), описываемые ребрами OA и OC, назовем асимптотическими конусами поверхности (a) и ее нормалии (c).

Теорема. *Грань AOC триедра $O(A, C, B)$ обертывает асимптотический конус поверхности (a).*

В самом деле, пусть M' (a', c', b') — триедр бесконечно близкой образующей a' поверхности (a), $O(A', C', B')$ — соответствующее положение триедра $O(A, C, B)$. Прямая b, как центральная касательная в M к поверхности (a), встречает под прямыми углами прямые a и a', поэтому параллельная b прямая OB перпендикулярна к плоскости (OA, OA'), т. е. нормальна в O к конусу (OA). Но грань (OA, OC) тоже перпендикулярна к OB, следовательно, она совпадает с касательной плоскостью к конусу (OA) вдоль его образующей.

14. Приложим эту теорему к данному гиперболоиду (a). Пусть a — его образующая, c — нормаль к (a) в центре образующей a, A_2 — про-

екция на c центра O гиперболоида. Мы видим, что плоскость (a, c) проходит через O. Следовательно, OA_2 параллельна прямой a и поэтому опишет асимптотический конус гиперболоида.

На основании только-что доказанной теоремы заключаем:

Теорема. *Плоскости, проведенные через центр гиперболоида, и его образующие обертывают асимптотический конус гиперболоида.*

15. Возвышая в квадрат обе части формул (28) и пользуясь формулами (13) § 18 (п. 3), (21) и (24) § 19 (пп. 6 и 9), получим для точек M стрикционной линии:

$$AX^2 = bc(b-c)(b-p)(c-p),\ AY^2 = ca(c-a)(c-p)(a-p),$$
$$AZ^2 = ab(a-b)(a-p)(b-p). \tag{33}$$

Равным образом формулы (30) после аналогичного преобразования дадут для точек M' поверхности нормалии:

$$\begin{gathered} AbcX'^2 = (b-c)(b-p)(c-p)(\delta-bc)^2; \\ AcaX'^2 = (c-a)(c-p)(a-p)(\delta-ca)^2; \\ AabZ'^2 = (a-b)(a-p)(b-p)(\delta-ab)^2; \\ \delta = ru,\ b \leqslant p \leqslant a. \end{gathered} \tag{34}$$

16. На гиперболоиде существуют две системы образующих a и b. Образующим a первой системы отвечает ветвь (M) стрикционной линии, — геометрическое место центров M прямых a. Точно также образующим b второй системы отвечает ветвь (N) стрикционной линии — геометрическое место центров N прямых b.

Полагая в (33) и (34):

$$p = a \text{ или } p = b,$$

получим:

$$Y = 0,\ Z = 0;\ Y' = 0,\ Z' = 0$$

или

$$X = 0,\ Z = 0;\ X' = 0,\ Z' = 0,$$

т. е. доказана.

Теорема. *Обе ветви (M) и (N) стрикционной линии пересекаются в 4 точках встречи поверхности гиперболоида с его вещественными осями; вещественные оси гиперболоида лежат на его нормалии и служат общими образующими тех двух полостей нормалии, которые содержат ветви (N) и (M) стрикционной линии.*

Нетрудно доказать, что других точек пересечения у кривых (M) и (N) нет, но на этом останавливаться не будем.

§ 21. Кривизна. Бинормали.

17. Займемся вычислением кривизны гиперболоида, соответствующей его образующей a. Обратимся для этого к выражениям (§ 19, п. 7

формулы 22) координат нормали c, представив их для удобства в следующей форме:

$$\alpha e^{\omega p} = ke^{\omega a}, \quad \beta e^{\omega p} = le^{\omega b}, \quad \gamma e^{\omega p} = me^{\omega c}.$$

Дифференцирование этих формул дает:

$$e^{\omega p}(d\alpha + \omega\alpha\, dp) = e^{\omega a}\, dk, \; e^{\omega p}(d\beta + \omega\beta\, dp) = e^{\omega b} dl,$$
$$e^{\omega p}(d\gamma + \omega\gamma\, dp) = e^{\omega c}\, dm.$$

Но по общей теории

$$d\alpha = \frac{ds\xi}{\sin R} = ds(-x + x_1 \operatorname{ctg} R), \; d\beta = \ldots, \; d\gamma = \ldots,$$

где $\sin R$ — искомый радиус кривизны; поэтому предыдущие уравнения примут вид:

$$e^{\omega p}[ds(-x + x_1 \operatorname{ctg} R) + \omega\alpha\, dp] = e^{\omega a}\, dk,$$
$$e^{\omega p}[ds(-y + y_1 \operatorname{ctg} R) + \omega\beta dp] = e^{\omega b}\, dl,$$
$$e^{\omega p}[ds(-z + z_1 \operatorname{ctg} R) + \omega\gamma dp] = e^{\omega c}\, dm.$$

Умножая эти уравнения на x_1, y_1, z_1 соответственно, получим, сложив результаты:

$$e^{\omega p} ds \operatorname{ctg} R = \sum e^{\omega a} x_1 dk, \tag{a}$$

так как

$$\sum x_1 x = \sum x_1 \alpha = 0, \; \sum x_1^2 = 1.$$

Но по формулам (23) § 19, п. 8,

$$e^{\omega p} u x_1 = -a x_0 e^{\omega(b+c)}, \; e^{\omega p} u y_1 = -b y_0 e^{\omega(c+a)}, \; e^{\omega p} u z_1 = -c z_0 e^{\omega(a+b)}.$$

Отсюда выводим:

$$u e^{\omega p} \sum e^{\omega a} x_1 dk = -e^{\omega(a+b+c)} \sum a x_0 dk. \tag{b}$$

Но, как мы видели в § 19, п. 2 [ур-ние (11)]:

$$\sum a x_0 k = 0,$$

следовательно,

$$\sum a x_0 dk = -\sum ak dx_0.$$

Но по формулам § 19, п. 6

$$\sum ak dx_0 = ds_0 \sum ak^2 = -\frac{abc}{u^2} ds_0$$

на основании формулы (17) § 18, п. 5. Замечая, что

$$p = -\frac{abc}{u^3},$$

получим окончательно:

$$\sum akdx_0 = pds_0, \quad \sum ax_0dk = -pds_0,$$

поэтому, вместо (b) получим:

$$ue^{\omega p}\sum e^{\omega a}x_1dk = pds_0e^{\omega(a+b+c)}.$$

Перемножая это уравнение и (a), замечая, кроме того, что

$$ds = ds_0e^{\omega p},$$

получим по сокращении на ds_0:

$$ue^{3\omega p}\operatorname{ctg} R = pe^{\omega(a+b+c)}. \tag{35}$$

Это — искомая формула для определения радиуса кривизны гиперболоида.

Из нее вытекает:

$$\operatorname{ctg} R_0 = \frac{p}{u}, \quad -\frac{R_1}{\sin^2 R_0} = \frac{p}{u}(a+b+c-3p). \tag{36}$$

18. Согласно общей теории (глава 1, § 6, п. 27), угол θ между образующей a гиперболоида и стрикционной линией определяется формулой (51):

$$\operatorname{ctg}\theta = \operatorname{ctg} R_0 - \frac{R_1}{p\sin^2 R_0}.$$

Следовательно, на основании только что выведенных формул

$$u\operatorname{ctg}\theta = a+b+c-2p. \tag{37}$$

19. Пусть $d\ (\lambda, \mu, \nu)$ — бинормаль гиперболоида, соответствующая образующей a.

По общей теории

$$\lambda = x\cos R + x_1\sin R,$$

откуда следует:

$$\frac{\lambda}{\sin R} = x\operatorname{ctg} R + x_1.$$

Подставляя сюда значения

$$x = x_0e^{a\omega}, \quad \operatorname{ctg} R = \frac{p}{u}e^{\omega(a+b+c-3p)}; \quad x_1 = -\frac{ax_0}{u}e^{\omega(b+c-p)}$$

и умножая обе части на $e^{3\omega p}$, получим:

$$e^{3\omega p}\mu\frac{\lambda}{\sin R} = x_0\left[pe^{\omega(2a+b+c)} - ae^{\omega(b+c+2p)}\right].$$

Раскрывая в правой части коэффициент при x_0 и замечая, что

$$pe^{\omega(2a+b+c)}-ae^{\omega(b+c-2p)}=p+\omega p(2a+b+c)-a-\omega a(b+c+2p)=$$
$$=p-a+\omega(b+c)(p-a)=(p-a)\,e^{\omega(b+c)},$$

получим первую из формул:

$$\left.\begin{aligned} ue^{3\omega p}\frac{\lambda}{\sin R}&=x_0(p-a)\,e^{\omega(b+c)},\\ ue^{3\omega p}\frac{\mu}{\sin R}&=y_0(p-b)\,e^{\omega(c+a)},\\ ue^{3\omega p}\frac{\nu}{\sin R}&=z_0(p-c)\,e^{\omega(a+b)}, \end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

остальные две получим таким же путем.

§ 22. Соотношения между образующими a и b обеих систем.

20. Между образующей a гиперболоида одной системы и образующей b другой существует ряд интересных соотношений. Мы дадим здесь лишь простейшие из них.

Для удобства выпишем здесь две формулы, относящиеся к образующей a (x, y, z), ее центральной нормали c (α, β, γ), бинормали d (λ, μ, ν), $\operatorname{ctg} R$ и $\operatorname{ctg}\theta$. Итак

$$x=x_0e^{\omega a},\ \alpha=ke^{\omega(a-p)},\ e^{3\omega p}u\frac{\lambda}{\sin R}=x_0(p-a)\,e^{\omega(b+c)},$$

$$y=y_0e^{\omega b},\ \beta=le^{\omega(b-p)},\ e^{3\omega p}u\frac{\mu}{\sin R}=y_0(p-b)\,e^{\omega(c+a)},$$

$$z=z_0e^{\omega c},\gamma=me^{\omega(c-p)},\ e^{3\omega p}u\frac{\nu}{\sin R}=z_0(p-c)\,e^{\omega(a+b)},$$

$$e^{3\omega p}\operatorname{ctg}R=\frac{p}{u}e^{\omega(a+b+c)},\ u\operatorname{ctg}\theta=a+b+c-2p;\ p=-\frac{abc}{u^2}.$$

Здесь u — длина перпендикуляра OA_1, опущенного из центра O на образующую a.

Для образующей $b(x', y', z')$ другой системы соответствующие формулы получатся заменой в этих формулах чисел a, b, c на $-a$, $-b$, $-c$ соответственно. Обозначая через c' $(\alpha', \beta', \gamma')$ — центральную нормаль к гиперболоиду в центре N прямой b, через d' (λ', μ', ν') — соответствующую бинормаль, через u' — длину перпендикуляра OA', опущенного из центра O на прямую b, выпишем соответствующие формулы для прямой b:

$$x'=x_0'e^{-\omega a},\alpha'=k'e^{-\omega(a+p')},\ e^{3\omega p'}u'\frac{\lambda'}{\sin R'}=-x_0'(p'+a)\,e^{-\omega(b+c)},$$

$$y'=y_0'e^{-\omega b},\ \beta'=l'e^{-\omega(b+p')},\ e^{3\omega p'}u'\frac{\mu'}{\sin R'}=-y_0'(p'+b')e^{-\omega(c+a)},$$

$$z'=z_0'e^{-\omega c},\ \gamma'=m'e^{-\omega(c+p')},\ e^{3\omega p'}u'\frac{\nu'}{\sin R'}=-z_0'(p'+c)e^{-\omega(a+b)},$$

$$e^{3\omega p'}\operatorname{ctg}R'=\frac{p'}{u'}e^{-\omega(a+b+c)},\ u'\operatorname{ctg}\theta'=-a-b-c-2p',$$

$$p'=\frac{abc}{u'^2}.$$

Здесь k', l', m' — направляющие косинусы перпендикуляра OA_1'.

21. Введем следующие углы:

$$\angle(b,\ c)=S=S_0+\omega S_1;\ \angle(c,\ c')=T=T_0+\omega T_1,$$
$$\angle(d,\ d')=U=U_0+\omega U_1.$$

Вычисляя эти углы по формулам

$$\cos S=\sum x'\alpha,\ \cos T=\sum\alpha\alpha',\ \cos U=\sum\lambda\lambda',$$

найдем, пользуясь выписанными формулами:

$$\left.\begin{array}{c}e^{\omega p}\cos S=\text{вещественному числу}=\cos S_0,\\ e^{\omega(p+p')}\cos T=\text{вещественному числу}=\cos T_0,\\ e^{3\omega(p+p')}\dfrac{\cos U}{\sin R\sin R'}=\text{вещественному числу}=\dfrac{\cos U_0}{\sin R_0\sin R_0'},\\ e^{3\omega(p+p')}\operatorname{ctg}R\operatorname{ctg}R'=\text{вещественному числу}=\operatorname{ctg}R_0\operatorname{ctg}R_0',\\ u\operatorname{ctg}\theta+u'\operatorname{ctg}\theta'+2(p+p')=0.\end{array}\right\}\quad(39)$$

Первое из этих соотношений — частный случай общей теоремы гл. I [§ 2, п. 8, ур-ние (11)]. Его поэтому можно было предвидеть. В самом деле, прямая b пересекает a. Пусть K — точка их встречи. Прямая b в то же время касается гиперболоида, поэтому между ней и центральной нормалью c должно иметь место соотношение первое из (39). Отметим, что угол S_0, очевидно, равен углу между направлениями прямой b и перпендикуляра OA_1.

Обратимся ко второму из соотношений (39). Беря параметры обеих частей, находим:

$$T_1\operatorname{tg}T_0=p+p'.\qquad\text{(a)}$$

Заметим, что здесь T_0 равно углу $\angle(OA_1,\ OA_1')$ между перпендикулярами OA_1 и OA_1'. Из третьего соотношения (39), беря параметры, получим:

$$3(p+p')=U_1\operatorname{tg}U_0+\frac{R_1}{\operatorname{tg}R_0}+\frac{R_1'}{\operatorname{tg}R_0'}\qquad\text{(b)}$$

— любопытное соотношение, в которое входят, с одной стороны, кратчайшее расстояние U_1 и угол U_0 между бинормалями d и d', а с другой — расстояние R_1 каждой бинормали от соответствующей образующей и угол R_0 между ними.

Наконец соотношение четвертое (39) дает, если взять параметры

$$3(p+p')=\frac{R_1}{\sin R_0 \cos R_0}+\frac{R_1'}{\sin R_0' \cos R_0'}.$$

Исключая $p+p'$ между последними двумя соотношениями, получим:

$$U_1 \operatorname{tg} U_0 = R_1 \operatorname{tg} R_0 + R_1' \operatorname{tg} R_0'. \tag{d}$$

22. В заключение рассмотрим частный случай, когда образующая b_1 проходит через центр M образующей a. Плоскость (a, b_1), касательная к гиперболоиду в M, перпендикулярна к центральной нормали c. Поэтому угол $\angle(b_1, c)$ равен прямому. Но c параллельна перпендикуляру OA_1, поэтому OA_1 — перпендикуляр p к плоскости (a, b_1). Замечая, что T_0 равно углу между OA_1 и OA_1', заключаем:

$$u=u' \cos T_0.$$

Но так как угол OA_1A_1' равен прямому, далее

$$p=-\frac{abc}{u^2}; \quad p'=\frac{abc}{u'^2},$$

то

$$p'=-p\cos^2 T_0; \quad p'+p=p\sin^2 T_0.$$

Следовательно, соотношение (a) будет в данном случае:

$$T_1=p\sin T_0 \cos T_0. \tag{e}$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} T=\operatorname{tg} T_0+\frac{\omega T_1}{\cos^2 T_0}=\operatorname{tg} T_0 e^{\omega p}. \tag{f}$$

Глава V.

ПОВЕРХНОСТИ С ОБЩЕЙ СТРИКЦИОННОЙ ЛИНИЕЙ.

§ 23. Основные соотношения внутренней геометрии (la Géométrie intrinsèque).

1. Настоящую главу посвятим изучению совершенно новой проблемы, имеющей, как мы увидим, весьма важное значение для линейчатой геометрии.

Проблема. Дана некоторая линия (A), радиусы которой — кривизны — r и кручения t в точке ее A определяются уравнениями:

$$r=r(\sigma),\ t=t(\sigma), \tag{1}$$

где σ — дуга линии (A), отсчитываемая от определенной точки ее A_0. Дана, кроме того, уравнением

$$p=p(\sigma) \tag{2}$$

некоторая функция p.

Требуется найти такую линейчатую поверхность (a), чтобы для нее линия (A) была стрикционной, причем образующая a поверхности, проходящая через точку A линии, обладала бы параметром, равным p.

2. Построим триедр $A(x, y, z)$ линии (d) в точке A, причем ось x направлена по касательной в сторону увеличивающейся дуги σ, ось y направлена по главной нормали к центру кривизны, а ось z — по бинормали, причем триедр $A(x, y, z)$ конгруэнтен координатному. За комплексные координаты прямых x, y, z примем: для оси x — a_1, b_1, c_1, для оси y — a_2, b_2, c_2 и для оси z — a_3, b_3, c_3. При этих обозначениях уравнения (c) и (c') гл. II (§ 1, п. 31) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da_1}{d\sigma}=\frac{a_2}{r},\quad \frac{db_1}{d\sigma}=\frac{b_2}{r},\quad \frac{dc_1}{d\sigma}=\frac{c_2}{r};\\
&\frac{da_2}{d\sigma}=-\frac{a_1}{r}-\frac{a_3}{t}e^{-\omega t},\quad \frac{db_2}{d\sigma}=-\frac{b_1}{r}-\frac{b_3}{t}e^{-\omega t},\\
&\frac{dc_2}{d\sigma}=-\frac{c_1}{r}-\frac{c_3}{t}e^{-\omega t},\quad \frac{da_3}{d\sigma}=\frac{a_2}{t}e^{-\omega t},\quad \frac{db_3}{d\sigma}=\frac{b_2}{t}e^{-\omega t},\\
&\frac{dc_3}{d\sigma}=\frac{c_2}{t}e^{-\omega t},
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Предположим, что вершина A триедра $A(x, y, z)$ описывает линию (A) равномерно со скоростью

$$\frac{d\sigma}{dt}=1, \tag{4}$$

и обозначим через p_1, q_1, r_1 — проекции на осях триедра мгновенного винта, характеризующего движение триедра в рассматриваемом положении. Сравнение формул (3) с формулами (20) гл. III (§ 20, п. 8):

$$\frac{da_1}{dt}=r_1a_2-q_1a_3;\quad \frac{da_2}{dt}=p_1a_3-r_1a_1;\quad \frac{da_3}{dt}=q_1a_1-p_1a_2$$

даст:

$$-p_1=\frac{1}{t}e^{-\omega t};\quad q_1=0,\quad r_1=\frac{1}{r}. \tag{5}$$

3. Пусть $a(x, y, z)$ — прямая, с триедром $A(x, y, z)$ не связанная, описывающая в пространстве поверхность (a). Пусть δx, δy, δz — проекции на осях подвижного триедра элементарного полного перемещения ds прямой a, dx, dy, dz — проекции на те же оси ее перемещения относительно триедра. Тогда в силу (4) проекция на осях триедра абсолютной скорости прямой a будет:

$$\frac{\delta x}{d\sigma};\quad \frac{\delta y}{d\sigma},\quad \frac{\delta z}{d\sigma},$$

а относительной —

$$\frac{dx}{d\sigma},\quad \frac{dy}{d\sigma},\quad \frac{dz}{d\sigma}.$$

Поэтому формулы (19) гл. III (§ 15, п. 7) дадут на основании значений (5) проекций p_1, q_1, r_1 мгновенного винта:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\delta x}{d\sigma}=\frac{dx}{d\sigma}-\frac{y}{r},\quad \frac{\delta y}{d\sigma}=\frac{dy}{d\sigma}+\frac{x}{r}+\frac{z}{t}e^{-\omega t},\\ \frac{\delta z}{d\sigma_1}=\frac{dz}{d\sigma}-\frac{y}{t}e^{-\omega t}.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Эти формулы — основные. Положим:

$$k^2=\left(\frac{dx}{d\sigma}-\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\sigma}+\frac{x}{r}+\frac{z}{t}e^{-\omega t}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\sigma}-\frac{y}{t}e^{-\omega t}\right)^2; \qquad (7)$$

тогда для элемента ds дуги поверхности (a) найдем на основании (6) выражение:

$$ds=kd\sigma. \qquad (8)$$

Поэтому, если p — параметр образующей a, то

$$p=Pk. \qquad (9)$$

4. Обозначим через $c(\alpha, \beta, \gamma)$ центральную нормаль к (a), соответствующую образующей a:

$$\alpha=\frac{\delta x}{ds},\quad \beta=\frac{\delta y}{ds},\quad \gamma=\frac{\delta z}{ds}.$$

Формулы (6) дадут на основании (8):

$$k\alpha=\frac{dx}{d\sigma}-\frac{y}{r},\ k\beta=\frac{dy}{d\sigma}+\frac{x}{r}+\frac{z}{t}e^{-\omega t},\ k\gamma=\frac{dz}{d\sigma}-\frac{y}{t}e^{-\omega t}. \qquad (10)$$

Обозначим через $n(\xi, \eta, \zeta)$ главную нормаль к (a), соответствующую образующей a. По общей теории

$$\frac{\delta\alpha}{ds}=\frac{\xi}{\sin R},\quad \frac{\delta\beta}{ds}=\frac{\eta}{\sin R},\quad \frac{\delta\gamma}{ds}=\frac{\zeta}{\sin R},$$

где, как и раньше, R — угол между образующей a и соответствующей бинормалью $d(\lambda, \mu, \nu)$ поверхности. Применяя основные формулы (6) к центральной нормали, получим:

$$\frac{\delta\alpha}{d\sigma}=\frac{d\alpha}{d\sigma}-\frac{\beta}{r},\quad \frac{\delta\beta}{d\sigma}=\frac{d\beta}{d\sigma}+\frac{\alpha}{r}+\frac{\gamma}{t}e^{-\omega t},\quad \frac{\delta\gamma}{d\sigma}=\frac{d\gamma}{d\sigma}-\frac{\beta}{t}e^{-\omega t}.$$

Поэтому предыдущие значения $\frac{\delta\alpha}{ds}$, $\frac{\delta\beta}{ds}$, $\frac{\delta\gamma}{ds}$ дадут на основании (8):

$$\left.\begin{array}{c}k\frac{\xi}{\sin R}=\frac{d\alpha}{d\sigma}-\frac{\beta}{r},\quad k\frac{\eta}{\sin R}=\frac{d\beta}{d\sigma}+\frac{\alpha}{r}+\frac{\gamma}{t}e^{-\omega t}\\ k\frac{\zeta}{\sin R}=\frac{d\gamma}{d\sigma}-\frac{\beta}{t}e^{-\omega t}.\end{array}\right\} \qquad (11)$$

§ 24. Основные соотношения проблемы.

5. Перейдем теперь к поставленной проблеме. Согласно ее требованиям, вершина A триедра $A(x, y, z)$ должна быть центральной точкой образующей a искомой поверхности (a). Следовательно, через ту же точку A должна проходить и центральная нормаль c, которая с касательной Ax к линии (A) в точке A должна образовать прямой угол. Отсюда заключаем: координаты прямых a и c должны быть вещественными числами, причем число α должно равняться нулю. Сверх того параметр образующей a должен иметь наперед заданное формулой (2) значение p. Полагая в (10) α равным нулю, получим прежде всего из первого уравнения

$$\frac{dx}{d\sigma}-\frac{y}{r}=0.$$

Далее, беря параметры обеих частей остальных двух ур-ний (10) и замечая, что числа x, y, z — вещественны, а параметр числа k равен p, найдем:

$$p=\frac{-z}{\frac{dy}{d\sigma}+\frac{x}{r}+\frac{z}{t}}=\frac{y}{\frac{dz}{d\sigma}-\frac{y}{t}}.$$

Полученные три уравнения в окончательной форме будут:

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{y}{r},\quad \frac{dy}{d\sigma}=-\frac{x}{r}-z\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{p}\right),\quad \frac{dz}{d\sigma}=y\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{p}\right). \tag{12}$$

Интегралы этих уравнений x, y, z, связанные условием

$$\sum x^2=1, \tag{13}$$

дадут решение нашей задачи.

В силу условия (13) общие интегралы ур-ний (13) будут содержать лишь две произвольных постоянных. Отсюда заключаем:

Теорема. *Существует ∞^2 поверхностей (a), для которых данная линия (A) служит общей стрикционной линией, и которые обладают в каждой точке A линии (A) общим, наперед заданным, значением p параметров своих образующих.*

6. Пусть $a(x, y, z)$ и $a'(x', y', z')$ — прямые, координаты которых представляют две системы интегралов системы (12). По хорошо известному свойству этой системы

$$\sum xx'=\text{const}.$$

Отсюда мы заключаем:

Теорема. *Проходящие через точку A общей стрикционной линии образующие различных поверхностей (a) составляют твердую связку прямых.*

Обозначим эту связку с центром A буквой K. Когда точка A движется по линии (A), каждый луч a связки K описывает соответствующую поверхность (a).

Нетрудно найти мгновенное движение связки.

Обратимся с этой целью к ур-ниям (6) п. 3. Преобразуя их правые части помощью ур-ний (12), легко найти:

$$\frac{\delta x}{d\sigma}=0, \quad \frac{\delta y}{d\sigma}=-\frac{z}{p}e^{\omega p}, \quad \frac{\delta z}{d\sigma}=\frac{y}{p}e^{\omega p}.$$

Предположим снова, что центр A связки K описывает линию (A) равномерно со скоростью

$$\frac{d\sigma}{dt}=1.$$

Тогда полученные уравнения представят проекции на оси подвижного триедра $A(x, y, z)$ абсолютной скорости любого луча a связки K. Сравнение с обобщенными ур-ниями (17) Эйлера (гл. III, § 15, п. 6) дает для проекций P, Q, R на оси триедра мгновенного винтового движения твердой связки K:

$$P=\frac{e^{\omega p}}{p}; \; Q=0; \; R=0, \tag{14}$$

что доказывает следующую теорему:

Теорема. *Мгновенным винтом абсолютного движения связки K служит винт, параметр которого равен p, а ось совпадает с касательной Ax.*

Переходя к непрерывному движению связки K, можно сказать:

Теорема. *Если твердой связке лучей K, центр A которой описывает данную линию A, сообщить в каждом ее положении мгновенное винтовое движение с параметром p вокруг касательной к (A) в точке A, то каждый луч a связки опишет поверхность (a), для которой (A) — стрикционная линия, а параметр образующей a равен p.*

Заметим в заключение, что аксоидами движения связки будут: неподвижный аксоид K_1 — геометрическое место касательных к данной линии (A), а подвижной K_2 — конус с вершиной в точке A.

§ 25. Углы θ и φ.

7. Преобразуем теперь ур-ния (10) § 1 помощью тех же ур-ний (12). Это даст:

$$k\alpha=0, \; k\beta=-\frac{z}{p}e^{\omega p}, \; k\gamma=\frac{y}{p}e^{\omega p}. \tag{15}$$

Отсюда следует:

$$k^2=\frac{y^2+z^2}{p^2}e^{2\omega p}=\frac{1-x^2}{p^2}e^{2\omega p} \tag{16}$$

Положим:

$$x=\cos\theta, \; y=\sin\theta\cos\varphi, \; z=\sin\theta\sin\varphi, \tag{17}$$

где θ — угол между образующей a и касательной Ax к линии (A), φ — угол между плоскостью угла θ и плоскостью соприкосновения (xAy)

линии (A). Заметим, что плоскость угла θ, по определению, центральная касательная плоскость поверхности (a) в точке A.

Подстановка в (16), вместо x, $\cos\theta$ даст по извлечении квадратного корня из обеих частей:

$$k = \frac{\sin\theta}{p} e^{\omega p}. \tag{18}$$

Подставляя в ур-ния (15) это значение числа k и значения (17) чисел x, y, z, найдем:

$$\alpha = 0;\ \beta = -\sin\varphi;\ \gamma = \cos\varphi. \tag{19}$$

8. Пусть $b(x_1, y_1, z_1)$ — центральная касательная к поверхности (a) в точке A.

