СМИРНОВ, В. И., КРЫЛОВ, В. И., КАНТОРОВИЧ, Л. В.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

КУБУЧ * 1933

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга выпускается в качестве пособия для студентов математического и физического факультетов Ленинградского Университета. В ее основе лежат лекции, которые читались мною несколько лет тому назад студентам-физикам. Объем этих лекций был значительно меньше объема выпускаемой книги, которая, как мы уже упоминали, предназначается не только для физиков, но и для математиков. В связи с этим пришлось добавить большой новый материал. Вся эта книга составлена Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым. Главы I, IV и V написаны Л. В. Канторовичем, а главы II, III и VI — В. И. Крыловым.

Вл. Смирнов.

Июнь 1933.

ГЛАВА I.

Уравнение Эйлера.

§ 1. Общие замечания.

Предмет вариационного исчисления—это различного рода вопросы maxima и minima, в которых нужно определить вид одной или нескольких неизвестных функций. Началом разработки вариационного исчисления можно считать 1696 г., когда Иоганн Бернулли поставил задачу о линии наискорейшего ската (брахистохроне). В решении этой задачи приняли участие лучшие математики того времени: Лейбниц, Ньютон, Яков Бернулли, Лопиталь. После этого в XVIII веке Эйлером и Лагранжем были даны общие методы решения задач вариационного исчисления. Их работу в XIX веке продолжили Лежандр, Коши, Якоби, Гаусс, Пуассон, Остроградский, Клебш и др.

Однако, решения задач и методы вариационного исчисления до недавнего времени были все же неудовлетворительны и неполны, и лишь в конце XIX века работами Вейерштрасса и Гильберта было дано полное решение основных задач вариационного исчисления.

§ 2. Две задачи.

Рассмотрим два примера вариационных задач:

I. ЗАДАЧА О НАИМЕНЬШЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

Среди линий, соединяющих две точки плоскости, найти ту, дуга которой при вращении около оси OX образует поверхность с наименьшей площадью.

Пусть данные точки будут: $A\ (x_0, y_0)$ и $B\ (x_1, y_1)$ и пусть $y = f\ (x)$—уравнение линии, их соединяющей; тогда величина площади поверхности вращения выразится, как известно, интегралом

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Таким образом, поставленная выше задача сводится к отысканию такой линии $y=f(x)$, проходящей через точки A и B, для которой величина S или, что то же самое, интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

достигает наименьшего значения.

II. ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ.

Найти среди линий, соединяющих две данные точки A и B, ту, двигаясь по которой свободно пущенная материальная точка пройдет путь AB в кратчайшее время.

Примем первую точку A за начало координат и направим ось y вертикально вниз. Пусть $y=f(x)$ — уравнение кривой, соединяющей точку A со второй точкой B (x_1, y_1). Найдем время T, нужное для прохождения тяжелой материальной точкой пути AB при движении по этой кривой. Пусть движущаяся точка, в момент времени t, занимает положение M (x, y) и имеет скорость v; тогда по уравнению живой силы

$$\frac{mv^2}{2}=mgy,$$

где

$$\frac{mv^2}{2}$$

приращение живой силы от $t=0$ до t, так как в начальный момент скорость равна нулю, а mgy есть работа силы тяжести. Из этого уравнения определяем скорость

$$v=\sqrt{2gy},$$

откуда

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}},$$

а все время T, нужное для прохождения пути AB будет

$$T=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

В данном случае опять задача привелась к нахождению функции, дающей минимум некоторому интегралу, именно

$$I=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

§ 3. Понятие о функционале.

Основным понятием дифференциального исчисления является понятие функции — переменной, численные значения которой определяются численными значениями одного или нескольких независимых переменных. Это понятие функции, позволяющее разрешить ряд вопросов, является во многих случаях недостаточным. Оно не охватывает всех видов зависимостей, существующих в действительности. Рассмотрим хотя бы следующие два примера:

1) Величина напряжения в данном месте электромагнитного поля, вызванного прохождением тока по проводнику, зависит от формы кривой, по которой расположен проводник.

2) Сопротивление, оказываемое жидкостью движущемуся телу, зависит от формы поверхности этого тела.

В обоих указанных примерах рассматриваемая величина (напряжение поля, сопротивление) зависит от выбора кривой или поверхности. Такая зависимость не может быть очевидно приведена к обычной функциональной зависимости, а представляет нечто существенно новое. Мы видим, таким образом, что изучение подобного рода зависимостей заставляет расширить понятие функции.

Важнейшим обобщением понятия о функции является понятие о функционале. Существенное отличие функционала состоит в том, что значения аргументов его не числа, как у обычной функции, а функции одного или нескольких переменных. Таким образом, функционал дает такого рода зависимость, что каждой функции (или паре функций) определенного класса ставится в соответствие число—значение функционала. Мы дали сейчас аналитическое определение функционала; геометрически же разница между функционалом и функцией та, что обычная функция одного или нескольких переменных есть функция точки на прямой, плоскости или в пространстве, функционал же есть функция более сложных геометрических образований: линий, поверхностей и т. п. Так, например, если функционал зависит от двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то мы можем считать его функцией от пространственной кривой $y=f(x)$; $z=\varphi(x)$.

Простейшим примером функционала является определенный интеграл функции, взятый в данных пределах:

$$V[f(x)]=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Другим весьма важным общим примером функционала является интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

который каждой дифференцируемой функции $y=f(x)$ ставит в соответствие некоторое число. При частном выборе функции F, мы можем получить из (1) интегралы I, к исследованию которых привелось решение задач о наименьшей поверхности вращения и о брахистохроне (§ 2). Таким образом эти интегралы I также представляют собой функционалы.

Общее исследование функционалов представляет задачу функционального анализа. Вариационное исчисление занимается только задачей нахождения maxima и minima функционалов, ограничиваясь при этом простейшими из них.

Прежде чем перейти к изложению основных задач вариационного исчисления, мы докажем два простых вспомогательных предложения, которыми придется нам воспользоваться.

§ 4. Две леммы.

ЛЕММА I.

Если интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)\,dx,$$

где $F(x)$ данная непрерывная в промежутке (x_0, x_1) функция, обращается в нуль для всякой функции $\eta(x)$, непрерывной вместе со своей производной в (x_0, x_1) и исчезающей на концах его: $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, то

$$F(x)=0$$

для всякого x, в промежутке (x_0, x_1).

Предположим противное, что в некоторой точке ξ внутри промежутка (x_0, x_1) функция $F(x)$ отлична от нуля, например, $F(\xi)>0$. Тогда, благодаря непрерывности $F(x)$, она будет положительна и в некотором промежутке (ξ_1, ξ_2), содержащем точку ξ и лежащем внутри (x_0, x_1) $[x_0<\xi_1<\xi<\xi_2<x_2]$.

Определим теперь функцию $\eta(x)$ следующим образом:

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x_0\leqslant x<\xi_1\\ (x-\xi_1)^2\,(x-\xi_2)^2 & \quad,, \quad \xi_1\leqslant x<\xi_2\\ 0 & \quad,, \quad \xi_2\leqslant x<x_2\end{cases}$$

Построенная таким образом функция $\eta(x)$ (график ее дан на рис. 1) удовлетворяет наложенным на нее в лемме ограничениям. Очевидно, она обращается в нуль в точках x_0 и x_1. Покажем, что $\eta(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Это не вызывает сомнений для всех точек кроме ξ_1 и ξ_2, так как во всяком промежутке не содержащем ξ_1 и ξ_2 функция $\eta(x)$ совпадает с одной из функций 0 или $(x-\xi_1)^2\,(x-\xi_2)^2$. Докажем, что то же самое имеет место и в точке ξ_1 [для ξ_2 рассуждение аналогично]. Но, действительно, значение функции $\eta(x)$ в точке ξ_1 равно нулю и тому же равен предел $\eta(x)$ справа и слева. Далее, так как слева от точки ξ_1 функция

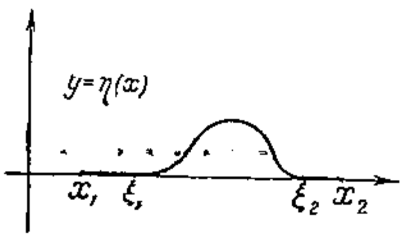

Рис. 1

$\eta(x)$ тождественно равна нулю, то производная ее слева в точке ξ_1 также равна нулю; нулю же равен, очевидно, и предел $\eta'(x)$ при $x \to \xi_1$, если точка x остается левее ξ_1. Справа от точки ξ_1 функция $\eta'(x)$ совпадает с функцией $(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2$, а потому производная ее справа от точки ξ_1 найдется дифференцированием этой функции, т. е.

$$\eta'(x) = [(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2]' = 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)[(x-\xi_1)+(x-\xi_2)].$$

Отсюда видно, в частности, что производная справа в самой точке ξ_1 равна нулю, и тому же равен, очевидно, предел $\eta'(x)$ при $x \to \xi$, $[x > \xi]$, так как написанное для $\eta'(x)$ выражение есть непрерывная функция x. Итак, значение производной функции $\eta(x)$ справа и слева в точке ξ_1 равно нулю, и тому же равен предел $\eta'(x)$ при $x \to \xi$, отсюда следует, что $\eta'(x)$ в точке $x=\xi_1$ существует и непрерывна, а потому функция $\eta(x)$ удовлетворяет всем поставленным в лемме условиям. Но интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \int_{\xi_2}^{x_1} =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} (x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 F(x)\,dx > 0,$$

так как подъинтегральная функция положительна, что противоречит условию леммы. Итак, во всех точках x промежутка (x_0, x_1)

$$F(x) = 0,$$

что требовалось доказать.

ЛЕММА II[1].

Пусть $F(x, y)$ определенная и непрерывная функция двух переменных в области D, ограниченной контуром L. И пусть для всякой функции $\eta(x, y)$, непрерывной вместе со своими частными производными в D и обращающейся в нуль на L:

$$\iint_{(D)} F(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Тогда во всех точках области D

$$F(x, y) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке (x_1, y_1) внутри D функция $F(x, y)$ отлична от нуля, например, $F(x_1, y_1) > 0$. Тогда она будет положительна и в некотором круге

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = \delta^2$$

радиуса δ лежащем внутри D.

---

[1]) Чтение этой леммы читатель может отложить до § 10.

Определим $\eta(x, y)$ следующим образом

$$\eta(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{если } (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \geqslant \delta^2 \\ [(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-\delta^2]^2 & \text{„ } (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 < \delta^2 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что определенная таким образом функция $\eta(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы, между тем

$$\iint\limits_{(D)} F(x, y)\, \eta(x, y)\, dx\, dy > 0,$$

что противоречит условию леммы. Итак, непременно во всех точках внутри D

$$F(x, y) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что лемма I остается верной, если мы наложим и более сильные ограничения на функцию $\eta(x)$. Например, если мы потребуем, чтобы интеграл произведения $F \cdot \eta$ обращался бы в нуль лишь для функций $\eta(x)$ непрерывных вместе с n производными и обращающихся вместе с $(n-1)$ производными в нуль на концах промежутка (x_0, x_1), то и в этом случае заключение леммы будет справедливо. Для доказательства этого нужно только в доказательстве леммы I заменить показатель 2, в формуле задающей $\eta(x)$ на $(n+1)$.

Отметим также, что лемма II переносится на функции трех и более переменных.

§ 5. Постановка основной задачи.

Основной задачей вариационного исчисления называется задача нахождения extrema интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Здесь F данная функция аргументов $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$, y есть функция от x; x_0 и x_1 постоянные. Величина интеграла (1) зависит от выбора функции или, что то же самое, кривой

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Для того, чтобы интеграл I имел смысл, а также для дальнейших рассуждений мы должны наложить некоторые ограничения на функции F и f. Относительно функции F будем предполагать, что она однозначна и непрерывна вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно при всех значениях x, y, из некоторой области R плоскости, точнее говоря, таких, что точка (x, y) лежит в R, и при всех конечных значениях y'. Прежде чем указать ограничения, налагаемые на $f(x)$, введем одно определение, которое сократит нам изложение в дальнейшем. Будем говорить, что функция или кривая $y=f(x)$ принадлежит классу $C^{(1)}$, если она однозначна и непрерывна в промежутке (x_0, x_1) и имеет непрерывную производную в этом промежутке [т.-е., касательная к кривой $y=f(x)$ меняется непрерывно и нигде не параллельна оси OY] и вообще $y=f(x)$ принадлежит к классу $C^{(n)}$, если она однозначна и непрерывна вместе со своими производными до n-ого порядка.

Теперь мы можем сформулировать точно основную задачу: это есть задача об отыскании такой кривой $y=f(x)$, лежащей в области R, принадлежащей классу $C^{(1)}$ и проходящей через две данные точки плоскости $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, для которой интеграл I имеет наименьшее значение.

Таким образом, кривые $y=f(x)$, для которых мы рассматриваем значение интеграла I [мы будем эти кривые называть для краткости *допустимыми*], должны удовлетворять следующим трем условиям:

1) Кривая принадлежит классу $C^{(1)}$, т.-е. $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной в (x_0, x_1).

2) Целиком лежит в данной области R плоскости. Выбор этой области определяется условиями задачи.

3) Проходит через точки

$$A(x_0, y_0) \text{ и } B(x_1, y_1),$$

т.-е.

$$f(x_0)=y_0;\ f(x_1)=y_1.$$

Мы можем теперь основную задачу сформулировать кратко так: среди допустимых кривых найти ту, для которой интеграл (1) имеет наименьшее значение.

Мы здесь и в дальнейшем говорим только о минимуме интеграла, так как задача о максимуме сводится к задаче о минимуме, если только заменить функцию F на $-F$.

Поставленная выше основная задача аналогична задаче об абсолютном extrema в дифференциальном исчислении, но существенная разница между этими задачами заключается в том, что основная задача вариационного исчисления в отличие от задачи дифференциального исчисления не всегда имеет решение [1]).

Так же, как и в дифференциальном исчислении, для решения задачи об абсолютном минимуме нужно предварительно решить задачу об относительном минимуме, т.-е., о нахождении таких допустимых кривых, которые дают интегралу I значение минимальное по сравнению с соседними кривыми. Если задача об относительном минимуме будет решена, и мы найдем конечное число кривых, дающих интегралу I относительный минимум, и если из

---

[1]) Действительно, пусть $F(x, y, y') > 0$, тогда интеграл I принимает только положительные значения для всех допустимых кривых, и эти значения имеют точную нижнюю границу $m \geqslant 0$; но мы не можем поручиться, вообще говоря, что найдется такая кривая, для которой эта граница достигается. Наоборот, можно показать примером, что эта граница не всегда достигается (см. доб. стр. 32).

физических соображений ясно, что задача об абсолютном минимуме должна иметь единственное решение, удовлетворяющее условиям, наложенным на допустимую кривую, и лежащее внутри R, то это решение мы получим, выбрав из найденных кривых ту, для которой I наименьшее. В дальнейшем мы будем заниматься только задачей об относительном минимуме, который мы будем называть для краткости просто минимумом.

Для того, чтобы данное выше определение относительного минимума стало вполне точным, нужно определить, что надо понимать под соседними кривыми. Будем говорить, что *допустимая кривая $\bar{y}$ близка к другой допустимой кривой $y=f(x)$ и лежит в области R_ε, если она удовлетворяет в промежутке (x_0, x_1) неравенству*:

$$f(x)-\varepsilon<\bar{y}<f(x)+\varepsilon \quad \text{. . . . . } (3)$$

Эти условия, очевидно, равносильны тому, что $\bar{y}=f(x)+\omega(x)$, причем $\omega(x)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ и удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{array}{c} \omega(x_0)=\omega(x_1)=0; \\ |\omega(x)|<\varepsilon \text{ для } x_0<x<x_1 \end{array}\right\} \quad \text{. . . . . . } (4)$$

Дадим теперь точное определение того, что кривая дает минимум [1]) интегралу (1):

Кривая $y=f(x)$ *дает минимум интегралу I* (1), *если можно найти такое положительное число ε, что значение интеграла* (1) *взятого по данной кривой*:

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\,dx \quad \text{. . . . . } (5)$$

меньше, чем значение интеграла I по всякой допустимой кривой $\bar{y}$ области R_ε, т. е. меньше чем значение интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x)+\omega(x), f'(x)+\omega'(x)]\,dx, \quad \text{. . . } (6)$$

где $\omega(x)$ функция класса $C^{(1)}$, удовлетворяющая условиям (4) *и не тождественно равная нулю в (x_0, x_1).*

§ 6. Первая вариация. Уравнение Эйлера.

Теперь мы займемся разысканием необходимых условий для того, чтобы кривая $y=f(x)$, лежащая внутри области R [2]) давала минимум интегралу (1). По определению, для этого необходимо

---

[1]) Как мы условились выше, минимум здесь обозначает относительный минимум.

[2]) Случай, когда эта кривая имеет общую часть с границей R, является, как и в дифференциальном исчислении случай концов промежутка, особым, и те необходимые условия, которые мы найдем дальше, к нему неприменимы.

и достаточно, чтобы при достаточно малом ε, для всякой функции $\omega(x)$, удовлетворяющей условию (4), интеграл (5) был бы меньше интеграла (6). Так как это условие должно выполняться для всякой $\omega(x)$, то оно будет выполнено и при частном выборе $\omega(x)$. Этим мы и воспользуемся для получения необходимых условий. Пусть $\eta(x)$ произвольная функция класса $C^{(1)}$, обращающаяся в ноль на концах промежутка

$$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Тогда при любом достаточно малом α функция

$$\omega(x)=\alpha\,\eta(x)$$

будет удовлетворять условиям (4), а потому, если подставить в интеграл (6) вместо $\omega(x)$ величину $\alpha\,\eta(x)$, то полученное выражение

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left[x, f(x)+\alpha\,\eta(x), f'(x)+\alpha\,\eta'(x)\right] dx=I(\alpha), \quad . \quad . \quad (8)$$

представляющее некоторую функцию от α, не должно превосходить величины интеграла (5), при достаточно малом α. Но, как это ясно из (8), интеграл (5) представляет ничто иное, как $I(0)$ и поэтому, при достаточно малых α

$$I(0)<I(\alpha),$$

т.-е. функция $I(\alpha)$ достигает минимума при $\alpha=0$. Таким образом, задача приведена, в известной части, к задаче дифференциального исчисления.

Разложим функцию $I(\alpha)$ в ряд Маклорена:

$$I(\alpha)=I(0)+\frac{\alpha}{1}I'(0)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}I''(0)+\ldots,$$

получающиеся здесь выражения $\alpha\,I'(0)$, $\alpha^2\,I''(0), \ldots$ называются первой, второй, ... вариацией интеграла I и обозначаются соответственно $\delta I, \delta^2 I, \ldots$

Из теорем дифференциального исчисления вытекает, что *для того, чтобы функция $y=f(x)$ давала минимум интегралу* (1), *необходимо, чтобы $I'(0)=0$, т.-е.*

$$\delta I=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

причем это условие должно выполняться *для всякой функции* $\eta(x)$ [которая участвует в выражении δI], принадлежащей классу $C^{(1)}$ и удовлетворяющей условию (7).

Напишем выражение $\delta I=\alpha\,I'(0)$ в раскрытом виде. Из (8), дифференцируя под знаком интеграла по α и полагая затем $\alpha=0$, найдем $I'(0)$ и

$$\delta I=\alpha I'(0)=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

причем в выражениях

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial y'}$$

величины y и y' должны быть заменены на $f(x)$ и $f'(x)$.

Сделаем теперь дополнительное предположение [1]), что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$; тогда вторую часть выражения (10) можно преобразовать, применив формулу) интегрирования по частям, а именно:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x)\, dx = \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx.$$

Первый член второй части этого равенства в силу (7), обращается в нуль и, подставляя остальное в выражение для δI (10), найдем

$$\delta I = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Для того, чтобы $\delta I = 0$, необходимо равенство нулю интеграла стоящего в правой части (11), для всякой функции η (x) класса $C^{(1)}$ удовлетворяющей условию (7). Мы можем применить теперь лемму I (§ 4), так как все условия ее соблюдены, если за F принять

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$$

и заключаем, что в промежутке (x_0, x_1) тождественно

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Итак, мы нашли первое условие, которому должна непременно удовлетворять функция $y = f(x)$:

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ давала экстремум определенному интегралу I, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла дифференциальному уравнению (12).

Это уравнение было найдено впервые Эйлером и носит его имя. Раскрывая член $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$, мы можем уравнение Эйлера (12) переписать в развернутом виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Вообще говоря, $F(x, y, y')$, действительно, содержит y', и уравнение Эйлера представляет тогда дифференциальное уравнение второго порядка.

---

[1]) Этого дополнительного условия можно и не ставить (см. доб. 2, стр. 33).

Его общий интеграл $f_1(x, C_1, C_2)$ содержит две произвольных постоянных C_1 и C_2. Если мы потребуем, чтобы интегральная кривая прошла через две заданные точки A и B, то мы должны выбрать константы C_1 и C_2, чтобы

$$f_1(x_0, C_1, C_2) = y_0 \text{ и } f_1(x_1, C_1, C_2) = y_1.$$

Так как число уравнений равно числу неизвестных, то задача эта, вообще, имеет решение.

Интегральные кривые уравнения Эйлера называют экстремалями. Мы показали выше, таким образом, что всякая кривая дающая экстремальное значение интегралу I есть интегральная кривая уравнения Эйлера, т. е. экстремаль.

§ 7. Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

Мы рассмотрим здесь те случаи, когда функция F, стоящая под знаком интеграла (1), не зависит от каких-либо из переменных x, y, y'.

1) F есть функция только от y'.

$$F = F(y').$$

В этом случае уравнение Эйлера (13) приводится к

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$$

или просто

$$y'' = 0.$$

Его общий интеграл есть

$$y = ax + b,$$

и интегральные кривые суть прямые линии.

2) F зависит только от y и y':

$$F = F(y, y').$$

Уравнение Эйлера в этом случае будет

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

и мы легко найдем его первый интеграл. Действительно, рассмотрим

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y'^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y' y'' =$$
$$= -y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Если функция y удовлетворяет уравнению Эйлера, то правая часть обращается в нуль и

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \qquad \qquad (14)$$

дает нам первый интеграл уравнения Эйлера. После того как первый интеграл найден, интегрирование может быть здесь доведено до конца с помощью квадратуры.

3) F зависит только от x и y':

$$F=F\ (x,\ y').$$

Так как в этом случае $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, то уравнение Эйлера (12) будет:

$$\frac{d}{d\ x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

и его первый интеграл находим сразу:

$$\frac{\partial F\ (x,\ y')}{\partial y'}=C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Решая это уравнение относительно y' и интегрируя, найдем общее решение уравнения Эйлера.

4) F зависит только от x и y:

$$F=F\ (x,\ y).$$

Уравнение Эйлера (12) в этом случае обращается в

$$\frac{\partial\ F\ (x,\ y)}{\partial y}=0$$

и не будет дифференциальным. Решая это уравнение, найдем одну или конечное число экстремалей вида:

$$y=\varphi\ (x).$$

Таким образом, в этом случае вариационная задача, вообще говоря, не имеет решения, так как нельзя найти для любых точек A и B экстремаль, проходящую через эти точки, и основная задача разрешима здесь лишь при исключительных A и B.

§ 8. Некоторые обобщения основной задачи.

Здесь мы рассмотрим две задачи о минимуме интеграла типа (1) В основной задаче функция F зависела только от неизвестной функции y и ее производной y'; здесь мы рассмотрим два более общих случая:

1) Функция F зависит от нескольких неизвестных функций y, z, . . . и их первых производных y', z', . . .

2) Функция F зависит от неизвестной функции y и ее производных до n-ого порядка y', y'' . . . , $y^{(n)}$. Необходимые условия для этих задач находятся совершенно тем же методом, что и для основной задачи.

I. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ.

Мы ограничимся случаем, когда имеются две неизвестных функции y и z, так как случай большего числа неизвестных функций ничем от него не отличается. В указанном случае задача ставится так: *Найти кривую*

$$y=f(x);\ z=f_1(x),$$

проходящую через две данные точки $A(x_0, y_0, z_0)$ *и* $B(x_1, y_1, z_1)$, *которая дает минимальное значение интегралу*

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Функция F предполагается здесь непрерывной вместе с частными производными до 3-го порядка, а функции f и f_1 принадлежащими классу $C^{(2)}$. Поступаем так же, как в основной задаче. За близкую кривую возьмем

$$y=f(x)+\alpha\,\eta(x);\ z=f_1(x)+\alpha\,\eta_1(x),$$

где $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ произвольные функции класса $C^{(1)}$, обращающиеся в нуль на концах интервала (x_0, x_1). Подобно тому, как в основной задаче (10), составим первое выражение для δI:

$$\delta I=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial z}\eta'(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)+\frac{\partial F}{\partial z'}\eta'(x)\right]dx.$$

Проинтегрировав два последние члена в скобках по частям, найдем:

$$\delta I=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left\{\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]+\eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\right\}dx.$$

Так как $\delta I=0$ для всяких $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$, то, беря сначала $\eta_1(x)=0$, а $\eta(x)$ произвольным, убеждаемся, пользуясь леммой I (§ 4), в том, что множитель при $\eta(x)$ должен быть равен нулю, беря же наоборот, $\eta(x)=0$, а $\eta_1(x)$ произвольной, убеждаемся, что и множитель при $\eta_1(x)$ должен быть равен нулю; таким образом, тождественно в (x_0, x_1):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0;\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0 \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Эта система уравнений, относительно неизвестных функций y и z играет ту же роль в этой задаче, что уравнение Эйлера. в основной.

II. СЛУЧАЙ, КОГДА ВХОДЯТ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Задача.

Найти функцию $y=f(x)$ *класса* $C^{(n)}$, *принимающую вместе со своими производными до* $(n-1)$ *порядка заданные значения при* $x=x_0$ и $x=x_1$, *т.-е.*

$$y=y_0;\ y'=y'_0;\ \ldots\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0$$
$$\text{и } y=y_1;\ y'=y'_1;\ \ldots\ y^{(n-1)}=y_1^{(n-1)} \text{ при } x=x_1,$$

такую, что интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F\,(x,\,y,\,y',\,.\,.\,.\,,\,y^{(n)})\,dx\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(18)$$

имеет минимальное значение.

Функция F предполагается здесь имеющей непрерывные частные производные до $(n+2)$ порядка, а искомое решение функция y принадлежащей классу $C^{(2n)}$. За близкую кривую примем

$$y=f\,(x)+\alpha\;\eta\;(x),$$

где $\eta\,(x)$ произвольная функция класса $C^{(n)}$, обращающаяся в нуль вместе со своими производными до $(n-1)$ порядка в точках x_0 и x_1.

Тогда $\delta\,I$ будет

$$\delta\;I=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta\;(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta'\;(x)+\;.\;.\;.\;+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\,\eta^{(n)}\,(x)\right]dx.$$

Преобразуем все слагаемые правой части кроме первого, проинтегрировав каждое k раз по частям, найдем

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\;\eta^{(k)}\,(x)\;dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k-1)}\,(x)-\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\eta^{(k-2)}\,(x)+\;.\;.\;.\;+\right.$$

$$\left.+(-1)^{(k-1)}\frac{d^{(k-1)}}{dx^{(k-1)}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\eta\;(x)\right]_{x_0}^{x_1}+$$

$$+(-1)^{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\eta\;(x)\;dx.$$

Первое слагаемое правой части равно нулю, в силу условия, наложенного на $\eta\;(x)$ в точках x_0 и x_1 и подставляя полученное выражение в $\delta\;I$, найдем

$$\delta\;I=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\eta\;(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\;.\;.\;.\;+(-1)^{n}\,\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(\frac{d\,F}{dy^{(n)}}\right)\right]dx.$$

Так как $\delta\;I=0$ для всякой функции $\eta\;(x)$ класса $C^{(n)}$, обращающейся в нуль вместе с производными до $(n-1)$ порядка в точках x_0 и x_1, то (см. замечание в конце § 4) множитель при $\eta\;(x)$ должен быть равен нулю тождественно в $(x_0,\;x_1)$, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\;.\;.\;.\;+(-1)^{(n)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0\quad.\;.\quad(19)$$

Таким образом, функция $y=f\;(x)$ должна удовлетворять уравнению (19) ($2n$*-ого*) порядка, соответствующему уравнению Эйлера в основной задаче. Общий интеграл этого уравнения содержит $2n$ произвольных постоянных; распоряжаясь ими, мы можем, вообще говоря, удовлетворить поставленным выше $2n$ начальным условиям.

§ 9. Примеры.

I. ЗАДАЧА О НАИМЕНЬШЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

Эта задача (см. § 2) была приведена к разысканию минимума интеграла

$$I=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

В этом случае функция F не зависит от x, а потому мы можем написать сразу первый интеграл уравнения Эйлера по (15)

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

Отсюда

$$\frac{C_1\,dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=dx$$

и интегрируя найдем

$$x-C_2=C_1\ ln\left(y+\sqrt{y^2-C_1^2}\right)-C_1\ ln\ C_1;$$

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1\ e^{\frac{x-C_2}{C_1}};$$

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right)=C_1\,Ch\frac{x-C_2}{C_1}.$$

Таким образом, искомые экстремальные кривые представляют семейство цепных линий, имеющих ось симметрии параллельную оси OY. Поверхность вращения такой цепной линии называется **катеноидом**. Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия, что кривая проходит через заданные точки A и B, но эта задача разрешима не при всех положениях точек A и B [1]).

II. ЗАДАЧА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ.

Если на плоскости скорость распространения света есть функция точки $v(x, y)$, что мы имеем в случае неоднородной изоторопной среды, то время, нужное для прохождения светом пути от точки A до точки B по кривой $y=f(x)$, выражается интегралом

$$I=\int_A^B\frac{ds}{v(x,y)}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\,dx.$$

---

[1]) Подробнее об этом см. добавление 4.

Задача геометрической оптики есть задача нахождений линий наискорейшего распространения света, т. е. линий, дающих наименьшее значение интегралу I. Для нахождения этих линий составляем дифференциальное уравнение Эйлера (12)

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2(x, y)}\frac{dv}{dy}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\,v(x, y)}=0.$$

Рассмотрим частный пример, когда $v(x, y)=y$. Написанное уравнение примет в этом случае вид

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}=0.$$

Так как F здесь не зависела от x, мы можем написать его первый интеграл [см. (15)] в виде:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{C_1},$$

откуда упрощая и интегрируя, найдем

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}}=dx;$$

$$-\sqrt{C_1^2-y^2}=x-C_2;$$

$$(x-C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

Здесь линии наискорейшего распространения света суть окружности с центром на оси абсцисс. Пользуясь написанным выше первым интегралом, нетрудно показать, что решение задачи будут давать и прямые, параллельные оси OY. Ясно также, что через каждую пару точек верхней полуплоскости можно провести одну и только одну из этих линий.

Последний рассмотренный пример имеет интересную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим пространство, состоящее из точек верхней полуплоскости, в которой определена новая метрика так, что новый элемент длины

$$d\sigma=\frac{ds}{y}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}.$$

Какова будет геометрия этого пространства? Точками его будут обычные точки верхней полуплоскости. При этом точки оси абсцисс будут здесь бесконечно удаленными, так как расстояние от любой точки верхней полуплоскости до любой точки оси OY выражается интегралом

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(0, x_2)}\frac{ds}{y},$$

а этот интеграл будет расходящимся при любом пути интегрирования, так как он, очевидно, превосходит по абсолютной величине

$$\int_{y_1}^{0} \frac{dy}{y},$$

который как известно расходящийся. Прямыми этого пространства естественно считать линии, дающие кратчайшие пути, т. е. наименьшее значение

$$\int \frac{ds}{y},$$

которые, как мы нашли выше, представляют собой полуокружности с центром на оси абсцисс и полупрямые параллельные оси OY (их также можно считать полуокружностями с бесконечно удаленным центром).

Углом между пересекающимися прямыми (этого пространства) нужно считать угол между касательными к этим полуокружностям.

При таком определении точек, прямых и углов, как можно проверить, соблюдены все аксиомы геометрии кроме аксиомы параллельности; например:

Через каждые две точки можно провести одну — и только одну — прямую.

Точка разделяет прямую на две части.

Между тем аксиома параллельности, очевидно, не верна, так как через каждую точку можно провести бесчисленное множество полуокружностей с центром на оси, не пересекающихся с данной полуокружностью. Это показывает, что аксиома параллельности не есть следствие остальных аксиом геометрии, так как в нашем примере их выполнение не влечет за собой выполнения аксиомы параллельности.

Плоскость, которую мы здесь рассматривали, есть т. н. плоскость Лобачевского.

III. ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ.

Задача эта была приведена (см. § 2) к разысканию минимума интеграла

$$I = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx.$$

Так как функция F не зависит от x, мы можем сразу написать первый интеграл уравнения Эйлера (15):

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}},$$

или

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y}.$$

Полагая теперь

$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u), \text{ откуда } y'=\frac{C_1}{2}\sin u\cdot u'$$

после подстановки и упрощения найдем

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos u)\ du=\pm dx.$$

Откуда интегрируя

$$x=\pm\frac{C_1}{2}(u-\sin u)+C_2;\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u).$$

Так как кривая должна проходить через начало, то нужно положить $C_2=0$.

Мы видим, что искомая кривая — брахистохрона есть циклоида.

$$x=\pm\frac{C_1}{2}(u-\sin u)$$
$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u).$$

Постоянная C_1 должна быть найдена из условия, что кривая проходит через точку $B(x_1, y_1)$.

IV. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА СФЕРЕ.

Дана сфера радиуса 1. Выбирая сферические координаты долготу φ и широту Θ, можем уравнение линии на сфере написать в виде $\varphi=f(\Theta)$. Тогда элемент длины

$$ds^2=d\Theta^2+\sin^2\Theta\ d\varphi^2,$$

а вся длина линии между точками A и B выражается интегралом:

$$\int_A^B\sqrt{1+\sin^2\Theta\ \varphi'^2}\ d\Theta.$$

Для того, чтобы линия $\varphi=f(\Theta)$ была геодезической, функция f должна быть подобрана так, чтобы написанный интеграл достигал минимума, т.-е. должна удовлетворять во всяком случае уравнению Эйлера (12):

$$\frac{d}{d\Theta}\ \frac{\sin^2\Theta\ \varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\Theta\ \varphi'^2}}=0.$$

Одно решение $\varphi'=0$, т.-е. $\varphi=\text{const}$ здесь очевидно. Так как это решение дает семейство больших кругов, то по симметрии шара заключаем, что все большие круги суть геодезические линии.

§ 10. Экстремум двойного интеграла.

Пусть $F(x, y, z, p, q)$ функция пяти переменных x, y, z, p, q непрерывная вместе со своими производными до третьего порядка в некоторой пространственной области R значений переменных x, y, z и при всех конечных p и q. Пусть Γ замкнутая пространственная кривая, проекция которой на плоскость XOY есть простой замкнутый контур C, ограничивающий область D.

Пусть $z=f(x, y)$ уравнение поверхности S, расположенной в R и проходящей через кривую Γ; если кроме того функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, то будем называть ее допустимой. Заменим в выражении F переменные z, p, q соответственно на $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, результат будет представлять непрерывную функцию x, y в области D, и поэтому двойной интеграл,

$$I=\iint_{(D)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

имеет определенное конечное значение для каждой допустимой поверхности S. Можно поставить и здесь задачу отыскания поверхности, для которой интеграл I (20) имеет значение наименьшее по сравнению с интегралами, взятыми по близким допустимым поверхностям. Для получения необходимого условия, которому должна удовлетворять такая поверхность $z=f(x, y)$, возьмем за близкую допустимую поверхность

$$z=f(x, y)+\alpha\,\eta\,(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ произвольная функция, непрерывная в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ и обращающаяся в нуль на контуре C. Тогда функция

$$I(\alpha)=\iint_{(D)} F\left(x, y, f(x, y)+\alpha\,\eta\,(x, y)\, \frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dx\, dy$$

должна достигать минимума при $\alpha=0$. В таком случае первая вариация

$$\delta I=\alpha\, I'(0)$$

должна равняться нулю; дифференцируя же $I(\alpha)$ под знаком интеграла и положив $\alpha=0$, найдем

$$\delta I=\alpha\left[\frac{d I}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}=$$

$$=\alpha\iint_{(D)}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\,\eta\,(x, y)+\frac{\partial F}{\partial p}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] dx\, dy.$$

Преобразуем последние два слагаемые правой части, воспользовавшись общей формулой Грина [при этом мы делаем дополнительное предположение о том, что функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка]

$$\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy=\int_{(C)} P\, dx+Q\, dy$$

следующим образом:

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial p}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\,\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\,\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_{(D)} \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{(C)}\left(\eta\,\frac{\partial F}{\partial p}\,dy-\eta\frac{\partial F}{\partial q}\,dx\right)-$$

$$-\iint\limits_{(D)} \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dx\,dy.$$

Но полученный контурный интеграл равен нулю, так как по условию $\eta\,(x, y)$ обращается в нуль на C, и потому, заменяя в выражении для $\delta\,I$ два последних члена их новым выражением, найдем:

$$\delta\,I=\alpha\iint\limits_{(D)} \eta\,(x, y)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dx\,dy.$$

При этом $\delta\,I$ равно нулю для всякой функции $\eta\,(x, y)$, непрерывной вместе с частными производными в D и равной нулю на C, и для выражения

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]$$

соблюдены все условия леммы II (§ 4), а потому, воспользовавшись этой леммой, заключаем, что тождественно в области (D)

$$\frac{F\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dF}{\partial d}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0 \quad \ldots\ldots (21$$

Таким образом, *функция* $z=f\,(x, y)$ *должна быть решением уравнения в частных производных* (21), соответствующего уравнению Эйлера в основной задаче. Граничным условием здесь является то, что поверхность $z=f\,(x, y)$ должна пройти через кривую Γ.

Заметим, наконец, что рассуждения этого параграфа полностью переносятся и на тройной интеграл, только в уравнении (21) прибавится еще один член.

Пример 1. Рассмотрим задачу отыскания поверхности с наименьшей площадью, проходящей через данную кривую Γ, в пространстве. Задача эта есть задача нахождения *минимума* интеграла

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

Уравнение (21) для этого случая принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

Раскрывая это выражение найдем

$$r\,(1+q^2)+t\,(1+p^2)-2\,pqs=0,$$

где $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Полученное уравнение и представляет уравнение в частных производных, определяющее минимальные поверхности. Это уравнение дает то геометрическое свойство этих поверхностей, что *сумма главных радиусов кривизны в каждой точке поверхности равна нулю.*

Действительно, как известно [1]), эта сумма равна:

$$R_1+R_2=\frac{(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2\,pqs}{rt-s^2}\sqrt{1+p^2+q^2}$$

и, очевидно, обращается в нуль, если функция f удовлетворяет найденному выше уравнению для минимальных поверхностей.

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимуме тройного интеграла

$$\iiint\limits_{(v)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx,\,dy,\,dz\ (*)$$

где v объем пространства, ограниченный поверхностью Σ, и u функция трех переменных x, y, z, значения которой заданы на поверхности Σ.

Согласно сделанному выше замечанию, результат, найденный для двойного интеграла, верен и для тройного, и функция, дающая минимум тройному интегралу, должна удовлетворять уравнению (21), в котором добавлен один член. Пользуясь этим, находим для u уравнение:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(2\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

или произведя дифференцирование и сокращение,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Таким образом, *функция u должна удовлетворять уравнению Лапласа.* Вспоминая дополнительное начальное условие, видим, что поставленная задача о минимуме тройного интеграла приводится к нахождению гармонической функции u, принимающей данные значения на поверхности Σ, т. е. к решению так называемой задачи Дирихле в трехмерном пространстве.

---

[1]) См., например, Гурса. Курс анализа, т. I, стр. 547.

Полученный результат о том, что функция, дающая минимум тройному интегралу (*), должна удовлетворять уравнению Лапласа, находит следующее интересное приложение в теории электрического поля.

Как известно [1]), полная энергия электрического поля выражается интегралом

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint E^2 dV,$$

где E есть численная величина вектора $\boxed{\mathbf{E}}$ напряженности поля:

$$\boxed{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\varphi = \boxed{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boxed{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boxed{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

φ обозначает здесь потенциал поля.

Отсюда

$$E^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Принцип Томсона дает нам возможность утверждать, что функция φ должна давать энергии поля W наименьшее значение.

Но из вида W:

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz$$

следует, что функция φ дает минимум интегралу (*) и как показано выше, должна в таком случае удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Мы получили, таким образом, что основное уравнение теории поля

$$\Delta\varphi = 0$$

вполне согласуется с принципом Томсона и может быть выведено из него.

§ 11. Уравнение Эйлера для параметрической формы задания кривых (теория Вейерштрасса).

Предшествующий анализ основной задачи допускал к рассмотрению только такие кривые, у которых касательная нигде не параллельна оси OY, и которые всякая прямая параллельная этой оси пересекает только в одной точке, так как лишь они могут быть представлены в виде $y = f(x)$, где $f(x)$ однозначная функция с конечной производной. Между тем отброшенные нами кривые могли оказаться решающими данную геометрическую или физическую задачу, так как условие возможности явного задания

[1]) См., например, И. Тамм. Основы теории электричества, стр. 93 (обозначения заимствованы оттуда же).

кривой в виде $y=f(x)$ было вызвано не существом вопроса, а лишь требованиями примененного метода.

Вейерштрасс подошел к вопросу более обще, чем устранил этот существенный недостаток прежнего метода. В этом параграфе мы изложим начала его теории.

Рассмотрим кривую, заданную параметрически:

$$x=x(t);\ y=y(t).$$

Мы будем говорить, что эта кривая Γ принадлежит классу $C^{(1)}$, если она допускает параметрическое представление

$$x=\varphi(t);\ y=\psi(t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

причем φ и ψ функции непрерывные вместе со своими производными при t изменяющемся в промежутке (t_0, t_1) и $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ не обращаются в нуль одновременно (т. е. кривая не имеет особых точек). Всякая кривая, принадлежащая классу $C^{(1)}$, имеет бесконечное множество таких представлений, так как, если (22) одно из них, то произведя подстановку $t=\pi(\tau)$, где $\pi(\tau)$ произвольная функция, возрастающая от значения t_0 до t_1, когда τ изменяется от τ_0 до τ_1 и имеющая непрерывную производную $\pi'(\tau)$, не обращающуюся в нуль, мы получим новое представление

$$x=\varphi[\pi(\tau)];\ y=\psi[\pi(\tau)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

удовлетворяющее тем же условиям.

Пусть теперь $F(x, y, x', y')$ функция четырех переменных x, y, x', y', непрерывная вместе со своими частными производными до третьего порядка, для всех x, y, для которых точка (x, y) лежит в области R плоскости, и при всех конечных значениях x' и y', для которых $x'^2+y'^2\neq 0$. Если Γ—кривая класса $C^{(1)}$ задана параметрическими уравнениями (22), причем выполняются поставленные выше условия для φ и ψ, то определенный интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y; x', y')\,dt$$

получит определенное значение

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(t), \psi(t); \varphi'(t), \psi'(t)]\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Это значение будет зависеть, вообще, не только от вида кривой Γ, но и от формы параметрического представления (22).

Представляют интерес только такие задачи, в которых величина интеграла I зависит только от вида кривой Γ, но не зависит от способа ее задания, являющегося чисто внешним фактором; поэтому важно выяснить, какое условие надо наложить на функцию F, чтобы это имело место. Для этого необходимо, чтобы при замене представления (22) кривой Γ на представление (23) величина интеграла (24) сохранила прежнее значение, т. е.

$$I_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F \left\{ \varphi[\pi(\tau)],\ \psi[\pi(\tau)];\ \varphi'[\pi(\tau)]\,\pi'(\tau),\ \psi'[\pi(\tau)]\,\pi'(\tau) \right\} d\tau = I.$$

Заменяя в I_1 переменную τ на $\pi(\tau) = u$ найдем:

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} F\left[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u)\,\pi'(\tau), \psi'(u)\,\pi'(\tau)\right] \frac{du}{\pi'(\tau)} \quad \ldots (25$$

Так как интегралы I_1 и I должны совпадать для любой кривой Γ, то они должны совпадать в частности для любого участка Γ, т. е. эти интегралы должны равняться для любых пределов t', t'', из промежутка (t_0, t_1), а это возможно только в том случае, когда подъинтегральные функции их совпадают.

Итак,

$$F\,[\varphi(u), \psi(u);\ \varphi'(u)\,\pi'(\tau),\ \psi'(u)\,\pi'(\tau)] =$$
$$= \pi'(\tau)\ F(\varphi(u), \psi(u);\ \varphi'(u),\ \psi'(u)].$$

Но так как $\pi'(\tau)$ может быть сделано равным любому положительному числу K, то при всех K должно быть, для всех допустимых значений x, y, x' y':

$$F(x, y; Kx'\ Ky') = KF(x, y; x'\ y') \quad \ldots\ldots (26)$$

Вспоминая определение однородной функции, видим, что условие, наложенное на F, привелось к тому, чтобы она была однородной функцией степени 1 от аргументов x' и y' [1]).

Можно показать и обратное, что условие (26) является достаточным для того, чтобы интеграл I зависел только от кривой Γ, но не зависел от способа ее представления. Действительно, пусть кроме представления (22) кривая Γ имеет еще какое-либо представление; тогда, как легко убедиться, можно подобрать функцию $\pi(\tau)$ так, чтобы это представление приняло вид (23).

Интеграл, соответствующий этому второму представлению, после замены переменной может быть приведен к виду (25), и тогда, воспользовавшись однородностью F (26) для $K = \pi'(\tau)$, мы установим непосредственно равенство интегралов (24) и (25).

Будем предполагать в дальнейшем, что F однородная функция переменных x', y'.

Под кривой близкой к Γ будем понимать кривую, расположенную в области R_ε тех точек плоскости, которые отстоят от кривой Γ не более чем на ε. Подобно прежнему будем говорить, что кривая Γ дает минимум интегралу (25), если найдется такое ε, что интеграл по кривой Γ имеет минимальное значение по сравнению

---

[1]) Последнее заключение не вполне точно, так как для того, чтобы функция F была однородной, нужно, чтобы условие (26) выполнялось не только для K положительных, что мы установили, но для всех K. Однако в наиболее важных случаях (когда F аналитическая функция) выполнение условия (26) для K положительных само собой обеспечивает его выполнение для всех возможных значений K.

с интегралами по всем кривым класса $C^{(1)}$, проходящим через точки $A[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ и $B[\varphi(t_1), \psi(t_1)]$ и лежащим в области R_ε.

Для нахождения необходимых условий для кривой Γ за близкую кривую возьмем:

$$x = \varphi(t) + \alpha\xi(t); \; y = \psi(t) + \alpha\eta(t),$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ произвольные функции класса $C^{(1)}$, обращающиеся в нуль на концах промежутка (t_0, t_1).

Тогда интеграл

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(t) + \alpha\xi(t), \psi(t) + \alpha\eta(t); \; \varphi'(t) + \alpha\xi'(t), \psi'(t) + \alpha\eta'(t)]\, dt$$

должен достигать минимума при $\alpha = 0$; поэтому первая вариация $\delta I = \alpha I'(0)$ должна быть равна нулю. Подобно тому как мы сделали в основной задаче (§ 6) можем посредством интегрирования по частям представить δI в виде

$$\delta I = \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) \right] \xi(t) + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta(t) \right\} dt.$$

В виду произвольности $\xi(t)$ и $\eta(t)$ по лемме I (§ 2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0; \; \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (27)$$

Мы получили два уравнения относительно функций φ и ψ, но эти уравнения не независимы. Так как F однородная функция от x' и y', то по теореме Эйлера:

$$F = x' F'_{x'} + y' F'_{y'}.$$

Дифференцируя это равенство по каждой из переменных x, y, x', y' получим

$$F'_x = x' F''_{xx'} + y' F''_{xy'}; \; F'_y = x' F''_{yx'} + y' F''_{yy'} \quad . \; . \; . \; (28)$$
$$0 = x' F''_{x'x'} + y' F''_{x'y'}; \; 0 = x' F''_{x'y'} + y' F''_{y'y'}.$$

Из последних двух равенств найдем:

$$\frac{F''_{x'^2}}{y'^2} = \frac{F''_{x'y'}}{-x'y'} = \frac{F''_{y'^2}}{x'^2} = F_1(x, y; \; x', y') \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

Определенная таким образом функция

$$F_1(x, y; \; x', y')$$

непрерывна и имеет непрерывные производные при $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

Очевидно также, что

$$F_1(x, y; \; x', y')$$

есть однородная функция переменных x' и y' степени -3.

Возвращаясь к уравнениям (27) и произведя дифференцирование, придадим им вид:

$$\left.\begin{aligned} F'_x - F''_{xx'}\,x' - F''_{yx'}\,y' - F''_{x'x'}\,x'' - F''_{x'y'}\,y'' = 0 \\ F'_y - F''_{yy'}\,y' - F''_{xy'}\,x' - F''_{x'y'}\,x'' - F''_{y'y'}\,y'' = 0 \end{aligned}\right\}$$

Заменяя в этих уравнениях F'_x и F'_y по формулам (28) и $F''_{x'^2}$, $F''_{y'^2}$, $F''_{x'y'}$ по формулам (29), можем преобразовать эти уравнения к форме:

$$y'T = 0;\; x'T = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

где

$$T = F_1(x,\, y,\, x',\, y')\,(x'y'' - y'x'') + F''_{xy'} - F''_{yx'}\,.$$

Так как x' и y' одновременно в нуль не обращаются, то оба уравнения (30) приводятся к одному

$$T = F_1(x,\, y,\, x',\, y')\,(x'y'' - y'x'') + F''_{xy'} - F_{yx'} = 0 \; . \; . \; . \; (31)$$

Полученного одного уравнения (31) недостаточно для определения двух неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$. Действительно, если бы мы имели одну пару функций $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих уравнению (31), то и любая пара функций $x[\pi(\tau)]$, $y[\pi(\tau)]$, задающих ту же кривую Γ, будет удовлетворять этому же уравнению. В этом легко убедиться, подставив, действительно, в уравнение (31) вместо x и y функции $x[\pi(\tau)]$ и $y[\pi(\tau)]$ и воспользовавшись тем, что $F_1(x, y; x', y')$ есть однородная функция степени -3 от переменных x', y'. Можно, таким образом, сказать, что уравнение (31) есть уравнение не относительно пары функций $x(t)$ и $y(t)$, а относительно кривой Γ.

Для того, чтобы задача отыскания функций $x(t)$ и $y(t)$ получила определенное решение, необходимо выбрать определенный параметр, т.-е. ввести еще одно уравнение, связывающее функции $x(t)$ и $y(t)$. Так, например, если за параметр t выбираем x, то это уравнение будет

$$x'(t) = 1,$$

если длину дуги s, то

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 1,$$

и вообще это будет некоторое дифференциальное уравнение, связывающее переменные x и y. Это дифференциальное уравнение мы можем добавить при этом, не исходя из выбора параметра, а произвольно, так как после добавления его к уравнению (31) мы получим систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$. Эта система дает вообще определенные $x(t)$ и $y(t)$, (с точностью до постоянных интегрирования), т.-е. определенное представление кривой Γ; таким образом, добавление уравнения к уравнению (31) само собой определяет выбор параметра. Заметим, что вместо добавления произвольного уравнения к уравнению (31) его можно добавить к равносильной уравнению (31) системе (30) или (27). Отметим, наконец, что если в уравнении (31) за параметр t принять x, то оно превратится в уравнение Эйлера, но при этом мы можем потерять те решения задачи, где кривая Γ содержит участки вида $x = \mathrm{const}$ или имеет касательную параллельную оси OY. Между тем уравнение в форме (31), когда не отдано предпочтение ни одной из переменных x и y содержит все решения задачи.

§ 12. Геодезические линии n-мерного пространства.

Под n-мерным пространством мы будем понимать здесь многообразие точек, положение которых определяется заданным n чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ — координат точки. Примером таких пространств может служить обычное эвклидово пространство двух или трех измерений, в котором выбрана определенная система координат, поверхность с определенной на ней системой криволинейных координат, неэвклидово пространство. Под кривой в n-мерном пространстве будем понимать многообразие точек n-мерного пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящее от некоторого непрерывного параметра t, т.-е. множество точек, определенное уравнениями

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t) \quad \ldots\ldots (32)$$

Можно показать, что теория Вейерштрасса, развитая в предыдущем параграфе для плоских кривых, переносится и на кривые, расположенные в n-мерном пространстве. Именно, можно доказать, что если кривая (32) дает минимальное значение интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1} F[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t);\ x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)]\,dt, \quad (33)$$

то функции $x_1(t), x_2(t), x_n(t)$ должны удовлетворять следующей системе уравнений [аналогичной системе (27)]:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'_i}\right) = 0 \ (i = 1, 2,\ n) \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Как и в случае двух неизвестных функций предполагаем, что F однородная функция первой степени от аргументов $x_1', \ldots, x'_n$.

