

538
П 78

ПРОБЛЕМЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

ОПТИ. ИКТН. СССР • 1936

ПРОБЛЕМЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

СБОРНИК ПЕРЕВОДНЫХ СТАТЕЙ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
М. А. ВЕЛИКАНОВА и Н. Т. ШВЕЙКОВСКОГО

532

1714

БИБЛИОТЕКА
Белорусского Политехнического
ИНСТИТУТА
имени И. В. СТАЛИНА
Инв. № 9441

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА



ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТН СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ПОМОГРАФИИ
Москва 1936 Ленинград

ПЕРЕУЧЕТ 1959 г.

Т 32-54

ТКК 54

Редакция Г. А. Вольперта. Оформление В. Ф. Зазульской.
Корректора С. Гутнер и К. Цветкова.

Сдано в производство 20/VI 1936 г. Подписано к печати 29/VII 1936 г.
Печ. листов 20 $\frac{1}{2}$. Уч.-з. л. 25. Тираж 3000. Формат 62 X 94 $\frac{1}{16}$. Печ. зн. п. л. 96500.
Заказ № 3534. Гл. ред. общетехн. лит. № 44. Уполн. Главлита № В 43252.

2-я типография ОВТИ им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Проблема турбулентности возникла в середине девятнадцатого столетия в результате противоречия между теоретическим — казалось вполне строгим — выводом закона сопротивления в круглой трубе на основе выражения для вязкости, данного еще Ньютоном, и эмпирическим законом сопротивления, установленным многочисленными измерениями для обычных, не слишком малых размеров и скоростей. Противоречие выходило далеко за пределы возможных ошибок измерения: первый закон — Пуазейля — давал сопротивление, пропорциональное первой степени скорости; второй закон — Шези — приводил к квадрату скорости. Позже в 90-х годах, О. Рейнольдс сделал первую попытку кинематического анализа потока в круглой (стеклянной) трубе и на основе этого анализа смог связать линейное сопротивление с „прямолинейным“ (по современной терминологии — ламинарным) движением, а квадратичное сопротивление — с „извилистым“ (теперь — турбулентным) движением.

В той же классической работе (впервые появляющейся в печати на русском языке в этом сборнике) намечен путь динамического анализа турбулентного движения, несколько аналогичный кинетической теории газов, а также установлен теоретический критерий перехода движения из одной формы в другую. Далее ряд исследователей, из коих на первом месте следует поставить Релея, делали попытки обосновать этот переход на основе анализа устойчивости очень малых случайных колебаний скорости, налагающихся на основное регулярное ламинарное движение. Плодотворных положительных результатов этот путь не дал и, повидимому, не мог дать, по той причине, что лежавшая в основе всех этих исследований предпосылка, будто ламинарное движение есть наиболее естественное движение — как прямолинейное — и единственно совместимое с законами механики, поскольку они отражены в дифференциальных уравнениях гидродинамики, — эта предпосылка оказалась в корне неверной. Когда-то Леонардо да-Винчи сказал, что, изучая движение жидкости, надо сначала наблюдать, а уже потом применять рассуждение. Это мудрое указание в дальнейшем развитии гидродинамики было забыто: необычайный рост математического аппарата гидродинамики создавал иллюзию, будто все вопросы могут решаться чисто математически, а в тех случаях, когда возникают противоречия с опытом, то на последние надо смотреть как на отклонение от закономерности, отклонения, обусловленные какими-то посторонними причинами. А между тем гораздо раньше, чем были получены дифференциальные уравнения гидродинамики, вдумчивый наблюдатель природы мог констатировать, что для жидкости самым естественным движением отнюдь не является

прямолинейное; и что если камень по гладкому ровному плоскому откосу скатывается прямолинейно, то по тому же самому откосу вода стекает извилистым ручейком; что все реки текут излучинами — даже в однородном песчаном грунте, — и что объяснять каждый раз эту характерную извилистость течения какими-то побочными причинами, отклоняющими движение от „естественного прямолинейного“ было бы непростительной натяжкой. К сожалению гидродинамика развивалась исторически не по тому пути, который был ей указан гением Леонардо да-Винчи; она формировалась в тиши кабинетов, вдали от наблюдения природных вод. И можно сказать, что ее связь с гидрологией, связь которая могла бы ее непрерывно оплодотворять физической реальностью, всегда была очень слаба. Вдумчивый наблюдатель мог также обратить внимание на факт, что все реки поднимают со дна песок и ил, и несут его, несмотря на его большой удельный вес, во взвешенном состоянии, что также не вяжется с представлением о наибольшей якобы естественности прямолинейного, параллельно-струйного, движения жидкости.

Все эти факты, относящиеся к характеру движения природных вод, были хорошо известны гидрологам и гидротехникам девятнадцатого века, и ими использовались в водохозяйственных сооружениях, но кабинетная теоретическая — вернее математическая — гидродинамика прошла мимо них. Гидрологи и гидротехники обладали чисто качественными характеристиками движения природных вод, но не умели облечь их в математическую форму; гидродинамики обладали знанием математических форм, но не умели применить их к реальным потокам. Кризис теоретической гидродинамики наступил гораздо позже, чем он должен был наступить, потому что возник не из наблюдения природы, а в лабораториях. Сколько-нибудь точные, физические методы измерения скоростей, появились совсем недавно, в течение последних одного-двух десятилетий. Но все же мы теперь имеем уже довольно отчетливое представление о скоростной структуре турбулентных потоков. Мало того, мы знаем, что пульсация скоростей, хотя бы и в слабой степени, имеется и в тех потоках, которые мы привыкли называть ламинарными, т. е. слоистыми, связывая с этим названием представление о полной параллельности струек и полном отсутствии поперечных движений. В этом смысле ламинарного движения, строго говоря, вообще не существует. Наиболее общая форма движения жидкости есть именно форма турбулентного движения, при котором в каждой точке скорость жидкости может принимать весьма различные значения с различной лишь степенью вероятности. Наблюдая изменения скорости в течение достаточно большого промежутка времени, мы видим, как относительные частоты ее значений укладываются на кривой распределения, во многих случаях близкой к нормальной кривой Гаусса для случайных явлений.

Но как же в таком случае обстоит дело с дифференциальными уравнениями гидродинамики, выведенными для реальной жидкости из основных законов механики и закона Ньютона о вязкости? Подвергает ли все сказанное нами сомнению их строгость и истинность? Отнюдь нет, по нашему мнению. Дело в том, что — и это весьма знаменательно — при всей сложности и тонкости своего математического аппарата тео-

ретическая гидродинамика до сих пор оказалась бессильной доказать ту основную теорему, без которой точка опоры у нее отсутствует: теорему единственности решения уравнений гидродинамики. А это естественно наводит на мысль, что эти дифференциальные решения при заданных начальных и граничных условиях допускают бесчисленное количество решений в виде их интегралов и что смена во времени всех этих возможных решений и есть та пульсация скоростей, которая наблюдается нашими измерительными приборами.

Такой „постулат многозначности“ единственно по нашему мнению в состоянии уничтожить противоречие между теоретической и экспериментальной гидродинамикой; но он обязывает первую ввести в свои построения статистические методы.

Проблема турбулентности должна рассматриваться как кризис классической теоретической гидродинамики. Из этого кризиса должна возникнуть новая статистическая гидродинамика, идущая рука об руку с точным физическим экспериментом. И для этой новой перестроенной гидродинамики „проблема турбулентности“ уже перестанет существовать, так как реальное движение жидкости и турбулентность — одно и то же. Но сейчас, еще в периоде перестройки, специальные вопросы турбулентности должны занимать и занимают умы не только теоретиков, но и практиков, притом в столь разнообразных областях, как гидротехника и водное хозяйство, с одной стороны, и авиация — с другой.

Настоящий сборник пытается хотя бы отчасти удовлетворить советского читателя, желающего несколько глубже ознакомиться с вопросами турбулентности, чем это дается в немногих курсовых изложениях по гидродинамике и гидравлике, по оригинальным монографиям. Подбор таких монографий представляется делом весьма трудным, и мы отнюдь не претендуем на вполне успешное его разрешение. Большую роль здесь сыграло и запоздание в выпуске сборника. Тем временем появились некоторые новые работы; организовать новые переводы и давать новую компановку статей было, конечно, весьма трудно. Тем не менее в сборник вошли две новые обзорные статьи Прандтля и Кармана вместо намеченных и переведенных ранее.

Мы считали совершенно необходимым дать читателю классическую работу Рейнольдса, основоположника всей теории турбулентности, хотя бы потому, что ссылки на него имеются во всех курсовых изложениях, а ознакомление с этой работой в подлиннике — даже независимо от знания английского языка — весьма затрудняется отсутствием этого сочинения в большинстве библиотек.

Мы дали три чисто экспериментальных работы: Никурадзе, Дель-Нунцио и Фейдж-Тоуненда, сравнительно полно обрисовывающих современное положение экспериментальной характеристики турбулентного движения. Более поздние работы: Драйдена, Тоуненда и др., не вошедшие в сборник по указанной выше причине, принципиально нового в этой области почти не дают, и их отсутствие не является, по нашему мнению, крупным дефектом сборника. Далее мы дали три наиболее интересных статьи Кармана (не считая упомянутой выше обзорной) и одну Тейлора, освещающих теоретические вопросы турбулентного

перемешивания. И, наконец, нами дана часть большой работы Бюргерса, последовательно применяющего к гидродинамике турбулентного движения принципы статистической механики.

Подбор статей, повторяем, может вызвать упреки специалистов как в отношении полноты, так и в отношении свежести материала, но мы ответим в свое оправдание, во-первых, что ни одна из печатных статей не устарела в принципиальных установках, и, во-вторых, что мировая литература по турбулентности пополняется во много раз быстрее чем осуществляется у нас издание таких сборников. Будем надеяться, что интерес читателя к проблеме турбулентности вызовет к жизни издание второго такого сборника.

В подборе статей и в особенности в редактировании переводов принимал большое участие Н. Т. Швейковский. Большая часть переводов была сделана Н. Т. Швейковским, а остальные Б. В. Коростелевым, Б. А. Ушаковым и Е. М. Минским.

М. Великанов.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Л. Прандтль. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности	9
Т. Карман. Некоторые вопросы теории турбулентности	35
И. Никурадзе. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах	75
Б. Дель-Нупцио. Распределение вихрей в закрытых трубах при турбулентном и ламинарном режимах	151
Фейдж и Тоуненд. Исследование турбулентного течения при помощи микроскопа	163
О. Рейнольдс. Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия	185
К. Тейлор. О переносе вихрей и тепла при турбулентном движении жидкостей	228
Т. Карман. Число Рейнольдса с точки зрения кинетической теории газов	249
Т. Карман. Об устойчивости ламинарного потока и теория турбулентного движения	252
Т. Карман. Механическое подобие и турбулентность	271
И. Бюргерс. О применении методов статистической механики к теории турбулентного движения жидкостей	287

Л. ПРАНДТЛЬ.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТ ПОСЛЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ¹⁾.

Во всех технически наиболее важных случаях движения жидкостей и газов большую роль играют нерегулярные перемещения масс жидкости, перемешивающихся между собой. Это явление носит название турбулентности.

Турбулентность является, с одной стороны, причиной возникновения в потоке нежелательных сопротивлений, а с другой стороны, — обуславливает в нем одну очень полезную особенность: она способствует повышению давления в потоке. Умение воспользоваться этими свойствами потока чрезвычайно важно для специалиста-гидротехника. С этой целью за последнее время были предприняты многочисленные исследования для выяснения законов турбулентного движения. Цель настоящей статьи — дать краткую сводку важнейших результатов, полученных на основании этих работ. В ней мы приводим, между прочим, и ряд установленных закономерностей, которые имеют непосредственный практический интерес.

В первых двух параграфах мы рассматриваем два вопроса, имеющие первостепенное значение: вопрос о причинах возникновения турбулентного характера движения и вопрос об определении основных свойств и законов вполне установившейся турбулентности движения.

В третьем параграфе мы исследуем приложение этих законов к движению вдоль шероховатых стенок и выводим чрезвычайно важный закон распределения скоростей в потоке. Далее, мы переходим к применению сделанных выводов к движению в гладких и шероховатых трубах. В этом случае удалось получить формулы для распределения скоростей и закона сопротивления, очень хорошо совпадающие с опытными данными. Эти формулы в противоположность старым чисто эмпирическим формулам (которые к тому же были применимы только при больших значениях числа Рейнольдса) уже не требуют введения чисто эмпирических параметров. Все особенности различных потоков с мелкозернистой шероховатостью даже при не слишком больших числах Рейнольдса могут быть графически представлены одной единственной кривой. Опыты с потоком в трубах с искусственно воспроизведенной

¹⁾ L. Prandtl, Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. V. D. I. т. 77, № 5, 1933.

шероховатостью привели к дальнейшим выводам из установленных зависимостей.

Результаты, полученные для движения в трубах, прилагаются к сопротивлению при обтекании плоских пластинок. Далее, мы переходим к изложению свойств потока в каналах расширяющихся, суживающихся и с изгибом и к рассмотрению явлений перемешивания масс жидкости в свободной струе и в потоке за движущимися или обтекаемыми телами. Наконец, приводится новая установленная зависимость между турбулентным переносом скоростей и теплообменом. Эта зависимость приводит к новым заключениям по вопросам, относящимся к наиболее сложным явлениям турбулентного движения.

Введение.

За последние годы исследователи занимались усиленно и с большим успехом теми беспорядочными движениями жидкости с перемешиванием отдельных ее масс, которые наблюдаются во всех потоках, имеющих техническое применение, и которые известны под общим названием турбулентных движений. Результат подобного перемешивания такой же, как если бы вязкость жидкости возросла в тысячу, в десять тысяч, а может быть и большее число раз. Это явление вызывает чрезвычайное увеличение сопротивления движению жидкостей в водопроводах, сопротивление трения судов и дирижаблей, также и другие нежелательные виды сопротивления. С другой стороны, турбулентность приводит к возможности создания повышенного давления в диффузорах или же вдоль крыла аэроплана, или вдоль лопаток вентиляторов. При отсутствии турбулентности можно было бы ожидать отрыва жидкого потока от стенки диффузора, т. е. очень слабый выигрыш энергии, а при отрыве потока от крыла или лопаток — очень плохую работу последних.

Мы даем в настоящей статье изложение многочисленных опытных данных, а с другой стороны, — передаем и результаты систематической обработки этих данных и те выводы, к которым они приводят. В большинстве случаев еще не удастся прийти к какой-либо точной теории (что вообще очень трудно), однако некоторые соображения дают возможность прийти к теоретическим выводам, подтверждаемым опытными данными. Очень часто наряду с обычными опытными наблюдениями удастся прийти к очень важным заключениям также и при помощи простого рассмотрения размерности тех количеств, от которых зависит изучаемое явление.

Так, например, коль скоро единственными количествами, которыми определяются свойства жидкости, являются плотность и вязкость, то естественно прийти к числу Рейнольдса R :

$$R = \frac{\text{плотность} \times \text{скорость} \times \text{длина}}{\text{вязкость}}$$

или

$$R = \frac{v \cdot l}{\nu},$$

где ν есть кинематическая вязкость, т. е. $\nu = \frac{\text{вязкость}}{\text{плотность}}$, v есть скорость, а l — длина.

Если число Рейнольдса имеет для двух потоков одинаковое значение, то следует ожидать в обоих потоках совпадения характерных свойств движения, хотя бы и выраженных, в зависимости от условий, в различных масштабах расстояний и времени.

При применении этого правила следует правильно выбрать ту длину, которая могла бы удачно характеризовать данный поток.

При теоретическом и экспериментальном изучении проблемы турбулентности ставятся два вопроса:

1. При каких условиях и каким образом возникает турбулентность?
2. Что представляет собой вполне установившееся турбулентное движение и как следует его определить, а также вопрос о том, что следует подразумевать под выражениями: средняя скорость и среднее значение силы.

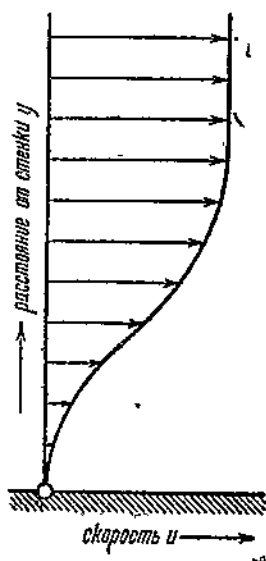
Конечно, для технических приложений последний вопрос имеет наибольшее значение.

Возникновение турбулентности.

Первого вопроса мы коснемся лишь вкратце. Мы рассмотрели его исчерпывающим образом в недавно опубликованном обзоре¹⁾. Кроме того, в этом направлении остается еще очень много нерешенных вопросов и недоведенных до конца исследований.

Наиболее существенным из установленных фактов является тот, что возникновение турбулентного движения совпадает по времени с тем распределением скоростей, которое соответствует точке перегиба в кривой распределения (фиг. 1), т. е. когда действие вязкости оказывается уже недостаточным. Незначительные возмущения скоростей по величине и направлению начинают увеличиваться и производят общую пертурбацию во всем потоке. Вначале наблюдается только легкая извилистость линий потока. Затем при все усиливающемся волновом движении наблюдается перелом волн, который ведет к образованию вихрей. Разумеется, появлению этого явления может помешать действие большой вязкости жидкости.

Из этого становится понятным, что возможность возникновения турбулентного движения тем больше, чем большее значение имеет число Рейнольдса. Распределение скоростей с кривой, имеющей точку перегиба, наблюдается, например, в пограничном слое вдоль твердых стенок, где оно возникает в известных случаях благодаря действию сил вязкости, а именно при увеличении силы давления в направлении потока и уменьшении его средней скорости.

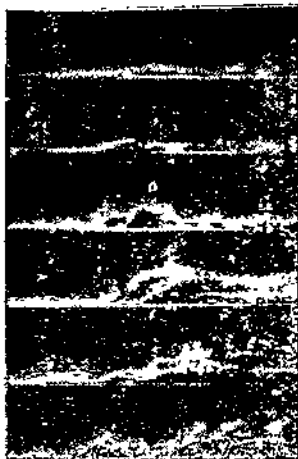


Фиг. 1. Распределение скоростей с точкой перегиба.

¹⁾ L. Prandtl, Entstehung der Turbulenz., Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 11, 1931.

При таких обстоятельствах тенденция к возникновению турбулентности сказывается особенно сильно. Однако при достаточно больших значениях числа Рейнольдса возникает турбулентное движение в прямолинейных потоках и при отсутствии ускорений. Это может быть объяснено тем, что притекающие массы жидкости уже не свободны от возмущений и в них можно обнаружить существование неправильностей в распределении скорости.

На неустойчивость распределения скоростей должно влиять также наличие в потоке незначительной циркуляции скоростей с осью, параллельной движению потока. Благодаря циркуляции одни массы жидкости приближаются к стенке, другие от нее отходят. Таким образом даже при незначительных возмущениях частицы с небольшой скоростью начинают с течением времени перемещаться между быстро движущимися массами жидкости, что и ведет к неустойчивому состоянию движения.



Фиг. 2. Возникновение турбулентности благодаря начальному возмущению потока.

Существует еще и другой возможный случай возникновения турбулентности, отличный от только что описанных случаев и предсказанный теорией. Вдоль плоской стенки в пограничном слое потока появляется волновое движение с большой длиной волны. За пределами критического значения числа Рейнольдса это возмущение усиливается с течением времени. В тех областях потока, где скорость замедляется, создаются условия, благоприятные для образования турбулентности.

Следует отметить, что значение критического числа Рейнольдса, определенное теоретически Тольмином и Шлихтингом для двух совершенно различных случаев движения, оказались в хорошем согласии с опытом.

Опыты, относящиеся к возникновению турбулентности.

Для выяснения вопроса о возникновении турбулентности мы провели опыты в лотке, имевшем 20 см ширины и 6 м длины. Несмотря на все принятые предосторожности оказалось невозможным устранить в должной мере все возникавшие возмущения местного характера. В различных местах возникали по временам с неправильной последовательностью группы турбулентных образований, которые и распространялись затем довольно быстро в потоке.

Можно сделать более наглядной всю картину образования и распространения турбулентных возмущений, вводя через отверстие в стенке и через сито искусственным путем новые массы жидкости или же, наоборот, отсасывая жидкость из потока через это отверстие. В первом случае при вводе в поток небольшой массы, которая еще не принимала участия в общем движении, в потоке создается неустойчивость движе-

ния, как только эта новая масса попадет в поток у стенки. Даже при чрезвычайно малых количествах поступающей таким образом жидкости в том месте, где эта жидкость вводится, возникает турбулентное движение.

При отсасывании жидкости через сетку в отверстие наиболее возмущенным местом потока является то, которое в момент начала отсасывания находилось против самой сетки. Благодаря отсосу пограничный слой против сетки становится тоньше. Те массы жидкости центральной части потока, которые движутся у границы пограничного слоя, проходят ступенчатую траекторию от более тонкого пограничного слоя к более толстому. Таково возмущения достаточно, чтобы в течение небольшого времени создать беспорядочное движение во всем потоке и возмутить весь пограничный слой. Серия фотографий на фиг. 2 показывает развитие и распространение турбулентного движения, возникающего у очагов возмущений.

Вполне установившаяся турбулентность.

Перейдем теперь к тем законам, которые можно установить для состояния движения, которое мы называем вполне установившейся турбулентностью. Смысл этого названия не вполне совпадает с тем содержанием, которое вкладывалось в него в истории вопроса. Мы считаем поэтому необходимым дать по возможности отчетливое определение того состояния движения, которое в настоящее время мы называем вполне установившейся турбулентностью.

Мы начнем с рассмотрения идеальной жидкости, в которой совершенно отсутствуют силы вязкости. Подобной жидкости не существует в действительности, однако во многих случаях целесообразно исследовать характер явлений в такого рода жидкости, так как они при отсутствии вязкости являются сравнительно более простыми.

Согласно с уже изложенными воззрениями турбулентность возникает тем скорее, чем больше значение числа Рейнольдса, т. е. при прочих равных условиях тем скорее, чем меньше вязкость. В пределе при вязкости, равной нулю, число Рейнольдса будет бесконечно большим, а потому, как правило, поток в идеальной жидкости должен быть турбулентным. Если допустить при этом, что стенки, вдоль которых движется жидкость, имеют математически гладкие поверхности, то при отсутствии вязкости силы внутреннего трения будут равны нулю. Движение жидкости будет в точности совершаться по законам, вытекающим из уравнений классической гидродинамики. Если же мы будем рассматривать движение вдоль шероховатых поверхностей, то даже при очень незначительной шероховатости мы около каждой неровности или выступа, образующих шероховатость, должны будем рассматривать поверхность разрыва скоростей¹⁾. Благодаря взаимодействию множества

¹⁾ При очень малом внутреннем трении мы будем иметь непрерывное движение обтекания жидкостью выступающих неровностей стенки. В пределе же при бесконечно малой вязкости будут возникать поверхности разрыва Гельмгольца со скачком скоростей, имеющим конечную величину.

мелких неустойчивых поверхностей разрыва движение жидкости принимает постепенно турбулентный характер. У каждого выступа возникает разность давлений с передней и задней сторон, что и обуславливает лобовое сопротивление, пропорциональное квадрату скорости потока. На основании этих соображений можно при изучении законов турбулентности исходить из предположения, что вязкость жидкости равна нулю.

Дальнейшие рассуждения и исследования показывают, что такой путь рассмотрения правилен и что действительно турбулентное сопротивление внутри потока, практически говоря, от вязкости не зависит. Влияние вязкости во всяком случае сказывается в очень тонком слое, если оно не перекрывается действием шероховатости стенок.

Для точного исследования турбулентного движения с перемешиванием масс жидкости удобно ввести понятие длины пути перемешивания, имеющее для турбулентного движения с перемешиванием масс жидкости такое же значение, как и понятие о средней длине свободного пробега молекул в теории молекулярной диффузии газов. При движении как одного, так и другого рода возникают касательные напряжения (вернее сказать, кажущиеся напряжения) благодаря непрерывному переносу и обмену количества движения между слоями жидкости, имеющими разные скорости. При объяснении этого довольно сложного в действительности явления можно исходить из следующего упрощенного представления.

Предположим, что некоторая масса жидкости под влиянием столкновения с соседними массами получает движение в перпендикулярном направлении к общей скорости потока, сохраняя ту же скорость в направлении потока, какую имеет тот слой жидкости, из которого выходит рассматриваемая масса. Пусть положим, что эта масса проходит в поперечном к потоку направлении расстояние l , пока она не столкнется или не перемешается с другими массами жидкости. Такого рода движения с обменом и перемешиванием масс жидкости происходят в обоих направлениях, а потому в слое с большей скоростью движения попадают все время массы, проникающие из слоев, движущихся медленнее. Скорость движения более быстрых слоев таким образом замедляется и, наоборот, те массы, которые поступают в слой с более медленным движением из слоев с большей скоростью, ускоряют движение слоев с меньшей скоростью.

Взаимное действие друг на друга двух жидких слоев получается таким же, как если бы между ними существовало взаимное трение. Все различие между молекулярным и турбулентным процессами сводится к тому, что в одном случае перемешивание производится отдельными молекулами, а в другом — целыми группами частиц жидкости.

Обозначим через u скорость потока, а через y координату в том перпендикулярном к скорости потока направлении, в котором эта скорость изменяется. Разность скоростей двух слоев, отстоящих друг от друга на расстоянии l , может быть представлена в первом приближении выражением:

$$l \cdot \frac{du}{dy}.$$

Такова разность скоростей в направлении потока в слое жидкости, с одной стороны, и в той массе жидкости, которая в него проникает из другого слоя и перемешивается в нем — с другой.

Для того чтобы определить значение силы трения или, точнее, касательного напряжения между обоими слоями, надо знать отнесенную к единице времени массу перемешивающейся жидкости. Относя ее к единице площади, мы можем выразить ее произведением плотности $\rho = \frac{\gamma}{g}$ на скорость v' перемешивания. При молекулярном движении эта скорость пропорциональна средней скорости теплового движения. Так как среднее значение тепловой скорости в направлении каждой из координат x, y, z равно только одной трети общей средней скорости c , то мы в этом случае можем принять в первом приближении равенство:

$$v' = \frac{1}{3} c,$$

где c есть общая средняя скорость теплового движения. Мы получаем отсюда следующее выражение для касательного напряжения:

$$\tau = \frac{1}{3} \rho c l \frac{du}{dy} = \eta \frac{du^*}{dy}. \quad (1)$$

При исследовании турбулентного перемешивания масс естественно принять v' количеством того же порядка, что и разность скоростей в двух слоях жидкости на расстоянии l друг от друга ¹⁾. Таким образом, отбрасывая числовой множитель, можно для касательного напряжения τ принять выражение:

$$\tau = \rho \left(l \frac{du}{dy} \right)^2. \quad (2)$$

¹⁾ Опуская числовой множитель в этом выражении, мы только видоизменяем определение длины l . При таком представлении явления мы в согласии с действительностью находим, что при действии простой вязкости касательное напряжение пропорционально первой степени производной.

$$\frac{du}{dy},$$

а при турбулентном перемешивании (если при этом отвлекаться от действия сил вязкости) касательное напряжение уже оказывается пропорциональным квадрату этой производной, т. е.

$$\left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

^{*}) При более точном расчете Больцман получил для коэффициента η вязкости выражение, в сущности чрезвычайно мало отличающееся от предыдущего, а именно:

$$\eta = 0,3503 \rho c l.$$

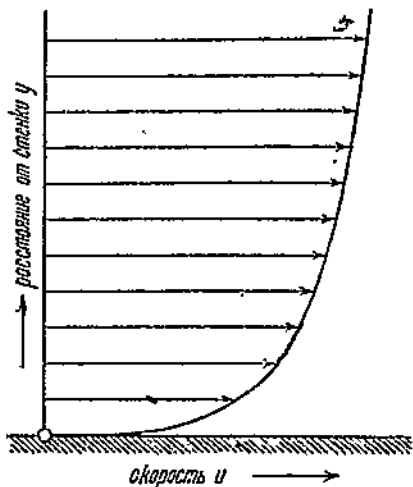
¹⁾ L. Prandtl, Untersuchung. zur ausgebildeten Turbulenz, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 5, 1925; L. Prandtl, Neuere Turbulenzforschung, Hydraulische Probleme, Berlin 1926; L. Prandtl, Ausgebildete Turbulenz, Verhandlungen 2. Intern. Kongr. Techn. Mech., Zürich 1926, стр. 62, Zürich u. Leipzig 1927.

Это положение хорошо согласуется с законом гидравлического сопротивления, пропорционального квадрату скорости потока.

Выражение (2) для касательного напряжения позволяет свести задачу определения гидравлического сопротивления к другой, а именно: к определению распределения в потоке длины l пути перемешивания. До сих пор мы не имеем еще хорошо обоснованной теории турбулентного движения с выводом законов турбулентности из дифференциальных уравнений гидродинамики. Определить распределение значений длины l пути перемешивания мы можем только опытным путем. Дело по видимости сводится к замене одних неизвестных искомых количеств дру-

гими. В действительности при этом мы все-таки получаем существенное преимущество, так как оказывается, что при больших по крайней мере значениях числа Рейнольдса длина l пути перемешивания уже не зависит от скорости потока¹⁾. Мало этого, для распределения значений длины l вдоль сечения потока можно установить довольно простую закономерность.

Часто простое рассмотрение размерности количеств дает указания, достаточные для решения вопроса. Так обстоит, например, дело при рассмотрении такой области потока, ограниченного более или менее гладкими стенками, в которой отсутствует заметное влияние как вязкости жидкости, так и шероховатости стенок. В этом случае можно



Фиг. 3. Распределение скоростей согласно уравнению (3).

привести следующие соображения для определения распределения длины l пути перемешивания.

Для какой-либо точки на расстоянии y от стенки нельзя, по условиям задачи, найти помимо этого расстояния никакой другой длины, определяющей состояние движения в окрестности этой точки. Количество l является также длиной, а именно пути перемешивания. Таким образом мы не имеем возможности определить длину l иначе, как принимая ее пропорциональной расстоянию y от стенки и полагая

$$l = \kappa y.$$

При этом числовой коэффициент κ должен быть определен опытом. Принимая закон распределения скоростей с постоянным значением касательного напряжения τ , мы получим на основании равенства (2) соотношение:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}},$$

¹⁾ Приблизительно для Re , больших 10^5 .

откуда найдем:

$$u = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} (\ln y + \text{const.}). \quad (3)$$

Такой ход изменения скоростей в зависимости от расстояния y от стенки (фиг. 3) вполне согласуется с данными наблюдений над распределением скоростей в потоке. Сравнение формулы (3) с теми кривыми распределения, которые получены экспериментально, дают для коэффициента α в первом приближении значение:

$$\alpha = 0,4.$$

Теория Кармана.

Т. Карман в одной очень ценной работе ставит задачу следующим образом ¹⁾. Он предполагает, что процесс турбулентного перемешивания характеризуется тем, что эти явления в различных случаях движения и в различных точках потока отличаются друг от друга только такими признаками, которые могут быть учтены различием масштабов длины и времени. При этом предполагается, что можно пренебречь действием вязкости по сравнению с действием турбулентности.

Вопрос об определении этих масштабов, из которых первый масштаб длины естественно совпадает с длиной l пути перемешивания, решается полностью на основании уравнений движения Эйлера. Скорость u основного потока рассматривается как функция только одной координаты y и разлагается в ряд Тейлора, в котором удерживаются только члены первого и второго порядков. Средняя скорость движения в потоке не оказывает влияния на истинную скорость рассматриваемой элементарной массы жидкости. Из всех количеств разложения в ряд учитывается только влияние количеств:

$$\frac{du}{dy} \quad \text{и} \quad \frac{d^2u}{dy^2}.$$

В качестве масштаба времени принимается промежуток T времени, пропорциональный обратному значению производной $\frac{du}{dy}$:

$$T \sim \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

(знак $\sim$ означает пропорциональность). Скорости пульсации u' (в направлении оси x) и v' (в направлении оси y) принимаются из соображений подобия пропорциональными отношению:

$$\frac{l}{T},$$

т. е.

$$u' \sim v' \sim l \frac{du}{dy}.$$

Это заключение согласуется с изложенными выше соображениями.

¹⁾ Th. v. Kármán, Mechanische Aehnlichkeit u. Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930 (см. перевод этой статьи на стр. 271 настоящего сборника).

Карман выводит, далее, соотношение:

$$l = \kappa \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}},$$

где κ есть числовой постоянный коэффициент, определяемый опытом.

Теория Кармана имеет то преимущество перед изложенной выше, что она позволяет определить длину l пути перемешивания независимо от расстояния от стенки. Если мы подставим выражение для l в уравнение (2) и проинтегрируем его в предположении постоянного касательного напряжения τ , то мы снова получим выведенное выше уравнение (3):

$$u = \frac{1}{\kappa'} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} [\ln(y + c_1) + c_2]. \quad (4)$$

Сопоставление теории с опытом приводит к равенству:

$$\kappa' = \kappa.$$

Таким образом обе формулы дают при постоянстве касательного напряжения τ то же самое распределение скоростей вдоль сечения потока.

При других предположениях обе теории уже не могут быть приведены в согласие. Впрочем, основания для гипотезы

$$l = \kappa u$$

при изменчивости напряжения τ больше не могут считаться вполне надежными, так как в таком случае мы имеем уже другую характерную длину:

$$\frac{\tau}{\frac{d\tau}{dy}}.$$

Однако и соотношение Кармана дает только приближенное значение для l , так как при его выводе члены высших порядков $\frac{d^3u}{dy^3}$ и другие в разложении скорости u в ряд не учитываются.

При постоянстве касательного напряжения $\tau = \text{const.}$ формула (3) сохраняется, если изменить масштаб длины и одновременно соответствующим образом изменить постоянную интегрирования. Мы получаем при совпадении получаемых решений полное подобие основных потоков.

Из уравнения (2) легко видеть, что количество $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ представляет собой скорость. Мы увидим, что эта скорость имеет существенное значение для излагаемых ниже соображений подобия. Мы назовем ее „скоростью касательного напряжения“ и будем обозначать через v_* .
Выражение

$$\tau = \rho v_*^2$$

имеет такой же вид, как и выражение для динамического давления

$$p_d = \frac{1}{2} \rho u^2.$$

Это и понятно с точки зрения размерности, так как касательное напряжение на единицу поверхности является силой.

В большинстве случаев числовые значения касательного напряжения τ оказываются при турбулентном движении чрезвычайно малыми по сравнению со значениями динамического давления. Таким образом, говоря о скорости v_* , мы имеем очень малую скорость по сравнению со скоростью u потока. Впрочем, сравнение с равенством (2) дает выражение:

$$v_* = l \frac{du}{dy}$$

и, таким образом, порядок величины v_* тот же, что и скоростей u' и v' пульсации.

Движение вдоль шероховатой стенки.

Согласно изложенному взгляду движение вдоль шероховатой стенки проще, чем движение вдоль гладкой стенки, так как в последнем случае вязкость играет заметную роль, тогда как вблизи неровной поверхности она такого значения не имеет. Поэтому естественно начать исследование с изучения движения вдоль шероховатой стенки.

Рассматривая идеальную жидкость, можно сделать некоторые заключения на основании простых соображений подобия, предполагая существование подобия в распределении скоростей вблизи стенки при наличии геометрического подобия неровностей шероховатых стенок. Если размер неровностей стенки может быть характеризуем длиной k , то мы можем принять эту длину в виде масштаба. Мы можем выразить это математически, принимая скорость на расстоянии y от стенки функцией отношения $\frac{y}{k}$. Если принять выражение (3) для распределения скоростей, которое, как мы видели, справедливо для областей внутри потока, то на основании сказанного можно всегда положить постоянную, которая входит в эту формулу, равной $\text{const.} = \ln k$.

Никурадзе проделал опыты с трубами различной ширины и различной шероховатости. С этой целью стенки покрывались слоем просеянного песка с различным размером зерен, приклеенного лаком. На основании результатов этих опытов (пока еще не опубликованных) можно ввести новое значение постоянной в формуле скоростей, равное $\ln 30 = 3,4$. Считая средний диаметр зерен песка в качестве размера элемента шероховатости и обозначая его через k , можно написать формулу распределения скоростей, принимая множитель $\frac{1}{\kappa}$ равным 2,5, в следующем виде:

$$u = 2,5 \cdot v_* \cdot \ln \left(\frac{30y}{k} \right).$$

Смещением осей координат на расстояние, равное $\frac{k}{30}$, можно достигнуть того, чтобы с новым отсчетом расстояний y скорость u была

равна нулю при $y = 0$ *). Мы получим, таким образом, выражение:

$$u = 2,5v_* \ln \left(1 + \frac{30y}{k} \right), \quad (5)$$

или, заменяя натуральный логарифм десятичным,

$$u = 5,75 \cdot v_* \cdot \lg \left(1 + \frac{30y}{k} \right). \quad (5a)$$

Таким образом равенства (5) или (5a) дают вполне определенную зависимость распределения скоростей от скорости касательного напряжения v_* , расстояния y от стенки и меры шероховатости k . Такая зависимость справедлива для всех тех видов шероховатости, с которыми делались испытания. Для поверхностей с другим родом шероховатости придется, вероятно, принять вместо 30 другое значение постоянной, зависящее от рода шероховатости. В Геттингене ставятся соответствующие опыты в этом направлении.

Уравнение (5) позволяет проверить высказанное выше положение для идеальных жидкостей.

Предположим, что на расстоянии $y = h$ скорость равна $u = u_1$. В этом случае из равенства (5a) мы получаем значение скорости v_* касательного напряжения:

$$v_* = \frac{u_1}{5,75 \lg \left(1 + 30 \frac{h}{k} \right)},$$

откуда

$$u = u_1 \frac{\lg \left(1 + 30 \frac{y}{k} \right)}{\lg \left(1 + 30 \frac{h}{k} \right)}. \quad (6)$$

Для соответствующего касательного напряжения мы получим выражение:

$$\tau = \rho v_*^2 = \frac{\rho u_1^2}{33 \left[\lg \left(1 + 30 \frac{h}{k} \right) \right]^2}. \quad (7)$$

Из последней формулы видно, что касательное напряжение пропорционально квадрату скорости u_1 потока. Зависимость сопротивления от шероховатости также совершенно очевидна.

Если бы мы перешли теперь в пределе при $k = 0$ к математически гладкой поверхности стенки, то на основании равенства (6) мы получили бы для скорости u при всех y постоянное значение $u = u_1$, а для τ значение, равное нулю, т. е. мы пришли бы к тем заключениям, которые обыкновенно и принимаются для идеальной жидкости.

Однако в действительности движение всегда отличается от движения идеальной жидкости. Так, даже ультрамикроскопическая шероховатость с параметром k , имеющим порядок величины, сравнимой с диа-

*) Вопрос о том, в каком месте между неровностями шероховатостей стенки следует проводить оси координат, остается еще открытым. Этот вопрос, в сущности, и не имеет большого значения.

метром атома, приводит к условиям движения, сильно отличающимся от идеальных. Наши формулы уже перестанут в этом случае соответствовать действительности и перестанут быть применимыми. При наличии вязкости все формулы изменятся существенным образом. Ниже мы подробнее разберем этот случай.

Движение в трубах.

Относительно турбулентного движения в трубах установлено одно очень важное положение. Оно заключается в том, что при больших значениях числа Рейнольдса относительные скорости отдельных масс жидкости зависят только от падения давления, а не от состояния стенок. Таким образом кривые распределения скоростей в трубах с различной шероховатостью, полученные для одного и того же падения давления, могут быть совмещены простым смещением. Конечно, мы при этом не должны принимать во внимание небольшой области в непосредственной близости к стенкам, где градиент скорости гладкой трубы больше, чем в шероховатой.

Эта особенность потока в трубе была обнаружена еще 75 лет назад Дарси при исследовании сопротивления в трубах. Им было дано очень ясное и убедительное изложение полученных им результатов, которое, к сожалению, было совершенно забыто ¹⁾. В новейшее время оно было вновь открыто Фритчем в Аахене на основании опытов в шероховатых лотках ²⁾.

Исходя из вышеизложенных соображений, можно объяснить указанное свойство предположением, что распределение длины l пути перемешивания вдоль сечения трубы не зависит от свойств и состояния стенок. Мы можем, исходя из соображений о подобии, принять для длины l пути перемешивания и для ее распределения выражение следующего вида:

$$l = r \cdot f_1\left(\frac{y}{r}\right),$$

обозначая через r радиус трубы, а через y — расстояние от стенки. Нужно было бы, строго говоря, условиться еще о том, от какого места между неровностями стенки следует отсчитывать расстояние y . Однако ввиду незначительности размеров этих неровностей, мы будем при измерениях y пренебрегать их величиной. Если дано падение давления в трубе, то можно, на основании измерения скоростей и пользуясь равенством (2), определить и распределение длины l вдоль сечения трубы. Опытные данные, по крайней мере при больших значениях числа Рейнольдса, хорошо подтверждают приведенное выше выражение для l . На фиг. 4 приведены результаты опытной проверки в безразмерной форме и указывается изменение функции f_1 .

¹⁾ Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Mém. div. sav. étr., t. 15, 1858.

²⁾ W. Fritsch, Der Einfluss der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen, Z. f. angew. Math. u. Mech., t. 8, 1928.

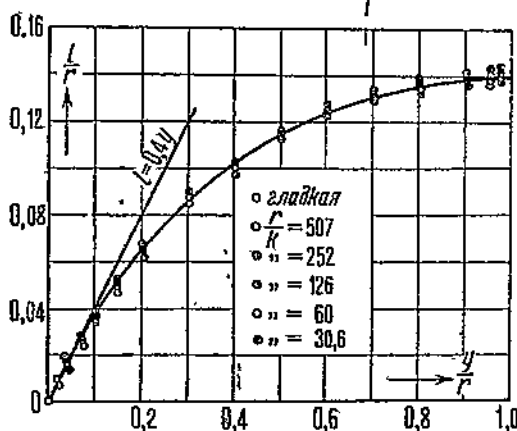
Обратно, можно принять заданным изменение функции f_1 и вычислить при помощи равенства (2) производную $\frac{du}{dy}$ и получить затем интегрированием выражение для скорости u .

Вводя скорость v_* касательного напряжения, мы можем написать это выражение в следующем виде:

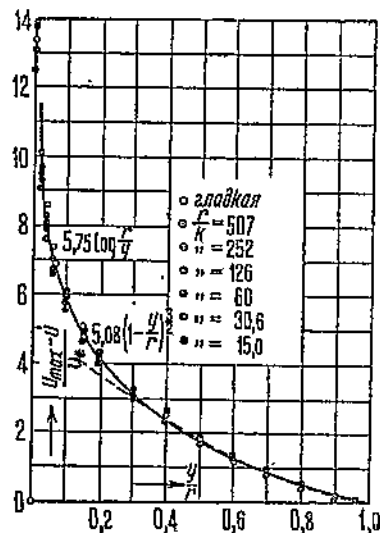
$$u_{\max} - u = v_* \cdot f_2 \left(\frac{y}{r} \right). \quad (8)$$

Это равенство было впервые дано Карманом ¹⁾. Оно хорошо подтверждается опытами, как то можно видеть на фиг. 5, на которой нанесены опытные данные для труб гладких и с различной степенью шероховатости.

Определив скорость u в зависимости от расстояния y от стенки,



Фиг. 4. Распределение длины пути перемешивания в трубе при больших числах Рейнольдса $\frac{l}{r} = f_1 \left(\frac{y}{r} \right)$. l — длина пути перемешивания; r — радиус трубы; y — расстояние от стенки; k — средний линейный размер, характеризующий шероховатость.



Фиг. 5. Зависимость $u_{\max} - u$ от $\frac{y}{r}$ в трубе при больших числах Рейнольдса. $u_{\max}$ — наибольшая скорость потока; u — скорость потока в точке y ; $v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ — скорость касательного напряжения; τ — касательное напряжение; ρ — плотность.

перейдем к рассмотрению средней скорости $\bar{u}$. Как то с очевидностью следует из формулы (8), мы получаем соотношение следующего вида:

$$u_{\max} - \bar{u} = v_* \cdot \text{const.} \quad (9)$$

На основании исследований Никурадзе можно принять постоянную равной:

$$\text{const.} = 4.07.$$

Особенно благоприятным обстоятельством является то, что уравнение (3) или его специальный вид (5) для шероховатых стенок, выведенные

¹⁾ Th. v. Kármán, Über laminare u. turbulente Reibung, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 1, 1921.

в предположении небольших расстояний от стенок, хорошо согласуются с опытными данными для трубы почти до самой ее середины¹⁾.

Мы получаем поэтому из уравнения (5) *)

$$f_2\left(\frac{y}{r}\right) = 2,5 \cdot \ln \frac{r}{y} = 5,75 \lg \frac{r}{y}. \quad (10)$$

Теперь мы имеем все данные для определения сопротивления в шероховатых трубах.

Напишем сначала обычное выражение для коэффициента сопротивления λ :

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\rho \bar{u}^2}{2}, \quad (11)$$

а затем выражение для касательного сопротивления τ из уравнения равновесия сил давления и сопротивления, действующих на цилиндрический слой жидкости с радиусом $r = \frac{1}{2}d$:

$$-\pi r^2 \frac{dp}{dx} = 2\pi r \cdot \tau,$$

так что

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau}{r} = \frac{2\rho v_*^2}{r}. \quad (12)$$

Сравнивая выражения (11) и (12) для трубы с диаметром $d = 2r$, мы получаем:

$$v_*^2 = \frac{\lambda}{8} \frac{u^2}{a}. \quad (13)$$

Напишем выражение (5а) для скорости в середине трубы, приняв $y = r$, пренебрежем единицей под знаком логарифма ввиду очень большого значения числа $30 \frac{r}{k}$ и подставим затем значение $\lg 30 = 1,477$. Мы получим:

$$u_{\max} = v_* \left(5,75 \lg \frac{r}{k} + 8,51 \right). \quad (14)$$

¹⁾ Для получения большей точности следует еще прибавить один член к этому выражению, который мы ниже и рассмотрим при анализе результатов исследования.

²⁾ Дарси в указанном выше мемуаре приводит уравнение:

$$u_{\max} - u = 11,3 \frac{\sqrt{i}}{r} (r - y)^{\frac{3}{2}},$$

где i есть уклон, равный $-\frac{1}{g\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$ и отнесенный к одному метру. Этому выражению можно придать вид равенства (8), а именно:

$$f_2\left(\frac{y}{r}\right) = 5,08 \left(1 - \frac{y}{r} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Формула Дарси хорошо совпадает с данными новейших измерений, за исключением области непосредственной близости к стенкам, в которой Дарси не производил измерений (фиг. 5).

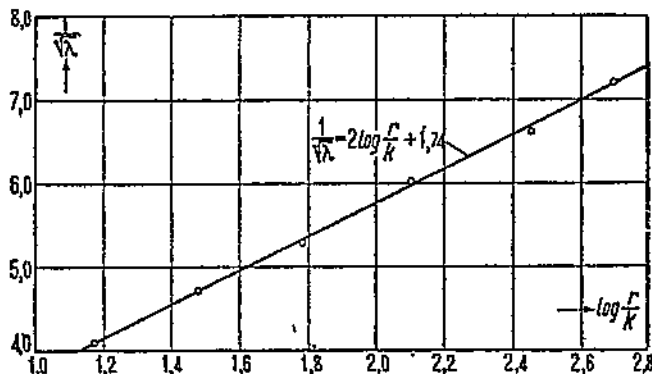
С другой стороны, уравнение (9) дает:

$$\bar{u} = u_{\max} - 4,07 v_* = v_* (5,75 \lg \frac{r}{k} + 4,43).$$

На основании равенства (13) мы получаем:

$$\lambda = \frac{8v_*^2}{\bar{u}^2} = \frac{8}{(5,75 \lg \frac{r}{k} + 4,43)^2} \approx \frac{1}{(2,0 \lg \frac{r}{k} + 1,57)^2} \quad (15)$$

Эта формула довольно хорошо согласуется с опытом. Однако вместо числа 1,57 следует в ней принять число 1,74. Это изменение связано с поправкой, которую следует еще внести в выражение (10), в кото-



Фиг. 6. Закон сопротивления в шероховатых трубах.

ром мы опустили в первом приближении дополнительный член. Для экспериментальной проверки формулы лучше всего определить корень

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

в виде функции от $\lg \frac{r}{k}$. Согласно с полученным выражением (15) мы имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg \frac{r}{k} + 1,74. \quad (16)$$

Таким образом, нанося значения $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ на диаграмму в зависимости от значений $\lg \frac{r}{k}$, мы должны получить прямую. В действительности так и получается (фиг. 6). На этой фигуре, а также на фиг. 9 представлены результаты опытов Никурадзе при измерениях сопротивления для шести различных степеней шероховатости.

Следует отметить, что равенство (14) и формула сопротивления, аналогичные равенству (16), были впервые выведены Карманом. Карман указал также и на линейный ход изменения $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в зависимости от $\lg \frac{r}{k}$.

Влияние вязкости при движении в гладкой трубе.

Мы уже указывали выше, что при незначительной шероховатости стенок действие вязкости сказывается в потоке только вблизи самих стенок в пограничном слое. При исследовании явлений, происходящих вблизи стенки, можно исходить также из рассмотрения размерности тех количеств, от которых эти явления зависят. Мы должны определить для этого следующие количества: касательное напряжение τ , зависящую от этого напряжения скорость v_* и, наконец, меру шероховатости k . При помощи этих количеств и кинематической вязкости ν мы можем построить для пограничного слоя безразмерную характеристику, аналогичную числу Рейнольдса:

$$\frac{v_* \cdot k}{\nu}.$$

Ввиду того, что при неизменном значении v_* состояние движения также остается неизменным, введение такой характеристики в формулу (3) приведет только к другому определению значения постоянной интегрирования. Эту характеристику мы назовем „поверхностной характеристикой“ потока.

Мы примем в качестве шероховатости вместо длины k другую длину, определяемую выражением:

$$k_1 = k \cdot f_3 \left(\frac{v_* k}{\nu} \right),$$

и введем ее в равенства (5), (6) и (7), а также в формулы (14), (15) и (16).

Что же касается хода изменения функции f_3 , то на основании сказанного можно заключить, что при больших значениях поверхностной характеристики $\frac{v_* \cdot k}{\nu}$ функция f_3 должна быть равна единице, так как в таком случае мы должны вновь получить уже выведенные формулы для шероховатых труб.

С другой стороны, нетрудно определить и то значение, которое должна принимать функция f_3 для малых значений числа $\frac{v_* \cdot k}{\nu}$. Опыт показывает, что при незначительной шероховатости, хотя бы и вполне заметной, движение в трубе практически не отличается от движения в такой же трубе, но совершенно гладкой, если при этом число Рейнольдса достаточно велико. Это обстоятельство скажется в наших формулах тем, что функция f_3 при малых значениях характеристики будет иметь вид:

$$f_3 \left(\frac{v_* \cdot k}{\nu} \right) = \text{const.} \cdot \frac{\nu}{v_* \cdot k}$$

с чисто числовым множителем const. Следовательно, длина k не войдет больше в наши формулы, так как характерная длина k_1 будет равна:

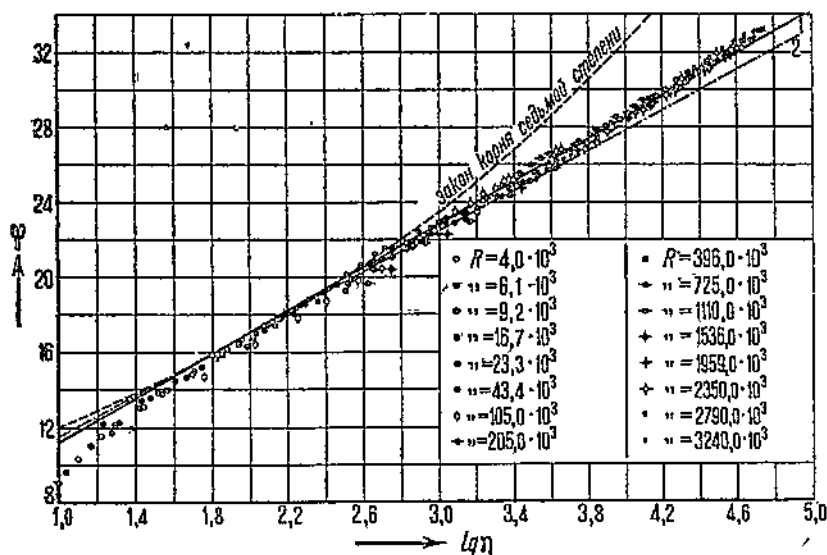
$$k_1 = \text{const.} \cdot \frac{\nu}{v_*}.$$

Опыты хорошо подтверждают этот результат. Что же касается значения

множителя const. , то соображения подобия оставляют этот вопрос неизясненным. Опыты показывают, что в формуле (5а) мы должны вместо множителя $\left(\frac{30}{k}\right)$ подставить теперь значение $9 \frac{v_*}{v}$; таким образом эта формула для гладкой трубы должна быть написана в следующем виде:

$$u = v_* \left(5,75 \lg \frac{v_* y}{\nu} + 5,5 \right). \quad (17)$$

Если мы нанесем на диаграмму значения $\frac{u}{v_*}$ в качестве функции



Фиг. 7. Закон распределения скоростей в гладких трубах.

от $\lg \frac{v_* y}{\nu}$, то получим прямую, на которую должны ложиться все точки измерений распределения скоростей, произведенные вблизи стенки гладкой трубы при установившейся турбулентности.

Исключением являются только скорости для точек на очень небольшом расстоянии от стенок, т. е. для таких малых значений безразмерного расстояния $\frac{v_* y}{\nu}$, для которых уже наблюдается влияние вязкости наряду с турбулентными напряжениями. Формула (17) оказывается справедливой почти до середины трубы, с незначительной погрешностью в средней части потока, учитываемой некоторой небольшой поправкой, о которой мы уже упоминали выше.

Кривые, нанесенные на фиг. 7, относятся к измерениям не только вблизи стенок, но и около середины трубы. Благодаря этому можно наблюдать очень небольшое систематическое отклонение от линейной

зависимости между скоростью u и количеством $\lg \frac{v_* \cdot y}{\nu}$. Это отклонение может быть учтено только более точной теорией ¹⁾.

Для сравнения на фиг. 7 изображен также (пунктирной линией) закон распределения скоростей, полученный из формулы Блазиуса для сопротивления в трубах и выражающийся уравнением ²⁾:

$$\frac{u}{v_*} = 8,7 \left(\frac{v_* \cdot y}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (18)$$

Как видно из средней части кривой распределения скоростей закон Блазиуса хорошо совпадает с законом, выражаемым формулой (17). Для крайних же участков кривой слева и справа получается заметное расхождение. Действительно, уже давно было установлено, что для больших значений числа Рейнольдса корень седьмой степени в формуле (18) должен быть заменен корнем восьмой или девятой степени.

Это объясняется тем, что формула (18) с корнем седьмой степени является только приближенным выражением для более точного закона (17). Выбор степени корня для приближенного представления более точного закона зависит от того участка кривой, который интерполируется степенной формулой ³⁾.

Для коэффициента λ сопротивления мы получаем из уравнения (16)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg \frac{v_* \cdot r}{\nu} + 0,5.$$

Принимая еще во внимание равенство (13), мы найдем:

$$\frac{v_* \cdot r}{\nu} = \frac{\bar{u} \cdot r}{\nu} \cdot \frac{v_*}{\bar{u}} = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \frac{1}{2\sqrt{8}},$$

или, обозначая число Рейнольдса $\frac{\bar{u} \cdot d}{\nu}$ через R ,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg (R\sqrt{\lambda}) - 1,0. \quad (19)$$

Никурадзе проверил эту формулу до значений числа Рейнольдса $R = 3,4 \cdot 10^6$, и им было обнаружено очень хорошее совпадение данных опыта с линейной зависимостью между количествами: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ и $\lg(R\sqrt{\lambda})$.

Принимая же во внимание дополнительный поправочный член k

¹⁾ Th. v. Kármán, Mechanische Aehnlichkeit u. Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen 1930. (См. перевод этой статьи на стр. 271 настоящего сборника.)

²⁾ Th. v. Kármán, Über laminare u. turbulente Reibung, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 1, 1921; L. Prandtl, Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 5, 1925.

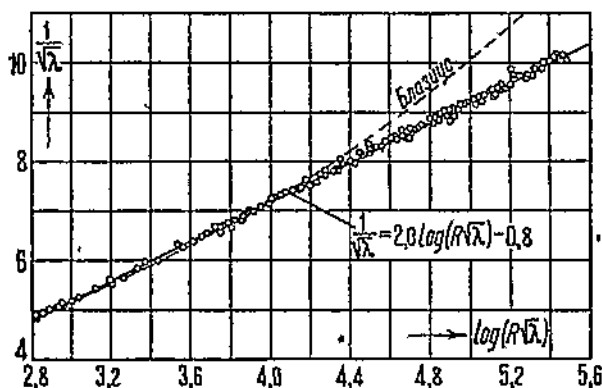
³⁾ Опытные точки при значениях $\lg \frac{v_* \cdot y}{\nu}$, меньших 2, заметно отклоняются от прямой, выражаемой уравнением (17). Это объясняется влиянием вязкости. Однако это отклонение, если не считать области наименьших сверхкритических чисел Рейнольдса, имеет место только для частиц жидкости в очень тонком слое вблизи стенок трубы.

формуле (17), мы должны в формуле (19) поставить для свободного члена вместо числа 1,0 число 0,8 *).

Таким образом мы получаем следующую окончательную формулу для коэффициента сопротивления:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg (R\sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (20)$$

Определение коэффициента сопротивления по формуле (20), несмотря на то, что $\sqrt{\lambda}$ входит и в правую часть равенства, производится весьма просто. Для этого, подобрав приближенное значение для $\sqrt{\lambda}$, следует внести его в правую часть формулы (20) и затем подсчитать получаю-



Фиг. 8. Закон сопротивления в гладких трубах согласно уравнению (20) и на основании опытных данных.

щееся более точное значение для $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Если найденное таким способом значение $\sqrt{\lambda}$ сильно расходится с первоначально принятым приближенным, то надо принять другое значение и начать расчет снова.

Изменение количества $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в зависимости от числа Рейнольдса R по уравнению (20) представлено на фиг. 8. На эту же фигуру нанесены точки, полученные путем измерений. Мы видим, что формула (20) подтверждается опытом вплоть до очень малых чисел Рейнольдса.

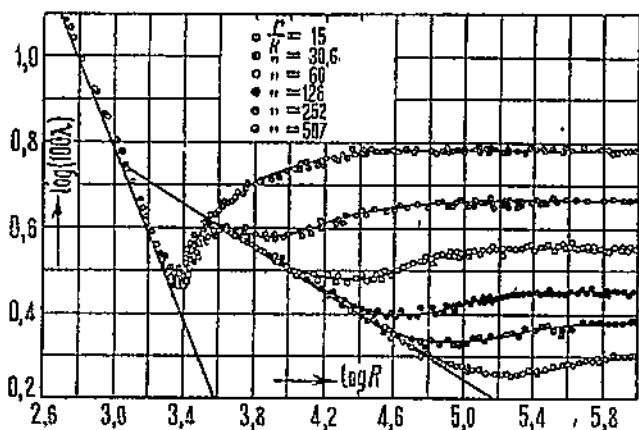
Трубы с шероховатыми стенками.

Возвратимся теперь к общей задаче движения в трубах с шероховатыми стенками. На фиг. 9 мы представили, на основании еще неопубликованных опытов Никурадзе в Геттингене, зависимость коэффициента

* Nikuradse, Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren, V. D. I. Forschungsarbeiten, № 356, 1932. (См. перевод этой статьи на стр. 75 настоящего сборника.)

сопротивления от числа Рейнольдса для труб с различной относительной шероховатостью $\frac{r}{k}$.

Левая часть диаграммы, относящаяся к числам Рейнольдса ниже критического, дает сопротивление в ламинарном потоке. Мы видим, что в этом случае движение в гладких трубах и в шероховатых представляет мало различий. Наоборот, все кривые начинают резко расходиться, начиная с критического значения числа Рейнольдса, т. е. при возникновении турбулентного состояния движения. Кривые сопротивления в трубах с малой шероховатостью идут почти вдоль прямой, полученной для гладких труб, а затем постепенно начинают от нее отклоняться.



Фиг. 9. Коэффициент сопротивления в шероховатых трубах.

няться. Все изложенное подсказывает, как установить единую закономерность, которая обнимала бы все состояния турбулентного движения.

Нанесем на диаграмме вдоль оси абсцисс значения безразмерной поверхностной характеристики $\frac{v_* \cdot k}{\nu}$ или значения ее логарифма. На оси ординат отложим значения такого количества, которое на основании присущей явлению закономерности является определенным при установившемся турбулентном потоке в трубе с данной шероховатостью. В качестве такого количества мы можем, например, принять

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2,0 \lg \frac{r}{k}$$

или же, рассматривая закон распределения скоростей, количество:

$$\frac{u}{v_*} - 5,75 \lg \frac{r}{k}.$$

Выбирая тот или другой масштаб для оси координат и нанося на диаграмму точки, соответствующие результатам опытных измерений при различной шероховатости стенок, мы найдем, что в том и в дру-

гом случаях все точки укладываются на одну и ту же кривую для всех степеней шероховатости.

Естественно, как то и вытекает из приведенных соображений, одна из полученных кривых переходит в другую с заменой одного масштаба ординат на другой.

Таким путем вся проблема турбулентного потока в трубе получает довольно хорошее решение, которое устанавливает — путем сопоставления теории со сравнительно небольшим числом необходимых экспериментов — закономерности, обнимающие собой очень большое количество случаев движения.

Для полного решения проблемы остается еще распространить методы исследования, примененные до сих пор лишь к шероховатости, образованной песком, и давшие возможность построить кривую, изображенную на фиг. 10, также и на другие типы шероховатости стенок. Исследования в этом направлении находятся еще в настоящее время в стадии подготовки экспериментов.

Обобщение полученных результатов на другие случаи.