По известным формулам:

$$x_1 = y\gamma - z\beta; \quad y_1 = z\alpha - x\gamma; \quad z_1 = x\beta - y\alpha.$$

Вычислим, пользуясь (17) и (19):

$$x_1 = \sin\theta;\ y_1 = -\cos\theta\cos\varphi;\ z_1 = -\cos\theta\sin\varphi. \tag{20}$$

9. Теперь вычислим координаты λ, μ, ν бинормали d и ξ, η, ζ главной нормали n поверхности (a), соответствующие образующей d. Для этого проще всего использовать уравнения общей теории [гл. I, § 5, п. 19, формулы (b) и (f) таблицы (B)]:

$$\lambda = x\cos R + x_1\sin R,\ \mu = y\cos R + y_1\sin R,\ \nu = z\cos R + z_1\sin R$$
$$\xi = -x\sin R + x_1\cos R,\ \eta = -y\sin R + y_1\cos R,$$
$$\zeta = -z\sin R + z_1\cos R,$$

Подставляя значения x, y, z и x_1, y_1, z_1 по формулам (17) и (20) и полагая:

$$\theta - R = U, \tag{21}$$

получим:

$$\lambda = \cos U,\ \mu = \sin U\cos\varphi,\ \nu = \sin U\sin\varphi,$$
$$\xi = \sin U,\ \eta = -\cos U\cos\varphi,\ \zeta = -\cos U\sin\varphi. \tag{22}$$

10. Обратимся теперь к первому из ур-ний (11) § 23 (п. 4)

$$\frac{k\xi}{\sin R} = \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\beta}{r}.$$

Подставим в него

$$k = \frac{\sin\theta}{p} e^{\omega p},\ \alpha = 0,\ \beta = -\sin\varphi, \xi = \sin U = \sin(\theta - R)$$

в силу формул (18) и (19), (21) и (22). По разделении на $\sin^2\theta$ получим:

$$\frac{e^{\omega p}}{p} \cdot \frac{\sin(\theta - R)}{\sin\theta\ \sin R} = \frac{\sin\varphi}{r\sin^2\theta},$$

откуда выводим:

$$\operatorname{ctg} R - \operatorname{ctg} \theta = p \frac{\sin \varphi}{r \sin^2 \theta} e^{-\omega p} \tag{23}$$

Это уравнение распадается на два:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} R_0 - \operatorname{ctg} \theta &= \frac{p \sin \varphi}{r \sin^2 \theta}, \\ \frac{R_1}{\sin^2 R_0} &= \frac{p^2 \sin \varphi}{r \sin^2 \theta}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

по которым можно вычислить составляющие элементы угла

$$R = R_0 + \omega R_1.$$

11. Преобразование ур-ний (12) § 24 (п. 5) помощью формул (17) дает после элементарных переделок:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{\cos \varphi}{r} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{\sin \varphi \operatorname{ctg} \theta}{r}. \tag{25}$$

Заметим в заключение, что подстановкой

$$S = \frac{x + iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - iy} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{26}$$

мы приведем интегрирование трех ур-ний (12) к интегрированию одного уравнения

$$\frac{dS}{d\sigma} + \frac{iS}{r} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{p}\right)(S^2 - 1) = 0. \tag{27}$$

Это — хорошо известное преобразование ур-ний (12), указанное впервые G. Darboux.[1]

Обратно, если S найдено из (27) в функции оси σ, то из (26) найдем x, y, z, связанные соотношением:

$$\sum x^2 = 1.$$

Итак, решение поставленной проблемы вполне совпадает с задачей интегрирования ур-ния (27) типа Riccati. Отсюда прямо следует, что общее решение не может быть дано при современных средствах анализа.

Мы рассмотрим в дальнейшем лишь три случая:

1) данная линия (A) должна быть и геодезической для поверхностей (a);

2) данная линия (A) должна быть и асимптотической для поверхностей (a) и

3) данная линия (A) должна быть и линией кривизны для поверхностей (a).

---

[1] G. Darboux, loc. cit., p. 30.

Примечание. Ур-ния (12) были впервые получены иным путем итальянским геометром E. Cesàro,[1] но он ограничился их выводом, не дав никаких приложений. Должно быть, поэтому они не вошли в классические труды G. Darboux и L. Bianchi, и даже имя Cesàro не упомянуто в огромном списке литературы, использованной G. Darboux. Между тем ур-ния (12), которые в дальнейшем будем называть уравнениями Cesàro в высшей степени замечательны, позволяя, как здесь будет показано, решать целый ряд новых проблем геометрии с чрезвычайной простотой.

§ 26. Стрикционная линия — геодезическая.

12. Стрикционная линия (A) будет для поверхности (a) геодезической, если ее главная нормаль в точке A — ось Ay триедра $A(x, y, z)$ — совпадает с центральной нормалью к (a) в A. Это — необходимое и достаточное условие. Но координаты α, β, γ центральной нормали определяются формулами:

$$\alpha = 0;\ \beta = -\sin\varphi;\ \gamma = \cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\varphi = \varepsilon\frac{\pi}{2},\ (\varepsilon = \pm 1) \tag{27}$$

и на основании ур-ний (25):

$$\theta = \mathrm{const} = \theta_1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{t} \pm \varepsilon\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{r} = 0. \tag{28}$$

Для определенности положим:

$$\varepsilon = +1.$$

Формулами (27) и (28) доказываются следующие теоремы:

Теорема. *Если стрикционная линия геодезика поверхности (a), то она пересекает все образующие последней под одним и тем же углом θ_1.*

Теорема. *Существует ∞^1 поверхностей (a), для которых данная линия (A) не только стрикционная, но и геодезическая. Образующие a этих поверхностей, проходящие через точку A, — лучи пучка с центром в A, лежащего в плоскости, определяемой касательной и бинормалью (A) в A.*

Это известные теоремы.

Теорема. *Параметр образующей a той поверхности (a), для которой данная линия не только стрикционная, но и геодезика, связан с радиусами кривизны и кручения соотношением:*

$$\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{r} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} = 0. \tag{28'}$$

Эта теорема — новая.

---

[1] E. Cesàro, Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli, 1896, p. 135.

Следствие. Полагая в последней формуле: $\theta_1 = 0$ или $\frac{\pi}{2}$, получим соответственно

$$p_0 = 0; \; p_{\frac{\pi}{2}} = -t.$$

Первое значение параметра отвечает развертывающейся поверхности — геометрическому месту касательных к линии (A); второе доказывает, что бинормали любой линии (A) образуют линейчатую поверхность, для которой эта линия одновременно — стрикционная и геодезическая, а параметр равен взятому с обратным знаком радиусу кручения линии (A) в ее точке A.

Обозначим через $a(\theta)$ только-что найденные поверхности, для которых данная линия (A) одновременно — стрикционная и геодезическая.

Формула (28′) показывает, что параметр p будет одинаков вдоль всей поверхности $a(\theta)$ лишь в следующих двух случаях:

a) r и t постоянны,

b) $\frac{A}{r} + \frac{B}{t} = 1$,

при постоянных A и B. В первом случае линия (A) — обыкновенная винтовая линия (начерченная на прямом круглом цилиндре); тогда каждому значению θ отвечает постоянное значение параметра p. Во втором случае линия (A) — линия Bertrand'а. Сравнение формул (28′) и (b) дает тогда:

$$p = -B; \; \operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{A}{B}. \tag{c}$$

Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Если у косой линейчатой поверхности с постоянным параметром p ее образующих стрикционная линия (A) — одновременно геодезика, то линия (A) или обыкновенная винтовая линия или же линия Bertrand'а.* В случае винтовой линии существует ∞^1 таких поверхностей; в случае же линии Bertrand'а есть лишь одна такая поверхность, причем соответствующие ей числа p и θ определяются формулами (c).

13. Вернемся к системе ∞^2 поверхностей a, определяемой данной стрикционной линией (A) и параметром p, удовлетворяющим формуле (28′). Эта система описывается, как мы видели, лучами твердой связки K с центром в точке A. Среди этих лучей есть лишь один a_1, наклоненный к касательной Ax в A к линии (A) под неизменным углом θ_1 и перпендикулярный к главной нормали линии (A) в A. Этот луч a_1 опишет при движении связки K поверхность (a_1), для которой линия (A) будет стрикционной и геодезической. Но касательная Ax, как было доказано, — ось винтового движения связки K. Доказана, следовательно,

Теорема. *Если параметр p задан соотношением*

$$\frac{\operatorname{ctg} \theta_1}{r} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} = 0,$$

при неизменном θ_1, то подвижным аксоидом движения связки K будет прямой круглый конус, ось которого совпадает с прямой a_1, а угол раствора равен $2\theta_1$.

Следствие. *При $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, прямая a_1 — бинормаль линии (A), параметр p равен — t, а подвижной аксоид вырождается в плоскость соприкосновения линии (A) в A.*

14. Займемся в заключение интегрированием ур-ний (12) § 24 (п. 5):

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{y}{r},\ \frac{dy}{d\sigma}=-\frac{x}{r}-z\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{p}\right),\ \frac{dz}{d\sigma}=y\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{p}\right) \quad (29)$$

под условием:

$$\sum x^2=1;\ \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{r}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}=0. \quad (30)$$

Подставляя в формулы (29):

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\cos\varphi,\ z=\sin\theta\sin\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{2},$$

получим:

$$x_0=\cos\theta_1;\ y_0=0;\ z_0=\sin\theta_1. \quad (31)$$

Эти числа будут системой частных интегралов ур-ний (29). Внесем в (29) значение p из (30). Это даст:

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{y}{r},\quad \frac{dy}{d\sigma}=-\frac{x}{r}+\frac{z}{r}\operatorname{ctg}\theta_1,\ \frac{dz}{d\sigma}=-\frac{y\operatorname{ctg}\theta_1}{r}.$$

Полагая затем:

$$\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{r}=w, \quad (32)$$

получим окончательно:

$$\frac{dx}{dw}=y,\ \frac{dy}{dw}=-x+z\operatorname{ctg}\theta_1,\ \frac{dz}{dw}=-y\operatorname{ctg}\theta_1. \quad (33)$$

Пусть, попрежнему, a_1 — луч связки K, о котором шла выше речь, a — произвольный луч той же связки. Координатами первой прямой служат числа (31) x_0, y_0, z_0, координатами второй — общие интегралы x, y, z ур-ний (33). Согласно общей теории этих уравнений,

$$\sum xx_0=\text{const}=\cos\varepsilon,$$

иными словами, прямые a_1 и a образуют неизменный угол ε. Построим теперь триедр $A\ (x, y, z)$ точки A линии (A) и пересечем его ребра в точках X, Y, Z шаровой поверхностью единичного радиуса с центром в точке A. Пусть d_1 и d — точки встречи с поверхностью шара прямых a_1 и a соответственно. Так как y_0 равно нулю, то точка d_1 лежит на дуге большого круга XZ, причем

$$\smile d_1 X = \theta_1; \ \smile d_1 d = \varepsilon.$$

Обозначая через V угол (Zd_1d), получим из рассмотрения треугольников Xd_1d, Yd_1d и Zd_1d:

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos\theta_1 \cos\varepsilon - \sin\theta_1 \sin\varepsilon \cos V \\ y = \sin\varepsilon \sin V \\ z = \sin\theta_1 \cos\varepsilon + \cos\theta_1 \sin\varepsilon \cos V, \end{array}\right\} \qquad (34)$$

так как x, y, z — координаты точки d. Заметим, что угол θ_1 не может равняться нулю, так как тогда второе из ур-ний (33) было бы иллюзорным.

Первая из (34) дает:

$$\frac{dx}{dw} = \sin\theta_1 \sin\varepsilon \sin V \frac{dV}{dw}.$$

Но

$$\frac{dx}{dw} = y = \sin\varepsilon \sin V,$$

поэтому

$$\frac{dV}{dw} = \frac{1}{\sin\theta_1},$$

откуда

$$V = \frac{w}{\sin\theta_1} + V_0 \quad (V_0 \text{— произвольная постоянная}). \qquad (35)$$

Формулами (34) и (35) интегрирование ур-ний (33) доведено до конца. Напомним, что

$$w = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r}. \qquad (36)$$

Произвольными постоянными интеграции служат числа ε и V_0.

15. Весьма просто интегрируется также соответствующее уравнение Riccati:

$$\frac{dS}{d\sigma} + \frac{iS}{r} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{p}\right)(S^2 - 1) = 0.$$

Внеся в него значение p из (28′) и вновь введя переменную w по формуле (36), получим:

$$\frac{dS}{S^2 - 1 - 2S \operatorname{tg}\theta_1} = \frac{i}{2} \operatorname{ctg}\theta_1 \, dw.$$

Но, как легко видеть, тождественно

$$\left.\begin{aligned}
&S^2-1-2S\operatorname{tg}\theta_1=\left[S-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)\right]\left[S+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)\right],\\
&\frac{1}{S^2-1-2S\operatorname{tg}\theta_1}=\frac{\cos\theta_1}{2}\left[\frac{1}{S-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}-\frac{1}{S+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}\right],
\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

поэтому дифференциальное уравнение функции S примет вид:

$$dS\left[\frac{1}{S-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}-\frac{1}{S+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}\right]=i\frac{dw}{\sin\theta_1}=idV\tag{37}$$

на основании (35). Интегралом этого уравнения будет:

$$\frac{S-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}{S+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right)}=Ae^{iV},$$

где A — произвольная постоянная.

16. Обратимся в заключение к формуле (23) § 25 (п. 10):

$$\operatorname{ctg}R-\operatorname{ctg}\theta=\frac{p\sin\varphi}{r\sin^2\theta}e^{-\omega p},$$

определяющей комплексный угол R между касательной в A к данной линии (A) и бинормалью поверхности (a), соответствующей образующей a, проходящей через A. В данном случае, как выше было установлено, для поверхности (a_1) имеем:

$$\varphi=\frac{\pi}{2},\quad \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{r}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}=0,\quad \theta=\theta_1,$$

поэтому общая формула примет вид:

$$\operatorname{ctg}R=\operatorname{ctg}\theta_1+\frac{p}{r\sin^2\theta_1}e^{-\omega p},$$

откуда находим:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ctg}R_0&=\operatorname{ctg}\theta_1+\frac{p}{r\sin^2\theta_1},\\
\frac{R_1}{\sin^2R_0}&=\frac{p^2}{r\sin^2\theta_1}.
\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

Положим:

$$r=a\cos\nu,\quad t=a\sin\nu;\quad \operatorname{tg}\nu=\frac{t}{r},\quad a^2=t^2+r^2.\tag{39}$$

Тогда нетрудно предыдущие формулы представить в следующем виде:

$$R_0 = \nu + \theta_1;\ R_1 = \frac{rt^2}{r^2 + t^2}. \tag{40}$$

По этим формулам можно построить бинормаль поверхности $a(\theta)$, соответствующую ее образующей a.

§ 27. Стрикционная линия—асимптотика.

17. В этом случае, согласно определению асимптотики, главная нормаль Ay стрикционной линии (A) в ее точке A должна лежать в центральной касательной плоскости поверхности (a) в той же точке A; совпадают, следовательно, центральная нормаль c в A к поверхности и бинормаль в A к линии (A).

Но координаты (α, β, γ) прямой c определяются формулами:

$$\alpha = 0;\ \beta = -\sin\varphi;\ \gamma = \cos\varphi.$$

Но γ должно равняться единице, следовательно:

$$\varphi = 0.$$

Ур-ния (25) (§ 25, п. 11) будут поэтому:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{1}{r} = 0;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{t} = 0,$$

откуда следует:

$$\theta = \theta_0 - \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r};\ p = -t\ (\theta_0 \text{— произвольная постоянная}). \tag{41}$$

Доказана таким образом хорошо известная:

Теорема. *Через произвольную линию (A) проходит ∞^2 косых линейчитых поверхностей (a), для которых линия (A)—одновременно стрикционная и асимптотика. Образующие этих поверхностей, проходящие через точку A линии (A), лежат в плоскости соприкосновения линии (A) в A и образуют с касательной Ax угол θ формулы* (41).

У всех этих прямых a—общий параметр, равный радиусу кручения линии (A) в A, взятому со знаком минус.

Заметим в заключение, что интегралами ур-ний (12) будут теперь:

$$x = \sin\alpha\cos V;\ y = \sin\alpha\sin V;\ z = \cos\alpha \tag{42}$$

(α—произвольная постоянная), в чем нетрудно убедиться.

§ 28. Поверхности B, у которых стрикционная линия одновременно—линия кривизны.

18. Если стрикционная линия (A)—линия кривизны, то нормали к поверхности вдоль линии (A) должны образовать развертывающуюся поверхность B' и, следовательно, обертывать определенную кривую (A')—

ребро возврата поверхности B'. Пусть A и A' — соответствующие точки линий (A) и (A'), так что прямая AA' — центральная нормаль к B в A и касательная в A' к линии (A'). Но линия (A) — ортогональная траектория всех образующих поверхности B', поэтому ее касательная в A параллельна главной нормали n линии (A') в точке A' и, следовательно, перпендикулярна к бинормали d линии (A') в той же точке A'. Пусть теперь a — образующая поверхности B, проходящая через точку A. Для поверхности B прямые n и d будут главной нормалью и бинормалью, соответствующими образующей a.

Итак, бинормаль поверхности B всегда скрещивается под прямым углом с касательной к стрикционной линии (A) в соответствующей точке A.

19. По общей теории линейных поверхностей между элементами ds и ds' дуг поверхности B и ее нормалии при a имеет место соотношение:

$$ds' = \frac{ds}{\sin R}$$

(гл. I, § 3, п. 13). Так как в данном случае параметры всех образующих AA' нормалии равны нулю, то, беря параметры обеих частей общей формулы, получим:

$$p = \frac{R_1}{\operatorname{tg} R_0}, \tag{43}$$

откуда, очевидно, следует:

$$\sin R = \sin R_0 e^{\omega p}. \tag{44}$$

В общей теории для стрикционной линии (A) мы вывели два равносильных соотношения:

$$\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{ctg} R_0 - \frac{R_1}{p \sin^2 R_0}; \quad \operatorname{ctg} R - \operatorname{ctg} \theta = (\operatorname{ctg} R_0 - \operatorname{ctg} \theta)\, e^{-p\omega} \tag{45}$$

[(гл. I, § 6, п. 27 ур-ния (43) и (45)]. Подстановка в первое из них значения (43) числа p даст после нетрудных переделок:

$$\operatorname{ctg} \theta = -\operatorname{tg} R_0,$$

откуда

$$R_0 = \theta + \varepsilon \frac{\pi}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Для определенности примем ε равным $+1$. Итак

$$R_0 = \theta + \frac{\pi}{2}. \tag{46}$$

Этой формулой вновь доказывается, что бинормаль поверхности B скрещивается под прямым углом с касательной к стрикционной линии в соответствующей ее точке.

Подставим теперь во второе из соотношений (45) найденное значение R_0. Это даст:

$$\operatorname{ctg} R - \operatorname{ctg}\theta = -\frac{e^{-p\omega}}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Но для стрикционной линии (A)

$$\operatorname{ctg} R - \operatorname{ctg}\theta = \frac{p\sin\varphi}{r\sin^2\theta}e^{-\omega p}$$

[(§ 25, п. 10, ур-ние (23)]. Сравнение этих двух формул дает:

$$\frac{p\sin\varphi}{r\sin^2\theta} = -\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

или

$$\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{p} = 0. \tag{47}$$

Это — необходимое и достаточное условие, при котором стрикционная линия (A) будет и линией кривизны поверхности B.

20. Раскроем геометрический смысл полученного соотношения. Пересечем шаровой поверхностью единичного радиуса с центром в точке A линии (A) ребра триедра $A\ (x,\ y,\ z)$ этой точки, образующую a поверхности B, проходящую через A, и плоскость $(a,\ c)$, проведенную через центральную нормаль c к поверхности в A и прямую a. Это даст на сфере соответственно — точки $x',\ y',\ z',\ a'$ и дугу $a'W$, встречающую дугу большого круга $x'z'$ в точке W. В треугольнике $x'a'W$

$$\angle a' = \frac{\pi}{2};\quad \angle x' = \frac{\pi}{2} - \varphi;\quad \smile x'a' = \theta,$$

где θ и φ имеют прежние значения. Положим, кроме того:

$$\smile x'W = k$$

и назовем k **бинормальной** координатой образующей a.

Треугольник $x'a'W$ дает:

$$\sin\theta = \sin k\sin W,\ \operatorname{tg}\varphi = \cos k\ \operatorname{tg} W,\ \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} k\ \sin\varphi. \tag{48}$$

Последняя из этих формул позволяет представить условие (47) в виде:

$$p + r\ \operatorname{tg} k = 0. \tag{49}$$

Доказана, следовательно.

Теорема. *Отношение параметра p образующей a поверхности B к соответствующему радиусу r кривизны стрикционной линии равно тангенсу бинормальной координаты к прямой a, взятому со знаком минус.*

21. Ур-ния (25) (§ 25, п. 11) будут теперь:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{\cos\varphi}{r} = 0,\quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{t}, \tag{50}$$

на основании формулы 47. Эти уравнения дают:

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{t},\ \theta=\theta_0-\int_0^\sigma \frac{\cos\varphi d\sigma}{r} \tag{51}$$

(φ_0 и θ_0 — произвольные постоянные).

Интегралами уравнений E. Cesàro будут:

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\cos\varphi,\ z=\sin\theta\sin\varphi. \tag{52}$$

Доказана, таким образом:

Теорема. *Через каждую линию (A) проходит ∞^2 поверхностей B. Параметр p их образующих, проходящих через точку A линии (A), определяется формулой (47) или (49).*

22. Может ли стрикционная линия (A) поверхности B быть ее геодезикой?

Замечая, что на основании теоремы O. Bonnet

$$\theta=\text{const}=\theta_0,$$

выводим из ур-ний (50) и (47)

$$\varphi=\frac{\pi}{2};\ \ \frac{1}{t}=0;\ \ p=-r\operatorname{tg}\theta_0;$$

чем доказывается.

Теорема. *Если у поверхности B стрикционная линия (A) — геодезика, то эта линия непременно плоская, а параметр p образующей a, проходящей через точку A линии (A), прямо пропорционален радиусу r кривизны линий (A) в A.*

Следствие. *Если у поверхности B стрикционная линия (A) —геодезика и, сверх того, параметр p всюду одинаков, то линия (A) — окружность.* В этом случае поверхность B — однополый гиперболоид вращения вокруг перпендикуляра в центре окружности (A) к плоскости последней. В самом деле, по предыдущей теореме при неизменном p постоянно и r. Далее заметим, что искомая поверхность описывается прямыми a, перпендикулярными к соответствующим радиусам окружности (A) и одинаково наклоненными к окружности. Поэтому она — однополый гиперболоид вращения.

23. Перейдем к исследованию отдельных частных случаев. Пусть даны:

$$r=r(\sigma);\ p=p(\sigma). \tag{53}$$

Требуется определить стрикционную линию (A) и поверхность B.

Исключение функций φ между ур-ниями (47) и (50) дает:

$$\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2+\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{p^2}=\frac{1}{r^2}. \tag{54}$$

При произвольном задании функций p и r это уравнение не интегрируемо.

Примем, поэтому, что

$$r = r(\sigma), \quad \frac{p}{r} = \text{const} \quad l = -\operatorname{tg} k. \tag{55}$$

Исключая r между (47) и первым из (50) уравнений, получим:

$$p \frac{d}{d\sigma} \ln \sin\theta = \operatorname{ctg}\varphi. \tag{56}$$

Введем новую переменную q по формуле:

$$q = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{p} = \frac{1}{l}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{r}; \tag{57}$$

тогда полученное только-что уравнение примет вид:

$$\frac{d}{dq}(\ln \sin\theta) = \operatorname{ctg}\varphi. \tag{58}$$

Но по первым двум формулам (48)

$$\ln(\sin\theta) = \ln(\sin k) + \ln(\sin W), \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg} W}{\cos k},$$

следовательно, вместо (58), получим:

$$\operatorname{ctg} W\left(\frac{dW}{dq} - \frac{1}{\cos k}\right) = 0. \tag{59}$$

Отбрасывая предположение $\operatorname{ctg} W = 0$, так как тогда линия (A) была бы геодезической, получим:

$$\frac{dW}{dq} = \frac{1}{\cos k},$$

следовательно,

$$W = \frac{q}{\cos k} + W_0 \tag{60}$$

(W_0 — произвольная постоянная).

Формулы (48) дадут поэтому окончательные выражения для θ и φ через σ. Остается вычислить t. Для этого обратимся к последней из формул (48). Она дает:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{d\sigma} = \operatorname{tg} k \cos\varphi \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

или на основании (50)

$$-\frac{\cos\varphi}{r\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{tg} k\cos\varphi}{t}.$$

Отбрасывая снова значение $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$t + r \operatorname{tg} k\cos^2\theta = 0$$

или по формуле (49)

$$t = p\cos^2\theta. \tag{61}$$

24. Пусть даны

$$t = t(\sigma);\ p = p(\sigma). \tag{62}$$

В этом случае второе из ур-ний (50) даст:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{t} \tag{63}$$

(φ_0 — произвольная постоянная).

Далее из уравнения (56) выводим:

$$\sin\theta = \sin\theta_0 e^{\int_0^\sigma \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{p} d\sigma} \tag{64}$$

(θ_0 — произвольная постоянная).

Раз θ и φ найдены, определим r по ур-нию (47)

$$r = -p\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta. \tag{65}$$

25. Мы займемся теперь определением поверхностей B, у которых параметр p всюду одинаков и равен p_0.

Пусть r — постоянное число r_0. По (47) получим:

$$\operatorname{tg} k = -\frac{p_0}{r_0} = \text{const}.$$

Формула (57) даст теперь

$$q = \frac{\sigma}{p_0},$$

а формула (60)

$$W = \frac{\sigma}{p_0\cos k} + W_0.$$

Далее формулы (48) дадут:

$$\sin\theta = \sin k\sin W;\ \operatorname{tg}\varphi = \cos k\operatorname{tg} W$$

и наконец по формуле (61)

$$t = p_0\cos^2\theta.$$

Задача доведена до конца.

26. Даны:

$$p = p_0;\ r = r(\sigma).$$

Задача вполне решается ур-ниями (63), (64) и (65);

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{t};\quad \sin\theta = \sin\theta_0 e^{\frac{1}{p_0}\int_0^\sigma \operatorname{ctg}\varphi\, d\sigma};\quad r = -p_0\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta.$$

Любопытны случаи: $t = \infty$; $t = \text{const} = t_0$.

В первом случае

$$\varphi=\varphi_0;\ \sin\theta=\sin\theta_0 e^{\frac{\operatorname{ctg}\varphi_0}{p_0}\sigma};\ r=-p_0\sin\varphi_0\operatorname{ctg}\theta.$$

Если же t постоянно, то

$$\varphi=\varphi_0+\frac{\sigma}{t},\ \sin\theta=\sin\theta_0 e^{\frac{1}{p_0}\int\limits_0^\sigma \operatorname{ctg}\varphi\,d\sigma},\ r=-p_0\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta. \quad (66)$$

Заметим, что в силу первой из этих формул

$$\int\limits_0^\sigma \operatorname{ctg}\varphi\,d\sigma=t\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi=\ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^t.$$

Поэтому второй из формул (66) можно дать вид:

$$\sin\theta=\sin\theta_0\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^{\frac{t}{p_0}}.$$

27. Если, сверх того,

$$p_0=-t,$$

то в силу последней формулы

$$\sin\theta\sin\varphi=\sin\theta_0\sin\varphi_0=z,$$

где z — попрежнему косинус угла между образующей поверхности B и бинормалью стрикционной линии.