При этом система n уравнений (34) содержит только $(n-1)$ независимых и для того, чтобы сделать задачу о нахождении функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ определенной нужно добавить произвольно одно уравнение, определяющее выбор параметра.

Предположим теперь, что в рассматриваемом пространстве определена метрика, т.-е. дан элемент длины. Квадрат элемента длины ds^2 представляет в таком пространстве аггрегат:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\,dx_i\,dx_k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

где a_{ki} суть некоторые функции координат x_i. Квадратическая форма (35) предполагается всюду существенно положительной.

Например, в случае декартовой системы, в трехмерном пространстве форма (35) принимает вид:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

т. е.

$$a_{i,k} = 0 \text{ при } i \neq k \text{ и } a_{ii} = 1.$$

Для нахождения геодезической линии, соединяющей две данные закрепленные точки A и B, нужно найти линию, проходящую через эти точки:

$$x_1 = x_1(\tau),\ x_2 = x_2(\tau),\ \ldots,\ x_n = x_n(\tau) \quad \ldots \ldots (36)$$

и имеющую наименьшую длину, т. е. дающую минимальное значение интегралу

$$\int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i' x_k'}\, d\tau, \quad \ldots \ldots (37)$$

(производные от x_i взяты по τ). Заметим, что мы можем считать в (35) $a_{ik} = a_{ki}$, так как в противном случае мы могли бы этого добиться, заменив и то и другое на их полусумму $\frac{a_{ik} + a_{ki}}{2}$. Положим

$$\varphi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i' x_k', \quad \ldots \ldots (38)$$

тогда φ представляет сложную функцию от τ, зависящую от него посредством переменных $x_1, \ldots, x_n;\ x_1', \ldots x_n'$. При таком обозначении

$$ds = \sqrt{\varphi}\, d\tau \quad \ldots \ldots (39)$$

Для отыскания кривой (36), дающей минимум интегралу (37), мы должны написать систему уравнений Эйлера (34), которая в этом случае принимает вид:

$$\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} - \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

или в раскрытом виде

$$\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} - \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x'_h} x'_j - \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_h} x_j'' -$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial x'_h} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots (40)$$

Система n уравнений (40) должна содержать лишь $(n-1)$ уравнений независимых в согласии с общим результатом, указанным в конце предыдущего параграфа, и мы можем к уравнениям (40) произвольно добавить еще одно. За это последнее возьмем уравнение

$$\varphi = 1 \quad \ldots \ldots (41)$$

в силу (39) его добавление равносильно тому, что за параметр τ мы выбираем длину дуги s.

Благодаря присоединенному уравнению (41), система (40) упрощается и принимает вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x'_h}x'_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'_j\partial x'_h}x''_j=0 \quad (40') \quad (h=1,2,\ldots,n)$$

Наконец, подставляя сюда выражение (38) для φ и сокращая на 2, найдем:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h}x'_i x'_k-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_j}x'_j x'_i-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}a_{jh}x''_j=0.$$

Остановимся на второй сумме; в ней коэффициенты при $x'_i x'_k$ и $x'_k x'_i$ неодинаковы, поэтому заменим каждый из этих коэффициентов на их полусумму:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kh}}{\partial x_i}\right).$$

Теперь, соединив первую сумму со второй и переменив знаки на обратные, приведем окончательную систему (40′) к виду:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jh}x''_j+\sum_{i,k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kh}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h}\right]x'_i x'_k=0 \quad (42) \quad (h=1,2,\ldots,n).$$

В уравнениях (42) нужно считать производные от x взятыми по s. Заметим также, что выражение, стоящее в скобках во второй сумме, носит в дифференциальной геометрии название символа Кристофеля первого рода и обозначается

$$\left[{i\atop h}k\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{kh}}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h}\right).$$

В качестве примера рассмотрим задачу нахождения геодезических линий на произвольном цилиндре. Пусть уравнение направляющей цилиндра будет

$$x=\varphi(\sigma);\ y=\psi(\sigma),$$

когда за параметр принята длина дуги направляющей σ, так что

$$d\sigma^2=dx^2+dy^2$$

и

$$\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)=1.$$

За координаты точки на цилиндре возьмем σ и высоту точки z. Тогда

$$ds^2=d\sigma^2+dz^2,$$

так что в этом случае

$$a_{11} = a_{22} = 1$$

и

$$a_{12} = a_{21} = 0.$$

Уравнения (42) примут здесь вид:

$$\text{для } h=1,\ \sigma'' = 0; \text{ для } h=2,\ z''=0,$$

где производные взяты по дуге s, отсюда

$$\sigma = As + B;\ z = A_1 s + B_1.$$

Если $A \neq 0$, то можем написать уравнение этих линий в виде

$$z = C_1 \sigma + C_2,$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Эти линии, полное уравнение которых

$$x = \varphi(\sigma);\ y = \psi(\sigma);\ z = C_1 \sigma + C_2$$

обладают тем замечательным свойством, что касательная к ним образует постоянный угол φ с осью OZ.

Действительно, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz}{d\sigma} = C_1 = \text{const}$. В случае кругового цилиндра радиуса 1 направляющая есть круг $x = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi$, длина дуги σ равна углу φ и согласно с полученным результатом найдем, что геодезические линии кругового цилиндра суть винтовые линии:

$$x = \cos\varphi \qquad y = \sin\varphi \qquad z = C_1\varphi + C_2.$$

Предлагаем читателю найти, пользуясь уравнениями (42), геодезические линии на шаре.

Дополнения и задачи.

1. Пример несуществования решения в основной задаче.

В § 5 мы указали, что не всякая задача вариационного исчисления имеет решение (см. примечание на стр. 9). В виде примера такой задачи рассмотрим задачу об отыскании кривой, проходящей через точки $A(-1,-1)$, $B(1,1)$, которая дает минимум интегралу

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 y'^2\, dx = 0.$$

Очевидно, что для всякой кривой $y = f(x)$, принадлежащей классу $C^{(1)}$ и проходящей через точки A и B, интеграл I имеет существенно положительное значение $I > 0$; таким образом, нуль является нижней границей для значений I. Покажем, что нуль является точной нижней границей для этих значений, т. е., что существуют кривые класса $C^{(1)}$, проходящие через точки A и B, для которых значение I как угодно мало. Для доказательства этого найдем величину I для кривой Γ_λ:

$$y = \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\lambda}}{\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\lambda}},$$

которая проходит через точки A и B и принадлежит классу $C^{(1)}$.

Значение I для Γ_λ:

$$I_\lambda = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2} \right)^2 dx = \Bigg[\left(\frac{-x}{2(x^2+\lambda^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\lambda} \right) \frac{\lambda^2}{\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\lambda} \right)^2} \Bigg]_{-1}^{1} = - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2) \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\lambda} \right)^2} + \frac{\lambda}{\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\lambda}}$$

представляет величину сколь угодно малую при достаточно малом λ. Итак, нуль, действительно, есть точная нижняя граница значений интеграла I, но эта граница не достигается ни для какой кривой класса $C^{(1)}$.

2. Возражение Дюбуа Реймона.

При выводе уравнения Эйлера мы сделали дополнительное предположение о том, что функция, дающая минимум интегралу I, обладает непрерывной второй производной (см. § 6 стр.). Это ограничение не вызывалось существом вопроса, а было сделано лишь потому, что оно казалось необходимым при принятом методе исследования, именно, для интегрирования по частям. Дюбуа Реймон показал, что уравнение Эйлера может быть получено без этого предположения, так как существование y'' у функции, дающей экстремум, может быть выведено из сделанных уже предположений. Доказательство этого нуждается в следующей лемме.

ЛЕММА ДЮБУА РЕЙМОНА.

Пусть $F(x)$ определенная непрерывная функция в (x_0, x_1). Тогда, если

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\, \eta(x)\, dx = 0.$$

для всякой функции $\eta(x)$, для которой $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, dx = 0$, то функция $F(x)$ приводится к постоянной.

Обозначим через C среднее значение $F(x)$ в (x_0, x_1), так что

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - C]\, dx = 0.$$

В силу условия леммы, для всякой функции $\eta(x)$, для которой

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, dx = 0,$$

имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - C]\, \eta(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, \eta(x)\, dx - C \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, dx = 0.$$

В частности, беря $\eta(x) = F(x) - C$, найдем

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - C]^2\, dx = 0,$$

что возможно, так как $F(x)$ непрерывна, только, если

$$F(x) \equiv C. \qquad \text{ч. т. д.}$$

В дальнейшем рассуждение Дюбуа Реймона основано на преобразовании выражения первой вариации (10) отличном от того, которое было применено в § 6. Обозначим через $\Phi(x)$ результат подстановки $f(x)$ и $f'(x)$ вместо y и y' в $\frac{\partial F}{\partial y}$ и через $\Phi^*(x)$ неопределенный интеграл от $\Phi(x)$; $\Phi(x)$ и $\Phi^*(x)$ представляют непрерывные функции x. Преобразуем теперь выражение δI (10):

$$\delta I = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx,$$

проинтегрировав по частям первый член:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, d\,\Phi^*(x) =$$

$$= \Big[\Phi^*(x)\, \eta(x) \Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi^*(x)\, \eta'(x)\, dx.$$

Так как $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, то, отбрасывая первый член в правой части последнего равенства, найдем новое выражение для δI:

$$\delta I = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x) \left[\frac{dF}{dy'} - \Phi^*(x) \right] dx.$$

Последний интеграл должен обращаться в нуль для всякой непрерывной функции $\eta'(x)$, интеграл которой

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)\, dx = \Big[\eta(x)\Big]_{x_0}^{x_1} = 0,$$

а потому по лемме Дюбуа Реймона, множитель при $\eta'(x)$ должен быть постоянным, т. е.,

$$F_1\,[x, f(x), f'(x)] - \Phi^*(x) = C,$$

где функция

$$F_1(x, y, y') = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}$$

имеет непрерывные частные производные по всем аргументам. Последнее полученное уравнение может быть разрешено относительно $f'(x)$, так что

$$f'(x) = \psi[x, f(x)],$$

где $\psi(x, y)$ функция, имеющая непрерывные частные производные. Так как правая часть равенства имеет непрерывную производную по x, то должна существовать и быть непрерывной $f''(x)$. После того как это доказано, возвращаясь к рассуждению § 6, можно установить уравнение Эйлера для функции $f(x)$.

3. Обратная задача.

В §§ 6 и 10 было показано, что задача нахождения минимума простого и двойного интеграла приводится к решению дифференциального уравнения второго порядка: обыкновенного для случая простого интеграла и в частных производных для двойного. Представляет интерес и является полезной и постановка обратной задачи о нахождении по данному дифференциальному уравнению вариационной задачи, которая к нему приводит, т. е. такой, для которой данное уравнение является уравнением Эйлера.

Решение обратной задачи представляется полезным потому, что некоторые методы приближенного решения могут быть применены к вариационной задаче, а не непосредственно к уравнению (см. гл. VI). В некоторых случаях нахождение одного из решений обратной задачи может быть получено непосредственно. Так, например, для произвольного линейного уравнения

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y'' + a_3(x) = 0;$$

переписав его после умножения на

$$\frac{1}{a_2(x)}\, e^{\int_b^x \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

в виде

$$\frac{1}{a_2(x)}\, e^{\int_b^x \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}\, \frac{d}{dy}\left(\frac{a_0(x)}{2}\, y^2 + a_3(x)\, y\right) +$$

$$+ \frac{d}{dx}\left[\left(a_2(x)\, e^{\int_b^x \frac{a_2(x)\, dx}{a'_2(x)}}\right) y'\right] = 0,$$

находим непосредственно функцию F в виде:

$$F(x, y, y') = \frac{1}{a_3(x)} e^{\int_b^x \frac{a_1(x)}{a_3(x)} dx} \left[\frac{a_0(x)}{2} y^2 + a_3(x) y \right] - \\ - \frac{y'^2}{2} a_2(x) e^{\int_b^x \frac{a_1(x)\, dx}{a_2(x)}}$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ было связано с вариационной задачей

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz = min.$$

(см. пример в § 10) и т. д.

Вопрос о существовании решения обратной задачи для случая обыкновенного уравнения был решен до конца Дарбу. Именно, им было показано, что всякое уравнение второго порядка есть уравнение Эйлера для бесчисленного множества вариационных задач, и все функции $F(x, y, y')$ этих задач могут быть найдены с помощью квадратур, если известно общее решение данного дифференциального уравнения (об этом см., например, у Гурса т. III, 4-е франц. изд., стр. 655).

4. Исследование задачи о наименьшей поверхности вращения.

При решении этой задачи мы получили (см. § 9) семейство экстремалей в виде:

$$y = C_1\, Ch \frac{x - C_2}{C_1}.$$

Здесь мы исследуем вопрос о том, можно ли провести через данные две точки A и B экстремальную кривую. Мы покажем, что в зависимости от положения этих точек поставленная задача имеет два, одно или ни одного решения. В этом легче всего убедиться на основании геометрических соображений. Все кривые семейства экстремалей получаются из одной $y = Ch\, x$ посредством преобразований: переноса по оси OX и подобия, как это ясно из их выражения.

Возьмем какие-либо две точки A и B, пусть через них проходит какая-либо экстремаль Γ, тогда на основной экстремали γ ($y = Chx$) им будут соответствовать две подобно расположенные точки a и b, так что хорда ab будет параллельна AB. При этом, если обозначить через C точку пересечения прямой AB с осью OX, через k отношение $k = \frac{AC}{BC}$ и через c точку соответствующую C, т. е. пересечение ab с OX, то отношение $\frac{ac}{bc} = \frac{AC}{BC} = k$.

Таким образом, если через точки A и B можно провести экстремаль, то на кривой γ существует хорда ab параллельная AB и имеющая тоже отношение $\frac{ac}{bc} = k$; не трудно видеть также, что существование такой хорды ab является и достаточным для возможности проведения экстремали через точки A и B. Итак, дело приводится к нахождению хорды ab.

Проведем к кривой γ касательную rt параллельную прямой AB. Точка касания r разделит кривую γ на две части γ' и γ'' (см. рис. 2). Нам нужно отыскать такие точки m на γ' и n на γ'', чтобы отношение $\frac{ms}{ns}=k$. Обозначим через n' такую точку, для которой $\frac{ms}{ns}=k$, геометрическое место точек n' составит некоторую кривую γ^*, обращенную выпуклостью в сторону противоположную выпуклости γ_2. Эта кривая γ^* может иметь с γ две, одну или ни одной общей точки. Если она имеет с γ_2 точки пересечения b_1 и b_2, то хорды $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ параллельные ab и будут удовлетворять всем поставленным условиям.

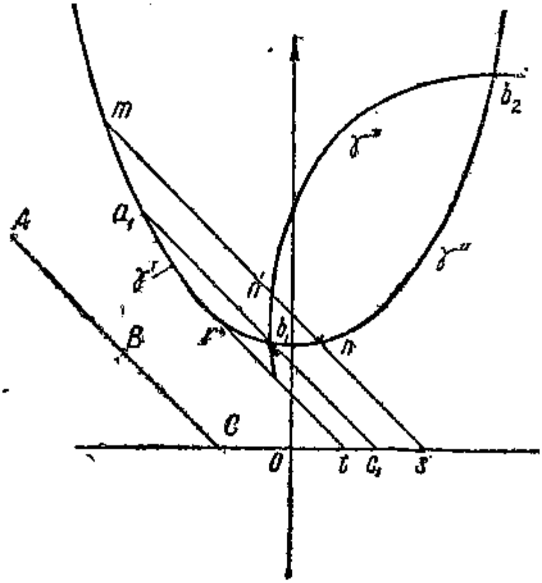

Рис. 2

В случае, когда две такие точки пересечения сливаются в одну, мы имеем только одну хорду ab и одну соответствующую ей экстремаль, проходящую через A и B. Наконец, если таких точек пересечения нет, то через точки A и B не проходит ни одна экстремаль. Это исследование значительно упрощается, если точки A и B расположены на одной горизонтали. Можно предположить их в таком случае расположенными симметрично относительно оси OY (см. рис. 3). Для нахождения хорды ab соединяем точки A и B с началом, тогда точки пересечения линий OA и OB с кривой и должны дать нам хорды a_1b_1 и a_2b_2. Таким образом, для существования этих хорд нужно, чтобы точки A и B лежали внутри угла, образованного касательными из начала; в этом случае существуют две хорды и две экстремали, проходящие через A и B.

Рис. 3

Если точки A и B лежат на сторонах этого угла, то обе экстремали сливаются в одну, наконец, если точки A и B лежат вне угла, образованного касательными из начала, то не существует экстремали, проходящей через эти точки. Заметим, что условие о том, чтобы точки A и B лежали внутри угла может быть заменено аналитическим условием

$$\frac{y_1}{x_1} > \operatorname{tg} \varphi_0 = 1{,}5088,$$

где x_1 и y_1 координаты точки A, а $\operatorname{tg} \varphi_0$ угловой коэффициент касательной к цепной линии $y = Ch x$, проведенной из начала.

5) Показать, что для задачи нахождения минимума

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

семейством экстремалей является семейство парабол, имеющих ось параллельную отрицательному направлению оси OY, фокус которых расположен на оси OX. Провести для этой задачи исследование, подобное исследованию проведенному в 4-ом примере.

6) Показать, что линиями наискорейшего прохождения луча света в однородной неизотропной среде (т.-е., когда скорость света v есть функция от y') являются прямые линии.

ГЛАВА II.

Связанные задачи вариационного исчисления.

До настоящего времени мы рассматривали только такие задачи вариационного исчисления, когда искомые функции должны были удовлетворять лишь некоторым условиям на границах, кроме само собой разумеющихся условий непрерывности, и в остальном оставались произвольными. Решение задачи в этом случае, как мы видели, можно искать в виде интеграла соответствующего уравнения (или системы уравнений) Эйлера с заданными граничными условиями. Многие вопросы приводят, однако, к таким задачам об экстремуме определенного интеграла, когда искомые функции, кроме названных граничных условий и условий непрерывности, должны удовлетворять еще дополнительным требованиям, относящимся к поведению их во всем промежутке интегрирования.

Уравнения, выражающие эти требования, мы будем, заимствуя термин из аналитической механики, называть *уравнениями связи*, или, просто, связями рассматриваемой задачи. Природа их может быть самой разнообразной. Мы будем заниматься здесь лишь простейшими и наиболее распространенными связями подобного рода и ограничим свою задачу только указанием на те изменения, которые, вследствие связей, претерпевают уравнения Эйлера.

§ 13. Голономные связи.

Функция $F(x, y, z, y', z')$ определена по переменным x, y, z, в некоторой области R, по переменным y', z', для всех конечных значений и имеем непрерывные производные по своим аргументам до третьего порядка.

Совокупность допустимых кривых задачи определена требованиями:

Кривая C, определяемая функциями $y=f(x)$, $z=f_1(x)$:

1) лежит в области R;

2) принадлежит классу $C^{(1)}$;

3) проходит через точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ области R;

4) удовлетворяет уравнению

$$G(x, y, z)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

где $G(x, y, z)$ определена в R и принадлежит там классу $C^{(2)}$.

Среди всех допустимых кривых нужно найти ту, которая дает экстремум интегралу

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Геометрически говоря, среди кривых, лежащих на поверхности (1) и проходящих через точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) [1]) нужно найти такую, которая давала бы экстремальное значение интегралу (2).

При разыскании необходимых условий для функций y и z естественно пытаться решить уравнения (1) относительно одной из искомых функций, например, z, и свести поставленную задачу к несвязанной (свободной) задаче с одной функцией.

Для выполнения этой цели мы сделаем следующие допущения:

1) искомая кривая C — существует;

2) принадлежит классу $C^{(2)}$; это условие не необходимо при ближайших рассуждениях и потребуется несколько позже при выводе уравнений Эйлера.

3) если в $\frac{\partial G}{\partial z}$ вместо y и z подставить их выражения для кривой C, то при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$.

Требование 3 достаточно для возможности решения уравнения (1) относительно z. Обозначим через l проекцию кривой C на плоскость (x, y); по известным теоремам о неявных функциях, мы можем утверждать, что кривую l можно заключить внутрь некоторой достаточно узкой области r так, что уравнение (1) в этой области может быть решено относительно z:

$$z=\varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ принадлежит классу $C^{(2)}$.

---

[1]) Следует заметить, что допустимыми кривыми здесь будут лишь те, которы могут быть представлены аналитически однозначными функциями $y=f(x)$ $z=f_1(x)$, имеющими необходимое число производных.

Координаты x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1 должны, очевидно, удовлетворять уравнению (1).

Подставим в F найденное значение для z; после подстановки интеграл (2) примет вид:

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x,\ y,\ \varphi,\ y',\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)dx\ .\ .\ .\ .\ .\ (2\text{-a})$$

Всякая допустимая кривая поставленной нами задачи, лежащая в достаточно узком соседстве с кривой C, перейдет после проектирования на плоскость (x, y) в кривую класса $C^{(1)}$, лежащую в соседстве с кривой l. Наоборот, всякой кривой класса $C^{(1)}$, лежащей в некотором узком соседстве с l, соответствует допустимая кривая нашей задачи, соседняя с C.

Если C дает экстремум интегралу (2) относительно класса допустимых кривых, то l должна давать экстремум относительно всех соседних кривых класса $C^{(1)}$. Но тогда для l должно быть справедливо уравнение Эйлера. Для его составления находим:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=F_y'+F_z'\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+F_{z'}'\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}y'\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=F_{y'}'+F_{z'}'\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \frac{d}{dx}F_{z'}'+F_{z'}'\ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}y'\right).$$

Поэтому, после простых преобразований, уравнение Эйлера приводится к:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}'-F_y'+\left(\frac{d}{dx}F_{z'}'-F_z'\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

С другой стороны, дифференцирование связи (1) по y дает:

$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Исключая отсюда и из (3) $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, приходим к равенству:

$$\frac{\frac{d}{dx}F_{y'}'-F_y'}{\frac{dG}{dy}}=\frac{\frac{d}{dx}F_{z'}'-F_z'}{\frac{\partial G}{\partial z}}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

Обозначим общую величину обоих отношений через $\lambda\ (x)$; тогда:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}F_{y'}'-(F_y'+\lambda(x)\,G_y')=0\\ \frac{d}{dx}F_{z'}'-(F_z'+\lambda(x)\,G_z')=0\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

Таковы необходимые условия экстремума.

Уравнения (5) могут быть приведены к иной форме, если ввести вспомогательную функцию

$$F^*=F+\lambda(x)\,G.$$

Так как $\lambda(x)$ не зависит от y и y' и G не зависит от y', имеют место равенства:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} \text{ и } \frac{\partial F^*}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda(x)\frac{\partial G}{\partial y}.$$

Поэтому (5) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y'} - \frac{\partial F^*}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial z'} - \frac{\partial F^*}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

эквивалентный уравнениям Эйлера для функции F^*. Исключив из (6) и (1) функцию $\lambda(x)$ и одну из искомых функций, например z, получим дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y. Общий интеграл этого уравнения будет содержать 2 произвольных постоянных, которые определятся из граничных условий задачи:

$$y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1.$$

Изложенные рассуждения, при надлежащих изменениях, могут быть легко перенесены на задачу более общего вида, например, когда дело идет об экстремуме интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2 \ldots y_n, y_1', y_2' \ldots y_n')\, dx \quad \ldots (7)$$

при связях

$$G_s(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8_1)$$
$$s = 1,2, \ldots m < n$$

и граничных условиях

$$y_i(x_0) = y_i^0;\ y_i(x_1) = y_i^1;\ i = 1,2 \ldots n.$$

Очевидно, по самому существу задачи, должны быть соблюдены условия

$$G_s(x_0, y_1^0 \ldots y_n^0) = 0 \text{ и } G_s(x, y_1' \ldots y_n') = 0 \quad \ldots (8_2)$$
$$s = 1,2 \ldots m.$$

Мы будем предполагать далее, что, по крайней мере, один из функциональных определителей порядка m, составленный из частных производных $\frac{\partial G_s}{\partial y_i}$, например,

$$\frac{D(G_1, G_2 \ldots G_m)}{D(y_1, y_2 \ldots y_m)},$$

будет отличен от нуля, если вместо y_i подставить функции, дающие экстремум интегралу (7).

Чтобы не усложнять текста, мы ограничимся только формулировкой правила множителей Лагранжа, следуя которому можно решать задачи такого типа:

Существуют m непрерывных функций $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \ldots \lambda_m(x)$, которые вместе с функциями $y_i(x)$, дающими экстремум интегралу (7), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} - \frac{\partial F^*}{\partial y_i} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$i = 1, 2 \ldots, n,$$

где

$$F^* = F + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(x)\, G_s \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

(9) вместе со связями (8_1), дают систему $m+n$ уравнений для определения $m+n$ функций y_i и $\lambda_s(x)$.

Скажем еще несколько слов относительно выбора произвольных постоянных интегрирования. Уравнения (9) могут быть записаны, благодаря (10), в форме:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} - \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial G_s}{\partial y_i}\lambda_s(x)\right) = 0 \quad \ldots\ldots (9_1)$$

$$i = 1, 2 \ldots, n.$$

Рассмотрим первые m из этих уравнений. В силу предположения неравенства нулю Якобиана

$$\frac{D(G_1 \ldots G_m)}{D(y_1 \ldots y_m)}$$

они могут быть решены относительно функций $\lambda_s(x)$. Найдя из уравнений связи (8_1) $y_1, y_2 \ldots y_m$, как функции от $x, y_{m+1} \ldots y_n$ и подставив найденные для них и для функций $\lambda_s(x)$ значения в оставшиеся $n-m$ уравнений системы (9_1), получим систему $n-m$ дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно

$$y_{m+1} \ldots y_n.$$

Общее решение этой системы будет содержать $2(n-m)$ произвольных постоянных, которые определятся из граничных условий

$$y_i(x_0) = y_i^0,\ y_i(x_1) = y_i^1\ i = m+1, \ldots n.$$

Рассмотрим задачу о геодезических линиях на заданной поверхности $G(x, y, z) = 0$

$$F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Уравнения (5) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G'_y=0\\ \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G'_z=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

Чтобы выяснить геометрическое свойство геодезических линий, аналитически выраженное полученными нами уравнениями, продифференцируем уравнение связи полным образом по x:

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}y'+\frac{\partial G}{\partial z}z'=0,$$

умножим результат на λ (x) и подставим вместо $\lambda\,\frac{\partial G}{\partial y}$ и $\lambda\,\frac{\partial G}{\partial z}$ их значения из (11):

$$\lambda\, G'_x+y'\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+z'\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0$$

После несложных преобразований придем к равенству

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda\, G'_x=0 \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Возьмем за параметр, определяющий положение точки на искомой кривой, длину s ее дуги, отсчитываемую от некоторой определенной точки. При таком выборе параметра имеют место равенства:

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \frac{dy}{ds}=\cos\beta, \frac{dz}{ds}=\cos\gamma,$$

где α, β, γ суть углы, образуемые касательной к нашей кривой с осями координат и

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Заменим всюду дифференцирование по x дифференцированием по s:

$$y'=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}; \qquad z'=\frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{dz}{ds}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Написанные выше уравнения примут вид:

$$\frac{d}{ds}\cos\alpha=\mu\, G_x, \frac{d}{ds}\cos\beta=\mu\, G_y, \frac{d}{ds}\cos\gamma=\mu\, G_z,$$

где $\mu=\lambda\cos\alpha$.

Но, согласно формул Френе, левые части этих уравнений пропорциональны направляющим косинусам главной нормали кривой, правые же части пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности, и полученные нами уравнения Эйлера говорят о том, что главная нормаль геодезической линии будет одновременно и нормалью к поверхности.

§ 14. Неголономные связи.

Значительно более сложным, чем предыдущий, является случай, когда уравнения связи содержат производные, т. е. будут дифференциальными уравнениями, которым должны удовлетворять искомые функции:

$$G_s\,(x,\ y_1,\ y_2\ \ldots\ y_n,\ y_1',\ y_2'\ \ldots\ y_n') = 0\ \ldots\ (13)$$
$$s = 1\ \ldots\ m < n$$

Такие связи, следуя терминологии установленной Гертцем в аналитической механике, называют *неголономными*.

Многие задачи вариационного исчисления, рассмотренные нами до настоящего времени, представляют собой частный случай задачи настоящего параграфа.

Для вопроса, рассмотренного в § 13, это утверждение представляется совершенно очевидным. Мы укажем здесь еще на то обстоятельство, что, например, задача об экстремуме интеграла

$$\int_{x_0}^{x} F\,(x,\ y,\ y',\ y''\ \ldots\ y^{(n)})\ dx$$

равносильна задаче об экстремуме интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,(x,\ y,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_{n-1},\ z'_{n-1})\ dx$$

при условиях:

$$z_1 - y' = 0,\ z_2 - y'' = 0\ \ldots\ z_{n-1} - y^{(n-1)} = 0.$$

Вновь отказываясь от проведения доказательства справедливости при некоторых предположениях правила Лагранжа неопределенных множителей, ограничимся лишь его формулировкой.

Для нахождения функций, дающих экстремум интегралу

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n,\ y_1',\ y_2',\ \ldots\ y_n')\ dx$$

при условиях (13) составляют функцию

$$F^* = F + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s\,(x)\ G_s\ \ldots\ldots\ldots\ (14)$$

Искомые функции y_i вместе с $\lambda_s\,(x)$ должны удовлетворять уравнениям Эйлера для функции F^*:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} - \frac{\partial F^*}{\partial y_i} = 0\ \ldots\ldots\ldots\ (15)$$
$$i = 1,\ \ldots\ n$$

Система (15) обладает одним существенным отличием от (9), установленной для голономных связей. Так как левые части равенств (13) в рассматриваемом случае содержат производные y_i', то в $\frac{\partial F^*}{\partial y_i'}$ войдут функции $\lambda_s(x)$, и уравнения (15) будут содержать поэтому производные от $\lambda_s(x)$ по x.

Уравнения (13) и (15) дают систему $m+n$ дифференциальных уравнений с $m+n$ неизвестными функциями.

Каждое из уравнений (15) будет второго порядка, относительно искомых функций $y_i(x)$ и первого, относительно $\lambda_s(x)$. Чтобы выяснить число произвольных постоянных, получающихся в результате интегрирования, и возможность удовлетворить предельным условиям, введем систему функций $z_i(x)$, определенных равенствами

$$y_i'(x)=z_i(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15\text{-a})$$
$$i=1,2\ldots n$$

После такой замены (13) дают систему m конечных связей для функций y_i и z_i и (15) вместе с (15-а) обращаются в систему $2n$ уравнений первого порядка, с $2n+m$ функциями y_i, z_i и $\lambda_s(x)$.

Решив (13) относительно каких-либо m функций y_i и z_i и подставив их значения в преобразованную введением z_i систему (15) и (15-а) получим $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2n$ из функций y_i, z_i, λ_s. Общее решение этой системы будет содержать $2n$ произвольных постоянных. Они должны быть определены из $2n$ граничных условий

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)} \qquad y_i(x_1)=y_i^{(1)} \qquad (i=1,2\ldots,n).$$

Как пример, поясняющий применение приведенного правила, мы рассмотрим задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде.

Среди кривых, соединяющих две точки P_0 и P_1 найти ту, вдоль которой должна двигаться материальная точка под действием силы тяжести, чтобы пройти путь в кратчайший срок, если она исходит из P_0 с заданной абсолютной скоростью v_0 и приходит в P_1 с заданной абсолютной скоростью v_1. Сопротивление среды есть определенная функция скорости $R(v)$.

Примем массу точки равной единице.

Направим ось z вертикально вниз, а оси y и x расположим каким-либо образом в горизонтальной плоскости.

Принцип живой силы дает:

$$d\,\frac{v^2}{2}=g\,dz-R(v)\cdot\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Пусть положение и скорость точки определяются некоторым параметром τ. После деления предшествующего уравнения на $d\tau$ имеем:

$$v\cdot v'=gz'-R(v)\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Время, необходимое для прохождения пути $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ есть

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{v}\,d\tau.$$

Поэтому полное время движения точки от P_0 до P_1 будет:

$$I=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{v}\,d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

И наша задача может быть аналитически формулирована следующим образом: среди систем функций x, y, z, v, удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{array}{llll} x(\tau_0)=x_0 & y(\tau_0)=y_0 & z(\tau_0)=z_0 & v(\tau_0)=v_0 \\ x(\tau_1)=x_1 & y(\tau_1)=y_1 & z(\tau_1)=z_1 & v(\tau_1)=v_1, \end{array}$$

дифференциальному уравнению (16) и принадлежащих классу $C^{(1)}$, найти ту, которая дает минимум интегралу (17).

$$F^*=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,H+\lambda v v'-\lambda g z', \text{ где } H=\frac{1}{v}+\lambda R(v),$$

так как F^* не содержит x, y, z, то имеют место первые интегралы уравнений Эйлера:

$$\frac{Hx'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18_1)$$

$$\frac{Hy'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18_2)$$

$$\frac{Hz'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=c+\lambda g \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18_3)$$

Кроме того, должно быть выполнено дифференциальное уравнение Эйлера относительно функции v:

$$\frac{v\lambda'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{\partial H}{\partial v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Из (18_1) и (18_2) следует:

$$ay'-bx'=0$$

т. е. вся траектория движения лежит в одной плоскости, параллельной оси z. Примем ее за плоскость x, z. Тогда $y=0$.

Возведем (18_1) и (18_3) в квадрат и сложим:

$$H^2=a^2+(c+\lambda g)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Это уравнение определяет λ как функцию от v.

Разделив почленно (18_1), (18_3) на (19) получаем:

$$dx=\frac{av\,d\lambda}{H\cdot\frac{\partial H}{\partial v}} \qquad dz=\frac{(c+\lambda g)\cdot v\,d\lambda}{H\cdot\frac{\partial H}{\partial v}}.$$

Подставив сюда значение функции λ, определенное из (20) и проинтегрировав полученные выражения, найдем x и z, как функции от v:

$$x=d+\varphi(v, a, c) \quad z=e+\psi(v, a, c).$$

Постоянные интегрирования a, c, d, e, определяются из граничных условий.

При постановке этой задачи было бы естественным не задавать значения скорости, с которой должна прибыть материальная точка в P_1, считая лишь, что она брошена из точки P_0 с определенной начальной скоростью. Значение же скорости v в точке P_1 так же, как и значения x, y, z, v во всех промежуточных точках должно было бы быть найденным из условия минимума рассматриваемого интеграла. С такого рода задачами мы ознакомимся ниже в главе III.

§ 15. Изопериметрическая задача.

Последний тип задач связанного экстремума, на котором мы остановимся в настоящем параграфе, возник из частной задачи о нахождении замкнутой кривой заданной длины $2l$, ограничивающей наибольшую площадь, и получил, благодаря ей, свое указанное в заголовке название.

Пусть функции

$$F(x, y, y') \text{ и } G(x, y, y')$$

удовлетворяют всем требованиям, перечисленным в главе I при выводе уравнений Эйлера для простейшей задачи вариационного исчисления.

Класс допустимых кривых задачи определим следующими требованиями:

Кривая C: 1) *лежит в области* R,

2) *проходит через точки* $A(x_0, y_0)$ *и* $B(x_1, y_1)$ *этой области,*

3) *принадлежит классу* $C^{(1)}$

4) *удовлетворяет условию:*

$$I_1(y)=\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx=K \quad \ldots \ldots (21)$$

Вопрос о том, существуют или нет кривые, удовлетворяющие перечисленным здесь требованиям, должен быть подвергнут в каждом частном случае исследованию. Во всех следующих ниже рассуждениях существование их мы предполагаем.

Среди класса допустимых кривых нужно найти ту, которая дает экстремум интегралу

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \quad \ldots \ldots \ldots (22)$$

Как и всюду во всех предшествующих рассуждениях, для получения необходимых условий, мы предположим решение нашей задачи существующим.

Для возможности интегрирования по частям, что нам потребуется немного ниже, мы допускаем, что функция

$$y = f(x),$$

дающая решение, принадлежит классу $C^{(2)}$ [1]).

Рассмотрим семейство кривых

$$y = f(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x), \quad \ldots \ldots (23)$$

где $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ принадлежат классу $C^{(1)}$ и обращаются в нуль на концах интервала

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0.$$

Если $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ выбраны, то при всех достаточно малых системах значений α_1 и α_2 кривая (23) лежит в соседстве R_ε с кривой $y = f(x)$ и удовлетворяет первым трем требованиям, наложенным на класс допустимых кривых. Чтобы удовлетворить четвертому и последнему требованию, мы ограничиваем произвол выбора параметров α_1 и α_2 и требуем, чтобы было соблюдено условие:

$$I_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, f + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, f' + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2')\, dx = K, \quad \ldots (24)$$

выражающее связь, которой должны быть подчинены α_1 и α_2, чтобы (23) была бы допустимой кривой задачи. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (24) наверное, удовлетворено, ибо тогда (23) вырождается в кривую $y = f(x)$, для которой, по предположению, равенство (21) верно. Но имеются ли налицо другие пары значений α_1 и α_2, близкие к паре 0, 0, удовлетворяющие тому же уравнению, т. е. содержит ли действительно, семейство (23) в себе допустимые кривые, близкие к кривой $y = f(x)$, — еще открытый вопрос.

Мы, однако, убедимся в этом, если покажем, что уравнение (24) может быть вообще решено в некотором малом интервале около нуля относительно одной переменной. Наши рассуждения потребуют еще дополнительных, правда весьма естественных предположений о функциях f и η, содержание которых мы выясним в свое время.

Вследствие сделанных относительно функции $G(x, y, y')$ предположений, $I(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет при всяких достаточно малых α_1 и α_2 непрерывные частные производные по α_1 и α_2. Если бы нам удалось установить, что одна из этих производных, например, по α_2 в точке 0,0 будет отлична от нуля, то, по теореме о существовании неявных функций, известной из курса дифференциального

---

[1]) Как и раньше, этого требования можно избежать; здесь может быть применена лемма Дюбуа-Реймона (см. добавление к главе I) и при некоторых ограничениях доказано существование непрерывной второй производной у функции y. Мы предлагаем читателю исследовать этот вопрос.

исчисления, мы, наверное, смогли бы из (24) определить α_2 как функцию от α_1 для достаточно малых $|\alpha_1|$, обращающуюся в нуль при $\alpha_1 = 0$.

$$\left.\frac{\partial I_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right|_{\substack{\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0}} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} \eta_2 + \frac{\partial G}{\partial y'} \eta_2' \right\} dx,$$

или интегрируя по частям второе слагаемое, стоящее под знаком интеграла, и принимая во внимание, что $\eta_2(x)$ обращается в нуль на концах промежутка интегрирования, имеем:

$$\left.\frac{\partial I_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right|_{\substack{\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0}} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right\} \eta_2 \, dx.$$

Если окажется, что $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера,

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = 0.$$

составленному для функции $G(x, y, y')$, т.-е. является экстремалью для интеграла (21), то при любом выборе η_2 интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, будет нулем, и мы не можем быть ни для каких η_2 уверенными в возможности решения (24) относительно α_2.

Чтобы не затруднять изложения, мы оставляем пока в стороне этот частный случай и будем предполагать

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \neq 0.$$

Но тогда можно бесконечным числом способов выбрать η_2 так, чтобы интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right\} \eta_2 \, dx$$

был бы отличен от нуля. Итак, если $y = f(x)$ не экстремаль интеграла (21), уравнение (24) для некоторого выбора η_2, наверное, может быть решено относительно α_2 в малом промежутке.

Всюду ниже, мы будем считать в семействе (23) параметры α_1 и α_2 связанными уравнением (24).

Подставим (23) в интеграл (22)

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, f' + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2') \, dx \quad \ldots (25)$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ интеграл $I(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет экстремальное значение. Мы получили обыкновенную задачу на экстремум функции (25) при связи (24). По известной теореме дифференциального исчисления, всегда найдутся два числа λ_0 и λ_1, не равные одновременно нулю и такие, что частные производные от функции $\lambda_0 I(\alpha_1,\alpha_2)+\lambda_1 I_1(\alpha_1,\alpha_2)$ обратятся в нуль при $\alpha_1=\alpha_2=0$.

$$\left(\lambda_0\frac{\partial I}{\partial \alpha_1}+\lambda_1\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_1}\right)_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=\int_{x_0}^{x_1}\lambda_0\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\eta_1+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta_1'\right\}dx+\int_{x_0}^{x_1}\lambda_1\left\{\frac{\partial G}{\partial y}\eta_1+\frac{\partial G}{\partial y'}\eta'_1\right\}dx$$

$$\left(\lambda_0\frac{\partial I}{\partial \alpha_2}+\lambda_1\frac{\partial I_2}{\partial \alpha_2}\right)_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}}=\int_{x_0}^{x_1}\lambda_0\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\eta_2+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta_2'\right\}dx+\int_{x_0}^{x_1}\lambda_1\left\{\frac{\partial G}{\partial y}\eta_2+\frac{\partial G}{\partial y'}\eta_2'\right\}dx$$

Проделав преобразования, совершенно аналогичные примененным при выводе уравнений Эйлера, мы убедимся в том, что написанные выше условия эквивалентны следующим:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_0 F+\lambda_1 G)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\lambda_0 F+\lambda_1 G)\right]\eta_1\,dx=0\\&\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_0 F+\lambda_1 G)-\frac{d}{dy}\frac{\partial}{\partial y'}(\lambda_0 F+\lambda_1 G)\right]\eta_2\,dx=0\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (26)$$

Непосредственно применить основную лемму вариационного исчисления к написанным интегралам мы не можем, ибо вместе с изменением функций η_1 и η_2 будет изменяться и зависимость между α_1 и α_2, даваемая равенством (24); поэтому могут изменяться и числа λ_0 и λ_1, входящие в (26). Но, как видно из второго из этих равенств, отношение чисел λ_0, λ_1 не зависит от η_1. Поэтому из первого равенства, на основании основной леммы, в виду произвола $\eta_1(x)$ следует

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_0 F+\lambda_1 G)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\lambda_0 F+\lambda_1 G)=0\quad . \; . \; . \; . \; . \; (27_1)$$

Мы остановимся лишь на случае, когда λ_0 не равно нулю [1]).

В виду однородности полученного нами уравнения (27_1) относительно λ_0 и λ_1, можно, при нашем предположении $\lambda_0\neq 0$, считать

---

[1]) Иначе, если $\lambda_0=0$, число λ_1 должно быть отличным от нуля и из (27_1) следовало бы

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}-\frac{\partial G}{\partial y}=0,$$

т. е. рассматриваемая кривая, как уже говорилось выше, будет экстремалью для интеграла $\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$.

Другими словами, значение K для этого интеграла, стоящее в правой части уравнения связи будет, вообще говоря, его экстремальным значением. В большинстве практически важных случаев существует одна или конечное число экстремалей, для которых интеграл $\int_{x_0}^{x_1} G\,dx$ будет принимать это значение K. Задача в этом случае будет решена заданием одних только связей.

$\lambda_0 = 1$, ибо для этого достаточно разделить обе части уравнения на λ_0.

Окончательно имеем:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial (F+\lambda G)}{\partial y'} - \frac{\partial (F+\lambda G)}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27_2)$$

уравнение Эйлера нашей вариационной задачи.

Правило множителей Лагранжа, полученное для изопериметрической задачи, отличается от того же правила для предшествовавших задач тем, что в рассматриваемом случае λ есть некоторая постоянная, тогда как в обоих предыдущих случаях λ было некоторой функцией от x.

Интегрируя (27_2), найдем семейство экстремалей нашей задачи, зависящее от трех параметров: λ и двух постоянных интегрирования

$$y = f(x, \lambda, a, b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Чтобы среди найденных кривых найти ту, которая удовлетворяет поставленным требованиям, мы должны будем постоянные λ, a, b выбрать согласно граничным условиям и уравнению связи

$$y_0 = f(x_0, \lambda, a, b) \qquad y_1 = f(x_1, \lambda, a, b),$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, f, f'_x)\, dx = k.$$

Заметим еще, что в уравнение (27_1) функции F и G входят симметрично. Оно не изменится, если переменить местами F G [1]).

Из этого замечания следует интересное свойство изопериметрических задач, известное под названием закона взаимности и состоящее в том, что *экстремали вариационной задачи для интеграла*

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \text{ при условии } I_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx = c$$ *будут вместе с тем и экстремалями вариационной задачи для интеграла*

$$I = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx \text{ при условии } I_1 = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = c.$$

Примеры этому мы увидим ниже:

В более общем случае изопериметрическая задача имеет вид: *найти функции* $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, *дающие экстремум интегралу*

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2 \cdots y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n)\, dx$$

---

[1]) Как и прежде, мы оставляем здесь в стороне исключительный случай $\lambda_2 = 0$.

при связях:

$$I_s = \int\limits_{x_0}^{x_1} G_s(x, y_1, y_2 \dots y_n, y'_1, y'_2, \dots y'_n)\, dx = C_s \quad (s = 1, 2, \dots m)$$

и удовлетворяющие на границах условиям:

$$y_i(x_1) = y_i^0, \; y_i(x_1) = y_i^1.$$

В виду очевидной возможности обобщения изложенных только что рассуждений на задачу такого вида, мы не будем подробно останавливаться на выводе правила ее решения и ограничимся лишь формулировкой его:

Дифференциальные уравнения для определения искомых функций y_i получатся, если для функции

$$F^* = \lambda_0 F + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s G_s,$$

где λ_0; $\lambda_1 \dots \lambda_m$ неопределенные множители, составить уравнения Эйлера:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'_i} - \frac{\partial F^*}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \dots n.$$

Полученные после интегрирования этих уравнений выражения для y_i будут содержать $2n + m$ произвольных постоянных: $2n$ постоянных интегрирования и m постоянных λ в силу однородности уравнений относительно λ. Эти постоянные должны быть определены из $2n$ граничных условий и m уравнений связи.

Рассмотрим теперь несколько частных задач.

1) Простейший пример доставляет обыкновенная изопериметрическая задача, о которой упоминалось в начале параграфа и которая в своей первоначальной геометрической форме читалась:

Среди замкнутых кривых длины $2l$ найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

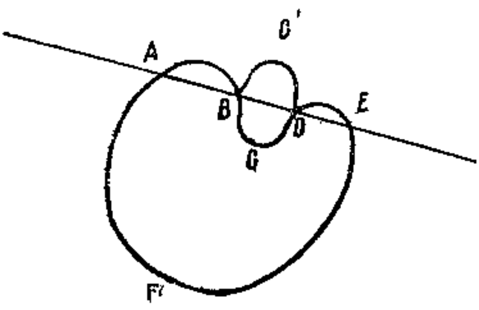

Рис. 4

Прежде всего, очевидно, что рассматриваемая кривая должна быть выпуклой. В противном случае существовала бы прямая, имеющая с замкнутой областью S, ограничиваемой нашей кривой, по крайней мере 2 не имеющих общих точек замкнутых отрезка. Пусть AB и DE два соседних таких отрезка (рис. 4) и BD отрезок между ними. Обозначим BCD и BFD части кривой, на которые она делится точками B и D. Отразив зеркально одну из этих частей, например, BCD, около прямой, мы получим новую кривую $BFD + BC'D$, имеющую ту же длину, но ограничивающую большую площадь.

Так же просто доказывается утверждение, что всякая прямая, делящая пополам кривую, будет делить пополам и ограничиваемую ею площадь. Допустим в самом деле противное. Пусть прямая AB не обладает этим свойством. Отразив тогда зеркально около AB ту часть S, которая является большей, мы получили бы кривую с той же длиной, но с большей внутренней площадью.

Выберем за ось OX любую из прямых, делящих кривую пополам, назовем x_0 и x_1 точки пересечения оси и кривой. Благодаря сделанным нами замечаниям, задача может быть сформулирована в несколько иной форме: среди кривых, соединяющих точки (x_0, O) и (x_1, O) и имеющих длину l, найти ту, которая вместе с отрезком (x_0, x_1) ограничивает наибольшую площадь.

В силу конвексности, искомая кривая аналитически может быть представлена однозначной функцией от x между x_0 и x_1.

Окончательно имеем следующую задачу:

Найти экстремум интеграла $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\, dx$ при условии

$$I_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l.$$

Числа x_1, x_2 и l мы будем считать подчиненными условию

$$x_1 - x_0 < l,$$

необходимость которого очевидна.

В нашем случае

$$F^* = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}.$$

Эта функция не содержит x и потому первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид:

$$F^* - y' \frac{\partial F^*}{\partial y'} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda\, y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = a,$$

откуда

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y-a)^2}}{y-a} \text{ или } dx = \frac{(y-a)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y-a)^2}}$$

интегрируя, получим

$$x - b = \sqrt{\lambda^2 - (y-a)^2},\ (x-b)^2 + (y-a)^2 = \lambda^2$$

т. е. экстремалями будут окружности радиуса λ.

Пусть ω угол, под которым виден отрезок $x_0\, x_1$ из центра

$$x_1 - x_0 = 2\lambda \sin\frac{\omega}{2} \text{ и } l = \lambda\omega.$$

Для определения ω имеем уравнение

$$\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = \frac{x_3 - x_1}{c},$$

решение которого, благодаря поставленному условию, всегда возможно.

Пользуясь принципом взаимности, мы можем высказать обратное предположение: среди кривых, ограничивающих площадь заданной величины, окружность имеет экстремальную (очевидно, наименьшую) длину.

2) Определить положение равновесия тяжелой однородной нити данной длины l с закрепленными концами, находящейся под действием силы тяжести, направленной параллельно отрицательной оси y. Положение равновесия определяется требованием, чтобы центр тяжести нити лежал возможно низко. Мы считаем очевидным, что всякая прямая, параллельная оси y, встречает нить не больше чем в одной точке. Задача сводится, поэтому, к нахождению экстремума интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

при связи

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

и граничных условиях $y\ (x_0) = y_0$, $y\ (x_1) = y_1$,

$$F^* = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера дает,

$$y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) =$$

$$= \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = a \qquad y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - a^2}}{a} \qquad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - a^2}}.$$

Уравнение легко интегрируется, если положить

$$y + \lambda = a \operatorname{ch} z = a\frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

и дает:

$$y + \lambda = \pm a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + b\right) = \pm\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+b} + e^{-\left(\frac{x}{a}+b\right)}\right)$$

Экстремалями задачи будут цепные линии.

Граничные условия дают:

$$y_0 + \lambda = \pm a \operatorname{ch}\left(\frac{x_0}{a} + b\right);\ y_1 + \lambda = \pm a \operatorname{ch}\left(\frac{x_1}{a} + b\right).$$

Вычитая одно из другого и преобразуя разность гиперболических косинусов к произведению, будем иметь:

$$y_1 - y_0 = 2a \operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\nu,$$

$$\text{где } \mu = \frac{x_1 + x_0}{2} + b,\ \nu = \frac{x_1 - x_0}{2}.$$

После подстановки найденного значения y в уравнение связи оно интегрируется и приводится к виду

$$a\left[\operatorname{sh}\left(\frac{x_1}{a}+b\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{x_0}{a}+b\right)\right]=l,$$

или

$$2a\operatorname{ch}\mu\operatorname{sh}\upsilon=l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Откуда

$$\operatorname{th}\mu=\pm\frac{y_1-y_0}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Число l, очевидно, должно удовлетворять неравенству:

$$l>\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}>|\,y_1-y_0\,|.$$

Поэтому предшествующее уравнение, для каждого из обоих случаев, будет иметь один и только один корень.

Из (29) и (30) получаем:

$$\sqrt{l^2-(y_1-y_0)^2}=2a\operatorname{sh}\upsilon \quad \text{и}$$

$$\frac{\operatorname{sh}\upsilon}{\upsilon}=\frac{\sqrt{l^2-(y_1-y_0)^2}}{x_2-x_1}>1.$$

Но $\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\ldots$ есть монотонно возрастающая от 1 до $+\infty$ функция, когда $0\leqslant x<\infty$, принимающая один и только один раз всякое значение большее 1. Поэтому предшествующее уравнение имеет один и только один корень больший нуля.

После того как найдены υ и μ, нахождение a, b, λ не представляет затруднений.

3) Рассмотрим упругий однородный стержень прямолинейный в недеформированном состоянии. Как известно из теории упругости, его потенциальная энергия в деформированном состоянии считается пропорциональной интегралу, взятому вдоль стержня, от квадрата кривизны.

Пусть стержень, имеющий длину l, заделан в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Положение равновесия его определяется из условия минимума потенциальной энергии. Чтобы составить ее выражение, примем за независимую переменную длину стержня, отсчитываемую от точки (x_0, y_0) и обозначим через $\Theta(s)$ угол, образованный касательной с осью x-ов. Кривизна $K=\Theta'=\frac{d\Theta}{ds}$.

