

122 77655

И. Н. ВЕСЕЛОВСКИЙ и А. Е. ТИМАКОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИК
ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

122 77655

ОГТИ НКТП СССР 1938

~~ад 1103.~~
~~сб 54402~~

ДЕП
621
В-32

И. Н. ВЕСЕЛОВСКИЙ и А. Е. ТИМАКОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИК
ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

1305399

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ПОСТАВЛЕНО

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ОНТИ-НКТП

МОСКВА

1938

ЛЕНИНГРАД

Т. 30-3-2
Прор. ТРК №91

1968

15. 02. 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для изучения настоящего курса от читателей требуется лишь знакомство с элементами алгебры и геометрии (подобие, измерение длин, площадей и объемов). Знание основных тригонометрических понятий желательно, но не обязательно; определения синуса, косинуса и тангенса даны в самом курсе там, где они встречаются. Примеры составляют одно целое с курсом; желательно поэтому, чтобы читатель проделал их все, а также помещенные задачи для самостоятельного решения (конечно, при занятиях с преподавателем последний вправе дать и свои собственные примеры такого же рода). При вычислениях производилось округление до третьей значущей цифры; поэтому добиваться абсолютно точного совпадения с ответом читателю, конечно, не нужно.

Первая часть, посвященная теоретической механике, написана И. Н. Веселовским; вторая же часть (сопротивление материалов) написана первоначально А. Е. Тимаковым и переработана (главным образом в теоретической части) Т. В. Веселовской.

Обо всех неясностях, с которыми читатель встретится при чтении книги, издательство просит сообщить по адресу: Москва, Третьяковский проезд, д. № 1, секция механики. На все письма будут даны ответы и все замечания будут учтены при переиздании.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	Стр. 7
--------------------	--------

Часть первая.

Основы учения о движении и о силах (теоретическая механика)

Отдел первый. Кинематика.

Глава 1. ² Равномерное движение. Скорость	11
§ 1. Что такое движение	11
§ 2. Поступательное движение	11
§ 3. Траектория	13
§ 4. Прямолинейно-равномерное движение	14
§ 5. Заключение	17
Глава 2. Равномерное движение	18
§ 6. Вращательное движение	18
§ 7. Равномерное вращение и угловая скорость	19
§ 8. Линейная и окружная скорость	20
§ 9. План скоростей во вращательном движении	23
§ 10. Заключение	24
Глава 3. Передача движения	24
§ 11. Ременная передача	24
§ 12. Зубчатая передача	27
§ 13. Системы зубчатых колес	30
§ 14. Конические зубчатые колеса	33
§ 15. Зубчатая рейка	34
§ 16. Заключение	34
Глава 4. Винтовое движение	36
§ 17. Винтовая линия	36
§ 18. Червячная передача	40
§ 19. Винтовая передача	41
§ 20. Заключение	42
Глава 5. Равномерно-переменное движение	43
§ 21. Средняя скорость неравномерного движения	43
§ 22. Свободное падение	44
§ 23. Равномерно-переменное движение с начальной скоростью	47
§ 24. Центробежное ускорение	49
§ 25. Заключение	51
Глава 6. Периодические движения	52
§ 26. Гармоническое колебание	52
§ 27. Периодическое движение кривошипно-шатунного механизма	53
§ 28. Кулисный механизм (шеллинг)	55
§ 29. Заключение	56

Отдел второй. Статика.

Глава 7. Понятие о силе. Законы Ньютона	59
§ 30. Сила и ее применение	59
§ 31. Силы в движении	60

	Стр.
32. Первый закон Ньютона (закон инерции)	61
33. Второй закон Ньютона	63
34. Закон параллелограмма сил	65
35. Третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия)	65
36. Заключение	67
Глава 8. Силовой треугольник	67
37. Равновесие. Силы, действующие по одной прямой	67
38. Внутренние силы	69
39. Параллелограмм сил и силовой треугольник	72
40. Примеры	75
41. Разложение силы на составляющие	80
42. Заключение	81
Глава 9. Момент силы	82
43. Момент силы относительно точки	82
44. Теорема Вариньона	84
45. Примеры	87
46. Сложение параллельных сил	89
47. Равновесие системы параллельных сил	94
48. Пара сил	97
49. Момент силы относительно оси	98
50. Заключение	100
Глава 10. Центр тяжести	103
51. Определение центра тяжести	103
52. Примеры	107
53. Три вида равновесия	110
54. Заключение	112
Отдел третий. Динамика.	
Глава 11. Основные понятия динамики точки	114
55. Ускорение, масса и сила	114
56. Примеры	116
57. Принципы Даламбера. Силы инерции	121
58. Заключение	126
Глава 12. Работа и энергия	126
59. Работа и кинетическая энергия	126
60. Примеры	130
61. Мощность. Коэффициент полезного действия	132
62. Заключение	133
Глава 13. Динамика вращательного движения	134
63. Работа вращающего момента	134
64. Живая сила вращательного движения	137
65. Сила во вращательном движении	140
66. Приложения	142
67. Заключение	146
Глава 14. Силы трения	147
68. Трение скольжения	147
69. Трение качения	152
70. Заключение	153

	Стр.
Глава 15. Простые машины	153
§ 71. Работа и сила	153
§ 72. Золотое правило механики	155
§ 73. Блоки	158
§ 74. Наклонная плоскость и ее видоизменения	161

Часть вторая,

Элементы сопротивления материалов.

Глава 16. Основные понятия	166
§ 75. Предмет и задача сопротивления материалов	166
§ 76. Виды деформаций	167
Глава 17. Растяжение	169
§ 77. Основные понятия	169
§ 78. Диаграмма растяжения	172
§ 79. Удлинение при нагрузке, приложенной мгновенно	175
§ 80. Изменение структуры материала при приближении к критической точке	175
§ 81. Допускаемое напряжение. Расчетное уравнение на растяжение	176
§ 82. Изменение объема бруска при растяжении	178
§ 83. Примеры	178
Глава 18. Сжатие	186
§ 84. Аналогия с растяжением	186
§ 85. Расчет на сжатие	187
§ 86. Понятие о смятии	188
§ 87. Примеры	189
Глава 19. Сдвиг	194
§ 88. Явления, происходящие при сдвиге	194
§ 89. Расчетное уравнение на сдвиг. Допускаемые напряжения	196
§ 90. Примеры	198
Глава 20. Изгиб	203
§ 91. Общая картина деформации	203
§ 92. Изгибающий момент. Поперечная сила	205
§ 93. Примеры определения изгибающего момента для разных случаев нагрузки	207
§ 94. Определение поперечной силы для разных случаев загрузки	213
§ 95. Зависимость между нормальным напряжением и изгибающим моментом	216
§ 96. Моменты инерции и моменты сопротивления наиболее употребительных сечений	219
§ 97. Расчетная формула на изгиб. Допускаемые напряжения	221
§ 98. Примеры	222
Глава 21. Кручение	230
§ 99. Сущность деформации кручения. Угол кручения	230
§ 100. Определение крутящего момента	235
§ 101. Полярные моменты сопротивления некоторых характерных сечений. Допускаемые напряжения	236
§ 102. Примеры	238
Приложение 1. Дюймовая резьба с углом профиля 55° (ОСТ 1260)	242
Приложение 2. Двутавровое железо (ОСТ 16)	243
Приложение 3. Корытное (швеллерное) железо (ОСТ 17)	243
Приложение 4. Алфавиты латинский и греческий	244

ВВЕДЕНИЕ

Первый вопрос, который возникнет у каждого, приступающего к изучению механики, будет, конечно, следующий: что такое механика?

Если бы на этот вопрос автору пришлось отвечать лет двести тому назад, то он определил бы механику как науку о механизмах, машинах. Однако в настоящее время область человеческого знания, посвященная изучению различных механизмов и машин, настолько разрослась, что во всей своей полноте не может быть охвачена даже целым курсом наук любого высшего технического учебного заведения; студент каждого вуза изучает за время своего пребывания в последнем лишь одну часть этой области знания, посвященную тем механизмам и машинам, которые он в дальнейшем встретит на работе по выбранной им специальности. Но, с другой стороны, механика изучается во всех технических учебных заведениях: и в авиационных, и в энергетических, и в строительных, и в технологических по холодной обработке металлов и т. д. При этом механика является первым предметом, в котором общие математические и физические теории применяются для решения поставленных техникой задач. Это показывает, что предметом механики является изучение тех общих характерных свойств, которые можно подметить у каждого механизма или машины.

Для того чтобы выяснить эти основные характерные для каждой машины свойства, рассмотрим сущность работы какой-либо из больших современных машин, например трактора. Давление газовой смеси в цилиндре последнего приводит в движение поршень, который, в свою очередь, вращает ось трактора, а затем движет и весь трактор в целом. При этом периодическое прямолинейно-возвратное движение поршня преобразуется сначала во вращательное движение оси трактора, а затем в поступательное движение всего корпуса трактора. Таким образом для нас выясняется первая характерная особенность работы трактора как машины; мы замечаем наличие передачи движения между отдельными частями последнего.

Затем мы должны отметить, что последовательное приведение в движение отдельных деталей трактора связано с определенным силовым воздействием одних частей на другие; в цилиндре трактора сила давления газовой смеси передается поршневому штоку, затем окружности ведущего колеса и наконец рабочему сельскохозяйственному орудью, приводимому в движение трактором. Таким образом обнаруживается вторая характерная особенность работы трактора как машины, а именно: наличие в последнем передачи силы от одной его части к другой.

Те же самые особенности можно подметить и в работе других совершенно как будто бы отличных по своим задачам машин. Так, на-

пример, в работе сверлильного станка вращение оси при помощи приводных ремней и шкивов передается шпинделю, который вместе с прикрепленным к нему сверлом углубляется в подлежащее обработке тело. И здесь от одной детали станка к другой происходит одновременно и передача движения и передача силы. Те же самые особенности мы могли бы подметить и для других механизмов и машин, к какому бы классу последние ни принадлежали.

Оба эти процесса — передача движения и передача силы — совершаются всегда одновременно и неразрывно связаны между собой. Однако, изучая механику, вполне возможно и целесообразно разделить эти два процесса. Можно, во-первых, изучать в отдельности движение само по себе, не обращая внимания на те силы, которые действуют между отдельными частями механизма. Во-вторых, можно сосредоточить свое внимание исключительно на действующих силах, не обращая внимания на движение тел, к которым эти силы приложены; в последнем случае лучше всего изучать эти силы тогда, когда тело, к которому они приложены, остается в покое и действующие на него силы, как говорят, уравновешиваются.

Таким образом выделяются две части механики. Первая из них — кинематика — изучает движение, не интересуясь силами, вызывающими это движение; вторая — статика — наоборот, изучает силы, не интересуясь движениями, которые могли бы вызвать эти силы, если бы они не уравновешивались.

Слово „кинематика“ происходит от греческого слова, обозначающего „движение“, и имеет общий корень со словом „кинематограф“; при показе кинофильма на экране люди и вещи движутся, но, конечно, никакого силового воздействия друг на друга не оказывают. Слово „статика“ происходит от греческого слова „сто“, обозначающего „стоять“, причем корень этого слова одинаков с русскими словами „стоять, стоять“ и т. д.

После того как движение и силы изучены в отдельности независимо друг от друга, остается связать их между собой, изучить, какое движение вызывают данные силы и, наоборот, какие силы необходимы для воспроизведения данного движения. Этим занимается третья часть механики — так называемая динамика (от греческого слова, обозначающего „мощность, силу“). Эти три части, вместе взятые, составляют так называемую теоретическую механику, которую мы теперь можем определить как науку о движении тел и о силах.

В теоретической механике мы все наше внимание сосредоточиваем на движении отдельных тел и на силах, с которыми эти тела действуют друг на друга; при этом мы не обращаем внимания на то, что происходит с самими телами под действием сил. Мы считаем тела как бы неизменными. В действительности же тела под действием сил несколько изменяются; изучение этих изменений имеет большое значение для правильности конструкции механизма или машины. Под действием сил тела сжимаются, растягиваются, изгибаются, скручиваются, вообще говоря, изменяют свою форму или, как говорят, деформируются. Эти изменения формы не должны быть слишком велики и, кроме того, при удалении вызывающей деформацию причины тело должно восстановить

свою первоначальную форму; иначе работа механизма в лучшем случае перестанет быть правильной, а иногда может даже произойти и поломка. Для устранения неприятных случайностей необходимо знать соотношение между силами и вызываемыми ими в теле деформациями и уметь рассчитывать размеры деталей так, чтобы последние могли безопасно выдерживать силовые воздействия на них без ущерба для прочности. Занимающаяся этим наука носит название сопротивления материалов. Вместе с элементами теоретической механики она составляет так называемую техническую механику, являющуюся основным орудием всякого инженера, техника или мастера и которая в тех или иных размерах должна быть знакома каждому любящему свой механизм рабочему.

Остается указать на те трудности, с которыми сталкивается начинающий, приступая к изучению курса механики. Нет такой машины, устройство которой, хотя бы в общих чертах, нельзя было бы объяснить любому человеку. Но даже рабочий, хорошо знающий свою машину, всегда испытывает некоторые трудности, переходя работать на другую машину незнакомой ему конструкции; ему это удастся лишь тогда, когда он поймет то общее, что характеризует работу и старой и новой машины.

Вполне понятно, что чем менее похожи по своему назначению и конструкции две машины, тем менее общих черт они имеют и тем труднее становится их находить. Механика же изучает лишь те свойства, которые являются общими для всех машин; поэтому совершенно естественно, что механика кажется начинающему несколько отвлеченной наукой, сближаясь таким образом с математикой. Однако в то время как последняя является в достаточной степени отвлеченной наукой, механика все время имеет дело с вполне конкретными реальными предметами (механизмами, машинами), причем в работе этих реальных предметов приходится отыскивать общие отвлеченные черты, упрощать явление или, как говорят, схематизировать его. Вот эта-то необходимость составить схему работы механизма, найти его общие характерные черты и представляет те затруднения, с которыми приходится бороться начинающему. Научить умению составлять схемы нельзя; этому можно научиться только самому (как немисливо научиться по книге плавать), но, конечно, руководитель может и должен указать начинающему те пути, следуя которым он может овладеть новой для него наукой.

Мы разделили нашу книгу на две части: в первой рассматриваются основы учения о движении и о силах (так называемая теоретическая механика), а во второй — элементы сопротивления материалов. Первую часть мы, в свою очередь, подразделили на три отдела: кинематику, статику и динамику и каждый из них — на главы. Вторая часть — элементы сопротивления материалов — является по своему содержанию более однообразной и подразделяется только на главы соответственно основным видам деформаций: растяжения, сжатия, среза, изгиба и кручения.

ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ И О СИЛАХ (ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА).

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

КИНЕМАТИКА.

ГЛАВА 1.

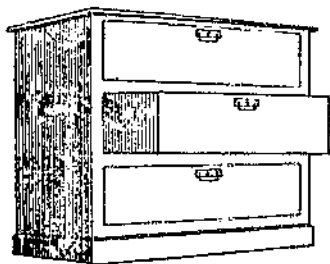
РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СКОРОСТЬ.

§ 1. Что такое движение. Мы говорим, что предмет движется, если сам он целиком или отдельные его части с течением времени изменяют свое положение относительно других предметов¹⁾. Приходится говорить „или отдельные части“, потому что бывают случаи, когда некоторые точки движущегося тела остаются во время движения неподвижными; например точки, лежащие на оси вращающегося вала, будут оставаться при движений на одном и том же месте, как бы быстро вал ни вращался. В связи с этим различают два основных вида движений: к одному принадлежат те движения, в которых весь предмет в целом меняет свое место, ко второму — те движения, в которых предмет, оставаясь на одном месте, обращается во время движения различными своими сторонами к окружающим предметам. Первые движения называются поступательными, вторые — вращательными. Может случиться, что один и тот же предмет будет одновременно иметь оба эти движения; так, например, колесо повозки, вращаясь вокруг своей оси, перемещается поступательно вместе с осью, шпиндель сверлильного станка, вращаясь вокруг своей оси, перемещается (подается) в то же время по ее направлению вниз. В последнем примере, где направление поступательного движения совпадает с направлением оси вращения, мы имеем случай так называемого винтового движения (такое движение совершает, между прочим, ввинчивающийся в гайку винт).

§ 2. Поступательное движение. Поступательное движение характеризуется тем, что все тело в целом меняет свое положение относительно окружающих предметов; при этом все его точки движутся совершенно одинаково, не забегая и не отставая одна от другой. Примером такого движения может служить движение ящика, вытаскиваемого из стола или комода (фиг. 1а), движение суппорта токарного станка по станине, педали

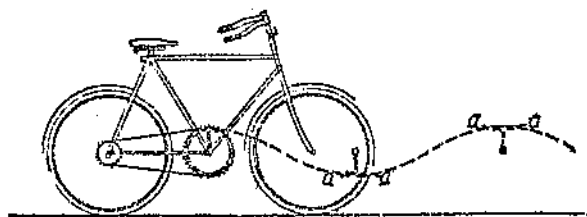
¹⁾ Необходимо помнить, что при задании движения нужно всегда указать те предметы, которые мы при этом считаем неподвижными, относительно которых совершается рассматриваемое движение. В общепринятой мы все происходящие движения относим к поверхности земли, но, вообще говоря, можно рассматривать движение и относительно других тел, например движение резца токарного станка по обрабатываемому предмету, движение пассажира по палубе парохода и т. д.

велосипеда, движущегося по прямой линии (фиг. 16), и т. д. Эти примеры показывают, что поступательные движения бывают очень разнообразными; в то время как в первых двух примерах все точки движущегося



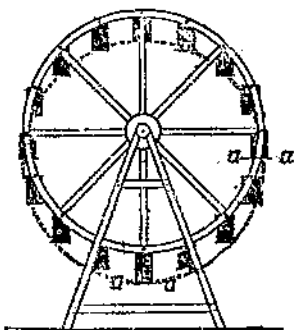
Фиг. 1а.

тела описывали равные и параллельные отрезки прямых линий, в последнем примере педаль, двигаясь то вверх, то вниз, будет при движении велосипеда описывать волнообразную линию, которая, конечно, не будет прямой. Точно так же в Парке культуры и отдыха прикрепленные к вращающемуся колесу кабинки движутся совершенно одинаково, описывая при своем движении окружности (фиг. 1в); мы опять имели случай поступательного движения, которое не будет прямолинейным.



Фиг. 16.

Примеры с педалью велосипеда и кабинками вращающегося колеса позволяют указать легко отличимый признак поступательного движения. Отметим на педали или на кабинке какую-нибудь прямую, например ту, которая отмечена



Фиг. 1в.

на фиг. 16 и в буквами *aa*. Если мы будем наблюдать движение педали или кабинки, то заметим, что прямая *aa* во все время движения остается параллельной самой себе, несмотря на то, что, например, кабинка колеса как целое обращается вокруг центра колеса.

Таким образом мы имеем следующий признак поступательного движения: при поступательном движении всякая прямая тела остается во все время движения параллельной самой себе.

Изучая поступательное движение тела, нет надобности изучать отдельно движение различных его точек; так как все точки движутся совершенно одинаково, то, зная движение одной, мы будем знать одновременно движение и остальных точек, а значит, и всего предмета в целом; одна точка как бы заменяет нам весь предмет. Подобную замену мы будем делать очень часто, и читатель не должен удивляться, если в дальнейшем ему придется встречаться с выражениями, „точка движется“, „точка находится в покое“ и т. д. В природе отдельных не имеющих размеров материальных точек, конечно, не существует, но зато любой предмет мы можем заменить одной точкой, если нас инте-

рисует только перемещение предмета в целом, его поступательное движение. С этой точки зрения можно считать точкой идущего по дороге человека, автомобиль, целый железнодорожный поезд, конечно, только в том случае, когда нас не интересуют те движения, которые происходят в самом движущемся теле (движение ног человека относительно корпуса, вращение колес автомобиля или поезда и т. д.). Когда нас интересует лишь общее перемещение рассматриваемого предмета и можно не обращать внимания на особенности движения отдельных его частей, мы будем заменять рассматриваемый предмет одной точкой.

§ 3. Траектория. Установив теперь, что именно нужно подразумевать под точкой, займемся выяснением различных обстоятельств, определяющих движение рассматриваемой точки. Мы говорим, что точка движется, если она изменяет свое положение относительно окружающих предметов. Если мы будем отмечать последовательные положения движущейся точки во время движения, то получим ряд точек (фиг. 2), образующих некоторую линию, которая носит название траектории движения.



Фиг. 2.

Эта линия по своему характеру может быть какой угодно; если последовательные положения движущейся точки образуют прямую линию, то движение называется прямолинейным, в противном же случае оно будет называться криволинейным.

Однако для того чтобы вполне определить движение, недостаточно знать только одну траекторию. Ряд последовательных положений движущегося поезда образует линию, которая совпадает с линией железной дороги, иными словами траекторию можно было бы определить как дорогу, по которой движется рассматриваемая точка. Но ведь по одной и той же дороге можно двигаться самыми разнообразными способами; поэтому необходимо еще указать, как движется точка по траектории. Возвращаясь к примеру с движением поезда, мы можем сказать, что, кроме карты железнодорожного пути, нужно еще знать расписание движения поезда. Это расписание дает нам те станции, в которых будет находиться движущийся поезд в различные моменты времени. Если вполне установлено, о какой железнодорожной линии идет речь, то вместо названия станции можно просто указать расстояние ее в километрах от некоторой начальной точки линии; тогда расписание давало бы нам расстояния движущейся точки (поезда) от начального пункта линии в различные моменты времени. Если для любого момента времени можно установить местонахождение движущейся точки на траектории, то говорят, что задан закон движения. Закон движения может быть определен различными способами; можно задать его в виде таблицы, аналогично железнодорожному расписанию, можно, как мы

это покажем ниже, дать его графически в виде некоторой линии аналогично графикам железнодорожного движения, можно задать его, наконец, при помощи некоторой формулы, вычисляя которую можно было бы для различных моментов времени узнавать местонахождение движущейся точки. Во всяком случае, движение точки считается совершенно определенным, если известна траектория движущейся точки и задан тем или иным способом закон ее движения по траектории, т. е. возможность для различных моментов времени установить ее местонахождение на траектории.

§ 4. Прямолинейно-равномерное движение. Покажем теперь применение всех высказанных общих положений на каком-нибудь конкретном примере. Начнем, конечно, с самого простого случая. Наиболее простым видом траектории будет прямая линия. Таким образом простейшее движение является прямолинейным. Далее, наиболее простым движением по прямой будет такое движение, в котором движущаяся точка все время движется одинаково, т. е. в равные промежутки времени проходит всегда равные по длине отрезки траектории, в каждую минуту продвигается вперед на одно и то же расстояние. Такого рода движение носит название равномерного движения. Расстояние движущейся точки от той точки, в которой она находилась в момент начала движения, называется пройденным путем. Пройденный путь в равномерном движении увеличивается пропорционально времени движения; за вдвое больший промежуток времени точка пройдет и вдвое больший путь. Это показывает, что частное от деления пройденного пути s на время t , в течение которого пройден этот путь, есть величина постоянная. Эта постоянная величина называется скоростью равномерного движения и обозначается буквой v . Скорость равномерного движения будет тем больше, чем больше пройденный путь для заданного промежутка времени и чем меньше промежуток времени, нужный для прохождения заданного пути. Численно мы получим скорость, если разделим пройденный путь на соответствующий промежуток времени, что выражается формулой:

$$v = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Если $t=1$, то $v=s$; это показывает, что скорость в равномерном движении численно равна пути, проходимому в единицу времени. В связи с этим становятся совершенно ясными выражения: „скорость самолета равна 400 километров в час“, „скорость снаряда равна 800 метров в секунду“, „скорость света равна 300 000 километров в секунду“. Никким образом нельзя говорить: „скорость самолета равна 400 километров“, „скорость снаряда равна 800 метров“, „скорость света равна 300 000 километров“, не указывая или, по крайней мере, не подразумевая того времени, в течение которого соответствующее расстояние проходит. Таким образом численное выражение скорости зависит не только от выбранной единицы длины, но и от выбранной единицы времени; скорость выражается не просто в киломе-

трах или метрах, но всегда в километрах в час (или в секунду), в метрах в секунду (или в минуту) и т. д. Это обстоятельство принято записывать так:

скорость v самолета равна 400 км/час,

скорость v снаряда равна 800 м/сек,

скорость v света равна 300 000 км/сек.

Мы обозначаем единицы скорости в виде дроби, числитель которой изображает соответствующую единицу длины, а знаменатель — единицу времени, так как для получения скорости нужно пройденный путь разделить на соответственный промежуток времени.

Выражения

км/час, м/сек, км/сек

в числовом выражении скорости играют ту же роль, что выражения км, м в числовом выражении длины или час, сек в числовом выражении времени. Поскольку км, м, час, сек суть соответственно единицы длины и времени, мы можем наши новые выражения км/час, м/сек, км/сек считать обозначениями соответствующих единиц скорости; первая единица соответствует такой скорости, при которой в 1 час проходит 1 километр, вторая единица — скорости, при которой в 1 секунду проходит 1 метр, и т. д.

Указанный способ обозначения единицы скорости представляет большие удобства при переводе числового значения скорости из одних единиц в другие. Пусть, например, известно, что поезд проходит 72 км в час, и требуется выразить его скорость в метрах в секунду (узнать, сколько метров делает он в секунду).

При нашем способе обозначения эта задача решится так: в выражении

$$v = 72 \text{ км/час}$$

подставим вместо „км“ его выражение в метрах и вместо „час“ — соответствующее выражение в секундах и вычислим полученное выражение. Будем иметь

$$v = 72 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ м/сек} = 20 \text{ м/сек}.$$

Полученный результат показывает, что выраженная в м/сек скорость будет равна 20; иными словами, поезд в одну секунду проходит 20 метров.

Пользуясь формулой (1), мы легко можем задать закон равномерного движения в виде формулы. Эта формула будет иметь вид:

$$s = vt. \quad (2)$$

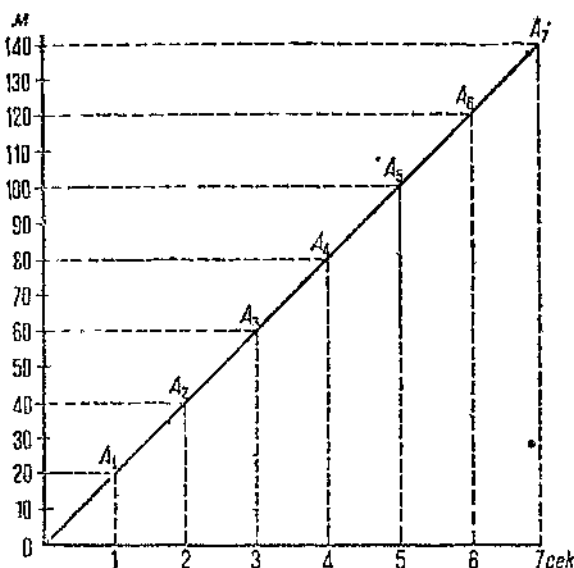
Подставляя в нее известную величину скорости v и любые заданные значения времени t , будем иметь для соответствующих моментов времени значения пройденного пути s ; тем самым мы и сможем определить положение движущейся точки на траектории. Пусть, например, $v = 20 \text{ м/сек}$. Если мы будем давать t последовательно значения

$t=0, 1, 2, 3, \dots$ сек, то получим следующую таблицу:

$t=0$	1	2	3	4	5	6	7	секунд
$s=0$	20	40	60	80	100	120	140	метров

Как нетрудно видеть, эта таблица дает нам своего рода расписание движения; единственная разница заключается в том, что в железнодорожном расписании даются моменты прибытия поезда в определенные точки железнодорожной линии, а у нас, наоборот, даются точки траектории, соответствующие определенным моментам $t=0, 1, 2, \dots$ сек.

Имея табличное представление движения, нетрудно уже перейти к графическому способу его изображения. Для этого возьмем две взаимно перпендикулярные



Фиг. 3.

линии (фиг. 3) и будем на горизонтальной прямой откладывать какие-нибудь отрезки одинаковой длины, изображающие секунды, а по вертикальной прямой — отрезки, изображающие пройденные пути (на фиг. 3 одно деление соответствует 10 м). В точках горизонтальной прямой, соответствующих $t=1, 2, 3, \dots, 7$ сек, будем восстанавливать перпендикуляры к этой прямой и на них откладывать отрезки, равные, как показывает нам таблица, соответственно 20, 40, 60, ..., 140 м; полученные точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$ будут

лежать на одной прямой, которая и дает нам графическое представление рассматриваемого движения. Построив такую линию, мы без труда смогли бы найти положение движущейся точки для любого момента времени. Пусть на фиг. 4 даны лишь две взаимно перпендикулярные прямые с нанесенными на них делениями, дающими промежутки времени в секундах и пройденные пути в метрах, и, кроме того, наклонная линия OA , представляющая график нашего движения. Чтобы найти пройденный путь, соответствующий, например, моменту $t=4$ сек, проводим в точке B_4 вертикаль B_4A_4 до пересечения в A_4 с линией OA , затем из точки A_4 проводим горизонталь A_4C_4 до пересечения в точке C_4 с вертикальной прямой и отсчитываем то деление, которое соответствует этой точке; поскольку это деление соответствует 80 м, мы можем сказать, что пройденный путь в момент $t=4$ сек будет равен 80 м.

В качестве примера равномерного движения мы рассмотрели движение по прямой; в общем случае равномерное движение может совер-

шаться по любой криволинейной траектории. Если проходимое расстояние мы будем измерять не по прямой, а по кривой линии, то все наши дальнейшие рассуждения будут применимы и к общему случаю криволинейного движения.

Пример 1. Машинисты для определения скорости поезда пользуются следующим приемом: если подсчитать число оборотов ведущего колеса паровоза, за время $\frac{9}{8}D$ сек, где D есть диаметр ведущего колеса в дециметрах, то полученное число с большой точностью дает скорость поезда, выраженную в км/час. Проверить правильность такого расчета.

Пусть N есть сосчитанное число оборотов. За время каждого оборота поезд подвигается на длину окружности ведущего колеса, т. е. на πD дециметров, а за N оборотов пройдет всего πDN дециметров, потребовав для этого $\frac{9}{8}D$ секунд времени. Отсюда нетрудно видеть, что скорость поезда в дециметрах в секунду будет равна

$$v = \frac{\pi DN}{\frac{9}{8}D} \text{ дм/сек.}$$

Подставляя вместо "дм" $\frac{1}{10\,000}$ км, а вместо "сек" $\frac{1}{3600}$ час, будем иметь после сокращения на D

$$v = \frac{8\pi \cdot 3600 N}{9 \cdot 10\,000} \text{ км/час}$$

или

$$v = \frac{32\pi}{100} N \text{ км/час.}$$

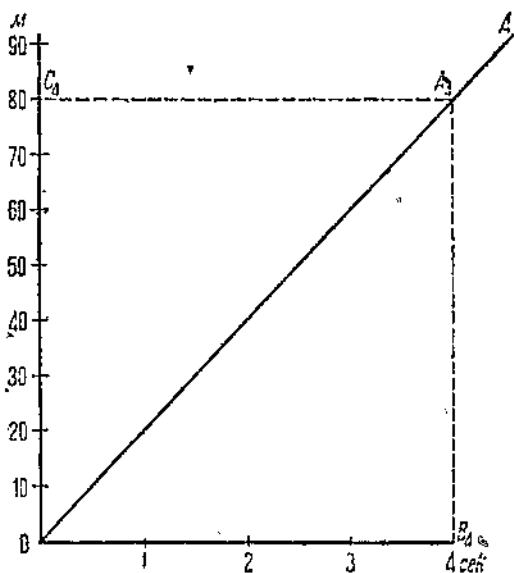
Наконец, подставив вместо π его приближенное значение, равное $\frac{22}{7}$, получим

$$v = \frac{704}{700} N \text{ км/час.}$$

Так как $\frac{704}{700}$ лишь очень немного отличается от единицы, то описанный в задаче подсчет можно считать вполне допустимым.

§ 5. Заключение. Заканчивая первую главу, подведем итоги достигнутым нами результатам.

Во-первых, мы установили различие между двумя основными видами движения — поступательным и вращательным. Во-вторых, мы указали, что



Фиг. 4.

тело при изучении его поступательного движения можно заменить одной точкой; в-третьих, мы установили две характеристики движения точки—траекторию и закон движения; в-четвертых, мы познакомились с наи более простым—равномерным движением, установили для него понятие о скорости и вывели две важные формулы:

$$s = vt \quad \text{и} \quad v = \frac{s}{t};$$

наконец, в-пятых, мы познакомились с обозначением единицы скорости в виде дроби и оценили пользу такого обозначения при переводе числового значения скорости из одних единиц в другие. Приобретенные нами сведения образуют базу, на которой мы можем строить дальнейшее здание механики.

Задачи.

1. Найти среднюю скорость поршня двигателя, если ход поршня равен 15 см, а коленчатый вал делает 1000 об/мин.

Отв. 500 см/сек.

2. Резец шпингута в первую половину секунды прошел 30 мм, во вторую 70 мм и за третью половину секунды 90 мм. Определить среднюю скорость за каждые полсекунды и за время движения.

Отв. 60 мм/сек, 140 мм/сек, 180 мм/сек, 127 мм/сек.

3. Поезд прошел за 2 часа 144 км. Найти среднюю скорость поезда в метрах в секунду.

Отв. 20 м/сек.

4. Требуется обстругать чугунную плиту, имеющую в длину 2,0 м и в ширину 0,8 м. Определить время, необходимое для обстрагивания всей поверхности плиты, если стол строгального станка, на котором укреплен плита, имеет скорость при рабочем ходе 90 мм/сек, а при холостом ходе 360 мм/сек, подача на один ход стола равна 40 мм.

Отв. 9 мин. 15 сек.

Глава 2.

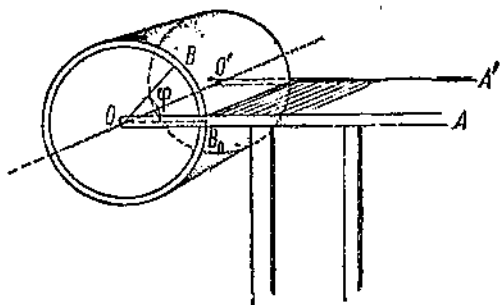
РАВНОМЕРНОЕ ВРАЩЕНИЕ.

§ 6. Вращательное движение. Если в твердом теле закрепить две точки, то возможность движения для такого тела еще не исключена; оно может поворачиваться вокруг проходящей через эти точки прямой, носящей название оси вращения. Все точки нашего тела будут при этом описывать окружности, центры которых находятся на оси вращения и размеры которых возрастают по мере увеличения расстояния точки от оси вращения.

В качестве примера рассмотрим вращающийся цилиндрический вал, ось которого OO' вращается в подшипниках O и O' , закрепленных на горизонтальной станине $OA'O'$ (фиг. 5). Для того чтобы изучить вращение этого вала, нет надобности рассматривать этот последний целиком. Посмотрим в торец O вала; представляющий круглое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси. Легко заметить, что, зная движение этого круга, мы будем знать движение и всех остальных круглых сечений нашего вала плоскостями, перпендикулярными к оси вращения (все такие плоскости сечения будут вращаться совер-

шенно одинаково), а следовательно, и всех точек вала. Таким образом вместо того чтобы рассматривать движение всего вала в целом, достаточно ограничиться изучением движения одного такого круглого сечения. Это, конечно, уже большой шаг к упрощению изучения движения вала, но можно пойти еще дальше.

Если мы проведем в плоскости торцевого сечения какой-нибудь радиус OB , то достаточно будет ограничиться изучением движения одного этого радиуса, потому что все остальные радиусы сечения будут вращаться совершенно одинаково. В качестве радиуса OB удобнее всего выбрать такой, который в начальный момент движения находился в плоскости горизонтальной станины OA и занимал положение OB_0 . В таком случае положение движущегося радиуса OB вполне определится, если мы будем знать угол $\angle BOB_0 = \varphi$, образуемый движущимся радиусом OB с его начальным положением OB_0 . Этот угол φ носит название угла поворота во вращательном движении и соответствует пройденному пути в поступательном движении; если мы для любого момента времени t будем знать соответствующее значение угла поворота φ , а следовательно, и положение подвижного радиуса OB , то вращение движущегося радиуса OB , затем торцевого сечения, а наконец, и всего вала можно считать вполне определенным.



Фиг. 5.

§ 7. **Равномерное вращение и угловая скорость.** Если изучаемое вращение таково, что в равные промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы, то оно называется равномерным. В § 4 мы назвали скоростью равномерного движения отношение пройденного пути ко времени, в течение которого последний был пройден (т. е. частное от деления пути на время). Аналогичным образом, изучая равномерное вращение, в качестве величины, измеряющей быстроту его, мы возьмем угловую скорость, представляющую отношение угла поворота к соответствующему промежутку времени. За единицу скорости в равномерном движении мы принимали скорость такого движения, при котором в единицу времени (час или секунду) проходит единица длины (километр, метр или сантиметр). Аналогично этому за единицу угловой скорости мы примем угловую скорость такого равномерного вращения, в котором за единицу времени (секунду или минуту) тело поворачивается на угол, равный единице. Какой же угол принять за единицу? В геометрии угол измеряется в долях полного оборота, в градусах ($\frac{1}{360}$ часть полной окружности) и, наконец, в радианах (так называется угол, длина дуги которого равна радиусу). На практике за единицу угла принимается полный оборот; поэтому практической единицей угловой скорости будет скорость такого равномерного вращения,

в котором тело делает оборот в одну минуту (соответствующая единица угловой скорости обозначается сокращенно (об/мин) или в одну секунду (об/сек); выраженную в таких единицах угловую скорость обозначают буквой n или N . В теории же за единицу угловой скорости удобнее принимать такую угловую скорость, при которой тело за единицу времени (секунду) поворачивается на один радиан; соответствующую единицу угловой скорости обозначают так: 1/сек, а выраженную в таких единицах угловую скорость принято обозначать греческой буквой ω . Необходимо хорошо освоиться с обеими этими единицами и уметь угловую скорость, выраженную в одних единицах, переводить в другие.

Пусть тело делает n оборотов в секунду; требуется найти угловую скорость ω . На основании определения угловой скорости последняя будет равна числу радианов, на которые тело повернется в одну секунду. Каждому полному обороту тела соответствует угол в 360° или 2π радианов. В течение n оборотов, совершаемых в одну секунду, тело повернется на $2\pi n$ радианов. Следовательно, мы сможем написать

$$\omega \text{ 1/сек} = 2\pi \cdot n \text{ об/сек.} \quad (3)$$

Если угловая скорость дается числом оборотов в минуту N , то для того чтобы получить число оборотов в секунду, мы должны N разделить на 60. Формула перехода в таком случае будет

$$\omega \text{ 1/сек} = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi}{30} N \text{ об/мин.} \quad (4)$$

Если не требуется особенно большой точности, то можно число $\pi = \frac{22}{7}$ принять равным 3; тогда формула (4) примет вид:

$$\omega \text{ 1/сек} = \frac{1}{10} N \text{ об/мин.} \quad (4a)$$

Формулы (3) и (4) решают все задачи, связанные с определением числа оборотов.

Пример 2. Найти угловую скорость вала, делающего 12 оборотов в минуту.

Применяя формулу (4), получаем

$$\omega = \frac{\pi \cdot 12}{30} = \frac{2\pi}{5} = 1,26 \text{ 1/сек.}$$

§ 8. Линейная и окружная скорости. Покажем теперь, как по угловой скорости тела найти скорость различных его точек, находящихся на заданных расстояниях от оси вращения; эти скорости, в отличие от угловой, носят название линейных. Угловая скорость будет одна и та же для всего тела, линейные же скорости будут для различных точек тоже различны.

Пусть тело вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и пересекающей ее в некоторой точке O (центр вращения фигуры сечения тела плоскостью чертежа). Требуется найти скорость точки A , лежащей на расстоянии r см от оси вращения O (фиг. 6). Скорость этой точки в сантиметрах в секунду численно будет равна

выраженному в сантиметрах пути, проходимому точкой A в одну секунду. Если угловая скорость равна ω 1/сек, то в одну секунду тело повернется на угол φ , равный ω радианов. Длина дуги AA' , которую за это время опишет точка, равна, как известно из геометрии, произведению радиуса r на выраженный в радианах ¹⁾ центральный угол AOA' . Так как в нашем случае $\varphi = \omega$, то дуга AA' будет равна ωr . Отсюда получим

$$v \text{ см/сек} = \omega \text{ 1/сек} \cdot r \text{ см}$$

или, отбрасывая наименование скорости (см/сек):

$$v = \omega r. \quad (5)$$

Если мы рассматриваем вращающийся вокруг оси круглый вал или шкив, то линейная скорость точек, лежащих на окружности вала или шкива, носит название окружной скорости. Если D есть диаметр вала или шкива, то окружная скорость v_0 будет

$$v_0 = \frac{\omega D}{2}.$$

Формула (5) является одной из очень важных формул механики.

Пример 3. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне московского Кремля равна $r = 3,56 \text{ м} = 356 \text{ см}$. Чему равна скорость конца этой стрелки в сантиметрах в минуту (предполагается, что стрелка движется непрерывно и не скачками)?

Минутная стрелка описывает полную окружность, т. е. угол в 360° или в 2π радианов в 60 минут $= 60 \cdot 60$ секунд; поэтому угловая скорость минутной стрелки равна

$$\omega \text{ 1/сек} = \frac{2\pi}{60 \cdot 60}.$$

Подставляя значения ω и r в формулу (5), получим

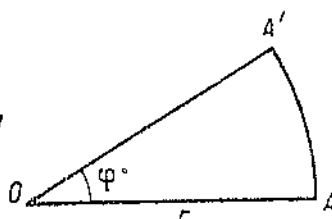
$$v = \omega \cdot r \text{ 1/сек} \cdot \text{см} = \frac{2\pi}{60 \cdot 60} \cdot 356 \text{ см/сек}.$$

Умножая на 60, получим скорость в сантиметрах в минуту:

$$v = \frac{2\pi \cdot 60}{60 \cdot 60} \cdot 356 \text{ см/мин} = 37,3 \text{ см/мин}.$$

Пример 4. С какой скоростью должен лететь горизонтально самолет на широте Ленинграда, чтобы иметь Солнце постоянно над собой. Расстояние Ленинграда до оси вращения Земли равно 3200 км.

¹⁾ Напоминаем, что в математике радианом называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. В градусной мере радиан равен $57^\circ 17' 45''$.



Фиг. 6.

Для того чтобы это было возможно, самолет должен вылететь в полдень и лететь противоположно направлению вращения Земли (т. е. с востока на запад; Земля вращается с запада на восток) со скоростью, равной окружной скорости частиц, лежащих на поверхности Земли на широте Ленинграда. Угловая скорость Земли в радианах в час будет

$$\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} = \frac{11}{42} \text{ 1/час.}$$

Окружная скорость точек земной поверхности будет

$$\frac{11}{42} \cdot 1 \text{ /час} \cdot 3200 \text{ км} = \frac{11 \cdot 3200}{42} = 838 \text{ км/час.}$$

Двигаясь с такой скоростью (пока еще недостижимой для самолетов) на запад, самолет будет все время оставаться между Землей и Солнцем и, таким образом, летчик будет иметь все время Солнце почти над своей головой.

Пример 5. Скоростью резания называется та скорость, с которой перемещается резец по обрабатываемому телу. Если резец неподвижен, а тело вращается, то мы будем иметь случай, вполне аналогичный предыдущему примеру, где самолет по отношению к Солнцу остается неподвижным, а Земля как бы будет уходить из под него. Это обстоятельство позволит нам, несмотря на как будто бы совершенно различные условия обеих задач, применить одинаковые способы к их решению; скорость резания при неподвижном резце будет равна окружной скорости обрабатываемого тела.

Пусть на патронном станке обрабатывается шкив диаметром $D = 2000 \text{ мм}$ при диаметре отверстия ступицы $d = 175 \text{ мм}$. Сколько оборотов в минуту должен делать шкив при обточке обода и расточке ступицы для того, чтобы скорость резания составляла 100 мм/сек .

В этой задаче по окружной скорости и радиусу вращения требуется определить число оборотов в минуту. Формула (5) принимает вид:

$$v = \frac{\pi N}{30} \cdot \frac{D}{2}.$$

Подставляя $v = 100 \text{ мм/сек}$, D в одном случае 2000 мм , а в другом 175 мм , будем иметь:

$$N_1 = \frac{2 \cdot 30 \cdot 100}{\pi \cdot 2000} = 0,96 \text{ об/мин (обточка обода),}$$

$$N_2 = \frac{2 \cdot 30 \cdot 100}{\pi \cdot 175} = 10,9 \text{ об/мин (расточка ступицы).}$$

Пример 6. Скоростью шлифования совершенно аналогично скорости резания называется скорость перемещения шлифующего инструмента по обрабатываемому изделию.

Пусть шлифовальный круг делает 800 оборотов в минуту. На каком расстоянии r от оси вращения нужно поместить обрабатываемое изделие A (фиг. 7), чтобы получить скорость шлифования 25 м/сек .

Угловая скорость, соответствующая 800 об/мин, на основании формулы (4) равна

$$\omega = \frac{\pi}{30} N = \frac{\pi \cdot 800}{30}.$$

Подставляя это значение ω , а также известную скорость шлифования $v = 25$ м/сек в формулу (5), получим

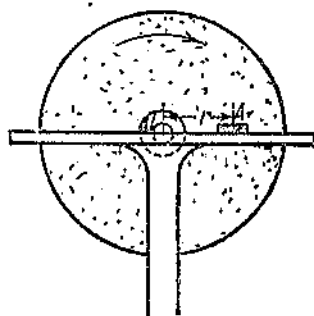
$$25 = \frac{\pi \cdot 800}{30} \cdot r,$$

откуда определим r :

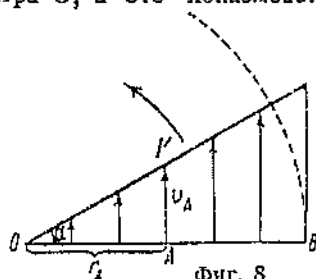
$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{25}{\frac{\pi \cdot 800}{30}} = 0,298 \text{ м} = 29,8 \text{ см}$$

§ 9. План скоростей во вращательном движении. Если мы захотим графически изобразить, как меняются скорости различных точек радиуса вращающейся фигуры, то получим построение, носящее название плана или картины скоростей. Пусть O будет центр вращения, OB — движущийся радиус (фиг. 8). Для точки A , лежащей на расстоянии $OA = r_A$ от центра O , скорость будет $v_A = \omega r_A$. Выбрав определенный отрезок за единицу скорости, построим скорость каждой точки перпендикулярно к радиусу вращения по направлению вращения (на фиг. 8). Так как угловая скорость ω будет одна и та же для всего радиуса OB , то линейные скорости различных точек радиуса OB будут пропорциональны их расстояниям r от центра O , а это показывает что концы отрезков, изображающих скорости различных точек, все расположатся по одной прямой, которая пройдет через центр вращения O . Полученное построение, имеющее форму треугольника, иногда называют треугольником скоростей; оно имеет большое значение при графическом решении задач, связанных с передачей вращательного движения.

Покажем, как при помощи треугольника скоростей определить графически угловую скорость ω вращательного движения, если известна линейная скорость какой-нибудь точки. На фиг. 8 O есть центр вращения, $OA = r$ — радиус вращения, v_A — линейная скорость точки A . Угловая скорость ω по формуле (5) равна $\frac{v}{r}$; следовательно, на чертеже она представляется как отношение катетов $\frac{AK}{OA}$. Это отношение называется наклоном прямой OK или тангенсом угла $KOA = \alpha$, образуемого линией OK с горизонтальным радиусом OA . Чем больше угловая скорость вращения, тем больше будет наклон прямой OK , тем круче будет подниматься последняя по отношению к горизонтальному радиусу OA .



Фиг. 7.



Фиг. 8.

§ 10. Заключение. Заканчивая эту главу, подведем итоги полученным в ней результатам. Во-первых, мы установили возможность схематического изображения вращающегося тела в виде подвижного радиуса совершенно аналогично тому, как в предыдущей главе заменяли движущееся поступательно тело одной точкой; во-вторых, мы изучили простейший вид вращательного движения — равномерное вращение — и по аналогии с прямолинейным равномерным движением ввели понятие об угловой скорости тела и о двух способах — теоретическом и техническом — ее измерения; в-третьих, мы получили формулу, при помощи которой можно определять скорости различных точек вращающегося тела по заданным расстояниям этих точек от оси вращения и величине угловой скорости; в-четвертых, мы использовали это важное соотношение:

$$v = \omega r$$

для решения различных задач, в частности связанных с понятием скорости резания и скорости шлифования. В следующей главе мы займемся применением той же самой формулы к решению технических вопросов, связанных с передачей вращательного движения от одного тела к другому.

Задачи.

5. Шкив диаметром 1000 мм в 1 секунду поворачивается на 180°. Определить линейную скорость на окружности шкива.

Отв. 157 см/сек.

6. Вычислить угловую скорость ω шкива, делающего 120 об/мин, и линейную скорость v точки на ободе, если диаметр шкива составляет 800 мм.

Отв. $\omega = 4\pi$ 1/сек., $v = 5,03$ м/сек.

7. Найти угловую скорость колеса трактора диаметром 1,5 м, идущего со скоростью 12 км/час.

Отв. 4,44 1/сек.

8. Требуется обточить железный вал диаметром $d = 80$ мм и длиной $l = 4,5$ м. Определить необходимое для обточки время, если скорость резания 100 мм/сек и подача на один оборот шпинделя 0,5 мм.

Отв. 22 600 сек $\approx$ 6 ч. 15 мин.

Глава 3.

ПЕРЕДАЧА ВРАЩЕНИЯ.

§ 11. Ременная передача. Пусть у нас имеются два вала A и B с параллельными осями, диаметры которых равны соответственно D_1 и D_2 (фиг. 9 и 10). Пусть первый — ведущий — вал A вращается с заданной угловой скоростью ω_1 (N_1 об/мин) и требуется передать с него вращение на второй — ведомый — вал B . Для этого на оба вала одевают кожаный или из другого материала ремень, причем так, чтобы он плотно прилегал к каждому валу (иначе при вращении будет происходить скольжение ремня по валу). В таком случае при вращении вала A будет двигаться и облегающий его ремень, который, в свою очередь, заставит вращаться и второй вал B . При этом в случае открытой передачи (фиг. 9) оба вала будут вращаться в одну сторону, а в случае перекрестной (фиг. 10) — в противоположные стороны.

Примем сначала, что скольжение между валом и ремнем совершенно отсутствует; тогда скорость движения ремня должна равняться окружной скорости каждого из шкивов, которые будут, таким образом, одинаковыми. Сравнивая их выражения, будем иметь

$$\omega_1 \frac{D_1}{2} = \omega_2 \frac{D_2}{2}. \quad (6)$$

Формула (6) является основной формулой для подсчета угловых скоростей при передаче вращения.

Угловая скорость ведомого вала будет

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{D_1}{D_2}.$$

Фиг. 9.

Если вместо ω_1 и ω_2 подставить их выражения в числах оборотов в минуту N_1 и N_2 , то совершенно аналогично будем иметь

$$N_2 = N_1 \frac{D_1}{D_2} = k N_1. \quad (7)$$

Отношение

$$\frac{D_1}{D_2} = k$$

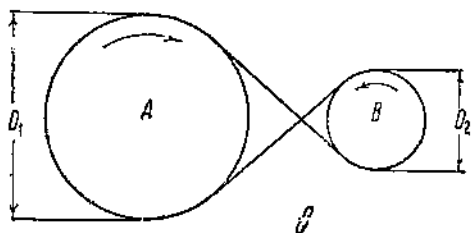
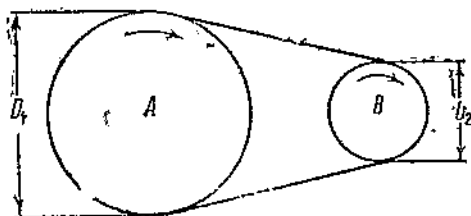
называется передаточным числом; если k больше единицы (диаметр ведущего вала больше диаметра ведомого), то ведомый вал вращается быстрее ведущего; если k меньше единицы (диаметр ведомого вала больше), то ведомый вал вращается медленнее ведущего. Кроме того, условились считать k положительным, если оба вала вращаются в одну сторону (открытая передача, фиг. 9), и отрицательным, если оба вала вращаются в разные стороны (перекрестная передача, фиг. 10).

ПРИМЕР 7. Два вала A и B соединены бесконечным ремнем, передающим вращение от A к B . Ведущий вал делает $N_1 = 150$ об/мин. На ведомом валу, который должен давать $N_2 = 375$ об/мин, сидит шкив диаметром $D_2 = 250$ мм. Какого диаметра D_1 шкив должен сидеть на ведущем валу?

Подставляя заданные значения в формулу, получаем

$$D_1 = D_2 \frac{N_2}{N_1} = \frac{375 \cdot 250}{150} = 625 \text{ мм.}$$

ПРИМЕР 8. У простого токарного станка маховик с диаметром $D_1 = 75$ см соединен ременной передачей со шкивом диаметром $D_2 = 18$ см, сидящим на той же оси, к которой прикреплены патрон и обрабатываемый предмет. Токарь делает в минуту 40 нажимов на педаль,



Фиг. 10.

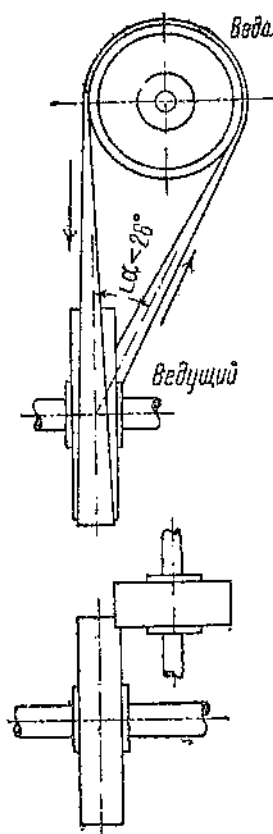
давая каждый раз один оборот маховику. Определить скорость резания, если острие резца находится на расстоянии $s = 25$ мм от оси вращения.

Искомая скорость v будет равна $\omega_2 s$, где ω_2 есть угловая скорость вращения патрона, равная

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{D_1}{D_2} = \frac{2\pi \cdot 40}{60} \cdot \frac{75}{18} \text{ 1/сек},$$

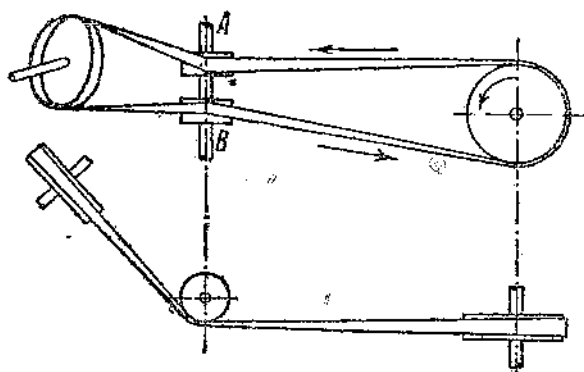
следовательно,

$$v = \frac{2 \cdot 22}{7} \cdot \frac{40}{60} \cdot \frac{75}{18} \cdot 25 \text{ мм/сек} = 43,6 \text{ см/сек}.$$



Фиг. 11.

Удобство ременной передачи состоит в том, что оба вращающихся вала не должны между собой соприкасаться; с другой стороны, недостатком ременной передачи является то, что вполне избежать скольжения ремня по шкивам очень трудно. Принимают, что потеря на скольжение не должна превышать 1,6% для новых ремней и 1% для ремней, уже бывших в употреблении. Это значит, что при учете скольжения передаточное число при заданных диаметрах D_1 и D_2 в действительности несколько меньше отношения $\frac{D_1}{D_2}$, а именно для новых ремней оно равно $\frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{100 - 1,6}{100}$, а для ремней, бывших в



Фиг. 12.

употреблении $\frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{100 - 1}{100}$. Для уменьшения скольжения рекомендуется брать передаточное число так, чтобы оно не было больше 5 и меньше $\frac{1}{5}$. Кроме того, расстояние между центрами обоих валов должно быть обязательно больше удвоенной суммы их диаметров.

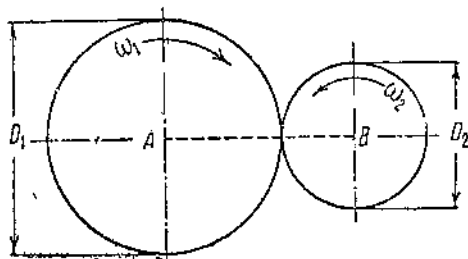
Если оси валов не параллельны, то теоретические рассуждения остаются теми же самыми; на практике же приходится прибегать к некоторым техническим приспособлениям, чтобы избежать соскальзывания

ремней со шкивов. Опыт показывает, что ремень лучше всего работает если средняя линия набегающей его части совпадает со средней плоскостью шкива и если сбегаящая часть ремня отклоняется от средней плоскости шкива на угол, не превышающий 26° (фиг. 11). Если этого трудно добиться, то приходится изменять направление ремней при помощи промежуточных так называемых направляющих шкивов, как это схематически показано на фиг. 12, где направляющими являются два шкива A и B .

§ 12. Зубчатая передача. Если ведущий и ведомый валы находятся в непосредственной близости друг с другом и требуется (как, например, в часовом механизме) абсолютно точное соотношение между угловыми скоростями обоих валов, то удобнее пользоваться зубчатой передачей.

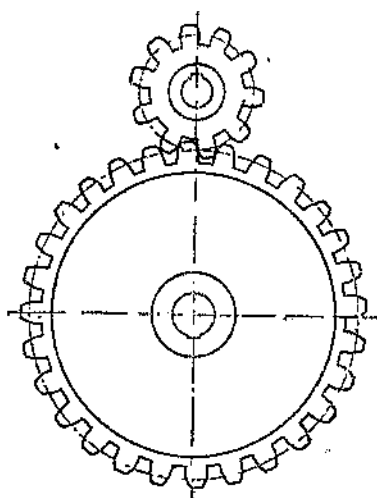
Представим себе два вала с центрами A и B , прижатых друг к другу так, что скольжение между обоими валами является невозможным (фиг. 13). Тогда, если будет вращаться вал A , то он увлечет за собой и вал B , причем вследствие отсутствия скольжения между окружностями валов их окружные скорости будут одинаковы. Если ω_1 и ω_2 суть угловые скорости обоих валов, а D_1 и D_2 — их диаметры, то формула (6) предыдущего параграфа дает нам

$$\omega_1 D_1 = \omega_2 D_2.$$

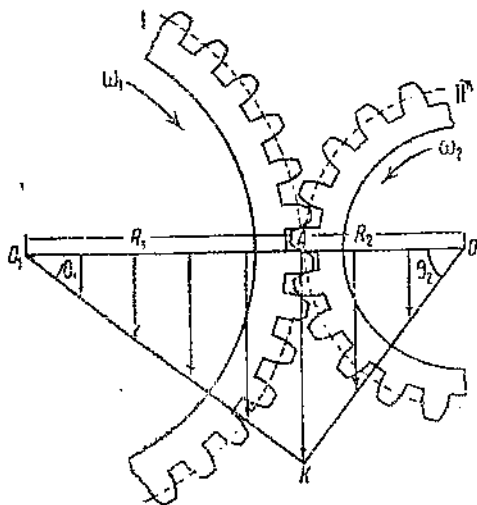


Фиг. 13.

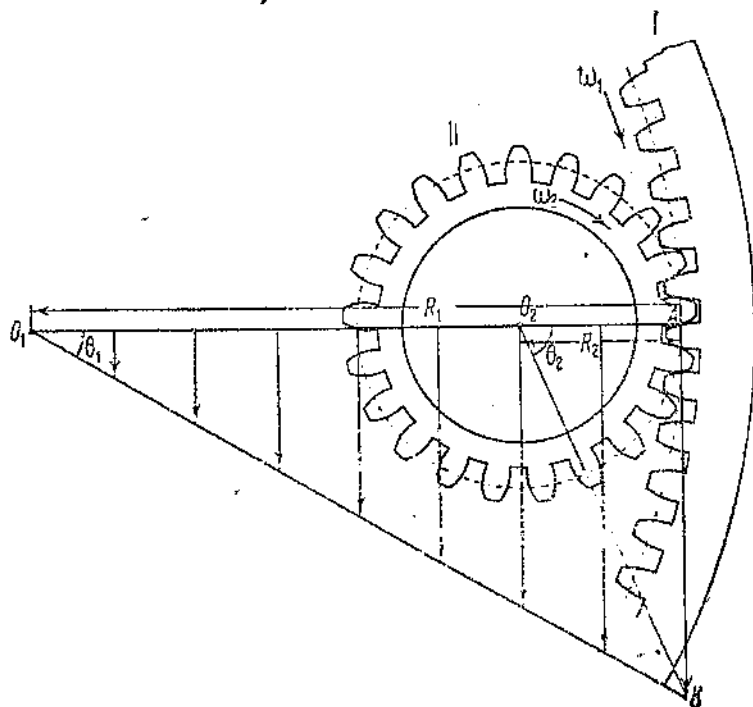
Такие два прижатых друг к другу вала (точнее, насаженные на них колеса) образуют так называемую фрикционную передачу (передача трением). Надежность работы этой передачи всецело зависит от силы сжатия обоих валов, исключающей возможность скольжения между их окружностями. Однако устранить возможность скольжения можно и другим способом. Представим себе (фиг. 14), что по окружностям обоих цилиндрических валов сделаны зубцы, могущие входить в соответствующие промежутки между зубцами другого колеса, устраняя, таким образом, возможность скольжения между колесами. Основные окружности обоих цилиндров, которые касаются между собой, носят название начальных или делительных окружностей; вершина каждого зубца приходится несколько выше начальной окружности, а основание — ниже ее. Если оба колеса сцеплены между собой выпуклыми частями, то сцепление называется внешним (фиг. 14 и 15), если же выпуклая сторона одного колеса цепляется за вогнутую сторону другого, то зацепление называется внутренним (фиг. 16). В случае внешнего зацепления оба колеса вращаются в противоположные стороны, в случае внутреннего зацепления — в одну и ту же сторону. Так как зубцы препятствуют взаимному скольжению колес, то окружные скорости обоих колес должны быть одинаковыми (находящиеся в зацеплении зубцы должны двигаться вместе). На этом основании мы можем дать следующий



Фиг. 14.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

способ графического определения угловых скоростей обоих колес. Пусть ω_1 будет угловая скорость первого колеса; построив угол θ_1 , тангенс которого будет равняться ω_1 , и проведя под этим углом прямую O_1K , мы найдем окружную скорость AK колеса I. Такая же окружная скорость будет и у колеса II; мы найдем его угловую скорость, если соединим точку K с центром O_2 , при этом угловая скорость ω_2 колеса II будет равна тангенсу угла θ_2 , который получится при вершине O_2 . Это построение (фиг. 15 и 16) одинаково относится как к случаю внешнего (фиг. 15), так и внутреннего (фиг. 16) зацеплений; вся разница будет заключаться лишь в направлении вращения обоих колес, которые будут одинаковыми для внутреннего и противоположными для внешнего зацеплений.

Если мы хотим эти соотношения выразить формулами, то можем воспользоваться тем же самым соотношением, что и для фрикционной передачи, которое даст нам

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1},$$

т. е. угловые скорости обоих колес обратно пропорциональны их диаметрам. На практике вместо угловых скоростей ω_1 и ω_2 берут числа оборотов N_1 и N_2 , вместо же диаметров D_1 и D_2 обоих начальных окружностей (которые в натуре непосредственно измерить нельзя) берут длины этих окружностей πD_1 и πD_2 или просто числа зубцов z_1 и z_2 . Для возможности работы обоих колес зубцы на том и на другом должны быть одинаковыми и, кроме того, средняя ширина промежутка между зубцами должна равняться ширине зубца; ширина зубца и промежутка, вместе взятых, составит так называемый шаг зубчатого зацепления; таким образом число зубцов, помноженное на шаг, дает длину окружности зубчатого колеса. В соответствии с этим соотношение между числами оборотов обоих колес будет

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

или

$$N_2 = \frac{z_1}{z_2} N_1 = k N_1. \quad (7a)$$

Отношение $\frac{z_1}{z_2} = k$ носит название передаточного числа, так же как и в случае ременной передачи. Для того чтобы показать, что направление вращения меняется в случае внешнего и сохраняется в случае внутреннего зацеплений, принято считать передаточное число в первом случае отрицательным, а во втором — положительным; поэтому окончательно формула, дающая соотношение между числами оборотов, напишется в виде

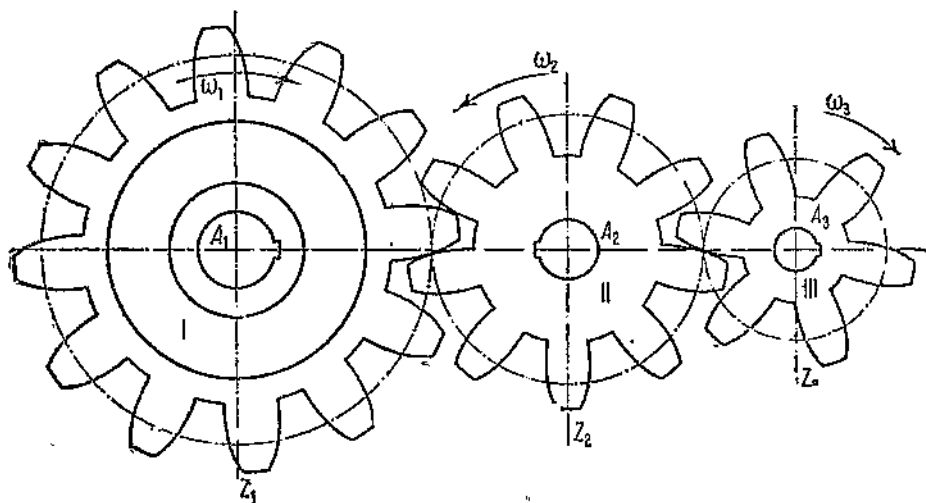
$$N_2 = -\frac{z_1}{z_2} N_1 \quad (\text{внешнее зацепление}),$$

$$N_2 = \frac{z_1}{z_2} N_1 \quad (\text{внутреннее зацепление}).$$

Для удовлетворительности работы зубчатого зацепления необходимо, чтобы передаточное число не выходило за определенные пределы, а именно, оно по абсолютной величине не должно быть больше 6 и меньше $1/6$.

§ 13. Системы зубчатых колес. В том случае, когда передаточное число выходит за эти пределы, пользуются несколькими парами зубчатых колес. Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 9. Три колеса I, II, III с числами зубцов z_1, z_2, z_3 находятся во внешнем зацеплении (фиг. 17). Определить передаточное число от колеса I к колесу III.



Фиг. 17.

Передаточное число между колесами I и II будут

$$\omega_2 = -\frac{z_1}{z_2} \omega_1$$

(знак „минус“ поставлен потому, что зацепление внешнее). Точно так же для колес II и III будем иметь

$$\omega_3 = -\frac{z_2}{z_3} \omega_2$$

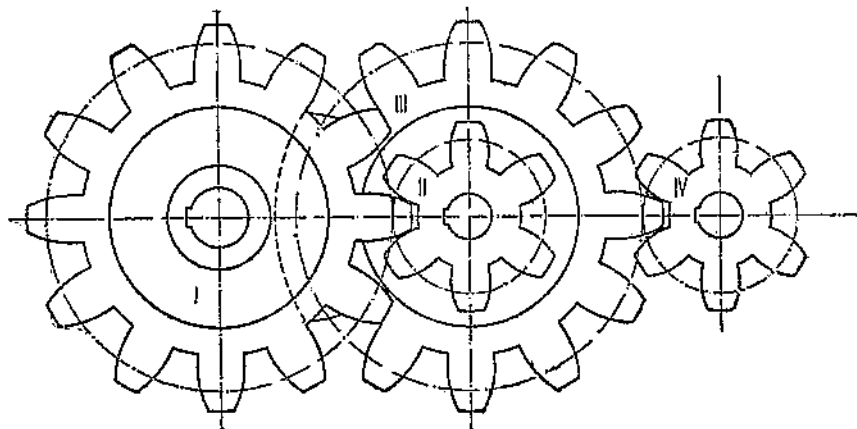
Вставляя ω_2 из первой формулы во вторую, будем иметь

$$\omega_3 = \left(-\frac{z_2}{z_3}\right) \left(-\frac{z_1}{z_2}\right) \omega_1 = \frac{z_1}{z_3} \omega_1.$$

Искомое передаточное число будет $\frac{z_1}{z_3}$; оно по абсолютной величине такое же, как если бы оба колеса I и III были непосредственно сцеплены друг с другом. На первый взгляд вставка промежуточного колеса II представляется как будто совершенно излишней (оно так и называется паразитным); однако это не совсем так. Во-первых, оба колеса I и III вращаются в одну сторону, а при непосредственном сцеплении они вра-

шались бы в противоположные стороны; следовательно, паразитное колесо меняет направление вращения, позволяя, таким образом, избежать менее удобных колес с внутренним зацеплением. Во-вторых, при помощи паразитных колес можно сцеплять и такие зубчатые колеса, которые непосредственно спаривать нельзя,

Пусть передаточное число между колесами I и III равно 20; поскольку это число выходит за допустимые пределы удовлетворительной передачи, сцеплять их непосредственно нельзя. Возьмем поэтому три колеса: I—с 200 зубцами, II—с 40 и III—с 10 зубцами; передаточное число между I и II колесами равно 5, между II и III равно 4, что вполне



Фиг. 18.

допустимо; сцепив же I, II и III колеса, как показано на фиг. 17, мы получаем нужное нам передаточное число $\frac{200}{40} \cdot \frac{40}{10} = 20$. Гораздо чаще однако эта задача разрешается при помощи двух пар зубчатых колес, как показано в следующем примере.

Пример 10. Зубчатое колесо I, имеющее z_1 зубцов и сидящее на валу, делающем N_1 об/мин, сцеплено с шестерней II, имеющей z_2 зубца; на общей оси с этой шестерней сидит зубчатое колесо III с z_3 зубцами, которое сцеплено с колесом IV, имеющим z_4 зубцов. Определить число N оборотов в минуту колеса IV (фиг. 18).

Передаточное число между колесами I и II (колесо I—ведущее, колесо II—ведомое) будет: $-\frac{z_1}{z_2}$; поэтому число оборотов N_2 колеса II (и одновременно колеса III) будет:

$$N_2 = -\frac{z_1}{z_2} \cdot N_1.$$

Для III и IV колес (III—ведущее, IV—ведомое) будем иметь

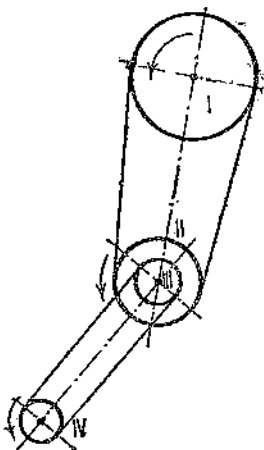
$$N = -\frac{z_3}{z_4} \cdot N_2.$$

Отсюда

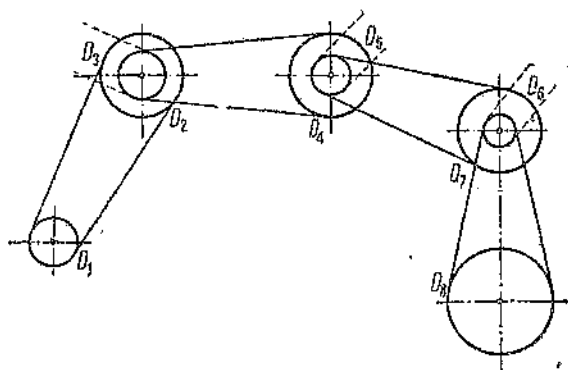
$$N = (-1)^i (-1)^j \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} N_1.$$

Таким образом передаточное число между I и IV колесами равно дроби, в числителе которой стоит произведение чисел зубцов ведущих колес, а в знаменателе — произведение чисел зубцов ведомых колес, умноженное на -1 , взятую столько раз множителем, сколько раз встречается в данной системе колес внешнее зацепление.

Рассуждение можно, конечно, обобщить и на случай произвольного числа колес, находящихся в таком зацеплении; таким образом мы приходим к следующему результату:



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Полное передаточное число равняется произведению всех частных передаточных чисел или дроби, в числителе которой стоит произведение чисел зубцов всех ведущих, а в знаменателе произведение чисел зубцов всех ведомых колес, умноженное на -1 , взятую множителем столько раз, сколько раз встречается в ряду частных передач внешнее зацепление.

Эта формулировка вполне применима и к случаю передачи при помощи системы нескольких ременных передач (как, например, на фиг. 19, где ведущими являются шкивы I и III, а ведомыми II и IV). Единственное изменение, которое придется ввести, будет заключаться в том, что вместо чисел зубцов ведущих колес придется поставить величины диаметров ведущих шкивов, а вместо зубцов ведомых — диаметры ведомых шкивов и -1 придется брать множителем столько раз, сколько раз в общей системе встретится перекрестная ременная передача.

Пример 11. Определить число N оборотов шкива D_8 (фиг. 20).

если число оборотов ведущего вала $N_1 = 1440$ об/мин и диаметры отдельных шкивов (D_3 , D_5 и D_7 — внутренние шкивы) равны

$$D_1 = 200 \text{ мм}, D_2 = 500 \text{ мм}, D_3 = 300 \text{ мм}, D_4 = 600 \text{ мм},$$

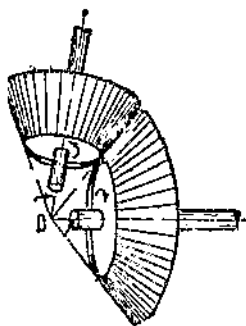
$$D_5 = 250 \text{ мм}, D_6 = 450 \text{ мм}, D_7 = 200 \text{ мм}, D_8 = 800 \text{ мм}.$$

Ответ:

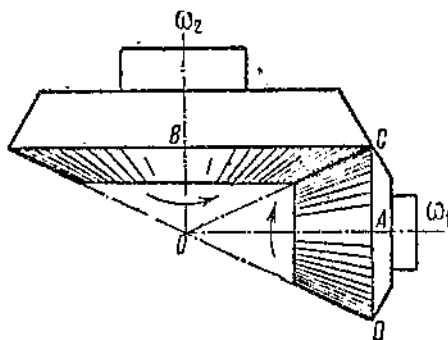
$$N = \frac{D_1 \cdot D_3 \cdot D_5 \cdot D_7}{D_2 \cdot D_4 \cdot D_6 \cdot D_8} N_1 = \frac{1}{36} \cdot 1440 = 40 \text{ об/мин}.$$

§ 14. Конические зубчатые колеса. Пусть потребуется передать вращение от одного вала к другому, ось которого не параллельна оси первого, а пересекается с ним.

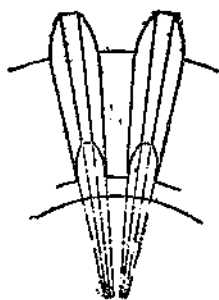
Если насадить на оба вала два касающихся между собой прямых усеченных конуса с общей вершиной в точке O пересечения осей (фиг. 21), то при наличии достаточной силы, прижимающей оба эти



Фиг. 21.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

конуса друг к другу, скольжение между их поверхностями будет исключено, и при вращении одного вала будет вместе с ним вращаться и другой: мы получим так называемую коническую фрикционную передачу. Если же мы нарежем вдоль образующих этих конусов зубцы, которые во время вращения одного конуса будут входить в промежутки между зубцами другого конуса, то получим коническую зубчатую передачу или конические зубчатые колеса. Она большей частью употребляется, когда обе оси пересекаются под прямым углом, но вполне возможна передача и в том случае, когда оси пересекаются под любыми углами.