Доказана, следовательно,

Теорема. *Если у поверхности B стрикционная линия (A) обладает неизменным радиусом кручения t, причем параметр p вдоль (A) всюду равен $-t$, то образующие поверхности наклонены к бинормалям линии (A) под неизменным углом.*

28. Рассмотрим наконец случай, когда стрикционная линия (A) поверхности B — кривая Bertrand'а, представленная уравнением:

$$\frac{a}{r}+\frac{b}{t}=1 \quad (67)$$

и где a и b — данные числа. Отсюда прежде всего следует:

$$\frac{1}{t}=\frac{r-a}{br},$$

Ур-ния (50) будут теперь:

$$\frac{d\theta}{d\sigma}+\frac{\cos\varphi}{r}=0;\ \frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{r-a}{br}. \quad (68)$$

Исключая между ними σ, получим:

$$b\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\theta}+r=a.$$

Подставляя сюда значение:

$$r = -p_0 \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \tag{69}$$

и полагая

$$\sin\varphi = u,$$

получим уравнение:

$$b\frac{du}{d\theta} - p_0 \operatorname{ctg}\theta\, u = a.$$

Интегралом этого уравнения будет:

$$u = \sin\varphi = \frac{a}{b}\left(\sin\theta\right)^{\frac{p_0}{b}}\left[\int\limits_{\theta_0}^{\theta}(\sin\theta)^{\frac{-p_0}{b}} d\theta + C'\right], \tag{70}$$

где C' — произвольная постоянная, связанная с начальными значениями φ_0 и θ_0 переменных φ и θ формулой:

$$\frac{b}{a}\sin\varphi_0\ (\sin\theta_0)^{\frac{-p_0}{b}} = C'. \tag{71}$$

Благодаря полученной формуле (70), а также (67) и (69) функции φ, r и t могут быть выражены через θ. Остается вычислить дугу σ стрикционной линии через θ. Обратимся для этого к первому из уравнений (68). Внеся в него значение (69) числа r, найдем:

$$\frac{\sigma}{p_0} = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} d\theta\ \operatorname{tg}\varphi\ \operatorname{ctg}\theta, \tag{72}$$

чем задача доведена до конца.

Так как ее интеграция ввела две произвольных постоянных φ_0 и θ_0, то доказана

Теорема. *Через любую линию Bertrand'а проходит ∞^2 поверхностей B, для которых эта линия одновременно — стрикционная и линия кривизны, причем у каждой поверхности B параметры всех ее образующих одинаковы.*

29. Пусть (a) — данная развертывающаяся поверхность. Мы видели (гл. II, § 3, пп. 5—9), как определяются поверхности (m), для которых (a) — общая нормалия. Стрикционная линия каждой из них — ортогональная траектория образующих поверхности (a).

На основании вышесказанного очевидна такая теорема:

Теорема. *Каждая поверхность (m) есть поверхность B, т. е. у каждой из них стрикционная линия будет и линией кривизны.*

Эти поверхности заслуживают, мне кажется, специального исследования.

Глава VI.

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПРЯМОЙ ПОМОЩЬЮ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ.

§ 29. Исходные уравнения.

1. Здесь мы дополним наши исследования при помощи нового метода, оперирующего над декартовыми координатами точки. Этот метод значительно отличается от общепринятого в литературе и дал мне возможность решить ряд проблем, представляющих по своей общности несомненный научный интерес.

Пусть a (x, y, z) — образующая поверхности (a), c (α, β, γ) — центральная нормаль к (a) в центре A (X, Y, Z) прямой a, p — параметр образующей a и

$$ds = ds_0 e^{\omega p} \tag{a}$$

элемент дуги поверхности (a). Положим:

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 + \omega x_1,\ y = y_0 + \omega y_1,\ z = z_0 + \omega z_1, \\ \alpha = \alpha_0 + \omega \alpha_1,\ \beta = \beta_0 + \omega \beta_1,\ \gamma = \gamma_0 + \omega \gamma_1. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Координаты X, Y, Z точки A должны удовлетворять уравнениям обеих прямых a и c. Поэтому:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = Yz_0 - Zy_0,\ y_1 = Zx_0 - Xz_0,\ z_1 = Xy_0 - Yx_0, \\ \alpha_1 = Y\gamma_0 - Z\beta_0,\ \beta_1 = Z\alpha_0 - X\gamma_0,\ \gamma_1 = X\beta_0 - Y\alpha_0. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Но по общей теории

$$dx = \alpha\, ds,\ dy = \beta\, ds,\ dz = \gamma\, ds, \tag{d}$$

т. е. в силу формул (a) и (b)

$$dx_0 + \omega\, dx_1 = (\alpha_0 + \omega\alpha_1)(1 + \omega p)\, ds_0,\ dy_0 + \omega\, dy_1 =$$
$$= (\beta_0 + \omega\beta_1)(1 + \omega p)\, ds_0,\ dz_0 + \omega\, dz_1 = (\gamma_0 + \omega\gamma_1)(1 + \omega p)\, ds_0.$$

Сравнение вещественных частей и коэффициентов при ω в этих равенствах дает:

$$dx_0 = \alpha_0 ds_0,\ dy_0 = \beta_0 ds_0,\ dz_0 = \gamma_0 ds_0, \tag{e}$$
$$dx_1 = (\alpha_1 + p\,\alpha_0)\, ds_0,\ dy_1 = (\beta_1 + p\,\beta_0)\, ds_0,\ dz_1 = (\gamma_1 + p\,\gamma_0)\, ds_0$$

или в силу (e)

$$dx_1 = p dx_0 + \alpha_1 ds_0,\ dy_1 = p dy_0 + \beta_1 ds_0,\ dz_1 = p dz_0 + \gamma_1 ds_0 \tag{f}$$

Но из формул (c) первой строки получим, пользуясь формулами (c) второй строки и (e):

$$dx_1 = \alpha_1 ds_0 + z_0 dY - y_0 dZ,\ dy_1 = \beta_1 ds_0 + x_0 dZ - z_0 dX,$$
$$dz_1 = \gamma_1 ds_0 + y_0 dX - x_0 dY. \tag{g}$$

Сравнение формул (f) и (g) дает:

$$-pdx_0 = y_0 dZ - z_0 dY, \quad -pdy_0 = z_0 dX - x_0 dZ,$$
$$-pdz_0 = x_0 dY - y_0 dX. \tag{1}$$

Это — исходные уравнения излагаемого здесь метода. К ним, конечно, надо присоединить уравнение:

$$\sum x_0^2 = 1. \tag{2}$$

Мы предположим в дальнейшем, что координаты X, Y, Z точки A стрикционной линии (A) и направляющие косинусы x_0, y_0, z_0 образующей a поверхности даны в функции дуги (v) линии (A), отсчитывая эту дугу от определенной точки A_0 линии (A):

$$\left.\begin{aligned} X = X(v),\ Y = Y(v),\ Z = Z(v), \\ x_0 = x_0(v),\ y_0 = y_0(v),\ z_0 = z_0(v). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Можно дать доказательство уравнений (1), независимое от комплексной геометрии. В самом деле, из (I) выводим:

$$-p\sum x_0 dx_0 = 0, \quad -p\sum dx_0 dX_0 = 0, \quad -p\sum dx_0^2 = \begin{vmatrix} dx_0, & dy_0, & dz_0 \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ dX, & dY, & dZ \end{vmatrix}$$

Но первое из этих соотношений — тождество, второе — доказывает, что линия (A) — стрикционная для поверхности (a), а, согласно третьему, p — соответствующий параметр образующей a.[1] Обратно, исходя из последних формул, придем к (1).

§ 30. Уравнения E. Cesàro.

2. Построим триедр $A\ (x, y, z)$ точки A стрикционной линии, причем направляющими косинусами прямых Ax, Ay и Az будут соответственно:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \xi,\ \eta,\ \zeta;\ \lambda,\ \mu,\ \nu.$$

Условимся также в том, что триедр $A\ (x, y, z)$ конгруэнтен координатному, т. е., что

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 1. \tag{4}$$

Тогда исходные ур-ния (1) по разделении на dv примут вид:

$$-p\frac{dx_0}{dv} = y_0\gamma - z_0\beta, \quad -p\frac{dy_0}{dv} = z_0\alpha - x_0\gamma, \quad -p\frac{dz_0}{dv} = x_0\beta - y_0\alpha, \tag{5}$$

на основании формул:

$$\alpha = \frac{dX}{dv}; \quad \beta = \frac{dY}{dv}; \quad \gamma = \frac{dZ}{dv}.$$

---

[1] См. например, Darboux, Leçons, Partie IV, p. 15 и Partie III, p. 302.

Введем косинусы a, b, c, углов между образующей a поверхности и ребрами триедра, где a — косинус угла θ между образующей a и касательной Ax к стрикционной линии; числа a, b, c определяются формулами:

$$a = \cos\theta = \sum x_0\alpha; \quad b = \sum x_0\xi; \quad c = \sum x_0\lambda. \tag{6}$$

Из (5) выведем прежде всего:

$$p^2\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2 = \sum\left(y_0\gamma - z_0\beta\right)^2 = \sum x_0^2\sum\alpha^2 - \left(\sum x_0\alpha\right)^2 =$$
$$= 1 - \cos^2\theta,$$

в силу свойств чисел x_0, y_0, z_0, α, β, γ.

Итак

$$p^2\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2 = \sin^2\theta, \tag{7}$$

и на основании (5) и (6)

$$-p\sum\alpha\frac{dx_0}{dv} = 0, \quad -p\sum\xi\frac{dx_0}{dv} = \begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix},$$
$$-p\sum\lambda\frac{dx_0}{dv} = \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix}$$

Но в силу соотношений между направляющими косинусами касательной, главной нормали Ay, бинормали Az и формул (6)

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix} = \sum x_0\lambda = c,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ x_0, & y_0, & z_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = -\sum x_0\xi = -b.$$

поэтому только полученные уравнения примут вид:

$$\sum\alpha\frac{dx_0}{dv} = 0, \quad -p\sum\xi\frac{dx_0}{dv} = c, \quad p\sum\lambda\frac{dx_0}{dv} = b. \tag{8}$$

Далее заметим, что в силу этих формул из (6) следует на основании формул Frenet-Serret:

$$\frac{da}{dv} = \frac{\Sigma x_0\xi}{r}, \quad \frac{db}{dv} = -\frac{c}{p} - \sum x_0\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{t}\right), \quad \frac{dc}{dv} = \frac{\Sigma x_0\xi}{t} + \frac{b}{p}$$

или в силу тех же формул (6)

$$\frac{da}{dv} = \frac{b}{r}, \quad \frac{db}{dv} = -\frac{a}{r} - c\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{t}\right), \quad \frac{dc}{dv} = b\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{t}\right), \tag{9}$$

где r и t — радиусы кривизны и кручения стрикционной линии в центре A (X, Y, Z) образующей a.

Мы вновь пришли к уравнениям Cesàro.

§ 31. Функции E, F, G. Теорема Chasles'я; свойства равноотстоящих линий на косой поверхности.

3. На образующей a с центром в точке A (X, Y, Z) возьмем точку B (X', Y', Z') и положим:

$$AB = u.$$

Тогда

$$X' = X + ux_0;\ Y' = Y + uy_0;\ Z' = Z + uz_0. \tag{10}$$

Точка B определяется вполне числами u, v, которые назовем ее координатами на поверхности (a). Из формул (10) выводим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X'}{\partial u} &= x_0, & \frac{\partial X'}{\partial v} &= \alpha + u\frac{dx_0}{dv},\\
\frac{\partial Y'}{\partial u} &= y_0, & \frac{\partial Y'}{\partial v} &= \beta + u\frac{dy_0}{dv},\\
\frac{\partial Z'}{\partial u} &= z_0, & \frac{\partial Z'}{\partial v} &= \gamma + u\frac{dz_0}{dv},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

откуда следует:

$$E = \sum\left(\frac{\partial X'}{\partial u}\right)^2 = 1,\ F = \sum\frac{\partial X'}{\partial u}\frac{\partial X'}{\partial v} = \cos\theta,\ G = \sum\left(\frac{\partial X'}{\partial v}\right)^2 =$$

$$= 1 + u^2\frac{\sin^2\theta}{p^2};\ EG - F^2 = H^2 = \sin^2\theta\left(1 + \frac{u^2}{p^2}\right). \tag{12}$$

На основании формул (2), (7) и (8). Для элемента ds дуги кривой на поверхности (a) получим, следовательно:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du dv + \left(1 + \frac{u^2\sin^2\theta}{p^2}\right)dv^2. \tag{13}$$

4. Пусть k', l', m' — направляющие косинусы нормали n' к поверхности в точке B.

По общим формулам теории поверхностей

$$Hk' = \frac{\partial Y'}{\partial u}\frac{\partial Z'}{\partial v} - \frac{\partial Z'}{\partial u}\frac{\partial Y'}{\partial v},\ Hl' = \dots\ Hm' = \dots$$

или в силу (11)

$$Hk' = y_0\gamma - z_0\beta + u\left(y_0\frac{dz_0}{dv} - z_0\frac{dy_0}{dv}\right). \tag{a'}$$

Но из ур-ния (5) следует:

$$y_0\gamma - z_0\beta = -p\frac{dx_0}{dv}$$

$$-p\left(y_0\frac{dz_0}{dv} - z_0\frac{dy_0}{dv}\right) = x_0(y_0\beta + z_0\gamma) - \alpha(y_0^2 + z_0^2) = x_0\cos\theta - \alpha,$$

если в правую часть ввести $\pm\alpha x_0^2$ и воспользоваться формулами (2) и (6). На основании этих формул получим, вместо (a'):

$$\left.\begin{aligned} Hk' &= -p\frac{dx_0}{dv} - \frac{u}{p}(x_0\cos\theta - \alpha), \\ Hl' &= -p\frac{dy_0}{dv} - \frac{u}{p}(y_0\cos\theta - \beta), \\ Hm' &= -p\frac{dz_0}{dv} - \frac{u}{p}(z_0\cos\theta - \gamma), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

вторая и третья из этих формул получаются аналогичным путем. Полагая в них: $u = 0$, найдем для направляющих косинусов k, l, m центральной нормали n к поверхности в точке A образующей a:

$$\sin\theta\, k = -p\frac{dx_0}{dv},\ \sin\theta\, l = -p\frac{dy_0}{dv},\ \sin\theta\, m = -p\frac{dz_0}{dv}. \tag{15}$$

Поэтому формулы (14) можно переписать:

$$\left.\begin{aligned} Hk' &= \sin\theta\, k - \frac{u}{p}(x_0\cos\theta - \alpha), \\ Hl' &= \sin\theta\, l - \frac{u}{p}(y_0\cos\theta - \beta), \\ Hm' &= \sin\theta\, m - \frac{u}{p}(z_0\cos\theta - \gamma). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Но центральная нормаль n перпендикулярна как к образующей a, так и к касательной Ax в A стрикционной линии (A), поэтому

$$\sum kx_0 = 0;\quad \sum k\alpha = 0;$$

следовательно, обозначая через ε угол между нормалями n и n', выведем из (16)

$$H\cos\varepsilon = \sin\theta,$$

откуда на основании значения (12) функции H

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \pm\frac{u}{p} \tag{17}$$

Это — теорема Chasles'я.

5. Назовем, следуя G. Darboux (loc. cit. P. II, p. 310), **равноотстоящими** линии на поверхности (a), в точках которых u одинаково.

Обозначим через α', β', γ' — направляющие косинусы касательной Bt' к такой линии. Тогда второй столбец формул (11) даст:

$$\alpha'\sqrt{G} = \alpha + u\frac{dx_0}{dv}, \quad \beta'\sqrt{G} = \beta + u\frac{dy_0}{dv}, \quad \gamma'\sqrt{G} = \gamma + u\frac{dz_0}{dv}$$

или на основании (15)

$$\alpha'\sqrt{G} = \alpha - \frac{u}{p}k\sin\theta, \quad \beta'\sqrt{G} = \beta - \frac{u}{p}l\sin\theta,$$
$$\gamma'\sqrt{G} = \gamma - \frac{u}{p}m\sin\theta. \tag{18}$$

Этими формулами легко доказывается любопытная теорема:

Теорема. *Касательные к равноотстоящим линиям в точках их встречи с образующей a параллельны нормальной к (a) плоскости, проведенной через касательную Ax к стрикционной линии.*

В самом деле, направляющие косинусы k'', l'', m'' перпендикуляра к этой плоскости удовлетворяют уравнениям:

$$\sum kk'' = 0, \quad \sum \alpha k'' = 0,$$

поэтому из (18) следует:

$$\sum \alpha' k'' = 0,$$

что доказывает теорему.

Отсюда нетрудно вывести, что эти касательные образуют гиперболический параболоид.

Обозначим через θ' и w углы, составляемые с касательной Bt к равноотстоящей кривой образующей a поверхности (a) и касательной Ax к стрикционной линии. Так как

$$\cos\theta' = \sum x_0\alpha', \quad \cos w = \sum \alpha\alpha',$$

то из формул (18) выводим:

$$\cos\theta'\sqrt{G} = \cos\theta, \quad \cos w\sqrt{G} = 1, \tag{19}$$

на основании формул (6) и (8). Внеся сюда значение (12) G, легко найдем:

$$\operatorname{tg}^2\theta' = \operatorname{tg}\theta\left(1 + \frac{u^2}{p^2}\right), \quad \operatorname{tg} w = u\frac{\sin\theta}{p}.$$

Второй из этих формул доказывается, что вдоль образующей a $\operatorname{tg} u$ прямо пропорционален расстоянию u точек A и B.

Первая же формула устанавливает, что угол θ будет постоянным вдоль линии: $u = \text{const}$, если одновременно постоянны θ и p.

Но по теореме O. Bonnet при постоянном θ стрикционная линия поверхности (a) будет ее геодезикой, а по теореме, доказанной в гл. V (§ 26, п. 12), при постоянных θ и p стрикционная линия будет или обыкновенной винтовой или линией Bertrand'а. Доказана, следовательно, теорема.

Теорема. *Равноотстоящие линии на линейчатой поверхности пересекают, каждая в отдельности, все образующие под одинаковыми углами лишь, если этим же свойством обладает и стрикционная линия, которая, сверх того, должна быть обыкновенной винтовой линией или линией Bertrand'а.*

§ 32. функции D, D', D''. Кривизна поверхности. Теорема Paul Serret и ее дополнение.

6. Мы займемся здесь вычислением коэффициентов второй основной дифференциальной формы поверхности (a):

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2.$$

По общей теории поверхностей

$$D=\sum k'\frac{\partial^2X'}{\partial u^2},\ D'=\sum l'\frac{\partial^2X'}{\partial u\partial v},\ D''=\sum m'\frac{\partial^2X'}{\partial v^2},\qquad(20)$$

где, как и выше, k', l', m' — направляющие косинусы нормали n' к поверхности в точке ее B (X', Y', Z'). Но из формул (11) следует на основании формул Frenet-Serret:

$$\frac{\partial^2X'}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2X'}{\partial u\partial v}=\frac{dx_0}{dv},\quad \frac{\partial^2X'}{\partial v^2}=\frac{\xi}{r}+u\frac{d^2x_0}{dv^2},$$

$$\frac{\partial^2Y'}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2Y'}{\partial u\partial v}=\frac{dy_0}{dv},\quad \frac{\partial^2Y'}{\partial v^2}=\frac{\eta}{r}+u\frac{d^2y_0}{dv^2},$$

$$\frac{\partial^2Z'}{\partial u^2}=0,\quad \frac{\partial^2Z'}{\partial u\partial v}=\frac{dz_0}{dv},\quad \frac{\partial^2Z'}{\partial v^2}=\frac{\zeta}{r}+u\frac{d^2z_0}{dv^2},$$

откуда, пользуясь формулами (14), получим, вместо (20):

$$\left.\begin{aligned}&D=0\\&HD'=-p\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2-\left[\cos\theta\sum x_0\frac{dx_0}{dv}-\sum\alpha\frac{dx_0}{dv}\right]\\&HD''=A+Bu+Cu^2,\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

где для краткости положено:

$$\left.\begin{aligned}&-A=\frac{p}{r}\sum\xi\frac{dx_0}{dv},\\&-B=\frac{1}{pr}\left\{\cos\theta\sum x_0\xi-\sum\alpha\xi\right\}+p\sum\frac{dx_0}{dv}\frac{d^2x_0}{dv^2},\\&-C=\frac{1}{p}\left\{\cos\theta\sum x_0\frac{d^2x_0}{dv^2}-\sum\alpha\frac{d^2x_0}{dv^2}\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

Но по формулам (7) и (8) § 30 (п. 2)

$$\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2=\frac{\sin^2\theta}{p^2},\quad \sum\alpha\frac{dx_0}{dv}=0$$

и, сверх того, тождественно:

$$\sum x_0\frac{dx_0}{dv}=0,$$

поэтому вторая из формул (a) будет:

$$HD'=-\frac{\sin^2\theta}{p}. \tag{c}$$

Далее по второй формуле (8) § 30 (п. 2)

$$A=\frac{c}{r}. \tag{d}$$

Для B получаем, очевидно,

$$-B=\frac{\cos\theta\, b}{pr}+\frac{p}{2}\frac{d}{dv}\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2.$$

Но в силу ур-ния (7) § 30 и первого из уравнений Cesàro:

$$\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2=\frac{\sin^2\theta}{p^2}=\frac{1-a^2}{p^2},\quad da=\frac{b}{r}.$$

Поэтому после приведения

$$\frac{d}{dv}\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2=-\frac{2}{p^2}\left(\frac{b\cos\theta}{r}+\frac{\sin^2\theta}{p}\frac{dp}{dv}\right),$$

откуда для B найдём:

$$B=\frac{\sin^2\theta}{p^2}\frac{dp}{dv}. \tag{e}$$

Для определения C заметим, что тождества

$$\sum x_0\frac{dx_0}{dv}=0;\quad \sum\alpha\frac{dx_0}{dv}=0$$

дают на основании формул (7) и (8) § 30 и формул Frenet-Serret:

$$\sum x_0\frac{d^2x_0}{dv^2}=-\sum\left(\frac{dx_0}{dv}\right)^2=-\frac{\sin^2\theta}{p^2},$$

$$\sum\alpha\frac{d^2x_0}{dv^2}=-\sum\frac{d\alpha}{dv}\frac{dx_0}{dv}=-\frac{1}{r}\sum\xi\frac{dx_0}{dv}=\frac{c}{pr}.$$

Поэтому

$$C=\frac{1}{p^2}\left(\frac{c}{r}+\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{p}\right). \tag{f}$$

Положим наконец,

$$b = \sin\theta\cos\varphi, \quad c = \sin\theta\sin\varphi.$$

Тогда на основании формул (a), (c), (d) и (e) получим:

$$D = 0, \quad HD' = -\frac{\sin^2\theta}{p},$$

$$HD'' = \sin\theta\left\{\frac{\sin\varphi}{r} + u\frac{\sin\theta}{p^2}\frac{dp}{dv} + \frac{u^2}{p^2}\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{p}\right)\right\} \tag{21}$$

Примечание. Вычисление функций D' и D'' появляется здесь впервые.

7. Дадим сейчас же одно приложение этих формул. Дифференциальное уравнение линий кривизны любой поверхности имеет, как известно, такой вид:

$$(ED' - FD)\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (FD'' + GD')\,dv^2 = 0$$

[см., например, L. Bianchi, l. c. V. I p. (187)]. Подстановка значений E, F, G и D, D', D'' преобразует это уравнение в следующее

$$H(D'du^2 + D''du\,dv) + L\,dv^2 = 0, \tag{22}$$

где

$$L = \sin\theta\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{p}\right)\left(1 + \frac{u^2}{p^2}\right) + \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{p^4}\,u\,\frac{dp}{dv}. \tag{23}$$

Для стрикционной линии: $u = 0$, поэтому вдоль этой линии

$$L = \sin\theta\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{p}\right).$$

Но тогда дифференциальное ур-ние (22) линий кривизны удовлетворится тождественно в точках стрикционной линии, если вдоль нее

$$L = 0, \text{ т. е. } \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{p} = 0. \tag{24}$$

Мы вновь получили известное уже нам необходимое и достаточное условие, при котором стрикционная линия будет одновременно линией кривизны. Из ур-ния (22) следует, что равноотстоящие линии поверхности (a), для каждой из которых: $u = \text{const}$, будут линиями кривизны, если вдоль каждой из них значение (23) функции L равно нулю. Но это требует, чтобы одновременно имели место соотношения:

$$\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{p} = 0; \quad p = \text{const}.$$

Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Равноотстоящие линии образуют одну систему линий кривизны поверхности* (a) *тогда и только тогда, когда у всех образующих a параметры одинаковы.*

(См. P. Serret., Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure, p. 156 и след).

Мы видели, в главе V (§ 28, п. 20), что условие (24) эквивалентно следующему:

$$p + r\,\mathrm{tg}\,k = 0, \tag{25}$$

где k — бинормальная координата образующей a относительно триедра A (x, y, z) ее центра.

Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Для того, чтобы равноотстоящие линии поверхности (а) составляли одну систему ее линий кривизны, необходимо и достаточно, чтобы вдоль стрикционной линии поверхности тангенс бинормальной координаты образующей а изменялся обратно пропорционально радиусу кривизны стрикционной линии в центре образующей а.*

Эта теорема дополняет теорему Paul Serret.

8. Вычислим в заключение кривизну M поверхности a в любой его точке.

По общей теории поверхностей

$$M = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

Подстановка значений E, F, G и D, D', D'' даст для M известное выражение

$$M = -\frac{p^2}{(p^2 + u^2)^2}. \tag{26}$$

§ 33. Сферическая индикатриса линейчатой поверхности.

9. Построим направляющий конус данной поверхности (a) с вершиной в начале O координат и пересечем его шаровой поверхностью единичного радиуса с центром в той же точке O. Сечение будет сферической индикатрисой данной линейчатой поверхности. Между образующей a данной поверхности и соответствующей точкой B индикатрисы (B) будет следующее соотношение: направляющие косинусы прямой a и радиуса OB одинаковы.

Обозначим через (σ) дугу индикатрисы, отсчитываемую от той ее точки, которая соответствует начальной точке отсчета дуги v стрикционной линии (A) поверхности (a).

Координаты точки B будут:

$$x_0 = x_0(\sigma);\ y_0 = y_0(\sigma);\ z_0 = z_0(\sigma);\ \sum x_0^2 = 1. \tag{27}$$

Решим предварительно такую задачу:

Даны: угол θ между прямой a и касательной в ее центре A к стрикционной линии и параметр p образующей a формулами:

$$\theta = \theta(\sigma);\ p = p(\sigma). \tag{28}$$

Требуется определить поверхность (a).

Задача эта, не новая по существу, представит новое приложение исходных уравнений этой главы.

К исходным уравнениям

$$-pdx_0=y_0dZ-z_0dY,\quad -pdy_0=z_0dX-x_0dZ,$$
$$-pdz_0=x_0dY-y_0dX \tag{29}$$

присоединим уравнение:

$$\cos\theta\, dv=x_0dX+y_0dY+z_0dZ, \tag{30}$$

определяющее угол θ, dv — элемент дуги стрикционной линии.

Замечая, что

$$d\sigma^2=\sum dx_0^2,\quad dv^2=\sum dX^2, \tag{31}$$

найдем из (29):

$$p^2d\sigma^2=\sum(y_0dZ-z_0dY)^2=\sum x_0^2\sum dX^2-\left(\sum x_0dX\right)^2,$$

т. е. в силу (30) и (31)

$$pd\sigma=\varepsilon\sin\theta\, dv\qquad (\varepsilon=\pm 1) \tag{32}$$

введем направляющие косинусы α_0, β_0, γ_0 касательной к индикатрисе в точке B по формулам:

$$\alpha_0\, d\sigma=dx_0;\ \beta_0\, d\sigma=dy_0;\ \gamma_0\, d\sigma=dz_0. \tag{33}$$

Из ур-ний (29) выводим:

$$x_0dX=x_0dX,$$
$$x_0dY=y_0dX-pdz_0,$$
$$x_0dZ=z_0dX+pdy_0,$$

где первое тождество присоединено для удобства счета. Отсюда следует.

$$x_0\sum x_0dX=dX\sum x_0^2-p\,(y_0dz_0-z_0dy_0).$$

Левая часть этого равенства может быть представлена в виде:

$$x_0\cos\theta\, dv=\varepsilon\, x_0\, p\operatorname{ctg}\theta\, d\sigma$$

на основании (30) и (32). Поэтому из полученного равенства заключаем:

$$dX=\varepsilon\ x_0 p\operatorname{ctg}\theta\, d\sigma+p\,(y_0dz_0-z_0dy_0)$$

или на основании (33) получим первую из формул:

$$\left.\begin{aligned} dX&=p\,d\sigma\,(\varepsilon\operatorname{ctg}\theta\, x_0+y_0\gamma_0-z_0\beta_0),\\ dY&=p\,d\sigma\,(\varepsilon\operatorname{ctg}\theta\, y_0+z_0\alpha_0-x_0\gamma_0),\\ dZ&=p\,d\sigma\,(\varepsilon\operatorname{ctg}\theta\, z_0+x_0\beta_0-y_0\alpha_0).\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

остальные получаются аналогичным путем. Отсюда после интеграции найдем:

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \varepsilon \int p x_0 \operatorname{ctg}\theta \, d\sigma + \int p (y_0 \gamma_0 - z_0 \beta_0) \, d\sigma, \\
Y &= \varepsilon \int p y_0 \operatorname{ctg}\theta \, d\sigma + \int p (z_0 \alpha_0 - x_0 \gamma_0) \, d\sigma, \\
Z &= \varepsilon \int p z_0 \operatorname{ctg}\theta \, d\sigma + \int p (x_0 \beta_0 - y_0 \alpha_0) \, d\sigma.
\end{aligned}\right\} \qquad (35)
$$

Эти формулы решают задачу, так как ими определяется стрикционная линия искомой поверхности (a). Если в (35) будем p и θ считать постоянными, то эти формулы обратятся в формулы G. Darboux, по которым он определял линии Bertrand'a (см. G. Darboux, l. c., P. I, p. 63). Этого следовало ожидать, так как при постоянном θ стрикционная линия будет по теореме O. Bonnet геодезикой; если же и p постоянно, то формулы (35) должны дать линию Bertrand'a, согласно теореме главы V (§ 26, п. 12), или винтовую.