Интеграл, экстремум которого мы рассматриваем, имеет вид:

$$I=\int_0^l \Theta'^2\,ds.$$

Известно, что $\frac{dx}{ds}=\cos\Theta$, $\frac{dy}{ds}=\sin\Theta$; уравнения связи поэтому будут:

$$\int_0^l \cos\Theta\, ds = x_1 - x_0 \qquad \int_0^l \sin\Theta\, ds = y_1 - y_0.$$

Кроме того, заделанность стержня в точках (x_0, y_0), (x_1, y_1) равносильна заданию величины Θ на концах:

$$\Theta(0)=a \qquad\qquad \Theta(l)=b$$

$$F^* = \Theta'^2 + \lambda_1 \cos\Theta + \lambda_2 \sin\Theta.$$

Функция F^* вновь не содержит независимой переменной, и первый интеграл уравнения Эйлера для нее будет:

$$\Theta'^2 + \lambda_1\cos\Theta + \lambda_2\sin\Theta - \Theta'\cdot 2\Theta' = -C$$

$$\Theta'^2 = C + \lambda_1\cos\Theta + \lambda_2\sin\Theta.$$

Чтобы представить правую часть этого равенства в форме $h(1-K^2\sin^2\varphi)$, достаточно, что легко проверить простыми вычислениями, положить:

$$h = C + \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\ K^2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{C+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}.$$

$$\varphi = \frac{\Theta-\Theta_0}{2},\ \Theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Тогда $\frac{d\Theta}{ds} = 2\frac{d\varphi}{ds}$ и, следовательно,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{h}}{2}\cdot\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}$$

откуда

$$S = \frac{2}{\sqrt{h}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} + S_0.$$

Эта кривая есть не что иное, как упругая линия *Якова Бернулли.*

Мы не будем давать исследования возможности надлежащего выбора постоянных. Отметим только что здесь их 4: K, h, Θ_0 и S_0, т. е. ровно столько, скольким условиям нужно удовлетворить.

Если необходимо найти декартовы координаты точек стержня, достаточно в соотношения

$$\frac{dx}{ds} = \cos\Theta = \cos(2\varphi+\Theta_0),\ \frac{dy}{ds} = \sin\Theta = \sin(2\varphi+\Theta_0)$$

поставить вместо ds его значение:

$$dx = \frac{2\cos(2\varphi+\Theta_0)}{\sqrt{h}\cdot\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

$$dy = \frac{2\sin(2\varphi+\Theta_0)}{\sqrt{h}\cdot\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

откуда сейчас же определяются x и y.

Дополнения и задачи.

1. **Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.**

Во многих случаях при исследовании вариационных задач бывает удобнее предварительно преобразовать их уравнения Эйлера к каноническому виду.

Первоначально мы проведем рассуждения для уравнения вида

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}\ (x, y, y')-F'_y\ (x, y, y')=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Будем рассматривать его как систему двух дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями y и y'.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}F'_{y'}-F'_y=0\\ \frac{dy}{dx}=y'\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Введем вместо y' новую функцию $p=F'_{y'}$; предполагая $F''_{y'y'}\neq 0$ мы можем обратить это равенство, решив его относительно y'

$$y'=y'\ (x, y, p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Введем функцию $H\ (x, y, p)$, определенную равенством

$$H\ (x, y, p)=py'-F\ (x, y, y')$$

где вместо y' должно быть подставлено его выражение (33)

$$\frac{\partial H}{\partial y}=p\frac{\partial y'}{\partial y}-F'_y-F'_{y'}\frac{\partial y'}{\partial y}=p\frac{\partial y'}{\partial y}-F'_y-p\frac{\partial y'}{\partial y}=-F'_y$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}=y'+p\frac{\partial y'}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial p}=y'+p\frac{\partial y'}{\partial p}-p\frac{\partial y'}{\partial p}=y'$$

Подстановка в (32) вместо $F'_{y'}$ новой неизвестной функции p и вместо F'_y и y' их значений из последних двух соотношений приводит к каноническим уравнениям вариационной задачи

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Подобные же преобразования могут быть проделаны и для случая, когда имеем систему уравнений Эйлера со многими неизвестными функциями:

$$\frac{d}{dx}F'_{y'_i}-F'_{y_i}=0 \qquad i=1, \ldots\ldots n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

где $F=F\ (x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n')$.

Как и прежде, заменим эту систему уравнений второго порядка системой $2n$ уравнений первого порядка с $2n$ неизвестными функциями y_i и y'_i.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}F'_{y'_i}-F'_{y_i}=0\\ \frac{dy_i}{dx}=y_i'\end{aligned}\right\} i=1, \ldots n \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Введем функции $p_i = F'_{y'_i}$ и предположим Якобиан $\frac{D(F'_{y'_1} \ldots F'_{y'_n})}{D(y'_1 \ldots y'_n)}$ отличным от нуля.

Тогда y'_i могут быть найдены как функции от x, y_i и p_i.

Рассмотрим функцию

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i y'_i - F.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial y'_j}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{n} F'_{y'_j} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} - F'_{y_i} = -F'_{y_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial y'_i}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{n} F'_{y'_j} \frac{\partial y_i}{\partial p_i} = y'_i$$

Подстановка в (36) вместо F'_{y_i} F'_{y_i} и y'_i их значений из последних равенств вновь приводит к канонической системе

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \ldots n\,. \quad (37)$$

Ради краткости мы оставляем в стороне случай производных высшего порядка, помня, что исследование его может быть сведено к задаче с первыми производными и неголономными связями.

Пусть функция F в рассматриваемой вариационной задаче имеет вид $F = F(x, y, \ldots y_n, y'_1 \ldots y'_n)$ и y_i подчинены неголономным связям

$$G_s(x, y_1 \ldots y_n, y'_1 \ldots y'_n) = 0 \quad s = 1, \ldots m \quad . \; . \; . \; (38)$$

Как известно, для получения уравнений Эйлера в этом случае мы должны будем составить

$$F^* = F + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(x)\, G_s.$$

Неизвестные y_i и λ_s определятся тогда из уравнений (38) и системы

$$\frac{d}{dx} F^{*\prime}_{y'_i} - F^{*\prime}_{y_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

Как и в обоих предыдущих случаях мы преобразуем (39) в систему $2n$ уравнений с $2n + m$ неизвестными функциями y_i, y'_i и λ^s.

$$\frac{d}{dx} F^{*\prime}_{y'_i} - F^{*\prime}_{y_i} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

$$\frac{dy_i}{dx} = y'_i\,.$$

Положим

$$p_i = F^{*\prime}_{y'_i} \qquad i = 1, \ldots, n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

Присоединим сюда еще m уравнений (38) и предположим, что Якобиан, составленный из функций $F^{*\prime}_{y'_i}$ и G по переменным y_i' λ_s отличен от нуля. Тогда уравнения (41) и (38) могут быть решены относительно y_i' и λ_s.

Введем

$$H=\sum_{i=1}^{n} p_i\, y_i' - F^*.$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}=\sum_{=1}^{n} p_j\frac{\partial y'_j}{\partial y_i}-\sum_{j=1}^{n} F^{*\prime}_{y'_i}\frac{\partial y'_j}{\partial y_i}-\sum_{s=1}^{m} F^{*\prime}_{\lambda_s}\frac{\partial \lambda_s}{\partial y_i}-$$

$$-F^{*\prime}_{y_i}=-\sum_{s=1}^{m} F^{*\prime}_{\lambda_s}\frac{\partial \lambda_s}{\partial y_i}-F^{*\prime}_{y_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=y_i'+\sum_{j=1}^{n}\rho_j\frac{\partial y'_j}{\partial \rho_i}-\sum_{j=1}^{n} F^{*\prime}_{y'_j}\frac{\partial y'_j}{\partial p_i}-\sum_{s=1}^{m} F^{*\prime}_{\lambda_s}\frac{\partial \lambda_s}{\partial p_i}=$$

$$=y'_i-\sum_{s=1}^{m} F^{*\prime}_{\lambda_s}\frac{\partial \lambda_s}{\partial p_i}.$$

Но

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_s}=G_s\,.$$

и так как y_i' и λ_s получены как решения (38) и (41), то после подстановки в G_s вместо y_i' найденных значений, все функции G_s обратятся тождественно в нуль, и мы будем иметь

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}=-F^{*\prime}_{y_i}\;\frac{\partial H}{\partial p_i}=y_i'.$$

Подставляя в (40), имеем каноническую систему:

$$\frac{dp_i}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y_i}\qquad \frac{dy_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial y_i}\; i=1,\ldots,n \quad . . (41)$$

2. Изопериметрическая задача для кратного интеграла.

Полученное нами правило Лагранжа для изопериметрической задачи в простых интегралах может быть перенесено на задачи того же типа с интегралами любых кратностей. В виду очевидной возможности обобщения всех рассуждений, мы формулируем здесь правило лишь для двукратного интеграла.

Пусть функции $F(x, y, z, p, q)$ и $G(x, y, z, p, q)$ определены и принадлежат классу $C^{(2)}$ в некоторой области R пространства x, y, z при всех конечных p и q.

Γ — замкнутая пространственная кривая, лежащая в R, проекция которой на плоскость xoy есть простой кусочно гладкий контур C, ограничивающий область D.

Класс допустимых поверхностей определяем требованиями:

1) *поверхность* $z=f(x, y)$ *лежит в* R,
2) *принадлежит в области* D *классу* $C^{(1)}$,
3) *проходит через контур* Γ,
4) *удовлетворяет требованию*

$$\iint_D G(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = K,$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}=p, \frac{\partial z}{\partial y}=q$ и K—задано.

Среди класса допустимых поверхностей нужно найти ту, которая дает экстремум интегралу

$$I=\iint_D F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy.$$

Буквальное повторение уже известных рассуждений для простого интеграла приводит к следующей теореме.

Если искомая поверхность принадлежит классу $C^{(2)}$, то можно указать такие два числа λ_0 и λ_1, между которыми, по крайней мере, одно отлично от нуля, что искомая поверхность будет решением уравнения Эйлера, составленного для функции

$$F^* = \lambda_0 F + \lambda_1 G:$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^*}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F^*}{\partial q}\right) = 0.$$

Мы предлагаем читателю проверить справедливость этой теоремы.

3. З а д а ч а Д и д о.

В плоскости xy расположены материальные массы известной плотности $\rho(x, y)$. Среди всех кривых, соединяющих две данные точки M_1 и M_2 и имеющих заданную длину l, определить ту, которая вместе с прямолинейным отрезком M_1 и M_2 ограничивает площадь с наибольшей массой.

Найти уравнение Эйлера.

Решение:

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho(x, y)}{\lambda}$$

λ — постоянно и r — радиус кривизны экстремали.

4. Среди кривых, соединяющих две заданные точки $M(x_0, y_0)$ и $M(x_1, y_1)$ найти ту, которая вместе с ординатами крайних точек M_1 и M_2 и отрезком $x_0 x_1$ оси абсцисс ограничивает заданную площадь и при вращении около оси x дает тело вращения наименьшей поверхности.

Решение: экстремали получаются путем преобразования вида

$$X = \frac{\alpha(\beta - x)\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}, \quad Y = \alpha y$$

из укороченной циклоиды

$$X = \frac{t}{\lambda} + \sin t \qquad Y = \lambda + \cos t.$$

5. Найти кривые, дающие минимум интегралу $\int\limits_{x_0}^{x_1} y''^2\,dx$ при закрепленных концах и связи $\int\limits_{x_0}^{x_1} y^2\,dx = K$.

Исследовать выбор произвольных постоянных.

6. Из заданного количества однородной материи, притягивающейся по закону Ньютона, образовать тело вращения, поверхность которого встречает ось вращения только в двух точках p_1 и p_2 и которое действует на материальную точку либо в p_1, либо в p_2 с наибольшей силой.

Решение: уравнение меридиана

$$y = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\, x^{\frac{2}{3}} - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

7. Дана тяжелая материальная струна, концы которой закреплены на горизонтальной прямой. Найти положение равновесия струны под действием силы тяжести (фигуру провисания) при условии малости деформации.

8. Исследовать фигуру равновесия плоско деформированного упругого стержня, заделанного на концах, в случае малых деформаций.

9. Решить ту же задачу для случая, когда на стержень действует сила тяжести, и концы стержня расположены на горизонтальной прямой.

ГЛАВА III.

Общая форма первой вариации. Предельные условия. Приложения к механике.

§ 16. Общая форма первой вариации.

При рассмотрении первой вариации интеграла, мы до сих пор предполагали неизменной как границу области интегрирования, так и значения, которые принимали на границе допустимые функции. Для простых интегралов это требование равносильно тому обстоятельству, что допустимые кривые должны проходить через две наперед заданные точки пространства и задача состояла в выборе среди этих кривых той, которая давала бы изучаемому интегралу экстремальное значение. Во многих вопросах возникают граничные условия совершенно иной природы. Так, например, в некоторых задачах дело идет о разыскании функции в некоторой постоянной области и не подчиненной никаким граничным условиям. Мы будем говорить тогда о естественных граничных условиях. Многочисленные геометрические вопросы приводят к таким задачам, где допустимые кривые должны начинаться и кончаться на наперед заданных кривых или поверхностях, или где границы допустимых поверхностей могут скользить вдоль заданной наперед поверхности. Наконец, могут возникнуть задачи с граничными условиями различного смешанного вида. Нам встретится, например, случай когда искомая функция должна принимать наперед заданные значения лишь на одной части границы; значения же ее на другой части границы — неизвестны и должны быть найдены из условия минимальности изучаемого функционала.

Все эти задачи обычно могут быть решаемы путем естественного и легкого обобщения тех приемов, которыми мы пользовались до настоящего времени.

Остановимся сначала на общем выражении первой вариации для основной простейшей задачи вариационного исчисления.

Пусть $F(x, y, y')$ определена в некоторой области R плоскости x, y и для всех конечных значений y' и имеет непрерывные частные производные второго порядка.

Возьмем какую-либо кривую C класса $C^{(1)}$, лежащую внутри R:

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ непрерывна вместе с своей производной первого порядка в интервале (x_0, x_1). Ей соответствует некоторое значение интеграла:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = \int_C F(x, y, y')\, dx. \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Рассмотрим теперь семейство кривых, лежащих в области R, зависящее от одного или нескольких параметров и содержащее в себе при некоторой частной системе значений параметров кривую $y = f(x)$. Чтобы остановиться на чем-нибудь, определенном, мы будем иметь в виду семейство кривых с одним параметром, хотя формулы, которые мы получили, будут относиться без изменения и к случаю многих параметров.

Мы не сделаем никакого ограничения общности, если предположим, что кривая $y = f(x)$ соответствует значению нуль параметра.

При переходе от одной кривой нашего семейства к другой будут изменяться не только ординаты точек кривой, но и интервал изменения абсциссы x; концы этого интервала будут функциями параметра.

Пусть:

$$y = f(x, \alpha);\; x_0(\alpha) \leqslant x \leqslant x_1(\alpha);\; |\alpha| \leqslant k \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

уравнение этого семейства. При этом $f(x, \alpha)$, $x_0(\alpha)$, x_1, (α) удовлетворяют начальным условиям

$$f(x, o) = f(x);\; x_0(o) = x_0;\; x_1(o) = x_1.$$

Относительно $f(x, \alpha)$ мы будем предполагать, что она имеет непрерывные производные по x и α и непрерывную смешанную производную второго порядка и $x_0(\alpha)$, $x_1(\alpha)$ имеющими производные по α.

Перейдем в интеграле (1) от кривой, определяемой равенством $\alpha=0$, семейства (2) к некоторой другой кривой того же семейства. Такой переход равносилен не только замене y на $f(x, \alpha)$ под знаком интеграла, но и изменению концов промежутка интегрирования соответственно на $x_0(\alpha)$ и $x_1(\alpha)$.

Полученный после этого интеграл будет функцией $I(\alpha)$ параметра α.

$$I(\alpha)=\int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} F[x, f(x, \alpha), f_x(x, \alpha)]\, dx. \qquad (3)$$

Как и прежде, первую вариацию δI интеграла I мы определим сейчас равенством:

$$\delta I=\left[\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha \qquad (4)$$

Обозначим через δx_0 и δx_1 соответственно первые вариации

$$\left[\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha \quad \text{и} \quad \left[\frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha$$

абсцисс концов кривой (концов промежутка интегрирования) и через δy и $\delta y'$ первые вариации функции $y=f(x, \alpha)$ и ее первой производной по x:

$$\delta y=\left[\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha$$

$$\delta y'=\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right]_{\alpha=0} d\alpha=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha=\frac{d}{dx} \delta y \qquad (5)$$

Так как выражение (3) зависит от α не только через функцию F, стоящую под знаком интеграла, но и через пределы интегрирования, то при дифференцировании по α мы получим три члена, соответствующие дифференцированию по пределам интегрирования и дифференцированию F, и в принятых обозначениях первая вариация интеграла принимает вид:

$$\delta I=F(x_1, y_1, y_1')\, \delta x_1-F(x_0, y_0, y_0')\, \delta x_0+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}(F_y' \delta y+F_{y'}' \delta y')\, dx \qquad (6)$$

Внеинтегральный член полученного выражения, так же как и аналогичные члены во всех дальнейших преобразованиях, мы условимся обозначать подстановкой от индекса 0 до индекса 1:

$$\delta I=\Big[F(x, y, y')\, \delta x\Big]_0^1+\int_{x_0}^{x_1}(F_y' \delta y+F_{y'}' \delta y')\, dx.$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\int_{x_0}^{x} F'_{y'}\,\delta y'\,dy = \int_{x_0}^{x_1} F'_{y'}\,\frac{d}{dx}\,\delta y\,dx =$$

$$= F'_{y'}\,(x_1, y_1, y'_1)\,(\delta y)_1 - F'_{y'}\,(x_0, y_0, y'_0)\,(\delta y)_0 -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} \delta y\,\frac{d}{dx}\,F'_{y'}\,dx,$$

где $(\delta y)_1$ и $(\delta y)_0$ есть не что иное, как граничные значения вариации функции y:

$$(\delta y)_i = \left[\frac{\partial f(x_i\,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha \qquad i = 0,1 \quad \ldots \quad (7)$$

Найдем теперь первую вариацию ординат концов кривой. Мы проведем все вычисления лишь для ординаты y_1 правого конца кривой. Очевидно:

$$y_1 = f\,[x_1(\alpha), \alpha].$$

При изменении параметра α здесь будут меняться оба аргумента функции f, а не только второй, как это мы имели в предъидущем случае и первая вариация δy_1 ординаты y_1 будет иметь поэтому вид:

$$\delta y_1 = \left[\frac{d}{d\alpha} f\,[x_1(\alpha), \alpha]\right]_{\alpha=0} d\alpha = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha +$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha = y'_1\,\delta x_1 + (\delta y)_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9_1)$$

y'_1 есть угловой коэффициент касательной к кривой, вдоль которой вычислен интервал, в ее правом конце.

Аналогично для вариации δy_0 ординаты левого конца кривой имеем:

$$\delta y_0 = y_0'\,\delta x_0 + (\delta y)_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9_2)$$

Подстановка в (8) вместо (δy_1) и $(\delta y)_0$ их значений, найденных из равенств (9_1) и (9_2), дает:

$$\delta I = \Big[(F - y'\,F'_{y'})\,\delta x + F'_{y'}\,\delta y\Big]_0^1 +$$

$$+ \int_{x^0}^{x_1} \left(F'_y - \frac{d}{dx}\,F'_{y'}\right)\delta y\,dx, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

где символ $\Big[\;\Big]_0^1$ означает, что выражение, стоящее внутри скобок, должно быть вычислено для правого и левого концов кривой и из первого результата вычтен второй. δx и δy, стоящие в этих скобках, как только что говорилось, суть первые вариации декартовых координат, концов кривой.

Правая часть равенства (10) линейна относительно δx_i, δy_i и δy. Благодаря этому обстоятельству, мы можем утверждать, что она сохраняет свой смысл и для случая многопараметренного семейства кривых, если под первой вариацией условиться понимать первый полный дифференциал по параметрам, вычисленный для той системы значений этих параметров, которая соответствует взятой кривой, например:

$$\delta I = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i = 0} d\alpha,$$

если рассматриваемая кривая получается из уравнения семейства при $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Совершенно аналогичные вычисления первой вариации для интеграла с n неизвестными функциями

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

приводят к формуле:

$$\delta I = \left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F'_{y'_i}\right) \delta x + \sum_{i=1}^{n} F'_{y'_i} \delta y_i\right]_0^1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i}\right) \delta y_i\, dx, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

где символ $\Big[\;\Big]_0^1$ означает, как и выше, подстановку в выражение, стоящее внутри скобок, значений всех величин для правого и левого концов кривой; δx_0, δx_1, $\delta y_i^{(0)}$, $\delta y_i^{(1)}$ суть вариации декартовых координат концов кривой.

В обеих формулах (10) и (11) выражение первой вариации содержит интегральные слагаемые. Для того, чтобы эти интегралы исчезли, достаточно, чтобы взятая кривая семейства была экстремалью и первая вариация интеграла для экстремальной кривой будет зависеть только от координат концов ее, первых вариаций δx_i, $\delta y_i^{(1)}$, $\delta y_i^{(0)}$ ее концов и углового коэффициента y_i' касательной к ней в конечных точках.

§ 17. Естественные предельные условия.

Между задач вариационного исчисления с естественными граничными условиями простейшая есть следующая:

Среди функций, определенных в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ и принадлежащих классу $C^{(1)}$; найти ту, которая дает экстремум интегралу.

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

На искомую функцию не налагается никаких условий как на границах, так и на значения ее внутри промежутка интегрирования.

Геометрически говоря, допустимыми кривыми здесь считаются все кривые класса $C^{(1)}$, лежащие в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, концы которых могут свободно перемещаться вдоль прямых $x = x_0$ и $x = x_1$.

Пусть

$$y = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

решает задачу. Если она дает экстремум интегралу (12) по отношению ко всем допустимым кривым, то она, наверное, даст ему экстремальное значение и по отношению к более узкому классу допустимых кривых, имеющих с ней одинаковые конечные точки. Поэтому уравнения Эйлера для нее должны быть соблюдены, и кривая (13) должна быть экстремалью.

Найдем теперь граничные условия, которые должны быть выполненными в рассматриваемой задаче.

Составим выражение первой вариации интеграла (12). В нашем случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, ибо концы интервала остаются неизменными при переходе от одной допустимой кривой к другой. Интегральный член выражений вариации (10) исчезает, ибо (13) является экстремалью:

$$\delta I = F'_{y'}(x_1, y_1, y_1') \, \delta y_1 - F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \, \delta y_0.$$

Из необходимого условия экстремума $\delta I = 0$, благодаря произволу δy_1 и δy_0, так как передвижение концов кривой не подчинено никаким требованиям, следуют условия:

$$F'_{y'}(x_1, y_1, y_1') = 0; \; F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') = 0 \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

называемые естественными граничными условиями.

Общий интеграл уравнения Эйлера содержит 2 произвольных постоянных:

$$y = f(x, a, b) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Для выделения искомой кривой среди всех кривых семейства (16) имеем 2 условия (15), связывающие 2 неизвестных a и b.

Мы предлагаем читателю показать, что кривая C, дающая экстремум интегралу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y_n') \, dx \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

при свободных граничных значениях для y_i, должна удовлетворять двум следующим требованиям:

1. *Кривая C есть экстремаль*:

$$\frac{d}{dx} F'_{y'_i} - F'_{y'_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

2. *Удовлетворяет естественным граничным условиям*:

$$\left[F'_{y'_i}\right]_{x=x_0} = 0. \; \left[F'_{y'_i}\right]_{x=x_1} = 0. \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad \ldots \quad (18)$$

Сделаем еще одно замечание относительно полусвободных границ.

Пусть допустимые кривые, кроме известных условий непрерывности, подчинены еще требованию проходить через точку с координатами (x_0, y_0); второй конец кривых может лежать в какой угодно точке прямой $x = x_1$.

Пусть, как и раньше, кривая (13) решает задачу. Совершенно очевидно, что эта кривая попрежнему должна быть экстремалью.

В общем выражении вариации (10) сохранится лишь слагаемое, соответствующее правому концу с δy_1, ибо в нашем случае

$$\delta x_0 = \delta x_1 = \delta y_0 = 0.$$

$$\delta I = F'_{y'}(x_1, y_1, y_1')\,\delta y_1 \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

и из необходимого условия экстремума $\delta I = 0$ следует, в виду произвола δy_1, естественное граничное условие для правого конца кривой:

$$F'_{y'}(x_1, y_1, y_1') = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

Для определения двух постоянных, входящих в общий интеграл уравнения Эйлера (16), имеем 2 уравнения

$$y_0 = f(x_0, a, b) \qquad F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1) = 0.$$

При закреплении правого конца и свободном левом, естественное граничное условие (20) переходит в

$$F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

Аналогичное имеет место и для интеграла (17).

§ 18. Условия трансверсальности.

Среди кривых класса $C^{(1)}$, соединяющих две заданные кривые $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$, нужно найти такую кривую C, которая дает экстремум интегралу

$$I_c = \int\limits_C F(x, y, y')\,dx \ldots (23)$$

Относительно $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$ мы будем предполагать, что они имеют единственную касательную в каждой точке.

Пусть A и B концы искомой кривой (рис. 5) и

$$y = y(x) \quad \ldots \ldots (24)$$

ее уравнение.

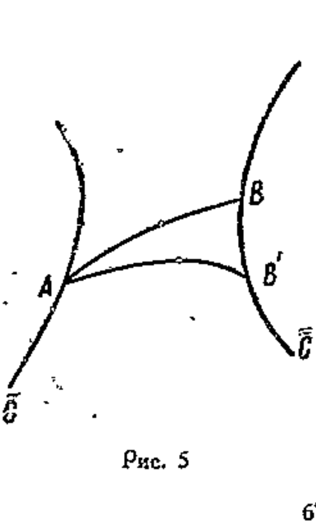

Рис. 5

Выделим из всех допустимых кривых 3 группы:

1. Кривые, имеющие свое начало в точке A и конец в точке B.

2. Кривые, имеющие свое начало в точке A и конец в любой точке кривой $\overline{\overline{C}}$.

3. Кривые, имеющие свое начало в любой точке кривой $\overline{\overline{C}}$ и конец в точке B.

Так как кривая C дает экстремум интегралу (23) относительно всей совокупности допустимых кривых, то она будет давать экстремум и по отношению к каждой из выделенных групп.

Но если кривая (24) дает экстремум по отношению кривых первой группы, то она обязана быть экстремалью:

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}-F'_y=0.$$

Выясним теперь, какому условию должна удовлетворять C, чтобы она давала экстремум по отношению кривых второй группы. Составим для этой цели выражения первой вариации интеграла I_c при переходе от C к некоторой другой кривой группы 2.

Здесь, благодаря неподвижности точки A, $\delta x_0=0$, $\delta y_0=0$. Интегральное слагаемое в общем выражении (10) вариации δI пропадает, так как C — экстремаль, и условие $\delta I_c=0$ обращается в:

$$[F(x_1,y_1,y_1')-y'_1F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')]\,\delta x_1+F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')\,\delta y_1=0\quad . \quad (25_1)$$

где δx_1 и δy_1 суть компоненты бесконечно малого перемещения вдоль кривой $\overline{\overline{C}}$ из точки (x_1, y_1), или, что то же самое, компоненты перемещения вдоль касательной к этой кривой в той же точке.

Пусть, в частном случае, ордината $\overline{\overline{y}}$ кривой $\overline{\overline{C}}$, по крайней мере, по близости к точке (x_1, y_1), может быть рассматриваема как однозначная непрерывная функция от x с такою же производной:

$$\overline{\overline{y}}=\overline{\overline{y}}(x)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Отношение $\frac{\delta y_1}{\delta x_1}$ есть ничто иное, как угловой коэффициент касательной к кривой $\overline{\overline{C}}$ в точке (x_1, y_1)

$$\frac{\delta y_1}{\delta x_1}=\overline{\overline{y}}'(x_1)=\overline{\overline{y}}'_1.$$

Условие (25_1) поэтому примет вид:

$$F(x_1,y_1,y_1')+(\overline{\overline{y}}'_1-y_1')\,F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')=0\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25_2)$$

Пусть Γ — любая кривая, пересекающаяся с C в некоторой точке (x, y) и $\tilde{y}'$ угловой коэффициент касательной к ней в точке пересечения.

Мы условимся говорить, следуя Кнезеру, что *Γ и C пересекаются в точке (x, y) трансверсально, если выполнено следующее равенство:*

$$[F(x,y,y')-y'F'_{y'}(x,y,y')]\,\delta x+F'_{y'}(x,y,y')\,\delta\tilde{y}=0,$$

где δx и $\delta\tilde{y}$ есть составляющие по осям координат перемещения вдоль касательной к кривой Γ в точке (x, y), или

$$F(x,y,y')+(\tilde{y}'-y')\,F'_{y'}(x,y,y')=0.$$

Равенства (25_1) и (25_2) выражают ничто иное, как трансверсальность пересечения экстремали C и граничной кривой $\overline{\overline{C}}$ в точке B. Они устанавливают зависимость между координатами точки пересечения C и $\overline{\overline{C}}$ и их угловыми коэффициентами y'_1 и $\overline{\overline{y_1}}'$ в той же точке.

Совершенно аналогично, для того, чтобы кривая давала экстремум относительно кривых группы 3, необходимо, чтобы экстремаль C пересекалась с граничной кривой $\overline{C}$ в A трансверсально

$$[F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)]\,\delta x_0 + \\ + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\,\delta y_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (27_1)$$

или

$$F(x_0, y_0, y_0') + (\overline{y_0}' - y_0')\, F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') = 0 \quad \ldots (27_2)$$

Таким образом, если кривая C дает экстремальное значение интегралу (23), то должны быть выполнены 3 следующие необходимые условия:

1. C есть интегральная кривая уравнения Эйлера,

2. C пересекается с $\overline{C}$ трансверсально

3. C пересекается с $\overline{\overline{C}}$ трансверсально.

Интегрируя уравнение Эйлера, мы найдем y как функцию от x и двух произвольных постоянных:

$$y = f(x, a, b).$$

Осталось еще определить постоянные интегрирования a, b, координаты x_0, y_0 точки A и координаты x_1, y_1 точки B. Мы проведем все вычисления в предположении, что граничные кривые заданы уравнениями:

$$\overline{y} = \overline{y}(x), \qquad \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{y}}(x).$$

Очевидно, должны быть соблюдены следующие равенства:

$$y_1 = f(x_1, a, b),\ y_0 = f(x_0, a, b),\ y_1' = f_x'(x_1\, a, b),\ y_0' = f_x'(x_0, a, b);$$

подставляя эти значения в (25) и (27), получим 2 уравнения вида

$$\Phi_0(x_0, a, b) = 0 \quad \Phi_1(x_1, a, b) = 0.$$

Так как точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) лежат соответственно на кривых $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$, то должны быть выполнены требования

$$f(x_0, a, b) = \overline{y}(x_0),\ f(x_1, a, b) = \overline{\overline{y}}(x_1).$$

Вместе с предыдущими, эти 2 уравнения дают систему 4-х уравнений с четырьмя неизвестными x_0, x_1, a, b.

В частном случае, одна из кривых, например, $\overline{C}$, может вырождиться в точку, и мы будем иметь задачу лишь с одним подвижным концом:

Среди кривых, принадлежащих классу $C^{(1)}$, проходящих через *точку A и имеющих второй конец на заданной наперед кривой $\overline{\overline{C}}$ найти ту, которая дает экстремум интегралу (23).*

Искомая кривая, как и в предшествующем случае, должна быть экстремалью. Однако, здесь условия (27) отпадут, и останется лишь условие трансверсальности для точки B.

Произвольные постоянные a, b интегрирования и абсцисса x_1, точки B определяется тогда из следующей, не нуждающейся в пояснениях, системы уравнений:

$$f(x_0, a, b) = y_0 \quad \Phi_1 = (x_1, a, b) = 0 \quad f(x_1, a, b) = \overline{\overline{y}}(x_1).$$

Обратимся теперь к условиям трансверсальности в пространстве 3-х измерений.

Даны две поверхности $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$, определенные уравнениями:

$$\Phi_0\ (x, y, z) = 0 \quad \Phi_1\ (x, y, z) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

и имеющие касательную плоскость в каждой точке.

Среди кривых, принадлежащих классу $C^{(1)}$, имеющих начало на поверхности $\overline{S}$ и конец на поверхности $\overline{\overline{S}}$, найти кривую C дающую экстремум интегралу:

$$I_c = \int_c F(x, y, z, y', z')\, dx. \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Пусть кривая C, решающая задачу, имеет начало в точке A поверхности $\overline{S}$, конец в точке B поверхности $\overline{\overline{S}}$ и определена уравнениями

$$y = f(x), \ z = \varphi(x) \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Рассуждения, подробно изложенные для задачи двух измерений, без изменений переносятся на разбираемый случай и приводят к заключению, что C должно удовлетворять следующим необходимым требованиям:

1. Кривая C есть интегральная кривая системы уравнений Эйлера.

$$F_y' - \frac{d}{dx} F_{y'}' = 0; \quad F_z' - \frac{d}{dx} F_{z'}' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

2. В точке A поверхности $\overline{S}$ должно быть выполнено условие

$$[F - y'\ F_{y'}' - z'\ F_{z'}']_0\ \delta x_0 + [F_{y'}']_0\ \delta y_0 + [F_{z'}']_0\ \delta z_0 = 0, \ \ldots (32)$$

где символ $[\ \ ]_0$ показывает, что выражение, стоящее в скобках, должно быть вычислено в точке A, и δx_0, δy_0, δz_0 суть составляющие по осям координат произвольного перемещения из A вдоль касательной к S плоскости в этой точке.

3. В точке B поверхности $\overline{\overline{S}}$ должно быть выполнено условие:

$$[F - y'\ F_{y_1}' - z'\ F_{z'}']_1\ \delta x_1 + [F_{y'}']_1\ \delta y_1 + [F_{z'}']_1\ \delta z_1 = 0 \ \ldots (33)$$

Символ $[\ \ ]_1$ и δx_1, δy_1, δz_1, имеют то же значение для точки B.

Условия (32) и (33) остаются справедливыми для любого способа аналитического задания поверхностей S и S. Они, однако, могут быть преобразованы, если $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$ даны, как мы предположили, в форме (28).

Действительно, направление нормали к поверхности $\Phi_i\ (x, y, z) = 0$ $i = 0{,}1$ определяется величинами $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ и потому должно иметь место равенство:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\ \delta x_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\ \delta y_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\ \delta z_i = 0\quad i = 0{,}1,$$

ибо вектор с компонентами δx_i, δy_i, δz_i, лежит в касательной плоскости к поверхности $\Phi_i = 0$.

Два условия (32) и (33) могут быть переписаны поэтому в форме:

$$\frac{[F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}]_0}{\frac{\partial \Phi_0\ (x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{[F'_{y'}]_0}{\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}} = \frac{[F'_{z'}]_0}{\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}}\ \ldots\ (34_1)$$

$$\frac{[F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}]_1}{\frac{\partial \Phi^i\ (x_1, y_1, z_1)}{\partial x}} = \frac{[F'_{y'}]_1}{\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}} = \frac{[F'_{z'}]_1}{\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}}\ \ldots\ (34_2)$$

Пусть некоторая поверхность S, обладающая касательной плоскостью, пересекается с экстремалью C в некоторой точке $M\ (x, y, z)$, и пусть δx, δy, δz суть компоненты перемещения от M по касательной к S плоскости.

Мы условимся говорить, что C и S пересекаются в M трансверсально, если выполнено условие

$$[F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}]\ \delta x + F'_{y'}\ \delta y + F'_z\ \delta z = 0,$$

или, если поверхность S задана в форме $\Phi\ (x, y, z) = 0$, то в виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\ \delta\ x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ \delta\ y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\ \delta z = 0$$

будет

$$\frac{F - y' F'_{y'} - z' F'_z}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{F'_{y'}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{F'_{z'}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Эти уравнения устанавливают зависимость между координатами x, y, z точки пересечения, величинами y' и z' определяющими направление касательной к C и величинами $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ определяющими направление нормали к S.

Равенства (32), (33) или (34) суть условия трансверсальности пересечения кривой C с поверхностями $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$ в точках A и B.

Найденные из уравнений Эйлера функции y и z будут зависеть от 4 произвольных постоянных

$$y = f\ (x, a, b, c, d),\ z = \varphi\ (x, a, b, c, d).$$

Четыре уравнения трансверсальности (34) и 2 условия того, что точки с координатами (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) лежат на поверхностях (28), т.-е. удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0) = 0 \qquad \Phi_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1) = 0,$$

дадут систему шести уравнений для определения шести неизвестных x_0, x_1, a, b, c, d.

Рассмотренный в предыдущем параграфе случай естественных границ есть частный случай задачи настоящего параграфа, получающийся из нее, когда кривые $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$ вырождаются в прямые, уравнения которых соответственно будут $x = x_0$ и $x = x_1$. Здесь $\delta x_i = 0$ и, в виду произвола δy_i, естественные граничные условия (15) немедленно следуют из условий трансверсальности (25) и (27).

Наконец, укажем еще на задачу с подвижными концами в n-мерном пространстве.

Между кривыми n-мерного пространства, принадлежащими классу $C^{(1)}$, имеющими свое начало на гиперповерхности S:

$$\Phi_0\ (x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) = 0$$

и конец на гиперповерхности $\overline{\overline{S}}$:

$$\Phi_1\ (x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) = 0 \text{ [1]}$$

найти кривую C, дающую экстремум интегралу:

$$I_c = \int_c F\ (x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ y'_1,\ \ldots,\ y'_n)\ dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \ (35)$$

Мы предлагаем читателю доказать справедливость следующего утверждения:

Чтобы кривая C решала задачу, необходимо выполнение следующих требований:

1. C есть экстремаль, т.-е. является решением системы уравнений Эйлера:

$$\frac{d}{dx} F'_{y'_i} - F'_{y_i} = 0 \qquad i = 1,\ \ldots,\ n, \quad . \quad . \quad . \quad . \ (36)$$

2. В точках A и B встречи C с гиперповерхностями $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$ должны быть соблюдены условия трансверсальности

$$\left(F - \sum_{s=1}^{n} y'_s\ F'_{y'_s}\right) \delta x + \sum_{s=1}^{n} F'_{y'_s}\ \delta y_s = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \ (37_1)$$

где δx, δy_s суть компоненты произвольного бесконечно-малого перемещения по гиперповерхностям $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$ в точках A и B.

---

[1]) Выражение „точка $M\,(x, y_1, \ldots, y_n)$ лежит на поверхности $F(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$" означает просто, что числа x, $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют уравнению $F = 0$. И если мы говорим, что кривая C начинается на поверхности $\overline{S}$, то это значит просто, что должно быть $F_0\ (x_0, y_1^0 \ldots, y^0_n) = 0$.

(37_1) остается вновь справедливой для любого способа аналитического задания гиперповерхностей $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$. Если допустить, как это сделали мы, что граничные гиперповерхности заданы в форме $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$, то компоненты δx, δy_s бесконечно малых перемещений вдоль них должны, очевидно, удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_s}\,\delta y_s = 0.$$

Вместе с (37_1) это уравнение позволяет представить условие трансверсальности в форме

$$37_2 \ldots \quad \frac{F - \sum\limits_{s=1}^{n} y'_s\, F_{y'_s}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{F_{y'_1}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}} = \ldots = \frac{F_{y'_n}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n}}.$$

Отметим здесь еще, что формула (37_1) остается верной и для того случая, когда концы искомой кривой должны оставаться на пересечении нескольких гиперповерхностей, с тем условием, что δx, δy_s будут тогда бесконечно малыми перемещениями вдоль указанного пересечения.

Все предшествующие формулы относились лишь к задачам с одной переменной. Что касается общего выражения первой вариации кратных интегралов и различного рода граничных условий для них, мы отсылаем читателя к более полным руководствам по вариационному исчислению. Некоторые указания по этому вопросу можно найти в дополнениях к настоящей главе.

§ 19. Вариационные принципы механики.

I. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА.

Дана система n материальных точек, массы которых суть m_ν и координаты x_ν, y_ν, z_ν $[\nu = 1, \ldots, n]$ суть функции времени t. Пусть движение системы подчинено связям:

$$\varphi_s = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, m$$

и происходит под действием сил, обладающих силовой функцией U:

$$X_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}; \; Y_\nu = \frac{\partial U}{\partial v_\nu}; \; Z_\nu = \frac{\partial U}{\partial z_\nu}.$$

φ_s и U суть функции координат точек системы и времени.

Пусть T — живая сила системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\,(x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2).$$

Из некоторого положения A, соответствующего моменту времени t_0, система переместится к моменту времени t_1, в некоторое другое положение B.

Из всех возможных способов, которыми наша система материальных точек может переместиться из положения A в положение B, мы выбираем класс „допустимых" движений системы, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) движение совместимо с заданными связями,

2) в момент t_0 система занимает положение A и в момент t_1 — положение B.

Принцип Гамильтона утверждает, что *действительное движение системы отличается от всех допустимых тем, что оно удовлетворяет необходимому условию экстремума интеграла Гамильтона*

$$I=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt.$$

Каждому „допустимому" движению системы будет соответствовать совокупность $3n$ функций $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$ определенных в интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, изменения независимого переменного t, удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_s=0$ и тем обстоятельствам, что система в моменты времени t_0 и t_1 занимает положения A и B, что равносильно заданию функций x_ν, y_ν, z_ν на концах промежутка интегрирования.

Мы имеем, таким образом, вариационную задачу с голономными связями и закрепленными границами. Для решения ее составим, следуя правилу множителей Лагранжа, изложенному в предыдущей главе, функцию

$$F=T+U+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\,\varphi_s,$$

где $\lambda_s(t)$ суть некоторые функции переменного t, и напишем для нее уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial x'_\nu}=m\,x_\nu',\quad \frac{\partial F}{\partial x_\nu}=\frac{\partial U}{\partial x_\nu}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$$

$$m\,x_\nu''-X_\nu-\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\,\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_\nu}=0.$$

$$m\,y_\nu''-Y_\nu-\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\,\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_\nu}=0.\quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

$$m\,z_\nu''-Z_\nu-\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\,\frac{\partial\varphi_s}{\partial z_\nu}=0.$$

Они, очевидно, совпадают с дифференциальными уравнениями действительного движения системы.

Итак, при сделанных нами предположениях о силах и связях, уравнения действительного движения системы есть не что иное, как необходимое условие экстремума интеграла Гамильтона по *отношению ко всем другим движениям, удовлетворяющим наложенным связям, при которых система в начальный и конечный моменты времени занимает те-же положения, что и при действительном движении.*

Во многих случаях вместо прямолинейных координат выбирают криволинейные координатные параметры $q_1, q_2, \ldots, q_k$ сообразно с наложенным на задачу связям и с числом $k=3n-m$ степеней свободы. Уравнения связи тогда отпадают.

Функции T и U, как легко видеть, примут форму

$$T=T\,(q_1,\ q_k',\ q_1',\ \ldots,\ q_k'\ t)$$
$$U=U\,(q_1,\ \ldots,\ q_k,\ t),$$

и наша задача переходит в задачу о минимуме интеграла $\int\limits_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$ при закрепленных граничных значениях функций q_i, без уравнений связи.

Уравнения Эйлера для нее будут:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_i'}-\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_i}\cdot \qquad i=1,\ \ldots,\ k,$$

или, так как U не зависит от q_i':

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,T}{\partial q_i'}-\frac{\partial\,(T+U)}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,\ldots,k.$$

II. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА.

Для доказательства нам потребуется одно предварительное замечание. Пусть мы рассматриваем задачу типа (35) с закрепленным левым концом (при $x=x_0$ функции y_i принимают наперед заданные значения) и подвижным верхним пределом интегрирования x_1; пусть, кроме того, значения функций y_s для этого конца будут заданы. Геометрически говоря, это значит, что правый конец кривой может скользить вдоль прямой параллельной оси x. Как известно, тогда должны быть выполнены уравнения Эйлера (36) и условия трансверсальности (37) для конца x_1. Но так как y_s заданы, то $\delta y_s=0$ и мы, в виду произвола δx_1, имеем:

$$[F-\sum_{s=1}^{n} y_s'\,F'_{y'_s}]_1=0.$$

Допустим, далее, что F не содержит x; тогда

$$\frac{d}{dx}(F-\sum_{s=1}^{n} y_s'\,F'_{y'_s})=\sum_{s=1}^{n}\,(F'_{y_s}\,y_s'+F'_{y'_s}\,y_s'')-$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\,(y_s''\,F'_{y'_s}+y_s'\frac{d}{dx}\,F'_{y'_s})=\sum_{s=1}^{n} y_s'\,(F'_{y_s}-\frac{d}{dx}\,F'_{y'_s})=0.$$

Отсюда следует, что вдоль любой экстремали выражения $F-\sum_{s=1}^{n} y_s' F'_{y'_s}$ должно быть постоянным, и так как на конце $x=x_1$ искомой кривой оно равно нулю, то и на всей кривой должно быть:

$$F-\sum_{s=1}^{n} y_s' F'_{y'_s}=0 \quad \dots\dots\dots\dots (38)$$

Рассмотрим движение системы n материальных точек, происходящее под действием консервативных сил с потенциалом U и подчиненное голономным связям

$$\varphi_s=0 \qquad s=1, \dots, m \quad \dots\dots\dots (39)$$

Мы будем предполагать здесь, что ни силовая функция U, ни связи φ_s не содержат явно времени t.

При наших предположениях имеет место интеграл живых сил

$$T-U=h, \quad \dots\dots\dots\dots\dots (40)$$

где h — определенная постоянная.

Перемещение системы из начального положения A в конечное положение B мы называем „допустимым", если оно удовлетворяет следующим требованиям:

1) удовлетворяет связям (39),

2) для него соблюдено равенство (40) с тем же самым значением h, что и в действительном движении,

3) в момент времени t_0 система имеет то же положение, что и при действительном движении; конечное положение B системы совпадает с конечным положением, соответствующем моменту t_1 при действительном движении, но время, в течение которого система переходит из A в B — произвольно.

Между всеми „допустимыми" движениями будем искать то, которое дает минимум интегралу действия

$$J=\int_{t_0}^{t} T\,dt.$$

Сейчас мы имеем вариационную задачу рассмотренного в предварительном замечании типа с неголономною связью (40) и голономными связями (39).

По правилу множителей Лагранжа составляем функцию

$$F=T+\lambda\,(T-U-\lambda)+\sum_{s=1}^{m} \lambda_s\,\varphi_s,$$

где λ и λ_s — некоторые функции времени t. Докажем первоначально, что λ — постоянная величина. В самом деле, для функции F должно иметь место равенство (38). Производные x_ν', y_ν', z_ν' от координат точек системы по времени входят в F лишь через T.

Сумма

$$\sum_{s=1}^{n} y_s' \, F'_{y'_s},$$

стоящая в левой части (38) в нашем случае выражается в

$$\sum_{s=1}^{n} (1+\lambda) \left(\frac{\partial T}{\partial x_\nu} x_\nu' + \frac{\partial T}{\partial y_\nu'} \, y_\nu' + \frac{\partial T}{\partial z_\nu'} z_\nu'\right),$$

и так как T есть однородная функция второго измерения относительно x'_ν, y'_ν, z'_ν, эта сумма, по теореме Эйлера об однородных функциях, принимает вид

$$2\,(1+\lambda)\,T$$

и (38) дает

$$F-2\,(1+\lambda)\,T=0,$$

откуда, в виду (39) и (40) следует

$$-(1+2\,\lambda)\,T=0,$$

и так как вообще $T \neq 0$, должна быть $\lambda=-\frac{1}{2}$

$$F=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}(U+h)+\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \, \varphi_s$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu'}=\frac{1}{2} m_\nu \, x_\nu' \qquad \frac{\partial F}{\partial x_\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x_\nu}+\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu}$$

аналогично для y_ν и z_ν.

Уравнения Эйлера принимают вид:

$$m_\nu \, x_\nu''=\frac{\partial U}{\partial x_\nu}+\sum_{s=1}^{m} 2\,\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu}$$

$$m_\nu \, y_\nu''=\frac{\partial U}{\partial y_\nu}+\sum_{s=1}^{m} 2\,\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_\nu}$$

$$m_\nu \, z_\nu''=\frac{\partial U}{\partial z_\nu}+\sum_{s=1}^{m} 2\,\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial z_\nu}$$

совпадающий с уравнениями действительного движения.

III. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ФОРМЕ ЯКОБИ.

Мы будем рассматривать систему n материальных точек, движение которых подчинено голономным связям

$$\varphi_s=0 \qquad s=1, \ldots, m,$$

и происходит под действием сил, имеющих потенциал U. Функции U и φ_s предположим независящими явно от времени t.

Обозначим через A начальное положение системы и через B — ее конечное положение.

Как и в предыдущем случае, имеет место интеграл живых сил:

$$T-U=h,$$

где h — вполне определенная для рассматриваемого движения постоянная.

Рассмотрим одну какую-либо „допустимую" систему траекторий движения, т. е. такую систему их, следуя которой можно перейти из начального положения A в конечное положение B и для которых удовлетворяются уравнения связи $\varphi_s=0$.

Эта система определится заданием $3n$ функций

$$x_\nu=x_\nu(\tau),\ y_\nu=y_\nu(\tau),\ z_\nu=z_\nu(\tau)\ \nu=1,2,\ldots,n.$$
$$\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1,$$

удовлетворяющих определенным граничным условиям.

Здесь τ некоторый параметр, определяющий положения точек на траекториях. В частном случае за этот параметр может быть взято время. Мы не будем делать пока этого ограничения в выборе параметра.

Указанную выше совокупность $3n$ функций x_ν, y_ν, z_ν можно условно рассматривать как „кривую" пространства с $3n$ измерениями. Эта кривая проходит через точки A и B нашего пространства, соответствующие начальному и конечному положениям системы, и лежит на гиперповерхностях, определяемых уравнениями связи $\varphi_s=0$.

Наоборот, каждой кривой нашего пространства, обладающей двумя перечисленными свойствами, будет соответствовать некоторая возможная система траекторий. В этом смысле механика системы точек есть вместе с тем геометрия линий многомерных пространств.

Поставим перед собой вопрос найти такие свойства кривой, соответствующей действительному движению системы, которые позволили бы выделить ее из всех других кривых, соответствующих лишь возможным движениям.

Один из возможных ответов на поставленный вопрос дается следующей задачей Якоби:

Среди кривых, удовлетворяющих условиям $\varphi_s=0$ и проходящих через две наперед заданные точки найти ту, которая дает наименьшее значение „интегралу действия"

$$I=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\left(x_\nu'^2+y_\nu'^2+z_\nu'^2\right)}\,d\tau.$$

Прежде всего очевидно, что интеграл I зависит только от кривой, но не от выбора параметра τ. Это непосредственно следует, в виду изложенного нами в главе I, из того, что функция, стоящая под знаком интеграла, положительно однородна первого измерения относительно производных от искомых функций по параметру.

Мы обозначим, ради краткости,

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2).$$

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sigma} \cdot d\tau.$$

Уравнения Эйлера для этого интеграла будут:

$$m_\nu \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{\sqrt{2(U+h)}}{\sqrt{\sigma}} x_\nu' = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2(U+h)}} \frac{\partial U}{\partial x_\nu} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu}$$

и аналогично для y_ν и z_ν.

Как известно из общей теории параметрической задачи, полученные уравнения не независимы между собой и определяют кривую лишь с точностью до выбора параметра. Для получения определенных функций x_ν, y_ν, z_ν к системе должно быть присоединено уравнение, определяющее выбор параметра.

Чтобы показать, что найденные уравнения определяют кривую, соответствующую действительному движению, мы воспользуемся произволом выбора добавочного уравнения. Мы будем требовать, чтобы было соблюдено равенство:

$$\frac{\sqrt{2(U+h)}}{\sqrt{\sigma}} = 1,$$

и обозначим удовлетворяющий этому требованию параметр через t. Формула замены переменных будет, в нашем случае, выглядеть следующим образом:

$$t = t_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{2(U+h)}} d\tau.$$

Написанное выше уравнение, определяющее выбор параметра, есть ничто иное, как интеграл живых сил $T - U = h$. Поэтому выбранный нами параметр t есть время.

Написанные выше уравнения Эйлера в параметре t принимает форму уравнений динамики:

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\nu} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_\nu},$$

что и доказывает наше утверждение.

Итак, если силы консервативны, связи и силовая функция не содержат времени явно, то уравнения траекторий движения си-

стемы получаются из записи необходимого условия минимума „интеграла действия"

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2\,(U+h)}\ \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\,(x_\nu'^2+y_\nu'^2+z_\nu'^2)}\ d\tau$$

при закрепленном начале и конце и связях $\varphi_s=0$.

Но поставленная нами задача может быть истолкована как задача о нахождении геодезической линии, лежащей на пересечении гиперповерхностей $\varphi_s=0$ и соединяющей точки A и B для случая, когда метрика пространства определена квадратной формой

$$ds^2=2\,(U+h)\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\,[(dx_\nu)^2+(dy_\nu)^2+(dz_\nu)^2].$$

Благодаря этому обстоятельству всякое движение точки в пространстве может быть рассматриваемо как движение по геодезическим линиям. Наличие сил сводится тогда лишь к явлению изменения метрики пространства.