Пусть OA и OB суть пересекающиеся в точке O (фиг. 22) оси двух валов; на концах этих осей надеты два конических зубчатых колеса одинакового шага, т. е. зубцы одного колеса совершенно точно входят в промежутки другого. Отметим, что теперь и зубцы и промежутки уже не будут иметь на всем протяжении одинаковую ширину, а будут утоньшаться по направлению к вершине конуса (фиг. 23). Вследствие отсутствия скольжения между поверхностями обоих конусов окружная скорость точки C соприкосновения обоих конусов будет одинакова. Если ω_1 и ω_2 будут соответственно угловые скорости первого и вто-

рого валов, то скорость точки C первого конуса будет $\omega_1 \overline{AC}$ (где $\overline{AC}$ есть расстояние от оси или радиус вращения точки C). Точно так же окружная скорость точки C второго конуса будет $\omega_2 \cdot \overline{BC}$ (где $\overline{BC}$ есть радиус вращения точки C второго конуса). Вследствие равенства окружных скоростей мы будем иметь:

$$\omega_1 \cdot \overline{AC} = \omega_2 \cdot \overline{BC}$$

или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Но радиусы BC и AC относятся как длины окружностей обоих конусов или, что то же, как числа зубцов z_2 и z_1 обоих конических колес, а угловые скорости ω_1 и ω_2 относятся как числа оборотов N_1 и N_2 обоих валов. Следовательно,

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

откуда получаем формулу:

$$N_2 = \frac{z_1}{z_2} N_1 = k N_1 \quad (7)$$

совершенно подобную той, какую мы имели и для обыкновенных (цилиндрических) зубчатых колес.

§ 15. Зубчатая рейка. При помощи зубчатой рейки можно преобразовать вращательное движение в поступательное и обратно. Если (фиг. 24) шестерня A радиуса R вращается с угловой скоростью ω и зацепляет прямолинейную зубчатую рейку, зубцы которой имеют тот же шаг, что и зубцы шестерни, то вследствие отсутствия скольжения между шестерней и рейкой последняя будет двигаться поступательно со скоростью v , равной окружной скорости ωR шестерни.

Пример 12. Определить скорость подъема чашки Q домкрата, схема которого изображена на фиг. 25, если рукоятка P делает $N=10$ об/мин, числа зубцов на колесах I—IV равны соответственно $z_1=5$, $z_2=20$, $z_3=5$, $z_4=25$ и радиус начальной (делительной) окружности шестерни V равен $R=3,5$ см.

Искомая скорость равна

$$v = \omega_4 R,$$

где ω_4 есть угловая скорость шестерни IV. Число оборотов шестерни равно

$$N_4 = N \cdot \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

Следовательно,

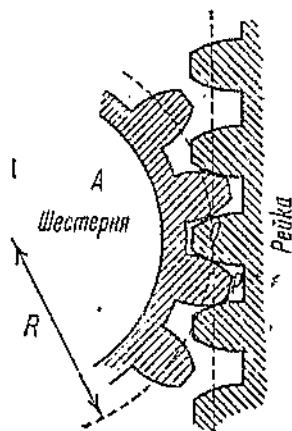
$$\omega_4 = \frac{2\pi N_4}{60} = \frac{2\pi N}{60} \cdot \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

Таким образом

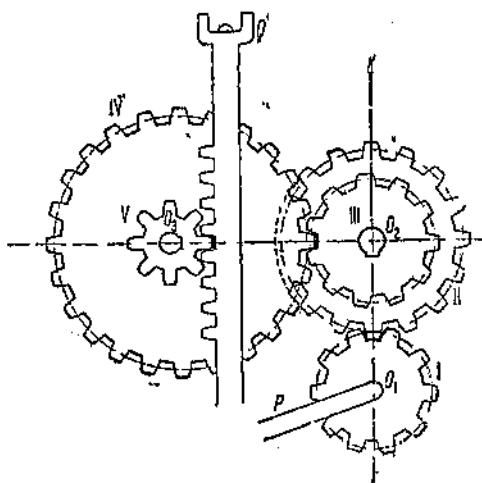
$$v = \frac{2\pi N}{60} \cdot \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \cdot R = 0,18 \text{ см/сек.}$$

§ 16. Заключение. Мы рассмотрели в этой главе несколько механизмов, различных между собой как по конструкции (ременная и зуб-

чатая передачи), так и по назначению (преобразование вращательного движения во вращательное же и вращательного движения в поступательное). Тем не менее объединение этих механизмов не является случайным. Общая всем им идея заключается в том, что при отсутствии скольжения окружные скорости двух соприкасающихся тел одинаковы. Такими телами могут быть приводной ремень и окружность шкива, окружности



Фиг. 24.



Фиг. 25.

двух сцепленных колес, окружность шестерни и рейки. Обозначая эту общую величину скорости через v , мы имеем формулу:

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2.$$

Первые два члена дают формулу зубчатой рейки, последние два члена — общую формулу (6) как зубчатой, так и ременной передач. Вот эта одинаковость расчетной формулы и связывает вместе все эти, на первый взгляд различные механизмы, которые, таким образом, приводятся к одной общей схеме. Установление таких схем, объединяющих несколько, казалось бы, разнородных предметов, и является основным признаком сознательного отношения к окружающей действительности, которое необходимо и для научного исследования ее и для определения наилучших способов ее использования в практической деятельности.

Задачи.

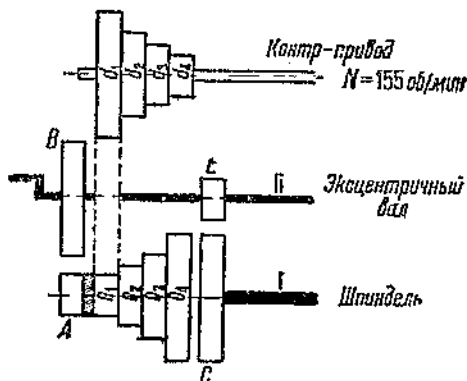
9. На валу I, дающем 200 об./мин., сидит шкив диаметром 450 мм. Какого диаметра шкив надо посадить на валу II, получающем вращение от вала I, если он должен давать 150 об./мин.

Отв. 600 мм.

10. Ремень, обхватывающий шкив диаметром 120 мм, имеет скорость 15 м/сек. Чему равны окружная v и угловая ω скорости шкива и число n его оборотов в минуту?

Отв. $v = 15$ м/сек; $\omega = 25,1$ 1/сек; $n = 240$ об./мин.

11. На фиг. 26 изображена схема привода токарного станка с одним перебором. На шпинделе I свободно сидит ступенчатый шкив $D_1—D_4$, с которым жестко соединена шестерня A. Зубчатое колесо C, заклиненное на шпинделе неподвижно, может при помощи болта сцепляться со ступенчатым шкивом $D_1—D_4$, который приводится во вращение ремнем от ступенчатого шкива $d_1—d_4$ контрпривода. Какие различные числа оборотов $N_1—N_4$ шпинделя можно получить, если контрпривод делает $N = 155$ об/мин, ступенчатый шкив $D_1—D_4$ сцеплен со шпинделем, а приводной ремень последовательно перебрасывается по всем ступеням шкивов? Диаметры их равны: $D_1 = d_4 = 90$ мм; $D_2 = d_3 = 128$ мм; $D_3 = d_2 = 157$ мм и $D_4 = d_1 = 190$ мм.



Фиг. 26.

Отв. При положении ремня на первой ступени D_1 число оборотов N_1 будет

$$N_1 = N \frac{d_1}{D_1} = 327 \text{ об/мин.}$$

При положении ремня на следующих ступенях числа оборотов будут

$$N_2 = 198 \text{ об/мин; } N_3 = 121,4 \text{ об/мин; } N_4 = 73,4 \text{ об/мин.}$$

12. На фиг. 26 цифрой II изображен эксцентричный вал, на котором насажены наглухо зубчатое колесо B, могущее сцепляться с шестерней A ступенчатого шкива $D_1—D_4$, и шестерня E, могущая приводить во вращение шпиндель I через шестерню C. При работе с перебором ступенчатый шкив $D_1—D_4$ расцепляется с шестерней C и вращение контрпривода передается сначала на ступенчатый шкив $D_1—D_4$, потом через шестерни A и B на эксцентричный вал II, наконец, через E и C передается шпинделю. Определить числа оборотов $N_1'—N_4'$ шпинделя при положении ремня на ступенях $D_1—D_4$ шкива при работе с перебором, если числа зубцов колес A, B, E и C соответственно равны $z_A = 38$, $z_B = 94$, $z_E = 22$ и $z_C = 66$.

Остальные данные смотри в предыдущей задаче.

Отв. При положении ремня на первой ступени D_1 число оборотов N_1' будет

$$N_1' = N \frac{d_1}{D_1} \cdot \frac{z_A \cdot z_E}{z_B \cdot z_C} = 44,2 \text{ об/мин.}$$

Аналогично:

$$N_2' = 26,7 \text{ об/мин; } N_3' = 16,4 \text{ об/мин; } N_4' = 9,9 \text{ об/мин.}$$

ГЛАВА 4.

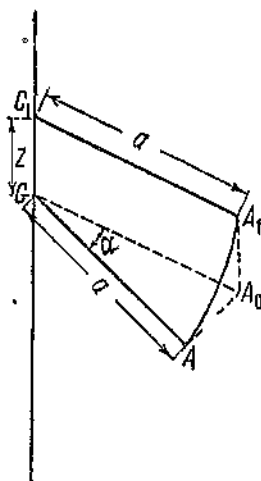
ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ.

§ 17. Винтовая линия. Представим себе, что тело равномерно вращается вокруг некоторой оси и вместе с тем равномерно перемещается вдоль этой оси поступательным движением; такое движение будет иметь, например, винт, ввинчивающийся в гайку, буравчик, ввертывающийся в пробку, и т. п. Получающееся, таким образом, движение носит название винтового.

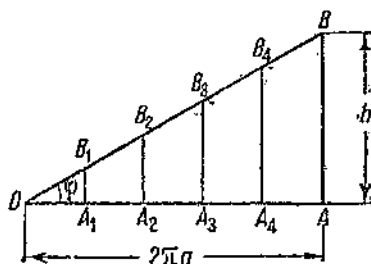
Рассмотрим траектории (линии), описываемые различными точками тела в винтовом движении.

Возьмем какую-нибудь точку A , находящуюся на расстоянии a от оси вращения (фиг. 27). Эта точка во все время движения будет находиться на расстоянии a от оси вращения, т. е. будет перемещаться по поверхности круглого цилиндра радиуса a , ось которого совпадает с осью вращения. Повороту тела на равные углы вокруг оси вращения соответствуют равные же перемещения его вдоль оси. Пусть повороту тела вокруг оси на угол α соответствует перемещение z вдоль этой оси; в результате обоих этих совместных движений точка A тела из положения A перейдет в положение A_1 , двигаясь по отрезку AA_1 , так называемой винтовой линии.

Посмотрим, каким образом можно построить винтовую линию. Будем откладывать по горизонтальной прямой пути, проходимые точкой A во вращательном движении (дуга AA_0 на фиг. 27), — пусть это будут отрезки OA_1 , OA_2 , OA_3 (фиг. 28), — а по вертикали — соответствующие им перемещения по оси цилиндра A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , ...; во всех случаях будем считать перемещения от начала движения. Вследствие пропор-



Фиг. 27.



Фиг. 28.

циональности перемещений по оси и вокруг оси мы увидим, что точки B_1 , B_2 , B_3 , ... расположатся по одной прямой OB . Когда тело сделает полный оборот, точка A во вращательном движении пройдет путь $OA = 2\pi a$, равный окружности цилиндра, а в поступательном движении передвинется на расстояние $AB = h$, называемое шагом винтовой линии ¹⁾. Мы получим винтовую линию, если полученный прямоугольный треугольник OAB наведем на поверхность цилиндра так, чтобы точка B пришлась над начальной точкой O ; таким путем у нас получится один виток винтовой линии. Повторив этот виток столько раз, сколько было оборотов вокруг оси, мы и получим траекторию точки A —

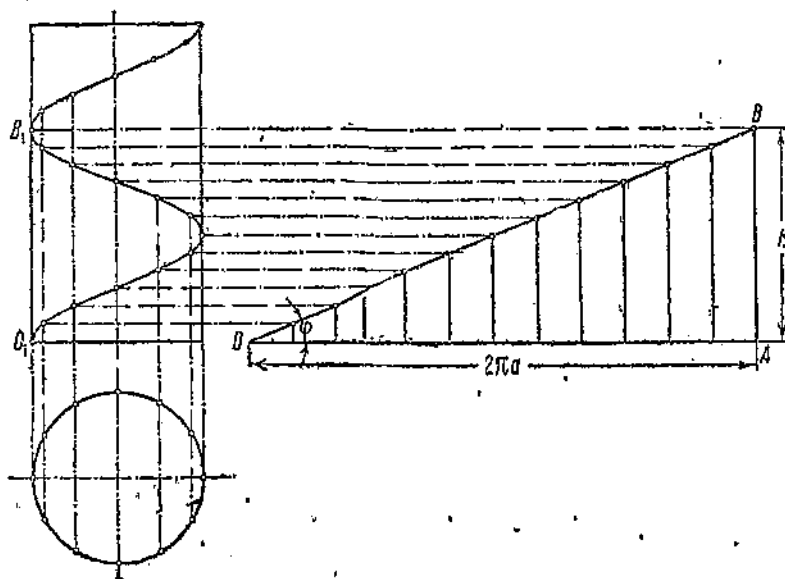
¹⁾ Не следует смешивать этот шаг — величину поступательного перемещения по оси за время одного оборота — с шагом зубчатого зацепления, о котором мы говорили в предыдущей главе; это два совершенно между собой различные понятия.

винтовую линию (фиг. 29). Угол подъема φ (наклон винтовой линии) в треугольнике OAB определится из условия

$$\operatorname{tg} \varphi \text{ (тангенс } \varphi) = \frac{h}{2\pi a}.$$

Полученная таким образом винтовая линия даст нам простой однокходовый винт.

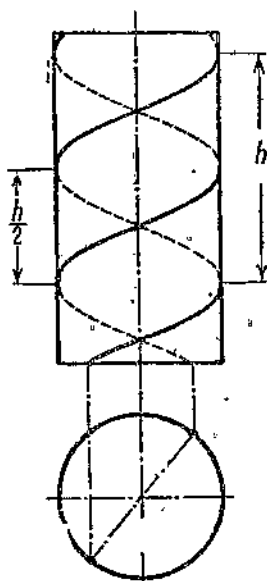
Если мы построим траектории двух точек, находящихся на поверхности цилиндра на концах одного диаметра (фиг. 30), то совокупность их даст нам так называемый двухходовый винт; если взять траектории трех точек, лежащих на равных расстояниях по окружности ци-



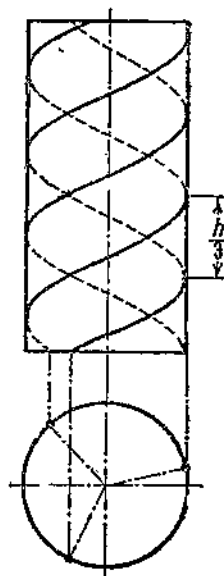
Фиг. 29.

линдра, то мы получим трехходовый винт (фиг. 31); аналогичным способом можно образовывать и вообще многоходовые винты. Так как каждая винтовая линия (нитка) на реальных винтах осуществляется в виде треугольного или четырехугольного возвышения или канала на поверхности цилиндра, то, чтобы определить число ходов (ниток) данного винта, нужно посмотреть в торец; если он заканчивается одним концом, то винт однокходовый, если двумя — двухходовый, и т. д. Можно также, держа палец у какой-нибудь нитки, сделать полный оборот вокруг винта по этой нитке другим пальцем: если винт однокходовый, палец окажется на соседней витке, при двухходовом — через один виток, при трехходовом — через два, и т. д. В связи с этим не следует смешивать шаг винта с расстоянием по оси между двумя соседними витками; только для однокходового винта шаг равняется этому расстоянию; для двухходового шаг вдвое больше этого расстояния, для трехходового — втрое и т. д.

Зная шаг винта h , нетрудно вывести формулу, связывающую угловую ω и поступательную v скорости винта. Если n есть число оборотов в секунду, то поступательное перемещение винта за одну секунду



Фиг. 30.



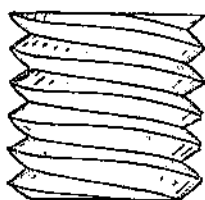
Фиг. 31.

будет nh . Так как скорость поступательного движения численно равна перемещению за одну секунду, то, если шаг h выражен в сантиметрах,

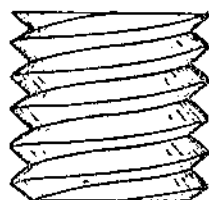
$$v = nh \text{ см/сек.} \quad (8)$$

Но $\omega = 2\pi n$; определив отсюда n и подставив в формулу (8), будем иметь

$$v = \frac{h}{2\pi} \omega. \quad (8a)$$



Левая нарезка



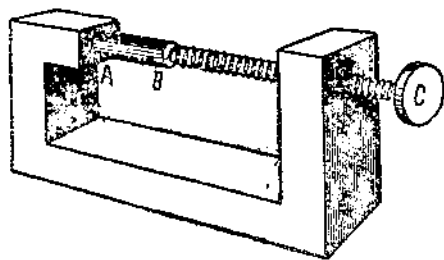
Правая нарезка

Фиг. 32.

Различают еще винты с правой и левой нарезкой. В винте с правой нарезкой подъем винтовой линии вверх идет слева направо; в винте с левой — наоборот, справа налево (фиг. 32). На практике в подавляющем большинстве случаев употребляются винты с правой нарезкой; но все же могут представиться случаи, когда приходится иметь дело с винтами и с левой нарезкой.

Винт употребляется в технике в самых разнообразных случаях. Одним из наиболее важных является применение винта к точному измерению расстояний (фиг. 33) (микрометричный винт). Поместив измере-

мую длину AB между неподвижной площадкой A и подвижным концом B винта, отмечают положение последнего. После этого, вынув тело, до-

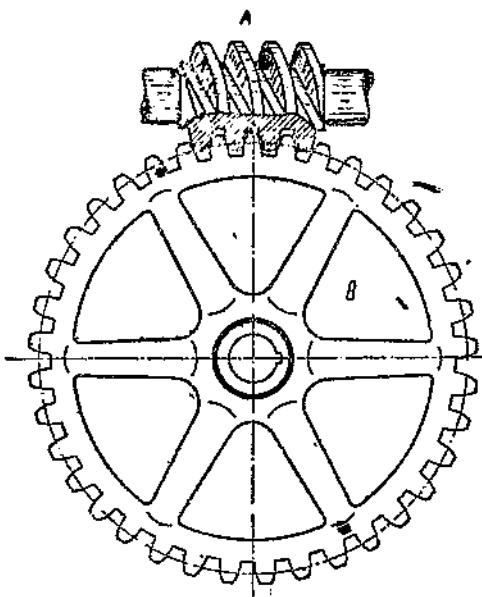


Фиг. 33.

водят винт до соприкосновения с пластинкой A и считают для этого число полных оборотов и долей оборота винта. Если шаг винта равен, например, $0,5$ мм, а окружность винта (или диска C , скрепленного с винтом) разделена на 50 частей, то полному обороту винта соответствует $0,5$ мм, а одной пятидесятой его части, которую мы можем отсчитать на разделенном круге C , со-

ответствует $0,01$ мм. Таким образом мы получаем возможность измерять длины с точностью до одной сотой миллиметра.

§ 18. Червячная передача. Винтовым движением можно пользоваться для передачи вращения между двумя непересекающимися взаимно



Фиг. 34.

перпендикулярными осями. Рассмотрим употребляющуюся для этой цели червячную передачу. Червячная передача состоит из червяка A (фиг. 34) и сцепляющегося с ним зубчатого колеса B . Червяк представляет собой стальной цилиндр с винтовым выступом четырехугольного сечения, представляющим одноходовой или многоходовой винт. Для возможности работы червячной передачи необходимо, чтобы расстояние между двумя соседними нитками червяка равнялось шагу зубчатого колеса. Если червяк одноходовой, то при полном его обороте колесо повернется на один зубец, если червяк двухходовой, то при полном обороте его две нитки увлекут два зубца червячного колеса, и т. д. Вообще, если число

ходов червяка равно m , а число зубцов колеса равно z , то полному повороту червяка соответствует поворот колеса m зубцов или на $\frac{m}{z}$ частей оборота колеса. Если через $\omega_{\text{кол}}$ и $\omega_{\text{чер}}$ обозначим угловые скорости колеса и червяка, то будем иметь равенство:

$$\omega_{\text{кол}} = \frac{m}{z} \omega_{\text{чер}}$$

или, вводя числа оборотов N колеса и червяка:

$$N_{\text{кол}} = \frac{m}{z} N_{\text{чер}} = k N_{\text{чер}}. \quad (7)$$

Величина $\frac{m}{z} = k$ есть передаточное число в червячной передаче; сравнивая его с соответствующими выражениями предыдущей главы, замечаем, что числу ходов червяка соответствует число зубцов ведущего колеса.

Особенностью червячной передачи является то, что при ее помощи можно получать очень значительное уменьшение числа оборотов (угловой скорости). Так, если $z = 36$, то при одноходовом червяке получается уменьшение угловой скорости в 36 раз — уменьшение при помощи только одной пары зубчатых колес недостижимое.

Пример 13. Тележка перемещается на колесах диаметром $D = 400$ мм. На оси передней пары колес закреплено червячное колесо с $z = 40$ зубцами, приводимое в движение от одноходового червяка, делающего $N = 1600$ об/мин. Определить скорость перемещения тележки (равную окружной скорости колес).

Угловая скорость червяка равна

$$\omega_{\text{чер}} = \frac{2\pi N}{60} \text{ 1/сек.}$$

Следовательно, угловая скорость червячного колеса согласно формуле (7) будет,

$$\omega_{\text{кол}} = \frac{2\pi N}{60} \cdot \frac{1}{z} = \frac{4\pi}{3} \text{ 1/сек.}$$

Умножив ее на $\frac{D}{2}$ — радиус колеса, найдем окружную скорость последнего:

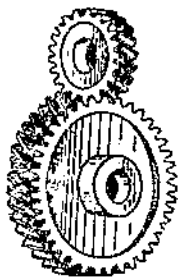
$$v = \frac{4}{3} \pi \cdot 20 = 84 \text{ см/сек,}$$

которая и даст искомую скорость тележки.

§ 19. Винтовая передача. В тех случаях, когда при передаче между двумя непараллельными и непересекающимися валами (обыкновенно взаимно перпендикулярными), не требуется очень большого уменьшения числа оборотов (как при червячной передаче), употребляют так называемые винтовые колеса (фиг. 35). Последние представляют насаживаемые на сцепляющиеся валы многоходовые винты, число ниток которых соответствует числу зубцов обыкновенного зубчатого колеса. Если ведущее колесо имеет z_1 ниток, а ведомое z_2 , то в течение полного оборота ведущего колеса ведомое сделает всего $\frac{z_1}{z_2}$ оборота, и соотношение между угловыми скоростями ω_1 ведущего и ω_2 ведомого колес будет

$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \omega_1.$$

Для возможности совместной работы двух винтовых колес необходимо, чтобы измеренные по перпендикуляру к винтовой линии ширина

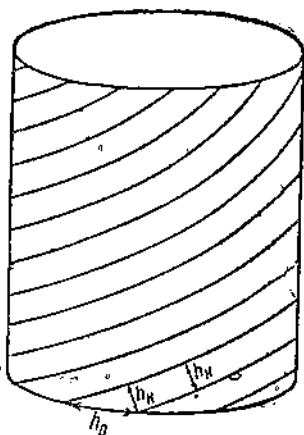


Фиг. 35.

канавки и толщина нитки были бы и на том и на другом колесах одинаковы (сумма ширины канавки и длины нитки составляет так называемый нормальный шаг винтового колеса, который не следует смешивать с окружным шагом, измеряемым по окружности торца).

Для цилиндрических зубчатых колес нормальный и окружной шаг совпадает, для винтовых же нет, как показано на фиг. 36, где h_0 есть окружной, а h_H — нормальный шаг винта.

Большим достоинством как винтовой, так и червячной передач является плавность их работы, отсутствие каких бы то ни было толчков. Недостатком их является то обстоятельство, что в них, как и в винте, вращающемся в гайке, во время движения происходит скольжение винтовых ниток одна по другой. Сопровождающее это скольжение трение разогревает оба сцепленных колеса, что заставляет обращать особое внимание на искусственное охлаждение механизма во время работы.



Фиг. 36.

§ 20. Заключение. Заканчивая эту главу, подведем итоги приобретенным нами в ней сведениям. Мы познакомились с третьим основным видом движения, так называемым винтовым движением, представляющим комбинацию равномерных поступательного и вращательного движений. Мы определили основные геометрические характеристики — шаг h и наклон φ винтовой линии и вывели основную формулу (8), связывающую скорости поступательного и вращательного движений, образующих в своей совокупности винтовое. Затем мы познакомились с практическими применениями винтового движения: во-первых,

при преобразовании вращательного движения в поступательное, рассмотренном нами на примере микрометричного винта, и, во-вторых, при преобразовании вращательных движений при непараллельных и пересекающихся осях (винтовая и червячная передачи). Формула (7), связывающая в последнем случае обе угловые скорости, вполне одинакова с такой же формулой, (7), выведенной нами в предыдущей главе при преобразовании вращений вокруг параллельных и пересекающихся осей при помощи зубчатых колес; однако не нужно забывать и существенной разницы между обоими видами передачи; в случае зубчатых колес скольжение почти отсутствует, в случае же винтовых и червячных колес скольжение имеет очень заметную величину, как это и имело место в нашем исходном случае — движении винта в гайке, где нельзя избежать трения между поверхностями винта и гайки. Таким образом одинаковость кинематической формулы (7) еще не обозначает одинаковости конструктивных условий в том и в другом случаях. Однако рассмотренными приложениями не ограничивается вся обширная область технических применений винта; ниже, в теории машин, мы познакомимся еще с одним применением последнего, а именно — для передачи силы, например, в случае винтового пресса и т. д.

Задачи.

13. Одноходовой червяк делает 900 оборотов в минуту и передает движение колесу с 30 зубцами. Определить число оборотов колеса в минуту.

Отв. 30 об/мин.

14. Тот же вопрос при трехходовом червяке.

Отв. 90 об/мин.

15. С какой скоростью будет перемещаться конец винта, имеющего шаг $h = 1$ см, если угловая скорость вращения винта составляет 60 об/мин.

Отв. $v = 1$ см/сек.

Глава 5.

РАВНОМЕРНО ПЕРЕМЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 21. Средняя скорость неравномерного движения. Все движения, которые мы до сих пор изучали, отличаются тем свойством, что скорость их все время остается одинаковой — не увеличивается и не уменьшается. Этим свойством обладают все так называемые равномерные движения, безразлично, будет ли то поступательное, вращательное или винтовое движение. Такого рода движения, являясь в технике одними из самых важных (почему — об этом нам придется говорить в части, посвященной динамике), конечно, не исчерпывают всего разнообразия движений в природе и технике. Более того, они являются скорее исключением, чем правилом. Рассмотрим, например, движение поезда. Можно ли сказать, что его движение является вполне равномерным? Конечно, нет. На спусках он движется быстрее, на подъемах — медленнее средней скорости своего движения. Как же определить эту среднюю скорость? Для этого определяют путь s , который поезд прошел за какой-нибудь достаточно большой промежуток времени t , и затем делят s на t ; полученная в результате величина и будет средней скоростью за этот промежуток времени t . Таким образом средней скоростью неравномерного движения за некоторый промежуток времени t называют скорость такого равномерного движения, в котором за то же время t будет пройден тот же путь s ; для получения средней скорости мы в течение некоторого промежутка времени как бы заменяем исследуемое движение равномерным. Если мы хотим детальнее изучать изменение скорости в исследуемом неравномерном движении, то нам придется разбивать рассматриваемые промежутки времени на более мелкие; в нашем примере с поездом можно определять среднюю скорость за 1-й, 2-й, 3-й час движения; при более точном исследовании ничто не мешает нам определять среднюю скорость за 1-ю, 2-ю, 3-ю минуту и даже за каждую секунду; чем меньше мы будем брать промежутки, на которые подразделяем все время движения, тем точнее мы можем судить об изменении скорости в течение всего времени движения.

Пример 14. Найти среднюю скорость движения поршня цилиндра паровой машины, если в минуту он делает 40 полных движений взад и вперед, а длина рабочего хода равна 180 мм.

За каждое движение поршня в одну сторону проходит путь 180 мм, а за время полного движения 360 мм, а в минуту $40 \cdot 360 = 14400 \text{ мм} = 14,4 \text{ м}$. Следовательно, средняя скорость будет равна $14,4 \text{ м/мин}$ или $0,24 \text{ м/сек}$.

§ 22. Свободное падение. Простейшим видом неравномерного движения будет такое, в котором скорость за одинаковые промежутки времени возрастает или убывает на одинаковое значение. Если скорость возрастает, то движение носит название равноускоренного, если убывает, то движение называется равнозамедленным. Наиболее обычным примером равноускоренного движения является свободное падение тела, изучением которого мы сейчас и займемся.

Если с большой высоты, например с крыши многоэтажного дома, выпустить из руки камень или другое какое-нибудь тело, то сначала оно падает сравнительно медленно (можно следить за его падением глазами), а потом движение его становится все более и более быстрым. В тот момент, когда камень был выпущен из руки, скорость его была равна нулю, если только мы не сообщили начальной скорости, толкнув его вниз. Через одну секунду после начала падения его скорость делается настолько большой, что тело, двигаясь с такой же скоростью равномерно, прошло бы за секунду путь около 10 м (точнее 9,81 м). Через 2 секунды после начала движения его скорость увеличится еще на столько же и будет приблизительно равна 20 м/сек (точнее $2 \cdot 9,81 = 19,6 \text{ м/сек}$). Через 3 секунды она будет равна $3 \cdot 9,81 = 29,4 \text{ м/сек}$ и т. д.; в течение каждой секунды скорость будет возрастать на $9,81 \text{ м/сек}$. Это постоянное число обозначается буквой g и носит название ускорения силы тяжести. Вообще говоря, ускорением в равноускоренном движении называется отношение приращения скорости за некоторый промежуток времени к величине этого последнего (аналогично тому, как скорость измеряется отношением приращения пути к соответствующему промежутку времени). Подобно тому как скорость имеет свои единицы (м/сек , км/час и т. д.), так и ускорение измеряется при помощи своих специальных единиц ускорения.

В качестве единицы ускорения принимают такое ускорение, при котором в единицу времени скорость увеличивается на единицу скорости. Чтобы вообще найти ускорение, мы должны получившееся приращение скорости разделить на промежуток времени, в течение которого это увеличение имело место. Подобно тому как для получения единицы скорости мы должны единицу длины делить на единицу времени (м/сек или см/сек), так для получения единицы ускорения мы должны единицу скорости еще раз делить на единицу времени — секунду; таким образом получают выражения:

$$\text{м/сек} : \text{сек} = \text{м/сек}^2$$

или

$$\text{см/сек} : \text{сек} = \text{см/сек}^2.$$

Единица ускорения, обозначаемая м/сек^2 , будет представлять ускорение, при действии которого скорость в секунду увеличивается на 1 м/сек , а единица ускорения см/сек^2 будет представлять ускорение, при действии которого скорость в секунду увеличивается на 1 см/сек . Вспомни-

ная, что при действии ускорения g скорость падающего тела увеличивается каждую секунду на $9,81 \text{ м/сек}$, мы можем записать, что величина ускорения земного притяжения g будет

$$g = 9,81 \text{ м/сек}^2$$

или, если за единицу длины мы будем брать сантиметр, то

$$g = 981 \text{ см/сек}^2.$$

В свободном падении через t секунд после начала движения скорость v тела будет равна

$$v = gt. \quad (9)$$

Если бы мы захотели изобразить этот закон графически, откладывая по горизонтали время t в секундах, а по вертикали — скорость v в м/сек , то получили бы прямую линию (фиг. 37).

Посмотрим теперь, как определить путь, пройденный в свободном падении за данный промежуток времени. В равномерном движении мы множили для этой цели промежуток времени t на значение скорости v . Так же можно поступить и в нашем случае; только вследствие непостоянства скорости в течение всего движения нам придется брать среднюю скорость за рассматриваемый промежуток времени. В случае равноускоренного движения эта средняя скорость, как можно было бы

доказать, равна разделенной пополам сумме наименьшей (в начале) и наибольшей (в конце) скоростей в течение этого промежутка. Если мы возьмем промежуток от начала первой до конца t -й секунды, то в начале этого промежутка скорость будет равна нулю, а в конце его по формуле (9) будет gt . Складывая обе эти скорости и делия полученную сумму пополам, находим среднюю скорость за первые t секунд, равную

$$v_{\text{ср}} = \frac{0 + gt}{2} = \frac{gt}{2}.$$

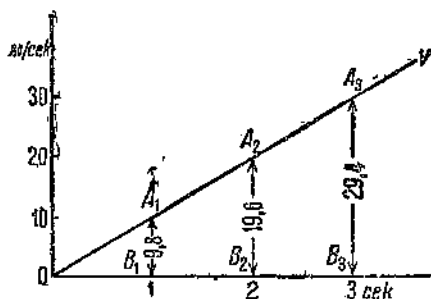
Помножив эту скорость на время t движения, получим пройденный путь за это время:

$$s = v_{\text{ср}} \cdot t = \frac{gt^2}{2}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) решают все задачи на свободное падение тела.

В виде примера составим по формуле (10) таблицу путей, пройденных падающим телом за различные промежутки времени:

$t \text{ сек}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s \text{ м}$	4,9	19,6	44,1	78,5	122,5	176,6	240,3	313,9	396,9	490



Фиг. 37.

По этой таблице можно представить себе пути, проходимые парашютистом во время затяжного прыжка; мы видим, что в течение первых 10 секунд после прыжка он пролетает почти полкилометра ¹⁾. Если бы мы хотели графически изобразить движение парашютиста, то, откладывая по горизонтальной прямой время в секундах, а по вертикали вниз пройденные пути в метрах, то мы получили бы изображенный на фиг. 38 график. Получившаяся на графике быстро уходящая вниз кривая носит название *параболы*.

Пример 15. Парашютист, делая затяжной прыжок с высоты 5 км, раскрыл парашют на расстоянии одного километра от земли. Сколько времени он летел вниз при нераскрытом парашюте?

Пройденный им путь равен 4 км. Подставляя в формулу (10), будем иметь:

$$4000 = \frac{9,8 \cdot t^2}{2},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{8000}{9,8}} = 28,6 \text{ сек.}$$

Пример 16. Для определения времени действия мгновенного фотографического затвора можно воспользоваться следующим приемом. Берут шарик и заставляют его без начальной скорости падать вдоль разделенной на сантиметры вертикальной шкалы, деления которой идут вниз и нулевое деление совпадает с верхним концом (местом, откуда шарик начал падать), и фотографируют шкалу вместе с шариком во время падения последнего. На фотографии шарик получается в виде темной полоски между двумя делениями шкалы. Зная, что верхнее деление соответствует n_1 см, а нижнее n_2 см, определить время действия затвора.

Если от начала падения шарика до начала действия затвора прошло t_1 сек, а до конца t_2 сек, то время его действия T равно $t_2 - t_1$. Значения t_2 и t_1 определяются из условия, что за t_2 сек шарик прошел путь n_2 см, а за t_1 сек — путь n_1 см. Следовательно, для определения t_1 и t_2 имеем уравнения:

$$n_1 = \frac{gt_1^2}{2},$$

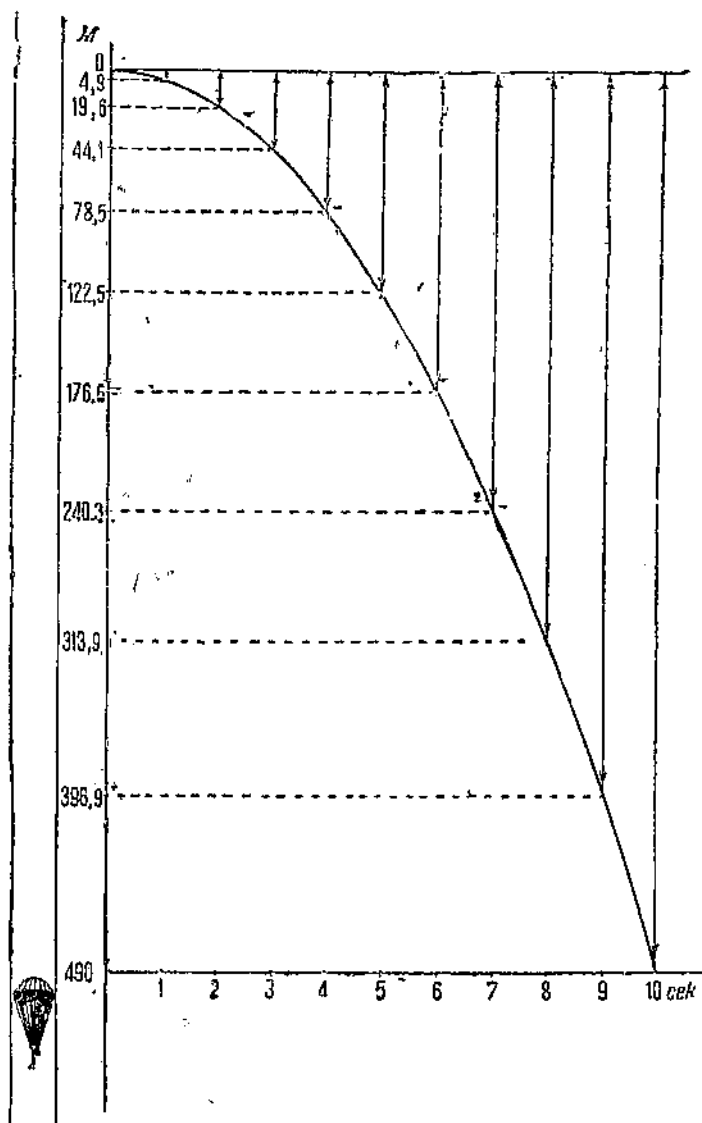
$$n_2 = \frac{gt_2^2}{2},$$

откуда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{n_1},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{n_2},$$

¹⁾ В действительности сопротивление воздуха замедляет движение падающего тела, и, кроме того, приводит к тому, что тело, пролетев определенное расстояние, дальше начинает падать не ускоренно, а равномерно. Так, парашютист падает ускоренным движением только около одного километра. Подробнее об этом см. ниже в главе 11.



Фиг. 38.

Вычитаем t_1 из t_2 , подставляем вместо g его значение $9,81$ (м/сек^2) или 981 (см/сек^2) и, извлекая квадратный корень, находим

$$T = t_2 - t_1 = \frac{1}{22} (\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}).$$

§ 23. Равномерно переменное движение с начальной скоростью. Если в момент начала падения тело уже обладало некоторой начальной

скоростью v_0 (например телу был сообщен толчок вниз), то вместо формулы (9) мы будем иметь

$$v = v_0 + gt,$$

т. е. скорость, которую тело постепенно приобретает вследствие наличия ускорения, складывается с начальной скоростью v_0 . Величина $g = 9,81 \text{ см/сек}^2$, как мы уже говорили, называется ускорением силы тяжести и показывает, насколько увеличивается скорость в каждую секунду. Кроме свободного падения могут быть равноускоренные движения с ускорениями, не равными g . Например при скатывании шарика с наклонной плоскости ускорение будет меньше, чем g . Обозначая в общем случае ускорение буквой w , мы для скорости равномерно ускоренного движения будем иметь формулу:

$$v = v_0 + wt. \quad (11)$$

При равномерном замедленном движении скорость в каждую секунду уменьшается на одно и то же значение. Поэтому в этом случае ускорение w будет отрицательным и формула (11) примет вид:

$$v = v_0 - wt. \quad (11a)$$

Следовательно, при равномерно замедленном движении скорость в определенный момент делается равной нулю.

Примером равномерно замедленного движения может служить движение пули при выстреле из винтовки вертикально вверх. На определенной высоте, когда скорость пули „иссякает“, пуля остановится и, очевидно, сейчас же начнет падать вниз.

Величину пройденного пути мы можем найти тем же способом, как и для движения без начальной скорости, умножая среднюю скорость за некоторый промежуток времени на величину этого промежутка. Если мы возьмем промежуток времени от начала первой до конца t -й секунды, то средняя скорость в течение этого промежутка будет

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{2} [v_0 + (v_0 + wt)] = v_0 + \frac{wt}{2}$$

для движения равноускоренного и

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{2} [v_0 + (v_0 - wt)] = v_0 - \frac{wt}{2}$$

для движения равнозамедленного. Отсюда для пройденного пути получаем формулу:

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2} \quad (12)$$

для движения равноускоренного и

$$s = v_0 t - \frac{wt^2}{2} \quad (12a)$$

для движения равнозамедленного.

Отметим, что формулы (11) и (11a), (12) и (12a) отличаются только знаком при ускорении w . Если принять, что замедление w

в формулах (11а) и (12а) соответствует отрицательному ускорению, то в обоих случаях можно пользоваться одной формулой (11) для скорости и формулой (12) для пройденного пути.

Пример 17. На какую высоту подыметсЯ камень, брошенный вертикально вверх с начальной скоростью 70 м/сек (ускорение g можно считать для простоты 10 м/сек²)? В этом случае на камень при его взлете вверх действует ускорение силы тяжести вниз, т. е. противоположно направлению движения. Поэтому ускорение силы тяжести g следует считать отрицательным и применить формулы (11а) и (12а).

В наивысшей точке подъема камень на момент остановится, прежде чем начать спускаться. Положив поэтому в формуле (11а) $v = 0$, $v_0 = 70$ и $a = g = 10$, получим

$$0 = 70 - 10t,$$

откуда $t = 7$ сек, т. е. камень будет подыматься вверх 7 сек. Пройденный за это время путь, т. е. высота подъема, получится по формуле (12а):

$$s = 70 \cdot 7 - \frac{10 \cdot 7^2}{2} = 245 \text{ м.}$$

§ 24. Центростремительное ускорение. До сих пор говоря о скорости мы рассматривали скорость, как некоторую величину. Но обычно скорости приписывают и некоторое направление. Под направлением скорости в каждый момент понимают направление движения тела.

Величины, такого рода, для полного определения которых надо знать не только их численное значение, но и направление, называются векторными величинами или векторами. Всякий вектор, а в том числе и скорость, можно изобразить направленным отрезком. Выберем какой-нибудь отрезок, длина которого будет изображать единицу скорости. Пусть например отрезок в 1 см длины изображает скорость в 1 м/сек. Вектор скорости можно изобразить тогда в виде отрезка, направление которого совпадает с направлением движения, а длина которого в соответствующих единицах равна величине скорости. Если движение совершается по прямой, то скорость так же направлена по этой прямой в сторону движения.

Таким образом при прямолинейном движении может изменяться лишь величина скорости, а направление скорости всегда совпадает с направлением прямой, по которой происходит движение.

Мы рассматривали в предыдущем параграфе равномерно переменное движение по прямой. При этом ускорение равномерно-переменного движения мы определили как изменение величины скорости в единицу времени. Ускорение при прямолинейном движении характеризует таким образом изменение скорости по величине.

Однако скорость может изменяться не только по своей величине, но и по своему направлению. Такого рода случай будет например при движении по окружности. В этом случае скорость направлена по касательной к окружности.

Мы остановимся на простейшем случае движения по окружности, а именно на равномерном движении. В этом случае величина скорости остается неизменной, а изменяется только направление скорости.

Мы введем величину, характеризующую изменение скорости по направлению. Эта величина носит название центростремительного ускорения.

Пусть точка движется с постоянной скоростью v по окружности с центром в O и радиусом $OA = R$ (фиг. 39). В этом движении за очень малый промежуток времени t она перейдет из A в B . Если время t невелико, то можно дугу AB заменить хордой AB , ее стягивающей. Если бы точка сохраняла ту скорость v , которая у ней была в положении A , то она прошла бы путь $AC = vt$, двигаясь по прямой линии, касательной к окружности в точке A . Но на самом деле она по истечении времени t окажется не в C , а в B , т. е. уклонится от своего первоначального положения на отрезок CB . Иными словами, к перемещению AC перпендикулярно диаметру AOK прибавится теперь некоторое перемещение $CB = AD$ по направлению диаметра к центру окружности O . Попробуем определить величину этого перемещения. Проведем прямую BK , соединяющую точку B с другим концом диаметра AOK : треугольник ABK будет прямоугольный с прямым углом в точке B (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Далее, отрезок BD , параллельный отрезку AC , будет перпендикулярен к AK , т. е. будет перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу; по известной теореме геометрии катет



Фиг. 39.

AB будет средней пропорциональной между всей гипотенузой и прилежающим к точке A отрезком AD последней. Поэтому

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AK}$$

или

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AK}},$$

но

$$\overline{AB} = vt,$$

$$\overline{AK} = 2R$$

и

$$\overline{AD} = \frac{v^2 t^2}{2R} = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{R} \right) t^2.$$

Для равноускоренного движения без начальной скорости мы имели формулу:

$$s = \frac{1}{2} \omega t^2,$$

где ω есть ускорение. Сравнивая формулу для AD с формулой s , мы видим, что перемещение AD проходит равноускоренным движением, ускорение которого равно будет

$$\omega = \frac{v^2}{R}. \quad (13)$$

Это ускорение носит название центростремительного или нормального. Значение этого ускорения еще выяснится у нас в дальнейшем при изучении динамики.

Если мы в формуле (13) линейную скорость v заменим на основании формулы (5) (см. стр. 21) через ωr , где r есть радиус вращения, то формула для нормального ускорения примет вид:

$$a = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r. \quad (14)$$

Такой формулой выразится центростремительное ускорение в равномерном вращении с угловой скоростью ω для точки, отстоящей на расстоянии r от оси вращения.

§ 25. Заключение. Заканчивая эту главу, подведем итоги основным полученным в ней результатам. Во-первых, мы установили понятие о средней скорости и об ускорении для неравномерного движения; во-вторых, вывели две важные формулы для скорости и пути в равномерно-переменном движении:

$$v = v_0 \pm \omega t, \quad (11)$$

$$s = v_0 t \pm \frac{\omega t^2}{2} \quad (12)$$

и, наконец, в-третьих, использовали формулу (12) для вывода центростремительного ускорения в равномерном движении по окружности

$$\omega = \frac{v^2}{R}. \quad (13)$$

Особенно важное значение будут иметь эти формулы в курсе динамики, о чем мы заранее и предупреждаем наших читателей.

Задачи.

16. Тело движется со скоростью, которая увеличивается каждую секунду на 5 м/сек. Какой путь оно пройдет за 1 час?

Отв. 32 400 км.

17. Шар, пущенный с горы длиной 1,5 км, скатывается в течение 5 минут. Найти ускорение этого движения, считая его равноускоренным и принимая начальную скорость равной нулю.

Отв. $a = 0,033$ м/сек².

18. Паровоз при торможении теряет каждую секунду 1,5 м/сек единиц скорости, т. е. его ускорение отрицательно и равно 1,5 м/сек². Сколько времени пройдет до остановки поезда и на какое расстояние за это время продвинется поезд, если начальная скорость его равнялась 15 м/сек?

Отв. 10 мин; 75 м.

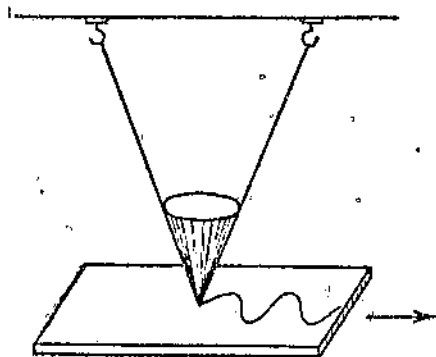
19. От поезда отделился задний вагон, который стал двигаться за поездом равнозамедленно, пока не остановился. Показать, что пройденный им путь будет в два раза меньше пути, пройденного за то же время поездом, если последний продолжал за то же время двигаться равномерно с той же самой скоростью, которую имел, и вагон в момент своего отрыва от поезда.

Глава 6.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ.

§ 26. Гармоническое колебание. Из других видов неравномерных движений в технике наиболее важными являются так называемые периодические движения. Под этим именем подразумевают движения, которые по истечении определенного постоянного промежутка времени (период движения) повторяются снова в том же самом порядке. Такого рода периодическим движением является, например, движение маятника часов, размахи которого взад и вперед все время повторяются совершенно одинаково один за другим. Следя более внимательно за движением маятника, мы заметим, что конец его отклоняется в обе стороны от некоторой средней точки, так называемого центра колебания. Такое же движение, кроме маятника, имеют частицы колеблющейся струны музыкального инструмента, пружины и т. д.; оно носит название гармонического колебания.

Если мы по горизонтальной прямой будем откладывать время t движения в секундах, а по вертикалям будем откладывать соответствующие отклонения от среднего положения, причем отклонения вправо будем, например, откладывать вверх от оси, а отклонения влево — вниз от нее, то мы получим волнообразную линию.



Фиг. 40.

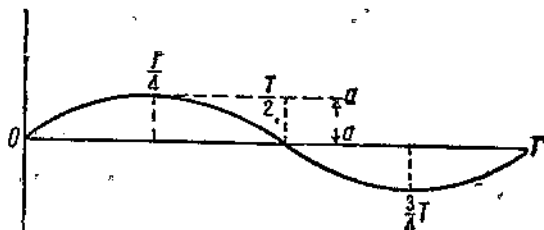
Сделаем так, чтобы маятник сам начертил эту линию. Для этой цели можно воспользоваться таким приспособлением (фиг. 40). В качестве маятника подвесим к потолку комнаты на двух длинных нитках тяжелый воронкообразный сосуд с маленьким отверстием внизу и заставим его колебаться, наполнив предварительно песком, который будет сыпаться на движущуюся равномерно под маятником горизонтальную доску, на-

правление движения которой должно быть перпендикулярно к направлению колебаний маятника. Сыплющийся струйкой песок начертит на доске волнообразную кривую (так называемую синусоиду), которая и даст нам графическое изображение отклонений маятника. Вид этой кривой за время одного периода колебания (которому соответствует отрезок OT по горизонтальной прямой) изображен на фиг. 41. В первую четверть периода маятник движется от центра O вправо до наибольшего отклонения a — a (так называемая амплитуда колебания), во вторую четверть маятник приближается к центру, в третью — удаляется от него в противоположном направлении и, наконец, в последнюю четверть периода снова возвращается к центру колебания. Расстояние между крайними точками, достигаемыми в гармоническом колебании, составляет так называемый размах колебания; половина раз-

маха дает амплитуду колебания. Время, необходимое для совершения двух размахов (взад и вперед), носит название периода гармонического колебания. Такое колебание получает название гармонического оттого, что совершенно по такому же закону движутся, как мы уже сказали, частицы звучащей струны, камертона и т. п. Не надо думать, однако, что всякое периодическое движение обязательно будет гармоническим колебанием.

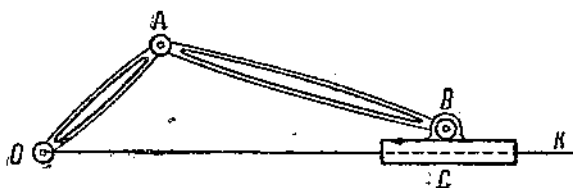
§ 27. Периодическое движение кривошипно-шатунного механизма. Кривошипно-шатунным механизмом называется механизм, употребляющийся для преобразования вращательного движения в возвратно поступательное и обратно. Он применяется в паровом двигателе, двигателях внутреннего сгорания и т. д.; в этих последних

пар или газ приводит в движение перемещающуюся в цилиндре ползунку или поршень C (фиг. 42), к которому при помощи шарнира B прикреплен шатун BA . Шатун в точке A соединен с кривошипом OA , который может вращаться вокруг неподвижного центра O . С кривошипом OA обычно жестко соединяется маховик (на фигуре не изображенный), для того чтобы сделать вращение равномерным. В двигателях внутреннего сгорания этот механизм служит для преобразования прямолинейного поступательного движения поршня во вращательное движение вала, но можно и обратно, заставляя вращаться кривошип, употреблять этот механизм для преобразования равномерного вращения в возвратно посту-



Фиг. 41.

пательное движение. Период движения будет равняться времени полного оборота кривошипа. Разделим (фиг. 43) окружность полного оборота кривошипа на 12 частей и обозначим точки деления 1, 2, 3, ..., 12. Крайние положения поршня, соответствующие делениям 6 и 12, дадут так называемые мертвые положения поршня; расстояние между ними есть рабочий ход механизма, который, очевидно, будет равен удвоенной длине кривошипа. Чтобы найти положение поршня для любого момента времени, например когда точка A кривошипа находится в точке 1 окружности, описываем из точки 1 на окружности —

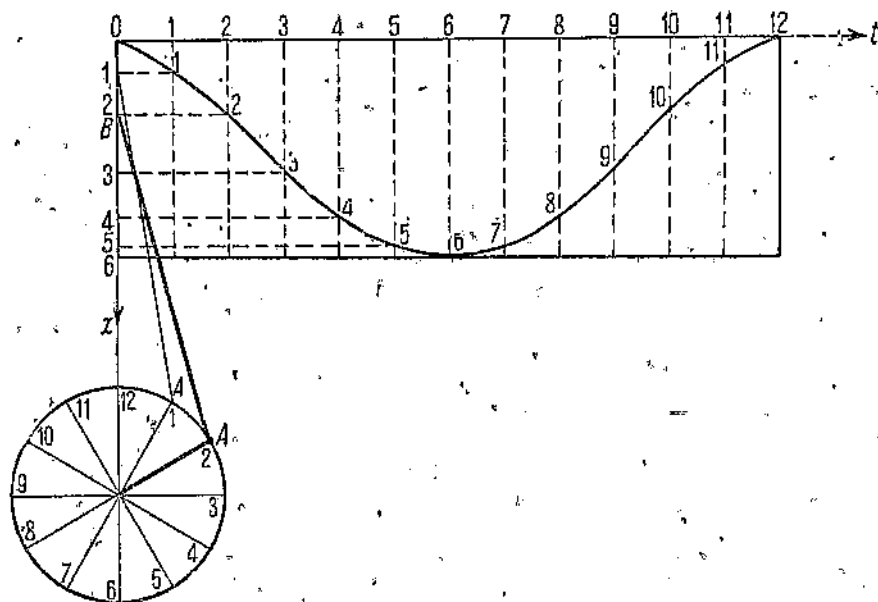


Фиг. 42.

пательное движение. Период движения будет равняться времени полного оборота кривошипа. Разделим (фиг. 43) окружность полного оборота кривошипа на 12 частей и обозначим точки деления 1, 2, 3, ..., 12. Крайние положения поршня, соответствующие делениям 6 и 12, дадут так называемые мертвые положения поршня; расстояние между ними есть рабочий ход механизма, который, очевидно, будет равен удвоенной длине кривошипа. Чтобы найти положение поршня для любого момента времени, например когда точка A кривошипа находится в точке 1 окружности, описываем из точки 1 на окружности —

траектории точки A кривошипа — дугу раствором циркуля, равным длине шатуна AB (конечно, в подходящем масштабе уменьшенной). Эта дуга в пересечении с прямой xx' отметит соответствующее моменту 1 положение поршня B . Совершенно так же найдем положения 2, 3, 4, ... поршня, соответствующие точкам 2, 3, 4, ... окружности, описываемой концом A кривошипа.

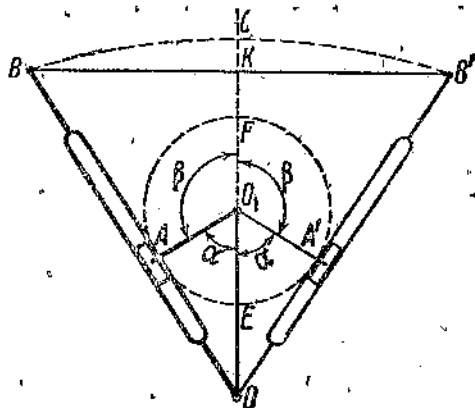
Чтобы построить график движения, через точку O проведем горизонтальную прямую Ox' (ось времени), перпендикулярную к направлению Ox движения поршня, отложим на ней равные отрезки, изображающие в некотором масштабе двенадцатые доли времени полного обо-



Фиг. 43.

рота; в полученных точках деления 1—12 проведем вертикальные прямые перпендикулярно к оси времен и снесем на них последовательные положения поршня B , проводя горизонтальные прямые, параллельные оси времен, как это сделано на фиг. 43 для первых шести положений кривошипа. Соединив полученные точки непрерывной кривой, мы и найдем график движения поршня. Полученная кривая очень похожа на синусоиду гармонического колебания, однако она ею не будет; в самом деле, внимательное изучение фиг. 41 и 43 покажет нам, что в гармоническом колебании движение точки в течение первой и второй четверти периода происходит совершенно одинаково (только в обратном порядке: в первой четверти точка идет вперед, а во второй — назад) и при этом проходятся совершенно одинаковые пути; в движении же поршня за первую четверть оборота (от 12 до 3) проходит путь несколько больший, чем за вторую (от 3 до 6) и, таким образом, в первой четверти движение совершается несколько быстрее, чем во второй.

§ 28. Кулисный механизм (шеппинг). В качестве третьего примера периодического движения рассмотрим движение кривошипно-кулисного механизма или шеппинга, употребляемого в станках для холодной обработки металлов с той целью, чтобы сделать более быстрыми холостые ходы механизма и таким образом сэкономить время, идущее на обработку какого-нибудь изделия. Схема этого механизма показана на фиг. 44. Буквами OB обозначена кулиса — достаточно широкий стержень (пластинка), в котором сделана канавка, где может перемещаться ползушка A . Кулиса OB может вращаться вокруг неподвижного центра O ; к концу B обычно прикрепляется при помощи шарнира горизонтальный шатун (на фигуре не показанный) с резцом, рабочий ход которого, таким образом, равняется наибольшему размаху BB' кулисы. Ползушка A при помощи шарнира соединена с кривошипом O_1A , вращающимся равномерно вокруг центра O_1 ; это равномерное вращение кривошипа преобразуется в качательное движение кулисы, в результате чего конец B и соединенный с ним резец будут совершать периодическое колебание по горизонтальной прямой BB' ¹⁾.



Фиг. 44.

Крайние положения OB и OB' , между которыми качается кулиса, будут соответствовать таким положениям кривошипа O_1A , при которых он будет перпендикулярен к линиям OB и OB' . Когда такие положения определены (геометрически это сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе OO_1 и катету O_1A), то мы можем измерить угол α , образуемый линиями O_1O и O_1A ; зная же этот угол, мы сможем найти соотношение между холостым и рабочим ходами механизма. Когда точка A движется по дуге $A'EA$, кривошип повернется на угол 2α , точка B из положения B' попадет в положение B , когда же точка A опишет дугу AFA' , то кривошип повернется на угол 2β и конец B кулисы из B вернется в B' . Так как угловая скорость кривошипа O_1A постоянна, то продолжительности движения конца B в одну и другую сторону будут относиться как углы поворота 2α и 2β или, проще, как α и β , или же, наконец, как α и $180^\circ - \alpha$ (так как $\alpha + \beta = 180^\circ$).

Так как $\beta > \alpha$, то дуга AFA' соответствует рабочему ходу механизма, а дуга $A'EA$ — его холостому ходу. Таким образом отношение продолжительностей холостого и рабочего ходов всецело определяется

¹⁾ Конец B , строго говоря, перемещается по дуге BCB' , окружности, но так как нам особенно большой точности не требуется, то мы будем считать эту дугу приблизительно равной хорде BB' .

при помощи длин OO_1 и O_1A . Для того же, чтобы определить длину BB' хода механизма, приходится ввести и длину OB кулисы. Мы имеем $\overline{BB'} = \overline{BK}$, но из подобия треугольников OBK и OO_1A следует

$$\frac{BK}{OB} = \frac{O_1A}{OO_1}$$

и, следовательно,

$$\overline{BB'} = 2\overline{OB} \cdot \frac{\overline{O_1A}}{\overline{OO_1}}$$

Приложим эти формулы к частному примеру. Пусть требуется сконструировать прибор, длина хода BB' которого равнялась бы 400 мм, а отношение между продолжительностями рабочего и холостого ходов было бы 2:1 (средняя скорость холостого хода была бы в два раза больше средней скорости рабочего хода).

Для того чтобы это имело место, угол α должен быть в два раза меньше угла β , а так как сумма их составляет 180° , то угол α должен равняться 60° , а $\beta = 120^\circ$. Но в прямоугольном треугольнике с углом $\alpha = 60^\circ$ катет O_1A должен быть вдвое меньше гипотенузы; таким образом

$$\overline{OO_1} = 2\overline{O_1A}.$$

Если BB' должно равняться 400 мм, то из равенства

$$\overline{BB'} = 2\overline{OB} \cdot \frac{\overline{O_1A}}{\overline{OO_1}},$$

подставив $BB' = 400$ и $\frac{O_1A}{OO_1} = \frac{1}{2}$, будем иметь:

$$\overline{OB} = \overline{BB'} = 400 \text{ мм.}$$

Что касается длин O_1A и OO_1 , то одна из них останется неопределенной и может быть выбрана из конструктивных соображений. Если, например, возьмем длину кривошипа равной $O_1A = 100$ мм, то расстояние между центрами O и O_1 кулисы и кривошипа должно быть взято равным 200 мм.

Отношение катета O_1A к гипотенузе OO_1 носит название косинуса заключенного между ними угла α ; значения косинусов для различных углов помещены в математических таблицах, пользуясь которыми в каждом отдельном случае по длинам OO_1 и O_1A всегда можно найти сначала величину косинуса, а затем и самого угла α . В разобранным нами случае, когда угол $\alpha = 60^\circ$, его косинус равен $1/2$.

§ 29. Заключение. Этой главой мы заканчиваем изучение первой части нашего курса — кинематики. В ней мы познакомились с тремя видами равномерного движения: равномерным движением точки (мы рассмотрели только случай прямолинейного движения), затем вращатель-

ным и винтовым движениями тела; далее — с равномерно ускоренным движением и, наконец, с наиболее часто встречающимися видами периодических движений. Эти движения, конечно, представляют только незначительную часть движений, рассматриваемых в кинематике, но нашей целью не являлось дать исчерпывающее описание всех движений, всех механизмов, тем более что каталог различных механизмов еще не составляет курса механики. Целью нашего курса, как и вообще курса всякой науки, является лишь указание тех общих принципов, общих формул, которые можно использовать при исследовании любых механизмов. Эти общие формулы сводятся к очень небольшому числу, а именно, мы имеем две формулы равномерного движения:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t};$$

далее, формулы, устанавливающие связь между угловой скоростью ω и числом оборотов в минуту или секунду:

$$\omega \text{ 1/сек} = 2\pi n \text{ об./сек} = \frac{\pi}{30} N \text{ об./мин};$$

затем формулу, дающую связь между угловой и линейными скоростями точек во вращательном движении:

$$v = \omega r;$$

далее, две формулы равномерно переменного движения:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$v = v_0 + at$$

и, наконец, формулу центростремительного ускорения:

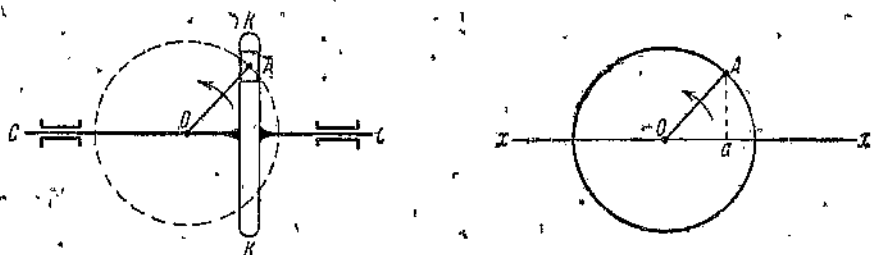
$$w = \frac{v^2}{R}.$$

Вот и весь тот арсенал кинематики, при помощи которого решается большое количество технических задач. Первые пять формул мы в достаточной степени использовали уже в рассмотренной части курса, последние три нам еще очень и очень пригодятся в дальнейшем.

Рассмотренные нами движения являются элементарными движениями, на которые можно разложить более сложные движения механизмов. Изучение различных механизмов представляет благодарную задачу всякого инженера, всякого техника, всякого сознательного рабочего. Важным орудием в этом изучении является графический метод исследования, с которым мы тоже несколько ознакомили своих читателей. Таким образом читатели имеют возможность сознательно отнестись ко всему аппарату кинематики; использование этого аппарата в дальнейшей работе будет, в первую очередь, зависеть уже от самого читателя.

Задачи.

20. Для преобразования равномерного вращения в прямолинейное гармоническое колебание служит механизм, называемый кулисой Вольфа (фиг. 45). Он состоит из собственно кулисы KK , в которой имеется прямолинейный прорез, и кривошипа OA , который равномерно вращается вокруг точки O . В прорезе кулисы перемещается ползун A , соединенный шарнирно с кривошипом. При равномерном вращении кривошипа кулиса KK и соединенный с нею



Фиг. 45.

стержень CC будут совершать прямолинейное гармоническое колебание. Построить график последнего, пользуясь описанным способом его получения.

Указание. В правой части фиг. 45 помещена геометрическая схема рассматриваемого движения. Точка A движется равномерно по окружности, из нее опускается перпендикуляр Aa на горизонтальный диаметр; движение точки a , основания этого перпендикуляра, и представит нам исследуемое движение кулисы KK .

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

СТАТИКА.

Глава 7.

ПОНЯТИЕ О СИЛЕ. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА.

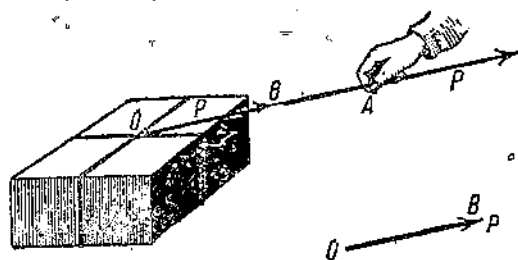
§ 30. Сила и ее измерение. Переходя ко второй части нашего курса — к статике, мы, говоря о силе, все же не можем рассматривать ее совершенно независимо от движения, поэтому эту главу можно рассматривать как вступительную не только ко второй части, но и к третьей части нашего курса — динамике.

Ежедневный опыт показывает нам, что если мы хотим привести в движение какое-нибудь тело, первоначально находившееся в покое, или если мы хотим изменить движение или даже совсем остановить движущееся тело, то мы должны приложить для этого определенное мускульное усилие, тем большее, чем большее действие мы желаем получить. Именно это знакомое каждому из нас ощущение мускульного усилия и явилось тем источником, из которого развилось понятие о силе. Посмотрим, какие отдельные части можно выделить в вводимом нами понятии о силе.

Если мы хотим сравнить мускульные силы двух людей, то обычно задаем им вопрос: какую наибольшую тяжесть каждый из них в состоянии поднять? Таким образом мы сравниваем усилие человеческих мускулов с некоторой определенной хорошо известной нам силой, например весом какого-нибудь определенного тела, положим, десятикилограммовой гири. Если мы хотим более точно определить величину какой-нибудь силы, то проще всего взять обыкновенные пружинные весы и, вместо того чтобы поднимать груз непосредственно рукой, поднимать его, прикрепляя к крючку весов. Показание весов и послужит мерой того усилия, которое мы должны употребить для подъема данного груза. Таким образом мы получаем простейший прибор для измерения силы, так называемый динамометр (силомер).

Конечно, для измерения больших усилий наш прибор не окажется пригодным, но основное положение остается неизменным: чтобы измерить величину силы, проще всего сравнить ее с весом какого-нибудь определенного хорошо известного тела. В качестве такого веса принимают килограмм — вес литра чистой воды при 4° Цельсия (когда вода имеет наибольшую плотность). Если приходится иметь дело с очень большими силами, то за единицу принимают тонну, равную 1000 кг; в точных же измерениях, где приходится иметь дело с небольшими силами, за единицу измерения силы удобнее принять тысячную часть килограмма — так называемый грамм.

Сила не определяется одной только величиной. Нетрудно заметить, что для определения силы необходимо еще знать ее направление. В самом деле, пусть (фиг. 46) мы имеем некоторую тяжесть, которую мы хотели бы сдвинуть с места. Мы обвязываем эту тяжесть веревками и в точке O к этим веревкам прикрепляем еще одну веревку, за которую и тянем с определенной силой рукой, взявшись за веревку в точке A . Точка O прикрепления веревки OA будет точкой приложения силы, направление веревки OA — направлением действующей силы. Наконец, чтобы изобразить величину нашей силы от O , по веревке OA отложим отрезок OB , который будет иметь столько-то определенно выбранных единиц длины, сколько килограммам равняется величина приложенной силы. После этого мы можем отбросить и нарисованное тело и веревку; полученный на фиг. 47 отрезок OB со стрелкой покажет нам и точку приложения, и направление, и самую величину приложенной силы; для определения величины нужно только знать, какой длины отрезок соответствует 1 кг и сколько таких отрезков поместится в отрезке, изображающем нашу силу.



Фиг. 46 и 47.

Отметим одну особенность точки приложения силы. Если дело идет о равновесии или движении всего тела в целом, то точку приложения силы можно как угодно перемещать по направлению (линии действия)

этой силы; так, в нашем примере движущую силу P можно было бы считать приложенной как в точке O , так и в точке A и вообще в любой точке веревки OA , за какую мы могли бы схватиться рукой. Для приводимого в движение груза это безразлично, но для веревки, конечно, нет; прилагая нашу руку в точке A , мы увидим, что вся веревка OA будет натянута, а прилагая ее непосредственно в точке O , мы увидим, что вся веревка OA останется совершенно ненатянутой. Таким образом, перенося точку приложения силы по линии ее действия, мы можем существенным образом изменить состояние внутренних напряжений в теле. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу (см. главу 8).

Величины такого рода, для полного определения которых недостаточно их числового выражения, а требуется знать и направление их, называются векторными величинами или векторами (слово „вектор“ по-латыни буквально значит „везущий“). Примером такой векторной величины и является сила, определяемая своей числовой величиной, направлением и точкой приложения.

§ 31. Силы в движении. Мы знаем, что если сила подействует на свободное покоящееся тело, то последнее придет в движение. Какого же рода будет это движение? — вот вопрос, интересовавший в давнопрошедшие времена древнегреческих ученых и в том числе творца наук механики — Аристотеля. Почти две тысячи лет взгляды Аристотеля были общепризнанными в науке, и только лет триста тому назад великие уче-

ные — итальянец Галилей и англичанин Ньютон — первые в полной мере доказали неправильность этих взглядов. Остановимся несколько подробнее на взглядах Аристотеля, потому что и в данный момент подавляющее большинство населения Земли все же бессознательно придерживается этих взглядов, и каждому приступающему к изучению механики в самую первую очередь надлежит возможно скорее избавиться от пережитков теории Аристотеля.

На чем же основывалась теория Аристотеля?

Устанавливая свою теорию, Аристотель исходил из следующего наблюдения. Он замечал, что для передвижения какого-нибудь тяжелого тела (например повозки) нужно приложить к нему определенную силу, в нашем примере — запрячь лошадь. Когда последняя повезет телегу, то и скорость телеги и сила тяги лошади во время движения будут оставаться при движении по горизонтальной поверхности почти постоянными. Отсюда вполне естественно получается вывод, что постоянная сила, приложенная к телу, сообщает ему равномерное движение по направлению этой силы. Если нужно увеличить скорость передвижения тела, то нужно приложить к нему и большую силу; в примере с повозкой, если мы хотим получить двойную скорость и больше, то вместо одной лошади надо впрячь две лошади и больше. Отсюда столь же естественно получается допущение, что величина скорости, сообщаемой телу данной силой, пропорциональна величине этой силы (если сила увеличится в определенное число раз, то и скорость увеличится во столько же раз). Поэтому Аристотель полагал, что состояние покоя есть естественное состояние вещества и что все тела, будучи выведены из этого состояния какой-нибудь силой, по прекращении действия ее вновь стремятся прекратить свое движение. Такое стремление всех тел к покою древние называли инерцией (косностью) тела. Такой же смысл это слово сохранило до сих пор в общепитии, где „инертным человеком“ называется ленивый, не желающий думать или работать гражданин. Однако в механике в настоящее время это слово следует понимать не так.

§ 32. Первый закон Ньютона (закон инерции). Изложенная теория очень проста, и на первый взгляд как будто совершенно точно передает наблюдающееся в действительности. Однако при более глубоком исследовании неправильность этой теории легко обнаруживается.

Нужно сказать, что и от древних механиков не укрылись некоторые затруднения, возникающие при пользовании этой теорией. Мы знаем, что после прекращения действия силы тело останавливается не сразу; мало того, в отдельных случаях после прекращения действия силы тело может пройти довольно значительное расстояние. Этот последний случай (движение стрелы, пущенной из лука) в особенности доставлял много затруднений древним механикам. С одной стороны, для непрерывного движения стрелы требуется и постоянно действующая приложенная к стреле сила, а с другой стороны, казалось нелепостью искать источник этой действующей в течение движения силы в непосредственном действии тетивы лука; и древние и современные ученые сходятся в том, что тело не может действовать там, где его нет, где не имеется непосредственного соприкосновения источника силы с движущимся телом.

Древние считали — поэтому, что в момент спуска стрелы тетива лука производит в окружающем воздухе непрерывно продолжающееся изменение (волнение), в результате которого и получается нужная для движения сила; стрела как бы несется охватывающим ее воздухом, сжатым в момент спуска тетивы. Искусственность такого объяснения бросается в глаза, однако им удовлетворялись вплоть до времен Галилея. Последний, изучая движение тяжелых тел по наклонной плоскости, искал на верное решение, которое впоследствии было выражено Ньютоном в его первом законе, носящем название „закона инерции“. Этот закон формулируется так: всякое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока этому не воспрепятствуют внешние, действующие на тело силы.

Разница между этим законом Ньютона и воззрениями Аристотеля заключается в следующем: Аристотель считал, что после прекращения действия приложенной к движущемуся телу силы оно тут же и останавливается само собой; Ньютон же держится мнения, что для остановки движущегося тела недостаточно просто отнять действующую на него силу, но необходимо приложить еще новую, направленную против движения силу. В тех случаях, когда нам кажется, что тело останавливается само собой, на самом деле действует некоторая задерживающая сила. Если мы пустим шар с одинаковой начальной скоростью катиться по льду, по ровной земле или по траве, то он дальше всего прокатится по льду потому что последний представляет меньше всего препятствий движению.

Из закона Ньютона получаются следующие важные следствия:

1. Под инерцией тела нужно подразумевать не только стремление тела сохранить свое состояние покоя, но и стремление тела сохранить скорость своего прямолинейного и равномерного движения. Для того чтобы привести какое-нибудь тело в движение или остановить уже движущееся тело, необходимо и в том и в другом случае приложить определенную силу.

2. Прямолинейное равномерное движение может происходить и без действия внешних сил или тогда, когда эти приложенные силы взаимно уравновешиваются; его поэтому называют движением по инерции.

3. Действие силы на тело проявляется в изменении величины его скорости или направления его движения. С этой точки зрения остановка движущегося тела происходит только под действием некоторой силы. Когда пушечный по горизонтальной плоскости шар останавливается, то это происходит не потому, что он стремится возвратиться к естественному-состоянию покоя (как следовало бы по Аристотелю), а потому, что движение тела по горизонтальной плоскости в действительности всегда сопровождается некоторой силой сопротивления этой плоскости, действующей всегда против направления движения и называемой силой трения.

При отсутствии силы трения или вообще сопротивления раз начавшееся движение продолжалось бы вечно.

§ 33. Второй закон Ньютона. После того как было установлено, что равномерное и прямолинейное движение происходит без действия сил, оставалось установить, какое же движение будет происходить под действием силы постоянной величины, действующей на тело все время. Примером такой постоянной силы может служить в первом приближении вес данного тела, зависящий только от количества вещества в данном теле — от его массы ¹⁾. Поэтому Галилей, поставивший впервые этот вопрос, и предпринял изучение свободного падения тел, происходящего под действием одной только силы тяжести. Удачными опытами ему удалось установить, что это движение будет равномерно ускоренным и подчиняется законам, установленным нами в главе 5 [формулы (9) и (10)]. Отсюда мы получаем следующий важный вывод: действие силы на тело, проявляясь в сообщении ему ускорения. Если действующая на тело сила по своей величине постоянна, то будет постоянным и ускорение, сообщаемое телу этой силой.