Еще до того времени, как стала известна формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,816}{\sqrt{\frac{n \cdot d}{\nu}}},$$

для сопротивления в трубах уже был определен коэффициент трения при обтекании плоской пластинки ¹⁾.

Значение этого коэффициента было вычислено формальным путем на основании закона сохранения количества движения. Определялось при данном распределении скоростей уменьшение количества движения в потоке в зависимости от длины обтекаемой пластинки. Это уменьшение на единицу длины приравнивалось силе трения, относимой тоже к единице длины.

На основании полученного таким путем закона и был определен коэффициент трения C_f (частное от деления полного сопротивления на поверхность пластинки и динамическое давление $\rho \frac{u^2}{2}$).

Было получено следующее выражение:

$$\sqrt{C_f} = 0,074 \left(\frac{ul}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}}, \quad (21)$$

где l есть длина пластинки, а u — относительная скорость потока или пластинки в относительном движении.

Сравнение формулы с экспериментальными данными обнаружило такие же отклонения, как и при изучении сопротивления в трубе.

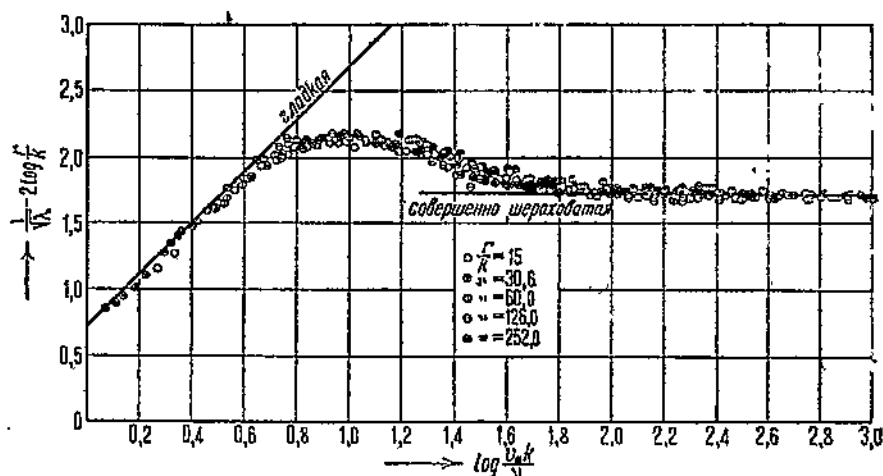
¹⁾ Н. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. Phys., т. 56, 1908; Gebbers, Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Widerstandes gegen bewegte Körper, Schiffbau т. 9, 1908.

Дальнейшей задачей исследования явилась задача перенести на эту область явлений те более точные законы, которые были получены для сопротивления в трубах.

Пересчет оказался делом очень затруднительным. Первый раз этот пересчет был сделан Карманом. Позднее то же самое было сделано автором настоящего обзора ¹⁾. Для сопротивления были составлены числовые таблицы. Результаты подсчета хорошо совпали с экспериментальными данными Кемпфа ²⁾. Эти табличные значения довольно хорошо охватываются формулой Шлихтинга:

$$\sqrt{C_f} = \frac{0,455}{\left(\lg \frac{u_l}{v}\right)^{2,58}} \quad (22)$$

Хотя эта формула и является простой интерполяцией табличных значений, однако она очень удобна для расчета всех случаев турбулентного движения, имеющих практическое значение.



Фиг. 10. Функция шероховатости.

Для случая шероховатых пластинок были также сделаны подсчеты на основании того закона шероховатости, который представлен в виде кривой на фиг. 10.

Очень большое значение имеет теория турбулентного пограничного слоя при движении с ускорением или с замедлением. Важный случай такого рода движений представляет собой движение в расширяющихся или суживающихся каналах и трубах. Этот случай был исследован для

¹⁾ Th. v. Kármán, Über laminare u. turbulente Reilung., Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 1, 1921; L. Prandtl, Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse d. Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen Liefer. 3., München 1927.

²⁾ G. Kempf, Flächenwiderstand. Werft, Reederei, Hafen, т. 5, 1925; G. Kempf u. H. Kloess, Widerstand kurzer Flächen. Werft, Reederel, Hafen, т. 6, 1925.

воздуха Дюнком ¹⁾ и для воды в лотках Никурадзе ²⁾. Некоторые вопросы, относящиеся к такого рода движениям, рассматривал Грушвиц. Следует, наконец, еще упомянуть о работах Бури в Цюрихе (о движении в сопле) и Куно в Ганновере об обтекании крыла аэроплана.

Бури и Грушвиц, независимо один от другого, сделали интересную попытку путем вычисления определить явления, происходящие в пограничном слое. Метод Бури проще, зато работа Грушвица является более исчерпывающей.

К сожалению, недостаток места не позволяет изложить эти сложные вычисления. Они позволяют предсказать движение в пограничном слое по заданному распределению давлений и, что особенно важно, решить вопрос, будет ли поток обтекать всю стенку целиком или же в некотором месте будет наступать срыв струи.

Вопрос об изучении действительных свойств крыла аэроплана, о сопротивлении различных профилей и об определении максимальной подъемной силы находится в настоящее время еще в стадии разработки.

Если это изучение приведет к удовлетворительному совпадению теории с опытными данными, то будет сделан очень большой шаг вперед в развитии теории крыла аэроплана.

Дальнейшие проблемы.

Криволинейный поток. Исследование движения в сильно изогнутых лотках показало, что турбулентное движение само по себе имеет в этом случае характер, существенно отличающийся от прямолинейного, даже если не принимать во внимание тех дополнительных „вторичных“ движений, которые возникают у стенок и которые уже были описаны прежними исследователями ³⁾.

Явления, характеризующие такого рода движение, сводятся к следующему: массы жидкости, движущиеся вдоль изогнутого канала, находятся под действием центробежной силы. Массы, движущиеся около внутренней стенки, имеют большую скорость, чем массы, движущиеся около внешней стенки, и поэтому вытесняют более медленно движущиеся.

С другой стороны, те массы жидкости, которые расположены в непосредственной близости к стенке, задерживаются силой трения. У внешней части канала, благодаря вытеснению более медленных масс жидкости, начинается интенсивное перемешивание. Наоборот, во внутренней части канала сосредотачиваются более медленно движущиеся массы жидкости. Процесс перемешивания становится слабее.

¹⁾ F. Dönch, Divergente u. konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln, VDI Forschungsheft, № 282, 1926.

²⁾ Nikuradse, Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen, VDI Forschungsheft, № 289, 1926.

³⁾ H. Nippert, VDI Forschungsheft № 320, 1929.

В общем это явление напоминает то, которое происходит в жидкости вдоль нагреваемых или охлаждаемых стенок. В первом случае нагретые частицы жидкости благодаря действию гидростатической подъемной силы стремятся отделиться от стенки. Во втором же случае, при охлаждении массы, жидкости, благодаря их большей плотности, удерживаются у стенки. В первом случае перемешивание усиливается и сила турбулентного трения увеличивается. Во втором же случае турбулентное напряжение становится слабее.

Исследование этих явлений было сделано в Геттингене, и в настоящее время уже производится обработка полученных результатов.

Свободная турбулентность за движущимся телом. Другой тип интересных турбулентных движений сводится к распространению свободной турбулентной струи и к состоянию движения в жидкости за движущимся в ней телом.

Границы свободной струи, вытекающей, например, из большого отверстия (или, например, из коллектора с открытой рабочей частью и т. д.), являются всегда очень неустойчивыми и переходят в неправильные системы вихрей. Для изучения этих явлений можно также сохранить понятие длины l пути перемешивания. В данном случае простая гипотеза, что в каждом поперечном сечении слоя, в котором происходит перемешивание масс, длина l остается постоянной и пропорциональной ширине h слоя перемешивания, позволяет вполне удовлетворительно определить характер слоя перемешивания, распределение скоростей и напряжений в этом слое ¹⁾ в зависимости только от одного данного отношения $\frac{l}{h}$.

Перенос теплоты. С турбулентным переносом скоростей при перемешивании тесно связано и явление турбулентного переноса теплоты. При движении вдоль стенки канала, как показали опыты Элиаса, величина переноса тепла и количества движения имеют один и тот же порядок, а кривые распределения температур совпадают с кривыми распределения скоростей. В жидкости же, находящейся за движущимся телом, или в турбулентной струе за обтекаемым телом обмен тепла происходит вдвое скорее, чем обмен количества движения, и кривые для температур и для скоростей, как это было показано Тейлором, заметно отличаются друг от друга.

Тейлор показал далее, что исходя из теоретических соображений можно ожидать одинакового распределения температуры и скоростей в том случае, когда оси возмущающих движение вихрей направлены параллельно линиям тока для средних скоростей потока. Если же вихри направлены в перпендикулярном направлении к линиям тока, то указанные кривые распределения будут различны. Недавно опубликованные исследования И. Рудена показывают, что законы переноса Тейлора справедливы и для свободной струи.

Повидимому, можно притти к заключению, что при ближайшем рассмотрении можно обнаружить два типа турбулентного движения: тур-

¹⁾ G. Taylor, Proc. Roy. Soc. (A), London 1931; W. Tollmien, Handbuch der Experimentalphysik, т. 4, вып. 1.

булентность потока, ограниченного стенками, и свободную турбулентность. В последнем случае вихри, возмущающие движение, направлены, главным образом, в перпендикулярном к движению направлении. Этот род турбулентности, по всей вероятности, можно рассматривать как следствие возмущающего действия таких вихрей.

Согласно результатам Элиаса в потоке, ограниченном стенками, вихри направлены, главным образом, вдоль движения потока. Возможно, что это важное указание может наметить путь к точной теории явления турбулентности. Однако, поскольку такой теории еще нет, приходится пока довольствоваться полуэмпирическими соображениями, изложенными в настоящей статье.

Т. КАРМАН.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ¹⁾.

§ 1. Введение.

Применение теоретической гидродинамики к техническим проблемам затрудняется тем фактом, что в большинстве случаев установившегося движения таковое может считаться установившимся на самом деле только до тех пор, пока мы рассматриваем одни лишь средние по времени значения скоростей и давлений, так как в действительности скорости и давления испытывают с течением времени беспорядочные отклонения от этих средних значений. Такого рода движения мы называем турбулентными. Во всех случаях турбулентного движения распределение скоростей и давлений в потоке и в особенности рассеяние энергии определяются этими отклонениями или пульсациями. Поэтому окончательное теоретическое обоснование технической гидродинамики можно дать только посредством объяснения турбулентного движения.

Рассматривая исторический ход развития технической гидродинамики, мы можем определенно отметить три различных периода.

В первом периоде было установлено отличие того типа движения, который мы наблюдаем в трубопроводах и реках, от прямолинейного струйного движения. За отсутствием достаточных теоретических оснований для объяснения турбулентного движения при разработке теории обращались только к самым общим понятиям и законам, как, например, к законам количества движения и энергии, а в дальнейшем прибегали уже к данным опытных наблюдений, которые специально для этого и ставились, и выводили из них некоторые чисто эмпирические законы.

Основной задачей исследования в этот период чисто эмпирического построения науки было определение значений постоянных, входивших в те эмпирические уравнения, форма которых подсказывалась какими-либо простыми соображениями о количестве движения или энергии. Разумеется, отдельные значения этих постоянных, благодаря сложности самого явления, пригодны только в сравнительно узких пределах. За этими пределами уже подбирались другие значения. Мы можем назвать этот период — периодом меняющихся значений постоянных.

Когда Осборн Рейнольдс открыл немногим больше полувека назад законы неустойчивости струйного движения и нашел основные признаки

¹⁾ Th. v. Kármán, Some aspects of the theory of turbulent motion, Proceedings of the International Congress for applied mechanics, Cambridge 1934.

турбулентного потока, положение дела изменилось уже настолько, что соображения подобия могли облегчить систематическую обработку наблюдений и их истолкование и позволили переносить данные наблюдений от одного случая движения к другому.

Мы научились после этого сравнивать между собою опыты с водою, маслом и воздухом и нашли законы, позволяющие относить результаты наблюдений над моделями к явлениям в их истинных размерах. В этот второй период истории науки постоянные, принимающие разные значения, были заменены функциями большей частью определенного безразмерного параметра, определяющего отношение величины сил вязкости к силам инерции. Выбор такого параметра зависит, конечно, от условий каждой частной задачи, однако выражение этого параметра всегда имеет одну и ту же форму, связывающую характерный для задачи размер и характерную скорость с кинематической вязкостью данной жидкости. Этот параметр часто называется числом Рейнольдса.

Хотя идеи Рейнольдса еще не успели распространиться на всю область возможных технических приложений, мы в настоящее время уже вступаем в третий период развития с еще более широкими целями исследования. Соображения подобия дают схему для систематизации опытных фактов, но еще не дают никаких указаний о самом виде тех кривых и функций, которые заменили собою коэффициенты с переменным значением первого периода. Эти функции естественно обуславливаются самим механизмом турбулентного движения. Поэтому и основная цель современного исследования сводится к возможно более полному открытию и объяснению законов, действительно управляющих турбулентным движением, в надежде на то, что и для турбулентного движения удастся, как и для движения идеальной жидкости или для струйных (ламинарных) движений вязкой жидкости, рассчитать распределение скоростей и давлений, перенос энергии и ее рассеяние без дополнительных чисто эмпирических данных.

Предшествующие три международных конгресса прикладной механики посвящали один из общих докладов проблеме „турбулентности“. Десять лет назад ¹⁾ на Первом конгрессе докладчик имел честь сделать обзор состояния науки того времени, обратив особое внимание на вопрос о неустойчивости ламинарного движения. Два года спустя в своем докладе в Цюрихе Прандтль ²⁾ высказал несколько совершенно новых идей о теории установившегося турбулентного режима. На последнем конгрессе в Стокгольме Осен ³⁾ сделал глубокое исследование математических теорий, которые были к тому времени опубликованы. Мой настоящий доклад посвящен, главным образом, исследованию физической стороны явления и некоторым практическим приложениям теории установившейся турбулентности. Однако, ввиду того, что за последнее время получены определенные результаты и по вопросу об устойчивости, я постараюсь дать краткий обзор наших знаний в этой области.

¹⁾ Th. v. Kármán, Über die Stabilität der Laminarströmung u. die Theorie der Turbulenz, Proc. of the I Intern. Congress for applied Mechanics, Delft 1924.

²⁾ L. Prandtl, Über die ausgebildete Turbulenz, Proc. of the II Intern. Congress for applied Mechanics, Zürich 1926.

³⁾ O seen, Proc. III Intern. Congress, Stockholm 1930.

§ 2. Устойчивость и неустойчивость прямолинейного движения.

Опытные данные о неустойчивости прямолинейного движения не вполне согласуются с результатами тех теоретических исследований, которые основаны на методе малых колебаний. Теоретически были исследованы следующие случаи движения: а) параллельный прямолинейный поток между двумя безграничными стенками, движущимися с различной скоростью, б) параллельный прямолинейный поток между двумя неподвижными безграничными стенками, в) прямолинейный поток в бесконечной круглой трубе.

Первый случай часто называется проблемой Куэтта, а два последние связываются с именем Пуазейля. В первом случае метод малых колебаний определенно приводит к отсутствию неустойчивости. Во втором случае решение вопроса остается до сих пор сомнительным ¹⁾. При опытной проверке первый случай был воспроизведен с приближением при помощи двух соосных цилиндрических поверхностей вместо двух плоских стенок. Один из цилиндров находился в покое, в то время как второй вращался. Предполагалось, что при достаточно малом расстоянии между поверхностями по сравнению с их радиусами можно было пренебрегать действием ускорений, обусловленных вращением (силами центробежной и Кориолиса). Опыт показал, что поток становится неустойчивым для некоторого характеристического значения числа Рейнольдса, т. е. отношения

$$\frac{\text{расстояние} \times \text{разность скоростей}}{\text{кинематическая вязкость}}$$

В третьем случае движение, повидимому, устойчиво, по крайней мере при колебаниях с осевой симметрией.

Аналогичные результаты получены при опытных установках, приближенно воспроизводящих второй и третий случаи движения. Для всех этих случаев можно определить нижний предел числа Рейнольдса. При значениях ниже этого предела никакой турбулентности не появляется, а уже имеющаяся не сохраняется. Однако фактический переход к неустойчивому движению может быть задержан, если тщательно избегать входящих возмущений, в особенности устройством хорошо обтекаемых гладких поверхностей у входного отверстия. Ламинарный поток может удерживаться при таких условиях при числах Рейнольдса, в десять раз превосходящих критическое предельное его значение. Это указывает, что ламинарный поток, повидимому, устойчив для бесконечно малых возмущений и становится неустойчивым при конечных возмущениях. Этот вывод подтверждается интересными экспериментальными исследованиями Л. Шиллера ²⁾ и его сотрудников, которым удалось установить определенные закономерности для величины тех возмущений у входной части, которые приводят к неустойчивости ламинарного потока.

¹⁾ Д-р Гейзенберг, известный автор принципа неопределенности в физике атома, исследовал этот вопрос в одной из своих ранних статей и нашел неустойчивость движения при больших значениях числа Рейнольдса. Однако ввиду сомнительной сходимости некоторых рядов, остается еще известное сомнение в результате вычислений.

²⁾ L. Schiller, Proc. third Intern. Congress, Stockholm 1930, L. Schiller u. Kirsten, Z. f. techn. Physik, 1929; A. Neumann, Forschungen II, 1931.

§ 3. Неустойчивость пограничного слоя.

Для некоторых из случаев, рассмотренных в настоящем докладе, действие сил ламинарного или турбулентного трения ограничивается областью вблизи поверхности твердых тел. Эта область носит название „пограничного слоя“. Возникает вопрос: при каких условиях этот слой становится турбулентным. Общим ответом является утверждение, что устойчивость зависит от числа Рейнольдса для пограничного слоя, т. е. от отношения произведения скорости вне пограничного слоя на его толщину к кинематической вязкости.

В общем случае толщина пограничного слоя растет в направлении потока, так что начальная часть пограничного слоя остается еще ламинарной, когда поток при некотором числе Рейнольдса становится уже турбулентным. Следует отметить два экспериментальных факта. Во-первых, пограничный слой может оставаться ламинарным, даже если поток вне этого слоя турбулентный. Во-вторых, критическое значение числа Рейнольдса для пограничного слоя зависит от турбулентности потока вне слоя, увеличиваясь при уменьшении турбулентности потока. Этот последний факт имеет значение в ряде практических приложений.

В вопросе устойчивости ламинарного пограничного слоя результаты теоретических исследований лучше согласуются с опытными фактами, чем для случая потока между параллельными стенками. В. Тольмин¹⁾ определенным образом обнаружил неустойчивость для числа Рейнольдса, близких к тем, которые получены в опыте.

Опытная проверка этого вывода была сделана Никурадзе²⁾, Ричардсоном и Е. Тейлором³⁾. Результаты можно формулировать так: опыты не противоречат теоретическим расчетам, но они еще не в такой мере определенно их подтверждают, чтобы вопрос мог считаться решенным без всяких сомнений. Шлихтинг⁴⁾ развил дальше вычисления Тольмина. Наконец, Драйденом⁵⁾ было произведено теоретическое исследование влияния турбулентности потока вне пограничного слоя на характер движения в самом пограничном слое.

§ 4. Неустойчивость непрямолинейного потока.

Устойчивость при вращении идеальной жидкости была исследована впервые Релеем. Он нашел, что устойчивость зависит от произведения $u \cdot r$, где u есть линейная скорость вращения, а r — расстояние от центра. Если произведение $u \cdot r$ растет вместе с радиусом r , то распределение скоростей остается устойчивым, в противном случае оно неустойчиво.

¹⁾ W. Tollmien, Göttinger Nachrichten, 1929; Aachener Vorlesungen, Berlin 1930.

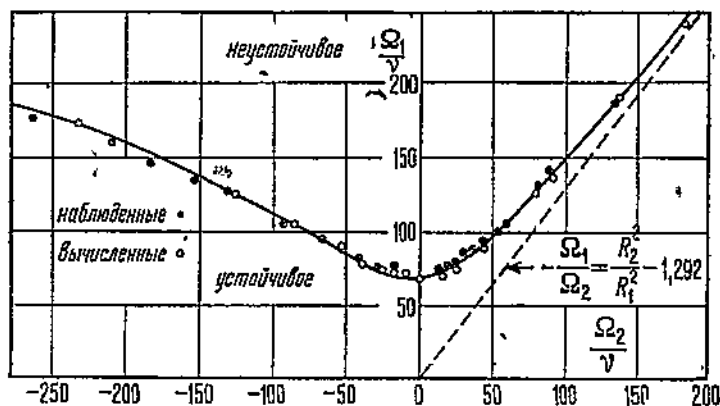
²⁾ J. Nikuradse, Z. für angew. Math. u. Mech., 1933.

³⁾ E. G. Richardson a. E. Tyler, Physikalische Zeitschrift, 1931.

⁴⁾ H. Schlichting, Z. f. angew. Math. u. Mech., 1933; Göttinger Nachrichten XXXVIII, 1933.

⁵⁾ L. Dryden, Journ. Aero Sciences, № 1, 1934.

При круговом вращении давление увеличивается с радиусом. Градиент давления $\frac{dp}{dr}$ равняется $\rho \frac{u^2}{r}$ (центробежной силе на единицу объема). Рассмотрим перемещение элемента массы жидкости с окружности радиуса r_1 на окружность с радиусом r_2 без изменения момента количества движения. Если u_1 обозначает скорость элемента до перемещения, то после перемещения его скорость будет равна $\frac{r_1}{r_2} u_1$. Если центробежная сила, действующая на элемент будет больше в его новом положении, чем градиент давления $\frac{dp}{dr} = \rho \frac{u^2}{r_2}$ в той же точке, то элемент



Фиг. 11. Устойчивость непрямолинейного движения (диаграмма Тейлора).

массы жидкости будет еще дальше перемещаться от центра, и распределение скоростей будет неустойчивым. Таким образом условие неустойчивости выражается неравенством:

$$\rho \frac{r_1^3 u_1^2}{r_2^3} \frac{1}{r_2} > \rho \frac{u_2^2}{r_2},$$

т. е.

$$|r_1 u_1| > |r_2 u_2|.$$

В обратном случае под действием градиента давления элемент жидкости будет вынужден возвратиться в свое первоначальное положение и распределение скоростей будет устойчивым.

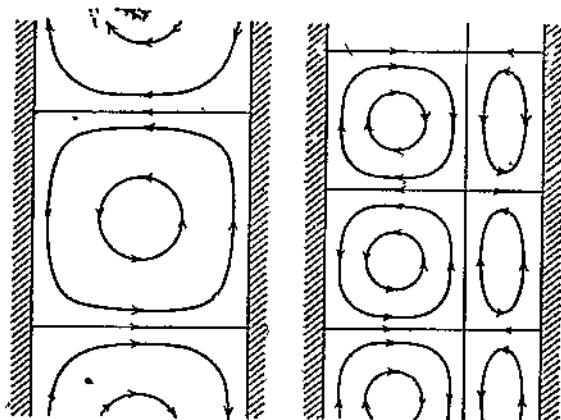
Дж. И. Тейлор ¹⁾ в интересной статье, доложенной на конгрессе в Дельфте, обобщил результаты исследования Релея на случай ламинарного движения вязкой жидкости, т. е. в применении к случаю вращения ламинарного потока между двумя вращающимися цилиндрами.

¹⁾ G. I. Taylor, Proc. of the first Intern. Congr., Delft 1924; Proc. Roy. Soc. (A), 104, 1923; Philis. Trans. Roy. Soc. (A), 223, 1923.

Обозначим радиусы цилиндров через R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) и пусть Ω_1 и Ω_2 суть их угловые скорости. На фиг. 11 абсциссы означают $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, а в качестве ординат нанесены $\frac{\Omega_1}{\nu}$ (ν есть кинематическая вязкость). Применяя к этому случаю критерий Релея, мы найдем для устойчивости условие:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} < \frac{R_2^3}{R_1^3}.$$

Таким образом на фиг. 11 области устойчивости и неустойчивости для каждого отдельного значения отношения $\frac{R_1}{R_2}$ отделяются друг от друга



Фиг. 12. Типы возмущений при неустойчивом непрямолинейном движении.

прямой линией. Применяя же расчет Тейлора, мы получим несколько большую область устойчивости, ограниченную кривой с отмеченными на ней точками. На фиг. 12 изображены типы возмущений, которые приводят к неустойчивости вращательного движения; они могут быть характеризованы как вихри с осевой симметрией, расположенные в ячейках. Согласно этой теории Тейлора вращательное движение между покоящимся внутренним цилиндром и вращающимся

внешним цилиндром будет оставаться устойчивым при любых скоростях последнего.

Фактически, однако, движение становится турбулентным при некотором определенном числе Рейнольдса. Мы получаем, таким образом, такое же несовпадение результатов теории малых колебаний с опытом, как и в случае параллельного прямолинейного движения.

Шлихтинг¹⁾ пытался объяснить это несовпадение, рассматривая вопрос об устойчивости промежуточного типа ламинарного движения, наступающего после того, как внешний цилиндр внезапно выведен из покоя и приведен во вращение, до того как образуется вполне установившееся поле средних скоростей между цилиндрами. Этот случай аналогичен движению в пограничном слое, изученному Тольмином. Сравнивая между собою вычисленные пределы устойчивости в обоих случаях, мы находим, что присутствие центробежной силы в случае вращения внешнего цилиндра значительно увеличивает устойчивость движения, что и согласуется с данными наблюдения.

¹⁾ H. Schlichting, Göttinger Nachrichten, 1932.

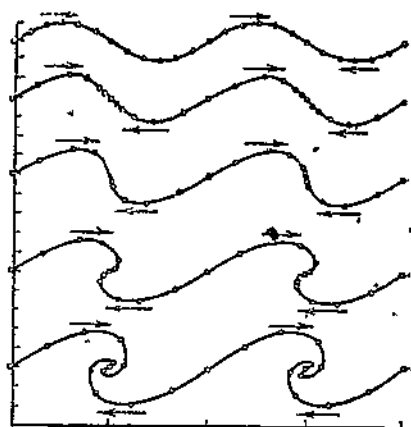
§ 5. Неустойчивость слоев жидкости с переменной плотностью.

Гельмгольц исследовал вопрос устойчивости для движения с различными скоростями двух слоев жидкости с равной или различной плотностью. Поверхность раздела между слоями можно рассматривать как вихревую поверхность, так что задача сводится к устойчивости поверхностного распределения вихрей. Известно, что такое распределение в однородной жидкости неустойчиво. Начальные возмущения увеличиваются с течением времени, вихри имеют тенденцию концентрироваться в определенных областях, пока, наконец, их поверхностное распределение не распадается в ряд обособленных отдельных вихрей.

Начало этого процесса было недавно изучено Розенхедом ¹⁾. На фиг. 13 изображены последовательные стадии перехода непрерывно распределенных на поверхности вихрей в ряд отдельных вихрей. В том случае, когда плотности слоев жидкости различны, главное значение приобретает сила тяжести. Если более тяжелый слой лежит на более легком, то это расположение всегда неустойчиво. Если же более тяжелый слой расположен под более легким, то устойчивость зависит от отношения плотностей, от относительной скорости и от длины волны периодического возмущения. Обозначим отношение плотностей через $n = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (нумерация слоев выбрана так, чтобы n было меньше единицы), длину волны — через λ . Поверхность разрыва будет неустойчивой, если напор $\frac{U^2}{2g}$, соответствующий относительной скорости U , больше, чем $\frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{1}{n} - n \right)$.

Недавно Дж. И. Тейлор ²⁾ и Гольдштейн ³⁾ исследовали устойчивость при различном положении слоев и разном распределении плотности, в том числе и случай непрерывного перехода плотности от одной массы жидкости к другой. В последнем случае устойчивость зависит от градиента скорости $\frac{du}{dy}$ и градиента плотности $\frac{d\rho}{dy}$ в переходном слое. Условие устойчивости определяется неравенством:

$$\frac{q \frac{d\rho}{dy}}{\rho \left(\frac{du}{dy} \right)^2} > \frac{1}{4}.$$



Фиг. 13. Ход движения вихревой поверхности с образованием отдельных вихрей.

¹⁾ Rosenhead, Proc. Roy. Soc. (A), 134, 1931.

²⁾ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. (A), 132, 1931.

³⁾ S. Goldstein, Proc. Roy. Soc. (A), 132, 1931.

Л. Ф. Ричардсон¹⁾ и Л. Прандтль²⁾ пытались найти пределы устойчивости, исходя из рассмотрения энергии движения. Повидимому, полученные таким путем критерии, подобно тем известным энергетическим критериям для прямолинейного движения с однородной плотностью, которые были предложены Рейнольдсом, Орром и Лоренцом, не представляют собою настоящих критериев в строгом смысле слова. Основным результатом этих исследований, заслуживающий внимания, сводится к тому, что безразмерное количество

$$-q \frac{dp}{dy} \\ \rho \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

является основным характерным параметром для турбулентного движения тяжелой жидкости с плотностью, изменяющейся по высоте³⁾.

6. Турбулентные пульсации.

Мы переходим теперь к основной теме настоящего обзора — к вопросу об установившейся турбулентности. Движение жидкости может быть исследовано с двух различных точек зрения: так называемый способ Эйлера рассматривает давление и скорости в данной точке пространства. В способе Лагранжа исследуется судьба отдельного элемента жидкости. С точки зрения, лежащей в основе координат Эйлера, турбулентный поток характеризуется пульсациями давления и скоростей. Основным отличительным признаком этих пульсаций является их беспорядочность, т. е. отсутствие какой-либо определенной частоты, в то время как определенная частота есть отличительная черта волнового движения и некоторых видов вихревого движения. Приборы с резонансом для определенных частот, хотя бы и чувствительные к самым слабым регулярным колебаниям скоростей, никогда не отмечают резонанса при пульсации скоростей турбулентного потока. Однако существует некоторая статистическая корреляция между отдельными составляющими пульсации скоростей, т. е. между пульсациями в направлении средней скорости и в перпендикулярном к ней направлении, иными словами — между величиной и направлением вектора пульсации.

Нетрудно показать, что без такой корреляции невозможно существование других касательных напряжений, кроме напряжений ламинарного трения в плоскости, параллельной средней скорости потока.

Рассмотрим движение с прямолинейными параллельными средними скоростями в направлении оси x . Если мы применим законы количества движения к слою жидкости, ограниченному плоскостями, параллельными координатной плоскости (x, z), то легко показать, что пульсации обуславливают появление касательного напряжения τ_{xy} , которое равно переносимому пульсацией количеству движения в единицу времени через единицу площади. Величина переносимого количества движения

¹⁾ L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. (A), 97, 1920.

²⁾ L. Prandtl, Aachen Vorlesungen (Gilles, Hopf, Kármán), Berlin 1929.

³⁾ Шлихтинг представил настоящему конгрессу статью относительно устойчивости пограничного слоя с переменной плотностью в направлении толщины.

равна $-\overline{\rho u'v'}$, где ρ есть плотность жидкости, u' — скорость пульсации в направлении потока, v' — скорость пульсации в направлении, перпендикулярном к плоскости (x, z) : черта сверху означает, что берется среднее значение по времени. Пренебрегая изменениями плотности, мы имеем:

$$\tau_{xy} = -\overline{\rho u'v'}. \quad (1)$$

Легко видеть, что мы получим подобные же выражения для переноса какой угодно физической величины, связанной с жидкостью в турбулентном движении. Например, если θ' есть пульсация температуры, а c — теплоемкость, то $c\overline{\theta'v'}$ представит количество тепла, переносимого в единицу времени и на единицу площади плоскости (x, z) . Если n есть число частиц, взвешенных в единице объема жидкости, а n' есть флюктуация количества n , то число переносимых через единицу площади в единицу времени частиц будет равно $\overline{v'n'}$. В общем случае трехмерного пространства система напряжений, создаваемая турбулентными пульсациями, будет определяться следующими шестью составляющими:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -\overline{\rho u'^2}, & p_{xy} &= -\overline{\rho u'v'}, \\ p_{yy} &= -\overline{\rho v'^2}, & p_{yz} &= -\overline{\rho v'w'}, \\ p_{zz} &= -\overline{\rho w'^2}, & p_{zx} &= -\overline{\rho w'u'}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Нормальные составляющие во всяком случае будут отличны от нуля. Отрицательный знак означает давление.

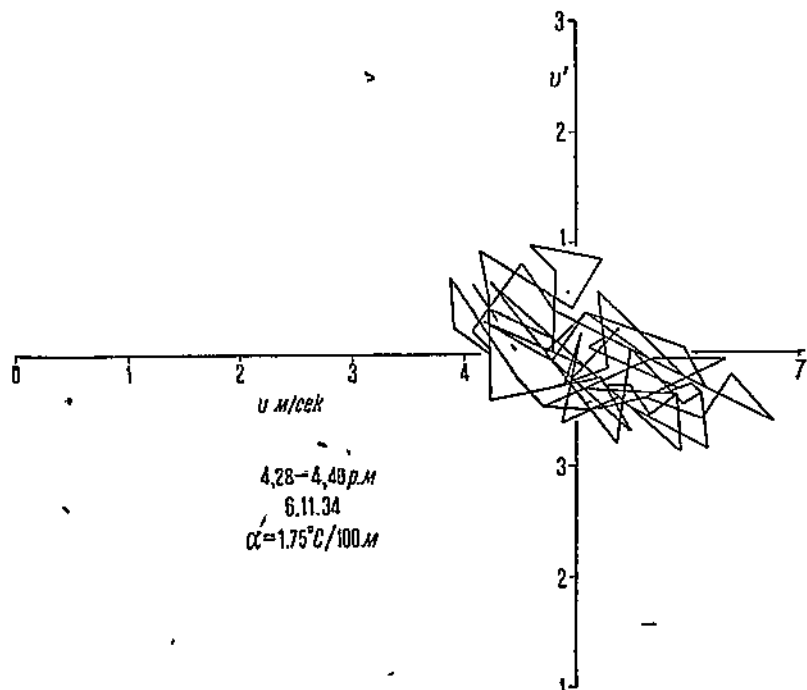
Направление и величина касательных напряжений зависят прежде всего, как мы указали выше, от степени корреляции между отдельными составляющими скоростей пульсации.

В большинстве случаев, имеющих практический интерес, везде, кроме непосредственной близости к твердым стенкам, турбулентные напряжения настолько велики по сравнению с напряжениями ламинарного трения, обусловленными молекулярным движением, что последними можно пренебрегать. На границе твердых тел скорости равны нулю, так что никакое турбулентное напряжение не может быть передаваемо твердому телу. При гладких стенках ламинарное трение будет иметь преобладающее значение вблизи стенок в области, которую мы называем пограничным ламинарным слоем. В случае стенок шероховатых, отдельные выступы и неровности стенок, вероятно, вызывают появление большого числа вихрей, однако уже на некотором расстоянии от стенок наблюдается то же состояние статистического равновесия, которым турбулентное движение характеризуется и при гладких стенках.

Величина пульсаций скорости была измерена большим числом исследователей в условиях искусственного потока, а также в естественных условиях рек и при изучении ветра. Фиг. 14 изображает горизонтальные и вертикальные составляющие скорости ветра в аэропорте в Акроне, штат Огио, на высоте около 23 м. Пульсации скоростей регистрировались электрическим термоанемометром в течение около 12 мин. Бюргерс¹⁾ обнаружил существование корреляции между подобными же составляющими скоростей пульсации в аэродинамической трубе позади препятствия.

¹⁾ J. M. Burgers, Proc. Acad. Amsterdam, XXIX, 1926.

Что же касается распределения пульсаций по своей величине, то необходимо упомянуть ¹⁾ о прекрасных наблюдениях Фейджа с ультрамикроскопом. К сожалению, его наблюдения относились к небольшим



Фиг. 14. Пульсации скоростей ветра.

числам Рейнольдса, близким к критическому, в квадратной трубе. Вторичные возмущения потока, неизбежные в квадратной трубе, затрудняют истолкование результатов наблюдения. Наконец, Фейдж измерял наибольшие значения пульсаций, которые могли быть менее характерными, чем средние квадратичные значения. Ф. Ваттендорф ²⁾ в Калифорнийском технологическом институте сделал ряд измерений для определения распределения пульсаций в прямоугольном лотке с очень большим отношением ширины к глубине (18:1). В этом случае по крайней мере в центральной плоскости можно пренебрегать вторичными возмущениями потока. На фиг. 15 нанесены значения $\frac{u'^2}{U_{\max}^2}$, начиная от центра до стенок.

Мы можем заметить, что за исключением точек около центра значение $\overline{u'^2}$ почти пропорционально местному касательному напряжению τ , которое естественно пропорционально в данном случае расстоянию от центра.

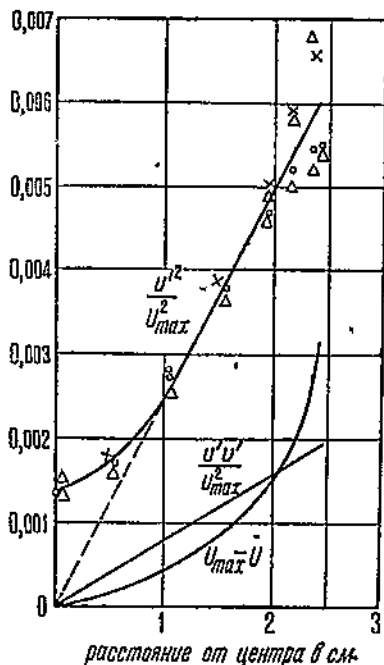
¹⁾ A. Fage, Journ. Royal. Aero Soc. XXXVII, 1933; C. H. Townsend, Proc. Roy. Soc. (A), 135, 1932.

²⁾ F. Wattendorf, Physics, II, 1934.

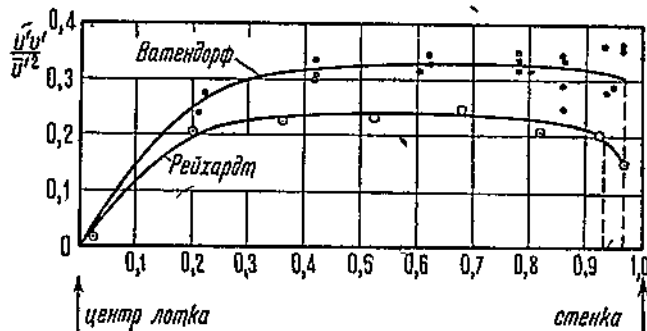
На фиг. 16 представлено количество, аналогичное коэффициенту корреляции, а именно:

$$\frac{-\overline{u'v'}}{\overline{u'^2}}$$

Значения знаменателя вычислены по значениям касательных напряжений у стенок. Результаты, полученные Ваттендорфом, сопоставлены с теми значениями, которые подсчитаны на основании опытов Рейхардта ¹⁾ в Геттингене. Для наблюдений Рейхардта значения $-\overline{u'v'}$ рассчитаны на основании очень хорошо известного коэффициента перепада давлений в лотках. Как видно, коэффициент корреляции остается почти постоянным, за исключением центра и близких к стенкам точек. У стенок пунктиром отмечены пределы той области, в которой ламинарное трение начинает представлять уже значительную часть полного касательного напряжения. На фиг. 17 изображено распределение значений $\sqrt{\overline{u'^2}}$ для нескольких поперечных сечений. Два первых сечения находятся между входом и местом соединения пограничных вихревых слоев. Можно заметить, что в центральной части между пограничными слоями величина пульсации еще очень незначительна.



Фиг. 15. Пульсации в прямоугольном лотке.



Фиг. 16. Корреляция между пульсациями скоростей.

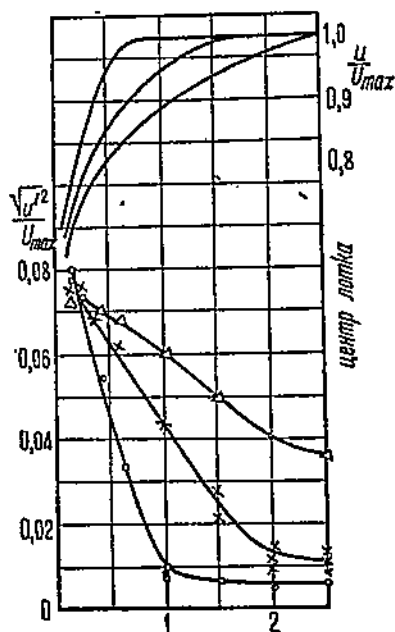
Заметим, что степень турбулентности на этих сечениях зависит от входных условий и от наружной турбулентности, тогда как ниже, вдоль

¹⁾ H. Reichardt, Z. f. angew. Math. u. Mech., 1933.

потока, на сечениях, для которых профиль средних скоростей уже принял свою окончательную форму и дальше по течению уже не изменяется,

турбулентность не зависит более ни от условий входа, ни от наружной турбулентности. Это указывает видимо на то, что при вполне установившейся турбулентности создается определенное статистическое равновесие.

Нет сомнения, что для окончательного разрешения проблемы турбулентности требуется применение методов статистической механики. Однако эта задача, к сожалению, повидимому труднее большинства других задач статистики, так как нам неизвестны как природа самих единиц статистического учета вероятностей, так и выражения для этих вероятностей. Ввиду этих трудностей общие теории не дали еще до сих пор результатов, которые могли бы получить физическое истолкование, согласующееся с данными опыта. Тем не менее попытки, сделанные в этом направлении Бюргерсом¹⁾, заслуживают полного внимания. Надо надеяться, что раньше или позже можно будет вывести из общих принципов основные законы корреляции, наблюдаемой в турбулентном движении.



Фиг. 17. Пульсации скоростей в трех последовательных сечениях в прямолинейном лотке.

§ 7. Законы турбулентного переноса.

Рассматривая турбулентный поток с точки зрения системы переменных Лагранжа, мы вместо пульсации скоростей в определенной точке будем иметь дело с непрерывным перемешиванием масс жидкости. Некоторые авторы сравнили жидкость в турбулентном движении со стадом овец. Такое сравнение может быть показательным и образным, но один факт перемешивания еще не дает объяснения основного признака турбулентности: переноса количества движения, теплоты и пр. Мы должны предположить, что частицы жидкости, пройдя некоторое расстояние в своем движении, теряют благодаря перемешиванию некоторый избыток скорости или температуры, т. е. приходят в соответствие с состоянием тех новых масс жидкости, которыми они окружены. Иначе не был бы возможен никакой перенос количества движения или теплоты. Это соображение приводит нас к определению понятия некоторой длины

¹⁾ J. M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion I—VII Proc. of the Acad. of Amsterdam, 1929—1933; W. Tollmien, Z. f. angew. Math. u. Mech., XIII, 1933.

конвекции или длины пути перемешивания, как ее назвал Прандтль, переноса из молекулярной физики в теорию турбулентности понятие длины „пути свободного пробега“ молекул. Это понятие позволяет дать новое, отличное от предыдущего выражение для касательного напряжения турбулентного внутреннего трения. Если сравнить между собою обе точки зрения, то станет ясным, что, рассматривая в какой-либо точке те частицы жидкости, которые пришли из области меньшей средней скорости, можно считать, что они переносят отрицательное количество движения в направлении оси x , в то время как частицы, пришедшие из областей, где средняя скорость $\bar{U}$ больше, чем в рассматриваемой точке, приносят с собою положительное количество движения и ведут к положительному приращению скорости, т. е. к пульсации u' . Это соображение объясняет физическую причину корреляции. Если мы определим длину l как среднее значение пути, проходимогo частицею жидкости в направлении, перпендикулярном к средней скорости потока, то естественно принять u' пропорциональным $l \frac{du}{dy}$, т. е. разности средних скоростей в рассматриваемой точке и в той точке, откуда частица начала свое перемещение.

Мы можем написать таким образом:

$$\tau_{xy} = \beta \rho |v'| l \frac{du}{dy}, \quad (3)$$

где $|v'|$ есть среднее значение абсолютной величины пульсации, нормальной к направлению потока, а β — числовой коэффициент, введенный в качестве меры корреляции между составляющими скоростей. Разумеется, в общем случае β , $|v'|$ и l могут и будут изменяться от точки к точке. Подобным же образом мы можем написать для переноса теплоты выражение

$$q = -\beta c |v'| l \frac{d\theta}{dy} \quad (4)$$

и для переноса числа взвешенных в жидкости частиц в единицу времени на единицу площади выражение:

$$N = -\beta |v'| l \frac{dn}{dy}. \quad (5)$$

Ясно, что следует еще исследовать, имеют ли количества β , $|v'|$ и l в формулах (3), (4) и (5) одно и то же значение или различное.

Выражение (3) представляет собою скорее простую схему, пригодную для исследования измерений турбулентности, чем теорию в собственном смысле слова, так как длина l пути перемешивания и скорость $|v'|$ являются неизвестными количествами, переменными в общем случае от точки к точке.

Прандтль¹⁾ полагает, что для параллельного или почти параллельного прямолинейного потока можно принять u' пропорциональным $l \frac{du}{dy}$, а $|v'|$ — пропорциональным u' . Эта гипотеза, очевидно, равносильна

¹⁾ L. Prandtl, Z. f. angew. Math. u. Mech., 1925; Proc. of the second Intern. Congr. for. appl. Mechanics, Zürich 1926.

предположению, что пульсации u' и v' имеют постоянную неизменную корреляцию. Принимая эту предпосылку и включая числовой множитель в выражение l , мы можем написать:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (6)$$

Делались попытки к обобщению выражения (6) для непрямолинейного потока, для потока с расходящимися скоростями и для жидкости с переменной плотностью, но до сих пор еще без заметного успеха. С большим успехом выражение (6) было применено Тольмином ¹⁾, Свэнном и Шлихтингом ²⁾ к задаче параллельных потоков, имеющих различную среднюю скорость. В этом случае движения, названного Прандтлем „свободной турбулентностью“, можно принять простую предпосылку, что l остается постоянным количеством вдоль всего поперечного сечения области перемешивания масс и изменяющимся только вдоль направления потока.

Дж. Тейлор ³⁾ указал, что нет никаких физических оснований предполагать, что перемешивающиеся массы жидкости сохраняют в процессе переноса постоянной свою скорость в направлении средней скорости потока. Для построения более подходящей модели механизма турбулентного движения он предлагал положить в основу рассуждения теоремы сохранения момента количества движения и сохранения вихрей. В самом деле, пренебрегая действием сил вязкости, мы имеем дело с неизменным значением циркуляции, переносимой массами жидкости в своем движении. Таким образом естественно определить и для переноса вихрей некоторую длину l свободного пробега. С другой стороны, общие уравнения движения дают определенные соотношения для переноса вихрей.

Для двухмерного потока с прямолинейной средней скоростью мы легко находим:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \overline{v' \omega'_x},$$

где $2 \omega'_x$ означает пульсацию вихря, тогда как среднее значение вихря равно

$$\frac{1}{2} \omega_x = \frac{1}{2} \frac{du}{dy} *).$$

Вводя определение длины l пути перемешивания вихревого напряжения, Тейлор получает следующее уравнение:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho |v'| l \frac{d\omega_x}{dy} = \rho |v'| l \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad (7)$$

которое должно заменить собою уравнение (6) Прандтля.

¹⁾ W. Tollmien, Z. f. angew. Math. u. Mech., 1926.

²⁾ Schlichting, Ingenieur Archiv, 1930; L. M. Swain, Proc. Roy. Soc. (A), 125, 1929.

³⁾ G. I. Taylor, Philos. Trans. (A), 215, 1915; Proc. Roy. Soc. (A), 135, 1932.

^{*} При переводе сохранена принятая в русской научной литературе терминология. Если u и v суть составляющие скоростей по осям координат, имеющим, как в статье Тейлора, левую ориентацию, то „вихрь“ равен ω , где

$$2\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

В литературе на английском языке принято обозначать термином vorticity двойное значение 2ω вихря *Прим. перев.*

Количества $|\nu'|$ и l имеют неизвестные значения, а потому трудно найти способ опытной проверки для выбора между двумя теориями. Мы возвратимся к этому вопросу несколько ниже. Тейлор нашел, что в случае свободной турбулентности обе теории хотя и дают одинаковое распределение средних скоростей, но при определении переноса теплоты получаются результаты, подтверждающие его взгляд на природу механизма турбулентности в потоке.

§ 8. Гипотеза подобия.

Докладчик сделал попытку ¹⁾ найти соотношение между турбулентным касательным напряжением и распределением средних скоростей, которое не зависело бы от каких-либо особых моделей переноса, подобных тем, которые лежат в основе теорий, упомянутых в предыдущем параграфе. В молекулярной теории внутреннего ламинарного трения предполагается, что скорости пульсации все подобны в различных точках поля скоростей и отличаются друг от друга только различными масштабами измерения времени и расстояний. Только с этой предпосылкой можно определить коэффициент молекулярного трения при помощи понятий среднего пути пробега молекул и средней молекулярной скорости.

Для случая турбулентного движения можно сделать следующие предпосылки:

1) Механизм турбулентного перемешивания не зависит от вязкости за исключением непосредственной близости от стенок.

2) Принцип подобия в только-что указанном смысле применим и к механизму турбулентного перемешивания, а именно, что распределение скоростей в окрестности отдельных точек поля всегда остается подобным, причем только масштабы времени и расстояний изменяются от точки к точке.

Очевидно, что вторая предпосылка означает постоянную корреляцию между отдельными составляющими скорости пульсации.

Для прямолинейного параллельного потока автором были выведены из этих предпосылок следующие следствия:

а) Составляющие скорости пульсации равны произведению характерной длины l и производной $\frac{du}{dy}$ средней скорости, причем производная берется в направлении скоростей пульсации, перпендикулярном к направлению средней скорости.

б) Касательное напряжение τ_{xy} пропорционально количеству:

$$\rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

с) Характерная длина l пропорциональна выражению:

$$\left| \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}} \right| \Rightarrow \left| \frac{u'}{u''} \right|,$$

¹⁾ Th. v. Kármán, Göttinger Nachrichten, 1930; Proc. of the third Intern. Congr. for appl. Mech. Stockholm 1930.

где $\frac{du}{dy}$ и $\frac{d^2u}{dy^2}$ суть первая и вторая производные средней скорости, взятые в направлении, перпендикулярном к ней.

На основании заключения с) можно написать для касательного напряжения τ (опуская для упрощения подстрочные индексы xu) следующее выражение:

$$\tau = k^2 \rho \frac{u'^4}{u''^3},$$

где k есть чисто числовой множитель, являющийся в некотором роде универсальной постоянной, характерной для механизма турбулентного перемешивания. Если мы примем равенство:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

то для l мы получим выражение:

$$l = k \left| \frac{u'}{u''} \right|.$$

Заключения а) и б) приводят к положениям Прандтля без помощи какой-либо особой модели или образа для механизма перемешивания. Заключение же с) дает затем и выражение для длины l пути перемешивания или переноса, которая осталась без определения в теории Прандтля.

При выводе положений а), б) и с) предполагается, что длина l очень мала по сравнению с линейными размерами поля скоростей рассматриваемой задачи. Действительно, в особенности положение с), определяющее значение характерной длины, получено в предположении, что только две первые производные средней скорости определяют распределение скоростей при турбулентном перемешивании.

Пользуясь равенством

$$l = k \left| \frac{u'}{u''} \right|,$$

было подсчитано из опытных данных значение множителя k и получено для него значение, приблизительно равное 0,40. Это значит, что длина l , по сравнению с геометрическими размерами всего поля скоростей задачи, является хотя и малой, но все же заметной длиной. Следовательно, положения а), б) и с), а в особенности последнее, являются только первым приближением, и требуется дальнейшее экспериментальное исследование для того, чтобы можно было определить пределы их правильности. Надо заметить при этом, что предпосылки теории Прандтля также относятся к малым значениям длины пути перемешивания.

Опытные данные до настоящего времени еще недостаточны для разрешения вопроса, в каких пределах можно считать справедливой гипотезу подобия распределения турбулентных скоростей или постоянной корреляции отдельных составляющих скорости между собою. Измерения в общем показывают, что средние абсолютные значения отдельных составляющих скорости пульсации практически равны. Недавно были сделаны некоторые измерения пульсации направления скорости в прямоугольном лотке, о котором мы упоминали в § 6. Отношение одних составляющих к другим было найдено почти постоянным.

Фейдж ¹⁾ пришел к тем же результатам для максимальных значений скоростей пульсаций в турбулентной области позади обтекаемого цилиндрического препятствия. Даже третья составляющая скорости пульсации, нормальная к плоскости средних скоростей, практически имеет ту же величину. Все эти скорости увеличиваются с увеличением касательного напряжения τ . Изменяются ли они при этом в точности пропорционально количеству $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, как того следовало бы ожидать на основании предпосылки постоянной корреляции, сказать определенно еще нельзя. В центре лотка или в центре турбулентной области позади обтекаемого препятствия подобие естественно нарушается, так как уже нет оснований для корреляции.

К счастью, в ряде существенных приложений, а именно для расчета падения давления в очень гладких и в очень шероховатых трубах и для определения поверхностного трения гладких пластинок достаточно предположить существование подобия турбулентных скоростей вблизи стенок, или, точнее, в области вне ламинарного пограничного слоя, но все же достаточно близкой к стенке, чтобы действие, оказываемое противоположной стенкой, еще не сказывалось. В следующем параграфе мы сделаем краткий обзор этих важных применений теории.

§ 9. Турбулентный поток в трубах и законы поверхностного трения.

Рассмотрим прямолинейный поток в трубе круглого сечения или сечения хотя бы и прямоугольного, но с большим отношением длины одной стороны сечения к другой (поток между двумя параллельными стенками). Обозначим через r расстояние от центра до стенки, через $U_{\max}$ — максимальную скорость. Разность: $U_{\max} - u$ назовем дефектом скорости. Далее, через τ_0 обозначим значение поверхностного трения или касательного напряжения у стенки. На основании предпосылки, что в основной части турбулентной области можно пренебречь влиянием вязкости, можно будет предположить, что отношение дефекта скорости $U_{\max} - u$ к количеству $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ является универсальной функцией от-

ношения $\frac{r-y}{r}$, где y есть расстояние от стенки. Повидимому, покойный сэр Т. Стантон ²⁾ первый нанес на графики отношение $\frac{U_{\max} - u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$ для труб

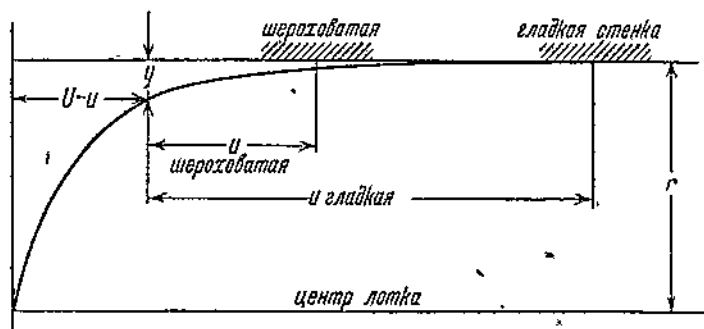
различных диаметров и равной шероховатости. Он предполагал, что это безразмерное количество пропорционально квадрату расстояния от центра, как и в случае ламинарного потока. Он полагал, что можно на этом основании определить некоторый коэффициент для внутреннего турбулентного трения, постоянный для всех точек поперечного сечения трубы. Автор настоящего доклада формулировал общее положение, только что приведенное выше, и исследовал данные опытных измерений В. Фрича ³⁾

¹⁾ A. Fage, Aero Res. Com. R. a. M., 1910.

²⁾ T. E. Stanton, Proc. Roy. Soc. (A), 85, 1911.

³⁾ W. Fritsch, Aachener Abhandlungen, VIII, 1928.

в Аахене², касающиеся распределения скоростей в лотках различной шероховатости. Эти результаты получили подтверждение и в опытах Никурадзе¹). Простое истолкование полученных результатов может быть изложено следующим образом. Сравним между собою два случая, для которых τ_0 и r имеют одинаковые значения, но шероховатость стенок различна (фиг. 18). Можно рассматривать дефект скорости $U_{\max} - u$ в качестве относительной скорости слоя жидкости на расстоянии $\eta = r - y$ от центра, рассматриваемой в отношении к скорости жидкости в центре. Рассматривая относительное движение этого слоя ($\eta = r - y$) и жидкости в центре, мы видим, что факт одинакового значения дефекта $U_{\max} - u$ в обоих случаях означает, что действие поверхностного трения не зависит от того, как оно создается: медленным ли передвижением



Фиг. 18. Сравнение распределения скоростей в гладком и шероховатом лотках.

шероховатой стенки или быстрым передвижением гладкой стенки. По-видимому, механизм турбулентного переноса остается тем же в обоих случаях. Факт, что дефект $U_{\max} - u$ пропорционален величине $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ для различных значений τ_0 , служит указанием на то, что можно пренебречь вязкостью при изучении механизма турбулентного переноса за исключением непосредственной близости к стенкам.

Те же экспериментальные результаты справедливы и для труб круглого сечения. Обозначая через r радиус трубы, мы имеем:

$$\frac{U_{\max} - u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = f\left(\frac{r - y}{r}\right), \quad (8)$$

где $\frac{r - y}{r}$ есть универсальная функция.

Количество $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ имеет, очевидно, размерность скорости. В аэродинамике скорость обычно характеризуется динамическим давлением. Обратно, мы можем измерять значения давления p соответствующей скоростью $\sqrt{\frac{2p}{\rho}}$. Подобно этому мы можем определить скорость $\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}}$, которая соответствовала бы касательному напряжению τ_0 . Напор, соот-

ветствующий этой скорости, равен τ_0 . Мы введем количество $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ вместо $\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}}$. Было бы логически более правильным принять последнее выражение, но количество $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ было введено в стольких уже опубликованных статьях, что замена его другим пожалуй могла бы повести к смешению. Мы назовем количество $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ скоростью трения ¹⁾. Количество $\frac{r-y}{r}$ может быть названо относительным расстоянием до центра.

Таким образом утверждение, выражаемое равенством (8), может быть сформулировано следующим образом: отношение дефекта скорости к скорости трения является универсальной функцией относительного расстояния до центра.

Мы воспользуемся затем второй предпосылкой: около стенки, но вне пограничного ламинарного слоя или вне непосредственной близости самих неровностей шероховатой стенки, турбулентный перенос удовлетворяет принципу подобия. В таком случае на основании соображений, изложенных вкратце в § 8, мы имеем:

$$\tau = \beta k^2 \frac{u'^4}{u''^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = k \frac{u'^2}{|u''|}$$

или, заменяя τ значением τ_0 у стенки,

$$\frac{|u''|}{u'^2} = \frac{k}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}, \quad \frac{1}{u'} = \frac{k}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} y + \text{const},$$

и, наконец,

$$u = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{y + \varepsilon}{\delta}, \quad (9)$$

где ε и δ суть постоянные, имеющие размерность длины.

Нанося таким путем на график распределение скоростей, мы заметим, что для всех значений y , больших по сравнению с толщиной ламинарного пограничного слоя или же с высотой неровностей стенки, значение ε очень мало по сравнению с y и им можно пренебречь. Иными словами: u есть линейная функция логарифма расстояния от стенки, причем это расстояние определяется с погрешностью порядка толщины ламинарного пограничного слоя или высоты неровностей шероховатой стенки. Мы можем, следовательно, написать равенство:

$$u = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (10)$$

Можно считать, что это уравнение дает „универсальное распределение скоростей около стенки“.

¹⁾ Прандтль называет его „скоростью касательного напряжения“.

Точное математическое выражение может быть сформулировано следующим образом: средняя скорость около стенки в турбулентном потоке может быть представлена в виде функции, расстояния от стенки в следующем виде:

$$u = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + f(y),$$

где τ_0 есть касательное напряжение у стенки и где только $f(y)$ зависит от вязкости или от шероховатости стенки, причем функция $f(y)$ регулярна относительно y при $y=0$.

Мы применим уравнение (10) к двум частным случаям:

а) Совершенно гладкие стенки. В этом случае δ определяется значением τ_0 и физическими количествами ρ и ν , известными для жидкости. Следовательно,

$$\delta = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}},$$

так как таково единственно возможное соотношение между этими количествами с точки зрения размерности. Отсюда имеем:

$$u = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\ln \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} y}{\nu} + A \right), \quad (11)$$

где A есть отвлеченное постоянное число.

Это выражение заменяет собою известные степенные выражения вида:

$$\frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \text{const.} \left(\frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} y}{\nu} \right)^n,$$

которые были предложены Прандтлем и автором ¹⁾ около двенадцати лет назад и применялись большею частью в вопросах, касающихся турбулентного пограничного слоя.

б) Стенки с большой шероховатостью. Шероховатость может быть названа очень большой, если касательное напряжение τ_0 создается завихрениями, обусловленными неровностями стенки, в то время как вязкость не оказывает заметного действия. Такое явление будет, видимо, иметь место в случае, когда высота отдельных неровностей стенки велика по сравнению с толщиной ламинарного пограничного слоя. В предельном случае длина δ будет независима от ν и будет определяться только параметром ϵ шероховатости. Таким образом при равномерной шероховатости с подобными между собой неровностями мы имеем выражение:

$$u = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\ln \frac{y}{\epsilon} + B \right), \quad (12)$$

где B есть также постоянное отвлеченное число.

¹⁾ Th. v. Kármán, Z. f. angew. Math. u. Mech., 1921.

Равенства (11) и (12) на основании сделанной предпосылки, что отношение

$$\frac{U_{\max} - u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$$

есть определенная функция относительного расстояния

$$\frac{r - y}{r},$$

дадут соотношение между значением $U_{\max}$ скорости с касательным напряжением τ_0 у стенки в следующем виде:

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\frac{1}{k} \ln \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} r}{\nu} + \text{const.} \right) \quad (13)$$

и

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\frac{1}{k} \ln \frac{r}{k} + \text{const.} \right). \quad (14)$$

Количество $\frac{r}{k}$, называемое относительной шероховатостью, было введено в рассмотрение впервые Мизесом¹⁾.