Обозначим через $q_1, \ldots\ldots q_k$ $(k=3n-m)$ независимые обобщенные координатные параметры нашей системы точек. Уравнения связи отпадут, и дифференциальные уравнения движения получатся из необходимого условия несвязанного минимума интеграла:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2\,(U(q_1,\ldots,q_k)+h)}\ \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,dq_i\,dq_j},$$

где $a_{i,j}$ — известные функции от q_i.

Эта задача равносильна разысканию геодезических линий в k—мерном пространстве, метрика которого определена равенством:

$$ds^2=2\,[U\,(q_1,\ldots,q_k)+h]\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,dq_i\,dq_j.$$

§ 20. Приложение вариационных принципов механики к некоторым задачам математической физики.

1. Под струной в теории упругости понимают линейное многообразие материальных точек, которое в состоянии равновесия под влиянием некоторого натяжения располагается вдоль прямой линии. Ниже мы эту прямую всюду будем принимать за ось x-ов. В деформированном состоянии струна будет обладать потенциальной энергией. Для струны принимают, что потенциальная энергия деформации каждого малого элемента струны будет пропорциональная удлинению его по отношению к его величине в состоянии равновесия. Коэффициент пропорциональности будет зависеть от упругих свойств струны, времени, если мы рассматриваем струну переменными физическими свойствами и, наконец, от начального

натяжения рассматриваемого элемента. В одном случае, о котором мы будем говорить ниже, этот коэффициент совпадает с начальным натяжением.

Колебания струны мы будем предполагать *плоскими* — когда вся струна в любой момент времени лежит в некоторой постоянной плоскости, проходящей через ось x-ов и *поперечными* — когда каждая точка струны может перемещаться только по прямой, перпендикулярной к оси x-ов.

Исследование движения струны в этом случае эквивалентно изучению функции $u(x, t)$, измеряющей расстояние точки струны в момент времени t от ее положения x равновесия по оси x-ов по перпендикуляру к этой оси.

Мы будем иметь в виду так называемые малые колебания струны, когда можно пренебрегать высшими степенями функции u и ее первой производной по отношению к низшим степеням.

Колебания струны мы будем предполагать пока свободными.

Рассмотрим кусок струны между $x = a$ и $x = b$. Кинетическая энергия этого куска будет равна:

$$T = \frac{1}{2}\int_a^b \rho\, u_t'^2\, dx,$$

где ρ — плотность струны, могущая вообще зависеть как от положения точки на струне, так и от времени, если иметь в виду струну, меняющую с временем свои свойства.

Составим выражение для потенциальной энергии. Возьмем малый участок dx струны в положение равновесия; в деформированном состоянии длина этого участка, с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка, будет равна

$$\sqrt{1 + u_x'^2}\, dx$$

и линейное увеличение его есть

$$\sqrt{1 + u_x'^2}\, dx - dx,$$

или, если пренебречь степенями выше второй, $\frac{1}{2}\, u_x'^2\, dx$.

Обозначим через μ упоминавшийся уже выше коэффициент пропорциональности.

Потенциальная энергия деформации струны получит выражение

$$-U = \frac{1}{2}\int_a^b \mu\, u_x'^2\, dx.$$

Интеграл Гамильтона имеет вид:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, \partial t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b (\rho\, u_t'^2 - \mu\, u_x'^2)\, dx\, dt.$$

Дальнейшее изучение поставленного вопроса потребует от нас определенных предположений относительно концов струны. Мы будем предполагать здесь движение концов струны известными; в частном случае, концы могут быть закреплены. Знание этого движения равносильно заданию функции u на сторонах $x=a$ и $x=b$ прямоугольника интегрирования в интеграле Гамильтона для струны. Читателя, пожелавшего ознакомиться с изучением движения струны при граничных условиях иного рода, мы отсылаем к дополнениям к настоящему параграфу.

Для нахождения уравнения движений струны мы должны среди всех функций u, принадлежащих классу $C^{(1)}$, найти ту, которая давала бы минимум интегралу I и при $t=t_0$ и $t=t_1$ давала положение струны, совпадающее с ее действительным положением.

Последнее требование равносильно заданию функции u на сторонах $t=t_0$ и $t=t_1$ прямоугольника интегрирования, и так как ее значения для двух других сторон $x=a$ и $x=b$ прямоугольника, как уже отмечалось выше, известно, что дело сводится к нахождению функции u, минимизирующей интеграл I, при заданных граничных значениях. Уравнения Эйлера для u имеют вид:

$$(\rho\, u_t')_t' - (\mu\, u_x')_x' = 0$$

и представляют собой уравнение движения струны.

Если на струну действуют внешние силы, перпендикулярные к оси x-ов, распределенные непрерывно по струне с плотностью $f(x, t)$, то к выражению потенциальной энергии $\frac{1}{2}\mu\, u_x'^2\, dx$ деформации каждого элемента струны добавляется еще потенциальная энергия от внешних сил $-f . u\, dx$.

Интеграл Гамильтона здесь принимает вид:

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \left(\frac{\rho}{2} u_t'^2 - \frac{\mu}{2} u_x'^2 + f . u\right) dx\, dt$$

и уравнение движения струны (уравнение Эйлера для нового интеграла) будет

$$(\rho\, u_t')_t' - (\mu\, u_x')_x' - f(x, t) = 0.$$

В частном, практически наиболее важном случае однородной постоянной струны, ρ и μ будут постоянными, и предшествующее уравнение переходит в:

$$\rho\, u_{tt}'' = \mu\, u_{xx}'' + f.$$

2. Как мы уже упоминали, потенциальная энергия деформации упругого стержня, прямолинейного в недеформированном состоянии, выражается интегралом вида

$$\frac{1}{2}\int \mu \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 \partial s,$$

где $\frac{1}{\rho}$ — кривизна стержня и $\frac{\mu}{2}$ — коэффициент пропорциональности.

Мы будем рассматривать плоские поперечные малые колебания такого стержня. Примем прямую положения равновесия стержня за ось x-ов и определим функцию $u\,(x, y)$ как и в предыдущем случае. Кривизна его в деформированном состоянии равна:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{u_{xx}''}{(1+u_x'^2)^{3/2}},$$

или, если откинуть в виду малости колебаний члены высших измерений:

$$\frac{1}{\rho}=u''.$$

Потенциальная энергия деформации всего стержня имеет поэтому выражение

$$-U=\frac{1}{2}\int_a^b \mu\, u_{xx}''^2\,\partial x.$$

Живая сила T стержня есть

$$\frac{1}{2}\int_a^b \rho\, u_t'^2\,dx.$$

По принципу Гамильтона, функция u, соответствующая действительному движению стержня, должна давать экстремум интегралу

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,\partial t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b(\rho\, u_t'^2-\mu\, u''_{xx}{}^2)\,\partial x\,\partial t,$$

если известно начальное и конечное положение стержня, т. е. значения функций u для $t=t_0$ и $t=t_1$.

Остальные граничные условия будут зависеть от того, будут ли концы стержня заделаны, закреплены или оперты на подставки и т. д.; для исследования этих вопросов мы отсылаем читателя к дополнению, здесь же нам важно будет установить, что при любой природе граничных условий функция u должна давать минимум по отношению к классу функций с теми же граничными условиями, что и u, и потому должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера:

$$(\rho\, u_t')_t'+(\mu\, u_{xx}'')_{xx}''=0.$$

В случае вынужденных колебаний стержня под действием сил, распределенных непрерывно с плотностью $f\,(x, t)$, перпендикулярных к оси x, потенциальная энергия стержня будет содержать лишнее слагаемое, даваемое внешними силами

$$-\int_a^b f\,u\,dx.$$

Уравнение движения тогда имеет вид:

$$(\rho\, u_t')_t'+(\mu\, U_{xx}'')_{xx}''-f\,(\mathrm{x}, t)=0.$$

Для однородного постоянного стержня, когда ρ и μ не зависят от времени, получаем:

$$\rho\, u_{tt}'' + \mu\, u_{xxxx}'''' - f(x, t) = 0.$$

Дополнения и задачи.

1. Условия трансверсальности для параметрической задачи.

Среди кривых, принадлежащих классу $C^{(1)}$, начинающихся на гиперповерхности $\Phi_0(x, y, z\ldots) = 0$ и кончающихся на гиперповерхности $\Phi_1(x, y, z\ldots) = 0$, найти такую, для которой

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z, \ldots x', y', z', \ldots)\, dt$$

был бы экстремальным.

Искомые функции должны удовлетворять системе уравнений Эйлера:

$$F_x' - \frac{d}{dt} F'_{x'} = 0, F_y - \frac{d}{dt} F'_{y'} = 0,\ F_z' - \frac{d}{dt} F'_{z'} = 0, \ldots$$

и условиям трансверсальности

$$\Big[F_x'\Big]_i : \frac{\partial \Phi_i}{dt} = \Big[F_y'\Big]_i : \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \Big[F_z'\Big]_i : \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \ldots\ i = 0{,}1$$

2. Естественные граничные условия для случая производных высшего порядка.

Среди функций надлежащего класса в промежутке от x_0 до x_1 и не подчиненных никаким граничным требованиям, найти экстремизирующую интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', y''', \ldots)\, dx.$$

Обычным путем, при добавлении нескольких интегрирований по частям, легко удается доказать следующею теорему:

Функция y, решающая поставленную задачу, должна быть интегральной кривой уравнения Эйлера

$$F_y' - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F'_{y'''} + \ldots = 0,$$

и удовлетворять на концах $x = x_0$ и $x = x_1$ промежутка интегрирования предельным условиям:

$$\begin{aligned}
&F'_{y'} - \frac{d}{dx} F'_{y''} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y'''} + \ldots = 0,\\
&F'_{y''} - \frac{d}{dx} F'_{y'''} + \ldots\ldots\ldots = 0.\\
&F'_{y'''} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

3. Условие трансверсальности для кратных интегралов.

Поверхность $z=z(x, y)$, дающая экстремум интегралу

$$I=\iint_{(D)} F(x, y, z, p, q) \, dx \, dy$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

относительно всех других поверхностей, границы которых лежат на заданной поверхности $\varphi(x, y, z)=0$, должна удовлетворять уравнению Эйлера и условию трансверсальности на границе

$$F[\varphi_x' F_p' + \varphi_y' F_q' - \varphi_z' (F - p F_p' - q F_q')] = 0.$$

Читателю предлагается показать, что для случая минимальной поверхности условие трансверсальности переходит в условие ортогональности пересечения поверхности $\varphi=0$ с поверхностью

$$z=z(x, y).$$

4. Смешанные задачи вариационного исчисления.

Мы ни в какой мере не имеем в виду затронуть здесь все хотя бы основные типы смешанных задач и останавливались только на самых простых случаях, которые мы ниже прилагаем к исследованию разнообразных задач математической физики и механики. Лиц, желающих ознакомиться с различными типами смешанных задач, являющимися естественным обобщением основных задач математической физики и соответствующими им функциональными уравнениями, заменяющими Эйлерово уравнение, мы отсылаем к мемуару R. Courant'a „Ueber die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen" в 49 томе Acta Mathematica от 1926 года.

1. Первоначально мы остановимся на наиболее простом типе такого сорта задач, который нам будет полезен значительно позже.

Пусть заданный функционал $A(y)$ имеет вид

$$A(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, \partial x + \varphi(x_0, y_0, x_1, y_1),$$

где (x_0, y_0) и (x_1, y_1) суть концы кривой, для которой он вычисляется.

Среди всех кривых, принадлежащих некоторой совокупности (нам безразлично сейчас, какой именно), найти ту, которая дает экстремальное значение $A(y)$.

Первая вариация функционала $A(y)$ при переходе от одной кривой взятой совокупности к некоторой другой будет, очевидно, состоять из первой вариации интегрального слагаемого плюс вариация функции координат концов кривой

$$\delta A = \delta T + \delta \varphi.$$

Но общее выражение вариации для интеграла нам уже известно, а общее выражение вариации $\varphi(x_0, y_0, x_1, y_1)$ дается формулой:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\delta y_1.$$

Поэтому общее выражение вариации рассматриваемого функционала имеет вид:

$$\delta A(y) = \left[(F - y'F_{y'}')_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]\delta x_1 + \left[(F_{y'}')_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\delta y_1 -$$
$$- \left[(F - y'F_{y'}')_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right]\delta x_0 - \left[(F_{y'}')_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right]\delta y_0 +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left(F_y' - \frac{d}{dx}F_{y'}'\right)dx.$$

2. В плоскости x, y дана некоторая область D, ограниченная контуром Γ. Рассмотрим функционал

$$B(z) = \int\limits_D\int F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy + \int\limits_\Gamma \Phi(s, z, z_s)\, ds,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, s — длина дуги контура Γ, отсчитываемая от некоторой точки, и $z'_s = \frac{dz}{ds}$.

Возьмем семейство функций, определенных в области D и удовлетворяющих известным нам из первой главы условиям непрерывности и составим общее выражение первой вариации функционала $B(z)$ при переходе от некоторой функции z нашего семейства к некоторой другой функции z того же семейства. Введем для этой цели однопараметренное семейство функций

$$\bar{z} = z + \alpha\eta(x, y),$$

где $\eta\ (x, y)$ есть произвольная, определенная в области D, функция, удовлетворяющая тем же условиям непрерывности, что z.

Подставим в $B(z)$ вместо z функцию $\bar{z}$. Результат будет зависеть от параметра α.

Составляем первую вариацию $B(z)$, следуя обычным правилам

$$\delta B = \frac{dB(\bar{z})}{d\alpha}\Big/_{\alpha=0}\alpha.$$

Так как область D интегрирования остается неизменной, дифференцирование по α выполняется под знаком интеграла:

$$\delta B = \int\limits_D\int\left\{F_z'\delta z + F_p'\delta p + F_q'\delta q\right\}dx\,dy + \int\left\{\Phi_z'\delta z + \Phi_{z'}\delta z_z'\right\}ds,$$

причем

$$\delta z = \eta(x, y)\alpha,\ \delta p = \eta_x\alpha,\ \delta q = \eta_y'\alpha,\ \delta z_s' = \frac{d\eta}{ds}\alpha.$$

Если обратить внимание на возможность перестановки операций варирования и дифференцирования:

$$\delta p=\frac{\partial}{\partial x}\delta z, \delta q=\frac{\partial}{\partial y}\delta z, \ \delta z_s'=\frac{d}{ds}\delta z,$$

полученное для δB выражение можно преобразовать следующим способом

$$\int\limits_D\int\left\{F_z'\delta z+F_p'\delta p+F_q'\delta q\right\}dx\,dy=\int\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F_p'\delta z)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(F_q'\delta z)\right\}dx\,dy+\int\limits_D\int\left\{F_z'-\frac{\partial}{\partial x}F_p'-\frac{\partial}{\partial y}F_q'\right\}\delta z\,dx\,dy.$$

Первое слагаемое правой части может быть приведено к криволинейному интегралу по формуле Грина-Риманна и мы будем иметь

$$\int\limits_\Gamma\left\{F_p'\frac{dy}{ds}-F_q'\frac{dx}{ds}\right\}\delta z\,ds+\int\limits_D\int\left\{F_z'-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q'\right\}\delta z\,dx\,dy$$

$$\int\limits_\Gamma\Phi'_{z_s'}\delta z_s\,ds=\int\limits_\Gamma\Phi'_{z_s'}\frac{d}{ds}\delta z\,ds=\Big/_{\!\Gamma}\Phi'_{z_s'}\delta z-\int\limits_\Gamma\delta z\frac{d}{ds}\Phi'_{z_s'}\,ds,$$

где символом $\Big/_{\!\Gamma}\Phi'_{z_s'}\delta z$ обозначено приращение функции, стоящей под знаком подстановки вдоль контура Γ; когда контур не имеет угловых точек, оно, очевидно, равно нулю, ибо $\Phi'_{z_s'}\delta z$ однозначна и, при обходе по контуру, возвратится к исходному значению.

Иное будет в том случае, когда контур имеет угловые точки. Здесь интеграл по Γ тогда следует понимать как сумму интегралов по гладким кускам контура и подстановка будет вообще отлична от нуля.

Пусть s_i угловая точка и $\psi(s)$ любая функция дуги контура. Скачок функции $\psi(s)$ при переходе через точку s_i будем называть через $S_i(\psi)$.

Приращение выражения $\Phi'_{z_s'}\delta z$ вдоль контура будет равняться сумме всех его скачков, вызванных прерывностью z'_s

$$\Big/_{\!\Gamma}\Phi'_{z_s'}\delta z=\sum S_i\ (\Phi'_{z_s'}\delta z).$$

Окончательно для δB получаем:

$$\delta B=\int\limits_D\int\left\{F_z'-\frac{\partial}{\partial x}F_p'-\frac{\partial}{\partial y}F_q'\right\}\delta z\,dx\,dy+\int\left\{F_p'\frac{dy}{ds}-F_q'\frac{dx}{ds}+\right.$$

$$\left.+\Phi_z'-\frac{d}{ds}\Phi'_{z_s'}\right\}\delta z\,ds+\sum S_i\ (\Phi'_{z_s'}\delta z).$$

Определим теперь каким условиям должна удовлетворять функция z, дающая функционалу $B(z)$ экстремальное значение по отношению ко всем функциям рассматриваемого нами семейства.

Разделим для этого все функции семейства на 2 группы К первой из них отнесем те, которые имеют такие же контурные значения, что и искомая функция z, и ко второй — все остальные.

z должно давать экстремум относительно обеих групп. Но если z дает экстремум по отношению функций первой группы, то, так как в общем выражении вариации линейный интеграл в этом случае пропадает, ибо на контуре Γ $\delta z = 0$, должен равняться нулю двойной интеграл для всякого выбора δz внутри области, что может иметь место тогда и только тогда, когда выполнено уравнение Эйлера

$$F_z' - \frac{\partial}{\partial x} F_p' - \frac{\partial}{\partial y} F_q' = 0.$$

Наконец, для второй группы функций получается, что должен равняться нулю линейный интеграл для всяких δz на контуре; это приводит к естественным граничным условиям вида:

$$F'_p \frac{dy}{ds} - F'_q \frac{dx}{ds} + \Phi'_z - \frac{d}{ds} \Phi'_{z'} = 0,$$

и для угловых точек к условиям: $S_i(\Phi'_{z'_s}) = 0$.

3. В пространстве 3-х измерений задан объем V, ограниченный поверхностью S. Положение точки на поверхности мы будем определять некоторыми параметрами u, v, так, что когда точка с координатами u, v меняется в некоторой области, точка с координатами $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ пробегает всю поверхность S.

Пусть

$$C(U) = \iiint_V F(x, y, z, U, U_x', U_y', U_z')\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iint_S \Phi(u, v, U, U_u'\ U_v')\, ds,$$

где U_u' и U_v' суть частные производные по координатным параметрам от граничных значений функции U.

Допустимыми будем считать функции, определенные в объеме V и удовлетворяющие там известным требованиям непрерывности.

Общее выражение первой вариации функционала $C(U)$ при переходе от одной допустимой функции к некоторой другой находится, в виду того, что такой переход не изменяет области интегрирования, по обычным правилам дифференцирования под знаком интеграла:

$$\delta C = \iiint_V \left\{F'_U \delta U + F'_{U_x} \delta U'_x + F'_{U_y} \delta U'_y + F'_{U_z} \delta U'_z\right\} dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iint_S \left\{\Phi'_U \delta U + \Phi'_{U_u} \delta U'_u + \Phi'_{U_v} \delta U'_v\right\} ds.$$

По формуле Гаусса имеем:

$$\iiint\limits_V \left\{F'_{U'_x}\,\delta U'_x + F'_{U'_y}\,\delta U'_y + F'_{U'_z}\,\delta U'_z\right\} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \left\{F'_{U'_x}\cos\alpha + F'_{U'_y}\cos\beta + F'_{U'_z}\cos\gamma\right\}\delta U\,ds -$$

$$- \iiint\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial x}F'_{U'_x} + \frac{\partial}{\partial y}F'_{U'_y} + \frac{\partial}{\partial z}F'_{U'_z}\right\}\delta U\,dx\,dy\,dz.$$

Преобразуем теперь интеграл, взятый по поверхности

$$\iint\limits_S \left\{\Phi'_{U'_u}\,\delta U'_u + \Phi'_{U'_v}\,\delta U'_v\right\} ds =$$

$$= \iint\limits_S \left\{\Phi'_{U'_u}\frac{\partial}{\partial u}\delta U + \Phi'_{U'_v}\frac{\partial}{\partial v}\delta U\right\} w\,du\,dv, \quad *$$

где $w = \sqrt{EG - F^2}$ и E, F, G суть известные сокращения Гаусса.

Применив к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, предполагая, что S имеет непрерывно меняющуюся касательную плоскость, получим имея в виду замкнутость поверхности S

$$-\iint\limits_S \frac{\delta U}{w}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi'_{U'_u}w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi'_{U'_v}w\right)\right\} ds.$$

кончательно для δC имеем:

$$\delta C = \iiint\limits_V \left\{F'_U - \frac{\partial}{\partial x}F'_{U'_x} - \frac{\partial}{\partial y}F'_{U'_y} - \frac{\partial}{\partial z}F'_{U'_z}\right\}\delta u\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \iint \left\{F'_{U'_x}\cos\alpha + F'_{U'_y}\cos\beta + F'_{U'_z}\cos\gamma + \Phi'_V - \frac{1}{w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi'_{U'_u}w\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi'_{U'_v}w\right)\right]\right\}\delta U\,ds.$$

Соответствующее нашей задаче естественное граничное условие, как легко видеть, имеет форму

$$F'_{U'_x}\cos\alpha + F'_{U'_y}\cos\beta + F'_{U'_z}\cos\gamma + \Phi'_U - \frac{1}{w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\Phi'_{U'_u}w\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\Phi'_{U'_v}w\right)\right] = 0. \qquad \text{на } S.$$

Если бы поверхность S имела особые линии или точки, вдоль которых касательная плоскость неопределена, то выражение для δC содержало бы в себе слагаемые, соответствующие этим особым местам поверхности. Они появляются при интегрировании по частям интеграла * и будут иметься налицо только в том случае, когда Φ содержит U_u' и U_v'. Мы не будем выяснять форму этих дополнительных слагаемых, ибо в том примере, к которому мы будем применять полученный результат, функция Φ будет зависеть только от U.

4. Уравнение колебания струны. Мы рассмотрели в основном тексте книги вопрос о колебании струны для случая, когда известно движение ее концов. Допустим здесь, что о концах струны мы знаем лишь только, что на них действуют силы: на левый $p_0(u, t)$ и на правый $p_1(u, t)$ ортогональные к оси x-ов.

Потенциалы их соответственно будут:

$$\int p_0(u, t)\,du = P_0(u, t)$$

$$\int p_1(u, t)\,du = P_1(u, t).$$

Мы получили раньше интеграл Гамильтона для струны, движущейся под действием непрерывно распределенной внешней силы ортогональной к оси x-ов.

В рассматриваемом нами случае мы должны присоединить к нему дополнительные слагаемые, даваемые потенциалами сил, приложенных на концах. Получим:

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\int_{a}^{b}\left\{\frac{\rho}{2}u_t'^2 - \frac{\mu}{2}u_x'^2 + f(x, t)\,u\right\}dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} P_0(u, t)\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} P_1(u, t)\,dt.$$

Функция u должна быть найдена из необходимого условия экстремума написанного функционала.

К конкуренции сейчас допустимы все функции, принимающие на сторонах $t = t_0$ и $t = t_1$ прямоугольника интегрирования заданные значения. Что же касается их значения на двух других сторонах, то они, в противоположность рассмотренному случаю, могут быть какими угодно (см. рис. 6).

Два дополнительных линейных интеграла, входящие в полученный нами функционал I, суть собственно интегралы, вычисленные для кусков $x = a$ и $x = b$ контура всей области интегрирования; правда, в первом из них направление интегрирования противоположно направлению положительного обхода контура.

Как показано нами в дополнении 2, наличие в функционале такого рода дополнительных слагаемых не имеет никакого влияния на функциональное уравнение, которому должно удовлетворять функция u; для нее, как и выше, должно быть справедливым уравнение Эйлера

$$(\mu u'_x)'_x - (\rho u'_t)'_t + f(x, y) = 0.$$

Присутствие их отзовется только на граничных условиях для u. В изучаемой задаче должны быть выполнены естественные граничные условия для $x = a$ и $x = b$.

Составим их сначала для правого конца струны:

$$\frac{dt}{ds}=1, \frac{dx}{ds}=0$$

и должно быть

$$\mu u_x' - p_1(u, t) = 0 \text{ при } x = b.$$

На левом конце $\frac{dt}{ds} = -1$, ибо, как отмечалось, направление возрастания t здесь противоположно положительному направлению вдоль контура, $\frac{dx}{ds}=0$ и естественным условием для левого конца струны будет:

$$\mu u_x' + p_0(u, t) = 0 \quad \text{при } x = a.$$

5. Уравнение колебания мембраны. Под мембраной понимается тонкое материальное тело, плоское в недеформированном состоянии, потенциальная энергия каждого малого куска которого в деформированном состоянии пропорциональна изменению его площади. Пусть в свободном состоянии мембрана занимает часть D плоскости xy. Мы будем рассматривать лишь малые поперечные колебания мембраны. Ее положение в любой момент времени t определится функцией $U(x, y, t)$, измеряющей удаление каждой точки мембраны от ее плоского положения равновесия.

Пусть $dx\,dy$ — элемент мембраны в свободном состоянии. Тот же элемент в деформированном состоянии имеет площадь

$$\sqrt{1+U_x'^2+U_y'^2}\; dx\,dy$$

и увеличение его площади, если ограничиваться членами низшего измерения, будет

$$\sqrt{1+U_x'^2+U_y'^2}\; dx\,dy - dx\,dy = \frac{U_x'^2+U_y'^2}{2}\; dx\,dy.$$

Потенциальная энергия деформации всей мембраны имеет поэтому вид

$$\frac{1}{2}\iint_D \mu\,(U_x'^2+U_y'^2)\,dx\,dy,$$

где μ — коэффициент пропорциональности между потенциальной энергией и изменением площади, характеризующий физические свойства мембраны в каждый момент времени.

Решим сначала задачу о свободном равновесии мембраны с закрепленными концами.

Функция U, определяющая искомое положение, должна давать минимум интегралу потенциальной энергии относительно всех других функций U с теми же контурными значениями и должна, поэтому, удовлетворять уравнению Эйлера, принимающему здесь вид

$$(\mu U_x')_x' + (\mu U_y')_y' = 0.$$

Допустим теперь, что дело идет о равновесии мембраны под действием направленных перпендикулярно к плоскости xy сил двоякого рода: распределенных по всей площади мембраны с плотностью $f(x, y)$ и распределенных по контуру с плотностью $p(s, U)$, могущей зависеть от удаления краев мембраны от положения равновесия; к такому типу сил принадлежат, например, силы упругой связи краев мембраны с положением их равновесия.

Полная потенциальная энергия мембраны будет состоять из энергия деформации, выражение для которой мы уже получили, слагаемого вида

$$-\iint_D f(x, y)\, U\, dx\, dy$$

даваемого поверхностными силами и слагаемого, зависящего от линейно распределенных сил, вычислить которое не представляет труда.

Возьмем элемент ds контура Γ. На соответствующий элемент края мембраны действует сила $p\,ds$, потенциал которой есть

$$\int p\, dU\, ds = P(s, U)\, ds, \frac{dP}{dU} = p(U, s)$$

и потому потенциал всех линейных сил будет

$$\int_\Gamma P\, ds.$$

Искомое выражение для энергии есть

$$\iint_D \left\{ \frac{\mu}{2} (U_x'^2 + U_y'^2) - f(x, y)\, U \right\} dx\, dy - \int_\Gamma P(s, U)\, ds.$$

Функция U должна давать минимум этому выражению при любых граничных значениях. По доказанному в задаче $4b$, она должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$(\mu U_x')_x' + (\mu U_y')_y' + f(x, y) = 0$$

и естественным граничным условиям

$$\mu \left(U_x' \frac{dy}{ds} - U_y' \frac{dx}{ds} \right) - p(U, s) = 0,$$

или, так как $\frac{dy}{ds}$ и $-\frac{dx}{ds}$ есть направляющие косинусы внешней нормали к контуру Γ и

$$U_x' \frac{dy}{ds} - U_y' \frac{dx}{ds} = \frac{dU}{dn},$$

имеем

$$\mu \frac{dU}{dn} - p(s, U) = 0.$$

В частном случае, когда линейные силы есть силы упругой связи краев мембраны с положением их равновесия, $p(s, u) = -\sigma(s)U$ и предельные условия примут форму

$$\mu\frac{dU}{dn}+\sigma(s)U=0.$$

Мы будем иметь в виду теперь получить уравнения движения. Пусть ρ плотность мембраны. Ее кинетическая энергия дается интегралом

$$\frac{1}{2}\int_D\int \rho\, U_t'^2\, dx\, dy.$$

По принципу Гамильтона мы получим уравнение, решающее поставленную задачу, если напишем первое необходимое условие экстремума для интеграла действия

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_D\int\left\{\frac{\rho}{2}U_t'^2-\frac{\mu}{2}(U_x'^2+U_y'^2)+fU\right\}dx\,dy\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma} P\,ds\,dt.$$

Функция U должна быть определена в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и D по переменным x и y; геометрически говоря, если иметь в виду пространство x, y, t, в отрезке цилиндра с образующими параллельными оси t, построенного на контуре Γ между плоскостями $t=t_0$ и $t=t_1$ (см. рис. 6а).

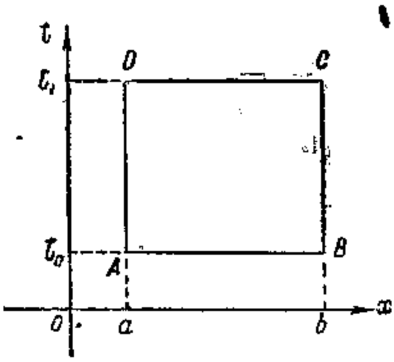

Рис. 6

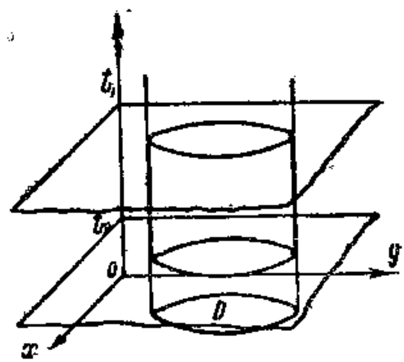

Рис. 6а

К конкуренции допустимы движения, удовлетворяющие требованиям:

Начальное и конечное положения мембраны совпадают с начальным и конечным положениями при действительном движении, что равносильно заданию функции U на основаниях упомянутого цилиндра.

Что касается боковой поверхности цилиндра, то здесь все будет зависеть от того, будут ли свободны или несвободны края мембраны.

Если движения краев мембраны известны, то функция U на боковой поверхности задана и мы имеем дело с вариационной задачей для закрепленных граничных значений. Необходимым условием для нее будет выполнение уравнения Эйлера:

$$(\rho U_t')_t' - (\mu U_x')_x' - (\mu U_y')_y' - f(x, y, t) = 0,$$

представляющего собой уравнение колебаний мембраны.

Если же концы мембраны свободны, то должно быть, кроме того, выполнено на боковой поверхности естественное граничное условие

$$\mu (U_x' \cos \alpha + U_y' \cos \beta) - p(u, s, t) = 0,$$

или

$$\mu \frac{dU}{dn} - p(u, s, t) = 0.$$

6. Обобщения на случай производной второго порядка и приложения к стержню. 1. Рассмотрим случай смешанной задачи когда под знак интеграла входят производные второго порядка.

Пусть

$$B(z) = \int\limits_D\int F(x, y, z, p, q, r, s, t)\, dx\, dy + \int\limits_\Gamma \Phi(s, z_s, z_{ss})\, ds,$$

где p, q, z_s имеют уже поясненные значения и $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $z_{ss} = \frac{d^2 z}{ds^2}$.

Будем полагать контур Γ имеющим конечное число угловых точек. Контурный интеграл, входящий в выражение $B(z)$, мы принимаем как сумму интегралов, взятых по отдельным гладким кускам контура. Мы уже имели случай убедиться выше, что наличие таких особенностей границы вызывает, вообще говоря, появление дополнительных слагаемых в общем выражении первой вариации.

То же обстоятельство будет иметь место и в изучаемом вопросе.

Допустимыми к конкуренции мы будем считать все функции z, определенные в D и принадлежащие $C^{(4)}$, так, что переход от одной из них к некоторой другой не связан с изменением областей интегрирования в функционале $B(z)$.

Выкладки, необходимые для получения общего выражения первой вариации $B(z)$, хотя и просты по существу и требуют для своего выполнения лишь интегрирований по частям и применения формулы Грина-Римана, слишком продолжительны, чтобы приводить их здесь. Мы предоставляем читателю проделать все промежуточные вычисления и ограничимся только тем, что приведем окончательный результат.

Введем следующие обозначения

$$[F]=F'_z-\frac{\partial}{\partial x}F'_p-\frac{\partial}{\partial y}F'_q+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F'_r+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F'_s+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F'_t.$$

$$M=F'_p\frac{dy}{ds}-F'_q\frac{dx}{ds}.$$

$$N_1=(F'_r-F'_t)\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{1}{2}F'_s\left[\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]$$

$$N_2=F'_r\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-F'_s\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+F'_t\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.$$

$$P=\left(\frac{d}{dx}F'_r+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}F'_s\right)\frac{dy}{ds}-\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}F'_s+\frac{\partial}{\partial y}F'_t\right)\frac{dx}{ds}.$$

Тогда

$$\delta B(z)=\int_D\int[F]\delta z\,dx\,dy=\int_\Gamma\left\{M-\frac{d}{ds}N_1+P\,\Phi'_z-\frac{d}{ds}\Phi'_{z_s}+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{ds^2}\Phi'_{z_{ss}}\right\}\delta z\,ds+\int N_2\delta\frac{dz}{dn}ds+\sum S_i(N_1+\Phi'_{z_s}-\frac{d}{ds}\Phi'_{z_{ss}})\delta z+$$

$$+\sum S_i(\Phi'_{z_{ss}}\delta z_s).$$

2. На конец $x=a$ стержня действует сила $p_0\,(U,\ t)$, ортогональная к оси x-ов и имеющая потенциал $P_0\ (U,\ t)=\int p_0(U,t)\,dU$ и наконец $x=b$ сила $p_1\,(U,t)$ с потенциалом $P_1\,(U,t)=\int p_1(U,t)\,dU$.

Как мы уже видели, кинетическая энергия стержня есть

$$\frac{1}{2}\int_a^b\rho\,U_t'^2\,dx,$$

потенциальная энергия деформации:

$$\frac{1}{2}\int_a^b\mu\,U_{xx}''^2\,\partial x$$

и потенциал поверхностных сил:

$$\int_a^b f\,U\,dx,$$

Интеграл Гамильтона в нашем случае будет:

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+V)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b\left\{\frac{\rho}{2}U_t'^2-\frac{\mu}{2}U_{xx}''^2+fU\right\}dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}P_0\,dt+\int_{t_0}^{t_1}P_1\,dt.$$

Составим первую вариацию интеграла, принимая за U функцию, соответствующую действительному движению стержня.

Как и раньше, очевидно, должно быть

$$[F]=-(\rho U_t')_t'-(\mu U_{xx}'')_{xx}''+f=0\,.$$

Далее

$$F_r'=-\mu U_{xx}''; \; F_s'=0; \; F_t'=0; \; F_p'=0; \; F_q'=\rho U_t',$$

δU равно нулю на сторонах $t=t_0$ и $t=t_1$ прямоугольника Γ интегрирования, ибо начальное и конечное положение стержня задано. На тех же сторонах $N_2=0$ и останутся лишь интегралы соответствующие сторонам $x=a$ и $x=b$ (см. рис. задачи 5). Неинтегральные слагаемые пропадают, ибо Φ не зависит ни от U_s, ни от U_{ss} и вдоль частей $x=a$ и $x=b$ контура $N_1=0$, а вдоль других двух частей $\delta U=0$.

Вдоль же частей контура $x=a$ и $x=b$:

$$M=N_1=0$$
$$N_2=-\mu U_{xx}''$$
$$P=(\mu U_{xx}'')_x'$$

δB будет состоять из двух слагаемых, соответственно для $x=a$ (положительное направление обхода по контуру здесь противоположно возрастанию t):

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big[(\mu U_{xx}'')_x'+\rho_0(U,t)\Big]\delta u\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\mu U_{xx}''\,\delta\frac{dU}{dx}\,dt$$

и для $x=b$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[(\mu U_{xx}'')_x'-p_1(U,t)\Big]\delta u\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\mu U_{xx}''\,\delta\frac{dU}{dx}\,dt\,.$$

Изучим несколько типов предельных условий.

a) Концы стержня „заделаны“, т.-е. известно, как меняются не только ординаты концов стержня, но и изменения касательной в этих концах:

$$U(a,t)=f_1(t);\; U(b,t)=f_2(t);\;\; U^{x'}(a,t)=\varphi_1(t);\; U_x'(b,t)=\varphi_2(t).$$

Решение находится тогда из уравнения движения написанных предельных условий и начальных данных. Здесь на концах

$$\delta U=\delta\frac{\partial U}{\partial x}=0.$$

b) Концы „оперты“, т.-е. известно изменение их ординат, но касательные могут быть какими угодно $\delta U=0$.

Решение ищется по граничным условиям:

$$U(a,t)=f_1(t),\; U(b,t)=f_2(t),\; \mu U_{xx}''(a,t)=0.$$

$\mu U_{xx}''(b,t)=0$ плюс начальные данные.

с) Наконец, при свободных концах стержня должно быт

$$(\mu U''_{xx})'_x + p_0(u, t) = 0, \quad x = a$$
$$(\mu U''_{xx})'_x - p_1(u, t) = 0, \quad x = b$$
$$\mu U''_{xx}(a, t) = 0 \quad \mu U''_{xx}(b, t) = 0.$$

7. Найти кратчайшее расстояние от точки до кривой (поверхности) в плоскости (в пространстве).

Ответ: Нормаль из точки на кривую (поверхность).

8. Найти расстояние между двумя линиями (поверхностями) в плоскости (в пространстве).

Ответ: Общая нормаль.

9. Найти брахистохрону для случая, когда исходная точка P_0 закреплена, а конечная точка может двигаться вдоль заданной кривой L, лежащей в вертикальной плоскости. Найти геометрическое правило построения искомой кривой для случая, когда L — вертикальная прямая.

Ответ: Циклоида, выходящая из P_0 и ортогональная к L.

10. Решить задачу о наименьшей поверхности вращения для случая, когда одна из точек может двигаться вдоль заданной кривой L и вторая — закреплена.

Ответ: Цепная линия, ортогональная к L и проходящая через закрепленную точку.

11. Показать, что условие трансверсальности для

$$F(x, y, y', z') = G(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

вырождается в условие ортогональности.

12. Среди кривых, расположенных в верхней полуплоскости ($y \geqslant 0$), проходящих через заданную точку P_1 и вторым концом P_2 лежащих на прямой $y = y_2$, найти ту, которая вместе с ординатами точек P_1 и P_2 и соответствующим отрезком оси x ограничивает площадь заданной величины и имеет наименьшую длину.

Решение: Дуга круга с центром на оси x.

13. Пользуясь принципом наименьшего действия, показать, что всякая материальная точка, двигающаяся вдоль поверхности без действия сил, описывает геодезическую линию.

14. Найти все функции $F(x, y, y')$, для которых условие трансверсальности переходит в условие ортогональности.

Решение:

$$F = G(x, y)\sqrt{1 + y'^2}.$$

15. $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (y'^2 - y^2)\,\partial x = \min$ при условии $y(0) = 0$ и второй конец движется вдоль кривой

$$y = (a - x)^{\frac{1}{3}}.$$
$$a > 0$$

Решение:

$$y = \frac{y_2 \sin x}{\sin x_2},$$

где x_2 — корень уравнения

$$3(x_2 - \alpha) - \sin 2x_2 = 0.$$

ГЛАВА IV.

Теория поля.

§ 21. Поле экстремалей.

Все семейство экстремалей, т.-е. интегральных кривых уравнения Эйлера, в случае простейшей задачи вариационного исчисления, есть семейство, зависящее от двух параметров. Рассмотрим часть этого семейства, а именно, семейство экстремалей, зависящее от одного параметра

$$y = \varphi(x, \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Пусть это семейство кривых покрывает некоторую область D плоскости; мы будем называть эту область D *полем*, если соблюдены следующие два условия:

1) область D *просто* перекрыта семейством (1), т.-е. через каждую точку области D проходит одна и только одна экстремаль семейства;

2) функция φ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка по обеим переменным x и α.

Особый интерес представляет частный вид поля, когда семейство (1) есть семейство экстремалей, проходящих через точку (x_0, y_0); за параметр в этом случае может быть взят угловой коэффициент τ экстремали в точке (x_0, y_0), т.-е. уравнение семейства будет:

$$y = \psi(x, \tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

В этом случае семейство экстремалей (2) называют семейством лагранжевых путей, а поле D — *центральным* полем; точка (x_0, y_0) находится при этом на границе поля, так как через нее проходит бесчисленное множество экстремалей.

Через каждую точку поля проходит определенная экстремаль; угловой коэффициент $u = y'$ касательной к этой экстремали называют *уклоном поля* в данной точке. Эта величина u имеет определенное значение во всех точках поля и представляет функцию переменных x и y, определенную в поле D:

$$u = u(x, y).$$

Эта функция может быть явно выражена посредством исключения параметра α, с помощью уравнения (1) из уравнения

$$u(x, y) = y' = \varphi_x(x, \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Из этого ясно, благодаря сделанным относительно функции φ предположениям, на основании общих теорем о неявных функциях, что u есть функция непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка.

Если поле задано, то тем самым определена функция u, но и наоборот, задание функции u вполне определяет семейство экстремалей, образующее поле. Действительно, все экстремали поля удовлетворяют уравнению

$$y' = u\,(x,\ y)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

и могут быть найдены поэтому (если u известна) как интегральные кривые этого дифференциального уравнения. Но функция u не может быть задана произвольно, так как кривые семейства (1) должны удовлетворять не только уравнению (4), но и уравнению Эйлера [гл. I (13)]:

$$F''_{y'y'}\,y'' + F''_{yy'}\,y' + F''_{xy'} - F_y = 0\quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Это требование накладывает определенное ограничение на $u(x,\ y)$; именно: любая удовлетворяющая уравнению (4) функция y должна удовлетворять уравнению Эйлера и потому, найдя y'' из (4):

$$y'' = \frac{d}{dx}[u\,(x,\ y)] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\,u\quad \ldots \quad (6)$$

и, подставив выражения y' и y'' из (4) и (6) в уравнение Эйлера, мы должны получить тождество, т. е.

$$F'_y\,(x,\ y,\ u) - F''_{yy'}\,(x,\ y,\ u)\,u - F''_{xy'}\,(x,\ y,\ u) -$$
$$- F''_{y'y'}\,(x,\ y,\ u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,u\right) = 0\quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Так как это равенство должно быть выполнено для всех значений x и y, то оно представляет уравнение в частных производных, которому должна удовлетворять функция u.

Мы рассмотрели сейчас семейство экстремалей, покрывающее область — поле экстремалей; введем теперь другое семейство кривых, важное для изучения вариационной задачи.

§ 22. Поле трансверсалей.

В главе III было введено условие трансверсальности; именно, мы говорили, что некоторая кривая пересекает данную экстремаль y трансверсально, если соблюдено условие:

$$[F\,(x,\ y,\ y') - y'\,F'_{y'}\,(x,\ y,\ y')]\,\delta x + F'_{y'}\,(x,\ y,\ y')\,\delta y = 0,\quad \ldots \quad (8)$$

где y' обозначает угловой коэффициент экстремали, а δx и δy — дифференциалы координат точки на данной кривой. Это уравнение устанавливает зависимость между угловым коэффициентом экстремали y' и угловым коэффициентом данной кривой $\frac{\delta y}{\delta x}$ в точке их пересечения; так, что если дано одно из этих чисел y' или $\frac{\delta y}{\delta x}$, то другое определяется по нему на основании уравнения (8).

Пусть нам дано некоторое поле D основной вариационной задачи об определении минимума интеграла

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dy \qquad (9)$$

и пусть

$$y=\varphi(x, \alpha) \qquad (1)$$

есть соответствующее этому полю семейство экстремалей, тогда кривая, пересекающая все экстремали поля трансверсально, т. е. так, что выполняется условие (13), называется *трансверсалью поля*.

Поставим теперь задачу нахождения уравнения семейства трансверсалей для данного поля. Пусть u будет уклон данного поля, а δx и δy дифференциалы переменных для искомой трансверсали, тогда условие (9) дает нам, если заменить y' на u на основании (4), уравнение:

$$[F(x, y, u)-F'_{y'}(x, y, u)\, u]\, \delta x+F'_{y'}(x, y, u)\, \delta y=0 \qquad (10)$$

Это уравнение представляет дифференциальное уравнение первого порядка, которое и определяет семейство трансверсалей.

Покажем, что левая часть его представляет полный дифференциал; в самом деле для этого нужно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[F_{y'}(x, y, u)]=\frac{\partial}{\partial y}[F(x, y, u)-u\, F_{y'}(x, y, u)],$$

но производя дифференцирование, получим

$$F''_{xy'}+F''_{y'y'}\frac{\partial u}{\partial x}=F'_y+F'_{y'}\frac{\partial u}{\partial y}-F'_{y'}\frac{\partial u}{\partial y}-u F''_{yy'}-$$
$$-F''_{y'y'}\frac{\partial u}{\partial y}\, u.$$

Это же равенство, наверное, имеет место, так как функция u, представляющая уклон поля, должна удовлетворять уравнению (7). В таком случае общий интеграл уравнения (10) имеет вид:

$$\Theta(x, y)=C, \qquad (11)$$

где Θ функция, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial x}&=F(x, y, u)-u\, F'_{y'}(x, y, u)\\ \frac{\partial\Theta}{\partial y}&=F'_{y'}(x, y, u)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Из этих условий функция Θ, если u известна, может быть выражена с помощью криволинейного интеграла и записана в виде:

$$\Theta(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}[F(x, y, u)-u F'_{y'}(x, y, u)]\, dx+$$
$$+F'_{y'}(x, y, u)\, dy \qquad (13)$$

Заметим, что, *если за кривую интегрирования взять экстремаль, то для нее* $\frac{dy}{dx} = u$ [(4)], *и интеграл* (13) *вырождается в этом случае в основной интеграл* (9), ибо:

$$-u\ F'_{y'}\ dx + F'_{y'}\ dy = 0.$$

Семейства экстремалей (1) и трансверсалей (11) образуют две системы взаимно пересекающихся линий, покрывающие поле (см. рис. 7). Вопрос о физическом значении этих линий подробнее будет освещен дальше, пока укажем только, что обычно в задачах, имеющих физический смысл, семейство экстремалей, в том или ином виде, дает линии тока поля, а семейство трансверсалей линии уровня — эквипотенциальные линии.

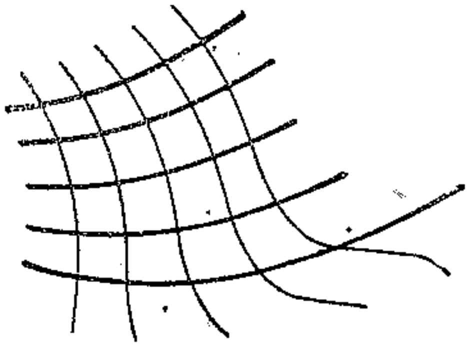

Рис. 7

Проведенная аналогия еще усиливается следующим свойством поля:

Величина основного интеграла,

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

взятого по участку экстремали, заключенному между двумя данными трансверсалями поля, одна и та же для всех экстремалей.

Найдем величину интеграла (9) по участку экстремали

$$y = \varphi(x, \alpha)$$

заключенному между двумя трансверсалями:

$$\Theta(x, y) = C_0\ ;\ \Theta(x, y) = C_1.$$

Эта величина будет функцией от α, причем от α будут зависеть, как подъинтегральная функция, так и пределы интегрирования, т.-е.

$$I(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} F\left(x, \varphi(x, \alpha), \frac{\partial\varphi(x, \alpha)}{\partial x}\right) dx.$$

Мы должны показать, что $I(\alpha)$ есть величина постоянная, т.-е.

$$\frac{d\,I(\alpha)}{d\,\alpha} = 0.$$

Для доказательства этого воспользуемся общим выражением для вариации основного интеграла, выведенным в главе III [см. стр. 64, формула (10)]

$$\delta I = [(F - y'F'_{y'})\,\delta x + F'_{y'}\,\delta y]_0^1 +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'}\right) \delta y\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Из этого выражения ясно, что в рассматриваемом нами случае $\delta I = 0$, ибо внеинтегральный член обращается в нуль, так как концы кривой интегрирования лежат на трансверсалях, так что удовлетворено условие (8); подинтегральная же функция также равна нулю, потому что кривая интегрирования есть экстремаль и удовлетворяет уравнению Эйлера.

Итак, тождественно $\delta I = 0$, откуда ясно, что $I(\alpha)$ есть величина постоянная, т.-е. одна и та же для всех рассматриваемых экстремалей.

Еще проще это можно установить пользуясь интегралом (13). Пусть $\Theta(x, y) = C_1$ и $\Theta(x, y) = C_2$ уравнения двух трансверсалей, о которых идет речь, $M_1 M_2$ некоторая экстремаль поля, начало которой точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на первой трансверсали, а конец $M_2(x_2, y_2)$ на второй. По сказанному выше, величина основного интеграла (9) по этой экстремали будет равна величине интеграла (13) по той же кривой, т.-е. равна:

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} [F(x, y, u) - u\, F'_{y'}(x, y, u)]\, dx + F'_{y'}(x, y, u)\, dy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = \Theta(x_2, y_2) - \Theta(x_1, y_1) = C_2 - C_1,$$

и, как видим, есть величина постоянная для всех экстремалей, соединяющих две данные трансверсали.

§ 23. Уравнение Гамильтона-Якоби.

Мы показали выше, что по любому семейству экстремалей может быть найдено соответствующее ему семейство трансверсалей. Обратная задача не всегда имеет решение, т.-е. не всякое семейство кривых, зависящих от одного параметра, является семейством трансверсалей для некоторого поля данной вариационной задачи, ибо задание одной только кривой этого семейства, определит все семейство трансверсалей. В самом деле, пусть дана какая-либо кривая (L), не являющаяся экстремалью. Покажем, что семейство трансверсалей, содержащее данную кривую, строится единственным образом. Для этого построим прежде всего поле экстремалей. Возьмем любую точку (x_1, y_1) на кривой (L), угловой коэффициент касательной в этой точке имеет вполне определенную величину $\frac{\delta y}{\delta x}$, по нему на основании условия трансверсальности (8) найдется угловой коэффициент y' касательной к экстремали, проходящей через точку (x_1, y_1). Зная точку (x_1, y_1) и направление экстремали в ней, мы можем определить и самую экстремаль, как решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее при $x = x_1$ начальным условиям $y = y_1$; $y' = y_1'$. Проведя только что указанное построение для всех точек кривой (L), мы найдем все семейство экстремалей. После того, как семейство экстремалей найдено, все семейство трансверсалей может быть получено в форме (II), как было указано в прошлом параграфе, после нахождения функции $\Theta(x, y)$ по формуле (13). Но кривые этого семейства можем построить и иначе: именно, возьмем любое постоянное число C и найдем на каждой экстремали такую точку, чтобы величина основного интеграла (9), взятого по этой экстремали от точки ее пересечения с кривой (L) до данной точки, равнялась C. Покажем, что геометрическое место полученных точек есть трансверсаль. В самом деле, величина интеграла I, взятого по экстремали от кривой L до полученной, постоянно равна C, а потому $\delta I = 0$, но полная вариация [см. (10)] слагается из вариации на обоих концах и интегрального члена. Последний член равен нулю, так как кривая интегрирования экстремаль, вариация на конце, лежащем на кривой (L), также равна нулю, так как по построению экстремали здесь соблюдено условие трансверсальности; далее, левая часть равенства есть нуль, из этого следует, что и вариация на другом конце нуль, и следовательно построенная кривая есть трансверсаль. Давая постоянной C различные действительные значения, мы получим все семейство трансверсалей. Итак, задание одной только кривой семейства трансверсалей определяет все семейство, а потому не для всякой функции $\Theta(x, y)$ семейство кривых

$$\Theta(x, y) = C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

представляет семейство трансверсалей.

Найдем, какому условию должна удовлетворять функция $\Theta(x, y)$, чтобы это имело место.