Как же теперь придется изменить в свете исследований Галилея-Ньютона основные положения, выработанные Аристотелем? Согласно его теории величина скорости, соответствующая данной, приложенной к движущемуся телу силе, получалась сразу в самый момент приложения этой силы. По теории же Галилея-Ньютона приобретение скорости требует некоторого времени, а именно: постоянная сила сообщает телу постоянное ускорение, в результате которого начинает возрастать скорость движения тела по закону равноускоренного движения:

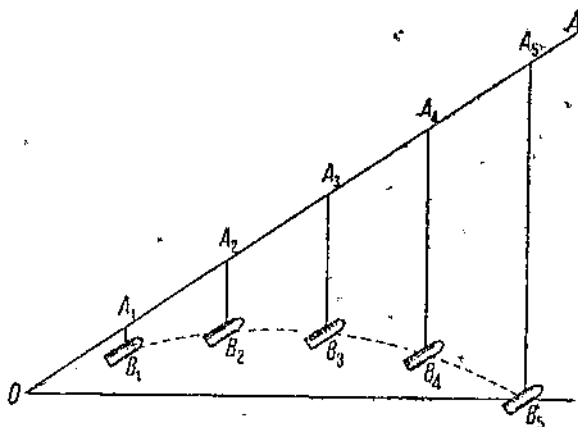
$$v = \omega t,$$

если тело, на которое подействовала сила, находилось в покое в момент начала действия этой силы (ω есть скорость, ω — ускорение, t — время действия этой силы). Через некоторое время скорость достигнет определенной величины. Если дальнейшее увеличение скорости нам не нужно, то мы действие силы прекращаем или, вернее, ослабляем величину силы до такого предела, при котором она как раз уничтожает действие силы сопротивления движению, что необходимо для поддержания равномерного движения. Таким образом в приведении какого-нибудь тела в движение надо различать два последовательных периода. В течение первого из них (вообще говоря, очень короткого) действующая сила сообщает телу ускорение и уничтожает силу сопротивления движения, в течение же второго периода приложенная сила только уничтожает сопротивление движению. Эти два периода отчетливо чувствует каждый человек, которому приходится сдвигать какое-нибудь тело; в первые моменты, когда тело только-только начинает сдвигаться, приходится делать значительно большее усилие, чем в дальнейшем время, когда приходится вести с постоянной скоростью уже сдвинутое тело. Так как нужные для передвижения тел скорости, вообще говоря, не были

¹⁾ В действительности вес тела несколько изменяется в зависимости от широты места (на экваторе он меньше, чем на полюсе) и от высоты места (с высотой он уменьшается); однако это изменение настолько незначительно, что представляет интерес только для физиков; инженер же может и не обращать на него внимания.

в древности очень большими, то и промежуток времени, когда действовала сообщающая ускорение сила, тоже был небольшим; поэтому древние механики и считали, что сообщение скорости телу происходит мгновенно; на самом же деле, конечно, это не так.

Условимся для определенности считать, что нужный для сообщения ускорения промежуток времени равняется одной секунде. Так как скорость в конце первой секунды численно будет равняться ускорению этого движения (согласно нашей формуле при $t=1$ скорость v равна w), то ясно, что законы Аристотеля останутся правильными, но только вместо слова „скорость“ надо поставить слово „ускорение“. Сделав эту



Фиг. 48.

замену, мы и придем ко второму закону Ньютона, который формулируется так:

Ускорение w , сообщаемое данному телу какой-нибудь силой, прямо пропорционально величине этой силы f .

Таким образом для заданного определенного тела величина ускорения будет прямо пропорциональна величине действующей силы, причем тело под действием этой силы будет совершать равноускоренное движение по направлению этой силы.

Разберем случай, когда сила подействовала на тело, уже находившееся в движении. Примером может служить случай, когда тело брошено под некоторым углом к горизонту (полет снаряда фиг. 48). Снаряд вылетает из орудия с некоторой начальной скоростью по направлению OA . Если бы сила тяжести отсутствовала, то снаряд двигался бы по линии OA равномерно и прямолинейно и в равные промежутки времени проходил бы равномерным движением равные пути¹⁾ OA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 . Сила тяжести будет отклонять снаряд от этой

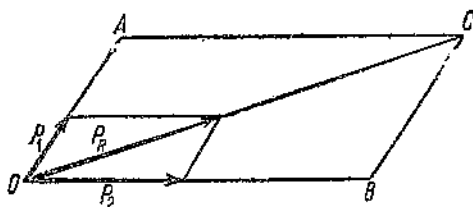
¹⁾ Сопротивлением воздуха мы здесь пренебрегаем.

прямой, заставляя его падать равноускоренно вниз. Если, двигаясь равномерно с начальной скоростью v_0 , снаряд за некоторое время t прошел бы путь $OA_1 = v_0 t$, то под действием силы тяжести он за то же время опустится на расстояние $A_1B_1 = \frac{gt^2}{2}$ (где g есть ускорение силы тяжести) и попадет в точку B_1 . Через время $2t$ снаряд в равномерном движении попал бы в точку A_2 (где $OA_2 = 2v_0 t$), а под действием силы тяжести опустится на $A_2B_2 = \frac{g}{2}(2t)^2$ и попадет в точку B_2 .

Давая теперь времени t различные значения, мы можем найти последовательные положения B_2, B_3, B_4, B_5 снаряда для различных моментов времени: они дадут нам траекторию движения, которая будет параболой.

Рассмотренный пример очень поучителен в том отношении, что единственной силой, действующей на движущийся снаряд и сообщаящей ему ускорение, будет направленная вертикально вниз сила тяжести. Таким образом в рассматриваемом случае направление силы, действующей на тело, не совпадает с

направлением движения этого тела; так как снаряд движется по кривой линии сначала вверх, а потом вниз, то направление его движения все время меняется, в то время как сила тяжести все время будет направлена по вертикали вниз. На это обстоятельство необходимо обратить особое внимание, так



Фиг. 49

как начинающие обычно смешивают направление движения тела с направлением движущей его силы. Последнее будет верно только в том случае, если данная сила подействовала на свободное тело, находившееся до этого в состоянии покоя; если же тело находилось уже в движении, то сообщаемое данной силой движение прибавляется к уже имеющемуся и направление результирующего движения уже не будет совпадать с направлением приложенной силы.

§ 34. Закон параллелограмма сил. Пусть на материальную точку действуют две силы по величине и по направлению изображаемые векторами P_1 и P_2 (фиг. 49). Опыт показывает, что действие этих двух сил можно заменить действием одной силы P_R , которая изображается вектором равным диагонали параллелограмма, построенного на векторах изображающих силы P_1 и P_2 . Эта сила носит название равнодействующей сил P_1 и P_2 . В этом заключается имеющий первостепенное значение закон параллелограмма сил.

§ 35. Третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия). Третий закон Ньютона (принадлежащий исключительно ему одному, в то время как первые два закона были высказаны еще до него, правда, несколько в отличном виде, итальянским ученым Галилеем, основоположником современной механики) заключается в том, что если одно тело действует на другое с некоторой силой, то второе тело действует на первое с силой, равной

по величине первой силе и прямо ей противоположной. Это значит, что, например, лежащий на столе камень давит на стол силой своего веса, направленной вниз, а стол, в свою очередь, сопротивляется этому давлению силой, направленной вверх и равной по величине весу камня. На фиг. 50 вектор P изображает силу веса камня, приложенную в центре его тяжести (см. ниже), P_2 — приложенную к столу силу давления камня на стол, а P_1 — противоположную силу противодействия стола, приложенную к камню и равную по величине весу камня, но направленную в противоположную сторону. Так как

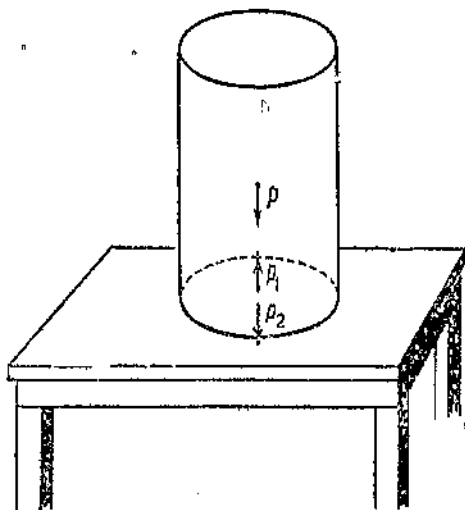
камень на столе остается в покое, то это значит, что тянущая его вниз сила веса P уравнивается сопротивлением стола P_1 , которое, таким образом, равно действию P_2 камня на стол.

Необходимо обратить внимание на то, что действие P_2 и противодействие P_1 приложены к различным телам: первое — к столу, а второе — к камню. Это важно отметить в том отношении, что действие и противодействие хотя равны и прямо противоположны, но не уравниваются именно потому, что они приложены к различным телам. Так, в нашем примере можно сказать, что силы P и P_1 взаимно уравниваются (они приложены к одному телу — камню), но

силы P_1 и P_2 — действие и противодействие — не уравниваются, так как они действуют на разные тела.

Это замечание важно потому, что оно сразу разрушает одно возражение, выставляемое против третьего закона. Если действие и противодействие равны и прямо противоположны, то спрашивают, как же может возникнуть движение? Движение может возникнуть именно потому, что действие и противодействие приложены к различным телам, а потому и не уравниваются, хотя и равны по величине и противоположны по направлению. В самом деле, если бы мы запрягли две одинаково сильных лошади в одну телегу так, чтобы они тянули в прямо противоположные стороны, то силы их взаимно уравниваются и телега останется в покое; если же мы запряжем две лошади в разные телеги, хотя бы и стоящие по одной прямой, так, чтобы они тянули в разные стороны, то никакого равновесия не будет, хотя мы и будем иметь две равные и направленные по одной прямой в разные стороны силы.

Рассмотрим еще один пример. Пусть лошадь везет телегу и тянет ее с некоторой определенной силой в одну сторону. Если третий закон Ньютона верен, то телега, в свою очередь, должна действовать на лошадь



Фиг. 50.

с такой же силой в обратном направлении, и в таком случае странно, что лошадь вместе с телегой может сдвинуться с места. Невольно напрашивается предположение, что лошадь действует на телегу с силой, несколько больше той, с которой телега действует на лошадь; разность этих сил и дает нам ту силу, которая движет лошадь и телегу, вместе взятые, как одно тело. Однако это не так. Что обе наши силы равны, нетрудно убедиться, если вообразить себе лошадь с телегой на совершенно гладком, не представляющем упора льду; всякий возчик знает, что в этом случае лошадь так и не сможет сдвинуться с места. Это значит, что силу, приводящую в движение лошадь с телегой, надо искать не во взаимодействии лошади и телеги, а во взаимодействии лошади и земли; только отталкиваясь от земли, лошадь получает возможность везти телегу. Далее, сила, с которой лошадь отталкивает землю, равна силе, с которой земля отталкивает лошадь, но так как масса земли неизмеримо больше массы лошади, то земля остается в покое (получает неизмеримо малое ускорение), а лошадь с телегой движутся. Если бы масса земли не была так неизмеримо велика, то земля тоже двинулась бы в противоположную сторону. В этом нетрудно убедиться, если представить себе лошадь на топчане; лошадь, отталкиваясь от топчана, идет в одну сторону, а топчан — в противоположную; в этом случае мы замечаем оба движения потому, что массы и топчана и лошади не так уже сильно отличаются между собой.

§ 36. Заключение. Заканчивая эту главу, подведем итоги основным, полученным в ней сведениям. Вся она посвящена выяснению центрального пункта механики — понятия о силе. Прежде всего в ней разобраны составные черты понятия о силе: величина, направление (линия действия) и точка приложения и указан графический способ изображения силы при помощи вектора.

Остальная часть главы занимается выяснением значения силы в движении; разобраны основные законы современной механики — законы Ньютона. Из этих законов первый (закон инерции) определяет понятие силы — сила есть то, что вызывает ускорение; второй дает способ сравнения (измерения) различных сил — пропорциональность сил массам тел и сообщаемым им ускорениям; наконец третий закон (закон равенства действия и противодействия) указывает источник силы — сила есть действие одного материального тела на другое. Кроме того, читатель познакомился с законом параллелограмма сил, дающим способ сложения двух сил, приложенных к одной точке; равнодействующая двух сил по величине и по направлению изображается вектором — диагональю параллелограмма, построенного на векторах, изображающих обе складываемые силы.

Глава 8.

СИЛОВОЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

§ 37. Равновесие. Силы, действующие по одной прямой. Если силы, действующие на данное тело, во всей своей совокупности не стремятся производить изменения в состоянии покоя или прямолинейного и равномер-

ного движения тела, то говорят, что эти силы находятся в равновесии.

Не следует смешивать покой с равновесием. В покое находится тело, если оно не меняет своего положения относительно окружающих предметов; таким образом покой—это просто отсутствие движения. Равновесие же непременно предполагает наличие сил. Если тело находится в покое, то действующие на него силы обязательно должны уравновешиваться; если же силы находятся в равновесии, то тело, на которое они действуют, может находиться в состоянии покоя, а может и двигаться, но согласно первому закону Ньютона движение тела в таком случае обязательно должно быть прямолинейным и равномерным.

Для того чтобы две силы, действующие на одно тело, уравновешивали бы друг друга, необходимо, чтобы они были равны между собой и действовали по одной прямой в разные стороны. Если на тело действует несколько сил, направленных по одной прямой, то равновесие возможно лишь в том случае, когда одни силы направлены в одну сторону, а остальные силы—в другую, причем сумма всех сил, направленных в одну сторону, должна быть равна сумме всех сил, направленных в противоположную сторону.

Рассмотрим пример, поясняющий высказанное положение.

Трактор тянет три повозки различных размеров, следующие одна за другой. Сопротивление движению трактора (трение колес о землю и т.д.) равно 60 кг, для первой повозки тоже 60 кг, для второй 40 кг и третьей 20 кг. Каждая веревка, соединяющая трактор с первой повозкой, первую повозку—со второй и вторую—с третьей, может безопасно выдержать только натяжение в 20 кг. Какова должна быть сила тяги трактора, если он вместе с повозками движется равномерно? Сколько нужно взять веревок для соединения трактора с первой повозкой, первую повозку со второй и, наконец, вторую с третьей?

Сила тяги трактора при его равномерном движении должна уравновешивать все сопротивления, действующие на корпус трактора и всех повозок. Если бы эта сила была больше суммы всех сил сопротивления, то движение трактора из равномерного перешло бы в ускоренное. В момент начала движения так и бывает потому, что сила тяги трактора в этом случае, кроме сопротивлений, должна еще сообщить ускорение, необходимое для доведения скорости трактора и повозок до нужного значения. После того как это значение скорости достигнуто, сила тяги трактора несколько уменьшается и становится как раз равной сумме всех сил сопротивления, т. е. в данном случае равной $60 + 60 + 40 + 20 = 180$ кг. Эта совокупность сил, а именно направленной вперед силы тяги трактора, равной теперь 180 кг, и направленных назад четырех сил сопротивления, находится в равновесии, как не изменяющая состояния равномерного движения трактора, но в то же самое время сам трактор вместе с повозками в покое находиться не будет.

Переходим теперь к определению числа веревок и начнем с самой задней повозки. Ее сила сопротивления равна только 20 кг, т. е. как

раз столько, сколько может безопасно выдержать одна веревка, поэтому между второй и третьей повозками достаточно протянуть только одну веревку. Сила сопротивления второй повозки вместе с прикрепленной к ней третьей равняется $40 + 20 = 60$ кг. Поэтому между первой и второй нужно протянуть всего три веревки. Наконец между трактором и первой повозкой нужно будет протянуть столько веревок, сколько требуется для того, чтобы выдержать сумму всех сил сопротивления трех повозок. Эта сумма равна $60 + 40 + 20 = 120$ кг, следовательно, в последнем случае необходимо шесть веревок.

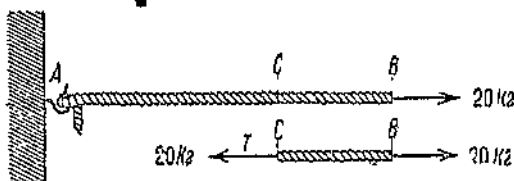
Отметим, что если бы мы прицепляли все повозки непосредственно к трактору, то нам понадобилось бы всего три веревки для первой, две для второй и одна для третьей повозки, но в этом случае веревки для третьей и второй повозок должны быть длиннее веревок для первой повозки.

§ 38. Внутренние силы. Из того обстоятельства, что приложенные к телу силы находятся в равновесии, т. е. не изменяют состояния покоя или движения тела, еще не следует, что такие силы вообще не производят никакого действия. Если мы по концам стержня приложим две равные и противоположные силы, то они, конечно, уравниваются; однако одновременно с этим в бывшем первоначально ненапряженном стержне появятся некоторые усилия; если силы направлены друг от друга, то стержень будет растягиваться, если же силы будут наоборот направлены одна навстречу другой, то стержень сожмется; и в том и в другом случае в нем появятся так называемые внутренние силы.

Под внутренними силами мы подразумеваем те взаимодействия, которые существуют между различными частицами стержня и подчиняющиеся третьему закону Ньютона. Внутренние силы мы будем подробно изучать в последней части курса, посвященной сопротивлению материалов; однако ввиду важности этого понятия и для статики необходимо сказать о нем несколько слов теперь же. Так как силы взаимодействия двух частиц равны между собой и противоположно направлены, то, будучи приложены в составе одного твердого тела, рассматриваемого как единое целое, они не производят изменений в состоянии его покоя или движения. Это обстоятельство не позволяет нам определить величину внутренних сил, если только мы будем рассматривать все тело в целом. Поэтому, чтобы ввести эти силы в расчетные уравнения, мы должны из двух равных и противоположных сил удалить одну, для чего необходимо разделить обе взаимодействующие частицы, или, как говорят, произвести сечение тела в интересующем нас месте между обоими взаимодействующими частицами.

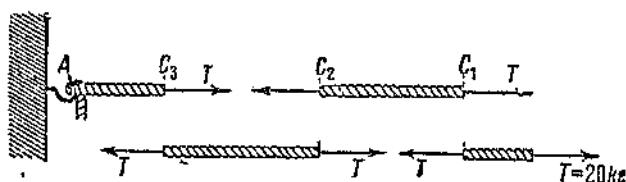
Поясним сказанное примером. Возьмем веревку, один конец которой закреплен неподвижно, а к другому приложена горизонтальная сила в 20 кг, веревка при этом вытянется горизонтально и будет натянута, с силой в 20 кг. Чтобы убедиться в этом, разрежем мысленно веревку в какой-нибудь точке *C* и рассмотрим условия равновесия отрезанной части *CB* (фиг. 51). На эту часть действует вправо растягивающая сила в 20 кг; под действием которой часть *CB* стала бы двигаться вправо. Но так как в составе веревки часть *CB* не движется, то мы можем

заклучить, что эта сила уравнивается другой силой T , равной первой, но направленной в противоположную сторону, т. е. влево, силой. Эта сила $T=20$ кг и будет представлять действие левой части веревки на отрезанный кусок CB . В какой бы точке C мы ни произвели сечение, натяжение T веревки будет оставаться одним и тем же и как



Фиг. 51.

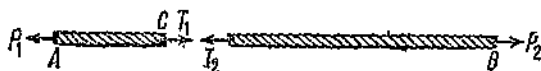
видно, будет зависеть только от внешней силы 20 кг, но не от длины веревки. На этом примере легко выявляется процесс передачи силы с конца B на конец A при помощи внутренних сил — взаимодействий различных частиц веревки между собой (фиг. 52, где изображены взаимодействия между различными частями разрезанной мысленно в не-



Фиг. 52.

скольких местах веревки AB ; все полученные таким образом силы T будут равны между собой и равны внешней растягивающей силе 20 кг).

Рассмотрим еще один пример, иногда ставящий в затруднение начинающих. Требуется определить натяжение внутри троса, растягиваемого двумя равными и прямо противоположными силами P_1 и P_2 , рав-



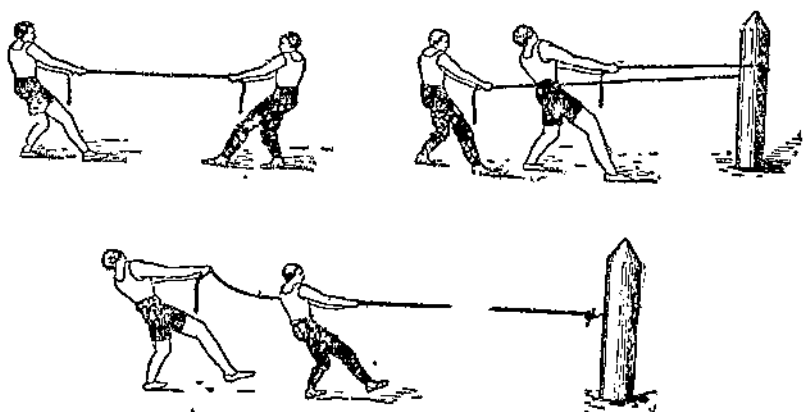
Фиг. 53.

ными каждая 20 кг (фиг. 53). Очень часто отвечающие на этот вопрос утверждают, что сила натяжения троса будет равна $20 + 20 = 40$ кг. Однако нетрудно показать, что натяжение троса в этом случае, так же как и в случае фиг. 51, будет равняться 20 кг. В самом деле, проведем мысленно сечение CC (фиг. 53), разделяющее трос на две части. Так как в случае целого троса обе части AC и BC находятся в равновесии, то нетрудно видеть, что в данном сечении CC на левую часть троса действует вправо сила T_1 , равная $P_1 = 20$ кг; точно так же на

правую часть троса действует влево сила T_2 , также равная $P_2 = 20$ кг; таким образом растягивающее усилие в любом сечении C оказывается и в этом случае равным 20 кг. Если мы вернемся к фиг. 51 и обратим внимание на то, что в точке A стена удерживает в месте прикрепления веревку с направленной влево силой 20 кг (уравновешивающей внешнюю, приложенную в точке B силу 20 кг), то тождественность условий задач, изображенных на фиг. 51 и 53, обнаруживается в полной мере.

В американских книгах эту задачу иногда дают в такой форме:

Для того чтобы разорвать веревку, нужно растягивающее усилие в 30 кг, а мальчик, привязав веревку с одной стороны к крюку, может приложить силу всего только 30 кг. Он зовет на помощь товарища, и они вдвоем начинают тянуть веревку в разные стороны — веревка не



Фиг. 54.

разрывается. Они перекидывают веревку для удобства серединой за толстый вертикальный столб и тянут вдвоем за оба конца в одну сторону — веревка опять не разрывается. Как им нужно взяться за веревку чтобы разорвать ее? (Фиг. 54.) После сказанного выше очевидно, что веревку следует привязать одним концом к крюку и тянуть обоим за свободный конец в одну сторону.

Рассмотрим еще один пример, в котором приходится учесть и собственный вес троса.

Погонный метр троса весит 2 кг, а сам трос может выдержать безопасно натяжение в 200 кг. Какой наибольший груз может быть подвешен к нижнему концу закрепленного своим верхним концом троса длиной в 10 м? Какие при этом натяжения получатся по концам и в середине троса?

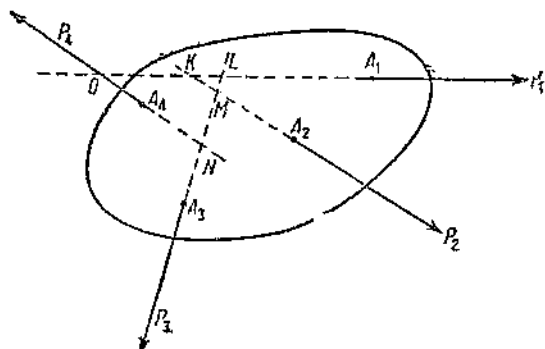
Так как вес самого троса тоже принимает участие в образовании натяжения, то растягивающее усилие теперь уже не будет по всей длине троса постоянным. Наибольшее натяжение получится в точке подвеса троса.

Если взять максимальную допустимую величину натяжения в 200 кг, то наибольший груз, подвешенный к нижнему концу, не должен пре-

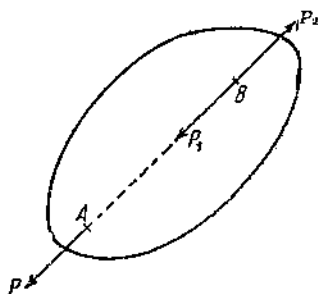
вышать 180 кг (так как вес самого троса равен $10 \times 2 = 20$ кг). Натяжение в середине троса будет равно $180 + 2 \times 5 = 190$ кг (учитывается вес только нижней половины троса); наконец на самом нижнем конце троса натяжение будет равно весу приложенного груза, т. е. 180 кг.

Эти задачи приводят нас к следующему правилу определения внутренних сил: чтобы определить величину внутренних сил в каком-нибудь месте твердого тела, производят в этом месте сечение, отбрасывают одну половину тела и определяют величину внутренних сил из условия, что они уравнивают внешние силы, приложенные к оставшейся половине тела.

§ 39. Параллелограмм сил и силовой треугольник. Пусть теперь на некоторое твердое тело действует несколько сил, приложенных в различных точках и направленных в различные стороны в одной плоскости (фиг. 55). Если все эти силы лежат в одной плоскости и среди



Фиг. 55.



Фиг. 56.

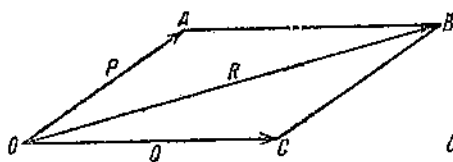
них нет сил, имеющих одинаковое направление (параллельных), то относительно любых двух сил можно сказать, что линии их действия пересекаются в некоторой точке (точки K, L, M, N, O на фиг. 55). Покажем теперь, что, не меняя состояния равновесия или движения всего тела в целом, точку приложения каждой силы можно перенести в любое место на линии ее действия.

Пусть (фиг. 56) на некоторое тело действует сила P , приложенная в точке A. Покажем, что, не меняя действия этой силы на все тело в целом, можно точку приложения этой силы перенести в любую точку B, находящуюся на линии действия этой силы. Для этого приложим в точке B две взаимно уравнивающиеся силы P_1 и P_2 , равные по величине переносимой силе P ; добавление этих двух взаимно уравнивающих сил, конечно, ничего не изменит. Выделим теперь силу P_1 , которую можно рассматривать как силу P , перенесенную в точку B. Оставшиеся две силы P и P_2 равны и действуют по одной прямой

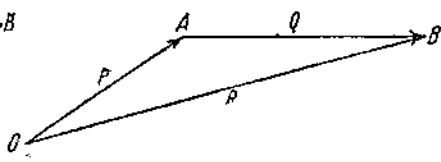
в разные стороны; следовательно, они могут лишь растянуть наше тело (или сжать его, если бы они были направлены навстречу друг другу), но не могут изменить состояния равновесия или движения нашего тела, а поэтому, если только нас не интересуют те внутренние усилия, которые возникнут в самом теле, мы можем их отбросить как две взаимно уравновешивающихся силы, после чего у нас останется одна лишь сила P_1 , приложенная в точке B и равная по величине силе P .

Подобным перенесением точки приложения силы по ее направлению часто пользуются в теоретической механике, рассматривая условия равновесия или движения всего тела в целом. Если же, как, например, в сопротивлении материалов, дело идет об определении внутренних усилий в теле, то там мы уже не будем иметь права переносить точку приложения силы, потому что от этого, как мы уже говорили выше (§ 30), состояние внутренних усилий в теле меняется.

Если на твердое тело действует ряд сил, линии действия (направления) которых пересекаются в одной точке, то мы можем перенести все эти силы в точку пересечения их, направлений, после чего рассматриваемое твердое тело можно заменить одной материальной точкой, к которой приложены все действующие на тело силы, направления которых пересекаются в этой точке.



Фиг. 57.

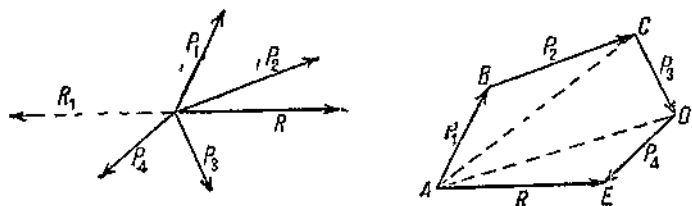


Фиг. 58.

Если к одной точке приложены две силы P и Q , образующие между собой некоторый угол (фиг. 57), то, как мы видели из предыдущей главы, эти две силы можно заменить одной равнодействующей R , величина и направление которой изобразятся диагональю OB параллелограмма, построенного на этих силах. На практике всего параллелограмма можно и не строить, ограничиваясь лишь одной какой-нибудь его половиной — силовым треугольником (фиг. 58). Пользуясь силовым треугольником, мы определяем равнодействующую при помощи следующего правила:

От некоторой точки O откладываем по величине и направлению вектор OA , изображающий одну складываемую силу (P), так, чтобы начало этого вектора совпало с точкой O ; затем от конца A по величине и направлению откладывают вектор AB , изображающий вторую силу (Q), так, чтобы начало его совпадало с концом предыдущей силы; равнодействующая R по величине и направлению изобразится вектором OB , начало которого совпадает с началом первой, а конец — с концом последней складываемой силы.

В такой форме правило ценно тем, что его нетрудно распространить на случай произвольного числа сил, приложенных к одной точке. Пусть к точке O приложены четыре силы P_1, P_2, P_3, P_4 (фиг. 59). Для получения равнодействующей этих четырех сил от некоторой точки A откладываем вектор $\overline{AB} = P_1$, от конца B — вектор $\overline{BC} = P_2$; вектор AC изобразит равнодействующую сил P_1 и P_2 . Строя от конца C вектор $\overline{CD} = P_3$, получим вектор AD , изображающий равнодействующую сил AC и P_3 или, что то же, трех сил P_1, P_2 и P_3 . Добавив еще вектор $\overline{DE} = P_4$, мы получим AE , равнодействующую сил AD и P_4 . Полученная ломаная линия $ABCDE$ носит название силового многоугольника. Равнодействующую R нашей системы сил по величине и по направлению мы получим как сторону $\overline{AE}$, так называемую замыкающую построенного силового многоугольника, которая соединяет начало первой отложенной силы P_1 с концом последней P_4 .



Фиг. 59.

В статике имеет особое значение один частный случай. Предположим, что последняя точка E (фиг. 59) — конец последней силы P_4 — совпадает с началом A первой силы P_1 ; в таком случае замыкающая $\overline{AE}$ исчезнет, обратится в точку; длина ее будет равна нулю, а это значит, что равнодействующая данных сил равна нулю или что все эти силы взаимно уравновешиваются. Отсюда важное правило:

Если действующие силы на тело и приложенные к нему в одной точке находятся в равновесии, то составленный из этих сил силовой многоугольник замыкается.

Это условие тем более важно для нас, что мы и общую задачу нахождения равнодействующей нескольких сил могли бы привести к этому случаю. В самом деле, если бы мы полученную равнодействующую $\overline{AE} = R$ отложили от точки O в противоположном направлении (пунктирная сила R_1 на фиг. 59), то после добавления этой силы к уже имеющимся четырем мы получили бы, очевидно, равновесие. Такая сила R_1 называется уравновешивающей данной системы сил; она будет равна по величине и прямо противоположна по направлению равнодействующей этой системы сил. Так как из уравновешивающей, переменяя направление, всегда можно получить равнодействующую, то ясно, что задача сложения сил может быть всегда сведена к определению уравновешивающей или, что то же, к исследованию условий равновесия данной, действующей на материальную точку системы сил.

Рассмотрим один частный случай: условие равновесия трех сил, действующих на какое-нибудь тело и имеющих различные точки при-

ложения A , B , C (фиг. 60). Эти три силы могут находиться в равновесии только тогда, когда две из них уравновешивают третью; это значит, что третья сила должна быть равна и прямо противоположна равнодействующей двух первых сил. Для того чтобы первые две силы имели равнодействующую, необходимо, чтобы направления их пересекались (например в точке O); в таком случае третья сила как уравновешивающая равнодействующую первых двух должна тоже пройти через точку O пересечения направлений этих сил. Отсюда мы приходим к следующему условию равновесия трех сил:

Направления трех сил, действующих на одно твердое тело, в случае равновесия должны пересекаться в одной точке и построенный на этих силах силовой треугольник должен быть замкнут (равнодействующая трех сил должна быть равна нулю).

§ 40. Примеры. В заключение рассмотрим ряд примеров на определение условий равновесия сил, приложенных к одной точке.

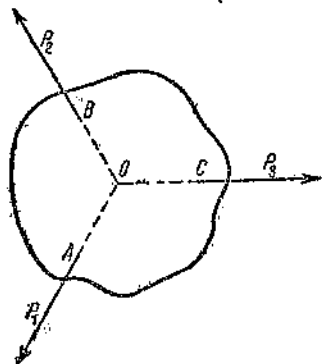
Пример 18. Шарик B центробежного регулятора веса P (фиг. 61) висит на стержне AB длины a , прикрепленном шарниром A к вертикальной стенке. Определить величину горизонтальной силы H , которую нужно приложить к шарiku B , для того чтобы он находился в равновесии на расстоянии $BC = d$ от стенки, пренебрегая весом самого стержня AB . Каково будет при этом растягивающее усилие T в стержне AB ?

Заметим следующий общий прием решения задач на равновесие.

Во-первых, выбирают тело или точку, для которой в дальнейшем нужно рассматривать равновесие приложенных к ней сил. В нашем случае это, очевидно, будет точка B , в которой пересекаются направления всех нужных нам сил.

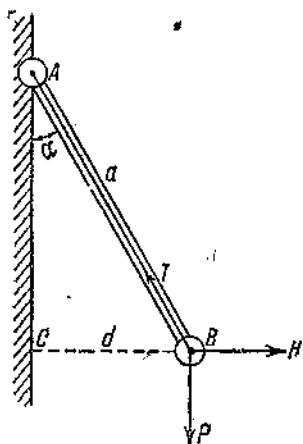
Во-вторых, к выбранной точке прикладываем изображаемые соответствующими векторами силы так, как они действуют на выбранное нами тело или точку. В данном случае интересующие нас силы P и H непосредственно приложены к выбранной нами точке B , сила же T , растягивающая стержень AB , будет направлена по AB вниз и приложена к стержню. На точку B действует, однако, не эта сила, а равное ей по третьему закону Ньютона ее противодействие (или, как говорят, реакция), направленное вверх (обратить внимание, что действующая на стержень растягивающая сила направлена по AB вниз, а противодействие, приложенное к шарiku, — по AB вверх).

В-третьих, нам нужно выразить, что выбранные нами, приложенные к шарiku силы P , H , T находятся в равновесии. Это значит, что равнодействующая их должна равняться нулю или построенный на этих силах треугольник должен замкнуться. Попробуем построить соответствующий силовой треугольник. Начнем с известной нам по величине и

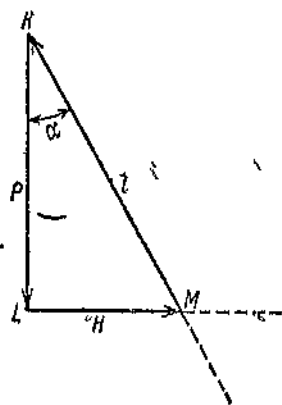


Фиг. 60.

по направлению силы P (фиг. 61a); начало этой силы будет в точке K , а конец — в точке L . От точки L будем строить следующую силу H , для чего проведем через L по направлению H горизонтальную прямую; поскольку величина H нам неизвестна, то конечную точку вектора, изображающего эту силу (где надо поставить стрелку), мы пока определить не можем. Обратимся теперь к третьей силе T ; относительно ее мы наоборот, знаем, где стоит конец (стрелка) этой силы: согласно



Фиг. 61



Фиг. 61a.

условию замыкания силового треугольника этот конец должен совпадать с началом первой силы, т. е. с точкой K ; затем мы знаем направление этой силы, параллельное стержню AB , и, кроме того, знаем, что начало вектора, изображающего эту силу, будет находиться в той же точке M , где кончается и сила H ; мы легко получим эту точку, если из K проведем KM параллельно AB , а из L проведем LM параллельно H . После того как силовой треугольник построен, для нахождения H и T остается только определить, сколько раз в отрезках LM и MK отложится тот отрезок, который мы приняли изображающим один кг при построении силы P . Таким образом графически наша задача уже решена.

Если бы мы хотели решить задачу вычислением, то сравниваем подобные треугольники ABC и KLM . Составляя равенства отношений сходственных сторон, будем иметь

$$\frac{T}{AB} = \frac{H}{BC} = \frac{P}{AC},$$

откуда

$$T = P \frac{AB}{AC}, \quad H = P \frac{BC}{AC}.$$

Но в прямоугольном треугольнике ABC

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

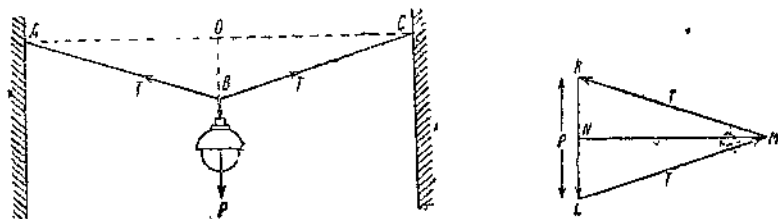
или

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 - d^2}.$$

Окончательно

$$T = P \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - d^2}}, \quad H = P \cdot \frac{d}{\sqrt{a^2 - d^2}}.$$

Пример 19. Дуговая лампа подвешена в точке B (фиг. 62) к середине троса ABC , прикрепленного к крюкам A и C , находящимся на одной высоте. Определить натяжение троса, если вес лампы $P = 15$ кг, длина всего троса $ABC = 20$ м и стрела провеса $BD = 0,1$ м.



Фиг. 62.

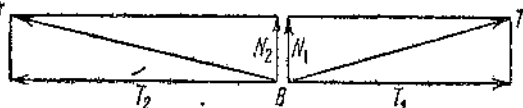
Будем рассматривать условия равновесия точки B ; к этой точке приложены вес лампы P и одинаковые натяжения T обеих половинок троса ABC (вверх). Строим силовой треугольник KLM , который вследствие равенства обеих сил T будет, очевидно, равнобедренным; в нем нам известна величина основания $KL = 15$ кг. Проведя высоту MN и сравнивая подобные треугольники DBC и NLM , будем иметь

$$\frac{NL}{LM} = \frac{BD}{BC} \quad \text{или} \quad \frac{P}{\frac{T}{2}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}},$$

откуда

$$\overline{T} = \frac{P}{2} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = 7,5 \cdot \frac{10}{0,1} = 750 \text{ кг.}$$

В этой задаче интересно отметить, что такое большое натяжение 750 кг получается от сравнительно небольшой силы 15 кг. Читателю уже, конечно, приходилось сталкиваться с подобными фактами при натягивании нити; чем меньше провисание, тем труднее вытягивать дальше нить. Причина этого явления заключается в следующем; каждую силу T можно представить в виде суммы горизонтальной силы T_1 и вертикальной силы N_1 (фиг. 63). Обе горизонтальные силы T_1 и T_2 взаимно уравниваются, а силы N_1 и N_2 , поддерживающие груз P , составляют при небольших наклонах тросов настолько малые доли всей силы T , что конечно необходимо иметь очень боль-



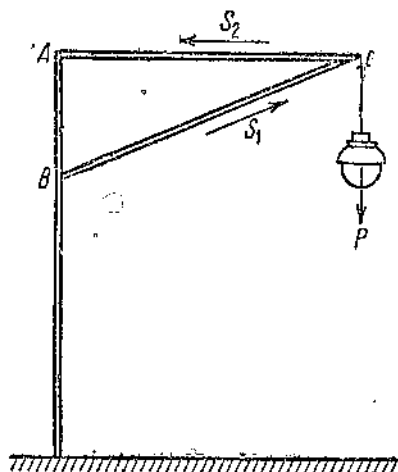
Фиг. 63.

шую силу T , для того чтобы незначительная часть её N_1 смогла бы уравновесить приходящуюся на нее половину веса P .

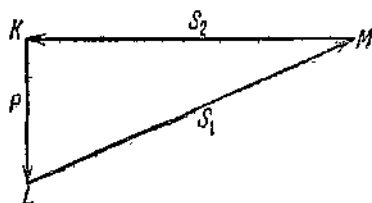
Пример 20. Дуговая лампа весом в 30 кг подвешена к вертикальному столбу при помощи горизонтальной поперечины $AC \doteq 1,2$ м и подкоса $BC \doteq 1,5$ м. Определить усилия S_1 и S_2 , получающиеся в стержнях AC и BC (фиг. 64).

Усилием мы называем силу, действующую по направлению стержня и производящую в последнем растяжение или сжатие. В нашем случае,

как нетрудно видеть, стержень BC будет сжат, а стержень AC растянут. Если мы составим условия равновесия точки C , приложив к ней вес P и противодействия обоих стержней, то противодействие сжатого стержня BC мы должны отложить вверх (сжатый стержень как бы отталкивает место соединения стержней — узел C), а



Фиг. 64.



Фиг. 64а.

противодействие стержня AC мы должны отложить влево (растянутый стержень как бы стремится притянуть к себе узел C). Строим обычным способом силовой треугольник KLM ; из подобия его с треугольником ABC получаем

$$\frac{P}{AB} = \frac{S_1}{BC} = \frac{S_2}{AC}.$$

Но нетрудно видеть из прямоугольного треугольника ABC , что

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{1,5^2 - 1,2^2} = 0,9 \text{ м.}$$

Отсюда

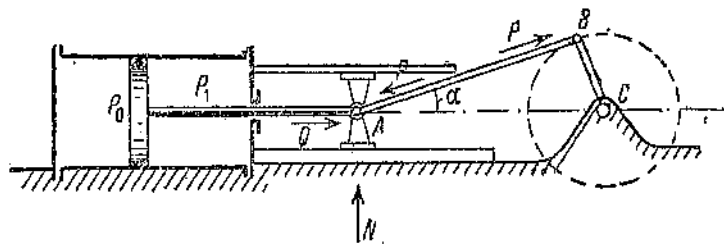
$$S_1 = P \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{30 \cdot 1,5}{0,9} = 50 \text{ кг (сжатие)},$$

$$S_2 = P \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{30 \cdot 1,2}{0,9} = 40 \text{ кг (растяжение)}.$$

Входящие в силовой треугольник силы S_1 и S_2 представляют не те силы, одна из которых сжимает стержень BC , а другая растягивает AC , а реакции (противодействия) этих стержней, направленные противоположно растягивающему и сжимающему усилиям.

Пример 21. В паровой машине площадь поршня равна $0,1 \text{ м}^2$; длина шатуна AB равна 2 м , длина кривошипа $BC = 0,4 \text{ м}$; давление пара в цилиндре за поршнем P_0 равно 6 атмосферам, перед поршнем $P_1 = 1$ атмосфере¹⁾. Определить силу P , вращающую кривошип, и давление крейцкопфа A на направляющие параллели в том положении поршня, когда угол $ABC = 90^\circ$ (фиг. 65).

В изображенном на фигуре положении крейцкопф будет нажимать на нижнюю параллель; в свою очередь, эта последняя будет давить на крейцкопф с такой же силой N , направленной вверх. Точно так же к кривошипу BC в точке B будет приложена действующая по направлению шатуна сила P вправо, а на крейцкопф A — такая же сила, но уже влево (обе эти силы представляют противодействия шатуна AB ,



Фиг. 65.

сжатого с одной стороны действующей по штоку поршня силой Q , а с другой стороны — сопротивлением, которое кривошип оказывает вращающей силе P).

Определяем сначала силу Q . В килограммах она будет равна выраженному в атмосферах избытку давления внутри поршня над наружным давлением, помноженному на площадь поршня в кв. сантиметрах, т. е.

$$Q = 5 \cdot 1000 \text{ кг} = 5 \text{ т}^2).$$

Строим силовой треугольник для сил, приложенных в точке A (предлагаем сделать это учащемуся: получится треугольник, подобный треугольнику ABC). Составляя отношения сходственных сторон, получим:

$$\frac{P}{AC} = \frac{Q}{AB} = \frac{N}{BC},$$

откуда

$$N = Q \cdot \frac{BC}{AB} = 5 \cdot \frac{0,4}{2} = 1 \text{ т}.$$

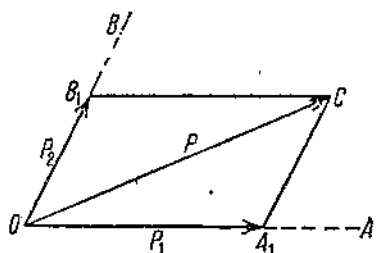
$$P = Q \cdot \frac{AC}{AB} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2^2 + (0,4)^2}}{2} = 5,1 \text{ т}.$$

Заключивая эти примеры, подчеркнем еще раз основной прием, употребленный для их решения. Он состоит в том, что мы выбираем опре-

¹⁾ Давление в 1 атмосферу означает, что на каждый квадратный сантиметр площади поршня действует сила в 1 кг.

²⁾ т — сокращенное обозначение тонны = 1000 кг.

деленную точку, равновесие которой в дальнейшем рассматриваем и к которой приложены все нужные нам силы, изображаемые векторами. Для этих последних мы строим замыкающийся силовой треугольник, выражающий условия равновесия этих сил, и из последнего графически или вычислением определяем интересующие нас силы. Вся трудность решения задачи, которую можно победить только постоянной практикой, состоит в том, чтобы надлежащим образом выбрать точку, равновесие которой

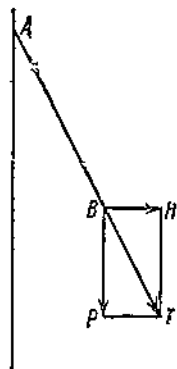


Фиг. 66.

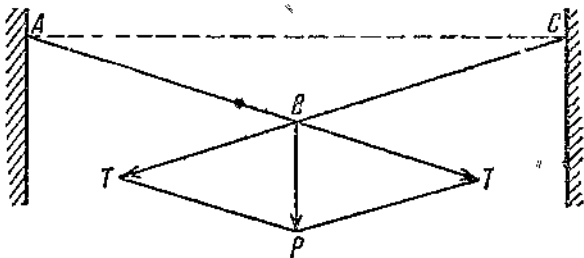
в дальнейшем рассматривается, и тем самым создать нужную нам геометрическую схему (точки с векторами — силами), которая после построения силового треугольника в конечном счете и решит поставленную задачу.

§ 41. Разложение силы на составляющие. В заключение этой главы отметим одно построение, которое может быть полезным при решении некоторых задач. Подобно тому как две составляющие силы можно заменить

одной равнодействующей, так и, наоборот, одну силу можно заменить двумя, или, как говорят, разложить на две составляющие. В самой общей постановке эта задача будет, конечно, неопределенной. В приложениях большей частью приходится раскладывать данную силу на две составляющие, направления которых являются заданными. Геометрически эта задача сводится к построению параллелограмма, у которого заданы диагональ и направления двух сторон; соот-



Фиг. 67.



Фиг. 68.

ветствующее построение произведено на фиг. 66. Пусть даны раскладываемая сила P и направления OA и OB , по которым нужно разложить эту силу. Для этого из конца C вектора OC , изображающего раскладываемую силу P , проводим две прямые CB_1 и CA_1 , соответственно параллельные направлениям OA и OB искомым составляющим. Эти прямые пересекут направления OA и OB соответственно в точках A_1 и B_1 . Отрезки $OA_1 = P_1$ и $OB_1 = P_2$ и будут представлять собой искомые составляющие силы P по направлениям OA и OB .

Отметим, что в примере 19 (фиг. 63) мы уже пользовались разложением силы T по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

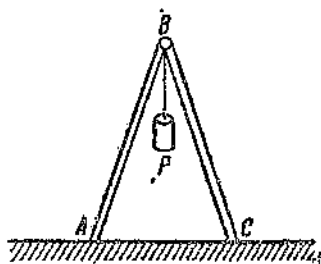
Примеры 18—21 предыдущего параграфа можно было бы решать и при помощи разложения силы по двум направлениям (для сравнения на фиг. 67 и 68 даны соответствующие построения), но метод силового треугольника является практически более удобным.

§ 42. Заключение. Весь материал только что законченной главы представляет непосредственное развитие идей предыдущей главы, только вместо общего случая движения тела разобран частный — равновесие. В начале главы устанавливается определение равновесия, а затем разбираются условия равновесия сил, действующих по одной прямой, и сил, действующих на твердое тело в одной плоскости, с линиями действия, пересекающимися в одной точке (замыкание силового треугольника в случае трех и силового многоугольника — в самом общем случае многих сил). Отметим важность теоремы о перенесении точки приложения силы, позволяющей в случае сил, направления которых пересекаются в одной точке, сводить решение задачи о равновесии твердого тела к задаче о равновесии сил, приложенных к одной точке; после того как это сделано, общий ход решения задачи идет по трем этапам, указанным в конце § 40. Наконец в связи с вопросами, встающими при решении конкретных задач на равновесие, затронут вопрос о внутренних силах, который более подробно будет разобран во второй части книги, посвященной изложению сопротивления материалов.

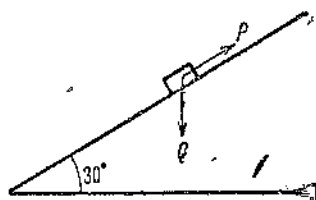
Задачи.

21. Движущая сила, приложенная к столу строгального станка, равна 600 кг, сила трения между столом и станком равна 75 кг. Под действием какой силы подвигается стол при снятии стружки?

Отв. 525 кг.



Фиг. 69.



Фиг. 70.

22. Поезд, приводимый в движение двумя паровозами, идет с постоянной скоростью. Сила тяги первого паровоза равна 5 тоннам, второго 4 тоннам. Каково будет усилие в сцепке между обоими паровозами? между вторым паровозом и поездом?

Отв. 5 тонн; 9 тонн.

23. Определить графически величину равнодействующей двух сил в 40 и 60 кг, образующих между собой угол в 30°.

Отв. 97 кг.

24. Найти равнодействующую R двух равных сил P , направленных под прямым углом друг к другу.

Отв. $R = P\sqrt{2}$.

25. К козлам, образующим между собой угол $ABC = 30^\circ$, подвешен груз $P = 500$ кг (фиг. 69). Найти графически давление на каждую из ножек (сжимающее усилие).

Отв. 260 кг.

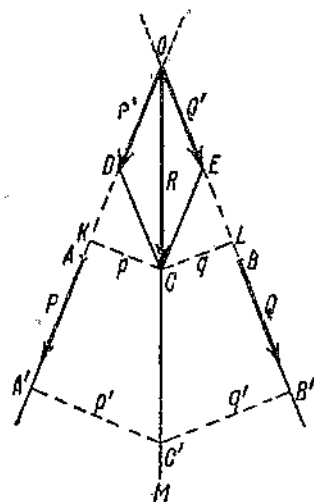
26. Какую силу P , параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к лежащему на последней грузу $Q = 20$ кг, чтобы удержать его в равновесии на плоскости, если угол наклона последней к горизонту равен 30° (трением пренебрегаем) (фиг. 70).

Отв. 10 кг.

ГЛАВА 9.

МОМЕНТ СИЛЫ.

§ 43. Момент силы относительно точки. Возьмем две лежащие в одной плоскости силы P и Q , приложенные к одному твердому телу в различных точках A и B ; пусть направления этих сил пересекаются в некоторой точке O (фиг. 71). Требуется найти равнодействующую этих сил.



Фиг. 71.

Мы видели, что каждую силу, не меняя ее действия, можно перенести в любую точку по направлению этой силы (по так называемой линии действия этой силы). Перенесем обе наши силы P и Q в точку O пересечения линий действия этих сил и полученные, таким образом, приложенные к ней силы P' и Q' сложим; равнодействующая R по величине, направлению и линии действия даст нам и равнодействующую двух первоначальных сил P и Q ; точку приложения этой равнодействующей можно взять где угодно на прямой OM , которая, таким образом, и будет искомой линией действия равнодействующей R .

Каждая прямая определяется своим направлением и одной точкой. Направление линии действия равнодействующей будет всегда параллельно диагонали R параллелограмма, построенного на складываемых силах P и Q ; поэтому для полного определения линии действия равнодействующей остается всего лишь определить одну точку, принадлежащую этой последней. Если линии действия обеих складываемых сил пересекаются в пределах чертежа, то за эту точку проще всего взять точку O пересечения этих линий. Если же линии действия пересекаются вне пределов чертежа, то точку O получить, таким образом, мы не можем. Посмотрим, нельзя ли заменить эту точку какой-нибудь другой точкой, лежащей на той же прямой OM . Рассмотрим точку C — второй конец диагонали OC параллелограмма, построенного на силах P' и Q' . Эта диагональ разделит параллелограмм на две равные площади OCD и OCE ; площадь треугольника OCD равна половине произведения основания

$OD = P$ и высоты $CK = p$; аналогичным образом площадь треугольника OCE равна половине произведения $OE = Q$ на $CL = q$. Приравнявая обе площади и сокращая на общий множитель $\frac{1}{2}$, будем иметь

$$Pr = Qq.$$

Произведение Pr данной силы P на перпендикуляр p , опущенный из любой точки C на линию действия этой силы, называется моментом M силы P относительно точки C ; перпендикуляр $CK = p$ носит название плеча:

$$M = P \cdot p. \quad (15)$$

Момент силы как произведение силы на длину (плечо) измеряется в килограммометрах (кгм). Один килограммометр представляет момент силы в один кг, приложенной на плече в один м.

Равенство $Pr = Qq$ выражает, что относительно точки C моменты обеих складываемых сил P и Q равны. Но то же самое имеет место и относительно любой точки C' линии OM . Действительно, из подобия треугольников OCK и $OC'A'$ имеем

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}.$$

Точно так же из подобия треугольников OCL и $OC'B'$ имеем

$$\frac{\overline{CL}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}.$$

Оба эти равенства дадут нам

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{C'B'}}$$

или

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}.$$

Мы имели

$$Pr = Qq;$$

Разделив это равенство почленно на предыдущее, получаем

$$Pr \cdot \frac{p'}{p} = Qq \cdot \frac{q'}{q}$$

и окончательно

$$Pr' = Qq'.$$

Таким образом любая точка линии действия равнодействующей обладает тем свойством, что относительно ее равны моменты обеих составляющих сил P и Q .

Посмотрим теперь, в чем заключается физическое значение момента. Если мы закрепим любую точку C' , лежащую на линии действия равнодействующей, то, очевидно, наша система сил будет находиться в равновесии, потому что равнодействующая сила R уравнивается сопротивлением точки опоры C' . Что же в отдельности будут производить

складываемые силы P и Q ? При неподвижной точке опоры C сила P будет стремиться повернуть тело вокруг C против стрелки часов, а сила Q , взятая в отдельности, будет стремиться вращать тело вокруг C по стрелке часов. Так как этого не происходит, то мы можем сказать, что вращательные стремления обеих сил взаимно уравновешиваются. Сопоставляя это с равенством

$$Pr = Qq,$$

можно сказать, что момент силы вокруг некоторой точки измеряет вращательное действие этой силы вокруг этой точки. Это тем более допустимо, что вращать тело вокруг какой-нибудь закрепленной точки тем легче, чем больше, во-первых, вращающая сила и, во-вторых, расстояние от неподвижной точки линии действия этой силы.

Если мы обратим внимание на то, что сила может производить вращение по стрелке и против стрелки часов, то можно одни моменты считать положительными, а другие — отрицательными. Условимся в дальнейшем считать положительными моменты, вращающие по стрелке часов. После этого момент силы можно определить таким образом:

Моментом силы P относительно точки O называется произведение величины P этой силы на плечо p — расстояние от точки O до линии действия этой силы, причем это произведение берется со знаком „плюс“, если сила стремится вращать тело вокруг O по стрелке часов, и со знаком „минус“ при вращении против стрелки часов.

Точка O , относительно которой берутся моменты, носит название центра моментов.

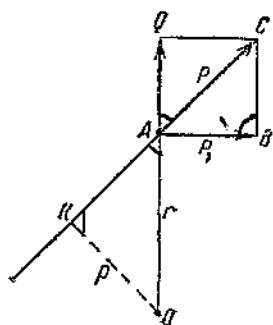
§ 44. Теорема Вариньона: момент равнодействующей силы равен алгебраической сумме моментов составляющих сил. Для до-

казательства этой важной теоремы статики попробуем представить несколько в иной форме выражение для момента силы относительно какой-нибудь точки. Мы назвали моментом силы P относительно точки O , которую мы можем предполагать закрепленной (фиг. 72), произведение величины P этой силы на длину перпендикуляра $OK = p$, опущенного из центра моментов O на линию действия силы P :

$$M = P \cdot p.$$

Соединим точку O (центр моментов) с точкой A приложения силы P , затем восставим в точке A перпендикуляр AB к OA и разложим нашу силу P на две составляющие P_1 по

AB и Q по OA ; нетрудно видеть, что только сила P_1 будет производить вращение вокруг O , тогда как составляющая Q уничтожится сопротивлением закрепленной точки O ; назовем силу P_1 вращающей силой или вращающей частью силы P .



Фиг. 72.

Рассмотрим теперь два подобных треугольника с взаимно перпендикулярными сторонами OAK и ABC . Из подобия этих треугольников можем написать

$$\frac{OK}{AB} = \frac{OA}{AC},$$

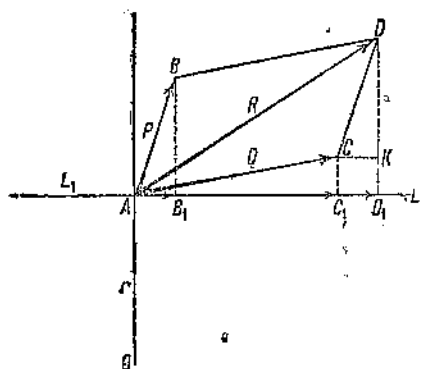
или

$$\frac{p}{P_1} = \frac{r}{P}.$$

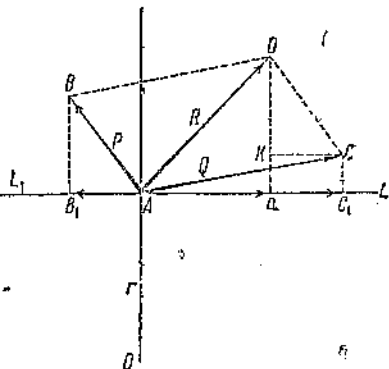
Написав, что произведение крайних членов равняется произведению средних членов этой пропорции, будем иметь

$$Pr = P_1 r.$$

Иными словами, взятый относительно центра O момент силы P , приложенной в точке A , можно определить как произведение вращающей



Фиг. 73.



Фиг. 74.

силы P_1 на расстояние $r = OA$ от центра моментов до точки приложения A силы P .

После этого мы можем перейти к доказательству самой теоремы Вариньона.

Пусть (фиг. 73 и 74) P и Q — две силы, которые мы всегда можем считать приложенными в точке A пересечения их линий действия, а R — их равнодействующая, приложенная в той же точке A . Проведем через A прямую LL_1 , перпендикулярную к OA , т. е. к прямой, соединяющей центр моментов O и точку A приложения всех сил P , Q и R . Чтобы получить вращающие части сил P , Q и R , достаточно будет, как видно из фиг. 72, опустить перпендикуляры BB_1 , CC_1 , DD_1 на линию LL_1 ; вращающей частью силы P будет отрезок AB_1 (фиг. 73 и 74), силы Q — отрезок AC_1 и силы R — отрезок AD_1 . Разберем два случая: 1) когда силы P и Q стремятся вращать в одном направлении вокруг O (фиг. 73) и 2) когда эти силы стремятся вращать в различных направлениях (фиг. 74).

На фиг. 73 момент силы R относительно центра O будет

$$M(R) = \overline{OA} \cdot \overline{AD_1}.$$

Но $AD_1 = AC_1 + C_1D_1$; в свою очередь, $C_1D_1 = CK$ или вследствие равенства треугольников ABB_1 и CDK (где CK параллельно LL_1):

$$C_1D_1 = CK = AB_1.$$

Таким образом

$$M(R) = \overline{OA} \cdot (\overline{AC_1} + \overline{AB_1})$$

или, раскрывая скобки:

$$M(R) = \overline{OA} \cdot \overline{AC_1} + \overline{OA} \cdot \overline{AB_1}.$$

Но AC_1 и AB_1 суть вращающие части сил Q и P ; поэтому

$$M(Q) = \overline{OA} \cdot \overline{AC_1},$$

$$M(P) = \overline{OA} \cdot \overline{AB_1}$$

и окончательно

$$M(R) = M(Q) + M(P).$$

Для случая, изображенного на фиг. 74, мы будем иметь

$$M(R) = \overline{OA} \cdot \overline{AD_1} = \overline{OA} (\overline{AC_1} - \overline{C_1D_1}).$$

Далее, $C_1D_1 = CK$ или вследствие равенства треугольников ABB_1 и CDK

$$C_1D_1 = AB_1.$$

Таким образом

$$M(R) = \overline{OA} \cdot \overline{AC_1} - \overline{OA} \cdot \overline{AB_1}.$$

Но $\overline{OA} \cdot \overline{AC_1}$ есть момент $M(Q)$ силы Q , являющийся у нас положительным. Момент $M(P)$ будет отрицательным (сила P в данном случае вращает против стрелки часов). Поэтому

$$M(Q) = \overline{OA} \cdot \overline{AC_1},$$

$$M(P) = -\overline{OA} \cdot \overline{AB_1}$$

и окончательно

$$M(R) = M(Q) + M(P),$$

независимо от того, вращают ли обе составляющие силы P и Q в одну или в разные стороны. Теорема Вариньона таким образом доказана.

Применим теорему Вариньона к выводу условий равновесия твердого тела с одной неподвижной точкой. Пусть на тело действует несколько пересекающихся между собой сил, расположенных в одной плоскости, в которой находится и неподвижная точка O . Поскольку все наши силы пересекаются¹⁾, мы можем, складывая их попарно, найти их

¹⁾ Мы предполагаем, что во время частных сложений не встретится случаев, когда складываемые силы окажутся параллельными? Однако теорема Вариньона будет верна и в случае двух параллельных сил, как будет доказано ниже.

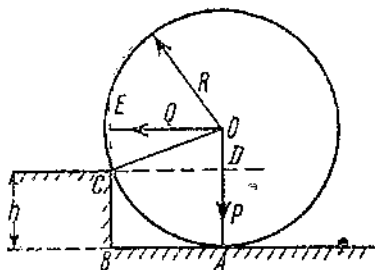
общую окончательную равнодействующую R . Для того чтобы тело под действием этой системы сил находилось в равновесии, необходимо: или чтобы эта равнодействующая равнялась нулю, или же чтобы она уравновешивалась сопротивлением неподвижной точки O , т. е. линия ее действия должна проходить через O . Составим теперь сумму моментов всех сил относительно точки O ; эта сумма равна будет моменту равнодействующей R относительно точки O . Этот момент будет равняться нулю в следующих случаях: или когда сила R равняется нулю, но тогда наши силы уже находятся в равновесии, или же когда плечо, т. е. расстояние линии действия силы R от точки O , равняется нулю, но тогда линия действия силы R пройдет через точку O и, следовательно, эта сила уничтожится сопротивлением опоры O . Таким образом искомое условие равновесия выразится так:

Тело, имеющее одну неподвижную точку опоры, будет находиться в равновесии, если сумма моментов всех сил вокруг этой точки будет равна нулю (сумма моментов вращающих по стрелке часов должна уравновеситься с суммой моментов вращающих против стрелки часов).

§ 45. Примеры. Применим введенное нами понятие о моменте для решения нескольких задач на равновесие.

Пример 22. Круглый каток весом P и радиуса R стоит перед препятствием высоты h (фиг. 75). Какую наименьшую горизонтальную силу нужно приложить к оси катка, чтобы последний мог подняться на препятствие?

При подъеме катка на препятствие он будет вращаться вокруг выступающей его точки C ; поэтому наименьшее горизонтальное усилие Q определится из условия, чтобы момент силы Q вокруг C был больше момента веса P вокруг той же точки C или, по меньшей мере, был равен ему. Опустим перпендикуляры CE и CD на направления этих сил. Момент P будет положительным и равным $P \cdot \overline{CD}$; момент Q будет отрицательным и равным $Q \cdot \overline{CE}$. Отрезок $\overline{CE} = \overline{OD} = \overline{OA} - \overline{AD} = R - h$; плечо CD определим из треугольника OCD :



Фиг. 75.

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OD}^2}$$

или

$$\overline{CD} = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}.$$

Условие равновесия в нашем случае будет:

$$Q \cdot \overline{CE} = P \cdot \overline{CD},$$

откуда

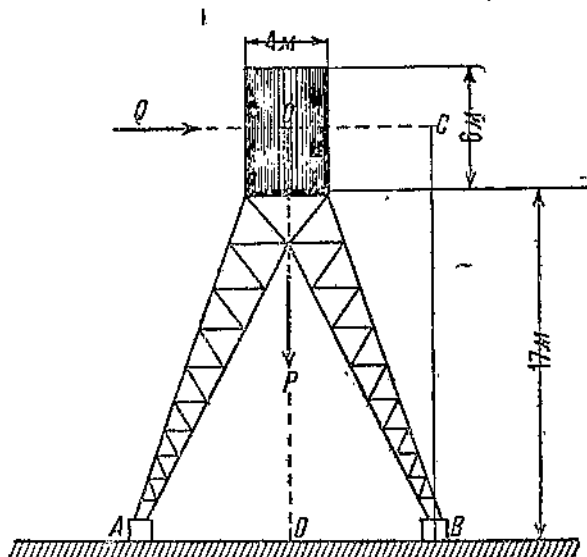
$$Q = P \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$$

или

$$Q = P \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R-h}.$$

Так определяется минимальная возможная величина силы Q ; конечно, для возможности перекатывания нужно взять Q чуть больше того значения, которое получилось по выведенной формуле.

Пример 23. Водонапорная башня представляет цилиндрический резервуар высотой в 6 м и диаметром в 4 м, укрепленный на четырех симметрично расположенных наклонных столбах (фиг. 76); дно резервуара находится на высоте 17 м над уровнем земли; вес башни 8 тонн;



Фиг. 76.

давление ветра принимается равным 125 кг на 1 м² и рассчитывается на площадь, которую цилиндр своими крайними очертаниями вырезает из общего потока набегающего на него воздуха. Определить необходимое расстояние AB между основаниями столбов.

Предположим, что ветер дует слева; общая сила Q давления будет проходить через центр O цилиндра и будет стремиться опрокинуть башню вокруг ноги B (считаем, что в момент опрокидывания ножка A уже начнет отделяться от земли). Противодействие этому опрокидыванию будет представлять момент силы веса P , который будет стремиться вращать вокруг B против стрелки часов; при равновесии оба эти момента должны быть равны. Вычислим силу Q давления ветра. Она будет равняться выраженной в кв. метрах площади поперечного сечения цилиндра $4 \times 6 = 24$ м, помноженной на 125 кг, т. е. $Q = 125 \cdot 24 = 3000$ кг $= 3$ т. Опрокидывающий момент силы Q будет равен

$$Q \cdot \overline{BQ} = (17 + 3) = 60 \text{ тоннометрам,}$$

Той же самой величине должен равняться и восстанавливающий момент силы P при вращении вокруг B . Если расстояние AB обозначим через x , то плечо для силы P будет

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{x}{2};$$

а сам момент силы P :

$$P \cdot \frac{x}{2} = 8 \cdot \frac{x}{2} \text{ тоннометров.}$$

Сравнивая величины опрокидывающего и восстанавливающего моментов, находим

$$8 \cdot \frac{x}{2} = 3 \cdot 20$$

или

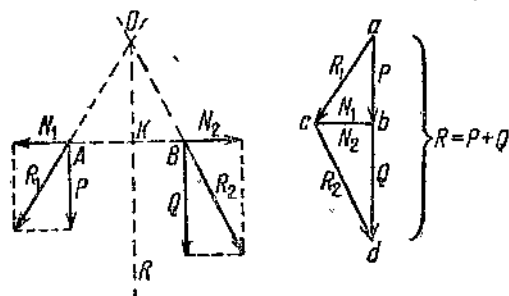
$$4x = 60,$$

откуда $x = 15$ м.

Так определяется искомое минимальное расстояние между столбами AB .

§ 46. Сложение параллельных сил. Предположим теперь, что на рассматриваемое тело действуют две параллельные силы P и Q , направленные в одну сторону (фиг. 77) и приложенные в точках A и B . В этом случае точки пересечения линий действия обеих складываемых сил не существует и метода, указанного нами в § 43, мы не имеем права применить. Мы можем, однако, выйти из затруднения следующим способом.

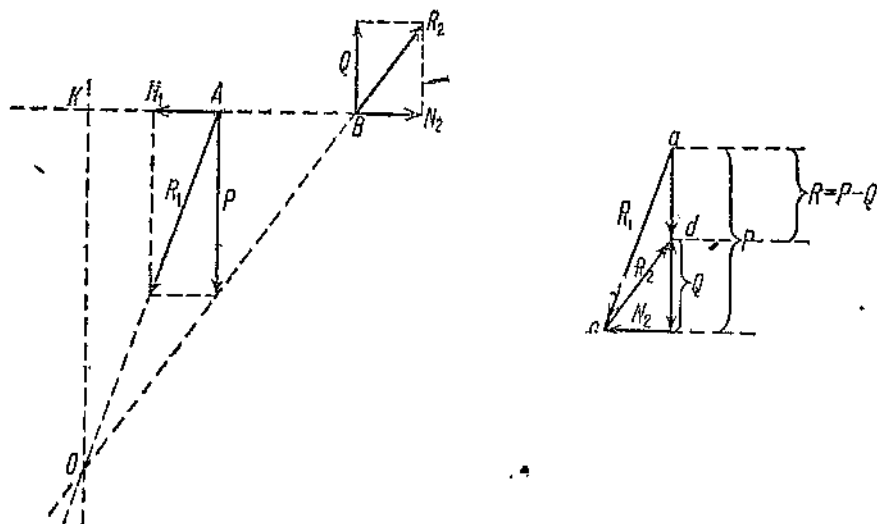
Две равные и прямо противоположные, действующие по одной прямой силы, приложенные к одному телу, находятся в равновесии (равнодействующая их равна нулю и, как нетрудно видеть из фиг. 77, сумма моментов двух таких сил N относительно любой точки O тоже равна нулю, так как один момент положителен, а другой равен ему и отрицателен). Поэтому, не изменяя состояния равновесия или движения, к телу всегда можно приложить (или, наоборот, отбросить) такую пару двух взаимно уравновешивающихся сил. Соединим A и B прямой линией и приложим в точках A и B две равные и прямо противоположные силы N_1 и N_2 . Полученные четыре силы мы можем теперь сгруппировать таким образом: силу P и силу N_1 , приложенные в одной точке A , можно сложить, в результате чего получится одна равнодействующая R_1 , приложенная в точке A ; затем силы Q и N_2 , как приложенные в одной точке B , тоже могут быть заменены одной равнодействующей R_2 ,



Фиг. 77.

причем, как видно из чертежа, направления сил R_1 и R_2 пересекаются в точке O , лежащей в пределах чертежа. Перенесши обе силы R_1 и R_2 в точку O и сложивши их в ней по общим правилам, мы найдем равнодействующую R , которая будет одновременно равнодействующей двух первоначальных сил P и Q .

Чему будет равна эта равнодействующая? Чтобы не портить чертежа, будем все такие отдельные сложения производить в стороне. Отложим (правый чертеж) силу P и от ее конца — силу N_1 ; они изобразятся векторами $\overline{ab}$ и $\overline{bc}$, а равнодействующая R_1 этих сил изобразится по правилу силового треугольника вектором $\overline{ac}$, соединяющим начало



Фиг. 78.

первой складываемой силы P с концом последней N_1 . Переходя к определению равнодействующей R_2 , заметим, что приложенную в точке B силу N_2 второй раз можно и не строить, изобразив ее вектором $\overline{cb}$, уже имеющимся у нас на чертеже и служившим для изображения силы N_1 ; от конца b этого вектора отложим представляющий силу Q вектор $\overline{bd}$; равнодействующая R_2 сил N и Q получится, если мы соединим начало c первой силы с концом d второй. Остается теперь сложить силы R_1 (изображаемые вектором $\overline{ac}$) и R_2 (изображаемую вектором $\overline{cd}$); равнодействующая этих сил изобразится вектором $\overline{ad}$, который, как нетрудно видеть, будет равен сумме $P + Q$.

Итак, равнодействующая двух параллельных сил P и Q будет равна их сумме и направлена в ту же сторону, что и складываемые силы, причем линия действия этой равнодействующей должна пройти через точку O пересечения сил R_1 и R_2 параллельно общему направлению обеих параллельных сил P и Q . Рассмотрим теперь случай двух параллельных сил, направленных в разные стороны (фиг. 78), причем предположим сначала, что эти силы неравны. Пусть для определен-

ности $P > Q$. Соответствующие построения воспроизведены на фиг. 78, рассуждения же остаются теми же самыми, что и в первом случае. Изучая фиг. 78, нетрудно заметить, что равнодействующая двух неравных параллельных сил P и Q равна их разности, т. е. $P - Q$.

Покажем теперь, что и для случая параллельных сил остается в силе теорема Вариньона, а именно, что момент равнодействующей R равен сумме моментов составляющих, т. е.

$$M(R) = M(P) + M(Q).$$

Эта теорема доказана нами для случая сил, направления которых пересекаются; поэтому, поскольку равнодействующая R получается в результате сложения двух частных равнодействующих R_1 и R_2 , направления которых пересекаются в точке O , то

$$M(R) = M(R_1) + M(R_2).$$

Но R_1 и R_2 , в свою очередь, являются равнодействующими сил P и N_1 , Q и N_2 ; поэтому

$$M(R_1) = M(P) + M(N_1),$$

$$M(R_2) = M(Q) + M(N_2).$$

Подставляя эти выражения в формулу для $M(R)$, будем иметь

$$M(R) = M(P) + M(Q) + M(N_1) + M(N_2).$$

Но силы N_1 и N_2 равны, противоположны и действуют по одной прямой; сумма их моментов поэтому, как мы видели в начале этого параграфа, равна нулю. Таким образом

$$M(R) = M(P) + M(Q)$$

и теорема доказана и для случая двух параллельных сил, действующих в одну сторону, и двух неравных параллельных сил, действующих в противоположные стороны.

Если центр моментов мы возьмем на линии действия равнодействующей, то момент этой последней будет равен нулю, иными словами, равнодействующую мы можем приложить в точке, относительно которой сумма моментов обеих складываемых сил равна нулю.

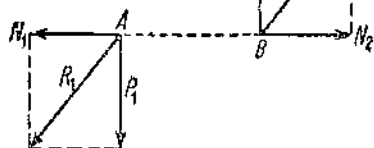
Так как точку приложения каждой силы можно перемещать по линии ее действия, то всегда можно добиться того, чтобы линия AB , соединяющая точки приложения обеих складываемых сил, была перпендикулярна к их направлению. Обратим внимание на точку K , в которой линия действия силы R пересекает линию AB . Для этой точки момент силы P должен быть равен по величине и противоположен по знаку моменту силы Q . Это показывает, что для случая параллельных сил, направленных в одну сторону, точка K должна лежать между точками приложения A и B обеих складываемых сил; в случае же сил, направленных

ных в разные стороны, точка приложения равнодействующей K должна лежать за точкой приложения большей силы, чтобы при составлении моментов большая величина силы компенсировалась меньшей величиной плеча. Таким образом по абсолютной величине для обоих моментов должно иметь место равенство

$$P \cdot \overline{AK} = Q \cdot \overline{BK}$$

или

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} = \frac{Q}{P}.$$



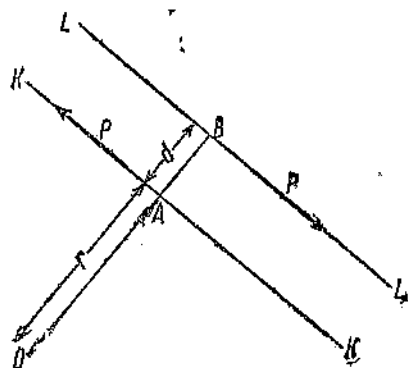
Фиг. 79.

Это равенство показывает, что точка K , которую мы можем считать за точку приложения равнодействующей сил P и Q , делит расстояние между точками A и B приложения обеих складываемых сил обратно пропорционально величинам складываемых сил (для сил, действующих в одну сторону внутренним, а в разные — внешним образом).