На основании изложенных соображений выводится ряд формул:

а) Для коэффициента c_f сопротивления, определяющего падение давления в совершенно гладких трубах:

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{k} \ln (R \sqrt{c_f}) + \text{const.}, \quad (15)$$

где R есть число Рейнольдса, определяемое по гидравлическому радиусу.

б) Для коэффициента, определяющего падение давления в очень шероховатых трубах:

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{k} \ln \frac{r}{k} + \text{const.} \quad (16)$$

с) Для коэффициента поверхностного сопротивления гладких пластинок:

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{k} \ln (R c_f) + \text{const.}, \quad (17)$$

где R есть число Рейнольдса, определяемое по длине пластинки.

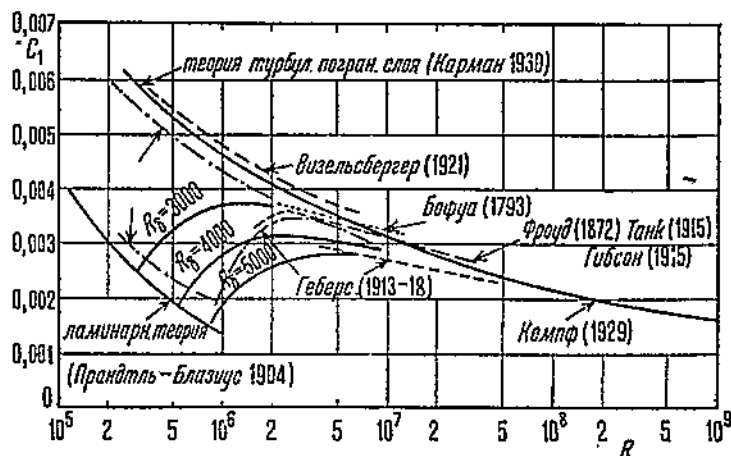
Все эти формулы имеют тот же вид: в левой части имеется квадратный корень из коэффициента сопротивления, а в правой части — логарифмическое выражение. В случаях а) и с) коэффициент сопротивления фигурирует и в правой части равенства, так что эти уравнения не могут быть аналитически разрешены относительно этого коэффициента. Это обстоятельство могло бы затруднить практическое применение формул. Однако их большое чисто практическое достоинство заключается в том, что они становятся все более точными при возрастании числа Рейнольдса, так что на них можно уверенно основываться при

¹⁾ R. von Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, 1914; H. Blasius, Forschungsarbeiten VDI, CXXXI, 1913.

обобщении данных, получаемых на модели, на явления в натуральных размерах. В конце концов в этом и состоит та польза, которую можно ожидать от теории подобия.

Логарифмическая формула для распределения скоростей и три дальнейшие формулы (15), (16) и (17) были впервые предложены докладчиком в двух статьях в 1930 г. („Göttinger Nachrichten“ и „Труды Стокгольмского конгресса“). В формулах (15) и (16) коэффициенты сопротивления и числа Рейнольдса были отнесены к максимальной скорости $U_{\max}$. Легко видеть, что на основании предпосылки, выраженной равенством (8), также предложенным докладчиком, те же формулы с другим значением постоянной могут быть применены и к средней скорости течения в трубе.

Это замечание сделано Прандтлем¹⁾, который позднее принял²⁾ эти формулы и определил совместно с Никурадзе³⁾ числовое значение постоянных.



Фиг. 19. Сравнение измеренных и теоретических значений поверхностного трения.

Формула (17) для поверхностного сопротивления не вполне точная, так как в ней отброшены члены порядка $\sqrt{C_f}$, малые по сравнению с $\frac{1}{\sqrt{C_f}}$. Можно, однако, подобрать дополнительную постоянную с таким

¹⁾ L. Prandtl, Göttinger Ergebnisse, Oldenbourg, IV, 1932; Discussion in Hydromechanische Probleme der Schiffsantriebs, Hamburg 1932; Zeitschrift VDI, LXXVII, 1933.

²⁾ J. Nikuradze, Aachene Vorlesungen (Gills, Hopf, Kármán), Berlin 1930; Proc. of the third Intern. Congress, Stockholm 1930; Z. f. angew. Math. u. Mech., XI, 1931; VDI Forschungs-Heft 356, 1932 и 361, 1933.

³⁾ История возникновения формул (15), (16) и (17), повидимому, начинается забываться некоторыми авторами. Так, например, формула (16), связывающая падение давления с относительной шероховатостью, приводится в статье Никурадзе как формула Кармана, а в прениях на Гамбургском съезде Прандтль выразился уже, что эта формула была найдена иным путем также и Геттингенской школой. В своей статье в 1933 г. Никурадзе говорит: „Соотношение между поверхностным сопротивлением и относительной шероховатостью определяется формулой и т. д.“ Поэтому многие германские авторы называют теперь эту формулу „уравнением Никурадзе“.

расчетом, чтобы сделать эту погрешность не существенной для практических расчетов. Прандтль и Никурадзе для каждого из этих различных уравнений нашли соответствующие значения для числового коэффициента, стоящего под знаком логарифма; что же касается параметра k , то значение его, лучше всего согласующееся с опытными данными, заключается по мнению этих авторов между пределами 0,38 и 0,41. Разность значений, получаемых для этого числа из различных опытов, остается величиной всегда одного и того же порядка. Из того факта, что отклонения отдельных значений, получаемых измерением или падения давления, или распределения скоростей в гладких или шероховатых трубах, или, наконец, при определении поверхностного сопротивления длинных пластинок настолько незначительны и все лежат в таких узких пределах, можно прийти к заключению, что опыт подтверждает справедливость тех оснований, на которых построена теория.

Следует сделать небольшое замечание относительно случая умеренной шероховатости, т. е. того случая, когда приходится учитывать влияние вязкости наряду с шероховатостью. К сожалению, до сих пор еще не удалось обработать и систематизировать результаты опытов¹⁾. Ясно, что количество B в уравнении (12) будет в случае умеренной шероховатости функцией как v , так и ε , даже в случае геометрического подобия потоков. Таким образом B будет функцией безразмерной комбинации

$$\frac{V \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\varepsilon}.$$

Никурадзе нашел „универсальную функцию шероховатости“, которая по его мнению подходит к случаю особого вида искусственной шероховатости зернистого типа. Однако, повидимому, даже для этого особого типа шероховатости функция Никурадзе имеет не вполне универсальный характер.

Во всяком случае, если мы обратимся к опытам Кемпера с пластинами, изготовленными по образцу шероховатых труб Никурадзе, и если мы попытаемся истолковать данные этих опытов по методу Прандтля и Шлихтинга²⁾, то мы будем обречены на полную неудачу. Поверхностное сопротивление в действительности убывает с увеличением числа Рейнольдса в тех пределах его значений, для которых по теории Прандтля и Шлихтинга оно должно было бы возрастать.

Как нам думается, исследование в ближайшие годы должно быть сосредоточено на вопросе, какими параметрами следует определять шероховатость, и на том, чтобы каким-либо рациональным и в то же время практическим путем установить стандартную классификацию шероховатых поверхностей.

§ 10. Вопрос о переносе количества движения или вихревого напряжения.

Полученные из теории подобия практические результаты, изложенные в предыдущем параграфе, подтверждают, повидимому, теорию пере-

¹⁾ E. Kemler, Trans. of Amer. Soc. Mech. Engin. Hydraulics division, 1933; L. Hopf, Z. f. angew. Math. u. Mech., III, 1923; Aachener. Abhandlungen, II, стр. 57.

²⁾ L. Prandtl u. H. Schlichting, Werft, Reederei, Hafen 1934.

носа количества движения. Действительно, в предположении, что длина пути перемешивания является линейной функцией расстояния от стенки, мы непосредственно можем получить из выражения Прандтля для касательного напряжения законы логарифмического распределения средних скоростей. Не следует, однако, забывать того, что закон логарифмического распределения, дающий ключ к определению падения давления и поверхностного сопротивления, вытекает из одной только предпосылки подобия независимо от самого механизма переноса, т. е. независимо от того, которая из двух теорий — переноса количества движения или переноса вихрей — дает наиболее верную физическую картину механизма турбулентности. Очевидно, что теория переноса вихрей, имеющая сама по себе надежное физическое основание, может быть справедливой в применении к турбулентному движению только в согласии с условиями подобия. Полагая перенос вихрей, как и в § 7, равным

$$-|v'|l\frac{d\omega_z}{dy}$$

(где $\omega_z = \frac{du}{dy}$ есть местное среднее удвоенное значение вихря), мы встречаемся для случая потока между двумя плоскостями и при отсутствии падения давления, т. е. при постоянстве касательного напряжения, со своеобразным затруднением. На основании уравнения (8) или $|v'|$ или $\frac{d\omega_z}{dy}$ должны быть равны нулю. В действительности же $\frac{d\omega_z}{dy}$ возрастает около стенки как $\frac{1}{y^2}$ (y есть расстояние от стенки), тогда как равенство: $|v'| = 0$ было бы равносильно существованию только одного ламинарного трения. Дж. Тейлор указал на то, что приведенное выражение дает правильное выражение переноса вихрей только в случае двумерного движения, тогда как на основании опытных наблюдений мы знаем, что движение происходит около стенки в трех измерениях. Скорости в направлении, перпендикулярном к плоскости средних скоростей, во всяком случае имеют порядок величины, равный пульсациям, параллельным этой плоскости. Им было показано в очень поучительной статье, недавно опубликованной¹⁾, что в случае трехмерного движения полное выражение для переноса вихрей имеет следующий вид:

$$\overline{v'\omega_z'} - \overline{w'\omega_y'}.$$

где ω_z' и ω_y' суть пульсации составляющих вихрей в направлении координат z и y (ось y перпендикулярна к стенке, а ось z перпендикулярна к плоскости средних скоростей). Далее Тейлор получил для среднего значения $\overline{v'\omega_z'}$ вместо выражения $lv'\frac{d\omega_z}{dy}$, справедливого только для двумерного потока, следующее выражение:

$$\overline{v'\frac{\partial z}{\partial c}} \cdot \omega_z + \overline{lv'\frac{\partial z}{\partial c}} \cdot \frac{\partial \omega_z}{\partial y},$$

¹⁾ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. (A), 135, 1932.

выведенное из полных и точных уравнений Гельмгольца для вихревого движения. Здесь c обозначает начальное значение координаты z частицы жидкости, проходящей в рассматриваемый момент через данную точку x, y, z . Эта начальная координата определяется следующим образом. Мы предполагаем, что в начальный момент и в начальном своем положении частица жидкости имеет вихревое движение, равное среднему вихревому движению в этой точке своего начального положения. Количество

$$\frac{\partial z}{\partial c} = 1$$

представляет собою линейное растяжение элемента жидкости в направлении оси Oz , рассматриваемое в отношении к линейному элементу, имеющему в начальный момент направление оси Oz . В двухмерном движении мы имеем $\frac{\partial z}{\partial c} = 1$, следовательно,

$$v' \frac{\partial z}{\partial c} = 0 \text{ и } l v' \frac{\partial z}{\partial c} = l v',$$

и в результате

$$v' \frac{\partial z}{\partial c} \omega_z + l v' \frac{\partial z}{\partial c} \frac{d\omega_z}{dy} = l v' \frac{d\omega_z}{dy}.$$

В общем же случае трехмерного движения количество $\frac{\partial z}{\partial c}$ может сильно разниться от единицы, так что разность двух приведенных выше выражений для переноса вихрей может быть не настолько незначительной, чтобы ею возможно было пренебрегать, хотя бы при этом длина пути перемешивания и могла считаться очень малой. Тейлор доказал на отдельном примере, что уравнение переноса вихрей благодаря трехмерному характеру движения может совпадать с уравнением Прандтля и поэтому оно не противоречит фактам и принципу подобия. Мы не думаем, чтобы в настоящее время можно было решить вопрос, является ли трехмерный характер пульсаций действительно существенно необходимым условием, для того чтобы уравнение вихревого переноса удовлетворяло принципу подобия. Несколько времени назад Маттиоли¹⁾ опубликовал интересную теорию турбулентного переноса. Им выведено два уравнения: первое полностью совпадает с уравнением переноса количества движения, второе относится к переносу момента количества движения и включает выражение, аналогичное тому, которое дано Тейлором для вихревого переноса в случае двухмерного движения. Маттиоли делает предположение, что механизм в обоих случаях один и тот же, т. е. что значение длины l пути перемешивания для переноса момента количества движения то же, что и для переноса самих количеств движения. Он, однако, заметил указание выше затруднение и ввел поэтому в свое второе уравнение добавочный член, соответствующий „моменту внутренних сил“, но подчеркнул, что физическое значение этого члена не может быть установлено при современном состоянии наших сведений о турбулентном движении.

¹⁾ G. D. Mattioli, Rend. Acad. dei Lincei, 227, 293, 932, 1933; C. R. Paris, 196, стр. 1282, 1933.

Нам пришлось несколько лет назад заниматься этим вопросом, и мы сделали простой расчет для одного несколько идеализированного случая движения. Предположим, что в плоскопараллельном прямолинейном потоке вихревое напряжение изменяется вдоль линии тока в плоскости движения, т. е. иными словами, что в жидкости имеется поверхностное неравномерное распределение вихрей вдоль плоскости, перпендикулярной к плоскости движения. Для упрощения предположим, что зависимость вихря от координаты x дана в виде функции синуса (ось x имеет направление средней скорости потока). Далее предположим еще, что среднее значение вихря есть функция одной координаты y и что его распределение может быть представлено в виде линейной функции, т. е.

$$\omega_z = \omega_{z_0} + \left(\frac{d\omega_z}{dy} \right)_0 (y - y_0).$$

При сделанных предположениях нетрудно определить и дальнейшее движение вихревой поверхности, по крайней мере для небольшого промежутка времени Δt , именно то движение, которое начнется, если в начальный момент t_0 вихревая поверхность была расположена вдоль плоскости $y = y_0$. Результат вычисления показывает, что элементы жидкости с вихрем, большим среднего значения, будут двигаться в направлении увеличивающегося среднего вихревого напряжения, а элементы с недостатком вихревого напряжения отодвинутся в сторону убывания среднего значения вихрей. Таким образом наступающее движение будет иметь направление, обратное тому, которое существовало бы при простом статистическом перемешивании или диффузии, так как различие значений вихря в разных слоях жидкости будет увеличиваться, а не сглаживаться, как в случае простой диффузии. Усиление разности значений вихря будет пропорционально $\frac{d\omega_z}{dy}$ и не будет иметь места в случае,

если вихревое напряжение будет везде постоянным в некоторой области, подобно тому как при этих условиях исчезают и несколько непонятные силы Маттиоли. Возможно, следовательно, что нет необходимости вводить новые силы или прибегать к рассмотрению трехмерного движения. Вполне допустимо, что перенос вихрей не имеет характера простой диффузии из областей большего значения вихря в области с меньшим значением, но что на ряду с этой диффузией имеется и систематическое передвижение отдельных вихрей в обратном направлении. Однако, если это так, то, повидимому, мы не сможем получить дифференциального уравнения для вихревого переноса, в лучшем случае, мы можем получить интегральное уравнение. Это быть может означает, что в общем случае не существует дифференциального уравнения для осредненных скоростей в турбулентном движении, и что, следовательно, невозможно выразить турбулентные напряжения при помощи производных средних скоростей. Ввиду этой невыясненности основных понятий мы можем считать пока слишком умозрительными такие обобщения теории переноса количества движения, в которых делаются попытки выразить все составляющие тензора турбулентного напряжения при помощи производных средних скоростей и их распределения в трехмерном пространстве.

§ 11. Турбулентный перенос тепла в трубах.

Одним из наиболее удачных приложений теории переноса количества движения является объяснение установленной аналогии между рассеянием энергии при трении и переносом тепла в трубах, которую отметил еще Рейнольдс и которая была в особенности исследована Праудтлем¹⁾ и Дж. Тейлором²⁾. Тот факт, что распределение температур около твердой стенки подобно распределению средних скоростей, факт, установленный опытным путем Ф. Элиасом³⁾, бывшим сотрудником докладчика в Аахене, не мог бы сам по себе служить еще окончательным подтверждением теории переноса количества движения, так как и то и другое распределение могли бы подчиняться сходным между собою законам, например, одинаковым условиям подобия, а в то же время длина пути переноса для количества движения и для теплоты могли бы быть при этом различными. Точно так же можно было бы объяснить опытный факт одного и того же хода изменения числа Рейнольдса в зависимости от изменения коэффициента сопротивления и коэффициента переноса тепла без предпосылки равенства длины пути переноса. Однако аналогия, повидимому, простирается много дальше.

В задачу обмена тепла между стенкой трубы и движущейся жидкостью входят два параметра. Одним из них является число Рейнольдса, другой параметр определяется физическими условиями температурного поля: теплоемкостью на единицу массы, кинематической вязкостью и молекулярной теплопроводностью. Отношение коэффициента теплопроводности к кинематической вязкости является безразмерным количеством, хорошо известным в молекулярной теории газов и жидкостей. Некоторые германские исследователи называют его числом Праудтля и обозначают двумя буквами *Pr*. Рассмотрим предварительно случай, когда $Pr = 1$. В этом случае, согласно с теорией переноса количества движения, отношение между переносимым количеством движения и количеством переносимой теплоты будет в точности одним и тем же в области турбулентного движения и в ламинарном пограничном слое. Введем в качестве безразмерного коэффициента переноса тепла количество

$$\alpha = \frac{q}{cU\theta},$$

где q есть количество теплоты, переносимой в единицу времени, через единицу площади, c — теплоемкость, U — средняя скорость потока и, наконец, θ — разность температур стенки и в центральной части трубы.

1) L. Prandtl, Phys. Z., т. XI, 1910; т. XXIX, 1928; Proc. Intern. World Eng. Congress V, Tokyo 1929.

2) G. I. Taylor, R. a. M., 272, 1919; T. E. Stanton, Friction, Longmans 1928.

3) F. Elias, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. IX, 1929; т. X, 1930; Aachener Abhandlungen, IX, 1930.

Согласно теории переноса количеств движения количество $\alpha = \frac{q}{cU\theta}$ должно иметь числовое значение, равное

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

(где τ_0 есть касательное напряжение у стенки), т. е. мы должны иметь:

$$\alpha = \frac{1}{2} c_f.$$

Этот вывод довольно хорошо подтверждается данными опыта. Мы можем заключить из этого, что влияние пульсаций давления на количество движения переносимых частиц, жидкости при прямолинейном среднем движении в трубе не может быть значительным. Пульсации давления не могут, конечно, влиять на количество переносимой теплоты, следовательно, если бы они изменяли существенно, ощутимым образом количество переносимого движения, то в результате длина пути переноса для теплоты и для количества движения были бы различными. Мы напоминаем при этом, что основным возражением, которое делалось теории переноса количеств движения, сводится к тому, что она не учитывает влияния пульсации давлений.

Прандтль и Дж. Тейлор пошли дальше и попытались применить ту же мысль к расчету переноса тепла в жидкостях. В этом случае число Прандтля может быть большим, доходя до значения 80 или 100. Молекулярная ламинарная теплопроводность очень мала по сравнению с ламинарным переносом количества движения, тогда как отношение между турбулентным переносом теплоты и количества движения остается таким же, как и в предыдущем случае.

Ясно, что в этих случаях пограничный слой играет роль изолятора при передаче тепла. Во всяком случае существует значительное расхождение опытных данных с расчетом по формуле Прандтля. Правда, хорошо известная формула Прандтля основана на предположении, что распределение скоростей следует степенному закону. Однако для тех чисел Рейнольдса, при которых возможны опыты, этот степенной закон представляет собою довольно хорошее приближение выражения того логарифмического закона, который теперь считается верным. Будем ли мы исходить из степенного закона или из логарифмического закона, мы всегда выводим из теории Прандтля соотношение:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{\text{const.}}{\sqrt{\alpha_0}} (\sigma - 1),$$

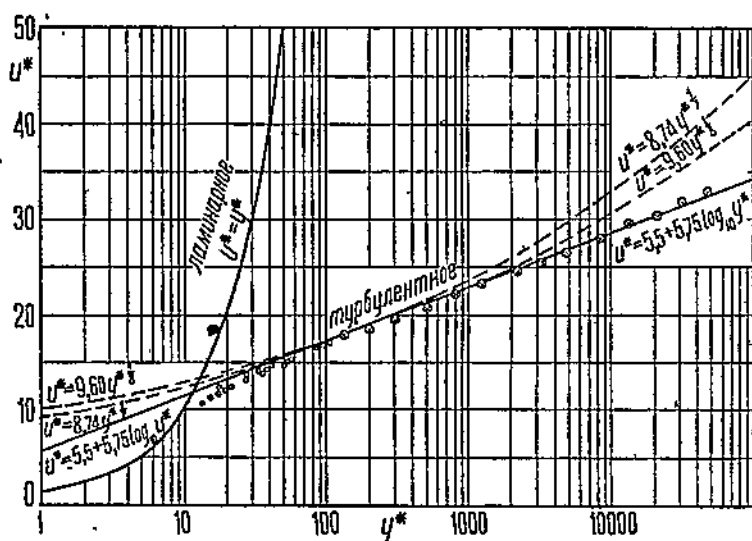
где α есть действительный коэффициент теплопередачи, α_0 — его значение при числе Прандтля σ , равном единице, для того же числа Рейнольдса. Таким образом $\frac{1}{\alpha}$, т. е. обратное значение α должно быть линейной функцией от $(\sigma - 1)$. Опытные данные обнаруживают большую разбросанность точек, представляющих результаты измерений. Это рас-

сеяние точек объясняется технической трудностью измерений переноса теплоты, однако оно определенно указывает на то, что линейная зависимость от $(\sigma - 1)$ не может оправдываться. Нам думается, что лучшее совпадение можно получить более правильным учетом перехода от турбулентной области к ламинарному слою. Оказывается, что если σ не слишком разнится от единицы, то не существенно, происходит ли этот переход скачком или постепенно. Однако, если отношение турбулентного переноса теплоты к переносу количеств движения во много раз больше того же отношения в ламинарном движении, то дело может обстоять совершенно иначе.

Иными словами, поскольку толщина пограничного слоя может иметь практическое значение, она должна рассчитываться различно при переносе количеств движения и при переносе теплоты. Для того чтобы выразить это соображение математически, можно воспользоваться распределением скоростей, которое установлено измерениями Никурадзе. Весь интервал возможных значений для количества

$$y^* = \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} y}{\nu}$$

может быть (фиг. 20) разделен на три части:



Фиг. 20. Универсальный закон распределения скоростей вблизи гладкой стенки.

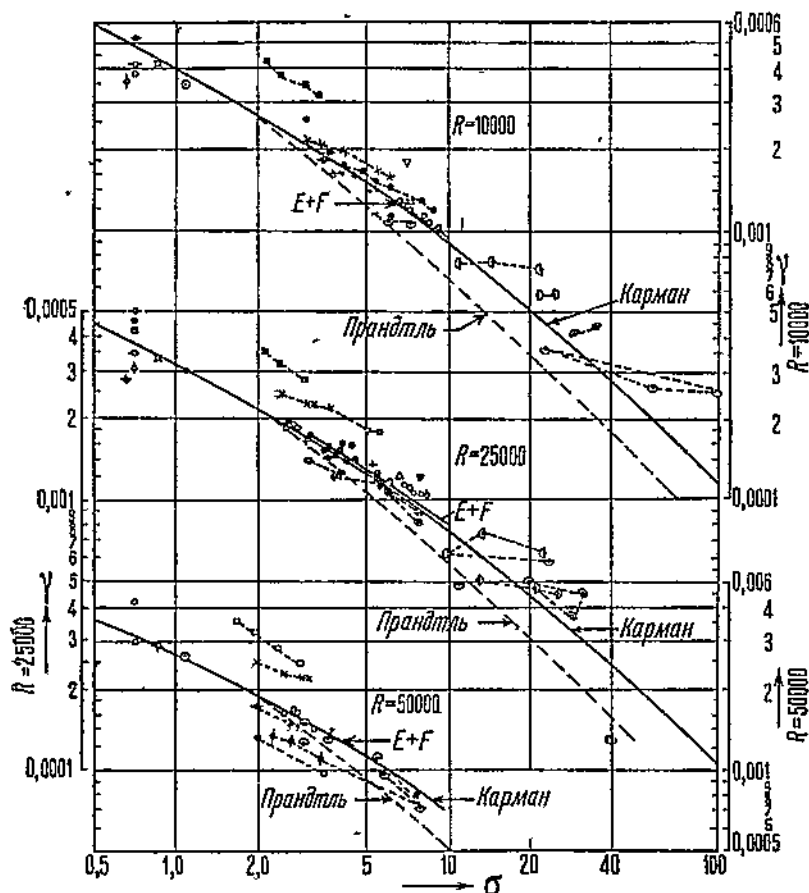
Для чисто ламинарной области мы естественно имеем:

$$y^* = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$$

Для переходной области и для чисто турбулентного потока можно воспользоваться выражением:

$$a + \lg y^* = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}},$$

но с различными значениями постоянных a и b при помощи хорошей интерполяции опытных значений.



Фиг. 21. Сравнение теоретических и измеренных значений коэффициента теплопередачи в трубах при различных значениях числа Рейнольдса.

Из последнего уравнения можно вывести истинное значение коэффициента переноса количеств движения в переходном слое. Для определения переноса теплоты мы предположим существование чисто ламинарной теплопроводности в ламинарной области и чисто турбулентной теплопроводности в турбулентной центральной области движения, тогда как в переходной области мы должны учитывать действие обоих видов переноса теплоты.

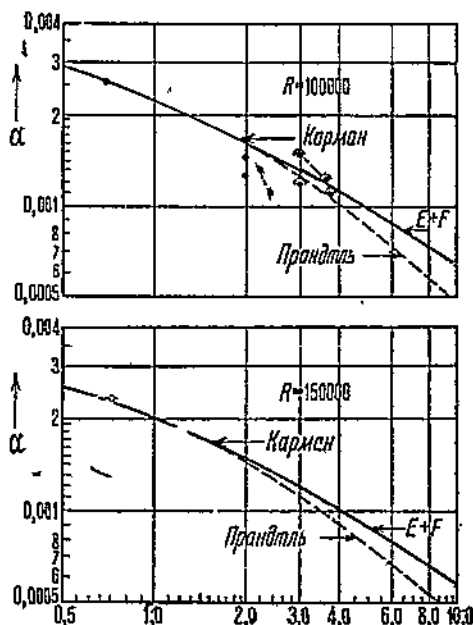
Для этой области мы принимаем значение коэффициента турбулентного переноса, полученное из распределения скоростей. Таким путем мы получим формулу:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{A}{\sqrt{\alpha_0}} \{(\sigma - 1) + B \lg [1 + C(\sigma - 1)]\}, \quad (19)$$

где A , B и C суть определенные постоянные числа.

Выведенная формула очень хорошо передает данные опытных измерений (фиг. 21 и 22*). В особенности поразительно согласие с лучшими из имею-

щихся опытных данных для жидкостей Иглы и Фергюсона¹⁾. Согласно это может быть даже слишком хорошее. Эти опыты проведены исключительно хорошо, в особенности благодаря примененному авторами методу экстраполяции и „приведения к бесконечно малой разности температур“. Этот прием, по-видимому, необходим при исследовании жидкостей вследствие значительной зависимости вязкости от температуры. Например, при исследовании масла правильное истолкование результатов измерения затрудняется тем, что количество переносимой теплоты в том случае, когда горячее масло охлаждается извне, сильно отличается от того количества, которое передается при нагревании извне холодного жидкого масла, даже если разность температур в обоих случаях одна и та же. Очевидно, что относительное расположение слоев с различной вязкостью имеет большое влияние на распределение как скоростей, так и температур.



Фиг. 21. Сравнение теоретических и измеренных значений коэффициента теплопередачи в трубах при различных значениях числа Рейнольдса.

*) Кривые, изображенные на фиг. 21 и 22, соответствуют формуле:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{5}{\sqrt{\alpha_0}} \{(\sigma - 1) + \lg [1 + 0,83(\sigma - 1)]\}.$$

Значения постоянных получены из распределения скоростей, изображенного на фиг. 19. Результаты опытных измерений, изображенные на фиг. 21 и 22, заимствованы из статьи Ганса Лоренца в „Z. f. technische Physik“, 1934 г., в которой дан прекрасный обзор работ по вопросу о передаче теплоты в движущихся жидкостях.

¹⁾ E. E. a. F.erguson, Proc. Roy. Soc. (A), 127, 1930.

§ 12. Перенос тепла за обтекаемыми нагретыми телами. Затруднения теории переноса количества движения.

В то время как опыты над переносом теплоты в потоке в трубах, повидимому, свидетельствуют в пользу теории переноса количества движения, Дж. Тейлор¹⁾ и Фейдж и Фалькнер²⁾ показали недавно, что эта теория окончательно не оправдывается при переносе теплоты в вихревой зоне позади обтекаемого потоком препятствия цилиндрической формы, т. е. при так называемой свободной турбулентности. Это является как раз тем случаем, для которого теория Прандтля переноса количества движения казалась столь простой и где вычисление распределения скоростей было произведено столь удачно. Мы должны заметить, что мы рискуем встретиться с большими затруднениями, если захотим перенести теорию переноса количества движения на случай непрямолинейного потока. Логическое обобщение выражения для переноса количества движения³⁾ приводит к выражению касательного напряжения при помощи производной от произведения $u \cdot r$ (т. е. момента количества движения), следовательно, к равенству:

$$\tau = \rho \bar{v} l \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur).$$

Однако в этом случае равенство нулю касательного напряжения ($\tau = 0$) соответствовало бы максимальному значению произведения ur , и в таком случае τ должно иметь тот же знак, что и производная $\frac{d}{dr} (ur)$. Недавно Ваттендорф⁴⁾ произвел несколько наблюдений в кривом лотке. Он измерил распределение скоростей в различных сечениях прямоугольного лотка с отношением сторон сечения 1:18 и с постоянной кривизной.

Он исследовал в особенности ту область, в которой распределение скоростей, соответствующее определенной кривизне, остается неизменным. Им были также измерены падение давления и касательное напряжение у стенок, — последние измерения были произведены методом, подобным тому, который был применен покойным Стантоном⁵⁾. На основании этих данных им было легко вычислено и распределение касательных напряжений вдоль сечения лотка. Повидимому, никакой корреляции между знаком производной $\frac{d}{dr} (ur)$ и знаком касательного напряжения τ не наблюдалось (фиг. 23). Можно думать, что могло оказывать влияние возмущение, производимое прямоугольной формой лотка, однако при

¹⁾ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. (A), 135, 1932.

²⁾ F. Fage a. V. M. Falkner, Proc. Roy. Soc. (A), 135, 1932.

³⁾ L. Prandtl, Aachener Vorlesungen (Gills, Hopf, Kármán), Berlin 1929; Proc. Tokyo Congress, Tokyo 1929.

⁴⁾ F. Wattendorf, ASME Aeronautics and Hydraulics division Berkeley Meeting, 1934.

⁵⁾ T. E. Stanton a. D. Marshall, R. a. M., 631, 1920; Proc. Roy. Soc. (A), 97, 1920; R. a. M., 720, 1921.

отношении 1:18 сторон сечения нельзя ожидать заметных дополнительных скоростей, создаваемых этим возмущением. Мы сталкиваемся с подобными же трудностями при исследовании кривых распределения скоростей в потоке между двумя вращающимися цилиндрами, которые были недавно получены Вендтом¹⁾. Мы должны также напомнить, как то отметил Тейлор, что теория переноса количеств движения, принимаемая совершенно буквально в том смысле, в каком она выражена в выводе Прандтля, может привести к явно неверному заключению, что на величину касательного напряжения в турбулентной жидкости может также оказать влияние вращение всей системы в целом как твердого тела.

§ 13. Перенос взвешенных частиц в турбулентном потоке.

Недавно О. Брайен²⁾ (Калифорнийский университет) в интересной статье показал, что распределение в потоке взвешенных частиц может дать новый способ непосредственного изучения механизма турбулентного движения и определения длины пути переноса. Легко составить уравнение статистического равновесия взвешенных частиц определенного размера. Рассмотрим ту часть взвешенных частиц, размеры которых (так называемая фракция) соответствуют гидравлической скорости падения w . Если n есть число этих частиц в единице объема, то число их, проходящих при осаждении через единицу горизонтальной площади в единицу времени, будет равно nw . С другой стороны, перенос частиц из нижнего слоя с большей концентрацией в верхний с меньшей концентрацией дает число:

$$-l|\omega'|\frac{dn}{dz},$$

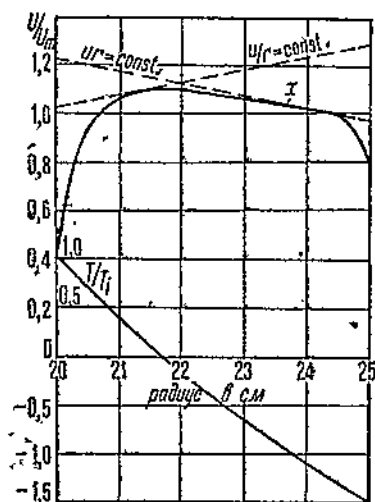
где $|\omega'|$ означает пульсацию вертикальной скорости. Следовательно, условие статистического равновесия сведется к равенству:

$$nw = -l|\omega'|\frac{dn}{dz}, \quad (20)$$

или

$$\frac{dn}{n} = -\frac{w}{\omega'} \cdot \frac{1}{l} dz. \quad (21)$$

Обозначая, далее, через τ местное касательное напряжение и через



Фиг. 23. Распределение скоростей и значений касательного напряжения в прямом канале.

¹⁾ F. Wendt, Ingenieur Archiv, IV, 1933.

²⁾ O. Brien, Trans. Amer. Geophysical Union, 1933.

и среднюю местную скорость, мы получим из теории переноса количеств движений равенство:

$$\tau = \rho l |\omega'| \frac{du}{dz},$$

или

$$l |\omega'| = \frac{\tau}{\rho \frac{du}{dz}}. \quad (22)$$

Подставляя это значение в равенство (21), мы получим:

$$\frac{dn}{n} = - \frac{\rho \frac{du}{dz} \omega}{\tau} dz,$$

или

$$\ln \frac{n_0}{n} = \rho \omega \int_0^z \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{\tau}, \quad (23)$$

где n_0 есть число частиц, переносимых вдоль дна, т. е. при $z=0$. Подсчитывая $\frac{du}{dz}$ из данных измерения скоростей, а τ — по уклону реки или канала, можно вычислить и отношение $\frac{n_0}{n}$, т. е. распределение числа частиц различных размеров, и сопоставить его с данными опыта. Число n_0 всего вероятнее зависит от размеров частиц и от величины касательного напряжения у дна.

§ 14. Атмосферная турбулентность ¹⁾.

Атмосфера представляет собою гигантскую лабораторию для изучения турбулентности. Мы ограничимся обзором наиболее существенных проблем и начнем с вопроса об изменении силы ветра с высотой.

Ветер вблизи поверхности земли, вероятно, будет вполне подобен потоку в пограничном слое. Среднее распределение скоростей будет таким же, а отношение $\frac{nh}{U}$ (где n есть средняя частота пульсаций, h — толщина пограничного слоя, а U — скорость, господствующая вне этого слоя) будет величиною того же порядка для ветра в естественных условиях и для искусственного пограничного слоя в опытных установках. Распределение скоростей зависит в общем случае от устойчивости различных слоев атмосферы, и нам думается, что одной из задач, которые следовало бы и возможно разрешить, является определение связи между распределением скоростей и параметром устойчивости, о котором мы упоминали в § 4.

Вблизи поверхности земли можно пренебречь силою Кориолиса, возникающей под влиянием вращения Земли. В более высоких слоях изменение величины и направления ветра определяется, главным образом, условиями равновесия между градиентом давления, силою Корио-

¹⁾ W. Eckman, Arkiv för Math., Astr. och Physik, II, 1905.

лиса и силою внутреннего турбулентного трения. Экман ¹⁾, Экснер ²⁾, Гессельберг и Свердруп ³⁾ в своих исследованиях (которые легли в основу всей теории) так называемого спирального распределения ветра приняли постоянное значение коэффициента переноса. Прандтль и Тольмин ⁴⁾ пользовались степенным законом распределения скорости. Наконец, недавно Россби ⁵⁾ ввел понятие длины пути переноса и постулат подобия для исследования этого вопроса. Им было найдено, что получаемые таким путем результаты вычисления хорошо согласуются с наблюдениями, и в худшем случае им не противоречат как в отношении порядка величины рассматриваемых количеств, так и в отношении формы той спирали, которая изображает распределение скоростей.

Проблема переноса теплоты и ее рассеяния имеет первостепенное значение для практической метеорологии. Повидимому, простое перенесение теории теплопередачи в трубах на условия атмосферного переноса теплоты вряд ли возможно — благодаря большим изменениям потенциальной температуры. Потенциальная температура имеет при изучении устойчивости тяжелой сжимаемой жидкости такое же значение, как плотность в вопросах устойчивости несжимаемой жидкости. Перенос тепла, вызываемый термической неустойчивостью, есть количество того же порядка величины или даже большего, чем перенос, создаваемый незначительными турбулентными пульсациями. В противном случае было бы невозможно, как то определили некоторые исследователи, найти пропорциональность коэффициента переноса тепла квадрату скорости в атмосфере над открытыми ровными поверхностями, например, над ледниками и аэропортами. Из данных теорий пограничного слоя можно было бы ожидать пропорциональности первой или даже меньшей степени скорости.

Вопрос о турбулентном переносе в тех слоях атмосферы, в которых можно не считать с действием земной поверхности, представляет собою особый интерес, в особенности, если скорость ветра и его порывистость могут рассматриваться постоянными на большом протяжении, так как данные, получаемые для этого простого случая диффузии, могут осветить вопрос об основных свойствах турбулентного переноса и о природе виртуальной вязкости.

Имеет ли турбулентная диффузия характер, предположенный Фиком, т. е. можно ли определить такой коэффициент диффузии, чтобы диффузия была пропорциональна произведению градиента концентрации материи и связанных с нею физических величин на коэффициент диффузии, — этот вопрос подлежит большому обсуждению.

Заметим, что законы диффузии, повидимому, тесно связаны с законами рассеяния частиц, взвешенных в воздухе. Рассмотрим в качестве примера простой случай рассеяния ветром большого числа воздушных шаров или отклонения в направлении во время их полета. Ясно, что

¹⁾ E. L. Davis a. O. G. Sutton, Q. T. Roy. Meteor. Soc., Oct. 1931.

²⁾ F. Exner, Ann. Hydr. u. mar. Meteor., XL, 1912.

³⁾ Th. Hesselberg u. Sverdrup, Veröffentlichungen des Geophysikalischen Instituts Leipzig I, 1915.

⁴⁾ L. Prandtl u. W. Tollmien, Z. f. Geophysik, VII, 1925.

⁵⁾ C. G. Rossby, Mass. Institut of technical Meteorology, Papers I, 4, 1932.

эта задача аналогична задаче броуновского движения. По теории же Эйнштейна броуновское движение определяется количеством $\frac{\bar{s}^2}{t}$, где $\bar{s}$ есть среднее квадратическое отклонение частиц, а t — промежуток времени наблюдения. Это количество должно быть пропорционально произведению средней энергии E пульсации частиц на их подвижность B , т. е. скорости, которую они принимают при сопротивлении, равном единице. Теория молекулярной диффузии может быть легко выведена из уравнения Эйнштейна.

В ряде своих статей Ричардсон¹⁾ указывал на неприменимость обычно принятой теории диффузии к явлению диффузии в атмосфере и делал попытки исправить расчет турбулентной диффузии различными методами, в том числе недавно предложенным методом особого „регистратора расстояний“. Дж. Тейлор²⁾ предложил остроумную гипотезу, которая мне кажется несколько слишком оригинальной. Он предположил существование корреляции между движениями рассеяния или диффузии частиц в различные моменты времени. О. Г. Суттон³⁾ дал дальнейшее развитие этой мысли. Основной результат, к которому он пришел, сводится к тому, что квадрат $\bar{s}^2$ квадратичного отклонения (так называемое рассеяние) есть функция расстояния, проходимого частицею, т. е. произведения ut , где u есть скорость ветра, а t — промежуток времени. Суттон, в частности, получил выражение вида:

$$\bar{s}^2 = A (ut)^n,$$

где постоянная A имеет размерность длины в степени $(2-n)$.

Может быть представляло бы некоторый интерес обобщить формулу Эйнштейна, которая получена на основании предположения вязкого сопротивления. Вместо закона сопротивления, пропорционального скорости, можно было бы рассмотреть и другие законы сопротивления.

Можно дать уравнению Эйнштейна следующее очень наглядное истолкование. Мы напишем:

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{\bar{s}}{t} \cdot \bar{s} \sim E.$$

Представленное в таком виде уравнение выражает, что работа силы $\frac{1}{B} \cdot \frac{\bar{s}}{t}$ сопротивления при перемещении $\bar{s}$ за время t пропорциональна средней энергии рассеивающейся частицы ($\bar{s}$ в этом и дальнейшем рассуждении для краткости обозначает количество, равное $\sqrt{\bar{s}^2}$, т. е. квадратичное отклонение).

Если мы предположим, что это соотношение справедливо и при квадратичном законе сопротивления, то мы получим уравнение следующего вида:

$$\rho C_D a^2 \left(\frac{\bar{s}}{t} \right)^2 \cdot \bar{s} \sim E,$$

¹⁾ L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. (A), 110, 1926.

²⁾ G. I. Taylor, Proc. London Mathem. Soc., XX, 1922.

³⁾ O. G. Sutton, Proc. Roy. Soc. (A), 135, 1932.

где ρ есть плотность жидкости, a — линейный размер переносимых элементов жидкости, а C_D — некоторого рода коэффициент сопротивления.

Далее, можно, повидимому, сделать правдоподобное предположение, что средняя энергия E пропорциональна количеству $\beta \rho a^3 u^2$, т. е. —

$$E \sim \beta \rho a^3 u^2,$$

где β есть коэффициент, зависящий от порывистости. Ясно, что мы получаем соотношение:

$$\bar{s} \sim a^{\frac{1}{3}} (ut)^{\frac{2}{3}}. \quad (24)$$

Таким путем мы непосредственно получаем основной результат, а именно, что $\bar{s}$ есть функция произведения ut .

Суттон нашел на основании наблюдений, что опытные данные укладываются лучше всего в формулу $\bar{s} \sim (u \cdot t)^{\frac{7}{8}}$ хотя, как он отметил, и сам опытный материал слишком невелик и расхождение отдельных наблюдений довольно велико.

Настоящий доклад имеет заглавие „Некоторые вопросы теории турбулентности“. Резюмируя настоящий довольно беглый обзор, можно сказать, что чисто теоретический вопрос находится в самой начальной стадии своего разрешения, и до сих пор нельзя предвидеть, каким образом к этой задаче могут быть применены принципы статистической механики. Вопрос технических приложений получил значительно большее развитие, так что мы уже в состоянии дать технике полезные советы. Что же касается метеорологических приложений, то надо отметить начало систематических исследований, которые при тесном сотрудничестве метеорологов и исследователей, интересующихся механикой жидкостей, подают надежду на успешное решение поставленных задач.

Приложение (краткая сводка)

Устойчивость ламинарного потока

Тип потока	Теоретические данные	Опытная проверка
1. Движение между параллельными стенками	Нижний предел возможной неустойчивости, полученный энергетическим методом (Лоренц, Опп). Отсутствие неустойчивости (метод малых колебаний).	Нижний предел неустойчивости значительно превосходит теоретически вычисленный энергетическим методом. Действительно, наступающая неустойчивость зависит от величины и рода возмущений.
2. Поток вдоль стенки, пограничный слой.	Неустойчивость при критическом числе Рейнольдса порядка 10^8 (Толмин).	Согласие с опытными данными в отношении порядка величины критического числа Рейнольдса.
3. Поток между концентрическими цилиндрами.	а) Условие устойчивости для идеальной жидкости $v_1 r_1 > v_2 r_2$ при $r_1 > r_2$ (Релли). б) Область устойчивости увеличивается под влиянием вязкости (Дж. Тейлор).	Хорошее совпадение теории с опытом в случаях теоретической неустойчивости. Кроме того, опытом установлена неустойчивость для некоторых случаев, теоретически устойчивых.
4. Пограничный слой внутри полого вращающегося цилиндра.	Неустойчивость та же, что и в случае 2. Критическое число Рейнольдса увеличивается с кривизной (Шлихтинг).	Порядок величины критического числа подтверждается опытом.
5. Два жидких слоя разной плотности и различной скорости.	а) Тяжелый слой сверху — неустойчивость. б) Тяжелый слой снизу — устойчивость при разности скоростей ниже критического значения. в) Равная плотность — неустойчивость (Гельмгольц).	В общем согласие с наблюдениями. Мало количественных наблюдений.
6. Плотность и скорость изменяется с высотой.	Условие устойчивости из соображений об энергии: градиент скорости $\times \text{const.} \times$ $\times \sqrt{g} \times \frac{\text{градиент плотности}}{\text{плотность}}$ (Ричардсон, Тейлор, Прандтль).	В общем согласие с опытом. Мало количественных измерений.

Общие выражения теории переноса

Вид переноса	Перенос, выраженный посредством пульсаций	Выражение переноса при помощи длины пути переноса
Количество движения (касательное напряжение).	$\tau = \rho \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'}$	$\tau = \rho l v' \frac{d\bar{u}}{dy}$
Теплота.	$q = -\lambda \frac{d\bar{\theta}}{dy} + c \overline{\rho u'\theta'}$	$q = -\rho c l v' \frac{d\bar{\theta}}{dy}$
Диффузия. Введенные частицы.	$N = -D \frac{d\bar{n}}{dy} + \overline{v'n'}$	$N = -l v' \frac{d\bar{n}}{dy}$

Теория турбулентного переноса

Авторы	Физическое истолкование	Математические выражения
Осборн. Рей-польдс.	Кажущиеся напряжения объясняются переносом количества движения посредством пульсаций.	Составляющие кажущихся напряжений равны: $\sigma_x = -\overline{\rho u'^2}$, $\tau_{xy} = -\overline{\rho u'v'}$, $\sigma_y = -\overline{\rho v'^2}$, $\tau_{yz} = -\overline{\rho v'w'}$, $\sigma_z = -\overline{\rho w'^2}$, $\tau_{zx} = -\overline{\rho w'u'}$
Буссинеск, Тейлор, Шмидт, Ричардсон.	Коэффициент вязкости, кажущимся образом увеличенный турбулентным переносом (виртуальная вязкость).	Касательное напряжение при прямолинейном потоке средних скоростей равно: $\tau = \epsilon \frac{du}{dy}$, где ϵ есть коэффициент виртуальной турбулентной вязкости.
Л. Прандтль.	Перенос количества движения при сохранении количества переносимого движения, параллельного средней скорости потока.	l — длина пути переноса (перемещения) $u'v'w'$ — пульсации при прямолинейном среднем движении: $u' = l \frac{du}{dy}$, $ v' = l \left \frac{du}{dy} \right $; касательное напряжение равно: $\tau = \rho l v' \frac{du}{dy} \sim \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$.

Авторы	Физическое истолкование	Математические выражения
Дж. Тейлор.	Перенос вихревого напряжения при условии его сохранения во время переноса.	l — длина пути переноса вихревого напряжения для прямолинейного среднего движения: $\frac{d\tau}{dy} = \rho l v' \frac{d\omega_z}{dy} = \rho l v' \frac{d^2u}{dy^2}.$
Т. Карман.	Принцип подобия в применении к турбулентному переносу. Картина распределения скоростей в разных направлениях подобна в каждой точке. Различие только в масштабе расстояний и времени.	k — характерный масштаб расстояний турбулентного переноса. Для прямолинейного среднего движения: $l \sim \left \frac{du}{dy} \right \frac{dy^2}{d^2u},$ пульсации: $u', w', w' \sim l \frac{du}{dy};$ касательное напряжение: $\tau = \rho l^3 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \rho k \left(\frac{du}{dy} \right)^4 : \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)^2.$ $k = \text{const.} \approx 0,4.$

Теплопередача в трубах.

- 1) Уравнение Прандтля при
- $\sigma = \frac{\lambda}{c_p \mu} = 1$
- :

$$\alpha_0 = \frac{q}{c_p \rho U \theta} = \frac{c_f}{2}; \quad \frac{q}{c_p \rho U \theta} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}.$$

- 2) Формула Прандтля-Тейлора при
- $\sigma \neq 1$
- :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{\text{const.}}{\sqrt{\alpha_0}} (\sigma - 1).$$

- 3) Эмпирическая формула Иглы-Фергюсона:

$$\frac{1}{\alpha} = A + B (\sigma - 1) + C (\sigma - 1)^2,$$

где A, B, C суть функции числа Рейнольдса.

4) Новая формула, построенная в предположении существования переходного слоя между пограничным ламинарным слоем и турбулентной областью потока:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{5}{\sqrt{\alpha_0}} \left\{ (\sigma - 1) + \ln \left[1 + \frac{5}{6} (\sigma - 1) \right] \right\}.$$

И. НИКУРАДЗЕ.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ГЛАДКИХ ТРУБАХ¹⁾.

ВВЕДЕНИЕ.

Имеющиеся до сих пор данные многочисленных экспериментальных исследований турбулентного движения еще не могли служить бесспорным основанием теории турбулентности. Более старые работы, касающиеся закона сопротивления в трубах, не могли удовлетворять ни теоретика, ни практика. Эти исследования оставались мало показательными до тех пор, пока опыты не были сопоставлены с изменением правильно выбранного параметра, т. е. числа Рейнольдса R . Во многих случаях не принималось даже во внимание то, что распределение скоростей в трубе устанавливается только после того, как поток пройдет более или менее длинный начальный участок трубы. Блазиусу²⁾ удалось привести в порядок на основании принципа подобия имевшийся материал опытов с потоком в гладких трубах. Им были выведены эмпирические формулы, которые в пределах чисел Рейнольдса

$R = \frac{\bar{u}d}{\nu}$ до значений $100 \cdot 10^3$ ($\bar{u}$ есть средняя скорость, d — диаметр трубы, ν — кинематическая вязкость) довольно хорошо воспроизводят закон сопротивления. Блазиус воспользовался опытами Сафа и Шодера³⁾ над движением воды. Они измеряли потерю давления в 15 тянутых латунных трубах с диаметрами от $d = 2,77$ мм до 53,5 мм, в пределах значений числа Рейнольдса от $R = 1,4 \cdot 10^3$ до $104 \cdot 10^3$. Блазиус нашел для коэффициента λ сопротивления ламинарного потока формулу:

$$\lambda = \frac{64}{R},$$

а для турбулентного:

$$\lambda = \frac{0,316}{R^{\frac{1}{4}}}.$$

¹⁾ J. Nikuradse, Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren, Forschungsheft 356 (Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens“, 1932).

²⁾ H. Blasius, Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Forsch.-Arb. Ing.-Wes., № 131, Berlin 1913.

³⁾ V. Saph a. E. H. Schoder, An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes, Trans. Amer. Soc. Civ. Engr. Pap. 944, т. 51, 1903.

Опыты Сафа и Шодера показали, что переход от ламинарного к турбулентному режиму происходит приблизительно при числе Рейнольдса $R = 2000$ (критическое число Рейнольдса). Область перехода лежит между числами Рейнольдса $R = 2000$ и 3000 . Наряду с опытами Сафа и Шодера Блазиус использовал для установления своего закона подобия опыты Нуссельта¹⁾, исследовавшего падение давления в воздушном потоке в трубе с диаметром $d = 2,201$ см. Определяя из этих опытов коэффициент сопротивления и устанавливая зависимость его от числа Рейнольдса, он получил те же результаты, как и из опытов Сафа и Шодера. Числовые значения, соответствующие опытам Нуссельта, лежащие в пределах чисел Рейнольдса от $6 \cdot 10^3$ до $150 \cdot 10^3$, прекрасно согласуются с формулой сопротивления, данной Блазиусом. Тем самым был подтвержден закон подобия для различных жидкостей, в данном случае для воды и воздуха. Затем Блазиус обработал опыты Ланга, производившиеся в медной трубе с $d = 6$ мм, до числа Рейнольдса $R = 326 \cdot 10^3$. Эти опыты ставились с целью провести сравнение между большими скоростями при малом диаметре трубы, с одной стороны, и малыми скоростями при большом диаметре — с другой. Это сравнение привело к весьма удовлетворительному подтверждению закона подобия.

После того как был установлен закон подобия, Омбек²⁾ поставил себе задачу, на основе опытов с воздухом установить зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и тем самым проверить формулу Блазиуса. Опыты производились в круглых трубах, изготовленных из разного материала, с различными диаметрами (от $d = 2,004$ см до $d = 10$ см), при значениях числа Рейнольдса до $R = 450 \cdot 10^3$. Из этих опытов Омбек получил формулу, сходную с формулой Блазиуса. Сам Омбек объясняет небольшое отклонение от формулы Блазиуса неточностями в определении кинематической вязкости. Учитывая это обстоятельство, им было установлено хорошее совпадение с формулой Блазиуса до числа Рейнольдса $R = 100 \cdot 10^3$.

Стантон и ПANNELL³⁾ провели для проверки закона подобия многочисленные опыты над водой и воздухом в круглых трубах различного диаметра (от $d = 0,361$ до $d = 12,62$) и при различных температурах. В производившихся опытах числа Рейнольдса лежали в пределах от $2,2 \cdot 10^3$ до $430 \cdot 10^3$. Результаты этих опытов наилучшим образом подтвердили закон подобия; до значения числа Рейнольдса, равного $100 \cdot 10^3$, опытные точки ложатся на прямую, данную Блазиусом. Выше этого значения можно заметить все увеличивающееся отклонение от прямой кверху. Лис⁴⁾ положил результаты опытов Стантона и ПANNELL в основу своей эмпирической формулы сопротивления и нашел зависимость:

$$\lambda = 0,00714 + \frac{0,6104}{R^{0,33}}.$$

¹⁾ W. Nusselt, Wärmeübergang in Rohrleitungen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. № 89, Berlin 1910.

²⁾ H. Ombeck, Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. № 158/159, Berlin 1914.

³⁾ T. E. Stanton and J. R. Pannell, Similarity of motion in relation to the surface friction of fluids, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), т. 214, стр. 199, 1914.

⁴⁾ C. H. Lees, On the flow of viscous fluids through smooth circular pipes, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), т. XCI, стр. 46, 1915.

Якоб и Эрк¹⁾ провели с водой опыты над падением давления в зависимости от количества протекающей жидкости в тянутых латунных трубах с диаметрами $d=7\text{ см}$ и 10 см в интервале чисел Рейнольдса от $86 \cdot 10^3$ до $462 \cdot 10^3$. Если не считаться с отклонениями до 10% в положении опытных точек, то эти опыты надо считать подтвердившими упомянутые исследования Стантона и Панцелла. Якоб и Эрк вывели из своих опытов формулу сопротивления, почти полностью совпадающую с формулой Лиса.

Из новых опытов следует упомянуть об исследованиях Германа²⁾ над законом сопротивления в еще более широком интервале чисел Рейнольдса; Герман провел опыты с водой в медной трубе с диаметром $d=5\text{ см}$ и в латунной трубе с $d=6,8\text{ см}$ в интервале для числа Рейнольдса от $20 \cdot 10^3$ до $1900 \cdot 10^3$, учитывая начальный участок движения от 88 до 600 радиусов трубы. Он исследовал зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и получил при небольших начальных участках и малых числах Рейнольдса хорошее совпадение с законом сопротивления, установленным ранее Стантоном и Панцеллом, Якобом и Эрком и др. Влияние начального участка (причем коэффициент сопротивления тем меньше, чем меньше начальный участок движения) наблюдалось Германом при длине этого начального участка до 600 радиусов трубы.

Кроме того, Герман констатировал увеличение длины начального участка с увеличением числа Рейнольдса. На основании опытов эту длину оказалось возможным определить приблизительно равной 200 радиусов. Из этих опытов Герман вывел формулу сопротивления, аналогичную формуле Лиса. В конце он приложил таблицу, позволяющую пересчитывать коэффициент сопротивления для произвольной длины начального участка в пределах от 88 до 600 радиусов трубы. Л. Шиллер³⁾, под руководством которого работал Герман, сообщил в 1929 г. на конгрессе по аэродинамике и смежным дисциплинам в Аахене о приведенных выше результатах, а также о том, что коэффициенты сопротивления для чисел Рейнольдса, превышавших наивысшую границу, достигнутую Стантоном и Панцеллом и Якобом и Эрком, лежат значительно выше тех чисел, которые были получены раньше в Геттингене. Более значительное сопротивление с очевидностью показывало, что в экспериментальной трубе Германа имело место вращение потока, которое и повлекло за собой повышение сопротивления. Это обстоятельство побудило Л. Прандтля⁴⁾ предложить построить при входе в трубу выпрямляющую решетку и повторить все испытания. Согласно опубликованному

¹⁾ M. Jacob u. S. Erk, Der Druckabfall in glatten Röhren u. die Durchflussziffer von Normaldüsen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes., № 267, Berlin 1924.

²⁾ R. Hermann, Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen u. grossen Anlaufängen (диссертация), Leipzig, а также Akadem. verlagsgesellschaft, Leipzig 1930.

³⁾ L. Schiller, Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen, Vorträge aus dem Gebiete des Aerodynamik u. verwandter Gebiete, стр. 69, Aachen 1929; hrsg. A. Gilles, L. Hopf u. Th. v. Kármán, Berlin.

⁴⁾ L. Prandtl, Diskussionsbemerkungen zum Vortrag von L. Schiller, Vorträge aus dem Gebiete d. Aerodynamik u. verwandter Gebiete, стр. 78, Aachen 1929, hrsg. A. Gilles, L. Hopf u. Th. v. Kármán, Berlin 1930.

Л. Шиллером дополнению к его аахенскому докладу при многократных измерениях влияние начального участка уже отсутствовало на расстоянии 250 радиусов трубы, а при входе с острыми краями нельзя было обнаружить никакого влияния даже при 100 радиусах, что совпадает с результатами, полученными в Геттингене. Здесь следует еще упомянуть, что на основании неопубликованных еще многочисленных геттингенских испытаний относительно длины начального участка было выяснено отсутствие его влияния, начиная от 100 радиусов даже и при закругленном входе.

Первые хорошие опыты по распределению скоростей в турбулентном потоке в круглых трубах были проведены Стантоном¹⁾. Испытания эти производились над воздухом в трубах длиной в 500 см и диаметром $d = 4,93$ см и $d = 7,4$ см и захватывают значения числа Рейнольдса в пределах между $14 \cdot 10^3$ и $60 \cdot 10^3$. Данные о напоре, при котором наблюдалось распределение скоростей, отсутствуют. Подобные же опыты с водой были проведены автором²⁾ в круглой трубе с диаметром 2,8 см и при числе Рейнольдса, равном примерно $180 \cdot 10^3$. Кроме того имеются измерения распределения скоростей в каналах и трубах с некруглым сечением, которые, однако, не относятся к теме настоящей работы.

Из приведенных работ видно, что экспериментальный материал недостаточен для выяснения проблемы турбулентности. Вследствие этого мы поставили себе в Геттингене задачу продолжить производившиеся до сих пор исследования в двух направлениях: с одной стороны, распространяя опыты на очень большие числа Рейнольдса, а с другой стороны, уясняя помимо закона сопротивления также и зависимость распределений скоростей от числа Рейнольдса, что имеет большое значение для исследования турбулентных потоков. Нами был выполнен с наивысшей достижимой точностью измерения большой ряд опытов по распределению скоростей и падению давления в гладких трубах в весьма большом интервале чисел Рейнольдса. С помощью соответствующих подсчетов удалось показать:

1) каков закон зависимости между сопротивлением и распределением скоростей;

2) какими формулами можно выразить закон сопротивления и закон распределения скоростей;

3) какие закономерности выявляются для коэффициента обмена (Austauschgrösse) и длины пути перемешивания Прандтля (Mischungsweg).

При этих исследованиях мы часто пользовались результатами теории подобия Кармана³⁾. В тех пределах, при которых исчезает влияние вязкости на явления турбулентности, опыты очень хорошо подтвердили эти результаты. Опыты⁴⁾ производились в 1928—1929 гг. в Institut

1) T. E. Stanton, The mechanical viscosity of fluids, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), т. LXXXV, стр. 366—376, 1911.

2) J. Nikuradse, Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes., № 281, 1926.

3) Th. v. Kármán, Mechanische Ähnlichkeit u. Turbulenz Göttinger Nachr., Math. Phys. Klasse, стр. 58, 1930 (см. перевод этой статьи на стр. 271 этого сборника).

4) J. Nikuradse, Über turbulente Wasserströmungen in geraden Röhren bei sehr grossen Reynoldsschen Zahlen, Vortr. a. d. Gebiete der Aerodynamik u. verw. Gebiete, Aachen 1929; hrsg. A. Gilles, L. Hopf u. Th. v. Kármán, Berlin 1930.

für Strömungsforschung Göttingen, руководимом проф. Прандтлем. Теоретическая обработка результатов опытов была доведена до конца только летом 1931 г. Установки и аппаратура для опытов были построены мастерскими института.

Пользуясь настоящим случаем выразить сердечную благодарность моему высокоуважаемому руководителю проф. Людвигу Прандтлю, все время помогавшему мне своими советами.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ.

1. Постановка опытов.