10. Пользуясь формулой (32), мы представим (33) в следующем виде:

$$
\varepsilon \sin\theta \, \alpha_0 = p \frac{dx_0}{dv}, \quad \varepsilon \sin\theta \, \beta_0 = p \frac{dy_0}{dv}, \quad \varepsilon \sin\theta \, \gamma_0 = p \frac{dz_0}{dv}, \qquad (36)
$$

откуда следует:

$$
\varepsilon \sin\theta \sum \alpha_0 \alpha = p \sum \alpha \frac{dx_0}{dv}, \quad \varepsilon \sin\theta \sum \alpha_0 \xi = p \sum \xi \frac{dx_0}{dv},
$$

$$
\varepsilon \sin\theta \sum \alpha_0 \lambda = p \sum \lambda \frac{dx_0}{dv}.
$$

Но мы видели в § 30 (п. 2), что

$$
\sum \alpha \frac{dx_0}{dv} = 0, \quad p \sum \xi \frac{dx_0}{dv} = -c, \quad p \sum \lambda \frac{dx_0}{dv} = b,
$$

поэтому

$$
\sum \alpha_0 \alpha = 0, \quad \varepsilon \sin\theta \sum \alpha_0 \xi = -c, \quad \varepsilon \sin\theta \sum \alpha_0 \lambda = b. \qquad (37)
$$

Первая из этих формул доказывает, что касательные к стрикционной линии и индикатрисе в соответствующих точках скрещиваются под прямым углом. Но из равенства

$$
\sum x_0^2 = 1
$$

следует:

$$
\sum x_0 \alpha_0 = 0,
$$

т. е. касательная к индикатрисе перпендикулярна к соответствующей образующей a поверхности. Отсюда и из только-что сказанного следует: касательная к индикатрисе в точке ее B и центральная нормаль к поверхности в соответствующей точке A стрикционной линии параллельны.

11. Из (37) прямо следует

$$\varepsilon \sin\theta\alpha_0 = b\lambda - c\xi,\quad \varepsilon\sin\theta\beta_0 = b\mu - c\eta,\quad \varepsilon\sin\theta\gamma_0 = b\nu - c\zeta. \tag{38}$$

Введем теперь направляющие косинусы ξ_0, η_0, ζ_0 главной нормали в точке B к индикатрисе по формулам:

$$d\alpha_0 = \frac{\xi_0}{r_0}d\sigma,\qquad d\beta_0 = \frac{\eta_0}{r_0}d\sigma,\qquad d\gamma_0 = \frac{\zeta_0}{r_0}d\sigma,$$

где r_0 — радиус кривизны индикатрисы в точке B. Отсюда и из предыдущих формул следует на основании формул Frenet-Serret и (32), в которой, как во всем дальнейшем, примем ε равным $+1$:

$$\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\xi_0 + \alpha_0\cos\theta\frac{d\theta}{dv} = \lambda\frac{db}{dv} - \xi\frac{dc}{dv} + \frac{b}{t}\xi + c\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{t}\right),$$

$$\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\eta_0 + \beta_0\cos\theta\frac{d\theta}{dv} = \mu\frac{db}{dv} - \eta\frac{dc}{dv} + \frac{b}{t}\eta + c\left(\frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{t}\right),$$

$$\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\zeta_0 + \gamma_0\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{dv} = \nu\frac{db}{dv} - \zeta\frac{dc}{dv} + \frac{b}{t}\zeta + c\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{t}\right).$$

Из них выводим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\sum\alpha\xi_0 + \cos\theta\frac{d\theta}{dv}\sum\alpha_0\alpha &= \frac{c}{r},\\
\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\sum\xi_0\xi + \cos\theta\frac{d\theta}{dv}\sum\alpha_0\xi &= -\frac{dc}{dv} + \frac{b}{t} = -\frac{b}{p},\\
\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\sum\xi_0\lambda + \cos\theta\frac{d\theta}{dv}\sum\alpha_0\lambda &= \frac{db}{dv} + \frac{c}{t} = -\frac{a}{r} - \frac{c}{p},
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

на основании уравнений Cesàro [§ 30, п. 2 ур-ния 9]. Но по первому из этих уравнений

$$\frac{b}{r} = \frac{da}{dv} = \frac{d\cos\theta}{dv};$$

откуда

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{b}{r\sin\theta}.$$

Используя формулы (37), получим, вместо (39), после простых переделок:

$$\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\sum\xi_0\alpha = \frac{c}{r},\quad \frac{\sin^2\theta}{pr_0}\sum\xi_0\xi = -b\left(\frac{1}{p} + \frac{a\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right),$$

$$\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\sum\xi_0\lambda = -c\left(\frac{1}{p} + \frac{c\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right).$$

Эти уравнения умножим сначала на α, ξ и λ соответственно и сложим результаты. Это даст первое из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\xi_0 &= \frac{\alpha c}{r} - \left(\frac{1}{p} + \frac{c\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right)(b\xi + c\lambda),\\
\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\eta_0 &= \frac{\beta c}{r} - \left(\frac{1}{p} + \frac{c\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right)(b\eta + c\mu),\\
\frac{\sin^2\theta}{pr_0}\zeta_0 &= \frac{\gamma c}{r} - \left(\frac{1}{p} + \frac{c\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right)(b\zeta + c\nu).
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

12. Рассмотрим тот частный случай, когда стрикционная линия поверхности (a) — геодезика последней. Тогда, как мы видели:

$$\theta = \theta_0,\ b = 0,\ c = \sin\theta_0;\ \frac{\operatorname{ctg}\theta_0}{r} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} = 0.$$

Формулы (38) и (40) дадут, следовательно:

$$\alpha_0 = -\xi,\ \beta_0 = -\eta,\ \gamma_0 = -\zeta; \tag{a}$$

$$\frac{\sin\theta_0}{pr_0}\xi_0 = \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{t},\quad \frac{\sin\theta_0}{pr_0}\eta_0 = \frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{t},\quad \frac{\sin\theta_0}{pr_0}\zeta_0 = \frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{t} \tag{b}$$

или на основании формул Frenet-Serret

$$-\frac{\sin\theta}{pr_0}\xi_0 = \frac{d\xi}{dv},\ -\frac{\sin\theta}{pr_0}\eta_0 = \frac{d\eta}{dv},\ -\frac{\sin\theta}{pr_0}\zeta_0 = \frac{d\zeta}{dv},$$

откуда

$$\frac{\sin\theta_0}{pr_0}\cdot\sum\xi_0\xi = \sum\xi\frac{d\xi}{dv} = 0. \tag{c}$$

Из формул (a) и (c) следует, что **главная нормаль к стрикционной линии в точке ее A параллельна касательной и перпендикулярна к главной нормали индикатрисы в соответствующей точке B.**

Формулы (b) дают для определения радиуса кривизны r_0 индикатрисы

$$\frac{\sin^2\theta}{p^2r_0^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{t^2}. \tag{d}$$

13. Положим теперь, что стрикционная линия (A) — асимптотика поверхности (a).

В этом случае

$$p = -t;\ b = -\sin\theta;\ c = 0.$$

Формулы (38) и (40) дадут поэтому:

$$\left.\begin{aligned}
-\alpha_0 = \lambda,\quad -\beta_0 = \mu,\quad -\gamma_0 = \nu;\\
\sin\theta\frac{\xi_0}{r_0} = \xi,\quad \sin\theta\frac{\eta_0}{r_0} = \eta,\ \sin\theta\frac{\zeta_0}{r_0} = \zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Из этих формул следует:

Главные нормали индикатрисы и стрикционной линий в соответствующих точках этих кривых параллельны; касательная к индикатрисе и бинормаль стрикционной линии параллельны.

Радиус кривизны r_0 индикатрисы определяется формулой:

$$r_0 = \sin\theta. \tag{f}$$

14. Пусть наконец стрикционная линия одновременно и линия кривизны. Замечая, что

$$b = \sin\theta\cos\varphi;\ c = \sin\theta\sin\varphi,$$

получим, что

$$\frac{1}{p} + \frac{c\cos\theta}{r\sin^2\theta} = \operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{p}\right) = 0,$$

следовательно, формулы (38) и (40) будут теперь:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 = \lambda\cos\varphi - \xi\sin\varphi,\ \beta_0 = \mu\cos\varphi - \eta\sin\varphi,\ \gamma_0 = \nu\cos\varphi - \zeta\sin\varphi \\ &\frac{\cos\theta}{r_0}\xi_0 = -\alpha,\ \frac{\cos\theta}{r_0}\eta_0 = -\beta,\ \frac{\cos\theta}{r_0}\zeta_0 = -\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

Согласно этим формулам, касательная к стрикционной линии (A) и главная нормаль к индикатрисе в соответствующих точках параллельны.

Кроме того,

$$r_0 = \cos\theta. \tag{h}$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ.

Глава I.

ПОВЕРХНОСТИ КОНГРУЭНЦИИ.

§ 1. Основная форма ds^2; параметр и дискриминант.

1. Обозначим через

$$x = x_0 + \omega x_1;\ y = y_0 + \omega y_1;\ z = z_0 + \omega z_1,\ (\omega^2 = 0) \tag{1}$$

— три комплексных числа, связанных соотношением:

$$\sum x^2 = 1, \tag{2}$$

причем

$$x = x\ (u,v);\ y = y\ (u,v);\ z = z\ (u,v), \tag{3}$$

где u, v — вещественные, независящие одна от другой переменные, а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ — комплексные функции, конечные, однозначные и непрерывные во всей области значений чисел u, v, которая будет рассматриваться в последующем.

В силу соотношения (2) числа x, y, z можно принять за прямоугольные координаты прямой a, переменной вместе с числами u, v, которые будут называться ее криволинейными координатами. Всевозможным значениям этих чисел будет отвечать ∞^2 прямых a, т. е. линейчатая конгруэнция (a), которая таким образом вполне определяется уравнениями (3). Прямые a будем называть лучами конгруэнции.

Мы допустим в дальнейшем существование первых и вторых производных по u или v функций (3).

2. Устанавливая между u, v какую-нибудь зависимость:

$$\lambda\ (u,\ v) = 0, \tag{4}$$

где λ — вещественная функция, мы выделим из конгруэнции определенную линейчатую поверхность (λ) — геометрическое место лучей a, криволинейные координаты которых связаны соотношением (4). В виду произвольности λ через каждый луч a $(u,\ v)$ проходит бесчисленное множество поверхностей (λ). Каждая из них на луче a определяет своей стрикционной линией некоторую точку A_λ и в этой точке обладает определенной центральной нормалью b_λ. Кроме того, в общей образующей a каждая из поверхностей (a) имеет свой параметр p_λ распределения касательных плоскостей вдоль луча a.

Ближайшая наша задача — изучить ряд точек A_λ луча a $(u,\ v)$, щетку центральных нормалей b_λ и числа p_λ.

3. Пусть

$$ds = ds_0 e^{\omega p} \tag{5}$$

элементарный комплексный угол между лучом a и бесконечно-близким лучом a'. Для ds существует формула:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{6}$$

причём на основании формул (3):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \tag{7}$$

Положим:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2; F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \ G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2;$$
$$E = E_0 + \omega E_1, \ F = F_0 + \omega F_1, \ G = G_0 + \omega G_1. \tag{8}$$

Тогда выражение (6) угла ds примет вид:

$$ds^2 = Edu^2 + 2\,Fdudv + Gdv^2, \tag{9}$$

откуда, сравнивая вещественные части и коэффициенты при ω, получим:

$$\left.\begin{aligned} ds_0^2 &= E_0 du^2 + 2F_0 dudv + G_0 dv^2, \\ 2p &= \frac{E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2}{E_0 du^2 + 2F_0 dudv + G_0 dv^2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Внеся в (10) значение $\frac{du}{dv}$ из ур-ния (4), определим значения ds_0 и p, соответствующие поверхности (λ).

4. Для вычисления иногда удобнее другая форма ds^2. Из ур-ния (2) следует:

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

поэтому

$$z^2 ds^2 = z^2\ (dx^2 + dy^2 + dz^2) = z^2\ (dx^2 + dy^2) + (xdx + ydy)^2.$$

Внеся в правую часть значение z из (2), получим после элементарных преобразований:

$$z^2 ds^2 = dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2. \tag{11}$$

5. В теории конгруэнции весьма важную роль играет дискриминант H формы (9):

$$H = +\sqrt{EG - F^2}, \tag{12}$$

где квадратный корень всегда будем брать со знаком $+$.

Полагая:

$$H = H_0 + \omega H_1 = H_0 e^{\omega \varrho}, \tag{13}$$

легко найдем:

$$H_0=\sqrt{E_0G_0-F_0^2};\quad H_1=\frac{E_0G_1+G_0E_1-2F_0F_1}{2\sqrt{E_0G_0-F_0^2}},$$

$$\rho=\frac{E_0G_1+G_0E_1-2F_0F_1}{2\,(E_0G_0-F_0^2)}. \tag{14}$$

§ 2. Цилиндроид центральных нормалей. Поверхности кривизны. Изотропная конгруэнция. Средняя поверхность.

6. Построим два винта — L и M, слагающие которых по осям координат определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} L_x=\frac{\partial x}{\partial u},\ L_y=\frac{\partial y}{\partial u},\ L_z=\frac{\partial z}{\partial u} \\ M_x=\frac{\partial x}{\partial v},\ M_y=\frac{\partial y}{\partial v}, M_z=\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

На основании формул (10)

$$L=+\sqrt{E};\quad M=+\sqrt{G}. \tag{16}$$

Формулы (7) будут поэтому:

$$\begin{aligned} dx&=L_x\,du+M_x\,dv \\ dy&=L_y\,du+M_y\,dv \\ dz&=L_z\,du+M_z\,dv \end{aligned} \tag{7'}$$

Пусть теперь b_λ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — центральная нормаль к поверхности (λ) в центральной точке A_λ, лежащей на луче a. По общей теории:

$$dx=\alpha\,ds;\quad dy=\beta\,ds;\quad d\gamma=\gamma\,ds;$$

подставляя эти значения в формуле (7'), найдем:

$$\alpha\frac{ds}{dv}=L_x+M_x\frac{dv}{du},\ \beta\frac{ds}{dv}=L_y+M_y\frac{dv}{du},\ \gamma\frac{ds}{dv}=L_z+M_z\frac{dv}{du}.$$

Замечая, что данному лучу a $(u,\ v)$ отвечают два совершенно определенных винта L и M и вещественное число $\frac{dv}{du}$ зависит лишь от выбора поверхностей (λ), заключаем:

Теорема. *Винт с тензором $\frac{ds}{dv}$, осью которого служит центральная нормаль b_λ поверхности (λ), есть геометрическая сумма винтов L и $M\,\frac{dv}{du}$.*

Следствие. *Прямые b_λ, соответствующие различным поверхностям (λ), — образуют цилиндроид, построенный на винтах L и M; параметры p_λ равны соответственно параметрам тех образующих цилиндроида, которые совпадают с прямыми $_\lambda$.*

Оказалось, следовательно, что поверхности (λ) конгруэнции, проходящие через произвольный луч a последней, связаны между собой соотношениями, тождественными с теми, которые имеют место в теории группы винтов 2-го порядка.

7. Из ур-ния (2) выводим:

$$\sum x\frac{\partial x}{\partial u}=0;\quad \sum x\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

откуда следует:

$$\frac{x}{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}}=\frac{y}{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{z}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}.$$

Но

$$\sum x^2=1,\ \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2-\left(\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=EG-F^2=H^2,$$

поэтому предыдущие соотношения дадут:

$$Hx=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},\ Hy=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},\ Hz=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.\quad (17)$$

Эти формулы нам сейчас пригодятся.

8. В общем случае, когда E_0 и G_0 не равны нулю, получим на основании формул (10) в силу геометрического смысла ds_0^2:

$$E_0\geqslant 0;\ G_0\geqslant 0;\ E_0G_0-F_0^2\geqslant 0.\quad (18)$$

Пусть (λx), (λy), (λz) — углы с осями координат прямой b_λ. По общей теории:

$$\cos(\lambda x)\,ds_\lambda=dx_\lambda,\ \cos(\lambda y)\,ds_\lambda=dy_\lambda,\ \cos(\lambda z)\,ds_\lambda=dz_\lambda.\quad (19)$$

Для другой поверхности (μ) той же конгруэнции получим:

$$\cos(\mu x)\,ds_\mu=dx_\mu,\ \cos(\mu y)\,ds_\mu=dy_\mu,\ \cos(\mu z)\,ds\ =dz_\mu.\quad (20)$$

Отсюда и из (19) выведем:

$$\cos(\lambda\mu)\,ds_\lambda ds_\mu=\sum dx_\lambda dx_\mu.\quad (21)$$

Следовательно,

$$\sin^2(\lambda\mu)\,ds^2_\lambda ds^2_\mu=\sum dx_\lambda^2\cdot\sum dx_\mu^2-\left(\sum dx_\lambda dx_\mu\right)^2,\quad (22)$$

или

$$\sin^2(\lambda\mu)\,ds^2_\lambda ds_\mu^2=\sum(dy_\lambda dz_\mu-dy_\mu dz_\lambda)^2.\quad (23)$$

Преобразуем полученные формулы помощью (7). Это дает вместо (21)

$$\cos(\lambda\mu)\ ds_\lambda ds_\mu = E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v, \tag{24}$$

где значок d относится к поверхности (λ), а значок δ — к поверхности μ.

Далее из (7) выводим:

$$dy_\lambda dz_\mu - dz_\lambda dy_\mu = (du\,\delta v - dv\,\delta u)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) \tag{7}$$

или на основании (17):

$$\begin{aligned} dy_\lambda dz_\mu - dz_\lambda dy_\mu &= Hx\ (du\,\delta v - dv\,\delta u), \\ dz_\lambda dx_\mu - dx_\lambda dz_\mu &= Hy\ (du\,\delta v - dv\,\delta u), \\ dx_\lambda dy_\mu - dy_\lambda dx_\mu &= Hz\ (du\,\delta v - dv\,\delta u). \end{aligned}$$

Так как $\sum x^2$ равна единице, то, вместо (23), получим на основании последних формул:

$$\sin(\lambda\mu)\ ds_\lambda ds_\mu = H(du\,\delta v - dv\,\delta u), \tag{25}$$

где для определенности при извлечении квадратного корня взят знак $+$.

9. Пусть:

$$\angle(\lambda\mu) = \theta = \theta_0 + \omega\theta_1,$$

где θ_0 — угол между направлениями b_λ и b_μ, θ_1 — длина их кратчайшего расстояния. Беря параметры обеих частей ур-ния (25) и замечая, что параметр вещественного числа $(du\,\delta v - dv\,\delta u)$ равен нулю, получим:

$$\theta_1\ \mathrm{ctg}\,\theta_0 + p_\lambda + p_\mu = \rho. \tag{26}$$

На основании (13) формула эта доказывает, что сумма параметров p_λ и p_μ равна параметру дискриминанта H лишь в следующих случаях:

1) стрикционные линии обеих поверхностей (λ) и (μ) пересекаются в одной точке луча a $(\theta_1 = 0)$;

2) центральные нормали их скрещиваются под прямым углом $\left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$; и

3) оба эти обстоятельства имеют место одновременно.

Поверхности (λ) и (μ) в последнем случае назовем **поверхностями кривизны** изучаемой конгруэнции. Профессор W. Blaschke (l. c. s. 279) называет их **главными**.

10. Займемся определением этих поверхностей. Согласно данному их определению, должна тождественно равняться нулю правая часть формулы (24). Итак:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0. \tag{27}$$

Это уравнение распадается на два:

$$E_0 du\,\delta u + F_0\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_0 dv\,\delta v = 0, \tag{28}$$

$$E_1 du\,\delta u + F_1\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_1 dv\,\delta v = 0, \tag{29}$$

из которых по исключении дроби $\frac{\delta u}{\delta v}$ получим:

$$\begin{vmatrix} E_0du+F_0dv, & F_0du+G_0dv \\ E_1du+F_1dv, & F_1du+G_1dv \end{vmatrix}=0, \tag{30}$$

или

$$(E_0F_1-F_0E_1)\,du^2+(E_0G_1-G_0E_1)\,dudv+(F_0G_1-G_0F_1)dv^2=0. \tag{31}$$

Таково дифференциальное уравнение поверхностей кривизны данной конгруэнции. Заметим, прежде всего, что оно второй степени относительно $\frac{du}{dv}$, чем доказывается теорема:

Теорема. *Через каждый луч a конгруэнции проходят две поверхности кривизны.*

Далее заметим, что дискриминант его S^2 не может быть отрицательным числом у вещественной конгруэнции.

В самом деле:

$$S^2=(E_0G_1-G_0E_1)^2-4(E_0F_1-F_0E_1)\,(F_0G_1-G_0F_1). \tag{32}$$

Положим:

$$E_1=2\rho_1E_0,\ F_1=2\rho_2F_0,\ G_1=2\rho_3G_0, \tag{33}$$

т. е. введем параметры $2\rho_1$, $2\rho_2$, $2\rho_3$ чисел E, F, G. Тогда (32) примет вид:

$$\frac{S^2}{16\,E_0^2G_0^2}=\left(\frac{\rho_1-\rho_3}{2}\right)^2+\frac{F_0^2}{E_0G_0}(\rho_2-\rho_1)\,(\rho_2-\rho_3) \tag{34}$$

или на основании тождества:

$$(\rho_2-\rho_1)\,(\rho_2-\rho_3)=\left(\rho_2-\frac{\rho_1+\rho_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\rho_1-\rho_3}{2}\right)^2$$

$$\frac{S^2}{16\,E_0^2G_0^2}=\left(\frac{\rho_1-\rho_3}{2}\right)^2\frac{E_0G_0-F_0^2}{E_0G_0}+\frac{F_0^2}{E_0G_0}\left(\rho_2-\frac{\rho_1-\rho_3}{2}\right)^2>0, \tag{35}$$

что и требовалось доказать. Но в таком случае интегралы ур-ния (31) вещественные функции от u и v. Таким образом установлено:

Теорема. *Поверхности кривизны данной конгруэнции всегда реальны.*

Если в частном случае

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3,$$

то ур-ние (31) обращается в тождество, т. е. каждая поверхность конгруэнции есть поверхность кривизны последней. Такая конгруэнция называется и з о т р о п н о й. Признаком последней служит, следовательно, равенство параметров функций E, F, G или на основании (35) обращение в нуль функции S. Отметим в заключение еще следующую форму функции S^2, которая получается из (32) после элементарных преобразований:

$$S^2=(E_0G_1+G_0E_1-2F_0F_1)^2-4\,(E_0G_0-F_0^2)\,(E_1G_1-F_1^2) \tag{36}$$

или на основании последней из формул (14)

$$\frac{S^2}{4}=(E_0G_0-F_0^2)\ [\rho^2(E_0G_0-F_0^2)-(E_1G_1-F_1^2)], \qquad (36')$$

отсюда для параметра ρ функции H получаем в общем случае

$$\rho^2>\frac{E_1G_1-F_1^2}{E_0G_0-F_0^2}. \qquad (37)$$

11. Пусть

$$\alpha\ (u,\ v)=\text{const},\ \beta\ (u,\ v)=\text{const}$$

— оба интеграла ур-ний (31). Параметры p_α и p_β назовем **главными параметрами** луча $a(u, v)$, b_α и b_β — главными центральными нормалиями, точку O их встречи — **средней** точкой луча a, геометрическое место точек O — **средней поверхностью** конгруэнции. Последняя, очевидно, пересекает каждую поверхность кривизны по ее стрикционной линии.

Вычислим p_α и p_β. Представим для этого ур-ние (31) в виде:

$$\frac{E_1du+F_1dv}{E_0du+F_0dv}=\frac{F_1du+G_1dv}{F_0du+G_0dv}=\frac{E_1du^2+2F_1dudv+G_1dv^2}{E_0du^2+2F_0dudv+G_0dv^2}=2p \quad (37')$$

в силу второй формулы (10). Отсюда следует:

$$\begin{aligned}du\ (E_1-2pE_0)+dv\ (F_1-2pF_0)=0,\\ du\ (F_1-2pF_0)+dv\ (G_1-2pG_0=0.\end{aligned} \qquad (38)$$

Исключая из этих уравнений $\frac{du}{dv}$, найдем:

$$(E_1-2pE_0)\ (G_1-2pG_0)-(F_1-2pF_0)^2=0. \qquad (39)$$

Корнями этого уравнения будут искомые главные параметры p_α и p_β. Ур-нию (39) можно дать вид:

$$4p^2\ (E_0G_0-F_0)^2-2p\ (E_0G_1+G_0E_1-2F_0F_1)+E_1G_1-F_1^2=0. \quad (40)$$

Следовательно,

$$p_\alpha+p_\beta=\frac{E_0G_1+G_0E_1-2F_0F_1}{2(E_0G_0-F_0^2)}=\rho, \qquad (41)$$

$$p_\alpha p_\beta=\frac{E_1G_1-F_1^2}{4(E_0G_0-F_0^2)}. \qquad (42)$$

Отсюда выводим на основании формулы (36):

$$(p_\alpha-p_\beta)^2=\frac{S^2}{4(E_0G_0-F_0^2)}. \qquad (43)$$

Числа p_α и p_β всегда, следовательно вещественны и различны.

12. Пользуясь формулами (37), найдем для поверхности кривизны (α):

$$E_1 du + F_1 dv = (E_0 du + F_0 dv)\, 2p_\alpha,$$
$$F_1 du + G_1 dv = (F_0 du + G_0 dv)\, 2p_\alpha.$$

Отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} Edu + Fdv &= (E_0 du + F_0 dv)\, e^{2\omega p_\alpha}, \\ Fdu + Gdv &= (F_0 du + G_0 dv)\, e^{2\omega p_\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

на основании тождества:

$$1 + \omega p_\alpha = e^{\omega p_\alpha}.$$

Примем теперь в формуле (24) (п. 8, § 2) за поверхность (μ) поверхность (α) кривизны. Это даст:

$$\cos(\alpha\lambda)\, ds_\alpha ds_\lambda = \delta u\, (Edu + Fdv) + \delta v\, (Fdu + Gdv)$$

или в силу (44)

$$\cos(\alpha\lambda)\, ds_\alpha ds_\lambda = e^{2\omega p_\alpha} [E_0 \delta u du + F_0 (\delta u dv + \delta v du) + G_0 \delta v dv]. \tag{45}$$

Считая и в формуле (25) за поверхность (μ) ту же поверхность (α), получим:

$$\sin(\alpha\lambda)\, ds_\alpha ds_\lambda = H\, (\delta u dv - \delta v du). \tag{46}$$

Положим:

$$\angle(\alpha\lambda) = \theta_0 + \omega\theta_1$$

и возьмем параметры обеих частей формул (45) и (46). Это даст:

$$-\theta_1 \operatorname{tg}\theta_0 + p_\alpha + p_\lambda = 2p_\alpha; \quad \theta_1 \operatorname{ctg}\theta_0 + p_\alpha + p_\lambda = \rho$$

или на основании (41)

$$p_\lambda - \theta_1 \operatorname{tg}\theta_0 = p_\alpha; \quad p_\lambda + \theta_1 \operatorname{ctg}\theta_0 = p_\beta,$$

откуда вытекает:

$$p_\lambda = p_\alpha \cos^2\theta_0 + p_\beta \sin^2\theta_0, \quad \theta_1 = \frac{p_\beta - p_\alpha}{2} \sin 2\theta_0. \tag{47}$$

Первая формула дана A. Mannheim'ом (Liouville Journal. (2), V. 17, p. 126; 1872); вторая дана W. R. Hamilton'ом (Transact. of the Irish Ac. V. 15, 1828).