Уравнения (15) дают величины $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Theta}{\partial y}$ в случае, когда дан уклон поля u. Поэтому для того чтобы найти общее условие, которому удовлетворяет функция $\Theta(x, y)$, для любого поля, мы должны из уравнений (12) исключить u. Провести это исключение мы можем, хотя бы решив каждое из уравнений (12) относительно u и приравняв полученные выражения. Тогда мы получим некоторое уравнение вида

$$\Phi\left(x, y, \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Это уравнение, которое представляет результат исключения величины u из уравнений (12), носит название уравнения Гамильтона-Якоби.

Мы показали только что, что если уравнение $\Theta(x, y) = \text{const}$ дает семейство трансверсалей нашей вариационной задачи, то функция Θ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Покажем и обратное, что каково бы ни было решение уравнения (14)—функция $\Theta(x, y)$, уравнение $\Theta(x, y)=\text{const}$ представляет семейство трансверсалей для некоторого поля. Итак, пусть Θ решение уравнения (14). Из каждого из уравнений системы (12) мы можем найти функцию $u(x, y)$; при этом оба значения u будут одинаковы в силу того, что Θ удовлетворяет уравнению (14), полученному исключением u из уравнений системы (12). Для того, чтобы мы могли построить поле с уклоном $u(x, y)$, мы должны показать еще, что она удовлетворяет уравнению (7), но в последнем мы убеждаемся непосредственно, ибо дифференцируя первое из уравнений (12) по y, а второе по x и приравнивая получившиеся выражения, мы приходим как раз к уравнению (7).

Итак, функция $u(x, y)$ представляет уклон некоторого поля экстремалей, семейство же трансверсалей для этого поля, очевидно, будет семейство

$$\Theta(x, y)=\text{const}.$$

ч. т. д.

Чтобы написать уравнение (14) в более удобном виде, применим к системе (12) преобразование Гамильтона, которое уже встречалось выше (см. гл. II, доб. 1, стр. 57).

Это преобразование заключается в том, что вместо функции u мы вводим новую функцию v, полагая

$$v=F'_{y'}(x, y, u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

и вводим вспомогательную функцию Гамильтона $H(x, y, v)$, обозначая, таким образом, результат замены функции u на v в выражении

$$u F'_{y'}(x, y, u)-F(x, y, u)=H(x, y, v) \quad \ldots\ldots (16)$$

При таком преобразовании, как мы видели выше, уравнение Эйлера заменяется эквивалентной ему канонической системой

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H(x, y, v)}{\partial v}; \quad \frac{dv}{dx}=-\frac{\partial H(x, y, v)}{\partial y} \quad \ldots\ldots (17)$$

Применим теперь это же преобразование и к системе уравнений (12); она примет тогда [см. (15) и (16)] вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dx}&=-H(x, y, v)\\ \frac{d\Theta}{dy}&=v\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Для того, чтобы получить уравнение, которому удовлетворяет функция $\Theta(x, y)$, мы должны исключить v из системы уравнений (18), но теперь это исключение производится без труда, и получаем окончательно уравнение Гамильтона-Якоби в виде:

$$\frac{\partial\Theta(x, y)}{\partial x}+H\left(x, y \frac{\partial\Theta(x, y)}{\partial y}\right)=0. \quad \ldots\ldots (19)$$

Мы покажем, что задача интегрирования уравнения (19) эквивалентна задаче интегрирования уравнения Эйлера или равносильной ей задаче интегрирования системы уравнений (17). Это предложение является частным случаем общей теоремы Якоби, которая будет доказана ниже в § 28, но мы дадим здесь доказательство этой теоремы, основанное не на формальных преобразованиях, а на развитой выше теории поля.

Прежде, чем перейти к этому доказательству, мы в следующем параграфе напомним читателю основные понятия из теории интегрирования уравнений в частных производных первого порядка.

§ 24. Общий и полный интеграл уравнения в частных производных.

Для простоты мы ограничимся здесь случаем, когда в уравнение входят только две независимых переменных, ибо случай, когда число независимых переменных больше двух, не отличается от него существенно. Такое уравнение имеет вид:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

Для того, чтобы выяснить постановку задачи об интегрировании уравнения (20), рассмотрим сначала простейший случай, когда уравнение (20) есть линейное и однородное, т.-е. имеет вид

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=0, \text{ [1]} \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

где X и Y суть функции независимых переменных x и y.

Интегрирование такого уравнения, т.-е. задача нахождения общего его решения, приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y} \quad \ldots \ldots \ldots (22)$$

Действительно, если нам известен интеграл уравнения (22), т.-е. такая функция двух переменных, которая при подстановке вместо y решения уравнения (22) обращается в постоянную

$$\varphi(x, y)=c, \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

то эта функция φ представляет решение уравнения (21).

В самом деле, по (23)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy=0,$$

откуда, заменяя dx и dy на пропорциональные им величины X и Y, найдем

$$\frac{d\varphi}{dx}X+\frac{d\varphi}{dy}\,Y=0,$$

т.-е. что функция φ удовлетворяет уравнению (21). Легко видеть, что не только функция φ, но для любой F и функция

$$z=F[\varphi(x, y)] \quad \ldots \ldots \ldots (24)$$

---

[1] Подробнее об этом см. Смирнов, т. II, стр. 127 и Гурса, т. II, ч. 2, гл. XXII.

удовлетворяет уравнению (21), ибо

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial x}X+\frac{\partial F(\varphi)}{\partial y}Y=F'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}X+$$
$$+F'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}Y=F'(\varphi)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}X+\frac{\partial (\omega)}{\partial y}Y\right]=0.$$

В случае, когда число переменных больше двух, уравнение (22) заменяется соответствующей системой дифференциальных уравнений.

Нетрудно показать также, что всякое решение уравнения (21) может быть получено в форме (24) при некотором выборе функции F, но мы на этом не останавливаемся.

Отметим только то важное обстоятельство, что в решение уравнения (21), как произвольный элемент, входит функция, в то время, как в случае обыкновенного дифференциального уравнения таким элементом была постоянная. Это же обстоятельство имеет место не только в случае линейного однородного уравнения, которое мы только что рассмотрели, но и для любого уравнения вида (20).

Дадим поэтому следующее определение: решение уравнения (20), в состав которого входит произвольная функция, будем называть общим его решением или общим интегралом.

Как указал впервые Лагранж, для полного разрешения уравнения (20) нет необходимости знать его общий интеграл, а достаточно найти его решение, зависящее от двух произвольных постоянных

$$z=V(x, y, a, b) \quad \dots\dots\dots\dots (25)$$

и притом такое, что эти постоянные входят независимо, т.-е. так, что их можно исключить из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} z&=V(x, y, a, b)\\ \frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial V(x, y, a, b)}{dx}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial V(x, y, a, b)}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (26)$$

и это исключение приводит к уравнению (20).

Решение (25), зависящее от двух постоянных, называют *полным интегралом* уравнения (20).

Для того, чтобы доказать утверждение Лагранжа, мы покажем, что, зная полный интеграл (25) уравнения (20), мы можем найти и его общий интеграл.

Мы проведем здесь этот вывод, основываясь на геометрических соображениях, именно, на следующем простом замечании.

Если

$$z=\psi(x, y, c) \quad \dots\dots\dots\dots (27)$$

есть семейство решений уравнения (20), зависящее от одного параметра, то огибающая семейства поверхностей (27), т.-е. поверхность

$$z=\chi(x, y), \quad \dots\dots\dots\dots (28)$$

имеющая с каждой из поверхностей семейства (27) общую линию и вдоль нее одинаковую касательную плоскость, также есть решение уравнения (20). Но последнее утверждение совершенно очевидно, ибо каждая точка поверхности (28), есть точка соприкосновения ее с некоторой поверхностью семейства (27), а потому величины $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, в этой точке те же, что и для соприкасающейся поверхности семейства (27), и по условию удовлетворяют уравнению (20).

Напомним [1]), что огибающая семейства поверхностей (28) может быть получена исключением постоянной c из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{c} z = \psi(x, y, c) \\ \dfrac{\partial \psi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Воспользуемся теперь последним замечанием для получения общего интеграла уравнения (20). Вернемся к полному интегралу (25); мы можем получить из него бесчисленное множество различных семейств решений, зависящих от одного параметра, подставляя вместо b любую функцию $\lambda(a)$. Каждое такое семейство:

$$z = V(x, y, a, \lambda(a))$$

порождает, согласно сделанному выше замечанию, решение уравнения (20), которое по (29) получается посредством исключения постоянной a из уравнений:

$$z - V(x, y, a, \lambda(a)) = 0; \ \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\lambda'(a) = 0 \quad \ldots \quad (30)$$

Найденное решение (30) зависит от произвольной функции $\lambda(a)$, а потому представляет общий интеграл уравнения (20) [2]).

Мы видим, таким образом, что задачу решения уравнения в частных производных можно считать законченной, если найден его полный интеграл.

Заметим, наконец, что не все решения уравнения (20) могут быть получены из полного интеграла указанным выше процессом; такие исключительные решения, которые, таким образом не могут быть получены, называются особыми. Таким особым решением будет, если она существует — огибающая *всего* семейства (25), зависящего от двух параметров, т. е. поверхность, имеющая с каждой из поверхностей семейства общую точку соприкосновения.

Исследование особых решений представляет вообще большие трудности; мы не останавливаемся здесь подробнее на этом вопросе и в дальнейшем не будем принимать их во внимание.

---

[1]) Смирнов, В. т. II, стр. 371.

[2]) Аналитический вывод этого предложения имеется у Гурса, т. II, ч. 2, § 444.

§ 25. Эквивалентность задачи интегрирования уравнения Эйлера и уравнения Гамильтона-Якоби.

Мы покажем здесь, что задачи нахождения общего интеграла уравнения Эйлера и полного интеграла уравнения Якоби-Гамильтона равносильны.

а) *Получение полного интеграла уравнения Гамильтона из общего интеграла уравнения Эйлера.*

Пусть дан общий интеграл уравнения Эйлера

$$y = \varphi\ (x, \alpha, \beta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Фиксируя параметр β, мы получаем семейство экстремалей, зависящее от одного параметра α, которое, при известных ограничениях, можем считать образующим поле. Обозначим через $u\ (x, y, \beta)$ уклон этого поля — функцию, получающуюся в результате исключения α из уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi\ (x, \alpha, \beta) \\ u &= \varphi'_x\ (x, \alpha, \beta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Обозначим через $\Theta\ (x, y, \beta)$ функцию, определяющую поле трансверсалей, соответствующее данному полю экстремалей (31). Эта функция $\Theta\ (x, y, \beta)$ [см. (13)] может быть найдена с помощью квадратур и удовлетворяет, как было показано выше, уравнению Гамильтона-Якоби. В таком случае, прибавив к этому решению аддитивную постоянную γ, мы получим решение уравнения (19)

$$\theta = \Theta\ (x, y, \beta) + \gamma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

зависящее от двух параметров, которое представляет поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби [1]).

b) *Получение общего интеграла уравнения Эйлера из полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби.*

Пусть дан некоторый интеграл уравнения Гамильтона-Якоби $\Theta\ (x, y, \beta)$, зависящий от постоянной β так, что

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\, \partial \beta} \neq 0,\ ^{2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

---

[1]) Заметим, что для того, чтобы доказать вполне строго, что (33) есть полный интеграл уравнения (19), мы должны показать (см. предыдущий параграф), возможность исключения постоянной β из системы уравнений

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta\ (x, y, \beta)}{\partial x};\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta\ (x, y, \beta)}{\partial y};$$

для чего нужно показать, что $\dfrac{\partial^2 \Theta\ (x, y, \beta)}{\partial y\, \partial \beta}$ не равно нулю тождественно. Нетрудно показать, что в данном случае это условие выполнено, но мы на этом не останавливаемся.

[2]) Заметим, что это условие нужно для того, чтобы $\theta = \Theta\ (x, y, \beta) + \gamma$ было полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби (см. примечание 1).

тогда общий интеграл уравнения Эйлера может быть получен решением относительно y уравнения

$$\frac{\partial\, \Theta\,(x, y, \beta)}{\partial\, \beta}=\alpha \quad \dots\dots\dots\dots \quad (35)$$

Действительно, при каждом β функция $\Theta\,(x, y, \beta)$, удовлетворяя уравнению Гамильтона-Якоби, определяет некоторое семейство трансверсалей, а вместе с тем и поле экстремалей данной вариационной задачи.

Уклон этого поля u будет зависеть не только от переменных x и y, но и от параметра β:

$$u=u\,(x,\, y,\, \beta).$$

Функции u и Θ при всех значениях параметра β удовлетворяют системе уравнений (12), а потому и получающейся из нее посредством дифференцирования по β системе уравнений.

$$\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\, y\,\partial\,\beta}=F''_{y'y'}\,(x, y, u)\,\frac{\partial u}{\partial \beta};\quad \frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\, x\,\partial\,\beta}=-F''_{y'y'}\,(x, y, u)\,\frac{\partial u}{\partial \beta}\,u\,.\quad (36)$$

Пользуясь этим, найдем, что

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}=\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\, x\,\partial\,\beta}+\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial y\,\partial\,\beta}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(\frac{d\,y}{d\,x}-u\,(x, y, \beta)\right)F''_{y'y}\,(x, y, u)\frac{\partial\, u}{\partial\,\beta}\,.\quad (37)$$

Пусть теперь y есть функция от x, заданная уравнением (35), покажем, что она удовлетворяет уравнению Эйлера; в таком случае, так как она зависит от двух независимых параметров α и β, она и есть его общий интеграл. В том же, что она удовлетворяет уравнению Эйлера, убеждаемся без труда. Эта функция обращает в нуль, в силу уравнения (35), левую часть уравнения (37); в таком случае

$$\frac{d\,y}{d\,x}=u\,(x, y, \beta), \quad \dots\dots\dots\dots \quad (38$$

ибо, в силу условия (34) и первого из уравнений (36), величина $\frac{\partial y}{\partial\,\beta}F''_{y'y'}\;(x, y, u)$ не нуль. Но последнее уравнение (38) есть дифференциальное уравнение экстремалей данного поля (ср. 4) и раз функция y ему удовлетворяет, она есть экстремаль и удовлетворяет уравнению Эйлера, что и требовалось доказать.

§ 26. Примеры.

1. Рассмотрим прежде всего задачу о минимуме интеграла (см. гл. 1, § 7, стр. 13).

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,d\,x.$$

Уравнение Эйлера для данной задачи $y''=0$, и семейство экстремалей есть семейство прямых линий на плоскости. Условие трансверсальности (8) в данном случае

$$\left(\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta\, x+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta\, y=0\,;\;\; y'\cdot\frac{\delta\, y}{\delta\, x}=-1,$$

т. е. представляет условие ортогональности. Система (12), связывающая функции u и Θ, принимает в данном случае вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}=\sqrt{1+u^2}-\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,;\ \frac{\partial \Theta}{\partial y}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

откуда исключая u, найдем уравнение Гамильтона-Якоби данной задачи:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2=1.$$

Поле экстремалей представляет здесь любое семейство прямых, зависящее от одного параметра, покрывающее просто плоскость или какую-либо часть ее; семейством трансверсалей этого поля будет семейство ортогональных к ним кривых.

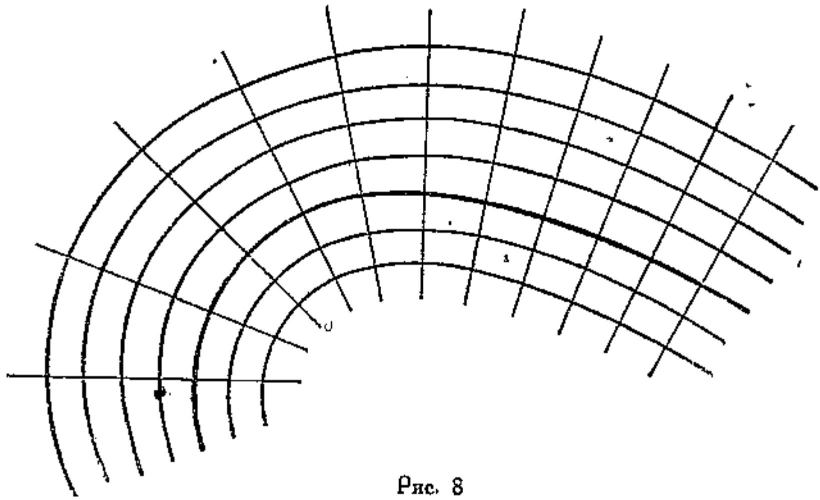

Рис. 8

При построении поля трансверсалей мы можем одну кривую этого семейства задать совершенно произвольно; в таком случае все семейство трансверсалей можем построить, следуя методу, указанному в § 23 (стр. 103). Именно, построив семейство нормалей к данной кривой, мы получим поле экстремалей, а откладывая по всем прямым равные отрезки, ибо в данном случае величина интеграла I есть просто длина кривой, мы получим все кривые семейства трансверсалей (рис. 8). Полученные кривые обладают тем свойством, что расстояние между ними (отрезок нормали) сохраняет постоянную величину.

Такое семейство кривых называют семейством параллельных кривых. Простейший пример подобного семейства есть концентрические окружности, проведенные из некоторого центра.

Заметим, наконец, что на рассматриваемую задачу можно смотреть как на задачу геометрической оптики, о распространении света в однородной среде. В таком случае экстремали поля физически представляют световые лучи, а трансверсали волновые поверхности (точнее говоря, сечение их с плоскостью XOY, поскольку мы рассматриваем сейчас плоскую задачу), т.-е. геометрическое место точек, до которых, идя от данной кривой свет дойдет в одинаковое время.

В частности, если источник света точка, то волновые поверхности суть концентрические круги с центром в этой точке.

2. Рассмотрим поле для задачи о минимуме интеграла (гл. I стр. 18)

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{y}.$$

Семейство экстремалей этой задачи есть семейство окружностей с центром на оси абсцисс:

$$(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$$

и прямых параллельных оси ординат.

Выделим из этого семейства экстремали, проходящие через данную точку $M_0\ (x_0,\ y_0)$, тогда получим центральное поле, уравнения экстремалей которого

$$(x-c)^2+y^2=y_0^2+(x_0-c)^2.$$

Найдем семейство трансверсалей для этого поля. Для нахождения его найдем функцию $\Theta\ (x,\ y)$, исходя из формулы (13), причем криволинейный интеграл (13), так как он не зависит от пути интегрирования, возьмем по экстремали, соединяющей точки $M_0\ (x_0,\ y_0)$ и $M\ (x,\ y)$. В таком случае, как мы видели, он обращается в основной интеграл, т.-е.

$$\Theta\ (x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}\frac{d\,s}{y}.$$

Для вычисления последнего интеграла, примем за переменную интегрирования угол φ, образованный радиусом, проведенным из центра экстремали в точку на экстремали, тогда формулы перехода, если R обозначает радиус, а c — абсциссу центра экстремали, будут:

$$x=c+R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,$$
$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=R\,d\varphi$$

Отсюда

$$\Theta=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\Big[\ln\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big]_{\varphi_0}^{\varphi}=\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Теперь мы можем написать уравнение самых трансверсалей, выраженное через параметр φ и φ_0

$$\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}=a;\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=a_1\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2};\ a_1=e^a>0.$$

Заметим, что приведенная форма уравнений трансверсалей является наиболее удобной, так как дает удобный геометрический прием построения кривых этого семейства. Самое поле дано на рис. 9.

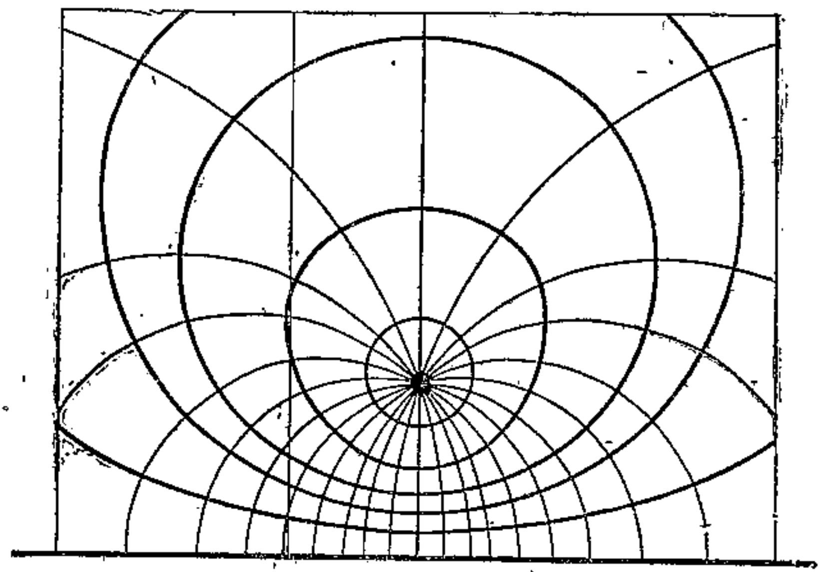

Рис. 9

3. В обоих последних примерах условие трансверсальности производилось к условию ортогональности; рассмотрим теперь пример, в котором это будет не так. Для задачи о минимуме

$$I=\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,dx,$$

экстремалями являются прямые линии, а условие трансверсальности [см. (8)] принимает вид:

$$[y'^2-2y'^2]\,\delta y+2y'\,\delta x=0;\ \frac{\delta y}{\delta x}=2y',$$

т. е. в каждой точке поля угловой коэффициент касательной к трансверсали должен быть вдвое меньше углового коэффициента экстремали.

Рассмотрим семейство прямых, проходящих через начало

$$y=m\,x_0.$$

Они образуют поле экстремалей для нашей вариационной задачи; найдем семейство трансверсалей этого поля. Пользуясь последовательно (1), (3), (12), получим:

$$y=mx;\ \ u=m=\frac{y}{x};\ \ \frac{\partial\Theta}{\partial x}=u^2-2u^2,\ \frac{\partial\Theta}{\partial y}=2u.$$

Отсюда

$$\Theta\ (x_1,\ y_1) = \int\limits_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} -u^2\,dx + 2\,u\,dy.$$

Беря за кривую интегрирования экстремаль $y = \frac{y_1}{x_1}\ x$, получим

$$u = \frac{y_1}{x_1},\ dy = \frac{y_1}{x_1}dx$$

$$\Theta\ (x_1,\ y_1) = \int\limits_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} -\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 dx + 2\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\ dx = \frac{y_1^2}{x_1^2}\ x\ \Bigg|_0^{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}.$$

Итак, $\Theta\ (x,\ y) = \frac{y^2}{x}$, откуда видно, что семейство трансверсалей

$$y^2 = cx$$

т. е. представляет семейство парабол, имеющих осью симметрии ось абсцисс и вершину в начале.

Тот факт, что в полученном поле соблюдено условие трансверсальности, очевиден и геометрически, ибо известно, что касательная к параболе имеет вдвое меньший угловой коэффициент, чем прямая, соединяющая точку касания с вершиной.

§ 27. Теория поля для трех переменных.

Рассмотрим теперь задачу о минимуме интеграла:

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\ (x,\ y,\ z,\ y',\ z')\ dx\ \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Экстремалями для этой задачи будут пространственные кривые

$$y = y\ (x);\quad z = z\ (x),$$

где функции $y\ (x)$ и $z\ (x)$ суть решения системы уравнений Эйлера:

$$F_y' - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0;\ F_z' - \frac{d}{dx}\ F'_{z'} = 0\ \ldots\ldots \quad (2)$$

Для того, чтобы распространить понятие поля на рассматриваемый случай, мы должны дать себе отчет в том, какое основное свойство поля мы желаем сохранить, проводя обобщение. Таким свойством естественно считать то, чтобы для каждого поля экстремалей существовало соответствующее ему поле трансверсалей, т. е. семейство кривых, пересекающихся трансверсально со всеми экстремалями поля. Дадим, исходя из этого, следующее определение поля:

Будем называть полем экстремалей в пространстве семейство экстремальных кривых, зависящее от двух параметров

$$y = y\ (x,\ \alpha,\ \beta);\quad z = z\ (x,\ \alpha,\ \beta)\ \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

покрывающее просто некоторую область R пространства, и такое, что существует семейство поверхностей:

$$\Phi(x, y, z) = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

пересекающихся со всеми экстремалями поля (3) *трансверсально.*

Напомним, что условие трансверсальности [гл. III, (33) стр. 70] для случая трех переменных заключается в соблюдении равенства

$$(F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'})\,\delta x + F'_{y'}\,\delta y + F'_{z'}\,\delta z = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

где δx, δy и δz обозначают дифференциалы координат x, y и z точки на поверхности. Это условие устанавливает связь между направлением касательной к кривой и нормалью к поверхности, так что если известно одно из этих направлений, другое определяется единственным образом на основании условия (5).

В случае двух переменных любое семейство экстремалей, зависящее от одного параметра, могло быть принято, вообще говоря (если только оно покрывало просто некоторую область), за поле экстремалей.

Как мы увидим дальше, в случае трех переменных, это будет не так—за поле может быть принято не всякое семейство экстремалей, зависящее от двух параметров. Для того, чтобы найти, каким, именно, условиям должно удовлетворять это семейство, произведем преобразование переменных Якоби в системе уравнений Эйлера (2) и в условии трансверсальности.

Введем вместо y' и z' новые переменные v и w, полагая

$$\left.\begin{aligned} v &= F'_{y'}(x, y, z, y', z') \\ w &= F'_{z'}(x, y, z, y', z') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

и введем вспомогательную функцию

$$H(x, y, z, v, w) = y' v + z' w - F, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

где y' и z' должны быть заменены на v и w с помощью уравнений (6). При этой замене система уравнений Эйлера (2) заменится на канонического вида систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial v}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial H}{\partial w} \\ \frac{dv}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Условие трансверсальности (5) на основании формул (6) и (7) примет вид

$$-H(x, y, z, v, w)\,\delta x + v\delta y + w\delta z = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Рассмотрим теперь семейство экстремалей, зависящее от двух параметров (3)—такое, что через каждую точку некоторой области R пространства проходит одна—и только одна—кривая семейства. В таком случае в каждой точке этой области величины y' и z', а потому на основании формул (6) и величины v и w, имеют определенное значение. Итак, каждому семейству экстремалей (3) соответствуют две функции трех переменных

$$v(x, y, z) \text{ и } w(x, y, z),$$

которые определяют уклон поля в каждой его точке. В свою очередь задание этих функций вполне определяет семейство экстремалей (3), которое может быть найдено посредством интегрирования системы, составленной из двух верхних уравнений системы (8). Но при этом функции v и w не могут быть взяты произвольно, а должны удовлетворять некоторым условиям, подобно тому, как для случая двух переменных уклон поля u должен был удовлетворять уравнению (7) (§ 21).

Именно, функции

$$v(x, y, z) \quad \text{и} \quad w(v, y, z)$$

должны быть таковы, чтобы четыре функции переменной x:

$$y(x), \ z(x),$$
$$v[x, y(x), z(x)] \text{ и } w[x, y(x), z(x)]$$

удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (8). Заменяя в последних двух уравнениях этой системы полные производные

$$\frac{dv}{dx} \text{ и } \frac{dw}{dx}$$

их выражениями найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dx}&=-\frac{\partial H}{\partial y};\\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}&=-\frac{\partial H}{\partial z}.\end{aligned}\right\}$$

Воспользовавшись теперь первыми уравнениями системы (8), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, которым должны удовлетворять функции $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}&=-\frac{\partial H}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial w}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}&=-\frac{\partial H}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Возьмем какую-либо пару функций v и w, удовлетворяющих системе (10); эта пара функций определяет некоторое семейство экстремалей (3), для нахождения семейства трансверсалей, соответствующего этому семейству экстремалей, мы получим из (9) уравнение вида

$$M\,dx+N\,dy+P\,dz=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

где M, N и P будут некоторыми функциями переменных x, y и z.

Для того, чтобы уравнение такого вида имело решением некоторое семейство поверхностей

$$\Phi(x, y, z)=C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

необходимо, чтобы выполнялось условие

$$M\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)+N\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+$$
$$+P\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=0 \quad \dots\dots\dots\dots (13)$$

В самом деле [1]), в таком случае правая часть уравнения (11) по умножении на некоторый множитель

$$\lambda(x, y, z),$$

должна обратиться в полный дифференциал, ибо, именно, такого вида уравнение мы получили бы, исключив постоянную C дифференцированием из (12).

Итак, должно найтись такое λ, чтобы

$$\frac{\partial M\lambda}{\partial y}=\frac{\partial N\lambda}{\partial x};\ \frac{\partial M\lambda}{\partial z}=\frac{\partial P\lambda}{\partial x};\ \frac{\partial N\lambda}{\partial z}=\frac{\partial P\lambda}{\partial y}.$$

Откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{1}{\lambda}\left(N\frac{\partial\lambda}{\partial z}-P\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\lambda}\left(P\frac{\partial\lambda}{\partial x}-M\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{\lambda}\left(M\frac{\partial\lambda}{\partial y}-N\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right).$$

Умножая последние полученные равенства соответственно на M, N и P и складывая их, получим (13).

Применив полученное условие (13) к уравнению (9), придем к следующему условию для функций v и w

$$-H\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+v\left(-\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+$$
$$+w\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

Два последние слагаемые левой части равны нулю сами собой в силу того, что функции y, z, v и w удовлетворяют системе уравнений (8), а потому искомое условие, которому должны удовлетворять функции v и w, принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \dots\dots\dots\dots (15)$$

Полученное условие (15) является необходимым для того, чтобы для семейства экстремалей (3) существовало соответствующее ему семейство трансверсальных поверхностей, т. е., чтобы по данному определению это семейство давало поле.

Это условие (15), вместе с условиями (10), является в свою очередь и достаточным. В самом деле, если эти условия выполня-

---

[1]) Смирнов, т. II, стр. 292.

ются, то левая часть уравнения (9) представляет полный дифференциал, а потому, интегрируя, найдем, что решение его может быть записано в виде:

$$\Theta\ (x,\ y,\ z) = C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Последнее уравнение и дает семейство трансверсалей поля, причем функция Θ найдена здесь из условий

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta}{\partial x} = -H(x,\ y,\ z,\ v,\ w) \\ &\frac{\partial\Theta}{\partial y} = v \\ &\frac{\partial\Theta}{\partial z} = w \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Исключая из уравнений (17) v и w, мы найдем уравнение Гамильтона-Якоби, которому должна удовлетворять функция $\Theta\ (x,\ y,\ z)$:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} + H\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial\Theta}{\partial y},\ \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = 0 \ \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Решения этого уравнения дают все семейства трансверсальных поверхностей вида (16), отвечающие данной вариационной задаче.

Задача решения этого уравнения равносильна задаче решения системы уравнений Эйлера или эквивалентной ей системы уравнений (8). Доказательство этого утверждения составляет содержание теоремы Якоби, которой посвящен следующий параграф.

Заметим, наконец, что основная теорема теории поля о том, что величина основного интеграла, взятого по экстремали поля между двумя данными трансверсалями, не зависит от выбора экстремали, переносится без изменений на случай трех переменных. Эта теорема, как и в случае двух переменных, дает возможность полного восстановления поля, если дана одна его трансверсаль. Действительно, пусть дана какая-либо поверхность (не составленная из экстремалей), тогда направление нормали к этой поверхности, на основании условия трансверсальности (5), определит вполне направление касательной к экстремали, проходящей через эту точку, т. е. величины y' и z' для нее. Взяв далее решение системы уравнений Эйлера (2), удовлетворяющее полученным только что условиям, мы получим самую экстремаль, а проделав такое же построение для всех точек данной поверхности, мы построим все поле экстремалей. После того, как поле экстремалей найдено, мы можем получить трансверсальные поверхности этого поля, откладывая на экстремалях от данной поверхности такие отрезки, чтобы величина основного интеграла, взятого по ним, была одинаковой, и беря затем геометрическое место концов этих отрезков.

Задача геометрической оптики в трехмерной среде. В качестве примера приложения результатов этого параграфа рассмотрим вопрос о распространении света в изотропной неоднородной среде.

Если $C(x, y, z)$ скорость света в данном месте

$$n(x, y, z) = \frac{1}{C(x, y, z)}$$

величина обратная ей, то указанный вопрос можно трактовать как вариационную задачу и минимуме интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{C} = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

ибо, именно, этим интегралом (ср. гл. I, стр. 17) выражается время, нужное для прохождения света между двумя точками вдоль по данной кривой.

Экстремалями для этой задачи будут решения системы уравнений Эйлера, которая имеет вид:

$$\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, n_y'(x, y, z) - \frac{d}{dx}\left[n(x, y, z)\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right] = 0.$$

$$\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, n_z'(x, y, z) - \frac{d}{dx}\left[n(x, y, z)\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right] = 0.$$

Условие трансверсальности (5), в данном случае:

$$\left(n\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - n\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - n\frac{z'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right)\delta x +$$

$$+ n\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\,\delta y + n\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\,\delta z = 0.$$

или после упрощений:

$$\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z = 0.$$

Отсюда ясно, что условие трансверсальности есть условие нормальности экстремали к трансверсальной поверхности, так как, заменяя δx, δy и δz на $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, видим, что коэффициенты уравнения касательной плоскости к трансверсальной поверхности равны направляющим косинусам касательной к экстремали. Найдем теперь уравнение Гамильтона-Якоби, которому удовлетворяет функция $\Theta(x, y, z)$, определяющая семейство трансверсалей. По (6) и (7)

$$v = \frac{ny'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}; \quad w = \frac{nz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}; \quad H(x, y, z, v, w) =$$

$$= \frac{y'^2 \cdot n}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \frac{z'^2 \cdot n}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - n\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

или после упрощений:

$$H(x, y, z, v, w) = -\frac{n}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = -\sqrt{n^2 - v^2 - w^2}.$$

Отсюда уравнение Гамильтона-Якоби (см. 18):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\sqrt{n^2-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2}=0$$

или

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2=n^2(x,\ y,\ z).$$

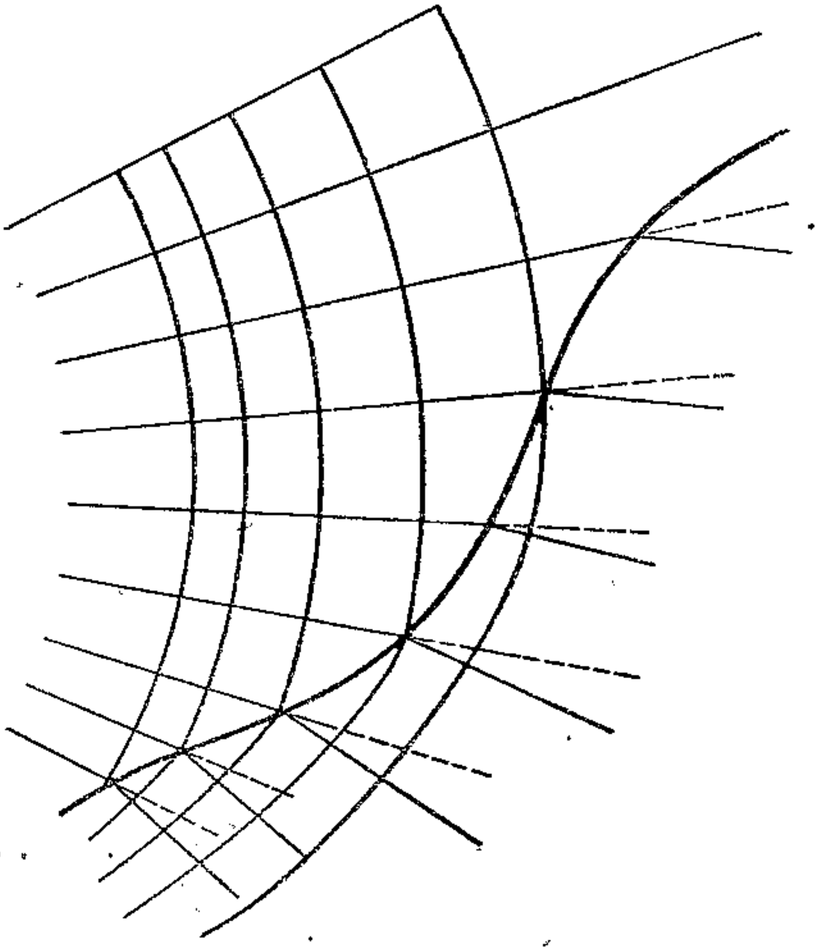

Рис. 10

Построение семейств трансверсалей может быть на основании сделанных выше замечаний проведено и геометрически, именно, двумя следующими способами. Если мы исходим от точки, то нужно взять пучек экстремалей, проходящих через данную точку, и на каждой отложить такой отрезок, чтобы величина основного интеграла имела постоянную величину, и взять геометрическое место концов полученных отрезков; найденные поверхности и есть трансверсали — квазисферы данной среды, искривленные благодаря ее неоднородности. Если исходной является поверхность, то нужно построить семейство экстремалей, нормальных к этой поверхности, и отложить на них отрезки, отвечающие равным значениям величины основного интеграла. Полученные поверхности и представляют семейство трансверсальных поверхностей, ортогональных к семейству экстремалей. При построении в обоих случаях роль функции Θ играла величина основного интеграла, взятого по экстремали, т.-е. кратчайшее время, нужное для прохождения света от начальной точки (во втором случае от поверхности) до данной точки [1]).

Пример построения трансверсалей в случае преломления света при переходе из одной среды в другую приведен на рис. 10.

§ 28. Теорема Якоби.

Теорема Якоби устанавливает связь между задачей интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрирования одного уравнения в частных производных со многими независимыми переменными. Теорема предполагает при этом систему обыкновенных уравнений, написанную в каноническом виде, и показывает, что задача нахождения всех общих интегралов этой системы $2n$ уравнений равносильна задаче интегрирования, т.-е. задаче отыскания полного интеграла одного уравнения в частных производных с $(n+1)$ независимыми переменными, которыми служат независимое переменное и первые n неизвестных функций системы.

Такая постановка вопроса исторически была вызвана задачами динамики, о чем подробнее мы скажем ниже. Эта теорема была установлена нами для простейшего случая $n=1$ на основании теории поля; сейчас мы изложим вкратце прямое формальное ее доказательство для случая любого n. Более подробное ее изложение можно найти во многих курсах теории уравнений в частных производных и динамики.

Теорема. *Задача интегрирования канонической системы дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q};\quad \frac{dq_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i};\quad i=1,\ 2\ \ldots\ldots \quad (1)$$

где H функция переменных x_i, t и q_i:

$$H=H(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_n)\quad \ldots\ldots (2)$$

---

[1]) Более глубокое и полное исследование вариационного поля этой задачи было проведено С. Л. Соболевым в его работе: „Волновое уравнение для неоднородной среды“ (Труды Сейсмологического Института, № 6, 1930) и было применено им для интегрирования волнового уравнения

$$\Delta^2 u=\frac{1}{C^2}\,\frac{du}{dt}$$

в случае неоднородной среды, т.-е. для переменного C.

эквивалентна задаче интегрирования одного уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}+H\left(x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_n,\, t,\, \frac{\partial\Theta}{\partial x},\, \ldots\, \frac{\partial\Theta}{\partial x_n}\right)=0\,, \quad \ldots \quad (3)$$

т. е. задаче нахождения его полного интеграла.

Доказательство I. Покажем сначала, что имея полный интеграл уравнения (3), мы можем найти все интегралы системы (1). Пусть дан полный интеграл (3); так как в уравнение входит $(n+1)$ независимая переменная, то этот полный интеграл должен содержать $(n+1)$ независимую постоянную, но за одну из этих постоянных можно взять аддитивную, так как в уравнение (2) не входит сама неизвестная функция.

Итак, этот полный интеграл должен иметь вид:

$$\Theta\ (x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_n\,,\, t,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\, a_n)+\text{const}\ \ldots \quad (4)$$

Покажем, что система полных интегралов системы (1) дается равенствами:

$$\frac{\partial\Theta\,(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n,\, t,\, a_1,\, a_2,\, \cdots\, a_n)}{\partial a_i}=b_i;\ i=1,\, 2\, \ldots,\, n \quad (5)$$

$$q_1=\frac{\partial\Theta}{\partial x_1};\ \ q_2=\frac{\partial\Theta}{\partial x_2}\ \ldots;\ q_n=\frac{\partial\Theta}{\partial x_n};\ \ldots\ldots \quad (6)$$

в том смысле, что эта система интегралов получается в результате решения уравнений (5) и (6) относительно неизвестных функций

$$x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\ \ x_n\,,\, q_1\,,\, q_2\,,\, \ldots\, q_n.$$

Для того, чтобы доказать, что последняя система $2n$ функций есть система общих интегралов уравнений (1), достаточно проверить, что эти функции удовлетворяют системе (1), ибо они зависят от $2n$ независимых параметров

$$a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_n;\ \ b_1\,,\, b_2\,,\, \ldots\,,\, b_n\,.$$

Пусть функции

$$x_1,\, \ldots\,,\, x_n,\ \ q_1,\, \ldots\,,\, q_n$$

есть решения уравнений (5) и (6). Рассматривая

$$x_1,\, \ldots\,,\, x_n,$$

как неявные функции t заданные уравнениями (5), и дифференцируя эти равенства по t, найдем:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i\partial t}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i dx_n}\,\frac{dx_n}{dt}=0.\ i=1,\, 2,\, \ldots,\, n \quad (7)$$

Эти линейные уравнения определяют величины производных

$$\frac{dx_1}{dt},\, \ldots\,,\, \frac{dx_n}{dt}$$

и нужно проверить, что эти величины удовлетворяют системе n первых уравнений (1)

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\ i=1,2,\ldots,n.$$

Для этого, однако, в виду единственности решения системы (7), достаточно убедиться в обратном, что правые части последних равенств удовлетворяют системе (7), т.-е., что

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i dt}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}+\ldots+\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i dx_n}\frac{\partial H}{\partial q_n}=0.\ i=1,2,\ldots,n \quad (8)$$

если в этом равенстве заменить

$$x_1,\ldots,x_n;\quad q_1,\ldots,q_n$$

на функции, определенные равенствами (5) и (6). Но мы покажем, что равенства (8) выполняются тождественно для

$$q_1,q_2,\ldots,q_n,$$

не связанных никакими равенствами.

Действительно, подставив полный интеграл (4) в уравнение (3) и продифференцировав полученное тожество по параметрам

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,$$

найдем, что для любых

$$q_1,q_2,\ldots,q_n:$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial H}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_i\partial x_n}=0.\ i=1,2,\ldots,n \quad (9)$$

Итак, первые n из уравнений системы (1) удовлетворены; мы должны теперь показать, что функции

$$q_1,q_2,\ldots,q_n$$

удовлетворяют последним n равенствам этой системы:

$$\frac{dq_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i};\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Но, действительно, рассматривая q_i', как функцию

$$x_1,x_2,\ldots,x_n$$

заданную i-ым равенством (6), найдем:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial t}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i z_n}\cdot\frac{dx_n}{dt};\quad i=1,2,\ldots,n$$

или заменяя по доказанному выше

$$\frac{dx_i}{di}\ \text{на}\ \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

видим, что для доказательства вторых n равенств системы (1), мы должны показать, что

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial t}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_1}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_1 \partial x_n}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_n}=-\frac{\partial H}{\partial x_i};\quad i=1,\,2,\,\ldots\ldots,\,n\quad .\,(10)$$

Но это тождество мы получаем сразу, продифференцировав по x_i тождество, получаемое в результате подстановки полного интеграла (4) в уравнение (3), ибо, производя указанные действия, находим:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}+\frac{\partial H}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_1 \partial x_i}+\frac{\partial H}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_2 \partial x_i}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{\partial H}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_i}=0.$$

Итак, тождество (10), а вместе с ним и то, что функции

$$x_1,\,\ldots\ldots,\,x_n \quad \text{и} \quad q_1,\,\ldots\ldots,\,q_n,$$

заданные системой уравнений (5) и (6), удовлетворяют системе (1), установлено. Наметим теперь доказательство второй части теоремы Якоби.

Доказательство II. Если известна полная система интегралов уравнений (1), то по ним может быть составлен полный интеграл уравнения (3).

Пусть данные интегралы системы (1), зависящие от $2n$ постоянных, будут:

$$\left.\begin{aligned} x_i&=\varphi_i(t,\,a_1,\,a_2,\,\ldots\ldots,\,a_n,\,b_1,\,b_2,\,\ldots\ldots,\,b_n)\\ q_i&=\psi_i(t,\,a_1,\,a_2,\,\ldots\ldots,\,a_n,\,b_1,\,b_2,\,\ldots\ldots,\,b_n)\end{aligned}\right\}\quad .\,.\,(11)$$

Тогда полный интеграл уравнения (3) может быть составлен по следующему правилу:

$$\Theta=a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots\ldots+a_n b_n+\int_{t_0}^{t} U\,dt-C,\quad .\,.\,.\quad (12)$$

где U — обозначает функцию от t, получающуюся из выражения

$$U=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial H}{\partial q_i}q_i-H\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (13)$$

после замены x_i и q_i по формулам (11) на t, a_i и b_i. Далее в выражении Θ постоянные $b_1,\,b_2,\,\ldots\ldots,\,b_n$ предполагаются замененными на x_i и a_i с помощью первых n формул (11).

Для доказательства того, что функция Θ есть полный интеграл уравнения (3), достаточно установить, что она удовлетворяет этому уравнению, ибо содержа $(n+1)$ независимую постоянную $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n$; C она будет тем самым полным интегралом. Последняя проверка, на которой мы не останавливаемся, проводится без особого труда.

Применение к уравнениям динамики. Рассмотрим движение системы материальных точек, подчиненной некоторым связям под действием сил, имеющих потенциал.

В таком случае, как мы видели в гл. III, если за неизвестные функции взяты обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то они должны быть такими функциями времени t, чтобы интеграл Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

где T — живая сила системы, а U — потенциал внешних сил, имел бы наименьшее значение. Отсюда для этих функций

$$q_1, q_2, \ldots \ldots, q_n,$$

была найдена система уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2 \ldots, n) \ldots \quad (15)$$

Вместо написанной системы n уравнений второго порядка можем составить систему $2n$ уравнений первого порядка, введя новые неизвестные функции

$$q_1', q_2', \ldots \ldots, q_n'$$

и добавив соответственные уравнения, именно, получим систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} = 0. \quad \frac{dq_i}{dt} = q_i' \quad (i=1, 2 \ldots, n) \ldots \quad (16)$$

Чтобы применить к последней системе теорему Якоби, приведем ее к каноническому виду. Следуя общему методу, указанному в добавлении к главе II, мы должны вместо

$$q_1', q_2', \ldots \ldots, q_n',$$

ввести новые неизвестные функции

$$p_1, p_2, \ldots \ldots, p_n,$$

по формулам

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'} = p_i,$$

или, так как U не зависит от q_i':

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Мы должны далее составить функцию H (см. гл. II, стр. 58), представляющую результат замены

$$q_1', \ldots \ldots, q_n' \text{ на } p_1, \ldots \ldots, p_n$$

в выражении

$$q_1' p_1 + q_2' p_2 + \ldots \ldots + q_n' p_n - (T+U) =$$
$$= H(q_1, q_2, \ldots \ldots, q_n, t, p_1, p_2, \ldots \ldots, p_n) \quad \ldots (18)$$

При такой замене, как мы видели, система уравнений (16) должна замениться на каноническую систему:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (19)$$

Остановимся на одном важном частном предположении, при котором функция H принимает особенно простой вид: именно, когда в выражении декартовых координат точек системы

$$x_j,\ y_j,\ z_j$$

через обобщенные координаты

$$q_1,\ q_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .,\ q_n$$

не входит явно время t. Это упрощение основано на том, что в указанном случае T есть однородная функция второй степени от

$$q_1',\ .\ .\ .\ .\ .,\ q'_n.$$

Чтобы проверить последнее, составим

$$x_i'=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2'+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{\partial x_i}{\partial q_n}q_n';$$

и аналогичным образом y_i' и z_i' и подставим эти величины в выражениях живой силы

$$T=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{n}(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2).$$

Тогда ясно, что T обратится в однородную функцию второй степени от переменных $q_1',\ .\ .\ .\ .\ ,\ q_n'$.

Применив к функции T теорему Эйлера об однородных функциях, найдем, что

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'}q_1'+\frac{\partial T}{\partial q_2'}q_2'+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{\partial T}{\partial q_2'}q_n'=2T,$$

или пользуясь (17)

$$p_1q_1'+p_2q_2'+\ .\ .\ .\ .\ +p_nq_n'=2T\ .\ .\ .\ .\ .\ (20$$

Откуда по (18), видим, что в данном случае функция H принимает следующий простой вид:

$$H=2T-(T+U)=T-U\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (21)$$

т.-е. представляет разность между живой силой системы, выраженной через обобщенные координаты

$$q_1,\ q_2,\ .\ .\ .\ ,\ q_n$$

и новые переменные

$$p_1,\ p_2,\ .\ .\ .\ ,\ p_n,$$

и потенциалом внешних сил системы.

Применим теперь теорему Якоби к системе уравнений (19). Эта теорема показывает, что для решения системы (19), т. е. для нахождения общих интегралов движения нашей системы материальных точек, достаточно найти полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}-H\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ t,\ \frac{\partial\Theta}{\partial q_1},\ \frac{\partial\Theta}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial\Theta}{\partial q_n}\right)=0, \quad (22)$$

где в выражении (18) функции H аргументы $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ заменены на частные производные неизвестной функции Θ.

Отметим, один важный случай, когда уравнение (22) может быть заменено более простым. Именно, предположим, что в выражения декартовых координат через обобщенные, а также в выражение потенциала внешних сил не входит явно время t. В таком случае функция H дается формулой (21) и не зависит от t, и уравнение (22) принимает вид:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}-H\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ \frac{\partial\Theta}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\Theta}{\partial q_n}\right)=0 \quad (23)$$

В таком случае мы можем полный интеграл его искать в виде

$$\Theta(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)=ht+w(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n) \quad (24)$$

где h—постоянная, а w—функция только от $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$.

Подставляя выражение (24) вместо Θ в уравнение (23), найдем для w уравнение

$$h+H\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ \frac{\partial w}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial w}{\partial q_n}\right)=0, \quad (25)$$

содержащее на одну переменную меньше, чем уравнение (23).

Можно показать, что если в выражении (24) заменить w на полный интеграл уравнения (25), то мы получим полный интеграл уравнения (23).

Таким образом, при указанных предположениях окончательное решение задачи динамики системы приводится к нахождению полного интеграла уравнения (25).

ГЛАВА V.

Некоторые дополнительные вопросы: достаточные условия, разрывные решения, условие Якоби.

§ 29. Достаточные условия существования экстремума.

В предыдущих главах при рассмотрении различных вариационных задач, мы находили дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция, если она дает экстремальное значение рассматриваемому интегралу. Это уравнение вместе с начальными условиями (прохождение кривой через данные точки, условие трансверсальности в случае подвижных концов и т. д.), определяло, вообще говоря, некоторую кривую. До сих пор мы ограничивались ее нахождением, но совершенно не ставили вопроса о том, дает ли в действительности полученная кривая экстремальное значение данному интегралу, и какое, именно: максимум или минимум.

Таким образом, в первых главах мы рассматривали только необходимые условия, которым должна удовлетворять кривая, здесь мы дадим некоторые достаточные условия для того, чтобы полученная кривая давала интегралу задачи экстремальное значение и критерии для суждения о характере полученного extrema.

Эти условия были найдены Вейерштрассом и Гильбертом в конце прошлого века.

Вопрос о достаточных условиях мы разберем здесь только для случая простейшей задачи с неподвижными концами.

В дальнейших рассмотрениях будем предполагать, что для значений x, y, y' соответствующих изучаемой экстремали:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} \neq 0.$$

В главе I при подходе к основной задаче о минимуме интеграла:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

было дано следующее определение: кривая $y = f(x)$ дает минимум интегралу (1), если величина интеграла, взятого по ней, меньше величины интеграла, взятого по соседней кривой, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx > 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

где $\omega(x)$ любая функция класса $C^{(1)}$, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{array}{l} \omega(x_0) = \omega(x_1) = 0; \\ |\omega(x)| < \varepsilon; \\ \omega(x) \not\equiv 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Трудность установления того, что данная кривая дает экстремум интегралу (1), при непосредственном пользовании приведенным определением, заключается в необходимости сравнения значений интеграла (1), взятого по двум различным кривым — данной и соседней.

Этой трудности можно избежать с помощью рассмотрения поля, соответствующего данной вариационной задаче.

Мы будем предполагать таким образом, что рассматриваемая экстремаль $y = f(x)$ может быть окружена полем обыкновенным или центральным. Будем предполагать, именно (см. гл. IV, § 21), что существует семейство экстремалей $y = \varphi(x, a)$, в число которых входит рассматриваемая экстремаль, т.-е. $\varphi(x, a_0) = f(x)$, которое при изменении параметра a в пределах $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$ покрывает между прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$ некоторую замкнутую область S так, что при этом соблюдены следующие условия.