Остается теперь рассмотреть еще случай, когда складываются две параллельные силы, направленные в разные стороны и равные по величине друг другу (фиг. 79). Согласно только что доказанному положению равнодействующая этих двух сил, если бы она существовала, должна была бы быть равна нулю. С другой стороны, эти две силы не могут взаимно уравновеситься, поскольку они не лежат на одной прямой. Мы имеем так называемую пару сил. В случае пары сил добавление взаимно уравновешивающихся сил N_1 и N_2 ни к чему не приведет, потому что получаемые после сложения силы R_1 и R_2 (фиг. 79) будут продолжаться оставаться равными, параллельными и направленными в противоположные стороны, так что мы будем все время иметь дело с парой сил.

Пара сил не имеет равнодействующей и вместе с тем не находится

в равновесии, но стремится вращать тело, на которое она действует. Это можно обнаружить, показав, что сумма моментов обеих сил, составляющих пару, не равна нулю. Более того, докажем, что сумма моментов сил, составляющих пару, есть величина постоянная, независимо от того, относительно какой точки берутся моменты. Пусть мы имеем пару сил PP , (фиг. 80), действующих по линиям KK и LL . Возьмем произвольную точку O и опустим из нее перпендикуляры OA и OB на линии действия KK и LL обеих сил пары. Попробуем теперь найти сумму моментов обеих сил P, P относительно точки O . Момент силы P , действующей по прямой LL , будет положительным (сила вращает во-



Фиг. 80.

круг O по стрелке часов) и равным произведению $P \cdot \overline{OB}$. Точно так же момент вокруг точки O силы P , действующей по прямой KK , будет отрицателен и равен $P \cdot \overline{OA}$. Если мы положим $\overline{OA} = r$, $\overline{AB} = d$, то сумма моментов обеих наших сил будет равна

$$+P \cdot \overline{OB} - P \cdot \overline{OA} = P(r + d) - Pr = Pd.$$

Как видно, расстояние r центра моментов O от линии KK не входит в эту формулу. Это значит, что в каком бы месте мы ни взяли центр моментов O , сумма моментов сил, составляющих пару, будет той же самой величиной, равной произведению силы P , составляющей пару, на расстояние d между линиями действия KK и LL обеих сил, образующих пару. Эта величина называется моментом пары. Момент пары, как и вообще всякий момент, считается положительным, если пара сил (как на фиг. 80) вращает по стрелке часов, и отрицательным, если пара вращает в противоположном направлении.

Пусть теперь на твердое тело действует система параллельных сил $P_1, P_2, P_3, \dots, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, из которых силы $P_1, P_2, P_3, \dots$ направлены в одну сторону, а силы $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ — в противоположную сторону. Разбив всю эту систему на две группы одинаково направленных сил, мы можем каждую из этих групп заменить одной силой, величина которой равнялась бы сумме величин всех сил складываемой группы. Полученные две силы P и Q — равнодействующие двух выделенных групп —

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots,$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots,$$

мы можем, в свою очередь, сложить как две параллельные, направленные в противоположные стороны силы (если только P не равно Q). Пусть для определенности $P > Q$; тогда общая равнодействующая R будет направлена в сторону P и равна

$$R = P - Q = P_1 + P_2 + P_3 + \dots - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots).$$

Если мы будем считать силы $P_1, P_2, P_3, \dots$ положительными, то направленные в противоположную сторону силы $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, естественно, будут отрицательными. Наша равнодействующая R будет

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + (-Q_1) + (-Q_2) + (-Q_3) + \dots,$$

что мы можем выразить так:

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots, \quad (16)$$

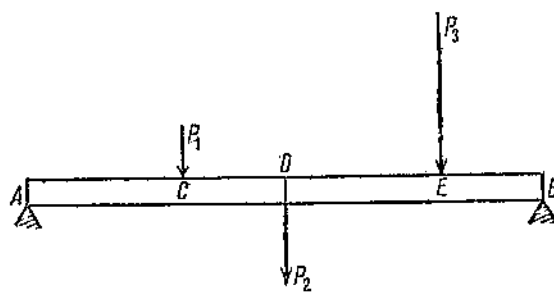
где теперь $P_1, P_2, P_3, \dots$ могут иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Нетрудно видеть, что момент равнодействующей системы параллельных сил будет равен сумме моментов составляющих (если теорема доказана для двух сил, то, добавляя каждый раз по одной силе, пока не исчерпаются все силы, можно распространить теорему и на случай

произвольного числа параллельных сил). Отсюда совершенно таким же образом, как и в случае двух сил, следует, что линия действия равнодействующей системы параллельных сил должна проходить через точки, для которых сумма моментов всех складываемых сил равна нулю:

$$M(P_1) + M(P_2) + M(P_3) + \dots = 0. \quad (17)$$

§ 47. **Равновесие системы параллельных сил.** Для того чтобы система параллельных сил, действующих на данное твердое тело, находилась в равновесии, необходимо прежде всего, чтобы сумма сил, тянущих тело в одну сторону, равнялась сумме сил, тянущих тело в противоположную сторону. Это условие, являясь необходимым, не будет, однако, достаточным, если обе равные направленные в противоположные стороны частные равнодействующие R_1 и R_2 (§ 39) будут образовывать пару сил. Для того чтобы равновесие имело место, необходимо, чтобы



Фиг. 81.

эти две частные равнодействующие R_1 и R_2 были не только равны, но и направлены в разные стороны по одной и той же прямой; иными словами, чтобы момент одной силы уничтожился противоположным моментом другой силы, т. е. чтобы равнялась нулю алгебраическая сумма моментов всех складываемых сил. Таким

образом условия равновесия системы параллельных сил выразятся так:

Необходимые и достаточные условия равновесия системы параллельных сил заключаются в том, что должны равняться нулю алгебраическая сумма всех сил и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 + \dots &= 0, \\ M(P_1) + M(P_2) + M(P_3) + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Последнее из условий (18) соответствует тому, что должно равняться нулю вращательное действие всех приложенных сил относительно любой точки (центра моментов), которую мы захотели бы закрепить.

Применим разобранный теорию к определению давлений, производимых на опоры горизонтальной балкой, на которую действует ряд сил, или, что сводится к тому же, к определению тех противодействий (опорных реакций), с которыми сдавливаемые опоры, в свою очередь, действуют на балку. Поскольку мы будем пользоваться условиями равновесия сил, приложенных к балке, то в наши уравнения должны войти как раз реакции опоры, а не равные им и противоположно направленные давления балки на опоры.

Пример 24. Пусть нам дана балка AB (фиг. 81), на которую действуют нагрузки $P_1 = 100$ кг, $P_2 = 200$ кг (собственный вес балки)

и $P_3 = 300$ кг, приложенные в точках C , D и E . Длина балки $AB = 10$ м; расстояния: $AC = 3$ м, $CD = 2$ м, $DE = 3$ м, $BE = 2$ м. Определить давление балки на опоры A и B .

Реакции опор A и B , которые мы обозначим через N_A и N_B , должны уравновесить действие всех внешних нагрузок. Для этого необходимо, во-первых, чтобы сумма обеих направленных вверх опорных реакций была равна сумме всех действующих вниз сил, т. е.

$$N_A + N_B = 100 + 200 + 300. \quad (a)$$

Во-вторых, необходимо, чтобы опорные реакции уничтожили и вращательное действие внешних нагрузок. Отбросим опору B ; балка получает возможность вращаться вокруг оставшейся опоры A ; заменяющая действие опоры B опорная реакция N_B должна уравновесить моменты всех остальных сил. Вокруг точки A силы P_1 , P_2 , P_3 будут вращать балку по стрелке часов, а сила N_B — против стрелки часов; абсолютная величина суммы первых моментов должна быть равна абсолютной величине момента силы N_B . Это дает нам уравнение:

$$P_1 \cdot \overline{AC} + P_2 \cdot \overline{AD} + P_3 \cdot \overline{AE} = N_B \cdot \overline{AB}$$

или

$$100 \cdot 3 + 200 \cdot 5 + 300 \cdot 8 = N_B \cdot 10. \quad (b)$$

Отсюда

$$10 N_B = 3700$$

и

$$N_B = 370 \text{ кг.}$$

Подставив найденное значение реакции N_B в уравнение (a), определим реакцию N_A :

$$N_A = 600 - N_B = 230 \text{ кг.}$$

Пример 25. Железная балка длиной в 4 м и весом в 500 кг заложена в стену, толщина которой равна 0,5 м, так что опирается на нее в конечных точках A и B *).

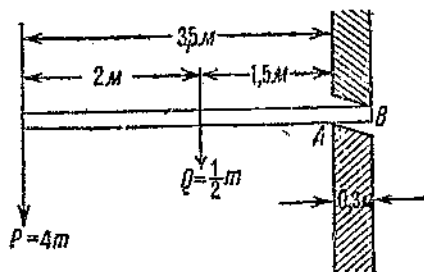
Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки подвешен груз $P = 4$ т (фиг. 82).

В точке A реакция стены N_A поддерживает балку, в точке B , наоборот, реакция N_B стремится опустить балку вниз. Напишем, что сумма сил, действующих вверх, равна сумме сил, действующих вниз:

$$P + Q + N_B = N_A$$

или

$$4 + 0,5 + N_B = N_A. \quad (a)$$



Фиг. 82.

* Балка будет упираться только в этих двух точках потому, что под тяжестью собственного веса и приложенной нагрузки P на конце балки в стене переконется таким образом, что будет нажимать на стену только в крайних ее точках A и B .

Второе уравнение для определения опорных реакций N_A и N_B мы получим, написав, что сумма моментов сил P и Q относительно точки B равна моменту силы N_A относительно той же точки:

$$N_A \cdot 0,5 = P \cdot 4 + Q \cdot 2,$$

или

$$0,5 \cdot N_A = 4 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 = 17, \quad (b)$$

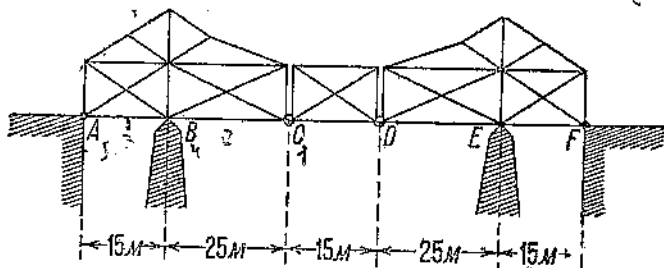
отсюда

$$N_A = 34 \text{ тонны.}$$

Подставив соответствующее значение в уравнение (a), определим N_B :

$$N_B = N_A - P - Q = 34 - 4 - 0,5 = 29,5 \text{ тонны.}$$

Отметим, что реакцию N_A можно разложить на две части: одна часть, равная 4,5 тонн, уничтожается стремлением балки к опусканию вниз, а другая часть, равная 29,5 тонн, равна и противоположно направлена реакции N_B . Эти две последние реакции образуют пару сил, вращающую балку BC по стрелке часов и уравновешивающую враща-



Фиг. 83.

тельное действие сил P и Q , стремящихся поворачивать балку против стрелки часов.

ПРИМЕР 26. Разберем один способ устройства моста, имеющий большое значение в современной технике. Если река не особенно глубока и течение ее не очень быстро, то при постройке моста ставят по дну реки каменные или деревянные устои (быки) и на них настилают самое полотно моста (мостовые фермы). Но если почему-либо нельзя ставить быков по самой середине ложа реки (вследствие бурного течения или если река протекает в горной местности), то среднюю ферму CD моста (фиг. 83) подвешивают к двум боковым AC и DF . Такого рода мост носит название консольного. Пусть консольный мост состоит из трех ферм AC , CD и DF , из которых обе крайние опираются каждая на две опоры A и B , E и F . Требуется при заданных на фиг. 83 размерах и при весе погонного метра длины фермы в 6 тонн определить давления, производимые на опоры A , B , E и F моста.

Ввиду симметричности обеих половин моста достаточно рассчитать давления на опоры A и B (давление на опору E будет такое же, как и на B , а на опору F — как на A). Рассмотрим условия равновесия фермы AC . На нее действуют: в точке C направленная вниз сила (1),

равная половине веса фермы CD или $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 = 45$ тонн, приложенный в середине пролета BC вес части BC , равный $25 \cdot 6 = 150$ т [сила (2)] приложенный в середине пролета AB вес части AB , равный $15 \cdot 6 = 90$ т [сила (3)] неизвестные опорные реакции в точках A и B [сила (4) и (5)]. Составим уравнение моментов относительно точки B . Приложенные вправо от B силы (1) и (2) будут вращать по стрелке часов; их общий момент будет

$$45 \cdot 25 + 150 \cdot \frac{25}{2} = 3000 \text{ тоннометров.}$$

Из известных сил этому моменту противодействует момент силы (3) — веса пролета AB , равный $90 \cdot \frac{15}{2} = 675$ тм. Поскольку этот момент меньше момента, вращающего по стрелке часов, то недостающий момент $3000 - 675 = 2325$ тм должен быть уравновешен моментом силы, приложенной в точке A и действующей на ферму AC вниз. Обозначив эту силу через N_A и составив уравнение моментов относительно точки B , будем иметь (сравнивая моменты вращающие по и против стрелки часов)

$$N_A \cdot 15 + 90 \cdot \frac{15}{2} = 150 \cdot \frac{25}{2} + 45 \cdot 25,$$

откуда

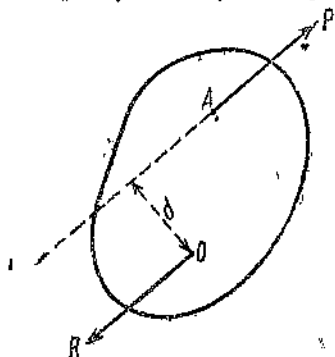
$$N_A = 155 \text{ т.}$$

Такой величиной выражается сила, с которой опора A действует по направлению вниз на ферму AC ; обратно, ферма AC действует на опору с такой же силой вверх, т. е. стремится оторвать часть A от левого берега; этого и следовало ожидать, так как часть моста, расположенная между B и E , провисивается вниз и стремится растянуть те связи, которые прикрепляют концы моста к берегам в точках A и F , а веса частей ферм AB и EF слишком малы, чтобы противодействовать этому провисиванию. Что касается давления в точке B , то мы его получим, сложив все действующие вниз силы, приложенные к ферме AC ; это будут: 155 т (действие опоры A), 90 т (вес пролета AB), 150 т (вес пролета BC) и 45 т (приложенное в точке C давление — половина веса фермы CD). Складывая все эти силы, находим, что давление в точке B равно 440 т.

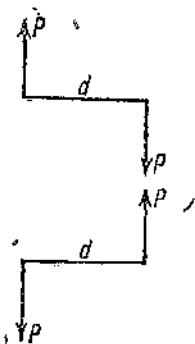
§ 48. Пара сил. Рассмотрим теперь более внимательно систему двух равных параллельных сил, направленных в противоположные стороны, т. е. систему сил, для которой мы ввели название пары сил. Как мы уже говорили, пара сил не имеет равнодействующей и вместе с тем не находится в равновесии.

Пару сил можно отыскать везде, где только имеется налицо вращательное движение. Пусть мы имеем пластинку произвольной формы (фиг. 84), могущую вращаться вокруг неподвижной точки опоры O ; пусть на эту пластинку действует сила P , приложенная в некоторой точке A . Вращающий момент силы P будет равняться произведению величины силы P на плечо d , т. е. на перпендикуляр, опущенный из

точки опоры O на линию действия силы P . Для того чтобы вращение имело место, недостаточно только приложить силу P ; необходимо еще и закрепить опорную точку O . Действие этой точки опоры, препятствующей движению тела, мы можем заменить некоторой силой R — опорной реакцией, после добавления которой наша вращающаяся пластинка может уже быть рассматриваема как совершенно свободная. Посмотрим теперь, чему равна опорная реакция R . Если бы она оказалась непараллельной силе P или же параллельной, но не равной силе P , то обе эти силы мы могли бы заменить одной равнодействующей, которая в случае пересекающихся сил определялась бы по правилу параллелограмма, а в случае параллельных сил равнялась бы их сумме



Фиг. 84.



Фиг. 85.

или разности; под действием этой силы наше тело получило бы движение по ее направлению. Так как этого не происходит, то реакция R может быть только равной, параллельной и прямо противоположной силе P ; в таком случае она вместе с этой силой образует пару, момент которой равен произведению $P \cdot d$, т. е. как раз вращающему моменту силы P .

Не нужно забывать, что момент пары имеет определенный знак в зависимости от направления вращения пары. На фиг. 85 изображены две пары, составленные из одинаковых сил P и имеющие одинаковые плечи (расстояние d между силами, образующими пару), но отличающиеся направлениями вращения; момент верхней пары будет положительным и равным $+Pd$ (вращение по стрелке часов), момент нижней пары — отрицательным и равным $-Pd$ (вращение против стрелки часов).

В конце § 46 мы показали, что сумма моментов обеих сил, составляющих пару, будет для любого центра моментов постоянной, равной моменту пары.

Можно доказать, что, не изменяя вращательного действия пары, можно ее как угодно поворачивать и перемещать в ее плоскости.

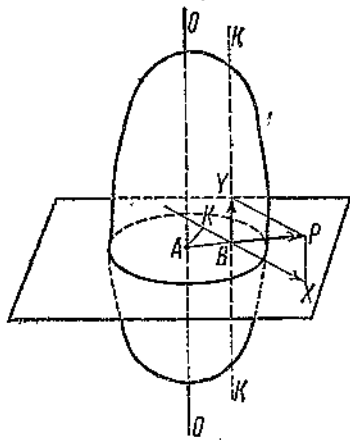
§ 49. Момент силы относительно оси. До сих пор мы говорили о моменте силы относительно точки, измеряющем вращательное действие силы, лежащей в плоскости пластинки, центром вращения которой является некоторая неподвижная точка. Реальное тело всегда вращается вокруг некоторой прямой линии — оси вращения, и наша пла-

стинка тоже вращалась вокруг оси, проходящей через неподвижную точку и перпендикулярной к плоскости пластинки; таким образом изученный нами момент около точки на самом деле измерял вращательное действие вокруг указанной оси, перпендикулярной к плоскости пластинки для силы, расположенной в этой плоскости.

Как же распространить понятие о вращающем моменте на случай силы, действующей на данное твердое тело и как угодно расположенной.*

Представим себе твердое тело, которое может вращаться вокруг оси OO (фиг. 86). Пусть на это тело действует некоторая сила P , расположенная как угодно в пространстве. Опустим из точки B приложения этой силы перпендикуляр BA на ось вращения OO ; через точку B проведем прямую BV , параллельно оси вращения OO , затем через BV и линию действия силы P проведем

плоскость BPV и в этой последней плоскости проведем прямую BX , перпендикулярную к BV . Силу P мы теперь можем разложить по направлениям BX и BV ; составляющая BV будет стремиться только передвигать тело вдоль оси OO и никакого вращательного действия не произведет, другая же составляющая BX (обозначим ее для краткости X), наоборот, не будет стремиться двигать тело вдоль оси, а будет только вращать его вокруг оси. Если бы мы посмотрели вдоль оси OO сверху, то ось OO представилась бы одной точкой A , составляющая BV тоже обратилась бы в точку, перпендикулярная же к оси OO составляющая BX , или просто X , представилась бы в натуральную величину и все тело представилось бы нам вращающимся вокруг точки A . Момент силы X , вокруг A , равный произведению силы X на длину перпендикуляра AK , опущенного из A на линию действия силы X , и будет называться моментом силы P вокруг оси OO . Таким образом момент силы около оси можно определить как произведение упомянутой перпендикулярной к оси составляющей BX этой силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние, равное длине общего перпендикуляра (AK) между осью вращения (OO) и линией действия силы P (или между осью OO и параллельной ей плоскостью BPV , проведенной через линию действия силы P).

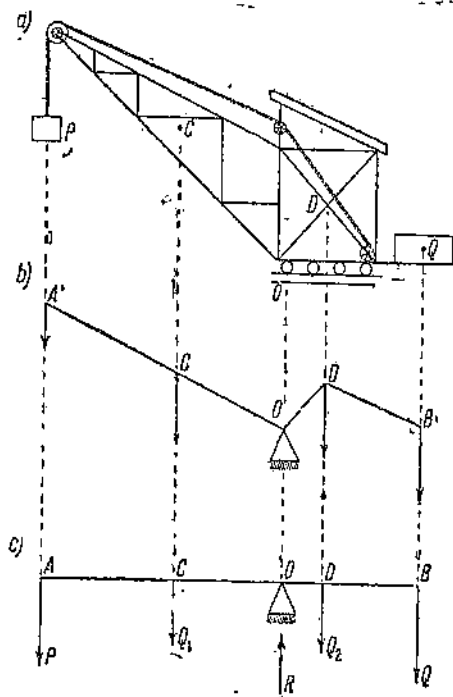


Фиг. 86.

Очень важно отметить, что при таком определении момента силы относительно оси величина последнего не меняется, если точку B приложения перемещать по прямой KK , проходящей через B параллельно оси вращения OO , не меняя при этом величины и направления силы, которая, таким образом, будет все время оставаться параллельной самой себе. При таком перемещении силы и точки ее приложения перпендикулярная к оси составляющая BX не меняется ни по величине, ни по направлению, расстояние AB тоже остается неизменным, равно как и

действующей параллельных сил на прямой, соединяющей точки приложения составляющих. После этого мы ввели понятие о паре сил, дающее наглядное графическое изображение момента силы, и установили два условия равновесия системы параллельных сил в плоскости: равенство нулю алгебраической суммы всех сил и суммы моментов их относительно любой точки. Эти два уравнения являются основным орудием для решения задач на равновесие параллельных сил. Покажем теперь, как можно упрощать общий ход решения поставленной задачи. На практике приходится иметь дело не с отвлеченными схемами из нескольких линий и стрелок, а с громоздкими сооружениями, форма которых гораздо сложнее и запутаннее простых сочетаний, имеющих место в схематическом расчете. Задача инженера-конструктора состоит в том, чтобы из этой запутанности форм выделить все несущественное, оставив лишь те части, которые непосредственно участвуют в работе действующих на сооружение сил. На фиг. 88, а

сверху изображен надземный кран — сложное металлическое сооружение для подъема и передвижения грузов. Кран посажен на колеса, которыми он поворачивается на неподвижном основании. Поднимаемый краном груз P подвешен на конце укосины при помощи каната, перекинутого через блок A и ведущего к барабану крана; во время работы крана барабан вращают, и на него



Фиг. 88.

навивается поднимающий груз канат. Если поднимаемый краном груз P будет достаточно тяжел, то крану угрожает опасность опрокинуться вокруг крайней левой своей точки опоры O . Для устранения возможности этого опрокидывания на противоположном конце крана устраивают противовес Q . Задача состоит в том, чтобы, зная вес P поднимаемого груза, вес Q_1 укосины крана, приложенный в точке C , и вес Q_2 корпуса крана, приложенный в точке D , определить вес устраиваемого противовеса Q , предполагая место устройства этого противовеса заданным. Нетрудно видеть, что для расчета крана безразличны канат, блок, барабан, материал, из которого сделан фундамент крана, укосина и корпус крана. Весь фундамент мы можем для расчета заменить одной точкой — точкой опоры O переднего колеса. Укосина может быть заменена одной линией OA , на которой отмечается точка C приложения ее веса. Корпус крана и противовеса заменяется ломаной линией ODB , соединяющей точку

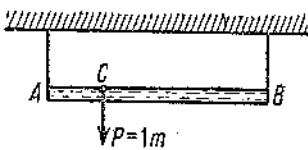
опоры O с точками приложения D веса Q_2 корпуса крана и B — противовеса. Все действующие силы P, Q, Q_1 и Q_2 заменяются векторами — стрелками, показывающими их величину. Проведя соответствующую замену, мы получаем фиг. 88, *б*. Наконец, зная, что плечи моментов измеряются перпендикулярами, опущенными на линии действия сил, мы можем ломаную линию $AODB$ заменить одной горизонтальной прямой, на которую остается только перенести точки приложения сил по линиям их действия; после этого у нас получается очень простая схема, изображенная на фиг. 88, *с*. Для решения задачи остается лишь взять уравнение моментов относительно точки опоры O :

$$P \cdot \overline{OA} + Q_1 \cdot \overline{OC} = Q_2 \cdot \overline{OD} + Q \cdot \overline{OB},$$

из которого уже нетрудно определить неизвестную силу Q .

Задачи.

27. Груз перемещается по балке AB длиной 10 м и в данный момент находится в точке C на расстоянии $AC = 3$ м (фиг. 89). Определить получающиеся усилия в подвесках A и B , если вес груза равен 1 тонне.



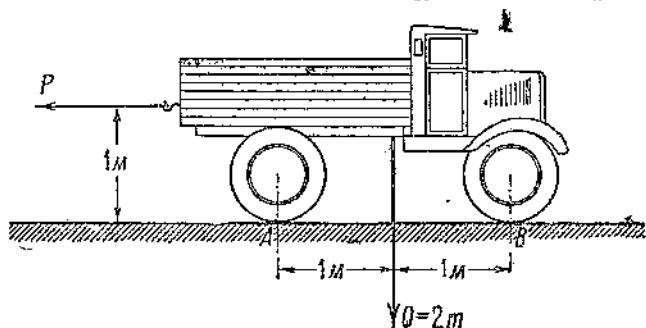
Фиг. 89.

Отв. $R_A = 700$ кг; $R_B = 300$ кг.

28. Автомобиль весом 2 тонны, центр тяжести которого лежит на середине расстояния между осями (фиг. 90), тянет прицепленную тележку с силой $P = 200$ кг, причем высота крюка над поверхностью земли равна 1 м. Определить давление автомобиля в точках A и B .

Указание. Сумма давлений N_A и N_B равна 2 т. Взять моменты около точки B .

Отв. $N_A = 1100$ кг; $N_B = 900$ кг.



Фиг. 90.

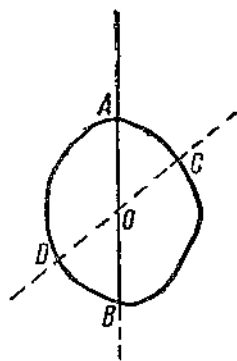
29. На шпинделе токарного станка сидит ступенчатый шкив с диаметрами: $D_1 = 200$ мм, $D_2 = 160$ мм, $D_3 = 120$ мм. Определить вращающие моменты вокруг оси шпинделя, даваемые окружным усилием $P = 40$ кг приводного ремня, действующим по очереди на каждую ступень шкива.

Отв. 400 кгсм; 320 кгсм; 240 кгсм.

Глава 10.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

§ 51. Определение центра тяжести. Каждая частица материального тела притягивается Землей с силой, пропорциональной массе этой частицы. Если мы возьмем какое-нибудь тело, то направления сил веса отдельных частиц его можно считать между собой параллельными ¹⁾. Поскольку эти частицы входят в состав одного тела, мы можем отыскивать равнодействующую всех этих сил, которая даст нам общий вес данного тела, равный сумме весов его отдельных частиц. Чтобы определить линию действия силы веса всего тела, мы можем применять методы, изложенные в предыдущей главе. Если мы закрепим в теле одну точку так, чтобы оно имело возможность вращаться вокруг этой точки, то при равновесии линия действия равнодействующей должна непременно пройти через закрепленную точку. Пусть взятое нами тело представляет пластинку произвольной формы (фиг. 91). Подвесим ее за точку A ; при равновесии эта пластинка расположится в вертикальной плоскости. Подождав, чтобы колебания пластинки успокоились, проведем через точку подвеса A продолжение веревки — вертикаль AB , — она и представит линию действия силы веса в рассматриваемом положении пластинки. Подвесим теперь пластинку за другую точку C ; пусть CD в данном положении будет след вертикали на плоскости нашей пластинки. Обратим внимание на точку O пересечения двух прямых AB и CD . Опыт показывает, что если бы мы подвешивали пластинку за различные точки, то проведенные через точки подвеса следы вертикалей все пройдут через полученную точку O . Эта точка — точка пересечения возможных линий действия веса тела при различных положениях последнего — носит название центра тяжести рассматриваемого тела. Ее очень удобно принять за точку приложения веса тела; если мы это сделаем, то для определения линии действия веса тела достаточно лишь провести вертикаль через центр тяжести тела, который, таким образом, не меняет своего положения в теле при различных поворотах последнего относительно вертикали.

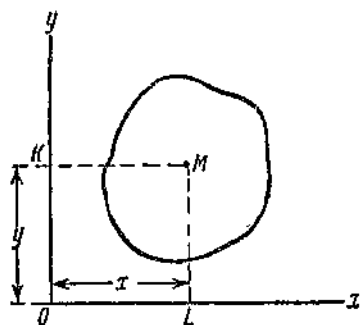


Фиг. 91.

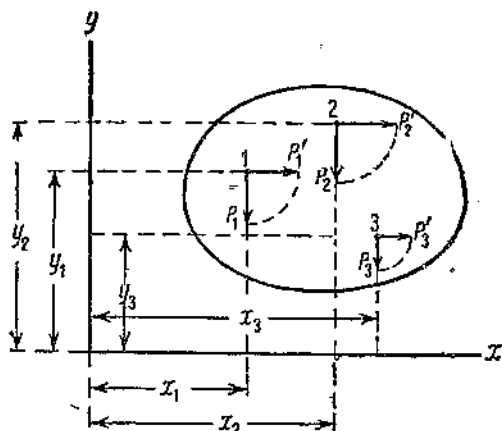
Описанный способ служит для опытного определения положения центра тяжести тела (ограничиваемся на первых порах случаем, когда наше тело представляет плоскую фигуру, составленную из линий или из площадей). В наиболее простых случаях положение центра тяжести можно не только определить графически, но и вычислить. Нужные для этого формулы мы легко получим, если применим методы, изложенные в предыдущей главе, в частности теорему Вариньона.

¹⁾ Строго говоря все направления пересекаются в центре Земли; однако, если мы возьмем тело с размерами даже в несколько километров, то угол между вертикалями, приведенными в двух его крайних точках не может быть измерен точными техническими измерительными инструментами.

Положение какой-нибудь точки M на плоскости в математике определяется тем, что задаются расстояния $KM = x$ и $ML = y$ от двух проведенных в плоскости пластинки взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy (фиг. 92); эти расстояния называются координатами x и y рассматриваемой точки. Установив это, разобьем мысленно нашу пластинку (фиг. 93) на ряд материальных точек; этих точек, вообще говоря, будет очень — или, как говорят в математике, бесконечно — много; на фиг. 93 изображены три такие точки, обозначенные номерами 1, 2, 3. Пусть положения этих точек определяются координатами x_1 и y_1 (для первой точки), x_2 и y_2 (для второй), x_3 и y_3 (для третьей)



Фиг. 92.



Фиг. 93.

и т. д. Пусть, далее, веса этих материальных точек будут P_1, P_2, P_3 и т. д. Подвесим нашу пластинку так, чтобы прямая Oy расположилась вертикально; линии действия весов $P_1, P_2, P_3, \dots$ будут в этом случае тоже параллельны прямой Oy . Общий вес тела P будет равен сумме весов его отдельных частей:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

Момент P относительно точки O будет равен сумме моментов относительно той же точки всех отдельных весов $P_1, P_2, P_3, \dots$. Нетрудно видеть, что плечами всех этих моментов будут служить расстояния $x_1, x_2, x_3, \dots$ точек приложения составляющих весов до прямой Oy . Обозначив через x_0 соответствующее расстояние центра тяжести рассматриваемой пластинки, мы по теореме Вариньона будем иметь

$$P \cdot x_0 = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots,$$

откуда, определяя x_0 и подставив вместо P его значение, будем иметь

$$x_0 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}.$$

Для определения координаты y_0 подвесим мысленно нашу пластинку так, чтобы прямая Ox стала вертикальной; линии действия весов

$P_1, P_2, P_3, \dots$ будут в этом случае параллельны прямой Ox и векторы, изображающие эти веса, займут положения $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ (причем, конечно, длины векторов P_1 и P'_1 будут равны: $P_1 = P'_1, P_2 = P'_2, P_3 = P'_3$ и т. д.). Берем моменты всех сил $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ относительно точки O ; плечами этих моментов будут служить теперь расстояния $y_1, y_2, y_3, \dots$ до оси Ox . Обозначив через y_0 расстояние центра тяжести до оси Ox , на основании теоремы Вариньона будем иметь

$$Py_0 = P'_1 y_1 + P'_2 y_2 + P'_3 y_3 + \dots$$

Заменяя $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ равными им величинами $P_1, P_2, P_3, \dots$ и определяя y_0 , будем иметь

$$y_0 = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}.$$

Формулы

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}, \\ y_0 &= \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

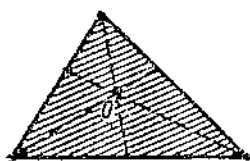
являются основными при вычислении координат центра тяжести плоской фигуры.

Если мы увеличим или уменьшим веса $P_1, P_2, P_3, \dots$ в одинаковое число раз, то во столько же раз увеличатся или уменьшатся числители и знаменатели дробей, стоящих в правой части формулы (19), так что величины самих дробей, а следовательно, и координаты x_0 и y_0 останутся без изменения. Это показывает, что положение центра тяжести в теле не зависит от абсолютной величины веса P тела, а только от отношений весов различных его частей. Так, центры тяжести железной и деревянной палочек будут находиться одинаково в серединах последних, хотя вес железной палочки раз в восемь будет больше веса деревянной палочки одинаковой длины. Поэтому, если пластинка, центр тяжести которой определяется, будет однородной, то всегда можно считать вес квадратной единицы ее площади равным тоже единице; тогда вес всей пластинки будет численно равняться ее площади. Поэтому в приложениях очень часто говорят о центре тяжести площади пластинки, не упоминая совершенно о материале, из которого пластинка сделана. Отметим, однако, что это справедливо только для однородных пластинок; если различные части пластинки сделаны из различного материала, то это различие при определении центра тяжести обязательно приходится учесть.

Приводим без доказательства ряд полученных при помощи математики результатов относительно положения центра тяжести простейших плоских однородных фигур.

Центр тяжести площади треугольника находится в пересечении его медиан, т. е. прямых, соединяющих вершину с серединой противоположной стороны, и делит каждую медиану в отношении 1:2, считая от основания треугольника на расстоянии одной трети медианы, проведенной из соответствующей вершины. В приложениях иногда бывает

удобно находить центр тяжести площади треугольника таким образом: всю его массу делят на три равные части и помещают их по всем трем вершинам; центр тяжести полученных трех материальных частиц совпадает с центром тяжести площади треугольника (фиг. 94).

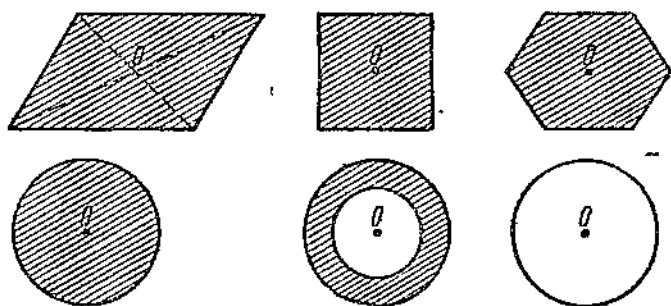


Фиг. 94.

Центр тяжести площади параллелограмма находится в пересечении его диагоналей.

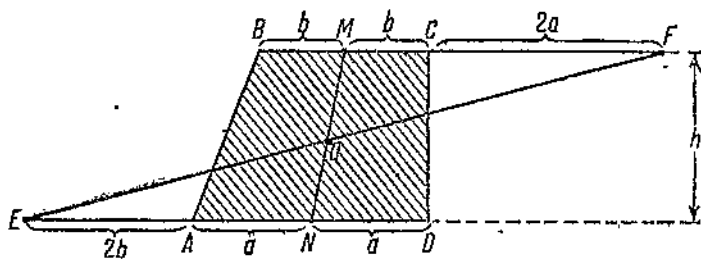
Центр тяжести квадрата, правильного многоугольника контура всей окружности и площади круга находится в их центре (фиг. 95). Из того, что центр тяжести окружности совпадает с центром последней, видно, что центр тяжести не должен обязательно находиться в какой-нибудь материальной точке тела.

Центр тяжести трапеции можно найти при помощи следующего простого построения (фиг. 96). Делят пополам основания AD и BC трапеции $ABCD$ в точках M и N , продолжают в противоположные сто-



Фиг. 95.

роны основания, строят на них $AE = BC$ и $CF = AD$ и соединяют полученные точки E и F прямой EF ; центр тяжести площади трапеции будет находиться в точке O пересечения прямых MN и EF . Отметим



Фиг. 96

кстати, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований $(a+b)$ на высоту h (расстояние между обоими основаниями).

Центр тяжести площади небольшого криволинейного сегмента можно приблизительно получить, разделив ось симметрии BD этого сегмента

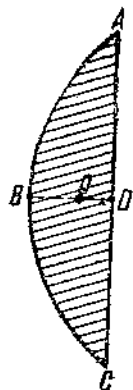
в отношении 3 : 2 (расстояние OB составляет $\frac{3}{5}$ от BD) (фиг. 97). Отметим кстати, что площадь такого сегмента можно принять приблизительно равной $\frac{2}{3}$ произведения отрезков BD и AC .

Рассуждения, при помощи которых мы определяли центр тяжести пластинки, могут быть совершенно аналогичным способом распространены и на случай определения положения центра тяжести тела. Правда, в этом случае опытное определение положения центра тяжести путем нахождения точки пересечения следов вертикалей представляет некоторые технические затруднения, если только мы не хотим прокалывать рассматриваемое тело, но теоретически и в этом случае центру тяжести можно дать то же определение. В простейших случаях мы будем иметь следующие результаты, которые дадим без доказательства.

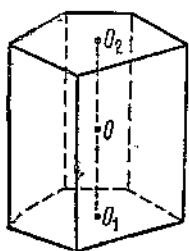
Если тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести находится в этой плоскости; если тело имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси; если тело имеет центр симметрии, то центр тяжести совпадает с этим центром.

Центр тяжести призмы и цилиндра находится посредине прямой, соединяющей центры тяжести O_1 и O_2 его оснований.

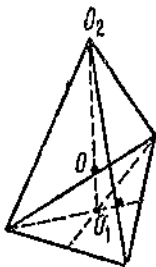
Центр тяжести объемов пирамиды и конуса находится на прямой, соединяющей вершину с центром тяжести основания на расстоянии одной четверти этой прямой от основания (фиг. 98).



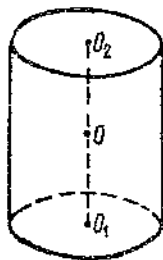
Фиг. 97.



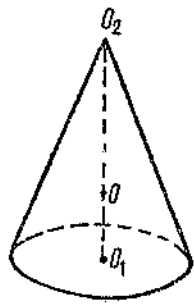
Фиг. 98а.



Фиг. 98б.



Фиг. 98в.

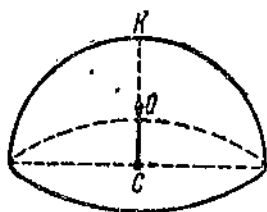


Фиг. 98г.

Центр тяжести шара находится в его центре. Центр тяжести объема полушара находится на расстоянии $\frac{3}{8}$ радиуса от основания. Центр тяжести боковой поверхности сферического пояса находится на оси его симметрии (прямой, соединяющей центры окружностей верхнего и нижнего оснований), как раз на середине этой прямой (фиг. 99).

§ 52. Примеры. Если требуется определить центр тяжести более сложной геометрической фигуры или тела, то обычно разбивают ее на такие части, для которых можно определить как вес, так и положение центра тяжести, и определяют точку приложения равнодействующей весов этих частей последовательным сложением или по формулам (19).

Пример 27. Определить центр тяжести площади однородного уголка, изображенного на фиг. 100 (размеры даны на фигуре). Разобьем уголок на два прямоугольника I и II, центры тяжести которых будут находиться, как мы уже знаем, в точках A и B пересечений диагоналей обоих прямоугольников. Площади этих прямоугольников как видно из чертежа, будут равны: для прямоугольника I: $4 \times 10 = 40$ г,



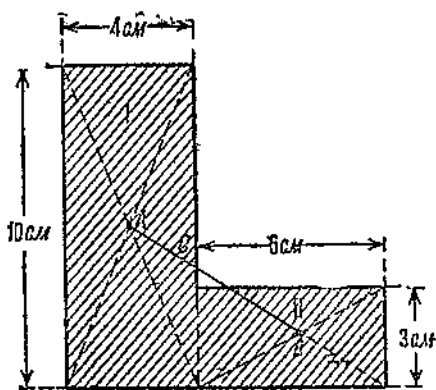
Фиг. 99а.



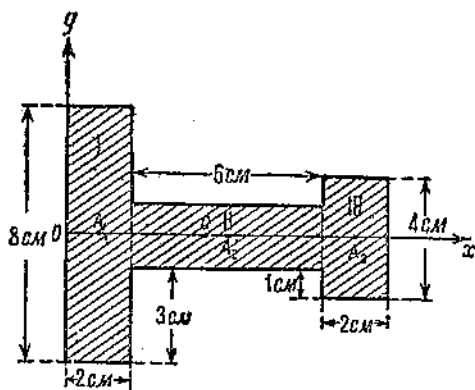
Фиг. 99б.

для II — $3 \times 6 = 18$ г. Центр тяжести C всей площади будет находиться на прямой AB в такой точке, для которой соблюдается пропорция

$$\frac{AC}{CB} = \frac{18}{40}.$$



Фиг. 100.



Фиг. 101.

Пример 28. Найти центр тяжести площади двутаврового сечения (фиг. 101).

Центр тяжести C этого сечения будет лежать на оси симметрии Oх. Разобьем сечение на три прямоугольника, площади которых будут:

$$\text{I } 2 \times 8 = 16,$$

$$\text{II } 2 \times 6 = 12,$$

$$\text{III } 2 \times 4 = 8.$$

Центры тяжести этих прямоугольников будут находиться в точках A_1, A_2, A_3 . Представим себе теперь, что наша фигура расположена

в вертикальной плоскости, а линия Ox горизонтальна. Берем моменты всех весов относительно точки A_1 . Будем иметь

$$16 \cdot 0 + 12 \cdot A_1A_2 + 8 \cdot A_1A_3 = (16 + 12 + 8) \cdot A_1C.$$

После подстановки значений $A_1A_2 = 4$ и $A_1A_3 = 8$ будем иметь

$$12 \cdot 4 + 8 \cdot 8 = 36 \cdot A_1C,$$

откуда

$$x_0 = A_1C = \frac{48 + 64}{36} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9} \text{ см.}$$

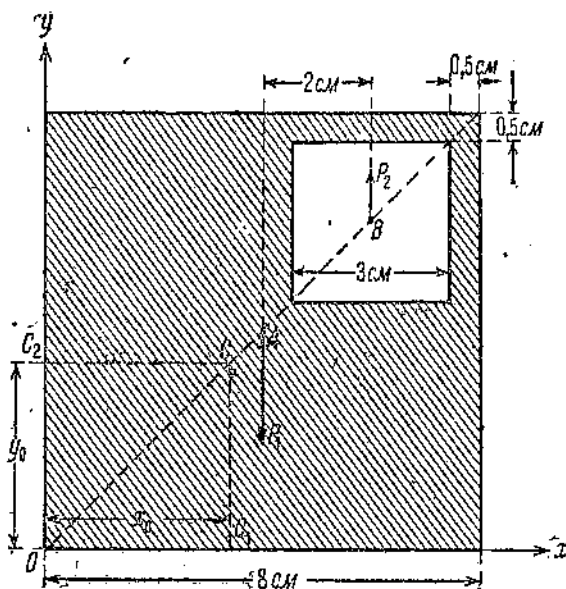
Искомый центр тяжести C будет находиться на оси Ox на расстоянии $3\frac{1}{9}$ см от точки A_1 или на расстоянии $OC = 4\frac{1}{9}$ см от левого основания двутавра.

Тот же самый результат можно было бы получить и при помощи формул (19), вычисляя координату x_0 центра тяжести площади сечения. В нашем случае мы имели бы $P_1 = 16$, $P_2 = 12$, $P_3 = 8$; $x_1 = 0$, $x_2 = A_1A_2 = 4$, $x_3 = A_1A_3 = 8$.

ПРИМЕР 29. Из площади квадрата со стороной 8 см вырезан, как показано на фиг. 102, квадрат со стороной 3 см и с центром в точке B . Найти центр тяжести площади оставшейся части.

Воспользуемся следующим искусственным приемом. Площадь целого квадрата равна $P_1 = 8 \times 8 = 64$, центр тяжести находится в точке A . Из этой площади вырезается площадь $P_2 = 3 \times 3 = 9$ с центром тяжести в B ; будем считать эту площадь отрицательной и вес ее направленным не вниз, а вверх. Центр тяжести оставшейся площади будет лежать в какой-то точке C на общей диагонали квадратов, соединяющей центры A и B . Проведем оси Ox и Oy через вершину O квадрата и попробуем найти расстояния x_0 и y_0 центра тяжести C от осей Ox и Oy . Нетрудно видеть, что вследствие симметрии $x_0 = y_0$. Считая Oy вертикальной, возьмем моменты всех весов около точки O ; момент веса оставшейся части, приложенного в точке C , будет равняться сумме моментов положительного и отрицательного весов, приложенных в A и B . Обозначив расстояние OC через x_0 , будем иметь

$$(64 - 9) x_0 = 64 \cdot 4 - 9 \cdot 6,$$

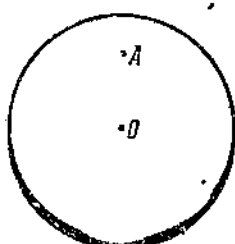
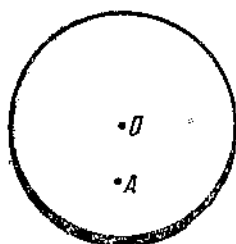


Фиг. 102.

так как плечо $P_1 = 4$ и плечо $P_2 = 4 + 2 = 6$. Отсюда

$$y_0 = x_0 = \frac{256 - 54}{55} = \frac{202}{55} = 3,68 \text{ см.}$$

§ 53. Три вида равновесия. Представим себе диск, подвешенный за одну свою точку A (фиг. 103). Он будет находиться в равновесии, когда центр тяжести, совпадающий с центром O диска, будет находиться на одной вертикали с точкой привеса A ; в этом случае вес диска уравнивается реакцией точки опоры A . Могут представиться следующие случаи: точка опоры находится ниже центра тяжести O диска (левый чертеж), точка опоры находится выше центра тяжести (правый чертеж) и, наконец, точка опоры совпадает с центром тяжести.



Фиг. 103.

В первом случае равновесие является теоретически возможным, но практически вряд ли на долгое время осуществимым — мы имеем случай так называемого неустойчивого равновесия. Во втором случае равновесие осуществляется само собой после нескольких колебаний, и остановившийся диск будет оставаться в этом по-

ложении сколь угодно большое время — мы имеем случай так называемого устойчивого равновесия, практически являющегося наиболее важным. Разница между этими двумя случаями равновесия заключается в следующем:

Равновесие называется устойчивым, если при небольших отклонениях от положения равновесия, вызываемых внешними случайными причинами, тело по устранении последних само собой стремится вернуться в первоначальное положение равновесия.

Равновесие будет неустойчивым, если при небольших отклонениях от положения равновесия тело не только не возвращается в это положение, но наоборот, стремится все больше и больше отклониться от этого положения.

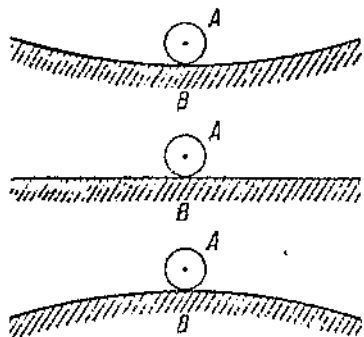
Наконец третий случай, когда центр тяжести O диска и точка привеса A совпадают, характеризует так называемое безразличное равновесие: тело остается в равновесии в любом положении, но при выведении его из данного положения равновесия уже не стремится в него возвратиться.

Описанный опыт как-будто позволяет думать, что устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия всецело зависят от положения центра тяжести ниже, выше или в самой точке опоры; однако такая

формулировка, приводившаяся раньше довольно часто в элементарных учебниках физики и технической механики, неправильна.

Для установления правильной формулировки обратим внимание на то обстоятельство, что под действием силы тяжести центр тяжести тела или целой системы соединенных тел стремится занять наинизшее положение. В таком случае равновесие будет устойчивым, если при небольших отклонениях от положения равновесия центр тяжести будет подыматься; равновесие будет неустойчивым, если при выводе тела из положения равновесия центр тяжести будет опускаться и, наконец, равновесие будет безразличным, если при небольших отклонениях от положения равновесия высота центра тяжести будет оставаться неизменной.

Нетрудно проверить, что это правило в полной мере оправдывается для уже разобранных нами примера с подвешенным диском. Разберем еще три примера, которые смогли бы опровергнуть уже упоминавшееся нами распространенное правило. Начнем с хорошо всем знакомого „Ваньки-встаньки“. Никто не станет отрицать, что „Ванька-встанька“ при равновесии находится в положении устойчивого равновесия, однако находящийся внутри его центр тяжести будет, конечно, выше точки опоры при любом положении тела.



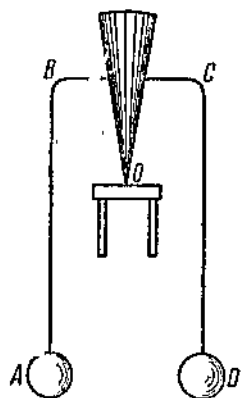
Фиг. 104.

Представим себе шарик с центром A (фиг. 104). Будучи положен на какую-нибудь поверхность, он останется в равновесии, когда его центр будет находиться на одной вертикали с точкой опоры. Поместим шарик в вогнутой чашке: он займет в последней самое низкое положение. Если мы толкнем его, то он откатится в сторону, но через некоторое время снова вернется в исходное положение. Равновесие будет устойчивым, хотя центр тяжести будет находиться выше точки опоры. Если мы поместим шарик на выпуклую поверхность, то он может находиться в равновесии лишь в самой высокой ее точке; равновесие это будет неустойчивым. Наконец тот же шарик на горизонтальной плоскости будет оставаться в равновесии в любом положении на последней; мы получим случай безразличного равновесия. Отметим, что во всех этих случаях центр тяжести находился выше точки опоры.

Не так трудно привести пример и неустойчивого равновесия при положении центра тяжести ниже точки опоры.

Во многих учебниках разбирается задача, каким образом поставить конус на острие. Для этого предлагают пропустить через конус проволоку $ABCD$ (фиг. 105), согнутую под прямым углом, в концах A и D которой прикреплены два достаточно тяжелых груза. Если внутри конуса трение достаточно велико, чтобы исключить возможность поворачивания

проволоки, то равновесие будет устойчивым, как говорят, потому, что центр тяжести будет находиться ниже точки опоры. Что это рассуждение неправильно, можно видеть из того, что если трение внутри конуса настолько невелико, что проволока может в нем свободно поворачиваться, или если грузики будут подвешены к горизонтальной проволоке BC на веревочках, то, как нетрудно видеть, равновесие будет неустойчивым, хотя центр тяжести попрежнему будет находиться ниже точки опоры.



Фиг. 105.

Те же самые рассуждения останутся справедливыми, если тело будет иметь две точки опоры, иными словами, будет в состоянии вращаться вокруг оси, проходящей через эти точки; придется только вместо „центр вращения“ говорить „ось вращения“.

Если же твердое тело имеет три или более точек опоры, то равновесие будет устойчивым, когда вертикаль, проходящая через центр тяжести, будет пересекать площадь основного внутри контура, представляющего выпуклый многоугольник и образованного прямыми, соединяющими выступающие точки опорного контура. Стороны этого многоугольника будут представлять возможные оси вращения тела при выведении его в ту или другую сторону из положения равновесия.

Мерой устойчивости (статической) в этом случае принимается наименьший вращающий момент, необходимый для выведения тела из положения равновесия при вращении вокруг одной из этих осей. Этот опрокидывающий момент должен, самое меньшее, равняться (см. пример 23 в § 46) произведению веса тела на расстояние точки пересечения вертикали, проходящей через центр тяжести до ближайшей возможной оси вращения, т. е. стороны выпуклого многоугольника опорного контура.

§ 54. Заключение. Заканчивая этой главой изучение статики, подведем основные итоги полученным нами результатам.

Основным понятием статики является понятие о силе, а так же изображение последней при помощи вектора. Еще раз подчеркнем существенные черты, входящие в векторное изображение силы: точка приложения (начало вектора), величина (изображаемая длиной вектора), направление (изображаемое стрелкой).

Отметим, что в статике при изучении условий равновесия или движения всего тела в целом точку приложения силы можно переносить по направлению линии действия этой силы. Во второй части этого курса — сопротивления материалов — точка приложения силы является всегда вполне определенной, потому что, как мы видели, в результате перенесения ее, вообще говоря, меняется состояние внутренних сил в данном теле.

Далее, векторное изображение силы мы использовали при определении равнодействующей сил, приложенных к одной точке (правило параллелограмма или силового треугольника, послужившее нам для графиче-

ческого решения задач статики). Числовое решение соответствующих задач при помощи силового треугольника в самых общих случаях требует знания хотя бы основных понятий тригонометрии.

Второе важное понятие статики — понятие момента — требует с точки зрения математики лишь очень немногого: простого умножения силы на плечо; поэтому, понятие о моменте силы, правда, в не совсем развернутой форме, было выработано еще в древности (работы греческого механика Архимеда в III веке до нашей эры). В качестве непосредственных следствий из понятия момента мы получили правила сложения параллельных сил и определения центра тяжести.

Во вращательном движении момент силы играет ту же самую роль, что сила в поступательном; моменты так же могут складываться, как и силы. Следует отметить значение моментов, в частности крутящих моментов для передачи вращения при помощи вала; в этом отношении роль их совершенно такова же, как роль растягивающих и сжимающих усилий при передаче силы при помощи толкания или тяги.

Задачи.

30. Найти центр тяжести рамки $ABCD$ в форме прямоугольника, если стороны его имеют одинаковое поперечное сечение и сделаны: AB и BC из железа (удельный вес 8), а AD и CD из дерева (удельный вес 1). Длины $AB = CD = 100$ мм, $AD = BC = 50$ мм.

Указание. Вес каждой стороны рамки пропорционален ее длине и удельному весу.

Отв. Центр будет находиться на расстоянии 12 мм от AB и 63 мм от AD (с округлением).

31. Будет ли устойчива стена высотой 5 м, представляющая в сечении прямоугольник ширины 0,6 м и построенная из материала, кубический метр которого весит 2,5 тонны, если на нее действует боковое давление ветра, равное 125 кг/м и приложенное посредине ее высоты (предполагается, что у стены подземной части нет)?

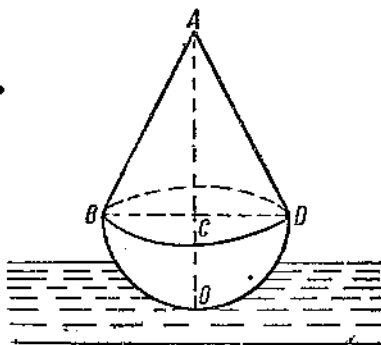
Указание. Расчет ведется на погонный метр длины.

Отв. Опрокидывающий момент силы ветра равен 1562,5 кгм, восстанавливающий момент веса стены: 2250 кгм. Устойчивость обеспечена.

32. Определить наименьшую высоту $AC = h$ конуса с радиусом основания $BC = R$, составляющего одно твердое тело с полушаром того же радиуса R , сделанным из того же материала, чтобы полученное, таким образом, тело находилось в положении устойчивого равновесия (теория „Ваньки-встаньки“) (фиг. 106).

Указание. Наименьшая высота конуса определяется из условия, что общий центр тяжести фигуры должен в случае безразличного равновесия совпадать с центром шара C . Считая OA горизонтальной и полагая веса конуса и полушара равными их объемам, взять сумму моментов относительно C . Если центр тяжести находится в C , то момент относительно C веса конуса уравновешивается моментом веса полушара.

Отв. $h \leq R\sqrt{3}$.



Фиг. 106.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА.

Глава 11.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ ТОЧКИ.

§ 55. Ускорение, масса и сила. Второй закон Ньютона, который мы уже разобрали в главе 7, устанавливает связь между величиной силы и величиной соответствующего ускорения. Если мы для одного и того же тела будем находить ускорения, сообщаемые этому телу различными приложенными к нему силами, то, пользуясь законом пропорциональности между силами $F_1, F_2, F_3, \dots$ и получающимися в результате их действия ускорениями $w_1, w_2, w_3, \dots$, мы можем написать:

$$\frac{F_1}{w_1} = \frac{F_2}{w_2} = \frac{F_3}{w_3} = \dots;$$

общую величину этих отношений обозначают через m и называют массой этого тела. Введя понятие о массе, мы могли бы все эти отношения переписать и в таком виде:

$$F_1 = mw_1, \quad F_2 = mw_2, \quad F_3 = mw_3,$$

или вообще

$$F = mw, \quad (20)$$

т. е. сила равна произведению массы на ускорение. В таком виде в настоящее время и принято выражать математически второй закон Ньютона.

Уравнение (20) или получающуюся из него формулу

$$m = \frac{F}{w} \quad (21)$$

можно использовать для установления единиц массы или силы. Эти единицы устанавливаются, однако, не произвольно, а таким образом, чтобы все они были объединены в одну стройную систему. В качестве основных единиц выбирают единицы длины и времени (сантиметр или метр, секунда или минута). В зависимости от этих двух единиц устанавливается единица скорости $м/сек$ и $см/сек$ и т. д., а затем и ускорения $м/сек^2$, $см/сек^2$ и т. д.

В динамике к двум основным единицам длины и времени нужно добавить еще одну: или единицу силы или единицу массы. В технике

в качестве третьей основной единицы принимается единица силы, а именно один килограмм, представляющий вес одного литра чистой воды. После того как единица силы выбрана, единица массы может быть установлена по формуле (21):

$$m = \frac{F}{w}.$$

Таким образом за единицу массы принимается такая масса, для которой отношение между силой и сообщенным ей ускорением равно единице.

Если мы за основные единицы возьмем метр, секунду и килограмм-вес, то поскольку под действием веса P получается ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, формула (21) примет вид:

$$m = \frac{P}{9,81} \text{ кг сек}^2/\text{м}.$$

Отсюда следует, что масса будет равна единице для тела, вес P которого равен $9,81 \text{ кг}$ (почти 10 кг). Эта единица носит название технической единицы массы; другого специального названия эта единица не имеет.

В физике применяется несколько отличный способ установления основных единиц. Дело в том, что вес одного и того же тела несколько меняется в зависимости от положения тела на земле: на полюсе тело весит несколько больше, чем на экваторе, и, кроме того, вес тела уменьшается с подъемом над земной поверхностью. Правда, эти изменения незначительны, но тем не менее физика не имеет права ими пренебрегать. Поэтому в физике в качестве третьей основной единицы выбрали в первой половине XIX века единицу массы, понимая последнюю как количество вещества в объеме данного тела. За единицу массы был взят грамм, т. е. масса одного кубического сантиметра чистой воды и производные от нее единицы — килограмм ($= 1000 \text{ граммов}$) и тонна ($= 1000 \text{ кг}$).

Таким образом единицы массы имеют одинаковые названия с единицами веса. Поскольку о массе тела (количестве вещества) мы судим по весу, такого рода явление в известной степени допустимо (ведь покупая килограмм хлеба и интересуясь, конечно, количеством вещества — массой покупаемого хлеба, мы измеряем последнюю силой давления на чашку весов — весом), но в этом заключаются определенные неудобства. Масса и вес две совершенно различные вещи: одна — количество вещества в объеме данного тела, другая — сила притяжения этого тела землей; одна — масса — не изменяется при перенесении тела по земной поверхности и при полетах над последней, другая же — вес — при этом хотя и незначительно, но меняется. Нужно помнить, что, измеряя силу в весовых единицах, мы обязательно должны измерять массу в технических единицах, и обратно, если мы измеряем массу в килограммах, и граммах, то для силы мы должны тоже установить свои специальные единицы. Физики так и поступают: в качестве единицы силы они, пользуясь уравнением

$$F = mw, \quad (20)$$

устанавливают такую силу, которая единице массы ($m=1$) сообщает единицу ускорения ($w=1$). Если за единицу массы мы примем грамм, а за единицу ускорения 1 см/сек^2 , то соответствующая сила носит название дин; так называется сила, сообщающая массе в 1 г ускорение в 1 см/сек^2 . Так как сила, с которой масса в 1 г притягивается к Земле (вес в 1 г), сообщает этой массе ускорение $g=981 \text{ см/сек}^2$, то сила веса в 1 г равна 981 дине. Уже это обстоятельство показывает, как невелика и как, следовательно, неудобна в технике сила в 1 дину.

§ 56. Примеры. Покажем теперь для наилучшего разъяснения основных положений предыдущего параграфа, каким образом можно применять их для решения задач динамики.

В качестве первого примера разберем задачу о свободном падении тела.

Пример 30. Определить ускорение, получаемое телом весом P кг под действием силы его тяжести.

Соответствующее ускорение определится по формуле

$$w = \frac{P}{m}.$$

Чему же равна масса m тела? Если вес его, который в нашем случае является движущей силой, выражается в килограммах, то массу выразить в килограммах мы не имеем права — мы должны выразить ее в технических единицах массы, иными словами, применить формулу

$$m = \frac{P}{g}.$$

Подставляя полученное значение для m в выражение ускорения w , будем иметь

$$w = P : \frac{P}{g} = g.$$

Мы получили уже известный результат, что все тяжелые тела падают с одинаковым ускорением g , иными словами, падая с одинаковой высоты, должны одновременно достигать земной поверхности. Это объясняется тем, что хотя для более тяжелого тела приводящая его в движение сила веса больше, но во столько же раз больше и масса этого тела, а следовательно, ускорение, представляющее частное от деления веса на массу, остается неизменным.

Против этого можно было бы привести на первый взгляд следующие возражения. Опыт показывает нам, что если мы с одинаковой высоты бросим кусок железа и комок бумаги, то кусок железа упадет на землю скорее. Это замедление объясняется тем, что при своем падении тело встречает сопротивление воздуха, которое зависит не от веса тела, а от формы его, скорости и других причин (каждому известно, что один и тот же бумажный лист будет падать с разной скоростью, бросим ли мы его в виде раскрытого листа бумаги или же в виде комка). Были поставлены опыты, изучающие падение тел в безвоздушном пространстве, под колоколом воздушного насоса, которые показали, что в таких условиях все тела с одной и той же высоты падают с оди-

наковой скоростью. Не ограничиваясь этим результатом, попробуем вычислениями показать увеличение скорости более тяжелого тела при падении его с учетом сопротивления воздуха.

Опытными данными установлено, что сила сопротивления воздуха возрастает пропорционально квадрату скорости тела (увеличивает вчетверо при двойном увеличении скорости тела) и, кроме того, зависит от размеров и формы движущегося тела. Если взять два одинаковых шара, деревянный и чугунный, то при одной и той же скорости движения сопротивление того и другого шаров будет совершенно одинаковым, хотя чугунный будет раз в восемь тяжелее деревянного. Тогда, если при скорости в 1 м/сек силу сопротивления принять равной k кг, то при скорости v м/сек сила сопротивления будет

$$F = kv^2 \text{ (кг)}.$$

Чем больше скорость падения, тем больше и сила сопротивления. В конце концов настанет момент, когда величина силы сопротивления становится равной весу падающего тела. После этого дальнейшего увеличения скорости падающего тела уже не происходит (сила веса и сила сопротивления воздуха взаимно уравновесились), и тело движется до самого момента падения на землю равномерным движением. Определить скорость v этого движения можно, приравняв силу веса P к силе сопротивления F , т. е. положив

$$P = kv^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{P}{k}}.$$

Если мы возьмем два тела, веса которых P_1 и P_2 , то их предельные скорости падения на землю будут

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1}{k}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{k}}.$$

Если оба тела отличаются только весом, имея одинаковыми размеры и форму, то величина k в обоих случаях будет одинаковой. Поэтому, разделив оба равенства почленно, будем иметь

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}.$$

Мы получили так называемый закон Мариотта: предельные скорости тел одинаковой формы при падении в воздухе относятся как квадратные корни их весов.

В нашем примере деревянного и чугунного шаров скорость, с которой ударится о землю чугунный шар, будет в $\sqrt{8} = 2,8$ раза больше, чем соответствующая скорость деревянного шара.

Пример 31. Определить ускорение движения шарика веса P кг, при движении его вниз по наклонной плоскости длины l и высоты h (трением пренебрегаем).

Пусть шарик O катится по наклонной плоскости (фиг. 107), причем $\overline{AB} = l$ и $\overline{BC} = h$. Движущая его сила тяжести P , изображаемая вектором $\overline{OL}$, может быть разложена на две силы: одну P_1 , направленную по наклонной плоскости и стремящуюся скатить шарик, и другую P_2 , перпендикулярную к наклонной плоскости и уничтожаемую реакцией последней. Из подобия треугольников ABC и OKL имеем

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},$$

откуда

$$P_1 = P \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Отношение катета $\overline{BC} = h$ к гипотенузе $\overline{AB} = l$ носит название синуса угла α , противолежащего этому катету, и записывается так:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} *).$$

Пользуясь этим обозначением, будем иметь

$$P_1 = P \sin \alpha.$$

Чтобы найти величину ускорения w при движении тяжелого тела по наклонной плоскости, мы

должны разделить движущую силу P_1 на массу тела. Получаем

$$w = \frac{P_1}{m} = \frac{P \sin \alpha}{P/g} = g \sin \alpha.$$

Таким образом при движении по наклонной плоскости ускорение w будет меньше ускорения g в $\frac{1}{\sin \alpha}$ раз, т. е. во столько раз, во сколько высота $\overline{CB} = h$ наклонной плоскости меньше длины $\overline{AB} = l$ последней.

Описанный прием был употреблен Галилеем при изучении законов падения тела для того, чтобы сделать его менее быстрым и более доступным для наблюдения.

Пример 32. Машина Атвуда (фиг. 108). Через неподвижный блок с центром O перекинута нить, несущая по своим концам два груза P_1 кг и P_2 кг, причем $P_2 > P_1$. Определить ускорение w , с которым будут двигаться оба груза.

*) Так как катет всегда меньше гипотенузы, то отношение $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ не может быть больше единицы. Поэтому синус всегда или меньше единицы, или в крайнем случае, для угла в 90° , равен единице.

Так как вес груза P_2 больше веса P_1 , то груз P_2 будет опускаться, поднимая груз P_1 . Сила, движущая оба груза, будет равна их разности $P_2 - P_1$ кг, а приводимая в движение масса равна сумме масс обоих грузов. Искомое ускорение на основании формулы (21) будет

$$w = \frac{P_2 - P_1}{\left(\frac{P_1 + P_2}{g}\right)} = g \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}.$$

Делая оба груза P_2 и P_1 почти равными друг другу, можно сделать множитель $\frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}$ очень малым и, следовательно, значительно уменьшить величину ускорения. Так, если $P_2 = 5$ кг и $P_1 = 4$ кг, то

$$w = g \frac{5-4}{5+4} = \frac{1}{9} g.$$

Этот прибор был предложен английским физиком Атвудом для исследования опытным путем законов падения тел.

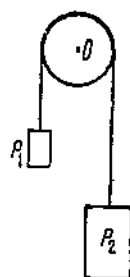
Пример 33. Центробежная сила. Определим силу, необходимую для равномерного движения материальной точки по окружности. Как мы видели в главе 5, при равномерном движении по окружности радиуса R с постоянной скоростью v имеет место направленное к центру этой окружности центростремительное ускорение, равное

$$w = \frac{v^2}{R}.$$

Если существует ускорение, то должна существовать и производящая это движение сила, равная массе m движущейся точки, помноженной на величину центростремительного ускорения w . Эта сила называется центробежной и выразится следующей формулой:

$$F = \frac{mv^2}{R}. \quad (22)$$

Понятие о центробежной силе было введено в науку голландцем Гюйгенсом в XVII веке, и принадлежавший к следующему поколению Ньютон применил это понятие к изучению сил, управляющих движением планет вокруг Солнца. Планеты описывают вокруг Солнца траектории (орбиты), которые не слишком отличаются от окружностей. В центре этих орбит находится Солнце. Так как для кругового движения необходимо наличие центростремительной силы, то в качестве первого вывода Ньютон установил, что сила, управляющая, в первую очередь, движением планет, есть сила притяжения их Солнцем. Далее, опираясь на работы своего предшественника, великого немецкого астронома Кеплера, установившего на основе наблюдений, что квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их расстояний до последнего, Ньютон вывел, что сила этого притяжения изменяется обратно пропорционально квадратам расстояний. Действительно, если T есть время пол-



Фиг. 108.

ного оборота планеты вокруг Солнца, то угловая скорость ω вращения планеты вокруг Солнца будет

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

а линейная скорость v движения планеты по ее орбите:

$$v = \omega R,$$

где R есть радиус орбиты. Отсюда время T оборота планеты будет

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}.$$

Для двух планет мы будем иметь соответственно

$$T_1 = 2\pi \frac{R_1}{v_1},$$

$$T_2 = 2\pi \frac{R_2}{v_2}.$$

Возводя эти равенства в квадрат и деля почленно друг на друга, будем иметь

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^2}{v_1^2} : \frac{R_2^2}{v_2^2}.$$

Согласно закону Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

Так как левые части последних двух равенств равны, то должны быть равны и правые части. Приравнявая их, после упрощений получаем

$$\frac{v_2^2 R_1^2}{v_1^2 R_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

или

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Помножив обе части этого равенства на $\frac{R_1}{R_2}$, будем иметь

$$\frac{v_2^2 R_1}{v_1^2 R_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

или

$$\frac{v_2^2}{R_2} : \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

Но $\frac{v_1^2}{R_1}$ и $\frac{v_2^2}{R_2}$ суть не что иное, как центростремительные ускорения в движениях обеих планет, т. е. w_1 и w_2 . Таким образом

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

или

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{R_1^3} \cdot \frac{1}{R_2^3},$$

что и требовалось доказать. Более точные исследования показали, что планеты движутся по эллипсам, мало отличающимся от окружностей, и не вполне равномерно; однако эти отклонения так невелики, что при первоначальном знакомстве ими вполне возможно пренебречь. Если бы мы этого не сделали, то вывести закон обратной пропорциональности было бы значительно труднее, тем не менее он справедлив и в самых общих случаях движения планет.

Следующим шагом в работе Ньютона было установить, что сила, управляющая движением Луны вокруг Земли, есть та же самая сила, которая заставляет падать на земную поверхность тяжелые тела. Так как силы относятся как сообщаемые им ускорения, то Ньютону надлежало показать, что центростремительное ускорение Луны в ее движении вокруг Земли представляет ускорение земной тяжести g , уменьшенное обратно пропорционально квадратам расстояний точек земной поверхности и центра Луны до центра Земли. Заинтересовавшийся читатель может сам проделать те вычисления, после выполнения которых, как говорит научное предание, Ньютон настолько был взволнован, что не мог сам проверить свои вычисления и обратился за помощью к одному из своих друзей. Вот все необходимые данные¹⁾:

ускорение силы тяжести на Земле: $g = 9,81$ м/сек²,

радиус Земли: $R = 6400$ км,

расстояние от центра Земли до центра Луны: $D = 384\,000$ км,

продолжительность полного оборота Луны вокруг Земли $T = 27$ дней 7 час. 43 мин.

Пример 34. Определение силы, необходимой для приведения в движение по заданному закону тела, вес которого известен.

Тело весом 2 тонны движется прямолинейно и равноускоренно по закону:

$$s = 49,05t^2,$$

где s выражено в сантиметрах, а время t — в секундах.

Определим сначала ускорение. Вспоминая формулу равноускоренного движения

$$s = \frac{wt^2}{2},$$

легко установим, что ускорение w будет

$$w = 98,1 \text{ см/сек}^2,$$

или

$$w = 0,981 \text{ м/сек}^2.$$

Выраженная в технических единицах масса движущегося тела будет

$$m = \frac{2000}{9,81} \text{ техн. ед. массы.}$$

¹⁾ Вследствие некоторого округления нельзя ожидать абсолютно точного совпадения результатов (можно ожидать ошибки до $1-2\%$).

Таким образом необходимая для произведения этого движения сила F будет

$$F = m\omega = \frac{2000}{9,81} \cdot 0,981 = 200 \text{ кг.}$$

§ 57. Принцип Даламбера. Силы инерции. Мы переходим к разъяснению принципа, который в самое последнее время вызвал ожесточенные дебаты среди практиков, хотя нужно сказать, что среди специалистов-механиков этот принцип никогда никаких сомнений не вызывал. Поэтому здесь читателю придется быть особенно внимательным и осторожным при делании собственных выводов и умозаключений.

Возьмем уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$F = m\omega. \quad (20)$$

Это уравнение связывает действующую силу F , массу m тела и получающееся ускорение ω . Перенесем в этом уравнении все члены в левую часть:

$$F - m\omega = 0. \quad (23)$$

Не более полминуты нужно было, чтобы от уравнения (20) перейти к уравнению (23); и тем не менее понадобилось больше полвека, чтобы от ньютонова уравнения (20) перейти к выражающему принцип Даламбера уравнению (23). Такую медлительность никоним образом нельзя отнести на счет отсутствия в это время интересов к механике; наоборот, именно в течение этого полвека механика была передовой, наиболее разрабатывающейся областью физического знания, именно за эти полвека и были заложены основы классической современной динамики. Объясняется это тем, что в это время больше всего сначала интересовались установлением физического смысла того или другого явления и только потом уже облекали его в математическую формулу. Физический смысл формулы (20) для нас совершенно ясен: она выражает, что сила измеряется произведением массы на ускорение. Каков же будет физический смысл уравнения (23)? Перепишем его в виде

$$F + (-m\omega) = 0.$$

Первый член F есть некоторая сила. К этой силе прибавляется величина $-m\omega$. Но поскольку складывать можно только однородные величины, то $-m\omega$ будет тоже некоторая сила. Какая же это сила? Это будет сила, после добавления которой к силе F получается математически нуль, а физически равновесие. Поскольку сила F приложена к движущемуся телу, то и сила $-m\omega$ приложена к движущемуся телу и уравновешивает на нем силу F . Но будет ли это равновесие в действительности? Нет, конечно; если бы это равновесие имело место, то тело или находилось бы в покое или двигалось бы прямолинейно и равномерно; на самом же деле тело движется с ускорением ω . Таким образом сила $-m\omega$ будет силой фиктивной и само равновесие тоже чисто фиктивное. В самом деле, оно получилось просто в результате формальной математической операции — переноса члена из одной части уравнения в другую; мы получили бы равновесие, если бы действительно прило-

жили такую силу — $m\omega$, но поскольку эта сила фиктивная, то, конечно, на самом деле равновесия нет. Эту фиктивную силу Даламбер назвал силой инерции. Таким образом мы приходим к следующему выражению принципа Даламбера:

Если ко всем действующим на тело силам мы добавим фиктивную силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению (знак „минус“ в нашей формуле), то мы получаем систему взаимно уравновешивающихся сил.

Таким образом каждому ускорению соответствует и своя сила инерции. Если тело падает с ускорением силы тяжести g , направленным вниз, то существует сила инерции, равная mg и направленная вверх. Поскольку вес P тела тоже равен mg , то эти две силы взаимно уравновесились бы, если бы сила инерции была действительной силой. На самом деле этого равновесия нет; если бы вес тела уравновесился силой инерции, то тело или совсем не падало бы или двигалось бы вниз равномерно и прямолинейно.

Если тело движется равномерно по окружности, то мы знаем, что существует центростремительная сила $\frac{mv^2}{R}$, направленная к центру. Следовательно, должна существовать и противоположная ему сила инерции, равная $\frac{mv^2}{R}$ и направленная от центра: это будет так называемая центробежная сила. Как сила инерции эта сила должна быть силой фиктивной. Но тут невольно встает вопрос, каким же образом может быть, фикцией сила, которая может разнести маховик и которую чувствует каждый мальчик, держащий в своих руках вращающуюся нить, к которой привязан камень? Таким образом в понятии силы инерции должен как будто бы иметься и элемент реальности.