Формулы эти тождественны с теми, по которым определяется положение и параметр любого винта (p_λ) группы винтов 2-го порядка. Это новое доказательство теоремы § 2 (п. 6).

13. В силу формул (47), выражающих основные, давно и хорошо известные свойства упомянутой группы винтов, все теоремы, имеющие место в последней, сохраняют свою силу в теории конгруэнции. Из этих теорем отметим здесь лишь следующие:

Центральные нормали b_λ образуют цилиндроид, осью которого служит луч a — общая образующая поверхностей (λ).

Точка A_λ встречи луча a с прямой b_λ с изменением угла θ_0 описывает отрезок:

$$A_1A_2 = 2a = p_\beta - p_\alpha = \frac{S}{2H_0} \tag{48}$$

прямой a.

Через концы A_1 и A_2 (предельные точки луча a) этого отрезка проходит по одной (двойной) центральной нормали b_1 и b_2, которые скрещиваются под прямым углом, так как углы их с b_α будут соответственно:

$$\theta'_0 = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_0'' = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому, если p_1 и p_2 — соответствующие этим прямым параметры, то

$$p_1 = p_2 = \frac{p_\alpha + p_\beta}{2} = \frac{\rho}{2}. \tag{49}$$

Прямые b_α и b_β встречаются в середине O (средняя точка луча a) отрезка A_1A_2 под прямым углом.

Введем угол:

$$\vartheta = \theta_0 - \theta'_0 = \theta_0 - \frac{\pi}{4}.$$

Тогда вторую из формул (47) представим в виде:

$$\theta_1 = \frac{p_\beta - p_\alpha}{2} \cos 2\vartheta.$$

Пусть теперь B — произвольная точка луча a, отстоящая от средней точки O на расстоянии c, и

$$r = \theta_1 - c = \frac{p_\beta - p_\alpha}{2} \cos 2\vartheta - c$$

расстояние BA_λ. Для точек A_1 и A_2 имеем:

$$r_1 = \frac{p_\beta - p_\alpha}{2} - c; \quad r_2 = -\frac{p_\beta - p_\alpha}{2} - c,$$

откуда следует:

$$r_1 \cos^2\vartheta + r_2 \sin^2\vartheta = \frac{p_\beta - p_\alpha}{2} \cos 2\vartheta - c = r. \tag{50}$$

Это — известная формула W. R. Hamilton'a (Transact. of the Irish Ac. V. 16, 1830).

Далее напомним, что в рассматриваемом случае, когда главные параметры p_α и p_β не равны, через каждую точку A отрезка A_1A_2 проходят две образующие цилиндроида. Следовательно, если через A проходит центральная нормаль b_λ в a к поверхности (λ) конгруэнции, то через A проходит центральная нормаль $b_{\lambda'}$ к другой поверхности (λ').

Обозначая через θ_0 и θ_0' — углы между направлениями прямой b_α и прямых b_λ и b_λ', получим на основании (47):

$$\theta_0 + \theta_0' = \frac{\pi}{2}; \quad p_\lambda + p_\lambda' = p_\alpha + p_\beta = \rho. \tag{51}$$

В предельной точке A_1 прямые b_λ и $b_{\lambda'}$ сливаются в одну b_1 с параметром $\frac{\rho}{2}$; по мере приближения точки A к средней точке O луча a угол между b_λ и $b_{\lambda'}$ увеличивается и в точке O, когда его стороны совпадают, — первая с b_α, а вторая — с b_β, угол этот равен прямому. При дальнейшем движении точки A этот угол продолжает увеличиваться и во второй предельной точке A_2 равен 180°. Здесь, следовательно, прямые b_λ и $b_{\lambda'}$ снова сливаются в одну b_2 с тем же параметром $\frac{\rho}{2}$.

§ 3. Развертывающиеся поверхности. Конгруэнция нормалей к поверхности. Фокальная поверхность. Главная поверхность. Предельная поверхность.

14. Весьма важен случай, когда

$$p_\lambda = 0,$$

так как ему отвечают развертывающиеся поверхности конгруэнции. Формулы (47) показывают, что через луч a всегда проходят две развертывающиеся поверхности (γ) и (δ).

Пусть b' и b'' — их центральные нормали в a. Прямые b' и b'' вещественны и различны, если у главных параметров p_α и p_β — знаки противоположны; сливаются с b_α или с b_β, если p_α или p_β равны нулю. Наконец, эти прямые мнимы, если у p_α и p_β знаки одинаковы.

Все эти случаи на основании формулы (42) (§ 2, п. 11) характеризуются неравенством:

$$E_1 G_1 - F_1^2 \gtrless 0. \tag{52}$$

Точка A' и A'' встречи с лучом a прямых b' и b'' называются **фокусами** луча a. В этих точках ребра возврата поверхностей (γ) и (δ) касаются луча a. Для определения фокусов представим первую из (47) в виде:

$$p_\lambda = \frac{p_\alpha + p_\beta}{2} - \frac{p_\beta - p_\alpha}{2} \cos 2\theta. \tag{53}$$

Отсюда на основании второй из (47):

$$\left(p_\lambda - \frac{p_\alpha + p_\beta}{2}\right)^2 + \theta_1^2 = \left(\frac{p_\beta - p_\alpha}{2}\right)^2. \tag{54}$$

Эта формула позволяет определить по положению точки A параметры тех двух поверхностей конгруэнции, которых стрикционные линии пересекаются в A. Полагая в (54) $p_\lambda = 0$, получим:

$$\theta_1^2 + p_\alpha p_\beta = 0. \tag{55}$$

Отсюда следует, что середина O луча a делит пополам отрезок $A'A''$, равный $2\sqrt{-p_\alpha p_\beta}$. Пусть θ'_0 и θ''_0 — углы с b_α прямых b' и b''. Из второй формулы (47) выводим:

$$\sin 2\theta'_0 = -\sin 2\theta''_0 = \frac{2\sqrt{-p_\alpha p_\beta}}{p_\beta - p_\alpha}.$$

Далее, подставляя в (53) $p_\lambda = 0$, найдем:

$$\cos 2\theta'_0 = \cos 2\theta''_0 = \frac{p_\alpha + p_\beta}{p_\beta - p_\alpha}.$$

Сопоставляя эту формулу с предыдущей, заключаем:

$$\theta'_0 + \theta'' = \pi. \tag{56}$$

Легко убедиться в том, что прямые b' и b'' в общем случае скрещиваются под углом, не равным прямому. В самом деле, для этого сумма соответствующих параметров должна равняться сумме главных параметров, т. е. ρ, тогда как для прямых b' и b'' эта сумма равна нулю. Отсюда прямо следует, что *лишь при условии*

$$\rho = 0 \tag{57}$$

будут взаимно перпендикулярны плоскости, касательные вдоль луча a к развертывающимся поверхностям конгруэнции.

Нетрудно доказать, что при условии (57) прямые b' и b'' совпадут с b_1 и b_2, т. е. *фокусы луча a будут и его предельными точками.*

В самом деле, из формул (48) и (55) выводим:

$$a^2 - \theta_1^2 = \left(\frac{p_\alpha + p_\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{2}\right)^2. \tag{58}$$

Следовательно, при условии (57)

$$a = \pm\theta_1.$$

На основании сказанного при наличии одного из трех фактов — сумма главных параметров равна нулю, предельные точки служат фокусами, нормали в фокусах скрещиваются под прямым углом — два других тоже имеют место. Опираясь на это, можно доказать теорему:

Теорема. *В конгруэнции нормалей к данной поверхности S всегда равна нулю сумма главных параметров любого луча конгруэнции.*

Действительно, нормали к поверхности S вдоль ее линий кривизны образуют развертывающиеся поверхности, причем касательные к последним нормальные сечения поверхности, проведенные через ее нормаль a, взаимно перпендикулярны. Иными словами, в случае конгруэнции нормалей к поверхности

$$EG - F^2 = \text{вещественному числу.} \tag{59}$$

15. Дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей конгруэнции будет:

$$E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = 0 \tag{60}$$

на основании второй из формул (10) § 1.

Рассмотрим сначала случай:

$$F_1 G_1 - F_1^2 < 0, \tag{a}$$

когда оба интеграла ур-ния (60)

$$\gamma(u, v) = \text{const}, \quad \delta(u, v) = \text{const}$$

вещественны и различны. Тогда будут вещественны и различны оба фокуса A' и A'' каждого луча a конгруэнции. Геометрическим местом этих точек будет фокальная поверхность S с двумя полостями S' и S''. Пусть теперь (γ) и (δ) — те развертывающиеся поверхности конгруэнции, которые проходят через луч a. Образующие первой из них определяют на S своими фокусами две линии (A_1') и (A_1''), одну из которых, скажем (A_1'), эти прямые обертывают. Точно также фокусы образующих поверхности (δ) лежат на двух ее кривых (A_2') и (A_2''), причем вторая (A_2''), а не первая будет ребром возврата поверхности (δ), так как (γ) и (δ) принадлежат разным системам развертывающихся поверхностей конгруэнции. Очевидно, линии (A_1'') и (A_2') лежат на полости S', а кривые (A_1'') и (A_2'') — на полости S''. Луч a, касаясь в A' кривой (A_1') и в A'' — кривой (A_2'') будет касаться обеих полостей поверхности S.

Итак, в рассматриваемом случае конгруэнция состоит из общих касательных к полостям S' и S'' фокальной поверхности.

Назовем ее гиперболической.

Заметим, что у полости S' и поверхности (S) — общая кривая (A_2') и общая касательная — луч a. Поэтому S' и (δ) имеют общую касательную плоскость в A'.

Следовательно, поверхность (δ) касается S' вдоль кривой (A_2'). Но (δ) — развертывающаяся поверхность, а ее образующая a касается линии (A_1') полости S'. Поэтому линии (A_1') и (A_2') сопряжены на полости S'. Точно также сопряжены на полости S'' кривые (A_1'') и (A_2''), а поверхность (γ) касается полости S'' вдоль (A_1'').

Рассмотрим теперь второй случай:

$$E_1 G_1 - F_1^2 = 0. \tag{b}$$

Тогда оба интеграла ур-ния (60) совпадут в один

$$\gamma(u, v) = \text{const},$$

а конгруэнция, назовем ее параболической, будет обладать лишь одной системой развертывающихся поверхностей (γ). На каждом луче a фокусы сливаются с средней точкой O луча, поэтому обе полости S' и S'' фокальной поверхности теперь сольются со средней поверхностью конгруэнции. Теперь сопряженные кривые (A_1') и (A_2'), а также (A_1'') и (A_2'') сольются в одну, которая поэтому будет асимптотикой средней поверхности.

Итак, развертывающиеся поверхности параболической конгруэнции касаются средней поверхности последней вдоль одной системы асимптотик; лучами конгруэнции служат касательные к кривым этой системы.

Заметим в заключение, что поверхности (γ) образуют теперь одну систему поверхностей кривизны конгруэнции.

Перейдем теперь к третьему случаю:

$$E_1G_1 - F_1^2 > 0. \qquad (c)$$

Теперь оба интеграла ур-ния (60) мнимы. В этом случае мнимы и фокусы любого луча конгруэнции, которую назовем эллиптической.

16. Назовем главной поверхностью конгруэнции такую, у которой стрикционная линия — геометрическое место предельных точек A_1 или A_2 ее образующих. Так как на каждом луче — две предельных точки, то главные поверхности состоят из двух систем. Стрикционные линии первой системы образуют поверхность L_1, а стрикционные линии второй — поверхность L_2, L_1 и L_2 — две полости одной поверхности L, которую назовем предельной.

Дифференциальное уравнение главных поверхностей найдем из условия, что параметр каждой из них есть полусумма главных параметров. Вторая формула (10) дает поэтому

$$2p = \frac{E_1du^2 + 2F_1dudv + G_1dv^2}{E_0du^2 + 2F_0dudv + G_0dv^2} = p_\alpha + p_\beta = \rho,$$

откуда

$$(E_1 - E_0\rho)\,du^2 + 2(F_1 - F_0\rho)\,dudv + (G_1 - G_0\rho)\,dv^2 = 0. \qquad (61)$$

Дискриминант S'^2 этого уравнения, определяемый формулой:

$$\frac{S'^2}{4} = (F_1 - F_0\rho)^2 - (E_1 - E_0\rho)(G_1 - G_0\rho),$$

можно представить в виде:

$$\frac{S'^2}{4} = F_1^2 - E_1G_1 + \rho\,(E_0G_1 + G_0E_1 - 2F_0F_1) - \rho^2\,(E_0G_0 - F_0^2),$$

или, на основании значения (14) числа ρ (§ 1, п. 5)

$$\frac{S'^2}{4} = \rho^2 (E_0 G_0 - F_0^2) - (E_1 G_1 - F_1^2).$$

Отсюда в силу (36) (§ 2, п. 10)

$$S'^2 = \frac{S^2}{E_0 G_0 - F_0^2} > 0. \tag{62}$$

Так как дискриминант ур-ния (61) оказался положительным, то оба интеграла

$$\varepsilon(u, v) = \text{const}, \ \zeta(u, v) = \text{const}$$

этого уравнения вещественны и различны.

17. Через начало координат проведем параллели к образующим какой-либо поверхности (λ) конгруэнции. Это построение даст так называемое **коническое изображение** поверхности (λ). Так как поверхности кривизны, проходящие через луч a, в средней точке последнего взаимно перпендикулярны, то заключаем:

Теорема. *Конические изображения всех поверхностей кривизны представляют две системы ортогональных конусов.*

Центральные нормали к главным поверхностям, проходящим через луч a, скрещиваются под прямым углом, причем они параллельны биссектрисам угла между b_α и b_β и дополнительного угла. Отсюда заключаем:

Теорема. *Конические изображения главных поверхностей конгруэнции также представляют две системы ортогональных конусов.* Конусы обеих систем, проходящие через изображение какого-нибудь луча a конгруэнции, делят пополам углы между коническими изображениями тех поверхностей кривизны, которые проходят через тот же луч.

Заметим в заключение этого параграфа, что центральные касательные к поверхностям конгруэнции, проходящим через ее луч a, тоже образуют цилиндроид, который можно построить, повернув на прямой угол вокруг a цилиндроид нормалей.

§ 4. Вырождение цилиндроида центральных нормалей. Случай изотропной конгруэнции. Особая конгруэнция. Специальная конгруэнция.

18. Мы видели, что в случае изотропной конгруэнции, когда параметры чисел E, F и G одинаковы, все поверхности конгруэнции будут поверхностями кривизны. Этот случай рассмотрим здесь подробно. Пусть

$$E = E_0 e^{2\omega\rho_1}, \quad F = F_0 e^{2\omega\rho_1}, \quad G = G_0 e^{2\omega\rho_1},$$

получим:

$$ds^2 = e^{2\omega\rho_1}(E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2),$$

откуда следует для параметра p_λ любой поверхности конгруэнции, проходящей через луч a:

$$p_\lambda = \rho_1,$$

чем доказывается теорема.

Теорема. *Все поверхности конгруэнции, проходящие через луч a, обладают в a общим параметром.*

Так как средняя поверхность любой конгруэнции пересекает ее поверхность кривизны по стрикционной линии, то в случае изотропной конгруэнции, когда все поверхности одновременно поверхности кривизны, имеет место вторая теорема Ribancour'a:

Теорема. *На средней поверхности изотропной конгруэнции лежат стрикционные линии всех поверхностей конгруэнции* (см. Darboux, l. c. P. IV, p. 15).

Наконец формулы (47) дают в случае изотропной конгруэнции:

$$p_\lambda = p_\alpha = p_\beta = \rho_1; \ \theta_1 = 0.$$

Последняя из этих формул доказывает теорему:

Теорема. *В случае изотропной конгруэнции соответствующий ее лучу a цилиндроид центральных нормалей вырождается в плоский пучок прямых с центром в средней точке O луча a; плоскость пучка перпендикулярна к лучу a.*

19. Теория, развитая в предыдущих параграфах, построена в сущности на двух формулах (24) и (25) (§ 2, п. 8):

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda\mu)\, ds_\lambda ds_\mu &= E du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G dv\,\delta v, \\ \sin(\lambda\mu)\, ds_\lambda ds_\mu &= H(du\,\delta v - dv\,\delta u), \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

где функция

$$H = H_0 + \omega H_1 \tag{64}$$

определяется формулами (14) § 1 (п. 5):

$$H_0 = \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}, \ H_1 = \frac{E_0 G_1 + G_0 E_1 - 2F_0 F_1}{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}}. \tag{65}$$

Первая из формул (63) справедлива всегда, вторая же лишь при H — комплексном. Но, как легко видеть из (65), число H вырождается в следующих случаях:

$$\text{a)}\ E_0 = 0; \quad \text{b)}\ G_0 = 0; \quad \text{c)}\ E_0 G_0 - F_0^2 = 0.$$

Мы рассмотрим здесь лишь случай (a). Случай (b) от него не отличается, что же касается случая (c), то он по своей сложности требует специального исследования.

Согласно определению,

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \ F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \ G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Отсюда, так как

$$x = x_0 + \omega x_1, \ y = y_0 + \omega y_1, \ z = z_0 + \omega z_1,$$

выводим:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \sum \left(\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)^2, \quad E_1 = 2\sum \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \\ F_0 &= \sum \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}, \quad F_1 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \sum \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \\ G_0 &= \sum \left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2, \quad G_1 = 2\sum \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Допустим, что

$$E_0 = 0,$$

причем ограничимся лишь конгруэнциями, состоящими из вещественных прямых. Тогда первая из формул (66) дает:

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{\partial y_0}{\partial u} = \frac{\partial z_0}{\partial u} = 0, \tag{67}$$

т. е. x_0, y_0, z_0 — функции от одного переменного v.

Следовательно, все лучи конгруэнции, которую назовем особой, параллельны лучам конуса

$$x_0 = x_0(v);\ y_0 = y_0(v);\ z_0 = z_0(v);\ \sum x_0^2 = 1 \tag{68}$$

с вершиной в начале координат.

Каждому лучу b этого конуса отвечает ∞^1 параллельных лучей a особой конгруэнции. Следовательно, среди поверхностей особой конгруэнции имеются цилиндры. Из (67) и (66) следует:

$$E = 0, E_1 = 0, F_0 = 0, F_1 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u},\ G_0 = \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2,$$

$$G_1 = 2\sum \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \tag{69}$$

Основные формулы (10) § 1 будут:

$$ds_0 = dv\sqrt{G_0},\ 2p = \frac{G_1}{G_0} + \frac{2F_1}{G_0}\frac{du}{dv}. \tag{70}$$

Поэтому для ds найдем:

$$ds = dv\sqrt{G_0}\,e^{\omega p}. \tag{71}$$

Вторая из формул (70) показывает, что существует поверхность (μ) с нулевым параметром, определяемая формулой

$$0 = \frac{G_1}{G_0} + \frac{2F_1}{G_0}\frac{\delta u}{\delta v},$$

откуда следует

$$p = \frac{F_1}{G_0}\left(\frac{du}{dv} - \frac{\delta u}{\delta v}\right). \tag{72}$$

Кроме того, согласно определению поверхности (μ)

$$ds_\mu = dv\sqrt{G_0};\quad p_\mu = 0. \tag{73}$$

Пусть α, β, γ, — координаты центральной нормали к поверхности (λ). Формулы (7) § 1 дадут теперь:

$$\alpha\,ds = \frac{\partial x_0}{\partial v}dv + \omega\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}du + \frac{\partial x_1}{\partial v}dv\right).$$

Подставив сюда значение (71) ds, получим для α следующую формулу после небольших переделок:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\omega\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{du}{dv}+\frac{\partial x_1}{\partial v}-p\,\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{G_0}}. \qquad (73')$$

Для вышеуказанной поверхности (μ) найдем, полагая в полученной формуле $p=0$ и заменяя $\frac{du}{dv}$ на $\frac{\delta u}{\delta v}$:

$$\alpha_\mu=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\omega\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta v}+\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\frac{1}{\sqrt{G_0}}. \qquad (73'')$$

Положим теперь:

$$\alpha=\alpha^0+\omega\alpha', \qquad \beta=\beta^0+\omega\beta', \qquad \gamma=\gamma^0+\omega\gamma',$$
$$\alpha_\mu=\alpha^0{}_\mu+\omega\alpha'{}_\mu,\ \beta_\mu=\beta^0{}_\mu+\omega\beta'{}_\mu,\ \gamma_\mu=\gamma^0{}_\mu+\omega\gamma'{}_\mu,$$

где знаком ^{0} указаны направляющие косинусы прямых, о которых идет речь.

Формулы (73) и (73′) дадут для этих чисел:

$$\alpha^0=\alpha^0_\mu=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial x_0}{\partial v},\ \beta^0=\beta^0_\mu=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial y_0}{\partial v},\ \gamma^0=\gamma^0_\mu=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial z_0}{\partial v} \qquad (74)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{du}{dv}+\frac{\partial x_1}{\partial v}+p\,\frac{\partial x_0}{\partial v}\right),\ \beta'=\dots,\ \gamma'=\dots\\ \alpha_\mu'&=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta v}+\frac{\partial x_1}{\partial v}\right),\ \beta_\mu'=\dots,\ \gamma_\mu'=\dots\end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Формулы (74) доказывают, что центральные нормали к поверхностям (λ) параллельны, а так как каждая из них встречает луч a под прямым углом, то доказана теорема:

Теорема. *У поверхностей особой конгруэнции, проходящих через луч a, центральные нормали параллельны между собой. Цилиндроид нормалей вырождается в плоский пучок параллелей, перпендикулярных к лучу a.*

Расстояние r друг от друга этих двух параллельных прямых определяется по известной формуле (часть I, гл. II, § 4, п. 4):

$$r^2=\sum(\alpha'-\alpha_\mu')^2.$$

Но из (75) выводим:

$$\alpha'-\alpha_\mu'=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\left[\frac{\partial x_1}{\partial u}\left(\frac{du}{dv}-\frac{\delta u}{\delta v}\right)-p\,\frac{\partial x_0}{\partial v}\right]$$

или на основании (72)

$$\alpha'-\alpha_\mu'=\frac{p}{\sqrt{G_0}}\left[\frac{G_0}{F_1}\frac{\partial x_1}{\partial u}-\frac{\partial x_0}{\partial v}\right]$$

Поэтому

$$r^2 = \frac{p^2}{G_0}\left[\frac{G_0^2}{F_1^2}\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{G_0}{F_1}\sum\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}\right].$$

Положим:

$$\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = a.$$

На основании формул (66) полученное выражение r^2 примет вид:

$$r^2 = p^2\frac{G_0 a - F_1^2}{F_1^2}, \tag{76}$$

что доказывает теорему:

Теорема. *Параметры различных поверхностей особой конгруэнции, проходящих через луч a, прямо пропорциональны расстояниям их центральных точек от центральной точки развертывающейся поверхности конгруэнции.*

Пусть A — точка луча a, служащая центром развертывающейся поверхности (μ). Точка A — фокус луча a, а геометрическое место этих фокусов — фокальная поверхность (S) особой конгруэнции. Точка A — также, очевидно, средняя точка луча a. Следовательно, у особой конгруэнции средняя и фокальная поверхность совпадают.

Рассмотрим ребро возврата (A) развертывающейся поверхности конгруэнции (μ). Линия (A) лежит на (S). Согласно общей теории (§ 3, п. 15) поверхность (μ) касается поверхности (S) вдоль линии (A), но μ — развертывающаяся поверхность, поэтому линия (A) — асимптотика поверхности (S). Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Ребра (A) возврата развертывающихся поверхностей (μ) конгруэнции служат одной системой асимптотик фокальной поверхности особой конгруэнции.*

Далее пусть A, A', A''... — фокусы тех параллельных лучей a, a', a'', конгруэнции которых отвечают одному и тому же лучу конуса (68). Пусть (L) — геометрическое место этих фокусов. Линия (L) тоже лежит на поверхности (S), а вышеупомянутые параллельные лучи конгруэнции, проходящие через точки линии (L), касаются в этих точках поверхности (S). Другому лучу конуса (68) будет отвечать другой цилиндр конгруэнции, который коснется поверхности (S) вдоль другой линии (L'). Продолжая далее этот процесс, мы на фокальной поверхности (S) определим другую систему линий. В общей точке A линий (L) и (A) образующая a цилиндра конгруэнции касается в A линии (A), а сам цилиндр касается поверхности (S) вдоль линии (L). Отсюда следует, что линии (L) и (A) образуют две системы сопряженных кривых поверхности (S). Но линии (A) — асимптотики последней, поэтому асимптотиками поверхности (S) будут и линии (L).

Мы получим таким образом теорему:

Теорема. *Цилиндрические поверхности конгруэнции касаются фокальной поверхности S по асимптотикам (L) последней.*

Пересечем конус (68) сферой единичного радиуса с центром в начале O координат. Это даст кривую (B) — сферическую индикатрису лучей особой конгруэнции. Пусть B — та точка линии (B), радиус OB которой параллелен лучу a конгруэнции. Формулы (74) доказывают, что центральные нормали к поверхностям конгруэнции, проходящим через луч a, параллельны касательной Bt к линии (B). Это верно и для центральной нормали к развертывающейся поверхности (μ) конгруэнции в фокусе A луча a. Но для поверхности (μ) центральная нормаль есть главная нормаль в A к ее ребру возврата (A), отсюда на основании вышесказанного заключаем:

Теорема. *Главные нормали к асимптотикам A системы (A) в точках их встречи с каждой линией (L) другой системы асимптотик параллельны между собой.*

20. Рассмотрим в заключение тот частный случай, когда координаты конгруэнции заданы формулами:

$$x = x(u + \omega v),\ y = y(u + \omega v),\ z = z(u + \omega v);\ \sum x^2 = 1. \tag{77}$$

Такую конгруэнцию назовем специальной.

Из (77) выводим прежде всего на основании общих свойств исчисления (ω):

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = x_0(u),\ y_0 = y_0(u),\ z_0 = z_0(u);\ \sum x_0^2 = 1. \\ &x_1 = v\frac{dx_0}{du},\ y_1 = v\frac{dy_0}{du},\ z_1 = v\frac{dz_0}{du}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Первая из формул (78) доказывает теорему:

Теорема. *Лучи специальной конгруэнции параллельны образующим определенного конуса:*

$$x_0 = x_0(u);\ y_0 = y_0(u);\ z_0 = z_0(u). \tag{79}$$

Следствие. *Среди поверхностей конгруэнции есть цилиндрические.*

Положим:

$$w = u + \omega v,\ \frac{dx}{dw} = x',\ \frac{dy}{dw} = y',\ \frac{dz}{dw} = z';$$
$$W = +\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = W_0 e^{\omega q}. \tag{80}$$

Формулы (77) дают:

$$dx = x'dw;\ dy = y'dw;\ dz = z'dw,$$

откуда для элемента ds поверхности конгруэнции и координат α, β, γ ее центральной нормали найдем:

$$ds = Wdw,\ W\alpha = x',\ W\beta = y',\ W\gamma = z'. \tag{81}$$

Первая из этих формул дает:

$$ds^2 = W^2dw^2 = W^2(du^2 + 2\omega du dv).$$

Сравнение с общей формулой

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

показывает, что

$$E = W^2;\ F = \omega W^2;\ G = 0,$$

отсюда мы заключаем, что специальная конгруэнция — частный случай особой. Далее, согласно формулам (81), координаты α, β, γ от отношения $\frac{du}{dv}$ не зависят. Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *У всех поверхностей специальной конгруэнции, проходящих через луч a, — центральные нормали совпадают в одну прямую.*

Цилиндроид центральных нормалей вырождается в данном случае в прямую линию. Наконец первая из (81) дает для параметра p поверхности конгруэнции:

$$p = q + \frac{dv}{du}, \tag{82}$$

откуда следует, что среди поверхностей, проходящих через луч a, есть одна (μ) — развертывающаяся с нулевым параметром, определяемая равенством:

$$0 = q + \frac{\delta v}{\delta u}.$$

Специальными конгруэнциями будут все конгруэнции, определяемые уравнениями:

$$f(x, y, z) = 0;\ \sum x^2 = 1. \tag{83}$$

В самом деле, определяя из этих уравнений x, y через z, найдем:

$$x = x(z);\ y = y(z);\ z = z,$$

где третье тождество добавлено для полноты. Эти уравнения имеют вид ур-ний (77), определяющих специальную конгруэнцию. Роль числа w играет здесь число z. Беря от обоих ур-ний (83) производные, получим:

$$\sum \alpha \frac{\partial f}{\partial x} = 0;\ \sum \alpha x = 0,$$

из которых следует, что центральная нормаль c (α, β, γ) любой поверхности конгруэнции, которая проходит через луч a (x, y, z), лежит на прямой, по которой измеряется кратчайшее расстояние луча a, и прямой, координаты которой равны:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z};\ \left[\Delta^2 = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right].$$

На этом мы закончим исследования настоящей главы.