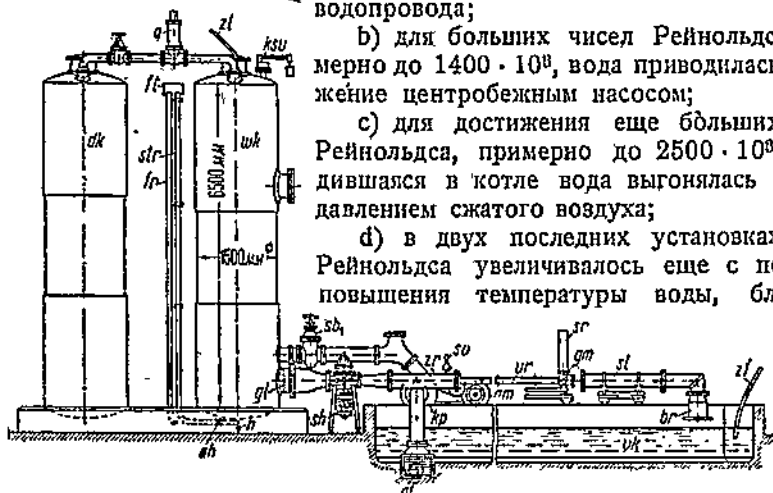
Для исследования турбулентного потока в круглых трубах применялись три различного вида установки:

а) для малых чисел Рейнольдса, приблизительно между $3 \cdot 10^3$ и $60 \cdot 10^3$, применялся котел с водоотливом, снабжавшийся водой из водопровода;

б) для больших чисел Рейнольдса, примерно до $1400 \cdot 10^3$, вода приводилась в движение центробежным насосом;

с) для достижения еще больших числа Рейнольдса, примерно до $2500 \cdot 10^3$, находившаяся в котле вода выгонялась наружу давлением сжатого воздуха;

д) в двух последних установках числа Рейнольдса увеличивалось еще с помощью повышения температуры воды, благодаря



Фиг. 24. Испытательная установка.

zl — подводная труба;	br — успокоитель;
k — водяной котел;	sv — воздушный клапан;
dk — резервуар со сжатым воздухом;	vr — испытательная труба;
sb ₁ — шибер между wk и kp;	gm — прибор для измерения скорости;
sb ₂ — шибер между wk и zt;	sr — вертикальная труба;
sh — быстросрабатывающий кран;	st — струегаситель;
str — подъемная труба;	a — регулятор Аркс;
fr — спускная труба;	kp — центробежный насос;
ft — грязеуловитель;	am — приводной мотор;
ah — отводный кран;	wk — запасный канал;
h — спускной кран;	an — включатель электромотора;
gl — выравнивающая решетка;	zf — подводный шланг;
sr — подводная труба;	af — спуск;
— предохранительный вентиль для	qws — ртутный указатель уровня воды.
водяного котла;	

чему в третьем случае удалось достигнуть наивысшего значения $R = 3300 \cdot 10^3$.

Примечание к пункту а). Так как в случае малых чисел Рейнольдса, при небольшом расходе, было очень трудно добиться совершенно установившегося потока, пользуясь только центробежным насосом, то была

принята следующая постановка опыта. Через питательную трубу zl (фиг. 24) вода из водопровода направлялась в открытый котел wk . При открытом отводном кране ah вода поднималась в подъемной трубе str на такую же высоту, как и в котле wk . Так как питательная труба подавала воды несколько больше количества, протекавшего через испытательную трубу vr , то избыток воды поступал через подъемную трубу str в сосуд ft , откуда он уводился через сточную трубу fr , чем и достигался постоянный уровень воды. Для получения равномерного потока в испытательной трубе к цилиндрической части выхода из котла wk была приделана выпрямляющая решетка gl . Эта последняя должна была устранить в значительной степени вихревое движение, вызываемое в котле поступающей водой и продолжающееся также к испытательной трубе. Конической частью выхода создавалось замедление скорости, способствующее успокоению потока. Затем через трубу zr диаметром в 25 см и длиной 250 см вода подавалась в испытательную трубу. Применялись трубы следующей длины:

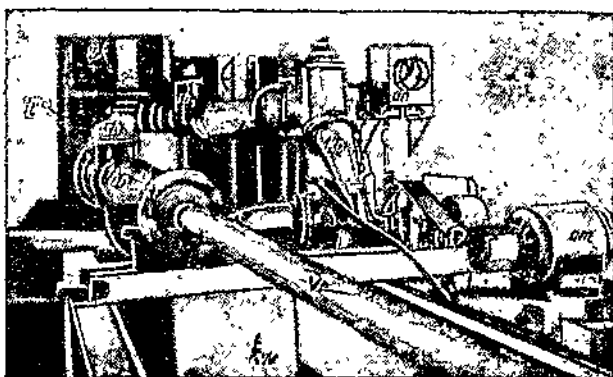
Таблица 1. Размеры труб.

d мм	l_0 мм	l_1 мм	l_2 мм	l_a мм	x мм	$\frac{x}{d}$ мм	Обозначения
10	550	500	500	450	2000	200	vr_1
20	1330	500	500	170	2500	125	vr_2
30	1960	500	500	40	3000	100	vr_3
50	3300	1000	1000	70	6000	120	vr_4
100	4000	1500	1000	550	7050	70,5	vr_5

Обозначения: d —внутренний диаметр трубы; l_0 —начальный участок l_1 —измеряемая длина l_2 —измеряемая длина l_a —длина выхода; x —общая длина; $\frac{x}{d}$ —относительная общая длина.

Для получения равномерного впуска в трубу подающая труба zr имела коническое сужение по направлению к испытательной трубе до размеров последней. На этом сужающемся участке al (фиг. 28) при опытах с перепуском находилась шейка с острым краем, которая должна была обеспечить турбулентность потока даже при наименьших значениях числа Рейнольдса, равных приблизительно $15 \cdot 10^3$. Как раз перед самым сужением в наивысшей части подающей трубы был устроен кран eh для выхода воздуха. Труба вместе с прибором для измерения скоростей помещалась на двух тележках, дававших возможность удобного передвижения при перестановках. Тележки эти перемещались по рельсам, проложенным по стенкам запасного канала. Вдоль всей длины каретки помещалась планка, на которой стояли рейтеры, поддерживавшие испытательную трубу и дававшие возможность установки трубы в продольном направлении. В конце испытательной трубы находился прибор для измерения скоростей, описываемый ниже. Под ней в запасном канале vk стоял измерительный бак mb (фиг. 27).

Примечание к пункту *b*). Для опытов с круговым течением (фиг. 25) вода засасывалась центробежным насосом *kp*, обслуживавшимся мотором *am* (мощность 14 kW, число оборотов могло быть изменяемо от 1120 до 1900 об/мин), из запасного канала *vk* и подавалась в котел *wk*. Через испытательную трубу *vr* вода обратно поступала из котла в запасный канал *vk*. Для грубой регулировки служили пусковой реостат *ap* мотора и клапан *sb₁*, включенный между центробежным насосом *kp* и котлом *wk*. Точное регулирование производилось с помощью дросселя *dv* на аппарате для измерения скоростей (фиг. 28). Центробежный насос позволял поддерживать на поверхности воды в котле *wk* давление до 2 ат. Вода в котле поддерживала давление верхнего воздуха над водой. Обычно в котле поддерживалось давление в 500 см водяного столба (размеры котла *wk*: высота 6500 мм, диаметр 1500 мм).



Фиг. 25. Вид установки с круговой циркуляцией воды.

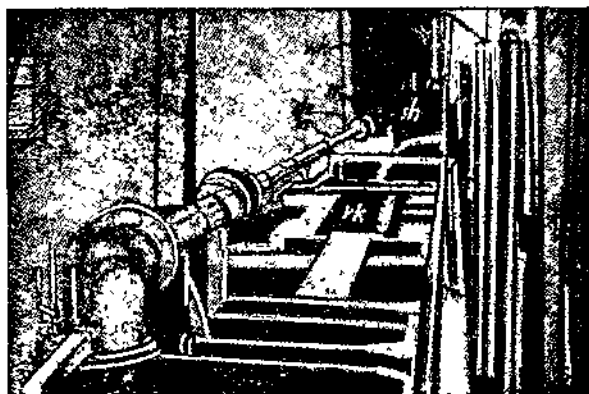
Описанная установка давала возможность при обыкновенной температуре получать поток со значением числа Рейнольдса примерно до $R = 1000 \cdot 10^3$.

Тот участок, на котором производились исследования, был в остальном точно такой же, как и в описанной выше установке.

Примечание к пункту *c*). Установка для сжатого воздуха состояла из компрессора, с помощью которого можно было получить в котле для сжатого воздуха *dk* (фиг. 24) избыток давления примерно в 10 ат. Котел для сжатого воздуха соединялся посредством регулятора Арка с водяным котлом *wk*; регулятор, который ниже будет описан подробнее, поддерживал постоянное неизменное давление при выходе воды из резервуара. Так как время вытекания было ограничено (наикратчайший промежуток времени примерно был равен 45 сек.), то специальным быстродействующий кран *sh*, находившийся между водяным баком и испытательной трубой, обеспечивал быстрое открытие и закрытие трубопровода. Управление краном производилось помощью сжатого воздуха. Для закрывания или открывания требовалось примерно 0,1 сек. Во избежание образования в трубе при закрытии крана понижения давления имелся особый клапан *sv*, находившийся в наивысшей точке

подводящей трубы *zg* — между быстродействующим краном и испытательной трубой — для соединения с внешним воздухом. Так как при этих опытах измерения производились над свободной струей, то аппарат для измерения скорости *gm* был открыт и в нем помещалась прямоугольная подъемная труба *sr*. Свободная струя направлялась в струегаситель *st*, расположенный на третьей тележке, и через отводную трубу и успокоитель *br* возвращалась обратно в запасный канал. Вследствие недостатка места подводящая труба *zg* имела в этих опытах длину всего в 1500 мм.

Примечание к пункту *д*). Для достижения еще больших значений числа Рейнольдса кинематическая вязкость $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ воды понижалась путем повышения температуры. Отчасти этот же метод применялся и при



Фиг. 26. Вид установки для изучения гидравлического удара: *de* — установка давления; *gm, qm* — ртутный манометр; *gm* — водяной манометр.

измерениях с непрерывным кругооборотом возвращающегося потока, так как проведение опытов при подобной установке требовало значительно меньше времени и труда. Вода нагревалась паром в котле. Котел доставлял примерно 1,1 л/сек воды при 40°С. Благодаря уменьшению расхода удавалось добиться повышения температуры воды примерно до 95°С, что, вследствие охлаждения в промежуточных этапах установки, соответствовало температуре примерно в 40°С в испытательной трубе. Котел помещался у стены лаборатории и соединялся шлангом *zf* с запасным каналом *vk*. В этой второй установке числа Рейнольдса достигали вследствие повышения температуры значений до $R = 1400 \cdot 10^3$, при третьей установке до $R = 3240 \cdot 10^3$. Общий вид установки для случаев *с*) и *д*) изображен на фиг. 26.

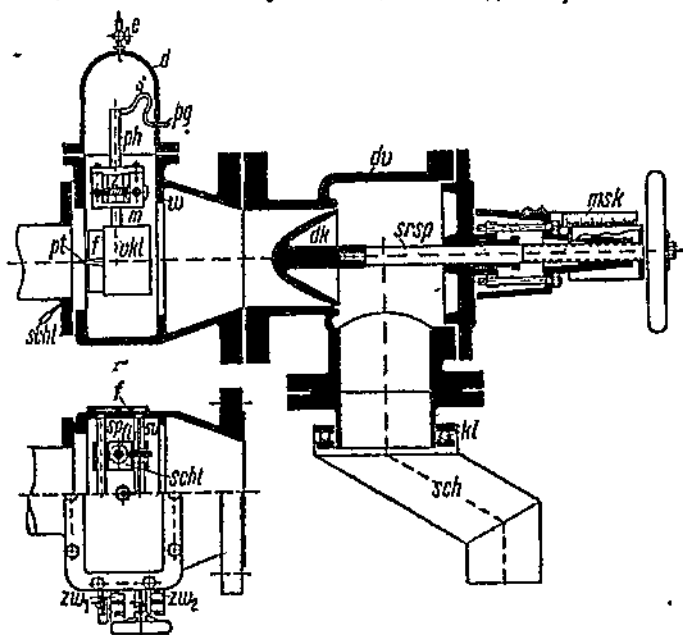
2. Экспериментальная аппаратура.

а) Прибор для измерения скоростей с дросселем и подвижным стоком.

Прибор для измерения скорости (фиг. 27) состоит из камеры *m*, крышки *d*, шпинделей *sp* и *su*, ползунка *schl* и подвижной трубки

Пито *pt*. Для наблюдений в камере имеются с обеих сторон окна *f*. В середине находится перегородка *w*, препятствующая обратному течению жидкости в измерительное пространство. Крышка *d* плотно припаяна к камере, так что без труда получается необходимая герметичность. Для выпуска воздуха на крышке поставлен кран *e*.

Для перемещений трубки Пито имеются шпиндели *sp* и *su*, по которым перемещается ползунок *schl*. Шпиндель *sp* имеет винтовую



Фиг. 27. Большой прибор для определения скорости с дросселированным и поворотным спуском.

m — кожух;
d — крышка;
sp, su — шпиндель;
schl — ползунок;
pt — трубка Пито;
ph — державка и трубка Пито;
f — окно;
pe — наконечник для включения полного давления;
z — червячное колесо;
fl — направляющие ребра;
s — шланг;

srsp — винтовой шпиндель;
dk — дроссельный конус;
msk — измерительная шкала;
kl — шариковый подшипник;
dv — дроссельный вентиль;
w — стенка;
e — спусковой воздушный кран;
vhl — обтекатель трубки Пито;
sch — поворотный спуск;
ZW₁, ZW₂ — счетчики;
schl — отверстие для измерения статического давления.

нарезку с шагом в 1 мм и перемещает ползунок в горизонтальном направлении; он приводится во вращение извне и снабжен задерживающей буксой. Обороты шпинделя *sp* передаются счетчику *zw*; этот последний устроен так, что ролик, дающий показание последней цифры (т. е. единицы), неподвижно связан с осью счетчика, так что счетчик при обороте передвигается вместо одного числа на десять и, таким образом, добавляет единицу на втором месте числа, т. е. один десяток. Благодаря этому можно без затруднений прочесть перемещение в 0,1 мм. С передвижением ползунка вперед или назад в ту же сторону одновременно перемещается и трубка Пито.

Перпендикулярные перемещения державки *ph* трубки Пито совершаются с помощью шпинделя *su*, на котором нет винтовой нарезки, но имеется канавка. Вращение шпинделя приводит во вращение червячные колеса. Червячное колесо *z* имеет внутреннюю нарезку с шагом в 1 мм и перемещает державку *ph* трубки Пито вверх или вниз, причем вращение державки предохраняется боковой задержкой *fl*. Отсчеты производятся по счетчику *zw*. Трубки Пито *pt* различных диаметров устанавливаются державкой *ph* параллельно потоку для измерения динамического давления. Они снабжены шлангом *s*, передающим давление.

Так как распределение скорости определяется на расстоянии в 0,1 до 0,2 мм за выходным каналом испытательной трубы, то в этом сечении следует также измерить и статическое давление; поэтому во фланце испытательной трубы было сделано отверстие *sch* около 0,8 мм диаметром. Это отверстие стояло примерно на 2 мм от края струи. Имевшееся здесь давление равнялось давлению на краю струи.

Чтобы точно регулировать различные расходы, к аппарату для измерения скоростей был приделан дроссель *dv* (фиг. 27). Винтовым шпинделем *srsp* с измерительной шкалой *msk* устанавливается положение дроссельного конуса *dk*.

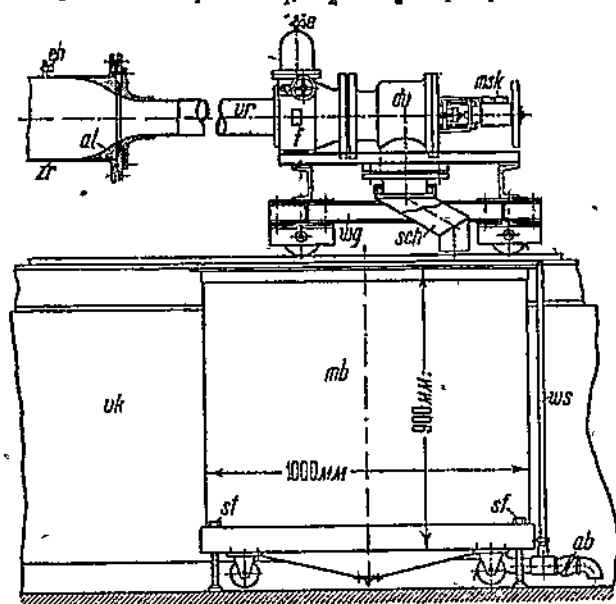
Поворотный спуск *sch* служит для быстрого пуска жидкости в измерительный бак и для обратного ее отведения. Шариковый подшипник *kl* давал возможность производить очень быстрые повороты.

Прибор для измерения скоростей, дроссель и поворотный спуск были смонтированы в одно целое и расположены на тележке *wg* (фиг. 28), которая имела возможность передвигаться по рельсовому пути, проложенному вдоль запасного канала.

б) Измерительный бак. Для измерений расхода воды служил цилиндрический измерительный бак *mb* (фиг. 28) емкостью около 700 л при диаметре в 1000 мм и 900 мм высоты; его можно было подводить под спускную трубу *sch*. На дне бака был сделан сток с краном *ab*. Перед краном помещалось водомерное стекло *ws*, снабженное миллиметровыми давлениями для показания уровня воды в баке. Для горизонтальной установки бака последний опирался на четыре установочных винта *sf*. На поверхности воды в баке плавала круглая деревянная доска с отверстиями для демпфирования колебания поверхности воды и для сокращения тем самым времени, необходимого для отсчетов уровня. Для измерения меньших расходов пользовались подобным же баком диаметром в 178 мм и высотой в 700 мм.

с) Микроманометр. Для тех малых разностей давления, с которыми приходилось встречаться при ведении опытов, точность обыкновенного водяного манометра оказалась уже недостаточной. Надо было создать прибор, точность которого соответствовала бы нашим требованиям и который в то же самое время мог бы применяться при большом диапазоне давлений. Эта задача для измерений давления в пределах от 0,02 до 500 мм водяного столба была разрешена следующим образом. К горизонтальной стеклянной трубке с тремя кранами h_1 , h_2 , h_3 (фиг. 29) были припаяны две стеклянных трубки, по одной между каждой парой кранов. Между обоними свободными верхними концами этих трубок была впаена комбинация из трех коротких трубок в виде буквы *T*, при углах

наклона в 120° между ними, причем средняя из трубок этой Т-образной детали была направлена вертикально вверх и запиралась краном h_6 . Кран h_4 в другой трубке давал возможность прерывать связь между обеими вертикальными трубками. Свободные концы a_3 и a_4 трубок запирались зажимами. При пользовании этим прибором в качестве водяного манометра в a_1 и a_2 присоединялись две резиновые трубки, подводящие давление, и открывались краны h_1 , h_2 и h_4 . При работе этого прибора



Фиг. 28. Часть испытательной установки.

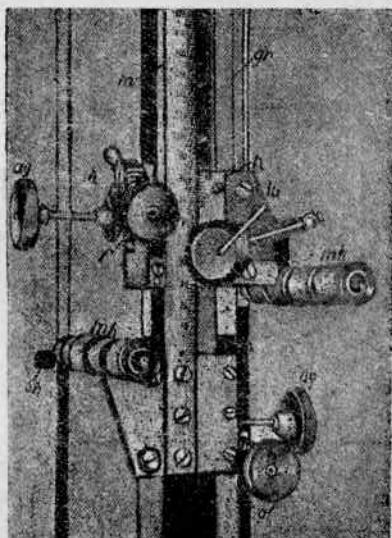
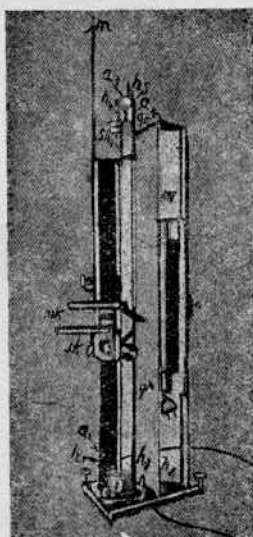
ur — подводящая труба;	sch — поворотный спуск.
ch — спускной воздушный кран;	al — соединительная деталь;
e — спускной кран аппарата для измерения скорости;	ur — испытательная труба;
f — окно прибора для измерения скорости;	wg — телескоп;
uk — запасный канал;	mb — измерительный бак;
du — дроссельный пентиль;	ws — подмерное стекло;
msk — измерительная шкала;	ab — спускной кран;
	sf — установочный пинт.

в качестве ртутного манометра резиновые трубки присоединялись в a_3 и a_4 и открывался кран h_3 .

Для проверки во время работы нулевого положения открывался у водяного манометра кран h_5 и у ртутного кран h_4 . Диапазон показаний манометра был равен примерно 500 мм. Точность измерений повышалась с помощью микроскопа ml .

На массивной медной плите была установлена прецизионная трубка прямоугольного сечения, на которой могли передвигаться две ползушки sh . Каждая ползушка имела по одному микроскопу mh с нитяным крестом. Передвижение ползушек производилось помощью винта и зубчатой рейки. Включаемая и выключаемая винтовая передача sn (фиг. 30) позволяла производить окончательную точную установку. На нижнем движке был миллиметровый масштаб m , на верхнем имелся нониус n

с делением на 50 частей. Перед нониусом была установлена передвижная лупа *lu*. Освещение производилось софитовой лампой *la* (фиг. 29), перемещавшейся за пластинкой из стекла молочного цвета *mg*. Эта пластинка затемнялась помощью передвижной ширмочки *bl* (фиг. 30) до наблюдаемой части мениска, так что этот последний отделялся на матовом стекле черным фоном. Помощью регулирующих винтов и уровня (фиг. 29) можно было строго вертикально устанавливать манометр.



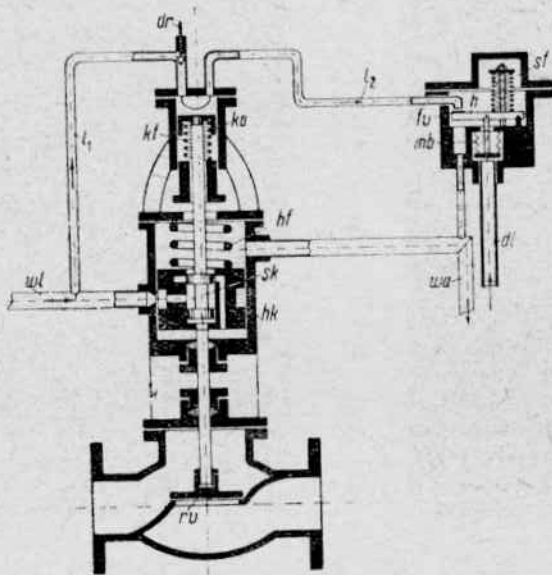
Фиг. 29 и 30. Общий вид и детали микроманометра.

h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 — краны;
 a_1, a_2, a_3, a_4 — ниппели;
 mi — микроскоп для отсчетов;
 la — софитовая лампа;
 sl — ползушка;
 m — масштаб;

sn — червячная передача;
 n — нониус;
 lu — лупа;
 ag — барашек для грубой установки;
 af — барашек для точной установки.

д) Регулятор Арка. Регулятор Арка (фиг. 31) — подарок фирмы Arca-Regler A.-G. — сохраняет постоянство требуемого давления воды в котле. Действует этот прибор следующим образом. В *wl* производится соединение с водопроводом. Ответвление l_1 идет через дроссель *dr*, регулирующий количество протекающей жидкости. Вода оказывает воздействие на поршень *ko* и течет далее через трубу l_2 до тарельчатого клапана *fv*, закрывающегося при высоком давлении в водяном котле и снова открывающегося при низком давлении. Пружина *sf* дает возможность установить определенное давление до начала опытов. Мембранная коробка *mb* передает давление с помощью рычага *h* тарельчатому клапану *fv*. Когда давление в водяном котле падает, тарельчатый клапан *fv* открывается. Тем самым освобождается сток l_2 , вода из водопровода более не производит давления, поршень *ko* выталкивается пружиной *kf* вверх, а вместе с тем поднимается и распределительный поршень *sk*. Благодаря этому открывается доступ для воды под подъем.

ный поршень *hk*. Давлением воды приподнимается поршень, а вместе с тем и регулирующий клапан *rv*, благодаря чему восстанавливается связь между котлом со сжатым воздухом *dk* и водяным котлом *wk*. По установлении в котле *wk* прежнего давления, это давление действует через передачу *dl* на мембрану, и тарельчатый клапан *fv* закрывается. Тем самым увеличивается давление на поршень *ko*, и последний опускается вниз. В этом случае доступ для воды *wl* под подъемный поршень *hk* снова закрывается и открывается канал *wa*. Пружина *hf* теперь



Фиг. 31. Регулятор «Арка».

wf — водопроводная труба;
l₁ — ответвление;
l₂ — сток;
dr — дроссель;
ko — поршень;
hf — поршневая пружина;
hf — подъемная пружина;
sk — регулирующий поршень;

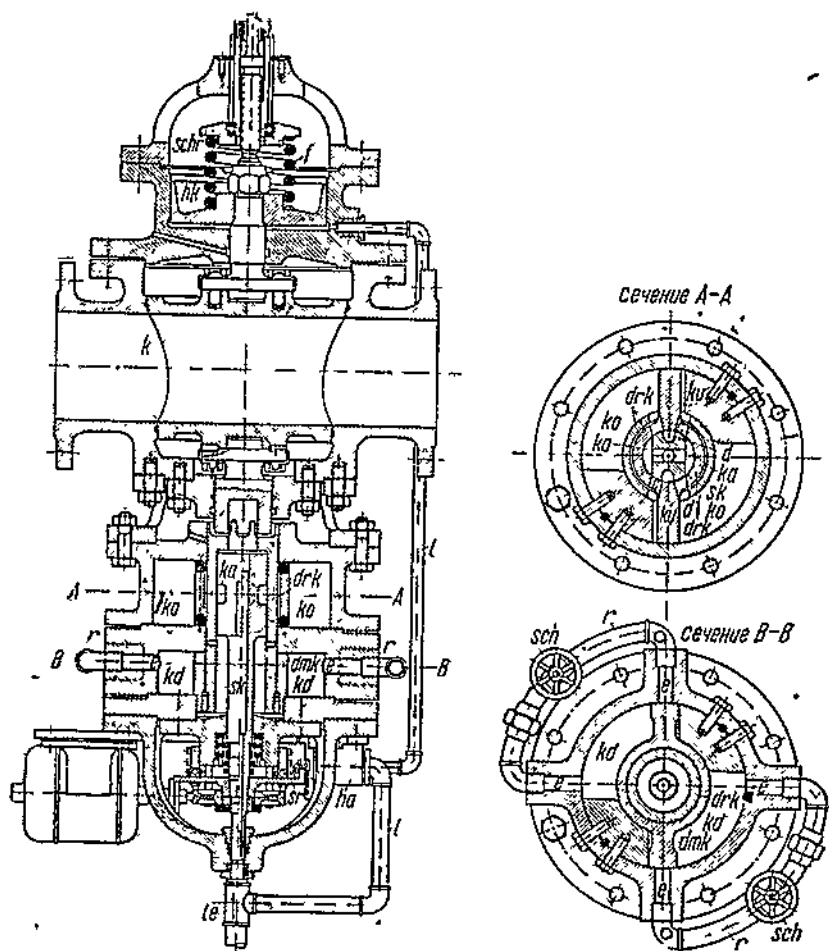
hk — подъемный поршень;
sf — комбинированная пружина;
h — рычаг;
fv — тарельчатый клапан;
mb — мембранная коробка;
dl — труба, передающая давление;
wa — водосток;
rv — регулирующий клапан.

снова оказывает давление на регулирующий клапан *rv*. Благодаря тому, что мембранная коробка *mb* находится не под давлением воздушного пространства котла, а под давлением самой воды, то во время вытекания воды ее давление в месте вытекания поддерживается постоянным и независимым от высоты водяного столба.

е) Быстродействующий кран. Быстродействующий кран (фиг. 32) приводится в действие сжатым воздухом при давлении около 3 ат и может быть открыт или закрыт в промежутки времени от 0,1 до 0,2 сек. Открывается и закрывается этот кран следующим образом.

Поворотом маховичка *sr* сначала открывается маленький кран *ha*, подводящий сжатый воздух через канал *l* под поршень *hk*. Поршень этот поднимается и вместе с собой поднимает и конус *k* до упора *schr*,

который можно отрегулировать по желанию. Этим путем освобождается опорная поверхность конуса k , и он приводится во вращение поворотным поршнем drk . Сжатый воздух поступает в распределительный



Фиг. 32. Быстродействующий кран.

sr — маховичок;
 ha — кран;
 k — конус;
 sch — упор;
 drk — вращающийся поршень;
 sk — регулирующий поршень;
 ka — камера регулирующего поршня;
 e — подвод масла.

c, d — шлицы;
 ku, ko — камера давления;
 l — труба для передачи давления;
 hk — подъемный поршень;
 f — пружина;
 dmk — демпфирующий поршень;
 kd — масляная камера;
 le — подвод сжатого воздуха;
 r — трубопровод;
 sch — штифт.

поршень sk через канал le и заполняет камеры ka (см. сечение А—А). После поворота электрическим путем или вручную маховичка sr , а вместе с тем и распределительного поршня sk , открываются шлицы u с n и d , сжатый воздух устремляется через прорез c в камеры ku и давит на

поворотный поршень drk , а вместе с тем и на конус k крана. Находящийся в камерах ko воздух выпускается через прорез d наружу. При повороте конуса k и поршня drk на 90° маленький кран ha закрывается, выпуская одновременно воздух из-под поршня hk . Пружина f прижимает его вместе с конусом обратно книзу. Закрывается кран вращением направляющего колеса sr в противоположном направлении, причем весь процесс идет в обратной последовательности.

Для того чтобы конус k не пришел в колебательное движение, прибор снабжен масляным демпфером (сечение $B-B$). Поршень dmk неподвижно соединен с поворотным поршнем drk . Камеры kd наполнены маслом, а подводящая труба e соединена с маслопроводом r и шибером sch . При повороте демпфирующего поршня масло, поступающее через трубопровод, производит давление на его заднюю сторону; установкой шибера sch можно более или менее затормозить приток масла. С момента закрытия демпфирующим поршнем dmk отверстия трубопровода e совершенно прекращается всякое просачивание масла. Помощью этой масляной подушки предотвращается образование резких ударов.

3. Производство опытов.

а) Определение расхода. До числа Рейнольдса $R = 300 \cdot 10^3$ измерения расхода производились в измерительном баке. Так как не имелось гарантий в точной цилиндричности измерительного бака, то его пришлось предварительно протарировать. Отвешенная порция воды вливалась в бак и измерялась высота уровня. Тарировка обнаружила всюду одинаковый диаметр. Площадь поперечного сечения большого бака равнялась $F = 7850 \text{ см}^2$, а малого $F = 248 \text{ см}^2$. Перед каждым измерением отсчитывался низший уровень, а после впуска воды — наивысший. Отсчет производился при совершенно спокойном уровне с применением зеркала для избежания параллакса. Такой способ отсчета обеспечивал точность от 0,1 до 0,2 мм. Через подвижной спускной рукав можно было подводить воду к измерительному баку в течение 0,1 — 0,2 сек. Продолжительность заполнения бака регистрировалась помощью ручного секундомера. Секундомер имел деления в $\frac{1}{10}$ сек., причем ход его был предварительно выверен. Подвижной сток мог затем быть повернут обратно с той же скоростью. Продолжительность заполнения бака составляла от 100 до 600 сек. Допустим, что при продолжительности измерения в 100 сек. делалась во времени ошибка до 0,2 сек., а высота уровня измерялась с точностью до 0,2 мм; в самом неблагоприятном случае ошибка в измерении расхода составляла 0,3%. Эта ошибка снижается до 0,05% при продолжительности измерения в 600 сек. Наибольшая ошибка измерения для средней скорости u составляет 0,13%. Окончательное искомое количество устанавливалось как среднее из нескольких наблюдений (от 4 до 6), а иногда эти измерения проводились независимо двумя наблюдателями.

б) Измерение температуры. Температура, как правило, измерялась термометром у выхода воды из испытательной трубы. Чтобы быть уверенным, что вода в самой трубе имела ту же температуру, как и у выхода, подвергалась также измерению температура воды, вытекающей через кран

η_k (фиг. 27). Всегда констатировалось совпадение показаний. Термометр был выверен и имел деления в одну десятую градуса. Таким образом точность измерения можно оценить примерно в $1/20 - 1/30^\circ$, чем обуславливалась ошибка в определении кинематической вязкости от 0,05 до 0,08%. При более высоких температурах ошибка в определении кинематической вязкости была еще меньше. Измерения проводились при температурах от 9 до 38°C. При обычной температуре воды оказалось легко добиться неизменности этой температуры; при более высокой температуре это обстоятельство представляло, однако, известные трудности. Более высокие температуры достигались, как уже упоминалось, тем, что из котла в запасный канал vk текла вода (от 500 до 800 $см^3/сек$) с температурой от 80 до 90°C. Предварительными опытами было установлено потребное количество и температура этой воды, для того чтобы в течение всего опыта поддерживать совершенно определенную температуру. В зависимости от расхода избыток охлажденной воды сливался в самом глубоком месте запасного канала vk через сток af .

с) Определение радиуса трубы. Относя градиент давления $\frac{dp}{dx}$ к скоростному напору, вызываемому средней скоростью, т. е. $\bar{q} = \frac{\bar{u}^2}{2}$, получаем безразмерное число λ , именуемое коэффициентом сопротивления:

$$\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{2r}{q} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{4\pi^2}{p Q^2} r^5,$$

где p есть плотность воды, Q — количество протекающей жидкости в единицу времени, r — радиус трубы.

Из этой формулы следует, что коэффициент сопротивления, который должен быть получен из наших опытов, пропорционален пятой степени радиуса трубы. Поэтому требовалось возможно точное определение последнего. Радиус трубы был определен по измерению веса воды, полностью заполнявшей испытательную трубу, и длины трубы. Определение веса производилось с точностью до $\pm 0,01\%$. Длину можно было измерить с точностью до 0,2 мм, что соответствует ошибке в $\pm 0,007\%$. Если учесть ошибки взвешивания и измерения длины трубы, то в самом неблагоприятном случае ошибка в определении радиуса r была равна 0,01%. Этой ошибкой при определении коэффициента сопротивления λ можно пренебречь.

д) Измерение статического давления. Измерение статического давления производилось при допущении, что статическое давление одинаково во всем поперечном сечении, в котором производятся измерения. Если стенка параллельна потоку, то статическое давление может быть измерено довольно точно с помощью аккуратно сделанных отверстий в стенке. Поэтому измерения падения давления производились следующим образом. В каждом поперечном сечении, в котором велись измерения, делалось четыре отверстия, соединенные между собою кольцеобразной камерой ak (фиг. 33). При помощи ниппеля ti и резиновой трубки устанавливалась связь с манометром. Свободная трубка манометра соединялась аналогичным образом с ближайшим поперечным сечением. Таким путем находилось падение давления на отрезке l . Было

обнаружено, что неизбежно сделанные отверстия увеличивают или уменьшают действительное значение давления. Выступы производят всасывание, а углубления — подпор. Для получения истинного падения давления была определена наилучшая форма отверстия. Этой формой оказалось отверстие с острыми краями. Для установления влияния величины отверстий сначала делались отверстия в 0,5 мм диаметром и постепенно увеличивались до 1,2 мм. Было найдено, что в рассмотренных границах во всяком случае величина отверстий не оказывает влияния на показания давления. Для получения отверстий с острыми краями в трубу в то место, где производилось сверление, вдвигался точно подходящий по отверстию трубы латунный сердечник. Этим предупреждалось образование значительных заусениц и неровностей. Последующей полировкой тонкой наждачной бумагой, одетой на деревянную болванку, удалялись мелкие заусеницы.

Для пробы было просверлено отверстие и исследовано под микроскопом с увеличением в 50 раз. Не было замечено ни одной заусеницы. До установки кольцевых камер для каждого отверстия в отдельности исследовалась его пригодность. Каждая пара отверстий соединялась с микроманометром. Для получения наибольшей возможной ошибки испытание производилось при максимальных количествах протекавшей жидкости. Если обнаруживалась ошибка, то труба подвергалась вторичной полировке.

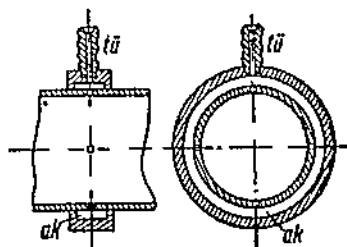
Далее, измерялись разности давлений на двух отрезках l_1 и l_2 . Данные о падении давления только тогда признавались правильными, если при одинаковой длине обоих отрезков получались одинаковые разности давлений. Для устранения ошибки труба переворачивалась в обратном направлении по потоку. В таком случае при том же числе Рейнольдса следовало получить ту же разность давлений.

Для достижения большей точности в вычислении требуемого падения давления брались, как это видно из таблицы 1, большие отрезки; длина отрезков определялась с точностью до 0,2 мм. До 50 см водяного или ртутного столба разность давлений измерялась описанным выше микроманометром. Более значительные разности давлений измерялись обыкновенным ртутным манометром с высотой в 250 см.

е) Измерение скорости. Измерения скорости производились таким образом, что скоростной напор в трубке Пито соединялся со статическим давлением в отверстии, находившемся в испытуемом поперечном сечении и удаленном на 2 мм от края струи; таким образом манометр непосредственно показывал динамическое давление. Скорость вычислялась по формуле:

$$u = 44,3 \sqrt{h} \text{ см/сек}, \quad (1)$$

где h есть измеренная в сантиметрах водяного столба высота динамического давления, а u — скорость, измеренная в сантиметрах в 1 сек.



Фиг. 33. Сечение для замера статического давления, ak — воздушная камера; $tū$ — ниппель.

Эта формула получается следующим образом. Интегрируя уравнения движения Эйлера для идеальной тяжелой жидкости вдоль линии тока, получаем уравнение Бернулли в виде:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gH = \text{const}, \quad (2)$$

где H есть высота рассматриваемой точки над произвольно выбранной горизонтальной плоскостью. Умножая уравнение Бернулли на плотность ρ , получаем уравнение давления:

$$p + \rho \frac{u^2}{2} + \gamma H = p_0. \quad (3)$$

Отбрасывая внешние силы (тяжесть), получим уравнение:

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = p_0, \quad (4)$$

так как H имеет одно и то же значение в обоих отверстиях трубки Пито. В уравнении (4) p_0 есть значение наибольшего давления в отверстии трубки Пито. Оно соответствует нулевой скорости и именуется полным давлением; p есть статическое давление. Полагая $p_0 - p = h\gamma$ (γ есть вес единицы объема, а h — высота столба в манометре), получаем из уравнения (4):

$$\rho \frac{u^2}{2} = h\gamma, \quad (5)$$

откуда

$$u = \sqrt{2gh} = 44,3 \sqrt{h} \text{ см/сек},$$

так как

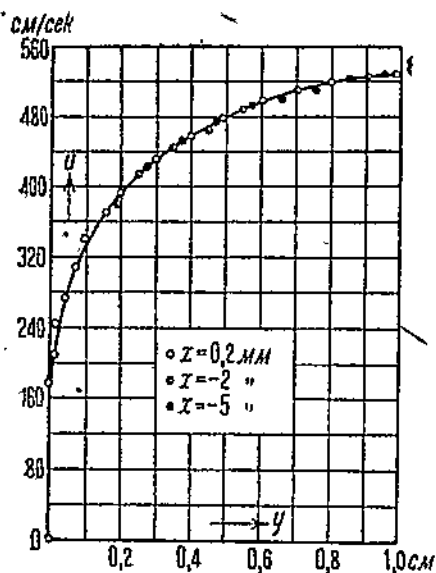
$$\rho = \frac{\gamma}{g}.$$

Распределение скоростей измерялось трубкой Пито на расстоянии 0,1—0,2 мм за выходным поперечным сечением испытательной трубы. Допустимость измерений на этом расстоянии за выходным сечением обосновывается сравнением с измерениями распределения скоростей на расстоянии 2 и 5 мм перед выходным сечением (фиг. 34). Многочисленные измерения скоростей при различных числах Рейнольдса на оси трубы при выходе и одновременно на расстоянии 20 d перед выходом давали одинаковые результаты. Измерения производились за выходным сечением не для того чтобы избежать возмущения поля давлений в трубе, а главным образом потому, что только таким путем можно измерить скорости непосредственно до самых стенок трубы.

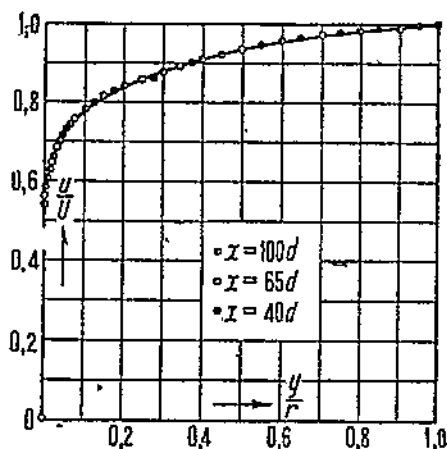
Знание статического давления в поперечном сечении было очень важно для измерения распределения скоростей, которое производилось особым зондом в месте расположения трубки Пито. Для исключения насколько возможно влияния державки трубки Пито на статическое давление державка закрывалась в обтекатель с симметричным профилем, причем так, что зонд приходился на ось симметрии профиля. Боковые отверстия зонда лежали в измеряемом поперечном сечении. Зонд был связан с микроманометром и с отверстием в стенке в измеряемом поперечном сечении. Так как манометр не обнаруживал разницы в давлении,

то можно было сделать заключение, что статическое давление было тем же самым и вне струи. На этом основании при измерениях скорости оказалось возможным измерять статическое давление помощью отверстий, сделанных по флянцу трубы. Далее, на основании измерений скорости в трубе диаметром в 5 см и 500 см первоначальной длины подыскивалось такое значение $\frac{x}{d}$ (x есть длина трубы, d — диаметр трубы), при котором имела бы место независимость распределения скоростей от длины трубы. Для этого бралось распределение скоростей при числе Рейнольдса $R = 900 \cdot 10^3$

и при $\frac{x}{d} = 100; 65$ и 40 , что достигалось обрезом трубы на этих



Фиг. 34. Распределение скоростей при $x = 0,2$ мм, $x = -2$ мм и $x = -5$ мм.



Фиг. 35. Распределение скоростей при $x = 100d$, $x = 65d$ и $x = 40d$.

длинах. При всех этих значениях распределение скоростей оказалось независимым от длины трубы. Так как кратчайшая длина начального участка движения в главных опытах была равна $\frac{x}{d} = 50$, то оказалось возможным не производить дальнейших исследований. Этот результат в безразмерной форме изображен на фиг. 35.

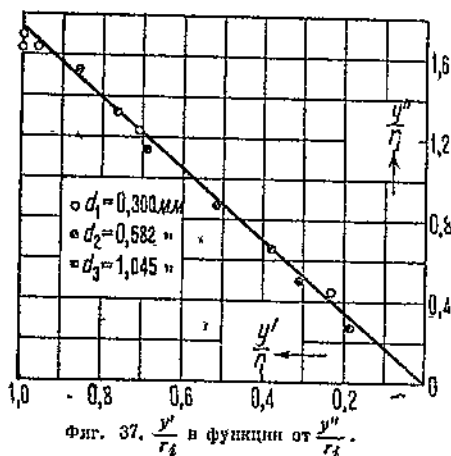
Для измерений распределения скоростей применялись трубки Пито в 0,21 мм и 0,30 мм внутреннего диаметра и 30 мм длины, имевшие из технических соображений коническую форму. На фиг. 27 показана установка трубки Пито у края испытательной трубы. В таком положении показания трубки Пито не соответствуют динамическому давлению этого места. Это объясняется тем, что только часть отверстия трубки Пито лежит в водяной струе, а другая лежит вне ее, так что часть протекающей воды вытекает затем сбоку. Но ввиду того, что точное знание динамического давления вблизи стенки имеет большое значение, был применен особый прием, давший возможность надежного измерения скорости в этой области. Для этого распределение скоростей измерялось

тремя трубками Пито различного внутреннего диаметра, именно 0,3; 0,582 и 1,045 мм при одном и том же числе Рейнольдса. На основе этих измерений производилась экстраполяция и определялось распределение скоростей, которое соответствует измерению трубкой Пито с диаметром, равным нулю.

На фиг. 36 по оси абсцисс отложено расстояние от стенки, по оси ординат — скорость. Если провести прямую через точки одинаковой скорости (параллельно оси абсцисс) и отложить перпендикулярные отрезки в отдельных точках, равные внутреннему диаметру трубок Пито, то концы этих отрезков можно соединить кривой, экстраполяция которой до точки пересечения с первой прямой дает нам искомую точку. Эта точка принадлежит новой кривой, соответствующей распределению скоростей, которое получилось бы при измерении трубкой Пито с нулевым внутренним диаметром.

Фиг. 36. Приведение отверстия трубки Пито к нулю.

Если отверстие трубки Пито целиком лежит в струе потока, то, как видно из фиг. 36, поправка оказывается излишней.



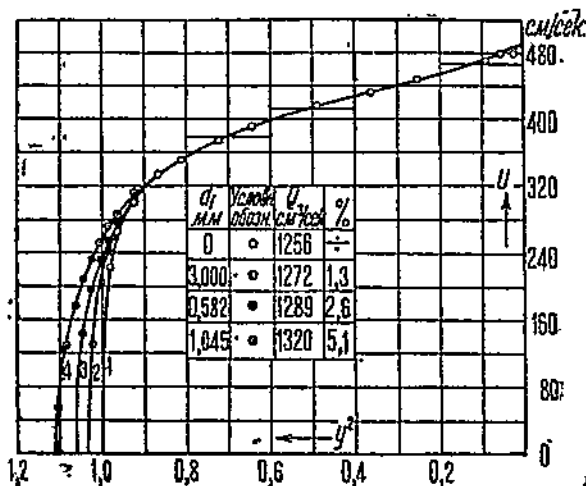
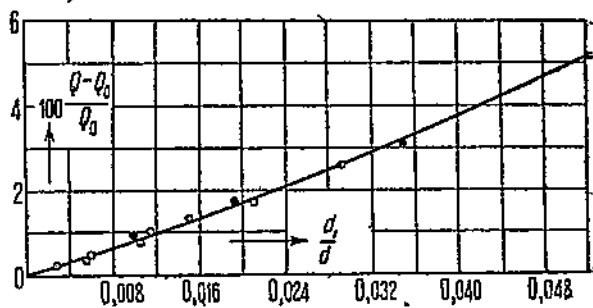
Фиг. 37. $\frac{u'}{u''}$ в функции от $\frac{y'}{r_i}$.

При таком положении измеренная кривая скоростей в точках A_i ($i=1, 2, 3$) совпадает с теоретической. Расстояние точки A_i от стенки при этом равно внутреннему радиусу r_i ($i=1, 2, 3$) отверстия данной трубки Пито. Для вычисления поправки для трубки Пито с произвольным отверстием нужно провести через соответствующую точку A_i перпендикуляр к оси абсцисс (на фигуре отмечен пунктиром) и определить расстояния y' и y'' этой прямой от точек теоретической и измеренной кривой, соответствующих одинаковой скорости.

Таким путем получены для различных чисел Рейнольдса пары чисел, изображенные в безразмерной форме на фиг. 37. Если измерено распределение скоростей и если мы

хотим привести его вблизи стенки к тому распределению, которое получилось бы при трубке Пито с отверстием, равным нулю, то с помощью указанной диаграммы мы смещаем скорости, лежащие на расстоянии y'' , на соответствующее расстояние y' .

Для вычисления процента ошибки при определении количества протекающей жидкости, получаемого путем интегрирования неисправленных кривых распределений скоростей, на фиг. 38 отложены в функции квадрата расстояния от оси трубы измеренные скорости, полученные трубками Пито с различными отверстиями, и даны результаты графического интегрирования количества протекающей жидкости. Исправленное распределение скоростей представлено на этой фигуре кривой 1. Кривые 2, 3 и 4 соответствуют распределениям скоростей, полученных трубками Пито с отверстиями $d = 0,3$ мм, 0,582 мм и 1,054 мм. Сопоставление числовых данных фиг. 38 показывает, что количество протекающей жидкости при исправленном распределении скоростей составляет $Q_0 = 1256$ см³/сек. Кроме того, можно заметить, что с увеличением отверстия трубки Пито графически вычисленное количество протекающей жидкости возрастает по сравнению с измеренным расходом, которое совпадает с графически вычисленным из исправленной кривой. Распределения скоростей, изображенные на фиг. 38, получены в трубе с диаметром $d = 2$ см. Аналогичные опыты были произведены в трубах с диаметрами $d = 3$ см, $d = 5$ см и $d = 10$ см; результаты изображены на фиг. 39. Здесь абсциссой является безразмерный относительный диаметр трубки Пито $\frac{d_1}{d}$, получаемый делением диаметра отверстия трубки Пито на диаметр трубы, а ординатой — процент ошибки в определении количества протекающей

Фиг. 38. $U = f(y^2)$.Фиг. 39. $100 \left(\frac{Q - Q_0}{Q} \right) = f \left(\frac{d_1}{d} \right)$.

жидкости, т. е. $100 \left(\frac{Q - Q_0}{Q_0} \right)$. Эта диаграмма позволяет установить ошибку для определенного значения $\frac{d_1}{d}$.

4. Ведение опытов.

Ведение опытов было очень просто, так как все время обеспечивалось постоянство расхода. Для измерений распределения скоростей дроссельный конус dk (фиг. 28) скоростного прибора устанавливался в определенном положении, соответствовавшем необходимому расходу. Предварительными опытами находилась зависимость между расходом и установкой дросселя. Затем в водяной котел впускалось столько воды, что через трубопровод ее стекало лишь очень немного. Проверив правильность показаний микроманометра I , служившего для измерений падения давления, и микроманометра II , употреблявшегося для измерения скоростей, устанавливалась по промерам скорости ось трубы, которая служила эталоном измерений при этих опытах. Затем начинались измерения, состоявшие в том, что одновременно с промерами скоростей измерялись падения давления, температура и количество протекавшей жидкости.

Опыты с круговой циркуляцией воды были труднее, так как колебания тока в электрической сети вызывали изменение в числе оборотов мотора и тем самым изменение количества протекавшей жидкости в испытательной трубе. Поэтому для сохранения постоянного перепада давления необходимо было точно регулировать закрытие конусного дросселя dk .

Выполнение измерений в опытах с гидравлическим ударом происходило таким образом, что сначала разобщались водяной котел wk (фиг. 24) и котел с сжатым воздухом dk , а затем через предохранительный клапан ksw водяного котла выпускался сжатый воздух, остававшийся в водяном котле от предыдущего опыта. Пока воздух в котле dk сжимался компрессором при всех испытаниях до 10 ат. давления, устанавливалась связь между центробежным насосом kp и водяным котлом wk , который затем заполнялся водой до известной высоты. Одновременно масляной бумагой затыкалось выходное отверстие испытательной трубы; эта бумага помещалась между флянцами испытательной трубы и другим, подходящим к поперечному сечению трубы, кольцеобразным флянцем. С помощью отвода быстродействующего крана sh подводящая труба zr и испытательная труба vr наполнялись водой. Находившийся в подводящей трубе воздух выпускался через открытый выпускной клапан. Наконец, восстанавливалась связь между водяным котлом wk и котлом со сжатым воздухом dk через регулятор „Арка“, установленный предварительно на определенное давление. На этом приготовления заканчивались и можно было приступить к самим опытам. По сигналу наблюдателя у манометра открывался быстродействующий кран sh и промасленная бумага прорывалась напором воды. После того как течение воды устанавливалось, наблюдатель фиксировал границу отклонений манометра с помощью движка, легко передвиг-

гавшегося по трубке манометра (фиг. 26). Быстродействующий кран оставался открытым, пока поверхность воды в водяном котле не понижалась примерно до 40—50 см над выходным поперечным сечением. Тогда прочитывались показания манометра. Затем уже можно было приступить к подготовке следующего опыта.

II. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ.

1. Распределение скоростей.

Распределения скоростей измерялись в трубах диаметром $d = 1, 2, 3, 5$ и 10 см, начиная от малых чисел Рейнольдса $R = 4 \cdot 10^3$ до наивысшего исследованного нами значения $R = 3240 \cdot 10^3$. Дальнейшее рассмотрение результатов обработки данных по распределению скоростей покажет, что знание распределения скоростей важно не только вблизи стенок, где имеет место резкое падение скорости, но также и вблизи середины трубы, где скорость изменяется слабо. Поэтому точки измерения скорости располагались особенно часто вблизи стенок и вблизи середины трубы (распределение скоростей по радиусу трубы определялось по измерению скоростей обычно в 18 точках). Распределение скоростей было симметрично, и для определенного расстояния в ту и другую сторону от оси трубы не обнаруживало никакого различия или же весьма малое. Было измерено примерно 150 кривых распределения скоростей, но из них для окончательной обработки было использовано всего 16. Вследствие полной симметрии кривой распределения скоростей для обработки использовалась всегда только половина кривой. Числовые значения этих 16 распределений скоростей по радиусу трубы приведены в таблице 2 (см. стр. 98 и 99). Для получения распределения скоростей при возможно малых значениях числа Рейнольдса входное отверстие трубы в 10 мм диаметром было закрыто пластинкой с отверстием в 6 мм диаметром, концентричной с входным отверстием. Пластинка производила у входа сильное вихреобразование, так что при числе Рейнольдса $R = 4 \cdot 10^3$ получался вполне турбулентный поток. При таком приспособлении измерения производились только при трех наименьших числах Рейнольдса. Чтобы проследить изменение картины распределения скоростей в зависимости от числа Рейнольдса, это распределение строилось в безразмерных единицах, причем каждое значение скорости относилось к максимальной скорости для соответствующего распределения, а расстояния от стенки относились к радиусу трубы. Таким образом можно было положить:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{r}\right). \quad (6)$$

Эта зависимость представлена на фиг. 40 для шести профилей и для чисел Рейнольдса от $R = 4 \cdot 10^3$ до $3240 \cdot 10^3$. Этот график очень наглядно показывает, что с возрастанием числа Рейнольдса форма распределения скоростей становится все выпуклее. Этот факт ведет к допущению, что при бесконечно больших числах Рейнольдса становится исчезающе малым слой, образованный трением о стенки. На

Таблица 2.

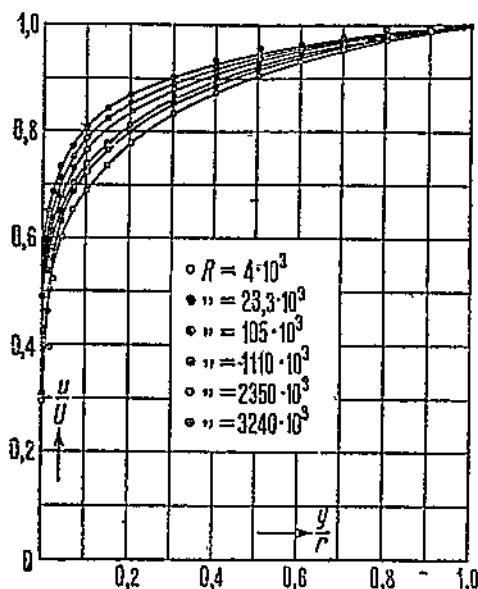
$\frac{dp}{dx} \frac{\text{дин/см}^2}{\text{см}}$	0,0595	0,1210	0,245	0,723	1,255	—	0,355	—	0,495	—	0,247
$\bar{\mu}$ см/сек	54,5	81,8	123,5	225,5	315	—	259,2	—	400	—	394
γ см ³ /сек	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	—	0,0119	—	0,0114	—	0,0096
$10^{-3}R$	4,0	6,1	9,2	16,7	23,3	—	43,4	—	105	—	205
u см	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек	и см/сек
0,000	20,2	35,0	47,0	112,0	117,0	0,00	102,0	0,00	204,0	0,00	178,0
0,005	28,0	46,0	72,0	140,0	174,0	0,01	155,0	0,015	259,0	0,025	258,0
0,010	35,0	53,0	81,5	163,0	214,0	0,02	183,0	0,030	380,0	0,050	294,0
0,020	39,8	60,2	92,0	179,0	242,0	0,04	203,0	0,060	413,0	0,100	312,0
0,035	44,4	67,2	102,0	193,0	263,0	0,07	220,0	0,105	439,0	0,175	335,0
0,050	47,0	71,2	108,0	202,5	277,0	0,10	230,0	0,150	455,0	0,250	352,0
0,075	50,2	76,1	116,0	214,5	294,0	0,15	242,5	0,225	475,0	0,375	371,0
0,10	52,7	79,7	121,0	223,0	306,0	0,20	252,0	0,30	490,0	0,500	387,0
0,15	56,5	85,2	128,5	235,5	326,0	0,30	267,0	0,45	515,0	0,750	407,0
0,20	59,5	89,2	134,5	247,0	341,0	0,40	278,5	0,60	533,0	1,00	422,0
0,25	61,7	92,5	139,0	255,0	353,0	0,50	287,0	0,75	546,0	1,25	434,0
0,30	63,5	95,0	142,5	261,5	362,0	0,60	294,5	0,90	559,0	1,50	444,0
0,35	65,0	97,3	146,0	267,0	370,0	0,70	300,0	1,05	566,0	1,75	453,0
0,40	66,4	99,2	148,5	271,6	376,0	0,80	304,5	1,20	573,0	2,00	459,0
0,45	67,4	100,7	151,0	275,5	381,0	0,90	308,7	1,35	579,0	2,25	464,5
0,48	67,9	101,4	152,0	277,3	382,7	0,96	309,6	1,44	581,0	2,40	467,0
0,49	68,0	101,7	152,3	277,5	383,1	0,98	310,0	1,47	581,5	2,45	467,5
0,50	68,1	101,8	152,5	278,0	383,5	1,00	310,5	1,50	582,0	2,50	468,0

$\frac{dp}{dx} \frac{cm}{cm^2 \cdot sec}$	0,755	—	0,46	0,91	1,50	2,45	1,90	2,262	2,82
$\eta \frac{cm^2}{sec}$	702	—	875	1245	1690	2150	1928	2145	2430
$\nu \frac{cm^2}{sec}$	0,00025	—	0,0121	0,01125	0,011	0,011	0,0082	0,0077	0,0075
$10^{-3} R$	306	—	725	1110	1536	1959	2350	2750	3240
$u \frac{cm}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$y \frac{cm}{cm}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$	$\eta \frac{cm^2}{sec}$
0,00	360	0,000	505	705	950	1310	1310	1423	1510
0,025	490	0,05	617	847	1160	1598	1426	1578	1794
0,05	546	0,10	654	918	1260	1685	1496	1665	1890
0,10	597	0,20	717	1025	1390	1805	1604	1758	2026
0,175	633	0,35	765	1084	1480	1896	1700	1890	2142
0,250	660	0,50	794	1133	1549	1966	1772	1967	2230
0,375	690	0,75	833	1190	1613	2050	1845	2060	2326
0,500	714	1,00	859	1229	1663	2110	1900	2122	2396
0,75	761	1,5	899	1284	1744	2204	1980	2212	2492
1,00	778	2,0	922	1325	1799	2270	2040	2272	2566
1,25	799	2,5	954	1359	1840	2325	2088	2322	2622
1,50	816	3,0	973	1386	1876	2370	2128	2362	2670
1,75	831	3,5	988	1407	1902	2410	2156	2392	2705
2,00	842	4,00	1000	1424	1925	2437	2181	2418	2736
2,25	851	4,5	1010	1435	1940	2456	2198	2436	2755
2,50	854	4,8	1014	1441	1946	2463	2202	2445	2762
2,45	855	4,9	1015	1442	1948	2465	2203	2448	2764
2,50	856	5,0	1015,5	1443	1944	2466	2204	2449	2765

Обозначения:
 u — скорость;
 y — расстояние от стенки;
 R — число Рейнольдса;
 η — средняя скорость;
 d — диаметр трубы;
 ν — кинематическая вязкость.

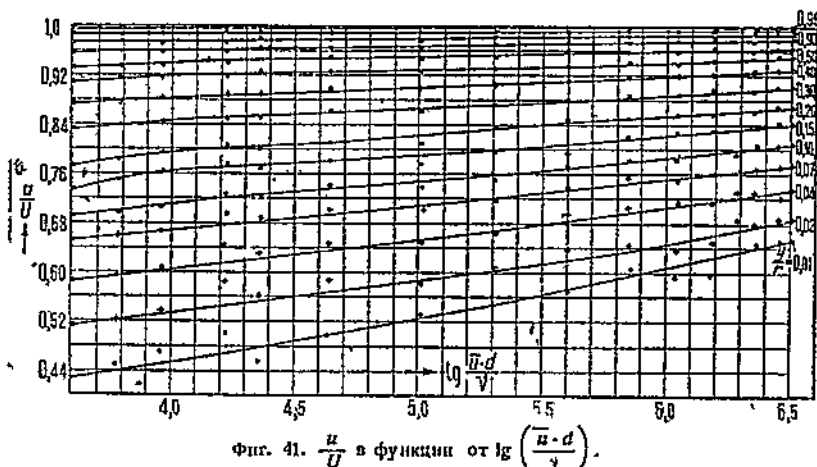
фиг. 41 распределение скоростей изображено так, что ординатой является $\frac{u}{U}$, абсциссой $\lg\left(\frac{u \cdot d}{\nu}\right)$, а параметром — безразмерное расстояние

от стенки $\frac{y}{r}$. Скорости $\frac{u}{U}$, соответствующие определенному расстоянию от стенки $\frac{y}{r}$, соединены между собою кривой, у которой написано соответствующее значение $\frac{y}{r}$. Эта диаграмма показывает, что для скоростей, лежащих вблизи стенок, имеют место заметные отклонения. Для получения безразмерного значения скорости внутри измеряемой области надо над соответствующим числом Рейнольдса на кривых прочесть значение $\frac{u}{U}$ в зависимости от $\frac{y}{r}$. Для проверки, насколько согласуются наши распределения скоростей с распределениями, полученными другими исследователями, приведем следующее сравнение.



Фиг. 40. $\frac{u}{U}$ в функции от $\frac{y}{r}$.

Самыми надежными из произведенных до сих пор измерений распределения скоростей в круглой трубе являются измерения Стантона,



Фиг. 41. $\frac{u}{U}$ в функции от $\lg\left(\frac{u \cdot d}{\nu}\right)$.