Разгадка этого недоумения получится, если мы вспомним еще раз третий закон Ньютона — закон равенства действия и противодействия. Если одно тело, действуя на другое, сообщает последнему ускорение ω , для чего требуется приложенная ко второму телу сила $m\omega$, имеющая направление ускорения, то второе тело, в свою очередь, действует на первое тоже с вполне реальной силой, равной по закону равенства действия и противодействия тоже $m\omega$, но уже направленной в сторону, противоположную направлению действующей силы или сообщаемого ей ускорения ω . Это противодействие движимого тела движущему представляет вполне реальную силу, равную по величине $m\omega$ и направленную противоположно ускорению, т. е. как будто бы нашу силу инерции с той только разницей, что эта реальная сила приложена к движущему телу. Таким образом мы должны различать две силы: одну — фиктивную силу инерции, приложенную к движущемуся телу, и другую — реальную силу, приложенную к движущему телу и представляющую противодействие движимого тела.

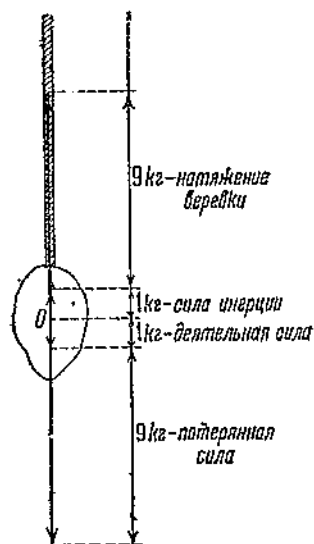
Рассмотрим пример. Я, желая привести в движение неподвижное тело, толкаю его, чтобы сообщить ускорение; при этом я отчетливо ощущаю в руке сопротивление этого тела (как говорят, „преодолеваю

инерцию этого тела", откуда, между прочим, и пошло название „силы инерции“). Эта реальная сила представляет противодействие толкаемого тела; она приложена к моей руке, к движущему телу. К движущемуся, толкаемому мной телу приложена единственная реальная сила — сила моей руки; если бы я приложил к нему фиктивную силу инерции, то она могла бы уравновесить на нем толкающую силу моей руки, но равновесие это было бы, конечно, фиктивным.

Второй пример посвятим разбору центробежной силы.

Представим себе камень, привязанный к веревке длиной R и вращающийся в горизонтальной плоскости со скоростью v . Если m есть масса движущегося камня, то для осуществления этого движения нужна центростремительная сила, равная $\frac{mv^2}{R}$ и представляющая

приложенное к камню натяжение веревки. По закону равенства действия и противодействия на веревку должна действовать в противоположную сторону, т. е. в сторону от центра, вполне реальная центробежная сила. Для веревки эта сила вполне реальна и может разорвать ее, если скорость вращения v достигнет достаточно большой величины. Для движущегося же тела, в нашем случае камня, эта сила будет силой фиктивной, в действительности она к нему не приложена. В самом деле, после разрыва веревки камень полетит не по радиусу, по которому направлена центробежная сила, но по касательной, т. е. сохранит ту же самую скорость, которую он имел в момент, предшествовавший разрыву. Это явление каждый может наблюдать во время работы на шлифовальном или точильном круге: отколовшаяся пыль



Фиг. 109.

летит не по радиусу, но по касательной, продолжая уже имевшееся у нее в момент отрыва движение. Таким образом, возвращаясь к нашему примеру, мы видим, что центробежная сила, сумевшая разорвать веревку, ни на волос не смогла отклонить камень от его пути; это обстоятельство и обнаруживает реальность центробежной силы для движущего тела (веревки) и фиктивность для движимого (камня).

Рассмотрим еще один пример, который позволит нам с другой точки зрения взглянуть на силу инерции.

Пусть привязанный к веревке камень P (фиг. 109) весом в 10 кг опускается вниз с ускорением, равным $\frac{1}{10}g$; требуется определить натяжение веревки.

Сила приводящая в движение камень, будет силой его веса; невесомый камень мы не смогли бы опустить, двигая вниз конец веревки. Однако если бы вся сила веса действовала на камень целиком, то она сообщила бы ему ускорение g ; на самом же деле ускорение равно всего $\frac{1}{10}g$. Таким образом вес тела разделяется на две части: одна

идет на то, чтобы сообщить телу ускорение $\frac{1}{10} g$, другая же натягивает веревку. Первая сила равна $\frac{1}{10}$ полного веса камня, т. е. 1 кг, а вторая — разности между весом камня и силой, сообщающей камню ускорение, т. е. $10 - 1 = 9$ кг. Сила, сообщающая камню ускорение, называется согласно Даламберу действительной силой, сила же, натягивающая веревку, — потерянной силой, поскольку она не участвует в движении и уничтожается сопротивлением веревки. С таким же правом мы могли бы сказать, что действительная сила, тратясь на сообщения ускорения, не участвует в натяжении веревки. Чтобы выбросить ее из расчетов, достаточно приложить ее с обратным знаком (вычесть ее), а это формально сводится к добавлению к действующим силам Даламберовой силы инерции.

Таким образом при вычислении давлений (воздействий) на окружающие тела необходимо выбрасывать действительные силы или, что то же, добавлять силы инерции.

Силы инерции, являясь фиктивными для самого движущегося тела, будут реальными для окружающих тел; задача определения давлений на эти тела сводится к простой статической задаче, где ко всем действующим силам добавлены еще силы инерции. В этом сведении динамических задач к статическим и заключается вся ценность принципа Даламбера.

В заключение этой главы решим два простых примера.

Пример 35. Лифт, поднимаясь равноускоренно, проходит в 5 секунд 25 м. Определить давление на дно лифта человека, весящего $P = 80$ кг. Ускорение g можно принять за 10 м/сек².

Ускорение движения лифта найдем по формуле

$$s = \frac{wt^2}{2},$$

где $s = 25$ м, $t = 5$ сек. Следовательно, $w = 2$ м/сек². Сила инерции будет $\frac{P}{g}w = \frac{80}{10} \cdot 2 = 16$ кг. Поскольку ускорение направлено вверх, сила инерции имеет одно направление с силой тяжести. Давление человека на дно лифта будет $80 + 16 = 96$ кг.

Пример 36. Определить силу натяжения веревки длиной в 1 м, привязанной к телу весом 10 кг, вращающемуся в горизонтальной плоскости с угловой скоростью 10 об/сек.

Искомое натяжение веревки будет равно центробежной силе. Берем для последней ее выражение

$$T = \frac{mv^2}{R},$$

где m есть масс, v — окружная скорость и R — радиус вращения. Выразим скорость v через угловую скорость ω , пользуясь зависимостью

$$v = \omega R.$$

Получим:

$$T = m\omega^2 R.$$

Подставляя $m = \frac{10}{9,81}$, $R = 1$ м, вводя вместо угловой скорости число

оборотов ($\omega = 2\pi n$) и подставляя вместо $\pi^2 = 9,81$ (очень точно), будем иметь:

$$T = \frac{10}{9,81} \cdot (2\pi \cdot 10)^2 \cdot 1, \text{ кг} = 4 \text{ тонны.}$$

Веревка, конечно, должна разорваться.

§ 58. Заключение. В этой главе изложены основания современной динамики. Математически они сводятся к двум уравнениям: уравнению (20), выражающему второй закон Ньютона:

$$F = m\omega,$$

и уравнению (23), выражающему принцип Даламбера:

$$F - m\omega = 0.$$

При помощи уравнения (20) можно по заданным силам и массе тела определять сообщаемое телу этими силами ускорение; при помощи уравнения (23) определяются те давления, которые движущее тело оказывает на стесняющие свободу его движения связи. Как следствие из второго закона Ньютона дано новое определение понятия „масса“ и установлены технические и физические единицы массы и силы.

Задачи.

33. Какое ускорение получает тело, весящее 20 кг, под действием силы 5 кг ($g = 9,81 \text{ м/сек}^2$)?

Отв. 2,45 м/сек².

34. Чему равен вес гири в 1 кг на Луне, если там ускорение свободного падения равняется 1,7 м/сек²?

Отв. 0,173 кг.

35. К пружинным весам подвешен груз $Q = 5 \text{ кг}$. Что будут показывать весы, если их поднимать вместе с грузом равноускоренно с ускорением

$$a = 0,5 \text{ м/сек}^2 \text{ } (g = 10)?$$

Отв. 5,25 кг.

36. Сколько оборотов в минуту нужно дать ведру с водой, привязанному к веревке длиной 1,5 м, для того чтобы при вращении в вертикальной плоскости вода не вылилась ($g = \pi^2 = 9,81$)?

Отв. Не менее 24,5 об/мин.

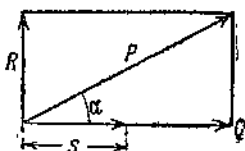
ГЛАВА 12.

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ.

§ 59. Работа и кинетическая энергия. Когда под действием силы P тело перемещается по ее направлению, то говорят, что эта сила совершает работу. Работа эта, во-первых, тем больше, чем больше двигающая сила, и, во-вторых, тем больше чем больше, то расстояние, на которое передвинулось тело или, говоря схематически, точка приложения силы. Условились называть работой A данной постоянной силы P на расстоянии s , пройденном по направлению этой силы, произведение этой силы на путь, т. е.

$$A = P \cdot s. \quad (24)$$

Если мы будем измерять силу в килограммах, а путь — в метрах, то работа будет измеряться в килограммометрах (*кгм*). Килограммометром мы, следовательно, будем называть работу, которую совершает сила в 1 *кг* при перемещении в 1 *м* по направлению этой силы (например при подъеме 1 *кг* на высоту 1 *м*). Если мы будем измерять силу в динах, а путь — в сантиметрах, то соответствующая единица работы — работа одной дины на расстоянии одного сантиметра — будет называться эргом. Ввиду крайней малости этой единицы на практике пользуются другой единицей — джоулем, равным 10 миллионам эргов. Если мы вспомним, что сила в 1 *г* равна приблизительно 1000 (точнее 981) дин, то нам нетрудно будет переводить работу из килограммометров в джоули и наоборот. В самом деле, $1 \text{ кгм} = 1000 \cdot 100 \text{ граммсантиметров} = 1000 \cdot 1000 \cdot 100 = 100\,000\,000 \text{ эргов}$, иными словами, 1 *кгм* равен приблизительно 10 (точнее 9,81) джоулям.

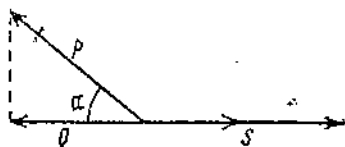


Фиг. 110.

Если направление силы P образует некоторый угол с направлением перемещения (фиг. 110), то раскладываем силу P на две составляющие Q и R , из которых Q направим по направлению перемещения, а R — перпендикулярно к этому направлению. Сила R , очевидно, не будет ни помогать, ни мешать передвижению тела и производить работу будет исключительно сила Q . Отметим, что движущая сила Q во сколько раз будет меньше всей приложенной силы P , во сколько раз изображающий ее катет будет меньше гипотенузы, изображающей силу P . Это отношение катета к гипотенузе называется косинусом заключенного между ними угла α и обозначается так: $\cos \alpha$. Таким образом сила Q будет равна $P \cos \alpha$, а ее работа $Ps \cos \alpha$. Таким образом вообще работой A силы P на данном перемещении s называется произведение величины силы P на перемещение s и на косинус угла между ними:

$$A = Ps \cos \alpha. \quad (24a)$$

В том случае, когда сила P образует тупой угол с направлением перемещения s , то составляющая Q ее по линии s будет направлена против перемещения (фиг. 111); иными словами, Q будет не помогать, но мешать перемещению; работу ее в таком случае считают отрицательной, поскольку для приведения тела в движение придется преодолеть сопротивление этой силы Q .



Фиг. 111.

Из определения работы следует, что при передвижении тяжелого тела по горизонтальному направлению работа веса передвигаемого тела будет равняться нулю. Этот результат на первый взгляд представляется несколько странным. В действительности для этого передвижения приходится затрагивать некоторую работу, но только работа эта идет на преодоление не силы тяжести, а силы трения. Всякому известно, что легче передвинуть тяжесть на катках, чем тащить ее просто по земле;

это опять объясняется тем, что при качении (об этом мы будем говорить дальше) сила трения будет значительно меньше, чем при простом волочении тела по земле.

Если на тело действует несколько сил, которые можно заменить одной равнодействующей, то сумма работ всех сил равна будет работе равнодействующей. Теорема эта и по своему словесному выражению и по способу доказательства вполне аналогична теореме Вариньона о моменте равнодействующей. Произведенное на фиг. 110 разложение силы P на движущую силу Q и перпендикулярную к направлению движения, не работающую силу R вполне аналогично разложению в теореме Вариньона приложенной силы на вращающую силу и силу, уничтожаемую сопротивлением точки опоры (центра вращения). Доказательства этой теоремы мы не приводим, представляя его любознательности читателей, которые легко смогут доказать ее, повторяя те же рассуждения, что и в теореме Вариньона (вместо радиуса r теперь надо брать перемещение s).

Пример 37. Строгальный станок сделал 50 рабочих ходов длиной 2500 мм каждый. Зная, что для равномерного движения стола при рабочем ходе требуется сила, равная 600 кг, определить работу, совершенную резцом.

Эта работа по формуле (24) будет:

$$A = P \cdot s = 600 \text{ кг} \cdot 50 \cdot 2,5 \text{ м} = 75000 \text{ кгм}.$$

В том случае, когда действующая сила P будет больше сопротивления движению, то работа силы P разобьется на две части: одна пойдет на преодоление сопротивления R , для чего потребуется работа Rs , другая же часть, равная $Q = P - R$, пойдет на сообщение телу ускорения, т. е. увеличение его скорости. Если масса нашего тела будет m , то величина ускорения w определится по формуле

$$Q = mw.$$

Если движение началось из состояния покоя, то через время t наше тело получит скорость

$$v = wt$$

и пройдет путь

$$s = \frac{1}{2} wt^2.$$

Работа силы Q будет

$$A = Q \cdot s = mw \cdot \frac{wt^2}{2} = \frac{m}{2} (wt)^2 = \frac{mv^2}{2}.$$

Величина

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (25)$$

носит название кинетической энергии или живой силы. В состоянии покоя скорость тела v , а следовательно, и его кинетическая энергия были равны нулю. После же того, как в нем накопилась

работа $A = Qs$, тело стало обладать некоторой кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$. Если в момент начала действия силы Q тело уже имело некоторую скорость v_0 , то по формулам равномерно переменного движения выражения для v и s будут:

$$v = v_0 + \omega t,$$

$$s = v_0 t + \frac{\omega t^2}{2}$$

и формула работы примет вид:

$$A = Q \cdot s = m\omega \cdot v_0 t + \frac{m(\omega t)^2}{2}.$$

Прибавляя к правой части и вычитая из нее $\frac{mv_0^2}{2}$, будем иметь

$$Q \cdot s = \frac{mv_0^2}{2} + m\omega v_0 t + \frac{m(\omega t)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Приведя первые три члена к одному знаменателю, получим

$$Q \cdot s = \frac{mv_0^2 + 2m\omega v_0 t + m(\omega t)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Если в первой дроби вынести массу m за скобки, то в скобках, как легко видеть, останется выражение $(v_0 + \omega t)^2$, т. е. v^2 . Это даст нам

$$A = Q \cdot s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (26)$$

Так как $\frac{mv_0^2}{2}$ есть значение кинетической энергии, которой обладало наше тело в моменты начала движения, то выражение, стоящее в правой части формулы (26), равно приращению кинетической энергии, и само равенство (26) выражает следующую теорему: Приращение кинетической энергии движущегося тела равно работе действующей на это тело силы.

Эта так называемая теорема живых сил имеет громадное значение как в теоретической, так и в прикладной механике.

Выражение „живая сила“ может заставить подумать, что под этим именем скрывается какая-то новая, обнаруживающаяся во время движения у движущего тела сила. Однако такой взгляд не является правильным: живая сила представляет не силу, а особый вид так называемой энергии, а именно энергию движения или кинетическую энергию.

Вообще говоря, мы называем энергией способность тела производить работу. Если мы поднимем груз на какую-нибудь высоту, то он, при падении с этой высоты может произвести известную работу (например при заколачивании в грунт сваи), причем эта работа будет тем больше, чем больше мы подняли наш груз, иными

словами, чем больший запас работы мы сообщили последнему. Из этого вытекает, что, совершая над телом некоторую работу, мы, в общем случае, увеличиваем его энергию. Конечно, не вся работа, отданная телу, пойдет на увеличение его энергии. Часть ее потратится на преодоление сопротивлений, изменение формы и физического состояния тела, т. е. уйдет из области, подлежащей ведению теоретической механики, но, во всяком случае, оставшаяся часть пойдет на увеличение энергии данного тела. Это увеличение энергии может произойти в скрытой форме, как, например, в случае с поднимаемым грузом, который в нижнем и верхнем положениях ничем как будто особенно не отличается, за исключением только того, что падая из более высокого положения, он может произвести большую работу; такого рода энергия носит название потенциальной или скрытой энергии. При увеличении скорости движения тела увеличение энергии происходит в явной форме, выражаясь в увеличении его живой силы или кинетической энергии. Обратно, эта кинетическая энергия может быть преобразована в работу, что всегда можно заметить, наблюдая те последствия, которые причиняет в момент остановки удар движущегося тела (ядра или пули) о препятствие.

§ 60. Примеры. Применение теоремы живых сил особенно удобно в том отношении, что при подсчете силы не приходится иметь дело с определением ускорений.

Пример 38. Тело, весящее 200 кг и находящееся на горизонтальном шероховатом полу, получило начальную скорость 2 м/сек и стало двигаться прямолинейно и равнозамедленно; пройдя 4 м, оно остановилось. Определить силу R сопротивления пола.

Вся начальная живая сила тела пойдет на работу преодоления силы сопротивления, т. е.

$$\frac{mv_0^2}{2} = R \cdot s.$$

В нашем случае $m = \frac{P}{g} = \frac{200}{10} = 20$ техн. ед. массы, $v_0 = 2$ м/сек, $s = 4$ м, откуда

$$R = \frac{Pv_0^2}{2gs} = 10 \text{ кг.}$$

Пример 39. Грунт утрамбовывается с помощью ручной бабы весом 60 кг, которая, падая с высоты 5 м, входит в грунт на глубину 1 см, причем сопротивление грунта во время удара можно считать постоянным. Определить ударную силу бабы.

Эта ударная сила, очевидно, будет равна силе сопротивления. Замечая, что в момент отпускания бабы и в момент ее остановки в утрамбовываемом грунте живая сила бабы будет равна нулю, мы можем сказать, что вся работа, совершаемая бабой при падении, пойдет на работу преодоления сопротивления R грунта. Это дает нам

$$60 \cdot 5 \text{ кгм} = R \cdot 0,01 \text{ кгм},$$

откуда

$$R = \frac{60 \cdot 5}{0,01} \text{ кг} = 30 \text{ тонн.}$$

Пример 40. Мертвая петля. По рельсам, проложенным по пути AB и образующим затем круговую петлю BC радиуса R , движется велосипедист (фиг. 112). С какой высоты H должен скатиться последний без начальной скорости, чтобы он мог достигнуть, не сорвавшись, верхней точки C .

При движении велосипедиста по AB живая сила его будет увеличиваться, при подъеме от B к C уменьшаться.

Для того чтобы велосипедист не падал, необходимо, чтобы во все время движения (за исключением, может быть, на один момент в самой высшей точке C) он прижимался с некоторой силой к петле, т. е. чтобы давление велосипедиста на петлю не равнялось бы нулю. Для вычисления этого давления мы согласно принципу Даламбера должны прибавить центробежную силу инерции. Таким образом на велосипедиста в самой высшей точке C будут действовать: вес P вниз, давление (реакция) петли N вниз и центробежная сила инерции $m \cdot \frac{v^2}{R}$ вверх. Согласно условиям равновесия будем иметь

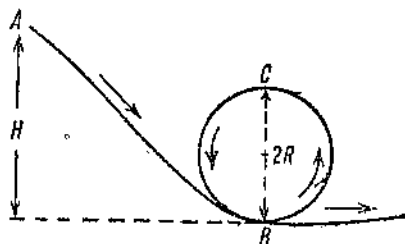
$$N + P = m \frac{v^2}{R},$$

откуда

$$N = m \frac{v^2}{R} - P.$$

Так как N должно быть больше (или, в крайнем случае, равно нулю), то

$$m \frac{v^2}{R} - P \geq 0 \quad \text{или} \quad m \frac{v^2}{R} \geq P.$$



Фиг. 112.

Живая сила в точке B будет равна работе, совершаемой весом велосипедиста при опускании из A в B . Так как при вычислении работы надо брать или величину силы по направлению перемещения или, наоборот, величину перемещения по направлению силы, то в данном случае работа веса P при переходе из A в B будет равна произведению веса P на вертикальное перемещение велосипедиста между A и B , т. е. на расстояние H . Таким образом если вес велосипедиста равен P , то в точке B живая сила его будет $P \cdot H$. В точке C она уменьшится на $2RP$ —работу при поднятии по вертикали из B в C —и будет равна $P(H - 2R)$. Таким образом наименьшая скорость v в точке C будет определяться из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = P(H - 2R).$$

С другой стороны, вес P должен быть меньше или равен центробежной силе:

$$\frac{mv^2}{R} \geq P.$$

Приравняв выражения для mv^2 , получаемые из обоих уравнений, будем иметь

$$PR \leq 2P(H - 2R),$$

откуда

$$H \leq \frac{5}{2} R.$$

Такова та минимальная высота, с которой безопасно, не работая ногами, может съезжать велосипедист. Во избежание потерь на трение и прочие сопротивления рекомендуется сделать ее несколько выше или же дать дополнительную энергию, для чего необходимо работать педалями.

§ 61. Мощность. Коэффициент полезного действия. Кроме общей величины работы, для практики важно знать, во сколько времени может быть совершена эта работа. Теоретически рассуждая, комар может выполнить ту же работу, что и лошадь, если будет выполнять ее маленькими порциями, только всей жизни комара нехватит для того, чтобы сделать ту работу, которую лошадь выполняет за одну минуту. Величина, определяющая интересующее нас качество, носит название мощности: она измеряется отношением произведенной работы ко времени, в течение которого эта работа была совершена. За единицу мощности можно принять такую мощность, которая в единицу времени, например секунду, совершит единицу работы, например один килограммометр; соответствующую единицу мощности можно было бы назвать „килограммометром в секунду“ (обозначается кгм/сек). Однако ввиду малости этой единицы на практике употребляются другие. Первой по времени была так называемая лошадиная сила (обозначается $л. с.$), которая соответствует мощности 75 кгм/сек . Наряду с ней употребляется в качестве единицы мощности ватт, который равен мощности машины, дающей в одну секунду работу, равную одному джоулю. Часто употребляется также киловатт—единица мощности, равная 1000 ваттам. Одна лошадиная сила составляет 0,736 киловатт.

В этом нетрудно убедиться, проделав следующую цепь вычислений:

$$\begin{aligned} 1 \text{ л. с.} &= 75 \frac{\text{кгм}}{\text{сек}} = 75 \frac{1000 \text{ г} \cdot 100 \text{ см}}{\text{сек}} = 750 \cdot (100)^2 \frac{\text{гсм}}{\text{сек}} = \\ &= 750 \cdot (100)^2 \frac{981 \text{ дин см}}{\text{сек.}} = 750 \cdot (100)^2 \cdot 981 \frac{\text{эрг}}{\text{сек}} = \\ &= 750 \cdot (100)^2 \cdot 981 \frac{\text{джоуль}}{10\,000\,000 \cdot \text{сек}} = \frac{75 \cdot 981}{100} \text{ ватт} = \\ &= \frac{75 \cdot 981}{100} \frac{\text{киловатт}}{1000} = 0,736 \text{ киловатт.} \end{aligned}$$

Если мощность равна работе, деленной на время, то, обратно, работа будет равна мощности, помноженной на время. В связи с этим можно установить новую единицу работы — „киловаттчас“, которая равна работе, совершаемой в один час, мощностью в один киловатт.

Так как мощность N равна работе A , деленной на время t , а работа, в свою очередь, — силе P , помноженной на путь s , то практически мощность можно вычислять по формуле

$$N = \frac{A}{t} = \frac{P \cdot s}{t} = P \cdot \frac{s}{t} = P \cdot v, \quad (27)$$

так как отношение пути ко времени дает нам скорость равномерного движения.

Пример 41. Строгальный станок работает со скоростью 180 мм/сек; зная, что для перемещения стола требуется сила в 500 кг, определить мощность, расходуемую на снятие стружки:

$$N = P \cdot v = 500 \cdot 0,18 \text{ кгм/сек} = 90 \text{ кгм/сек},$$

или (в лошадиных силах)

$$N = \frac{90}{75} = 1,2 \text{ л. с.}$$

Пример 42. Зная, что мощность человека составляет в среднем 0,1 л. с. и что гребец в лодке движется равномерно со скоростью 6 км/час, определить сопротивление R воды движению лодки.

Мощность гребца, выраженная в кгм/сек, равна 7,5 кгм/сек; скорость его движения $v = \frac{6 \cdot 1000}{3600} = \frac{10}{6}$ м/сек.

Отсюда сила сопротивления воды равна

$$R = \frac{N}{v} = \frac{7,5 \cdot 6}{10} = 4,5 \text{ кг.}$$

Конечно, вычисления, подобные произведенным в последней задаче, дают лишь очень грубое представление о величине определяемой силы. Дело в том, что на практике далеко не вся энергия, отдаваемая двигателем, идет на совершение полезной работы, часть ее бесплодно тратится на различные вредные сопротивления и потери. Отношение полезной работы $A_{\text{пол}}$ к общей затраченной работе A называется коэффициентом полезного действия (сокращенно „КПД“) и обозначается греческой буквой η („эта“):

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A}. \quad (28)$$

Этот коэффициент всегда меньше единицы. В лучших тепловых двигателях он равняется примерно 0,3, для станков он достигает 0,8 и выше, наиболее высоким он является для турбин, достигая там значения 0,95. Иногда выражают коэффициент полезного действия не дробью, а в процентах, умножая соответствующее выражение его на 100; при таком способе обозначения только что упоминавшиеся нами значения η будут равны соответственно 30, 80 и 95%.

§ 62. Заключение. В этой главе мы установили одно из самых важных положений современной механики — понятие о работе, определив последнюю как произведение силы на перемещение по направлению этой силы или же как произведение перемещения на составляющую силы по этому перемещению, и познакомились с единицами измерения работы. Мы установили, далее, связь между понятиями работы и энергии и вывели теорему живых сил. Понятие об энергии, являющееся одним из основных понятий современного физического мировоззрения, настолько широко, что не может быть в полной мере охвачено одной наукой — механикой, и дальнейшее расширение этого понятия читатель

должен искать в других науках, в первую очередь в курсе физики, начальным отделом которой является механика. Ограничиваясь чисто техническими потребностями, мы ввели, далее, понятие о мощности, об единицах ее измерения и, наконец, о коэффициенте полезного действия. Читатель должен наилучшим образом освоиться с этими понятиями и выучиться, применять их.

Задачи.

37. Стол строгального станка весит 1500 кг. Какой живой силой обладает стол, если скорость его движения равна 16 м/мин ($g = 10$)?

Отв. $5\frac{1}{3}$ кгм.

38. На каком расстоянии s может произойти остановка поезда, идущего со скоростью 90 км/час, если сила сопротивления составляет 0,16 веса поезда ($g = 9,81$)?

Отв. 200 м.

39. Человек весом 75 кг поднялся с грузом 30 кг на высоту 10 м в течение $1\frac{1}{2}$ мин. Определить развитую человеком при этом мощность.

Отв. 0,155 л. с.

40. Определить коэффициент полезного действия подъемного крана, поднимающего в 20 сек. груз в 3 тонны на высоту 8 м и требующего для этого мощности 20 л. с.

Отв. 80%.

Глава 13.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

§ 63. Работа вращающего момента. Представим себе, что на какое-то тело, могущее вращаться вокруг неподвижной оси O (например ворот), действует пара сил P_1, P_2 , точки приложения которых находятся в A_1 и A_2 (фиг. 113) на расстояниях соответственно R_1 и R_2 от оси вращения O . Пусть во вращении вокруг O ворот повернется на некоторый угол φ ; при этом точка приложения A_1 силы P_1 перейдет в B_1 , двигаясь по дуге окружности A_1B_1 , равной произведению радиуса R_1 на измеренный в радианах угол поворота φ , а точка A_2 перейдет в B_2 , описав дугу A_2B_2 , равную произведению R_2 на φ . Так как во все время движения силы P_1 и P_2 оставались направленными по касательным к дугам окружностей A_1B_1 и A_2B_2 , иными словами, все время движения направление перемещения совпадало с направлением силы, то работа силы P_1 на перемещении A_1B_1 будет равна

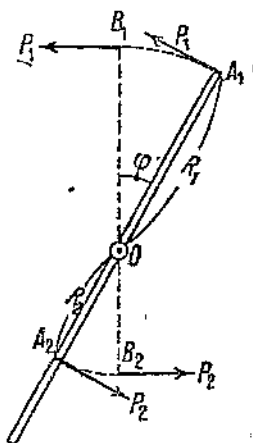
$$P_1 \cdot R_1 \varphi,$$

а работа силы P_2 на перемещении A_2B_2 —

$$P_2 \cdot R_2 \varphi;$$

обе эти работы будут, конечно, положительными. Обозначая общую величину обеих сил P_1 и P_2 через P , складывая обе полученные работы и вынося общий множитель $A\varphi$ за скобки, получим

$$A = P\varphi(R_1 + R_2).$$



Фиг. 113.

Но сумма $R_1 + R_2$ дает нам расстояние между линиями действия обеих сил пары или так называемое плечо пары. Произведение силы P на плечо $R_1 + R_2$ дает нам момент пары. Следовательно, работа A пары сил равна произведению момента $P(R_1 + R_2)$ на угол поворота φ . Обозначая величину момента пары $P(R_1 + R_2)$ через M , мы увидим, что работа обеих сил пары при повороте на угол φ будет равна

$$A = M \cdot \varphi. \quad (29)$$

Таким образом работа вращающего момента равна произведению вращающего момента M на угол поворота φ , выраженный в радианах. Мы видим, что это выражение вполне аналогично формуле (24), дающей работу силы P при перемещении по направлению этой силы s . Вместо силы P теперь стоит вращающий момент M , а вместо линейного перемещения s — угловое перемещение φ .

Если мы разделим работу A на время t , в течение которого эта работа была совершена, то мы получим выражение для мощности N :

$$N = \frac{M \cdot \varphi}{t}.$$

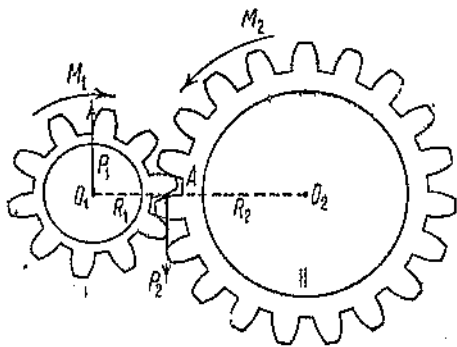
Но частное от деления угла поворота φ на время t при равномерном вращении дает нам угловую скорость ω . Таким образом

$$N = M \omega, \quad (30)$$

т. е. во вращательном движении мощность равна произведению вращающего момента M на угловую скорость ω [сравните формулу (30) с формулой (27) предыдущей главы].

Обратим внимание на одно обстоятельство. Чтобы получить работу и мощность во вращательном движении, нужно величину вращающего момента умножить на угловое перемещение φ или угловую скорость ω , выраженные обязательно в радианах или в радианах в секунду. Это обстоятельство и выясняет всю важность введения радианной единицы угла и угловой скорости. Практически, конечно, легче углы и скорости измерять в оборотах (или в долях оборота) и в оборотах в секунду (или в минуту), но все расчетные формулы гораздо проще выражаются в радианной мере.

В качестве применения предыдущих формул разберем, как происходит передача работы и мощности при передаче вращательного движения, например при помощи зубчатых колес (фиг. 114). Пусть на зубчатое колесо I с центром O_1 и радиусом R_1 действует вращающий момент M_1 . Этот момент мы можем представить парой, плечо которой равняется радиусу R_1 соответствующего колеса I. Пусть эта пара будет



Фиг. 114.

P_1, P_2 , где общая величина P сил P_1 и P_2 будет равняться частному от деления вращающего момента M_1 на радиус R_1 ,

$$P = \frac{M_1}{R_1}.$$

Из этих двух сил P_1 и P_2 первая сила P_1 пары передает давление на ось O_1 , а вторая P_2 — на колесо II, находящееся в точке A в сцеплении с колесом I. Эта сила P_2 и приводит во вращение колесо II; соответствующий вращающий момент M_2 будет равняться произведению силы $P_2 = P$ на плечо R_2 :

$$M_2 = PR_2.$$

Вставляя вместо P его значение, будем иметь

$$M_2 = M_1 \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом вращающий момент M_2 , перелающийся на второе колесо, будет больше M_1 в отношении радиусов $R_2 : R_1$ обоих колес. Но так как угловые перемещения относятся обратно пропорционально радиусам (чем больше R_2 , тем меньше соответствующее угловое перемещение), то нетрудно видеть, что переданная на колесо II работа A_2 будет та же самая. В самом деле, если обозначим через φ_1 и φ_2 угловые перемещения колес I и II, связанные соотношением

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

то работа силы, действующей на первое колесо, будет

$$A_1 = M_1 \varphi_1,$$

а на второе:

$$A_2 = M_2 \varphi_2.$$

Но

$$M_2 = M_1 \frac{R_2}{R_1}$$

а

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{R_1}{R_2};$$

поэтому после подстановки этих выражений в равенство для A_2 будем иметь

$$A_2 = M_2 \varphi_2 = M_1 \varphi_1 = A_1.$$

Иными словами, несмотря на то, что при передаче происходит увеличение вращающего момента M_2 , увеличения работы при этом не происходит. Строго говоря, при этой передаче происходит некоторая потеря работы за счет преодоления силы трения и других сопротивлений движению; если пренебречь последними, то мы могли бы написать просто $A_1 = A_2$. Это обстоятельство очень важно: оно показывает, что при помощи передачи движения можно увеличить вращающий момент или действующую силу, но увеличения передаваемой работы при этом не происходит; энергия течет от двигателя, как река, несколько теряясь

во время движения, но никоим образом не увеличиваясь в своих размерах, если только не существует внешних источников питания. Сама собой энергия в машине зародиться никоим образом не может, как не может при отсутствии дождей, притоков или ключей внезапно увеличиться количество воды в реке.

§ 64. Живая сила вращательного движения. Совершая работу над каким-нибудь телом, мы увеличиваем его энергию, и общая сумма работы, отданной этому телу, равна, как мы видели выше, приращению живой силы или кинетической энергии этого тела. Полная живая сила всего тела, как состоящего из ряда точек, равна сумме живых сил всех этих точек. Если тело движется поступательно, то живая сила его равна половине произведения его массы на квадрат скорости, которая будет общей скоростью всех его точек. Если же тело вращается вокруг неподвижной оси, то различные его точки будут двигаться с различными скоростями. Если мы возьмем какую-нибудь материальную точку вращающегося тела, масса которой будет m , а расстояние от оси вращения r , то при угловой скорости вращения, равной ω , линейная скорость этой точки будет ωr , а живая сила ее движения будет

$$\frac{m(\omega r)^2}{2}.$$

Пусть наше твердое тело разбито на ряд материальных точек, массы которых будут $m_1, m_2, m_3, \dots$, а расстояния до оси вращения $r_1, r_2, r_3, \dots$. Полная живая сила тела будет равна сумме живых сил отдельных точек тела, т. е.

$$T = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 \omega^2 r_3^2}{2} + \dots$$

Во всех этих членах имеется общий множитель $\frac{\omega^2}{2}$; вынеся его за скобку, будем иметь

$$T = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots).$$

В скобках стоит выражение, равное сумме произведений масс материальных точек тела на квадраты их расстояний до оси вращения. Это выражение имеет большое значение в теории вращательного движения вокруг оси и носит название момента инерции рассматриваемого тела вокруг оси. Обозначая его через J , будем иметь

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots \quad (31)$$

При введении понятия о моменте инерции вышенаписанная формула для живой силы примет вид:

$$T = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (32)$$

Если мы сравним эту формулу с выражением живой силы при поступательном движении, т. е. с $\frac{mv^2}{2}$, то станет совершенно ясной ана-

логия в строении обеих этих формул; вместо линейной скорости v теперь стоит угловая скорость ω , а вместо массы m — момент инерции J . Последний в динамике вращательного движения играет ту же самую роль, какую масса играет в динамике поступательного движения. Поскольку массу можно считать мерой инертности тела (чем больше масса, тем большую силу нужно приложить к телу для сообщения по-

следнему заданного ускорения) тем самым и объясняется самое название „момента инерции“: слово „момент“ напоминает о вращении („вращательный момент силы“), а „инерция“ — об аналогии момента инерции с массой.

Момент инерции данного тела зависит от положения в последнем оси вращения (в этом состоит его существенное отличие от массы, которая для данного тела является вполне постоянной величиной) и в каждом отдельном случае может быть или вычислен по особым фор-

мулам или же определен опытным путем, на чем, однако, мы не имеем здесь возможности останавливаться. Ограничимся лишь указанием моментов инерции для наиболее важных, часто встречающихся в технике тел.

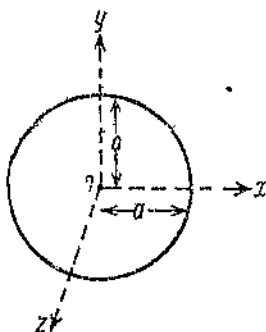
Момент инерции однородной палочки массы M и длины l , вращающийся вокруг оси, проходящей через один конец этой палочки перпендикулярно к длине последней, равен

$$J = M \frac{l^2}{3}.$$

Для прямоугольной однородной пластинки с массой M (фиг. 115), стороны которой равны $2a$ и $2b$, моменты инерции относительно осей Ox , проходящей через центр O пластинки параллельно стороне $2a$, оси Oy , проходящей через O параллельно стороне $2b$ и оси Oz , проходящей через O перпендикулярно осям Ox и Oy , будут соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{Mb^3}{3}, \\ J_y &= \frac{Ma^3}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$J_z = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}. \quad (b)$$



Фиг. 116.

Для диска массы M радиуса a (фиг. 116) моменты инерции вокруг проведенных через центр O трех взаимно перпендикулярных осей Ox ,

Oy , Oz , из которых две первые лежат в плоскости диска, будут:

$$\begin{aligned} J_x &= J_y = \frac{Ma^2}{4}, \\ J_z &= \frac{Ma^2}{2}. \end{aligned} \quad (a)$$

Сравнивая формулы (a) и (b), нетрудно заметить, что

$$J_x + J_y = J_z,$$

т. е. момент инерции пластинки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости последней, равен сумме моментов вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, проведенных в плоскости через точку пересечения с пластинкой оси, к ней перпендикулярной. Во второй части книги — сопротивлении материалов — это положение выражают словами: полярный момент (J_z) равен сумме экваториальных (J_x и J_y).

Для цилиндрического однородного вала массы M и радиуса R , вращающегося вокруг своей геометрической оси, момент инерции будет

$$J = \frac{MR^2}{2}.$$

Пример 43. Вычислить живую силу диска весом $P = 100$ кг с радиусом $R = 2$ м, делающего 1000 об/мин вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости.

Живая сила вычисляется по формуле (32). Момент инерции диска будет

$$J = \frac{MR^2}{2} = \frac{P}{g} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{100}{9,81} \cdot \frac{2^2}{2} = \frac{200}{9,81}.$$

Угловая скорость ω , выраженная в радианах в секунду, будет

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 1000}{60} = \pi \frac{100}{3} \text{ 1/сек.}$$

Отсюда живая сила T диска будет

$$T = J \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{9,81} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 100^2}{3^2}$$

или, сокращая на $\pi^2 \approx 9,81$,

$$T = \frac{1\,000\,000}{9} \approx 111\,000 \text{ кгм.}$$

Если твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, то живая сила его остается постоянной, а следовательно, работа действующих на него сил будет равна нулю. Для того чтобы это было возможно, необходимо, чтобы приложенный к телу вращающий момент в точности уравновешивал всю сумму моментов сил сопротивления и работа вращающего момента уничтожалась бы работой сил сопротивления. Если вращающий момент будет больше момента сопротивления и работа его больше работы сил сопротивления, то живая сила, а следовательно, и угловая скорость вращающегося тела будут увеличиваться.

Так как увеличение скорости вращения требует расхода энергии, которая лучше может быть использована по своему настоящему назначению, то на практике стремятся достигнуть наиболее возможной равномерности хода всех частей машины. Там, где по условиям устройства механизма равномерность подачи энергии исключена (например в разобранном в главе 6 кривошипно-шатунном механизме, где равномерное вращательное движение преобразуется в неравномерное возвратно поступательное, и наоборот), пользуются специальными приспособлениями для регулировки хода машины. Наиболее простым из этих приспособлений является применение маховика. Когда вращающий момент больше силы сопротивления, то излишняя энергия поглощается маховиком, ход которого чуть ускоряется; наоборот, когда вращающий момент меньше момента сил сопротивления, то нужная для вращения энергия заимствуется из запаса кинетической энергии, накопленного в маховике. Так как живая сила маховика выражается формулой

$$T = J \frac{\omega^2}{2},$$

то очень важно, чтобы момент инерции маховика был возможно больше. Чтобы сделать его возможно больше, не тратя лишнего материала, стараются поместить вещество маховика на возможно большем расстоянии от оси вращения последнего, вследствие чего маховик и конструируется в виде колеса, центр которого находится на оси вращения, а главная масса сосредоточивается по ободу последнего.

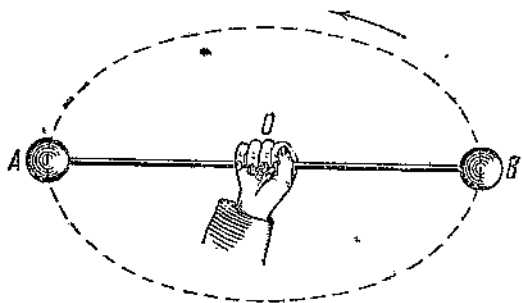
Посмотрим, какую экономию материала можно получить, если сконструировать маховик, разобранный в предыдущем примере, в виде колеса, а не в виде диска.

Если через R обозначить средний радиус колеса (среднюю величину между радиусами внутреннего и внешнего ободов), то момент инерции последнего вокруг оси, проходящей через центр, будет равен MR^2 , в то время как для диска момент инерции будет $\frac{MR^2}{2}$. Таким образом, конструируя маховик в виде колеса, а не в виде диска, мы получаем почти 50-процентную экономию материала при том же количестве запасенной кинетической энергии.

§ 65. Сила во вращательном движении. Как равномерное прямолинейное движение, так и равномерное вращение не требуют для своего поддержания никакой работы, за исключением только той, которая необходима для преодоления сопротивления движению. Прямолинейное равномерное движение и равномерное вращение могут происходить по инерции, не требуя первое — силы, а второе — момента вокруг оси вращения. При равномерном и прямолинейном движении отдельные частицы тела не изменяют движения соседних частиц и, следовательно, не оказывают на них соответствующего силового воздействия. Для равномерного вращения это не имеет места, и в этом заключается динамическое отличие между равномерными прямолинейным и вращательным движениями. При равномерном вращении тела каждая точка его описывает окружности, а в главе 11 мы видели, что для равномерного движения по окружности необходима направленная по радиусу к центру

центростремительная сила; внутренние частицы как бы удерживают внешние с некоторой силой. Поскольку эта сила все время движения перпендикулярна к направлению совершающегося по окружности движения, работа ее будет равна нулю, но сама эта сила все же всегда существует. Противодействие этой силе — центробежную силу — может ощущать каждый, которому пришлось держать в руке веревку, привязанную к вращающемуся камню. Если m есть масса камня, ω — угловая скорость вращения веревки вместе с камнем и r — длина веревки, то величина центробежной силы будет равна $m\omega^2 r$.

Если вращается вокруг оси тело, которое нельзя принять за одну материальную точку, например когда вокруг оси вращается вал, то при вычислении центробежной силы считают, что вся масса тела сосредоточена в центре тяжести. Если центр тяжести находится на оси вращения, то скорость его движения равна нулю; будет равна нулю и его центробежная сила, или, точнее говоря, центробежные силы отдельных частиц тела между собой взаимно уравновешиваются. В этом может убе-



Фиг. 117.

дить нас следующий простой опыт. Возьмем два одинаковых шара A и B , помещенные по концам A и B стержня (фиг. 117). Если взять этот стержень рукой в его середине и вращать стержень в горизонтальной плоскости (нет надобности делать полных оборотов, можно лишь поворачивать до отказа в ту и другую сторону кисть руки), то никакого действия центробежной силы рука не ощущает. Если же взять стержень в какой-нибудь другой точке, ближе к A или B , то начинает давать себя чувствовать центробежная сила со стороны более удаленного шара.

Таким образом видно, как важно помещать центр тяжести вращающегося вала на оси вращения. Если этого не сделать, то на подшипники будет действовать центробежная сила, могущая производить довольно значительные добавочные давления на подшипники.

Пример 44. Вал весом $P = 100$ кг вращается вокруг горизонтальной оси, делая 3000 об/мин. Центр его тяжести находится как раз посредине расстояния между подшипниками на расстоянии полсантиметра от оси вращения.

Если бы вал не вращался или если бы центр его тяжести лежал на оси вращения, то давление на каждый из подшипников равнялось бы 50 кг. В рассматриваемом случае к весу вала придется добавить еще центробежную силу, которая будет равна $m\omega^2 r = \frac{P}{g} \omega^2 r$. Угловая скорость в радианах в секунду будет

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 3000}{30} = 100 \pi \text{ 1/сек.}$$

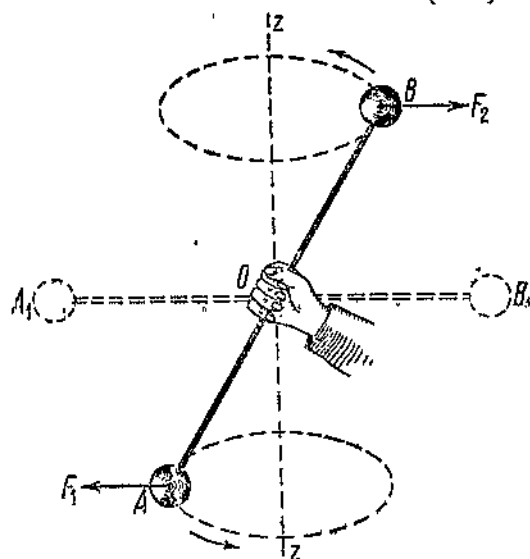
Центробежная сила будет

$$F = \frac{100}{9,81} (100\pi)^2 \cdot 0,005 \text{ кг},$$

или, после сокращения на $\pi^2 \approx 9,81$,

$$F = 5000 \text{ кг}.$$

Эта добавочная сила распределится поровну на оба подшипника, причем, когда центр тяжести будет находиться над осью, она будет направлена вверх, а при нахождении центра тяжести под осью — вниз. Таким образом полное давление на каждый из подшипников будет периодически колебаться от 2550 кг (вниз) до 2450 кг (вверх); как видно, основную часть давления будет образовывать центробежная сила.



Фиг. 118.

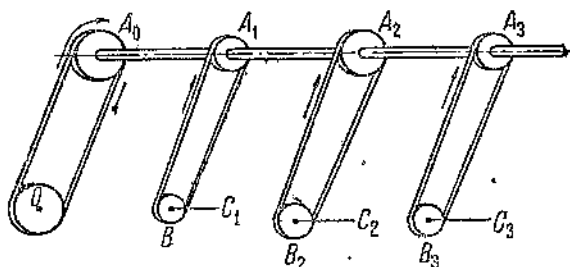
Однако для полного уравновешивания центробежных сил еще недостаточно поместить центр тяжести на оси вращения. Если мы возьмем стержень, изображенный на фиг. 117, за его середину рукой и будем его держать в вертикальной плоскости так, чтобы он образовывал некоторый угол с вертикалью (фиг. 118), то при вращении стержня вокруг вертикальной оси zz возникнут равные центробежные силы F_1 и F_2 , которые будут образовывать пару, стремящуюся повернуть стержень AB в горизонтальное положение $A'B'$, в котором обе центробежные силы F_1 и F_2 уравновесят друг друга. Для того чтобы это обстоятельство не имело места, делают все вращающиеся тела такими, чтобы не только центр тяжести лежал на оси вращения, но и чтобы ось вращения совпадала с осью симметрии всего вращающегося тела.

§ 66. Приложения. Применим теперь только что полученные соображения к исследованию явлений, наблюдаемых в работе металлообрабатывающих станков с точки зрения их расчета и характеристики.

Первое, что бросается в глаза при входе в рабочее помещение, это тянущийся во всю длину помещения вращающийся вал, приводящийся в движение от некоторого двигателя и передающий при помощи приводных ремней вращение станкам. Схематически эта картина изображена на фиг. 119, где O есть дающий энергию двигатель, A_0 — основной шкив, приводящий вал во вращение, $A_1, A_2, A_3, \dots$ — ведущие шкивы, передающие при помощи ременной передачи вращение ведомым шкивам

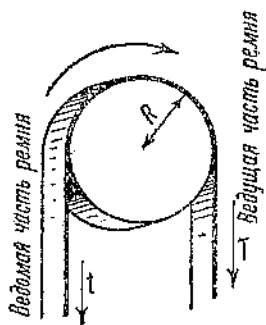
$B_1, B_2, B_3, \dots$, расположенным на осях $C_1, C_2, C_3, \dots$, станков ¹⁾. Изучим теперь механизм передачи энергии с двигателя O на вал и, наконец, с вала на оси станков $C_1, C_2, C_3, \dots$.

На каждый шкив действуют усилия, двух ветвей ремня (фиг. 120): одна более туго натянутая — ведущая ветвь, натяжение которой равно T , другая более слабо натянутая — ведомая ветвь ремня с натяжением t .



Фиг. 119.

Сила T стремится вращать шкив по направлению вращения, сила t — в противоположном направлении. Сила T больше t ; обычно $T = 2t$. Разность обоих натяжений $T - t$ дает так называемое окружное усилие на шкиве, а произведение окружного усилия на радиус R — величину вращающего момента данного шкива. Этот вращающий момент M_0 на основном шкиве A_0 передается через вал и распределяется по всем приводным шкивам. Пусть через шкив A_1 передается вращающий момент M_1 , через шкив A_2 — вращающий момент M_2 и т. д.; эти моменты посредством ременных передач переходят на шкивы $B_1, B_2, \dots$, а потом и на оси $C_1, C_2, \dots$ станков. Таким образом крутящий момент на участке A_0A_1 вала будет $M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$, на участке A_1A_2 — всего лишь $M_2 + M_3 + \dots$, на участке A_2A_3 — лишь $M_3 + \dots$. Происходит примерно то же самое явление, которое мы рассмотрели в § 37, решая задачу о натяжениях веревки между трактором и приводимыми им в движение повозками: натяжение веревок между трактором и первой повозкой равно сумме сопротивлений всех трех повозок, между первой и второй повозками — сумме сопротивлений второй и третьей, между второй и третьей — сопротивлению одной лишь третьей повозки.



Фиг. 120.

При передаче со шкива A_1 на шкив B_1 вращающий момент, как мы видим, изменяется пропорционально диаметрам шкивов (при постоянстве окружного усилия моменты относятся как плечи), но величины передающихся работ остаются при этом постоянными и одинаковыми как

¹⁾ В современном производстве общий трансмиссионный вал все-больше больше вытесняется индивидуальным приводом для каждого станка.

на шкиве A_1 , так и на шкиве B_1 (за вычетом, конечно, потерь на сопротивление движению).

Попробуем определить величину передаваемой таким способом работы. Если мы обозначили окружные усилия на шкиве A_1 через T_1 , то за время полного оборота шкива A_1 с диаметром D_1 точка приложения силы T_1 опишет путь πD_1 и работа будет $\pi D_1 T_1$; так как $T_1 \frac{D_1}{2}$ равно значению вращающего момента M_1 , то передаваемая за один оборот ведущего вала работа будет $2\pi M_1$. Если вал делает n оборотов в секунду, то передаваемая им в секунду работа (мощность) будет равна $2\pi n M_1$ или, замечая, что $2\pi n$ есть угловая скорость ω в радианах в секунду, $M_1 \omega$ кгм/сек. Чтобы получить мощность в лошадиных силах, нужно это выражение разделить еще раз на 75. Итак, передаваемая на вал C_1 станка мощность будет равна

$$W_{\text{эфф}} = \frac{\omega M_1}{75} \text{ л. с.} = \frac{\omega T_1 D_1}{150} \text{ л. с.}, \quad (33)$$

где ω есть выражение в радианах в секунду угловой скорости вращения основного вала, а T_1 и D_1 — соответственно окружное усилие и диаметр ведущего шкива A_1 , сидящего на основном валу, выраженные одно в килограммах, а другое — в метрах.

По формуле (33) вычисляется так называемая эффективная мощность — мощность, которая передается на вал станка. Не вся эта мощность идет на совершение полезной работы: часть ее тратится на преодоление вредных сопротивлений и только остающаяся часть идет на совершение полезной работы. Эта полезная работа в случае металлообрабатывающего станка идет на работу резания, т. е. на работу, совершаемую резцом во время снятия стружки. Пусть P есть усилие резца, направленное по касательной к окружности, описываемой при вращении частицами обрабатываемого тела, r — расстояние конца резца от оси вращения станка и N — число оборотов в минуту, делаемое шпинделем, на котором сидит обрабатываемый предмет; тогда полезная мощность станка определится таким образом. При одном обороте шпинделя работа силы резания будет равна

$$P \cdot 2\pi r \text{ кгм},$$

где P выражено в килограммах, а r — в метрах. Секундный расход работы, т. е. мощность в кгм/сек будет

$$\frac{P \cdot 2\pi r N}{60} = \frac{P \pi r N}{30},$$

а полезная мощность в лошадиных силах будет

$$W_{\text{пол}} = \frac{P \pi r N}{30 \cdot 75}. \quad (34)$$

Отношение

$$\frac{W_{\text{пол}}}{W_{\text{эфф}}} = \eta$$

полезной мощности к эффективной мощности носит название коэффициента полезного действия станка.

Предупреждаем читателя, что формулы (33) и (34) даны нами не-сколько разнородными: формула (33) дает угловую скорость вала в 1/сек., а формула (34)—угловую скорость шпинделя в об/мин. Сделано это нами вполне сознательно для того, чтобы читатель, не запоминая их, в каждом отдельном случае мог бы сам рассуждением получить нужные ему величины, а не подставлять имеющиеся у него данные в готовые формулы, тем более что и сами эти формулы можно дать в самых разнообразных видах.

Пример 45. Приводной ремень действует на шкив диаметром 1590 мм с окружным усилием 250 кг. Определить мощность, получаемую шкивом, если последний делает 200 об/мин.

Искомая мощность, выраженная в кгм/сек, выражается формулой

$$W_{\text{эфф}} = M\omega,$$

где M есть вращающий момент в килограммометрах, а ω —угловая скорость в 1/сек. В нашем случае

$$M = \frac{250 \cdot 1,59}{2} = 198,75 \text{ кгм},$$

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{200\pi}{30} = 20,94 \text{ 1/сек.}$$

Искомая мощность, выраженная в лошадиных силах, будет

$$W_{\text{эфф}} = \frac{198,75 \cdot 20,94}{75} \text{ л. с.} = 55,4 \text{ л. с.}$$

Отметим, между прочим, что в этой задаче мы брали угловую скорость и диаметр ведомого шкива (на оси станка), в то время как в формуле (33) соответствующие величины берутся для ведущего шкива (на оси приводного вала). Это вполне допустимо, потому что нетрудно видеть, что и в формуле (33) и в нашем вычислении эти величины входят в произведение $\omega \cdot \frac{D}{2}$, равное окружной скорости, которая, если пренебречь потерями на скольжение, одинакова и у ведомого и у ведущего шкивов.

Пример 46. На шкив диаметром $D = 400$ мм ремень действует с окружным усилием $P = 45$ кг; шкив делает $N = 150$ об/мин. Определить коэффициент полезного действия станка, если сопротивление, испытываемое резцом при снятии стружки, составляет $F = 700$ кг при скорости резания $v = 150$ мм/сек.

Эффективная мощность в кгм/сек будет

$$M\omega = P \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{\pi N}{30} = 45 \cdot 0,200 \cdot \frac{\pi \cdot 150}{30} = 45\pi = 140 \text{ кгм/сек.}$$

Полезная мощность в кгм/сек будет

$$F \cdot v = 700 \cdot 0,150 = 105 \text{ кгм/сек.}$$

Коэффициент полезного действия будет

$$\eta = \frac{Fv}{M\omega} = \frac{105}{140} = 0,75 \text{ или } 75\%.$$

Пример 47. Мотор мощностью в 100 л. с. дает 580 об/мин. Определить его вращающий момент M и окружное усилие P , если диаметр шкива мотора равен 800 мм.

Берем формулу для мощности:

$$W = \frac{M\omega}{75}.$$

Отсюда

$$M \text{ кгм} = \frac{75W}{\omega},$$

где ω есть угловая скорость в радианах в секунду. В нашем случае

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{580\pi}{30} = 60,5 \text{ 1/сек.}$$

Поэтому

$$M = \frac{75 \cdot 100}{60,5} = 124 \text{ кгм},$$

а окружное усилие

$$P = \frac{M}{\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{124}{0,400} = 310 \text{ кг.}$$

§ 67. Заключение. Материал, изложенный в этой главе, представляет перенесение на случай вращательного движения понятий, установленных в предыдущей главе. Так, работе силы P на линейном перемещении s соответствует работа момента M на угловом перемещении φ , живой силе $\frac{mv^2}{2}$ соответствует живая сила $\frac{J\omega^2}{2}$, мощности Pv — мощность $M\omega$ и т. д. Новым понятием, вводимым в этой главе, является понятие о моменте инерции, которое еще понадобится нам во второй части нашего курса — в сопротивлении материалов. Заканчивается глава приложениями общей теории к характеристике станков, имеющими значение для работников металлообрабатывающего производства.

Задачи.

41. Железный диск с диаметром 1 м и толщиной 1 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости, делая 360 об/мин. Зная, что его удельный вес равен 7,6, определить живую силу этого диска.

Отв. 537 кгм.

42. Ремень передает шкиву окружное усилие 300 кг при скорости 15 м/сек. Определить передаваемую мощность.

Отв. 60 л. с.

43. Электромотор мощностью в 100 л. с. дает 580 об/мин. Определить вращающий момент M и окружное усилие, если диаметр шкива составляет 800 мм.

Отв. $M = 12360 \text{ кгм}$; $F = 309 \text{ кг}$.

ГЛАВА 14.

СИЛЫ ТРЕНИЯ.

§ 68. Трение скольжения. Говоря о коэффициенте полезного действия, мы упоминали, что часть энергии, доставляемой двигателем, тратится бесполезно на преодоление различного рода сопротивлений. Одним из наиболее важных таких сопротивлений является так называемая сила трения, появляющаяся всегда, когда имеет место перемещение одного тела в непосредственном соприкосновении с другим. При поступательном перемещении (скольжении) одного тела по другому имеет место так называемое трение скольжения; при качении же одного тела по другому имеет место трение качения. Начнем с рассмотрения наиболее простого случая, а именно трения скольжения.

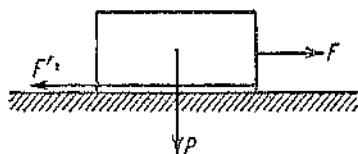
Пусть на горизонтальной шероховатой поверхности (фиг. 121) находится тело весом P . При нахождении тела в покое вес этот, как мы знаем, уравнивается направленной вверх нормальной реакцией плоскости $N=P$ (на фигуре не изображенной). Для того чтобы сдвинуть тело, предположим, вправо, мы прикладываем к нему горизонтальную силу F . Если эта сила невелика, то рассматриваемое тело в движение не придет: это значит, что, кроме нормальной реакции, поверхность, на которой лежит тело, действует на него в противоположную сторону (в нашем случае влево) с силой F' , равной и противоположной F . Если мы немного увеличим приложенную силу F , а движение не начнется, то это значит, что настолько же увеличилась и сила F' , которая и носит название силы трения. Отсюда мы получаем первый вывод:

При отсутствии движения сила трения равна сдвигающей силе (или в общем случае ее составляющей по направлению движения) и прямо ей противоположна.

Увеличивая сдвигающую силу F , мы в конце концов приходим к моменту, когда движение вот-вот начнется. Это значит, что сила трения F' достигла своей наибольшей возможной величины. Дальнейшее увеличение сдвигающей силы F пойдет уже на сообщение телу ускорения, и тело начнет двигаться по направлению сдвигающей силы с соответствующим ускорением. Для расчетов большое значение имеет, конечно, наибольшая величина, которую может иметь сила трения, или, что то же, наименьшая величина, которую должна иметь сдвигающая сила для того, чтобы тело начало двигаться по ее направлению. Эта наибольшая величина силы трения иногда и называется просто силой трения, которая, таким образом, как бы считается постоянной.

Основные законы трения были установлены в конце XVIII века французским ученым Кулоном и выражаются так:

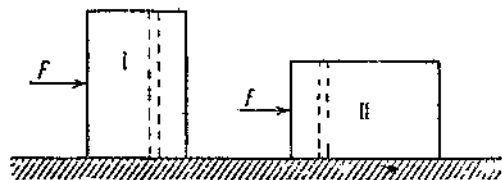
1. Трение пропорционально величине силы, сжимающей обе трущиеся поверхности, или, что то же, величине нормальной реакции поверхности. Не надо смешивать эту нормальную



Фиг. 121.

реакцию с весом тела; для случая, изображенного на фиг. 121, нормальная реакция равна весу, потому что перпендикулярно к поверхности соприкосновения не действует никаких других сил; в самом же общем случае нормальная реакция может быть и больше и меньше веса. Для примера укажем на трение тела по наклонной плоскости, когда нормальная реакция меньше веса тела (убедиться в этом путем построения чертежа предоставляем читателю).

2. Трение не зависит от величины соприкасающейся поверхности двух трущихся тел, если только последняя не слишком мала или, наоборот, не слишком велика. Правильность этого закона можно проверить следующим опытом. Возьмем прямоугольный параллелепипед (коробку или сундук), одна грань которого пусть имеет вдвое большую площадь, чем другая (фиг. 122). Если мы поставим тело



фиг. 122.

ча меньшую грань (положение I) или на большую грань (положение II), то в обоих случаях сила F , которую надо приложить, чтобы сдвинуть тело, будет одинакова; хотя в положении II друг за друга цепляется вдвое больше неровностей обеих поверхностей, но зато количество вещества, находящееся над какой-нибудь площадкой, во втором положении будет вдвое меньше, прижимающая эти площадки сила веса тоже вдвое меньше, и увеличение вдвое числа „работников“ компенсируется тем, что каждый из них „работает“ вдвое меньше. Это, конечно, будет справедливо только до известных пределов; если поставить наше тело на ребро и тащить его в таком положении, то величина сдвигающей силы будет, конечно, гораздо больше: тащить будет гораздо труднее.

В этой связи полезно отметить и еще одно обстоятельство: нельзя говорить, что трение пропорционально давлению между трущимися поверхностями, понимая под давлением величину силы приходящейся на единицу поверхности соприкосновения. На фиг. 122 в положении II давление будет в два раза меньше, чем в положении I, хотя величина силы трения в обоих положениях одинакова. Сила трения пропорциональна полной сжимающей силе (нормальной реакции), причем под таковой понимается произведение давления на общую площадь соприкосновения.

3. Величина силы трения зависит от материала трущихся тел, состояния их поверхности, наличия смазки и рода ее. Эта зависимость может быть, однако, установлена лишь опытным путем, и соответствующие данные помещаются в справочниках.

Все эти законы могут быть выражены следующей простой формулой:

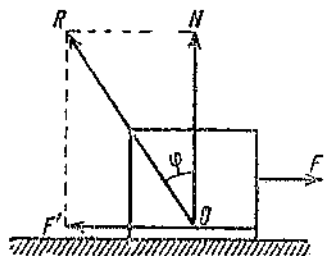
$$F = k \cdot N, \quad (35)$$

где F есть наибольшая величина силы трения, N — нормальная реакция и k — коэффициент трения скольжения, зависящий лишь от материала и

способа обработки поверхностей трущихся тел, но ни от величины площади сопротивления, ни от нормальной реакции N .

Иногда вместо коэффициента трения пользуются так называемым углом трения. Пусть сдвигаемое тело стоит на горизонтальной плоскости (фиг. 123). Если бы трения не было совершенно, то действие опорной плоскости на наше тело сводилось бы к одной лишь нормальной реакции N , перпендикулярной к плоскости опоры. Если опорная плоскость будет шероховатой, то при наличии сдвигающей силы F появится еще сила трения F' , которую тоже можно считать особой реакцией опорной поверхности, направленной по касательной к этой последней. Пусть F_1 будет наибольшая величина силы трения. Эти две реакции: нормальная N и касательная (сила трения) F' , складываясь по правилу параллелограмма, дадут полную реакцию R опорной плоскости, которая будет теперь уже не перпендикулярна к последней, а будет отклонена на некоторый угол φ от направления соответствующего перпендикуляра. В прямоугольном треугольнике ONR отношение катетов $\frac{NR}{ON}$ называется, как мы уже говорили, тангенсом угла, противолежащего катету, стоящему в числителе указанного отношения. В нашем случае тангенс угла φ будет, как нетрудно видеть, равен отношению силы трения F' к величине нормальной реакции N , т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F'}{N}.$$



Фиг. 123.

Сравнивая эту формулу с формулой (35) и помня, что $F' = F_1$, т. е. наибольшей величине силы трения, можем написать

$$\operatorname{tg} \varphi = k.$$

Это дает нам следующее определение угла трения φ :

Углом трения φ называется предельная величина, на которую может отклониться направление полной реакции опорной поверхности от направления перпендикуляра к этой последней; тангенс этого угла равен коэффициенту трения.

Последнее замечание дает нам простой способ для быстрого определения величины коэффициента трения на опыте. Пусть тело A весом P лежит на поверхности OB , коэффициент трения для которой мы хотим определить. Будем поднимать эту поверхность, вращая вокруг оси O до тех пор, пока тело A не начнет скользить вниз по наклонной плоскости; в таком случае угол α наклона плоскости и будет углом трения, а самую величину коэффициента трения мы получим, разделив длину перпендикуляра BC на длину горизонтального катета OC :

$$k = \frac{BC}{OC}.$$

В самом деле (фиг. 124), вес P груза можно разложить на две составляю-

щие: F — сдвигающую его вниз по плоскости и N' — давление на плоскость. Составляющая N' силы P уравнивается равной ей нормальной реакцией N , а составляющая F — силой трения F' . Полученная по закону параллелограмма полная реакция R в точности уравнивает вес груза P . Если мы возьмем предельное положение, при котором движение вот-вот начнется, то F' будет наибольшей возможной величиной силы трения. Коэффициент трения k будет

Фиг. 124.

$$k = \frac{F'}{N},$$

но из подобия треугольников NAR и OCB имеем

$$\frac{F'}{N} = \frac{NR}{AN} = \frac{BC}{OC},$$

что и доказывает высказанное положение.

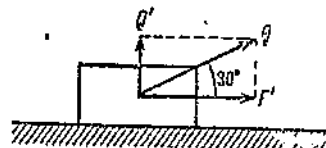
Углу трения можно дать еще следующее определение: так называется наибольший угол наклона плоскости, при котором положенное на нее тело еще удерживается в равновесии силой трения между этим телом и наклонной плоскостью.

В следующей таблице приведены в виде иллюстрации значения коэффициента трения k :

Таблица 1

чугун по чугуну (без смазки)	$k = 0,21$
чугун по железу { " " }	$k = 0,18$
железо по железу { " " }	$k = 0,44$
ремень по дубовому шкиву	$k = 0,27$
ремень по чугунному шкиву	$k = 0,50$
полосы по снегу или по льду	$k = 0,02$ до $0,03$

Пример 48. Какую силу Q нужно приложить под углом 30° с горизонтом к тяжелому телу весом $P = 60$ кг, для того чтобы привести его в движение при коэффициенте трения $k = 0,2$ (фиг. 125)?



Фиг. 125.

Наклон силы Q несколько ослабляет нормальное давление тела на горизонтальную плоскость. Разложим искомую силу Q по горизонтали и вертикали; получим составляющие F' и Q' , из которых Q' будет равна $\frac{Q}{2}$ (по свойству прямоугольного

треугольника с углом 30°), а

$$F' = \sqrt{Q^2 - Q'^2} = Q \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Нормальная реакция N будет равна

$$N = P - Q' = P - \frac{Q}{2}.$$

Сила же F' будет численно равна силе трения между телом и плоскостью, но противоположна ей по направлению (сила F' как раз и нужна для преодоления трения). Сила трения, как мы знаем, выражается формулой

$$F = kN.$$

Подставляя $F' = Q \frac{\sqrt{3}}{2}$ вместо F и $P - \frac{Q}{2}$ вместо N , получим для определения Q уравнение

$$k\left(P - \frac{Q}{2}\right) = Q \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$Q = \frac{kP}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{k}{2}} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 60}{0,2 + \sqrt{3}} = \frac{24}{0,2 + 1,7} = 12,6 \text{ кг.}$$

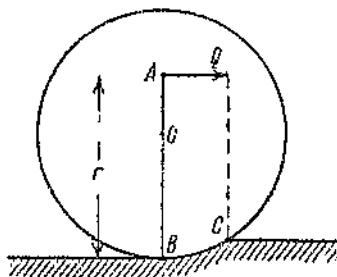
Если помножить силу трения на величину перемещения тела по ее направлению, то получится работа силы трения. Эта работа идет на нагревание трущихся поверхностей и поэтому должна быть по возможности уменьшена, чего и достигают, смазывая трущиеся поверхности.

Не следует, однако, думать, что сила трения является всегда вредной; иногда без нее было бы очень трудно обойтись. Так, при отсутствии силы трения была бы невозможна ременная передача — ремни скользили бы по шкивам, в высшей степени было бы затруднено передвижение даже по ровной местности, гвозди не держались бы в стене, болты — в гайках и т. д. На работе силы трения основана фрикционная передача, о которой мы уже говорили в главе 3, а также действие и некоторых других механизмов.

Интересное и не совсем еще исследованное явление представляет зависимость коэффициента трения от скорости движения. В момент начала движения (когда тело „берет“ из состояния покоя) сила трения, как правило, значительно выше, чем во время движения, ее принято называть силой трения покоя и соответствующий коэффициент — коэффициентом трения покоя. С момента начала движения величина коэффициента трения сразу падает очень резко и продолжает падать (но не так уже резко) при дальнейшем увеличении скорости движения. Это учитывает каждый опытный машинист, который при торможении поезда никогда не дает тормозов „до отказа“, чтобы колеса перестали вращаться в бандажах и поезд поехал бы „юзом“; наоборот, он тормозит таким образом, чтобы колеса продолжали бы еще вращаться, и тем уменьшает скорость скольжения колеса по рельсу. Дело в том, что при нормальном ходе поезда скольжение отсутствует совершенно (колесо лишь катится по рельсу), при езде поезда „юзом“ скорость скольжения между колесами и рельсами равна всей скорости поезда. Но произведенные опыты показали, что при скорости скольжения около 8 км/час

коэффициент трения равняется приблизительно 0,27, при скорости же скольжения 96 км/час коэффициент трения будет всего лишь 0,074, т. е. почти в четыре раза меньше: таким образом заторможенный до отказа поезд прошел бы до остановки примерно в четыре раза большее расстояние, чем при таком торможении, которое допускало бы наибольшую скорость скольжения 8 км/час между колесами и рельсами.

§ 69. Трение качения. Трение качения имеет место при перекатывании круглого тела по поверхности. Опыт показывает, что даже при строгой горизонтальности опорной плоскости требуется приложение некоторой горизонтальной силы, для того чтобы тело могло катиться по ней. Объясняется это тем, что при наличии тяжелого перекатывающегося тела опорная плоскость всегда несколько прогибается под давлением тела (фиг. 126), так что при качении вала приходится как бы подыматься на вершину C . Мы имеем задачу, совершенно аналогичную той, которую мы уже рассмотрели в примере 22 (стр. 87), говоря о вкатывании цилиндрического вала на ступеньку. Обозначив через r расстояние точки A приложения движущей силы Q от точки касания B , через f — расстояние BC и через P — вес перекатываемого тела, мы получим, взяв моменты около точки C :



Фиг. 126.

$$Q \cdot \overline{AB} = P \cdot \overline{BC}$$

(ввиду малости прогиба опорной плоскости плечо силы Q относительно центра C можно считать равным $\overline{AB} = r$) или, подставляя соответствующие значения и определяя силу Q :

$$Q = P \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = f \cdot \frac{P}{r}. \quad (36)$$

Число f есть так называемый коэффициент трения качения. В отличие от коэффициента трения скольжения, который есть отвлеченное число (отношение двух сил), коэффициент трения качения f есть именованное число и измеряется обычно в сантиметрах или миллиметрах, представляя физически расстояние, на которое смещается точка касания перекатываемого тела A вследствие прогиба поверхности под давлением тела A .

Значения коэффициента трения качения даны в следующей таблице:

Таблица 2

чугун по дереву	0,046 см
железо по железу	0,05
резиновая шина по шоссе	0,24 „

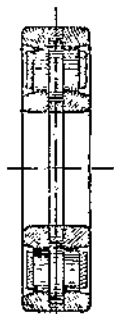
Пример 49. Определить силу, необходимую для перекатывания железного цилиндра радиуса 0,5 м и весом 2 тонны по железному настилу, считая, что движущая сила приложена на оси цилиндра.

По формуле (24), выражая все длины в сантиметрах и полагая $f = 0,05$, будем иметь

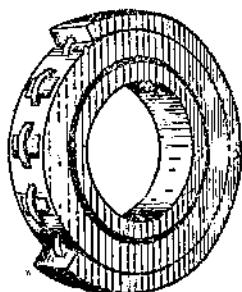
$$Q = 2000 \cdot \frac{0,05}{50} = 2 \text{ кг.}$$

Если бы тащить этот цилиндр волоком, то при коэффициенте трения $k = 0,44$ (см. таблицу предыдущего параграфа) пришлось бы затратить силу, равную $2000 \cdot 0,44 = 880 \text{ кг.}$

Уже этот пример показывает, насколько выгодной является замена трения скольжения трением качения. Именно эту цель преследует введение шариковых и роликовых подшипников, при помощи которых скольжение оси вращающегося вала в опорных подшипниках заменяется перекатыванием оси вала при помощи цилиндрических роликов (фиг. 127) или же шариков (фиг. 128).



Фиг. 127.



Фиг. 128.

§ 70. Заключение. В этой главе мы познакомились с понятием о силе трения и о коэффициентах трения при скольжении и качении. Важно отметить, что коэффициент трения при скольжении является отвлеченной величиной, тогда как коэффициент трения при качении — именованной, измеряющейся в единицах длины.

Задачи.

44. На деревянном настиле требуется передвинуть деревянный ящик, весящий 500 кг. Сколько человек могут выполнить эту работу, если коэффициенты трения в покое равны 0,5, в движении 0,3 и человек в состоянии произвести усилие в 15 кг.

Отв. 17 человек — чтобы сдвинуть и 10 — чтобы везти.

45. Решить ту же задачу, предполагая, что груз заключен в деревянную бочку диаметром 80 см; коэффициент трения при качении равен 0,08 см и усилие прилагается к верхнему концу диаметра.

Отв. Достаточно одного человека, ибо необходимое усилие равно $\frac{1}{2}$ кг.

ГЛАВА 15.

ПРОСТЫЕ МАШИНЫ.