Глава II.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИИ.

§ 5. Системы координат.

1. Вернемся к общему случаю. Положим снова, что конгруэнция задана уравнениями:

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v);\ z = z(u, v). \tag{1}$$

Тогда элемент дуги поверхности конгруэнции определяется формулой:

$$ds^2 = Edu^2 + 2\,Fdudv + Gdv^2, \tag{2}$$

где попрежнему

$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad F = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\quad G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2;$$

$$EG - F^2 = H^2. \tag{3}$$

Пусть (λ) — поверхность конгруэнции, определяемая уравнением:

$$\lambda(u, v) = 0,$$

где λ — вещественная функция. Координаты α, β, γ центральной нормали к поверхности (λ) определяются формулами:

$$\alpha\, ds = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv;\quad \beta\, ds = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv;$$

$$\gamma\, ds = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \tag{4}$$

Назовем **координатными** поверхностями конгруэнции те, которые определяются равенствами:

$$u = \text{const},\ v = \text{const}.$$

Для них получим:

$$\left.\begin{aligned}
ds_u = dv\sqrt{G},\quad \alpha_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \beta_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v},\\
\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},\\
ds_v = du\sqrt{E},\quad \alpha_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \beta_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u},\\
\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Напомним, что по формулам (17) гл. I (§ 2, п. 6)

$$\left.\begin{aligned} Hx=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ Hy=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\\ Hz=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

которые теперь в силу (5) будут:

$$\frac{H}{\sqrt{EG}}x=\beta_v\gamma_u-\gamma_v\beta_u,\quad \frac{H}{\sqrt{EG}}y=\gamma_v\alpha_u-\alpha_v\gamma_u,\quad \frac{H}{\sqrt{EG}}z=\alpha_v\beta_u-\beta_v\alpha_u. \qquad (7)$$

Из (5) следует:

$$\cos(u,\ v)=\frac{F}{\sqrt{EG}},\ \sin(u,\ v)=\frac{H}{\sqrt{EG}},\ \operatorname{tg}(u,\ v)=\frac{H}{F}. \qquad (8)$$

Первая из этих формул показывает, что если координатными поверхностями служат поверхности кривизны, то

$$F=0.$$

Для любой поверхности (λ) конгруэнции формулы (4) дадут:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\lambda,\ u)=\frac{1}{\sqrt{G}}\left(F\frac{du}{ds}+G\frac{dv}{ds}\right),\ \sin(\lambda,\ u)=\frac{H}{\sqrt{G}}\frac{du}{ds},\\ \operatorname{tg}(\lambda,\ u)=\frac{Hdu}{Fdu+Gdv},\ \cos(\lambda,v)=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}\right),\\ \sin(\lambda,\ v)=\frac{H}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds},\ \operatorname{tg}(\lambda,\ v)=\frac{Hdv}{Edu+Fdv},\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где ds — элемент дуги поверхности (λ). Сравнивая вторые формулы (8) и (9), получим:

$$\sin(\lambda,u)\,ds=\sin(u,\ v)\,ds_v,\ \sin(\lambda,v)\,ds=\sin(u,\ v)\,ds_u, \qquad (10)$$

откуда

$$\frac{ds_u}{\sin(\lambda,\ v)}=\frac{ds_v}{\sin(\lambda,\ u)}=\frac{ds}{\sin(u,\ v)}. \qquad (11)$$

Обращаясь теперь к первым формулам (10), получим:

$$ds\left(\cos(\lambda,\ u)\,dv\sqrt{G}+\cos(\lambda,\ v)\,du\sqrt{E}\right)=Edu^2+\\ +2Fdudv+Gdv^2=ds^2,$$

откуда на основании (6) следует:

$$ds=ds_u\cos(\lambda,\ u)+ds_v\cos(\lambda,\ v). \qquad (12)$$

Эта формула показывает, что винт (p_λ), осью которого служит центральная нормаль c_α, есть сумма двух винтов (p_u) и (p_v), осями которых служат центральные нормали c_u и c_v соответственно.

Из (11) и (12) легко выведем:

$$ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2 + 2ds_u ds_v \cos(u, v). \tag{13}$$

Мы видим, что элементы ds, ds_u, ds_v дуг трех произвольных поверхностей конгруэнции, проходящих через луч a, связаны между собой точно так же, как в параллелограмме диагональ и прилегающие к ней стороны.

2. Пусть координатными поверхностями будут поверхности кривизны конгруэнции. В этом случае, как мы только что видели, функция F равна нулю. Следовательно

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,\ H^2 = EG,\ \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{E_0} + \frac{G_1}{G_0}\right). \tag{14}$$

Главные параметры будут:

$$p_u = \frac{1}{2}\frac{G_1}{G_0},\quad p_v = \frac{1}{2}\frac{E_1}{E_0}. \tag{15}$$

Далее

$$\left.\begin{aligned}\cos(\lambda, u) = \sin(\lambda, v) = \sqrt{G}\frac{dv}{ds};\ \sin(\lambda, u) = \cos(\lambda, v) =\\ = \sqrt{E}\frac{du}{ds},\ \operatorname{tg}(\lambda, u) = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{du}{dv}.\end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

Наконец формулы (11) и (12) будут теперь:

$$ds_u = ds\cos(\lambda, u);\ ds_v = ds\cos(\lambda, v);\ ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2. \tag{16}$$

Дифференциальное уравнение главных поверхностей [гл. I, § 3, п. 16, ур-ние (61)] на основании значения ρ из (14) примет вид:

$$E_0du^2 - G_0dv^2 = 0. \tag{17}$$

Наконец уравнение развертывающихся поверхностей [гл. I, § 3, п. 15, ур-ние (60)] будет теперь:

$$\frac{E_0du^2}{p_u} + \frac{G_0dv^2}{p_v} = 0. \tag{18}$$

3. Отнесем конгруэнцию к главным поверхностям ее. В этом случае, как следует из ур-ния (61), на которое мы только что ссылались, должно быть:

$$E_1 = \rho E_0;\ G_1 = \rho G_0.$$

Но

$$\rho = \frac{E_0G_1 + G_0E_1 - 2F_0F_1}{2(E_0G_0 - F_0^2)},$$

что по внесении значений E_1 и E_0 даст:

$$\rho = \frac{\rho E_0G_0 - F_0F_1}{E_0G_0 - F_0^2},$$

откуда следует:

$$F_0(F_1 - \rho F_0) = 0.$$

Второй множитель не равен нулю, так как конгруэнция не изотропная, поэтому нулю равняется функция F_0.

В силу найденных значений E_1, G_1 и F_0 получим теперь:

$$ds^2 = e^{\omega\rho}(E_0du^2 + G_0dv^2) + 2\omega F_1 du dv. \tag{18'}$$

Ур-ние (32) (гл. I, § 2, п. 10) поверхностей кривизны конгруэнции будет:

$$E_0du^2 - G_0dv^2 = 0. \tag{19}$$

Наконец, уравнение развертывающихся поверхностей примет вид:

$$\rho(E_0du^2 + G_0dv^2) + 2F_1 du dv = 0. \tag{20}$$

4. В заключение отнесем конгруэнцию к ее развертывающимся поверхностям.

В этом случае, очевидно, должно быть:

$$E_1 = G_1 = 0,$$

поэтому

$$ds^2 = E_0du^2 + G_0dv^2 + 2Fdudv. \tag{21}$$

Дифференциальное уравнение поверхностей кривизны будет:

$$E_0du^2 - G_0dv^2 = 0, \tag{22}$$

а главных поверхностей

$$2F_1dudv = \rho(E_0du^2 + 2F_0dudv + G_0dv^2).$$

Но теперь

$$\rho = -\frac{F_0F_1}{E_0G_0 - F_0^2},$$

поэтому предыдущее уравнение примет вид:

$$E_0du^2 + G_0dv^2 + \frac{2E_0G_0}{F_0}dudv = 0. \tag{23}$$

§ 6. Условие для функций E, F, G. Кривизна. Цилиндроид бинормалей.

5. Пусть дана конгруэнция уравнениями:

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ \sum x^2 = 1, \tag{24}$$

где u, v — независимые вещественные переменные, и (λ) — поверхность конгруэнции, заданная уравнением:

$$\lambda(u, v) = 0,$$

где λ — вещественная функция. Тогда элемент ds поверхности (λ) определится формулой:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{25}$$

а центральная нормаль $c(\alpha, \beta, \gamma)$ к поверхности (λ), соответствующая ее образующей $a(x, y, z)$, будет дана формулами:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, ds = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,\ \ \beta\, ds = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \\ \gamma\, ds = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Функции E, F, G равны соответственно:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\ F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},\ G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2. \tag{26'}$$

Решим теперь обратную задачу: дан элемент ds^2 своими коэффициентами E, F, G. Требуется построить конгруэнцию.

Прежде всего, конечно, надо разрешить вопрос: можно ли функции E, F, G взять произвольно?

6. Напомню, как аналогичная задача разрешена относительно поверхности точек, заданной уравнениями своих точек (x', y', z'),

$$x' = x'(u, v);\ y' = y'(u, v);\ z' = z'(u, v). \tag{24'}$$

Элемент ds' дуги поверхности дается формулой:

$$\left.\begin{aligned} ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2,\ E' = \sum \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2, \\ F' = \sum \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v},\ G' = \sum \left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{25'}$$

Затем определяются направляющие косинусы X', Y', Z' нормали к поверхности в точке ее (x', y', z') по формулам:

$$\left.\begin{aligned} H'X' = \frac{\partial y'}{\partial u} \frac{\partial z'}{\partial v} - \frac{\partial z'}{\partial u} \frac{\partial y'}{\partial v},\ H'Y' = \frac{\partial z'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial z'}{\partial v}, \\ H'Z' = \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial y'}{\partial v} - \frac{\partial y'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где

$$H'^2 = E'G' - F'^2.$$

Затем вводится дифференциальная форма:

$$\varphi' = -\sum dx' dX' = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \tag{28}$$

и вычисляются вторые производные от прямоугольных координат x', y', z' по криволинейным u, v, что приводит к формулам:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x'}{\partial u^2} = A_1' \frac{\partial x'}{\partial u} + B_1' \frac{\partial x'}{\partial v} + DX', \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} = A_2' \frac{\partial x'}{\partial u} + B_2' \frac{\partial x'}{\partial v} + D'X', \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2} = A_3' \frac{\partial x'}{\partial u} + B_3' \frac{\partial x'}{\partial v} + D''X', \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

где, подчеркнем это, функции A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 выражаются через E', F', G' и их производные по u и v. Для координат y' и z' получаются уравнения с теми же коэффициентами A_1', B_1', D; A_2', B_2', D'; A_3', B_3', B''.

Условия интегрируемости этих дифференциальных уравнений приводят наконец к следующим уравнениям Gauss'a—Codazzi:

$$\frac{DD''-D'^2}{E'G'-F'^2}=K, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial v}-\frac{\partial D'}{\partial u}-A_2'D+(A_1'-B_2')D'+B_1'D''=0,\\ \frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}+A_3'D+(B_3'-A_2')D'+B_2'D''=0,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где K — кривизна дифференциальной формы ds'^2 — дается формулой:

$$\left.\begin{aligned}K=\frac{1}{2H'}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F'}{EH'}\cdot\frac{\partial E'}{\partial v}-\frac{1}{H'}\frac{\partial G'}{\partial u}\right]+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{H'}\frac{\partial F'}{\partial u}-\frac{1}{H'}\frac{\partial E'}{\partial v}-\frac{F'}{E'H'}\frac{\partial E'}{\partial u}\right]\right\}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(L. Bianchi; l. c. V. I, p. 111, 165, 170, 174—175, 123).

7. Вернемся к нашей задаче. Мы видели в гл. I [§ 2, п. 7, ур-ния (17)], что координаты x, y, z луча a конгруэнции удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}Hx=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ Hy=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\\ Hz=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

которые от (27) отличаются лишь обозначениями. Поэтому дифференциальная форма φ', определяемая формулой (28), для конгруэнций будет:

$$\varphi=-\sum dx\cdot dx=-ds^2;$$

отсюда прямо вытекает, что для конгруэнции

$$D=-E,\ D'=-F,\ D''=-G.$$

Поэтому формулы (29) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=A_1\frac{\partial x}{\partial u}+B_1\frac{\partial x}{\partial v}-Ex,\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=A_2\frac{\partial x}{\partial u}+B_2\frac{\partial x}{\partial v}-Fx,\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=A_3\frac{\partial x}{\partial u}+B_3\frac{\partial x}{\partial v}-Gx,\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 будут также выражены через комплексные функции E, F, G и их производные по u, v как A'_1, A'_2, A'_3, и B'_1, B'_2, B'_3 — через E', F', G' и их производные. Наконец условия (30) и (31) интегрируемости сведутся к одному:

$$K=1,$$

так как ур-ния (31) сведутся к тождествам, если в них заменить D, D', D'' соответственно через $-E$, $-F$, $-G$, в чем нетрудно удостовериться.

Единственным условием, которому подчинены функции E, F, G, будет в силу вышесказанного:

$$1=-\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}. \tag{35}$$

Если конгруэнция отнесена к поверхностям кривизны, то F равно нулю, и это уравнение будет

$$2\sqrt{EG}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)=0. \tag{36}$$

Определение конгруэнции по данным функциям E и G, обращающим это уравнение в тождество, сведется к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка, как легко видеть (Ср. Bianchi, l. c. 181—183).

8. Займемся теперь определением кривизны поверхностей конгруэнции (λ), проходящих через лучи $a(x, y, z)$.

Предположим, что поверхность (λ) задана уравнениями:

$$u=u(t),\ v=v(t).$$

Положим:

$$\frac{du}{dt}=u',\quad \frac{dv}{dt}=v',\quad \frac{d^2u}{dt^2}=u'',\quad \frac{d^2v}{dt^2}=v''.$$

Вычислим предварительно координаты x_1, y_1, z_1 центральной касательной к поверхности в соответствующем центре A_λ луча a. Для этого воспользуемся формулами:

$$x_1=y\gamma-z\beta,\ y_1=z\alpha-x\gamma,\ z_1=x\beta-y\alpha.$$

Представив предварительно формулы (26) в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\frac{ds}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial v}v',\ \beta\frac{ds}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v}v',\\&\gamma\frac{ds}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}u'+\frac{\partial z}{\partial v}v',\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

без труда найдем на основании ур-ний (33) и (37) сначала

$$Hx_1=\frac{\partial x}{\partial v}\sum\alpha\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial u}\sum\alpha\frac{\partial x}{\partial v};$$

но по (37)

$$\frac{ds}{dt}\sum \alpha\frac{\partial x}{\partial u}=Eu'+Fv',\quad \frac{ds}{dt}\sum \alpha\frac{\partial x}{\partial v}=Fu'+Gv',$$

поэтому окончательно найдем первую из формул:

$$\left.\begin{aligned}
H\frac{ds}{dt}x_1&=\frac{\partial x}{\partial v}(Eu'+Fv')-\frac{\partial x}{\partial u}(Fu'+Gv'),\\
H\frac{ds}{dt}y_1&=\frac{\partial y}{\partial v}(Eu'+Fv')-\frac{\partial y}{\partial u}(Fu'+Gv'),\\
H\frac{ds}{dt}z_1&=\frac{\partial z}{\partial v}(Eu'+Fv')-\frac{\partial z}{\partial u}(Fu'+Gv').
\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

Возьмем теперь производные по t от обеих частей ур-ний (37). Замечая, что

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{\xi}{\sin R}\frac{ds}{dt}=(-x+x_1\operatorname{ctg}R)\frac{ds}{dt}.$$

на основании общей теории линейчатых поверхностей (см. часть II, глава I, § 3, п. 12, ур-ние 20), получим:

$$(-x+x_1\operatorname{ctg}R)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\alpha\frac{d^2s}{dt^2}=u'^2\frac{\partial^2x}{\partial u^2}+2u'v'\frac{\partial^2x}{\partial u\partial v}+$$
$$+v'^2\frac{\partial^2x}{\partial v^2}+\frac{\partial x}{\partial u}u''+\frac{\partial x}{\partial v}v'',$$

$$(-y+y_1\operatorname{ctg}R)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\beta\frac{d^2s}{dt^2}=u'^2\frac{\partial^2y}{\partial u^2}+2u'v'\frac{\partial^2y}{\partial u\partial v}+$$
$$+v'^2\frac{\partial^2y}{\partial v^2}+\frac{\partial y}{\partial u}u''+\frac{\partial y}{\partial v}v'',$$

$$(-z+z_1\operatorname{ctg}R)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\gamma\frac{d^2s}{dt^2}=u'^2\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+2u'v'\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+$$
$$+v'^2\frac{\partial^2z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}u''+\frac{\partial z}{\partial v}v''.$$

Пользуясь тождествами:

$$\sum xx_1=0;\quad \sum \alpha x_1=0$$

и умножив полученные уравнения соответственно на x_1, y_1, z_1, найдем, сложив произведения:

$$\operatorname{ctg}R\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=u'^2\sum x_1\frac{\partial^2x}{\partial u^2}+2u'v'\sum x_1\frac{\partial^2x}{\partial u\partial v}+$$
$$+v'^2\sum x_1\frac{\partial^2x}{\partial v^2}+u''\sum x_1\frac{\partial x}{\partial u}+v''\sum x_1\frac{\partial x}{\partial v}.\tag{a}$$

Но из (38) следует, после очевидных преобразований:

$$\frac{ds}{dt}\sum x_1 \frac{\partial x}{\partial u} = -Hv', \quad \frac{ds}{dt}\sum x_1 \frac{\partial x}{\partial v} = Hu'. \tag{b}$$

Поэтому из формул (34) и (38) вытекает:

$$\frac{ds}{dt}\sum x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = H(B_1u' - A_1v'); \quad \frac{ds}{dt}\sum x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} =$$
$$= H(B_2u' - A_2v'); \quad \frac{ds}{dt}\sum x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = H(B_3u' - A_3v'). \tag{c}$$

На основании этих формул и предшествующих мы представим формулу (a) в следующем виде:

$$\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{H}\operatorname{ctg} R = u'^2(B_1u' - A_1v') + 2u'v'(B_2u' - A_2v') +$$
$$+ v'^2(B_3u' - A_3v') + u'v'' - v'u''. \tag{39}$$

Эта формула позволяет решить все вопросы о кривизне поверхностей конгруэнции.

9. Решим такую задачу: требуется определить бинормали тех поверхностей (a) конгруэнции, проходящих чрез луч $a(x, y, z)$, у которых общая центральная нормаль, т. е. которые касаются друг друга во всех точках луча a.

Для таких поверхностей вдоль общей образующей a u, v, u', v' — одни и те же. Полагая поэтому

$$u'v'' - v'u'' = l,$$

мы можем из (39) вычислить $\operatorname{ctg} R$:

$$\operatorname{ctg} R = A + Bl, \tag{39'}$$

где A, B для всех рассматриваемых поверхностей одинаковы, l — вещественное число, различное для различных поверхностей (a).

Напомню, что

$$R = R_0 + \omega R_1$$

— комплексный угол между лучом a и бинормалью соответствующей поверхности (a). Примем общую центральную точку последних за начало координат, общую центральную нормаль за ось y, луч a — за ось x, а общую центральную касательную за ось z. Тогда для любой точки $M(X, Y, Z)$ бинормали, очевидно,

$$\operatorname{tg} R_0 = \frac{Z}{X}; \quad R_1 = Y. \tag{d}$$

Но формула (39') дает:

$$\operatorname{ctg} R_0 - \omega \frac{R_1}{\sin^2 R_0} = A_0 + B_0 l + \omega(A_1 + B_1 l),$$

откуда следует:

$$\operatorname{ctg} R_0 = A_0 + B_0 l, \quad -\frac{R_1}{\sin^2 R_0} = A_1 + B_1 l$$

или на основании формул (d)

$$\frac{X}{Z} = A_0 + B_0 l, \quad -\frac{Y(X^2+Z^2)}{Z^2} = A_1 + B_1 l. \tag{e}$$

Исключая l между этими уравнениями, найдем:

$$B_1 XZ + B_0 Y(X^2 + Z^2) = C_0 Z^2,$$

где для краткости письма положено:

$$A_0 B_1 - B_0 A_1 = C_0. \tag{e'}$$

Перенесем теперь начало координат в точку $K(0,\ a,\ 0)$ оси y, причем координатный триедр повернем на угол θ вокруг оси y. Тогда получим для новых координат $(X',\ Y',\ Z')$ точки $M(X,\ Y,\ Z)$ формулы:

$$Y = Y' + a, \quad X = X' \cos\theta - Z' \sin\theta, \quad Z = X' \sin\theta + Z' \cos\theta,$$

помощью которых уравнение (e′) поверхности бинормалей примет вид:

$$B_0 Y'(X'^2 + Z'^2) + LX'^2 - MY'^2 + NX'Z' = 0, \tag{f}$$

где

$$\begin{aligned} L &= B_1 \sin\theta\cos\theta - C_0 \sin^2\theta + B_0 a, \\ M &= B_1 \sin\theta\cos\theta + C_0 \cos^2\theta - B_0 a, \\ N &= B_1 \cos 2\theta - C_0 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Выберем новое начало K и угол поворота θ так, чтобы L и M оказались равными нулю. Это даст для определения чисел a и θ формулы

$$a = \frac{C_0}{2B_0}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = -\frac{C_0}{B_1}, \quad N = \frac{\cos 2\theta\,(B_1^2 + C_0^2)}{B_1},$$

а уравнение (f) будет:

$$B_0 (X'^2 + Z'^2) Y' + NX'Z' = 0,$$

что доказывает теорему:

Теорема. *Бинормали поверхностей* (*a*), *касающихся друг друга вдоль общего луча конгруэнции, образуют цилиндроид.*

Эта теорема соответствует теореме Meunier о кривизне линий на поверхности, у которых в общей точке — общая касательная. Замечу, что теорема эта дана W. Blaschke (l. c. S. 299) без доказательства.

§ 7. Изотропная конгруэнция.

10. Для изучения изотропной конгруэнции введем сферические координаты θ, φ ее луча $a(x,\ y,\ z)$ по формулам (часть I, гл. II, § 4, п.7, формулы 21):

$$x = \sin\theta\cos\varphi; \quad y = \sin\theta\sin\varphi; \quad z = \cos\theta, \tag{40}$$

где

$$\theta=\theta_0+\omega\theta_1;\ \varphi=\varphi_0+\omega\varphi_1. \tag{41}$$

Напомню, что θ—угол (z, a) между осью z прямоугольных координат и лучом a, φ—угол, образуемый с осью x винтом

$$x+y.$$

Из (40) без труда выводим основную формулу для элемента ds:

$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{42}$$

Введем новое комплексное перменное ψ формулой

$$d\psi=\frac{d\theta}{\sin\theta};\ \psi=\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{a}$$

Тогда, вместо (42) получим:

$$ds^2=\sin^2\theta\,(d\varphi^2+d\psi^2). \tag{42'}$$

Положим теперь

$$\psi_0+i\varphi_0=t_0;\ \psi_1+i\varphi_1=t_1 \qquad (i=\sqrt{-1}). \tag{43}$$

Числа t_0 и t_1 будут обыкновенными комплексными числами, которыми, очевидно, луч a вполне определяется. Будем поэтому эти числа называть обыкновенными координатами луча a.

Положим теперь, что ψ_1 и φ_1 — функции от φ_0 и ψ_0. Является вопрос, каковы должны быть эти функции для того, чтобы определяемая формулой (42′) конгруэнция была изотропной?

Обозначая через p параметр ds, получим из (42′), беря параметры обеих частей:

$$p=\frac{\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_0}+\frac{1}{2}P\cdot(d\psi^2+d\varphi^2). \tag{b}$$

Но

$$\psi=\psi_0+\omega\psi_1;\quad \varphi=\varphi_0+\omega\varphi_1,$$

поэтому после небольших переделок

$$d\psi^2+d\varphi^2=(d\psi_0^2+d\varphi_0^2)\left(1+2\omega\frac{d\psi_0 d\psi_1+d\varphi_0 d\varphi_1}{d\psi_0^2+d\varphi_0^2}\right).$$

Следовательно,

$$P\cdot(d\psi^2+d\varphi^2)=2\frac{d\psi_0 d\psi_1+d\varphi_0 d\varphi_1}{d\psi_0^2+d\varphi_0^2}.$$

Поэтому формуле (b) можно дать вид:

$$p=\frac{\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_0}+\frac{d\psi_0 d\psi_1+d\varphi_0 d\varphi_1}{d\psi_0^2+d\varphi_0^2}. \tag{c}$$

Так как у изотропной конгруэнции параметр p зависит лишь от положения луча a, то функции φ_1 и ψ_1 от переменных φ_0 и ψ_0 следует выбрать так, чтобы дробь

$$\frac{d\psi_0 d\psi_1 + d\varphi_0 d\varphi_1}{d\psi_0^2 + d\varphi_0^2}$$

не зависела от отношения $\frac{d\varphi_0}{d\psi_0}$. Но

$$d\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_0} d\psi_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi_0} d\varphi_0, \quad d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} d\psi_0 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} d\varphi_0.$$

Следовательно, не зависеть от отношения $\frac{d\varphi_0}{d\psi_0}$ должна дробь

$$\frac{d\psi_0^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_0} + d\psi_0 d\varphi_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} d\varphi_0^2}{d\psi_0^2 + d\varphi_0^2}.$$

Отсюда для функций ψ_1 и φ_1 вытекают следующие условия:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0}.$$

Но это условия Cauchy-Riemann'а, в силу которых функция

$$t = \psi_1 + i\varphi_1$$

должна быть аналитической функцией от числа

$$t_0 = \psi_0 + i\varphi_0.$$

Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Если у луча конгруэнции одна обыкновенная координата t_1 — аналитическая функция другой t_0, то конгруэнция изотропная, и обратно; если конгруэнция изотропная, то из обыкновенных координат ее луча одна — аналитическая функция от другой.*

Таким образом обнаружена замечательная связь между изотропной конгруэнцией и теорией аналитических функций. Замечу в заключение, что аналогичная теорема была предложена I. Grünwald'ом относительно введенных им новых координат прямой, R и S, связанных с ее прямоугольными координатами следующим образом:

$$x = \frac{2R}{1 + R^2 + S^2}, \quad y = \frac{2S}{1 + R^2 + S^2}, \quad z = \frac{1 - (R^2 + S^2)}{1 + R^2 + S^2}.$$

Теорема Grünwald'а гласит: Если

$$R + iS = T,$$
$$R = r + \omega \bar{r}, \quad S = s + \omega \bar{s}$$
$$t = r + is, \quad \bar{t} = \bar{r} + i\bar{s},$$

то изотропная конгруэнция характеризуется аналитической зависимостью между числами t и $\bar{t}$.

Доказательство этой теоремы читатель найдет у W. Blaschke (l. c. S. 292—294).

Глава III.

КОНГРУЭНЦИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И КЛАССА.

§ 8. Введение.