1) В случае обыкновенного поля:

a) при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ все точки области R_ε, т.-е. открытой области заключенной между кривыми $y = f(x) - \varepsilon$, $y = f(x) + \varepsilon$ и прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$, будут внутренними точками области S;

b) через каждую точку области S проходит одна и только одна экстремаль семейства.

2) В случае центрального поля:

a) каждая точка рассматриваемой экстремали $y = f(x)$ за исключением ее концов A и B есть внутренняя точка области S;

b) через каждую точку области S за исключением точки A проходит одна — и только одна — экстремаль семейства. Все экстремали семейства проходят через точку A.

Уклон поля $u = u(x, y)$ представляет функцию определенную и непрерывную во всей области S в случае обыкновенного поля и в области S за исключением точки A в случае центрального поля.

В точке A в случае центрального поля функция u не имеет определенного значения, но существует предел этой функции, если приближаться к точке A по определенному направлению, и предел этот равен, именно, угловому коэффициенту данного направления.

Воспользуемся теперь одним интегралом, который был введен нами в гл. IV. Там было показано именно, что, в случае обыкновенного поля, криволинейный интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} [F(x, y, u) - u\, F'_{y'}(x, y, u)]\, dx + F'_{y'}(x, y, u)\, dy \quad . \quad . \; (4)$$

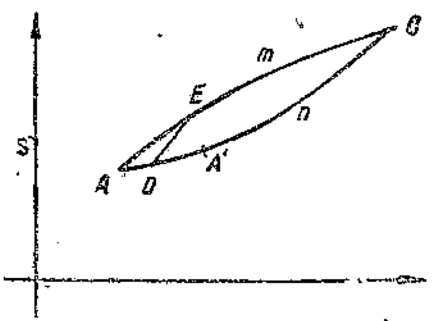

Рис. 11

не зависит от пути интегрирования, и что, если кривая интегрирования есть экстремаль поля, то интеграл (4) приводится к основному интегралу (1). Эти же свойства интеграла (4) верны не только в случае обыкновенного, но и в случае центрального поля. Мы должны проверить эти свойства только для того случая, когда кривая интегрирования проходит через точку A, так как если она не проходит через точку A, ее можно рассматривать как расположенную в обыкновенном поле. Итак, пусть кривая интегрирования есть некоторая кривая $A_n C$; в таком случае под значением интеграла (4) будем понимать предел величины интеграла (4) по участку $A'C$, когда точка A' стремится к A. То, что при таком определении интеграл (4) обладает двумя указанными выше свойствами сразу следует из этого определения. Например, чтобы проверить первое свойство, предположим, что есть два пути, соединяющие A и C; AmC и AnC (рис. 11); проведем прямую DE не параллельную оси OY, в таком случае интеграл по замкнутому пути $CDEC$, который лежит внутри поля будет равен нулю. Пусть теперь точки D и E стремятся к точке A; тогда этот интеграл будет стремиться к интегралу по пути $AmCnA$, который также должен быть равен нулю, а потому интеграл (4) не должен зависеть от пути. Что касается второго свойства, то если AC есть экстремаль, то величины интегралов (1) и (4) по любому участку ее $A'C$ совпадают, а потому при $A' \to A$ получим, что интегралы (1) и (4) по самой кривой AC совпадают.

Эти свойства интеграла (4) позволяют заменить в выражении для ΔI (2) величину основного интеграла (1), взятого по исследуемой кривой на равную ей величину интеграла (4), который, так как он не зависит от пути интегрирования, можно считать взятым и по соседней кривой. В таком случае левая часть неравенства (2) приводится, если еще заменить в (4) dy на $y'dx$ к виду:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} [F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u) F'_{y'}(x, y, u)]\, dx, \quad . \; . \; (5)$$

причем интеграл (5) взят по соседней кривой, т. е. по кривой $y = f(x) + \omega(x)$.

Подъинтегральную функцию интеграла (5) называют функцией Вейерштрасса и обозначают:

$$E(x, y, y', u) = F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u) F'_{y'}(x, y, u)\,. \quad (6)$$

При таком обозначении правая часть неравенства (2) напишется так:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} E\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Итак, вопрос о том, дает ли исследуемая кривая экстремум, сводится к рассмотрению интеграла (7).

Именно, для того, чтобы интеграл (1) давал минимум, необходимо и достаточно, чтобы интеграл (7) был больше нуля для всякой соседней кривой, не совпадающей с исследуемой. Функция E, стоящая под знаком интеграла (7), есть функция величин x, y — координат точки кривой, y' — уклона кривой (углового коэффициента касательной) и $u = u(x, y)$ — уклона экстремали поля, проходящей через эту же точку (x, y).

Заметим еще, что функция E обращается в нуль на каждой экстремали поля, как это ясно из формулы (6), ибо в этом случае $y' = u(x, y)$.

Применим прежде всего формулу (7) к выводу необходимого условия того, чтобы экстремаль давала минимум интегралу (1); именно, покажем, что:

Для того, чтобы экстремаль $y=f(x)$, которая может быть окружена центральным полем, давала минимум интегралу (1), *необходимо, чтобы было*

$$E\,[x,\, f(x),\, y',\, u\,(x,\, f(x))] \geqslant 0 \;\; \ldots\ldots \tag{8}$$

для всех значений y' и для всех x в промежутке $(x_0,\, x_1)$ [1].

Это условие носит название условия Вейерштрасса. Доказательство его поведем от противного.

Предположим, что в некоторой точке $M\,(\bar{x},\, \bar{y})$ на исследуемой кривой для некоторого значения переменного $y' : y' = \bar{y}'$ функция E отрицательна:

$$E\,[\bar{x},\, \bar{y},\, \bar{y}',\, u\,(\bar{x},\, \bar{y})] < 0 \;\; \ldots\ldots \tag{9}$$

Проведем через точку M прямую с уклоном $\bar{y}'$:

$$y - \bar{y} = \bar{y}'\,(x - \bar{x})$$

и выберем h настолько малым, чтобы участок этой прямой при x, изменяющемся в промежутке $(\bar{x} - h,\, \bar{x})$ лежал в поле, и чтобы неравенство $E < 0$ соблюдалось для точек $(x,\, y)$, лежащих на этом участке (последнее возможно в виду непрерывности функции E).

Обозначим через N конечную точку этого участка прямой, т. е. точку $(\bar{x} - h,\, \bar{y} - h\,\bar{y}')$. Возьмем теперь за соседнюю кривую, кривую составленную следующим образом: первый ее участок — экстремаль, соединяющая начальную точку $A\,(x_0,\, y_0)$ с точкой N (которая существует, так как точка N лежит в поле), второй — прямолинейный участок NM, третий — участок исследуемой экстремали от точки $M\,(\bar{x},\, \bar{y})$ до конечной ее точки $B\,(x_1,\, y_1)$ (Рис. 12).

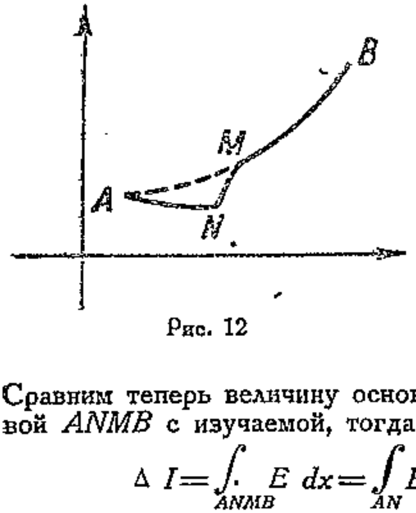

Рис. 12

Сравним теперь величину основного интеграла по построенной кривой $ANMB$ с изучаемой, тогда по (7):

$$\Delta\, I = \int\limits_{ANMB} E\, dx = \int\limits_{AN} E\, dx + \int\limits_{NM} E\, dx + \int\limits_{MB} dx < 0,$$

ибо первый и третий интегралы, как взятые по участкам экстремалей поля, по указанному выше, обращаются в нуль, интеграл же по участку NM меньше 0, так как функция E на этом участке отрицательна.

Последнее заключение, что $\Delta\, I < 0$ противоречит предположению о том, что кривая $y=f(x)$ дает минимум интегралу (1); следовательно, (9) невозможно, что и требовалось доказать.

---

[1] Заметим, что приведенное условие Вейерштрасса должно выполняться не только в случае, когда экстремаль может быть окружена центральным полем, но и без этого ограничения, так как в формулировке условия функция $u\,(x, y)$ по существу не участвует, а входит только ее значение на данной экстремали $y' = u\,(x,\, f(x))$. Доказательство этого потребовало бы, однако, более сложного вывода.

Заметим, что проведенное рассуждение содержит некоторый дефект: именно, кривая $ANMB$ не могла быть взята за соседнюю кривую, как не принадлежащая классу $C^{(1)}$. Но от этого недостатка легко избавиться, заменив кривую $ANMB$ на близкую к ней кривую класса $C^{(1)}$, получающуюся из $ANMB$ закруглением ее у точек N и M и притом близкую к ней настолько, что и для нее $\int E dx < 0$.

Для того, чтобы вывести некоторые следствия из условия Вейерштрасса преобразуем несколько функцию E. Разложив для этой цели $F(x, y, y')$, как функцию от y', по формуле Тэйлора около значения $y' = u$, найдем

$$F(x, y, y') = F(x, y, u) + (y' - u) F'_{y'}(x, y, u) + \\ + \frac{(y'-u)^2}{2} F''_{y'^2}[x, y, u + \vartheta (y' - u)].$$

Отсюда, перенося все члены правой части кроме последнего налево и замечая, что получившиеся слева выражения по (6) есть не что иное как функция E, получим

$$E(x, y, y', u) = \frac{(y'-u)^2}{2} F''_{y'^2}[x, y, u + \vartheta (y' - u)] \quad . \quad . \quad (10)$$

Из полученного представления вытекает, что $F''_{y'^2}$ не может быть отрицательна вдоль изучаемой кривой, если последняя дает минимум интегралу (1). Действительно, предположим, что в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y})$, уклон в которой $\bar{y}' = u$ $(\bar{x}, \bar{y})$, имеем

$$F''_{y'^2}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') < 0;$$

в таком случае по непрерывности $F''_{y'^2}$ это же верно и для значений y' близких к $\bar{y}'$, и применив (10) для $u = \bar{y}'$ и y' близкого к $\bar{y}'$, но не равного $\bar{y}'$, найдем:

$$E(\bar{x}, \bar{y}, y', \bar{y}') = \frac{(y' - \bar{y}')^2}{2} F''_{y'^2}[(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}' + \vartheta (y' - \bar{y}')] < 0,$$

что противоречит условию Вейерштрасса (8). Последнее полученное условие, представляющее следствие условия Вейерштрасса, носит название условия Лежандра и формулируется так:

Для того, чтобы экстремаль $y = f(x)$ давала минимум интегралу (1) *необходимо, чтобы $F''_{y'^2}$ была не отрицательна вдоль нее, т.-е.*

$$F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)] \geqslant 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Воспользуемся теперь формулой Вейерштрасса (7) для вывода достаточных условий.

Из формулы (7) сразу находим, что *для того, чтобы экстремаль $y = f(x)$ давала минимум интегралу* (1) *достаточно, чтобы существовало собственное поле S, в семейство экстремалей которого входит изучаемая кривая $y = f(x)$ такое, что во всех* *его точках* (x, y) *при всех конечных значениях* $y' \neq u(x, y)$ *выполняется неравенство:*

$$E[x, y, u(x, y), y'] > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Действительно, если условие (12) соблюдено, то для всякой соседней кривой, так как она лежит в области R_1, лежащей внутри поля S, применима формула (7), а потому $\Delta I > 0$, т.-е. кривая $y = f(x)$ дает минимум интегралу (1).

Заметим, что вообще этот минимум, есть относительный минимум, но если поле S совпадает со всей рассматриваемой областью R значений (x, y), то минимум, который дает кривая $y = f(x)$, имеет абсолютный характер.

Из формулы (10) видно, что условие (12) выполняется во всяком случае, если для точек (x, y), лежащих в поле S, при *всех* значениях y':

$$F''_{y'^2}(x, y, y') > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Таким образом, условие (13), как более сильное, является также достаточным для того, чтобы кривая $y = f(x)$, давала минимум интегралу. Отметим также, что, если речь идет не о минимуме, а о максимуме интеграла, то условия будут те же; нужно только в неравенствах (12) и (13) знак $>$ заменить на $<$.

Минимум, который мы только что рассматривали, когда требование $\Delta I > 0$ ставится для всех соседних кривых, т.-е. удовлетворяющих неравенству $|y - f(x)| < \varepsilon$ носит название сильного минимума. Наряду с ним рассматривают также минимум ограниченный, когда допускаются соседние кривые, у которых производная удовлетворяет некоторым ограничительным условиям, например, $|y' - f'(x)| < M$, и минимум слабый, когда у соседней кривой не только ордината, но и угловой коэффициент мало отличаются от данной, т.-е., когда соблюдаются условия $|y - f(x)| < \varepsilon$, $|y' - f'(x)| < \varepsilon'$. В обоих случаях, чтобы был минимум в названном смысле, требуется, чтобы для указанного класса соседних кривых было $\Delta I > 0$. Получение необходимых, а также достаточных условий для этих видов минимума не представляет никакого труда: именно, это будут те же условия (8), (12), (13), но они должны соблюдаться не для всех значений y', а только для допускаемых данным видом минимума.

Остановимся особо лишь на условии Лежандра (11).

При выводе его мы пользовались соблюдением условия Вейерштрасса (8) только для значений y' весьма близких к $u[x, f(x)] = f'(x)$, но по сказанному только что, условие Вейерштрасса при этих значениях y' соблюдено даже в случае слабого минимума. Таким образом, условие Лежандра является необходимым даже для слабого минимума, а тем более для ограниченного и сильного.

Цермело дал интересную геометрическую интерпретацию условиям Вейерштрасса. Она основана на следующем.

Рассмотрим кривую $Y = F(x, y, y')$, считая здесь y' независимым переменным, а x и y параметрами. Эту кривую называют фигуратриссой (рис. 13). Вспомним [см. (10)], что функция

$E(x, y, y', u)$ и представляет разность между самой функцией $F(x, y, y'\ u)$ и первыми двумя членами ее разложения в ряд Тэйлора.

Если мы возьмем теперь на построенной кривой точку, соответствующую значению $y' = u(x, y)$ и возьмем еще точку с абсциссой y', то ясно, что E представляет не что иное, как разность между ординатой кривой, соответствующей этой абсциссе, и ординатой касательной, на чертеже — отрезок NM'. Благодаря этому геометрическому представлению E, мы можем высказать условие Вейерштрасса (8) так: для того, чтобы кривая $y = f(x)$ давала минимум, необходимо, чтобы фигуратрисса не пересекала касательной проведенной в точке соответствующей абсциссе $y' = u(x, y)$; при всех значениях параметров x, y, для которых точка (x, y) лежит на изучаемой кривой.

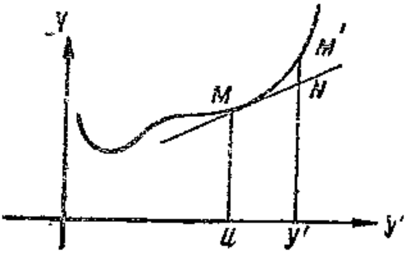

Рис. 13

Достаточное условие (12) заключается в том, чтобы фигуратрисса лежала под касательной, проведенной в точке с абсциссой $y' = u(x, y)$ для всех значений параметров x и y, для которых точка (x, y) лежит в поле S. Достаточное условие (13), которое требует, чтобы фигуратрисса была выпуклой кривой, при тех же значениях x и y представляет таким образом, более сильное требование, чем условие (12). Наконец, необходимые, а также достаточные условия, указанные выше для ограниченного и слабого минимума, могут быть также сформулированы геометрически, только требование, чтобы кривая лежала под касательной, будет теперь относиться не ко всей фигуратриссе, а только к некоторому ее участку около точки касания. Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Задача геометрической оптики на плоскости.

Эта задача приводится к нахождению минимума интеграла (см. гл. I).

$$I = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2}\ dx,$$

причем из физических соображений ясно, что $n(x, y) = \frac{1}{C} > 0$.

В предположении, что экстремаль может быть окружена полем, покажем, что она доставляет минимум.

Для проверки воспользуемся условием (13), найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left[n(x, y)\ \sqrt{1 + y'^2}\right] = \frac{n(x, y)}{(1 + y'^2)^{3/2}} > 0,$$

при всех значениях x, y и y'.

Таким образом, экстремали задачи, если могут быть окружены полем, доставляют сильный минимум. В частном случае, когда

$n(x, y) = \frac{1}{y}$, мы видели (см. гл. IV), что экстремаль может быть окружена полем, таким образом, в этом случае экстремали — окружности с центром на оси абсцисс, дают сильный минимум интегралу $\int \frac{ds}{y}$.

Задачу рассмотренного только что типа представляет и разобранная в главе I задача о брахистохроне, именно, в этом случае речь идет о минимуме интеграла $\int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{y}}$, т. е. $n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Семейство экстремалей — в данном случае семейство циклоид, имеющих вершины на оси абсцисс.

Пусть начальная точка есть некоторая точка, лежащая на оси абсцисс $(x_0, 0)$, и дана некоторая циклоида, соединяющая ее, а потому имеющая начальную точку вершиной, с некоторой другой точкой плоскости. Покажем, что эта кривая дает рассматриваемому интегралу сильный минимум. Для этого в данном случае, как для всех задач, в которых подъинтегральное выражение есть $n(x, y)\,ds$, достаточно проверить, что ее можно окружить полем.

Рассмотрим семейство экстремалей, проходящих через эту точку — это будет семейство циклоид, имеющих вершины в начальной точке, общее уравнение которых

$$x - x_0 = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t).$$

Непосредственно ясно, что через каждую точку плоскости проходит одна — и только одна — кривая семейства; следовательно, они образуют поле [1]), а потому циклоида дает сильный минимум в задаче о брахистохроне.

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимуме интеграла

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} y'^2 (1 + y')^2\, dx.$$

Экстремали задачи прямые линии.

Проверим условие Вейерштрасса для экстремали $y = mx + n$, найдем:

$$E(x, y, y', u) =$$
$$= y'^2(1 + y')^2 - m^2(1 + m)^2 - (y' - m)[2m(1 + m)^2 + 2m^2(1 + m)] =$$
$$= (y' - m)^2 [(y' + m + 1)^2 + 2m(m + 1)].$$

Для того, чтобы прямая $y = mx + n$ давала сильный минимум, необходимо по условию (8), чтобы для всех значений y', функция E была положительна, а для этого в свою очередь нужно, чтобы было $m(m + 1) > 0$.

Таким образом, прямая $y = mx + n$ дает сильный минимум рас-

[1]) Заметим, что в точке A эти экстремали имеют производную равную ∞, так что поле не совсем подходит под данное выше определение. Эту неувязку можно обойти, но мы на этом не будем останавливаться.

сматриваемому интегралу только при $m > 0$ или $m < -1$. При m, не удовлетворяющих этому условию, т. е. при $-1 < m < 0$, прямая $y = mx + n$ дает, как нетрудно видеть, только ограниченный максимум или минимум, максимум при

$$-1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < 2m < -1 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и минимум, если эти неравенства не выполнены.

§ 30. Два примера на абсолютный экстремум.

В некоторых случаях то, что экстремаль доставляет минимум и даже абсолютный минимум рассматриваемому интегралу, может быть установлено без помощи указанных в предыдущем параграфе общих достаточных условий, а путем непосредственного рассмотрения полной вариации ΔI изучаемого интеграла.

Рассмотрим два примера этого типа:

Пример 1. Найти кривую, дающую минимум интегралу

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 \, dx$$

и проходящую через точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$.

Экстремали задачи прямые линии.

Пусть $y = mx + n$ прямая, соединяющая точки A и B; покажем, что она дает интегралу I абсолютный минимум.

Пусть дана какая-либо другая кривая, соединяющая точки A и B, тогда ее уравнение будет

$$y = mx + n + \eta(x),$$

где $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$.

Рассмотрим теперь полную вариацию интеграла; найдем

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} [mx + n + \eta(x)]'^2 \, dx - \int_{x_0}^{x_1} [(mx + n)']^2 \, dx =$$

$$= 2m \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x) \, dx + \int_{x_0}^{x_1} [\eta'(x)]^2 \, dx = \int_{x_0}^{x_1} [\eta'(x)]^2 \, dx > 0,$$

откуда видно, что прямая $y = mx + n$ дает интегралу I абсолютный минимум.

Пример 2. Найти функцию $u = f(x, y)$, принимающую данное значение на контуре C и доставляющую минимум двойному интегралу:

$$I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx \, dy,$$

где D область ограниченная контуром C.

Рассматривая эту задачу в гл. I, мы нашли, что уравнение Эйлера для нее есть уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а экстремали, следовательно, функции гармонические в области D.

Покажем, что гармоническая функция, принимающая на контуре C заданные значения и такая, что интеграл I для этой функции имеет конечное значение, доставляет этому интегралу абсолютный минимум, так что задача о минимизации интеграла I исчерпывается решением задачи Дирихле [1].

Итак, пусть $u\ (x,\ y)$ гармоническая функция, принимающая на контуре C заданные значения, а $v\ (x,\ y)$ какая угодно функция, удовлетворяющая тому же условию на контуре; тогда:

$$v\ (x,\ y) = u\ (x,\ y) + \eta\ (x,\ y),$$

где $\eta\ (x,\ y)$ функция, обращающаяся в нуль на C. Рассмотрим разность ΔI между значениями интеграла I для этих двух функций; найдем:

$$\Delta I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] dx\ dy -$$

$$- \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = 2 \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dx\ dy +$$

$$+ \iint_D \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] dx\ dy.$$

Преобразуем первый из интегралов правой части следующим образом:

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dx\ dy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\eta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\eta\right)\right] dx\ dy -$$

$$- \iint_D \eta\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^3}\right) dx\ dy.$$

Второй из полученных интегралов равен нулю, так как по условию u функция гармоническая, первый же преобразуем еще, пользуясь формулой Грина-Римана [2]; получим

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\eta\right) + \frac{\partial}{\partial y}\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\ \eta\right)\right] dx\ dy =$$

$$= \int_{(C)} \frac{\partial u}{\partial y}\eta\ dy - \frac{\partial u}{\partial x}\ \eta\ dx = 0,$$

так как на контуре C функция $\eta\ (x,\ y) = 0$.

---

[1] Напомним, что в гл. I при рассмотрении этого примера было показано обратно, что функция, решающая задачу о минимуме I, есть решение задачи Дирихле.

[2] Смирнов, т. II, стр. 273.

Итак,

$$\Delta I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy > 0,$$

если $v(x, y) \not\equiv u(x, y)$.

Таким образом, действительно, функция $u(x, y)$ дает абсолютный минимум интегралу I. Заметим, что из этого следует между прочим единственность решения задачи Дирихле. Действительно, если бы наряду с одним решением $u(x, y)$ существовало другое решение $u_1(x, y)$, то оно должно было бы давать интегралу I абсолютный минимум, но всякая отличная от $u(x, y)$ функция дает как мы видели, бо́льшее значение интегралу I, и потому непременно $u_1(x, y) \equiv u(x, y)$.

§ 31. Разрывные решения.

До сих пор мы допускали к рассмотрению в качестве экстремалей только кривые класса $C^{(1)}$. В некоторых случаях представляется выгодным расширить класс допустимых кривых и ввести кривые не принадлежащие классу $C^{(1)}$, так как благодаря этому задача, которая не имела решения в прежнем, более узком, классе кривых, может получить решение.

Такие решения вариационной задачи, которые не принадлежат классу $C^{(1)}$, называют разрывными решениями, хотя они могут представлять и непрерывные функции.

Мы будем рассматривать здесь, именно, такие разрывные решения, которые представляют сами непрерывную функцию, но эта функция имеет некоторое число точек не существования производных, т. е. угловых точек кривой.

Итак, мы будем рассматривать здесь кривые, состоящие из конечного числа кривых класса $C^{(1)}$, непрерывные и имеющие некоторое число угловых точек. Такие решения были исследованы Эрдманом, и им были найдены условия, которым должны удовлетворять эти решения и, благодаря которым, они могут быть найдены. Перейдем к выводу этих условий. Заметим прежде всего, что если такое разрывное решение существует, то каждый участок его, представляющий кривую класса $C^{(1)}$, есть экстремаль. Действительно, так как вся кривая доставляет минимум изучаемому интегралу, то рассматриваемый ее участок доставляет минимум величины интеграла между его концами и, как кривая класса $C^{(1)}$, должен удовлетворять выведенному в главе I необходимому условию — уравнению Эйлера.

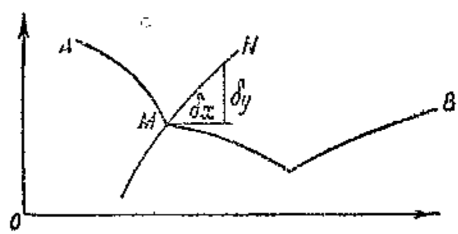

Рис. 14

Возьмем теперь любую угловую точку M решения (рис. 14).

Обозначим часть основного интеграла I до этой точки через I_1 и от нее до конечной точки через I_2. Проведем через выбранную угловую точку произвольную кривую MN и будем варьировать ее по этой кривой, тогда как необходимое условие того, что вся рассматриваемая кривая дает экстремум интегралу I, имеем

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Но выражения для δI_1 и δI_2 могут быть легко найдены, как вариации величины интеграла при движении конца и начала экстремали по некоторой кривой. Именно, обозначая через $\overline{y}_1'$ производную слева и $\overset{+}{y}_1'$ производную справа в рассматриваемой угловой точке (x_1, y_1) и через δx и δy, как обычно, вариации точки на проведенной кривой MN будем иметь по гл. III [стр. 64, (10)]

$$\delta I_1 = [F(x_1, y_1, \overline{y}_1') - \overline{y}_1' F'_{y'}(x_1, y_1, \overline{y}_1')]\,\delta x +$$
$$+ F'_{y'}(x_1, y_1, \overline{y}_1)\,\delta y \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$
$$\delta I_2 = -[F(x_1, y_1, \overset{+}{y}_1') - \overset{+}{y}_1' F'_{y'}(x_1, y_1, \overset{+}{y}_1')]\,\delta x -$$
$$- F'_{y'}(x_1, y_1, \overset{+}{y}_1')\,\delta y.$$

Подставляя полученные выражения δI_1 и δI_2 в (14) и приравнивая нулю множители при δx и δy, так как они могут быть взяты произвольно, благодаря свободе выбора кривой, получим искомые условия Эрдмана:

$$\left.\begin{aligned} &F'_{y'}(x_1, y_1, \overline{y}_1') = F'_{y'}(x_1, y_1, \overset{+}{y}_1') \\ &F(x_1, y_1, \overline{y}_1') - \overline{y}_1' F'_{y'}(x_1, y_1, \overline{y}_1') = \\ &= F(x_1, y_1, \overset{+}{y}_1') - \overset{+}{y}_1' F'_{y'}(x_1, y_1, \overset{+}{y}_1') \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

Заметим прежде всего, что полученные условия (16) дают возможность найти разрывное решение. Предположим для простоты, что у искомого решения одна угловая точка, тогда для его отыскания нужно найти две экстремали, т. е. четыре величины C_1', C_2', C_1'', C_2'', так как общий интеграл уравнения Эйлера зависит от двух постоянных C_1, C_2.

Для нахождения же этих параметров мы имеем как раз четыре уравнения; именно: два уравнения дает то условие, что первая экстремаль проходит через начальную, а вторая — через конечную точку и еще два уравнения дают условия (16) в точке пересечения этих экстремалей.

Таким образом, задача, вообще говоря, разрешима. Если бы число угловых точек было больше одной, то мы имели бы то же самое, так как прибавление каждой новой угловой точки вызывает увеличение числа экстремалей на одну, т. е. числа неизвестных параметров на 2, но одновременно вызывает добавление двух новых уравнений (16), т. е. число уравнений остается равным числу неизвестных.

Вспомнив выражение функции Вейерштрасса, мы можем придать второму уравнению Эрдмана более простой вид. Действительно, перенося в нем все члены в левую часть, видим, сравнив с (6), что она представляет ничто иное, как $E\,(x_1,\ y_1,\ \overset{-}{y}_1{}',\ \overset{+}{y}_1{}')$, а потому условия Эрдмана (16) могут быть записаны проще:

$$\left.\begin{aligned} F'_{y'}\,(x_1\,,\ y_1\,,\ \overset{-}{y}_1{}') &= F'_{y'}\,(x_1\,,\ y_1\,,\ \overset{+}{y}_1{}') \\ E\,(x_1,\ y_1,\ \overset{-}{y}_1{}',\ \overset{+}{y}_1{}') &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16')$$

Написанные в такой форме уравнения Эрдмана могут быть весьма просто истолкованы геометрически. Вернемся к фигуратриссе $Y=F\,(x_1\,,\ y_1\,,\ y')$; тогда первое из уравнений (16′) показывает, что для значений аргумента $y'=\overset{-}{y}_1{}'$ и $y'=\overset{+}{y}_1{}'$, фигуратрисса имеет одинаковые угловые коэффициенты касательной, а второе, на основании геометрического значения функции E, что точка отвечающая значению $y'=\overset{+}{y}_1{}'$ лежит на касательной, проведенной в точке $y'=\overset{-}{y}_1{}'$; а оба вместе показывают, что фигуратрисса имеет общую касательную в точках, отвечающих этим значениям аргумента y' (рис. 15).

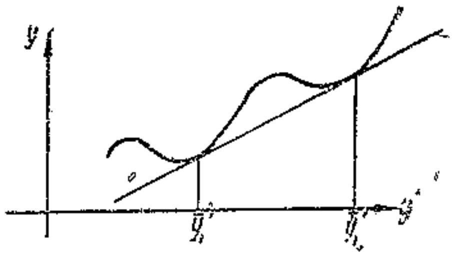

Рис. 15

Таким образом, условия Эрдмана приводятся к такому геометрическому условию: при значениях параметров $x=x_1\,,\ y=y_1\,,$ соответствующих угловой точке, фигуратрисса должна иметь общую касательную в точках, отвечающих абсциссам $y'=\overset{-}{y}_1{}'$ и $y'=\overset{+}{y}_1{}'$.

Укажем, наконец, что разрывных решений задача не имеет наверное, если при всех рассматриваемых значениях x, y и любом y' соблюдено условие

$$F''_{y'^2}\,(x,\ y,\ y') > 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

ибо, если бы разрывное решение существовало, то на основании первого условия Эрдмана по теореме Ролля при некотором значении y', лежащем между $\overset{-}{y}_1{}'$ и $\overset{+}{y}_1{}'$ было бы

$$F''_{y'^2}\,(x_1\,,\ y\,,\ y') = 0,$$

что противоречило бы (17).

Пример 1. Найти минимум интеграла:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} y'^2\,(1+y')^2\,dx.$$

Рассматривая эту задачу в предыдущем параграфе, мы видели, что экстремали — прямые линии $y=mx+n$ не дают при $-1<m<0$ сильного минимума этому интегралу.

Попробуем найти разрывное решение с одной угловой точкой. Оно должно состоять из двух прямолинейных отрезков. Составим условия Эрдмана (16); они дают, если обозначить для краткости $\overset{-}{y_1}'=p$, $\overset{+}{y_1}'=q$.

$$p^2\ (1+p)+p\ (1+p)^2=q^2\ (1+q)+q\ (1+q)^2.$$

$$p^2\ (1+p)^2-2\ p^3\ (1+p)-2\ p^3\ (1+p)^2=$$
$$=q^2)\ 1+q)^2-2\ q^3)\ 1+q)-2\ q^2\ (1q+)^2{}'$$

или преобразуя:

$$p\ (1+p)\ (2p+1)=q\ (1+q)\ (2q+1);$$
$$p^2\ (1+p)\ (-1-3p)=q^2\ (1+q)\ (-1-3q).$$

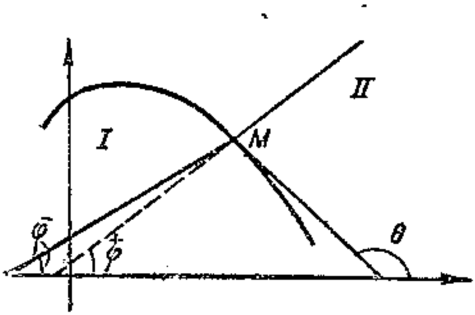

Рис. 16

Откуда ясно, что единственное действительное решение этой системы, кроме тривиального $p=q$, суть $p=0$; $q=-1$ или $p=-1$, $q=0$.

Итак, разрывное решение может быть составлено из отрезков параллельных оси абсцисс и прямой $y=-x$. Такое решение, очевидно, доставляет изучаемому интегралу минимум, ибо обращает его в нуль.

Пример 2. Задача о преломлении света. В некоторых физических примерах разрыв у решения вызывается разрывом подъинтегральной функции; такой, именно, пример представляет рассматриваемая задача. Подъинтегральная функция, если $y=f_1\ (x)$ уравнение поверхности раздела, $n_1=\frac{1}{C_1}$ и $n_2=\frac{1}{C_2}$ показатели преломления первой и второй среды, задается так:

$$F\ (x,\ y,\ y')=\begin{cases} n_1\sqrt{1+y'^2} & \text{при } y>f\ (x) \\ n_2\sqrt{1+y'^2} & \text{"} \quad y<f\ (x) \end{cases}$$

Искомое решение может иметь разрыв на линии раздела, причем точку разрыва можем по этой линии варьировать (рис. 16) Тогда, составляя δI_1 и δI_2, приняв $\delta y=f'\ (x_1)\ \delta x$ и пользуясь для δI_1 первым, а для δI_2 вторым выражением функции F, найдем

$$\delta I_1=\left[n_1\sqrt{1+\overset{-}{y_1}'^2}-\frac{\overset{-}{y_1}'^2\ n_1}{\sqrt{1+\overset{-}{y_1}'^2}}\right]\delta x+\frac{n_1\ \overset{-}{y_1}'\ f'\ (x_1)\ \delta x}{\sqrt{1+\overset{-}{y_1}'^2}}$$

$$\delta I_2=-\left[n_2\sqrt{1+\overset{+}{y_1}'^2}-\frac{\overset{+}{y_1}'^2\ n_2}{\sqrt{1+\overset{+}{y_1}'^2}}\right]\delta x-\frac{n_2\ \overset{+}{y_1}'\ f'\ (x_1)\ \delta x}{\sqrt{1+\overset{+}{y_1}'^2}}$$

откуда после упрощений по (14) найдем, полагая

$$\vartheta = \operatorname{arctg} f(x_1);\ \overset{-}{\varphi} = \operatorname{arctg} \overset{-}{y_1}';\ \overset{+}{\varphi} = \operatorname{arctg} \overset{+}{y_1}',$$

что

$$n_1 \cos\overset{-}{\varphi} = n_1 \operatorname{tg}\vartheta \sin\overset{-}{\varphi} = n_2 \cos\overset{+}{\varphi} + n_2 \operatorname{tg}\vartheta \sin\overset{+}{\varphi}$$

или после упрощений приходим к закону Декарта:

$$\frac{\cos(\overset{-}{\varphi}-\vartheta)}{\cos(\overset{+}{\varphi}-\vartheta)} = \frac{n_2}{n_1},$$

что косинусы углов, составленных лучами с плоскостью раздела, обратно пропорциональны показателям преломления.

§ 32. Условие Якоби.

В § 29 при рассмотрении достаточных условий того, чтобы экстремаль давала минимум интегралу задачи, мы ставили в числе их требование, что экстремаль может быть окружена полем. Здесь будут даны некоторые достаточные условия для того, чтобы это поле существовало. Именно, будет показано, что для того, чтобы экстремаль могла быть окружена полем, достаточным является соблюдение некоторого условия Якоби, о котором подробнее будет сказано ниже.

Займемся прежде всего нахождением условий, достаточных для того, чтобы данная экстремаль $y = f(x)$, соединяющая точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ могла быть окружена *центральным* полем. Будем предполагать при этом, что на ней самой выполнено условие Лежандра, т.-е.

$$F''_{y'^2}(x, y, y') > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Рассмотрим семейство экстремалей, проходящих через точку $A(x_0, y_0)$. Это семейство зависит от параметра τ — углового коэффициента экстремали в начальной точке. Уравнение этого семейства будет:

$$y = \varphi(x, \tau), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

причем при некотором значении параметра $\tau = \tau_0$ получается данная экстремаль

$$\varphi(x, \tau_0) = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Заметим при этом, что на основании общих теорем существования теории дифференциальных уравнений, которые применимы в данном случае, благодаря соблюдению условия Лежандра (17), функция φ представляет функцию непрерывную вместе со своими частными производными до второго порядка по обоим аргументам.

Укажем теперь условия того, чтобы семейство кривых (18) образовало поле вокруг исследуемой экстремали. Для этого нужно, чтобы кривые этого семейства при значениях τ, близких к τ_0, образовали семейство не пересекающихся кривых. Это условие, выраженное аналитически, означает, что y как функция от τ, определенная уравнением (18), должна быть однозначной; для последнего же, на основании теорем о неявных функциях достаточно, чтобы было

$$\varphi_{\tau}'(x, \tau) = \frac{\partial y}{\partial \tau} > 0,$$

при

$$x_0 < x < x_1;\ \tau_0 - \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \varepsilon \quad \ldots \ldots (20)$$

Поставленное условие требует, чтобы $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ была положительна при значениях τ, близких к τ_0, но можно показать, что достаточно потребовать выполнения этого при $\tau = \tau_0$. Именно, что *для того, чтобы экстремаль можно было окружить центральным полем, достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varphi'_{\tau}(x, \tau_0) = \left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_0} > 0 \text{ при } x_0 < x \leqslant x_1 \quad \ldots \ldots (21)$$

Чтобы показать это мы докажем, что выполнение условия (21) влечет за собой выполнение условия (20) при достаточно малом ε. Заметим прежде всего, что:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \tau}\right]_{x=x_0} = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \tau\, \partial x}\right]_{x=x_0} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x_0} = \frac{\partial}{\partial \tau}\tau = 1 \quad \ldots (22)$$

Взяв произвольное число a можем найти, благодаря непрерывности функции $\frac{\partial^2 y}{\partial x\ \partial \tau}$ и (22) число δ, настолько малое, чтобы она была положительна и в промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$, а также выполнялось неравенство

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \tau} > 0; \text{ при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta,\ \tau_0 - a < \tau < \tau_0 + a \quad \ldots (23)$$

Возьмем теперь $\varepsilon < a$ настолько малым, чтобы было

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} > 0 \text{ при } x_0 + \delta \leqslant x \leqslant x_1,\ \tau_0 - \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \varepsilon \quad \ldots (24)$$

Это возможно благодаря непрерывности $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ и неравенству (21).

Покажем, что при выбранном ε выполняется условие (20). Но действительно, если $x \geqslant x_0 + \delta$, то оно выполнено по (24); если же $x < x_0 + \delta$, то и в этом случае при рассматриваемом значении x величина $\frac{\partial y}{\partial \tau} > 0$, ибо $\left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{x=x_0} = 0$ и в промежутке от x_0 до x она есть возрастающая функция, т. к. по (23) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \tau} > 0$.

Итак, условие (21) установлено. Оно говорит о том, что первая точка рассматриваемой экстремали после $x = x_0$, для которой $\frac{\partial y}{\partial \tau} = 0$ лежит за точкой B. Эту точку называют сопряженным с точкой A фокусом. Так как эта точка получается совместным решением уравнения $\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = 0$ и уравнения данной экстремали, то геометрически она представляет точку пересечения огибающей пучка экстремалей, исходящих из точки A, с данной экстремалью (рис. 17).

Таким образом, условие (21) равносильно следующему условию: *для того, чтобы экстремаль AB можно было окружить полем, достаточно, чтобы фокус сопряженный с точкой A, лежал за точкой B.*

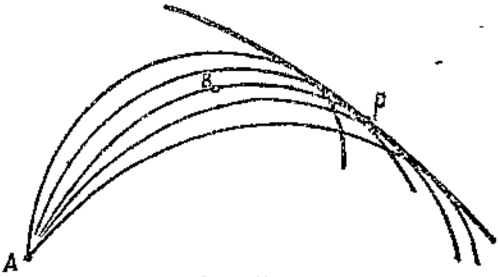

Рис. 17

Полученное условие носит название условия Якоби.

Условие (21) говорит о том, что функция $\left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_0}$, которую мы обозначим теперь для краткости одной буквой v, должна быть положительна при $x_0 < x \leqslant x_1$. Якоби показал, что эта функция v может быть найдена без рассмотрения семейства (18), как решение некоторого дифференциального уравнения. Для составления этого уравнения подставим $y = \varphi(x, \tau)$ в уравнение Эйлера, продифференцируем полученное тождество по τ и положим затем $\tau = \tau_0$. Найдем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} v + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} v' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} v + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} v'\right) = 0 \quad . \; . \; . \; (25)$$

Обозначая через P, Q и R результат замены в выражениях $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$, величин y и y' на $f(x)$ и $f'(x)$, можем уравнение (25) переписать в виде:

$$Pv + Qv' - \frac{d}{dx}(Qv + Rv') = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

или

$$Rv'' + R'v' + (Q' - P)v = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

Полученное уравнение есть линейное уравнение второго порядка, частным решением которого является функция v; при этом начальные условия, которыми оно определяется, суть

$$[v]_{x=x_0} = 0; \quad \left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=x_0} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

Уравнение (27) носит также имя Якоби, и условие Якоби может быть с помощью его сформулировано так: *решение уравнения* (27), *удовлетворяющее начальным условиям* (28), *не должно обращаться в нуль для значений x в промежутке $x_0 < x \leqslant x_1$.*

Мы показали пока, что условие Якоби является достаточным для того, чтобы экстремаль можно было окружить центральным полем. Однако центральное поле не является обыкновенным полем, и поэтому построение его не является достаточным для нужд § 29.

Но можно показать, что условие Якоби является достаточным не только для существования центрального поля, но и для существования поля обыкновенного, т. е. такого, что экстремаль AB лежит вместе с некоторой полосой, окружающей ее, внутри поля. Для доказательства этого переместим начальную точку экстремали назад по экстремали в некоторую точку A' $(x_0-h, f(x_0-h))$, (рис. 18).

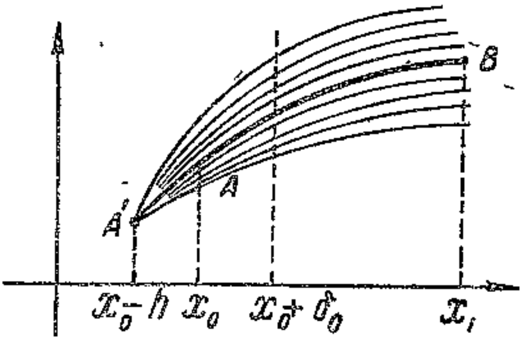

Рис. 18

В таком случае функция v, которая зависит не только от x, но и от x_0: $v=v\ (x, x_0)$, перейдет в $v\ (x, x_0-h)$.

Достаточно показать теперь, что мы можем выбрать h настолько малым, чтобы функция $v\ (x, x_0-h)$ была положительна при $x_0-h<x\leqslant x_1$, так как, если это будет установлено, то для экстремали $A'B$ будет выполняться условие Якоби, а потому она может быть окружена центральным полем, внутри которого лежит экстремаль AB, и, для которой это поле будет обыкновенным полем. Но то, что можно найти указанное h, ясно непосредственно. В самом деле, как легко видеть по (28), существует такое δ_0, что в промежутке $(x_0,\ x_0+\delta_0)$: $\frac{\partial v\ (x, x_0)}{\partial x}>0$, а в промежутке $(x_0+\delta_0,\ x_1)$: $v\ (x_0,\ x)>0$. Далее из теорем существования дифференциального уравнения следует, что $v\ (x_0,\ x)$ представляет вместе с $\frac{\partial v\ (x_0,\ x_0)}{\partial x}$ непрерывную функцию от обоих аргументов x_0 и x, а потому, очевидно, при достаточно малом h будет $\frac{\partial}{\partial x} v\ (x,\ x_0-h)>0$ в промежутке $(x_0-h,\ x_0+\delta_0)$ и $v\ (x,\ x_0-h)>0$ в $(x_0+\delta_0,\ x_1)$. Благодаря чему, так как $v\ (x_0-h,\ x_0-h)=0$ будет $v\ (x,\ x_0-h)>0$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $x_0-h<x\leqslant x_1$.

Итак, указанное h существует, а потому условие Якоби является достаточным для существования обыкновенного поля, содержащего данную экстремаль AB.

Пользуясь последним полученным результатом, мы можем результаты § 1 сформулировать теперь в таком виде:

Для того, чтобы экстремаль AB давала сильный минимум интегралу (1), достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) На эстремали условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 F\ (x,\ y,\ y')}{\partial\, y'^2}>0\,.$$

2) Условие Якоби

$$v\ (x,\ x_0)>0,\ \text{при}\ x_0<x\leqslant x_1,$$

где $v\ (x,\ x_0)$ решение уравнения (27), удовлетворяющее условиям (28).

3) Условие Вейерштрасса

$$E\ (x,\ y,\ y',\ u) > 0$$

при всех значениях x, $(x_0 < x < x_1)$ $y = f\ (x)$, $y' = f'\ (x)$, $u \neq f'\ (x)$.

Заметим, что выполнение первых двух условий само по себе является достаточным для слабого минимума. В самом деле, если эти условия выполнены, то экстремаль может быть окружена полем, а функция Вейерштрасса $E\ (x,\ y,\ y',\ u)$ на основании (10) будет положительной при значениях u близких к y', что и является достаточным для слабого минимума.

Покажем еще, что среди поставленных условий — условие Якоби вызвано существом вопроса: именно, если это условие не соблюдено, точнее говоря, если существует x_2 $(x_0 < x_2 < x_1)$ такое, что $v\ (x_2) = 0$, то экстремаль не может дать интегралу (1) даже слабого минимума. Предположим, таким образом, что в некоторой точке x_2, лежащей в промежутке $(x_0,\ x_1)$, функция $v\ (x,\ x_0)$ обращается в нуль.

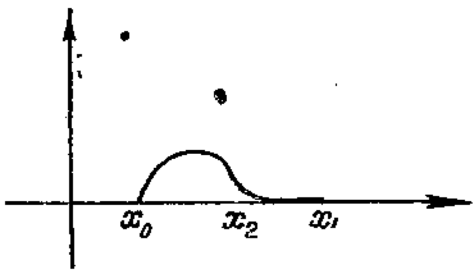

Рис. 19

Мы видели в гл. I, что кроме обращения в нуль первой вариации необходимым условием минимума для $I(\alpha)$, как функции переменного α, является:

$$\left.\frac{d^2I(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} \geqslant 0.$$

Но вспоминая, что

$$I\ (\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F\ (x,\ y + \alpha\eta,\ y' + \alpha\eta')\ dx \quad \ldots\ldots (29)$$

найдем легко

$$\left.\frac{d^2I(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (P\eta^2 + 2\,Q\,\eta\eta' + R\,\eta'^2)\ dx\,, \quad \ldots\ldots (30)$$

где P, Q и R обозначают то же, что и в уравнении Якоби (27).

Будем минимизировать полученный интеграл, считая P, Q, R данными функциями от x, а η искомой функцией.

Уравнение Эйлера для функции η будет тогда

$$P\eta + Q\eta' - \frac{d}{dx}(Q\eta + R\eta') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

т. е. представляет уравнение Якоби (26). Возьмем за функцию $\eta\ (x)$

функцию равную $v(x, x_0)$ в (x_0, x_2) и равную 0 в (x_2, x_1); график ее дан на рис. 19. В таком случае имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1}(P\eta+2Q\eta\eta'+R\eta'^2)\,dx=\int_{x_0}^{x_2}[(P\eta+Q\eta')\eta+(Q\eta+R\eta')\eta']\,dx$$

или по (31)

$$=\int_{x_0}^{x_2}\left[\eta\frac{d}{dx}(Q\eta+R\eta')+(Q\eta+R\eta')\eta'\right]dx=\int_{x_0}^{x_2}\frac{d}{dx}\left[(Q\eta+R\eta')\eta\right]dx=$$

$$=\left[(Q\eta+R\eta')\eta\right]_{x_0}^{x_2}=0,$$

так как по выбору η она обращается в нуль в точках x_0 и x_2. Но построенная функция η представляет разрывное решение, благодаря тому, что точка x_2 есть угловая точка кривой $y=\eta(x)$.

В самом деле, имеем $\eta'(x_2+0)=0$, но не может быть $\eta'(x_2-0)=0$, так как v представляло бы тогда функцию, обращающуюся в нуль вместе со своей производной в точке x_2, а потому, как решение линейного уравнения с коэффициентом при второй производной $R\neq 0$, была бы равна нулю тождественно, что противоречит условию $\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=x_0}=1$. Итак, η представляет разрывное решение, но между тем она не удовлетворяет условию Эрдмана, так как

$$[Q+R\eta']_{x_2-0}^{x_2+0}=R\eta'(x_2-0)\neq 0.$$

Следовательно, значение интеграла (30), которое дает ему функция η, не является наименьшим, а потому для соответственно подобранной функции этот интеграл может быть сделан отрицательным.

Итак, необходимое условие слабого минимума

$$\frac{d^2 I(\alpha)}{d\alpha^2}_{\alpha=0}\geqslant 0$$

оказывается не соблюденным.

ГЛАВА VI.

Прямые методы вариационного исчисления. Приложения к математической физике.

§ 33. Общие замечания. Идея прямых методов.

Для решения вариационных задач до настоящего времени мы прежде всего определяли семейство кривых, обладающих относительно заданного функционала тем характерным для них свойством, что в общем выражении вариации функционала, вычисленной для любой кривой этого семейства, сохранялись лишь члены, зависящие от вариаций концов кривой; слагаемые же, зависящие от вариаций средних точек, давали нуль.

Для задач с закрепленными концами это требование равносильно обращению в нуль первой вариации функционала.

Основным уравнением, характеризующим свойства таких кривых, было во всех разобранных нами задачах уравнение Эйлера.

Искомая кривая, решающая задачу, если она существует, обязана, как мы видели, принадлежать найденному таким путем семейству кривых и должна быть выделена из него на основании граничных требований, природа которых тесно связана с видом задачи.

Мы переходим теперь к краткому обзору так называемых прямых методов вариационного исчисления, основанных на идее совершенно отличной от только что изложенной. В них пытаются, не прибегая к определению всего семейства экстремалей задачи, т.-е. не пользуясь дифференциальным уравнением Эйлера, разыскивать непосредственно кривую, решающую задачу, обычно при помощи построения последовательных приближений к ней; последние получаются, когда сводят решение задачи об экстремуме функционала к задаче об обыкновенном экстремуме функции относительно некоторого числа n надлежащим образом выбранных параметров и затем совершают предельный переход при $n \to \infty$.

Чтобы иметь в виду что-либо определенное, мы остановимся, при общих пояснениях непосредственных методов, на простейшей задаче о минимуме интеграла

$$I\,(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\,(x,\ y,\ y')\ dx = \min,$$

хотя все наши рассуждения, при надлежащих изменениях, могут быть перенесены на все типы задач вариационного исчисления, рассмотренные нами до настоящего времени.

$y = y\,(x)$ кривая класса $C^{(1)}$, лежащая в некоторой области R плоскости $(x,\ y)$. Будет ли класс допустимых кривых содержать в себе лишь кривые с неподвижными концами, или же будет допускать известную свободу в передвижении концов, для нас в настоящий момент представляется безразличным.

Допустим, что нам какими-либо путями удалось установить ограниченность снизу значений $I\,(y)$ для всего класса допустимых кривых.

Пусть g будет точной нижней границей этих значений. Напомним некоторые соображения общего характера.

Задача прежде всего состоит в том, чтобы, во-первых, определить, существует ли среди рассматриваемых нами функций такая, что для нее достигается точная нижняя граница g, т.-е. найдется ли среди допустимых функций такая, что для нее $I\,(y) = g$ и, во-вторых, дать прием построения такой функции. Если в теории обыкновенного экстремума для непрерывных функций в замкнутых областях мы обеспечены, по известной теореме Вейерштрасса, возможностью решения задачи для всех случаев, то первая трудность вариационного исчисления именно в том и состоит, что оно лишено этого предложения, и достижимость границы g должна быть доказываема в каждом отдельном случае; утвердительный ответ вообще не всегда возможен. Мы напомним читателю, что, например, как показывалось нами в главе I, $I=\int_{-1}^{+1} x^2\, y'^2\ dx$ для всех функций класса $C^{(1)}$ в интервале $-1 \leq x \leq +1$ проходящих через точки $(-1,-1)$, $(+1,+1)$, имеет нижнюю границу нуль, которая не может быть достигнута ни для какой непрерывной функции.

Вне зависимости от того сможем ли мы или не сможем ответить на первый из поставленных нами вопросов, можно утверждать, что среди допустимых функций найдется такая последовательность

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,\ \text{что}\ \lim_{n\to\infty} I\ (y_n)=g.$$

Мы будем ниже называть ее *минимизирующей* последовательностью задачи.