§ 71. Работа и сила. В начале этой главы, заключительной и для динамики и для всего курса теоретической механики, подведем итоги всем полученным нами результатам, в особенности же результатам, полученным в главах 12 и 13,

В практической деятельности инженеру и технику приходится решать две различные задачи: во-первых, получить силу достаточной величины, чтобы уравновесить (преодолеть) определенное сопротивление, и, во-вторых, произвести определенную работу для преодоления этого сопротивления. Начинающие очень часто смешивают понятия „силы“ и „работы“; ведь и нам в течение этого курса приходилось говорить о „живой силе“, которая вовсе не сила, а энергия, т. е. сумма определенных затраченных работ; о „лошадиной силе“, которая тоже не сила, а мощность, измеряемая произведенной в единицу времени работой. Эта терминология ясно обнаруживает, что и у создателей механики первоначально не было об этих вещах вполне отчетливого представления. Тем более необходимо в настоящее время раз навсегда разобраться в различии, существующем между понятиями работы и силы.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется поднять на высоту 10 м груз в 1 тонну. Можно поступить таким образом: если человек без большого усилия поднимает тяжесть в 20 кг, то можно разделить весь наш груз на части по 20 кг — таких частей в тонне будет всего пятьдесят — и поднять каждую такую часть на высоту 10 м. Рабочему придется совершить всего 50 путешествий, причем необходимое усилие, прикладываемое им к грузу, составляет всего 20 кг, а работа, производимая им во время каждого путешествия, будет равна $20 \cdot 10 = 200$ кгм. Во время подъема ему придется совершить $50 \cdot 200 = 10\,000$ кгм работы, но усилие его не превышает 20 кг. Если бы он захотел избавиться от этих утомительных пятидесяти путешествий, то нужно было бы увеличить усилие. Если довести его до 100 кг, то можно ограничиться только десятью подъемами. Если можно при помощи подъемного крана получить усилие в 1000 кг, то весь подъем можно было бы произвести в один прием. В обоих последних случаях полная затраченная работа, как нетрудно видеть, составляла бы те же 10 000 кгм. Получить усилие в 100 и 1000 кг человек сам при помощи своих мускулов не может; чтобы увеличить свои силы, ему приходится прибегать к помощи машины.

Таким образом получается поставленная еще в древности задача, как маленькой силой добиться большого действия, большой силы. Для решения этой задачи и были созданы машины. Но, увеличивая мускульную силу человека, машина никоим образом не может увеличить производимой им работы. В нашем примере при подъеме одной тонны груза на высоту 10 м необходимо было затратить работу 10 000 кгм, безразлично, производим ли мы этот подъем вручную или при помощи подъемного крана. Если бы мы хотели получить и работу в большем количестве, чем это может дать в заданное время один человек, то нам пришлось бы обратиться к другим источникам энергии (электрической, водяной, тепловой и т. д.). Использование этих источников энергии составляет предмет той части машиностроения, которая занимается конструкцией дающих энергию машин-двигателей. Кроме этих машин, существует еще один класс — машины-орудия, которые, не являясь сами источником энергии, используют ее на произведение определенной работы. В связи с этим полезно отметить разницу между механизмом и машиной, двумя понятиями, которыми мы пользовались

в начале, не делая почти никакого различия. Механизмом называется приспособление для передачи движения, машинной же — приспособление для передачи работы. Поскольку и та и другая передачи совершаются одновременно, машины являются вместе с тем и механизмами; обратное заключение было бы несправедливо: например механизм часов передает движение маятника или балансира часовой и минутной стрелками; однако последние не совершают никакой работы. Поскольку мы в этом случае имеем дело только с передачей движения, но не с передачей работы, можно говорить лишь о механизме часов, но не о машине часов.

В заключение этого параграфа сопоставим основные формулы, которыми мы пользовались в учении о работе, изложенном в главах 12 и 13.

Работа равна произведению силы на перемещение по направлению этой силы (в поступательном движении) или произведению углового перемещения на вращающий момент (во вращательном движении).

Мощность, измеряемая работой, совершаемой в единицу времени, равняется произведению движущей силы на скорость движения (для поступательного) и произведению угловой скорости на вращающий момент (для вращательного движения).

Отметим еще раз, что и угловое перемещение и угловая скорость во вращательном движении выражаются в радианах и в радианах в секунду.

§ 72. Золотое правило механики. Из того положения, что машина сама по себе не создает работы, но лишь передает ее, вытекает установленное еще в древности золотое правило механики. Предположим, что потери энергии на преодоление вредных сопротивлений (трение и т. д.) настолько малы (как это и имеет место в хорошо сконструированной машине), что ими можно пренебречь. Мы имеем, конечно, идеальный, не осуществимый в действительности случай; однако такого рода предположением пользуются для произведения общей первоначальной оценки машины, с тем чтобы в случае дальнейшей надобности ввести поправки на вредные сопротивления. Итак, мы предполагаем, что вся работа, которую совершает внешняя, приложенная на одном конце машины движущая сила, идет на совершение полезной работы (как говорят на преодоление полезного сопротивления) на другом рабочем конце машины. Применим эти соображения к исследованию работы нескольких механизмов.

1. Клин A (фиг. 129), могущий скользить вдоль вертикальной стенки, загоняется вниз силой P . При этом он нажимает одной своей стороной на стену, а другой — на горизонтальную призму B , которая движется по горизонтальной плоскости и с силой Q отодвигает некоторый груз. Определить величину силы Q , если известна длина $l = ab$ и высота $h = bc$ клина.

При опускании клина на l сила P совершает работу $P \cdot l$; в то же самое время призма B отодвигается вправо на расстояние h , совершая работу $Q \cdot h$. Сравнивая обе эти работы, будем иметь

$$P \cdot l = Q \cdot h,$$

откуда

$$Q = P \frac{l}{h}.$$

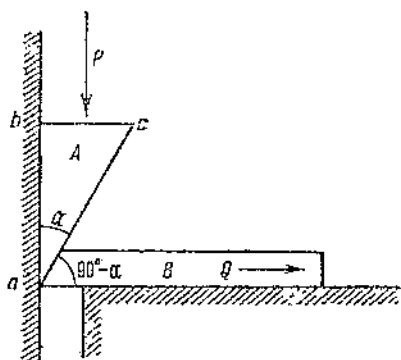
Но отношение

$$\frac{l}{h} = \frac{bc}{ac}$$

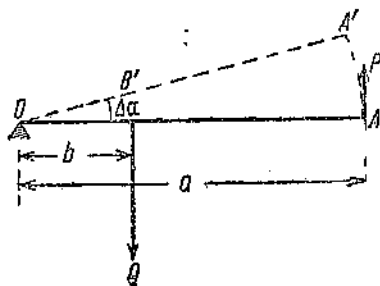
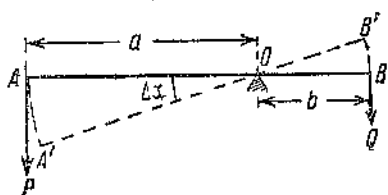
носит название, как мы уже видим, тангенса угла α , противолежащего катету bc . Таким образом

$$Q = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Чем меньше угол α , тем меньше катет bc при заданном катете ab и, следовательно, тем больше сила Q . Разобранный механизм носит название клинового пресса.



Фиг. 129.



Фиг. 130.

2. В качестве второго примера разберем условия равновесия рычага. Под этим именем подразумевается стержень, могущий вращаться вокруг неподвижной точки O (фиг. 130). К одной точке A приложена движущая сила P , к другой точке B — преодолеваемое сопротивление Q . Если силы P и Q направлены в одну сторону, то точки их приложения A и B должны находиться по разные стороны от точки опоры O ; мы имеем рычаг первого рода. Если же силы P и Q направлены в разные стороны, то точки A и B их приложения должны лежать по одну сторону от точки опоры O ; мы получаем рычаг второго рода. Условия равновесия обоих рычагов легко получаются при помощи уравнения моментов: момент силы P , равный Pa , должен уравновесить момент силы Q , равный Qb , следовательно:

$$Pa = Qb,$$

откуда

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a},$$

т. е. движущая сила и сопротивление относятся обратно пропорционально соответственным плечам рычага: чем больше плечо a , на которое действует движущая сила, по сравнению с плечом b сопротивления, тем больше сопротивление Q можно преодолеть данной силой P .

К тем же результатам можно прийти и при помощи уравнения работ. Если мы повернем рычаг в вертикальной плоскости на весьма малый угол Δx , то с большим приближением можно считать, что вертикальные перемещения точек A и B равны длинам соответствующих дуг AA' и BB' . Сравнивая работы действующей силы P и сопротивления Q , будем иметь

$$P \cdot \overline{AA'} = Q \cdot \overline{BB'}.$$

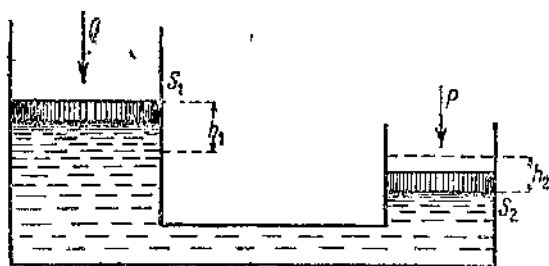
Но

$$\overline{AA'} = a \cdot \Delta x,$$

$$\overline{BB'} = b \cdot \Delta x.$$

Вставив эти выражения в нашу формулу и сокращая на общий множитель Δx , придем к прежнему соотношению:

$$P \cdot a = Q \cdot b.$$



Фиг. 131.

3. Гидравлический пресс (фиг. 131) состоит из двух наполненных одной или другой жидкостью сообщающихся сосудов, закрытых двумя поршнями, на которые действуют грузы P и Q .

Каково отношение величин этих грузов при равновесии, если площади поршней равны соответственно S_1 и S_2 ?

Из условия равенства работ заключаем, что работа, затраченная при опускании груза P , должна равняться работе при соответствующем поднятии груза Q . Пусть поршень с грузом P опустится на расстояние h_2 ; совершенная при этом работа будет Ph_2 . При опускании поршня будет вытеснен объем воды $S_2 h_2$, который перейдет во второй сосуд, причём поршень в последнем поднимется на высоту h_1 , определяемую из соотношения

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

которое выражает, что вытесненный из правого цилиндра объем воды перешел в левый и соответственно приподнял закрывающий его поршень. Так как при этом поднятии поршня последний поднимает груз Q на высоту h_1 , т. е. совершает работу Qh_1 , то из равенства работ силы и сопротивления будем иметь

$$Qh_1 = Ph_2.$$

Разделив почленно оба полученных равенства, получим

$$\frac{Q}{S_1} = \frac{P}{S_2},$$

или

$$\frac{P}{Q} = \frac{S_2}{S_1}.$$

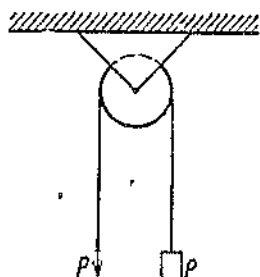
т. е. действующая сила P может быть во столько раз меньше поднимаемого груза Q , во сколько раз площадь поршня S_1 больше площади поршня S_2 .

Отметим общий принцип, лежащий во всех разобранных задачах: чем меньше приложенная сила, тем больше должно быть перемещение точки ее приложения; поскольку перемещения — и движущей силы и сопротивления — совершаются в одно и то же время, то отношение перемещений равно отношению соответствующих скоростей. Таким образом скорость движения преодолеваемого груза будет во столько же раз меньше скорости движения точки приложения движущей силы, во сколько раз сама движущая сила будет меньше преодолеваемого груза. Мы пришли к золотому правилу механики:

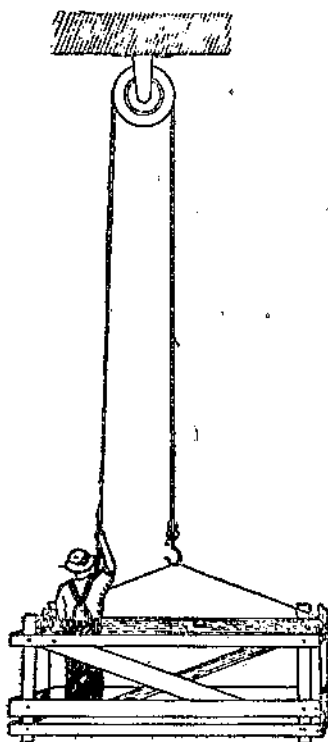
Что выигрывается в силе, то теряется в скорости.

Это правило является самым общим принципом статик, из которого могут быть выведены как правило моментов (закон рычага), так и правило силового треугольника (закон наклонной плоскости).

§ 78. Блоки. Блоком называется круглое цилиндрическое тело, могущее вращаться вокруг неподвижной или по-



Фиг. 132.



Фиг. 133.

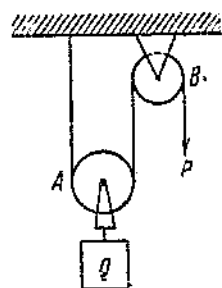
движной оси. Если ось блока неподвижна, то блок называется неподвижным (фиг. 132). При помощи неподвижного блока выигрыша в силе не получается, только изменяется направление силы: поднимая при помощи веревки, перекинутой через блок, какой-нибудь груз, тянут за свободный конец веревки вниз, что, конечно, гораздо удобнее. Однако есть случай, когда и при помощи неподвижного блока можно получить выигрыш силы: это когда человек поднимает самого себя. Пусть маляр весом P сидит в люльке (фиг. 133), которая привязана к веревке, перекинутой через неподвижный блок. Свободный конец веревки находится в руках у маляра. Вес маляра, естественно, должен быть больше веса люльки; в

противном случае он, конечно, не сможет удержать ее и сам поднимется вверх. Какую силу маляр должен приложить к свободному концу веревки, чтобы удержать в равновесии и себя и люльку? Ответ на этот вопрос мы получим, если сообразим, что все дело обстоит так, как будто бы груз $P+Q$ (вес маляра и люльки) висит на двух веревках; натяжение каждой из этих веревок будет равно $\frac{P+Q}{2}$; такова, следовательно, и будет та сила, которую маляр должен приложить к веревке.

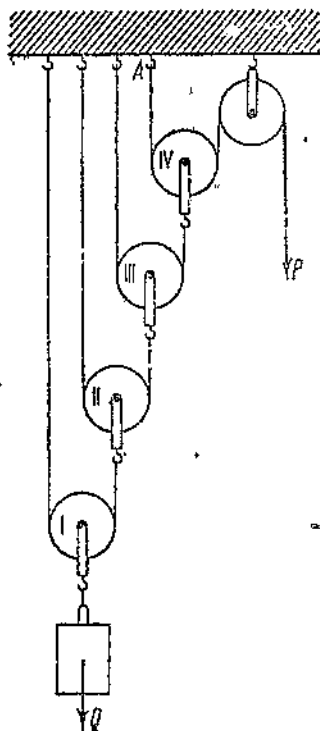
В общем случае для выигрыша в силе мы должны пользоваться подвижным блоком (фиг. 134). В этом случае поднимаемый груз Q подвешивается к обойме подвижного блока A , который находится на огибающем его снизу канате, закрепленном одним своим концом. Этот канат в дальнейшем огибает неподвижный блок B ; к свободному концу каната приложена поднимающая сила P . Учитывая, что вес груза Q распределяется на две веревки или что при опускании точки приложения силы P получающееся удлинение свободной ветви веревки идет за счет укорочения двух остальных ветвей, нетрудно сообразить, что сила P должна при равновесии равняться всего лишь половине поднимаемого груза Q (поднятие груза Q в два раза меньше, чем опускание точки приложения силы P).

Если мы хотим получить увеличение больше чем в два раза, то необходимо воспользоваться системами подвижных блоков. Подвижные блоки можно, во-первых, расположить, как на фиг. 135. Такого рода система подвижных блоков носит название степенного полиспаста. Подвижной блок I в два раза уменьшает силу, необходимую для подъема груза Q , блок II — еще в два раза ($\frac{Q}{2 \cdot 2}$), блок III — еще в два раза ($\frac{Q}{2 \cdot 2 \cdot 2}$) и, наконец, блок IV — еще в два раза ($\frac{Q}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$). Нетрудно видеть, что при числе n подвижных блоков общее уменьшение силы получается в 2^n раз и отношение между силой P и сопротивлением Q выразится формулой

$$P = \frac{Q}{2^n}.$$



Фиг. 134.



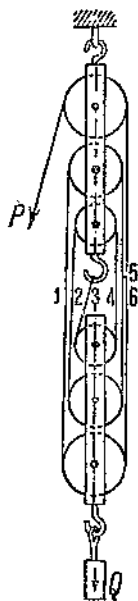
Фиг. 135.

Другая система расположения блоков показана на фиг. 136, где имеются три подвижных блока, расположенные в одной обойме, к ко-

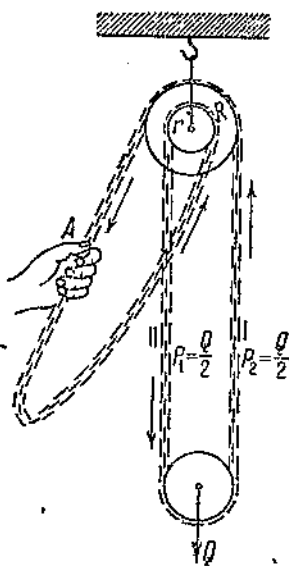
торой подвешен поднимаемый груз Q , и три неподвижных блока. В этом случае уменьшение получается всего в шесть раз, так как вес Q распределяется между шестью веревками. Если бы число блоков в каждой обойме было не 3, а n , то поскольку каждый подвижной блок висит на двух веревках, выигрыш в силе получается всего в $2n$ раз и отношение между силой P и сопротивлением Q выразится формулой

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Несмотря на то, что степенной полиспаст дает больший выигрыш в силе, на практике пользуются преимущественно лишь второй системой подвижных блоков. Мы поймем причину, если подсчитаем натяжение



Фиг. 136.



Фиг. 137.

в отдельных веревках для обеих систем. В степенном полиспасте наибольшее натяжение получается в веревке, огибающей самый нижний блок (1): оно равно $\frac{Q}{2}$, т. е. половине веса поднимаемого груза. В полиспасте же второго рода (фиг. 136) вся веревка натянута с одинаковой силой, равной $\frac{Q}{2n}$. Таким образом при пользовании последним можно брать даже при больших поднимаемых грузах Q не столь прочные веревки, которых требует устройство степенного полиспаста. Обычно при практическом осуществлении полиспаста второго рода все блоки каждой обоймы насаживают для экономии места на одну ось и получают хорошо известные каждому рабочему тали.

При помощи талей можно получить выигрыш в силе в 8—10 раз.

Если требуется более крупный выигрыш, то употребляют так называемый дифференциальный блок (фиг. 137). Он состоит из неподвижного двойного блока радиусов R и r , окружности которых покрыты зубчиками. Эти зубчики входят в кольца бесконечной цепи, огибающей подвижной блок, к которому подвешивается поднимаемый груз Q . Эта бесконечная цепь идет с меньшего неподвижного блока вниз, огибает подвижной, затем возвращается на больший неподвижный блок, свешивается с него одной петлей свободно и затем снова возвращается на меньший неподвижный блок. Движущая сила P действует на часть A цепочки, принадлежащей свободной петле. Натяжение обеих частей цепи, огибающей подвижной блок, равно $\frac{Q}{2}$, из двух частей свободной петли одна натянута силой P , а другая совершенно свободна. Соотношение между силой P и сопротивлением Q для дифференциального блока мы выведем, обратив внимание на схему фиг. 138, где изображены силы, действующие по отдельным частям цепи на двойной неподвижный блок. Беря уравнение моментов вокруг оси блока O и сравнивая сумму моментов, вращающих против и по стрелке часов, будем иметь

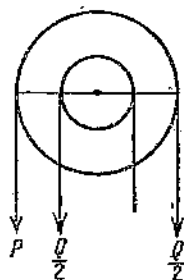
$$P \cdot R + \frac{Q}{2} \cdot r = \frac{Q}{2} \cdot R,$$

откуда

$$\frac{Q}{2} (R - r) = P \cdot R$$

и

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R - r}{R}.$$



Фиг. 138.

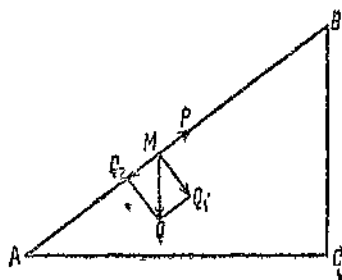
Так как разность $R - r$ радиусов может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с радиусом R , то при помощи этого блока можно добиться очень большого выигрыша в силе.

При выводе всех вышеприведенных формул мы совершенно не учитывали потери энергии на трение и другие сопротивления. Если учесть получающуюся потерю энергии, то величину действующей силы P нужно взять несколько больше теоретической. Отношение теоретической величины силы P к действительно наблюдающейся носит название коэффициента полезного действия. Для неподвижных блоков этот коэффициент достигает 96%, для подвижных — 97%. Для приблизительных расчетов можно считать, что каждый неподвижный блок обуславливает увеличение силы на $100 - 96 = 4\%$, а подвижной — на $100 - 97 = 3\%$. Так, в случае полиспаста, изображенного на фиг. 136, имеющего три подвижных и три неподвижных блока, соответствующее увеличение равнялось бы примерно $3 \cdot 3\% + 3 \cdot 4\% = 21\%$, для полиспаста же на фиг. 135 (с 4 подвижными и 1 неподвижным блоками) увеличение составило бы $4 \cdot 3\% + 1 \cdot 4\% = 16\%$. В случае дифференциального блока потери значительно больше, и там на практике приходится брать для P значение, почти вдвое большее теоретического (коэффициент полезного действия около 50%).

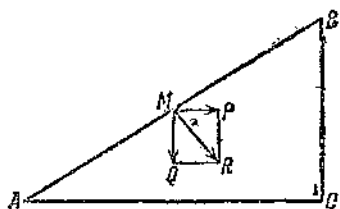
§ 74. Наклонная плоскость и ее видоизменения. Все машины, рассмотренные в предыдущем параграфе, обладали тем свойством, что

для определения условий их равновесия нужно было пользоваться уравнением моментов, иными словами, все эти машины в той или другой форме можно было свести к рычагу, рассматривать их как видоизменения последнего. Теперь мы обратимся к рассмотрению машин, которые основаны на разложении силы по двум направлениям, на применении закона параллелограмма (силового треугольника). Такие машины можно свести к рассмотрению равновесия сил на наклонной плоскости; поэтому закон параллелограмма у старых механиков и был первоначально известен под именем закона наклонной плоскости.

Пусть мы имеем тело весом Q , лежащее на наклонной плоскости длины AB , высоты BC и с основанием AC (фиг. 139 и 140). Чтобы поднять это тело вверх по наклонной плоскости, можно приложить к нему силу P или параллельно AB (фиг. 139) или параллельно AC (фиг. 140). Соответствующие величины сил P можно было бы опреде-



Фиг. 139.



Фиг. 140.

лить, или разлагая (фиг. 139) вес Q на две составляющие: Q_1 — перпендикулярно к наклонной плоскости и Q_2 — параллельно наклонной плоскости, или же (фиг. 140) пользуясь условием, что движущая сила P и вес Q должны дать равнодействующую R , уравновешиваемую сопротивлением наклонной плоскости и перпендикулярную к этой последней. Однако при помощи золотого правила механики вывод условий равновесия получается гораздо проще. В случае фиг. 139, когда сила P направлена параллельно наклонной плоскости, работа ее при перемещении $\overline{AB}$ будет $P \cdot \overline{AB}$; эта работа пойдет на поднятие веса Q на высоту $\overline{BC}$, откуда мы имеем равенство

$$P \cdot \overline{AB} = Q \cdot \overline{BC}$$

и

$$P = Q \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

В случае фиг. 140, вычисляя работу силы P , мы должны помножить P на перемещение по направлению нашей силы, т. е. на $\overline{AC}$, что дает нам

$$P \cdot \overline{AC} = Q \cdot \overline{BC}$$

и

$$P = Q \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

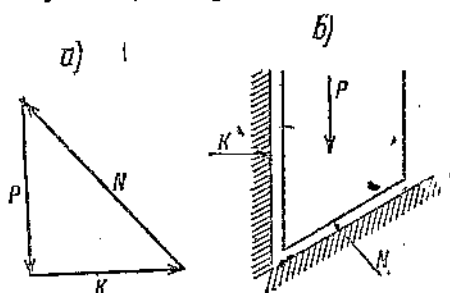
Нетрудно видеть, что при первом способе получается больший выигрыш в силе, во-первых, потому, что $AB > AC$, а во-вторых, вследствие того, что в действительности приходится учитывать и силу трения, которая опять во втором случае будет больше, поскольку сила давления R будет больше силы давления Q_1 . В обоих случаях выигрыш в силе будет тем больше, чем меньше наклон самой плоскости (меньше высота BC); при очень малых углах наклона, поскольку AB будет лишь очень немного отличаться от AC , оба случая применения наклонной плоскости (фиг. 139 и 140) будут давать почти одинаковые результаты. Уменьшение угла наклона плоскости важно еще в следующем отношении: если мы вспомним, что говорили в предыдущей главе относительно угла трения, то нетрудно будет сообразить, что при угле наклона плоскости, меньшем угла трения, тело M на последней будет держаться само собой, без приложения движущей силы P , а именно вследствие трения силы так как P нужно будет прикладывать только

• при продвижении тела M вверх по наклонной плоскости. Обладающие такими свойствами механизмы (поднимаемое тело удерживается в равновесии только силами трения) носят название самостормозящихся.

На практике наклонная плоскость применяется главным образом в виде винта, который можно рассматривать как наклонную плоскость, накрученную на цилиндр.

Винтами можно пользоваться или для подъема тел (подъемные винты) или же для сдавливания их. В первом случае сила трения является бесспорно вредной силой, во втором, наоборот, полезной, препятствующей сдвиганию винта в гайке или в теле (скрепляющие винты и болты).

Для искусственного увеличения силы трения пользуются винтами с треугольной нарезкой. Действие этой после ней можно объяснить следующим образом (фиг. 141). Представим себе тело, загоняемое вниз силой P и опирающееся одной стороной на вертикальную плоскость, сопротивление (реакция) которой будет K , а низом — на наклонную плоскость, реакция которой будет N . Поскольку под действием этих трех сил тело находится в равновесии, то силовой треугольник (фиг. 141 а), построенный на этих силах, должен замыкаться. Нетрудно видеть, что при горизонтальности нижней опорной плоскости $N = P$, при наклонности же ее $N > P$. Переходя к винту, мы можем само тело последнего, сдавливаемое осевой силой, сравнить с нашим загоняемым телом фиг. 141; роль нижней опорной плоскости будет играть опорная поверхность гайки, которая в случае квадратной нарезки будет почти горизонтальна (сила трения близка к KP), а в случае треугольной нарезки — образовывать с горизонтом угол, равный половине угла при вершине треугольника, получающегося в сечении нарезки. Так как сила трения равна KN , то для винта с треугольной нарезкой она будет больше, чем в случае винта с квадратной нарезкой.



Фиг. 141.

В случае движения винта в гайке мы легко получим соотношение между движущей силой и сопротивлением при помощи золотого правила механики. Пусть M будет вращающий момент, заворачивающий винт, Q — действующая по оси винта сдвигающая сила или поднимаемый груз. Если h есть шаг винта, то работа момента M за один оборот будет $M \cdot 2\pi$, а работа сопротивления Q будет $Q \cdot h$. Если вращающий момент образуется силой P , действующей на конце рукоятки длины R , то $M = P \cdot R$ и соотношение между работой движущей силы P и работой сопротивления Q будет,

$$P \cdot R \cdot 2\pi = Q \cdot h,$$

откуда

$$P = Q \frac{h}{2\pi R}.$$

Наличие силы трения значительно увеличивает силу P (можно в общем считать до 20%), так что коэффициент полезного действия винта составляет около 80% (он зависит от угла подъема винтовой нитки и коэффициента трения), что, конечно, мало по сравнению с коэффициентом полезного действия одного блока, равного 97%. Но если учесть, что при пользовании блоками большой выигрыш в силе получается лишь при употреблении нескольких блоков, от чего общий коэффициент полученного действия значительно понижается, то при больших величинах поднимаемого груза пользование полиспастом или винтовой передачей является почти одинаково выгодным.

В главе 4 мы познакомились с видоизменением винта — червячной передачей, служащей для передачи вращения между двумя перпендикулярными непересекающимися валами. Если ω_1 и ω_2 суть угловые скорости ведущего и ведомого валов, z_1 и z_2 — соответственно число ниток червяка или зубцов колеса ведущего или ведомого валов, то, как мы видели, соотношение между передаваемыми угловыми скоростями будет

$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \omega_1.$$

Пусть M_1 и M_2 будут соответственно вращающие моменты, действующие на ведущий и ведомый валы. Составляя уравнение равенства работы их за единицу времени, будем иметь

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2,$$

откуда

$$M_2 = M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

или

$$M_2 = M_1 \frac{z_2}{z_1}.$$

Таково соотношение между передаваемыми червячной передачей моментами. Вследствие значительного скольжения между червяком и колесом коэффициент полезного действия червячной передачи низок, составляя всего лишь 50% в среднем (колебания от 25% при одноходовом до 70% при трехходовом червяке).

Задачи.

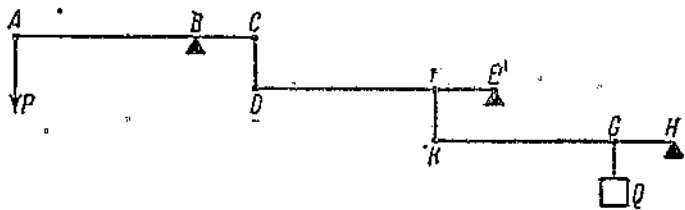
46. Из одинаковых стержней сделан ряд шарнирных ромбов (фиг. 142), могущих сжиматься и растягиваться, оставаясь всегда между собой равными. К нижнему концу приложен груз P , верхний конец подвешен к неподвижной точке и верхний ромб перетянут по диагонали веревкой. Определить натяжение Q этой веревки под действием груза P , если число ромбов равно n .

Указание: Предполагая нить OC разорванной и заменив ее действие двумя силами Q и Q , сравнить перемещения по вертикали точек A и C .

Отв. $Q = nP$.



Фиг. 142.

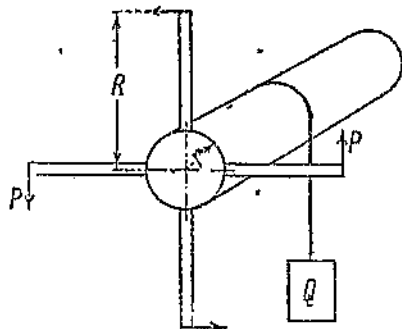


Фиг. 143.

47. В изображенной на фиг. 143 системе рычагов, где точки B, E, H неподвижны, $AB = DF = KG = 3BC = 3EF = 3GH$, определить соотношение между действующей силой P и сопротивлением Q .

Отв. $P = \frac{1}{48} Q$.

48. В воротах, радиус вала которого $r = 10$ см, а радиус рукояток $R = 40$ см (фиг. 144), определить величину сил P , которые надо приложить к обеим рукояткам, чтобы поднять груз $Q = 40$ кг, при коэффициенте полезного действия 60% .



Фиг. 144.

Отв. Теоретическое значение $P = 5$ кг; учитывая потери (принимая коэффициент полезного действия равным 60%) надо взять

$$P = 8,33 \text{ кг.}$$

ЭЛЕМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.

ГЛАВА 16.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

§ 78. Предмет и задача сопротивления материалов. При проектировании различного рода машин и сооружений основными вопросами являются следующие: из какого материала и каких размеров должны быть сделаны отдельные части, чтобы вся машина или сооружение в целом были достаточно прочны (сооружение или машина не должны ни разрушиться, ни получить опасных изменений своей формы). Чтобы ответить на поставленные вопросы, необходимо уметь выявить, какие внешние силы действуют на данные части машины или сооружения, какие внутренние силы они вызывают, каков закон распределения этих внутренних сил, как устанавливается зависимость между внутренним усилием и необходимым размером проектируемого элемента. Правила рационального решения этих вопросов и дает отдел технической механики именуемый „Сопротивление материалов“.

В своих рассуждениях и выводах сопротивление материалов опирается на данные опыта и выражает полученные результаты математическими формулами. В теоретической механике считают тела абсолютно твердыми (расстояние между отдельными точками тела не меняется под действием внешних сил). В сопротивлении же материалов это допустимо только при исследовании условий равновесия и совершенно невозможно при изучении условий прочности. Здесь приходится учитывать физические свойства тела, его способность изменять свою форму под действием внешних сил. Сопротивление материалов оперирует с телами упругими, т. е. изменяющими свою форму под действием внешних сил, но при удалении нагрузки восстанавливающими первоначальную форму и размеры.

Эти тела предполагаются вполне однородными по своему строению и состоящими из мельчайших частиц или молекул, связанных между собой внутренними силами упругости. Силы упругости не дают частицам тела удаляться одна от другой, равно не позволяют им и сближаться. Под влиянием этих сил взаимодействия между частицами тело сохраняет ту форму, которая была ему придана при изготовлении. Если затем на тело начнут действовать внешние силы, то оно изменит свою форму, как говорят, деформируется. (Внешними силами считают вес и силы, приложенные к поверхности тела. К этой группе относятся также и реакции опор. При расчете частей машин или конструкций под внешними силами разумеют силы, передающиеся на рассчитываемую часть от соседних частей машины или конструкции.)

Всякой попытке внешних сил деформировать тело внутренние силы стремятся воспрепятствовать. Это выражается в том, что тело начинает как бы пружинить, проявляя свои упругие свойства. В результате тело приобретает новую форму. Если изменение формы само по себе незначительно, то по прекращении действия внешних сил силы упругости возвращают тело к первоначальной форме; мы имеем упругую деформацию. Если же тело по удалении внешних сил лишь отчасти возвращается к первоначальной форме, то получается, как говорят, остаточная деформация, т. е. такое изменение формы тела, которое по прекращении действия внешних сил не исчезает.

Цель сопротивления материалов — указать правила, следуя которым можно производить расчеты частей машин и технических сооружений. Рассчитать какую-либо часть машины — значит определить ее размеры таким образом, чтобы при наименьшей затрате материала она безопасно могла воспринять на себя все усилия, которые сообразно ее назначению могут быть к ней приложены. Под словом *безопасно* подразумевается, что 1) по приложении сил рассчитываемая деталь машины не должна разрушаться, 2) деформация, которую производят силы, по прекращении их действия должна исчезнуть, т. е. допустимы только упругие деформации.

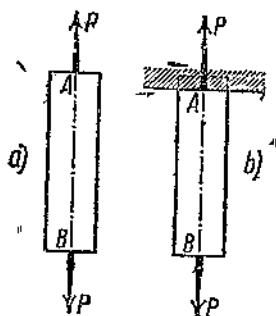
Иногда, впрочем, размеры детали машины или сооружения могут зависеть и не от одних условий прочности. Очень часто при расчете, помимо прочности, приходится принимать во внимание еще многие другие обстоятельства.

Так, например, при определении размеров могут иметь иногда решающее значение соображения экономического характера, эстетического и т. п. Поэтому в каждом отдельном случае конструктору приходится считаться со всеми условиями, которые предъявляются к проектируемой части машины. Но какие бы требования ни были предъявлены, сооружаемая часть машины непременно должна удовлетворять условиям прочности. Эти условия суть необходимые и главнейшие; они всегда должны быть выполнены.

§ 76. Виды деформаций. В зависимости от характера приложения внешних сил различают пять основных видов деформаций: 1) растяжение, 2) сжатие, 3) сдвиг, 4) изгиб и 5) кручение. Рассмотрим каждый из перечисленных видов деформаций в отдельности.

1. **Растяжение.** Если к прямому стержню AB (фиг. 145, *a*) приложить по концам силы P , равные по величине и направленные по оси стержня в противоположные стороны, то эти силы растянут стержень. Деформация стержня AB выразится в увеличении его длины и в уменьшении поперечных размеров.

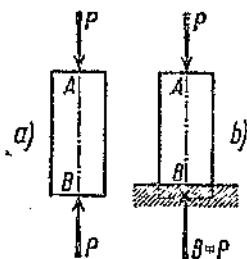
Ничего не изменится, если один конец стержня (A) закрепить неподвижно (фиг. 146, *b*), а к другому концу (B) приложить силу P , направленную по оси стержня. Согласно условиям равновесия и закреплении конца стержня возникнет реакция A , равная P , т. е. стержень



Фиг. 145.

будет находиться под действием двух равных сил P , направленных по оси в противоположные стороны, как и в первом рассмотренном случае.

Примеры на растяжение: тросы, канаты и цепи в подъемных и транспортных устройствах, стяжки между вагонами в поездах и т. д.

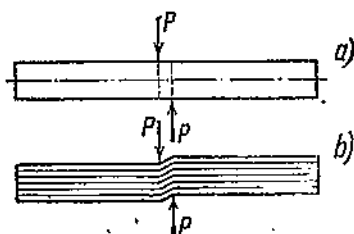


Фиг. 146.

2. Сжатие. Если по оси короткого стержня AB будут действовать силы P , равные по величине, но направленные навстречу друг другу, как это показано на фиг. 146, то стержень сожмется. Деформация стержня выразится в уменьшении его длины и увеличении поперечных размеров.

Чистая деформация сжатия имеет место только в коротких стержнях, у которых длина превышает наименьший поперечный размер самое большее в 8—10 раз. В длинных стержнях под действием сжимающих сил может возникнуть явление так называемого продольного изгиба.

Примеры на сжатие: вкладыши в подшипниках, столбы, колонны и т. д.



Фиг. 147.

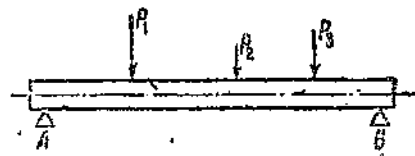
3. Сдвиг. Если две силы, равные по величине, но противоположного направления, приложить на весьма близком друг от друга расстоянии так, как это показано на фиг. 147, a , то эти силы будут стремиться сдвинуть одну часть стержня относительно другой.

Деформация стержня будет заключаться в перекашивании волокон, находящихся между силами (фиг. 147, b).

Предельное для данного стержня значение

сил P вызовет в металле разрушение в виде перерезывания или среза, в дереве — явление скалывания.

Примеры на сдвиг: болты и заклепки, соединяющие отдельные металлические части, врубки в деревянных конструкциях и т. д.



Фиг. 148.

4. Изгиб. Если силы, действующие на стержень AB , направлены перпендикулярно к оси стержня, то стержень изогнется (фиг. 148).

Деформация стержня выразится в искривлении первоначально прямой оси, в удлинении одних и растяжении других волокон.

Примеры на изгиб: потолочные и другие балки.

5. Кручение. Пусть круглый стержень заделан одним концом (фиг. 149); тогда если к другому концу в плоскости, перпендикулярной к оси стержня, приложить пару сил, то согласно условиям равновесия в заделанном конце (A) появится реактивная пара, равная по величине приложенной на конце B , но противоположного ей направления. Указанные пары, имеющие одинаковые моменты, будут закручивать стержень AB ,

Деформация кручения состоит в повороте поперечных сечений (относительно друг друга вокруг оси стержня).

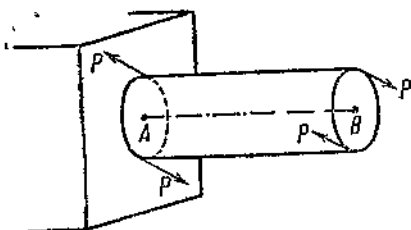
Примеры на кручение: валы машин*

Ознакомившись бегло со всеми основными видами деформаций, перейдем к более подробному рассмотрению каждой из перечисленных деформаций, необходимому для возможности решения практических задач.

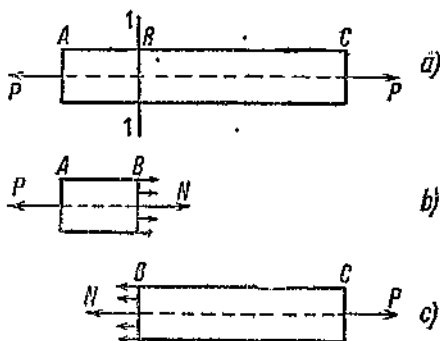
ГЛАВА 17,

РАСТЯЖЕНИЕ.

§ 77. Основные понятия. Рассмотрим сущность явления растяжения на простом примере. Стержень AC растягивается силами P , приложенными по концам (фиг. 150). В действительности сила, конечно, не может быть приложена к телу в одной точке; поэтому силы P можно рассматривать



Фиг. 149.



Фиг. 150.

как равнодействующую сил, как-то распределенных по концевым сечениям стержня. Предположим, что величина сил P нам известна. Тогда, следуя схеме, намеченной во введении, мы должны узнать, какие внутренние силы возникнут в данном стержне. Для этого мысленно разрежем стержень сечением $I—I$, перпендикулярным к его оси (фиг. 150, а), отбросим одну из частей, хотя бы BC , заменим действие отброшенной части BC силами (фиг. 150, б) и рассмотрим равновесие оставшейся части AB . (Этот прием мы уже употребляли в главе 7 для отыскания внутренних сил при любом действии внешних сил на тело.) Если бы в сечении $I—I$ не действовало никаких внутренних сил, то часть BC свободно отделилась бы от части AC . Но в действительности этого не происходит, следовательно, эти части держатся вместе внутренними силами, оказывающими противодействие внешним силам P . Выяснив, что по всему сечению $I—I$ действуют внутренние силы, определим сначала их направление, а потом величину. Так как эти силы заменяют действие отброшенной части BC , то их направление должно совпадать с направлением силы P , приложенной к части BC . Можно считать, что при растяжении стержня внутренние силы во всех сечениях, кроме прилежащих к месту приложения внешних сил, распределяются по площади сечения равномерно. Тогда все внутренние силы, приложенные к сечению $I—I$, могут быть заменены одной равнодействующей силой N , приложенной к оси стержня. Вели-

чина силы N найдется из того условия, что если весь стержень находится в равновесии под действием заданных сил P , то и любая часть стержня (в нашем случае AB) тоже должна находиться в равновесии. Отсюда получаем

$$N = P.$$

Если площадь поперечного сечения стержня равна F см², то величина внутреннего усилия, приходящегося на каждый квадратный сантиметр, будет

$$\frac{N}{F} = \frac{P}{F} \text{ кг/см}^2;$$

эта величина характеризует интенсивность распределения внутренних (упругих) сил по площади сечения $I—I$, обозначается греческой буквой σ („сигма“) и называется нормальным напряжением в сечении $I—I$ (такое же напряжение мы получим для любой другой площади сечения, перпендикулярной к оси стержня. Нормальным оно называется потому, что внутренние силы, составляющие N , направлены перпендикулярно или, как принято говорить в математике, нормально к площади сечения). Итак,

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ кг/см}^2. \quad (37)$$

Фиг. 151.

Как увидим дальше, эта простая формула является основным расчетным

уравнением для нахождения прочных размеров стержней, работающих на растяжение.

Во введении уже было сказано, что при исследовании условий прочности необходимо, кроме напряжений, знать также и деформации. Если первоначальная длина стержня AC была равна l , а после загрузки силами P стала равной l_1 , то разность

$$l_1 - l = \Delta l$$

носит название абсолютного удлинения и обозначается двумя буквами Δl ¹⁾. Так как одна и та же сила в стержнях различной длины вызывает различные удлинения, то мерой деформации при удлинении принимают не абсолютное удлинение Δl , а отношение этого удлинения ко всей длине l , т. е.

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon. \quad (38)$$

Это отношение носит название относительного удлинения и обозначается греческой буквой ε („эпсилон“). Следует иметь в виду, что ε есть число отвлеченное.

Если отношение $\frac{\Delta l}{l}$ характеризует деформацию при растяжении, а σ — интенсивность внутренних сил, то естественно предположить, что между

¹⁾ Греческая буква Δ в математике обычно применяется для обозначения разности или приращения.

деформациями и внутренними силами должна существовать какая-то связь. Эта зависимость впервые была сформулирована английским учёным Гуком в 1676 г. в законе, который называется теперь законом Гука и является основой всей науки сопротивления материалов. Именно Гук установил, что

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (39)$$

где число E для каждого материала имеет постоянное значение. Этот закон надо понимать так: при растяжении нормальное напряжение и деформация прямо пропорциональны друг другу¹⁾. Если напряжение возрастет в два раза, то и относительные удлинения увеличатся в два раза. Число E характеризует упругие свойства материала и определяется опытным путем. Его называют модулем Юнга или модулем упругости при растяжении. Так как ε есть число отвлеченное, то из формулы (39) видно, что размерность E та же, что и у напряжения σ , т. е. E выражается в кг/см².

Подставляя в формулу (39) вместо σ и ε их значения, определяемые формулами (37) и (38), можем написать

$$\frac{P}{F} = E \frac{\Delta l}{l},$$

отсюда

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF}, \quad (40)$$

т. е. полное удлинение прямо пропорционально силе P и длине l и обратно пропорционально модулю упругости E и площади сечения F . Выражение в знаменателе EF носит название „жесткости при растяжении“; так как чем больше эта величина, зависящая, с одной стороны, от физических свойств материала E и, с другой, — от его геометрических размеров F , тем меньше удлинение.

Значения модуля упругости E для разных материалов приводятся в таблице 3 на стр. 172.

Как видим из таблицы, наименьшее значение модуль упругости E имеет для резины, которая, следовательно, обладает наименьшей жесткостью и очень легко поддается деформации. Наибольший модуль упругости имеет сталь.

Так как сопротивление материалов имеет дело с телами упругими, то прежде чем применять выведенные формулы к решению задач, необходимо выяснить: 1) до какого предела загрузки тела являются упругими, 2) какие напряжения соответствуют этому пределу, 3) что происходит с материалом при дальнейшем нагружении и 4) при каком напряжении материал разрушается. Зная это, а также те требования, которые предъявляются условиями прочности, можно будет установить величину допускаемого напряжения при растяжении и приступить к решению задач.

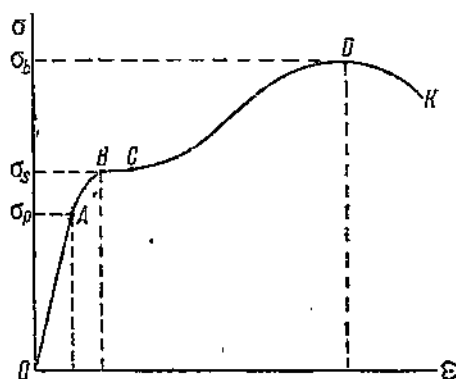
¹⁾ Правильность закона Гука подтверждается многочисленными опытами, но как мы увидим ниже пропорциональность между нормальным напряжением и деформацией соблюдается только до известного предела, так называемого предела пропорциональности. При дальнейшем увеличении напряжения величина удлинения уже не будет следовать формуле (39).

Таблица 3.
Модуль упругости E .

Материал	E в кг/см ²	
Сварочное железо	от 2 100 000	до 2 000 000
Литое железо	2 000 000	2 170 000
Сталь разных марок	2 000 000	2 200 000 (литая рессор- ная сталь)
Чугун	750 000	1 050 000
Дюралюминий	800 000	700 000
Медь	800 000	1 050 000
Стекло	90 000	700 000
Сосна, ель, пихта (вдоль волокон)	100 000	110 000
Дуб	130 000	110 000
Бук		180 000
Цинковая проволока		150 000
Свинцовая проволока		70 000
Кожаные ремни новые	около	1 250
Кожаные ремни бывшие в работе		2 250
Пеньковые канаты	6 000	15 000
Резина		10

§ 78. Диаграмма растяжения. Наглядное представление закона изменения удлинений в зависимости от величины нагрузки дают диаграммы растяжения, которые на многих машинах вычерчиваются при испытании образца автоматически. На этой диаграмме по вертикальной оси отклады-

вается величина нагрузки, а по горизонтальной — соответствующее каждой нагрузке абсолютное удлинение. Так как нас больше интересует зависимость между деформациями и напряжениями и поскольку напряжения пропорциональны силе ($\sigma = \frac{P}{F}$), а относительные удлинения пропорциональны абсолютному ($\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$), то на окончательной диаграмме вместо величин нагрузок откладывают по вертикали напряжения σ , а по горизонтали — относительные удлинения ϵ . Для железа и многих



Фиг. 152.

других материалов эта диаграмма имеет вид, изображенный на фиг. 152. Ненагруженному состоянию образца соответствует на диаграмме точка O . По мере загрузки начинают появляться удлинения ϵ , причем до точки A эти удлинения пропорциональны напряжениям σ , т. е. до этого предела действителен закон Гука $\sigma = E\epsilon$, и диаграмма идет по наклонной прямой. Напряжение, соответствующее положению точки A на диаграмме, носит

название предела пропорциональности и обозначается σ_p . После перехода через предел пропорциональности прямая на диаграмме переходит в кривую до точки B . На этом участке удлинения возрастают быстрее, чем нагрузка (закон Гука перестает действовать). На участке BC диаграмма идет по прямой, почти параллельной горизонтальной оси. В это время образец удлиняется без увеличения нагрузки: материал начинает как бы течь. Напряжение, соответствующее этому участку, называется пределом текучести и обозначается σ_s . Точка B носит название критической точки. Участок BC имеет заметную длину у мягких металлов (сварочное железо, мягкая литая сталь) и делается мало заметным у твердых материалов, например у твердых сортов стали (с малым удлинением в момент разрыва). Явление текучести сменяется новым состоянием материала, при котором он восстанавливает свою способность сопротивляться растяжению, и дальнейшее удлинение требует снова увеличения нагрузки.

В точке D нагрузка достигает наибольшего значения. В этот момент поведение материала еще раз резко меняется. До этого момента на каждую единицу длины испытываемого образца приходилось примерно равное удлинение и по всему стержню было одинаковое уменьшение поперечных размеров. С момента, когда диаграмма пришла в точку D , деформация сосредоточивается в одном месте. В слабом месте образца появляется заметное сужение, так называемая „шейка“ (фиг. 153).

В этот момент напряжение σ становится наибольшим, и разрушение материала хотя и не происходит в точке D , но является неизбежным.



Фиг. 153.

Наибольшее напряжение, соответствующее максимальной силе, которая должна быть приложена, чтобы довести брусок до разрушения, носит название временного сопротивления или разрушающего напряжения и обозначается через σ_b . Так как поперечные размеры стержня в месте образования шейки сильно уменьшаются, то для разрыва образца нужна меньшая сила, чем соответствующая точке D . Это сказывается в диаграмме на понижении кривой. Разрыв бруска происходит в точке K .

Весьма близко к пределу пропорциональности лежит точка, соответствующая пределу упругости σ_e . Если мы, не доведя нагрузку до предела упругости, начнем затем разгружать образец, то диаграмма пойдет по прямой AO и вернется в начальное положение O , т. е. стержень после устранения нагрузки примет начальную длину. (На практике расчетов часто принимают, что предел упругости и предел пропорциональности совпадают.)

Если же довести нагрузку образца дальше предела упругости, то кроме упругих деформаций появятся и остаточные деформации, т. е. такие, которые после удаления нагрузки не исчезнут. Остаточные деформации будут тем больше, чем ближе мы будем подходить к точке D , соответствующей временному сопротивлению.

Отмеченные выше четыре точки — предел упругости, предел пропорциональности, предел текучести и временное сопротивление — характеризуют способность материала сопротивляться растяжению.

Таблица 4.

Бременное сопротивление для некоторых металлов.

Материал	Временное сопротивление σ_b в кг/см ²	Удлинение в % (δ)
Сварочное железо (болты, заклепки).	3 500 — 4 000	12 — 20
Сварочное железо (листовое вдоль прокатки).	3 300 — 4 000	8 — 20
Литое железо	3 300 — 4 500	25 — 28
Литая сталь	4 400 — 6 500	23 — 27
Тигельная сталь	5 000 — 5 500	20 — 25
Никелевая	5 500 — 6 500	22 — 27
Чугун	11 000 — 11 500	8
Чугун	1 200 — 1 800	—
Красная медь листовая	2 000 — 2 300	38
Бронза	2 000	6 — 20
Алюминий литой	1 000 — 1 200	3

Диаграммы растяжения других материалов (чугуна, дерева, естественных камней) отличаются от диаграммы растяжения железа. Так, для только что указанных материалов она не будет иметь ни предела пропорциональности, ни предела текучести.

Таблица 5.

Средние значения временного сопротивления в кг/см² доброкачественного, несучковатого, высушенного на воздухе леса.

Бук	700 — 1 000
Дуб	700 — 1 000
Ель	600 — 750
Лиственница	710 — 960
Пихта	550 — 800
Сосна	720 — 790

Если обе половины бруска после разрыва сложить и измерить длину бруска, то относительное удлинение, получившееся после разрыва и выраженное в процентах, называется удлинением при разрыве. Его принято обозначать греческой буквой δ . Следовательно,

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \cdot 100,$$

где l_1 есть длина бруска после разрыва, а l — первоначальная длина бруска (до испытания).

У материалов мягких δ довольно значительно — от 20 до 30%, у твердых, наоборот, мало — от 5 до 10% (см. таблицу 4 графу удлинения в %).

Величина

$$\psi = \frac{F - F_1}{F} \cdot 100,$$

где F_1 есть площадь поперечного сечения в месте разрыва, F — первоначальная площадь поперечного сечения, называется поперечным сжатием при разрыве и обозначается греческой буквой ψ . Поперечное сжатие служит для оценки тягучести материала: чем больше ψ , тем тягучее материал. Мягкие материалы более тягучи, чем жесткие. Оба количества δ и ψ служат для характеристики материалов и указываются в каталогах изготовляющих заводов.

§ 79. Удлинение при нагрузке, приложенной мгновенно. При испытании брусков на растяжение нагрузка до желаемого предела доводится обыкновенно постепенно: сначала прикладывают маленький груз, затем дают бруску успокоиться (так как всякий прикладываемый груз вызывает в бруске колебания), после чего снова прикладывают незначительный груз и т. д.

Возникает интересный вопрос: что случится, если желаемый груз приложить сразу, мгновенно; какое тогда получится удлинение по сравнению с наблюдаемым при постепенном увеличении нагрузки до того же предела?

Оказывается, если груз прикладывается к бруску мгновенно, то непосредственно после его приложения удлинение, а следовательно, и напряжение материала получаются вдвое больше тех, которые устанавливаются по окончании колебаний, когда груз придет в равновесие. Эти последние отвечают той же нагрузке, но приложенной спокойно и постепенно возрастающей от нуля.



Фиг. 154.

§ 80. Изменение структуры материала при приближении к критической точке. Как было сказано, по достижении критической точки удлинения в бруске начинают сильно возрастать при самом ничтожном увеличении нагрузки. Причина этого заключается в том, что при приближении к критической точке материал претерпевает значительные изменения в своей структуре. Это особенно удобно наблюдать на железных и стальных брусках. Если поверхность железного бруска отполировать, то вскоре же после перехода через предел пропорциональности на ней начинают появляться черточки, наклонные к оси бруска, число которых по мере приближения к критической точке делается все больше и больше. Эти черточки называются линиями Людерса по имени ученого, их открывшего. Линии эти заметны даже невооруженному глазу. При дальнейшем увеличении нагрузки появляются уже две системы пересекающихся черточек или полосок, составляющих один и тот же угол с осью бруска, характерный для каждого материала.

Исследование под микроскопом показывает, что металлы, например железо, состоят из отдельных кристаллических зерен, разделенных друг от друга промежутками. Линии Людерса представляют группы кристаллов, в которых произошел сдвиг по плоскостям слайности. Таким обра-

зом по мере приближения к критической точке материал изменяет свою структуру, причем явление сдвига кристаллов сопровождается резким повышением температуры.

§ 81. Допускаемое напряжение. Расчетное уравнение на растяжение. Условия прочности требуют от нас, чтобы рассчитанные части машин или сооружения не могли ни разрушиться, ни получить остаточных деформаций. Следовательно, мы не только не можем допустить, чтобы напряжения были близки к пределу упругости, не говоря уже о временном сопротивлении (разрушающем напряжении), но должны обеспечить некоторый запас против возможности подобного рода явлений. Напряжение, которое может быть допущено в материале без риска разрушения тела или получения в нем остаточных деформаций, называется допускаемым. Поскольку временное сопротивление является мерой прочности материала и легко определяется опытным путем, допускаемое напряжение берут как часть от временного сопротивления. Обозначая его буквой R , будем иметь:

$$R = \frac{\sigma_b}{n},$$

где σ_b есть временное сопротивление, а n — так называемый коэффициент безопасности, показывающий, во сколько раз допускаемое напряжение должно быть меньше разрушающего. Если временное сопротивление $\sigma_b = 4000 \text{ кг/см}^2$, а коэффициент безопасности $n = 4$, то допускаемое напряжение будет

$$R = \frac{\sigma_b}{n} = \frac{4000}{4} = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Чем меньше n , тем больше степень риска, и наоборот. Наименьшее значение коэффициента безопасности ($n = 2$) берут для моторов и частей аэропланов. Для стали n берут в среднем от $2\frac{1}{2}$ до 4, для железа — от 4 до 5, для чугуна — от 6 до 8, для дерева — от 8 до 10. Часто коэффициент безопасности называют коэффициентом прочности.

Введя понятие допускаемого напряжения, мы приходим к следующему расчетному уравнению прочности:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq R, \text{ кг/см}^2, \quad (41)$$

т. е. напряжение σ , возникающее в теле под действием заданной нагрузки P , должно быть меньше или равно допускаемому напряжению при растяжении R . В этой формуле F есть площадь поперечного сечения (при наличии заклепочных соединений из общей площади поперечного сечения вычитаются площади ослабления заклепками, в деревянных соединениях вычитаются площади ослабления врубками и т. п.).

Из формулы (41) получим:

$$F \geq \frac{P}{R} \text{ см}^2,$$

т. е. площадь рассчитываемой детали должна быть

больше или равна нагрузке P , деленной на допускаемое напряжение R_z .

Таблица 6.

Значения допускаемого напряжения R_z для некоторых материалов.

А. Прокатный металл.

Сталь 3	1 400 кг/см ²	} на растяжение и сжатие
Сталь 5 (повыш.)	1 750 "	
Сталь спец	2 100 "	

В. Литой металл.

Сталь Л1	1 200 кг/см ²	} на растяжение и сжатие
Сталь Л2 (пол.)	1 500 "	
Сталь Л2	1 800 "	
Сталь Л5	2 000 "	} на сжатие на растяжение
Чугун Ч1	1 000 "	
	250 "	

С. Дерево.

Сосна (вдоль волокон)	100 кг/см ²	на сжатие
Дуб	110 "	на растяжение
"	120 "	на сжатие
"	130 "	на растяжение

Если при расчете бруска нужно учесть влияние его веса, то к силе P надо добавить вес G_1 части бруска, лежащей ниже того сечения, для которого мы ищем напряжения. Тогда напряжение в сечении 1—1 (фиг. 155) будет равно

$$\sigma = \frac{P + G_1}{F},$$

Наибольшее напряжение будет в том сечении, на которое передается весь вес стержня, т. е. в верхнем сечении a — b . Там мы будем иметь:

$$\sigma = \frac{P + G}{F},$$

где G есть вес всего стержня. Если сечение стержня по всей длине одинаково, то

$$G = Fl\gamma,$$

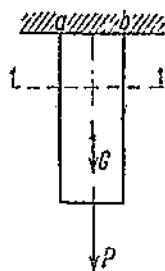
где F есть площадь поперечного сечения, l —длина всего стержня, а γ —удельный вес.

Уравнение прочности примет вид:

$$\frac{P + F \cdot l \cdot \gamma}{F} \leq R_z$$

или

$$F \geq \frac{P + F \cdot l \cdot \gamma}{R_z}.$$



Фиг. 155.

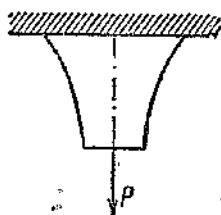
Следовательно, с увеличением нагрузки увеличиваются необходимые размеры поперечного сечения.

На фиг. 156 изображен брусок, имеющий форму тела равного сопротивления растяжению, т. е. такую форму, при которой во всех поперечных сечениях бруска напряжения, возникающие под влиянием веса и внешней растягивающей силы, имеют одно и то же значение.

§ 82. Изменение объема бруска при растяжении. Длина бруска при растяжении увеличивается и поперечное сечение при этом уменьшается; следовательно, происходит поперечное сжатие, за меру которого можно принять относительное поперечное сжатие, т. е. величину, на которую будет уменьшаться каждая единица длины какого-либо из размеров поперечного сечения бруска. Как показывают опыты, относительное поперечное сжатие ϵ_1 составляет для разных материалов от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{3}$ относительного удлинения ϵ .

Отношение относительного поперечного сжатия ϵ_1 к относительному удлинению ϵ называется коэффициентом Пуассона и обозначается греческой

буквой μ . Следовательно, $\mu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}$. Приводим некоторые числовые значения μ :



Фиг. 156.

Материал	μ
Пробка	0, 0
Железо	0,28
Медь	0,34
Каучук	0,47
Парафин	0,50

Итак, при растяжении продольные размеры бруска увеличиваются, поперечные уменьшаются. Что же делается с объемом бруска? И опытным путем и вычислениями можно убедиться, что при растяжении объем бруска несколько увеличивается.

§ 83. Примеры. Пример 50. Определить диаметр и относительное удлинение круглой железной затяжки стропильной фермы, если растягивающая сила равна 10 тоннам, а допускаемое напряжение $R_z = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Мы определим искомый диаметр затяжки, если предварительно найдем площадь поперечного сечения F . Применим формулу (41), в которой заданные величины P и R_z связываются с площадью сечения F , т. е. напомним

$$\frac{P}{F} \leq R_z$$

Отсюда получаем

$$F \geq \frac{P}{R_z} = \frac{10 \cdot 1000}{1000} = 10 \text{ см}^2.$$

(Так как сила дана в тоннах, а допускаемое напряжение — в кг/см^2 , то необходимо силу сначала перевести в килограммы, для чего 10 умножаем на 1000.) Итак необходимая площадь F должна быть равна 10 см^2 , т. е.

$$\frac{\pi d^2}{4} = 10.$$

Отсюда определим искомый диаметр:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 4}{3,14}} = 3,58 \text{ см.}$$

Примем $d = 3,6 \text{ см}$, тогда наибольшее напряжение в затяжке будет равно

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{10\,000}{10,18} \approx 980 \text{ кг/см}^2 < 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, напряжение, соответствующее выбранному сечению $d = 3,6 \text{ см}$, меньше допускаемого, что вполне понятно, так как мы увеличили диаметр, взяв $3,6 \text{ см}$ вместо $3,58 \text{ см}$.

Относительное удлинение легко определить, пользуясь законом Гука. Из таблицы 3, помещенной выше (стр. 172), находим модуль упругости E . Для литого железа

$$E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2.$$

По закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, откуда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{980}{2\,100\,000} = 0,00049.$$

Если затяжка имеет длину $l = 5 \text{ м}$, то ее абсолютное удлинение Δl найдется из формулы $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$. Вычисляя, получаем

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon = 0,00049 \cdot 5 = 0,0024 \text{ м} = 2,4 \text{ мм.}$$

Пример 51. Рассчитать винт и обойму крюка 4-тонного Фиг. 157. подъемного крана (фиг. 157).

Прежде чем приступить к расчету винта, заметим, что нарезки винтов делаются не произвольно, а лишь строго определенных размеров. Наиболее распространенной является система нарезки Витворта (см. в конце книги таблицу ОСТ 1260).

При расчете винта достаточно найти лишь внутренний диаметр нарезки d_1 , остальные размеры берутся из таблицы ОСТ 1260. Заметим еще, что для винтов из обыкновенного литого железа, заворачиваемых без нагрузки, допускаемое напряжение следует брать равным

$$R_z = 4,8 \text{ кг/мм}^2 = 480 \text{ кг/см}^2.$$

При особо тщательном изготовлении нарезки (в данном примере это и надо предполагать) можно взять

$$R_z = 6 \text{ кг/мм}^2 = 600 \text{ кг/см}^2.$$

Для винтов из лучшего литого железа указанные значения можно увеличивать на $\frac{1}{8}$, для винтов же из литой стали, в зависимости от ее качества, можно увеличивать на 30—60%. Для тонких винтов (с наружным диаметром резьбы до $\frac{5}{8}$ дюйма = 15,88 мм) берут R_z на 10—20% меньше. При совершенно спокойной нагрузке следует брать R_z в 1,5 раза больше. Для винтов, заворачиваемых с нагрузкой (винты домкратов,



прессов), надо брать для R_z только $\frac{3}{4}$ указанных значений. Этими данными мы и будем руководствоваться при наших расчетах.

Для рассматриваемого случая можем взять

$$R_z = 600 \text{ кг/см}^2.$$

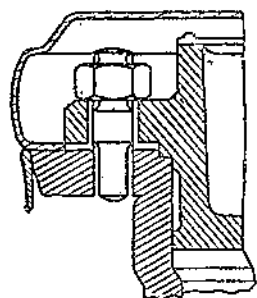
Из условия

$$F \geq \frac{P}{R_z}$$

находим

$$F = \frac{4000}{600} \approx 6,67 \text{ см}^2.$$

Это — площадь поперечного сечения винта, отвечающая внутреннему диаметру нарезки. В таблице ОСТ 1260 винта с такой площадью поперечного сечения не имеется. Поэтому берем ближайший больший винт с $F = 6,837 \text{ см}^2$, для которого диаметр d_1 по таблице равен 29,5 мм. Далее, по таблице же находим наружный диаметр нарезки $d_0 = 34,56 \text{ мм} = 1 \frac{3}{8}$ дюйма. Число нарезок на 1 дюйм равно шести. Итак, винт рассчитан.



Фиг. 158.

Найдем теперь размеры обоймы. На каждую из половин обоймы действует сила $\frac{4000}{2} = 2000 \text{ кг}$. Обойма имеет прямоугольное сечение. Площадь его найдется из условия

$$F \geq \frac{P}{R_z}.$$

Для R_z при расчете обоймы мы могли бы взять тоже 600 кг/см². Но при таком R_z мы получили бы слишком незначительные размеры для обоймы. Поэтому умышленно примем для R_z преуменьшенное значение: $R_z = 300 \text{ кг/см}^2$; тогда получим

$$F = \frac{2000}{300} \approx 6,67 \text{ см}^2 = 667 \text{ мм}^2.$$

Принимая меньший размер прямоугольного сечения равным 15 мм, для другого размера получим

$$\frac{667}{15} \approx 45 \text{ мм}.$$

Таким образом каждая из половинок обоймы будет иметь сечение $15 \times 45 \text{ мм}^2$, что вполне согласуется с практикой.

Пример 52. Рассчитать болты для прикрепления крышки парового цилиндра с диаметром в 400 мм, если известно, что наибольшее давление пара (по манометру) равно 10 атмосферам или 10 кг/см²; диаметр крышки равен 410 мм, диаметр окружности, на которой расположены центры болтов, 512 мм (фиг. 158).

Площадь, на которую давит пар, равна

$$\frac{\pi \cdot (41,0)^2}{4} \approx 1320 \text{ см}^2.$$

Следовательно, давление пара на крышку равно

$$10 \cdot 1320 = 13\,200 \text{ кг.}$$

Число болтов, прикрепляющих крышку, найдем из условия, что расстояние между центрами болтов не должно превышать 150 мм (так обычно принимается). Следовательно, мы должны разделить длину окружности, на которой расположены центры болтов, на 150. Получим

$$\frac{\pi \cdot 512}{150} = \frac{1609}{150} = 10,7.$$

Понятно, что дробного числа болтов взять нельзя. Ближайшее целое число 11 — нечетное не особенно удобное для разметки центров. Поэтому берем число болтов равным 12 — ближайшему четному числу. Давление, приходящееся на 1 болт, получается равным

$$P = \frac{13\,200}{12} = 1100 \text{ кг.}$$

Допускаемое напряжение согласно сказанному в примере 51 примем $R_z = 480 \text{ кг/см}^2$. Находим площадь поперечного сечения болта (соответствующую внутреннему диаметру нарезки) из условия $F \geq \frac{P}{R_z}$. Получаем

$$F = \frac{1100}{480} = 2,29 \text{ см}^2.$$

Болта с такой площадью поперечного сечения в таблице ОСТ 1260 не имеется. Ближайший больший имеет площадь сечения:

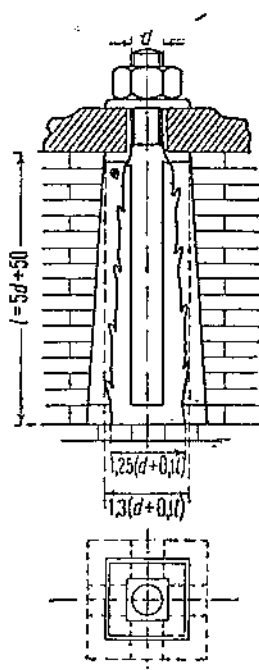
$$F = \frac{\pi d_1^2}{4} = 2,72 \text{ см}^2.$$

Этот болт имеет размеры: $d_1 = 18,61 \text{ мм}$; $d_0 = 21,96 \text{ мм} = 7/8 \text{ дюйма}$. Число нарезок на 1 дюйм равно 9. Расчет окончен.

Пример 53. Рассчитать фундаментный болт, служащий для прикрепления станины паровой машины, если действующая на него сила равна 2700 кг (фиг. 159).

Так как при работе машины возможны сотрясения и удары, то обыкновенно при расчете фундаментных болтов действующую силу увеличивают на $1/3$. Следовательно, в данном случае

$$P = 2700 + \frac{2700}{3} = 3600 \text{ кг.}$$



Фиг. 159.

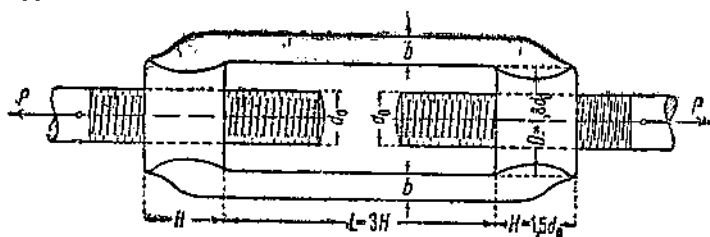
Так как материал для таких болтов берется лучшего качества, то допускаемое напряжение материала можно принять равным $R_z = 600 \text{ кг/см}^2$. Площадь поперечного сечения болта определяем из условия

$$F \geq \frac{P}{R_z},$$

откуда

$$F = \frac{3600}{600} = 6,00 \text{ см}^2.$$

По таблице ОСТ 1260 ближайший к рассчитываемому болт имеет площадь поперечного сечения $F = 6,84 \text{ см}^2$; соответствующий внутренний диаметр равен $d_1 = 29,5 \text{ мм}$, наружный $d_0 = 34,56 \text{ мм} = 1\frac{3}{8}$ дюйма. Число нарезов на 1 дюйме равно 6. Остальные размеры фундаментного болта берутся по формулам, написанным на чертеже.



Фиг. 160

Пример 54. Рассчитать стяжку, изображенную на фиг. 160, если силы, стремящиеся ее разорвать, равны каждая 4000 кг. (Такие стяжки применяются весьма часто в стропильных фермах.)

Определим сначала внутренний диаметр нарезанной части тяг, для чего воспользуемся формулой (41). Принимая во внимание, что силы действующие на стяжку, можно считать постоянными согласно сказанному в примере 51 допускаемое напряжение для данного случая можно принять равным

$$R_z = 480 \cdot 1,5 = 720 \text{ кг/см}^2.$$

В таком случае из формулы (41) найдем

$$F \geq \frac{P}{R_z},$$

откуда

$$F = \frac{4000}{720} = 5,56 \text{ см}^2.$$

Ближайшая подходящая нарезка по таблице ОСТ 1260 имеет площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi d_1^2}{4} = 5,77 \text{ см}^2$$

и диаметры $d_1 = 27,1 \text{ мм}$; $d_0 = 31,42 \text{ мм} = 1\frac{1}{4}$ дюйма. Число нарезов на 1 дюйме равно 7,

Для определения размеров боковых частей хомута стяжки заметим, что расчет их на растяжение силой, равной $\frac{4000}{2} = 2000$ кг, при том же допускаемом напряжении $R_z = 720$ кг/см² дал бы слишком малые размеры поперечного сечения. Поэтому, подобно тому, как это было сделано в примере 51, мы рассчитаем их, принимая для R_z заведомо преуменьшенное значение. Примем $R_z = 300$ кг/см². Тогда из формулы (41) будем иметь

$$F_1 \geq \frac{P}{R_z},$$

следовательно,

$$F_1 = \frac{2000}{300} \approx 6,67 \text{ см}^2.$$

Так как поперечное сечение каждой из половин хомута представляет прямоугольник со сторонами b и h , то

$$F_1 = b \cdot h = 6,67 \text{ см}^2.$$

Обычно принимают $h = 3b$. Поэтому

$$b \cdot 3b = 6,67 \text{ см}^2, \quad b^2 \approx 2,22 = 222 \text{ мм}^2.$$

Следовательно,

$$b = \sqrt{222} = 14,8 \approx 15 \text{ мм}$$

и

$$h = 3b = 45 \text{ мм}.$$

Размеры получились вполне согласные с практикой. Остальные размеры стяжки берутся по формулам, написанным на чертеже.

Пример 55. Проволочный канат состоит из 42 стальных проволок, каждая диаметром 1,2 мм. Вес погонного метра каната равен 0,46 кг. При помощи каната поднимается из шахты некоторый груз на высоту 100 м. Определить, какой наибольший груз может быть поднят, учитывая собственный вес каната, если временное сопротивление проволоки равно 12 000 кг/см² и требуемый запас прочности равен 10.

Собственный вес каната равен

$$G = 0,46 \cdot 100 = 46 \text{ кг}.$$

Допускаемое напряжение согласно условиям задачи равно

$$R_z = \frac{12000}{10} = 1200 \text{ кг/см}^2.$$

Площадь поперечного сечения каната равна

$$F = \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} \cdot 42 = 1,13 \cdot 42 = 47,46 \approx 48 \text{ мм}^2,$$

Наибольший поднимаемый груз P определим из формулы $R_z \leq \frac{P+G}{F}$; отсюда

$$P + G = R_z \cdot F = 1200 \cdot 0,48 = 576 \text{ кг}.$$

Следовательно,

$$P = 576 - G = 576 - 46 = 530 \text{ кг.}$$

Пример 56. С аэроплана спущена антенна из медной проволоки. При какой длине антенна выдержит безопасно собственный вес, если для медной проволоки $R_z = 300 \text{ кг/см}^2$ и удельный вес меди равен 8,8.

Искомую длину антенны в сантиметрах обозначим через l , а поперечное сечение ее (в см^2) — через F . Тогда объем антенны будет $F \cdot l \text{ см}^3$. Следовательно, вес антенны равен $8,8 \cdot F \cdot l$ или $0,0088 Fl \text{ кг}$. Эта сила и будет растягивать антенну. Применяя формулу $R_z \geq \frac{P}{F}$, получаем

$$P = R_z \cdot F.$$

Но P это есть вес антенны, поэтому

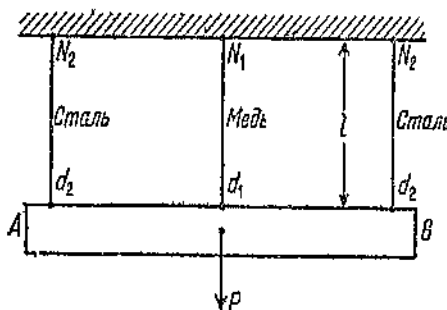
$$0,0088 Fl = R_z \cdot F.$$

Отсюда после сокращения обеих частей равенства на F найдем

$$l = \frac{300}{0,0088} \approx 34\,090 \text{ см} \approx 341 \text{ м.}$$

Так как обыкновенно антенна на конце несет еще некоторый груз, то практически длина ее значительно меньше.

Пример 57. Груз P подвешен на трех проволоках, равностоящих друг от друга, из коих средняя — медная, две крайние — стальные, причем все три проволоки одинакового диаметра ($d_1 = d_2$) и одинаковой длины (фиг. 161).



фиг. 161.

Найти натяжения проволок, если известно, что модуль упругости стали E_2 вдвое больше модуля упругости меди E_1 .

Очевидно, натяжения крайних проволок между собой равны. Пусть натяжения их будут N_2 , а натяжение средней проволоки N_1 . В случае равновесия груза должно быть

$$N_1 + 2N_2 = P.$$

Это уравнение дает статика. Но неизвестных два N_1 и N_2 , а уравнение имеется только одно. Следовательно, если пользоваться уравнениями только статики, то найти N_1 и N_2 невозможно. Однако, применяя рассмотренную теорию растяжения, мы найдем N_1 и N_2 . Такие задачи, для решения которых уравнений статики недостаточно, называются статически неопределенными.