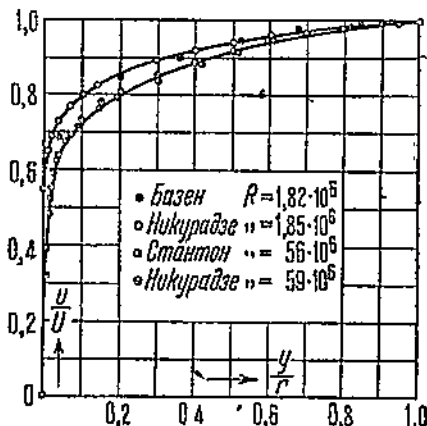
так как, во-первых, он производил измерения очень точной трубкой Пито в 0,33 мм диаметром, а во-вторых, он имел достаточно большой

начальный участок движения $x = 7,2d$ (x есть длина трубы, d — диаметр трубы, равный 7,4 см), так что измерения относились к области, в которой распределение скоростей уже более не изменится. Сравнение наших результатов с результатами Стантона было тем более необходимо, что Стантон измерял распределение скоростей в испытательной трубе близко перед выходом (от 2 до 3 d), тогда как сечение, в котором производились наши измерения, лежало на расстоянии от 0,1 до 0,2 м за выходом. Для указанного сравнения измерения, соответствовавшие приблизительно тем же числам Рейнольдса, изображались в виде кривой отношения местной скорости u к максимальной скорости U в зависимости от безразмерного расстояния от стенки

$\frac{y}{r}$ (y есть расстояние от стенки, r — радиус трубы). Измерения Стантона производились при числах Рейнольдса $R = 37,6 \cdot 10^3$, $56 \cdot 10^3$ и $89,3 \cdot 10^3$. Наши измерения, производившиеся примерно при тех же числах Рейнольдса, дают хорошее совпадение с распределением скоростей Стантона. На фиг. 42 сравнивается распределение скоростей Стантона ($R = 56 \cdot 10^3$) с нашим ($R = 59 \cdot 10^3$). Надо добавить еще, что у Стантона отсутствуют данные о средней скорости $\bar{u}$ и кинематической вязкости ν . Мы определили

поэтому среднюю скорость $\bar{u} = 1235$ см/сек из количества протекающей жидкости, вычисленного интегрированием кривой распределения скоростей. Так как измерения Стантона производились над воздухом, у которого кинематическая вязкость очень мало меняется с температурой, то мы приняли для кинематической вязкости значение, соответствующее средней лабораторной температуре в 18°C.

Для очень больших чисел Рейнольдса нам казалось целесообразным использовать для сравнения распределения скоростей, полученные Базеном¹⁾. Начальный участок у Базена равнялся примерно $x = 75d$ ($d = 80$ см). У него также нет данных о температуре и средней скорости. Поэтому средняя скорость $\bar{u} = 164,9$ см/сек была определена нами путем интегрирования распределения скоростей. Базен производил измерения над водой, причем температура колебалась от 10 до 20°C. Хотя в этой температурной области кинематическая вязкость очень сильно зависит от температуры, но, с другой стороны, при столь больших числах Рейнольдса, как в данном случае, изменение в распре-



Фиг. 42. Сравнение распределения скоростей по Стантону, Базену и Никурадзе.

¹⁾ M. Bazin, Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux, Mém. prés. par div. savants, т. XXXII, № 16, 1902.

делении скоростей при изменении числа Рейнольдса получается незначительным. На основании этих соображений мы приняли для кинематической вязкости значение, соответствующее 15°C ($\nu = 0,0113 \text{ см}^2/\text{сек}$).

На фиг. 42 приведено сравнение результатов Базена с нашими. Не считая последних точек измерений Базена, лежащих вблизи стенки, можно констатировать хорошее совпадение распределений скоростей для приблизительно равных чисел Рейнольдса.

2. Степенной закон.

Прандтль ¹⁾ вывел из закона сопротивления Блазиуса заключение, что скорость u турбулентного потока вблизи стенки меняется пропорционально расстоянию от стенки, взятому в степени $\frac{1}{7}$, т. е.

$$u = ay^{\frac{1}{7}}, \quad (7)$$

где a есть число, постоянное для одного и того же профиля скоростей. Показать это можно следующим образом. Имеем:

$$\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2d}{\rho u^2}. \quad (8)$$

Заменяем падение давления $\frac{dp}{dx}$ касательным напряжением у стенки τ_0 . По условию равновесия для жидкого цилиндра радиуса r и длины dx имеем:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau_0}{r}, \quad (8a)$$

где τ_0 есть касательное напряжение у стенки. Поэтому формула для коэффициента сопротивления будет:

$$\lambda = \frac{2\tau_0}{r} \frac{2d}{\rho u^2}, \quad (9)$$

откуда следует:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\lambda u^2}{8}.$$

Вводя для коэффициента сопротивления λ выражение Блазиуса:

$$\lambda_B = 0,316 R^{-\frac{1}{4}},$$

получим:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \text{число} \cdot u^2 \left(\frac{u2r}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}}, \quad (10)$$

¹⁾ L. Prandtl, Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, вып. III, стр. 1, 1927; Th. v. Kármán, Über laminare u. turbulente Reibung, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. I, стр. 233, 1921.

или

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \text{число} \cdot \bar{u}^{\frac{7}{4}} r^{-\frac{1}{4}} \nu^{\frac{1}{4}}. \quad (10a)$$

Решение этого уравнения относительно $\bar{u}$ дает:

$$\bar{u} = \text{число} \cdot \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}. \quad (11)$$

Согласно гипотезе, сделанной Прандтлем, не существует непосредственной зависимости между сопротивлением трения у стенок и радиусом трубы, а также и скоростью в центре трубы. Сопротивление трения зависит только от скоростей у самой стенки.

Если считать отношение $\frac{u}{U}$ средней скорости к максимальной неизменным, то можно из равенства (11) заключить, что и для U имеет место соотношение:

$$U = \text{число} \cdot \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{r}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}. \quad (12)$$

Если мы заменим r через y и, обозначив через u скорость, соответствующую y , вставим u вместо U , то получим:

$$u = \text{число} \cdot \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}. \quad (13)$$

Измерения распределения скоростей производятся при неизменных значениях $\frac{\tau_0}{\rho}$ и $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Поэтому из равенства (13) мы выводим:

$$u = \text{const.} \cdot y^{\frac{1}{7}},$$

или

$$u = a \cdot y^{\frac{1}{7}}. \quad (14)$$

Последующим вычислением легко показать, что распределение скоростей по формулам (13) и (11) удовлетворяет закону Блазиуса. Этот закон сопротивления

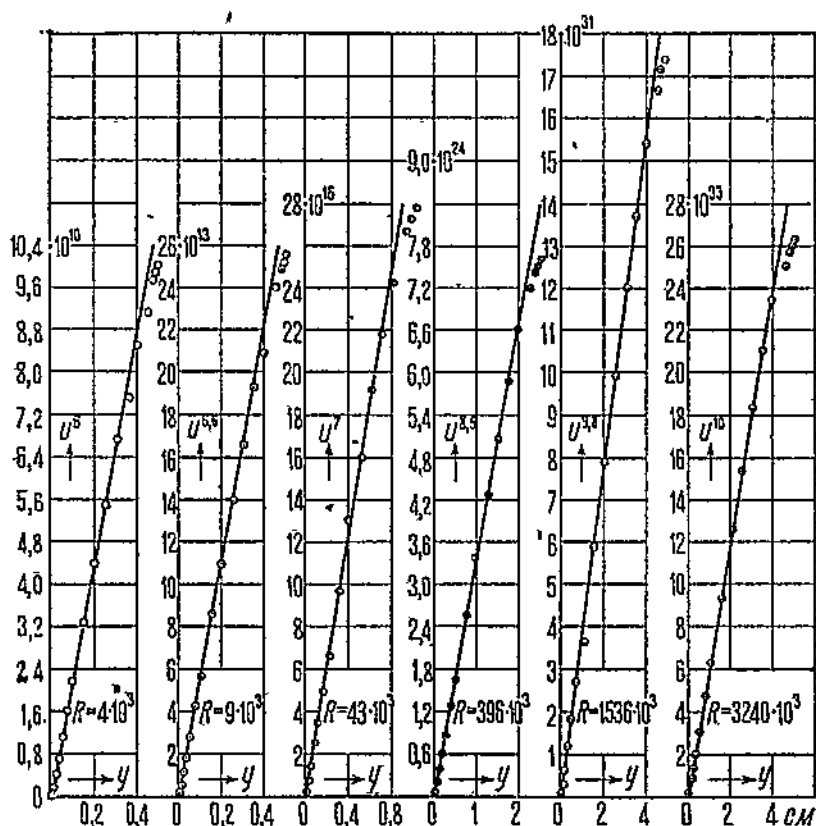
$$\lambda_B = \frac{0,316}{\sqrt[4]{R}},$$

при котором коэффициент сопротивления обратно пропорционален корню четвертой степени из числа Рейнольдса, остается справедливым для значений R до $100 \cdot 10^3$.

Так как при выводе закона корня седьмой степени в основу был положен закон Блазиуса, то нельзя ожидать, чтобы он оправдывался для больших чисел Рейнольдса, чем тех, для которых выведен закон Блазиуса.

В области применимости закона Блазиуса наклон прямой, изображающей λ в виде функции $\lg R$, равен $\frac{1}{4}$. Для больших чисел Рейнольдса этот наклон становится меньше и убывает в рассматриваемой нами

области почти до $\frac{1}{6}$. Если принять, например, λ пропорциональным $R^{-\frac{1}{5}}$, то вышеприведенный способ рассуждения дает $u = ay^{\frac{1}{5}}$. Это означает, что показатель n при возрастании числа Рейнольдса убывает, начиная с $\frac{1}{7}$ до $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ и т. д. При значении числа Рейнольдса $R = 3240 \cdot 10^3$ этот показатель равен примерно $n = \frac{1}{10}$.



Фиг. 43. Скорость в степени $\frac{1}{n}$ в зависимости от расстояния от стенки.

Изменение показателя степени при возрастании числа Рейнольдса становится при этом все слабее. Само собой понятно, что подобный степенной закон с переменным показателем степени следует рассматривать только как приближенную формулу. В дальнейшем будет видно, что и в пределах исследованной Блазиусом области закон корня седьмой степени есть лишь первое приближение. Написав степенной закон в форме

$$u = ay^n \quad (15)$$

и откладывая логарифм измеренной скорости в зависимости от логарифма расстояния от стенки, можно получить значения n из наклона кривой. На фиг. 43 изображена зависимость показателя скорости в функции расстояния от стенки для различных чисел Рейнольдса. Мы видим, что в области наименьших чисел Рейнольдса при $R = 4 \cdot 10^3$ показатель равен $\frac{1}{n} = 6$. Начиная примерно с $R = 10 \cdot 10^3$ и до $100 \cdot 10^3$ имеет место формула сопротивления Блазиуса $\frac{1}{n} = 7$, а при значении числа Рейнольдса $R = 3240 \cdot 10^3$ показатель достигает значения $\frac{1}{n} = 10$.

Если исходить из допущения, что между касательным напряжением у стенки τ_0 , расстоянием от стенки y и скоростью u имеется однозначное соотношение, то с помощью уравнения (9) можно получить формулу:

$$\frac{\tau_0}{\rho u^2} = f\left(\frac{u \cdot y}{\nu}\right). \quad (16)$$

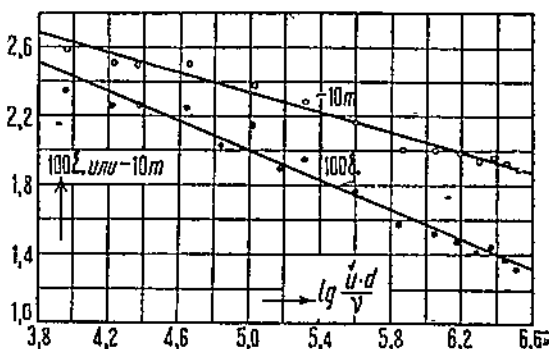
Величина $\frac{u y}{\nu}$ есть своего рода число Рейнольдса, относящееся к расстоянию y от стенки. Выражая распределение скоростей в форме степенного закона, Прандтль получил соотношение:

$$\frac{\tau_0}{\rho u^2} = \zeta \left(\frac{u \cdot y}{\nu}\right)^m, \quad (17)$$

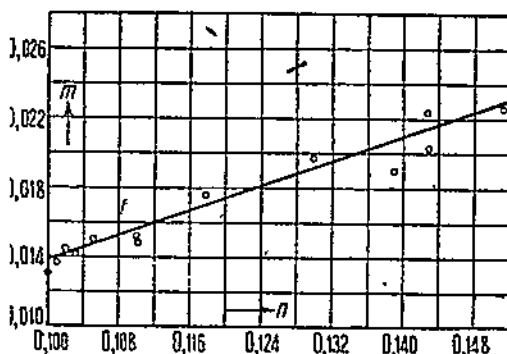
где ζ есть безразмерное число, которое можно вычислить из полученного распределения скоростей и соответствующего касательного напряжения у стенки. При этом $m = \frac{2n}{1+n}$. Логарифмируя уравнение (17), получим:

$$\lg\left(\frac{\tau_0}{\rho u^2}\right) = \lg \zeta + m \lg\left(\frac{u \cdot y}{\nu}\right). \quad (18)$$

Определяя из полученного распределения скоростей величину $\lg\left(\frac{\tau_0}{\rho u^2}\right)$, откладывая ее в функции $\lg\left(\frac{u \cdot y}{\nu}\right)$ и соединяя прямой полученные точки, находим безразмерную константу ζ , как ординату при абсциссе



Фиг. 44. $\frac{1}{n}$ и соответственно $10m$ в функции от $\lg\left(\frac{u \cdot y}{\nu}\right)$.



Фиг. 45. m в функции от n .

$\lg \left(\frac{u \cdot y}{\nu} \right) = 0$. Константа m , фигурирующая в качестве показателя степени безразмерного расстояния от стенки [уравнение (15)] и соответствующая показателю $\frac{1}{4}$ в законе сопротивления Блазиуса, может быть определена на основании наших опытов. Решая уравнение (18) относительно m , получаем:

$$m = \frac{\lg \left(\frac{\tau_0}{\rho u^2} \right) - \lg \zeta}{\lg \left(\frac{u \cdot y}{\nu} \right)}. \quad (19)$$

Найденные из опытов константы ζ и показатель степени m изображены на фиг. 44 в функции $\lg \left(\frac{u \cdot y}{\nu} \right)$. На фиг. 45 m представлено в функции показателя n .

3. Универсальный закон распределения скоростей.

В новом изложении своих идей Прандтль не берет за основу никакой степенной формулы, но исходит из того, что скорость вблизи стенки зависит лишь от значений физических величин в этом месте (касательного напряжения у стенки τ_0 , коэффициента вязкости μ и плотности ρ) и не зависит от расстояния от противолежащей стенки и от средней или максимальной скорости. Следуя методу Прандтля¹⁾, составим величину $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, характеризующую состояние трения у стенки и имеющую размерность скорости. Деля действительную скорость u на v_* , можно получить „безразмерную скорость“

$$\varphi = \frac{u}{v_*}.$$

Подобным же образом составим по типу числа Рейнольдса из расстояния от стенки y , скорости v_* и кинематической вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ „безразмерное расстояние от стенки“:

$$\eta = \frac{v_* \cdot y}{\nu}.$$

Таким образом мы получим универсальное распределение скоростей вблизи стенки:

$$\varphi = \varphi(\eta).$$

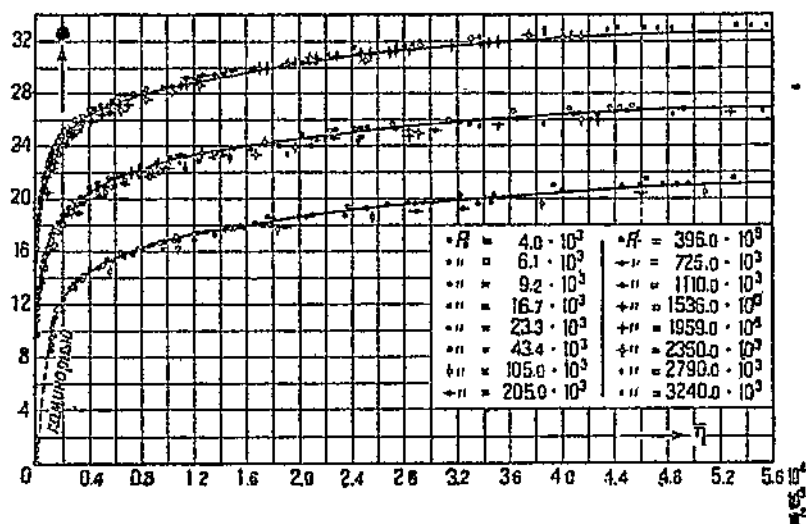
Эта зависимость изображена на фиг. 46 (см. также таблицу 3 на стр. 108). На этой фигуре приведены безразмерные скорости для ряда чисел Рейнольдса, начиная от наименьшего $4 \cdot 10^3$ и кончая наибольшим $3240 \cdot 10^3$. Ввиду

¹⁾ L. Prandtl, Über den Reibungswiderstand strömender Luft. *Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen*, вып. III, стр. 1, 1927; Zur turbulenten Strömung in Röhren u. längs Platten. *Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen*, вып. IV, стр. 18. 1932.

большого диапазона значений абсцисс $\eta = \frac{v_* \cdot y}{\nu}$ употреблялись три различных масштаба. Нанесенные точки соответствуют результатам опытов.

Универсальный закон распределения скоростей становится еще яснее, если вместо η по оси абсцисс откладывать $\lg \eta$ (фиг. 47).

В этом случае бросается в глаза, что полученные из опытов точки с некоторыми отклонениями лежат на одной прямой. При более внимательном рассмотрении можно, однако, заметить, что точки, соответствующие определенному числу Рейнольдса, не лежат точно на одной прямой, но обнаруживают систематический подъем снизу вверх. При этом следует отметить, что опытные точки достигают середины трубы,



Фиг. 46. Универсальное распределение скоростей [$\varphi = \varphi(\eta)$].

в то время как по гипотезе Прандтля на кривой должны лежать только близкие к стенке точки. Последнее же условие выполняется довольно хорошо. Для $\lg \eta < 1,0$ можно констатировать систематическое отклонение от прямой.

Принимая во внимание, главным образом, точки, лежащие вблизи оси трубы, можно из фиг. 47 найти уравнение прямой 1, в виде

$$\varphi = 5,5 + 5,75 \lg \eta. \quad (20)$$

Тем самым мы получаем возможность вычислить для ряда значений φ соответствующие значения η . На основе этого на фиг. 46 и построены кривые, проходящие через опытные точки.

Для дальнейших приближенных расчетов целесообразно, однако, рассмотреть близкие к стенке точки. Прямая 2, проходящая через эти точки, выражается уравнением:

$$\varphi = 5,84 + 5,52 \lg \eta. \quad (20a)$$

Таблица 8, φ в

η	φ	η	φ	η	φ	η	φ
$R = 4 \cdot 10^3$		$R = 6,1 \cdot 10^3$		$R = 9,2 \cdot 10^3$		$R = 16,7 \cdot 10^3$	
10	9,16	11	9,75	13	10,50	17	12,28
13	10,41	15	11,08	10	11,85	27	13,45
17	11,60	21	12,35	27	13,15	41	14,50
21	12,30	27	13,08	36	13,92	56	15,20
28	13,13	37	14,00	50	14,95	80	16,11
35	13,80	47	14,65	65	15,60	105	16,79
50	14,58	68	15,65	93	16,65	154	17,80
64	15,58	87	16,40	122	17,32	203	18,56
78	16,15	108	17,00	151	17,90	252	19,18
92	16,61	128	17,47	180	18,35	301	19,68
106	17,00	148	17,88	208	18,70	349	20,09
120	17,38	168	18,21	237	19,12	393	20,40
134	17,62	188	18,49	266	19,45	447	20,70
143	17,77	201	18,56	283	19,60	477	20,82
146	17,79	205	18,66	289	19,63	487	20,85
149	17,80	209	18,70	294	19,65	497	21,00

η	φ	η	φ	η	φ	η	φ
$R = 396 \cdot 10^3$		$R = 725 \cdot 10^3$		$R = 1110 \cdot 10^3$		$R = 1536 \cdot 10^3$	
171	17,98	299	19,08	427	17,91	580	20,20
335	19,65	573	20,92	847	19,45	1140	22,10
581	20,80	997	22,32	1477	21,70	1980	23,70
827	21,70	1426	23,16	2107	24,00	2880	24,80
1237	22,70	2129	24,30	3160	25,20	4250	25,85
1647	23,45	2842	25,05	4210	26,00	5660	26,70
2457	24,76	4257	26,23	6310	27,20	8500	27,95
3287	25,60	5667	27,10	8410	28,05	11300	28,80
4107	26,22	7087	27,92	10510	28,75	14150	29,50
4927	26,82	8507	28,35	12600	29,35	17000	30,07
5752	27,40	9907	28,53	14700	29,80	19800	30,50
6567	27,70	11327	29,17	16800	30,20	20600	30,84
7727	28,00	12757	29,46	18910	30,40	25500	31,10
7877	28,05	13610	29,58	20210	30,53	27200	31,18
8057	28,15	13910	29,59	20610	30,57	27800	31,20
8217	28,20	14200	29,60	21000	30,60	28300	31,21

Обозначения: $\varphi = \frac{u}{v_0}$ — безразмерная скорость; u — скорость; v_0 — скорость касательного коэффициента вязкости; τ_0 — касательное напряжение у стенки.

/НКЦИИ ОТ η .

η	φ	η	φ	η	φ	η	φ
$R = 23,3 \cdot 10^3$		$R = 43,4 \cdot 10^3$		$R = 105 \cdot 10^3$		$R = 205 \cdot 10^3$	
20	12,20	30	13,6	57	14,70	98	16,31
33	13,86	52	15,1	107	16,42	188	17,90
52	15,00	86	16,35	182	17,80	324	19,25
72	15,79	120	17,10	257	18,70	460	20,21
105	16,75	176	18,00	383	19,70	687	21,30
137	17,40	233	18,70	507	20,50	913	22,22
202	18,60	346	19,83	759	21,80	1 357	23,40
267	19,41	459	20,72	1 007	22,75	1 817	24,23
332	20,10	572	21,32	1 258	23,40	2 267	24,95
397	20,60	685	21,90	1 511	24,05	2 727	25,50
462	21,10	798	22,30	1 761	24,50	3 177	26,00
527	21,40	911	22,62	2 007	24,80	3 627	26,40
592	21,70	1 024	22,95	2 267	25,15	4 082	26,61
631	21,80	1 092	23,00	2 412	25,30	4 357	26,80
643	21,81	1 116	23,03	2 467	25,33	4 447	26,85
657	21,83	1 137	23,10	2 511	25,36	4 537	26,90
η	φ	η	φ	η	φ	η	φ
$R = 1 959 \cdot 10^3$		$R = 2 350 \cdot 10^3$		$R = 2 790 \cdot 10^3$		$R = 3 240 \cdot 10^3$	
700	21,72	830	21,92	957	22,40	1 110	22,75
1 410	23,27	1 670	23,50	1 934	23,60	2 220	24,40
2 460	24,45	2 923	24,90	3 380	25,40	3 880	25,80
3 520	25,35	4 160	26,00	4 835	26,38	5 550	26,82
5 270	26,45	6 250	27,00	7 250	27,70	8 330	28,00
7 040	27,22	8 340	27,80	9 670	28,50	11 100	28,82
10 540	28,42	12 510	29,00	14 500	29,65	16 650	30,00
14 080	29,28	16 680	29,90	19 340	30,50	22 200	30,90
17 580	30,00	20 850	30,60	24 200	31,20	27 740	31,60
21 120	30,69	25 020	31,20	29 000	31,74	33 300	32,17
24 620	31,10	29 190	31,00	33 800	32,10	38 800	32,58
28 160	31,40	33 360	32,00	38 680	32,40	44 400	32,90
31 620	31,60	37 530	32,20	43 500	32,70	50 000	33,10
33 750	31,79	40 090	32,28	46 420	32,80	53 300	33,21
34 450	31,80	40 900	32,30	47 400	32,86	54 400	33,24
35 200	31,82	41 700	32,31	48 400	32,90	55 500	33,30

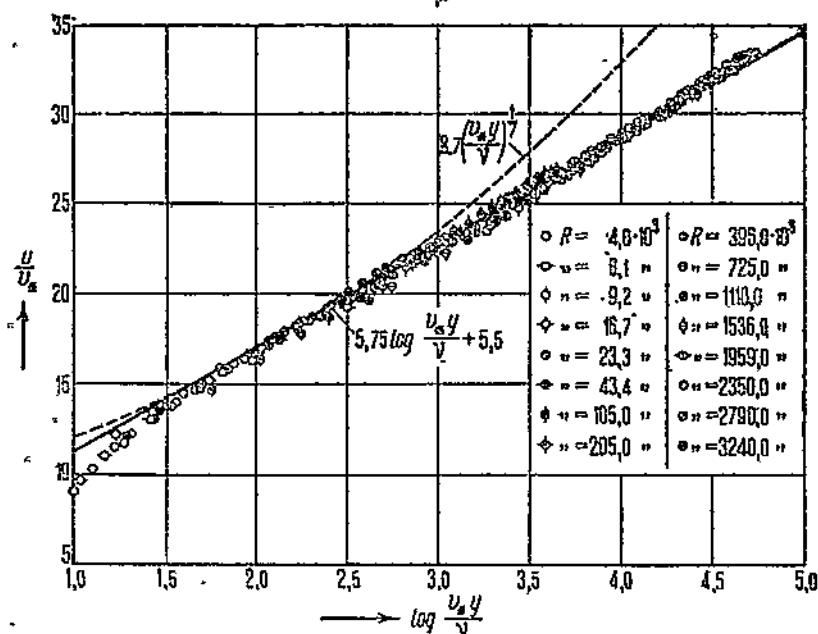
приращения; $\eta = \frac{y}{\delta}$ — безразмерное расстояние от стенки; y — расстояние от стенки; ν — кинематический коэффициент вязкости; ρ — плотность.

Для ламинарного потока скорость u зависит только от y , и мы имеем следующую формулу для касательного напряжения:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_0,$$

где $\left(\frac{du}{dy} \right)_0$ есть значение $\frac{du}{dy}$ вблизи стенки, а μ — коэффициент вязкости; или, иначе:

$$du = \frac{\tau_0 dy}{\mu}.$$



Фиг. 47. φ и функции от $\lg \eta$.

После интегрирования этого уравнения получаем:

$$u = \frac{\tau_0 y}{\mu}.$$

Подставляя $\tau_0 = \rho v_*^2$ и $\mu = \rho \nu$, можно непосредственно написать:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* \cdot y}{\nu},$$

или

$$\varphi = \eta.$$

Ввиду наличия явлений турбулентного перемешивания полученное соотношение имеет место примерно до $\eta = 10$. Эта ламинарная область изображена на фиг. 46 у нижней кривой пунктиром. Деля уравнение

(13) на $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ и заменяя $\frac{u}{v_*}$ через φ , а $\frac{v_* \cdot y}{\nu}$ через η и вычисляя числовой множитель, получаем;

$$\varphi = 8,74 \eta^{\frac{1}{7}}. \quad (13a)$$

Соответствующая этому уравнению кривая изображена на фиг. 47 пунктиром. Видно, что область ее применимости ограничена интервалом от $\lg \eta = 1,6$ до $\lg \eta = 2,6$.

Пользуясь этим линейным законом, можно с очень хорошим приближением вычислить закон распределения скоростей для любого числа Рейнольдса, если задать заранее физические величины τ_0 , $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ и радиус трубы r . Из уравнения полученной прямой можно для различных расстояний от стенки вычислить соответствующие φ и умножением их на скорость v_* определить скорость $u = \varphi \cdot v_*$. Из безразмерного расстояния η можно получить соответствующие расстояния от стенки $y = \frac{\eta \nu}{v_*}$. Таким образом мы полу-

чаем распределение скоростей $u = f(y)$ для определенного значения числа Рейнольдса. На фиг. 48 изображены в безразмерной форме пять полученных по этому методу распределений скоростей. Эти безразмерные распределения скоростей даны для чисел Рейнольдса R от 10^5 до 10^9 и показывают изменение формы распределения скоростей с изменением числа Рейнольдса.

Конечно, несколько рискованно вычислять скорости в середине трубы на основании закона, применимого лишь к области вблизи стенок; однако вообще различия скоростей в средней части трубы сами по себе невелики, с другой же стороны, — самый характер диаграммы фиг. 47 является подтверждением правильности подобного приема. Понятно, что значения в середине трубы получаются все-таки неточными; у действительных кривых распределения скоростей в этой точке имеется горизонтальная касательная, в то время как по формуле касательная имеет конечный, хотя и очень малый, наклон.

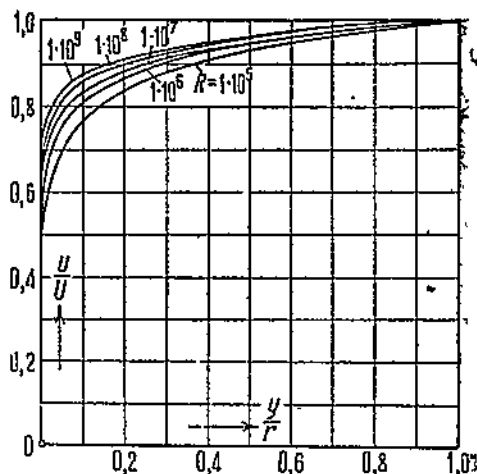
Однако при определении объемов протекающей жидкости это отклонение почти не имеет значения.

4. Длина пути перемешивания (Mischungsweg) и коэффициент обмена (Austauschgrösse).

При ламинарном движении скорость u зависит только от расстояния y . Для касательного напряжения мы имеем выражение:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (21)$$

где μ есть коэффициент вязкости. При турбулентном движении рассматривается аналогичное кажущееся, „виртуальное“, касательное напряжение.



Фиг. 48. Пересчитанное распределение скоростей для очень больших чисел Рейнольдса.

обусловленное турбулентным переносом количества движения. Следуя Буссинеску¹⁾, мы представим его выражением:

$$\tau' = A \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (22)$$

где $\bar{u}$ есть среднее по времени значение скорости, а A — коэффициент обмена, аналогичный коэффициенту вязкости. Коэффициент обмена, однако, не постоянен, изменяясь в жидкости от одной точки к другой. Самая существенная задача — это связать коэффициент обмена A с распределением скоростей. С этой целью, следуя Рейнольдсу, представим скорость разложенной на среднюю по времени и на скорость пульсации около среднего значения. Положим:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v',$$

где u' и v' суть пульсации составляющих скорости по оси x и y . Пульсации скорости вызывают кажущиеся напряжения, имеющие следующие выражения:

$$\sigma_x = -\rho \bar{u'^2}, \quad \tau_{xy} = -\rho \bar{u'v'}, \quad \sigma_y = -\rho \bar{v'^2}. \quad (23)$$

Теперь ставится задача: выразить пульсации скорости u' и v' через „основные“ скорости $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Это удалось сделать Прандтлю с помощью следующего рассуждения. Положим, для простоты, как и выше в уравнениях (21) и (22), что основной поток параллелен оси x и что перпендикулярно к направлению основного потока происходит падение скорости. Для турбулентного состояния потока характерна длина l , которую Прандтль именует длиной пути перемешивания (Mischungsweg). Физический смысл пути перемешивания заключается в том, что в турбулентном потоке малые массы жидкости обладают самостоятельным движением и вследствие этого передвигаются на некоторое расстояние l в поперечном направлении к „основному потоку“, прежде чем они смешаются с новой окружающей их средой. Если теперь малая масса жидкости, исходящая из пункта со средней скоростью $\bar{u}$, передвигается в поперечном направлении на расстояние l , то скорость этой массы отличается, в первом приближении, от средней скорости нового положения массы на $l \frac{d\bar{u}}{dy}$. Для абсолютного значения пульсаций скорости по оси x можно, таким образом, принять выражение:

$$|u'| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (24)$$

Пульсация v' составляющей скорости по оси y происходит от того, что массы жидкости, обладающие разной скоростью по оси x сталкиваются между собой и вследствие этого отклоняются в сторону. Поэтому можно положить v' пропорциональным u' , т. е.

$$|v'| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (25)$$

¹⁾ J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Mém. prés. par div. sav., 1877.

Таким образом мы получаем для касательного напряжения из уравнения (23) (включая коэффициент пропорциональности в еще неизвестное значение l) выражение:

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (26)$$

Тем обстоятельством, что один множитель берется в его абсолютном значении, а другой нет, обеспечивается перемена знака у τ с изменением знака у $\frac{d\bar{u}}{dy}$. Сравнивая эту формулу Прандтля для касательного напряжения с уравнением (22), мы получаем следующую формулу для коэффициента обмена:

$$A = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (27)$$

Это построение Прандтля, дающее глубокий физический анализ турбулентных потоков, привело во многих случаях¹⁾ к очень удачным расчетам турбулентного движения. С помощью этого построения хорошо выводятся законы движения в круглых трубах.

Разделив уравнение (22) на плотность, получим:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{A}{\rho} \frac{du}{dy}.$$

Полагая здесь $\frac{A}{\rho} = \varepsilon$, где ε есть кинематическая мера турбулентного переноса количеств движения, имеем:

$$\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon \frac{du}{dy},$$

или

$$\varepsilon = \frac{\tau}{\rho} : \frac{du}{dy}. \quad (28)$$

¹⁾ L. Prandtl, Berichte über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. 5, стр. 136, 1925; Bericht über neuere Turbulenzforschungen, Hydraulische Probleme (Berlin) VDI Verl., стр. 1, 1926; W. Tollmien, Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. VI, стр. 468, 1926; L. Prandtl, Über ausgebildete Turbulenz, Verh. d. 2 intern. Kongr. f. techn. Mech. Zürich 1927; L. Nikuradse, Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten u. divergenten Kanälen, Forsch.-Arb. Ing.-Wes, № 289, 1929; J. Nikuradse, Über turbulente Wasserströmungen in geraden Röhren bei sehr grossen Reynoldsen Zahlen, Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik u. verwandter Gebiete, hrsg. A. Güllers, L. Hopf u. Th. v. Kármán, стр. 63, Aachen 1929; W. Fritsch, Der Einfluss der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen, Z. f. angew. Math. u. Mech., т. VIII, стр. 215, 1928; L. W. Swain, On the turbulent wake behind a body of revolution, Proc. Roy. Soc. London, т. CXXV, стр. 647, 1929. A. Betz, Über turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden, Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik u. verwandter Gebiete, hrsg. A. Güllers, L. Hopf u. Th. v. Kármán, стр. 10, Aachen 1929; J. Nikuradse, Widerstandsgesetz u. Geschwindigkeitsverteilung von turbulenten Wasserströmungen in glatten u. rauhen Röhren, Verh. d. 3. kongr. f. techn. Mechanik, стр. 239, Stockholm 1930; Schlichting, Über das ebene Windschattenproblem, Диссертация, Göttingen, Ing.-Arch., т. 1, стр. 533, 1930.

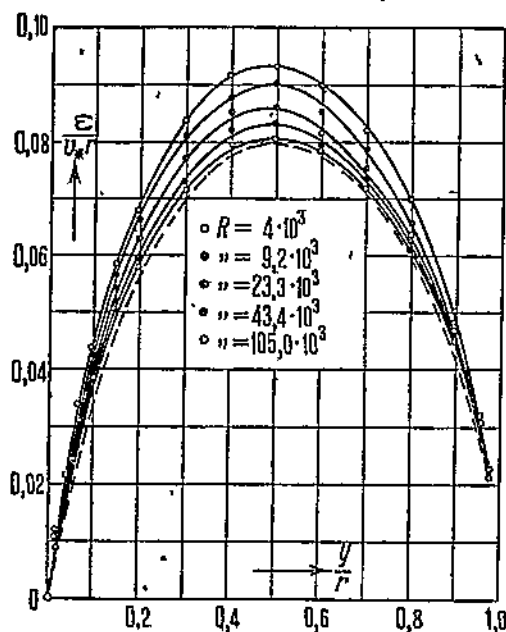
Таблица 4. $\frac{3}{v_x r}$ в функции от $\frac{y}{r}$.

$y : r$	$\frac{z}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{v}{v_x r}$	$\frac{z}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{v}{v_x r}$	$\frac{z}{\rho}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{v}{v_x r}$
	$R = 4 \cdot 10^3; v_x = 3,82 \text{ см/сек}; r = 0,5 \text{ см}$			$R = 0,1 \cdot 10^3; v_x = 5,44 \text{ см/сек}; r = 0,5 \text{ см}$			$R = 9,2 \cdot 10^3; v_x = 7,76 \text{ см/сек}; r = 0,5 \text{ см}$		
0,02	14,30	631,0	0,0119	29,0	945,0	0,0135	59,0	1 392	0,0108
0,04	14,00	340,0	0,0216	28,4	501,0	0,01042	57,8	754	0,0202
0,07	13,65	210,0	0,0338	27,5	318,0	0,04320	56,0	458	0,0318
0,10	13,12	157,0	0,0437	26,0	231,0	0,0427	54,1	331	0,0422
0,15	12,40	111,0	0,0585	25,2	163,0	0,0572	51,1	233	0,0555
0,20	11,63	90,0	0,0690	23,6	129,0	0,0678	48,1	187	0,0662
0,30	10,21	64,0	0,0835	20,7	93,0	0,0825	42,1	134	0,0812
0,40	8,76	50,0	0,0916	17,75	73,0	0,0905	38,1	106	0,0878
0,50	7,30	41,0	0,0983	14,80	59,0	0,0930	30,1	86	0,0904
0,60	5,84	34,0	0,0990	11,82	50,0	0,0876	24,1	73	0,0852
0,70	4,38	29,0	0,0820	8,88	41,0	0,0804	18,1	59	0,0788
0,80	2,95	22,0	0,0700	5,92	32,0	0,0685	12,0	47,0	0,0659
0,90	1,46	15,2	0,0503	2,96	22,0	0,0500	6,0	33	0,0469
0,95	0,584	9,5	0,0322	1,183	13,8	0,0317	2,4	20	0,0310
0,98	0,292	6,7	0,0228	0,592	9,8	0,0224	1,2	14	0,0221
	$R = 23,3 \cdot 10^3; v_x = 17,55 \text{ см/сек}; r = 0,5 \text{ см}$			$R = 43,4 \cdot 10^3; v_x = 13,44 \text{ см/сек}; r = 0,5 \text{ см}$			$R = 105,10^3; v_x = 19,05 \text{ см/сек}; r = 1,5 \text{ см}$		
0,02	302,0	3 410	0,0101	177,0	1 348	0,0098	356	1 338	0,0093
0,04	206,0	1 760	0,0192	173,5	693	0,0186	350	698	0,0175
0,07	285,0	1 040	0,0313	168,0	411	0,0304	338	407	0,0290
0,10	277,0	778	0,0406	162,6	302	0,0401	328	302	0,0380
0,15	262,0	450	0,0542	153,6	220	0,0520	310	215	0,0504
0,20	246,0	448	0,0625	144,6	181	0,0594	290,5	176	0,0580
0,30	215,0	318	0,0770	126,5	129	0,0730	255	125	0,0714
0,40	185,0	250	0,0844	108,5	90	0,0816	218	97	0,0787
0,50	154,0	204	0,0860	90,4	61	0,0832	182	70	0,0805
0,60	123,0	172	0,0815	72,4	48	0,0715	145,6	65	0,0764
0,70	92,5	140	0,0753	64,2	35	0,0735	109,2	63,3	0,0718
0,80	61,5	110	0,0638	36,2	44	0,0612	72,8	41,6	0,0610
0,90	20,8	77	0,0455	18,1	30	0,0450	28,8	17,9	0,0443
0,95	12,3	47,8	0,0283	7,24	18,5	0,0292	14,5	12,5	0,0284
0,98	6,15	33,5	0,0210	3,62	13,0	0,0208	7,3	12,5	0,0210
	$R = 205,10^3; v_x = 17,4 \text{ см/сек}; r = 2,5 \text{ см}$			$R = 297,0$			$R = 297,0$		
0,02	755	297,0	0,0093	755	297,0	0,0093	297,0	755	0,0091
0,04	390	291,0	0,0175	390	291,0	0,0175	291,0	390	0,0172
0,07	292	282,0	0,0290	292	282,0	0,0290	282,0	292	0,0280
0,10	170	273,0	0,0380	170	273,0	0,0380	273,0	170	0,0369
0,15	121	258,0	0,0504	121	258,0	0,0504	258,0	121	0,0490
0,20	96	242,0	0,0580	96	242,0	0,0580	242,0	96	0,0580
0,30	69	212,0	0,0714	69	212,0	0,0714	212,0	69	0,0707
0,40	53	182,0	0,0787	53	182,0	0,0787	182,0	53	0,0780
0,50	44	161,5	0,0805	44	161,5	0,0805	161,5	44	0,0791
0,60	36,3	121,0	0,0764	36,3	121,0	0,0764	121,0	36,3	0,0763
0,70	29,2	90,9	0,0718	29,2	90,9	0,0718	90,9	29,2	0,0716
0,80	22,8	60,6	0,0610	22,8	60,6	0,0610	60,6	22,8	0,0610
0,90	15,8	30,3	0,0443	15,8	30,3	0,0443	30,3	15,8	0,0441
0,95	9,9	12,1	0,0284	9,9	12,1	0,0284	12,1	9,9	0,0280
0,98	7,0	6,05	0,0210	7,0	6,05	0,0210	6,05	7,0	0,0199

$R = 396 \cdot 10^3; v_* = 30,4 \text{ см/сек}; r = 2,5 \text{ см}$	$R = 725 \cdot 10^3; v_* = 34,28 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$	$R = 1110 \cdot 10^3; v_* = 47,2 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$	$R = 1836 \cdot 10^3; v_* = 62,4 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$
0,02 0,04 0,07 0,10 0,15 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 0,96 0,98	906 887 880 832 785 740 647 555 462 370 277 186 92,5 17,5 18,5	1151 1129 1092 1058 998 940 823 705 587 470 352 235 117,6 47,0 23,5	795 410 387 337 174 124 97 68 53,5 43,7 35,7 23,0 16,0 9,9 7,0
0,0087 0,0166 0,0272 0,0360 0,0480 0,0677 0,0892 0,1130 0,1390 0,1670 0,1970 0,2290 0,2630 0,2990 0,3370	0,0085 0,0160 0,0269 0,0354 0,0470 0,0585 0,0705 0,0770 0,0782 0,0766 0,0710 0,0596 0,0428 0,0277 0,0196	2185 2140 2075 2007 1898 1785 1660 1440 1240 1115 983 870 723 592 48,4 31,2 21,5 13,5 9,6	0,0083 0,0167 0,0261 0,0350 0,0465 0,0562 0,0705 0,0785 0,0796 0,0781 0,0725 0,0606 0,0439 0,0280 0,0197
3830 3750 3630 3510 3320 3122 2730 2340 1950 1560 1170 780 390 156 78	1506 1506 1460 1333 1230 1179 127 127 97,5 80,0 64,8 41,9 28,8 18,0 12,8		
$R = 1059 \cdot 10^3; v_* = 77,5 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$	$R = 2250 \cdot 10^3; v_* = 68,3 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$	$R = 2790 \cdot 10^3; v_* = 74,5 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$	$R = 3240 \cdot 10^3; v_* = 83,1 \text{ см/сек}; r = 5,0 \text{ см}$
0,02 0,04 0,07 0,10 0,15 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 0,96 0,98	5900 5770 5695 5410 5110 4810 4210 3864 3005 2404 81 65,6 52,0 35,4 22,3 15,9	4557 4474 4330 4194 3770 3730 3265 2800 2330 1865 1605 70,2 57,0 45,5 31,7 18,4 93,2	1670 872 514 370 254 198,5 138 100 86,2 80,2 70,2 67,2 63,2 50,5 41,4 15,1
0,0081 0,0154 0,0251 0,0338 0,0459 0,0588 0,0692 0,0790 0,0792 0,0767 0,0710 0,0596 0,0465 0,0278 0,0195	0,0080 0,0151 0,0248 0,0332 0,0447 0,0551 0,0693 0,0775 0,0791 0,0767 0,0780 0,0721 0,0600 0,0431 0,0276 0,0196	5450 5345 5172 5000 4730 4450 3900 3350 2780 2224 1669 1112 555 222 111	0,0079 0,0146 0,0241 0,0324 0,0434 0,0540 0,0652 0,0767 0,0785 0,0780 0,0708 0,0591 0,0433 0,0278 0,0197
6760 6620 6412 6210 5860 5515 4882 4140 3450 2760 2063 1380 600 276 138	2050 1085 645 486 319 246 168 128 104 86,7 69,5 55,7 38,5 23,7 16,8		

Обозначения: α — кинематический коэффициент обмена; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ — скорость касательного напряжения; $r = \frac{d}{2}$ — радиус трубы; u — расстояние от стенки; τ_0 — касательное напряжение у стенки; ρ — плотность; $\frac{du}{dy}$ — производная скорости; R — число Рейнольдса; n — средняя скорость; ν — кинематический коэффициент вязкости

Следовательно, кинематический коэффициент обмена ε получается как частное от деления „кинематического касательного напряжения“ $\frac{\tau}{\rho}$ на производную скорости $\frac{du}{dy}$. Эта производная определяется графически из полученных распределений скоростей. Так как величины $\frac{du}{dy}$ и $\frac{\tau}{\rho} = \frac{r-y}{2\rho} \frac{dp}{dx}$ [вывод такой же, как и для уравнения (9)] с приближе-



Фиг. 49. $\frac{\varepsilon}{v_* r}$ в функции от $\frac{y}{r}$ для малых чисел Рейнольдса.

нием к' оси трубы не стремятся к нулю, то и определение коэффициента переноса количеств движения становится в этой области неточным. Вследствие этого опытные точки для определения распределения скоростей были чаще расположены у оси трубы. Для того чтобы провести через полученные значения скоростей кривую скоростей так, чтобы получить наиболее равномерное изменение значений $\frac{du}{dy}$, в опытных точках строились производные и соединялись плавной кривой. Затем, обратно, из этой кривой определялась кривая распределения скоростей на небольших расстояниях от середины трубы. Этот прием дал возможность более точно вычислить значения ε вблизи оси трубы. Таким путем были определены значения для ε в пределах чисел Рейнольдса (от $4 \cdot 10^3$ до $3240 \cdot 10^3$) для вышеупомянутых 16 распределений скоростей; эти значения помещены в таблице 4 (см. стр. 114).

Для того чтобы удобнее сопоставить распределение значений ε вдоль радиуса трубы для различных чисел Рейнольдса, мы разделили полученные значения на

$$v_* r,$$

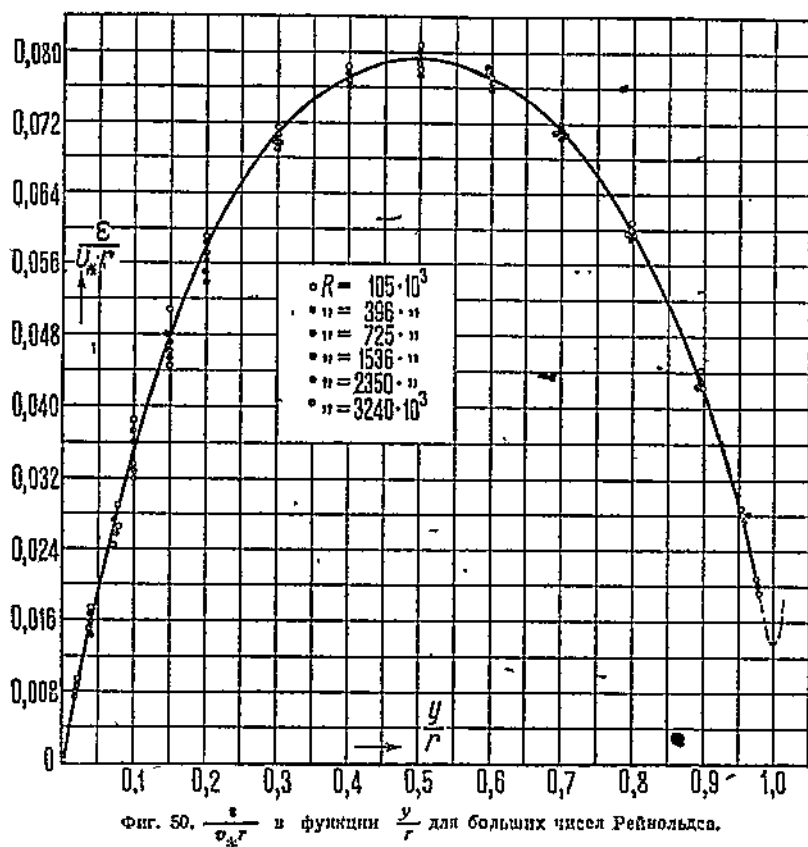
где $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ имеет размерность скорости, в то время как ε имеет размерность произведения скорости на длину. Расстояние от стенки мы также разделили на длину радиуса.

Зависимость

$$\frac{\varepsilon}{v_* r} = f\left(\frac{y}{r}\right) \quad (29)$$

изображена на фиг. 49 и 50. Рассматривая эту зависимость на фиг. 49,

можно заметить, что значения величины $\frac{\epsilon}{v_* r}$ с возрастанием числа Рейнольдса убывают до некоторого неизменного предела, показанного на фиг. 49 пунктиром. На фиг. 50 даны значения $\frac{\epsilon}{v_* r}$ для чисел Рейнольдса $R > 100 \cdot 10^3$. В пределах некоторых отклонений они дают



кривую, независимую от числа Рейнольдса. Кривая эта соответствует пунктирной кривой на фиг. 49. Пунктирная часть кривой на фиг. 50, изображающая значения $\frac{\epsilon}{v_* r}$ вблизи оси трубы, найдена путем экстраполяции. Для процесса изменения этих значений характерно, что коэффициент обмена у стенки равен нулю, так как здесь невозможен никакой обмен: с возрастанием расстояния от стенки $\frac{\epsilon}{v_* r}$ быстро растёт, сначала линейно, и достигает максимума при $y = \frac{r}{2}$. С приближением к оси трубы величина $\frac{\epsilon}{v_* r}$ снова падает до очень малого значения. На восходящей ветви кривой вблизи стенки наблюдается большой разброс

значений $\frac{\epsilon}{v_{*r}}$, чем вблизи оси трубы. Это объясняется тем, что вблизи стенки сказывается сильное влияние вязкости.

Из равенства $\epsilon = \frac{A}{\rho} = l^2 \frac{du}{dy}$ получаем длину l пути перемешивания:

$$l = \sqrt{\epsilon : \frac{du}{dy}}. \quad (30)$$

На основании этой формулы было вычислено распределение значений длины пути перемешивания вдоль радиуса для различных чисел Рейнольдса; соответствующие числовые значения даны в таблице 5. На фиг. 51 и 52 изображена в безразмерной форме зависимость длины l пути перемешивания от расстояния до стенки:

$$\frac{l}{r} = f\left(\frac{y}{r}\right).$$

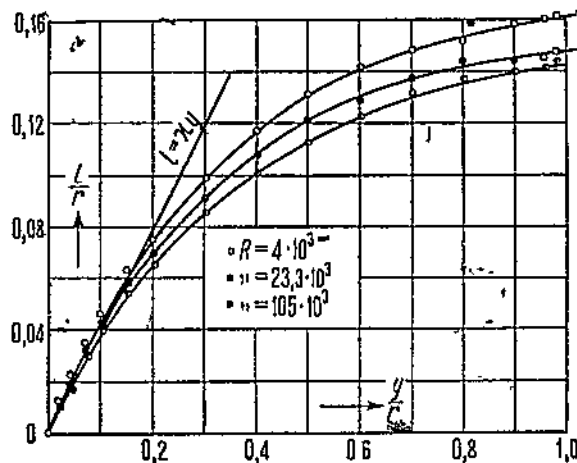
Заметно, что длина l в непосредственной близости к стенке (примерно до $\frac{y}{r} = 0,07$) возрастает от нуля по линейному закону. Карман выражает этот линейный подъем в виде:

$$l = \kappa y,$$

где y есть расстояние от стенки, а κ — коэффициент пропорциональности; значение этого коэффициента для числа Рейнольдса $R = 100 \cdot 10^3$ и выше равно $\kappa = 0,88$ (фиг. 52). Для чисел Рейнольдса ниже $R = 100 \cdot 10^3$ $\kappa = 0,40$ (фиг. 51). После значения $\frac{y}{r} = 0,07$ длина l возрастает слабее

и на оси трубы достигает значения, приблизительно равного $\frac{l}{r} = 0,14$ (фиг. 52). На этой фигуре отложены значения безразмерной длины пути перемешивания для пяти чисел Рейнольдса от $R = 105 \cdot 10^3$ до $3240 \cdot 10^3$; по всей кривой точки расположены с весьма незначительными отклонениями. Эта диаграмма показывает, что при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса при определенном безразмерном расстоянии от стенки $\frac{y}{r}$

величина безразмерной длины пути перемешивания $\frac{l}{r}$ более уже не убывает. Это объясняется тем, что при числах Рейнольдса, соответствующих фиг. 52, уже не сказывается влияние вязкости. Для значений R ниже $100 \cdot 10^3$ благодаря влиянию вязкости заметно изменение безразмерного



Фиг. 51. $\frac{l}{r}$ в функции от $\frac{y}{r}$ для малых чисел Рейнольдса.

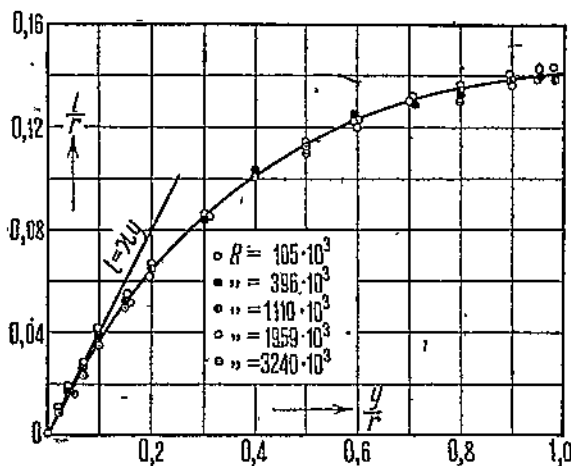
Таблица 5. $\frac{l}{r}$ в функции от $\frac{y}{r}$.

$\frac{y}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l}{r}$
	$R = 40 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$	$R = 61 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$	$R = 92 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$	$R = 167 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$	$R = 233 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$	$R = 434 \cdot 10^3$ $r = 1,0 \text{ см}$	$R = 105 \cdot 10^3$ $r = 1,5 \text{ см}$	$R = 205 \cdot 10^3$ $r = 1,5 \text{ см}$
0,02	0,0120	0,0114	0,0110	0,0104	0,0102	0,0099	0,0094	0,0092
0,04	0,0220	0,0212	0,0206	0,0197	0,0195	0,0190	0,0179	0,0175
0,07	0,0351	0,0340	0,0330	0,0328	0,0325	0,0315	0,0300	0,0290
0,10	0,0460	0,0446	0,0444	0,0432	0,0428	0,0423	0,0400	0,0399
0,15	0,0634	0,0616	0,0614	0,0606	0,0588	0,0564	0,0546	0,0532
0,20	0,0758	0,0752	0,0742	0,0720	0,0700	0,0665	0,0652	0,0649
0,30	0,0996	0,0978	0,0968	0,0960	0,0922	0,0872	0,0850	0,0845
0,40	0,1180	0,1166	0,1132	0,1120	0,1088	0,1049	0,1015	0,1016
0,50	0,1320	0,1304	0,1276	0,1218	0,1216	0,1173	0,1136	0,1120
0,60	0,1422	0,1372	0,1344	0,1304	0,1288	0,1260	0,1226	0,1210
0,70	0,1492	0,1454	0,1440	0,1400	0,1374	0,1346	0,1310	0,1305
0,80	0,1520	0,1520	0,1472	0,1432	0,1428	0,1383	0,1367	0,1360
0,90	0,1590	0,1564	0,1466	0,1450	0,1440	0,1417	0,1398	0,1395
0,96	0,1608	0,1574	0,1548	0,1500	0,1466	0,1454	0,1418	0,1411
0,98	0,1614	0,1572	0,1564	0,1540	0,1480	0,1464	0,1430	0,1400
$\frac{y}{r}$	$R = 396 \cdot 10^3$ $r = 2,5 \text{ см}$	$R = 726 \cdot 10^3$ $r = 2,5 \text{ см}$	$R = 1110 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	$R = 1536 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	$R = 1959 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	$R = 2350 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	$R = 2780 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	$R = 3240 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$
0,02	0,0088	0,0086	0,0084	0,0082	0,0081	0,0081	0,0080	0,0079
0,04	0,0169	0,0164	0,0161	0,0158	0,0159	0,0154	0,0151	0,0150
0,07	0,0282	0,0279	0,0270	0,0262	0,0260	0,0256	0,0251	0,0248
0,10	0,0370	0,0374	0,0369	0,0356	0,0355	0,0350	0,0342	0,0338
0,15	0,0520	0,0509	0,0505	0,0500	0,0496	0,0490	0,0492	0,0481
0,20	0,0645	0,0631	0,0628	0,0624	0,0622	0,0615	0,0607	0,0604
0,30	0,0830	0,0845	0,0840	0,0820	0,0827	0,0829	0,0826	0,0833
0,40	0,1020	0,0994	0,1011	0,0990	0,1017	0,1000	0,1010	0,1000
0,50	0,1130	0,1110	0,1130	0,1101	0,1120	0,1120	0,1110	0,1130
0,60	0,1240	0,1218	0,1233	0,1220	0,1211	0,1230	0,1230	0,1211
0,70	0,1290	0,1294	0,1319	0,1290	0,1294	0,1312	0,1291	0,1310
0,80	0,1329	0,1330	0,1353	0,1337	0,1330	0,1340	0,1320	0,1332
0,90	0,1382	0,1359	0,1369	0,1340	0,1377	0,1360	0,1368	0,1359
0,96	0,1390	0,1369	0,1400	0,1390	0,1391	0,1380	0,1390	0,1400
0,98	0,1400	0,1381	0,1390	0,1380	0,1380	0,1390	0,1390	0,1400

Обозначения: $\frac{l}{r}$ — безразмерная длина пути перемешивания; r — радиус трубы; y — расстояние от стенки; R — число Рейнольдса; $\bar{u}$ — средняя скорость; ν — кинематический коэффициент вязкости.

количества $\frac{l}{r}$ с изменением числа Рейнольдса, а именно $\frac{l}{r}$ растет при убывании числа Рейнольдса. Поэтому на фиг. 51 и получаются для различных чисел Рейнольдса различные кривые для значений $\frac{l}{r}$. Зависимость $\frac{l}{r}$ от $\frac{y}{r}$, изображенная на фиг. 52, может быть выражена следующей интерполяционной формулой Прандтля;

$$\frac{l}{r} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^3 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^4. \quad (31)$$



Фиг. 52. $\frac{l}{r}$ в функции от $\frac{y}{r}$ для больших чисел Рейнольдса.

Из этой формулы мы находим:

$$\kappa = \left[\frac{dl}{dy} \right]_{y=0} = 0,40.$$

Учитывая влияние вязкости, можно получить следующим образом зависимость длины l пути перемещения от расстояния от стенки в виде выражения, правильного с точки зрения размерности. Как известно, условия движения вблизи стенки определяются только количествами:

$$\tau_0, \rho \text{ и } \nu.$$

Из них можно, как уже было сказано, построить безразмерное количество:

$$\frac{\rho \nu}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{v_* y}{\nu}.$$

Таким путем мы можем принять для длины l пути перемещения следующее выражение:

$$l = y f\left(\frac{v_* y}{\nu}\right) = y \cdot f(\eta). \quad (32)$$

Количество $\eta = \frac{v_* y}{\nu}$ можно рассматривать как некоторое переменное число Рейнольдса. Остается определить функцию f опытным путем.

Мы имеем:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = l \left| \frac{du}{dy} \right|_r \quad (33)$$

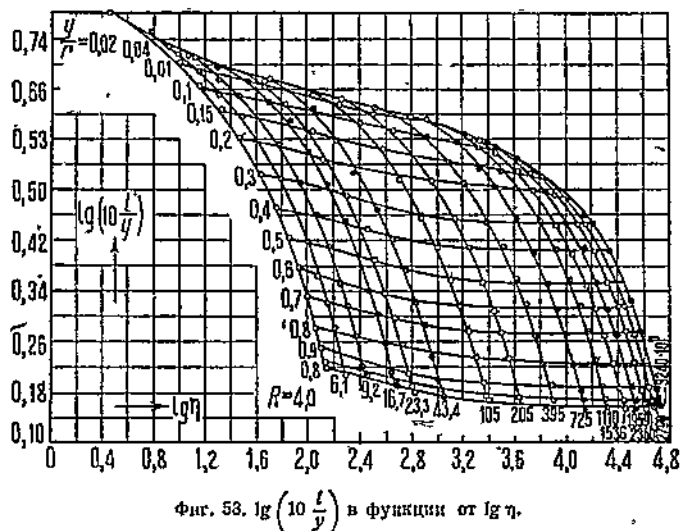
следовательно,

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{l} = \frac{v_*}{y f(\eta)}, \quad (34)$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\bar{u} = \int_{y_0}^y \frac{v_* dy}{y \cdot f(\eta)} \quad (35)$$

Эта формула, очевидно связывает распределение скоростей с законом сопротивления. Нижний предел y_0 интегрирования зависит от особенностей функции $f(\eta)$ вблизи стенки. Для гладкой трубы y_0 должно быть взято равным нулю. Для труб шероховатых y_0 представляет собой некоторую длину, характеризующую шероховатость. Функции f мы получаем из опытных данных о распределении скоростей посредством предвари-



Фиг. 53. $\lg \left(10 \frac{l}{y} \right)$ в функции от $\lg \eta$.