Если бы удалось указать процесс, позволяющий так выбирать последовательность $y_1, y_2, \ldots$, чтобы она сходилась к некоторой функции, и кроме того можно было бы переходить для этой последовательности к пределу под знаком интеграла:

$$I\ (\lim\ y_n)=\lim\ I\ (y_n)=g$$

мы получили бы ответ на оба поставленные нами выше вопроса. Эта мысль была принята за исходную точку большинства непосредственных методов вариационного исчисления.

Описанный здесь процесс есть вообще не что иное, как метод последовательных приближений применительно к вариационным задачам, но однако здесь он имеет существенное отличие от известных, классических случаев его применения к доказательству теорем о существовании решений в теории дифференциальных, интегральных уравнений, уравнений с исчислимым множеством переменных и т. д. В тех случаях аналитический аппарат самих исследуемых вопросов давал удобный алгорифм приближения к искомому решению, позволяющий вообще по известному n-ому приближению немедленно и единственным образом построить „$n+1$"-ое приближение. Роль этого алгорифма сводилась к тому, что он автоматически сглаживал ту ошибку, которую мы допускали, заменив точное решение первым к нему приближением.

Иное будет происходить в нашем случае. Здесь аналитический аппарат задачи не дает такого алгорифма; знание y_n из минимизирующей последовательности обычно еще не дает никаких указаний на то, каким должно быть y_{n+1}. „$n+1$"-ое приближение вычисляется вообще независимо от того, каковы были предшествующие приближения. Здесь нет того автоматического сглаживания ошибок, благодаря которому мы в случаях классических, может быть отправляясь от неудачного первого приближения в большинстве случаев приходим к точному решению.

Если нам каким-либо путем удалось построить минимизирующую последовательность, то факт сходимости ее будет чаще всего зависеть только от того, удачное или неудачное мы взяли правило построения такой последовательности. Наконец, от удачи в выборе правила будет зависеть и быстрота сходимости процесса.

Требования, которым должно удовлетворять правило построения $y_1, y_2, \ldots$, чтобы дать удобный способ нахождения решения, обычно тесно связаны с самим характером задачи и от одной задачи к другой меняются весьма сильно.

Это обстоятельство крайне затрудняет теоретическое исследование вопроса, но в практических приложениях неопределенность правила имеет то несомненное достоинство, что позволяет при решении каждой задачи возможно лучшим способом выбирать приближенные решения.

§ 34. Метод Ритца.

Процесс выбора минимизирующей последовательности, предложенный Ритцем и примененный им с большим успехом к численному решению задач математической физики, состоит в следующем: исходят из некоторой, определяемой обычно предельными условиями и видом области интегрирования, системы функций $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, относительно которой известно, что каждая из u_n — допустимая функция и, кроме того, любая линейная комбинация

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \, u_i$$

функций u_i, когда коэффициенты a_i меняются в некоторых областях, вид которых зависит от задачи, — также допустимая функция.

Будем пытаться теперь приближаться к искомому решению при помощи линейной комбинации Y_n, выбирая надлежащим образом коэффициенты a_i.

Дело теперь в том, чтобы указать такое правило выбора коэффициентов a_i, чтобы иметь известную надежду — в пределе при $n \to \infty$ получить решение задачи.

Для изучаемого нами класса задач наиболее естественным является следующий прием:

Подставим в $I(y)$ вместо y линейную комбинацию Y_n; полученное после подстановки выражение $I(Y_n)$ будет некоторой функцией оставшихся неопределенными коэффициентов a_i.

Выберем теперь их так, чтобы $I(Y_n)$ было минимальным [1]).

Требование $I(Y_n) = \min$ представляет собой задачу на экстремум функции n параметров a_i; для определения их будем иметь систему n уравнений

$$\frac{\partial I(Y_n)}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

[1]) Мы допускаем здесь возможность такого выбора.

Найдя отсюда числа a_i и подставив их в Y_n, получим некоторую линейную комбинацию функций u_i, которую мы назовем через U_n.

Рассмотрим теперь последовательность чисел $I(U_1)$, $I(U_2)$ . . . Можно видеть, что эта последовательность не возрастающая; в самом деле, переход от Y_n к Y_{n+1} равносилен расширению класса функций, для которых вычисляется интеграл, так как Y_{n+1} содержит лишнее слагаемое $a_{n+1}\, u_{n+1}$ сравнительно с Y_n.

При расширении же класса функций минимальное значение интеграла во всяком случае не увеличивается.

С другой стороны, эта последовательность ограничена снизу, ибо $I(Y_n) \geqq g$. Поэтому она имеет предел.

Если окажется, что этот предел равен g, т.-е. последовательность функций U_1, U_2, . . . будет минимизирующей, то тогда, следует думать, и сами функции U_1, U_2, . . . будут сходиться к решению задачи.

Но для того, чтобы быть уверенным в выполнении равенства

$$\lim_{n \to \infty} I(U_n) = g$$

необходимо брать систему функций u_1, u_2, . . . достаточно полной; в противном случае может оказаться, что $\lim\limits_{n \to \infty} I(U_n) > g$, и тогда нет надежды на то, что после предельного перехода $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$ мы получим функцию решающую задачу.

Обычно требования полноты системы u_1, u_2, . . . берут в виде требования „средней по отношению к $F(x, y, y')$ полноты“:

Какова бы ни была допустимая функция y, можно указать такое n и такие a_i, т.-е. такую линейную комбинацию Y_n, чтобы $I(Y_n)$ отличалось бы от $I(y)$ как угодно мало.

Если выполнено это требование средней полноты, то и построенная нами выше последовательность

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n,\ \ldots$$

будет, наверное, минимизирующей. Поясним это в двух словах.

Убедимся прежде всего в том, что из линейных комбинаций Y_n минимизирующая последовательность может быть построена.

В самом деле, пусть y_k взято из минимизирующей последовательности. По условию полноты для всякого ε_k можно выбрать такую $Y_{n(k)}$, чтобы

$$|I(Y_{n(k)}) - I(y_k)| \leqq \varepsilon_k.$$

Если же ε_k взять при условии $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$, то отсюда следует

$$\lim_{k \to \infty} I(Y_{n(k)}) = \lim_{k \to \infty} I(y_k) = g,$$

что и доказывает наше утверждение.

Теперь не представляет никаких затруднений доказать выполнение равенства $\lim\limits_{n \to \infty} I(U_n) = g$.

Действительно, так как $U_{n(k)}$ дает минимум $I(y)$ относительно всех линейных комбинаций из того же числа n (k) функций u_i, то

$$I(Y_{n(k)}) \geqq I(U_{n(k)}) \geqq g,$$

откуда вытекает требуемый результат.

Заметим здесь, что уравнения для определения a_i будут особенно просты, если функция $F(x, y, y')$ будет квадратичным выражением относительно y и y'. Это будет, например, иметь место почти для всех задач математической физики. В этом случае предшествующие уравнения дают систему n алгебраических линейных уравнений с n неизвестными.

Как уже отмечалось выше, из факта $\lim\limits_{n\to\infty} I(U_n) = g$ еще нельзя вообще заключить, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$, и если существует, то предельная функция будет допустимой.

Определение достаточно широких условий, которым должна удовлетворять функция F, чтобы из факта $\lim\limits_{n\to\infty} I(U_n) = g$ следовало бы, что последовательность $U_1, U_2, \ldots$ сходится к функции, решающей задачу, представляет еще и до настоящего времени, насколько нам известно, нерешенную задачу вариационного исчисления. Простейший случай таких исследований приведен нами ниже.

Насколько большой успех имеет этот метод при применении его к задачам частного вида, будет видно из вычислений, приводимых нами ниже. Он будет, разумеется, связан с более или менее счастливым выбором функций u_i.

Примеры применения метода Ритца. 1. Изопериметрическая задача. Среди всех плоских замкнутых кривых длины l, найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Мы сузим немного задачу и будем считать допустимой всякую кривую с конечным числом угловых точек.

Пусть:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqq s \leqq l$$

уравнение такой кривой; s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки.

Для упрощения дальнейших выкладок заменим переменную, положим

$$t = \frac{2\pi}{l} s.$$

Когда s меняется от 0 до l, t будет меняться от 0 до 2π.

Далее, очевидно:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 {}^{1)}.$$

---

1) Это непосредственно следует из равенства.

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Интегрируя обе части в пределах от нуля до 2π, имеем

$$\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt.$$

или

$$l^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Площадь s, ограничиваемая рассматриваемой кривой, будет равна

$$s = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{dy}{dt} \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Поставим перед собой задачу о разыскании максимума интеграла (2) при условии (1).

ПриΞем за u_1, u_2, ... тригонометрические функции

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \ldots .$$

Вопрос, в какой мере для них удовлетворяются условия пол- высказанные выше, мы оставляем здесь без исследования.

Пусть

$$x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

$$y_n = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x).$$

Подставим в (1) и (2); после простых вычислений, весьма упрощающихся, если воспользоваться ортогональностью тригонометрических функций, имеем:

$$l^2 = 2\pi^2 \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 + d_\nu^2) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$S = \pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Выберем теперь числа a_ν, b_ν, c_ν, d_ν, так, чтобы при условии (3) S было максимальным.

По известным правилам дифференциального исчисления составляем функцию

$$F = S + \lambda l^2$$

и записываем для нее условия несвязанного максимума.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_\nu} &= \pi\nu d_\nu + 4\pi^2\nu^2\lambda a_\nu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial d_\nu} &= \pi\nu a_\nu + 4\pi^2\nu^2\lambda d_\nu = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\nu = 1, \ldots, n$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial b_\nu} &= -\pi\nu c_\nu + 4\pi^2\nu^2\lambda b_\nu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_\nu} &= -\pi\nu b_\nu + 4\pi^2\nu^2\lambda c_\nu = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Чтобы системы (5) и (6) имели отличные от нулевого решения, необходимо и достаточно, чтобы для какого-либо значения ν, например k, определитель этих систем:

$$\begin{vmatrix} \pi k, & 4\pi^2 k^2\lambda \\ 4\pi^2 k^2 \lambda, & \pi k \end{vmatrix}$$

был бы равен нулю. Отсюда следует, что λ должно иметь вид

$$\lambda = \pm \frac{1}{4\pi k}.$$

Но тогда определители всех систем (5) и (6) для

$$\nu \neq k$$

будут отличны от нуля, и потому все

$$a_\nu, \; b_\nu, \; c_\nu, \; d_\nu,$$

при

$$\nu \neq k$$

равны нулю.

Мы выбираем у λ знак минус; выбор знака $+$, как легко выясняется, равносилен перемене направления интегрирования по контуру.

$$d_k = a_k \qquad b_k = -c_k$$

$$l^2 = 4\pi^2 k^2 (a_k^2 + b_k)$$

$$S = \pi k (a_k^2 + b_k^2) = \frac{l^2}{4\pi k}$$

Из последнего равенства видно, что максимум S достигается при $k = 1$. Системы (5) и (6) при

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi}$$

и

$$\nu = 1$$

дают

$$d_1 = a_1 \quad \text{и} \quad c_1 = -b_1$$

и все остальные

$$a_\nu,\ b_\nu,\ c_\nu \text{ и } d_\nu,$$

равны нулю, т. е.

$$x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

$$y = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t.$$

Предельный переход при $n \longrightarrow \infty$ ничего, очевидно, не изменит в полученном нами выражении для x и y, и уже при конечном n мы будем иметь случайно точное решение.

Можно видеть, что кривая, определенная предыдущим равенством, есть ничто иное, как окружность.

2. Пусть

$$g(x, y)$$

непрерывная в прямоугольнике

$$D(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$$

функция, представляемая там абсолютно и равномерно сходящимся тригонометрическим рядом

$$g(x, y) = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} C_{m,n} \sin mx \ \sin ny.$$

Будем искать функцию $\varphi(x, y)$, обращающуюся в нуль на границе области D и дающую минимум интегралу

$$I(\varphi) = \int_D\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - 2g\varphi\right] dx\, dy \quad \dots\dots (6)$$

В противоположность предыдущему случаю, искомое решение здесь есть функция двух переменных x и y. Естественно поэтому искать приближения к решению не в форме отрезков простого, а двойного ряда. Положим

$$\varphi_{ij} = \sum_{m,\, n=1}^{ij} a_{m,n} \sin mx \ \sin ny \quad \dots\dots\dots (7)$$

При нашем выборе функций, по которым разлагается приближение к решению, граничные условия для каждого приближения будут соблюдены.

Подстановка в (6) дает:

$$\frac{4}{\pi^2} I(\varphi_{ij}) = \sum_{m,\, n=1}^{ij} (m^2 + n^2)\, a_{m,n} - 2 \sum_{m,\, n=1}^{ij} C_{m,n}\, a_{m,n}.$$

Отсюда непосредственно видно, что минимум достигается при

$$a_{m,n} = \frac{C_{m,n}}{m^2 + n^2}.$$

Предельный переход при $i, j \longrightarrow \infty$ в равенстве (7) не изменит величины уже найденных коэффициентов и приводит к функции

$$\varphi(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{C_{m, n}}{m^2 + n^2} \sin mx \sin ny \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ряд, стоящий в правой части, так же как и ряды, получающиеся от почленного дифференцирования его, сходятся абсолютно и равномерно, что лёгко выясняется из требований, наложенных на

$$g(x, y).$$

В этом примере, как и в предыдущем, приближение любого порядка приводит к таким выражениям для коэффициентов, входящих в него, которые не зависят от номера этого приближения. Это происходит только благодаря удачному выбору функций u_i. Но в общем случае найденные для коэффициентов a_i выражения будут, вообще говоря, зависеть от номера приближения.

§ 35. Метод функций бесконечного множества аргументов.

Пусть дело идет об экстремуме некоторого интеграла $I(y)$. Будем рассматривать семейство функций, зависящее от бесконечного множества параметров a_i и такое, что каждая допустимая функция может быть получена из уравнения семейства при частной системе значений параметров, входящих в него. Наоборот, при всякой частной системе значений параметров из некоторых областей их изменения наше семейство дает допустимую функцию.

Например, мы можем предположить каждую допустимую функцию разложенной в ряд по каким-либо специальным функциям (тригонометрическим, Бесселя, Лежандра, степеням независимой переменной, если у нас есть необходимость считать допустимые функции аналитическими и т. д.). В этом случае каждая допустимая функция определится последовательностью коэффициентов разложения.

Подставим в $I(y)$ вместо y общее выражение семейства. После подстановки интеграл будет функцией параметров a_i, и дело будет заключаться в том, чтобы выбрать величины a_i так, что $I(y)$ было бы минимальным.

Разумеется, в каждом отдельном случае возможность применения такого приема должна быть оправдана дополнительными исследованиями сходимости и законности тех операций, которые проделываются по ходу рассуждений.

Мы поясним эти общие рассуждения на частном примере.

З а д а ч а Д и р и х л е д л я к р у г а. Пусть область D — круг единичного радиуса. Попытаемся определить функцию $\varphi(x, y)$, дающую минимум интегралу

$$I(\varphi) = \int_D \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

и принимающую на контуре заданные значения.

Допустимыми к конкуренции будем считать все непрерывные вплоть до контура, функции с такими же частными производными первого порядка и имеющие те же контурные значения, что и

$$\varphi(x,\ y).$$

Введем полярные координаты:

$$I(\varphi)=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2\right]rdrd\vartheta \quad \ldots \quad (9)$$

Заданные контурные значения будем предполагать некоторой функцией полярного угла ϑ, могущей быть разложенной в тригонометрический ряд

$$f(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu\vartheta+b_\nu\sin\nu\vartheta).$$

Мы не будем входить в исследование условий, которым должны удовлетворять коэффициенты разложения, чтобы излагаемые ниже преобразования задачи оставались справедливыми.

Рассмотрим семейство функций

$$\varphi=\frac{1}{2}f_0(r)+\sum_{\nu=1}^{\infty}[f_\nu(r)\cos\nu\vartheta+g_\nu(r)\sin\nu\vartheta)] \quad \ldots \quad (10)$$

Чтобы удовлетворить предельным условиям, мы потребуем выполнения равенств

$$f_\nu(1)=a_\nu\ g\ (1)=b_\nu.$$

Определенная равенством 10 функция $\varphi(x,\ y)$ зависит от выбора бесконечного множества функций f_ν, g_ν. Если мы теперь вообразим, что каждая из f_ν и g_ν разложена в ряд по специальным функциям какого-либо вида, то получим $\varphi(x,\ y)$ в форме двойного ряда с неопределенными коэфициентами, — как раз такое семейство, о котором говорилось в предварительных объяснениях.

Мы, однако, не будем этого делать, ибо определение f_ν и g_ν представляется здесь задачей исключительно простой.

Подставим (10) в интеграл (9):

$$I(\varphi)=\pi\int\limits_0^1 f'^2{}_0(r)rdr+\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^1\left[f_\nu'^2+\frac{\nu^2}{r^2}f_\nu^2\right]rdr+$$

$$+\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^1\left[g_\nu'^2+\frac{\nu^2}{r^2}g_\nu^2\right]rdr.$$

Решение первоначальной вариационной задачи свелось, таким образом, к решению целого ряда задач о минимуме для интегралов вида

$$\int\limits_0^1\left(f_\nu'^2+\frac{\nu^2}{r^2}f_\nu^2\right)rdr,\quad \int\limits_0^1\left(g_\nu'^2+\frac{\nu^2}{r^2}g_\nu^2\right)rdr.$$

Очевидно, что написанные интегралы имеют смысл только тогда, когда выполнено условие

$$f_\nu(0)=g_\nu(0)=0, \ \nu=1,2, \ldots$$

Для определения функций f_ν и g_ν мы прибегнем к искусственному приему, весьма быстро приводящему к цели, хотя они могли бы быть найденными, как отмечалось выше, по прямым методам вариационного исчисления.

$$\int_0^1 \left(f_\nu'^2+\frac{\nu^2}{r^2}f_\nu^2\right) r dr=\int_0^1 \left(f_\nu'-\frac{\nu}{r}f_\nu\right)^2 r dr+$$

$$+2\nu\int_0^1 f_\nu f_\nu' r dr=\int_0^1 \left(f_\nu'-\frac{\nu}{r}f_\nu\right)^2 r dr+\nu f_\nu^2(1), \quad \ldots (1)$$

так как

$$f_\nu(1)=a_\nu$$

известно, то минимум достигается тогда и только тогда, если

$$f_\nu'-\frac{\nu}{r}f_\nu=0, \text{ т.-е. } f_\nu=c_\nu r^\nu,$$

и так как

$$f_\nu(1)=a_\nu,$$

то

$$f_\nu(r)=a_\nu r^\nu.$$

Решение поставленной задачи имеет таким образом вид:

$$\varphi(r, \vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta+b_\nu\sin\nu\vartheta).$$

§ 36. Метод Эйлера.

Наконец, нельзя не упомянуть еще об одном методе построения минимизирующей последовательности, в существенных частях совпадающем с приемом, примененным Эйлером при выводе уравнений, носящих его имя.

Ради простоты мы останавливаемся только на основной задаче, хотя та же мысль о замене производных отношениями конечных разностей с успехом может быть применяема к гораздо более широкому классу задач.

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

Класс допустимых кривых задачи мы определяем требованиями:

1) y принадлежит классу $C^{(1)}$ в интервале

$$x^0 \leqq x \leqq x_1$$

2) $$y(x_0) = y_0 \quad y(x_1) = y_1.$$

Какова бы ни была допустимая функция y, всегда можно указать такую ломаную линию ρ, проходящую через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), чтобы $I(p)$ отличался бы от $I(y)$ как угодно мало. Это утверждение является следствием того обстоятельства, что для всякой кривой класса $C^{(1)}$ можно построить такую ломаную линию, которая отличалась бы как угодно мало от кривой не только по ординатам, но и по касательным. Наоборот, для всякой ломаной линии, проходящей через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) можно указать такую допустимую функцию y, для которой интеграл $I(y)$ отичался бы от интеграла $I(\rho)$ как угодно мало.

Из этих простых соображений следуют два утверждения:

1. *Существует такая последовательность ломаных линий*

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$$

проходящих через

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1),$$

что

$$\lim_{n \to \infty} I(p_n) = g.$$

2. *Для каждой ломаной линии p, проходящей через точки*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$$

выполнено неравенство

$$I(\rho) \geqq g,$$

т. е. g будет также точною нижнею границею величин $I(p)$.

Ибо, если только допустить, что существует такая ломаная линия, для которой

$$I(p) < g,$$

то можно было бы, согласно предыдущему, найти такую допустимую функцию y, интеграл для которой $I(y)$ отличался бы от $I(p)$ меньше чем на $g - I(p)$:

$$I(y) - I(p) < g - I(p),$$

что представляет очевидную нелепость, ибо g есть нижняя граница величин $I(y)$, тогда как из предыдущего неравенства следовало бы

$$I(y) < g.$$

Допустим, что нам каким-либо путем удалось построить минимизирующую последовательность ломаных линий:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Вполне естественно ожидать, что и сами ломаные линии будут стремиться к решению вариационной задачи, если такое существует. Само собой разумеется, что в каждом случае сходимость последовательности ломаных линий должна быть предметом специального исследования, и кроме того должно быть проверено, что интеграл от предельной функции будет точно равен g. Другими словами, должна быть установлена возможность предельного перехода под знаком интеграла:

$$g = \lim_{n \to \infty} I(p_n) = I(\lim_{n \to \infty} p_n).$$

Дело вновь заключается в том, чтобы указать процесс построения такого рода минимизирующих последовательностей

$$p_1, p_2, \ldots .$$

Ради упрощения обозначений во всем последующем мы будем обозначать координаты точки A через a и α и точки B через b и β.

Рассмотрим какую-либо ломаную линию p_n, состоящую из n звеньев и проходящую через A и B. Она вполне определится положением своих $n-1$ вершин

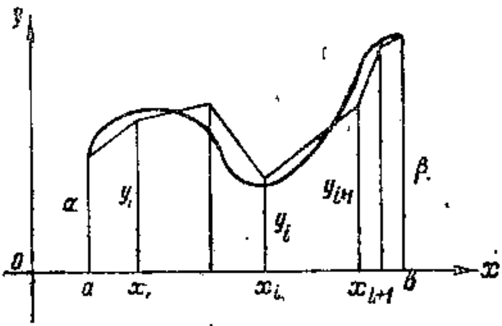

Рис. 20

$$(x_1, y_1) \ldots (x_i, y_i) \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (\text{рис. } 20).$$

Подставим вместо y в $I(y)$ ординату ломаной линии. В промежутке от x до x_{i+1} ордината ломаной линии будет равна

$$y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = y_i + \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}(x - x_i)$$

$$I(p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F\left(x,\ y_i + \frac{\Delta_i y}{\Delta_i y}(x - x_i), \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right) dx.$$

После всех вычислений мы $I(p_n)$ получим как функцию от

$$x_1, y_1, \ldots x_{n-1}, y_{n-1}$$

$$I(p_n) = I(x_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Выберем теперь оставшиеся неопределенными числа x_i, y_i из того требования, чтобы $I(p_n)$ было бы минимальным; получим некоторую ломаную линию p_n. Можно легко видеть, что последовательность построенных таким образом ломаных линий будет минимизирующей.

Но это, разумеется, не единственный и не самый простой выбор $p_1, p_2, \ldots$ хотя может быть и наиболее быстро ведущий к цели. Можно, например, абсциссы вершин ломаной линии p_n считать совпадающими с точками, делящими отрезок ab на n равных частей

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Тогда нахождение самих ломаных линий сведется к нахождению только величин y_i. Найденные таким образом p_n вновь образуют минимизирующую последовательность.

Этот прием, необычайно наглядный и простой по геометрической своей сущности, имеет сравнительно с методом Ритца тот несомненный недостаток, что не может дать удобного аналитического аппарата приближенного представления искомой функции во всем промежутке, но может быть всеже с успехом употребляем при численном нахождении решения.

Ниже мы даем пример применения метода Эйлера.

§ 37. Применения к интегрированию уравнений.

Насколько большое значение имеет вариационное исчисление для теоретической механики мы имели случай видеть при разборе принципов Лагранжа, Якоби, Гамильтона.

Развитие многих иных физических наук показало, что границы применимости вариационного исчисления значительно шире чем те, на которых мы останавливались до настоящего времени.

Это обстоятельство становится, впрочем, совершенно ясным, если обратить внимание на полную формальную аналогию, например, между многими уравнениями теории электричества, теплоты и т. д. и механики непрерывной среды.

Перейдем теперь к дальнейшим простым применениям вариационного исчисления к математической физике.

Дадим приложение вариационного исчисления к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы ограничиваемся, здесь ради простоты уравнениями второго порядка. Читатель, проследивший внимательно изложенные здесь рассуждения, без труда убедится в том, что тот же порядок идей может быть легко перенесен и на уравнения высшего порядка.

Пусть будет предложено найти решение дифференциального уравнения

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

удовлетворяющее предельным условиям:

$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B.$$

Функции

$$a(x),\; b(x),\; c(x),\; d(x)$$

будем предполагать непрерывными в промежутке от α до β и $a(x)$ отличной от нуля.

Мы не внесем никаких ограничений в общность рассматриваемого вопроса, если будем предполагать интервал α, β приводящимся к интервалу $(0, l)$ около начала координат.

Можно также считать, что предельные условия однородны и имеют вид

$$y(0)=y(l)=0.$$

Этого можно достигнуть, введя вместо $y(x)$ новую функцию $u(x)$, определенную равенством

$$y=u+\frac{x}{l}B+\frac{l-x}{l}A \qquad (4)$$

Мы будем считать, что это преобразование было уже сделано, так что y должно удовлетворять условиям:

$$y(0)=y(l)=0 \qquad (5)$$

Нам будет полезно ниже еще одно упрощение задачи. Мы предлагаем читателю проверить, что предложенное уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{dx}(p\ (x)y')-q(x)y=f(x), \qquad (6)$$

где

$$p(x)=e^{\int \frac{b}{a}dx} \quad q(x)=-\frac{c}{a}e^{\int \frac{b}{a}dx} \quad f=-\frac{d}{a}e^{\int \frac{b}{a}dx}$$

Благодаря сделанным относительно $a(x)$ и $b(x)$ предположениям, $p(x)$ будет положительной и дифференцируемой функцией, отличной от нуля в промежутке

$$0\leqq x\leqq l.$$

Непосредственно видно, что (6) есть уравнение Эйлера для интеграла

$$I=\int\limits_0^l \left\{ p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y \right\} dx \qquad (7)$$

и задача интегрирования равносильна, таким образом, задаче о разыскании кривой, дающей экстремальное значение интегралу (7) и удовлетворяющей предельным требованиям:

$$y(0)=y(l)=0 \qquad (8)$$

Все наши последующие рассуждения будут относиться к случаю, когда

$$q(x)\geqq 0.$$

Будем искать решение задачи по методу Ритца.

Рассмотрим последовательность линейно-независимых функций

$$u_1,\ u_2,\ \ldots.\ u_n,\ \ldots.$$

непрерывных в интеграле $(0, l)$ вместе с первыми производными и удовлетворяющих предельным условиям (8).

Составляем линейную комбинацию первых n функций u с неопределенными коэфициентами

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} u_i$$

и подставляем в $I(y)$. После производства квадратур получим результат вида:

$$I_n = \int_0^l (p y_n'^2 + q y_n^2 + 2 f y_n)\, dx =$$

$$= \sum_{i,j}^{..n} \alpha_{ij} a_i^{(n)} a_j^{(n)} + \sum_{i=}^{1...n} \beta_i a_i^{(n)} \qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji},$$

где для краткости обозначено

$$I(y_n) = I_n.$$

Коэффициенты $a_i^{(n)}$ должны быть найдены из условия стационарности I_n:

$$\frac{\partial I_n}{\partial a_i^{(n)}} = \int_0^l (p y_n' u_i' + q y_n u_i + f u_i)\, dx = 0 \ . \ . \ . \ . \quad (9_1)$$

$$i = 1, \ldots n$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_k^{(n)} + \frac{1}{2} \beta_i = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9_2)$$

Определитель найденной системы уравнений есть вместе с тем определитель квадратичной формы, входящей в выражение для I_n и происходящей от интегрирования

$$p y_n'^2 + q y_n^2.$$

Так как $p(x)$ и $q(x)$ не отрицательны, то эта квадратичная форма будет определенной положительной. В самом деле, она может быть равна нулю только тогда, когда $y_n = 0$, т.-е. числа $a_i^{(n)}$ выбраны так, что линейная комбинация функций u_i равна нулю тождественно. Но это означало бы, что либо u_i между собой линейны зависимы, что противоречит сделанным о них предположениям, либо $a_i^{(n)} = 0$.

Определитель формы будет поэтому отличен от нуля, и система (9), наверное, имеет одно и только одно решение.

Найдя из (9) числа $a_i^{(n)}$ составим по ним n-ое приближение

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} y_n.$$

При n, стремящемся к ∞, следует думать, что y_n будет стремиться к точному решению поставленной задачи.

Обычно во всех практически важных случаях последовательность y_n сходится весьма быстро, и изложенный прием дает прекрасное орудие приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.

§ 38. Доказательство сходимости процесса Ритца.

Для доказательства сходимости построенных по Ритцу приближений y_n нам удобнее будет употреблять уравнения (9_1), в несколько иной эквивалентной форме. Умножим каждое из них на произвольно взятое число $A_i^{(n)}$ и сложим их. Если обозначить

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} u_i ,$$

то в результате суммирования будем иметь:

$$\int_0^l (py_n'\eta_n' + qy_n\eta_n + f\eta_n)\,dx = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

для любых комбинаций η_n; наоборот, если (10) выполнено для всяких линейных комбинаций η_n, то должны иметь место уравнения (9_1). В самом деле, чтобы убедиться в этом, достаточно положить в η_n все A равными нулю за исключением одного $A_i^{(n)}$, который взять равным 1. Тогда $\eta_n = u_i$ и уравнение (10) переходит в i-ое уравнение системы (9_1). Оценим теперь разность

$$I_{n+m} - I_n .$$

Заметим прежде всего, что разность между приближениями y_{n+m} и y_n есть линейная комбинация из первых $n+m$ функций u. Мы обозначим ее через η_{n+m}

$$\eta_{n+m} = y_{n+m} - y_n ,$$

откуда

$$y_n = y_{n+m} - \eta_{n+m}$$

$$I_n = \int_0^l (py_n'^2 + qy_n + 2fy_n)\,dx =$$

$$= \int_0^l \left\{ p(y'_{n+m} - \eta'_{n+m})^2 + q(y_{n+m} - \eta_{n+m})^2 + 2f(y_{n+m} - \eta_{n+m}) \right\} dx =$$

$$= \int_0^l \left\{ py'^2_{n+m} + qy^2_{n+m} + 2fy_{n+m} \right\} dx -$$

$$- 2\int_0^l \left\{ py'_{n+m}\eta_{n+m} + qy_{n+m}\eta_{n+m} + fy_{n+m}\eta_{n+m} \right\} dx +$$

$$+ \int_0^l (p\eta'^2_{n+m} + q\eta^2_{n+m})\,dx.$$

Первый интеграл, стоящий в правой части есть ничто иное, как I_{n+m}; второй интеграл отличается от (10) только индексом, и так как равенство (10) должно быть выполнено для всяких n и η, то он равен нулю. Мы будем иметь поэтому

$$I_{n+m}-I_n=-\int_0^l\left\{p\,(y'_{n+m}-y_n')^2+\right.$$

$$\left.+q\,(y_{n+m}-y_n)^2\right\}dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Отсюда следует прежде всего, что последовательность чисел $I_2, I_3, \ldots I_n, \ldots$ будет не возрастающей.

С другой стороны, легко установить ограниченность снизу этой последовательности. В самом деле, если функция y допустима и обращается в нуль на концах промежутка $(0, l)$, то

$$\int_0^l fy\,dx=\Big|_0^l y\int_\alpha^x f\,dx-\int_0^l y'\int_\alpha^x f\,dx\,dx=-\int_0^l y'\int_\alpha^x f\,dx\,dx$$

и

$$I(y)=\int_0^l\left\{\left(\sqrt{p}\,y'-\frac{\int_\alpha^x f dx}{\sqrt{p}}\right)^2+qy^2\right\}dx-$$

$$-\int_0^l\left\{\frac{\int_\alpha^x f dx}{\sqrt{p}}\right\}^2dx\geqq-\int_0^l\left\{\frac{\int_\alpha^x f dx}{\sqrt{p}}\right\}^2dx.$$

Это неравенство доказывает наше утверждение, так как правая часть не зависит от выбора функции y.

Упомянутая выше последовательность $I_2, I_3 \ldots$ значений интеграла $I(y)$ будет, следовательно, сходящейся, и разность

$$I_n-I_{n+m}$$

может быть сделана меньше любого наперед заданного

$$\varepsilon>0$$

для всяких m и n, если только n будет больше некоторого достаточно большого числа.

$$\int_0^l\left\{p\,(y'_{n+m}-y_n')^2+q\,(y_{n+m}-y_n)^2\right\}dx\leqq\varepsilon$$

при

$$n\geqq N.$$

Последнее немедленно позволяет установить сходимость

$$y_1, y_2 \ldots .$$

В самом деле,

$$\left| y_{n+m} - y_n \right| = \left| \int_0^x (y'_{n+m} - y_n')\, dx \right|.$$

Применим к правой части известное неравенство Шварца-Буняковского:

$$\left| \int_a^b f\varphi\, dx \right| \leqq \left(\int_a^b f^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \varphi^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$| y_{n+m} - y_n | \leqq \left(\int_0^x dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (y'_{n+m} - y_n')^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{l}{\min p}} \left(\int_0^l \{ p\,(y'_{n+m} - y_n')^2 + q\,(y_{n+m} - y_n)^2 \}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{\min p}} \sqrt{I_n - I_{n+m}} \leqq \sqrt{\frac{l}{\min p}} \sqrt{\varepsilon}.$$

Полученное неравенство устанавливает не только сходимость $y_1, y_2, \ldots,$ но даже равномерную сходимость их, ибо правая часть не зависит от x, и предельная функция $y(x)$ этой последовательности будет поэтому непрерывной.

Мы обращаем здесь внимание читателя на то обстоятельство, что в доказательстве сходимости процесса Ритца мы существенно пользовались кроме естественных условий непрерывности функций u и соблюдения граничных условий только лишь линейной независимостью u_i. Процесс остается сходящимся независимо от того будет или не будет полной система

$$u_1, u_2, \ldots .$$

Но если эта система не полна, то далеко еще не обязательно должно быть

$$\lim_{n \to \infty} I_n = g$$

и тогда надежда, что предельный переход

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y(x)$$

приведет к решению вариационной задачи, — крайне низка; только случайно задача может оказаться решенной.

Естественно поэтому доказательство того, что предельная функция удовлетворит уравнению (6) Эйлера, потребует дополнительно ограничительных предположений для системы функций u_n относительно их полноты.

Мы приведем доказательство этого предложения, принадлежащее родоначальнику изучаемого метода, В. Ритцу.

Ограничения, которым он подвергает функции u_n слишком тяжелы, и, как мы покажем немного ниже, тот же результат будет иметь место при гораздо меньших ограничениях.

Мы будем требовать (это и является недостатком хода рассуждений Ритца), чтобы *всякая функция* $\eta(x)$ *класса* $C^{(2)}$, *удовлетворяющая граничным требованиям*

$$\eta(0)=\eta(l)=\eta'(0)=\eta'(l)=0$$

могла быть получена предельным переходом из линейных комбинаций η_n *функций* u_n *при надлежащем выборе постоянных* $A_i^{(n)}$ *и чтобы были выполнены равномерно следующие предельные равенства:*

$$\lim_{n\to\infty}\eta=\eta,\ \lim_{n\to\infty}\eta_n'=\eta',\ \lim_{n\to\infty}\eta_n''=\eta''.$$

Эти требования, как известно из общей теории рядов, равносильны тому, чтобы можно было любую функцию η класса $C^{(2)}$ разложить в ряд по линейным комбинациям u_n так, чтобы возникающий после двукратного почленного дифференцирования его ряд был бы опять равномерно сходящимся.

Для выяснения идеи доказательства Ритца обратимся к основному в этом вопросе уравнению (10), характеризующему выбор функций y_n.

Предельный переход в этом равенстве, если бы он был возможен, дал бы нам уравнение, характеризующее предельную функцию $y(x)$. Но если нами доказана равномерность выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

то из всех предшествующих рассуждений еще никак не следует не только сходимость

$$y_2',\ y_3',\ \ldots\ y_n'\ \ldots\ ,$$

но даже просто факт дифференцируемости предельной функции y.

Естественно поэтому пытаться преобразовать перед предельным переходом равенство (10) так, чтобы освободиться в нем от y_n'.

$$\int_0^l p\,y_n'\eta_n'\,dx=\Big|_0^l\eta_n'\int_0^x py_n'\,dx-\int_0^l\eta_n''\int_0^x py'_n\,dx\,dx=$$

$$=\Big|_0^l\eta_n'\left(py_n-\int_0^x p'y_n\,dx\right)-\int_0^l\eta_n''\left(py_n-\int_0^x p'y_n\,dx\right)dx=$$

$$=-\eta_n'(l)\int_0^l p'y_n\,dx-\int_0^l\eta_n''\left(py_n-\int_0^x p'y_n\,dx\right)dx.$$

(10) принимает вид

$$-\eta_n'(l)\int_0^l p'y_n\,dx+\int_0^l\left\{(qy_n+f)\eta_n-\right.$$

$$\left.-\eta_n''\left(py_n-\int_0^x p'y_n\,dx\right)\right\}dx=0.$$

Перейдем теперь к пределу при $n\to\infty$ так, чтобы η_n стремилась указанным выше способом к $\eta(x)$, где $\eta(x)$ любая функция класса $C^{(2)}$, удовлетворяющая требованиям

$$\eta(0)=\eta(l)=\eta'(0)=\eta'(l)=0.$$

В пределе, так как

$$\lim\eta_n'(l)=0,$$

получим:

$$\int_0^l\left\{(qy+f)\,\eta-\eta''\left(py-\int_0^x p'y\,dx\right)\right\}dx=0 \quad (12,a)$$

или так как:

$$\int_0^l(qy+f)\,\eta\,dx=\Big|_0^l\eta\int_0^x(qy+f)\,dx-\int_0^l\eta'\int_0^x(qy+f)\,dx\,dx=$$

$$=-\int_0^l\eta'\int_0^x(qy+f)\,dx\,dx=\int_0^l\eta''\int_0^x\int_0^x(qy+f)\,dx\,dx\,dx.$$

$$\int_0^l\left\{py-\int_0^x p'y\,dx-\int_0^x\int_0^x(qy+f)\,dx\,dx\right\}\eta''\,dx=0 \quad (12,b).$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется доказательство следующей обобщенной *леммы Дюбуа-Реймона*:

Если $F(x)$ *непрерывная функция и*

$$\int_0^l F(x)\,\eta''\,dx=0$$

для всякой функции $\eta(x)$ *класса* $C^{(2)}$, *удовлетворяющей предельным условиям*

$$\eta(0)=\eta(l)=\eta'(0)=\eta'(l)=0$$

то $F(x)$ *линейна:*

$$F(x)=C_1x+C_2.$$

В самом деле, из-за требований наложенных на $\eta(x)$, для каждой линейной функции $Ax+B$ должно быть

$$\int\limits_0^l (Ax+B)\eta'' dx=0.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить интеграл по частям

$$\int\limits_0^l (Ax+B)\eta'' dx=\Big|_0^l \eta'(Ax+B)-A\int\limits_0^l \eta' dx=0.$$

Поэтому, одновременно с

$$\int\limits_0^l F\eta'' dx=0$$

должно быть выполнено также

$$\int\limits_0^l (F-Ax-B)\eta'' dx=0. \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

Выберем теперь A и B так, чтобы функция

$$\varphi(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^x (F-Ax-B)\,dx\,dx$$

удовлетворяла тем же требованиям, что и $\eta(x)$.

Что касается условий для левого конца интервала:

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0$$

то они, очевидно, соблюдены. Остались еще требования

$$\varphi(l)=\varphi'(l)=0,$$

которые дают систему двух уравнений для определения A и B.

$$A\int\limits_0^l\int\limits_0^x x\,dx\,dx+B\int\limits_0^l\int\limits_0^x dx\,dx=\int\limits_0^l\int\limits_0^x F\,dx\,dx$$

$$A\int\limits_0^l x\,dx+B\int\limits_0^l dx=\int\limits_0^l F dx.$$

Решение этой системы всегда возможно, так как определитель ее

$$\begin{vmatrix} \frac{l^3}{6} & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & l \end{vmatrix} = -\frac{l^3}{12}$$

отличен от нуля.

Если положить теперь

$$\eta = \varphi(x),$$

то равенство (13) обращается в

$$\int_0^l (F - Ax - B)^2\, dx = 0.$$

Откуда сейчас же следует:

$$F - Ax - B = 0.$$

Так как относительно $\eta(x)$, входящей в интеграл (12,b) справедливы все предположения, указанные в лемме, мы имеем право утверждать, что выражение, стоящее в фигурных скобках под знаком интеграла, должно быть линейной функцией от $x'a$]

$$py = \int_0^x p'y dx + \int_0^x \int_0^x (qy + f)\, dx\, dx + Ax + B.$$

Правая часть этого равенства имеет производную по x, и так как $\rho(x)$ дифференцируема и отлична от нуля, должна иметь производную по x и функция $y(x)$.

Беря производную по x от обеих частей предыдущего равенства, будем иметь:

$$\rho y' + p'y = p'y + \int_0^x (qy + f)\, dx + A$$

или, после сокращения,

$$py' = \int_0^x (qy + f)\, dx + A.$$

Правая часть полученного равенства вновь дифференцируема и поэтому опять должна быть дифференцируемой и левая часть. Беря вторично производную по x от обеих частей, придем к заключению, что найденная нами функция $y(x)$ должна удовлетворять заданному дифференциальному уравнению

$$(py')' - qy' = f.$$

Наконец, последний вопрос, подлежащий исследованию, это вопрос о том, действительно ли найденная нами функция $y(x)$ дает функционалу $I(y)$ наименьшее значение.

Всякая допустимая функция $\overline{y}(x)$ рассматриваемой задачи может быть представлена в виде

$$\overline{y}=y+\eta,$$

где η некоторая функция класса $C^{(1)}$, обращающаяся в нуль на концах интервала $(0, l)$,

$$I(\overline{y})=\int_0^l\left\{p(y'+\eta')^2+q(y+\eta)^2+2f(y+\eta)\right\}dx=$$

$$=\int_0^l(py'^2+qy^2+2fy)\,dx+2\int_0^l\left\{py'\eta'+qy\eta+f\eta\right\}dx+$$

$$+\int_0^l(p\eta'^2+q\eta^2)\,dx$$

или, так как первый интеграл правой части есть ничто иное, как $I(y)$ и

$$\int_0^l\left\{py'\eta'+(qy+f)\eta\right\}dx=\Big|_0^l\eta py'+\int_0^l\left\{qy+f-(py')'\right\}\eta\,dx=0,$$

ибо η обращается в нуль на концах интервала и y удовлетворяет уравнению

$$(py')'-qy-f=0,$$

$$I(\overline{y})-I(y)=\int_0^l\left\{p(\overline{y}'-y')^2+q(\overline{y}-y)^2\,dx\right\}\geqq 0\ .\ \ (14)$$

Из этого равенства следует, что интеграл I, вычисленный для всякой допустимой кривой $\overline{y}$, отличной от y, будет больше, чем интеграл I, вычисленный для кривой y.

Изложенные рассуждения Ритца устанавливают два обстоятельства:

1) *существование решения поставленной вариационной задачи* и

2) *возможность его нахождения как предела минимизирующей последовательности Ритца*, если функции u_n удовлетворяют перечисленным весьма тяжелым требованиям. Но после того, как установлено существование решения, сходимость процесса Ритца может быть очень просто доказана при гораздо более общих предполо-

жениях о функциях u_n; достаточным для сходимости процесса оказывается простое условие полноты функции u_n.

Пусть в самом деле $y(x)$ есть решение задачи и $y_n(x)$ — n-ое приближение к нему, построенное по Ритцу. Так как $y_n(x)$ допустимая функция, то для нее должно иметь место равенство (14).

Оценим теперь разность

$$y_n - y:$$

$$\left| y_n - y \right| = \left| \int_0^x (y_n' - y')\, dx \right| \leqslant \left\{ \int_0^x dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_0^x (y_n' - y')^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{x} \left\{ \frac{1}{\min p} \int_0^l (p(y_n' - y')^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{\frac{l}{\min p}} \left\{ \int_0^l p(y_n' - y')^2 + \right.$$

$$\left. + q(y_n - y)^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{\min p}} \sqrt{I(y_n) - I(y)} \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Но если система функций полна в принятом нами смысле, то при бесконечно возрастающем n

$$I(y_n) \to I(y)$$

и последовательность функций

$$y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n,\ \ldots$$

равномерно сходится поэтому к предельной функции $y(x)$.

Сравнительная простота вычислений и быстрая сходимость процесса, в чем мы будем иметь случай убедиться ниже, делают метод Ритца удобным орудием приближенного решения вариационных задач. В последние годы он начинает приобретать все более широкое применение в инженерной практике. Интересным, поэтому, является вопрос об оценке ошибки, которая допускается, когда вместо точного решения задачи, принимается n-ое приближение к нему.

Эта ошибка должна быть оценена, по возможности, тщательно, чтобы результаты имели значение практического характера. Только тогда мы сможем удовлетворительно ответить на вопрос какое нужно взять приближение, чтобы ошибка результата вычислений не превосходила бы наперед заданной величины.

В практических вычислениях, чтобы не делать проведение их заведомо невыполнимым или черезчур трудным, принуждены ограничиваться, обычно, небольшими n (в громадном большинстве случаев берут $n=1, 2, 3, 4, 5$), и тогда даже небольшое преувеличение коэффициентов, входящих в оценку ошибки, сейчас же скажется на оценке нумера приближения n, которое необходимо взять при заданной точности вычислений.

Как мы уже говорили выше, быстрота сходимости будет, вообще, зависеть от удачного или неудачного выбора системы функций u_n.

Упомянутые оценки, для широких классов таких функций, едва ли будут иметь практическое значение, ибо они должны предусмотреть и случаи самого неудачного выбора u_n. Если же мы выбрали их не совсем несчастливо, то можно быть заранее уверенным в том, что то значение нумера приближения, которое мы должны бы были взять согласно этих оценок для получения желаемой точности, наверное, будет сильно преувеличено.

Большую практическую цену имеют оценки для сравнительно узких классов задач и конкретных способов выбора функций u_n. Но даже и здесь результат, даваемый оценкой, повидимому, нужно рассматривать как ориентировочный, и вычислитель предпочтет, вероятно, несколько уменьшить полученное из оценки значение n и работать с меньшим числом неизвестных, проделав после поправочные вычисления, чем сразу же проводить вычисления для больших n, так как трудность их возрастает, обыкновенно, гораздо быстрее чем растет n.

Ниже мы приведем несколько таких оценок.

Вернемся сейчас на некоторое время к нашей общей задаче.

Вопрос, который нас интересует в настоящее время, мы сформулируем следующим образом:

Известно, что решение дифференциального уравнения (6) *при предельных условиях*

$$y(0)=y(l)=0$$

существует. Для некоторой системы

$$u_1,\ u_2,\ \ldots$$

построено n-ое приближение к нему y_n по Ритцу. Нужно оценить разность

$$y_n-y.$$

Для того порядка идей, которого мы придерживались в нашем изложении, естественно пытаться оценить

$$|\,y_n-y\,|$$

посредством величины, характеризующей оценку разности,

$$I(y_n)-I(y);$$

другими словами говоря, быстроту сходимости в смысле функций оценивать быстротой приближения по функционалу; соответствующая формула была нами получена раньше

$$|\,y_n-y\,|\leq\sqrt{\frac{l}{\min p}}\cdot\sqrt{I(y_n)-I(y)}.$$

Это неравенство можно бы было принять за исходную точку оценки погрешности. Но, к сожалению, такой путь, хотя и наиболее естественный, имеет почти неопреодолимые затруднения, ибо найти величину, более или менее точно оценивающую правую часть, представляется крайне трудным.

Мы покажем только, на одном примере, как пользуясь (15) можно, правда, довольно грубо, оценить порядок малости ошибки.

Пусть

$$u_n = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Попрежнему будем обозначать y_n приближение, построенное по Ритцу, а через Y_n назовем сумму первых n членов разложения в ряде Фурье решения по

$$\sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

где

$$b_i = \frac{2}{l} \int_0^l y \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

Так как y_n дает минимум $I(y)$ относительно всех линейных комбинаций с тем же n, то должно быть

$$I(y_n) - I(y) \leq I(Y_n) - I(y) =$$

$$= \int_0^l \left\{ p(y' - Y_n')^2 + q(y - Y_n)^2 \right\} dx.$$

Y_n' есть первые n членов разложения y' по

$$\cos \frac{n\pi x}{l},$$

что сразу выясняется в силу предельных условий, так как

$$\frac{2}{l} \int_0^l y' \cos \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \Big| \cos \frac{i\pi x}{l} \cdot y +$$

$$+ \frac{2i\pi}{l^2} \int_0^l y \sin \frac{\pi i x}{l} dx = \frac{i\pi}{l} b_i$$

$$\int_0^l (y - Y_n)^2 dx = \sum_{i=n+1}^{\infty} \cdot b^2{}_i \leq \frac{l^2}{\pi^2 (n+1)^2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\pi^2 (n+1)^2}{l^2} b_{n+1}^2 + \frac{\pi^2 (n+2)^2}{l^2} b_{n+2}^2 + \ldots \right) =$$

$$= \frac{l^2}{\pi^2 (n+1)^2} \int (y' - Y_n')^2 dx.$$

$$\int_0^l \left\{ p(y' - Y_n')^2 + q(y - Y_n)^2 \right\} dx = \left\{ \max p + \frac{l^2 \max q}{\pi^2 (n+1)^2} \right\} \cdot$$

$$\int_0^l [y' - Y_n']^2 dx.$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что

$$\int_0^l (y' - Y'_n)^2 \, dx$$

будет величиной порядка

$$\frac{A}{(n+1)^2}$$

и неравенство (15) приводит к следующей оценке порядка малости ошибки:

$$| y - y_n | = \frac{B}{n+1}.$$

Определять, как зависит B от p, q, f, мы не будем, ибо в настоящее время известно более точное выражение для погрешностей, чем найденное здесь.

Как пример более точной оценки верхней границы погрешности, мы приведем здесь результаты исследований акад. Н. М. Крылова [1]), основанных на совершенно иных соображениях чем те, которыми мы пользовались выше.

Дело идет о приближенном решении уравнения

$$y'' - qy = f(x) \quad q \geqq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Как и раньше

$$u_n = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Н. М. Крылов пытается сравнивать ошибку, даваемую методом Ритца, с ошибкой, даваемой отрезком ряда Фурье разложения искомого решения по sinus'ам кратных дуг. Если y_n и Y_n имеют прежние значения, то результат, к которому он приходит, записывается в следующей форме:

$$| y - y_n | < | y - Y_n | + \frac{\max q}{4\left(1 - \frac{\max q}{(n+1)^2 \pi^2}\right)}$$

$$\left[1 + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,(n+1)^{\frac{3}{2}} \pi^2}\right] \left\{ \int_0^l (y - Y_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Эта формула позволяет оценить погрешность n-го приближения в смысле Ритца, если известна ошибка

$$- Y_n$$

отрезка n членов ряда Фурье, превосходящая величина для которой может быть найдена на основании классической теории рядов Фурье.

---

[1]) Крылов, Н. М. „Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique" в Memorial de sciences mathématiques. Fas. XLIX, 1931.

Среди оценок такого рода мы укажем только следующую:

$$| y-Y_n | \leqq \frac{\sqrt{2}\max\sqrt{q}}{\pi^{\frac{3}{2}}(n+1)^{\frac{3}{2}}}\left\{\int\limits_0^l \frac{f^2}{q}dx\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (18)$$

Если $q(x)$ обладает дополнительно интегрируемой со своим квадратом второй производной, то неравенство (17) может быть заменено следующим:

$$| y-y_n | = | y-Y_n | +$$

$$+\Theta\left(1+\frac{\max q}{4}\right)\frac{N}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}\left\{\int\limits_0^l (y-Y_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (19)$$

$$0 \leqq | \Theta | < 1$$

доказывающим интересное обстоятельство эквивалентности ошибки приближения по Ритцу и ошибки приближения по Фурье:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max | y-y_n |}{\max | y-Y_n |}=1 \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

§ 39. Приложение метода Ритца к приближенному вычислению характеристических чисел и фундаментальных функций.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, часто встречающееся в исследовании вопросов теплопроводности, упругих, электрических и других колебаний и других вопросах физики.