Для решения задачи заметим, что после приложения груза P все три проволоки удлиняются одинаково. Если абсолютное удлинение средней проволоки обозначим через Δl_1 , а абсолютное удлинение крайних проволок — через Δl_2 , то

$$\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Но

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 F}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 F},$$

где через F обозначена площадь поперечного сечения каждой из проволок. Так как $\Delta l_1 = \Delta l_2$, то, приравнявая правые части обоих равенств, будем иметь

$$\frac{N_1 l}{E_1 F} = \frac{N_2 l}{E_2 F}$$

или после сокращения

$$\frac{N_1}{E_1} = \frac{N_2}{E_2}.$$

Переставляя в полученной пропорции средние члены и припоминая, что $E_2 = 2E_1$, найдем

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{E_1}{E_2}, \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2};$$

следовательно,

$$N_2 = 2N_1.$$

Таким образом теперь мы имеем, $N_1 + 2N_2 = P$ и $N_2 = 2N_1$, т. е. два уравнения с двумя неизвестными. Эти уравнения дают возможность найти N_1 и N_2 . Подставляя в первое уравнение вместо N_2 его значение из второго уравнения, получим:

$$N_1 + 4N_1 = P \text{ или } 5N_1 = P,$$

откуда

$$N_1 = \frac{P}{5}.$$

Следовательно,

$$N_2 = 2N_1 = \frac{2}{5} P.$$

Итак, натяжения проволок N_1 и N_2 найдены, что и требовалось.

Задачи.

49. Круглая железная затяжка длиной 3 м получила от растягивающей силы $P = 11,25$ т удлинение в 0,75 мм. Найти диаметр затяжки, если $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

Отв. $d = 5,4$ см.

50. Определить силу P , растягивающую железную штангу и доводящую напряжение до 1800 кг/см², если площадь сечения штанги $F = 8$ см².

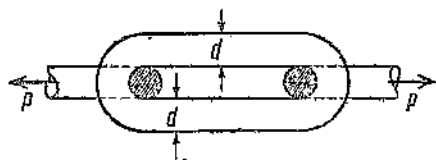
Отв. $P = 14,4$ т.

51. При какой длине l железная проволока получит от собственного веса напряжение $\sigma = 390$ кг/см², если удельный вес железа $\gamma = 7,8$.

Отв. $l = 500$ м.

52. Цепь, служащая для подъема грузов до $P = 4$ т, сделана из круглого железа с временным сопротивлением $\sigma_b = 3700$ кг/см². Коэффициент безопасности $n = 6$. Найти необходимый диаметр звена цепи d . (На фиг. 162 изображено одно звено цепи с частями прилежащих).

Отв. $d = 21$ мм.



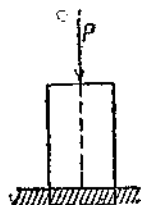
Фиг. 162.

Глава 18.

СЖАТИЕ.

§ 84. Аналогия с растяжением. Если на короткий брусок действует осевая сила, направленная, как указано на фиг. 163, то происходит явление, называемое сжатием. Оно во многих отношениях аналогично растяжению. Формулы, выведенные для растяжения, являются расчетными и для сжатия.

При сжатии длина бруска уменьшается, отношение получившегося под влиянием сжимающей силы укорочения длины бруска к его первоначальной длине называется относительным укорочением. Внутренняя сила, отнесенная к единице площади, или напряжение материала при сжатии пропорционально, как и при растяжении, относительному укорочению. Таким образом напряжение материала при сжатии равно



Фиг. 163.

$$\sigma = E_1 \epsilon, \quad (42)$$

где ϵ есть относительное сжатие, а E_1 — коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости при сжатии и выражаемый в кг/см². Для всех материалов, употребляемых в машиностроении, модуль упругости при сжатии равен модулю упругости при растяжении, т. е. $\epsilon = \epsilon_1$.

Закон, выражаемый формулой (42), называется, как и в случае растяжения, законом Гука. И здесь этот закон справедлив только до некоторого предела. То предельное значение напряжения, при котором закон Гука еще применим, называется пределом пропорциональности при сжатии.

Деформации, появляющиеся при сжатии тела, бывают, как и при растяжении, двух родов:

- 1) упругие, т. е. исчезающие после снятия нагрузки, и
- 2) неупругие, т. е. остающиеся после удаления нагрузки.

Диаграммы сжатия напоминают по своему виду диаграмму растяжения и имеют аналогичные характерные точки. При сжатии, как и при растяжении, имеется предел упругости, до которого в материале возникают только упругие (исчезающие) деформации. Предел упругости составляет 50—60% предела пропорциональности. Практически за предел упругости при сжатии принимают то предельное значение напряжения, при котором остающееся укорочение не превышает 0,001%, или 0,00001 первоначальной длины бруска.

За пределом пропорциональности остающиеся укорочения начинают расти быстрее, чем напряжения, и после достижения напряжением некоторого значения, называемого пределом текучести, остающиеся укорочения начинают расти чрезвычайно быстро. Вслед за тем начинается разрушение бруска (фиг. 164). При разрушении бруска из хрупкого

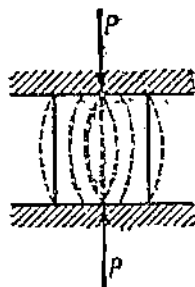
металла под влиянием силы сжатия на его поверхности появляются трещины, брусок выпучивается и, наконец, распадается на отдельные части. Объем бруска при сжатии уменьшается.

§ 85. Расчет на сжатие. Расчет бруска на сжатие ведется по формуле

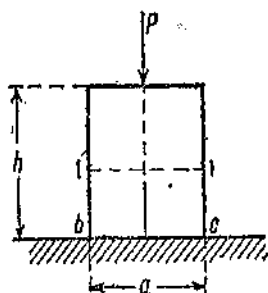
$$\sigma \leq \frac{P}{F} \leq R_d \text{ кг/см}^2, \quad (43)$$

где P есть сжимающая сила в килограммах, R_d — допускаемое напряжение материала на сжатие в кг/см^2 , F — площадь поперечного сечения в кв. сантиметрах.

Коэффициент безопасности для железа и стали тот же, что и при растяжении, т. е. допускаемое напряжение не должно превышать $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{6}$ части напряжения, вызывающего разрушение бруска. Для других материалов этот коэффициент имеет другие значения, чем при растяжении,



Фиг. 164.



Фиг. 165.

и допускаемые напряжения на сжатие отличаются от принятых на растяжение (см. таблицу 7 допускаемого напряжения R_d на стр. 188).

Если желательно учесть и собственный вес части бруска, расположенной над исследуемым сечением ($I—I$), то к силе P надо прибавить вес G , расположенной над сечением ($I—I$) части бруска; тогда получим (фиг. 165)

$$\frac{P+G}{F} \leq R_d.$$

Наибольшее напряжение от собственного веса будет в нижнем сечении $b—c$. Если вес всего бруска равен G , то расчетная формула для сечения $b—c$ примет вид:

$$\frac{P+G}{F} \leq R_d \text{ кг/см}^2.$$

Сечение $b—c$ называется опасным сечением. Форма тела равного сопротивления на сжатие изображена на фиг. 166. Во всех поперечных сечениях тела такой формы напряжения, вызываемые силой P и собственным весом бруска, одинаковы.

Нужно заметить, что указанной расчетной формулой можно пользоваться только при расчетах на сжатие коротких и толстых брусков,

Длинные бруски, находящиеся под влиянием сжимающих сил, рассчитываются на так называемый продольный изгиб.

Таблица 7.

Значения допускаемого напряжения R_d на сжатие для некоторых материалов.

А. Прокатный металл.

Сталь 3	1 400 кг/см ²
Сталь 5 (повыш.)	1 750 "
Сталь спец.	2 100 "

В. Литой металл.

Сталь Л1	1 200 "
Сталь Л2 (попик.).	1 500 "
Сталь Л2	1 800 "
Сталь Л5	2 000 "
Чугун Ч1	1 000 "

С. Дерево.

Сосна (вдоль волокон).	100 "
Дуб.	120 "

§ 86. Понятие о смятии. Смятие представляет собой деформацию, близкую к сжатию, но, в то время как сжатие происходит по всей длине тела, смятие является местной деформацией, происходящей на части тела, ближайшей к поверхности загрузки. Если явление смятия происходит в металлических деталях, то материал в местах смятия находится в лучших условиях сопротивления, так как трение между соприкасающимися частями (нажимающей и сминаемой), а также окружающий материал препятствуют развитию деформации. Характерным примером может служить работа заклепок, где трение между стягивающими листами и прилегающий материал листов ослабляют нагрузку на заклепки. Для заклепок допускаемое напряжение на смятие ($R_{см}$) берется в два раза больше допускаемого напряжения на сжатие (R_d).

Гораздо хуже сопротивляется смятию дерево, так как разрушение в нем происходит не от общего сжатия, а от смятия (разрыхления и разрушения волокон) в месте соприкосновения с нажимающей поверхностью. Для дерева $R_{см} = 0,7R_d$. Расчетное уравнение на смятие имеет такой же вид, как и расчетное уравнение на сжатие:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq R_{см} \text{ кг/см}^2,$$

только вместо R_d (или $R_{см}$) берется допускаемое напряжение на смятие $R_{см}$. В местах соединений расчет производится всегда на более слабый материал, т. е. в расчетное уравнение подставляются данные для более слабого материала.

§ 87. Примеры. Пример 58. Железная балка должна передать давление на стены в 8000 кг. Под концы балки подложены прямоугольные чугунные плиты (этим достигается, передача давления на кладку стен

по большей площади). Каким должен быть размер плиты, перпендикулярный к плоскости чертежа (фиг. 167), если ширина плиты равна 25 см, а давление на кладку может быть безопасно допущено до 7 кг/см^2 .

На каждый конец балки приходится давление $P = \frac{8000}{2} = 4000 \text{ кг}$. Если искомый размер чугунной плиты обозначим в сантиметрах через a , то площадь плиты будет $F = 25a \text{ см}^2$. Согласно формуле (43)

$$\frac{P}{F} \leq R_d$$

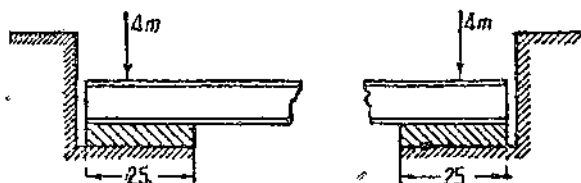
откуда

$$F \geq 25a = \frac{P}{R_d},$$

следовательно,

$$a = \frac{P}{R_d \cdot 25} = \frac{4000}{175} = 22,86 \approx 23 \text{ см.}$$

Пример 59. Для статуй весом 24 тонны установлен пьедестал из гранита в виде прямоугольного столба со сторонами, относящимися



Фиг. 167.

как 1:2. Временное сопротивление гранита сжатию равно 450 кг/см^2 . Коэффициент безопасности желательно взять равным 30. Определить размеры поперечного сечения пьедестала.

Если меньший размер поперечного сечения пьедестала обозначим через a (в сантиметрах), то больший будет $2a$. Следовательно, площадь сечения равна $F = a \cdot 2a = 2a^2$. Действующая сила равна

$$P = 24 \cdot 1000 = 24\,000 \text{ кг.}$$

Допускаемое напряжение согласно условию должно быть равно

$$R_d = \frac{450}{30} = 15 \text{ кг/см}^2.$$

Применяя формулу $F \geq \frac{P}{R_d}$, будем иметь

$$2a^2 = \frac{P}{R_d} = \frac{24\,000}{15},$$

откуда

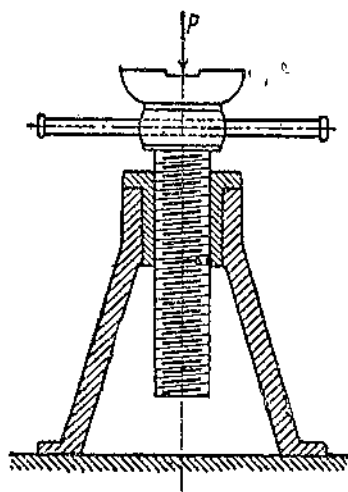
$$a^2 = \frac{24\,000}{30} = 800 \text{ см}^2;$$

следовательно,

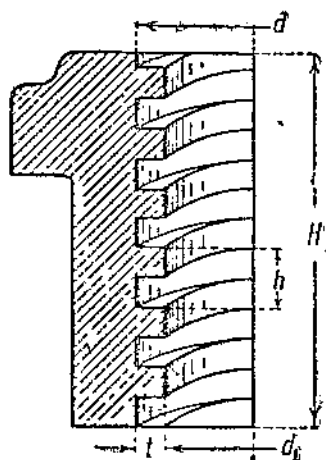
$$a = \sqrt{800} = 28,3 \approx 30 \text{ см, } 2a = 60 \text{ см.}$$

Пример 60. Рассчитать винт домкрата с подъемной силой в 6000 кг (6 тонн).

Домкрат состоит из чугунной станины (фиг. 168) с вставленной в нее бронзовой гайкой, в которую входит железный винт домкрата. Винт имеет головку, через которую просовывается рукоятка для вращения винта. Сверху на головку надевается чашечка, на которую кладется поднимаемый груз.



Фиг. 168.



Фиг. 169.

Нарезка у винта делается обыкновенно прямоугольная (даже квадратная), причем глубина нарезки (фиг. 169) t берется равной $\frac{d_1}{8}$, где d_1 есть диаметр внутренней резьбы. Наружный диаметр резьбы берется равным

$$d = d_1 + 2t = 1,25d_1,$$

а радиус средней винтовой линии

$$r = \frac{d_1 + t}{2} = 0,56d_1.$$

Угол подъема ее α берется около 4° . Так как винты домкратов почти всегда делаются самотормозящимися ¹⁾, то угол подъема средней винтовой линии должен быть меньше угла трения φ , равного для железного винта, входящего в бронзовую гайку, 6° (при условии некоторой смазки). Ход винта h определяется по формуле

$$h = 2\pi r \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

¹⁾ Самотормозящимися называются винты, обладающие следующим свойством: если, подняв при помощи винта груз, бросить вращать рукоятку, то груз останется лежать, не стремясь повернуть рукоятку в обратную сторону (вследствие противодействия силы трения).

При вращении винта в гайке между соприкасающимися поверхностями винта и гайки возникает трение, для преодоления которого необходим некоторый момент.

Чтобы не усложнять расчета оценкой влияния этого момента на прочность винта, на практике обычно поступают так: увеличивают поднимаемый груз на 30%, т. е. принимают его равным

$$P' = 1,3P$$

и затем рассчитывают винт на простое сжатие силой P' . Так мы и поступим. В данном случае $P = 6000$ кг. Поэтому

$$P' = 1,3 \cdot 6000 = 7800 \text{ кг.}$$

Для расчета воспользуемся формулой (43), из которой следует:

$$F \geq \frac{P'}{R_d} \text{ см}^2.$$

Для домкратов допускаемое напряжение R_d берут обычно равным 600 кг/см². Следовательно,

$$F = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{7800}{600} = 13 \text{ см}^2.$$

В таблице ОСТ 1260 по площади поперечного сечения находим диаметр

$$d_1 \approx 40 \text{ мм.}$$

Правильнее было бы взять 41 мм, но для удобства при вычислении остальных размеров винта мы берем круглое число 40. Зная d_1 , вычисляем остальные размеры винта:

$$t = \frac{d_1}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ мм,}$$

$$r = \frac{d_1 + t}{2} = 22,5 \text{ мм,}$$

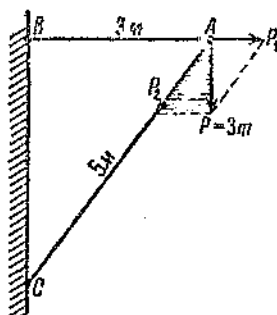
$$d = d_1 + 2t = 40 \text{ мм} + 2 \cdot 5 = 50 \text{ мм,}$$

$$h = 2\pi r \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2\pi \cdot 22,5 \operatorname{tg} 4^\circ = \\ = 2 \cdot 3,14 \cdot 22,5 \cdot 0,07 \approx 10 \text{ мм.}$$

Таким образом все основные размеры винта определены.

Пример 61. Стенной кран (фиг. 170) подъемной силой в 3 тонны состоит из двух тяжей АВ, сделанных из полосового железа прямоугольного сечения, с отношением сторон 1:4 и деревянной (сосновой) укосины АС круглого сечения. Длины тяжей и укосины указаны на чертеже. Найти прочные размеры тяжей и укосины.

Сила $P = 3000$ кг (поднимаемый груз) разлагается на две составляющие P_1 и P_2 , из которых первая растягивает тяжи, а вторая сжимает



Фиг. 170.

укосину. Составляющую P_2 найдем из подобия прямоугольных треугольников: заштрихованного и ABC . Имеем:

$$\frac{P_2}{P} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Нижний катет заштрихованного треугольника, очевидно, равен P_1 . Поэтому

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},$$

но

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$P_2 = \frac{P \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3 \cdot 5}{4} = 3,75 \text{ тонн} = 3750 \text{ кг},$$

$$P_1 = \frac{P \cdot \overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3 \cdot 3}{4} = 2,25 \text{ тонн} = 2250 \text{ кг}.$$

Сила P_1 растягивает два троса. Поэтому на каждый трос приходится

$$\frac{2250}{2} = 1125 \text{ кг}.$$

Допускаемое напряжение для литого железа можно взять равным

$$R_z = 600 \text{ кг/см}^2.$$

Обозначая один размер прямоугольного сечения троса через a , а другой — через $4a$ (согласно условию задачи), для площади сечения троса будем иметь выражение: $4a^2$.

Следовательно, по формуле (41) имеем $F \geq \frac{P}{R_z}$, или

$$4a^2 = \frac{1125}{600},$$

откуда

$$a^2 = \frac{1125}{2400} \approx 0,47 \text{ см}^2 = 47 \text{ мм}^2,$$

$$a = \sqrt{47} = 6,9 \approx 7 \text{ мм}, \quad 4a = 28 \text{ мм}.$$

Итак, размеры сечения троса найдены.

Укосина сжимается силой $P_2 = 3750 \text{ кг}$. Допускаемое напряжение на сжатие для сосны можно принять равным $R_d = 60 \text{ кг/см}^2$. По формуле (43)

$$F \geq \frac{P}{R_d}.$$

Следовательно,

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3750}{60} = 62,5 \text{ см}^2 = 6250 \text{ мм}^2,$$

откуда находим диаметр укосины —

$$d = \sqrt{\frac{6250 \cdot 4}{3,14}} \approx 90 \text{ мм} = 9 \text{ см.}$$

Пример 62. На медную трубку надета стальная такой же длины и обе трубки сжаты силой P (фиг. 171). Площади поперечных сечений внутренней и наружной трубок F_1 и F_2 относятся как 2:3; модули упругости меди и стали относятся как 1:2. Определить, какая часть силы P передается на внутреннюю и какая часть на наружную трубки.

Пусть эти части силы P будут P_1 и P_2 . Из условия равновесия очевидно, что

$$P_1 + P_2 = P. \quad (a)$$

Это уравнение дает нам статика. Другого уравнения, необходимого для определения P_1 и P_2 , статика не дает. Поэтому эта задача — статически неопределенная.

Заметим прежде всего, что по приложении силы P обе трубки укоротятся одинаково, но если абсолютные укорочения их равны, то будут равны и относительные укорочения, так как трубки — одинаковой длины. Следовательно,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Далее, из формулы $\sigma = \frac{P}{F} = E\varepsilon$ имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{P_1}{E_1 F_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{P_2}{E_2 F_2}.$$

Но так как $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то

$$\frac{P_1}{E_1 F_1} = \frac{P_2}{E_2 F_2}.$$

Переставляя в этой пропорции средние члены, получим

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1 \cdot E_1}{F_2 \cdot E_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$P_1 = \frac{1}{3} P_2. \quad (б)$$

Имея два уравнения с двумя неизвестными, можно найти эти неизвестные. Подставляя значение P_1 из последнего уравнения в уравнение

$$P_1 + P_2 = P,$$

получим

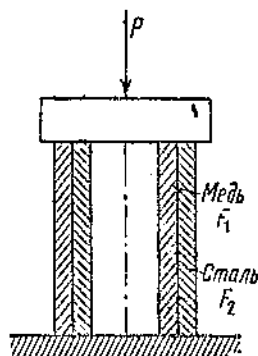
$$\frac{1}{3} P_2 + P_2 = P,$$

откуда

$$P_2 = \frac{3}{4} P,$$

и, далее,

$$P_1 = \frac{1}{3} P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} P = \frac{1}{4} P.$$



Фиг. 171.

Задачи.

53. Прибор Френкеля для определения напряжений в мостах показывает с увеличением в 150 раз изменение длины между двумя точками стержня моста, находящимися на расстоянии 1 м друг от друга. Спрашивается, насколько увеличилось напряжение в стержне мостовой фермы при прохождении поезда, если прибор, установленный на этом стержне, показал укорочение в 5 см? ($E=2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$).

Отв. $\sigma = 667 \text{ кг/см}^2$.

54. Железо-бетонная колонна квадратного поперечного сечения (высота колонны $h=11 \text{ м}$, сторона квадрата $a=40 \text{ см}$) поддерживает нагрузку $P=30 \text{ т}$ (фиг. 165). Определить:

а) какая часть нагрузки передается на железо и какая на бетон, если площадь железа составляет 0,1 площади бетона, и отношение модулей упругости железа и бетона равно $E_{\text{желе}} : E_{\text{бет}} = 10 : 1$;

б) напряжение в железе и бетоне;

в) относительное сжатие колонны.

Отв. $\sigma_{\text{бет}} = 10,3 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_{\text{желе}} = 103 \text{ кг/см}^2$; $\varepsilon = 0,0000516$.

55. Определить внутренний диаметр d_1 винта домкрата (фиг. 168), если максимальный поднимаемый груз $P=10 \text{ т}$ и допускаемое напряжение

$$R_d = 600 \text{ кг/см}^2.$$

Отв. $d_1 \approx 55,4 \text{ мм}$.

Глава 19.

СДВИГ.

§ 88. Явления, происходящие при сдвиге. Сущность деформации сдвига удобнее всего рассмотреть на следующем примере. Возьмем толстый короткий брусок AB и нагрузим его силой P , приложенной на конце. Если мы рассечем этот брусок любым сечением, перпендикулярным к его оси (фиг. 172, а), то, пренебрегая моментом силы P относительно данного сечения (это можно сделать потому, что брусок взят короткий), мы из условия равновесия правой части (CB) получим, что внутренние силы в сечении $I-I$ должны быть направлены касательно к сечению в направлении, противоположном силе P , и в сумме должны равняться силе P (фиг. 172, б). Обозначим равнодействующую этих внутренних сил через Q , тогда $Q=P$ и направлено по касательной к сечению $I-I$. Считают, что внутренние силы, составляющие в сумме Q , распределяются по сечению равномерно. В таком случае напряжение в любом сечении бруса от действия силы Q будет равно

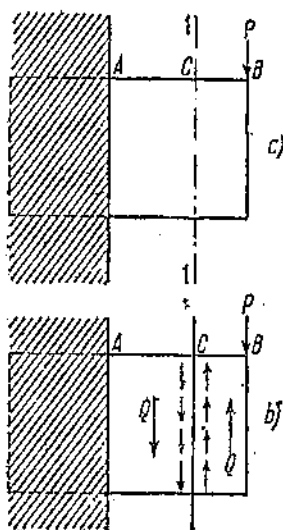
$$\tau = \frac{Q}{F},$$

но так как $Q=P$, то окончательно

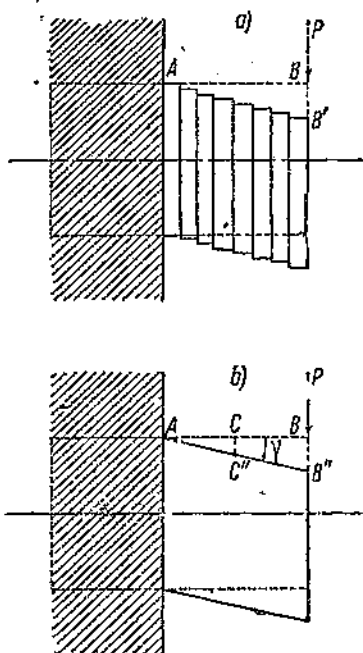
$$\tau = \frac{P}{F} \text{ кг/см}^2. \quad (44)$$

В этих формулах Q есть внутренняя сила, называемая поперечной или перерезывающей силой, а τ (греческая буква „тау“) — касательное или тангенциальное напряжение в рассматриваемом сечении (выражаемое в кг/см^2), P — внешняя сила (в кг), F — площадь

поперечного сечения (в см^2). Из фиг. 172, *б* мы видим, что силы Q стремятся сдвинуть одну часть бруска относительно другой. Если бы мы взяли любое другое сечение, то увидели бы, что и там (без учета момента силы P) внутренние силы привелись бы к силе $Q = P$, которая также стремилась бы сдвинуть одну часть сечения относительно другой. Представим себе брусок AB состоящим из ряда вертикальных пластинок. Тогда под действием силы P произойдет следующая деформация: пластинки сдвинутся одна относительно другой, причем наибольший сдвиг получают те, которые находятся дальше от заделки (фиг. 173, *а*). В целом, сплошном бруске такое явление сдвига получится от сечения к



Фиг. 172.



Фиг. 173.

сечению и ступенчатая линия превратится в наклонную прямую AB (фиг. 173, *б*). Любая точка C поперечного сечения переместится вниз в новое положение, отмеченное C'' . Смещение CC'' или BB'' для точки B носит название абсолютного сдвига. Это смещение тем больше, чем дальше данная точка отстоит от точки A . Однако мерой деформации при сдвиге принимается не абсолютный сдвиг, а относительный, равный отношению абсолютного сдвига к расстоянию рассматриваемой точки от неподвижной точки A . Следовательно, относительный сдвиг равен

$$\frac{BB''}{BA},$$

но BB'' и BA есть катеты прямоугольного треугольника ABB'' . Это отношение, как известно из тригонометрии, называется тангенсом угла,

противолежащего катету, стоящему в числителе. Обозначая этот угол греческой буквой γ („гамма“), можем написать

$$\frac{\overline{BB''}}{\overline{BA}} = \operatorname{tg} \gamma,$$

т. е. относительный сдвиг равен тангенсу угла, образованного наклонной прямой AB'' с горизонтальной прямой $\overline{AB}$. Угол γ при упругих деформациях обычно очень мал. Но для малых углов их тангенс (т. е. отношение $\frac{\overline{BB''}}{\overline{BA}}$) ничтожно мало отличается от значения самих углов, выраженных в радианах (так, угол в 4° в радианной мере равен $4 \cdot \frac{2\pi}{360} = 0,07$; тангенс этого угла равен 0,0701). На основании этого за меру относительного сдвига принимают не тангенс угла γ , а сам угол γ , т. е. полагают

$$\frac{\overline{BB''}}{\overline{BA}} = \operatorname{tg} \gamma = \gamma.$$

На основании опытных данных принимают, что в известных пределах тангенциальные напряжения пропорциональны относительному сдвигу, т. е. следуют закону Гука. Таким образом

$$\tau = G\gamma, \quad (45)$$

где G есть так называемый модуль упругости при сдвиге. Измеряется он в тех же единицах, что и τ , т. е. в кг/см^2 , так как γ есть число отвлеченное. Подобно тому как E характеризует жесткость материала при растяжении или сжатии G характеризует жесткость материала при сдвиге. Между G и E существует следующая зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

где μ есть коэффициент Пуассона. Если $\mu = \frac{1}{3}$, то имеем $G = \frac{3}{8}E$. Введенные формулы для сдвига имеют большое сходство с формулами для растяжения или сжатия. Основное различие их в том, что внутренняя сила N , возникающая вследствие растяжения или сжатия, направлена по оси и перпендикулярна к сечению (часто ее называют нормальной силой) и соответствующие ей напряжения σ нормальны к сечению, тогда как внутренняя сила Q , возникающая при сдвиге (поперечная или перерезывающая сила), касательна к сечению и напряжения τ , вызываемые ею, тоже касательны к сечению.

Если сдвиг угрожает металлическим частям (болты, заклепки), то деформацию сдвига называют срезом или срезыванием. В случае же дерева и бетона сдвиг называют скалыванием.

§ 89. Расчетное уравнение на сдвиг. Допускаемые напряжения. Принимая, что касательные напряжения τ распределяются по сечению равномерно, будем иметь

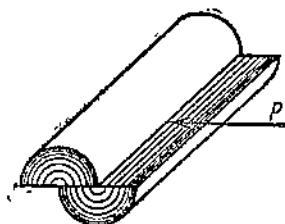
$$\tau = \frac{F}{F} \leq R_s \text{ кг/см}^2. \quad (46)$$

где P есть внешняя сила, F — площадь поперечного сечения и R_s — допускаемое напряжение на сдвиг.

Деформация сдвига тесно связана с деформациями растяжения или сжатия. (В исследуемом на сдвиг бруске мы пренебрегли влиянием момента, который, как мы увидим в теории изгиба, вызывает растяжение одних и сжатие других волокон, из которых состоит брус.) В свою очередь, простое растяжение или сжатие сопровождается явлением сдвига



Фиг. 174.



Фиг. 175.

по косым, наклонным к оси стержня площадкам. Ввиду этого между допускаемым напряжением на растяжение и на сдвиг существует определенная зависимость. Так, для однородных по структуре материалов (металлы и др.) R_s меняется от 0,75 до 0,8 R_z , где R_z есть допускаемое напряжение на растяжение.

Таблица 8.

Значения допускаемого напряжения R_s на сдвиг для некоторых металлов.

А. Прокатный металл.

Сталь 3	1 050 кг/см ²
Сталь 5 (повыш.)	1 300 "
Сталь спец.	1 570 "

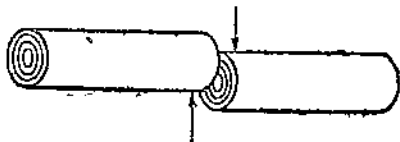
Б. Литой металл.

Сталь Л1	900 "
Сталь Л2 (пониж.)	1 150 "
Сталь Л2	1 300 "
Сталь Л5	1 500 "
Чугун Ч1	250 "

При выборе допускаемых напряжений для дерева необходимо различать, как проходит скалывание — параллельно или перпендикулярно к направлению волокон. Ниже дана таблица R_s для разных пород деревьев соответственно видам скалывания, изображенным на фиг. 174, 175, 176.

Из сравнения с таблицей допускаемых напряжений на растяжение и сжатие (см. таблицы 6 и 7) видно, что R_s значительно ниже R_z и R_d .

При расчете на срезывание (скалывание) нельзя забывать делать в нужных местах проверку на смятие, так как последнее всегда встречается в конструкциях, рассчитываемых на сдвиг (закленки, врубки и т. п.).



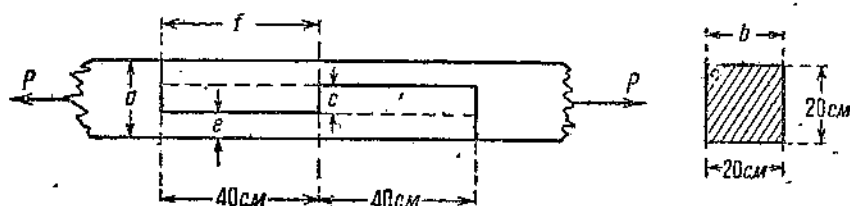
Фиг. 176.

Таблица 9.

Допускаемые напряжения при скалывании в кг/см².

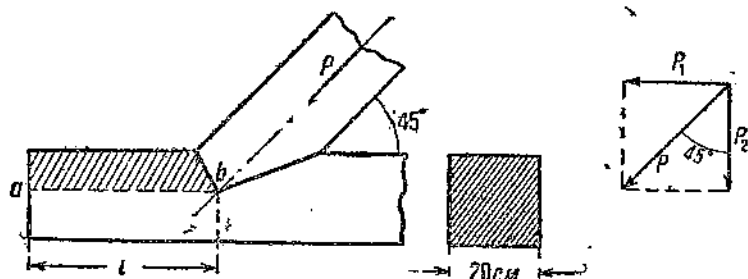
Дерево	Скалывание		Перерезывание перпендикулярно к волокнам (фиг. 176)
	параллельно волокнам (фиг. 174)	перпендикулярно к волокнам (фиг. 175)	
Бук	14	7	48
Дуб	18	9	60
Ель	11	5	40
Сосна	12	6	45

§ 90. Примеры. Пример 63. Сосновый брус квадратного сечения желательно соединить с другим таким же брусом замком, как указано



Фиг. 177.

на фиг. 177. Какая растягивающая сила может быть допущена в таком соединении (считая основной деформацией скалывание) при данных на чертеже размерах?



Фиг. 178.

Площадь скалывания равна в данном случае

$$F = f \cdot b = 40 \cdot 20 = 800 \text{ см}^2.$$

Для сосны допускаемое напряжение на скалывание вдоль волокон равно $R_s = 12 \text{ кг/см}^2$. Поэтому из формулы $R_s \geq \frac{P}{F}$ получаем

$$P \leq R_s \cdot F = 12 \cdot 800 = 9600 \text{ кг}.$$

Пример 64. Стропильная нога (сосновая) упирается зубом в горизонтальную затяжку (сосновую), как указано на фиг. 178,

Определить расстояние l , если действующая на ногу сила P равна 4800 кг (размеры указаны на чертеже).

Силу P разложим на две составляющие P_1 и P_2 , которые между собой будут равны, так как сила P образует с вертикалью угол в 45° . Сила P_1 будет стремиться отколоть заштрихованный кусок затяжки, иначе говоря, будет стремиться произвести скалывание по сечению $a-b$; сила же P_2 будет прижимать ногу к затяжке. Силы P_1 и P_2 легко найдутся из уравнения

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 = 2P_1^2,$$

откуда

$$P_1 = \frac{P}{\sqrt{2}} \approx \frac{4800}{1,41} \approx 3404 \text{ кг.}$$

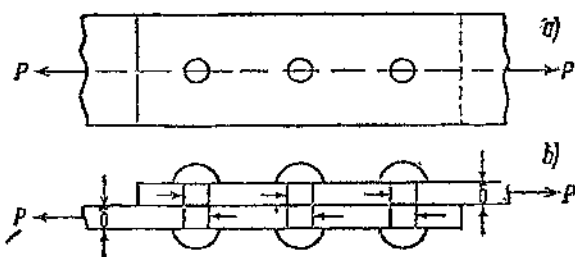
Площадь скалывания равна $F = 20l$. Допускаемое напряжение для сосны (см. таблицу 9) равно $R_s = 12 \text{ кг/см}^2$. Применяя расчетную формулу для сдвига, т. е.

$$F \geq \frac{P}{R_s}, \text{ получаем}$$

$$20 \cdot l = \frac{3404}{12},$$

откуда

$$l = \frac{3404}{20 \cdot 12} = 14,2 \text{ см.}$$



Фиг. 179

✓ Пример 65. Две железные полосы должны быть соединены посредством двух накладок. Рассчитать заклепочное соединение, если силы P , растягивающие полосы, равны 10 т, ширина полос $b = 13 \text{ см}$, толщина полосы $\delta = 12 \text{ мм}$, толщина накладки $\delta_1 = 0,6\delta$. Диаметр заклепок $d = 20 \text{ мм}$. Допускаемое напряжение на растяжение $R_z = 1400 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 182, см. ниже).

Прежде чем приступить к решению данного примера, рассмотрим расчет простейшего заклепочного соединения (фиг. 179).

Две железные полосы соединены тремя заклепками, поставленными в ряд (так называемое соединение внахлестку). Силы P стремятся сдвинуть одну полосу по другой. Этому сдвигу препятствуют заклепки, на которые и передается действие сил P так, как это показано стрелками на фиг. 179, б.

Опытные исследования показывают, что действие силы P распределяется между заклепками неравномерно: одни заклепки участвуют больше в работе соединения, другие — меньше. Для простоты расчета принято считать, что все заклепки работают одинаково.

Если в рассчитываемом нами соединении число заклепок равно m , то на каждую заклепку придется сила, равная.

$$P_1 = \frac{P}{m}$$

Сила P_1 будет стремиться 1) произвести разрушение материала заклепки по плоскости AB (фиг. 180) в виде среза заклепки и 2) нажимая на цилиндрическую поверхность заклепки краями отверстий, будет угрожать вызвать явление смятия. На эти два вида деформаций и производится расчет заклепки.

Сначала разберем расчет заклепки на срез (фиг. 180). Касательные напряжения (τ) в сечении AB заклепки будут равны

$$\tau = \frac{P_1}{F_{AB}}.$$

Подставляя значение площади сечения $A-B$

$$F_{AB} = \frac{\pi d^2}{4},$$

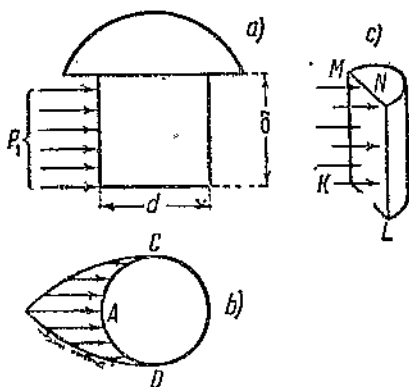
а также найденное выше значение $P_1 \equiv \frac{P}{m}$ и удовлетворяя условию прочности стержня заклепки на срез, получим

$$\tau = \frac{P}{m \frac{\pi d^2}{4}} \leq R_s.$$

Фиг. 180.

Обычно диаметр заклепки d задается и требуется по действующим на соединении силам P и величине допускаемого напряжения R_s определить необходимое число заклепок (m). Из формулы касательного напряжения (τ) получаем

$$m \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} R_s}. \quad (A)$$



Фиг. 181.

смятию не известен. Очевидно только, что наибольшее смятие угрожает заклепке в точке A сечения (фиг. 181, b), дальше давление уменьшается и обращается в нуль в точках C и D . Считают, однако, что на диаме-

Допускаемое напряжение на сдвиг R_s обычно берут равным $R_s = 0,8R_z$, где R_z есть допускаемое напряжение материала заклепки на растяжение. Выражение в знаменателе формулы (A) дает величину силы, которую безопасно может выдержать одна заклепка при сдвиге.

Перейдем к расчету заклепки на смятие (фиг. 181). Точный закон распределения усилий по цилиндрической поверхности при

тральное сечение стержня заклепки (фиг. 181, с) это давление передается равномерно. Тогда будем иметь

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P_1}{F_{KLMN}},$$

или, подставляя $P_1 = \frac{P}{m}$ и $F_{KLMN} = d\delta$,

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{md\delta},$$

где δ есть толщина полосы или высота сминаемой части заклепки. Уравнение прочности заклепки на смятие примет следующий вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P}{md\delta} \leq R_{\text{см}},$$

откуда

$$m \geq \frac{P}{d\delta R_{\text{см}}}. \quad (\text{В})$$

Допускаемое напряжение на смятие заклепки обычно берут равным $R_{\text{см}} = 2R_z$.

Таким образом необходимое число заклепок определяется двумя формулами (А) и (В). Из полученных значений m необходимо взять большее. Заклепки, рассмотренные нами в соединении внахлестку, носят название односрезных, так как имеют одну площадь поперечного сечения, по которой может произойти срез.

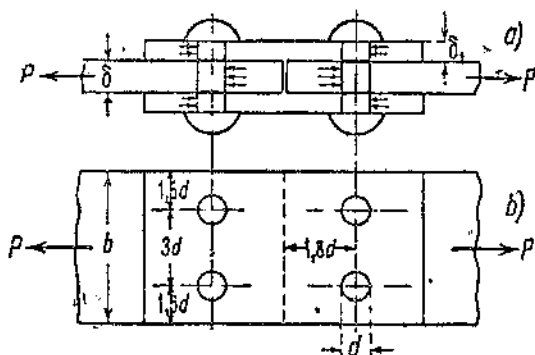
Перейдем теперь к примеру. Если мы посмотрим на фиг. 182, а, то увидим, что силы P , стремясь вырвать основные полосы из соединения, угрожают каждой заклепке 1) срезом по двум плоскостям поперечного сечения (двухсрезные заклепки) и 2) смятием заклепки либо по цилиндрической поверхности с высотой, равной толщине основной полосы (δ), либо по двум цилиндрическим поверхностям с высотой, равной δ_1 (толщина накладок). Опасна для смятия меньшая поверхность.

Необходимое число заклепок по условию прочности на срез будет равно

$$m \geq \frac{P}{2 \frac{\pi d^2}{4} R_s},$$

откуда

$$m = \frac{10\,000}{2 \frac{3,14 \cdot 4}{4} 0,8 \cdot 1400} \approx 1,42.$$



Фиг. 182.

По условию прочности на смятие число заклепок должно быть больше или равно

$$m \geq \frac{P}{d\delta R_{см}}$$

Подставляя числовые данные, будем иметь

$$m = \frac{10\,000}{2 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 1400} \approx 1,49.$$

Берем число заклепок $m = 2$; всего в соединении будет четыре заклепки, которые и размещаем друг от друга на расстояниях, показанных на фиг. 182, б.

Пример 66. Железный болт растягивается силой $P = 12\,000$ кг. Определить внутренний и наружный диаметры болта, диаметр и высоту круглой головки (фиг. 183).

Предполагая силу P распределенной равномерно, примем $R_z = 900$ кг/см². По формуле $F \geq \frac{P}{R_z}$ найдем

$$F = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{12\,000}{900} = 13,3 \text{ см}^2.$$

По таблице ОСТ 1260 по площади подбираем: $d_1 = 43,57$ мм (соответствует $\frac{\pi d_1^2}{4} = 14,91$ см², $d_0 = 50,32$ мм = 2 дюйма).

Для нахождения D заметим, что опорная площадь головки должна быть достаточно велика, чтобы не произошло ее смятия (предполагаем, что скрепляемая болтом деталь не мягче материала болта). На смятие для железа можно взять $R_{см} = 900$ кг/см² (до 1200 кг/см²). Сминаемая площадь равна

$$F_1 = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} - 19,87.$$

По формуле для смятия $F_1 \geq \frac{P}{R_{см}}$ имеем

$$P = R_{см} \cdot F_1.$$

Следовательно,

$$12\,000 = 900 \left(\frac{\pi D^2}{4} - 19,87 \right),$$

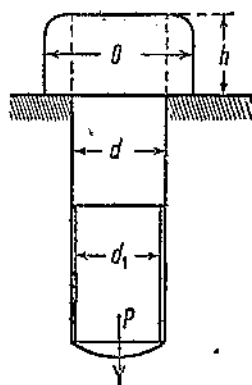
откуда

$$D = 6,5 \text{ см} = 65 \text{ мм}.$$

Высота головки h должна быть достаточно велика, чтобы не произошло среза головки.

Площадь среза (помечена пунктиром) равна

$$F_{среза} = \pi d_0 h,$$



Фиг. 183.

По формуле (46) должно быть:

$$F_{\text{среза}} \geq \frac{P}{R_s}.$$

Принимая $R_s = 0,8R_z$ и подставляя $F_{\text{среза}} = \pi d_0 h$, получим

$$\pi d_0 h = \frac{P}{0,8R_z},$$

откуда

$$h = \frac{P}{0,8R_z \pi \cdot d_0} = \frac{12\,000}{0,8 \cdot 900 \cdot 15,8} = 1,06 \text{ см.}$$

Следовательно, высота головки должна быть не меньше 10,6 мм.

Задачи.

56. Определить диаметр заклепок в соединении, представленном на фиг. 182, если сила, растягивающая полосы, равна $P = 8,7 \text{ т}$; допускаемое напряжение на срез $R_s = 0,8R_z$, где R_z — допускаемое напряжение на растяжение, равное 1200 кг/см^2 . Произвести проверку на смятие заклепки, если $R_{\text{см}} = 2R_z$.

Отв. $d = 17 \text{ мм}$; $\sigma_{\text{см}} = 2130 \text{ кг/см}^2$.

57. Для соединения, изображенного на фиг. 177, определить размеры: f , c , e , если растягивающая бруски сила $P = 9000 \text{ кг}$, ширина брусков $b = 20 \text{ см}$. Допускаемые напряжения для сосны принять следующие: $R_s = 12 \text{ кг/см}^2$, $R_{\text{см}} = 70 \text{ кг/см}^2$, $R_z = 110 \text{ кг/см}^2$.

Отв. $f = 37,5 \text{ см}$; $c = 6,5 \text{ см}$; $e = 4,1 \text{ см}$.

58. Две железные полосы толщиной в 1 см , выдерживающие продольное растягивающее усилие $P = 12 \text{ т}$, соединены двумя накладками. Определить число заклепок, если диаметр заклепки $d = 20 \text{ мм}$, ширина полосы $b = 18 \text{ см}$. Допускаемые напряжения принять равными: на растяжение $R_z = 750 \text{ кг/см}^2$, на срез $R_s = 600 \text{ кг/см}^2$, на смятие $R_{\text{см}} = 2R_z$.

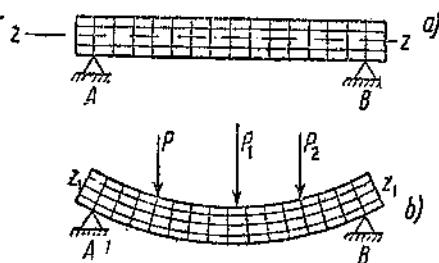
Отв. число заклепок $n = 4$.

Глава 20.

ИЗГИБ.

§ 91. Общая картина деформации. Деформация изгиба прямого бруса характеризуется тем, что ось бруса до загрузки прямолинейная, после загрузки искривляется, и поперечные сечения, параллельные между собой до изгиба, поворачиваются относительно друг друга (фиг. 184). Производящие изгиб силы расположены в плоскости, проходящей через ось прямого бруса, и направлены перпендикулярно к этой оси (фиг. 186).

На фиг. 184, а изображена балка, свободно лежащая на двух опорах. Под действием внешних сил она изогнулась: первоначально прямая ось z после действия нагрузки искривилась. Если нанести на брус сетку вертикальных параллельных

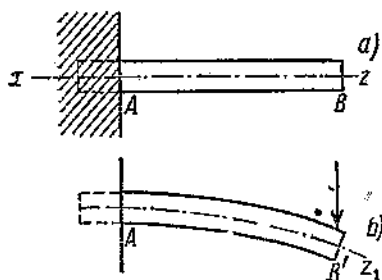


Фиг. 184.

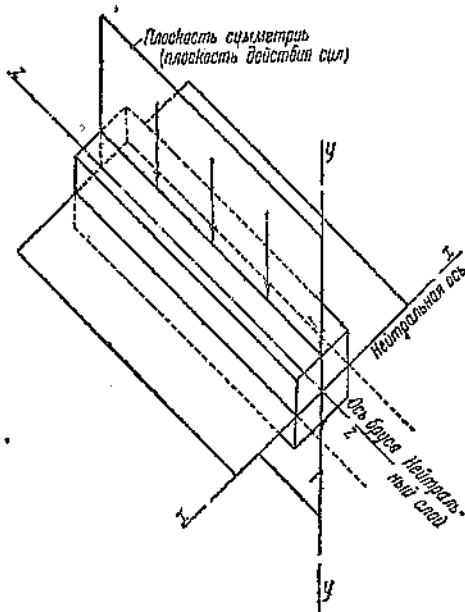
линий, то после деформации бруса эти линии перестанут быть параллельными и наклонятся одна к другой так, как показано на фиг. 184, *b*. Верхние концы их сближаются, нижние разойдутся. На основании этого можно сказать, что верхние волокна сжались, нижние растянулись. Волокна же, лежащие на оси z , своей длины не изменили. Наибольшее сжатие отмечается в самых верхних волокнах, наибольшее растяжение — в самых нижних.

Если мы возьмем балку, заделанную с одной стороны в стену, и нагрузим ее на конце произвольным грузом, то она тоже изогнется, но характер ее изгиба будет несколько иной. Так как заделка не допускает поворота конца A , то балка изогнется следующим образом (фиг. 185): растянутся у нее верхние волокна, сожмутся нижние, волокна же по оси z искривятся, но длины своей не изменят.

Слой, в котором волокна при изгибе не меняют своей первоначальной длины, носит название нейтрального слоя. С помо-



Фиг. 185.



Фиг. 186.

щью высшей математики доказывается, что нейтральный слой действительно проходит через ось балки. Линия пересечения нейтрального слоя с любым поперечным сечением бруса называется нейтральной осью поперечного сечения бруса¹⁾ (фиг. 186).

Если балку, изображенную на фиг. 187, распилить вдоль на доски, положить их затем вместе на опоры и нагрузить прежними силами, то каждая доска в отдельности деформируется подобно целой балке, и концевые сечения ab и cd примут уступчатый вид: между досками произойдет сдвиг, которому в целой балке, очевидно, препятствуют какие-то внутренние силы, характерные для сдвига.

Таким образом при изгибе в волокнах происходит по одну сторону от оси z растяжение, по другую — сжатие, в продольном же на-

¹⁾ Поперечным сечением бруса называется площадь сечения, перпендикулярная к оси бруса.

правлении между волокнами происходит сдвиг. (Дальше мы увидим, что сдвиг будет происходить и по площадкам, перпендикулярным к оси балки).

Перейдем теперь к определению внутренних сил, возникающих при изгибе.

§ 92. Изгибающий момент. Поперечная сила.

Рассмотрим балку на двух опорах, нагруженную силой P (фиг. 188, *a*); пусть эта сила приложена на расстоянии b от правой опоры.

Расстояние между опорами (расчетная длина балки) пусть равно l . Отбросим опоры и заменим их действие реакциями A и B (фиг. 188, *b*). Предположим, что их значения нам известны. Займемся определением внутренних сил, которые

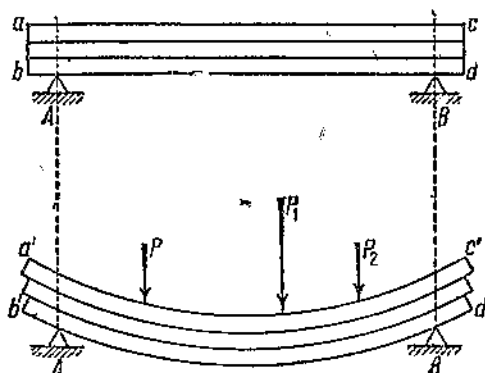
возникают в сечениях балки от загрузки силой P . Для этого разрежем балку на расстоянии z от левой опоры (фиг. 188, *b*), отбросим правую часть cd и рассмотрим равновесие оставшейся части (ac) (фиг. 188, *c*).

На часть ac балки действует одна внешняя сила — опорная реакция A . Для того чтобы часть ac не поднималась кверху, в сечении $I—I$ должна быть приложена сила Q , направленная противоположно силе A и равная ей по величине. Кроме того, сила A стремится вращать часть ac относительно сечения $I—I$, т. е. создает момент Az .

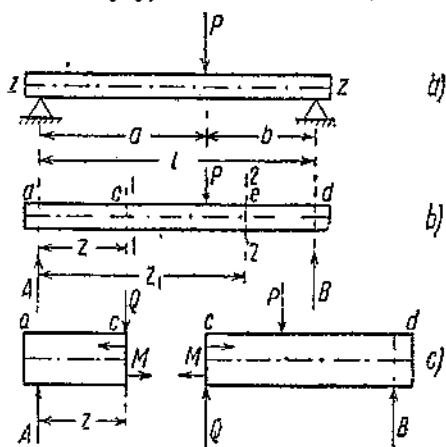
Чтобы этого вращения не было, надо в сечении $I—I$ приложить пару сил с моментом M , равным по величине внешнему моменту Az , но стремящемуся вращать часть ac в противоположную сторону.

Итак, мы выяснили, что в сечении $I—I$ действуют внутренние силы: момент $M = Az$ и сила $Q = A$. Момент M называется изгибающим моментом, а сила Q — поперечной силой или срезывающей силой.

Если бы мы взяли другое сечение между точками приложения сил A и P (фиг. 188, *b*), то у нас изменилось бы значение z , а следовательно, и значение изгибающего момента M , так как $M = Az$.



Фиг. 187.



Фиг. 188.

Что же касается поперечной силы Q , то для всех сечений между точками приложения сил A и P она одинакова и равна $Q = A$.

Проследим теперь, как изменяются M и Q , если сечение взять между точками приложения сил P и B на расстоянии z_1 от левой опоры (фиг. 188, *b*). Так как реакция A составляет лишь часть силы P , то влияние внешней силы P преобладает (фиг. 189), и она будет стремиться опустить части балки ae . Внутренняя сила Q должна воспрепятствовать этому (часть ae должна находиться в равновесии), для чего поперечная сила должна быть равна разности этих сил, т. е.

$$Q = A - P$$

(знак минус потому, что сила P имеет противоположное силе A направление).

Чтобы часть ae не вращалась, изгибающий момент M в сечении 2—2 должен преодолеть два момента, равные Az_1 и $P(z_1 - a)$, стремящиеся повернуть часть ae относительно сечения в противоположные стороны. Реакция A стремится повернуть часть ae по часовой стрелке, сила P — против часовой стрелки. Первые моменты будем считать положительными (+), вторые — отрицательными (—). Тогда момент M должен быть равен

$$M = Az_1 - P(z_1 - a).$$

В сечении 1—1 мы имели:

$$M = Az \quad \text{и} \quad Q = A.$$

Теперь же в сечении 2—2:

$$M = Az_1 - P(z_1 - a) \quad \text{и} \quad Q = A - P.$$

Рассмотрев внимательно фиг. 188, *c* и 189, можно сделать следующие выводы:

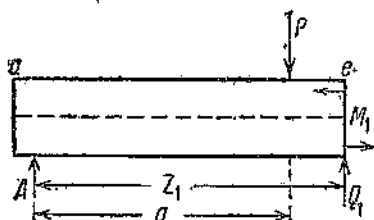
1. При изгибе балки под действием вертикальной нагрузки внутренние силы приводятся к изгибающему моменту M и поперечной силе Q .

2. Изгибающий момент M и поперечная сила Q , вообще говоря, изменяются по длине балки.

3. Изгибающий момент M в данном сечении равен сумме моментов всех сил (взятых по одну сторону сечения) относительно данного сечения. Знаки моментов учитываются соответственно направлению вращения.

4. Поперечная сила Q в данном сечении равна сумме всех сил, взятых по одну сторону сечения. Внешняя сила считается положительной, если направлена вверх (например реакция A), и отрицательной, если направлена вниз (например сила P).

Перейдем теперь к установлению связи между деформациями, возникающими при изгибе и найденными внутренними силами M и Q . Если



Фиг. 189.

мы посмотрим на фиг. 188, с и 189, то увидим, что M представляет пару сил, направленных перпендикулярно к сечению. Естественно предположить, что верхняя сила будет стремиться сжимать волокна, а нижняя — растягивать, что и соответствует полученной для балки на двух опорах деформации (фиг. 184). Как мы увидим дальше, нормальные напряжения при изгибе являются решающими при подборе сечения балки. Очевидно, что они должны зависеть от изгибающего момента. Теория показывает, а опыт подтверждает, что наибольшие нормальные напряжения получаются в том сечении, где изгибающий момент имеет наибольшее значение.

Сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения, называется опасным сечением.

Что касается поперечной силы Q , то, так как она направлена касательно к сечению (фиг. 188, с и 189), она должна как-то влиять на сдвиг сечения. Сдвиг будет происходить не только по вертикальным плоскостям сечений балки, но, как нам удалось уже выяснить на примере распиленной балки, и в продольных направлениях. Естественно предположить, что сила Q должна быть как-то связана с касательными напряжениями. В том сечении, где сила Q будет наибольшая, там надо ожидать и наибольшего значения τ .

Из сказанного вытекает, что, прежде чем приступить к подбору сечения балки, работающей на изгиб, необходимо знать наибольшие M и Q для различных балок с различными способами загрузки.

§ 93. Примеры определения изгибающего момента для разных случаев нагрузки.

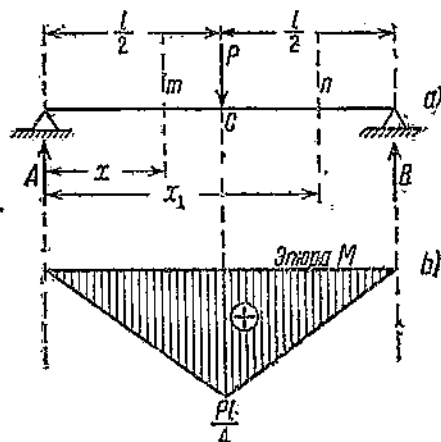
Пример 67. Балка лежит свободно на двух опорах и посредине нагружена силой P . Найти наибольший изгибающий момент и положение опасного сечения (фиг. 190).

Реакции A и B опор ввиду симметричного расположения последних относительно силы P равны друг другу, и каждая порознь равна половине силы P , т. е.

$$A = B = \frac{P}{2}.$$

Для произвольного сечения m , взятого вправо от опоры A на расстоянии x , изгибающий момент равен

$$M = Ax.$$



Фиг. 190.

Наибольшего значения M достигает в сечении, в котором действует сила P , т. е. при $x = \frac{l}{2}$, так как при переходе через это сечение вправо пришлось бы добавить к положительному моменту силы A отрицатель-

ный момент силы P , т. е. значение момента M уменьшилось и сделалось бы равным

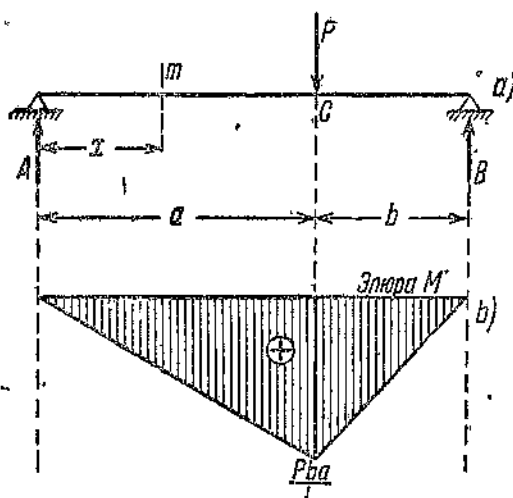
$$M = Ax_1 - P \left(x_1 - \frac{l}{2} \right).$$

Итак, наибольший изгибающий момент в нашем случае равен

$$M_{\max} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P \cdot l}{2 \cdot 2} = \frac{Pl}{4}.$$

Эту формулу полезно запомнить, так как рассмотренный случай изгиба особенно часто встречается в практике.

Наглядное представление изменения величины изгибающего момента M в зависимости от сечения дает графическое изображение, называемое



Фиг. 191.

„эпюрой моментов“ (фиг. 190; б). На прямой, параллельной оси балки, отложены в виде отрезков, перпендикулярных к этой прямой, значения M для каждого сечения (в принятом для данного построения масштабе). Так как изгибающий момент M на расстоянии x от левой опоры равен $M = Ax$, где A есть величина постоянная, а x меняется непрерывно от сечения к сечению, то концы отрезков, изображающих изгибающие моменты M , будут лежать на наклонной прямой. Совершенно такую же прямую мы получим, если пойдем от точки B , по направле-

нию к середине c балки, где приложена сила P .

Пример 68. Решим тот же пример, но в предположении, что сила P приложена не в середине балки, а на расстоянии a от левой опоры (фиг. 191).

Прежде чем определить изгибающий момент, найдем неизвестные реакции опор. Для этого напишем условия равновесия сил P , A , B . Так как силы параллельны и лежат в одной плоскости, то условий равновесия будет два: алгебраическая сумма сил должна равняться нулю и сумма моментов их относительно любой точки, взятой в их плоскости, например относительно точки B , должна равняться нулю, т. е.

$$A - P + B = 0,$$

$$Al - Pb = 0,$$

Решая эту систему уравнений с двумя неизвестными, найдем

$$A = \frac{P \cdot b}{l}, \quad B = \frac{P(l - b)}{l}.$$

Теперь напишем выражение для изгибающего момента в сечении m :

$$M_m = Ax.$$

Этот момент будет иметь наибольшее значение (максимум) при $x = a$, так как при x , большем a , к положительному моменту силы A придется прибавить еще отрицательный момент силы P , отчего значение момента уменьшится. Следовательно,

$$M_{\max} = A \cdot a = \frac{Pb \cdot a}{l}.$$

Опасное сечение будет в c (там, где приложена сила P).

Полагая в последней формуле $a = b = \frac{l}{2}$ (т. е. считая, что сила приложена посередине балки), получим

$$M_{\max} = \frac{P^2}{4l} = \frac{Pl}{4},$$

т. е. результат, найденный в предыдущем примере.

На фиг. 191, b построена эпюра изгибающих моментов M для данного случая загрузки.

Пример 69. Балка свободно лежит на двух опорах и находится под действием равномерно распределенной непрерывной нагрузки¹⁾, величина которой на каждую единицу длины балки равна q . Определить наибольшее значение изгибающего момента и положение опасного сечения (фиг. 192).

Равномерно распределенную нагрузку принято изображать, как указано на чертеже, — сплошной вертикальной штриховкой. Так как вся нагрузка на балку равна ql , то реакции опор, очевидно, одинаковы и равны

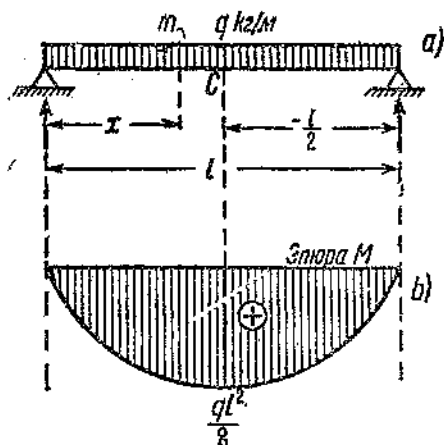
$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

Момент в произвольном сечении m на расстоянии x от левой опоры будет равен

$$M_m = Ax - qx \frac{x}{2}$$

(qx — равнодействующая всей нагрузки, приходящейся на длину x ;

¹⁾ Такой нагрузкой является, например, собственный вес балки (одинакового сечения), вес нагрузки от настила пола и т. п.



Фиг. 192

$\frac{x}{2}$ — плечо этой равнодействующей относительно сечения). Следовательно,

$$M_m = Ax - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l-x) = \frac{q}{2}(l-x)x.$$

Изгибающий момент будет максимальным тогда, когда произведение $(l-x)x$ будет наибольшим. В математике доказывается, что произведение двух множителей, сумма которых есть число постоянное, будет иметь максимум тогда, когда эти множители равны¹⁾. В данном случае сумма множителей $l-x$ и x есть число постоянное, равное

$$(l-x) + x = l;$$

поэтому произведение их будет иметь максимум, когда

$$l-x = x,$$

т. е. при

$$x = \frac{l}{2}.$$

Итак, M имеет максимум при $x = \frac{l}{2}$. Этот максимум равен

$$M_{\max} = \frac{q}{2} \left(l - \frac{l}{2} \right) \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

Опасное сечение будет посредине пролета в точке c . Так как ql есть полная нагрузка, приходящаяся на всю балку, то, обозначив ее через P , получим

$$M_{\max} = \frac{Pl}{8}.$$

Сличая этот результат с результатом, полученным в примере 67, мы видим, что наибольший изгибающий момент от нагрузки, равномерно распределенной по длине балки, вдвое меньше наибольшего изгибающего момента, получающегося при нагрузке той же величины, но сосредоточенной в одной точке — в середине балки.

Поэтому для балки выгодно сосредоточенную нагрузку заменять распределенной.

На фиг. 192, b дана эпюра изгибающих моментов M . Концы отрезков, изображающих моменты, лежат на кривой, называемой параболой.

Пример 70. Балка, заделанная с одной стороны, несет на свободном конце нагрузку P ; длина балки равна l (фиг. 193). Найти $M_{\max}$.

Балку такого типа называют консолью. Для определения изги-

¹⁾ Доказательство. К выражению $(l-x)x = lx - x^2$ прибавим и вычтем $\frac{l^2}{4}$.

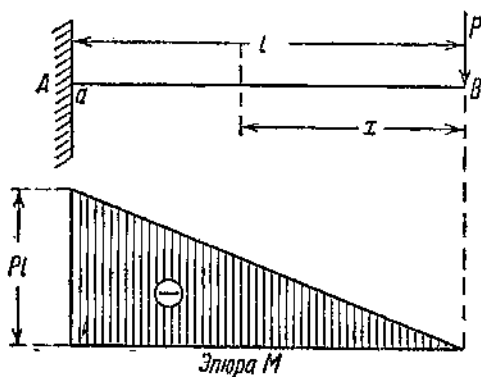
Будем иметь: $(l-x)x = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4} + lx - x^2 = \frac{l^2}{4} - \left(\frac{l}{2} - x \right)^2$. Наибольшая величина выражений $(l-x)x$ получится, когда вычитаемое будет равно нулю или когда $x = \frac{l}{2}$.

бающего момента M в любом сечении здесь удобнее отсчитывать расстояние от точки B влево (чтобы не определять опорных реакций в заделке). Тогда

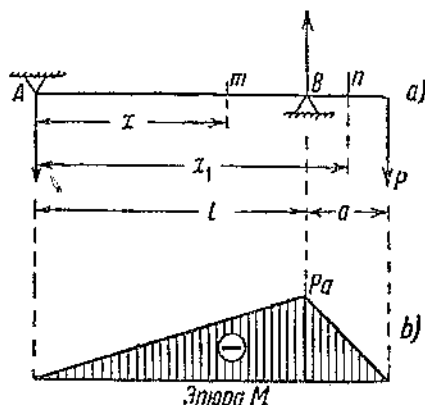
$$M_x = -Px.$$

Знак минус получается потому, что при рассмотрении равновесия правой части M и Q получаются обратного направления (см. часть cd балки на фиг. 188, c), следовательно, и обратных знаков. В конечном выводе нам важно будет иметь абсолютное значение максимального момента, и знака его в окончательной формуле мы не будем писать.

Если мы возьмем $x=0$ (сечение под силой P), то $M = -P \cdot 0 = 0$. Начнем перемещать сечение от точки B к заделке A . Тогда x будет



Фиг. 193.



Фиг. 194.

увеличиваться; следовательно, будет возрастать и M . Наибольшего значения x достигнет в сечении у заделки ($x=l$); следовательно, здесь будет и наибольший момент

$$M_{\max} = P \cdot l.$$

Опасным сечением будет крайнее сечение (a) у заделки. В балке постоянного сечения разрушение происходит обычно только в этом сечении.

Пример 71. Найти $M_{\max}$ и опасное сечение балки, изображенной на фиг. 194 (балка с консолью).

Реакции A и B определим из условий равновесия

$$-A + B - P = 0,$$

$$-Al + Pa = 0,$$

откуда получим

$$A = \frac{Pa}{l}, \quad B = P + A = P + \frac{Pa}{l} = \frac{Pl + Pa}{l} = \frac{P(l+a)}{l}.$$

Составляем выражение для изгибающего момента в произвольных сечениях m и n (идем слева):

$$M_m = -Ax; \quad M_n = -Ax_1 + B(x_1 - l).$$

Оба момента делаются наибольшими при $x = x_1 = l$; т. е. в сечении на опоре B . Здесь мы имеем

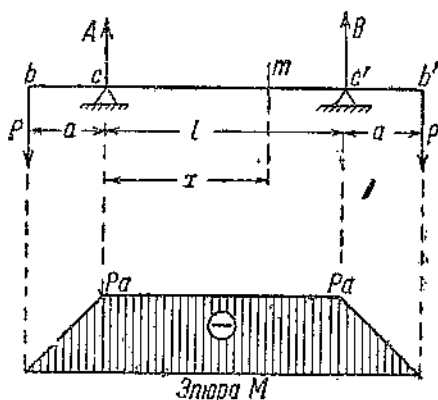
$$M_{\max} = Al = \frac{Pa \cdot l}{l} = Pa.$$

Следовательно, опасное сечение находится над опорой B . На фиг. 194, b изображена эпюра изгибающих моментов M .

Пример 72. Найти $M_{\max}$ и опасное сечение балки, изображенной на фиг. 195 (балка с двумя консолями).

Ввиду равенства и симметрии расположения сил P реакции опор одинаковы и равны

$$A = B = P.$$



Фиг. 195.

Части балки bc и $b'c'$ в отношении изгибающего момента M надо рассматривать как консоли. В сечении b момент M будет равен нулю, в сечении c M будет наибольшим: $M_c = -Pa$. То же самое будет и для части b_1c_1 (в этом легко убедиться, если идти справа). Выясним, как будет изменяться M для части балки между опорами. Здесь мы имеем

$$M_x = -P(a + x) + Ax,$$

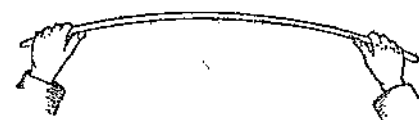
так как $A = P$, то

$$M_x = -Pa - Px + Px = -Pa,$$

т. е. M между опорами A и B сохраняет постоянное, наибольшее для данного нагружения значение $-Pa$. Итак,

$$M_{\max} = Pa,$$

Следовательно, любое сечение между точками A и B может быть принято за опасное, и поэтому при указанном способе нагрузки можно утверждать, что если силы P будут достаточно велики, то балка сломается где-нибудь между точками A и B , но где именно — определить нельзя. Фактически излом балки произойдет в том месте между A и B , где имеется какой-нибудь местный недостаток материала.



Фиг. 196.

Балка, нагруженная указанным образом, проявляет еще одно очень интересное свойство: она изгибается между опорами по дуге окружности (AB будет дугой окружности, фиг. 196). Этим обстоятельством пользуются для вычерчивания дуг большого радиуса: взяв длинную тонкую линейку за концы, большими пальцами упрутся в линейку (большие пальцы играют роль опор A и B). Тогда линейка располагается по дуге

окружности. Регулируя нажатие рук (т. е. величину сил P), легко добиться того, чтобы дуга AB имела желаемый радиус.

§ 94. Определение поперечной силы для разных случаев загрузки. Как уже было сказано в § 77, отыскание максимального значения поперечной силы необходимо для определения касательных напряжений, возникающих при сдвиге волокон в изгибаемой балке. Эти напряжения необходимо всегда учитывать и проверять в балках составного сечения (клепаная балка и т. п.), в балках же обычного профильного железа (стандартного) они всегда значительно меньше нормальных, а потому обычно проверке не подлежат.

Покажем на примерах, как определяется поперечная сила в разных случаях загрузки. При этом мы увидим, что для рассмотренных балок то сечение, в котором поперечная сила равна нулю или переходит скачком от положительных к отрицательным значениям, может быть опасным сечением, т. е. в нем может получиться наибольший изгибающий момент.

Пример 73. Балка свободно лежит на двух опорах и нагружена силой $P=3\text{ т}$, приложенной на расстоянии $b=2\text{ м}$ от правого конца (фиг. 197). Найти наибольшее значение поперечной силы.

Определим сначала опорные реакции A и B . Составляем уравнения равновесия: 1) сумма всех сил, действующих на балку, должна быть равна нулю:

$$A - P + B = 0;$$

2) сумма моментов всех сил относительно точки B равна нулю:

$$Al - Pb = 0.$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными A и B , получаем

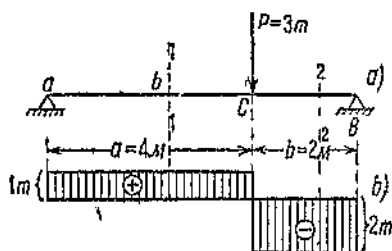
$$A = \frac{Pb}{l} = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1 \text{ т}, \quad B = P - A = 3 - 1 = 2 \text{ т}.$$

Возьмем сечение между точками приложения сил A и P (сечение 1—1) и найдем для него поперечную силу. Из равновесия левой части ab следует

$$Q_1 = A = 1 \text{ т}.$$

Если мы будем перемещать сечение между силами A и P , величина Q не изменится, так как слева никакие новые силы не прибавляются. Следовательно, на участке между A и P поперечная сила Q имеет постоянное значение, в нашем случае равное $Q=1\text{ т}$.

Возьмем второе сечение 2—2. Проще рассмотреть равновесие правой



Фиг. 197.

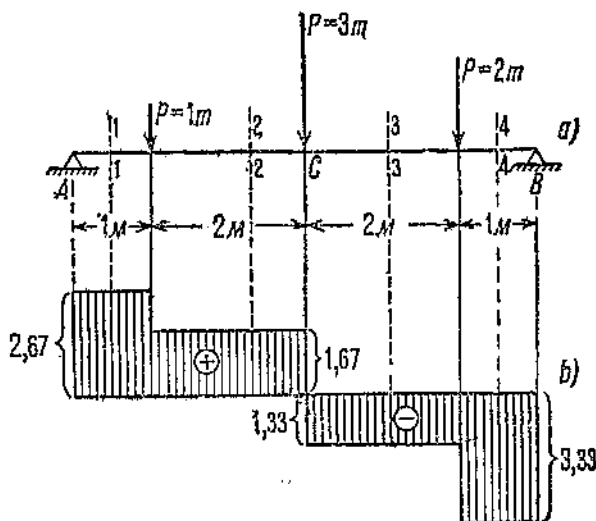
части (вспомним, что для правой части поперечная сила Q будет иметь обратный знак); получим

$$Q_2 = -B = -2 \text{ т.}$$

Проверим это, рассмотрев равновесие левой части; получаем

$$Q_2 = A - P = 1 - 3 = -2 \text{ т.}$$

Результаты, как видим, совпадают; следовательно, решение правильное. На участке между B и P поперечная сила Q_2 имеет также постоянное значение, но равное теперь $Q_1 = -2 \text{ т.}$ Для наглядности отло-



Фиг. 198.

жим для каждого сечения значения Q в виде ординат от прямой, параллельной оси балки, причем учтем знаки: положительные ординаты отложим вверх, а отрицательные вниз. Тогда получим следующее построение (фиг. 197, б), которое называется элюрой поперечных сил. Это построение очень наглядно отражает закон изменения поперечной силы от сечения к сечению, так как каждая вертикальная ордината соответствует значению Q для данного сечения. Сечение c под силой P , в котором Q делает скачок, имеет максимальный изгибающий момент (в этом мы уже убедились на примерах, разобранных раньше) и, следовательно, является опасным сечением. В нашем случае мы имеем

$$M_{\max} = A \cdot a = 1 \cdot 4 = 4 \text{ тм} = 400\,000 \text{ кгсм.}$$

Пример 74. Балка нагружена силами $P_1 = 1 \text{ т}$, $P_2 = 3 \text{ т}$ и $P_3 = 2 \text{ т}$; расстояния точек приложения грузов указаны на фиг. 198, а. Построить эпюру поперечных сил, найти опасное сечение и определить $M_{\max}$

Составляя условия равновесия, найдем опорные реакции A и B . Получаем

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

или

$$A + B - 1 - 3 - 2 = 0,$$

$$A \cdot 6 - 1 \cdot 5 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 0,$$

откуда

$$A = \frac{16}{6} \approx 2,67 \text{ т}, \quad B = 6 - 2,67 = 3,33 \text{ т}.$$

Переходя к определению поперечной силы, получаем, идя слева:

Для сечения 1—1: $Q_1 = A = 2,67 \text{ т},$

„ „ 2—2: $Q_2 = A - P_1 = 2,67 - 1 = 1,67 \text{ т},$

„ „ 3—3: $Q_3 = A - P_1 - P_2 = 2,67 - 1 - 3 = -1,33 \text{ т},$

„ „ 4—4: $Q_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 = 2,67 - 1 - 3 - 2 = -3,33 \text{ т}.$

Проверка для Q_4 , если идти справа, дает $Q_4 = -B = -3,33 \text{ т}$, т. е. одинаковый результат. Строим эпюру поперечных сил (фиг. 198, б). Поперечная сила меняет свой знак под силой P_2 в сечении C , — здесь и будет опасное сечение. Изгибающий момент здесь равен

$$M_{\max} = A \cdot 3 - P_1 \cdot 2 =$$

$$= 2,67 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 8,01 - 2 = 6,01 \text{ тм} = 600\,000 \text{ кгсм}.$$

Пример 75. Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой $q \text{ кг/м}$. Построить эпюру поперечных сил и найти опасное сечение (фиг. 199).

Ввиду симметрии нагрузки опорные реакции одинаковы и равны каждая

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

Поперечная сила в любом сечении 1—1 равна

$$Q = A - qx.$$

Когда $x = 0$ имеем:

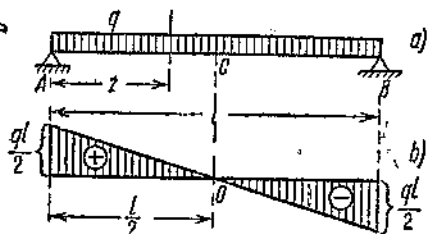
$$Q = A = \frac{ql}{2}.$$

Далее,

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \quad Q = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad Q = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}.$$

Так как нагрузка прибавляется от сечения к сечению постепенно, то промежуточные значения поперечной силы изменяются непрерывно, как



Фиг. 199.