тельного вычисления l и последующего построения кривой $\frac{l}{y} = f(\eta)$. Это соотношение приведено на фиг. 53 (см. также таблицу 6 на стр. 122) в логарифмическом масштабе. Каждая идущая сверху вниз кривая соответствует определенному числу Рейнольдса, надписанному в качестве параметра. Наивысшие точки кривой лежат в непосредственной близости от стенки. Кривые, идущие слева направо, соединяют точки с одинаковыми значениями $\frac{y}{r}$. Диаграмма, далее, показывает, что до некоторой определенной кривой $\frac{y}{r}$ все значения $\lg \left(\frac{l}{y} \right)$ при числах Рейнольдса, больших $100 \cdot 10^3$, равны между собой. Равенство этих значений является новым подтверждением того, что в этой области чисел Рейнольдса, исключая пункты, непосредственно близкие к стенке, отсутствует влияние вязкости

5. Выводы из принципа подобия.

В последнее время Карману удалось обосновать теорию Прандтля о длине пути перемешивания исходя из иной точки зрения. О характере зависимости турбулентных напряжений от поля скоростей можно

Таблица 6. $\frac{l}{y}$ в функции от $\frac{y}{r}$

$\frac{y}{r}$	$\eta \quad \frac{l}{y}$		$\eta \quad \frac{l}{y}$		$\eta \quad \frac{l}{y}$		$\eta \quad \frac{l}{y}$	
	$R = 4 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$		$R = 6,1 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$		$R = 9,2 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$		$R = 16,6 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$	
0,02	2,83	0,600	4,03	0,569	5,75	0,552	9,8	0,518
0,04	5,66	0,550	8,10	0,531	11,5	0,515	19,6	0,493
0,07	9,90	0,501	14,1	0,485	20,1	0,470	34,2	0,468
0,10	14,14	0,460	20,2	0,446	28,7	0,443	49,0	0,433
0,15	21,20	0,422	30,2	0,410	43,1	0,409	73,4	0,404
0,20	28,30	0,379	40,3	0,376	57,5	0,371	98,0	0,360
0,30	42,50	0,333	60,5	0,326	86,3	0,323	147	0,320
0,40	56,60	0,295	80,5	0,289	115,0	0,288	196	0,280
0,50	70,70	0,264	101,0	0,261	143,8	0,256	245	0,248
0,60	85,00	0,237	121,0	0,229	172,5	0,224	294	0,217
0,70	99,00	0,213	141,0	0,208	201,0	0,206	342	0,200
0,80	113,00	0,190	161,0	0,190	230,0	0,184	392	0,179
0,90	127,30	0,1765	181,2	0,1735	258,5	0,165	440	0,161
0,96	136,0	0,1675	193,5	0,164	276,0	0,1615	470	0,1563
0,98	138,8	0,1645	197,5	0,1603	282,0	0,1595	480	0,1535
	$R = 396 \cdot 10^3$ $r = 2,5 \text{ см}$		$R = 725 \cdot 10^3$ $r = 2,5 \text{ см}$		$R = 1110 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$		$R = 1536 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	
0,02	0,164	0,439	0,284	0,427	0,42	0,418	0,566	0,411
0,04	0,328	0,423	0,566	0,410	0,84	0,401	1,13	0,394
0,07	0,574	0,404	0,990	0,399	1,47	0,386	1,98	0,375
0,10	0,820	0,380	1,419	0,375	2,10	0,367	2,83	0,356
0,15	1,230	0,347	2,122	0,339	3,16	0,336	4,25	0,334
0,20	1,64	0,322	2,835	0,316	4,20	0,314	5,66	0,312
0,30	2,46	0,277	4,250	0,282	6,30	0,281	8,50	0,274
0,40	3,28	0,255	5,66	0,249	8,40	0,253	11,30	0,248
0,50	4,10	0,227	7,08	0,222	10,50	0,226	14,15	0,221
0,60	4,92	0,207	8,50	0,203	12,60	0,206	17,00	0,203
0,70	5,745	0,184	9,90	0,185	14,70	0,188	19,80	0,184
0,80	6,56	0,166	11,32	0,166	16,80	0,169	22,60	0,167
0,90	7,72	0,154	12,75	0,161	18,90	0,164	25,50	0,162
0,96	7,87	0,145	13,60	0,145	20,20	0,146	27,20	0,145
0,98	8,05	0,143	13,90	0,141	20,60	0,142	27,80	0,141

Обозначения: l — длина пути перемешивания; y — расстояние от стенки; $\eta = \frac{v_{\text{ср}} y}{\nu}$ — безразмерная вязкость; r — радиус трубы; R — число Рейнольдса; v — средняя скорость.

и $\lg\left(100 \frac{l}{y}\right)$ в функции от $\lg \eta$.

η $\frac{l}{y}$		η $\frac{l}{y}$		η $\frac{l}{y}$		η $\frac{l}{y}$	
$R = 23,3 \cdot 10^3$ $r = 0,5 \text{ см}$		$R = 43,4 \cdot 10^3$ $r = 1,0 \text{ см}$		$R = 105 \cdot 10^3$ $r = 1,5 \text{ см}$		$R = 205 \cdot 10^3$ $r = 2,5 \text{ см}$	
13	0,510	22,6	0,495	50	0,470	90,5	0,457
26	0,488	45,2	0,475	100	0,447	181	0,437
46	0,464	79,1	0,450	175	0,430	317	0,415
65	0,429	113,0	0,423	250	0,400	453	0,389
98	0,392	169,4	0,376	376	0,364	680	0,355
130	0,350	226,0	0,333	500	0,326	906	0,324
195	0,307	339	0,291	752	0,284	1360	0,2822
260	0,272	452	0,262	1000	0,254	1810	0,254
325	0,243	565	0,2346	1251	0,227	2260	0,224
390	0,215	678	0,2083	1504	0,206	2720	0,202
455	0,1965	791	0,1920	1754	0,187	3170	0,186
520	0,1785	904	0,1716	2000	0,171	3620	0,170
585	0,160	1017	0,1574	2260	0,1555	4075	0,155
624	0,153	1085	0,1515	2405	0,1478	4360	0,147
635	0,1512	1109	0,1460	2460	0,146	4440	0,143
$R = 1959 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$		$R = 2350 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$		$R = 2790 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$		$R = 3240 \cdot 10^3$ $r = 5,0 \text{ см}$	
0,704	0,406	0,834	0,404	0,967	0,388	1,11	0,396
1,41	0,389	1,668	0,384	1,934	0,378	2,22	0,376
2,46	0,372	2,92	0,366	3,380	0,358	3,88	0,355
3,52	0,355	4,16	0,350	4,835	0,332	5,55	0,338
5,27	0,331	6,25	0,327	7,25	0,328	8,33	0,321
7,04	0,311	8,34	0,308	9,57	0,304	11,10	0,302
10,54	0,276	12,51	0,276	14,50	0,276	16,65	0,278
14,08	0,254	16,68	0,250	19,34	0,253	22,20	0,250
17,58	0,224	20,85	0,224	24,20	0,222	27,74	0,226
21,12	0,202	25,02	0,205	29,00	0,205	33,30	0,202
24,62	0,185	29,19	0,188	33,80	0,185	38,80	0,187
28,16	0,166	33,36	0,138	38,68	0,165	44,40	0,167
31,62	0,153	37,53	0,151	43,50	0,152	50,0	0,151
33,75	0,145	40,00	0,144	46,42	0,145	53,3	0,146
34,45	0,141	40,90	0,142	47,40	0,1422	54,40	0,143

ное количество; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ — скорость касательного напряжения; ν — кинематический коэффициент

в настоящий момент сделать еще два принципиально различных допущения. Можно допускать, что турбулентные напряжения объяснимы только из всего поля скоростей в целом, включая пограничные условия, с помощью некоего „интегрального“ закона, или, напротив, можно предположить, что турбулентные напряжения в произвольной точке определяются весьма одинаковым образом из условий движения в ближайшей окрестности данной точки, т. е. определяются дифференциальным законом.

Напряжения ламинарного трения, обусловленные молекулярным движением, определяются, как известно, дифференциальным законом: градиентом скорости в рассматриваемой точке и коэффициентом внутреннего трения:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (36)$$

Карман исследует возможность применения дифференциального закона и к турбулентным напряжениям. Для того чтобы такой закон был возможен, необходимо, чтобы скорости пульсаций, дополнительные к основной скорости рассматриваемой точки в потоке, будучи связаны между собой, не создавали перемещений жидкости на большие расстояния. Затем необходимо, чтобы в различных точках потока эти скорости были подобны между собой.

Карман принимает еще одну предпосылку, которая, впрочем, не является безусловно необходимой для дальнейших выводов. Он предполагает, что если мы отнесем движение к подвижной системе координат, движущейся со средней основной скоростью в рассматриваемой точке потока, то скорости пульсаций в этой точке будут стационарны относительно этой координатной системы. Нетрудно дать этим предположениям математическое выражение. Предположим все движение двухмерным, а среднюю основную скорость U в направлении координат x — зависящей только от координаты y в поперечном к основному потоку направлении.

Начало принятой подвижной системы координат примем в рассматриваемой точке. В окрестности этой точки мы можем представить основную скорость в виде ряда:

$$U = U_0' y + \frac{U_0''}{2} y^2 + \dots \quad (37)$$

Если ψ есть функция тока скоростей пульсации, то полная функция Ψ тока будет равна:

$$\Psi = \frac{U_0' y^2}{2} + \frac{U_0'' y^3}{6} + \dots + \psi(x, y). \quad (38)$$

При переходе к другим точкам функция ψ должна изменяться с соблюдением подобия, а потому ее значения будут отличаться только множителем A , являющимся мерой интенсивности пульсации, если мы введем масштаб l для расстояний в поле скоростей.

Таким образом если мы положим

$$x = l\xi, \quad y = l\eta, \quad \psi = A f(\xi, \eta), \quad (39)$$

то функция f уже не будет зависеть от той точки, в которой мы приняли начало системы координат.

Рассматривая дифференциальные уравнения Эйлера для плоского установившегося движения идеальной жидкости:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

исключим из них давление p , дифференцируя первое по y , а второе по x , и введем функцию тока ψ , определяемую равенствами:

$$u = U + u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где u' и v' являются составляющими скорости пульсации. Мы получим:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi = 0, \quad (40)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

есть оператор Лапласа.

Подставляя вместо Ψ написанное выше выражение (38), мы получим для точек в ближайшей окрестности к рассматриваемой точке уравнение:

$$\left(U_0' y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} U_0'' - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = 0, \quad (41)$$

а в безразмерных количествах f , ξ и η :

$$U_0' l \eta \frac{A}{l^3} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi} U_0'' + \frac{A^2}{l^4} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (42)$$

причем дифференцирование функции f производится теперь по новым переменным ξ и η . Штрих у U означает, однако, дифференцирование по y . Для того чтобы функция f была независима от рассматриваемого начала координат, следовательно, независима и от A_1 , l_1 , U_0' и U_0'' , необходимо, чтобы коэффициенты этого дифференциального уравнения были независимы от f . Деля уравнение (42) на $\frac{A^2}{l^4}$, получим:

$$\frac{U_0'}{A} l^2 \eta \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - U_0'' \frac{l^3}{A} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (43)$$

Таким образом должно быть:

$$U_0' \frac{l^2}{A} = \text{const.}, \quad U_0'' \frac{l^3}{A} = \text{const.},$$

или

$$U_0' \sim \frac{A}{l^2}, \quad U_0'' \sim \frac{A}{l^3}.$$

(знак $\sim$ означает пропорциональность), или иначе:

$$\left. \begin{aligned} l &\sim \frac{U_0'}{U_0''}, \\ A &\sim \frac{U_0'^3}{U_0''^2} \sim l^3 U_0'. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Как показал Бетц¹⁾, тот же результат может быть получен еще следующим наглядным образом: в определенном слое течения, имеющем основную скорость U_0 , пульсации скорости u происходят от того, что частицы жидкости переносятся поперечным турбулентным движением из соседних слоев, имеющих основную скорость, большую, или меньшую U_0 . Эти частицы, проникая в рассматриваемый слой, сохраняют при этом свою первоначальную скорость.

Если эти частицы приносятся из слоев потока, находящихся на расстоянии l_1 от рассматриваемого слоя, то их скорость равна $U_0 \pm l_1 U_0'$, и пульсации u' скорости u будет равна в рассматриваемом слое:

$$u' = \pm l_1 U_0'. \quad (45)$$

Мы можем сделать и дальнейшие выводы в этом направлении. Помимо линейной скорости поперечное перемещение частиц жидкости переносит и вихревой вектор:

$$\zeta = \text{rot } U = U'.$$

При этом $\zeta_0 = \text{rot } U_0 = U_0'$ есть его среднее значение в рассматриваемом слое. Значение же его в слоях, лежащих на расстоянии l_1 , будет равно:

$$\zeta = \zeta_0 \pm l_1 \zeta_0' = \zeta_0 \pm l_1 U_0''.$$

Таким образом вихревой вектор у переносимых масс будет отличаться от значения его в рассматриваемом слое на количество:

$$\zeta - \zeta_0 = \pm l_1 U_0''.$$

Эти переносимые массы можно рассматривать как вихри с правым и левым направлениями вращения. Если l_2 есть их среднее расстояние друг от друга, то их диаметр пропорционален l_2 . Поле турбулентных пульсаций можно рассматривать как поле скоростей, создаваемое этими вихрями. Для скорости пульсации v' между этими вихрями мы получаем значение, в среднем пропорциональное

$$v' \sim l_2 (\zeta - \zeta_0) \sim l_2 l_1 U_0''. \quad (46)$$

По сделанному предположению в поле скоростей пульсации сохраняется подобие и потому должна соблюдаться пропорциональность количеств:

$$u' \sim v' \text{ и } l_1 \sim l_2,$$

так что вместо l_1 и l_2 можно ввести один масштаб длины l .

¹⁾ A. Betz, Die v. Kármánsche Aehnlichkeitsüberlegung für turbulente Vorgänge in physikalischer Auffassung; Z. f. angew. Math. u. Mech., т. XI, стр. 397, 1931.

В таком случае из равенств (45) и (46) мы можем вывести:

$$lU_0' \sim l^2 U_0'',$$

или

$$l \sim \frac{U_0'}{U_0''},$$

что и согласуется с результатом Кармана.

Выше для турбулентного касательного напряжения τ мы получили формулу:

$$\tau = -\rho \overline{u'v'},$$

где u' и v' означают составляющие скоростей пульсации. Следовательно,

$$\tau = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

или

$$\tau = \rho l^2 U_0'^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}. \quad (48)$$

Так как f не зависит от x и y , то тем самым подтверждается уравнение Прандтля для длины пути перемешивания:

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2. \quad (49)$$

Кроме того, для l получаем выражение в явной форме:

$$l = \kappa \frac{dU}{dy} \left| \frac{d^2 U}{dy^2} \right| \quad (50)$$

с универсальной безразмерной константой κ .

Об области применимости вышеприведенных рассуждений можно заранее сказать, что она кончается там, где обращаются в нуль U' или U'' , так как тогда ψ уже нельзя, как это сделано выше, приближенно выразить уравнением (41) в окрестности рассматриваемой точки. Легко показать, что из прочих точек особо выделяется точка, в которой производная основного движения меняет свой знак (в середине канала), так что по обеим сторонам находится жидкость с более слабым движением. Само собой понятно, что все рассуждение остается неполным до тех пор, пока действительно не дано решения уравнения (41).

Вывод закона распределения скоростей в трубе и канале. С помощью формул (49) и (50) для касательного напряжения и длины пути перемешивания легко вычислить закон распределения скоростей в канале или трубе; касательное напряжение здесь распределяется линейно, так что если τ_0 есть касательное напряжение у стенки, а y — расстояние от середины трубы и r — радиус трубы, то имеем:

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{r}.$$

С другой стороны, согласно уравнениям (49) и (50) имеем:

$$\tau_0 \frac{y}{r} = \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = \rho \kappa^2 \frac{\left(\frac{dU}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)^2},$$

или

$$\frac{U''}{U'^2} = \kappa \frac{\sqrt{r}}{v_*} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}},$$

где

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Это уравнение можно непосредственно проинтегрировать:

$$-\frac{1}{U'} = 2\kappa \frac{\sqrt{r}}{v_*} (\sqrt{y} - a),$$

где a есть постоянная интегрирования, откуда получаем:

$$U' = \frac{1}{2\kappa} \frac{v_*}{\sqrt{r}} \frac{1}{(a - \sqrt{y})}.$$

Постоянная интегрирования a определяется из граничных условий для U' . Для очень больших значений числа Рейнольдса $\frac{dU}{dy}$ вблизи стенки очень велико и приближается к ламинарному значению $\frac{dU}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu}$, очень большому вследствие малости μ . Не делая большой ошибки, мы можем то место, где $\frac{dU}{dy}$ обращается в бесконечность, отождествить со стенкой трубы. Тем самым находим постоянную интегрирования:

$$a = \sqrt{r} \quad \text{и} \quad \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{2\kappa} \frac{v_*}{\sqrt{r}} \frac{1}{(\sqrt{r} - \sqrt{y})}.$$

Интегрируя между пределами 0 и y , получаем:

$$\frac{U_{\max} - u}{v_*} = 1 - \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{y}{r}} \right) + \sqrt{\frac{y}{r}} \right]. \quad (51)$$

Согласно этому решению, длина пути перемешивания, если идти от стенки, линейно возрастает, в чем можно легко убедиться следующим образом. В этой области касательное напряжение приблизительно еще равно τ_0 , так что здесь справедливо уравнение:

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 \frac{U'^4}{U'^2}.$$

Следовательно, полагая расстояние от стенки равным y , имеем:

$$-\int_r^{r-y} \frac{U''}{U'^2} dy = \left[\frac{1}{U'} \right]_{r-y}^r = \int_r^{r-y} v_* dy = \frac{\kappa y}{v_*},$$

причем постоянная интегрирования, ввиду дальнейшего уточнения (см. раздел о законе сопротивления), положена приближенно равной нулю,

так как U' у стенки действительно очень велико. Поэтому:

$$U' = -\kappa v_* \cdot \frac{1}{y_1^2}$$

и

$$l = \kappa \left(\frac{U'}{U''} \right) = \kappa y_1, \quad (52)$$

что и требовалось доказать. Из фиг. 53 и 54 видно, в какой мере наши эксперименты подтверждают это соотношение.

Закон сопротивления. Кроме изложенной теории Карман дал очень удовлетворительное объяснение закона сопротивления в гладких и шероховатых трубах. Он исходит из той предпосылки, что длина пути перемешивания ($l = \kappa y$, где y означает теперь расстояние от стенки), начиная от стенки, возрастает и изменяется во всех трубах в общем подобно и независимо от характера стенок и вязкости, т. е.

$$\frac{l}{r} = \kappa \frac{y}{r} \cdot f\left(\frac{y}{r}\right),$$

причем $f = 1$ для малых $\left(\frac{y}{r}\right)$, или

$$l = \kappa y f\left(\frac{y}{r}\right); \quad (53)$$

при этом, разумеется, исключается область, непосредственно примыкающая к стенке, где имеет место ламинарное течение. Условие равновесия имеет вид:

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r} \right),$$

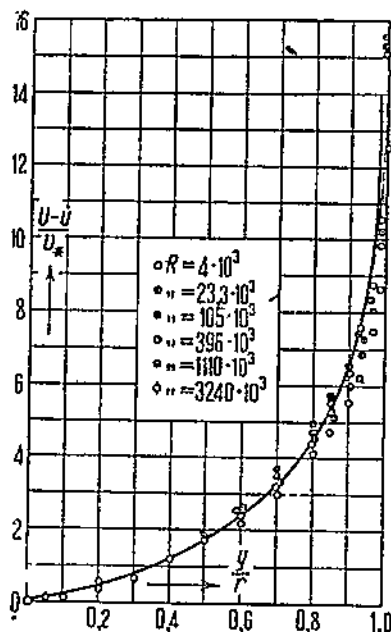
или, на основании уравнения (53):

$$\kappa \cdot y \cdot f\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = v_*^2 \sqrt{\left(1 - \frac{y}{r} \right)};$$

интегрируя в пределах y и r , получаем:

$$U_{\max} - u = v_* \int_y^r \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{y}{r} \right)}}{\kappa y f\left(\frac{y}{r}\right)} \cdot dy = v_* g\left(\frac{y}{r}\right), \quad (54)$$

где g есть одна и та же функция для всех гладких труб. Значения $\frac{U_{\max} - u}{v_*} = f\left(\frac{y}{r}\right)$ вычислены из данных наших опытов и приведены



Фиг. 54. $\frac{U_{\max} - u}{v_*}$ в функции от $\frac{y}{r}$.

Таблица 7. $\frac{U-u}{v_g}$ в функции от r

R	$\frac{U-u}{v_g}$	4	5,1	9,2	16,7	23,3	43,4	105	235	396	725	1110	1596	2350	2790	3240
$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$	$\frac{U-u}{v_g}$
1,00	12,52	12,92	13,43	13,50	15,20	15,50	14,50	16,65	16,65	16,20	14,90	15,60	16,00	13,09	13,80	15,10
0,98	8,06	8,98	9,15	8,05	9,65	9,48	10,60	10,59	10,59	10,20	10,54	11,06	11,05	10,36	10,50	10,54
0,96	7,40	7,65	7,80	7,45	8,06	8,00	8,88	8,95	8,95	8,50	8,71	8,83	9,11	8,70	9,30	8,90
0,93	6,20	6,35	6,70	6,30	6,86	6,74	7,51	7,64	7,64	7,35	7,31	7,59	7,51	7,39	7,51	7,50
0,90	5,53	5,63	5,74	5,67	6,06	5,99	6,62	6,66	6,66	6,45	6,45	6,55	6,41	6,45	6,47	6,45
0,85	4,69	4,73	4,70	4,77	5,10	5,05	5,61	5,58	5,58	5,45	5,23	5,35	5,49	5,25	5,23	5,20
0,80	4,04	4,05	4,07	4,14	4,42	4,35	4,84	4,65	4,65	4,61	4,56	4,52	4,50	4,45	4,40	4,45
0,76	3,02	3,05	3,10	3,20	3,28	3,24	3,52	3,50	3,50	3,45	3,40	3,36	3,28	3,28	3,18	3,30
0,60	2,26	2,32	2,32	2,33	2,42	2,38	2,58	2,64	2,64	2,58	2,52	2,50	2,40	2,40	2,38	2,40
0,50	1,68	1,71	1,74	1,73	1,74	1,75	1,89	1,95	1,95	1,87	1,80	1,77	1,75	1,70	1,71	1,73
0,40	1,21	1,23	1,20	1,24	1,23	1,19	1,26	1,3	1,3	1,31	1,24	1,20	1,17	1,11	1,17	1,56
0,30	0,81	0,83	0,84	0,83	0,77	0,78	0,84	0,86	0,86	0,82	0,80	0,76	0,75	0,70	0,77	0,72
0,20	0,39	0,48	0,52	0,48	0,43	0,45	0,47	0,57	0,57	0,46	0,45	0,40	0,39	0,34	0,42	0,36
0,10	0,13	0,20	0,19	0,19	0,143	0,184	0,158	0,20	0,20	0,16	0,16	0,15	0,14	0,09	0,17	0,13
0,04	0,05	0,07	0,065	0,06	0,046	0,067	0,052	0,03	0,03	0,07	0,04	0,04	0,05	0,03	0,05	0,05
0,02	0,03	0,02	0,026	0,04	0,023	0,037	0,026	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02
0,00	0,00	0,00	0,000	0,00	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Обозначения: U — максимальная скорость; u — скорость; $v_g = \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ — скорость касательного напряжения; ρ — напряжение стенки; $q = \rho \frac{U^2}{2}$ — динамическое давление, соответствующее максимальной скорости; σ — плотность; y — расстояние от срединной трубы; r — радиус

в таблице 7. Эта зависимость изображена на фиг. 54. Сплошная кривая на этой фигуре изображает закон скоростей по уравнению (51) с $\kappa = 0,36$. Пунктирная кривая проведена через экспериментальные точки. Заметно, что вблизи стенки вычисленная кривая скоростей обнаруживает отклонение от экспериментальной. Это происходит оттого, что здесь имеет место влияние вязкости, и поэтому условие подобия не соблюдается.

Трение или шероховатость оказывает, согласно изложенному, влияние на внутреннюю часть только в форме пограничного условия. Это условие для гладких труб Карман находит следующим образом. В тонком слое у стенки толщиной δ скорость определяется только вязкостью; к этому слою непосредственно должно примыкать распределение скоростей, вычисленное с помощью длины пути перемешивания на основании предыдущих формул. Это, конечно, очень упрощенная схема влияния вязкости. Длина l должна, таким образом, убывать лишь до значения $\kappa\delta$. С другой стороны, следуя известному ходу мысли, который привел Прандтля и Кармана к законам распределения скорости у стенки (между прочим, к степенному закону с показателем $\frac{1}{7}$), заключаем, что δ может зависеть только от физических величин вблизи самой стенки τ_0 , ρ , μ . Поэтому, положим:

$$\delta = \frac{\alpha}{\kappa} \cdot \frac{\nu}{v_*},$$

где α есть опять безразмерная постоянная, независимая от числа Рейнольдса. В ламинарном слое $\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}$, следовательно, на границе слоя скорость равна:

$$U_1 = \frac{\alpha}{\kappa} v_*.$$

Скорость вне ламинарного слоя равна:

$$U = \int_0^y v_* \sqrt{1 - \frac{y}{r}} \frac{1}{\kappa y f\left(\frac{y}{r}\right)} dy + U_1.$$

Так как главное возрастание скорости происходит очень близко от стенки, то интегрирование можно провести, полагая $f\left(\frac{y}{r}\right) = 1$. Таким путем с новыми постоянными c и β получим приближенно:

$$U_{\max} = \frac{1}{\kappa} v_* \left[c - \ln \frac{\delta}{\kappa} + \alpha \right] = \frac{1}{\kappa} v_* \left[\ln \frac{r \cdot v_*}{\nu} + \beta \right]. \quad (55)$$

Вводя коэффициент сопротивления, отнесенный к максимальной скорости:

$$\psi = \frac{2}{U_{\max}^2} v_*^2,$$

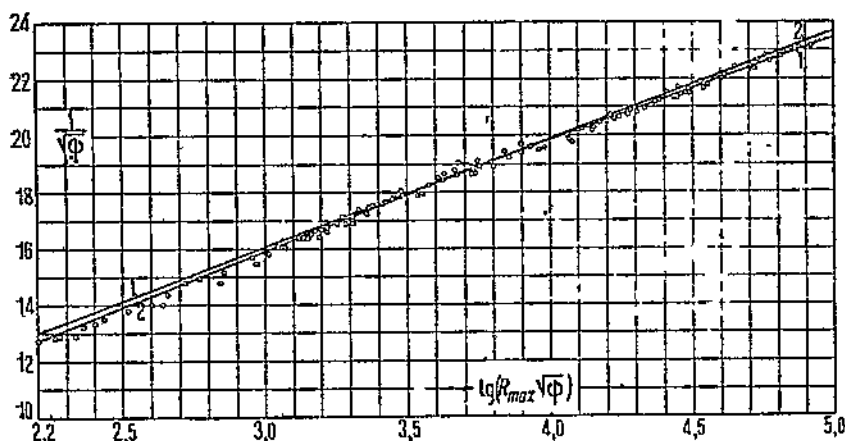
и соответствующее число Рейнольдса

$$R_{\max} = \frac{U_{\max} r}{\nu},$$

мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = \alpha + \frac{1}{\kappa \sqrt{2}} \ln (R_{\max} \sqrt{\psi}). \quad (56)$$

Определенные опытным путем числовые значения $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ помещены в таблице 8 и изображены на фиг. 55. Ординатой здесь является $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$, а абсциссой — обыкновенный логарифм от $R_{\max} \sqrt{\psi}$. Так как подобие, строго говоря, имеет место только для идеальных жидкостей, и поэтому для сравнения с экспериментом годятся лишь такие потоки, внутри которых влияние вязкости очень слабо, то прямая 1 проведена через такие точки, в которых практически отсутствует влияние вязкости. Фиг. 55 показывает, что при значениях, меньших чем $\lg(R_{\max} \sqrt{\psi}) = 3,6$,



Фиг. 55. $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ в функции от $\lg(R_{\max} \sqrt{\psi})$.

имеет место отклонение от вычерченной прямой. Отклонение это растет с уменьшением $\lg(R_{\max} \sqrt{\psi})$. Это значит, что влияние вязкости становится все сильнее с уменьшением числа Рейнольдса. Уравнение рассматриваемой прямой имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = A + B \lg(R_{\max} \sqrt{\psi}). \quad (56a)$$

Постоянные A и B получены из графика; именно: $A = 4,75$, $B = 3,77$. Как показывает рассуждение, уравнение этой прямой справедливо для всех потоков, свободных от влияния вязкости. Вследствие этого мы имеем право экстраполировать зависимость $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ от $\lg(R_{\max} \sqrt{\psi})$ на сколько угодно большое $R_{\max}$.

Таблица 8. $\frac{1}{V\psi}$ в функции от $\lg(R_{\max} V\psi)$.

$\%$	$U_{\max}$ см/сек	$R_{\max} \cdot 10^{-3}$	τ_0 дина/см ²	$R_{\max} \cdot V\psi \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{V\psi}$	$\%$	$U_{\max}$ см/сек	$R_{\max} \cdot 10^{-3}$	τ_0 дина/см ²	$R_{\max} \cdot V\psi \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{V\psi}$
$d = 1$ см											
1	56,2	2,01	0,00995	0,150	12,72	36	901	75,5	1,2025	4,060	18,55
2	63,4	2,35	0,01240	0,183	12,88	37	976	82,6	1,2915	4,430	18,60
3	66,6	2,46	0,01375	0,192	12,82	38	1043	88,1	1,5800	4,710	18,69
4	74,6	2,76	0,0169	0,213	12,95	39	1155	99,5	1,9400	5,310	18,71
5	80,4	2,97	0,0190	0,225	13,18	40	1254	108,2	2,2200	5,700	18,85
6	90,0	3,33	0,0234	0,250	13,30	$d = 3$ см					
7	98,5	3,65	0,0275	0,272	13,42	41	483	63,5	0,371	3,54	17,94
8	125,7	4,65	0,0425	0,337	13,77	42	530	69,8	0,428	3,81	18,31
9	150,8	6,14	0,0695	0,440	13,97	43	592	78,0	0,525	4,22	18,48
10	152,5	5,65	0,0612	0,405	13,95	44	657	88,8	0,652	4,70	18,80
11	174	6,44	0,0753	0,450	14,34	45	754	99,4	0,820	5,38	18,80
12	206	7,63	0,1000	0,518	14,71	46	810	108,0	0,935	5,64	19,15
13	237,8	8,80	0,1300	0,590	14,93	47	901	118,6	1,140	6,20	19,08
14	226	10,20	0,1806	0,690	14,79	48	1045	137,0	1,480	7,05	19,42
15	311	14,22	0,3140	0,920	15,48	49	1198	156,0	1,910	7,96	19,60
$d = 2$ см						50	1304	169,0	2,245	8,60	19,62
16	143,5	10,62	0,0460	0,705	15,12	$d = 5$ см					
17	184,0	13,62	0,0710	0,870	15,62	51	112,5	22,8	0,0245	1,400	16,25
18	218,0	16,14	0,0983	1,030	15,74	52	151,5	30,7	0,0414	1,825	16,84
19	263,0	19,48	0,1370	1,210	16,10	53	210,0	42,6	0,0736	2,340	17,48
20	294,0	21,78	0,1645	1,325	16,40	54	247,0	50,2	0,0985	2,820	17,80
21	265,0	22,2	0,134	1,355	16,40	55	266,0	58,1	0,1300	3,240	17,92
22	290,0	24,3	0,1552	1,463	16,60	56	87,5	18,0	0,01520	1,125	16,04
23	317,0	26,6	0,184	1,695	16,69	57	111,8	23,0	0,0238	1,405	16,36
24	317,3	26,6	0,186	1,698	16,65	58	125,4	25,7	0,0296	1,562	16,45
25	337	28,27	0,207	1,690	16,70	59	142,3	28,0	0,0373	1,680	16,65
26	384	32,2	0,257	1,870	17,10	60	171,0	35,2	0,0511	2,06	17,10
27	424	35,6	0,311	2,070	17,18	61	187,0	38,5	0,0600	2,23	17,25
28	450	37,7	0,340	2,160	17,42	62	218,0	44,8	0,0768	2,55	17,55
29	475	39,9	0,379	2,29	17,41	63	260,0	53,5	0,1075	2,90	17,94
30	812	43,0	0,437	2,460	17,50	64	120,0	23,5	0,0300	1,43	16,48
31	547	46,0	0,495	2,6160	17,58	65	172,0	32,4	0,0529	1,92	16,88
32	596	50,0	0,580	2,825	17,65	66	236,0	46,1	0,0876	2,56	18,02
33	644	54,0	0,662	3,015	17,91	67	503,0	101,7	0,370	5,44	18,70
34	768	64,4	0,925	3,575	18,00						
35	827	69,4	1,032	3,775	18,35						

Продолжение таблицы 8

№	$U_{\max}$ см/сек	$R_{\max} \cdot 10^{-3}$	τ_0 дин/см ²	$R_{\max} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\gamma \bar{\nu}}$	№	$U_{\max}$ см/сек	$R_{\max} \cdot 10^{-3}$	τ_0 дин/см ²	$R_{\max} \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\gamma \bar{\nu}}$
68	468,0	121,5	0,360	6,43	18,95	96	1120	780,0	1,350	35,70	21,82
69	671,0	130,0	0,610	7,00	19,42	97	1170	825,0	1,240	37,50	21,98
70	770,0	155,8	0,800	8,00	19,50	98	1045	746,0	1,170	34,20	21,82
71	856,0	232,0	0,946	11,70	19,84	99	793	555,0	0,695	25,80	21,50
72	858,0	232,0	0,940	11,60	20,03	100	882	617,0	0,850	28,50	21,65
73	1068,0	285,0	1,425	14,10	20,25	101	958	671,0	1,000	31,03	21,65
74	1256,0	388,0	1,850	18,70	20,82	102	1103	775,0	1,305	35,40	21,92
$d = 10$ см						103	306	141,0	0,1284	7,33	19,26
75	405	187,0	0,217	9,52	19,60	104	336	155,0	0,1530	7,98	19,42
76	442	204,5	0,230	10,25	19,95	105	364	163,0	0,177	8,59	19,57
77	458	211,5	0,273	10,70	19,80	106	384	177,0	0,197	9,05	19,55
78	545	552,0	0,373	12,50	20,21	107	846	347,0	0,850	16,75	20,71
79	562	261,0	0,396	12,92	20,21	108	937	387,5	1,040	18,70	20,70
80	596	276,0	0,440	13,60	20,32	109	1168	519,0	1,557	24,55	21,25
81	622	288,0	0,480	14,20	20,29	110	1528	670,0	2,540	31,00	21,65
82	666	309,0	0,544	15,15	20,42	111	1949	885,0	4,000	40,3	22,30
83	693	324,0	0,585	15,80	20,50	112	2020	920,0	4,170	41,6	22,13
84	770	346,0	0,710	16,75	20,65	113	1620	978,0	2,675	44,75	22,38
85	813	355,5	0,790	17,70	20,65	114	2212	1005,0	5,000	45,2	22,25
86	896	404,0	0,943	19,36	20,85	115	1869	1169,0	3,550	52,0	22,42
87	1015	420,0	1,200	20,04	20,22	116	1870	1183,0	3,540	52,9	22,44
88	948	430,5	1,055	20,60	20,86	117	2017	1220,0	4,030	54,0	22,65
89	976	450,0	1,110	21,48	20,96	118	2207	1318,0	4,780	57,6	22,82
90	1085	500,0	1,340	23,60	21,10	119	2208	1345,0	4,850	59,2	22,68
91	915	594,0	0,930	27,80	21,36	120	2465	1135,0	6,250	51,0	22,31
92	1443	640,0	2,270	29,80	21,50	121	2300	1470,0	5,200	64,2	22,80
93	1015	660,0	1,138	30,70	21,50	122	2446	1650,0	5,800	71,5	23,0
94	1084	613,0	1,305	28,60	21,45	123	2453	1610,0	5,86	70,0	23,0
95	1155	750,0	1,440	34,80	21,80	124	2525	1701,0	6,04	73,5	23,1
						125	2756	1930,0	7,20	83,2	23,2

Обозначения: $\phi = \frac{\tau_0}{q}$ — коэффициент сопротивления, отнесенный к максимальной скорости; τ_0 — касательное напряжение у стенки; $q = r \frac{U^2}{2}$ — динамическое давление, соответствующее максимальной скорости; r — плотности; $R = \frac{Ur}{\nu}$ — число Рейнольдса, соответствующее максимальной скорости; r — радиус трубы; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Кроме того, нами проведена для дальнейших приближенных расчетов вторая прямая 2, учитывающая главным образом точки в средней области; ее уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = 4,16 + 3,90 \lg(R_{\text{max}} \sqrt{\psi}). \quad (56b)$$

Выводы Прандтля из принципа подобия. Основная идея изложенной выше теории подобия Кармана заключается в допущении геометрического и механического подобий механизма турбулентного перемешивания. Вводя гипотезу, что турбулентное движение пульсации в разных местах основного потока отличается лишь масштабами длины и времени, Карман приходит к своему универсальному закону распределения скоростей в каналах и трубах. При этом у скорости основного потока $u = u(y)$ рассматриваются только первая и вторая производные $\frac{du}{dy}$ и $\frac{d^2u}{dy^2}$. Прандтль стоит на точке зрения, что такого подобия скоростей пульсации, строго говоря, можно ожидать лишь тогда, когда и основное среднее движение удовлетворяет тому же подобию.

Пусть 1 и 2 суть две точки профиля основного потока (фиг. 56); в таком случае при переходе от точки 1 к точке 2 масштаб длины следует изменить в отношении y , а масштаб времени — в отношении $\frac{y}{u}$ (y есть расстояние от оси подобия). Само общее распределение скоростей $u(y)$, удовлетворяющее подобию, т. е. такое распределение, кривая которого при изменении масштабов для y и u переходит сама в себя, выражается уравнением:

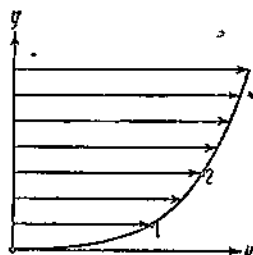
$$u = ay^n + b,$$

где a и b суть постоянные. Выше мы ввели количество v_* , характерное для турбулентного движения:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (\tau_0 = \rho v_*^2).$$

Это количество, имеющее размерность скорости и определенное таким способом посредством касательного напряжения τ_0 , можно рассматривать в качестве меры возмущенного турбулентного движения. Две системы координат, движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью, эквивалентны с точки зрения подобия. Поэтому скорость пульсации в любой точке потока не может зависеть от скорости u основного потока, а лишь от значений производных $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ в этой точке и, кроме того, от расстояния y точки от оси подобия. Прандтль дает поэтому следующее простое выражение, в котором показатели p и q являются сначала неопределенными:

$$v_* \sim y^p \left(\frac{du}{dy} \right)^q. \quad (58)$$



Фиг. 56.

Единственные значения, при которых эта формула правильна с точки зрения размерности, это $p=1$, $q=1$, так что мы получаем:

$$v_* = \kappa \cdot y \frac{du}{dy},$$

где κ есть универсальная постоянная. В качестве простейшего случая Прандтль допускает, что $\tau = \text{const.}$, а тем самым $v_* = \text{const.}$ Тогда последнее уравнение можно интегрировать; при этом получаем:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + \text{const.} = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right). \quad (59)$$

О постоянной y_0 можно сказать, что она имеет размерность длины. Она является мерой толщины ламинарного слоя, непосредственно прилегающего к стенке. Единственно возможная длина, которую можно выразить при помощи постоянных количеств, характерных для турбулентного потока, это есть $\frac{v}{v_*}$. Поэтому напомним:

$$y_0 = \text{число} \cdot \frac{v}{v_*} = m \frac{v}{v_*}, \quad (60)$$

после чего уравнение (59) принимает вид:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \left(\ln \frac{y \cdot v_*}{v} - \ln m \right),$$

или

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y \cdot v_*}{v} - \ln m \right). \quad (61)$$

Полагая

$$\frac{u}{v_*} = \varphi \quad \text{и} \quad \frac{y \cdot v_*}{v} = \eta,$$

получаем:

$$\varphi = A + B \ln \eta. \quad (62)$$

Измерения же дают значения: $A = -\frac{1}{\kappa} \ln m = 5,5$; $B = \frac{1}{\kappa} = 2,5$, откуда $\kappa = 0,40$ и $m = \frac{1}{9}$.

Порядок величины толщины δ ламинарного слоя таким образом получается равным:

$$y_0 = \frac{1}{9} \frac{v}{v_*},$$

причем здесь ничего еще не говорится о числовом коэффициенте при y_0 . Уравнение (62) дает такое же выражение для распределения скоростей, как и то, к которому приходит Карман на основе своей теории подобия; этого, впрочем, и следовало ожидать.

6. Закон сопротивления.

Определенный выше коэффициент сопротивления $\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{q}$ вычислен в зависимости от числа Рейнольдса в очень широкой области и изображен в логарифмическом масштабе на фиг. 57 (см. также таблицу 9). Нанесенные точки изображают значения $\lg(1000 \lambda)$, начиная от очень

Таблица 9. $\lg \lambda$ и $\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$ в функции от $\lg R$ и $\frac{1}{\lambda}$ в функции от $\lg R \sqrt{\lambda}$.

№	$\bar{u}$ см/сек	ν см ² /сек	$R \cdot 10^{-11}$	$\frac{d\bar{u}}{dx} \text{ см/сек}$	λ	$R \sqrt{\lambda} \cdot 10^{-11}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{\bar{u}}{U_{\max}}$
$d = 1 \text{ см}$								
1	42,9	0,0140	3,07	0,0398	0,0426	0,634	4,85	0,760
2	49,5	0,0135	3,59	0,0496	0,0414	0,780	4,92	0,765
3	51,4	0,0135	3,81	0,0550	0,0408	0,770	4,95	0,770
4	57,6	0,0135	4,27	0,0676	0,0399	0,854	5,00	0,771
5	62,0	0,0135	4,60	0,0760	0,0388	0,906	5,08	0,771
6	70,2	0,0135	5,20	0,0936	0,0372	1,004	5,18	0,780
7	76,0	0,0135	5,70	0,1100	0,0363	1,086	5,25	0,780
8	98,5	0,0135	7,30	0,1700	0,0343	1,352	5,43	0,784
9	118,8	0,0135	8,81	0,238	0,0326	1,590	5,54	0,788
10	121,0	0,0135	8,97	0,245	0,0329	1,626	5,52	0,794
11	137,5	0,0135	10,9	0,3012	0,0311	1,800	5,67	0,791
12	163,3	0,0135	12,1	0,400	0,0294	2,076	5,83	0,793
13	189,0	0,0135	14,0	0,520	0,0285	2,362	5,92	0,795
14	226,0	0,0135	16,7	0,723	0,0278	2,785	6,00	0,811
15	311,0	0,0136	23,0	1,255	0,0264	3,665	6,28	0,815
$d = 2 \text{ см}$								
16	114,6	0,0135	17,0	0,092	0,0274	2,81	6,04	0,800
17	148,4	0,0135	22,0	0,142	0,0253	3,50	6,29	0,807
18	175,5	0,0135	26,0	0,1968	0,0250	4,11	6,33	0,805
19	212,5	0,0135	31,5	0,274	0,0237	4,85	6,50	0,806
20	240,0	0,0135	35,6	0,329	0,0224	5,33	6,68	0,816
21	214,4	0,0119	36,0	0,264	0,02243	5,40	6,68	0,809
22	233,6	0,0119	39,2	0,3104	0,0223	5,85	6,70	0,806
23	258,0	0,0119	43,2	0,368	0,02274	6,51	6,64	0,814
24	259,6	0,0117	44,4	0,372	0,0216	6,53	6,80	0,818
25	276,8	0,0119	46,4	0,414	0,0212	6,76	6,66	0,818
26	315	0,0119	53,0	0,514	0,0196	7,42	7,14	0,821
27	349	0,0119	58,7	0,622	0,0201	8,33	7,06	0,823
28	370	0,0119	62,2	0,680	0,0188	8,52	7,30	0,822
29	392	0,0119	66,0	0,756	0,0194	9,19	7,18	0,825
30	425	0,0119	71,4	0,874	0,0190	9,84	7,26	0,830
31	454	0,0119	76,2	0,990	0,01885	10,45	7,28	0,830
32	495	0,0119	83,3	1,160	0,0183	11,41	7,29	0,831
33	533,6	0,0119	89,6	1,324	0,0183	12,11	7,40	0,829

№	μ см сек	γ см ² сек	$R \cdot 10^{-3}$	$\frac{dp}{dx}$ см ²		$R \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{n}{U_{max}}$
34	638	0,0119	107,3	1,850	0,0178	14,33	7,50	0,831
35	687	0,0119	115,2	2,064	0,0172	15,12	7,62	0,831
36	752	0,0119	126,5	2,406	0,0167	16,35	7,74	0,835
37	811	0,0118	137,5	2,783	0,01665	17,74	7,76	0,832
38	863	0,0118	146,0	3,16	0,0166	18,80	7,77	0,830
39	972	0,0116	168,0	3,88	0,01614	21,32	7,88	0,842
40	1053	0,0116	182,0	4,41	0,0157	22,93	7,94	0,840
$d = 3$ см								
41	402	0,0114	106,0	0,495	0,0180	14,22	7,46	0,832
42	439	0,0114	115,5	0,570	0,0174	15,25	7,58	0,828
43	488	0,0114	128,5	0,700	0,0173	16,90	7,60	0,824
44	559	0,0114	147,0	0,870	0,01638	18,81	7,82	0,850
45	627	0,0114	165,0	1,092	0,01638	21,11	7,82	0,831
46	688	0,0114	181,0	1,246	0,01549	22,54	8,04	0,840
47	766	0,0114	199,0	1,520	0,01560	24,86	8,01	0,839
48	870	0,0114	231,0	1,970	0,01500	28,30	8,16	0,841
49	1010	0,0116	266,0	2,545	0,01470	32,30	8,24	0,843
50	1106	0,0115	283,0	2,990	0,01435	34,50	8,35	0,848
$d = 5$ см								
51	91,4	0,01233	37,0	0,0196	0,0230	5,61	6,59	0,812
52	124,4	0,01233	50,3	0,0331	0,02104	7,30	6,90	0,818
53	172,0	0,01230	70,0	0,0588	0,0195	9,78	7,16	0,819
54	203,5	0,01230	82,6	0,0787	0,0186	11,26	7,34	0,819
55	237,0	0,01230	96,4	0,1040	0,01811	12,96	7,44	0,829
56	271,2	0,01214	29,3	0,01215	0,0226	4,40	6,66	0,814
57	300,8	0,01214	37,4	0,0190	0,0226	5,62	6,66	0,812
58	302,5	0,0122	42,0	0,0237	0,0220	6,23	6,75	0,817
59	316,5	0,0122	47,7	0,0298	0,02146	6,98	6,83	0,819
60	340,0	0,01215	57,6	0,0409	0,02042	8,23	7,00	0,819
61	353,5	0,01215	63,2	0,0480	0,01990	8,92	7,09	0,821
62	379,5	0,01215	73,8	0,0630	0,01915	10,21	7,23	0,823
63	414,4	0,01214	88,3	0,0860	0,01830	11,95	7,40	0,825

Продолжение таблицы 9

№	η см/сек	ν см ² /сек	$R \cdot 10^{-3}$	$\frac{dp}{dx}$ дин/см ²	γ	$R \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{u}{u_{max}}$
64	103,0	0,0134	38,4	0,0240	0,0222	5,72	6,71	0,817
65	141,0	0,0133	53,0	0,0423	0,02085	7,65	6,93	0,820
66	194,5	0,0128	76,0	0,0701	0,0182	10,25	7,42	0,824
67	423,5	0,01235	171,5	0,295	0,01617	21,8	7,86	0,842
68	395,0	0,00925	213,4	0,250	0,01567	20,71	7,99	0,844
69	570,0	0,0097	294	0,488	0,01470	35,63	8,26	0,849
70	652,0	0,01235	204	0,640	0,01475	32,18	8,24	0,847
71	733	0,00925	396	0,757	0,0138	41,52	8,51	0,856
72	740,0	0,00925	400	0,752	0,01344	46,40	8,63	0,862
73	912,8	0,00925	493,4	1,140	0,01325	56,8	8,69	0,855
74	1082,0	0,0081	670	1,470	0,01220	74,3	9,02	0,861
$d = 10$ см								
75	345,9	0,01083	318,9	0,0868	0,01421	38,0	8,39	0,854
76	377,1	0,01080	348,6	0,1008	0,01388	41,06	8,49	0,853
77	392,7	0,01083	363,0	0,1092	0,01390	42,80	8,48	0,857
78	465,3	0,01080	431,5	0,1492	0,01342	50,01	8,62	0,856
79	482,8	0,01070	446,8	0,1582	0,01334	51,6	8,66	0,859
80	510,0	0,01079	472,0	0,1760	0,01328	54,40	8,67	0,855
81	533,2	0,01080	493,7	0,1920	0,01324	56,82	8,69	0,857
82	569,1	0,01079	562,6	0,2176	0,01320	60,50	8,71	0,855
83	602,0	0,01072	597,0	0,2340	0,01277	63,30	8,87	0,869
84	660,3	0,0110	690,0	0,2843	0,01277	67,80	8,86	0,858
85	704,0	0,0111	634	0,316	0,0125	70,90	8,95	0,860
86	769,8	0,0110	700	0,387	0,0129	79,50	8,80	0,859
87	876	0,0121	725	0,480	0,01228	80,40	9,02	0,863
88	810	0,0111	737	0,422	0,0126	82,80	8,91	0,854
89	843,4	0,01094	771	0,444	0,01227	85,42	9,02	0,864
90	940,0	0,01086	865	0,536	0,01188	94,24	9,18	0,866
91	790	0,0077	1025	0,372	0,01170	110,9	9,25	0,863
92	1248	0,01125	1108	0,92	0,01159	119,3	9,29	0,864
93	882	0,0077	1148	0,455	0,01146	123,0	9,34	0,869
94	944	0,0077	1225	0,522	0,01150	131,25	9,33	0,871
95	1005	0,0076	1320	0,576	0,01118	139,60	9,46	0,870
96	982	0,0072	1364	0,540	0,0110	143,20	9,53	0,877
97	1020	0,0071	1438	0,596	0,01122	152,3	9,45	0,872
98	900	0,0070	1285	0,471	0,01144	137,5	9,35	0,861

Продолжение таблицы 9

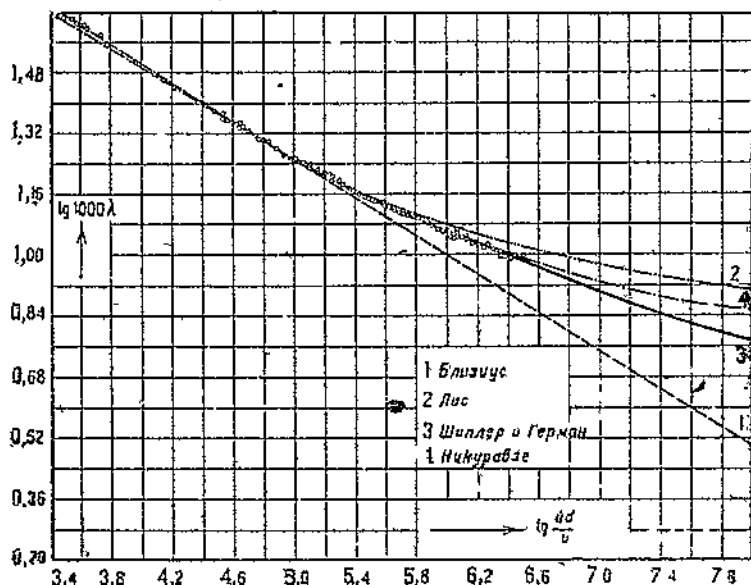
№	$\bar{u}$ см/сек	ν см ² /сек	$R \cdot 10^{-3}$	$\frac{dp}{dx} \frac{d\text{ин}}{\text{см}^2}$	λ	$Re \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{1/\lambda}$	$\frac{u}{u_{\max}}$
99	685	0,0070	979	0,278	0,01161	105,0	9,28	0,864
100	761	0,0070	1088	0,340	0,0115	116,7	9,33	0,862
101	830	0,0070	1185	0,400	0,0114	126,6	9,37	0,866
102	958	0,0070	1368	0,522	0,01115	144,4	9,47	0,863
103	259	0,01087	238,8	0,514	0,0150	29,25	8,17	0,846
104	286,8	0,01083	264,4	0,612	0,01459	31,92	8,29	0,854
105	309,5	0,01083	285,4	0,708	0,01446	34,30	8,32	0,850
106	326,4	0,01083	310,0	0,788	0,01457	36,24	8,28	0,847
107	726,0	0,0122	595	0,340	0,01265	66,90	8,90	0,858
108	806	0,0121	666	0,416	0,01255	74,60	8,93	0,860
109	1013	0,01125	900	0,623	0,0119	98,10	9,17	0,867
110	1325	0,01125	1178	1,015	0,0113	125,2	9,41	0,867
111	1691	0,0110	1539	1,600	0,01098	161,4	9,54	0,868
112	1765	0,0110	1600	1,670	0,0105	164,0	9,76	0,874
113	1410	0,0083	1700	1,070	0,01060	175,1	9,71	0,870
114	1926	0,0083	1850	2,000	0,01058	190,4	9,72	0,871
115	1630	0,0080	2038	1,420	0,01043	208,0	9,80	0,872
116	1630	0,0079	2062	1,415	0,01045	210,5	9,79	0,872
117	1758	0,00825	2130	1,615	0,01029	216,0	9,87	0,875
118	1940	0,0084	2310	1,910	0,00995	230,8	10,02	0,879
119	1930	0,0082	2351	1,94	0,01021	237,5	9,89	0,874
120	2150	0,0110	1964	2,499	0,0105	202,3	9,71	0,872
121	2110	0,0078	2580	2,050	0,00995	257,2	10,02	0,874
122	2150	0,0079	2722	2,317	0,0098	269,5	10,10	0,879
123	2162	0,0077	2810	2,345	0,00985	279,2	10,05	0,878
124	2220	0,0074	3200	2,470	0,00988	298,2	10,05	0,879
125	2425	0,0075	3230	2,88	0,00960	321,0	10,07	0,880

Обозначения: $\bar{u}$ — средняя скорость; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости;

μ — коэффициент вязкости; ρ — плотности; R — число Рейнольдса; d — диаметр трубы; $\frac{dp}{dx}$ — градиент давления; $\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{q}$ — коэффициент сопротивления; $q = \rho \frac{\bar{u}^2}{2}$ — динамическое давление для средней скорости; $U_{\max}$ — максимальная скорость.

малых чисел Рейнольдса, примерно от $3 \cdot 10^3$, до верхней границы. Полученные значения λ до числа Рейнольдса $100 \cdot 10^3$ ($\lg R = 5$) хорошо согласуются с формулой Блазиуса $\lambda_B = \frac{0,316}{R^{\frac{1}{4}}}$, изображенной на

фиг. 57 кривой 1. За этой границей с возрастанием числа Рейнольдса измеренные значения λ все более отклоняются от прямой Блазиуса кверху. На основании опытов Стантона и Пайнелла в пределах чисел



Фиг. 57. $\lg(1000\lambda)$ в функции от $\lg\left(\frac{R}{d}\right)$.

Рейнольдса до значения $R = 460 \cdot 10^3$ ($\lg R = 5,67$ Лис¹⁾) получил формулу следующего вида:

$$\lambda = a + \frac{b}{R^n},$$

а именно:

$$\lambda = 0,0072 + \frac{0,6104}{R^{0,36}}.$$

Так как результаты наших измерений согласуются с результатами Стантона и Пайнелла, то они в этой области могут быть выражены также формулой Лиса. Вне этой области наши измерения обнаруживают отклонения значений сопротивления от кривой Лиса, обозначенной на фиг. 57 цифрой 2. Из этой фигуры видно, что эти отклонения становятся больше с увеличением числа Рейнольдса. В последнее время

¹⁾ С. Н. Lees, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), т. XCI, стр. 46, 1915.

Шиллер и Герман¹⁾ выдвинули, на основании своих и наших опытов, сохраняя вид формулы Лиса, следующую приближенную формулу:

$$\psi = 0,00270 + \frac{0,161}{R^{0,3}},$$

где $\psi = \frac{\lambda}{2}$ и $R = \frac{ur}{\nu}$. Так как вообще принято числа Рейнольдса и коэффициент сопротивления относить к диаметру трубы, то мы преобразовали соответствующим образом формулу Шиллера²⁾, дав ей следующий вид:

$$\lambda = 0,0054 + \frac{0,396}{R^{0,3}}.$$

На фиг. 57 этой формуле соответствует пунктирная кривая 3. Мы видим, что кривая Шиллера совпадает с кривыми Стантона и Паннелла до числа Рейнольдса $R = 4,6 \cdot 10^5$ ($\lg R = 5,67$). Начиная от этого значения, кривая Шиллера согласуется с полученными нами значениями примерно до $R = 2,5 \cdot 10^8$ ($\lg R = 6,4$). Начиная от $\lg R = 6,4$, кривая Шиллера отклоняется от нашей кривой. С увеличением числа Рейнольдса это отклонение становится все больше. Отклонения формул Лиса и Шиллера-Германа от измеренных кривых объясняются тем, что формулы выведены непосредственно на основании опытов и применимы поэтому только до тех границ, до которых доходили эти опыты. Нам удалось, следуя пути, указанному ниже, получить приближенную формулу, примыкающую к верхней границе закона Блазиуса, пригодность которой, повидимому, несомненна до числа Рейнольдса $R = 1 \cdot 10^6$ ($\lg R = 8,0$). Эта формула изображена на фиг. 57 кривой 4. Мы видим, что при верхней границе ($\lg R = 6,4$) эта кривая ответвляется от кривой Шиллера-Германа книзу, а при числе Рейнольдса $1 \cdot 10^8$ сильнее отклоняется от кривой Шиллера, чем последние от кривой Лиса.

Применявшиеся до сих пор методы давали нам формулы только для экспериментально исследованной области. Идеи Кармана дают возможность, однако, принять аналогично построенную формулу, а именно:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A + B \lg(R\sqrt{\lambda}). \quad (64)$$

Разница состоит в том, что Карман относит коэффициент сопротивления к числу Рейнольдса к максимальной скорости и радиусу трубы, тогда как мы используем среднюю скорость и диаметр трубы. Полагая

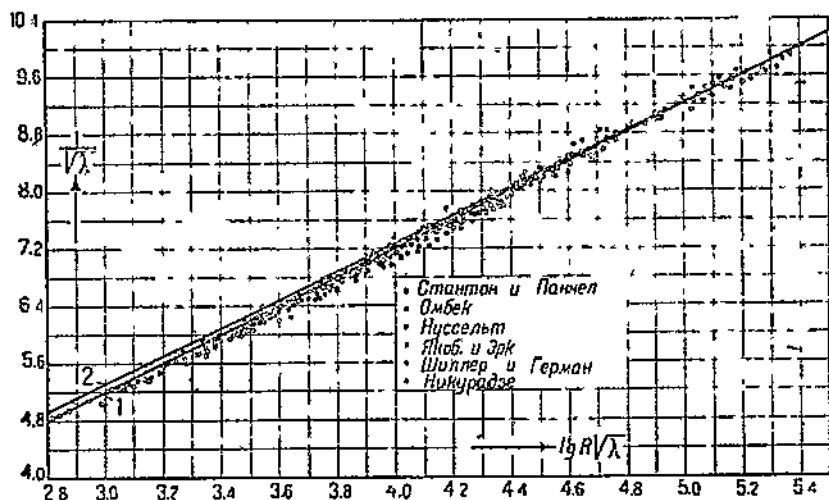
$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = y$ и $\lg(R\sqrt{\lambda}) = x$, приведем это уравнение к виду:

$$y = A + Bx.$$

¹⁾ L. Schiller u. Hermann, Widerstand von Platten u. Rohr bei hohen Reynold'schen Zahlen, Ing. Arch., т. I, № 4, стр. 392, 1930.

²⁾ L. Schiller, Rohrwiderstand bei hohen Reynold'schen Zahlen, Vorträge aus dem Geb. der Aerodyn. u. verwandter Gebiete, Aachen 1929; hrsg. v. A. Güllies, L. Hopf и Th. v. Kármán, стр. 78, Berlin 1930.

На фиг. 58 на основании измерений приведены значения $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в функции $x = \lg(R\sqrt{\lambda})$ (см. также таблицу 9). Это дает прямую 1, а для постоянных A и B значения $A = 0,8$ и $B = 2,0$. На фиг. 58 нанесены также результаты опытов различных исследователей, причем при отыскании прямой было придано результатам Омбека меньше значения, так как его опыты, проведенные над воздухом, были несколько менее надежны (вследствие изменения объема воздуха). Из $x = \lg(R\sqrt{\lambda})$ мы вычисляем значения $R\sqrt{\lambda}$, делим их на $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ и получаем число



Фиг. 58. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в функции от $\lg(R\sqrt{\lambda})$.

Рейнольдса R . Этим путем из предыдущего уравнения находим зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса:

$$\lambda = f(R).$$

С известной степенью вероятности можно ожидать, что и эту формулу можно экстраполировать довольно далеко, почти до $R = \infty$, как формулу Кармана.

На фиг. 59 изображено соотношение $\lambda = f(R)$ в том виде, какой оно принимает, если его экстраполировать на большие значения числа Рейнольдса до $R = 1 \cdot 10^8$, пользуясь полученными из измерений постоянными A и B . Эту кривую мы можем использовать для получения более удобной приближенной формулы для λ , аналогично тому, как Лис и Шиллер и Герман сделали это на основании опытных данных.