1. В этой главе для иллюстрации общей теории рассмотрим конгруэнцию 1-й степени и 1-го порядка, по которой пересекаются все линейные комплексы общей группы 1-го порядка.

Группа эта, как известно, вполне определяется двумя комплексами (a_1) и (a_2), произвольно выбранными среди остальных комплексов группы. Если оси комплексов (a_1) и (a_2) параллельны между собой, то оси остальных комплексов тоже параллельны и лежат в одной плоскости с осями первых двух комплексов. Если же оси последних не параллельны одна другой, то оси всех комплексов группы образуют цилиндроид. Свойства конгруэнции в обоих случаях различны. Мы ограничимся изучением второго случая, как более общего. В этом случае среди комплексов группы всегда есть два, называемых **главными**, оси которых пересекаются под прямым углом. Эти оси примем за оси x, y координат. Если p_1 и p_2 — соответственно параметры главных комплексов, то уравнения конгруэнции, по которой пересекаются все комплексы группы, будут иметь вид:

$$x = x_0 e^{-\omega p_1}, \quad y = y_0 e^{-\omega p_2}, \quad z = z_0 e^{-\omega p_3}; \sum x^2 = 1. \tag{1}$$

Из этих уравнений следует:

$$\sum x_0^2 = 1; \quad p_1 x_0^2 + p_2 y_0^2 + p_3 z_0^2 = 0. \tag{2}$$

Числа x_0, y_0, z_0 — направляющие косинусы луча a конгруэнции. Так как они связаны лишь первым из уравнений (2), то два из них остаются в пределах от -1 до $+1$. Второе из ур-ний (2) служит для определения числа p_3.

Рассмотрим сначала частные случаи:

$$p_1 = p_2 = 0 \tag{a}$$

$$p_1 = p_2 = p \tag{b}$$

$$p_1 \neq 0;\ p_2 = 0 \quad \text{или} \quad p_1 = 0,\ p_2 \neq 0. \tag{c}$$

§ 9. Параметры p_1 и p_2 равны нулю.

2. В этом случае уравнения конгруэнции будут

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0, \tag{3}$$

так как по второму из (2)

$$p_3 = 0.$$

Ур-ния (3) показывают в виду вещественности чисел x_0, y_0, z_0, что конгруэнция представляет связку прямых с центром в начале координат.

§ 10. Параметры p_1 и p_2 имеют общее значение p.

3. В этом случае любой луч конгруэнции определяется уравнениями

$$x = x_0 e^{-\omega p_1}, \quad y = y_0 e^{-\omega p_2}, \quad z = z_0 e^{-\omega p_3}, \tag{4}$$

где, согласно второму из ур-ний (2), p_3 определяется из уравнения:

$$p_3 z_0^2 + p\,(x_0^2 + y_0^2) = 0. \tag{5}$$

Через начало O координат проведем прямую OL параллельно лучу $a(x, y, z)$ конгруэнции. Пусть θ — угол между прямой OL и осью z, φ — угол, образуемый с осью x плоскостью угла θ. Тогда

$$x_0 = \sin\theta\cos\varphi; \quad y_0 = \sin\theta\sin\varphi; \quad z_0 = \cos\theta,$$

поэтому в силу формулы (5)

$$p_3 = p\,\mathrm{tg}^2\,\theta.$$

Следовательно, для луча $a(\theta, \varphi)$ конгруэнции получим:

$$x = e^{-\omega p}\sin\theta\cos\varphi, \quad y = e^{-\omega p}\sin\theta\sin\varphi, \quad z = e^{\omega p\,\mathrm{tg}^2\theta}\cos\theta. \tag{6}$$

4. Проведем через начало координат прямую OM перпендикулярно к плоскости угла θ.

Координаты x', y', z' прямой OM будут, очевидно:

$$x' = -\sin\varphi, \quad y' = \cos\varphi, \quad z' = 0.$$

Отсюда и из (6) выводим:

$$\sum xx' = 0,$$

т. е. прямая OM встречает луч a под прямым углом. Но линия OM лежит в плоскости xy, поэтому доказана теорема:

Теорема. *Ортогональные проекции начала координат на лучи конгруэнции лежат в плоскости xy.*

Пусть A — точка встречи прямой OM с лучом $a(\theta, \varphi)$ и

$$OA = r.$$

Согласно сказанному, r — длина кратчайшего расстояния оси z и луча a. Поэтому

$$z = \cos(\theta + r\omega) = \cos\theta\, e^{-\omega r\,\mathrm{tg}\,\theta}.$$

Сравнение этого выражения z с (6) дает:

$$r = -p\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{7}$$

Следовательно, при постоянном θ точки A описывают окружность (A) с центром в начале координат в плоскости xy. Так как лучи конгруэнции, проходящие чрез точки этой окружности, перпендикулярны к ее радиусам и образуют с осью z один и тот же угол θ, то геометрическим местом этих лучей будет однополый гиперболоид вращения вокруг оси z. Окружность (A), очевидно, его стрикционная линия.

Заметим, что при $\theta=0$ гиперболоид обратится в ось z, а при $\theta=\frac{\pi}{2}$ — в бесконечно удаленную прямую плоскости xy.

Доказана таким образом теорема:

Теорема. *Лучи конгруэнции распределяются по однополым гиперболоидам вращения вокруг оси z, причем стрикционные линии этих поверхностей (θ) образуют на плоскости xy систему окружностей с общим центром в начале координат.*

5. Рассмотрим теперь поверхность конгруэнции: $\varphi=\text{const}$. Образующие этой поверхности встречают под прямым углом одну и ту же прямую OM, которая, следовательно, служит стрикционной линией для поверхности (φ).

Через произвольную точку B оси z на расстоянии b от начала проведем прямую bN, перпендикулярную к оси z и наклоненную к оси x под углом φ''. Координаты x'', y'', z'' прямой в N будут:

$$x''=\cos(\varphi''+\omega b);\quad y''=\sin(\varphi''+\omega b);\quad z=0.$$

Поэтому формулы (6) дадут:

$$\sum xx''=e^{-\omega p}\sin\theta\cos[\varphi''-\varphi+\omega b].$$

Но

$$\cos(\varphi''-\varphi+\omega b)=\cos(\varphi''-\varphi)-\omega b\sin(\varphi''-\varphi)=$$
$$=\cos(\varphi''-\varphi)e^{-\omega b\,\mathrm{tg}(\varphi''-\varphi)}.$$

Поэтому только что выведенной формуле можно дать вид:

$$\sum xx''=e^{-\omega[p+b\,\mathrm{tg}(\varphi''-\varphi)]}\sin\theta\cos(\varphi''-\varphi).$$

Формула эта показывает, что, если

$$\mathrm{tg}(\varphi''-\varphi)=-\frac{p}{b},\tag{8}$$

то прямая BN пересечет луч a (θ, φ), образуя с ним угол ψ, для которого

$$\cos\psi=\sin\theta\cos(\varphi''-\varphi).\tag{9}$$

В условие (8) угол θ не входит, следовательно прямая bN, удовлетворяющая этому условию, пересекает все образующие a поверхности (φ).

Доказана таким образом теорема:

Теорема. *Поверхность (φ) — гиперболический параболоид, у которого одна система образующих состоит из лучей a конгруэнции, а другой служат прямые BN, перпендикулярные к оси z и удовлетворяющие условию (8).*

Теорема. *Все поверхности (φ) конгруэнтны между собой и каждая содержит ось z. Вращая одну из них вокруг оси z, получим всю конгруэнцию.*

6. **Теорема.** *Поверхности*

$$\theta = \text{const}; \quad \varphi = \text{const}$$

— поверхности кривизны конгруэнции.

В самом деле, пусть a — общая образующая поверхностей: $\theta = \theta_1$, $\varphi = \varphi_1$, A — точка ее встречи с плоскостью xy. Стрикционной линией для поверхности (θ) будет, как мы видели, окружность, описанная из начала координат, как центра, радиусом OA, а для поверхности (φ_1) стрикционной линией служит радиус OA окружности (A). Поэтому A — общая точка стрикционных линий. Далее радиус OA — нормаль к гиперболоиду в точке A и лежит на параболоиде (φ_1); поэтому OA — перпендикулярна к нормали в A к параболоиду. Итак, стрикционные линии поверхностей (θ_1) и (φ_1) встречаются в точке A, причем нормали в этой точке к (θ_1) и (φ_1) взаимно перпендикулярны.

Следствие. *Точка A — средняя точка луча, но A — точка плоскости xy, следовательно средней поверхностью конгруэнции служит плоскость xy.*

7. Вычислим теперь элемент ds^2 конгруэнции, причем воспользуемся формулой

$$z^2 ds^2 = dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2,$$

выведенной в гл. I [§ 1, п. 4, ур-ние (11)]. Из формул (6) выводим:

$$dx^2 + dy^2 = e^{-2p\omega}(\cos^2\theta\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$
$$xdy - ydx = e^{-2p\omega}\sin^2\theta\, d\varphi.$$

Поэтому

$$z^2 ds^2 e^{2p\omega} = \cos^2\theta\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 (1 - \sin^2\theta\, e^{-2p\omega}),$$

или на основании тождества

$$1 - \sin^2\theta\, e^{-2p\omega} = \cos^2\theta + \sin^2\theta\, 2p\omega = \cos^2\theta\, e^{2p\omega\, \mathrm{tg}^2\theta}$$

$$\frac{z^2 e^{2p\omega}}{\cos^2\theta} ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, e^{2p\omega\, \mathrm{tg}^2\theta} d\varphi^2. \tag{a}$$

Подставляя сюда значение (6) числа z, получим:

$$ds^2 = E d\theta^2 + G d\varphi^2, \tag{10}$$

где

$$E = e^{\frac{-2p\omega'}{\cos^2\theta}}; \qquad G = \sin^2\theta\, e^{-2p\omega}. \tag{11}$$

Первая из этих формул снова доказывает, что поверхности (θ) и (φ) — поверхности кривизны конгруэнции, так как в выражении ds^2 отсутствует член $2F du dv$.

8. Главные параметры p_1 и p_2 вычислим по общим формулам (гл. II, § 5, п. 2):

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{G_0}; \quad p_2 = \frac{1}{2}\frac{E_1}{E_0},$$

которые дадут на основании (11):

$$p_1 = -p; \quad p_2 = -\frac{p}{\cos^2\theta}. \tag{12}$$

Из этих формул выводим прежде всего, что среди вещественных поверхностей конгруэнции нет развертывающихся, так как главные параметры имеют одинаковые знаки.

9. Пусть далее A_1 и A_2 — предельные точки луча $a(\theta, \varphi)$. Полагая:

$$A_1A = AA_2 = \delta,$$

найдем по общей теории (гл. I, § 2, п. 13)

$$2\delta = p_2 - p_1 = p\,\mathrm{tg}^2\theta \tag{13}$$

на основании (12). Точки A_1 и A_2 описывают обе полости L_1 и L_2 предельной поверхности L конгруэнции, отделенные одна от другой плоскостью xy. Так как длина δ обращается в нуль лишь при $\theta = 0$, когда луч a совпадает с осью z, то начало O координат — единственная общая точка обеих полостей L_1, L_2. Легко убедиться в том, что эти полости в точке O касаются плоскости xy. В самом деле, так как по предыдущему

$$\angle OAA_1 = \angle OAA_2 = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\mathrm{tg}\,AOA_1 = \mathrm{tg}\,AOA_2 = \frac{\delta}{r} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$$

на основании значений (7) и (13) чисел r и δ. Отсюда заключаем, что при $\theta = 0$ углы $\angle AOA_1$ и $\angle AOA_2$ тоже равны нулю каждый.

Далее заметим, что отрезок A_1A_2 луча $a(\theta, \varphi)$ сохраняет свою длину 2δ и наклон θ к оси z вдоль гиперболоида (θ), оставаясь перпендикулярным к радиусам OA окружности (A) плоскости xy. Отсюда, очевидно, следует, что на поверхности (θ) точки A_1 и A_2 описывают окружности равных радиусов с центрами на оси z, плоскости которых параллельны плоскости xy. Но A_1 и A_2 — точки полостей L_1 и L_2 предельной поверхности L. Доказана следовательно теорема:

Теорема. *Предельная поверхность L конгруэнции пересекает каждый гиперболоид (θ) по равным окружностям с центрами на оси z, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости xy, на одинаковом от нее расстоянии. Поверхность L поэтому — поверхность вращения вокруг оси z.*

Из формул (7) и (13) выводим, кроме того:

$$r^2 = 2p\delta, \tag{14}$$

что дает возможность построить предельные точки данного луча a конгруэнции элементарным геометрическим построением.

10. Определим в заключение главные поверхности рассматриваемой конгруэнции.

Дифференциальное уравнение их (гл. II, § 1, п. 2) будет теперь:

$$d\theta^2 - \sin^2\theta\, d\varphi^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pm\, d\varphi.$$

Интегрированием получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\alpha-\varphi}; \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\beta+\varphi} \quad (\alpha,\ \beta \text{ — произвольные постоянные}). \tag{15}$$

Эти уравнения показывают, что все поверхности (α) можно получить из одной (α_0), вращая ее вокруг оси z. То же справедливо и для поверхности (β).

Возьмем в плоскости xy точку A с полярными координатами r, ψ. Через A проходит лишь один луч a (θ, φ) конгруэнции, который нетрудно построить. Для этого заметим, что, по предыдущему, между r, ψ, с одной стороны, и θ, φ, с другой, имеются соотношения:

$$r = -p \operatorname{tg}\theta; \quad \psi = \varphi + \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Далее заметим, что луч a перпендикулярен к OA. Построим плоскость, перпендикулярную в A к OA и в этой плоскости под углом θ к оси z проведем две прямых. Лучом a конгруэнции будет служить та из них, для которой правая часть первой из формул (16) будет положительным числом. Через построенный таким образом луч a проходят две главные поверхности конгруэнции (α) и (β), причем соответствующие им значения постоянных α и β найдем из (15), подставив в них значения θ и φ, соответствующие точке A. Стрикционная линия поверхности (α) встречает луч a в его предельной точке A_1; стрикционная же линия поверхности (β) встретит луч a в его второй предельной точке A_2.

Когда луч a описывает поверхность $\alpha = \text{const}$, то точка A в плоскости xy опишет свою линию (A_α). Точно также точка A опишет в плоскости xy линию (A_β), когда луч a опишет поверхность $\beta = \text{const}$.

Обратимся к формулам (15). Они показывают, что, если α и β даны, то для θ, равного нулю, из первой следует:

$$\varphi = +\infty,$$

а из второй

$$\varphi = -\infty.$$

Но если $\theta = 0$, то луч a совпадает с осью z. Следовательно, ось z — общая асимптотическая образующая всех главных поверхностей конгруэнции.

Далее, подставив в первое из (15): $\varphi = \alpha$, а во второе $\varphi = -\beta$, получим:

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Но соответствующий луч a конгруэнции есть бесконечно удаленная прямая плоскости xy. Итак, бесконечно удаленная прямая плоскости xy есть также общая образующая главных поверхностей конгруэнции.

1. Обратимся теперь к проходящим через произвольную точку A плоскости xy кривым (A_α) и (A_β), по которым главные поверхности (α) и (β), соответствующие точке A, пересекаются с плоскостью xy.

Через A проведем касательные At и At' к кривым (A_α) и (A_β) и обозначим через U и U' углы, под которыми эти прямые наклонены к радиусу r точки A. Для U и U' имеем общую формулу:

$$\operatorname{tg} U = r\frac{d\psi}{dr}$$

или на основании второй из формул (16)

$$\operatorname{tg} U = r\frac{d\varphi}{dr}. \tag{17}$$

Формулы:

$$r = -p \operatorname{tg}\theta; \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\alpha-\varphi}$$

дают:

$$dr = -p\frac{d\theta}{\cos^2\theta}; \tag{a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = -e^{\alpha-\varphi}\,d\varphi = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\varphi, \tag{b}$$

поэтому формулу (b) можно записать

$$d\theta = -d\varphi\sin\theta. \tag{c}$$

Подставляя значения (a) и (c) элементов dr и $d\theta$, получим:

$$\operatorname{tg} U = -\cos\theta. \tag{18}$$

Обратимся теперь к линии (A_β). Формулы:

$$r = -p\operatorname{tg}\theta; \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\beta+\varphi},$$

имеющие теперь место, дадут:

$$dr = -p\frac{d\theta}{\cos^2\theta}; \quad \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = e^{\beta+\varphi}\,d\varphi = d\varphi\sin\theta,$$

откуда по формуле (17) для кривой (A_β) получим:

$$\operatorname{tg} U' = \cos\theta. \tag{19}$$

Формулами (18) и (19) доказывается теорема:

Теорема. *Касательные к линиям (A_α) и (A_β) в общей их точке A одинаково наклонены к радиусу OA точки A.*

Заметим далее, что в силу вышесказанного начало O координат — общая точка обеих систем кривых (A_α) и (A_β). Беря точку A в начале координат и подставляя, следовательно, в формулы (18) и (19), вместо θ, нуль, получаем:

$$\operatorname{tg} U = -1, \quad \operatorname{tg} U' = +1,$$

чем доказывается теорема:

Теорема. *У всех кривых (A_α) — в начале O координат — общая касательная OT_α; точно также у всех кривых (A_β) — общая касательная OT_β в начале координат. Прямые OT_α и OT_β — биссектрисы углов между осями x и y координат.*

§ 11. Один из параметров p_1 равен нулю.

12. Рассмотрим здесь случай, когда

$$p_1 = 0; \quad p_2 = p,$$

т. е., когда один из главных комплексов — специальный.

Координаты любого луча a конгруэнции будут теперь:

$$x = x_0; \quad y = y_0 e^{-\omega p}; \quad z = z_0 e^{\omega p_3},$$

причем

$$\sum x_0^2 = 1; \quad p_3 z_0^2 = p y_0^2.$$

Все лучи конгруэнции пересекают ось x.

Обозначим через θ — угол, образуемый с осью x каким-нибудь лучом, через φ — угол, образуемый плоскостью угла θ с осью z. Тогда

$$x_0 = \cos\theta; \quad y_0 = \sin\theta \sin\varphi; \quad z_0 = \sin\theta\cos\varphi,$$

а координаты луча a будут:

$$x = \cos\theta; \quad y = \sin\theta\sin\varphi\, e^{-\omega p}; \quad z = \sin\theta\cos\varphi\, e^{\omega p \operatorname{tg}^2\varphi} \tag{20}$$

13. Исследуем поверхности конгруэнции

$$\theta = \mathrm{const}; \quad \varphi = \mathrm{const}.$$

Через точку M $(a, 0, 0)$ оси x проведем перпендикулярно к этой оси прямую ML под углом ε к оси z. Координаты x', y', z' прямой ML будут:

$$x' = 0, \quad y' = \sin(\varepsilon + \omega a), \quad z' = \cos(\varepsilon + \omega a),$$

или иначе

$$x' = 0, \quad y' = \sin\varepsilon\, e^{\omega a \operatorname{ctg}\varepsilon}, \quad z' = \cos\varepsilon\, e^{-\omega a \operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Отсюда и из (20) после элементарных преобразований выводим:

$$\sum x x' = \sin\theta\,[\cos(\varepsilon - \varphi) + \omega \sin(\varepsilon - \varphi)(p \operatorname{tg}\varphi - a)].$$

Эта формула показывает, что если одновременно

$$\varepsilon-\varphi=\frac{\pi}{2};\quad a=p\operatorname{tg}\varphi, \tag{21}$$

то прямая ML встречает луч a $(\theta,\ \varphi)$ конгруэнции под прямым углом в точке M. Заметим прежде всего, что через каждую точку M проходит лишь одна прямая ML, обладающая этим свойством. В самом деле, из (21) получаем, исключая φ:

$$\operatorname{tg}\varepsilon=-\frac{p}{a}, \tag{22}$$

что вполне определяет прямую ε. Так как в последнюю формулу угол θ не входит, то получаем теорему:

Теорема. *Лучи a конгруэнции, проходящие через произвольную точку M оси x, образуют плоский пучок с центром в точке M.* Плоскость пучка перпендикулярна к прямой ML, определяемой формулой (22).

Так как по (21)

$$\varphi=\varepsilon-\frac{\pi}{2},$$

то при постоянном ε, φ будет постоянно.

Следствие 1. *Поверхность*

$$\varphi=\text{const}$$

есть плоскость, перпендикулярная в точке M к соответствующей прямой ML.

Заметим, что при

$$\varepsilon=\frac{\pi}{2},$$

точка M совпадает с началом координат, а плоскость пучка лучей совпадает с плоскостью xz. Если же точка M — бесконечно удаленная точка оси x, то плоскость пучка совпадает с плоскостью xy, т. е.

Следствие 2. *Лучи конгруэнции, параллельные оси x, лежат в плоскости xy. Ось x, входящая в состав этого пучка, — тоже луч конгруэнции, отвечающий нулевому значению угла* θ.

Из (22) прямо следует:

Прямые ML, соответствующие различным точкам оси x, служат образующим одной системы гиперболического параболоида (L). Ось y — одна из этих образующих. Образующие другой системы перпендикулярны к оси y.

14. Повернем параболоид (L) вокруг оси x на прямой угол. Образующая его ML займет после этого поворота положение ML' в плоскости пучка лучей конгруэнции, определяемого точкой M. Прямая ML', поэтому — луч конгруэнции, перпендикулярный к оси x. Так как это применимо ко всем образующим ML' полученного параболоида (L'), то доказана:

Теорема. *Поверхность* $\theta=\frac{\pi}{2}$ *конгруэнции — параболоид* (L'); *одна система его образующих, состоящая из лучей конгруэнции, встречает под прямым углом ось* x, *другая — ось* z.

Теперь нетрудно уже построить любую поверхность

$$\theta=\text{const}.$$

Для этого достаточно деформировать параболоид $L'\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$, наклонив каждую из его образующих ML' на угол $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ в плоскости (x, ML').

Отсюда следует, что о с ь x — п о в е р х н о с т ь ($\theta=0$) к о н г р у э н ц и и.

Заметим, кроме того, что ось x одинаково наклонена ко всем лучам поверхности $\theta=\text{const}$.

Доказана, следовательно, теорема:

Теорема. *Ось* x *— общая стрикционная линия всех поверхностей*: $\theta=\text{const}$.

15. **Теорема.** *Поверхности*

$$\theta=\text{const},\quad \varphi=\text{const}.$$

— поверхности кривизны конгруэнции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a (θ, φ) — луч конгруэнции, встречающий ось x в точке M под углом θ, ML — перпендикуляр в M к плоскости угла θ. На основании только-что сказанного прямая ML — ц е н т р а л ь н а я н о р м а л ь в M к поверхности $\theta=\text{const}$. Но бесконечно близкий к a луч a' поверхности $\varphi=\text{const}$. встречается в M с a и тоже перпендикулярен к прямой ML. Прямая ML поэтому для поверхности φ служит ц е н т р а л ь н о й к а с а т е л ь н о й, что доказывает теорему.

Следствие. *Средняя поверхность конгруэнции вырождается в ось* x.

16. Вычислим элемент ds конгруэнции по формуле

$$z^2ds^2=dx^2+dy^2-(xdy-ydx)^2.$$

Из (20) следует:

$$dx=-\sin\theta\,d\theta,\quad dy=e^{-\omega p}(\cos\theta\sin\varphi\,d\theta+\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi),$$

поэтому

$$xdy-ydx=e^{-p\omega}(\sin\varphi\,d\theta+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,d\varphi).$$

Отсюда выводим:

$$dy+(xdy-ydx)=e^{-p\omega}(1+\cos\theta)(\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi+\sin\varphi\,d\theta),$$
$$dy-(xdy-ydx)=e^{-p\omega}(1-\cos\theta)(\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi-\sin\varphi\,d\theta).$$

Следовательно,

$$dy^2-(xdy-ydx)^2=e^{-2p\omega}\sin^2\theta\,(\sin^2\theta\cos^2\varphi\,d\varphi^2-\sin^2\varphi\,d\theta^2).$$

Поэтому

$$z^2ds^2=\sin^2\theta\left\{d\theta^2(1-\sin^2\varphi\,e^{-2p\omega})+d\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\,e^{-2p\omega}\right\}$$

Отсюда на основании последней формулы (20) и тождества

$$1-\sin^2\varphi\, e^{-2p\omega}=\cos^2\varphi\, e^{2p\omega \operatorname{tg}^2\varphi}$$

получим окончательно:

$$ds^2=Ed\theta^2+Gd\varphi^2, \tag{23}$$

где

$$E=1;\quad G=\sin^2\theta\, e^{\frac{2p\omega}{\cos^2\varphi}}. \tag{24}$$

Первая из этих формул снова доказывает, что поверхности $\theta=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ — поверхности кривизны конгруэнции.

Из (24) выводим:

$$p_\theta=\frac{p}{\cos^2\varphi};\quad p_\varphi=0. \tag{25}$$

Вторая из этих формул очевидна, так как поверхность $y=\text{const}$ — развертывающаяся, первая же доказывает теорему:

Теорема. *Обладающие одним и тем же параметром лучи a различных поверхностей* (θ) *образуют поверхность* (φ), *т. е. плоский пучок:*

Примечание. Центр M этого пучка и его плоскость определим по формулам (21), если предварительно вычислим угол φ из (25).

17. Предельные точки A_1, A_2 луча a отстоят от его средней точки M на расстоянии

$$\delta=\frac{1}{2}p_\theta=\frac{1}{2}\,\frac{p}{\cos^2\varphi}. \tag{26}$$

Но через точку M проходят все лучи пучка $\varphi=\text{const}$. Поэтому предельные точки всех этих лучей лежат на окружности, центр которой в M, а радиус равен δ.

Доказана таким образом теорема:

Теорема. *Предельная поверхность конгруэнции пересекается плоскостью, проходящей через ось x, по окружности, центр которой на оси x.*

18. Уравнение главных поверхностей конгруэнции будет теперь

$$d\theta^2-\sin^2\theta\, d\varphi^2=0,$$

откуда интегрированием получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=e^{\alpha-\varphi},\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=e^{\beta+\varphi}\ (\alpha \text{ и } \beta \text{ — произвольные постоянные}). \tag{27}$$

Мы получили таким образом две системы (α) и (β) главных поверхностей конгруэнции. Эти формулы показывают, что, вращая вокруг оси x одну из поверхностей: $\alpha=\text{const}$, получим все поверхности (α). То же верно и для поверхностей (β): все они могут быть получены вращением одной из них вокруг оси x.

Далее нетрудно доказать, что ось x — асимптотическая образующая всех главных поверхностей.

§ 12. Общий случай.

19. Напомним предварительно некоторые, хорошо и давно известные свойства конгруэнции в общем случае, когда главные параметры p_1 и p_2 имеют какие-угодно значения.

Оси комплексов группы, которые пересекаются по изучаемой конгруэнции, образуют цилиндроид. Среди комплексов группы есть два специальных с нулевыми параметрами. Пусть L_1 и L_2 — их оси. Луч a конгруэнции пересекает каждую из этих прямых в точках A_1 и A_2. Лучи a', a'',... конгруэнции, проходящие через A_1, опираются на прямую L_2 и поэтому образуют плоский пучок. То же справедливо для лучей, проходящих через A_2: опираясь на L_1, они также образуют плоский пучок. Отсюда прямо следует, что A_1 и A_2 — фокусы луча a. Середина A отрезка A_1A_2 будет поэтому средней точкой луча a. Но прямые L_1 и L_2 лежат, как известно, с обеих сторон плоскости, содержащей оси главных комплексов группы, на одинаковом от нее расстоянии. Следовательно, точка A лежит в этой плоскости. Примем последнюю за плоскость xy, а за ось z — ось цилиндроида, причем оси x, y координат направим по осям главных комплексов группы.

Предыдущим доказаны следующие теоремы:

Теорема. *Фокальная поверхность конгруэнции вырождается в прямые L_1 и L_2.*

Теорема. *Средней поверхностью конгруэнции служит плоскость xy, содержащая оси главных комплексов группы.*

Примечание. Прямые L_1 и L_2 мнимы, если знаки главных параметров p_1 и p_2 одинаковы. Мнимы в этом случае и фокусы луча a конгруэнции, но середина A фокального отрезка всегда реальная точка.