ординаты наклонной прямой (фиг. 199, б). Опасное сечение будет там, где $Q = 0$, т. е. в сечении с. Изгибающий момент здесь равен

$$M_{\max} = A \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql \cdot l}{2 \cdot 2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Мы видим, что при загрузении балки сосредоточенными грузами $M_{\max}$ всегда бывает в сечении под одним из грузов. В этом сечении Q изменяется скачком от положительного значения ординаты к отрицательному (при грузах взятого нами направления), проходя через нулевое значение. При загрузении же равномерно распределенной нагрузкой $M_{\max}$ получается в том сечении, где $Q = 0$ (но скачка не имеет).

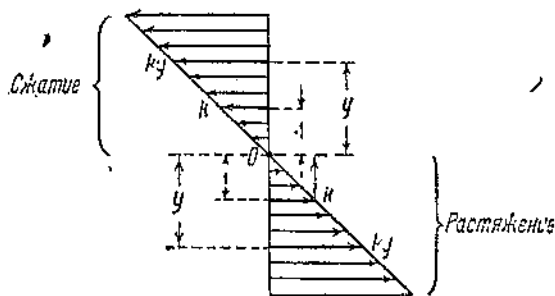
Если балка одновременно загружена и равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенными грузами, то определение изгибающего момента необходимо делать для сечений с нулевым значением Q , а также для всех сечений, где имеется скачок Q от положительных ординат к отрицательным или наоборот. В балках с заделанными концами необходимо, кроме указанных сечений, определять изгибающий момент и в концевых сечениях (у заделки).

§ 95. Зависимость между нормальным напряжением и изгибающим моментом. Перейдем теперь к установлению зависимости между изгибающим моментом M и нормальными напряжениями в балке.

Если мы вспомним формулы для напряжений при растяжении (сжатии) и сдвиге $\left(\sigma = \frac{P}{F}, \quad \tau = \frac{Q}{F} \right)$, то увидим, что напряжения прямо пропорциональны действующей силе P и обратно пропорциональны площади поперечного сечения F . Примерно аналогичную зависимость нормальных напряжений от внешних сил, формы и площади поперечного сечения дает формула нормальных напряжений при изгибе. Необходимо, однако, заметить, что в случае изгиба нельзя говорить о величине нормального напряжения в сечении: опытные данные показывают, что при изгибе нормальные напряжения распределяются по поперечному сечению не равномерно, напротив, их величина зависит от расстояния волокна балки от нейтральной оси. Наибольшие нормальные напряжения получаются в крайних от оси волокнах; нулевое значение нормальное напряжение имеет на нейтральной оси (поэтому волокна, близко расположенные от оси балки, можно без ущерба для прочности или совсем вынуть, как это делают в полых трубах и валах, или частично ослабить, как это имеет место в двутавре, швеллере и некоторых других профилях железа). Что касается волокон, находящихся между нейтральной осью и наиболее от нее удаленными точками сечения, то можно считать, что величина этих напряжений увеличивается пропорционально расстоянию волокна от нейтральной оси; если напряжение волокна, находящегося на расстоянии от нейтральной оси, равно единице, будет k (фиг. 199), то напряжение волокна, удаленного на y от нейтральной оси, будет ky . Изгибающий момент в данном сечении равняется сумме моментов пар сил, образуемых в балках с симметричным сечением усилиями в волокнах, равноудаленных от нейтральной оси.

Попробуем теперь составить сумму всех этих моментов. Пусть площади сечений отдельных волокон будут $s_1, s_2, s_3, \dots$ их расстояния от

нейтральной оси $y_1, y_2, y_3, \dots$, а напряжения в этих волокнах соответственно $ky_1, ky_2, ky_3, \dots$. Пусть O на фиг. 200 будет точкой пересечения нейтральной оси сечения с плоскостью чертежа. Возьмем относительно этой оси сумму моментов всех усилий сжатых (вверху) и растянутых (внизу) волокон. Нетрудно заметить, что все эти моменты, взятые относительно точки O , будут иметь один и тот же знак (на чертеже против стрелки часов). Чтобы получить усилие какого-нибудь волокна с площадью s , нам нужно помножить величину этой площади на напряжение этого волокна, равное ky , получаем силу ksy . Момент этой силы относительно точки O будет равняться произведению этой силы на плечо y ,



Фиг. 200.

т. е. ksy^2 . Сумма всех таких моментов должна дать изгибающий момент M_z в этом сечении; это дает нам

$$M_z = ks_1 y_1^2 + ks_2 y_2^2 + ks_3 y_3^2 + \dots$$

Вынося общий множитель k за скобки, мы получим

$$M_z = k(s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + s_3 y_3^2 + \dots).$$

Если бы в выражении, стоящем в скобках, вместо площадей стояли массы $m_1, m_2, m_3, \dots$ и т. д., то мы получили бы выражение, уже знакомое нам из главы 13, где мы назвали его моментом инерции тела вокруг оси вращения. Заметим, между прочим, что и в данном случае при изгибе каждое сечение балки несколько поворачивается вокруг нейтральной оси. Полученное выражение, равное сумме произведений площадей волокон на квадраты их расстояний до оси вращения, называют тоже моментом инерции относительно данной оси, но уже не тела, а площади поперечного сечения балки, поскольку у нас вместо масс стоят площади сечений волокон. Если ось мы обозначим через $x-x$, то момент инерции всей площади поперечного сечения относительно этой оси будем обозначать через J_x . Таким образом

$$J_x = s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + s_3 y_3^2 + \dots$$

Введя понятие о моменте инерции площади сечения, мы можем наше уравнение переписать в виде

$$M_z = k \cdot J_x.$$

Поскольку форма и величина поперечного сечения нам даны, момент инерции его J_x мы можем считать известным. В таком случае мы можем определить напряжение k на единице расстояния от нейтрального слоя:

$$k = \frac{M_z}{J_x}.$$

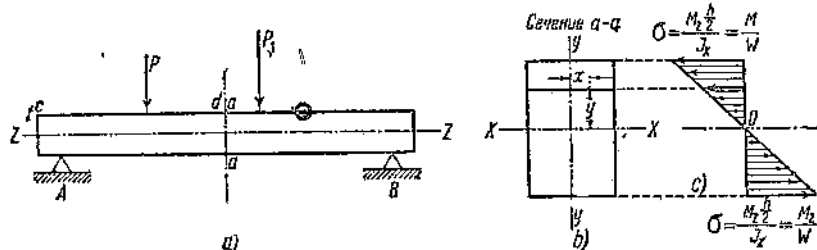
Напряжение же σ в любом волокне, лежащем на расстоянии y от нейтральной оси, будет равно ky , или

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_x}. \quad (47)$$

В крайних волокнах, где $y = y_{\max}$, напряжения будут наибольшими и равными

$$\sigma_{\max} = k \cdot y_{\max} = \frac{M_z y_{\max}}{J_x}.$$

Если бы силы лежали в плоскости оси $x-x$ (фиг. 201, б), то изгиб происходил бы в плоскости $x-x$ и сечение поворачивалось бы вокруг



Фиг. 201.

оси $y-y$, которая в данном случае была бы нейтральной осью, и формула нормальных напряжений переписалась бы в таком виде:

$$\sigma = \frac{M_z x}{J_y}.$$

Расшифруем эти формулы. В них M_z есть изгибающий момент (равный сумме моментов внешних сил относительно оси бруса z) в том сечении ($a-a$, фиг. 201, а), где определяются нормальные напряжения; J_x , J_y суть моменты инерции рассматриваемого сечения (фиг. 201, б) относительно нейтральных осей; y и x — расстояния волокна от соответствующей нейтральной оси. В данном сечении M_z , J_x и J_y суть величины постоянные; переменными будут только y и x . Написанные формулы можно поэтому истолковать следующим образом. При изгибе нормальные напряжения распределяются по сечению не равномерно (как при растяжении, сжатии и сдвиге), а зависят от расстояния волокна от нейтральной оси (y или x). Для нейтральной оси y и x равны нулю; следовательно, здесь равно нулю и напряжение. Для крайних волокон в балках с симметричным сечением $y_{\max} = \pm \frac{h}{2}$ (h — высота сечения) и напряжения

здесь равны $\pm \sigma_{\max} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{J}$. Для всех промежуточных волокон σ сохраняет промежуточные значения между нулем на нейтральной оси и наибольшими значениями $\pm \sigma_{\max} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{J}$ для крайних волокон.

Эту зависимость для наглядности изобразим графически для любого сечения взятой выше балки (прямоугольного сечения). От прямой, перпендикулярной к оси x (фиг. 201, с) отложим отрезки, перпендикулярные к этой прямой и равные в принятом нами масштабе полученным значениям напряжений. Крайние отрезки (ординаты) будут равны

$$\sigma = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{J};$$

на нейтральной оси мы получим нуль, а постепенность изменения последующих ординат отразит наклонная прямая, проведенная через концы наибольших значений ординат и точку O нейтральной оси. Для верхней части полученной диаграммы нормальных напряжений поставим знак минус (так как сжатие можно рассматривать как отрицательное растяжение) и стрелки направим к сечению (будем рассматривать сечение, принадлежащее левой части cd балки), для нижней — плюс и стрелки направим от сечения. Теперь эту диаграмму можно читать так: в верхних волокнах бруса имеет место сжатие, в нижних — растяжение. Наиболее напряженные волокна — крайние. Отсутствуют нормальные напряжения в слое на нейтральной оси. Для любого волокна на расстоянии y от нейтральной оси нормальное напряжение по величине будет равно соответствующей ординате из диаграммы.

Формулу

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{J_x}$$

можно переписать так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_x : y_{\max}}.$$

Принято обозначать $J_x : y_{\max}$, т. е. момент инерции, деленный на максимальное расстояние от нейтральной оси, через W_x и называть моментом сопротивления изгибу:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \quad (48)$$

Поэтому формула для $\sigma_{\max}$ примет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_x}.$$

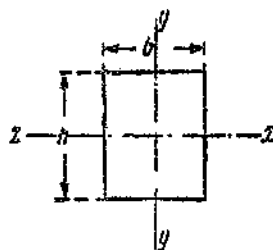
§ 96. Моменты инерции и моменты сопротивления наиболее употребительных сечений. Для вычисления моментов инерции различных сечений требуется знание высшей математики (дифференциального и интегрального исчисления). Поэтому мы приведем готовые значения для

моментов инерции и моментов сопротивления для некоторых наиболее часто встречающихся сечений.

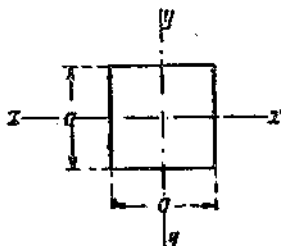
1. Прямоугольник (фиг. 202):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad W_x = J_x : \frac{h}{2} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6};$$

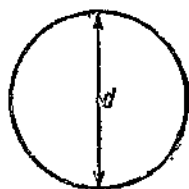
$$J_y = \frac{h b^3}{12}; \quad W_y = J_y : \frac{b}{2} = \frac{h b^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{h b^2}{6}.$$



Фиг. 202.



Фиг. 203.

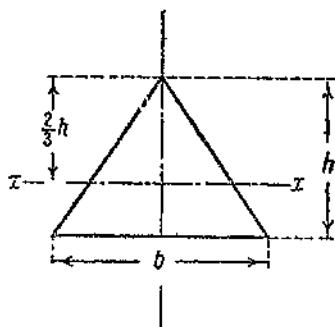


Фиг. 204.

2. Квадрат (фиг. 203):

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}; \quad W_x = W_y = \frac{a^4 \cdot 2}{12 \cdot a} = \frac{a^3}{6}.$$

3. Круг (фиг. 204). Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, момент инерции равен



Фиг. 205.

$$J = \frac{\pi d^4}{64},$$

момент сопротивления

$$W = \frac{J}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3.$$

4. Треугольник (фиг. 205). Момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести (находится на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от вершины треугольника) и параллельной основанию, равен

$$J_x = \frac{b h^3}{36}.$$

Соответствующий момент сопротивления равен

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b h^3}{36} : \frac{2h}{3} = \frac{b h^3 \cdot 3}{36 \cdot 2h} = \frac{b h^2}{24}.$$

Моменты инерции и моменты сопротивления профильного железа (двутавр, тавр, швеллер и пр.) указываются в таблицах соответствующих

профилей, имеющихся в любом подробном курсе сопротивления материалов, а также в технических справочниках.

§ 97. Расчетная формула на изгиб. Допускаемые напряжения. Как мы видели в предыдущем параграфе, моменты инерции J и моменты сопротивления W зависят от формы и размеров поперечного сечения. Поэтому полученная в § 95 формула нормальных напряжений для крайних волокон

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

подтверждает ту аналогию с формулами, растяжения (сжатия) и сдвига, о которой мы говорили в начале § 95. Максимальные нормальные напряжения пропорциональны изгибающему моменту M (моменту внешних сил относительно сечения) и обратно пропорциональны W (моменту сопротивления сечения, отражающему его поперечные размеры).

Так как W есть величина постоянная (для балки постоянного сечения), то наибольшие напряжения будут в том сечении, где изгибающий момент имеет максимальное значение $M_{\max}$ (поэтому это сечение и называется опасным); здесь мы имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

Условие прочности балки при изгибе требует, чтобы эти наибольшие напряжения не превышали тех, которые могут быть допущены для данного материала, т. е.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq R_b, \dots, \quad (49)$$

где R_b есть допускаемое напряжение материала при изгибе.

В основном R_b совпадают с допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие (так как эти напряжения возникают от деформаций растяжения и сжатия). Значения R_b для некоторых материалов приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 10.

Значения допускаемых напряжений R_b на изгиб для некоторых материалов.

А. Прокатный металл.

Сталь 3	1 400 кг/см ²
Сталь 5 (повыш.)	1 750 "
Сталь спец.	2 100 "

Б. Литейный металл.

Сталь Л1	1 200 кг/см ²
Сталь Л2 (пониж.)	1 500 "
Сталь Л2	1 800 "
Сталь Л5	2 000 "
Чугун Ч1	1 000 "

В. Дерево.

Сосна (вдоль волокон)	110 кг/см ²
Дуб	130 "

При пользовании расчетной формулой (49) надо всегда иметь в виду ту плоскость, в которой приложены силы и соответствующее положение нейтральной оси (в рассматриваемых нами случаях изгиба нейтральная ось сечения будет перпендикулярна к плоскости действия сил).

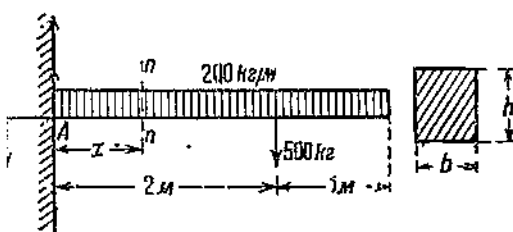
Так, если силы действуют в плоскости $y-y$, а нейтральной осью сечения будет x , формула переписывается в таком виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq R_b;$$

если же силы действуют в плоскости $x-x$ (фиг. 200, б), а нейтральной осью будет y , то

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_y} \leq R_b.$$

§ 98. Примеры. Пример 76. На деревянную балку (сосновую) прямоугольного сечения длиной 3 м, заделанную одним концом в стену,



Фиг. 206.

действует сила в 500 кг, приложенная на расстоянии 2 м от опоры, и равномерно распределенная нагрузка, величина которой на каждый метр длины балки равна 200 кг (фиг. 206). Найти прочные размеры балки, причем балка должна быть наивыгоднейшей¹⁾.

Как мы уже знаем, опасное сечение консоли при загрузке силами, действующими в одном направлении, будет в заделке. Составляем выражение M для сечения в заделке (идем справа, чтобы не отыскивать реакции):

$$M_{\max} = M_A = 500 \cdot 200 + 200 \cdot 3 \cdot 150 = 190\,000 \text{ кгсм.}$$

Прочные размеры сечения определяются из формулы

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R_b}.$$

Для сосны $R_b = 110 \text{ кг/см}^2$. Поэтому

$$W_x = \frac{190\,000}{110} = 1728 \text{ см}^3;$$

¹⁾ Балка прямоугольного сечения называется наивыгоднейшей (в смысле сопротивления изгибу), если отношение высоты прямоугольника h к основанию b равно 7:5 (при таком сопротивлении сторон момент сопротивления балки оказывается наибольшим по сравнению с моментами сопротивления других балок прямоугольного сечения, которые можно было бы вытесать из того же бревна).

так как для прямоугольного сечения $W_x = \frac{bh^2}{6}$, а по условию задачи $\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$, то имеем

$$W_x = \frac{5 \cdot h \cdot h^2}{7 \cdot 6} = \frac{5h^3}{42} = 1728,$$

откуда

$$h = \sqrt[3]{\frac{1728 \cdot 42}{5}} = \sqrt[3]{14500} \approx 25 \text{ см.}$$

Зная h , найдем b , т. е. ширину сечения, из условия $\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$. Получаем $b = \frac{5}{7}h \approx 18 \text{ см.}$ Итак, прочные размеры балки найдены.

Пример 77. Рассчитать болтовое соединение, изображенное на фиг. 207, если действующая сила равна 4000 кг.

Внутренний диаметр нарезки вертикального болта находим по формуле

$$F = \frac{P}{R_z}.$$

Допускаемое напряжение R_z принимаем равным 600 кг/см². Отсюда

$$F = \frac{4000}{600} \approx 6,67 \text{ см}^2.$$

Для $F = 6,84 \text{ см}^2$ по таблице ОСТ 1260 имеем

$$d_1 = 29,5 \text{ мм}; d = 34,56 = 1\frac{3}{8}''.$$

Число нарезок в дюйме равно шести.

Определим внутренний диаметр нарезки горизонтального винта. Последний изгибается моментом

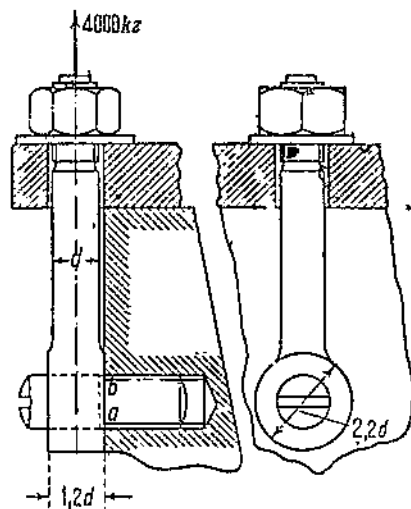
$$\begin{aligned} M &= P \cdot \frac{1,2d}{2} = 4000 \cdot \frac{1,2d}{2} = \\ &= 4000 \cdot 0,6 \cdot 34,56 \approx 84000 \text{ кг см} = 8400 \text{ кгсм}. \end{aligned}$$

Прочные размеры сечения ab найдутся из условия

$$W_x = \frac{M_x}{R_b}.$$

Для литого железа допускаемое напряжение $R_b = 600 \text{ кг/см}^2$. Поэтому

$$W_x = \frac{8400}{600} = 14 \text{ см}^3.$$



Фиг. 207.

В § 96 о моментах инерции было указано, что момент сопротивления круга приблизительно равен $0,1d^3$. Следовательно, полагая

$$W_x = 0,1d^3,$$

получим

$$0,1d^3 = 14,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{140} \approx 5,2 \text{ см} \approx 52 \text{ мм}.$$

Такого винта в таблице ОСТ 1260 не имеется. Берем ближайший больший $d_1 = 49,019 \text{ мм}$; $d = 56,62 \text{ мм} = 2\frac{1}{4}$ дюйма.

Проверять сечение ab на срез силой 4000 кг нет смысла, так как изгиб здесь более опасен, чем срез.

Пример 78. Балкон шириною 1,6 м, длиною 5 м поддерживается пятью железными балками (фиг. 208). Нагрузка на 1 м² балкона

равна 500 кг. Рассчитать балки и указать, какие обойдутся дешевле: двутаврового сечения или корытного, причем все балки должны быть одинаковые. Площадь балкона равна

$$1,6 \times 5 = 8 \text{ м}^2.$$

Общее давление на него составляет

$$500 \times 8 = 4000 \text{ кг}.$$

Эта нагрузка выдерживается пятью балками, причем распределяется она на балки не одинаково. На фиг. 208, б жирными

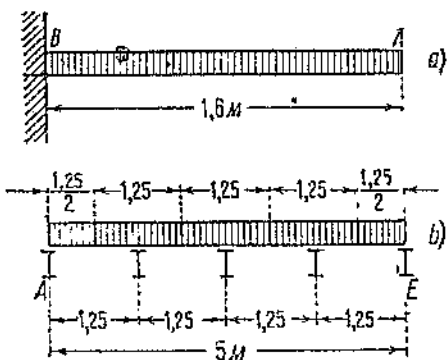
черточками показано, какой участок нагрузки по длине балкона приходится на каждую балку: три средние балки несут нагрузку с полосы, равной полной ширине пролета между балками (1,25 м), тогда как крайние (А и Е) — только с половины пролета ($\frac{1,25}{2}$). Рассчитывать придется только наиболее загруженные балки, т. е. средние.

На каждую из средних балок приходится $\frac{1}{4}$ всей нагрузки, т. е. $\frac{4000}{4} = 1000 \text{ кг}$. Эту же величину можно получить другим способом вычисления: площадь полосы, с которой приходится нагрузка на каждую среднюю балку, равна

$$1,25 \times 1,6 = 2 \text{ м}^2.$$

Нагрузка на 1 м² балкона равна 500 кг. Следовательно, полная нагрузка на среднюю балку будет равна

$$2 \cdot 500 = 1000 \text{ кг}.$$



Фиг. 208.

Теперь задача сводится к такой: рассчитать балку длиной 1,6 м, несущую нагрузку в 1000 кг. Опасное сечение будет в В (фиг. 208, а). Расчет ведем по формуле

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R_b},$$

Мы имеем

$$M_{\max} = 1000 \cdot 0,8 = 800 \text{ кгм} = 80\,000 \text{ кг/см}.$$

Поэтому, принимая допускаемое напряжение $R_d = 1000 \text{ кг/см}^2$, получаем

$$W_x = \frac{80\,000}{1000} = 80 \text{ см}^3.$$

Швеллер (ближайший больший) № 14 с $W_x = 89,2 \text{ см}^3$ весит 16,42 кг/м (вес погонного метра). Двутавр (ближайший больший) № 14 с $W_x = 81,3 \text{ см}^3$ весит 14,2 кг/м.

Более легкими, а потому и более дешевыми оказались двутавры. Следовательно, для поддержки балкона надо взять двутавры № 14.

Пример 79. Рассчитать железную балку двутаврового сечения, нагруженную, как указано на фиг. 209.

Для нахождения реакций опор составляем условия равновесия сил и моментов, приложенных к балке. Первое условие дает

$$A - 2000 + B - 1000 = 0$$

или

$$A + B = 3000$$

Для составления второго условия берем алгебраическую сумму моментов всех сил относительно точки В; получаем

$$A \cdot 240 - 2000 \cdot 160 + 1000 \cdot 40 = 0,$$

отсюда

$$A = \frac{2000 \cdot 160 - 1000 \cdot 40}{240} = 1167 \text{ кг},$$

следовательно,

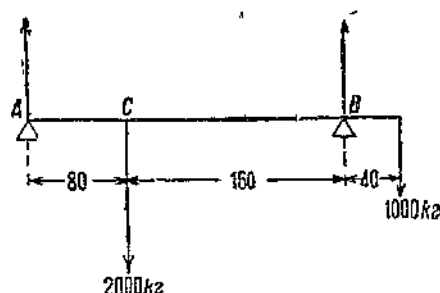
$$B = 3000 - A = 3000 - 1167 = 1833 \text{ кг}.$$

Опасное сечение на основании сказанного в § 93, будет либо в С, либо в В. В сечении В изгибающий момент равен

$$M_B = 1000 \cdot 40 = 40\,000 \text{ кгсм},$$

а в сечении С:

$$M_C = A \cdot 80 = 1167 \cdot 80 = 93\,360 \text{ кгсм}.$$



Фиг. 209.

Как видим, в C изгибающий момент больше; следовательно, опасное сечение будет здесь. Из условия прочности имеем

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R_b}.$$

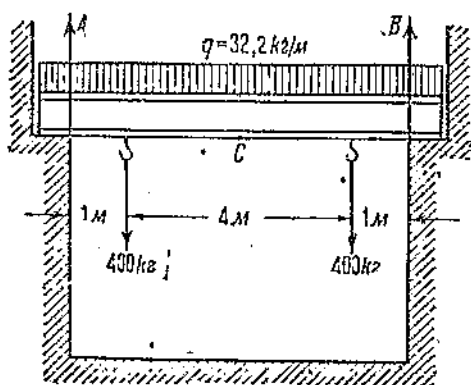
Приняв $R_b = 1000 \text{ кг/см}^2$, получим

$$W_x = \frac{93360}{1000} = 93,36 \text{ см}^3.$$

В таблице двутаврового железа находим ближайший профиль: двутавр № 16 с моментом сопротивления $W_x = 113,6 \text{ см}^3$.

Проверять напряжение незначит, так как взятый момент сопротивления $W_x = 113,6 \text{ см}^3$ больше требуемого, равного $93,36 \text{ см}^3$.

Пример 80. На бойне в кладовой для хранения мясных туш положены на выступы стен старые рельсы казенного типа (вес погонного метра $32,2 \text{ кг}$, $W_x = 119 \text{ см}^3$). На каждый рельс желательно повесить по две туши весом до 400 кг (фиг. 210). Выдержат ли рельсы?



Фиг. 210.

Нагрузка от собственного веса равна $32,2 \cdot 6 = 193,2 \text{ кг}$. Полная нагрузка будет $400 + 400 + 193,2 = 993,2 \text{ кг}$. Ввиду симметричного расположения нагрузки реакции опор будут одинаковы и каждая равна

$$A = B = 496,6 \text{ кг}.$$

Если бы рельс был невесом, то все сечения между точками привеса туш были бы опасными (ср. с примером 72). Если бы туши не были подвешены, а рельс находился только под действием собственного веса, то опасное сечение было бы в середине его, в точке C (см. пример 69). Отсюда нетрудно понять, что если все указанные силы будут действовать одновременно, то опасное сечение будет в C . Поэтому

$$M_{\max} = +496,6 \cdot 3 - 400 \cdot 2 - 32,2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \approx 54500 \text{ кгсм}.$$

Из формулы $\sigma = \frac{M}{W_x}$ имеем

$$\sigma = \frac{54500}{119} \approx 460 \text{ кг/см}^2.$$

Для новых рельсов допускаемое напряжение на изгиб можно взять равным $R_b = 900 \text{ кг/см}^2$. Для старых следует взять около половины этого значения. Следовательно, в данном случае применение старых рельсов возможно.

Пример 81. Рассчитать основную балку наивыгоднейшего сечения, нагруженную, как показано на фиг. 211.

Очевидно, что

$$A = B = \frac{1000 + 1000 + 400 \cdot 5}{2} = 2000 \text{ кг.}$$

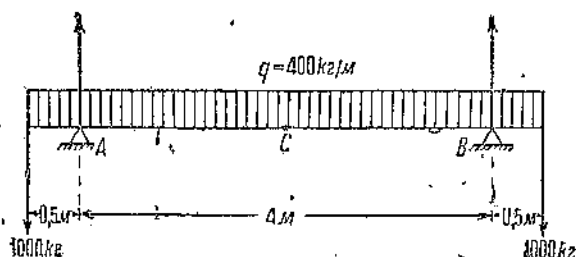
Опасное сечение балки будет либо в середине балки в C , либо в сечениях A и B (в обоих одновременно ввиду равенства сил и симметрии их расположения). Проверяем сечения C и A . Вычисляем для этого изгибающие моменты:

$$M_c = -1000 \cdot 2,5 + 2000 \cdot 2 - 400 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} = 250 \text{ кгм,}$$

$$M_A = -1000 \cdot 0,5 - 400 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} = -550 \text{ кгм.}$$

Так как нам важно абсолютное наибольшее значение M , то опасное сечение находится в A (а также в B).

Как было указано в примере 76, наивыгоднейшей называется балка прямоугольного сечения, стороны которого h (высота) и b (ширина)



Фиг. 211.

относится как 7:5. Для определения этого сечения будем исходить из формулы

$$W_x = \frac{M_A}{R_b}.$$

Для сосны $R_b = 90 \text{ кг/см}^2$. С другой стороны, для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{bh^3}{6}.$$

Приравняв правые части, подставляя вместо M_A его значение, найденное выше, и выражая h через b при помощи условия $\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$, получим

$$\frac{55000}{90} = \frac{b \cdot 49b^3}{6 \cdot 25},$$

откуда

$$b^3 = \frac{55000 \cdot 6 \cdot 25}{90 \cdot 49} \approx \frac{55000 \cdot 3}{90} = \frac{5500}{3}$$

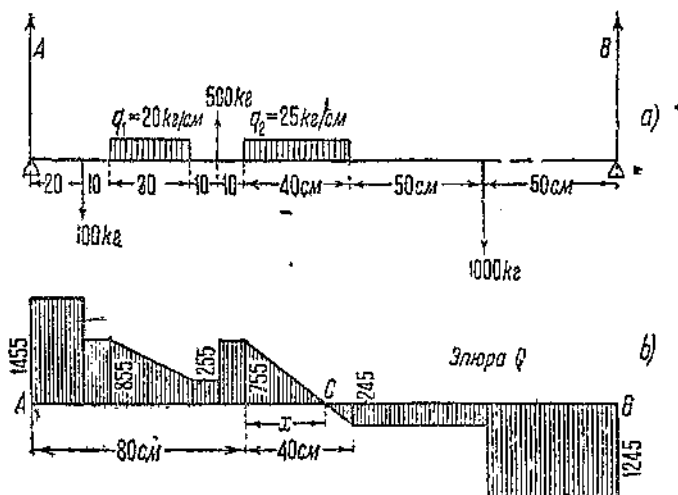
и

$$b = \sqrt[3]{\frac{5500}{3}} \approx 12,3 \text{ см.}$$

Берем $b = 13$ см. Тогда другая сторона прямоугольника будет равна

$$h = \frac{7}{5} b = \frac{7 \cdot 13}{5} \approx 18 \text{ см.}$$

Пример 82. Балка двутаврового сечения (№ 14, $W_x = 81,3 \text{ см}^3$) изгибается силами, указанными на фиг. 212, а. Определить наибольшее напряжение материала.



Фиг. 212.

Для определения реакций опор составляем условия равновесия. Уравнение сил дает:

$$A - 600 - 20 \cdot 80 + 500 - 25 \cdot 40 - 1000 + B = 0.$$

Уравнение моментов относительно точки B дает:

$$A \cdot 220 - 600 \cdot 200 - 20 \cdot 80 \cdot 175 + 500 \cdot 150 - 25 \cdot 40 \cdot 120 - 1000 \cdot 50 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, получим

$$A = 1455 \text{ кг, } B = 1245 \text{ кг.}$$

Чтобы найти опасное сечение, построим эпюру поперечных сил (фиг. 212, б). Опасное сечение будет в С. Положение сечения С определяется расстоянием x , которое нетрудно найти из подобия прямоугольных треугольников, имеющих общую вершину в С. Получаем

$$\frac{x}{755} = \frac{40 - x}{245},$$

откуда

$$x = 30,2 \text{ см.}$$

Таким образом опасное сечение находится на расстоянии $80 + 30,2 = 110,2$ см от левой опоры. Поэтому изгибающий момент

$$M_c = M_{\max} = 1455 \cdot 110,2 - 600 \cdot 90,2 - 20 \cdot 80 \cdot 65,2 + 500 \cdot 40,2 - 25 \cdot 30,2 \cdot \frac{30,2}{2} = 75600 \text{ кгсм.}$$

Подставляя в формулу $\sigma = \frac{M}{W_x}$ значения M и W_x , получаем

$$\sigma = \frac{75\,600}{81,3} \approx 930 \text{ кг/см}^2.$$

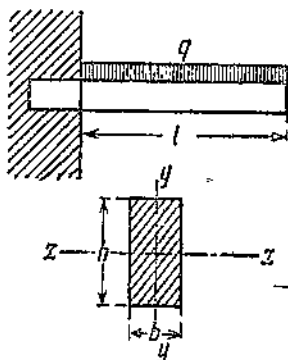
Итак, наибольшее напряжение материала оказалось равным 930 кг/см^2 , что для железа при спокойной нагрузке вполне допустимо.

Задачи.

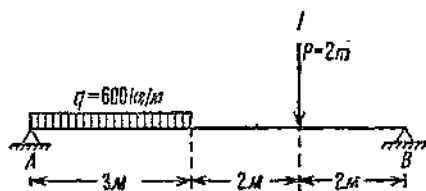
59. Деревянная балка длиной $l = 2 \text{ м}$ несет равномерно распределенную нагрузку $q = 400 \text{ кг/м}$ (фиг. 213). Найти прочные размеры балки, если она сделана прямоугольного сечения и отношение вы-

соты к ширине балки равно $\frac{h}{b} = 2$; допускаемое напряжение на изгиб $R_b = 100 \text{ кг/см}^2$.

Отв. $b = 11 \text{ см}$; $h = 22 \text{ см}$.



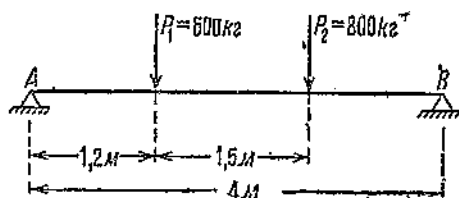
Фиг. 213.



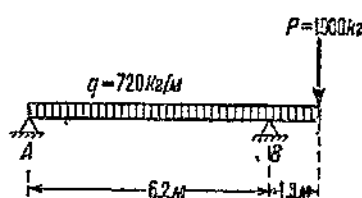
Фиг. 214.

60. Балка двутаврового сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = 600 \text{ кг/м}$ и сосредоточенной силой $P = 2 \text{ т}$ (фиг. 214). Найти опасное сечение и подобрать номер двутавра, если допускаемое напряжение $R_b = 1200 \text{ кг/см}^2$.

Отв. Двутавр № 24



Фиг. 215.



Фиг. 216.

61. Балка, свободно лежащая на двух опорах, подвергается изгибу от сосредоточенных сил: $P_1 = 600 \text{ кг}$, $P_2 = 800 \text{ кг}$. Пролет балки равен $l = 4 \text{ м}$ (фиг. 215). Найти реакции опор A и B и наибольший изгибающий момент $M_{\max}$.

Отв. $A = 680 \text{ кг}$; $B = 720 \text{ кг}$; $M_{\max} = 93\,600 \text{ кгсм}$.

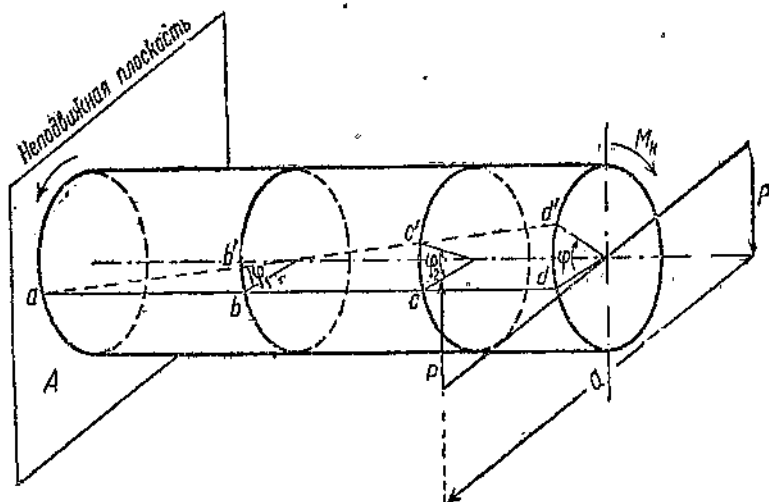
62. На консольную балку действуют равномерно распределенная нагрузка $q = 720 \text{ кг/м}$ и сосредоточенная сила на конце консоли $P = 1900 \text{ кг}$ (фиг. 216). Требуется построить эпюру поперечных сил Q , определить M_B и $M_{\max}$ в пролете балки.

Отв. $M_B = -307\,840 \text{ кгсм}$; $M_{\max} = 209\,000 \text{ кгсм}$.

ГЛАВА 21.

КРУЧЕНИЕ.

§ 99. Сущность деформации кручения. Угол кручения. Если к бруску с круглым сечением, заделанному с одного конца, приложить с другого конца пару сил, действующих в плоскости, перпендикулярной к оси бруска, то брусок получит деформацию, называемую кручением (фиг. 217). Момент пары, создающий кручение, называется крутящим моментом и обозначается через $M_{кр}$. В нашем случае $M_{кр} = P \cdot a$.



Фиг. 217.

Из условия равновесия следует, что в заделанном конце бруска должен появиться реактивный момент, равный по величине крутящему, но противоположного направления (против часовой стрелки).

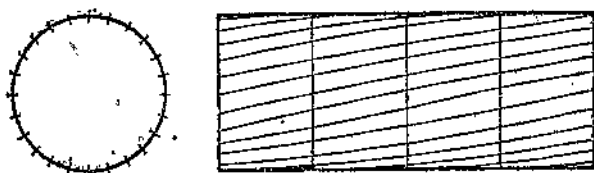
В условиях работы данного бруска ничего не изменится, если заделку устранить и приложить к концу А пару сил или несколько пар, дающих в сумме момент, равный по величине и направлению найденному реактивному моменту. В таких условиях будет находиться вращающийся вал, на котором один шкив передает вращение от двигателя (создает крутящий момент), а другой передает вращение станку (создает реактивный момент из-за сопротивления станка). Участок вала между шкивами будет испытывать деформацию кручения.

Рассмотрим, в чем состоит эта деформация. Если на боковой поверхности цилиндрического стержня, испытываемого на кручение, нанести сетку образующих, т. е. прямых, параллельных оси цилиндра, взятых на равных расстояниях друг от друга и окружностей, также равноудаленных друг от друга, то после деформации можно увидеть следующее (фиг. 218): 1) окружности, оставаясь окружностями прежнего диаметра,

поворачиваются одна относительно другой на некоторый угол; в связи с этим образующие цилиндра превращаются в винтовые линии; 2) расстояния между окружностями не изменяются.

На основании этих данных принимают, что 1) поперечные сечения стержня после деформации не выходят из своей первоначальной плоскости; 2) радиусы в сечениях не искривляются, а остаются прямыми; 3) расстояния между поперечными сечениями не меняются.

Поэтому мы можем представить себе стержень как бы составленным из отдельных жестких кружков, напизанных через их центры на общую ось. При деформации кручения эти кружки, не изменяя своей формы, поворачиваются один относительно другого. При этом длина всего стержня и диаметр не изменяются и ось цилиндра сохраняет свое первоначальное положение. В таком поворачивании сечений одного относительно другого нетрудно узнать деформацию сдвига, а следовательно, можно ожидать аналогии основных формул кручения с формулами сдвига.



Фиг. 218.

Угол поворота какого-либо сечения относительно закрепленного конца называется углом кручения (или углом закручивания) и обозначается греческой буквой φ . Экспериментальные исследования кручения показывают, что 1) до некоторого значения крутящего момента $M_{кр}$ угол кручения пропорционален крутящему моменту; 2) увеличение или уменьшение длины стержня пропорционально увеличивает или уменьшает угол кручения; 3) если увеличивать диаметр закручиваемого стержня, угол кручения быстро уменьшается (обратно пропорционально диаметру в четвертой степени). Эти опытные данные можно записать в виде следующей формулы:

$$\varphi = k \frac{M_{кр} l}{d^4},$$

где k есть коэффициент, зависящий от упругих свойств материала.

Попробуем теперь теоретически определить коэффициент k , стоящий в формуле для угла кручения φ ; этот вывод в дальнейшем послужит нам для вывода основной формулы для расчета на кручение.

На фиг. 219 AA' изображает расположенное на поверхности цилиндрического вала длины l и радиуса R волокно в его первоначальном положении до деформации кручения. После закручивания вала это волокно займет положение AB' , изогнувшись по винтовой линии, образующей угол β с первоначальным ее положением AA' . Если мы через точки A и B' проведем две проходящие через ось цилиндра плоскости $OO'AA'$ и $OO'BB'$, то угол AOB , измеряющий двугранный угол между этими плс-

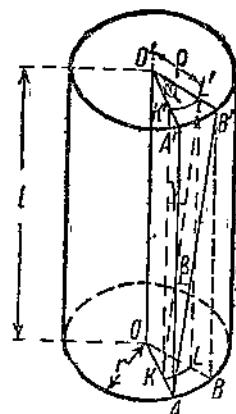
скостями, и будет искомый угол φ кручения. Нетрудно видеть, что по свойству винтовой линии (см. главу 4) одинаковым перемещениям по оси OO' соответствуют одинаковые повороты вокруг этой оси; иными словами, угол поворота φ будет возрастать пропорционально расстоянию l между обоими сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра и проходящими через AB и $A'B'$. На фиг. 218 угол φ кручения соответствует расстоянию l между обоими сечениями; если через φ_1 мы обозначим угол кручения, соответствующий расстоянию, равному единице между обоими сечениями, то будем иметь формулу

$$\varphi = \varphi_1 l.$$

Попробуем теперь определить те усилия, которые получаются в каком-нибудь сечении цилиндра во время кручения последнего. Вследствие сдвига сечений появятся касательные напряжения сдвига τ , равные произведению модуля сдвига G на угол сдвига γ [см. § 88, формулу (45)]:

$$\tau = G \gamma.$$

Этот угол сдвига не остается постоянным по всему сечению цилиндра. У оси (точка O') он будет равняться нулю, на поверхности цилиндра (точка B') он будет иметь максимальное значение β . Вследствие малости угла β мы можем заменить его тангенсом — отношением дуги $A'B'$ (которую вследствие ее незначительности можно принять за прямую линию) к кате-



Фиг. 219.

тету $AA' = l$. Таким образом

$$\beta = \frac{A'B'}{AA'} = \frac{r\varphi}{l}.$$

В промежуточной точке K сечения, соответствующей расстоянию ρ от оси OO' , угол сдвига γ будет равен

$$\gamma = \frac{K'L'}{KK'} = \frac{\rho\varphi}{l}.$$

На фиг. 220 для наглядности показаны перемещения $P'O'$, $M'N'$, $K'L'$, $A'B'$, соответствующие расстояниям OP , OM , OK , $OA = r$ от оси вала OO' .

Нетрудно видеть, что тангенциальное напряжение в точках, отстоящих от оси цилиндра на расстояниях ρ_1 , ρ_2 , $\rho_3, \dots$, вычисленные по формуле $\tau = G\gamma$, будут:

$$\tau_1 = G\gamma_1 = G \frac{\varphi}{l} \rho_1,$$

$$\tau_2 = G\gamma_2 = G \frac{\varphi}{l} \rho_2,$$

$$\tau_3 = G\gamma_3 = G \frac{\varphi}{l} \rho_3,$$

.....

На фиг. 221 изображены напряжения, соответствующие точкам P', M', K', A' радиуса $O'A'$. Эти напряжения будут оставаться постоянными на всех окружностях одинакового радиуса, проведенных вокруг O' . Сумма моментов вокруг оси O' , образованная соответствующими этим напряжениям усилиями, и должна уравновесить приложенный к валу, закручивающий момент $M_{кр}$. Пусть $s_1, s_2, s_3, \dots$ суть площадки, на которых имеют место усилия $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$; касательные усилия на этих площадках будут:

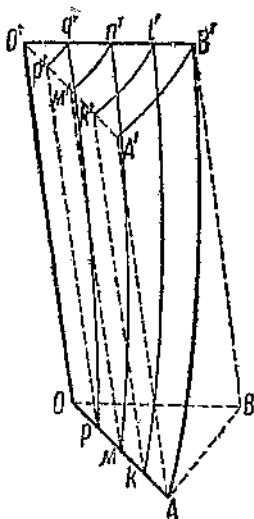
$$\tau_1 s_1, \tau_2 s_2, \tau_3 s_3, \dots$$

Моменты этих усилий вокруг O' мы получим, умножив их на соответствующие плечи $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$:

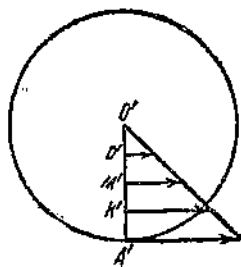
$$\rho_1 \tau_1 s_1, \rho_2 \tau_2 s_2, \rho_3 \tau_3 s_3, \dots$$

Приравнявая сумму этих моментов закручивающему моменту $M_{кр}$, будем иметь

$$M_{кр} = \rho_1 \tau_1 s_1 + \rho_2 \tau_2 s_2 + \rho_3 \tau_3 s_3 + \dots$$



Фиг. 220.



Фиг. 221.

или после подстановки значений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$:

$$M_{кр} = G \frac{\varphi}{l} \rho_1^2 s_1 + G \frac{\varphi}{l} \rho_2^2 s_2 + G \frac{\varphi}{l} \rho_3^2 s_3 + \dots$$

Вынося за скобки G и $\frac{\varphi}{l} = \varphi_1$, мы будем иметь

$$M_{кр} = G \varphi_1 (s_1 \rho_1^2 + s_2 \rho_2^2 + s_3 \rho_3^2 + \dots).$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет, если мы заменим массы площадями, как это мы делали в § 95, момент инерции площади всего сечения цилиндра относительно перпендикулярной к этой площади оси его OO' ; это — так называемый полярный момент инерции J_p , аналогичный моменту инерции диска относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости. Этот последний, как мы видели в главе 13, будет

$$J_p = \frac{M r^2}{2}.$$

Заменяя массу M через площадь $s = \pi r^2$, мы будем иметь

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

или, вводя диаметр d сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

После этого формула для момента $M_{кр}$ будет

$$M_{кр} = G \varphi_1 J_p,$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{M_{кр}}{G J_p}.$$

Полный угол закручивания будет

$$\varphi = \varphi_1 l = \frac{M_{кр} l}{J_p G},$$

а соответствующие касательные напряжения на радиусе ρ :

$$\tau = G \varphi_1 \rho = \frac{M_{кр} \rho}{J_p}.$$

Еще раз повторим, что в формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_p} \quad (50)$$

$M_{кр}$ означает крутящий момент, l — длину стержня, G — модуль упругости при сдвиге, J_p — полярный момент инерции. Эта формула выражает закон Гука при кручении и имеет полную аналогию с соответствующей формулой

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

для абсолютного удлинения при растяжении и сжатии. Как в этой формуле произведение EF характеризовало жесткость при растяжении и сжатии, так и в формуле для угла закручивания произведение $G \cdot J_p$ характеризует жесткость при кручении. Если на валу будет несколько шкивов, а следовательно, несколько участков с различными крутящими моментами, то полный угол закручивания вала получится путем суммирования углов кручения для всех участков. В этом случае в формуле угла кручения φ , определяемого для каждого участка отдельно, вместо длины l всего стержня, нужно брать длину каждого участка, закручиваемого постоянным по величине моментом. Практика расчета валов дает нормы для угла φ , которые нельзя превышать из-за опасения нарушения спокойного хода машины. Именно угол кручения не должен превышать $1/4$ градуса на каждый метр длины вала.

Для касательных напряжений мы имеем формулу

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{J_p} \quad (51)$$

Придавая ρ различные значения, мы будем получать различные значения и для τ . При $\rho = 0$ (на оси стержня) $\tau = 0$, при $\rho = r$ (наибольшее значение ρ)

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} r}{J_p}$$

(что уже было получено для крайних волокон); при $\rho = \frac{r}{2}$, $\tau = \frac{\tau_{\max}}{2}$. Пропорциональная зависимость τ от ρ представлена на фиг. 222 в виде диаграммы. Каждый отрезок со стрелкой выражает величину и направление τ во всех точках окружности, имеющей соответствующий радиус ρ .

Зная, где получаются максимальные касательные напряжения и чему они равны, легко получить расчетную формулу кручения. Мы имеем

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} r}{J_p}$$

Заменим в этой формуле, подобно тому как мы делали при изгибе, $\frac{J_p}{r}$ через W_p ; тогда

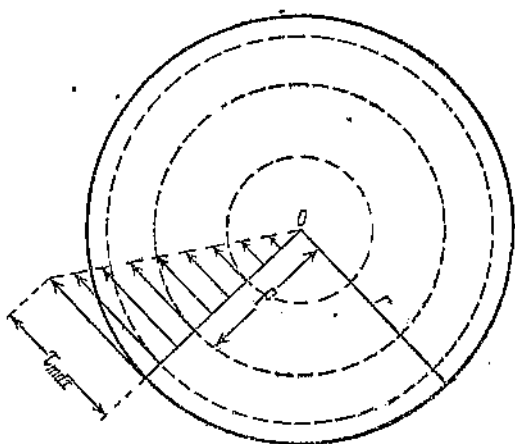
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \leq R_s. \quad (52)$$

В этой формуле W_p есть так называемый полярный момент сопротивления или момент сопротивления при кручении; R_s — допускаемое напряжение при кручении. Читается эта формула следующим образом: максимальное касательное напряжение, равное крутящему моменту $M_{\text{кр}}$, деленному на полярный момент сопротивления W_p , должно быть меньше или равно допускаемому напряжению при кручении R_s . Для круглого сечения

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d^5}{16} = \frac{3,14 \cdot d^5}{16} \approx 0,2 d^5.$$

Из формулы $\tau = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{J_p}$ следует, что материал, расположенный по оси стержня и близко от нее, имеет наименьшие напряжения, что указывает на то, что он мало участвует в работе на кручение. Поэтому иногда эту мало работающую часть материала удаляют и получают полый вал с значительно меньшим весом, чем целый.

§ 100. Определение крутящего момента. Если в ременной передаче (фиг. 223) натяжение рабочей (ведущей) части равно P_1 , а ведомой P , то разность этих двух натяжений $P_1 - P$ называется окруж-



Фиг. 222.

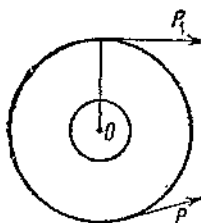
ным усилием. Последнее передается через трение на поверхность шкива. Крутящий момент равен разности моментов сил P_1 и P , т. е.

$$M_{кр} = (P_1 - P) R.$$

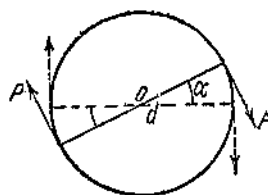
Обычно P_1 почти вдвое больше P ; в таком случае

$$M_{кр} = PR.$$

Очень часто приходится определять крутящий момент $M_{кр}$ по мощности машины W и числу оборотов вала в минуту N . Найдем зависимость между этими величинами. Под мощностью машины понимают работу, производимую машиной в единицу времени. Измеряется она обычно в лошадиных силах, число которых обозначается буквой W .



Фиг. 223.



Фиг. 224.

Из § 61 мы знаем, что лошадиная сила равна 75 кгм/сек . Пара сил с плечом d , повернувшись за секунду на угол α (фиг. 224), совершает работу

$$A = P d \alpha = M_{кр} \cdot \alpha$$

(путь, пройденный каждой силой, равен $\frac{d}{2} \alpha$). Если вал делает N оборотов в минуту, то за минуту он обернется на угол $2\pi N$, а за одну секунду — на угол $\alpha = \frac{2\pi N}{60}$. Мощность, передаваемая валом, будет измеряться работой в одну секунду, т. е.

$$M_{кр} \cdot \alpha = M_{кр} \frac{2\pi N}{60}.$$

Следовательно,

$$W \text{ л. с.} = 75 W \text{ кгм/сек} = M_{кр} \frac{2\pi N}{60}.$$

Отсюда

$$M_{кр} = \frac{75 \cdot W \cdot 60}{2\pi N} = 716,2 \frac{W}{N} \text{ кгм}$$

и окончательно

$$M_{кр} = 71620 \frac{W}{N} \text{ кгсм.} \quad (53)$$

§ 101. Полярные моменты сопротивления некоторых характерных сечений. Допускаемые напряжения. Все предположения, которые сделаны были при выводе расчетных формул на кручение, справедливы только для стержней круглого сечения. В стержнях других сечений по-

речное сечение после деформации не остается плоским, а коробится, касательные напряжения распределяются в сечении по иному, более сложному закону, чем для круглого сечения.

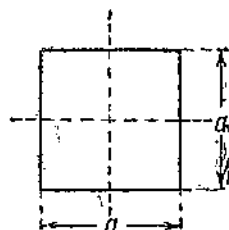
Однако для всех видов сечения угол кручения может быть выражен формулой, подобной выведенной для круглого сечения, только вместо полярного момента инерции J_p войдет некоторый условный момент инерции $J_{кр}$:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_{кр}}.$$

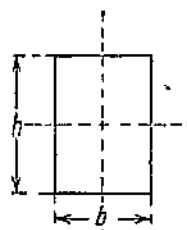
Точно так же формула касательных напряжений примет следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}.$$

Условные момент инерции $J_{кр}$ и момент сопротивления $W_{кр}$ суть величины, зависящие от размеров сечения. Приведем значения $J_{кр}$ и $W_{кр}$ для некоторых наиболее часто встречающихся сечений:



Фиг. 225.



Фиг. 226.

1. Стержень квадратного сечения (фиг. 225). Сторона сечения равна a :

$$J_{кр} = 0,1404a^4, \quad W_{кр} = 0,208a^3.$$

2. Стержень прямоугольного сечения (фиг. 226). Стороны сечения: высота h , основание b :

$$J_{кр} = \beta b^4, \quad W_{кр} = \alpha b^3.$$

Коэффициенты α и β зависят от отношения $\frac{h}{b}$ и берутся из следующей таблицы 11.

Таблица 11.
Значения коэффициентов α и β .

$\frac{h}{b}$	α	β	$\frac{h}{b}$	α	β
1	0,208	0,1404	4	1,150	1,1232
1,5	0,346	0,2936	6	1,789	1,789
2	0,493	0,4572	8	2,456	2,456
3	0,801	0,7899	10	3,123	3,123

3. Стержень эллиптического сечения. Оси сечения: h (большая), b (малая):

$$J_{кр} = \frac{\pi}{16} \frac{n^3}{n^2 + 1} b^4,$$

$$W_{кр} = \frac{\pi}{16} b^3 n,$$

где $n = \frac{h}{b}$ и больше единицы.

Практика машиностроения дает следующие допускаемые напряжения на кручение.

Таблица 12.

Допускаемые напряжения на кручение для некоторых материалов.

Мягкая сталь	от 600 до	840 кг/см ²
Сталь повышенного качества	900 "	1200 "
Стальное литье	480 "	840 "
Чугун	240 "	300 "
Дуб	— "	60 "

Указанные цифры относятся к случаю постоянной, не изменяющейся нагрузки.

При расчете валов допускаемые напряжения на кручение обычно несколько уменьшают, так как кручение вала всегда в той или иной мере сопровождается изгибом.

§ 102. Примеры. Пример 83. Найти диаметр железного вала ворота, рукоятки которого длиной 40 см вращают по два рабочих с силой 15 кг каждый (фиг. 227). Допускаемое напряжение на кручение $R_s = 200$ кг/см². По расчетной формуле (52) на кручение имеем

$$W_p = \frac{M_{кр}}{R_s};$$

для круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

Подставляя значение W_p в расчетную формулу (52), имеем $0,2d^3 = \frac{M_{кр}}{R_s}$.

Крутящий момент в нашем случае равен

$$M_{кр} = 2 \cdot 15 \cdot 40 = 1200 \text{ кгсм.}$$

Следовательно,

$$0,2d^3 = \frac{1200}{200} = 6 \text{ см}^3,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{30} \approx 3,1 \text{ см} = 31 \text{ мм.}$$

Пример 84. Стальной вал передает мощность $W = 150$ л.с. при $N = 60$ об/мин; допускаемое напряжение вала $R_s = 400$ кг/см². Найти диаметр вала d 1) из условия прочности и 2) из условий допускаемой для вала деформации. Модуль упругости $G = 8 \cdot 10^8$ кг/см².

1. Условие прочности требует, чтобы

$$0,2 d^3 = \frac{M_{кр}}{R_s}.$$

Согласно формуле (53)

$$M_{кр} = 71\,620 \frac{W}{N} = 71\,620 \frac{150}{60} = 179\,000 \text{ кгсм.}$$

Подставляя значения $M_{кр}$ и R_s в условия прочности, получаем

$$0,2 d^3 = \frac{179\,000}{400},$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{1790 \cdot 10}{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2240} \approx 13,1 \text{ см.}$$

2. Как мы знаем, угол кручения, приходящийся на 1 метр длины вала, не должен превышать $1/4^\circ$ (0,25 градуса). Найдем деформацию для рассчитанного нами вала ($d = 13,1 \text{ см}$). Угол кручения

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{M_{кр} l}{G \cdot J_p} = \frac{179\,000 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 13,1^4}{32}} = \\ &= 0,0075 \text{ радиана} \end{aligned}$$

или в градусах

$$\varphi^\circ = \frac{0,0075 \cdot 180}{\pi} = \frac{0,0075 \cdot 180}{3,14} = 0,43^\circ,$$

что превышает указанную выше допускаемую норму.

Следовательно, найденный нами из условия прочности диаметр $d = 13,1 \text{ см}$ не удовлетворяет условию допускаемой деформации. Из формулы

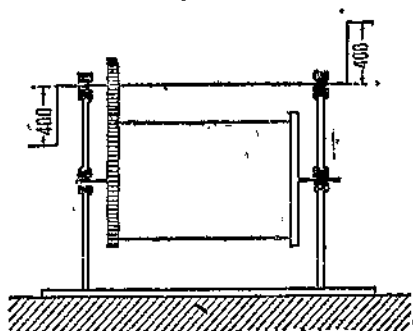
$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}}$$

видно, что с увеличением d уменьшается φ . Определим, каков же должен быть минимальный диаметр d вала, чтобы угол кручения φ не превысил $0,25^\circ = 1/4^\circ$. Подставляя в формулу

$$\varphi^\circ = \frac{M l \cdot 180}{G J_p \pi}$$

известные значения φ , $M_{кр}$, l , G , J_p , мы получим уравнение с одним неизвестным d :

$$\frac{1}{4} = \frac{179000 \cdot 100 \cdot 180}{8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi d^4}{32} \cdot \pi}.$$



Фиг. 227.

Решая его, получим

$$d = \sqrt[4]{\frac{179000 \cdot 100 \cdot 180 \cdot 4 \cdot 10}{8 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 1}} \approx 15,1 \text{ см.}$$

Этот диаметр и придется взять для вала.

Пример 85. При устройстве ремонтной мастерской требуется вал для передачи мощности в 30 л. с. при 145 оборотах в минуту. Какой вал обойдется дешевле — сплошной или полый, с отношением наружного и внутреннего диаметров как 2:1. Допускаемое напряжение на кручение у обоих валов одно и то же и равно 500 кг/см². Цена за тонну сплошного вала 300 руб., полого — 330 руб.

Крутящий момент для обоих валов равен (формула 53)

$$M_{кр} = 71\,620 \frac{W}{N} = 71\,620 \cdot \frac{30}{145} \approx 14\,800 \text{ кгсм.}$$

Найдем диаметр сплошного вала по формуле $0,2 d^3 = \frac{M_{кр}}{R_s}$; получаем

$$d = \sqrt[3]{\frac{14800 \cdot 10}{500 \cdot 2}} \approx 5,3 \text{ см} = 53 \text{ мм.}$$

Площадь поперечного сечения сплошного вала равна

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 5,3^2}{4} = 22,06 \text{ см}^2.$$

Определим теперь размеры и площадь сечения полого вала. Если наружный диаметр его равен D , то внутренний согласно условию задачи должен быть равен $D/2$. Полярный момент сопротивления поперечного сечения такого вала равен

$$W_p = 0,2 \frac{D^4 - \left(\frac{D}{2}\right)^4}{D} = 0,2 D^3 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16} D^3.$$

Ввиду этого из формулы $W_p = \frac{M_{кр}}{R_s}$ получим

$$\frac{3}{16} D^3 = \frac{14\,800}{500},$$

откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{14\,800 \cdot 16}{500 \cdot 3}} \approx 5,4 \text{ см} = 54 \text{ мм.}$$

Внутренний диаметр вала равен $\frac{D}{2} = 27 \text{ мм}$. Площадь поперечного сечения такого полого вала будет

$$F_2 = \frac{\pi \left[D^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right]}{4} = \frac{\pi}{4} (5,4^2 - 2,7^2) = 17,17 \text{ см}^2.$$

Веса полого и сплошного вала относятся как площади их поперечных сечений, т. е.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{17,17}{22,06} \approx 0,8 = \frac{4}{5},$$

следовательно, полый вал будет дешевле сплошного в

$$\frac{4 \cdot 330}{5 \cdot 300} = \frac{132}{150} = 0,88$$

раз, т. е. на 12%.⁰

Пример 86. Полый вал с наружным диаметром 12 мм и внутренним диаметром 70 мм передает 200 л. с. при 100 оборотах в минуту. Определить наибольшее напряжение материала.

Вычислим передаваемый валом крутящий момент:

$$M_{кр} = 71\,620 \frac{W}{N} = 71\,620 \frac{200}{100} = 143\,240 \text{ кг/см.}$$

Полярный момент сопротивления вала равен

$$W_p = 0,2 \frac{D^4 - d^4}{D} = 0,2 \frac{12^4 - 7^4}{12} = 30,6 \text{ см}^3.$$

Согласно формуле $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$ получаем

$$\tau_{\max} = \frac{143\,240}{305,6} \approx 470 \text{ кг/см}^2.$$

Если допускаемое напряжение вала $R_s = 500 \text{ кг/см}^2$, то найденное напряжение $\tau_{\max}$ безопасно.

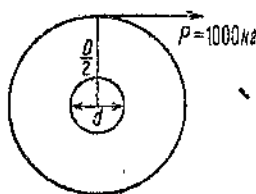
Задачи.

63. Железный стержень (фиг. 62) диаметром $d = 6 \text{ см}$ и длиной $l = 4 \text{ м}$, заделанный одним концом, подвергается скручиванию парой, приложенной на свободном конце. Определить наибольшее напряжение $\tau_{\max}$, если угол кручения свободного конца $\varphi = 1^\circ$ и $G = 830\,000 \text{ кг/см}^2$.

Отв. $\tau_{\max} = 110 \text{ кг/см}^2$.

64. Определить диаметр трансмиссионного вала d , если диаметр шкива $D = 700 \text{ мм}$, окружное усилие $P = 1000 \text{ кг}$, допускаемое напряжение $R_s = 120 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 228).

Отв. $d = 11,5 \text{ см}$.



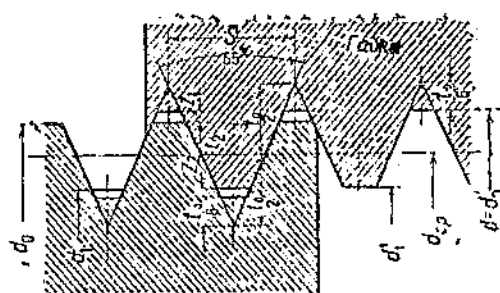
Фиг. 228.

65. Сколько лошадиных сил может передать железный вал диаметром $d = 115 \text{ мм}$ при 120 оборотах в минуту?

66. Определить мощность паровой машины, передающей работу через вал диаметром $d = 12 \text{ см}$ при 60 об/мин, если два сечения вала на расстоянии $l = 4 \text{ м}$ друг от друга поворачиваются одно относительно другого на угол в $2/4^\circ$. Модуль упругости вала равен $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$.

Отв. $W = 45,2 \text{ л. с.}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.



Дюймовая резьба с углом
профиля 55°, ОСТ 1260.

Системы нарезок.

Обозначения:

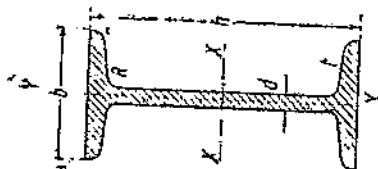
- t_0 — высота треугольника
 t_1 — глубина нарезки (резьбы)
 s — шаг
 z — зазор в вершине
 d_0 — наружный диаметр нарезки (номинальный диаметр)
 d_1 — внутренний диаметр нарезки

Нормальный диаметр резьбы (мм)	Болт		Болт и гайка							Гайка		
	Диаметр резьбы		Площадь сечения стержня	Средний диаметр резьбы	Шаг резьбы	Рабочая высота витка	Зазоры		Число витков на 1"	Теоретич. высота резьбы	Диаметр резьбы	
	на-ружн.	внутр.									на-ружн.	внутр.
d	d_0	d_1	$F \text{ см}^2$	d_{cp}	s	t_2	z_1	z_2	n	t_0	d_0'	d_1'
$\frac{8}{10}$	4,68	3,408	0,091	4,085	1,058	0,535	0,066	0,076	24	1,017	4,762	3,56
$\frac{1}{4}$	6,20	4,724	0,175	5,537	1,270	0,645	0,076	0,093	20	1,220	6,350	4,91
$\frac{5}{16}$	7,78	6,131	0,295	7,034	1,411	0,720	0,079	0,104	18	1,355	7,938	6,33
$\frac{3}{8}$	9,36	7,492	0,441	8,509	1,588	0,815	0,083	0,119	16	1,525	9,525	7,73
$(\frac{7}{16})$	10,93	8,789	0,607	9,951	1,814	0,935	0,091	0,136	14	1,743	11,112	9,06
$\frac{1}{2}$	12,50	9,989	0,784	11,345	2,117	1,100	0,100	0,155	12	2,030	12,700	10,30
$(\frac{9}{16})$	14,08	11,577	1,052	12,982	2,117	1,095	0,104	0,156	12	2,033	14,288	11,89
$\frac{5}{8}$	15,65	12,918	1,311	14,397	2,309	1,195	0,113	0,171	11	2,218	15,875	13,26
$\frac{3}{4}$	18,81	15,798	1,960	17,424	2,540	1,320	0,110	0,186	10	2,440	19,050	16,17
$\frac{7}{8}$	21,96	18,611	2,720	20,418	2,822	1,465	0,133	0,209	9	2,711	22,225	19,03
1	25,11	21,334	3,575	23,367	3,175	1,655	0,145	0,233	8	3,050	25,400	21,80
$1\frac{1}{8}$	28,25	23,929	4,497	26,252	3,629	1,895	0,163	0,265	7	3,485	28,575	24,46
$1\frac{1}{4}$	31,42	27,104	5,770	29,427	3,629	1,890	0,165	0,268	7	3,485	31,750	27,64
$(1\frac{3}{8})$	34,56	29,504	6,837	32,215	4,233	2,215	0,183	0,313	6	4,066	34,925	30,13
$1\frac{1}{2}$	37,73	32,679	8,388	35,390	4,233	2,240	0,185	0,316	6	4,066	38,100	33,31
$(1\frac{5}{8})$	40,85	34,770	9,495	38,022	5,080	2,665	0,213	0,375	5	4,879	41,275	36,52
$1\frac{3}{4}$	44,02	37,945	11,308	41,198	5,080	2,660	0,215	0,378	5	4,879	44,450	38,70
$(1\frac{7}{8})$	47,15	40,397	12,817	44,011	5,644	2,960	0,238	0,416	$4\frac{1}{2}$	5,421	47,625	41,28
2	50,32	43,572	14,911	47,186	5,614	2,955	0,240	0,419	$4\frac{1}{2}$	5,421	50,800	44,41
$2\frac{1}{4}$	55,62	49,019	18,872	53,084	6,350	3,330	0,265	0,471	4	6,099	57,150	49,96
$2\frac{1}{2}$	62,97	55,369	24,078	59,434	6,350	3,330	0,265	0,471	4	6,099	63,500	56,31
$2\frac{3}{4}$	69,26	60,557	28,802	65,204	7,257	3,815	0,295	0,537	$3\frac{1}{2}$	6,970	69,850	61,63
3	75,61	66,907	35,159	71,554	7,257	3,815	0,295	0,537	$3\frac{1}{2}$	6,970	76,200	67,98
$3\frac{1}{4}$	81,91	72,542	41,330	77,546	7,815	4,105	0,320	0,579	$3\frac{1}{4}$	7,507	82,550	73,70
$3\frac{1}{2}$	88,26	78,892	48,883	83,896	7,815	4,105	0,320	0,579	$3\frac{1}{4}$	7,507	88,900	80,05
$3\frac{3}{4}$	94,55	84,409	55,959	89,829	8,467	4,445	0,350	0,626	$3\frac{1}{4}$	8,132	95,250	85,66
4	100,90	90,759	64,695	96,179	8,467	4,445	0,350	0,626	3	8,132	101,600	95,01

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Двутавровое железо ОСТ 16.

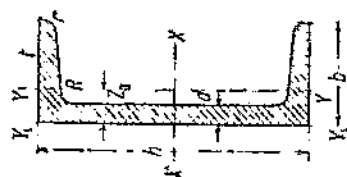
Ном. проф.	Размеры в мм				Площадь проф. F см ²	Вес пог. метра g кг	Момент инерции		Моменты сопротивления		Удельные моменты сопротивления	
	h	b	d	t	R	r	J_x см ⁴	J_y см ⁴	W_x см ³	W_y см ³	$W_x = \frac{W_y}{F}$	$W_y = \frac{W_x}{F}$
10	100	57,0	4,5	6,3	4,5	2,7	180,4	16,1	26,1	5,65	0,985	0,154
12	120	68,4	5,7	7,1	5,7	3,1	324,4	23,2	36,7	7,35	1,025	0,146
14	140	79,8	6,7	7,9	6,7	3,4	569	29,2	51,3	10,8	1,065	0,136
16	160	91,2	7,5	8,3	7,5	3,8	869	34,3	81,3	14,26	1,082	0,132
18	180	102,6	8,3	9,1	8,3	4,1	1214	39,4	113,6	18,4	1,101	0,129
20	200	114,0	9,1	9,9	9,1	4,5	1604	44,5	153,4	23,54	1,117	0,126
22	220	125,4	9,9	10,4	9,9	4,9	2039	49,6	201,4	28,63	1,131	0,124
24	240	136,8	10,7	11,3	10,7	5,2	2514	54,7	258,5	33,72	1,146	0,122
26	260	148,2	11,5	12,1	11,5	5,6	3039	59,8	305,6	38,81	1,151	0,120
28	280	159,6	12,3	12,9	12,3	6,0	3614	64,9	352,7	43,90	1,165	0,118
30	300	171,0	13,1	13,7	13,1	6,4	4239	70,0	399,8	49,00	1,178	0,116
32	320	182,4	13,9	14,5	13,9	6,8	4914	75,1	446,9	54,10	1,193	0,114
34	340	193,8	14,7	15,3	14,7	7,2	5639	80,2	494,0	59,20	1,207	0,112
36	360	205,2	15,5	16,1	15,5	7,6	6414	85,3	541,1	64,30	1,221	0,110
38	380	216,6	16,3	16,9	16,3	8,0	7239	90,4	588,2	69,40	1,235	0,108
40	400	228,0	17,1	17,7	17,1	8,4	8114	95,5	635,3	74,50	1,249	0,106
42	420	239,4	17,9	18,5	17,9	8,8	9039	100,6	682,4	79,60	1,263	0,104
44	440	250,8	18,7	19,3	18,7	9,2	10014	105,7	729,5	84,70	1,277	0,102
45	450	262,2	19,5	20,1	19,5	9,6	11039	110,8	776,6	89,80	1,291	0,100



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Корытное (швеллерное железо) ОСТ 17.

Информация	Размеры в мм					Площадь проф. F см ²	Вес пог. метра g кг	Расст. центра тяж. Z_0 см	Момент инерции		Моменты сопротивления		
	h	b	d	t	R				J_x см ⁴	J_y см ⁴	W_x см ³	W_y см ³	
5	50	38	5,5	7,5	7,5	3,75	7,47	1,41	24,2	27,57	9,44	11,03	3,942
6	60	42	6,0	8,0	8,0	4,0	9,63	1,43	34,3	39,9	14,96	18,43	5,42
8	80	48	6,5	9,0	9,0	4,5	11,85	1,63	48,4	56,9	20,9	25,5	7,42
10	100	50	7,0	9,5	9,5	4,75	13,92	1,69	66,6	77,6	28,16	34,65	8,86
12	120	55	7,5	10,5	10,5	5,0	16,04	1,65	92,0	107,6	36,4	44,9	10,7
14	140	60	8,0	11,0	11,0	5,25	18,21	1,80	122,2	143,2	44,9	55,2	12,65
16	160	65	8,5	12,0	12,0	5,5	20,42	1,85	152,4	182,6	53,4	65,5	14,55
18	180	70	9,0	13,0	13,0	6,0	22,66	2,01	175,6	209,6	59,4	73,8	16,35
20	200	75	9,5	14,0	14,0	6,25	24,91	2,08	201,8	239,6	66,9	81,2	18,20
22	220	80	9,5	15,0	15,0	6,75	27,16	2,25	230,2	273,2	73,8	89,2	20,05
24	240	85	10,0	16,0	16,0	7,0	29,43	2,30	259,9	301,8	80,8	97,3	21,90
26	260	90	10,5	17,0	17,0	7,5	31,68	2,45	289,6	329,6	88,1	105,4	23,75
30	300	100	11,0	18,5	18,5	8,25	37,30	2,63	335,6	386,1	100,4	120,4	27,60
32	320	110	11,5	19,5	19,5	8,75	41,73	2,68	365,6	416,6	109,4	130,4	29,45
34	340	120	12,0	20,5	20,5	9,0	46,16	2,68	401,6	456,6	118,4	140,4	31,30
36	360	130	12,5	21,5	21,5	9,5	50,59	2,68	437,6	496,6	127,4	150,4	33,15
38	380	140	13,0	22,5	22,5	10,0	55,02	2,68	473,6	536,6	136,4	160,4	35,00
40	400	150	13,5	23,5	23,5	10,5	59,45	2,68	509,6	576,6	145,4	170,4	36,85
42	420	160	14,0	24,5	24,5	11,0	63,88	2,68	545,6	616,6	154,4	180,4	38,70
44	440	170	14,5	25,5	25,5	11,5	68,31	2,68	581,6	656,6	163,4	190,4	40,55
46	460	180	15,0	26,5	26,5	12,0	72,74	2,68	617,6	696,6	172,4	200,4	42,40
48	480	190	15,5	27,5	27,5	12,5	77,17	2,68	653,6	736,6	181,4	210,4	44,25
50	500	200	16,0	28,5	28,5	13,0	81,60	2,68	689,6	776,6	190,4	220,4	46,10



АЛФАВИТЫ.

Латинский.

A a — а	N n — эн
B b — бэ	O o — о
C c — цэ	P p — пэ
D d — дэ	Q q — ку
E e — е	R r — эр
F f — эф	S s — эс
G g — гэ (жс)	T t — тэ
H h — аш	U u — у
I i — и	V v — вэ
J j — жи	W w — дубль-вэ
K k — ка	X x — икс
L l — эль	Y y — игрек
M m — эм	Z z — зэт

Греческий.

A α — альфа	N ν — ни
B β — бэта	Ξ ξ — кси
Γ γ — гамма	Ο ο — омикрон
Δ δ — дельта	Π π — пи
Ε ε — эпсилон	Ρ ρ — ро
Z ζ — дзета	Σ σ — сигма
Η η — эта	Τ τ — тау
Θ θ (ϑ) — тэта	Υ υ — ипсилон
Ι ι — иота	Φ φ — фи
Κ κ — каппа	Χ χ — хи
Λ λ — ламбда	Ψ ψ — пси
Μ μ — ми	Ω ω — омега

Редактор Г. А. Вольперт.

Корректор А. Н. Крутов.

Техн. редактор Е. Весник.

График М. М. Сыркин.

Учетный № 4651/а. Тираж 100.000 (1-30000). Подл. в печ. с матриц 25/II-33 г.
 Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Уч.-авт. л. 19,77. Бум. л. 75¹/₉. Печ. зн. в бум. л. 101 000.
 Заказ № 273, Уполном. Главл. № В-28017. Выход в свет март 1938 г.

Отпечатано с матриц в 3-й тип. ОНТИ, Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

25-1163.

ОПЕЧАТКИ

<i>Стр.</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Следует читать</i>
51	6 снизу	10 мнн;	10 сек;
163	5 „	кР	кР
163	2 „	кА	кN

Веселовский и Тимков. Док. 273