Применимость новой формулы начинается там, где кончается справедливость формулы Блазиуса. Верхней границей применения новой

формулы мы считаем $R = 1 \cdot 10^3$. Из кривой 4 на фиг. 57 находим, что постоянные приближенной формулы:

$$\lambda = a + \frac{b}{R^n}$$

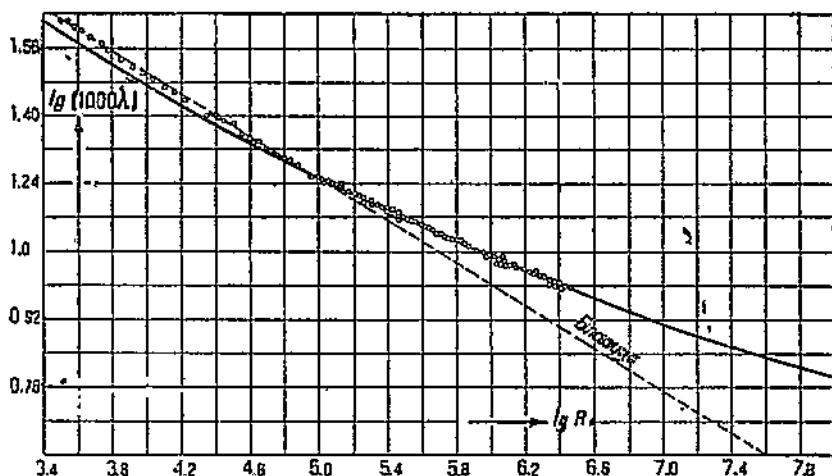
равны:

$$a = 0,0032, \quad b = 0,221, \quad n = 0,237.$$

Таким образом получаем:

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{R^{0,237}}. \quad (65)$$

Для проверки применимости приведенных выше формул Блазуса, Лиса, Шиллера и Германа и наших были подсчитаны по соответству-



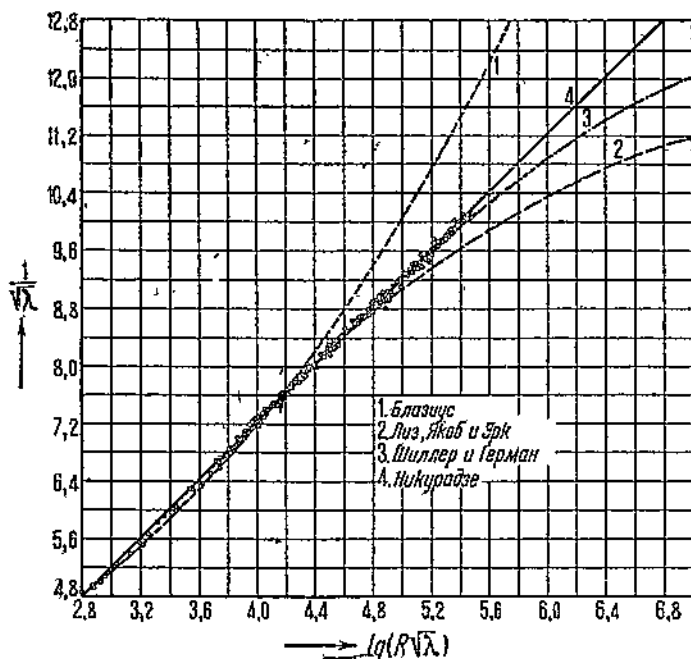
Фиг. 59. $\lg(1000\lambda)$ в функции от $\lg R$.

ющим формулам значения $\frac{1}{\lambda}$ и отложены на фиг. 60 в функции от $\lg(R\sqrt{\lambda})$. Нанесенные на ту же фигуру точки вычислены на основании полученных нами опытных значений. При аргументе $\lg R\sqrt{\lambda} < 3,7$ значения $\frac{1}{\lambda}$ лежат ниже прямой, соответствующей нашей формуле.

Это объясняется тем, что при таких числах Рейнольдса оказывает существенное влияние вязкость. Выше указанной границы влияние вязкости исчезающе мало и соответствующие опытам точки лежат на нашей прямой. Вычисленная по формуле Блазуса кривая 1 для значений $\lg(R\sqrt{\lambda}) < 4,0$ (что соответствует значению числа Рейнольдса R около $40 \cdot 10^3$) отклоняется вниз от прямой 4; выше этого числа Рейнольдса, примерно до $\lg(R\sqrt{\lambda}) = 5,1$ *) (что соответствует числу

*) Обращаем внимание на очевидную ошибку (или опечатку) в числе $\lg(R\sqrt{\lambda}) = 5,1$, несовместимом с характером кривых на фиг. 72. Должно стоять $\lg R = 5,1$. Редакция воздерживается, однако, от того, чтобы вводить исправления в текст статей настоящего сборника.

Рейнольдса R около $100 \cdot 10^3$) кривая Блазиуса совпадает с прямой 4. В своем дальнейшем ходе кривая 1 значительно отклоняется от прямой 4 вверх. Кроме того, кривая 1 обнаруживает, в согласии с предыдущим, что закон Блазиуса применим только до $\lg(R\sqrt{\lambda}) = 5,1$ (что соответствует числу Рейнольдса $R = 100 \cdot 10^3$). Кривые 2 и 3 вычислены по формулам Лиса и Шиллера и соответственно отклоняются от нашей прямой при $\lg(R\sqrt{\lambda}) = 4,7$ (R около $4,5 \cdot 10^5$) и при $\lg(R\sqrt{\lambda}) = 5,25$ (R около $1,9 \cdot 10^6$). Если для кривой 4 мы нанесем значения коэффициента сопротивления для $R > 1 \cdot 10^6$, то и в этом случае будут иметь



Фиг. 50. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в функции от $\lg(R\sqrt{\lambda})$.

место соответствующие отклонения. Для дальнейших приближенных вычислений на фиг. 58 проведена еще вторая прямая 2, уравнение которой имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,55 + 1,95 \lg(R\sqrt{\lambda}).$$

7. Соотношение между средней и максимальной скоростями.

а) Прандтль предложил связать с помощью уравнения (54) закон сопротивления Кармана (56b) с нашим уравнением (64b). Согласно теории Кармана мы имеем уравнение (54):

$$\frac{U-u}{v_*} = f\left(\frac{y}{r}\right),$$

Строя $\frac{U-u}{v_*}$ в виде функции $\left(\frac{y}{r}\right)^2$, можно графическим интегрированием определить среднюю скорость $\bar{u}$, так что мы получаем:

$$\frac{U-\bar{u}}{v_*} = \text{число} = \beta.$$

Интегрирование дает значение $\beta = 4,03$. Связь между законом сопротивления Кармана и нашим устанавливается с помощью этого соотношения следующим образом.

Если подставить

$$R_{\max} = \frac{U r}{v} \quad \text{и} \quad \sqrt{\psi} = 1,414 \frac{v_*}{U},$$

то из уравнения Кармана (56b) получим:

$$\frac{U}{v_*} = A + B \lg 1,414 \left(\frac{v_* r}{v} \right),$$

или

$$\frac{U}{v_*} = A' + B \lg \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right). \quad (67)$$

Аналогичным образом, подставляя

$$R = \frac{\bar{u} 2r}{v} \quad \text{и} \quad \sqrt{\lambda} = 2,828 \frac{v_*}{\bar{u}},$$

из нашего закона сопротивления (64b) найдем:

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = a + b \lg 2,828 \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right),$$

или

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = a' + b \lg \left(\frac{v_* \cdot r}{v} \right), \quad (68)$$

Соотношение (66) требует теперь, чтобы в уравнениях (67) и (68) совпадали постоянные B и b . Это соотношение можно использовать для того, чтобы путем согласования различных диаграмм извлечь наилучшее значение для $B=b$. К этому согласованию относится упомянутая уже выше прямая 2 (фиг. 58). Наилучшим значением $B=b$ оказалось 5,52. Тем самым мы дальше находим:

$$A = 5,87, \quad a = -1,$$

и отсюда

$$A' = 6,68, \quad a' = 2,63.$$

Подставляя эти значения и вычитая уравнения (67) и (68), получим:

$$\frac{U-\bar{u}}{v_*} = 4,08, \quad (69)$$

что хорошо согласуется с указанным выше результатом. На фиг. 61 полученные из опыта значения $\frac{U}{v_*}$ и $\frac{\bar{u}}{v_*}$ нанесены в зависимости от $\lg \frac{v_* \cdot r}{v}$. Обе прямые оказываются параллельными, и разница значений

функций в среднем равна 4,03, как и выше. Уравнение универсального распределения скоростей

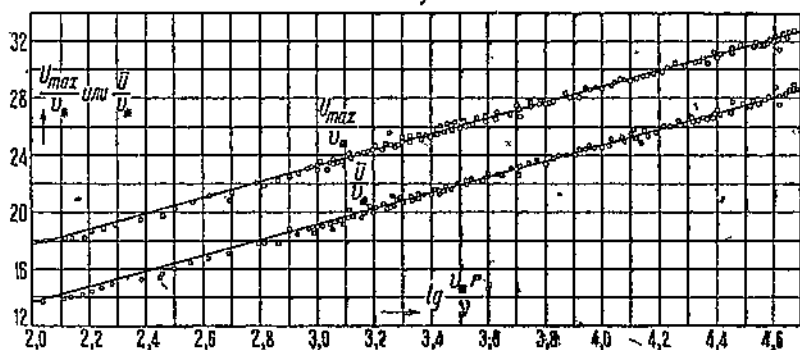
$$\varphi = c_1 + c_2 \lg \eta$$

(если прямую $\varphi = \varphi(\eta)$ провести только через близкие к стенке точки) должно на основании теоретических соображений согласовываться с уравнениями (67) и (68), так как должно быть $c_2 = b$, и, действительно, прямая

$$\varphi = 5,84 + 5,52 \lg \eta$$

хорошо согласуется с полученными из опыта близкими к стенке точками. Числу 5,52 соответствует значение универсальной постоянной Кармана:

$$\kappa = \frac{2,3025}{5,52} = 0,417.$$



Фиг. 61. $\frac{U_{\max}}{U_*}$ и соответственно $\frac{\bar{u}}{U_*}$ в функции от $\lg \left(\frac{v_* r}{\nu} \right)$.

б) Деля уравнения (67) и (68), получаем $\frac{\bar{u}}{U}$ как функцию $\frac{v_* r}{\nu}$, и тем самым как функцию числа Рейнольдса, которое можно выразить через $\frac{v_* \cdot r}{\nu}$, ибо

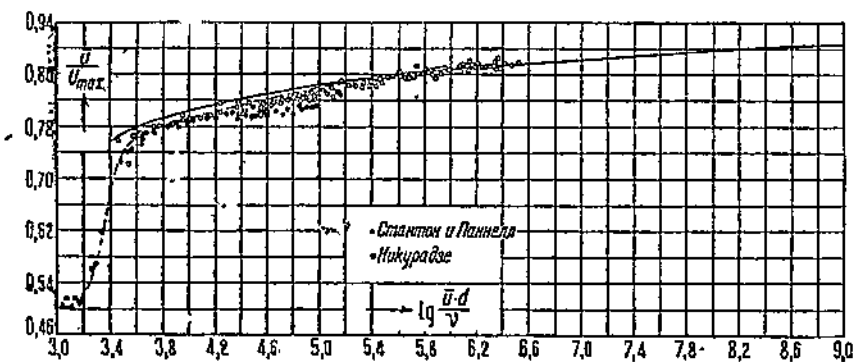
$$R = \frac{2 \bar{u} r}{\nu} = \frac{2 \bar{u}}{U_*} \frac{v_* \cdot r}{\nu} = 2 \cdot 2,828 \left(\frac{v_* \cdot r}{\nu} \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Но $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ в свою очередь может быть выражено через $\frac{v_* \cdot r}{\nu}$ с помощью уравнения (64а). Полученное таким образом соотношение

$$\frac{\bar{u}}{U} = f\left(\frac{\bar{u} \cdot d}{\nu}\right)$$

изображено на фиг. 62 для значений числа Рейнольдса от $3 \cdot 10^3$ до $1 \cdot 10^8$ сплошной кривой. Кроме того, здесь нанесены полученные из опыта значения Стантона и Пэннелла и наши (таблица 9). В области отчетливо выраженного ламинарного потока $\frac{\bar{u}}{U} = 0,5$ верхняя граница

ламинарного потока лежит при $\lg R = 3,1$, что соответствует числу Рейнольдса $R = 12,6 \cdot 10^3$. Мы видим, что до числа Рейнольдса $R = 200 \cdot 10^3$ ($\lg R = 5,4$) соответствующие измерениям точки отклоняются от вычисленной кривой; эти точки соединены пунктирной кривой. Отклонение это объясняется влиянием вязкости, которое не учитывается формулой. Далее, выше числа Рейнольдса $R = 200 \cdot 10^3$ совпадение опытных данных с теоретической кривой довольно хорошее. Результаты измерений Стантона и ПANNELЛА хорошо согласуются с нашими результатами до $\lg R = 4,2$. Выше этой границы имеет место почти постоян-



Фиг. 62. $\frac{u}{U_{\max}}$ в функции от $\lg \left(\frac{u \cdot d}{\nu} \right)$.

ное отклонение. Это отклонение несомненно обусловлено методом измерений. Как уже было упомянуто выше, нами производились неоднократные измерения при различных числах Рейнольдса на расстоянии $20d$ перед выходным поперечным сечением, и результаты были получены те же, что и в наших прежних измерениях.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Целью настоящей работы являлось исследование закономерностей турбулентного течения в гладких трубах для возможно более широкой области чисел Рейнольдса. С этой целью была смонтирована установка, давшая нам возможность получать турбулентное течение воды в круглых трубах до числа Рейнольдса $R = 3240 \cdot 10^3$. Обработкой полученных из наблюдений данных распределения скоростей и падения давления было установлено следующее:

1) Форма распределения скоростей изменяется с изменением числа Рейнольдса, а именно с увеличением числа Рейнольдса кривая распределения скоростей становится все более выпуклой. Сравнение распределения скоростей по измерениям Базена и Стантона с нашими обнаружило хорошее совпадение.

2) Показатель n степенного закона Прандтля ($u = ay^n$, где y есть расстояние от стенки) имеет до числа Рейнольдса $R = 100 \cdot 10^3$ постоянное значение $n = \frac{1}{7}$. При очень малых числах Рейнольдса пока-

затель больше, чем $\frac{1}{7}$. Выше числа Рейнольдса $R = 100 \cdot 10^3$ можно заметить уменьшение показателя n с ростом числа Рейнольдса. При наивысшем числе Рейнольдса $R = 3240 \cdot 10^3$ показатель n достигает значения $\frac{1}{10}$.

Образуя безразмерные выражения из характерных для турбулентного потока вблизи стенки количеств: τ_0 — касательного напряжения у стенки, ν — кинематической вязкости, ρ — плотности, мы получаем закон распределения скоростей для близкой к стенке области для всяких чисел Рейнольдса в виде:

$$\varphi = \varphi(\eta),$$

где

$$\varphi = \frac{u}{u_*}, \quad \eta = \frac{v_* y}{\nu}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Для достаточно больших значений ($\eta > 10$) является достаточно точным соотношение:

$$\varphi = A + B \lg \eta$$

(где A и B суть универсальные постоянные).

3) Был определен коэффициент турбулентного обмена в зависимости от расстояния от стенки. График зависимости безразмерного количества $\frac{e}{v_* r}$ от $\frac{y}{r}$ показывает, что для чисел Рейнольдса, больших чем $R = 100 \cdot 10^3$, распределение значений $\frac{e}{v_* r}$ в поперечном направлении уже перестает зависеть от числа Рейнольдса. Для чисел же Рейнольдса, меньших указанного предела, эта зависимость очень сильная. Далее, обнаружена зависимость от числа Рейнольдса длины l пути перемешивания Прандтля, связанной с турбулентным переносом количеств движения. Во всех точках сечения отношение $\frac{l}{r}$ убывает с увеличением числа Рейнольдса. Для значений числа Рейнольдса, больших предела $R = 100 \cdot 10^3$, относительная длина пути перемешивания $\frac{l}{r}$ становится независимой от числа Рейнольдса. Эта независимость свидетельствует об отсутствии влияния вязкости для чисел Рейнольдса, больших этого предела.

4) Произведено сравнение законов распределения скоростей и закона сопротивления, выведенных из теории подобия Кармана, с данными, полученными измерением. Сравнение дало хорошее совпадение в области больших значений числа Рейнольдса, где не сказывается больше влияние вязкости.

В связи с теорией подобия Кармана изложены новые выводы Прандтля и Бетца.

5) Обозначая через λ коэффициент сопротивления движению потока в трубе:

$$\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{2d}{\rho u^2},$$

можно заключить, что закон Блазиуса

$$\lambda_B = \frac{0,316}{R^{\frac{1}{4}}}$$

подтверждается измерениями до числа Рейнольдса, равного $R = 100 \cdot 10^3$.

Для больших значений числа Рейнольдса справедлива формула:

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{R^{0,237}}.$$

В заключение, в связи с формулами для сопротивления нашей и Кармана, определена связь между средней скоростью в сечении $\bar{u}$ и максимальной скоростью U . Эта связь позволяет установить новые соотношения между различными формулами.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЕЙ В ЗАКРЫТЫХ ТРУБАХ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ И ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМАХ ¹⁾.

Содержание. С помощью термоанемометра, а также фреквенциометра Веккиаки-Гварнаскелли измерялась частота возникновения вихрей Бенара-Кармана, образующихся внутри закрытых труб, а также позади тел, обтекаемых потоком воздуха. Результаты испытаний, проверенные записью осциллографа, подтвердили тот, отмеченный в предыдущем исследовании, факт, что даже при ламинарном режиме и при средних скоростях течения, значительно ниже критических, имеется возможность обнаружить в потоке наличие периодических процессов и, кроме того, убедиться в том, что закон изменения частоты образования вихрей при уменьшении средней скорости одинаков при турбулентном и ламинарном движениях. Не наблюдалось также и резкого изменения этой частоты при прохождении через критическую скорость. Наконец, опыты показывают большое значение этих периодических процессов для передачи тепла путем конвекционных токов.

1. Введение.

Эта работа является продолжением предыдущей, опубликованной недавно в этом же журнале ²⁾, и в которой излагаются результаты экспериментальных исследований, произведенных мной над некоторыми явлениями турбулентности при движении жидкостей внутри цилиндрических труб. Изучение пульсаций скорости внутри потока, порождаемых в общем случае неправильными вибрациями струй жидкости, а также вихрями с собственными периодами вращения, производилось посредством осциллографа, причем измерения делались как в продольном, так и в поперечном направлениях трубы. Хотя полученные результаты могли иметь только качественное значение и давали лишь общие сведения относительно хода явлений, но все же они указывали на изменение характера турбулентного движения (в отношении частоты и размера вихрей) в зависимости от изменения расстояния от оси трубы и от величины средней скорости потока. Из всех полученных осциллограмм можно заключить, что несмотря на большую сложность явлений значительные пульсации скорости всегда дают в результате довольно регулярные периодические колебания потока, которые поэтому могут быть подвергнуты весьма точным и надежным измерениям.

¹⁾ B. Del-Nunzio, La distribuzione dei vortici nelle condotte chiuse in regime turbulento e laminare, Elettrotecnica, № 14, 1931.

²⁾ Elettrotecnica, стр. 730, 1930.

Образование вихрей в массе движущейся жидкости зависит от различных причин; изучение влияния и особенностей каждой из этих причин дало возможность получить результаты, интересные для ознакомления с вихревыми явлениями и довольно полезные во многих приложениях, где играет роль движение жидкостей, как, например, в передаче теплоты путем конвекции. Значительные результаты в исследовании механизма этого процесса и с управляющими им законами были получены только после того, как были изучены не только происходящие при этом процессе термические явления, но также и явления динамического порядка.

Экспериментальное исследование механических характеристик турбулентного режима внутри закрытых каналов производилось уже неоднократно, причем для этой цели изыскивались самые разнообразные приемы и применялись все методы, которыми располагает современная физика, а именно: оптические, с измерением частоты посредством стробоскопических приборов; акустические и механические, причем частоты изучались посредством вибрации тончайших нитей (металлических или каких-либо других), которые, будучи погружены в массу движущейся жидкости, начинали вибрировать с периодом, равным периоду возникновения вихрей. В исследованиях последнего времени употреблялся также анемометр с термонитом, позволявший достигнуть высокой точности в измерениях, в особенности при применении современных методов техники токов высокого напряжения.

2. Приборы и экспериментальная установка.

В этой последней серии опытов производилось измерение частоты вихрей в воздушном потоке внутри цилиндрических труб разного диаметра.

Оборудование было приблизительно такое же, как и в предыдущей серии опытов, а именно: труба из латуни, с внутренним диаметром приблизительно в 15 мм и длиной в 1 м, соединялась на одном конце с резервуаром для сжатого воздуха, который до начала опытов подавался компрессором, проходя на своем пути через особые приемники, наполненные осушающими веществами. После того, как воздух проходил расстояние несколько больше шестидесяти диаметров трубы, он шел далее через короткую эбонитовую трубу, длиной в 5 см, внутренний диаметр которой посредством обработки на токарном станке был совершенно точно подогнан к диаметру латунной трубы. Затем воздух проходил через газометр, по показаниям которого определялась величина средней скорости воздушного потока. В упомянутой эбонитовой трубке помещалась платиновая проволока, нагревавшаяся электрическим током. В цепь, кроме платиновой проволоки (диаметром в 0,015 мм), входила еще аккумуляторная батарея и первичная обмотка маленького трансформатора; вторичный элемент этого трансформатора был соединен с клеммами четырехлампового усилителя, в котором две последние лампы имели противоположное расположение. Частота измерялась при выходе из усилителя посредством измерителя частоты (фреквенциометра) с непосредственным отсчетом помощью звуковых гамм. Этот

фреквенциометр, описанный Веккиаки и Гварнаскелли¹⁾, позволяет делать быстрые отсчеты и поэтому является очень удобным и притом единственным приспособлением для измерений такого рода, когда частота колебаний, вообще говоря, претерпевает значительные изменения.

Пользуясь любезными указаниями Веккиаки, я несколько видоизменил первоначальную схему цепи тока в аппарате, чтобы получить большую чувствительность, необходимую для измерения частот всех возможных значений. Действительно, вследствие незначительной скорости воздуха, а поэтому и низких частот разность потенциалов, имевшая место при выходе из усилителя, была иногда довольно слаба и очень далека от той величины в один вольт, которую необходимо иметь для получения с помощью фреквенциометра надежных результатов при установке по первоначальной схеме. С помощью внесенных видоизменений величина напряжения могла быть даже ниже $\frac{1}{10}$ V. Градуировка фреквенциометра производилась посредством небольшого альтернатора высокого напряжения; кроме того, из показаний амперметра и милливольтметра, соединенных с концами термонити, можно было знать ее температуру, которую старались поддерживать на одном уровне во всех опытах.

3. Измерения у стенки трубы.

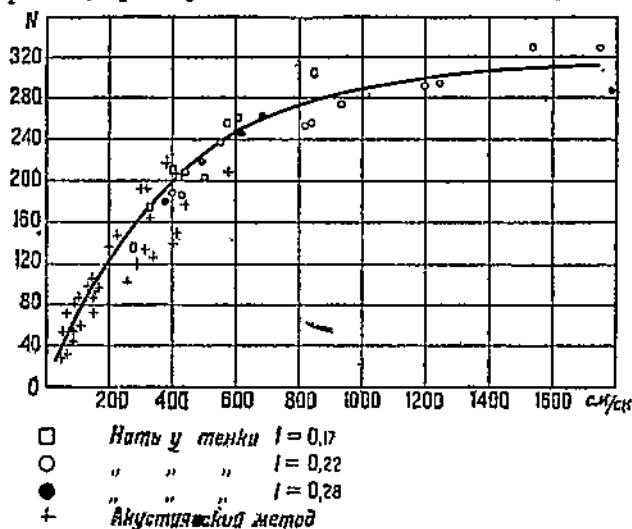
Первая группа опытов производилась с проволоками, расположенными у стенки трубы. Для этого употреблялись два различных вида труб — с круглым и квадратным сечениями. В первом случае платиновая проволока была направлена по образующей цилиндра и приклеена к стенке помощью очень тонкого слоя лака, выдерживающего высокие температуры. Когда этот лак совершенно высыхал, его поверхность тщательно подчищалась, пока не появлялась блестящая поверхность платиновой проволоки, остававшейся таким путем прикрепленной к стенке и непосредственно подверженной действию потока воздуха в течение всего опыта.

Для второго типа труб применялись обычные латунные трубы с квадратным сечением, в одной из сторон которых имелось маленькое отверстие, шириною в один сантиметр и длиною в три; это отверстие закрывалось куском стекла, укрепленным заподлицо замазкой таким образом, что форма внутренней поверхности трубы оставалась ненарушенной. На внутренней стороне этого стекла в продольном направлении наносился путем электролиза тонкий, менее 1 мм, слой никеля.

На фиг. 63 приведены результаты некоторых серий экспериментов. Для того чтобы дать представление о средних значениях этих измерений, проведена сплошная кривая вплоть до критической скорости; ниже этой скорости кривая проведена пунктиром. Значение критической

¹⁾ *Elettrotecnica*, 1930. Другой характеристикой этого фреквенциометра служит то, что его показания являются совершенно независимыми от вида волны.

скорости, вычисленное по формуле Рейнольдса, равнялось для нашей трубы приблизительно 200 м/сек . Выше этой скорости определение частоты было все время возможно и давало максимально надежные результаты, причем, как видим, средняя частота колебаний скорости сначала быстро возрастает и затем стремится к некоторому пределу, уже более независимому от средней скорости воздуха. Для скоростей ниже критической аппарат Веккиаки-Гварнаскелли обнаруживал наличие турбулентного движения и давал возможность производить измерения в интервале скоростей, простирающемся значительно ниже критической зоны.



Фиг. 63.

Если вместо фреквенциометра включать гальванометр Молля, чувствительность которого равняется приблизительно 10^{-6} А при условии резонанса, то вибрация светового изображения на шкале указывала на наличие колебательных процессов в потоке воздуха даже при очень низких скоростях (до 15 см/сек), т. е. довольно далеких от критической скорости. На этом основании вполне можно было предположить, что характерные признаки вихревого движения могут встречаться даже при режиме Пуазейля (т. е. почти для всей той области скоростей, для которой движение обычно считается уже вполне ламинарным) и вывести заключение, что, по всей вероятности, эти периодические явления уничтожаются только для средних скоростей, очень близких к нулю.

Для исследования зависимости частоты этих колебаний от скорости при очень малых значениях последней и для разыскания критического числа, характеризующего начало вихревого движения, сначала применялся фреквенциометр с непосредственным отсчетом, причем были получены результаты, указанные на фиг. 63. Кроме того, для устранения возможных ошибок, благодаря слишком низкой величине напряжения, развиваемого усилителем, было произведено также и несколько

акустических измерений. Два приемника радиотелефонной трубки были разделены таким образом, что через один проходил переменный ток от усилителя, а через другой — от вращающегося прерывателя, приводимого в движение электрическим моторчиком, скорость вращения которого могла меняться в широких пределах. После нескольких предварительных испытаний можно было довольно легко получить равенство высоты двух звуков и этим определить частоту тока усилителя, соответствующую в свою очередь частоте колебаний скорости потока воздуха. Что же касается тембра, то два звука не представляли в этом отношении большой разницы и не увеличивали трудности измерения. Вращающийся прерыватель предпочитался генератору переменного тока на том основании, что шум, производимый первым в телефоне, более приближался к тембру звука переменного тока усилителя.

Результаты этих измерений также показаны на фиг. 63. Их распределение не слишком уклоняется от пунктирной кривой, являющейся как бы естественным продолжением сплошной кривой, соответствующей турбулентному режиму. Измерения посредством подобного акустического метода производились также и для скоростей, превышающих критическую, причем полученные результаты довольно хорошо согласовались с результатами, достигнутыми при помощи фреквенциометра с непосредственным отсчетом, как это видно из той же фиг. 63.

Как мне кажется, этими опытами впервые обнаруживается существование и возможность регистрации периодических явлений при естественном движении газообразных тел в замкнутых каналах, даже в условиях ламинарного режима и при скоростях, достаточно далеких от критической. Можно надеяться, что впоследствии удастся без особого труда заполнить пробел между исследованными мною предельными скоростями, когда будут усовершенствованы экспериментальные методы и установки и, в особенности, когда будет усилена чувствительность приборов. Но уже и теперь достигнутые результаты, особенно же вполне доказанное наличие колебательных движений при очень малых средних скоростях потока и самый характер этих кривых (сплошной и пунктирной), представляющих на фиг. 63 среднее значение частоты, дает основание полагать, что только нулевой скорости жидкости должна соответствовать и нулевая частота.

Поэтому нам кажется вполне обоснованным утверждение, что периодические изменения скорости в закрытых каналах возникают с самого начала движения, по крайней мере у газообразных тел, и что они являются характерным и общим свойством движения упругих жидкостей, какова бы ни была причина движения и независимо от особых свойств того или иного режима движения.

4. О системе вихрей Бенара-Кармана.

В описанных нами опытах турбулентное движение обнаруживалось посредством приборов, расположенных у стенки трубы, т. е. на периферии воздушной массы, проходящей через трубу. Представлялось интересным изучить характер этого явления на различных расстояниях от стенки и так же, как и в предыдущем случае, при различных зна-

чениях средней скорости, когда в массе воздуха имеется устойчивая система вихрей. Наиболее простым и в то же время самым верным способом получения такого установившегося вихревого режима является помещение в потоке некоторого препятствия. При подобных опытах измерялись при помощи фреквенциометра с непосредственным отсчетом периоды образования переменных вихрей, образующихся в области за круглым цилиндром, обтекаемым воздушным потоком в трубе.

Эти вихри называются вихрями Бенара-Кармана: Бенар¹⁾ впервые подверг их экспериментальному исследованию. До него имела только работа Меллока, носившая чисто описательный характер (1907). С течением времени в научном мире снова пробудился интерес к этому явлению. Карман²⁾ в 1912 г. опубликовал теоретическое исследование относительно условий устойчивости системы вихрей, а вслед за ним Релей³⁾, Ричардсон⁴⁾, Рельф⁵⁾ и Тейлор⁶⁾ затронули явления того же порядка в своих работах о „волновых звуках“, уже давно обративших на себя внимание Струхала (Strouhal, 1878).

В своем исследовании Карман и Рубах указали теоретические условия устойчивости двух параллельных рядов вихрей для всякой жидкости, полагая, что вязкость не оказывает никакого влияния на их последовательное сбегание с препятствия. Поэтому мало вероятно, чтобы выводы Кармана и Рубаха оставались справедливыми и для реальных жидкостей; это подтверждается и Бенаром⁷⁾, доказавшим экспериментально неприменимость законов Кармана к вихрям, возникающим в реальных жидкостях.

При настоящем состоянии вопроса невозможно утверждать, применим ли закон динамического подобия к этой категории вихрей, а поэтому и нельзя предвидеть, существует ли вполне определенное число Рейнольдса, характеризующее начало турбулентного режима. Бенар⁸⁾ в своих опытах, произведенных с водой в открытых лотках, высказывается по этому поводу отрицательно. Однако Кармайкль, Дюпен⁹⁾ и другие, после новых опытов с водой, пришли к заключению, что закон механического подобия Рейнольдса приложим к периодам образования чередующихся вихрей, и что для подобных между собой препятствий имеется одно и то же число Рейнольдса, характеризующее начало образования переменных вихрей.

Я приводил опыты с потоком воздуха в закрытых цилиндрических трубах. Экспериментальная установка и измерительные приборы уже описаны в § 2. Внутри эбонитовой трубки находилась толстая медная проволока, расположенная в направлении одного из диаметров трубы.

¹⁾ C. R., т. CXLVII, 1908.

²⁾ Phys. Zeitschr., т. 13, 1912.

³⁾ Rayleigh, Sound, стр. 413.

⁴⁾ Proc. Roy. Soc., т. 37, 1925.

⁵⁾ Phil. Mag., т. 42, 1901; т. 49, 1925.

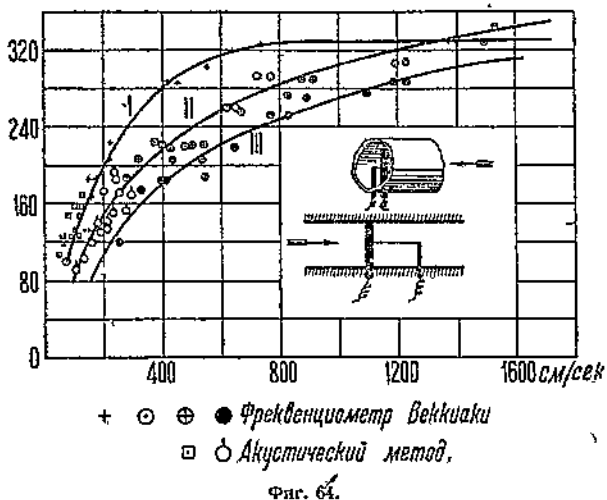
⁶⁾ Phil. Mag., 1930.

⁷⁾ C. R., стр. 1523, 1926.

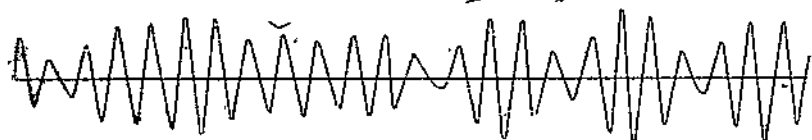
⁸⁾ C. R., стр. 1377, 1926.

⁹⁾ C. R., стр. 1511 и 1557, 1927.

(фиг. 64); к этой проволоке, представлявшей собой препятствие, припаивалась обычная платиновая проволока, нагревавшаяся постоянным током, как указано на фиг. 64. Периодическое охлаждение проволоки



производилось воздушными вихрями, образовавшимися непосредственно за медной проволокой; обусловленное этим охлаждением изменение сопротивления проволоки имело частоту, одинаковую с частотой воз-



Фиг. 65. Диаметр препятствия 3,8 мм. Нить в центре. Скорость воздуха 280 см/сек, 151 пер/сек.



Фиг. 66. Диаметр препятствия 3,8 мм. Нить в центре. Скорость воздуха 224 см/сек, 142 пер/сек.

никновения вихрей. На фиг. 64 показаны результаты трех серий измерений, причем везде частота вихрей определялась аппаратом Веккиаки-Гварнаскелли, проверявшимся иногда записями на осциллографе (фиг. 65 и фиг. 66).

В этих новых экспериментальных условиях подтвердилось то, что уже было доказано предыдущими исследованиями, т. е. наличие регулярных колебаний струй потока при очень низких скоростях и их стремление к уничтожению лишь при средних нулевых скоростях или скоростях, близких к нулю.

Эти результаты совпадают с выводами Кармайкла¹⁾, Дюпена и Тессье-Солье²⁾, применявших другие измерительные приборы. Релей и Бенар в своей теоретической работе предложили две разных формулы для изображения закона изменения частоты вихрей в зависимости от скорости и вязкости жидкости. Обе эти формулы допускают, что переменные вихри образуются с нулевой частотой при скорости потока, отличной от нуля.

Фиг. 64 показывает другие свойства этих вихрей: увеличение диаметра препятствия цилиндрической формы вызывает уменьшение частоты при той же средней скорости потока воздуха, причем процентное изменение частоты, при определенном изменении средней скорости, возрастает с уменьшением диаметра препятствия. Все это совпадает с результатами недавних исследований Тейлора. Кроме того, при том же диаметре препятствия и одинаковой средней скорости потока воздуха частота вихрей достигает наибольшей величины у оси канала, и наименьшей — у его стенок. Это различие невелико и уменьшается с уменьшением скорости, вследствие чего можно предполагать, что турбулентное движение сообщает всей массе жидкости одинаковый характер периодичности (имеющий в общем динамический характер) вплоть до стенок трубы.

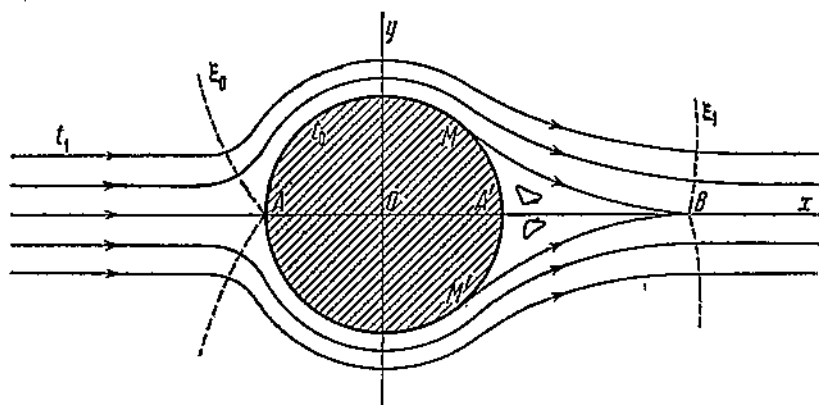
5. О закономерностях в явлении тепловой конвекции.

Смысл и интерес экспериментальных исследований, результаты которых изложены нами в предыдущих параграфах, связаны со следующими соображениями относительно одного из самых спорных в наше время вопросов. Во всех работах, касающихся передачи теплоты от движущейся в трубе жидкости к стенкам, особую важность имеет распределение температуры и скоростей вблизи нагретых поверхностей. Обычно и без того сложный характер этого распределения еще более усложняется относительным перемещением отдельных частиц жидкости и турбулентным характером движения, который зависит как от вихрей, так и от пульсации скорости отдельных частиц и масс жидкости. Например (фиг. 67), в случае пучка цилиндрических трубок, погруженных в газообразный поток, движущийся в направлении, перпендикулярном к оси трубок, за каждой трубкой образуется зона довольно сильных вихрей, поддерживающих в ней постоянную температуру. Отсюда следует, что примерно вся поверхность, через которую совершается обмен теплоты между трубкой и внешней жидкостью, принимает форму $АМА'M'A$, что вызывает увеличение количества переданной теплоты.

¹⁾ C. R., стр. 203, 1927.

²⁾ C. R., стр. 922, 1930.

Подобным же образом внутри труб вихри и нерегулярные пульсации скоростей всегда способствуют в сфере своего действия значительному ускорению выравнивания температуры, так как вследствие перемещения по всем направлениям эти вихри и пульсации вызывают фактический перенос теплоты между различными зонами внутри жидкой массы и от этой последней к поверхностям твердых тел, соприкасающихся с ними. Интенсивность же и средняя скорость перемещения вихрей внутри потока зависят, между прочим, от значений различных механических и термических характеристик жидкости в каждой ее точке, а именно от коэффициента вязкости и турбулентного трения, давления, скорости, температуры и т. д. Колебания этих величин в разных точках одного и того



Фиг. 67.

же отрезка трубы могут быть значительными, и поэтому при переходе от одного участка жидкой массы к другому свойства движения могут сильно изменяться.

К сожалению, до сих пор наши сведения о природе этого явления еще не полны и не окончательны, хотя вопросы теплопередачи представляют значительный практический интерес. Объединить помощью одной и притом достаточно элементарной формулы результаты явления теплопроводности и конвекции до сих пор представлялось почти совершенно невозможным; экспериментальным путем также не удалось достигнуть более удовлетворительных результатов, так как в этом направлении приходится встречаться со значительными трудностями. Действительно, требуется не только определить количество теплоты или непосредственно калориметром, или же косвенно — измерением температуры, но необходимо еще установить температуру у стенок и внутри жидкости, обеспечить, далее, во время всего опыта постоянную скорость, давление и температуру в каждой точке и найти с достаточной точностью коэффициенты теплопередачи и их зависимость от температуры. Наконец, должно быть учтено влияние и других, мало известных или трудно измеримых факторов, как то: степени взаимной подвижности частиц, шероховатости стенок и т. д. Отсюда ясно, что систематические ошибки в этих условиях представляют неизбежную помеху в измерениях и являются главной

причиной глубоких расхождений в результатах, полученных различными исследователями. Поэтому неудивительно, что до сих пор в данном вопросе не удалось получить единого общего критерия. В то время как одни конструкторы думают достигнуть наилучшей передачи теплоты сообщением жидкости самого интенсивного турбулентного движения и для этого соответственно устраивают нагревающие и охлаждающие поверхности, другие, наоборот, считают, что для теплопередачи наиболее целесообразным является движение при отсутствии турбулентности. После того как впервые было приступлено к изучению этого вопроса, в науке был выдвинут ряд новых соображений и гипотез, относительно которых мнения до сих пор еще расходятся. Эти гипотезы привели, однако, к мысли, что явления конвекции тепла следует рассматривать с точки зрения динамики жидкостей, в которых происходит теплообмен, и выдвинули проблему значительно более общего характера. Динамические процессы в жидкостях и теплообмен, как известно, связаны между собой, а потому не будет слишком смелым утверждение, что изучение конвекции тепла будет вполне успешным только тогда, когда предварительно будут решены некоторые очень сложные проблемы турбулентного движения. Этим объясняется значение предварительного экспериментального исследования динамических явлений для решения термических проблем.

Рейнольдс ¹⁾ первый сделал шаг вперед в разрешении задачи. Ему удалось дать выражение для теплоты, передаваемой от жидкости к стенкам, при помощи напряжений турбулентного трения. Однако его формулы оказали технике мало помощи, так как из них нельзя было вывести значения коэффициента теплопередачи (внешней теплопроводности), с которым инженеры привыкли оперировать. Только применение принципа подобия, которым уже несколько лет пользовались в гидродинамике, позволил установить соотношения между этим коэффициентом и рядом других количеств, характеризующих состояние и свойства жидкости ²⁾. Таким путем стало возможно довольно легко вывести простые, а поэтому и полезные в техническом отношении формулы, и, что особенно важно, ввести гипотезы относительно динамических условий движения жидкости в непосредственной близости от стенок. Эти гипотезы и формулы устранили много затруднений в вычислениях и указали в этой области исследований новый путь, которому, после ряда неудачных попыток, повидимому, все же суждено быть окончательным.

Прандтль первый возбудил всеобщее внимание к тем условиям, в которых жидкость находится вблизи поверхности, с которой она соприкасается. Движение жидкостей и газообразных тел можно представить себе происходящим по законам или турбулентного или ламинарного режима, но во всех случаях вблизи стенок или в непосредственном соприкосновении с ними необходимо допустить наличие некоторого слоя, находящегося в состоянии покоя при ламинарном потоке или в состоянии ламинарного режима, когда основной поток турбулентный.

¹⁾ Proc. Manch. Liter. a. Phil. Soc., 1874.

²⁾ H. Lorenz, Phys. Zeitschr., т. 20, стр. 446, 1907; M. Ten-Bosch, Die Wärmeübertragung, 1927; A. Selliore, Phys. Zeitschr., т. 29, стр. 55, 1928; C. J. Taylor, Mech. Properties of Fluids, 1923.

В отношении передачи теплоты этот пограничный слой представляет как бы вязкую прослойку, пристающую к стенкам и тем уменьшающую термическую конвекцию, потому что за отсутствием перемешивания жидкости переход теплоты совершается исключительно путем теплопроводности. Отсюда следует, что внутри пограничного слоя происходит переход от температуры стенки до температуры жидкости, в то время как скорости движения изменяются в этом слое от нуля у стенки до скорости потока вне этого слоя. Поэтому для величины коэффициента внешней теплопроводности решающее значение имеет градиент температуры в нормальном направлении к стенке через пограничный слой, а также внутренняя теплопроводность жидкости.

Эта гипотеза Прандтля относительно пограничного слоя дала возможность значительно расширить область исследования в отношении связи между динамическими и термическими явлениями в потоке жидкостей. Прандтль указал целый ряд случаев, когда области температуры и скорости точно соответствуют друг другу. Затем работами Кармана и Лапко было доказано качественное и количественное совпадение обеих областей в достаточно важных случаях. Несмотря на это, благодаря отсутствию точных бесспорных фактических данных, до сих пор еще не совсем признано существование пограничного слоя, да и в теоретическом отношении встречаются некоторые сомнения.

Из этих последних можно указать, например, следующее: известно, что критическая скорость в закрытой трубе обратно пропорциональна ее диаметру, так что, если этот последний бесконечно возрастает, то она становится равной нулю. Поэтому на ровной поверхности не может быть ни ламинарного движения, ни какого-либо слоя с таковым движением, как бы тонок он ни был. Из других соображений также очевидно, что теорию пограничного слоя, при которой этому слою всегда приписывается вполне определенная толщина, нельзя назвать удовлетворительной: действительно, с физической точки зрения трудно допустить отчетливую границу между ламинарным режимом в пограничном слое и турбулентным в центральной части потока, так как естественно должна существовать такая область, в которой режим будет промежуточным между тем и другим. Отсюда следует, что термическое сопротивление не может быть сосредоточено только в пограничном слое, как если бы он был совершенно независимым, изолированным от остальной массы потока, и следовал бы только законам своего собственного движения. Поэтому многим кажется более естественным предположить, что строение пограничного слоя и его характерные особенности могут быть независимыми от состояния всей массы потока и тех пертурбаций, которые в ней происходят. Исходя из этого, вместо прежней гипотезы Прандтля выдвигается новая, более соответствующая результатам последних исследований ¹⁾: допускают, что при малых числах Рейнольдса поток в пограничной области находится частью в ламинарном, частью в турбулентном движении и что он становится совершенно турбулентным при увеличении числа Рейнольдса. Этим объясняется и тот факт, что если сделать поверхность канала шероховатой, то величина коэффициента

¹⁾ Engineering, стр. 168, 1930.

внешней теплопроводности возрастает. Шероховатость стенок является причиной образования вихрей в пограничной области, а увеличение турбулентности потока вызывает в этом слое вихревые движения.

Повидимому, результаты опытов, изложенные в предыдущих параграфах, подтверждают эти последние соображения. Действительно, одним из важнейших заключений, которые можно извлечь из диаграмм, изображенных на фиг. 63 и 64, является совершенно несомненное наличие вихрей в потоке воздуха даже при незначительных скоростях, и их исчезновение только в пределе, когда скорости стремятся к нулю. Кроме того, частота вихрей непрерывно колеблется от нуля до некоторого максимального и притом постоянного значения, достигаемого только при больших скоростях. Внутри трубы собственная скорость струй принимает все значения от максимального у оси до нулевого у стенок. Поэтому можно считать правильным заключение, что только на внутренней поверхности трубы могут исчезнуть вихревые движения или вообще всякие нерегулярные пульсации скорости.

6. Заключение.

Нами измерялась частота колебаний скорости потока воздуха в круглых и квадратных трубах. Для этой цели мы пользовались термоанемометром, включенным в цепь усилителя, причем частота определялась посредством фреквенциометра системы Веккиаки-Гварипаскелли с непосредственным отсчетом, а иногда, для целей контроля, применялся также акустический и осциллографический методы.

Первая серия измерений производилась у стенок трубы при нормальных условиях движения, причем впервые удалось обнаружить периодические колебания струй потока даже при очень малых и близких к нулю скоростях (т. е. довольно далеких от критического значения). Значения частоты в зависимости от средних скоростей располагаются по непрерывной кривой, проходящей от турбулентного к ламинарному режиму, и равны нулю только при нулевых скоростях.

Во второй серии опытов мы пользовались тем же методом для измерения частоты вихрей Бена-Кармана, образующихся за обтекаемым телом в потоке. Полученные результаты подтверждают выводы других исследователей, полученные ими при помощи иных методов, и совпадают с некоторыми выводами теории подобия, примененной к этой категории вихрей. Существование вихрей для скоростей, близких к нулю, было еще раз подтверждено.

Наконец, была установлена тесная связь между этими явлениями и передачей теплоты путем конвекции.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ
УЛЬТРАМИКРОСКОПА ¹⁾.

1. Введение.

1. Большая часть производившихся до настоящего времени исследований турбулентного течения жидкости касалась движений сравнительно больших молярных масс, причем для визуального изучения структуры потока применялся обычно прием введения в жидкость инородных частиц в виде, например, алюминиевого порошка, масляных капель и т. д. Сомнительно, чтобы подобный способ являлся пригодным для исследования микротурбулентности, особенно вблизи границ потока, где порядок величины турбулентных перемещений очень мал. Если вводимые частицы сравнимы по размерам с движущимися молярными массами, то внутренние движения последних не могут быть правильно отражены движениями вводимых частиц.

Таким образом при изучении этого рода движений крайне желательно избегать какого бы то ни было постороннего воздействия на поток. В этом отношении чрезвычайно большую услугу может оказать ультрамикроскоп, если только имеется возможность преодолеть все трудности, связанные с его применением.

2. Основание применения ультрамикроскопа объясняется тем обстоятельством, что в составе многих жидкостей находятся мельчайшие частицы, невидимые при обычном освещении даже в самые сильные микроскопы, но которые, наоборот, становятся хорошо заметными при интенсивном освещении со стороны, если позади потока имеется темный фон. Частички, формы которых невозможно различить, так как их размеры меньше длины световой волны, при таком освещении представляются блестящими световыми точками.

Таким образом есть полное основание полагать, что ультрамикроскопическое исследование движения жидкости может воспроизвести достоверную и детальную картину турбулентного течения. В настоящей работе ²⁾ этот метод и был использован для исследования течения в трубах. Вначале предполагалось, что придется применять дистиллированную воду с добавлением небольшого количества какого-нибудь

¹⁾ Fage a. Townsend, An examination of turbulent flow with an ultramicroscope, Proc. of the Roy. Soc., 1932.

²⁾ Работа была произведена в Аэродинамическом отделе Национальной физической лаборатории. Печатается с любезного разрешения Исследовательского комитета по авиации (A. R. C.).

коллоидального раствора; однако это оказалось излишним, так как предварительные опыты показали, что обыкновенная вода из водопровода содержит достаточное для целей наблюдения число взвешенных частичек.

Представление о размерах частиц, находящихся в водопроводной воде, может дать то обстоятельство, что когда вода находится в покое, то большинство из этих частиц обнаруживает отчетливо выраженное броуновское движение. Известно, что диаметр наибольших частиц, обнаруживающих это движение, приблизительно равен 0,001 мм, так что большая часть наблюдавшихся в воде частиц должна была иметь диаметр значительно меньше этой величины.

3. Главной целью настоящей работы было установить характер распределения турбулентности в поперечном сечении трубы и, в частности, влияние стенок на эту турбулентность. Хорошо известно, что поток в какой-либо определенной точке образуется из последовательного ряда неправильных движений, пересекающих трубу в различных направлениях, хотя средняя скорость U в этой точке, определенная за достаточный промежуток времени, оказывается направленной по оси трубы. Как и можно было ожидать, картина, видимая в микроскоп, состоит из множества блестящих полосок, наклоненных к оси потока под различными углами. Измерением этих углов и скоростей частичек в различных точках трубы были определены максимальные значения u_1 , v_1 и w_1 трех составляющих u , v и w скорости пульсации. Эти значения показывают, как распределяется турбулентность в поперечном сечении трубы. Около центральной оси трубы отношения $\frac{u_1}{U}$, $\frac{v_1}{U}$ и $\frac{w_1}{U}$ были приблизительно

равны, но при приближении к стенкам отношение $\frac{v_1}{U}$, относящееся к скорости, перпендикулярной к стенке трубы, уменьшалось до нуля, в то время как два другие отношения $\frac{u_1}{U}$ и $\frac{w_1}{U}$, наоборот, увеличивались. У самой стенки течение было исследовано более подробно, причем обнаружилось следующее: вследствие того, что составляющая v скорости стремится к нулю, движение становится ламинарным, хотя частицы в пограничном слое имели заметное извилистое движение.

Обычный смысл, вкладываемый в термин „ламинарного потока“, недостаточно точно описывает все обстоятельства, которые наблюдались в наших экспериментах, и поэтому для большей определенности нами введен термин „прямолинейный поток“. Название ламинарного потока лишено двусмысленности лишь для потока в трубах со скоростью, меньшей критической, так как при этом движение любой частицы не только происходит в определенном слое, но является к тому же и прямолинейным ¹⁾. При скоростях выше критической движение вблизи стенок

1) Рассматриваемые в настоящей работе скорости обуславливаются общим движением жидкости. Участие частиц в броуновском движении нарушает прямолинейность линий тока, однако эти движения существуют и в том случае, когда жидкость находится в покое, поэтому в настоящей работе они не рассматриваются. Осредненное движение принято прямолинейным с исключением из рассмотрения броуновских отклонений. Даже при медленном движении жидкости нельзя наблюдать этих отклонений, хотя они становятся видимы, когда жидкость находится в покое.

происходит приблизительно в направлениях, параллельных к стенке, так как $\frac{v_1}{U}$ стремится к нулю, но движение частицы не прямолинейно, а в общем случае извилисто. Прямолинейный поток есть поток существенно ламинарный, тогда как ламинарный поток может быть извилистым в пределах толщины слоя, в котором он заключен.

4. Обозначения:

$2s$ — сторона квадратной трубы;

D — диаметр круглой трубы;

R — радиус;

m — гидравлический радиус, равный $\frac{D}{4}$ (для круглой трубы) и $\frac{s}{2}$ (для квадратной трубы);

U — средняя скорость в какой-либо точке трубы;

U_0 — средняя скорость потока в трубе;

U_x — средняя скорость вдоль оси Ox трубы;

u, v и w — компоненты пульсации скорости;

u_1, v_1 и w_1 — максимальные значения u, v и w ;

$\theta_{xy} = \arctg \frac{v}{U+u}$ — угловое отклонение потока в плоскости Oxy ;

$\theta_{xz} = \arctg \frac{w}{U+u}$ — угловое отклонение потока в плоскости Oxz ;

θ_{xy} и θ_{xz} — максимальные значения θ_{xy} и θ_{xz} ;

ρ — плотность;

μ — коэффициент вязкости;

μ' — коэффициент механической вязкости;

ν — кинематический коэффициент вязкости;

ν' — кинематический коэффициент механической вязкости;

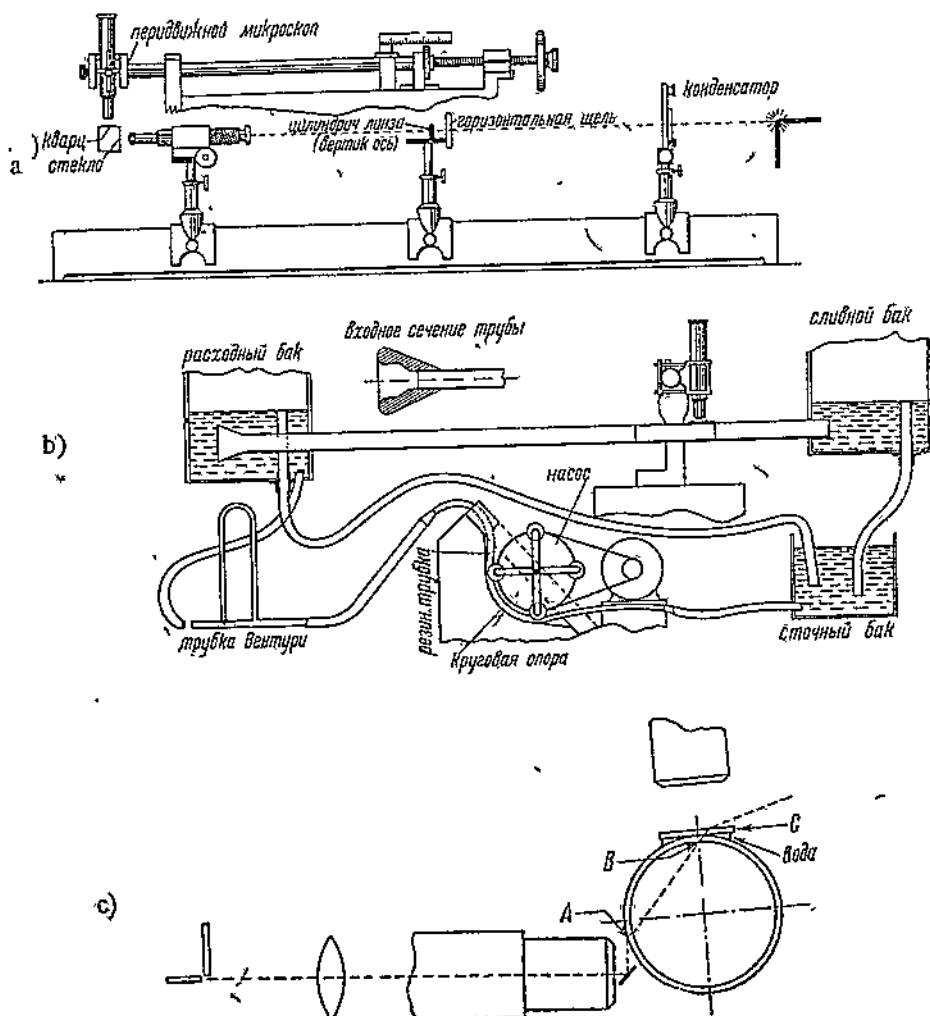
f — напряжение поверхностного трения.

II. Описание установки.

5. Гидроустановка (фиг. 68b). Большая часть экспериментов относилась к потоку в квадратной латунной трубе со стороной в 0,89 д.м. (22,6 мм). Равномерность течения воды через испытательную трубу поддерживалась посредством постоянной разности высот между уровнями воды в расходном и сточном баках. Уровень воды в каждом из этих баков регулировался сливными трубами, через которые излишки воды отводились в сливной бак. Из этого бака вода откачивалась обратно в расходный бак.

6. Для устранения неизбежного при обыкновенном напоре загрязнения воды ржавчиной или посторонними веществами был сконструирован специальный насос, в котором водопроводящие детали состояли только из резиновых и стеклянных труб. Принцип действия насоса заключался в том, что вода прогонялась вдоль резиновой трубки рядом роликов, монтированных на вращающейся крестовине, и прижимавших трубку к круговой опоре, концентричной с осью крестовины. Чтобы помешать

обратным токам, длина круговой опоры была взята достаточной для одновременного нажатия резиновой трубки двумя соседними роликами. Количество подаваемой насосом воды зависело от скорости движения роликов, диаметра резиновой трубки и величины зазора между роликами



Фиг. 68

и опорой. Подача могла регулироваться изменением одного или всех этих элементов установки. Оказалось, что при установившемся движении подача была настолько равномерна, что постоянная высота уровня в расходном баке могла поддерживаться действием одного насоса, так что к помощи сливной трубки в этом баке прибегать не приходилось.

Сверх того, при помощи изменения зазора между роликами и опорой достигалась соответствующая регулировка скорости потока во всей системе. Регулировка эта достигалась, с одной стороны, вращением опоры, на которой помещалась ось крестовины, и с другой стороны, — подъемом или опусканием установочных винтов.

Средняя скорость потока в испытательной трубе определялась из показаний включенной в цепь трубки Вентури, предварительно протарированной измерением вытекающей воды.

7. Для сохранения во всей циркуляционной системе чистой воды применялись эмалированные баки с крышками, однако несмотря на эти предосторожности оказалось необходимым каждое утро опорожнять систему и заново наполнять ее свежей водой из водопровода, так как после дневной работы вода хотя и казалась чистой, но содержала очень большое количество мелких посторонних частиц. Дифракция рассеянного света, вызываемая этими частицами, препятствовала отчетливым наблюдениям на темном фоне.

8. Чтобы иметь возможность освещать и наблюдать жидкость, в одну из стенок латунной трубы была вставлена кварцевая пластинка ¹⁾, а в другую, смежную с первой, — зеркальное стекло (фиг. 68а). Каждое стекло было тщательно вделано на место, так что его внутренняя поверхность точно совпадала с внутренней поверхностью стенки трубы.

Чтобы иметь возможность производить наблюдения потока у самой поверхности стекла, кварцевая пластинка перекрывала край стеклянной, и внешний угол между ними был герметически заделан для обеспечения водонепроницаемости. Длина по оси трубы кварцевой пластинки составляла $\frac{5}{8}$ дюйма (15,0 мм) и стеклянной — 6 дюймов (152,4 мм). Для получения устойчивости потока входное отверстие трубы было устроено в форме тщательно выполненного двойного коллектора, и место наблюдений было выбрано на расстоянии 4 футов (1220 мм) от входа, или 108s, где 2s есть сторона сечения трубы.

Наблюдения в основной части потока производились через кварцевое окошко, и луч света пропусклся при этом через стеклянное окно.

9. Ультрамикроскоп (фиг. 68а). Источником света служила небольшая дуговая лампа в 5 А. Свет сосредоточивался в фокусе при помощи простой собирающей линзы, после чего проходил через составную линзу и стеклянное окошко в воду. Положение составной линзы за изображением дуги лампы выбиралось таким образом, чтобы диаметр расходящегося пучка света у входного отверстия составной линзы в точности был равен ее диаметру.

Эта оптическая система создавала сходящийся конический пучок света, который в фокусе давал кружок с диаметром около 0,02 дюйма (0,5 мм). Так как поле микроскопа при нормальном его увеличении (105) было 0,07 дюйма (1,8 мм) в диаметре, то для превращения падающего пучка света из конического в клинообразный и увеличения тем самым ширины пучка в фокусе до 0,07 дюйма без увеличения глубины, по

¹⁾ Опыт показал, что с одинаковым успехом можно было применить и обыкновенное зеркальное стекло.

оптической оси между изображением светящейся дуги и составной линзой была вставлена небольшая цилиндрическая линза. Этим приемом удалось, во-первых, избежать освещения значительно отстоящих от фокальной плоскости частиц, что могло бы повредить темноте заднего фона, и, во-вторых, сберечь имеющееся в распоряжении количество света.

Наконец, последнее приспособление заключалось в установке щели с изменяемой шириной, помещенной в фокусе конденсатора. Щель эта, однако, не играла существенной роли и применялась только при наибольшем увеличении (200) при исследовании поверхностного слоя.

10. Чтобы иметь возможность перемещать по высоте падающий пучок света, вся система линз была смонтирована на оптической подставке, с одного конца шарнирно закрепленной у дуговой лампы и снабженной на другом конце винтовым подъемным приспособлением. Приспособление это в соединении с вертикальными и поперечными перемещениями микроскопа делало возможным исследование полного квадрата поперечного сечения трубы.