20. Координаты любого луча конгруэнции будут теперь:

$$x = x_0 e^{-p_1\omega};\quad y = y_0 e^{-p_2\omega};\quad z = z_0 e^{-p_3\omega}, \tag{28}$$

причем

$$\sum x_0^2 = 1,\quad p_3 z_0^2 = p_1 x_0^2 + p_2 y_0^2. \tag{29}$$

Значение ds вычислим по формуле:

$$z^2 ds^2 = dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2$$

и получим после простых переделок:

$$ds^2 = E dx_0^2 + 2F dx_0 dy_0 + G dy_0^2, \tag{30}$$

где

$$E = \frac{1-y^2}{z^2} e^{-2p_1\omega},\quad F = \frac{xy}{z^2} e^{-\omega(p_1+p_2)},\quad G = \frac{1-x^2}{z^2} e^{-2p_2\omega}, \tag{31}$$

$$H^2 = EG - F^2 = \frac{e^{-2\omega(p_1+p_2)}}{z^4}. \tag{32}$$

Обозначим через $P \cdot K$ параметр комплексного числа K. Заметим формулы:

$$P\cdot(1-x^2) = \frac{2p_1 x_0^2}{1-x_0^2};\ P\cdot(1-y^2) = \frac{2p_2 y_0^2}{1-y_0^2}, \tag{a}$$

которые нам сейчас понадобятся.

21. Дифференциальное уравнение поверхностей кривизны конгруэнции

$$(E_0F_1-F_0E_1)\,dx_0^2+(E_0G_1-G_0E_1)\,dx_0dy_0+(F_0G_1-G_0F_1)\,dy_0^2=0$$

[гл. I, § 2, п. 10, ур-ние (32)] можно, пользуясь тождеством

$$P\cdot\left(\frac{b}{a}\right)=Pb-Pa,$$

представить в следующем виде:

$$dx_0^2E_0F_0P\cdot\left(\frac{F}{E}\right)+dx_0dy_0E_0G_0P\cdot\left(\frac{G}{E}\right)+dy_0^2F_0G_0P\cdot\left(\frac{G}{F}\right)=0. \quad \text{(b)}$$

Но из (31) следует:

$$\frac{F}{E}=\frac{xy}{1-y^2}e^{\omega(p_1-p_2)},\quad \frac{G}{E}=\frac{1-x^2}{1-y^2}e^{2\omega(p_1-p_2)},\quad \frac{G}{F}=\frac{1-x^2}{xy}e^{\omega(p_1-p_2)}.$$

Отсюда и из формулы (а) выводим на основании (28):

$$P\cdot\left(\frac{F}{E}\right)=-\frac{2p_2}{1-y_0^2},\; P\cdot\left(\frac{G}{E}\right)=\frac{2p_1}{1-x_0^2}-\frac{2p_2}{1-y_0^2},$$

$$P\cdot\left(\frac{G}{F}\right)=\frac{2p_1}{1-x_0^2}. \quad \text{(c)}$$

Далее из (31) следует:

$$E_0=\frac{1-y_0^2}{z_0^2};\quad F_0=\frac{x_0y_0}{z_0^2};\quad G_0=\frac{1-x_0^2}{z_0^2}.$$

Пользуясь формулами (с) и (d), мы представим дифференциальное ур-ние (b) в виде:

$$(p_1y_0dy_0+p_2x_0dx_0)(y_0dx_0-x_0dy_0)=(p_1-p_2)\,dx_0dy_0. \quad (33)$$

Общим интегралом этого уравнения будет, как известно,

$$\frac{p_2x_0^2}{\alpha-1}+\frac{p_1y_0^2}{\alpha+1}=\frac{p_1-p_2}{2} \quad (34)$$

(α — произвольная постоянная) (C. Jordan, Cours d'analyse, T. III, p. 40, éd. II). Замечая, что

$$\sum x_0^2=1,$$

можно написать:

$$\frac{p_1-p_2}{2}=\frac{p_1-p_2}{2}(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$$

и переписать (34) так:

$$\frac{x_0^2}{\alpha-1}+\frac{y_0^2}{\alpha+1}+\frac{z_0^2}{\alpha-\mu}=0;\quad \mu=\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}. \tag{34'}$$

Так как ни одно из чисел: p_1, p_2, (p_1-p_2) не равно нулю, то

$$\mu\pm1\neq0,$$

поэтому степень ур-ния (34′) относительно α не ниже 2. Пусть

$$u<v$$

— корни этого уравнения, соответствующие данным x_0, y_0, z_0. Числа u, а также v, будут параметрами тех двух поверхностей (u) и (v) кривизны конгруэнции, которые проходят через ее луч $a(x_0, y_0)$.

Для определенности примем

$$p_1>p_2.$$

Возможно, очевидно, лишь два случая:

$$p_1>p_2>0;\ \mu>1 \tag{35}$$

$$p_1>0>p_2;\ -1<\mu<1. \tag{36}$$

Легко убедиться, что в обоих случаях как u, так и v вещественны, причем

$$-1<u<1<v<\mu \tag{35'}$$

в первом случае и

$$-1<u<\mu<v<1 \tag{36'}$$

во втором.

Ур-нием (34′) доказывается теорема:

Теорема. *Коническими изображениями поверхностей кривизны конгруэнции служат однофокусные и взаимно ортогональные конусы 2-го порядка.*

22. Уравнение поверхностей кривизны в декартовых координатах найдем следующим образом.

Уравнения луча a с координатами

$$x=x_0+\omega x_1;\ y=y_0+\omega y_1;\ z=z_0+\omega z_1$$

будут

$$x_1=Yz_0-Zy_0;\ y_1=Zx_0-Xz_0;\ z_1=Xy_0-Yx_0;$$

где X, Y, Z — координаты любой точки луча a.

Но по формулам (28)

$$x_1=-p_1x_0,\quad y_1=-p_2y_0,$$

поэтому

$$Yz_0-Zy_0+p_1x_0=0;\quad Zx_0-Xz_0+p_2y_0=0,$$

откуда

$$\frac{x_0}{XZ-p_2Y}=\frac{y_0}{YZ+p_1X}=\frac{z_0}{Z^2+p_1p_2}=\lambda.$$

Внеся в (34′) значения x_0, y_0, z_0 из этих соотношений, получим по сокращении на λ:

$$\frac{(XZ-p_2Y)^2}{\alpha-1}+\frac{(YZ+p_1X)^2}{\alpha+1}+\frac{(Z^2+p_1p_2)^2}{\alpha-\mu}=0. \tag{37}$$

Заменяя здесь α сначала через u, а затем через v, найдем уравнения, соответствующие поверхностям кривизны:

$$u=\text{const},\ v=\text{const}.$$

23. Эти поверхности 4-го порядка любой плоскостью

$$Z=m$$

пересекаются по кривой 2-го порядка, уравнение которой:

$$X^2\left(\frac{m^2}{\alpha-1}+\frac{p_1^2}{\alpha+1}\right)+2XYm\left(\frac{p_1}{\alpha+1}-\frac{p_2}{\alpha-1}\right)+$$
$$+Y^2\left(\frac{m^2}{\alpha+1}+\frac{p_2^2}{\alpha-1}\right)+\frac{(m^2+p_1p_2)^2}{\alpha-\mu}=0. \tag{38}$$

Дискриминант его δ^2 определяется равенством:

$$\frac{\delta^2}{4}=m^2\left(\frac{p_1}{\alpha+1}-\frac{p_2}{\alpha-1}\right)^2-\left(\frac{m^2}{\alpha-1}+\frac{p_1^2}{\alpha+1}\right)\left(\frac{m^2}{\alpha+1}+\frac{p_2^2}{\alpha-1}\right);$$

что после элементарных преобразований правой части дает:

$$\delta^2=\frac{4(m^2+p_1p_2)^2}{1-\alpha^2}, \tag{39}$$

Правая часть выражения δ^2, как следует из неравенств (35′) и (36′), положительна при α, равном u, и отрицательна при α, равном v, в случае же (36) она положительна при общих значениях α.

Следовательно, *если у параметров p_1 и p_2 знаки одинаковы, то плоскость, параллельная плоскости xy, рассекает поверхность кривизны (u) по гиперболе, а поверхность кривизны (v) по эллипсу; если же у параметров p_1, p_2 знаки неодинаковы, то упомянутая плоскость рассекает по гиперболам как поверхности (u), так и поверхности (v).*

В частности, если

$$p_1>0>p_2,$$

то плоскости

$$Z=\pm\sqrt{-p_1p_2}$$

рассекают поверхности кривизны по фокальным прямым L_1 и L_2, уравнения которых:

$$Z=\pm\sqrt{-p_1p_2};\quad \frac{Y}{X}=\pm\sqrt{\frac{-p_1}{p_2}}. \tag{40}$$

Заметим в заключение, что центры всех сечений (38) лежат на оси z.

24. Особенно интересно сечение поверхностей кривизны плоскостью xy, так как оно, согласно второй теореме п. 19,—стрикционная линия этой поверхности. Полагая в (37) $Z=0$, получим:

$$\frac{p_1^2X^2}{\alpha+1}+\frac{p_2^2Y^2}{\alpha-1}+\frac{p_1^2p_2^2}{\alpha-\mu}=0. \tag{41}$$

Это — кривые второго порядка с общим центром и общим направлением осей.

Если фокальные прямые L_1 и L_2 реальны, то простое построение дает любую поверхность кривизны. Для этого достаточно провести через произвольную точку A линии (41) прямую a так, чтобы она пересекала обе прямые L_1 и L_2; прямая a — образующая соответствующей поверхности кривизны, которая, следовательно — геометрическое место прямых a, отражающихся на линию (41) и две прямых L_1 и L_2.

Через каждую точку $A(X, Y)$ плоскости xy проходят две кривые (41), для которых параметр α соответственно равен u и v. Связь между этими кривыми проще всего найти из их дифференциального уравнения.

Положим:

$$\frac{dY}{dX}=y'.$$

Ур-ние (41) дает:

$$p_1^2\frac{X}{\alpha+1}+p_2^2\frac{Yy'}{\alpha-1}=0,$$

откуда следует:

$$\frac{1-\alpha}{p_2^2Yy'}=\frac{1+\alpha}{p_1^2X}=\frac{2}{p_1^2X+p_2^2Yy'}=\frac{2\alpha}{p_1^2X-p_2^2Yy'}.$$

Следовательно

$$\alpha+1=\frac{2p_1^2X}{p_1^2X+p_2^2Yy'},\quad \alpha-1=-\frac{2p_2^2Yy'}{p_1^2X+p_2^2Yy'},$$

$$\alpha=\frac{p_1^2X-p_2^2Yy'}{p_1^2X+p_2^2Yy'}.$$

Последняя из этих формул дает:

$$\alpha-\mu=\alpha-\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}=-\frac{2p_1p_2}{(p_1-p_2)}\,\frac{(p_1X+p_2y'Y)}{(p_1^2X+p_2^2Yy')}.$$

Подставляя в (41) значения $\alpha+1$, $\alpha-1$ и $\alpha-\mu$, получим по сокращении на дробь

$$\frac{Xp_1^2+Yy'p_2^2}{Xp_1+Yy'p_2}\neq 0,$$

$$\left(X-\frac{Y}{y'}\right)(Xp_1+p_2y'Y)=p_1p_2(p_1-p_2). \tag{42}$$

Это — дифференциальное уравнение стрикционных линий поверхностей кривизны. Геометрический смысл его следующий.

Через точку A $(X, Y, 0)$ проведем касательную и нормаль к линии (u), проходящей через точку A, и пусть $M_1(0, Y_1)$ — точка встречи касательной с осью y. Так как уравнение касательной будет:

$$\frac{Y'-Y}{X'-X}=y',$$

то

$$Y_1=Y-Xy'. \tag{a}$$

На плоскости xy возьмем теперь точку $A'(X', Y')$ с координатами:

$$X'=p_1X;\ Y'=p_2Y$$

и проведем через нее параллель к нормали в A к той же линии (u). Пусть N_1 — точка встречи с осью y этой параллели, 0, Y_1' — координаты точки N_1. Так как уравнение этой параллели будет:

$$\frac{Y'-p_2Y}{X'-p_1X}=-\frac{1}{y'},$$

то

$$Y_1'=p_2Y+\frac{p_1X}{y'}. \tag{b}$$

Указанными построениями мы каждой точке $A(X, Y)$ плоскости подчиняем на оси y пару точек M_1 и N_1 при помощи касательной и нормали в A к проходящей через нее линии (u).

Но формулы (a) и (b) дают:

$$Y_1Y_1'=-\left(X-\frac{Y}{y'}\right)(p_1X+p_2y'Y),$$

т. е., в силу ур-ния (42),

$$Y_1Y_1'=-p_1p_2(p_1-p_2).$$

Заменяя Y_1 и Y_1' отрезками OM_1 и ON_1 оси y, получим окончательно:

$$OM_1\cdot ON_1=-p_1p_2(p_1-p_2). \tag{42'}$$

Таков геометрический смысл дифференциального уравнения (42) линий (u) и (v).

Мы получили, следовательно, теорему:

Теорема. *Вдоль каждой линии (u) остается постоянным произведение отрезков OM_1 и ON_1 оси y, концами которых служат точки M_1, N_1, подчиненные точкам A кривой (u). Точно также вдоль каждой линии (v) остается постоянным произведение отрезков OM_2 и ON_2 оси y, концами которых служат точки M_2 и N_2, подчиненные точкам линии (v).*

Эту теорему можно сформулировать иначе, если ввести окружность с диаметрами M_1N_1, для линии (u) и M_2N_2 для линии (v). Назовем их окружностями, подчиненными точкам линии (u) или линии (v) соответственно.

Тогда при p_2 положительном отрезки OM_1 и ON_1 будут направлены в противоположные стороны. Полагая

$$\rho^2 = p_1 p_2 (p_1 - p_2) > 0,$$

мы преобразуем (42) в следующее:

$$OM_1 \delta N_1 = -\rho^2. \qquad (a')$$

Если же p_2 отрицательно, то отрезки OM_1, ON_1 имеют общее направление. Полагая:

$$\rho'^2 = -p_1 p_2 (p_1 - p_2) > 0,$$

получим теперь, вместо (42'):

$$OM_1 \cdot ON_1 = \rho'^2.$$

Доказана, очевидно, теорема:

Теорема. *Если главный параметр p_2 положителен, то подчиненные точкам линии (u) или (v) окружности проходят через две точки оси x, P_1 и P_2, лежащие с разных сторон, начала O координат на расстоянии, равном ρ. Если же главный параметр p_2 отрицателен, то вышеупомянутые окружности пересекают под прямым углом определенную окружность, описанную из O радиусом ρ'.*

Обозначим через φ_1 и φ_2 углы, образуемые с осями координат кривыми (u) и (v), проходящими через точку A. Тангенсы этих углов будут корнями ур-ния (42). Но последнее может быть написано в виде:

$$y'^2 + y' \frac{p_1 X^2 - p_2 Y^2 - p_1 p_2 (p_1 - p_2)}{p_2 XY} - \frac{p_1}{p_2} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{p_1}{p_2}. \qquad (43)$$

Пусть f — угол, образуемый с осью x одной из фокальных прямых L_1 или L_2.

По формуле (40) (п. 23)

$$\operatorname{tg}^2 f = -\frac{p_1}{p_2}.$$

Поэтому формула (43) даст

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}^2 f. \qquad (44)$$

Очевидно, линии (u) и (v) ортогональны лишь тогда, когда p_1 и p_2 равны, т. е. в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе. Интересен также случай

$$p_1 + p_2 = 0.$$

Тогда, как показывает формула (43),

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = 1,$$

т. е. нормаль в точке A к линии (u) и касательная в той же точке к линии (v) одинаково наклонны к оси x.

В состав линий (u) или (v), как видно из (41), входят оси x, y главных комплексов и кривые второго порядка,

$$\frac{p_1^2 X^2}{\mu+1}+\frac{p_2^2 Y^2}{\mu-1}=\pm\infty.$$

Этой линии отвечают крайние значения α:

$$-1,\ 1,\ \mu.$$

Соответствующие поверхности кривизны представлены уравнениями:

$$YZ+p_1X=0;\ XZ-p_2Y=0;\ Z^2+p_1p_2=0.$$

Первые две поверхности — гиперболические параболоиды, третья состоит из двух плоскостей, проведенных через фокальные прямые L_1 и L_2 параллельно плоскости xy. Лучи конгруэнции, образующие первые две поверхности, встречают под прямым углом оси — y и x соответственно; лучи же, образующие третью поверхность, представляют пучок параллелей к L_1, проведенных через точки прямой L_2, и пучок параллелей к L_2, проведенных через точки прямой L_1.

25. Вернемся к ур-нию (34) (п. 21)

$$\frac{x_0^2}{\alpha-1}+\frac{y_0^2}{\alpha+1}+\frac{z_0^2}{\alpha-\mu}=0,$$

определяющему параметры u, v тех двух поверхностей кривизны, которые проходят через луч a (x_0, y_0, z_0) конгруэнции. Подставляя, вместо α, сначала u, а затем v, получим два уравнения:

$$\frac{x_0^2}{u-1}+\frac{y_0^2}{u+1}+\frac{z_0^2}{u-\mu}=0,\quad \frac{x_0^2}{v-1}+\frac{y_0^2}{v+1}+\frac{z_0^2}{v-\mu}=0,$$

которые вместе с уравнением

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$$

позволяют вычислить x_0, y_0, z_0 через u и v. Займемся этим вычислением.

Пусть

$$\frac{x_0^2}{\alpha-1}+\frac{y_0^2}{\alpha+1}+\frac{z_0^2}{\alpha-\mu}=\frac{f(\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-\mu)} \tag{a}$$

тождественно. Левая часть этого тождества должна обратиться в нуль при $\alpha=u$, $\alpha=v$. Поэтому $f(\alpha)=A(\alpha-u)\cdot(\alpha-v)$ (b). Умножая обе части тождества (a) на α и полагая затем

$$\alpha=\infty,$$

получим

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=A=1.$$

Следовательно

$$\frac{x_0^2}{\alpha-1}+\frac{y_0^2}{\alpha+1}+\frac{z_0^2}{\alpha-\mu}=\frac{(\alpha-u)(\alpha-v)}{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-\mu)}. \tag{a'}$$

Умножая обе части этого уравнения на $(\alpha-1)$ и полагая затем $\alpha=1$, получим первую из формул:

$$x_0^2=\frac{(1-u)(1-v)}{2(1-\mu)},\quad y_0^2=\frac{(1+u)(1+v)}{2(1+\mu)},$$
$$z_0^2=\frac{(\mu-u)(\mu-v)}{\mu^2-1}; \tag{45}$$

две других получатся из (a′) аналогичным путем.

26. Нетрудно теперь вычислить p_3 из формулы (24) (§ 5, п. 20):

$$p_3z_0^2=p_1x_0^2+p_2y_0^2. \tag{b'}$$

Замечая, что

$$p_1=\frac{(p_1-p_2)(\mu+1)}{2};\quad p_2=\frac{(p_1-p_2)(\mu-1)}{2}$$

и подставляя в (b′) значения (45) чисел x_0, y_0, z_0, получим после простых преобразований:

$$2p_1=(p_1-p_2)(\mu+1),\ 2p_2=(p_1-p_2)(\mu-1),$$
$$-2p_3=(p_1-p_2)\left\{\frac{1-\mu u}{\mu-u}+\frac{1-\mu v}{\mu-v}\right\} \tag{46}$$

где первые два переписаны для удобства ссылок.

27. Примем теперь u, v за криволинейные координаты луча a (x, y, z) конгруэнции и вычислим элемент ds^2 по формуле:

$$z^2ds^2=dx^2+dy^2-(xdy-ydx)^2,$$

которую предварительно представим в виде:

$$4z^2ds^2=\left(\frac{2dx}{x}\right)^2x^2+\left(\frac{2dy}{y}\right)^2y^2-x^2y^2\left(2\frac{dy}{y}-2\frac{dx}{x}\right)^2. \tag{c}$$

Но

$$x=x_0e^{-\omega p_1};\quad y=y_0e^{-\omega p_2};\quad z=z_0e^{-\omega p_3}. \tag{d}$$

Поэтому, логарифмируя и затем дифференцируя первые две формулы, найдем:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dx_0}{x_0};\ \frac{dy}{y}=\frac{dy_0}{y_0},$$

или на основании (45)

$$2\frac{dx}{x}=-\left(\frac{du}{1-u}+\frac{dv}{1-v}\right);\quad 2\frac{dy}{y}=\frac{du}{1+u}+\frac{dv}{1+v}.$$

Поэтому формула (c) примет вид:

$$4z^2ds^2 = x^2\left(\frac{du}{1-u}+\frac{dv}{1-v}\right)^2 + y^2\left(\frac{du}{1+u}+\frac{dv}{1+v}\right)^2 - \\ -4x^2y^2\left(\frac{du}{1-u^2}+\frac{dv}{1-v^2}\right)^2.$$

Но так как уравнения:

$$u = \text{const},\ v = \text{const}$$

— представляют поверхности кривизны конгруэнции, то ds^2 должно иметь вид:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

Сравнивая с полученным выражением ds^2, находим:

$$\left.\begin{aligned} 4Ez^2 &= \frac{x^2}{(1-u)^2}+\frac{y^2}{(1+u)^2}-\frac{4x^2y^2}{(1-u^2)^2} \\ 4Gz^2 &= \frac{x^2}{(1-v)^2}+\frac{y^2}{(1+v)^2}-\frac{4x^2y^2}{(1-v^2)^2} \end{aligned}\right\}$$

$$0 = \frac{x^2}{(1-u)(1-v)}+\frac{y^2}{(1+u)(1+v)}-\frac{4x^2y^2}{(1-u^2)(1-v^2)}.$$

Подставляя в выражения E и G значение $4x^2y^2$ из последней формулы, получим сначала:

$$4Ez^2\frac{1-u^2}{u-v} = \frac{x^2}{1-u}-\frac{y^2}{1+u},\quad 4Gz^2\frac{1-v^2}{v-u} = \frac{x^2}{1-v}-\frac{y^2}{1+v}. \tag{e}$$

Но на основании формул (45) и (d)

$$\frac{x^2}{1-u}-\frac{y^2}{1+u} = e^{-2\omega p_1}\frac{(1-v)}{2(1-\mu)} - e^{-2\omega p_2}\frac{(1+v)}{2(1+\mu)} = \\ = \frac{\mu-v}{1-\mu^2}\,e^{-\omega(p_1-p_2)\left[\mu+\frac{1-\mu v}{\mu-v}\right]} \tag{f}$$

и

$$\frac{x^2}{1-v}-\frac{y^2}{1+v} = e^{-2\omega p_1}\frac{(1-u)}{2(1-\mu)} - e^{-2\omega p_2}\frac{1+u}{2(1+\mu)} = \\ = \frac{\mu-u}{1-\mu^2}\,e^{-\omega(p_1-p_2)\left[\mu+\frac{1-\mu u}{\mu-u}\right]}, \tag{g}$$

Подставим эти значения в формулы (e). Тогда по разделении на

$$z^2 = e^{2\omega p_2}z_0^2 = \frac{(\mu-u)(\mu-v)}{\mu^2-1}\,e^{-\omega(p_1-p_2)\left\{\frac{1-\mu u}{\mu-u}+\frac{1-\mu v}{\mu-v}\right\}}$$

в силу (45) и (46) получим:

$$
\left.\begin{aligned}
4E &= \frac{v-u}{(1-u^2)(\mu-u)}\, e^{-4\omega \frac{p_1 p_2}{(p_1-p_2)(\mu-u)}}, \\
4G &= \frac{u-v}{(1-v^2)(\mu-v)}\, e^{-4\omega \frac{p_1 p_2}{(p_1-p_2)(\mu-v)}},
\end{aligned}\right\} \qquad (47)
$$

откуда для параметров p_u и p_v поверхностей кривизны (u) и (v), проходящих через луч a (u, v) конгруэнции, получим:

$$
p_u = -\frac{2p_1p_2}{(p_1-p_2)(\mu-v)}; \quad p_v = -\frac{2p_1p_2}{(p_1-p_2)(\mu-u)}. \qquad (48)
$$

На каждой поверхности (u) отберем образующую a с данным наперед параметром p_u. Прямые a, так отобранные, составят некоторую поверхность конгруэнции, у всех образующих которой параметр один и тот же. Формула (48) доказывает, что для всех образующих построенной поверхности v имеет одно и то же значение. Мы получим таким образом теорему:

Теорема. *Образующие различных поверхностей кривизны системы (u), обладающие общим параметром, лежат на определенной поверхности кривизны системы (v).*

Равным образом, на определенной поверхности кривизны системы (u) лежат те образующие различных поверхностей кривизны системы (v), которые обладают одинаковым параметром.

28. Дифференциальные уравнения главных поверхностей и развертывающихся поверхностей конгруэнции

$$
E_0 du^2 - G_0 dv^2 = 0, \quad \frac{E_0 du^2}{p_u} + \frac{G_0 dv^2}{p_v} = 0
$$

(гл. II, § 1, п. 2) будут теперь соответственно:

$$
\frac{du^2}{(1-u^2)(\mu-u)} + \frac{dv^2}{(1-v^2)(\mu-v)} = 0,
$$

$$
\frac{du^2}{(1-u^2)(\mu-u)^2} - \frac{dv^2}{(1-v^2)(\mu-v)^2} = 0.
$$

Рассмотрим оба возможных случая:

$$
p_1 > p_2 > 0; \ \mu > 1.
$$

$$
p_1 > 0 > p_2; \ -1 < \mu < 1.
$$

В первом случае имеют место неравенства:

$$
-1 < u < 1 < v < \mu,
$$

во втором:

$$
-1 < u < \mu < v < 1.
$$

Уравнения главных поверхностей будут:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(\mu-u)(1-u^2)}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{(v-\mu)(1-v^2)}} \tag{49}$$

в первом случае и

$$\int \frac{du}{\sqrt{(\mu-u)(1-u^2)}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{(v-\mu)(1-v^2)}} \tag{49'}$$

во втором. Интегралы уравнения развертывающихся поверхностей вещественны лишь во втором случае и определяются квадратурой:

$$\int \frac{du}{(\mu-u)\sqrt{1-u^2}} = \pm \int \frac{dv}{(\mu-v)\sqrt{1-v^2}}.$$

Полагая в этом уравнении:

$$\mu = \cos 2\alpha,\ u = \cos 2\varphi,\ v = \cos 2\psi,$$

без труда найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)} \cdot \frac{\sin(\psi+\alpha)}{\sin(\psi-\alpha)} &= C, \\ \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)} &= C' \frac{\sin(\psi+\alpha)}{\sin(\psi-\alpha)}, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

где C и C' — произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА.

А. Работы по комплексной геометрии прямой:

1. *А. Котельников.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895 г.

2. *Д. Зейлигер.* Основные формулы комплексной геометрии прямой. Статья I. Казань, 1897.

3. *E. Study.* Geometrie der Dynamen. Leipzig, 1903.

4. *Д. Зейлигер.* Основные формулы комплексной геометрии прямой. Статья II. Теория конгруэнций. Казань, 1908.

5. *Д. Зейлигер.* Основные формулы etc. Статья III. Казань, 1928.

6. *W. Blaschke.* Vorlesungen über Differential-Geometrie. 1 Band, Kap. 9. Berlin, 1930.

В. Основная литература по общей линейчатой геометрии:

1. *I. Pluecker.* Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement. Leipzig, 1868 — 1869.

2. *F. Klein.* Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades. 1870. Gesammelte mathematische Abhandlungen. 1 Band, S. 53 — 80, 1921 г.

3. *R. Sturm.* Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie. 3 Bände. Leipzig, 1892.

Курсы:

1. *C. M. Iessop.* A treatise on the line complex. Cambridge, 1903.

2. *K. Zindler.* Liniengeometrie. B. I und II. Leipzig, 1902 — 1906.

С. По дифференциальной линейчатой геометрии:

1. *G. Darboux.* Leçons sur la théorie générale des surfaces etc. Paris, 4 Parties, 1894 — 1925.

2. *L. Bianchi.* Lezioni di Geometria differenziale. 2 Vol., Bologna, 1927.

В классических трудах G. Darboux и L. Bianchi линейчатой геометрии уделено большое внимание.

12 Заказ 1836.—Д. Н. Зейлигер.

ОГЛАВЛЕНИЕ