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [\lambda\rho(x) - q(x)]y = 0, \quad \ldots\ldots (21)$$

где p, ρ, q, суть непрерывные в интервале от 0 до l функции, $p(x)$ отлична от нуля и имеет там непрерывную производную первого порядка.

Будем искать интеграл уравнения (10), удовлетворяющий предельным условиям.

$$y(0) = y(l) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

и не обращающийся тождественно в нуль.

Задача эта (как известно), может быть решена только для некоторых значений параметра λ, называемых характеристическими числами уравнения (10). Соответствующие им решения уравнения получили название фундаментальных функций.

Поставленная проблема эквивалентна следующей задаче вариационного исчисления: *среди функций класса C^1 в промежутке $(0, l)$ удовлетворяющих предельным условиям* (11) *и не равных тождественно нулю, найти ту, которая дает стационарное значение интегралу:*

$$I(y) = \int\limits_0 [p(x)y'^2 + (q(x) - \lambda\rho(x))y^2]dx \quad \ldots (32).$$

Действительно, уравнение Эйлера для интеграла (12) совпадает с (10).

То же уравнение (10) можно рассматривать, как уравнение Эйлера для интеграла

$$\int_0^l (py'^2 + qy^2)\,dx$$

при связи

$$\int_0^l \rho y^2\,dx = 1,$$

т. е. как задачу изопериметрического характера. К такой постановке вопроса мы возвратимся ниже.

Существование решения мы принимаем без доказательства.

Будем искать характеристические числа и фундаментальные функции по методу Ритца. Так же как и в предыдущем параграфе, берем систему функций u_i, удовлетворяющую перечисленным там требованиям, составляем линейную комбинацию из конечного числа этих функций

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} u_i,$$

подставляем ее в интеграл и записываем условия стационарности его поведения. Получим систему n линейных однородных уравнений с n неизвестными

$$a_i^{(n)} (i = 1, \ldots n),$$

коэффициенты которой будут линейными функциями параметра λ.

Эта система может иметь решение отличное от нуля тогда и только тогда, если ее определитель равен нулю.

Это требование, вообще говоря, даст уравнение степени n относительно λ. Корни его

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots \lambda_m^{(n)}$$

могут быть приняты за приближенные значения первых n характеристических чисел задачи. Для каждого из них $\lambda_m^{(n)}$ может быть найдена своя система чисел $a_i^{(n)}$ и по ней построена соответствующая функция $y_m^{(n)}(x)$, которая приближенно может быть взята за фундаментальную функцию y_m.

При $n \to \infty$ можно ожидать, что найденные нами таким путем приближенные выражения для характеристических чисел и фундаментальных функций стремятся к точным значениям их.

Доказательства сходимости этого процесса слишком сложны, и приводить их здесь мы не будем.

В виде примера мы приведем некоторые результаты из упоминавшихся уже мемуаров акад. Н. М. Крылова.

Дело идет о нахождении характеристических чисел и фундаментальных функций для уравнения

$$y'' + \lambda\rho(x)y = 0 \quad \rho(x) > 0$$

при условиях

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Вот, наиболее простые из большого числа полученных им оценок.

Если положить, например,

$$u_n = \sqrt{2}\sin n\pi x,$$

то

$$|\lambda_m - \lambda_m^{(n)}| \leq \frac{2\lambda_m^2 \max \rho^{\frac{3}{2}}}{\min \sqrt{\rho}\cdot(n+1)^2\pi^2 - 2\max \rho^{\frac{3}{2}}\lambda_m}$$

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m}\right| < \frac{\lambda_m^{(n)} \max \rho}{(n+1)^2\pi^2}$$

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)} - \lambda_m}{\lambda_m}\right| \leq \frac{\lambda_m A}{\pi^2(n+1)^2 - B\lambda_m}$$

$$A = (\max \rho - \min \rho)\sqrt{\frac{\max \rho}{\min \rho}}$$

$$B = 2\max \rho.$$

И для n-ого приближения $y_m^{(n)}$ к m-ой фундаментальной функции y_m (мы ограничиваемся формулой, характеризующей только быстроту сходимости):

$$(y_m - y_m^{(n)}) \leq \frac{\lambda_m^{(n)} M}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\pi^2},$$

где M некоторое число, зависящее от m.

В практических вычислениях столь же часто, как и тригонометрическими функциями, если даже не чаще, пользуются многочленами, так как вычисления с ними во многих случаях бывают проще. Мы считали полезным, поэтому, привести несколько формул, относящихся к этому случаю [1]).

Так, например, пусть дело идет о решении уравнения:

$$y'' + \lambda\rho(x)y = 0 \quad \rho(x) > 0$$

при

$$y(-1) = 0, \quad y(+1) = 0.$$

Примем:

$$u_n = x^{n-1}(1 - x^2).$$

---

[1]) Крылов, Н. М.: „Sur la solution approchée des problèmes...“ Известия Академии Наук, 1929, № 5.

Множитель $(1-x^2)$ выделен, чтобы удовлетворить граничным требованиям.

Здесь имеют место следующие неравенства:

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right|<\frac{\lambda_m^{(n)}\ \max\rho}{(n+1)\ (n+2)}.$$

Формула эта справедлива при простой непрерывности $\rho(x)$.

Если же $\rho(x)$ имеет кроме того непрерывные производные первого или второго порядков, то соответственно будет:

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right|<\frac{N_1\lambda_m^{(n)}}{(n+1)^2\ (n+2)},$$

где

$$N_1=\left\{\max\left|\frac{\rho'}{\sqrt{\rho}}\right|+\sqrt{\lambda_m^{(n)}}\sqrt[4]{\frac{\max\rho^5}{\min\rho}}\right\}^2$$

и

$$\left|\frac{\lambda_m^{(n)}-\lambda_m}{\lambda_m}\right|<\frac{N_2\lambda_m^{(n)}}{n^2(n+1)^2\ (n+2)\ (n-1)},$$

где

$$N_2=\left\{\max\left|\frac{\rho''}{\sqrt{\rho}}\right|+2\max\rho'\left[\frac{\lambda_m^{(n)}\max\sqrt{\rho}}{\min\sqrt{\rho}}\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\max\rho^{\frac{3}{2}}\lambda_m^{(n)}\right\}^2$$

§ 40. Примеры применения прямых методов.

Приводимая ниже задача заимствована из мемуара Ритца „Новый метод решения вариационных задач математической физики" (Journal für reine und angew. Mathem. Bd. 135, 1909).

Изучение колебаний однородной струны по методу Фурье, как известно, приводит к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$y''+k^2y=0.$$

Допустим, что наша струна имеет длину 2 и закреплена в точках -1 и $+1$.

$$y(-1)=y(1)=0.$$

Общее решение уравнений есть

$$y=A\sin(kx+\varphi).$$

Из предельных условий непосредственно видно, что основной тон струны дается решением

$$y=\cos\frac{\pi x}{4},\quad k=\frac{\pi}{2};$$

первый обертон:

$$y=\sin \pi x, \quad k=\pi;$$

второй обертон:

$$y=\cos\frac{3\pi x}{2}, \quad k=\frac{3\pi}{2} \text{ и т. д.}$$

Ищем приближенно четные решения (четные тоны струны), в форме многочлена, расположенного по четным степеням x. Общий вид такого многочлена, удовлетворяющего предельным условиям, будет:

$$y_n(x)=(1-x^2)\ (a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_nx^{2n}).$$

Ограничимся сначала лишь двумя членами

$$y_1=(1-x^2)\ (a_0+a_1x^2)$$
$$y_1'=2(a_1-a_0)x-4a_1x^3.$$
$$I(y_1)=\int_{-1}^{+1}(y_1'^2-k^2y_1^2)\,dx=$$
$$=\frac{8}{315}[(105-42k^2)a_0^2+(42-12k^2)a_0a_1+(33-2k^2)a_1^2].$$

Система (9), после некоторых сокращений, принимает вид:

$$(35-14k^2)a_0+(7-2k^2)a_1=0$$
$$(21-6k^2)a_0+(33-2k^2)a_1=0.$$

Приравняв нулю определитель, имеем уравнение для определения k^2.

$$k^4-28k^2+63=0,$$

корни которого будут

$$k_1^2=2{,}46744; \qquad k_2^2=25{,}6.$$

Из точных же решений получается

$$k_1^2=\frac{\pi^2}{4}=2{,}467401100; \quad k_2^2=\frac{9\pi^2}{4}=22{,}207.$$

Отсюда видно, что уже при первом приближении характеристическое число, соответствующее основному тону струны, определено с ошибкой меньшей 0,00004 и второй обертон с точностью до 15%.

При втором приближении

$$y_2=(1-x^2)\ (a_0+a_1x^2+a_2x^4)$$

для определения k будет иметь место уравнение:

$$4k^6-450k^4+8910k^2-19305=0,$$

из которого находим:

$$k_1^2=2{,}467401108; \qquad k_2^2=22{,}301.$$

Ошибка второго приближения характеристического числа основного тона не превосходит 0,000000008 и для второго обертона ошибка меньше $^1/_2\%$.

Далее, подставим второе приближенное значение для k_1 в уравнения для определения

$$a_0,\ a_1 \text{ и } a_2.$$

Из полученной системы коэффициенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,$$

найдутся с точностью до множителя. Если затем найти этот неопределенный множитель из условия нормированности

$$\int_{-1}^{+1} y_2^2\, dx = 1,$$

которому удовлетворяет точное решение

$$y = \cos\frac{\pi x}{2},$$

то

$$y_2(x) = (1 - x^2)\ (1 - 0{,}233430\, x^2 + 0{,}018962\, x^4).$$

При

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = +1$$

первая фундаментальная функция и ее второе приближение $y_2(x)$ совпадают по самому построению. Насколько мало отличается $\cos\frac{\pi x}{2}$ от $y_2(x)$ во всем промежутке $(-1, +1)$, показывает следующая таблица, в которой приведены мантиссы логарифмов этих функций.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\log\cos\frac{\pi x}{2}$ . . .	994 620	978 206	949 881	907 958	849 485	769 219	657 047	489 982	194 332
$\log y^2$	994 621	978 212	949 889	907 952	849 493	769 221	657 043	489 978	194 345

Различие в мантиссах в одном лишь только месте превышает единицу пятого знака.

Наконец, такие же вычисления для второго приближения к фундаментальной функции

$$\cos\frac{3\pi}{2},$$

соответствующей второму обертону дают:

$$y_2(x) = (1 - x^2)\ (-1 + 9{,}3335\, x^2 - 6{,}219\, x^4).$$

Узлы этого обертона, найденные теоретически по

$$\cos\frac{3\pi x}{2}$$

располагаются в точках

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{3}.$$

Значения же x для узлов, найденные на основании $y_2(x)$, будут

$$x=\pm 1, \qquad x=\pm 0{,}3408.$$

Ошибка меньше 2%.

Покажем теперь на примере применение метода Эйлера приближенного решения задач. Рассмотрим ту же струну, что и в примере Ритца, и будем искать приближенно первую нечетную фундаментальную функцию $\sin\pi x$ и ее характеристическое число

$$k^2=\pi^2.$$

Разделим, например, весь промежуток от -1 до $+1$ на 10 равных частей. Длина каждой из них $h=0{,}2$.

Из-за симметрии $y(x)$ относительно точки 0, $I(y)$ вычисленный для всего промежутка $(-1, +1)$ будет равен удвоенному интегралу, вычисленному для интервала (0,1).

$$I(y)=\int_{-1}^{+1}(y'^2-k^2y^2)\,dx=2\int_0^1(y'^2-k^2y^2)\,dx.$$

Во всех наших рассуждениях поэтому достаточно находить вершины ломаной линии лишь для 5 точек — 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 при этом мы, очевидно, должны считать $y_0=0$, так как ломаная линия должна проходить через начало координат, и дело определения ломаной сводится к разысканию лишь

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4.$$

Для нашей ломаной

$$\int_0^1 y'^2\,dx=\left(\frac{y_1}{h}\right)^2 h+\left(\frac{y_2-y_1}{h}\right)^2 h+\left(\frac{y_3-y_2}{h}\right)^2 h+$$

$$+\left(\frac{y_4-y_3}{h}\right)^2 h+\left(\frac{y_4}{h}\right)^2 h.$$

Что касается второго интеграла

$$\int_0^1 y^2\,dx,$$

то мы его весьма просто получим приближенно, применив правило прямоугольников:

$$\int_0^1 y^2dx=(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)\,h.$$

Итак,

$$I(p)=\sum_{i=0}^{4} h\left[\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right)^2-k^2y_i^2\right]$$

где при суммировании мы должны считать

$$y_0=y_5=0.$$

Уравнения

$$\frac{\partial I(p)}{\partial y_i}=0,$$

из которых должны быть определены все y_i, после очень несложных преобразований приводятся к виду:

$$\begin{gathered}my_1-y_2=0\\ -y_1+my_2-y_3=0\\ -y_2+my_3-y_4=0\\ -y_3+my_4=0,\end{gathered}$$

где

$$m=2-h^2k^2=2-0{,}04\,k^2.$$

Будем решать эту систему последовательно:

$$\begin{gathered}y_2=my_1.\\ y_3=-y_1+my_2=-y_1+m^2y_1=(m^2-1)\,y_1.\\ y_4=-y_1+my_3=-my_1+m\,(m^2-1)\,y_1=(m^3-2\,m)\,y_1.\end{gathered}$$

Наконец, подставляя полученные значения в последнее из уравнений, будем иметь:

$$\begin{gathered}-y_3+my_4=-(m^2-1)\,y_1+m\,(m^3-2\,m)\,(y_1=\\ =(m^4-3\,m^2+1)\,y_1,\end{gathered}$$

откуда следует, что m должно быть корнем уравнения

$$m^4-3\,m^2+1=0.$$

Заметим, что наименьшему значению k^2 соответствует наибольшее значение m и, следовательно, при решении этого биквадратного уравнения достаточно определить только самый большой из его корней. Результат вычислений показывает, что с точностью до 4-х десятичных знаков

$$m=2-0{,}04\,k^2=1{,}6181,$$

откуда

$$k^2=9{,}55.$$

Точное же значение для k^2 есть

$$k^2=\pi^2=9{,}87$$

и ошибка грубо вычисленного нами приближения не превосходит 3,3%. Точность достаточная для многих практических приложений.

Для нахождения всех y_i осталось еще найти пока неопределенный y_1. Мы определим его из условия нормированности

$$\int_{-1}^{+1} y^2 dx = 1,$$

которому удовлетворяет $\sin \pi x$. Вычисления не представляют затруднений, если для нахождения интеграла опять воспользоваться симметрией и правилом прямоугольников.

Результаты указаны в приводимой ниже таблице в строке „p". Из нее видно, что ошибка, даваемая нашим приближением при значениях x, приведенных в таблице, сказывается только в 5 десятичном знаке.

x	0,2	0,4	0,6	0,8
$\sin \pi x$	0,58779	0,95106	0,95106	0,58779
p	0,58778	0,95105	0,95105	0,58778

§ 41. Экстремальные свойства характеристических чисел и фундаментальных функций. Теорема Куранта.

Возвратимся вновь к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}[p(x)y'] + [\lambda\rho(x) - q(x)] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

$$0 \leqq x \leqq l$$

При предельных условиях

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Функции

$$p(x),\ q(x),\ \rho(x),\ p'(x),$$

непрерывны в промежутке

$$0 \leqq x \leqq l.$$

Мы будем, кроме того, считать $p(x)$ и $\rho(x)$ всюду положительными; это будет иметь место в громадном большинстве физических задач.

Попытаемся дать определение характеристических чисел и соответствующих им фундаментальных функций, исходя исключительно из их минимальных свойств.

Рассмотрим для этой цели интеграл

$$I(y) = \int_0^l [p(x)y'^2 + q(x)y^2]\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Условимся считать допустимыми все функции, принадлежащие классу $C^{(1)}$, и обращающиеся в нуль при

$$x=0 \text{ и } x=l.$$

Поставим перед собой задачу разыскания среди допустимых функций той, которая дает наименьшее значение интегралу (25) при условии

$$\int_0^l \rho y^2 dx = 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (26)$$

Легко установить ограниченность снизу рассматриваемого интеграла для взятой нами совокупности функций. В самом деле:

$$\left|\int_0^l q y^2 dx\right| \leqq \int_0^l \frac{|q|}{\min \rho} \rho y^2 dx \leqq \frac{\max|q|}{\min \rho} \int_0^l \rho y^2 dx = \\ = \frac{\max|q|}{\min \rho}$$

и, следовательно,

$$I(y) \geqq \int_0^l p y'^2 dx - \frac{\max|q|}{\min \rho} > -\frac{\max|q|}{\min \rho}.$$

Вопрос: существует ли такая допустимая функция, удовлетворяющая условию (26), для которой точная нижняя граница значения интеграла (25) достигается — подлежит, вообще говоря, дополнительному исследованию. Мы примем здесь без доказательства ее существование и отсылаем читателя, желающего ближе ознакомиться с этим вопросом к уже цитированному мемуару Р. Куранта.

Для ее разыскания, мы, согласно правилу множителей Лагранжа, составим комбинацию

$$F^* = py'^2 + qy^2 - \lambda \rho y^2 \quad \dots\dots\dots \quad (27)$$

и запишем для нее уравнение Эйлера.

$$F^{*\prime}_{y'} = 2py'; \; F^{*\prime}_{y} = 2(q - \lambda\rho)y$$

$$\frac{d}{dx} F^{*\prime}_{y'} - F^{*\prime}_{y} = 2\left\{(py')' + (\lambda\rho - q)y\right\} = 0 \quad \dots \quad (28)$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает, с точностью до несущественного множителя 2,с (24), и *функция, решающая вариационную задачу, будет поэтому фундаментальной функцией уравнения (24).*

Определенную таким путем первую фундаментальную функцию мы будем ниже обозначать через $y_1(x)$ и соответствующее ей значение множителя Лагранжа λ через λ_1. Чтобы выяснить значение λ_1, умножим уравнение

$$(py_1')' + (\lambda_1 \rho - q) y_1 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (29)$$

которому удовлетворяет $y_1(x)$ на y_1 и проинтегрируем в пределах от 0 до l. Преобразуем слагаемое

$$\int_0^l (py_1')' y_1\,dx,$$

получающееся в левой части, интегрированием по частям:

$$\int_0^l (py_1')' y_1\,dx = \Big|_0^l py_1' y_1 - \int_0^l py_1'^2\,dx = -\int_0^l py_1'^2\,dx.$$

Подстановка дает нуль, так как y_1 обращается в нуль на концах интервала интегрирования.

Мы будем иметь поэтому:

$$-\int_0^l (py_1'^2 + qy_1^2)\,dx + \lambda_1 \int_0^l \rho y_1^2 dx = 0 \quad \ldots \quad (30)$$

Откуда следует

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^l (py_1'^2 + qy_1^2)\,dx}{\int_0^l \rho y_1^2\,dx} \quad \ldots \ldots \quad (31a)$$

или, в виду нормированности (26) фундаментальной функции $y_1(x)$,

$$\lambda_1 = \int_0^l (py_1'^2 + qy_1^2)\,dx, \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

т. е. *характеристическое число λ_1 есть наименьшее значение интеграла (25) при условии (26) относительно всего класса допустимых функций.*

Вторую фундаментальную функцию и соответствующее ей характеристическое число мы определим аналогичным способом.

Среди допустимых функций будем искать ту, которая дает наименьшее значение интегралу (25) при условиях

$$\int_0^l \rho y^2\,dx = 1, \quad \int_0^l \rho y y_1\,dx = 0 \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Опять, предполагая существование решения, составляем комбинацию Лагранжа для нашей новой задачи:

$$F^* = py'^2 + qy^2 - \lambda\rho y^2 - \mu\rho y y_1 \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Уравнение Эйлера для нее имеет вид

$$(py')' + (\lambda\rho - q)\,y + \frac{\mu}{2}\,\rho y_1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

и отличается от (24) дополнительным слагаемым $^1/_2\,\mu\rho y_1$. Но мы покажем сейчас, что постоянная μ должна равняться нулю. Присоединим для этой цели к (35) уравнению для y_1:

$$(py_1')' + (\lambda_1\rho - q)\,y_1 = 0$$

умножим первое из них на y_1, второе на y, вычтем второй результат из первого и проинтегрируем полученное выражение от 0 до l. Слагаемые вида qyy_1 сократятся при вычитании. Интегралы

$$\int\limits_0^l \rho y y_1\,dx$$

обратятся в нуль, благодаря условию ортогональности (33) и, наконец, так как

$$\int\limits_0^l \rho y_1^2\,dx = 1,$$

получим:

$$\int\limits_0^l \left\{(py')'\,y_1 - (py_1')'\,y\right\}dx + \frac{\mu}{2} = 0.$$

Но легко видеть, что интеграл стоящий в левой части, равен нулю; в самом деле

$$\int\limits_0^l \left\{(py')'\,y_1 - (py_1')'\,y\right\}dx = \Big|_0^l \left\{py'y - py_1'\,y_1'\right\} -$$

$$- \int\limits_0^l \left\{py_1'\,y' - py'\,y_1'\right\}dx = 0,$$

ибо на концах интервала и y_1 и y равны нулю.

Предшествующее равенство поэтому дает $\mu = 0$, и уравнение (35) совпадет с (24).

Функция, решающая нашу новую вариационную задачу, будет вновь фундаментальной функцией уравнения (24).

Мы будем обозначать ее через $y_2(x)$ и значение параметра λ для нее — через λ_2.

Применение такого же способа, что и при определении λ_1, сейчас же позволяет получить λ_2

$$\lambda_2 = \frac{\int\limits_0^l (py_2'^2 + qy_2^2)\,dx}{\int\limits_0^l \rho y_2^2\,dx} = \int (py_2'^2 + qy_2^2)\,dx, \quad \ldots \quad (31b)$$

т. е. λ_2 есть наименьшее значение интеграла (25) при условиях (33) и граничных требованиях

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Заметим прежде всего, что из условия (33) ортогональности y_1 и y_2 следует их линейная независимость. Действительно, допустим противное: пусть

$$y_2 = Cy_1;$$

очевидно,

$$C \neq 0,$$

ибо иначе была бы нарушена первая из связей (33). Но если так, то

$$\int_0^l \rho y_1 y_2 \, dx = C \int_0^l \rho y_1^2 \, dx = C \neq 0,$$

что противоречит второму из равенства (33).

Далее, из того обстоятельства, что условия (33) при определении второй фундаментальной функции y_2 выделяют более узкий класс допустимых функций, чем одно условие (26), сразу же следует

$$\lambda_2 \geqq \lambda_1$$

ибо оба числа, и λ_2 и λ_1, равны наименьшим значениям интеграла (25) для соответствующих классов функций.

Для доказательства невозможности равенства между λ_1 и λ_2 допустим противное; пусть

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Тогда одному значению λ соответствовало бы два линейно независимых интеграла уравнения (24), обращающихся в нуль при $x=0$. Всякий иной интеграл y того же уравнения должен получаться, согласно общей теории линейных уравнений, как линейная комбинация этих двух линейно-независимых интегралов:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Но из

$$y_1(0) = y_2(0) = 0$$

следует

$$y(0) = 0,$$

что представляет очевидную нелепость, ибо начальное значение интегралу, по теореме о существовании, можно задавать произвольно.

Итак,

$$\lambda_2 > \lambda_1 \quad \text{и т. д.}$$

Пусть, следуя этому способу мы определим $n-1$ фундаментальную функцию

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$$

и $n-1$ характеристическое число

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$$

n-ую фундаментальную функцию мы определим как допустимую функцию, дающую наименьшее значение интегралу (25) при условиях:

$$\int_0^l \rho(x)\, y^2\, dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^l \rho(x)\, y y_i\, dx = 0 \quad i = 1, \ldots, n-1 \;. \quad (36)$$

Приемами, совершенно такими же, какие мы употребляли при изучении второй фундаментальной функции y_2, можно показать, что искомая функция y удовлетворяет уравнению (24),

$$\lambda_n = \frac{\int_0^l (p y_n'^2 + q y_n^2) dx}{\int_0^l \rho(x)\, y_n^2 dx} = \int_0^l (p y_n'^2 + q y_n^2)\, dx \;. \;. \;. \quad (33c)$$

и

$$\lambda_n > \lambda_{n-1}.$$

Идя таким путем, мы получим бесконечную последовательность фундаментальных функций.

Но, может быть, еще не совершенно очевидным является то обстоятельство, что мы получим все фундаментальные функции.

Убедиться в этом не представляет, однако, труда.

Мы предлагаем читателю допустить противное: существует такая фундаментальная функция, которая не принадлежит совокупности построенных нами функций y_n, и показать, что это предположение немедленно приводит к противоречию. Для проведения рассуждений достаточно знания просто доказываемой теоремы о том, что любые две фундаментальные функции уравнения (1) ортогональны между собой в смысле равенства

$$\int_0^l \rho(x)\, y_i y_j\, dx = 0.$$

Изложенные рассуждения позволяют определять фундаментальные функции постепенно, так что для нахождения n-ой фундаментальной функции нужно знание всех предшествующих.

Можно дать такое вариационное определение n-го характеристического числа и n-ой фундаментальной функции, которое не требует знания фундаментальных функций с меньшими нумерами.

Возьмем произвольную систему каких угодно $n-1$ функций

$$z_1, \;. \;. \;. \;, z_{n-1}$$

класса $C^{(1)}$ и поставим перед собой задачу найти среди допустимых функций ту, которая давала бы наименьшее значение интегралу (25) при связях

$$\int_0^l \rho(x)\, y^2\, dx = 1; \quad \int_0^l \rho(x)\, y z_i\, dx = 0 \quad i = 1, \;. \;. \;. \;, n-1 \quad . \;(37)$$

Искомое наименьшее значение m интеграла будет зависеть от выбора функций z_i

$$m = m(z_1 \ldots , z_{n-1}).$$

Докажем следующую теорему Куранта:

Какова бы ни была система функций

$$z_i (i = 1, \ldots n - 1)$$

соответствующее ей число

$$m(z_1 \ldots . z_{n-1})$$

не превосходит λ_n.

n-ое характеристическое число λ_n есть точная верхняя граница всех возможных чисел

$$m(z_1 \ldots . z_{n-1});$$

она достигается для

$$z_1 = y_1,\ z_2 = y_2, \ldots z_{n-1} = y_{n-1} \quad и \quad y = y_n.$$

Формулированное нами экстремальное свойство характеристических чисел и фундаментальных функций может быть положено в основание их определения.

Доказательство последней части теоремы не представляет затруднений. В самом деле, если

$$z_i = y_i \ (i = 1, \ldots n - 1),$$

то равенства (37) совпадают с условиями (36), принятыми нами при определении n-ой фундаментальной функции и n-го характеристического числа. В виду этого

$$y = y_n$$

и

$$m(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \lambda_n.$$

Для доказательства теоремы осталось еще показать, что при всяком ином выборе z_i число m будет не больше, нежели λ_i.

Пусть система функций z_i какая угодно. Если бы мы смогли указать функцию y, удовлетворяющую требованиям (20) и такую, что соответствующее ей значение интеграла (25) было бы не больше λ_n, то наименьшая величина m интеграла и подавно была бы $\leqq \lambda_n$, и формулированная нами теорема была бы доказана вполне.

Будем искать такую функцию в форме

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1 \ldots y_n$ фундаментальные функции и $C_1 \ldots C_n$ неопределенные коэффициенты, выбором которых мы так распорядимся, чтобы удовлетворить условиям (36). В виду ортогональности и нормированности фундаментальных функций, первое из них дает

$$C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 = 1 \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Оставшиеся $n-1$ условия дадут систему $n-1$ однородных уравнений с n неизвестными

$$C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n.$$

Такая система, как известно, имеет, по крайней мере, одно решение, отличное от нулевого и содержащее произвольный множитель. Остается подобрать этот неопределенный множитель так, чтобы удовлетворить равенству (38). Возможность этого очевидна. Внесем найденное нами выражение функции y в интеграл (25). После раскрытия скобок, получим члены с квадратами y_l и их производных и члены с произведениями различных y_l и их производных. Докажем, что члены второго ряда исчезнут.

Рассмотрим

$$\int_0^l [p(x)\,y_k'\,y_l' + q(x)\,y_k y_l]\,dx = \Big|_0^l\ p(x)\,y_k'\,y_l -$$

$$-\int_0^l y_l \frac{d}{dx}[p(x)\,y_k']\,dx + \int_0^l q(x)\,y_k y_l\,dx.$$

Внеинтегральное слагаемое пропадает, ибо y_l на концах интервала обращается в нуль, и остается

$$\int_0^l y_l\left\{q(x)\,y_k - \frac{d}{dx}[p(x)\,y_k]\right\}dx = \lambda_k \int_0^l \rho(x)\,y_k\,y_l\,dx = 0.$$

Если же рассматривать члены с квадратами y_l и их производных, т.-е., когда $l=k$, то

$$\int_0^l \rho(x)\,y_k\,y_k\,dx = \int_0^l \rho(x)\,y_k^2\,dx = 1$$

и последний интеграл дает значение λ_k.

Мы будем иметь, поэтому, следующее равенство:

$$I(x) = C_1^2\lambda_1 + C_2^2\lambda_2 + \ldots\ C_n^2\lambda_n \leqq (C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2)\,\lambda_n = \lambda_n$$

что и требовалось доказать.

§ 42. Приложение к оценке роста характеристических чисел.

В этом параграфе мы будем предполагать функцию $q(x)$ не отрицательной; $p(x)$ и $\rho(x)$ удовлетворяют прежним требованиям.

Заменим в уравнении (24) $p(x)$, $q(x)$ новыми функциями $p_1(x)$ $q_1(x)$ не меньшими их во всем промежутке $(0,\ l)$:

$$p_1(x) \geqq p(x) \qquad q_1(x) \geqq q(x).$$

Функцию $\rho(x)$ оставим прежней. Обозначим характеристические числа измененного уравнения через λ_n' и докажем неравенство

$$\lambda_n' \geqq \lambda_n.$$

Воспользуемся для этого только что доказанным свойством характеристических чисел. Условия (36) при нашей замене остаются неизменяющимися, и класс допустимых к конкурренции функций для исходного уравнения будет таким же, как и для измененного. Но интеграл (25) при замене $p(x)$ из $p_1(x)$ и $q(x)$ на $q_1(x)$ во всяком случае не уменьшается. Не будут, поэтому уменьшаться его наименьшие значения и наибольшее значение всех наименьших значений, т. е. числа λ_n. Это и доказывает наше утверждение.

Оставим теперь неизменными функции $p(x)$ и $q(x)$. Заменим $\rho(x)$ на $\rho_1(x)$, причем

$$\rho_1(x) \geqslant \rho(x) \quad 0 \leq x \leq l.$$

В этом случае нельзя уже говорить о сохранении класса конкуррирующих функций, ибо если y удовлетворяет первому из условий (36), то после подстановки вместо $\rho(x)$ функции $\rho_1(x)$ будем иметь

$$\int_0^l \rho_1(x) y^2 dx \geqq 1.$$

Легко, однако, из функции y получить допустимую функцию новой задачи. Для этого достаточно подобрать число Θ, удовлетворяющее условию

$$0 < \Theta \leq 1,$$

так, чтобы

$$\int_0^l \rho_1(x) \Theta y \, dx = 1.$$

Докажем, что функция Θy удовлетворяет и остальным условиям (36), правда, для иных функций z_i. Действительно, так как Θ не зависит от x, то

$$\int_0^l \rho(x) \Theta y z_i \, dx = 0$$

или

$$\int_0^l \rho_1(x) \cdot \Theta y \cdot \frac{z_i \rho(x)}{\rho_1(x)} dx = 0$$

но это и есть условия (36) для видоизмененного уравнения, только вместо функций z_i здесь взяты функции

$$\frac{z_i \rho(x)}{\rho_1(x)} = \bar{z}_i.$$

Каждой системе функций z_i будет соответствовать система функций $\bar{z}_i$. Доказательство обратных предложений проводится таким же образом.

Каждому минимуму исходной задачи, достигаемому функцией y

будет соответствовать некоторый минимум новой задачи, достигаемый функцией Θy, и наоборот.

Но от введения числа Θ значения интеграла (25), наверное, не увеличатся; не увеличится, следовательно, каждый из минимумов и максимум всех этих минимумов, т. е. характеристическое число λ_n также не увеличится.

Итак, при увеличении $p(x)$ и $q(x)$ в промежутке от 0 до l характеристические числа λ_n могут только увеличиваться, а при увеличении $\rho(x)$ — только уменьшаться.

Пусть

$$P, p, \ Q, q, \ R, r,$$

будут наибольшие и наименьшие значения соответственно для функций

$$p(x), \ q(x), \ \rho(x)$$

$$P \geqq p(x) \geqq p, \quad Q \geqq q(x) \geqq q, \ R \geqq \rho(x) \geqq r$$

Заменим в заданном уравнении $p(x)$, $q(x)$ на Q, P и $\rho(x)$ на r. Полученное новое уравнение с постоянными коэфициентами:

$$Py'' + (\lambda r - Q) y = 0$$

будем иметь характеристические числа λ_n' во всяком случае не меньшие, чем заданное.

Они легко могут быть найдены. В самом деле, общий интеграл уравнения есть:

$$y = C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}} x.$$

Из $y(0) = 0$ следует $C_1 = 0$ из $y(l) = 0$, так как C_2 не может быть равным нулю,

$$\sqrt{\frac{\lambda r - Q}{P}} l = n\pi,$$

откуда

$$\lambda_n' = \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r}.$$

Следовательно,

$$\lambda_n \leqq \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} P + Q}{r}.$$

Совершенно так же, заменяя

$$p(x), \ q(x), \ \rho(x)$$

соответственно через p, q, R, докажем, что

$$\lambda_n \geqq \frac{n^2 \frac{\pi^2}{l^2} p + q}{R}.$$

Мы имеем, таким образом, следующую оценку

$$\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}P+Q}{r}\geqq\lambda_n\geqq\frac{n^2\frac{\pi^2}{l^2}p+q}{R}.$$

Из последнего неравенства следует, что λ_n есть величина порядка n^2 и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$$

сходится.

Пользуясь найденной оценкой для λ_n, легко получить более точную, если предварительно преобразовать уравнение (24). Предположим, что $p(x)$ и $\rho(x)$ имеют непрерывные производные второго порядка и преобразуем уравнение (24) подстановкой

$$u=[p(x)\rho(x)]^{\frac{1}{4}}y \quad t=\int_0^x\frac{\rho(x)}{p(x)}\,dx.$$

Интервал $(0, l)$ переменной x преобразуется в интервал $0, \tau$ переменной t, где

$$\tau=\int_0^l\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\,dx.$$

Уравнение для u будет:

$$u''+[\lambda-s(t)]\,u=0$$

$s(x)$ — непрерывная функция.

Так как из

$$y(0)=y(l)=0 \text{ следует } u(0)=u(\tau)=0$$

и наоборот, то каждой фундаментальной функции исходного уравнения будет соответствовать фундаментальная функция нового уравнения, и, наоборот, характеристическое число старого уравнения будет им и для нового.

Но так как, вообще, нельзя быть уверенным в положительности функции $S(x)$, мы не можем применять полученных оценочных формул к уравнению для u.

Мы, однако, легко избегнем этого затруднения следующим простым способом.

Характеристическое число λ_n есть максимум минимумов интеграла

$$\int_0^\tau[u'^2+s(t)\,u^2]\,dt$$

среди которых при некоторых условиях, входит всегда

$$\int_0^\tau u^2\,dt=1.$$

Выбросим из нашего интеграла слагаемое

$$\int_0^\tau su^2\,dt$$

и будем решать соответствующую задачу для

$$\int_0^\tau u'^2\,dt$$

при тех же самых условиях, что, как очевидно, равносильно задаче об отыскании характеристических чисел μ_n для уравнения

$$u''+\mu u=0.$$

При отбрасывании упомянутого слагаемого рассматриваемое нами интегральное выражение изменится на величину, ограниченную для всех u, ибо

$$\left|\int_0^\tau su^2\,df\right|=\max|s|\cdot\int_0^\tau u^2\,dt=\max|s|.$$

μ_n может отличаться от λ_n не больше чем на $\max|s|$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n}=1.$$

Если теперь заметить, что

$$\mu_n=n^2\frac{\pi^2}{\tau^2}$$

и возвратиться к старым обозначениям, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}=\frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^l\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\,dx\right\}^2.$$

Дополнения и задачи.

1. Кручение бруса. Пусть призматический невесомый брус закреплен неподвижно в точке O и скручивается касательными усилиями, распределенными по нижнему концевому сечению и приводящимся к паре сил.

В теории упругости доказывается, что можно в этом случае считать, если взять обычные обозначения компонентов тензора напряжения:

$$X_x=Y_y=Z_z=X_y=0.$$

Остальные компоненты должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

$$\Delta Y_z = 0 \qquad \Delta X_z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

$$Z_x \cos(x\nu) + Z_y \cos(y\nu) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

на боковой поверхности бруса; ν — нормаль к поверхности.

Уравнение (a) будет удовлетворено, если положить

$$Z_x = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad Z_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

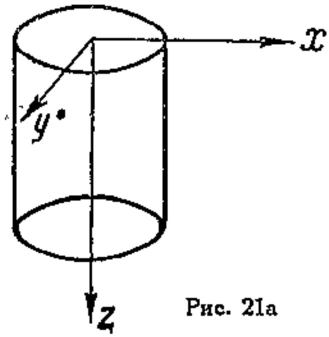

Рис. 21a

Вставляя в (b) вместо

$$Y_z = Z_y$$

$$X_z = Z_x$$

их значения, будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi = 0$$

т. е.

$$\Delta\varphi = \text{const}.$$

Можно выяснить, что постоянная, стоящая в правой части уравнения, равна $-2\mu\tau$, где μ — известная постоянная Лямэ, и τ угол закручивания стержня, отнесенный к единице его длины.

В виду того, что

$$\cos(x\nu) = \frac{dy}{ds} \quad \cos(y\nu) = -\frac{dx}{ds},$$

где s длина дуги контура сечения, условие (c) на поверхности бруса будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

т. е. φ должна иметь на контуре постоянное значение, и так как φ определена вообще с точностью до постоянного слагаемого мы можем считать ее равной нулю на контуре.

Момент всех касательных усилий, действующих в плоскости поперечного сечения бруса, будет

$$\iint_D Y_z x\,dx\,dy - \iint_D X_z y\,dx\,dy =$$

$$-\iint_D x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_D \frac{\partial\varphi}{\partial y} y\,dx\,dy.$$

Выполнив интегрирование по частям и приняв во внимание постоянство φ на контуре, имеем:

$$2\iint_D \varphi\,dx\,dy.$$

Это выражение должно равняться моменту M внешней скручивающей пары.

Пусть брус имеет квадратное поперечное сечение со сторонами $2a$. Направим оси координат как указано на рис. 21б.

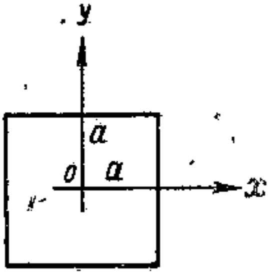

Рис. 21б

Наша задача будет состоять в том, чтобы внутри квадрата найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\varphi = -2\mu\tau$$

и обращающуюся в нуль на контуре Γ.

Как нами было выяснено раньше, эта задача равносильна разысканию функции, дающей минимум интегралу,

$$I = \int\limits_D\int \left\{\frac{1}{2}(\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2) - 2\mu\tau\varphi\right\} dx\,dy$$

при тех же граничных условиях.

Будем искать φ по методу Ритца в форме полинома. Чтобы удовлетворить предельным условиям, выделим множитель

$$(x^2 - a^2) \quad (y^2 - b^2)$$

и положим

$$\varphi_n = (x^2 - a^2) \quad (y^2 - a^2) \sum_{i+j\leq n} a_{ij} x^i y^j.$$

Здесь, в силу симметрии, нужно сохранить лишь четные степени x и y.

Ограничимся сначала только первым членом ряда

$$\varphi_0 = a_{00}(x^2 - a^2) \quad (y^2 - a^2).$$

Подставив в интеграл I, совершая квадратуру и приравнивая нулю производную $n\,a_{00}$, получим для a_{00} значение

$$a_{00} = -\frac{5}{8}\,\frac{\mu\tau}{a^2}.$$

Величина скручивающего момента получается равной

$$M = 2\int\int \varphi_0\,dx\,dy = \frac{20}{9}\mu\tau a^4 = 0{,}1388\,(2a)^4\,\mu\tau.$$

Точное же значение для M есть $0{,}1406\,\mu\tau\,(2a)^4$. Ошибка нашего результата

$$1\frac{1}{3}\,\%.$$

В качестве второго приближения возьмем

$$\varphi_2 = (x^2 - a^2) \quad (y^2 - a^2) \quad [a_{00} + a_{02}(x^2 + y^2)].$$

Подстановка в I и условия его минимальности приводят к следующим значениям коэффициентов:

$$a_{00} = -\frac{5}{8}\cdot\frac{259}{277}\cdot\frac{\mu\tau}{a^2},\quad a_{02} = -\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{35}{277}\cdot\frac{\mu\tau}{a^4}.$$

Как легко видеть, здесь

$$M=\frac{20}{9}\mu\tau a^4\left(\frac{259}{277}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{35}{277}\right)=0{,}1404\ \mu\tau\ (2a)^4.$$

Ошибка в определении M меньше 0,15%.

2. Прогиб балки. Стержень со свободным концом A и заделанным горизонтально в B лежит на сплошном упругом основании и изгибается сплошной нагрузкой, увеличивающейся пропорционально удалению от A (рис. 22).

$$Q=qx.$$

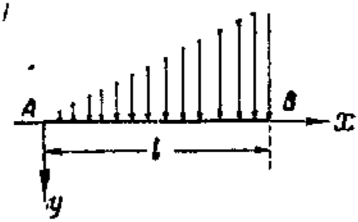

Рис. 22

Функцию μ, характеризующую упругие свойства стержня, мы примем равной

$$\mu=hx^3,$$

где h некоторая постоянная. Так будет, например, в случае балки, поперечное сечение которой есть прямоугольник постоянной ширины, и высота меняется по закону треугольника, возрастая от точки A до B.

Жесткость основания примем также меняющейся по линейному закону и положим равной kx.

Внешние силы, действующие на стержень, будут состоять из нагрузки $Q=qx$ и силы сопротивления упругого основания равной $-kxy$.

Кривая равновесия стержня должна быть определена, как известно из дополнения к главе III, из уравнения

$$(\mu y'')''-f=0$$

или

$$(hx^3y'')''+kxy-qx=0$$

при граничных условиях

$$y=0 \qquad y'=0,$$

при

$$x=l$$

и

$$\mu y'=hx^3\,y''=0,\quad \frac{d}{dx}(\mu y'')=\frac{d}{dx}(hx^3y'')=0,$$

при

$$x=0.$$

Последние два условия удовлетворяются сами собой.

Эта задача равносильна, как в свое время было установлено, разысканию функции, дающей минимум интегралу потенциальной энергии

$$I=\int\limits_0^l\left\{\frac{1}{2}hx^3y''^2+\frac{1}{2}kxy^2-qxy\right\}dx$$

при условиях заделанности на правом конце и свободной границе при $x=0$.

После преобразования

$$x=l\xi,$$

он приводится к форме

$$I=\int\limits_0^1 \left\{\frac{1}{2}\xi^3 y''^2+\frac{1}{2}\gamma\xi y^2-\lambda\xi y\right\}d\xi,$$

где γ и λ постоянные, вычисление которых не представляет затруднений.

Ищем приближенное решение по методу Ритца в виде полинома. Общий вид многочлена, удовлетворяющего предельным условиям

$$y(1)=y'(1)=0$$

есть

$$y^n=(\xi-1)^2[a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n].$$

Положим $n=2$. Система уравнений для определения чисел

$$a_0,\ a_1,\ a_2,$$

из условия $\min I$ имеет вид

$$a_0\left(1+\frac{\gamma}{30}\right)+a_1\left(\frac{2}{5}+\frac{\gamma}{105}\right)+a_2\left(\frac{1}{5}+\frac{\gamma}{280}\right)=\frac{1}{12}\lambda$$
$$a_0\left(\frac{2}{5}+\frac{\gamma}{105}\right)+a_1\left(\frac{2}{5}+\frac{\gamma}{280}\right)+a_2\left(\frac{2}{7}+\frac{\gamma}{630}\right)=\frac{1}{30}\lambda$$
$$a_0\left(\frac{1}{5}+\frac{\gamma}{280}\right)+a_1\left(\frac{2}{7}+\frac{\gamma}{630}\right)+a_2\left(\frac{9}{35}+\frac{\gamma}{1260}\right)=\frac{1}{60}\lambda$$

Пр $\gamma=100$, решив эти уравнения, будем иметь:

$$a_0=0{,}01251\lambda\quad a_1=0{,}0212\lambda\quad a_2=0{,}00079\lambda.$$

По известным a_0, a_1, a_2, сейчас же определяется функция y_n, приближенно дающая прогиб.

Если же взять $n=1$, получим

$$a_0=0{,}0124\lambda\quad a_1=0{,}0218\lambda.$$

Сравнение этих двух результатов позволяет, в известной мере, судить о быстроте сходимости процесса.

Сравнение же результата, полученного при $n=2$, с точным решением задачи, которого мы здесь не приводим, показало, что ошибка даваемая y_2 не превосходит 1%. Такая точность является, разумеется, совершенно достаточной для практических приложений.

3. Колебание стержня. Определение частот свободного колебания стержня, как известно, приводится к нахождению характеристических чисел дифференциального уравнения

$$(\mu y'')''-\lambda^2\rho y=0.$$

Рассмотрим стержень, имеющий ту же длину $AB = l$ и те же упругие свойства, что и в предыдущей задаче:

$$\mu = hx^3.$$

Пусть он заделан горизонтально в точке B; его конец A — свободен.

Мы предположим кроме того, что линейная плотность стержня пропорциональна удалению от конца A

$$\rho = kx,$$

что совершенно естественно, если рассматривать клин, о котором говорилось выше.

Интеграл, для которого написанное выше уравнение будет уравнением Эйлера, имеет вид

$$I(y) = \frac{1}{2}\int_0^l (\mu\, y''^2 - \lambda^2 kxy^2)\, dx.$$

Положим

$$x = l\xi;$$

тогда, с точностью до постоянного множителя

$$I(y) = \int_0^1 (h\,\xi^3 y''^2 - \lambda^2 ky^2)\, d\xi.$$

В точке B должны быть соблюдены условия

$$y = 0 \qquad y' = 0$$

при

$$\xi = 1.$$

В точке A функция y не подчинена никаким требованиям.

Ищем приближенное решение уравнения в форме

$$y_n = (\xi - 1)^2 \quad (a_0 + a^2\xi + \ldots + a_n\xi^n).$$

Положим $n = 1$:

$$y_2 = (\xi - 1)^2 \quad (a_0 + a_1\xi)$$
$$y_2'' = 2(a_0 - 2a_1 + 3a_1\xi).$$

Подставляя в интеграл и обозначая ради простоты

$$\lambda^2 k = p^2,$$

имеем

$$I(y_2) = h\left[(a_0 - 2a_1)^2 + \frac{24}{5}\, a_1(a_0 - 2a_1) + 6a_1^2\right] - $$
$$- p^2\left(\frac{a_0^2}{30} + \frac{2a_0a_1}{105} + \frac{a_1^2}{280}\right).$$

Условия минимума $I(y_2)$ будут

$$\left(h-\frac{p^2}{30}\right)a_0+\left(\frac{2}{5}h-\frac{p^2}{105}\right)a_1=0$$

$$\left(\frac{2}{5}h-\frac{p^2}{115}\right)a_0+\left(\frac{2}{5}h-\frac{p^2}{280}\right)a_1=0.$$

Эта система имеет решения, отличные от нуля только тогда, если

$$\left(h-\frac{p^2}{30}\right)\left(\frac{2}{5}h-\frac{p^2}{280}\right)-\left(\frac{2}{5}h-\frac{p^2}{105}\right)^2=0.$$

Наименьший корень, соответствующий основному тону стержня, дает

$$p=5{,}319\sqrt{h}.$$

Точное значение есть

$$p=5{,}315\sqrt{h};$$

ошибка не превосходит 0,1%.

4. Изложенные нами рассуждения для уравнений второго порядка естественно могут быть обобщены и на случай иных предельных условий чем те, которые мы рассматривали.

Так, уравнение Штурма Лиувилля

$$(py')'+(\lambda\rho-q)y=0$$

при предельных условиях

$$y'(0)-h_1y(0)=0,\quad y'(l)+h_2y(l)=0$$

равносильно смешанной вариационной задаче вида

$$\Phi(y)=\int_0^l(py'^2+qy^2)\,dx+h_1p(0)y^2(0)+$$
$$+h_2p(l)\quad y^2(l)=\min$$

при условии

$$\int_0^l\rho y^2\,dx=1$$

со свободными границами. Это сейчас же дает возможность обобщить полученные результаты, включая и асимптотическое выражение для характеристических чисел. Изменение скажется лишь в том, что вместо интегралов, стоящих в формулах 31*a*, 32, 31*b*, 33*c* будут стоять значения выражения $\Phi(y)$ для соответствующих фундаментальных функций.

Совершенно то же можно высказать и для некоторых уравнений в частных производных. Так, например, интегрирование часто встречающегося уравнения второго порядка:

$$(pu_x')'_x+(\rho u'_y)'_y-qu+\lambda\rho u=0,$$

где p и q положительные и непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области D функции, при предельных условиях

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$$

на контуре Γ области D, σ непрерывная функция точек контура Γ, равносильно задаче нахождения минимума

$$I(u)=\iint_D p(u_x'^2+u_y'^2)\,dx\,dy+\iint_D qu^2\,dx\,dy+\int_\Gamma p\sigma u^2\,ds$$

при условии

$$\iint_D \rho u^2\,dx\,dy=1$$

и со свободной границей. $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную по внешней нормали к контуру Γ.

В этом случае существенно иным будет лишь то обстоятельство, что здесь не будут применимы формулы для оценки характеристических чисел, ибо поведение их для областей с двумя измерениями, конечно, будет отличным от поведения для линейных областей.

Для более подробного ознакомления с этим вопросом см. Courant und Hilbert „Methoden der mathematischen Physik".

5. Исследовать следующие вариационные задачи и определить характеристические числа соответствующих им задач Штурма-Лиувилля.

a) . . . . $\int\limits_{-1}^{+1}(1-x^2)y'^2\,dx$ при $\int\limits_{-1}^{+1}y^2\,dx=1$

и граничном условии: y конечно при

$$x=\pm 1.$$

Решение: Полиномы Лежандра,

$$\lambda=n(n+1).$$

b) . . . . $\int\limits_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,y'^2\,dx$ при $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=1.$

Граничные условия: y регулярно при

$$x=\pm 1.$$

Решение: Полиномы Чебышева,

$$\lambda=n^2.$$

c) . . . . $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}y'^2\,dx$ при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}y^2=1.$

Граничные условия: y растет как полином при
$$x \to \infty.$$

Решение: Полиномы Эрмита,
$$\lambda = 2n.$$

$d)$ . . . . . $\int\limits_0^\infty e^{-x} x y'^2 \, dx$ при $\int\limits_0^\infty e^{-x} y^2 \, dx = 1.$

Граничные условия: y конечно при
$$x = 0$$
и растет как полином при
$$x \to \infty.$$

Решение: Полиномы Лагерра,
$$\lambda = n.$$

$e)$ . . . . $\int\limits_{-1}^{+1} [(1-x)^{p+1}(1+x)^q x] y'^2 \, dx$

при
$$\int\limits_{-1}^{+1} (1-x)^p (1+x)^q y^2 \, dx = 1.$$

Граничные условия: y конечно при
$$x = \pm 1.$$

Решение: Полиномы Якоби,
$$\lambda = n(p+n).$$

$f)$ . . . $\int\limits_0^1 \left(x y'^2 + \frac{m}{x} y^2 \right) dx$ при $\int\limits_0^1 x y^2 \, dx = 1.$

Граничные условия:
$$(0) = y(1) = 0 \text{ при } m > 0$$
и естественное граничное условие для конца
$$x = 0 \text{ в случае } m = 0.$$

Решение: Функции Бесселя, $\lambda =$ квадрату корня функции Бесселя.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Отв. редактор В. И. Смирнов: Техн. редактор М. А. Папиянц. Время сдачи в набор 9/IX—32 г. Подписано к печати 21/VIII—32 г. Колич. знаков в листе 50 400. Колич. листов $12^3/_4$. Тираж 5200 экз. Заказ № 410. Ленгорлит № 21787. 21 тип. ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига" им. Ивана Федорова Ленинград, Звенигородская, 11.

Цена 3 рубля
Переплет 80 к.

СКЛАДЫ ИЗДАНИЙ:
Москва „4", Ульяновская, 3, тел. Ж1-12-77
Ленинград „1", Мойка, 42, тел. 5-61-63