Микроскоп был установлен таким образом, что имелась возможность давать ему горизонтальные перемещения. Установленный на подставке микроскопа микрометр служил для измерений горизонтальных расстояний фокуса от вертикальной стенки трубы. Фокальная плоскость микроскопа служила для фиксирования расстояния наблюдаемого участка от внутренней поверхности кварцевой пластинки. Для измерения этого расстояния применялся вводимый внутрь заполненной водой трубы калибр, состоявший из небольшой вертикальной колонки с плоским верхом. Калибр ввинчивался в металлическую плитку, прикрепленную ко дну трубы. Высота колонки над нижней стенкой трубы устанавливалась по микрометру, после чего микроскоп наводился на фокус по плоскому верху колонки.

При наблюдениях вблизи поверхности жидкости для уменьшения глубины положения фокуса и тем самым для увеличения возможности выбора нужного сечения применялось наивысшее возможное увеличение (200).

Измерения глубины фокуса производились при помощи плотно прижатой к кварцевому окошку целлюлоидной пластинки толщиной в 0,002 дюйма (0,05 мм). Имелась возможность наводить фокус на точку внутри целлюлоида, причем, однако, так, что засечки на обеих поверхностях приходились вне фокуса. Таким образом, когда микроскоп наводился на фокус по внутренней поверхности кварцевой пластинки, все находившиеся в фокусе частицы жидкости были расположены в пределах 0,001 дюйма (0,025 мм) от поверхности. Наименьшее увеличение (105) применялось при наблюдениях вдали от стенки, где точность установки была менее важна.

11. Круглая труба. Наблюдения в круглой трубе были поставлены по двум причинам. Во-первых, было желательно убедиться в том, что наблюдавшиеся движения в квадратной трубе не были вызваны движениями вторичного порядка, существующими, как известно, в некруглых трубах, а во-вторых, было желательно проверить тождество результатов, полученных в квадратной трубе, с результатами, добытыми в круглых трубах, к которым относится большинство сделанных до сих пор работ.

По причине ряда оптических трудностей наблюдения потока в круглой трубе проводились только в двух участках, а именно, — в центре трубы и очень близко к стенке. При наблюдениях в центре трубы установка аппаратуры оставалась такой же, как и для квадратной трубы. При наблюдениях же около стенки оптическая установка была видоизменена, как это показано на фиг. 68с. Это изменение было необходимо, поскольку было невозможно прямо направить пучок света по касательной к внутренней поверхности стекла вследствие разницы в коэффициентах преломления на границе стекла с водой. Поэтому луч направлялся вверх почти по касательной к внешней поверхности стеклянной трубки в точке входа *A* и затем, по преломлении, направлялся внутрь воды, где и освещал небольшой объем жидкости, около внутренней стенки вблизи точки *B*. Для того чтобы избежать астигматического искажения поля зрения, ввиду того, что круглая трубка действует как цилиндрическая линза, на трубу сверху было наложено небольшое плоское стекло. Несколько капель воды было введено в пространство между пластинкой и трубой, где вследствие капиллярности эти капли и удерживались. Оптическая система оставалась той же самой, какая применялась при опытах в квадратной трубе. Свет, выходящий из трубы, как показано на схеме, преломлялся в сторону от микроскопа. Таким образом прямой свет совершенно не попадал в микроскоп и, хотя рассеяние света внутри трубы отчасти освещало задний фон, тем не менее частицы могли быть видны с достаточной ясностью для того, чтобы обнаружить тот же характер движения в пограничном слое круглой трубы, какой наблюдался и в квадратной.

12. Оси координат. Ось *Ox* была взята вдоль оси трубы, ось *Oy* была направлена горизонтально по нормали к одной из стенок трубы, ось *Oz* была направлена по вертикали. Световой пучок был горизонтален и параллелен оси *Oy*. Ось микроскопа устанавливалась вертикально и, следовательно, параллельно оси *Oz*.

III. Характеристика турбулентности.

13. Турбулентное течение в какой-либо точке трубы характеризуется рядом последовательных движений в различных направлениях. Если среднюю осевую скорость обозначим через *U*, а отклонения от нее выразим составляющими¹⁾ *u*, *v* и *w*, то составляющие действительной скорости в некоторый момент будут равны $U + u$, *v* и *w*, а осредненные значения *u*, *v* и *w*, взятые за достаточно большой промежуток времени, будут равны нулю. Таким образом при наблюдении частицы по нормали к плоскости *Oxy* в какой-либо момент времени кажущееся направление ее движения будет составлять с осью трубы угол, равный $\arctg \frac{v}{U + u}$, а при наблюдении по нормали к плоскости *Oxz* — угол, равный $\arctg \frac{w}{U + u}$.

¹⁾ *u*, *v* и *w* суть количества, которые могут быть положительными и отрицательными.

Для полной характеристики турбулентного движения было бы необходимо иметь непрерывную запись изменений по времени скоростей u , v , w , или, что равносильно этому, величин u , θ_{xy} и θ_{xz} , где

$$\theta_{xy}, \theta_{xz} = \arctg \frac{v, w}{U + u}.$$

После предварительного испытания аппаратуры обнаружилось, что чрезвычайно трудно удовлетворить этому требованию, но в процессе усовершенствования техники эксперимента оказалось возможным достигнуть надежных наблюдений при определении максимальных значений θ_{xy} и θ_{xz} (обозначим их через Θ_{xy} и Θ_{xz}) и u (обозначим его через u_1) в любой точке внутри жидкости, за исключением области, очень близкой к стенке. Из этих наблюдений можно было определить максимальные значения u , v и w (обозначим их через u_1 , v_1 и w_1). Эти последние и были приняты в качестве характеристик турбулентности.

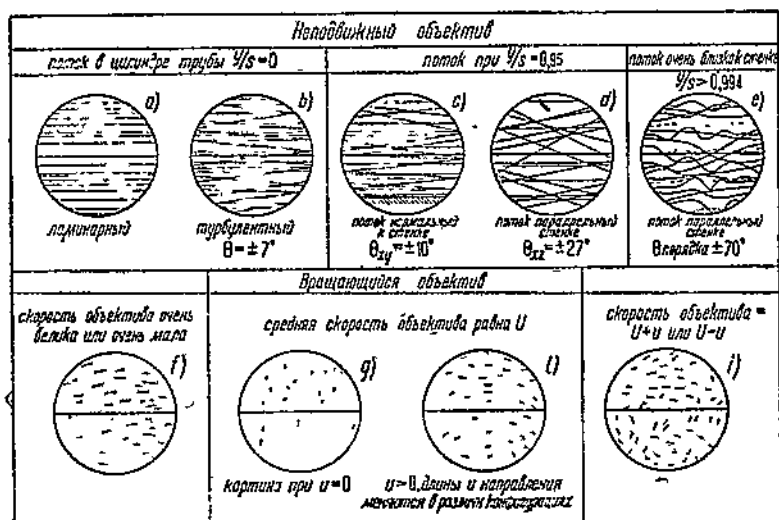
IV. Измерения максимальных угловых отклонений θ_{xy} и θ_{xz} .

14. При значениях числа Рейнольдса $\left(\frac{U_0 m}{\nu}\right)$, где m есть гидравлический радиус) выше критического длина волны извилистых траекторий частичек (за исключением участков, близких к стенке) была велика по сравнению с диаметром поля зрения микроскопа. Освещенные частички казались поэтому блестящими прямыми черточками, наклоненными под различными углами к среднему направлению потока. При больших скоростях вследствие длительности зрительного впечатления эти черточки представлялись пересекающимися друг друга прямыми.

При наблюдениях величины θ_{xy} , которая соответствует скорости, нормальной к вертикальной стенке $y = s$, микроскоп наводился на фокус на различные точки горизонтальной плоскости Oxy . Для наблюдений величины θ_{xz} соответствующей скорости, параллельной стенке $y = s$, микроскоп и световой луч следовало бы поменять местами. Однако на практике не оказалось пугным совершать эту перестановку, так как движения в соответствующих точках двух плоскостей, проходивших через ось трубы под прямым углом к смежным сторонам трубы, в силу симметрии имеют тот же характер. Таким образом для нахождения значений θ_{xz} микроскоп передвигался вдоль оси z и его фокус помещался в плоскости, находившейся на соответствующем расстоянии выше плоскости Oxy . Освещение поля зрения достигалось надлежащим подъемом оптической опоры. Наклон светящихся черточек измерялся посредством тонкой платиновой проволоки, натянутой в фокусе окуляра. Эта проволока удерживалась на двух шпепьках, соединенных с окуляром, и ее можно было поворачивать около оси микроскопа при помощи указателя, перемещавшегося по шкале с угловыми делениями. Нулевое деление шкалы соответствовало положению проволоки параллельно стенке трубы. Для облегчения наблюдений проволока нагревалась электрическим током до слабо-красного накала. Окончательное опреде-

ление каждого из значений Θ_{xy} и Θ_{xz} требовало значительного времени, а именно — около 30 мин.

Хотя освещенные частицы заметно различались по размерам и яркости, тем не менее предполагалось, что они все характеризуют движение в том месте, где они наблюдались. Это предположение оправдывается, повидимому, тем обстоятельством, что яркие и тусклые частицы одинаково отклонялись при движении жидкости и что почти все частицы были настолько малы, что имели броуновское движение, когда жидкость находилась в покое.



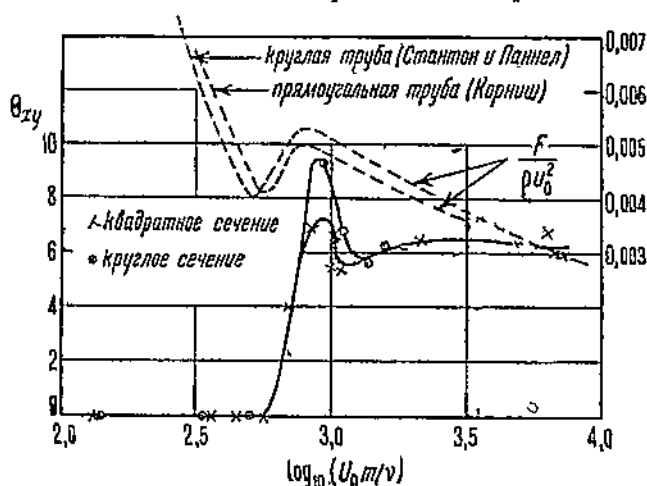
Фиг. 69. Схематические изображения траекторий частиц при наблюдении в ультрамикроскоп.

15. На фиг. 69а-е представлены некоторые типичные картины, наблюдавшиеся в микроскоп. Была сделана, но без успеха, попытка сфотографировать поток. Фотографы-эксперты после исследования потока выразили мнение, что было бы крайне трудно снять движение таких малых частиц, а если бы даже это и оказалось возможным, то некоторые важные особенности движения, легко наблюдаемые глазом, все равно не могли бы быть получены на фотографии. Это мнение подтверждается опытом Дарка, Мак-Бена и Сальмона¹⁾ (Darke, McBain и Salmon), которые, применяя очень интенсивный пучок света (сила тока 30—50 А), получали фотографии ультрамикроскопических изображений мыльных растворов, находившихся в покое. Эти авторы говорят, что „большая часть деталей особенностей движения, как, например, броуновское движение, видимые глазом, были за пределами возможности каких бы то ни было фотографических наблюдений, даже при наивысшей силе ультрамикроскопа ($N \cdot A = 0,78$ дюйма)“. Трудности эти, очевидно, увеличиваются, если жидкость находится в состоянии движения, как в настоящем случае.

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A, т. 98, стр. 395, 1920—1921.

V. Изменение вдоль оси трубы углового отклонения Θ_{xy} в зависимости от числа Рейнольдса $\left(\frac{U_0 m}{\nu}\right)$.

16. Хорошо известно, что для прямоугольной и круглой труб при установившемся течении существует тесная связь между изменением коэффициента сопротивления $\frac{f}{\rho U_0^2}$ и числом Рейнольдса $\frac{U_0 m}{\nu}$, если только отношение длины сторон прямоугольной трубы не слишком отличается от единицы. Это легко видеть на фиг. 70, где приведены кривые для



Фиг. 70. Турбулентность в центре круглой и квадратной труб.

круглой и прямоугольной труб¹⁾. Кривые эти лежат близко одна к другой и, в частности, область критических значений $\frac{U_0 m}{\nu}$ для них является почти одинаковой. На основании этих результатов представлялось вероятным, что течение вблизи оси как в круглой, так и в квадратной трубе будет иметь и одинаковую степень турбулентности. Для проверки этого предположения были сделаны измерения количества Θ_{xy} для большого числа значений числа $\frac{U_0 m}{\nu}$. Полученные значения Θ_{xy} (а также, в силу симметрии, и Θ_{xz}) представлены на фиг. 70 в функции от $\frac{U_0 m}{\nu}$. Оказалось, что поток вблизи оси в круглой и прямоугольной трубах в критической области возмущен более, чем для чисел Рейнольдса выше или ниже критического, и что для круглой трубы замечается большая степень турбулентности, хотя этот факт и нельзя еще считать установленным окончательно. Интересно отметить, однако, что критическая область значений $\frac{U_0 m}{\nu}$, полученная из наблюдений Θ_{xy} , одна

¹⁾ Cornish, Proc. Roy. Soc. A, т. 120, стр. 691, 1928. Кривые для квадратного сечения были непригодны.

и та же для обеих труб и что она совпадает с областью критических значений для $\frac{f}{\rho U_0^3}$. Для чисел Рейнольдса выше критического наблюдаемые значения Θ для обеих труб хорошо ложатся на ту же самую кривую. Никаких угловых отклонений не было обнаружено при значениях $\frac{U_0 m}{\nu}$ ниже критических.

17. Из диаграммы, изображенной на фиг. 70, видно, что при вполне установившейся турбулентности изменение в широких пределах числа Рейнольдса мало влияет на значение Θ_{xy} . Можно предложить следующее объяснение этого результата.

Осборн Рейнольдс предположил, что жидкость при турбулентном движении имеет механическую вязкость, возникающую в результате молярных перемещений. Соотношение между осредненным касательным напряжением f_r в какой-либо точке поверхности цилиндра с радиусом r и соосного с круглой трубой и сдвигом $\frac{dU}{dr}$ можно тогда представить в виде выражения:

$$f_r = \mu' \frac{dU}{dr},$$

где μ' есть коэффициент механической вязкости. На основании опытов в гладких круглых трубах известно, что распределение средних скоростей в радиальном направлении является параболическим вплоть до расстояния $0,8R$, считая от центра трубы. Если в этой области распределение скоростей выражено в виде:

$$\frac{U}{U_c} = 1 - k \left(\frac{r}{R} \right)^2,$$

то

$$\frac{\mu'}{U_c D} = \frac{f}{\rho U_0^3} \frac{U_0}{U_c} \frac{k}{4}.$$

Значения $\frac{\mu'}{U_c D}$ для наблюдавшихся нами значений числа $\frac{U_0 m}{\nu}$, вычисленные на основании некоторых результатов, содержащихся в работе Стантона и Паннелла¹⁾, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Гладкие круглые трубы.

$\frac{U_0 m}{\nu}$	$\frac{U_0}{U}$	$\frac{f}{\rho U_0^3}$	k (приблизительно)	$\frac{\mu'}{\nu}$	$\frac{\mu'}{U_c D}$
1058	0,75	0,0048	0,50	7,8	0,00138
1938	0,775	0,0042	0,45	14,0	0,00141
3490	0,785	0,0035	0,43	22,3	0,00126
6325	0,800	0,0031	0,40	39,2	0,00124

Мы видим, что значения $\frac{\mu'}{U_c D}$ изменяются медленнее, чем $\frac{U_0 m}{\nu}$.

1) Phil. Trans. A, т. 214, стр. 199, 1914.

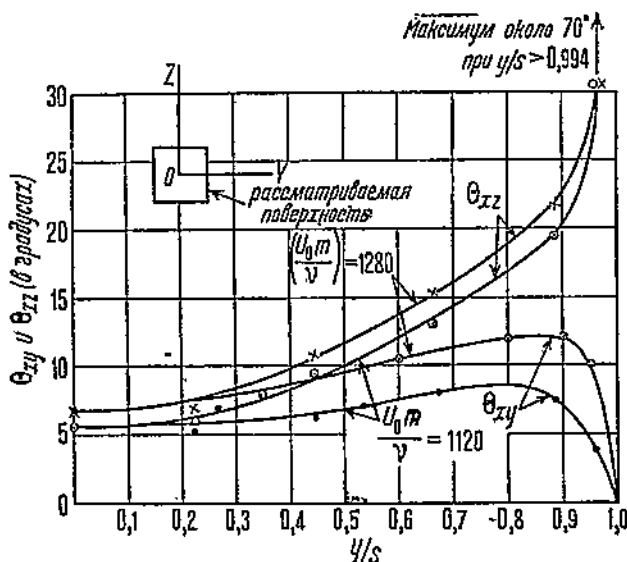
Так как размерность ν выражается произведением скорости на длину, то сама механическая вязкость определяется как среднее произведение поперечных скоростей, с которыми молярные массы пересекают рассматриваемую элементарную площадку сдвига, на длину этих поперечных перемещений.

Если взять масштаб поперечных скоростей прямо пропорциональным максимальной поперечной скорости $\theta_r U_c$, а масштаб поперечных перемещений — пропорциональным D , то ν будет пропорционально произведению $\theta_r U_c D$.

Отсюда следует, что θ_r будет пропорционально $\frac{\nu'}{U_c D}$ и так как $\frac{\nu'}{U_c D}$ слабо изменяется по сравнению с $\frac{U_0 m}{\nu}$, то и θ_r (т. е. θ_{xy}) будет также мало меняться с изменением $U_0 \frac{m}{\nu}$. Это заключение подтверждается полученными экспериментальными данными.

VI. Изменение количеств θ_{xy} и θ_{xz} в поперечном сечении квадратной трубы.

18. Полученные значения θ_{xy} и θ_{xz} для точек вдоль оси Oy представлены на фиг. 71 в зависимости от $\frac{y}{s}$ при двух значениях $U_0 \frac{m}{\nu}$, равных соответственно 1120 и 1280.



Фиг. 71. Распределение величин θ_{xy} и θ_{xz} в квадратной трубе.

Значение θ_{xy} , т. е. максимальное уклонение смещений в плоскости Oxy , постепенно возрастает вместе с увеличением расстояния от оси

трубы, достигает максимума около

$$\frac{y}{s} = 0,8$$

и падает затем с приближением к стенке до нуля. Вследствие этого при наблюдении частичек вдоль стенки и очень близко к ней они представляются движущимися ламинарно, параллельно стенке трубы.

Изменение значений Θ_{xz} , т. е. максимального отклонения в плоскости, параллельной стенке, обнаруживает интересное и несколько неожиданное явление, заключающееся в непрерывном возрастании величины отклонений при приближении к стенке, причем при небольшом расстоянии от стенки — около 0,006s, значение Θ_{xz} достигает приблизительно 70°.

VII. Течение вблизи стенки трубы.

19. Возникает естественный вопрос: каких значений может достичь Θ_{xz} при дальнейшем приближении к стенке или же оно упадет до нуля у самой стенки. Поэтому было желательно провести более подробные исследования потока в непосредственной близости от стенки, а для этой цели было необходимо определять плоскость наблюдений с большей точностью, чем раньше. Микроскоп, применявшийся в предыдущих исследованиях, давал увеличение 105, и освещенные частицы были в фокусе внутри слоя толщиной около 0,002 дюйма (0,05 мм). Для исследования течения около самой поверхности на нее наводился фокус микроскопа с увеличением 200. При этом увеличении в фокусе оказывались частицы, находившиеся не далее 0,001 дюйма (0,0023s) от поверхности. Полученная картина состояла из большого числа частиц, описывавших извилистые траектории, и из нескольких очень медленно двигавшихся частиц, движение которых при отсутствии волосной нити в окуляре казалось прямолинейным (фиг. 69е). Каких-либо надежных измерений величины Θ_{xz} при этом произвести не удалось, так как траектории были большей частью кривые и, кроме того, часто наблюдались частицы, описывающие траектории с различной длиной волны.

Была сделана попытка определить, как близко к стенке могли наблюдаться извилистые траектории. Так как расстояние частиц от стенки было слишком мало для непосредственных измерений, то оно было определено по скорости частиц (она была достаточно мала, и можно было при помощи секундомера измерить время прохождения частицы через поле зрения) и по градиенту скорости у стенки, выведенного из приводимых ниже наблюдений U .

При указанном увеличении диаметр поля зрения равнялся 0,03 дюйма. При числе Рейнольдса $\frac{U_0 m}{\nu} = 1280$, при $U_0 = 0,83$ фута в секунду и при 15,6° С большая часть медленно двигавшихся частичек проходила поле зрения в течение одной или двух секунд, но наблюдались случайные частицы, пересекавшие поле в 4 сек. Таким образом средняя

скорость самых медленных частиц была равна приблизительно 0,0006 фута в секунду (0,183 мм/сек), и так как градиент $\frac{\partial \left(\frac{U}{U_0}\right)}{\partial \left(\frac{y}{s}\right)}$ у поверхности рав-

нялся приблизительно 14, то расстояние этих частиц от поверхности было порядка $1/40\,000$ дюйма (0,0006 мм). Следовательно, внимание могло быть ограничено наблюдением за движением частиц на этом расстоянии от поверхности.

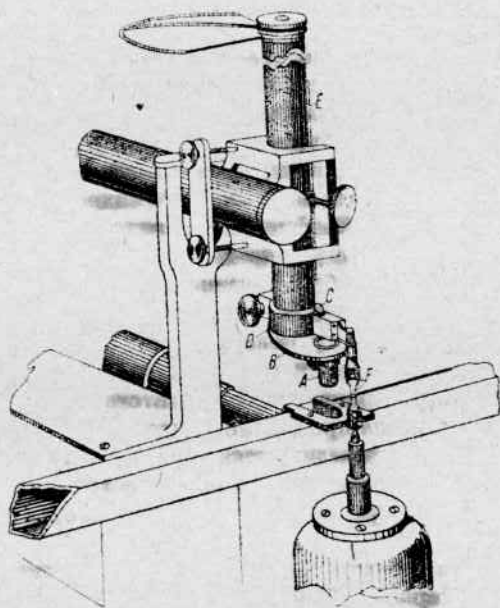
Вначале предполагалось, что эти частицы двигались по прямолинейным траекториям, но затем было замечено, что их аксиальные движения происходили скачками (u , сравнимо с U , см. об этом ниже), а иногда частицы почти совершенно останавливались. В окуляр микроскопа была вставлена поэтому волосная нить, и при дальнейших наблюдениях оказалось, что все такие частицы, двигаясь близко около волосной нити, пересекали ее в ту и другую сторону несколько раз. На наблюдения этих частиц было затрачено значительное время. В результате осталось впечатление, что нельзя было отметить ни одной частицы, относительно движения которой можно было бы с уверенностью утверждать, что оно прямолинейно.

20. Вместе с этими очень медленно двигающимися частицами вследствие конечной толщины слоя жидкости (0,001 дюйма), находившейся в фокусе микроскопа, могли наблюдаться и другие более быстрые частицы. Иногда случалось, что некоторая группа этих частиц совершала необыкновенно большие поперечные сдвиги и при этом всегда наблюдалось, что траектории медленно двигающихся частиц также слегка уклонялись в сторону от своих первоначальных направлений. Иногда наблюдалось также, что две или более медленно двигавшиеся частицы, нередко далеко отстоявшие друг от друга, согласованно меняли направление своего движения; и, судя по всему, можно предположить, что движение масс жидкости, имеющих сравнительно большую скорость, увлекает за собой и массы, движущиеся в пограничном слое. Отсюда можно заключить, что и наиболее слабые поперечные движения также могут вызвать сдвиг в сторону жидкости поверхностного слоя, но весьма вероятно, что размеры этих сдвигов были слишком малы, чтобы их можно было заметить при наших наблюдениях. Поэтому в интервалах между описанными боковыми перемещениями движение представлялось прямолинейным. Наконец, отсюда также следует, что при скоростях, меньших критической, когда не наблюдается пульсаций, движение около стенки прямолинейно. В турбулентном потоке значение ν очень мало, но имеет около стенки конечное значение, будучи равно нулю только на самой стенке. Скачки скоростей в осевом направлении, вызываемые значительными пульсациями u , можно поставить в связь с небольшими изменениями U и большим градиентом скорости $\frac{\partial U}{\partial y}$ около стенки.

Дальнейшее подтверждение того, что при турбулентном течении жидкость около стенки движется относительно большими массами, было получено в опытах с вращающимся объективом. Описание их дается в следующей главе.

VIII. Измерения средней скорости U и максимальных значений пульсации скорости u_1 , v_1 и w_1 .

21. U и u_1 . Так как было желательно измерять распределение средних скоростей U без введения в жидкость какого-нибудь инструмента, например маленькой трубки Пито, то пришлось обратиться к визуальным наблюдениям над движением частиц в потоке. Очевидно, что если бы микроскоп можно было передвигать со скоростью самой частицы, то



Фиг. 72. Схематическое изображение микроскопа, снабженного вращающимся объективом.

последняя вместо полоски казалась бы неподвижной блестящей точкой и ее скорость была бы та же, что и у микроскопа. Осуществить это разумеется, было невозможно, но удалось применить метод, основанный на этом принципе, который дал весьма удовлетворительные результаты. Этот метод позволил также измерить максимальные отклонения (u_1) от средней скорости.

22. Основная схема прибора изображена на фиг. 72. Очевидно, что для достижения вышеуказанной цели достаточно вместо перемещения всего микроскопа передвигать в направлении движения частицы только объектив, а окуляр и корпус микроскопа оставить неподвижными. Конечно, наблюдение при этом возможно только в пределах ограниченной площадки. На основании этих соображений корпус микроскопа с окуляром был смонтирован так же, как и в прежних опытах, а объектив A был установлен на горизонтальном зубчатом колесе B, которое могло

вращаться около вертикальной оси *C*. Зубчатое колесо имело 80 зубцов и приводилось во вращение при помощи маленького электрического мотора через передаточную шестеренку с 10 зубцами. Зубчатое колесо и шестеренка были смонтированы на подставке *D*, укрепленной на корпусе микроскопа *E* и имевшей возможность передвигаться по оси микроскопа. Чтобы устранить стеснение и предотвратить вибрации, которые могли бы передаться от мотора к микроскопу, вращение от мотора к шестеренке сообщалось через универсальный шарнир *F*.

Положение оси зубчатого колеса устанавливалось так, что при каждом обороте один раз оптическая ось объектива совпадала с осью микроскопа, а подставка *D* устанавливалась таким образом, чтобы в момент совпадения осей направление движения микроскопа было параллельно оси трубы, в которой двигалась жидкость.

Благодаря тому, что объектив вращался, а окуляр оставался неподвижным, наблюдаемая частичка, если только она представлялась глазу неподвижной точкой, должна была, очевидно, двигаться несколько быстрее, чем объектив. Коэффициент перехода от скорости вращения объектива к скорости частицы определялся непосредственной тарировкой следующим способом. В трубе устанавливался кусочек латунной пластинки длиной в $\frac{3}{8}$ дюйма, так что его верхняя поверхность совпадала с плоскостью наблюдения. На эту поверхность наводился фокус микроскопа и измерялся угол, на который нужно было повернуть зубчатое колесо, чтобы дать объективу перемещение, соответствующее длине куска латуни. Этот угол соответствовал проходному расстоянию в $\frac{3}{8}$ дюйма. Скорость вращения, определявшаяся при помощи ретоскопа Ашдауна (Ashdown), поддерживалась все время постоянной. Показания этого прибора давали непосредственно число оборотов в минуту с точностью до 1,2%.

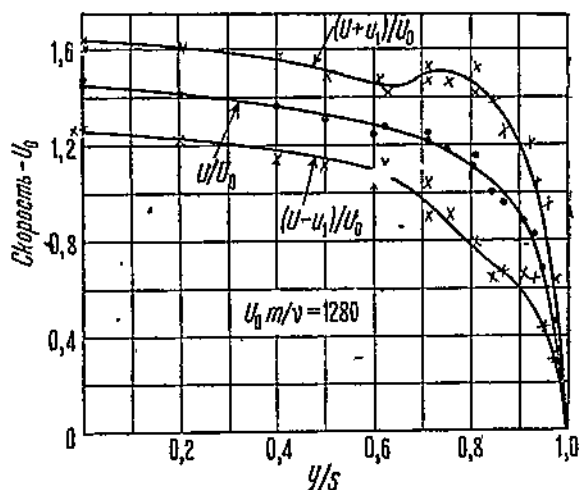
23. Освещенная область жидкости была видима только в течение небольшой части периода полного оборота, так что можно было видеть как бы серию моментальных снимков с интервалами от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{5}$ сек. Характер этих моментальных снимков при различных скоростях частиц и объектива показан на фиг. 69, $f-i$.

В центре трубы при нетурбулентном потоке картина поля при синхронизированных скоростях состояла просто из группы точек. Однако небольшая кривизна пути объектива при прохождении освещенной области приводила к тому, что точки растягивались в очень короткие черточки, направленные перпендикулярно к оси трубы. При турбулентном движении каждая последовательная картина вследствие пульсации скоростей отличалась от предыдущей, так что, когда объектив двигался со скоростью *U*, то большей частью были видны черточки разной длины и разных направлений. Точки, или вертикальные черточки, указывавшие на отсутствие составляющей *u*, наблюдались только случайно.

Из проведенных наблюдений можно было вывести интересное заключение, что все поле (0,07 дюйма $\approx$ 0,175 мм в диаметре) перемещается, вообще говоря, целиком. Так, например, когда картина, состоявшая из черточек, наклоненных к оси, скажем, под углом $\pm 45^\circ$, сменялась следующей, в которой наклон составлял, предположим, -20° , то впечат-

тление получалось такое, как будто все черточки вместе меняют свое общее направление.

24. Если в момент наблюдения скорость, обусловленная движением объектива, была та же, что и у частицы, то частица представлялась в виде точки. Если же объектив двигался параллельно оси Ox с действительной скоростью $U+u$, то частица казалась короткой чертой, перпендикулярной к оси Ox , длина которой зависела от значения φ . В любой точке жидкости скорость $U+u$ непрерывно пульсирует, по временам в пределах $U \pm u_1$, так что частицы кажутся или точками или черточками, перпендикулярными к оси Ox , если только действительная скорость микроскопа лежит в тех же пределах. Следовательно, значение



Фиг. 73. Распределение скоростей в поперечном сечении квадратной трубы.

$U-u_1$ может быть получено постепенным повышением скорости микроскопа до тех пор, пока впервые не появятся „стационарные“ точки (или черточки, перпендикулярные к оси Ox), а значение $U+u_1$ — путем дальнейшего увеличения скорости до тех пор, пока черточки, наоборот, не перестанут появляться.

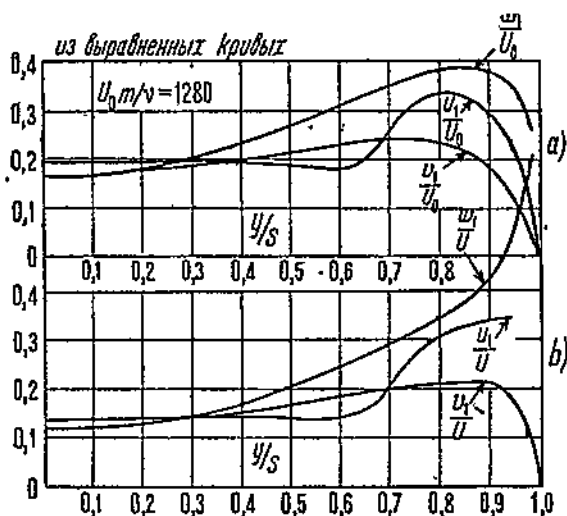
Этот принцип был применен для получения значений $U+u_1$ и $U-u_1$, а также значений U и u_1 в различных точках оси Oy квадратной трубы. Найденные результаты приведены на фиг. 73. Для получения плавной кривой средней скорости U , согласной притом с отдельными наблюдаемыми значениями $U+u_1$ и $U-u_1$, применялся следующий метод. Была построена кривая для $\frac{U}{U_0}$ по средним значениям для $\frac{U+u_1}{U_0}$ и $\frac{U-u_1}{U_0}$, полученным из наблюдений. Значения $\frac{u_1}{U_0}$ и $-\frac{u_1}{U_0}$, полученные как разность между этой средней кривой и отдельными наблюдениями, были затем нанесены на ту же самую диаграмму, не обращая внимания на их знак, и через эти точки была проведена средняя кривая. Вычитая или добавляя эту кривую к средней кривой на фиг. 73, были построены

нанесенные по этой же фигуре кривые $\frac{U+u_1}{U_0}$ и $\frac{U-u_1}{U_0}$. Точки этих кривых соответствовали наблюдаемым значениям.

25. v_1 и w_1 . Максимальные значения составляющих v_1 и w_1 скорости были получены косвенным путем из наблюдаемых значений θ_{xy} и θ_{xz} на основании уравнений:

$$v_1, w_1 = (U + u) \operatorname{tg} \{\theta_{xy}, \theta_{xz}\}.$$

Вследствие того, что значения u_1 были сравнительно велики, необходимо было определить, какие значения u следует подставлять в вышеприведенные уравнения, так как это зависит от переменного отношения фаз между u_1 и v_1 или между u_1 и w_1 .



Фиг. 74. Распределение турбулентности в поперечном сечении квадратной трубы.

Если указанная на фиг. 72 подставка D устанавливалась так, что объектив, проходя через ось микроскопа, двигался под заранее определенным углом θ_{xy} , соответствовавшим наблюдаемой точке, то только в этом случае эти частицы, обладавшие максимальным уклонением, были видны как точки (если скорость объектива была подобрана надлежащим образом). Осевую составляющую этой скорости следовало брать в качестве значения для $U+u$ при определении значения v_1 по указанному выше уравнению¹⁾. Было сделано несколько опытов и оказалось, что этот компонент почти равен U , так что приближенно

¹⁾ Строго говоря, нужно было бы повторить опыты при значениях θ_{xy} , несколько меньших, чем θ_{xy} , чтобы посмотреть, будет ли $(U+u) \operatorname{tg} \theta_{xy}$ больше, чем $U \operatorname{tg} \theta_{xy}$. Однако это уточнение не кажется особенно необходимым.

можно принять $u = 0$. Значения v_1 и w_1 могли быть поэтому вычислены из соотношений $v_1, w_1 = U \operatorname{tg}(\Theta_{xy}, \Theta_{xz})$. Из этих экспериментов следует, что v_1 и w_1 всегда имеют другую фазу, чем u_1 , но ничего более точного относительно отношений между фазами выяснить не удалось.

Максимальные значения трех составляющих скорости u_1, v_1 и w_1 , отнесенные к средней скорости потока в трубе U_0 , приведены на фиг. 74а в функции расстояния $\frac{y}{s}$ от оси трубы. Около середины трубы все составляющие приблизительно равны друг другу, составляя около 20% от средней скорости потока U_0 или 14% от скорости в центре трубы U_c . При приближении к стенке составляющая v_1 сначала увеличивается до максимального значения $0,25U_0$ на расстоянии $0,25s$ от стенки, а затем постепенно уменьшается до нуля у самой стенки.

Две другие составляющие u_1 и w_1 также растут, но несколько скорее, чем v_1 , достигая соответственно максимальных значений $0,34U_0$ и $0,39 U_0$ на расстоянии от стенки около $0,15s$. Таким образом самые большие пульсации скорости имеют место в цилиндрической области жидкости со средним радиусом около $0,8s$.

Максимальные значения составляющих u_1, v_1 , и w_1 , отнесенные к среднему значению скорости U в соответствующей точке, даны на фиг. 74b. Форма кривых $\frac{v_1}{U}$ и $\frac{w_1}{U}$, конечно, очень сходна с формой кривых Θ_{xy} и Θ_{xz} , приведенных на фиг. 71 и подробно описанных в § 18. Таким образом эти кривые не требуют дальнейшего рассмотрения.

IX. Течение при критических скоростях.

26. Когда скорость потока в трубе поднималась до критических значений, было обнаружено, что изменения потока происходят внезапно. Даже в том случае, когда средняя скорость поддерживалась постоянной в пределах этой критической области, поток мог временами изменяться, переходя от прямолинейного к явно выраженному турбулентному типу. Если число Рейнольдса становилось выше значений критической области, то не было никакого признака, указывавшего на повышение степени турбулентности; имело место только изменение в относительной частоте и продолжительности периодов прямолинейного и турбулентного движений.

Далее, когда движение жидкости было турбулентным при скорости значительно выше критической, можно было сделать его совершенно прямолинейным, мгновенно закрывая и затем открывая выход трубы. Полученный таким путем прямолинейный поток сохранялся в течение нескольких секунд. Некоторые результаты наблюдений времени, протекавшего между моментом открытия потока и моментом нарушения прямолинейного течения, даны в таблице 2 (стр. 182). В этой таблице U_0 представляет среднюю скорость потока до перерыва движения. Благодаря наличию ускорения после возобновления течения она больше, чем

осредненная по времени скорость U . Таким образом произведение $U_0 t$ переоценивает расстояние, проходимое жидкостью в этот интервал

Таблица 2. Область критических скоростей от 0,32 до 0,71 фут/сек. (приблизительно). Расстояние места наблюдений от входа равно 4 футам.

Время t в сек.	Средняя скорость U_0	$U_0 \cdot t$ в футах
8,6	0,53	4,6
6,3	0,73	4,6
5,75	0,86	4,95
4,8	1,21	5,8
—	0,32	Поток прямолинейный, со случайной турбулентностью, но все время турбулентный, если удалить коллектор, поставленный у входа в трубу.

времени; имея это в виду, можно все же констатировать, что это произведение примерно равно длине трубы от входа до рабочего сечения. Отсюда можно предположить, что в данных экспериментах турбулентность возникает у входа в трубу.

Х. Теория Кармана.

27. Теория установившейся турбулентности, основанная на принципе подобия, была разработана Карманом¹⁾. Теория эта ограничивается двухмерным потоком, причем предполагается, что подобное состояние пульсаций существует во всех точках оси Oy , нормальной к поверхности. Из этой теории следует, что имеется характеристическое значение для линейного масштаба пульсаций, которое пропорционально выражению:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}},$$

а также, что в любой точке скорости u и v равны друг другу и пропорциональны выражению:

$$\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}.$$

¹⁾ См. стр. 362 настоящего сборника.

Значения коэффициентов пропорциональности определяются из исследования турбулентных перемещений. Эти коэффициенты, очевидно, неприменимы к настоящим результатам, связанным исключительно с максимальными, а не средними значениями пульсаций скорости. По этой причине нельзя сделать непосредственного сравнения между настоящими экспериментальными данными и результатами, предсказываемыми теорией Кармана.

Однако для сравнения с экспериментальными кривыми для u_1 и v_1 была сделана попытка вычислить по приведенной выше кривой средней скорости U изменение выражения

$$\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}$$

в зависимости от $\frac{y}{s}$. Оказалось, что значения

$$\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}$$

очень сильно меняются при малых изменениях в форме кривой U , которая, впрочем, была недостаточно хорошо определена для того, чтобы провести вполне надежные подсчеты.

Имеется, однако, один вывод из теории Кармана, который можно проверить по результатам настоящих опытов, а именно, что на оси трубы пульсации скорости должны быть равны нулю. Между тем описанные эксперименты показывают, что на оси имеют место пульсации скорости порядка 20% от средней скорости потока, — результат, который не подтверждает вышеуказанного заключения теории.

XI. Заключение.

Турбулентный поток в трубе исследовался с помощью ультрамикроскопа. Мелкие взвешенные в воде частицы из водопровода сильно освещались и наблюдались на темном заднем фоне. Эти частицы были настолько малы, что при отсутствии движения жидкости в трубе наблюдалось броуновское движение.

Освещение этих частиц делало возможным следить за движением в жидкости и произвести в любой точке потока измерения максимальных значений u_1 , v_1 , w_1 трех составляющих u , v , w пульсации скорости. Тем же методом было получено распределение средней скорости U по сечению трубы. Таким образом все наблюдения были сделаны без введения измерительных приборов в самый поток жидкости.

Большая часть наблюдений произведена в квадратной трубе и некоторые из них — в круглой трубе. В результате обнаружилось, что характер движения одинаков в обоих случаях.

В центре трубы все три составляющие u_1 , v_1 , w_1 приблизительно равны. Отношение $\frac{v_1}{U}$, полученное из наблюдений скорости пульсации,

перпендикулярной к стенке, убывает до нуля с приближением к стенке, в то время как два другие отношения, $\frac{u_1}{U}$ и $\frac{w_1}{U}$, — увеличиваются.

Относительно движения вблизи стенки было обнаружено, что хотя оно и становится постепенно ламинарным при приближении к самой стенке, однако движение частиц в пограничном слое сохраняло свой извилистый характер вплоть до расстояния 1/40 000 дюйма от стенки. Ни одной частицы с прямолинейной траекторией не наблюдалось.

При увеличении скорости за пределы критических чисел Рейнольдса изменения характера движения наступали внезапно. При этом признаков увеличения степени турбулентности не наблюдалось, изменялась только относительная частота и период попеременной смены прямолинейного и турбулентного характеров потока.

В заключение авторы считают необходимым выразить свою глубокую признательность д-ру Робинзону (C. Robinson) из Лондонского университета, мистеру Чешайру (R. W. Cheshire) из Исследовательской лаборатории адмиралтейства и д-ру Андерсону (J. S. Anderson) из Оптического отдела Национальной физической лаборатории за ценные указания, сделанные во время работы.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЯ¹⁾.

Раздел 1.

Введение.

§ 1. Впервые уравнения движения вязкой жидкости были даны Навье²⁾ в 1822 г. Навье ввел в уравнения Эйлера добавочные члены для учета напряжений, возникающих при деформации. Зависимость между деформацией и возникающими напряжениями была исследована Коши³⁾, Пуассоном⁴⁾ и Сан-Венаном, Г. Стоксом⁵⁾ было, наконец, показано, что для определения других напряжений кроме всестороннего давления, независимого от направления, достаточно гипотезы линейной зависимости этих напряжений от скорости деформаций с коэффициентами пропорциональности, зависящими от физических свойств жидкости.

Стокс получил решение этих уравнений в частном случае, когда жидкость приводится в движение равномерным качанием маятника с неизменным периодом. Это решение было возможно сравнить с многочисленными опытными данными. Результаты теоретических вычислений совпали с опытными измерениями с такой степенью точности, что этой проверкой была, повидимому, доказана правильность сделанной основной предпосылки. Такой же хороший результат сравнения теории и опыта получился для потока жидкости в круглых трубах постоянного диаметра. Теоретический расчет был основан при этом на особом решении уравнений движения для трубы незначительного диаметра и малой скорости движения. С другой стороны, результаты теоретического расчета решительно расходятся с данными опыта при определении сопротивления, которое испытывают тела больших размеров, движущиеся с большою скоростью в жидкости, или же сопротивления при движении жидкости в трубах большого диаметра с большою скоростью. Стокс предположил, что это расхождение объясняется присут-

¹⁾ Osborne Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, Philosophical Transactions of the Royal Society, 1895.

²⁾ Navier, Mémoires de l'Académie, т. VI, стр. 389.

³⁾ Aug. Cauchy, Mémoires des Savants étrangers, т. I, стр. 40.

⁴⁾ Poisson, Mémoires de l'Académie, т. X, стр. 345.

⁵⁾ Sir Gabriel Stokes, Cambridge Philosophical Transactions, 1845.

ствием вихревых движений, которые изменяют характер потока так, что то особое решение уравнений, которое было получено, уже более не подходит. Таким образом указанное расхождение не опровергает правильности сделанной предпосылки.

После открытия механического эквивалента теплоты Джоулем, Стокс в 1850 г. получил — путем преобразования уравнений движения с произвольными напряжениями — уравнение энергии движения (живой силы движения). В это уравнение входит определенная функция, выражающая разность работы напряжений, действующих на жидкость, и скорость изменения энергии, рассчитанной на единицу объема. На основании результатов, полученных Джоулем, Стокс вывел заключение, что эта разность представляет собою ту часть кинетической энергии, которая обращается в теплоту.

Это заключение вытекает из общих уравнений движения и не зависит от того или иного соотношения между напряжениями и скоростью деформации. Стокс дал, однако, выражение этой функции посредством скоростей деформации. Функция, выраженная в этом виде, была названа лордом Релеем, функцией рассеяния.

§ 2. Мне удалось показать в 1883 г. при помощи опытов с окрашенными струйками в потоке (результаты были сообщены Королевскому обществу¹⁾), что, когда вода протекает под действием давления в гладкой трубе с постоянным диаметром, то скорости остаются прямолинейными, т. е. параллельными стенкам трубы, или же, наоборот, движение становится извилистым, т. е. со скоростями отдельных частиц жидкости в поперечном направлении; в зависимости от средней скорости U_m потока, измеряемой отношением расхода Q жидкости к площади Δ поперечного сечения трубы.

Движение „прямолинейно“ или „извилисто“, смотря по тому: меньше или больше средняя скорость, чем некоторое количество

$$\frac{K\mu}{D\rho}$$

где D есть диаметр трубы, ρ — плотность жидкости, а K — некоторое постоянное число. Согласно сделанным мною опытам, а также, как мне удалось показать, согласно всем опытам Пуазейля и Дарси это число для круглых труб имеет значение, заключающееся между

$$1900 \text{ и } 2000.$$

Иными словами, прямолинейное установившееся движение в круглых трубах устойчиво или неустойчиво в зависимости от того, будет ли

$$\frac{DU_m}{\mu} < 1900 \text{ или } \frac{DU_m}{\mu} > 2000.$$

Таким образом значение числа K может служить критерием появления и сохранения извилистого или турбулентного характера движения.

¹⁾ Osborne Reynolds, Philosophical Transactions of the Roy Soc., 1883.

§ 3. Опыты показывают также, что значение числа K является равным образом критерием для изменения сопротивления, которое преодолевается жидкостью при движении. При прямолинейном движении в полном соответствии с особым решением уравнений, о котором мы говорили, это сопротивление остается пропорциональным средней скорости до тех пор, пока число $\frac{DU_m}{\frac{\mu}{\rho}}$ не становится равным K .

§ 4. В той же статье мною было показано, что внезапное изменение закона движения при равенстве

$$DU_m = \frac{\mu}{\rho} K$$

доказывает, что существует зависимость между характером движения жидкости и отношением, с одной стороны, произведения размеров трубы и скорости жидкости и, с другой, — произведения молекулярных размеров и молекулярной скорости. Последнее произведение и определяет значение коэффициента μ для жидкости. Сами уравнения движения подтверждают эту зависимость.

Указанные экспериментальные результаты окончательно устраняют недоразумение, связанное с расхождением теории и опыта, о котором упоминалось выше. Каковы бы ни были причины явления, видно, что в тех случаях, когда данные опыта не совпадают с полученным особым решением уравнений, характер движения воды действительно становится совершенно иным. Мы получаем, однако, таким путем только частичное, не полное объяснение. Остается еще выяснить механическое или физическое значение существования указанного критерия.

§ 5. Цель настоящей статьи — показать, что существование низшего предела значений для критического числа может быть теоретически выведено из уравнений движения как следствие:

1) с одной стороны, более строгого исследования и определения тех геометрических оснований, на которых в кинетической теории материи аналитически строится различие между молярным движением и движением тепловым;

2) и, с другой стороны, — как следствие применения того же самого аналитического метода (определенно обоснованного) для различения движений среднего молярного и относительного молярного.

Более точное определение геометрических оснований метода показывает, что он в иных случаях, например при установившемся среднем движении вдоль трубы, может быть применен с полной строгостью и точностью, в других же случаях его можно применить только с известным приближением.

Геометрические отношения, на основании которых различают между средним молярным движением или осредненным средним движением и относительным молярным или относительным средним движением, по существу тождественны с теми соотношениями, которые в кинетической теории газов приводят к различию между средним движением и относительным или тепловым движением.

Мы покажем также, что, пользуясь этим методом анализа и интегрируя в пространстве почленно уравнения движения, мы получаем в качестве предела критического числа предел чисто геометрический для возможности одновременного распределения некоторых количеств в пространстве, причем само критическое число не зависит вовсе от физического значения этих количеств. Тем не менее полученные уравнения определяют физическое значение этих количеств с такою ясностью, что становится понятным, каким образом дальнейшее исследование полученных уравнений может выяснить свойства материи и связанные с ними механические законы и тем послужить к разъяснению вопросов, до сих пор оставшихся не совсем решенными, именно — о связи термодинамики с законами механики.

Геометрические основания, на которых в кинетической теории газов строился до сих пор метод исследования, сводятся:

1) К геометрическому принципу: движение любой точки механической системы в любой момент времени может быть разложено: на среднее движение всей системы в данный момент и относительное движение данной точки по отношению к среднему движению.

2) К следующей предпосылке: составляющая в любом направлении скорости молекулы может быть разложена на составляющую средней скорости (например u) всех молекул, лежащих в ближайшей окрестности к данной молекуле, и на составляющую (например ξ) относительной скорости, которая является разностью полной скорости молекулы и скорости средней (например $\cdot u$). При этом u и ξ так связаны между собою, что, обозначая через M массу молекулы и суммируя по всем молекулам ближайшей окрестности, мы должны иметь:

$$\sum(M\xi) = 0, \quad \sum(Mu\xi) = 0 \text{ и т. д.}$$

и, с другой стороны,

$$\sum[M(u + \xi)^2] = \sum[M(u^2 + \xi^2)].$$

Геометрический принцип 1) нужен только для того, чтобы провести разделение между энергией среднего движения и энергией внутренних движений молекул с целью исключить всякие геометрические соображения, связанные с предпосылкою 2), из рассмотрения внутренних движений молекул.

То, что предпосылка 2) имеет чисто геометрический характер, видно уже из того, что ее смысл связан с распределением некоторых количеств в пространстве в данный момент времени. Ясно, что вопрос о том, можно ли провести указанное в предпосылке разделение при каких-либо видах распределения и если возможно, то при каких именно, является задачей для чисто геометрического решения.

Если не считать с кажущейся очевидностью предпосылки 2) и рассмотреть ближе, что в этой предпосылке предполагается, то станет сразу ясной необходимость дальнейших определений.

Составляющая u средней скорости всех молекул, находящихся в окрестности какой-либо точки, скажем P , может быть только средней скоростью всех молекул в некотором объеме S , заключающем

точку P . В таком случае u есть составляющая средней скорости механической системы, заключенной в объеме S , и определяется как такая для всех точек внутри S . Умножив u на массу всех молекул в объеме S , мы получим составляющую полного количества движения системы, заключенной в S . Однако по предпосылке 2) скорость u и ее производная должны быть непрерывными функциями положения точки P , и эти функции должны непрерывно изменяться даже внутри S . Таким образом u не должно являться составляющей средней скорости всей системы в S , но только средней скорости в данной точке P . Хотя бы это явно и не высказывалось, предполагается, что объем S выбирается таким образом, чтобы точка P была центром тяжести системы, заключенной в S . Определив, таким образом, положение P относительно S , мы должны еще дополнительно определить самый объем S так, чтобы количества u и другие скорости могли непрерывно изменяться с положением точки P . Это условие может быть всегда выполнено, если размеры и форма объема S могут непрерывным образом изменяться с положением точки P . При подобном определении относительного положения P и S , а также размеров и формы S , можно, далее, выразить условие для распределения u , при котором сумма $\sum (Mu^2)$ равна нулю, т. е. условие для среднего количества движения.

Пусть S_1 , u_1 и т. д. относятся к некоторой точке P_1 . Пусть P есть другая точка, относительные координаты которой относительно P_1 равны x , y , z , а S — объем и u — скорость, относящиеся к точке P . Точка P_1 есть центр тяжести S_1 , а центр тяжести S лежит в точке P с координатами x , y , z . Как бы много или мало ни различались между собою S и S_1 , объем S всегда выбирается так, чтобы составляющие u и другие были непрерывными функциями координат x , y , z . Таким образом u может отличаться от u_1 , даже если P находится в объеме S_1 .

В таком случае согласно с предпосылкою 2) сумма $\sum (Mu)$, составленная для объема S_1 , будет представлять собою составляющую количества движения материальной системы, находящейся в объеме S_1 . Таким образом, для того чтобы условие для среднего количества движения было выполнено, необходимо, чтобы среднее значение количества u для объема S_1 было равно u_1 , т. е. равно составляющей средней скорости системы в S_1 . При сделанных геометрических определениях это условие может быть выполнено только при некоторых видах распределения количества u . По самому определению скорость u есть непрерывная функция координат x , y , z , поэтому $M(u - u_1)$ может быть разложено в ряд по степеням координат. Беря интеграл этого ряда по объему S_1 и приравнявая его нулю, мы получим условие для среднего значения составляющей количества движения.

Благодаря ограничению, которое налагается определением объема S на изменение координат, мы получаем таким путем геометрическое условие для распределения скоростей u .

Из самого определения среднего количества движения ясно (это следует, впрочем, и из всего хода рассуждения), что рассматриваемое условие будет удовлетворено, если скорость u остается постоянной. Мы найдем затем, что это условие для средних количеств движения

выполняется с полной точностью при некоторых других видах распределения скоростей, тогда как при всяком другом распределении оно уже удовлетворяется только с приближением, для которого возможно, однако, дать определенную оценку.

Получив из выражения среднего количества движения те условия, которым должно удовлетворять распределение скоростей u и других, мы должны еще из выражений для $M(u - u')$ и других вывести те условия, которым должны еще удовлетворять и скорости ξ и др. Согласно этим условиям суммы $\sum M(u\xi)$ и других, взятые по объему S_1 , должны равняться нулю одновременно с суммами $\sum M(u - u')$ и др. В таком случае условие для средней энергии будет выполняться наряду с условиями для количеств движения. Оказывается, что при таком распределении средних скоростей u и других для того, чтобы можно было разделить энергию движения на энергию средних скоростей и энергию относительных скоростей, мы еще должны ввести новые условия, которые налагаются на распределение относительных скоростей ξ и др. Эти условия для относительных скоростей, очевидно, удовлетворяются скоростями чисто теплового молекулярного движения. Только в связи с тепловым движением эти условия и рассматриваются в настоящей статье.

Из рассмотрения самих геометрических оснований теории и условий для тех распределений скоростей u и других, к которым применим с полной точностью принятый метод анализа, вытекает, что тот же метод может быть обобщен для изучения движения любой системы соответственным введением другого определения значений употребляемых символов. При этом методе можно обойтись и без исключения внутренних движений молекул, как то обыкновенно делается в теории газов.

Подразумевая под u , v , w скорости (непрерывного поля скоростей или нет) движения материи в данной точке, под ρ — плотность и обозначая, далее, через $\bar{u}$ и т. д. средние скорости (вместо введенного выше обозначения u), а через u' и т. д. — относительные скорости, мы получим совершенно те же геометрические условия для средних количеств движения и для энергии средних скоростей. Эти условия будут выражены таким же образом, так что вся теория окажется применимой к любой механической системе самого общего вида.

1) Для того чтобы получить условия для распределения скоростей молярного движения, при которых удовлетворяются условия для среднего количества движения, и при которых возможно разделение энергии молярного движения и движения теплового, следует под u и т. д. и под ρ подразумевать действительные скорости и плотность молекул в данной точке. Объем S должен иметь размеры, соизмеримые с расстоянием молекул или же тех периодических смещений, которые они испытывают. В таком случае условия для распределения скоростей u и других, совместимые с условиями для средних количеств движения, будут относиться к распределению скоростей молярного движения, при котором энергия движения может быть разделена на энергию молярного движения и энергию движения теплового.

2) Если условия пункта 1) удовлетворяются с достаточной степенью точности, то условия для средних скоростей могут относиться к сред-

ним молярным скоростям. Если под обозначениями u и другими мы будем подразумевать молярные скорости [обозначенные через u в пункте 1)], а размеры объемов S примем того же порядка, как периодические или вихревые перемещения при пульсациях скоростей, то дополнительные условия, совместимые с условиями для средних количеств движения, будут уже относиться к средним молярным скоростям для того, чтобы было возможно разбить полную энергию молярного движения на энергию среднего молярного движения и энергию относительного молярного движения.

Подведя таким способом определенное геометрическое основание под аналитический метод исследования кинетической теории газов, мне удалось доказать следующие положения (февраль 18, 1895 г.):

а) Заключение, к которому пришел Г. Стокс, что функция рассеяния представляет собою скорость, с которою энергия движения переходит в тепловую, дает точное определение скоростей u , v , w в качестве составляющих средней скорости жидкости, уточняя самое определение.

б) Уравнения, основанные на этом определении, имеют место и оказываются справедливыми только в том случае, когда осредненное движение, за исключением движения теплового, является установившимся.

в) Факт возможности существования такого установившегося осредненного движения, при котором происходит в то же время переход энергии этого движения в тепловую энергию, показывает, что существует определенная причина, отделяющая осредненное движение от теплового, благодаря которой периоды осредненных скоростей, как по времени, так и в пространстве, отличаются по величине от периодов, соответствующих тепловым движениям. В то же время энергия осредненного движения непрерывно превращается в тепловую энергию без перехода через какое-либо промежуточное состояние движения.

г) Если осредненное движение неустановившееся (за исключением теплового движения), то, каким бы установившимся ни был характер потока жидкости в целом, указанные уравнения будут справедливы только с известным приближением. Это приближение увеличивается с увеличением отношения размеров периодов осредненного движения во времени и в пространстве к соответствующим периодам теплового движения.

е) Если указанная причина разделения движений и явление превращения энергии являются следствием общих коренных свойств материи, а не только рассмотренных видов движения, то подобные же явления должны быть обнаружены в отношении осредненного молярного движения, с одной стороны, и относительного молярного (за исключением теплового), — с другой.

Существование подобных явлений должно сказываться в виде совершенно общих законов, вроде необъясненных до сих пор законов сопротивления жидкостей, общего закона рассеяния энергии или второго закона термодинамики.

1) Всеобщность свойств материи, от которых зависит превращение энергии, подтверждается тем фактом, что сопротивление жидкости,

поскольку оно не просто пропорционально скорости, создается относительным (турбулентным) молярным движением.

г) Существование общей причины разделения типов движения непосредственно следует из существования критического числа. Зависимость этого числа от условий, ограничивающих относительные размеры периодов относительного молярного движения по сравнению с периодами теплового движения, подтверждает всеобщий характер тех свойств материи, от которых это явление зависит.

h) Самое доказательство общности свойств материи, от которых зависит разделение видов движения и превращение энергии, показывает, что если среднее молярное движение и его отношение к относительному молярному движению определяется в уравнениях движения так же, как осредненное движение и тепловое, то в таком случае:

1) Уравнения движения должны заключать в себе переход энергии среднего молярного движения в относительное молярное.

2) Уравнения движения, будучи проинтегрированы по всей механической системе в целом, должны обнаружить, что возможность появления относительного молярного движения зависит от отношения возможных значений периодов относительного молярного движения к значениям периодов теплового движения.

i) При преобразовании общих уравнений движения с целью разделения среднего молярного движения с бесконечными периодами и относительного молярного движения с конечными периодами получаются две различные системы уравнений: одна система относится к среднему молярному движению и его зависимости от относительного движения и теплового, другая система уравнений относится к относительному молярному движению и его зависимости от среднего движения и теплового.

j) Уравнение энергии среднего молярного движения, которое выводится из первой системы, показывает, что эта энергия уменьшается превращением энергии в тепловую и в энергию относительного движения. Переход энергии из среднего движения в относительное выражается функцией, по форме своей тождественной с той, которая дает переход энергии в теплоту.

Уравнение для энергии относительного молярного движения, которое получается из второй системы уравнений, обнаруживает, что эта энергия изменяется только благодаря притоку энергии из среднего молярного движения и расходу энергии вследствие ее превращения в теплоту.

к) Разность скоростей изменения энергии относительного движения вследствие 1) прихода энергии из среднего молярного движения, выражаемого функцией перехода и 2) превращения энергии относительного молярного движения в теплоту, которое выражается функцией рассеяния для относительного движения, позволяет вывести решающее уравнение, определяющее те условия, при которых относительное молярное движение может сохраняться.

l) Это решающее уравнение не зависит от значения количества энергии относительного молярного движения. Оно выражает соотношение между первыми пространственными производными средних молярных скоростей, пространственными периодами относительного мо-

лярного движения и количеством $\frac{\mu}{\rho}$. Таким образом те обстоятельства движения и условия, которые определяют наибольшие возможные значения периодов относительного молярного движения, определяют в то же время и те условия, которым должно удовлетворять среднее молярное движение для того, чтобы могло быть устойчивым относительное молярное движение. Иначе говоря, мы получаем условия для определения критического числа или критерия.

м) В применении этих условий к движению воды с установившимся средним движением между параллельными плоскими стенками мы находим, что пограничные условия и уравнение непрерывности определяют предел для возможной наибольшей величины пространственных периодов относительного молярного движения. Таким образом решающее уравнение определенно доказывает положение, что если существует бесконечно малое извилистое движение, т. е. возмущение с относительным движением, то оно должно заглухнуть, если, количество

$$\frac{\rho DU_m}{\mu}$$

меньше определенного числа, которое зависит от формы сечения стенок канала и остается постоянным при геометрическом подобии. При больших значениях этого количества, как то по крайней мере следует из решающего уравнения, энергия извилистого движения может возрастать до определенных пределов и определяет собою сопротивление движению потока.

п) Решающее уравнение дает, помимо механического объяснения для существования критического числа K , еще и те чисто геометрические соотношения, которые определяют значение этого числа. Хотя эти соотношения и предполагают некоторые геометрические условия для установившегося среднего движения, дополнительно к условиям сохранения энергии и количества движения, тем не менее теория дает нижний предел значений K при любых пограничных условиях.

В упомянутом частном случае этот нижний предел равен 517. Это значение меньше установленного опытом значения для круглых труб и равно почти половине того числа, которое, судя по опытам, можно предполагать для плоских труб. Критическое число больше указанного нижнего предела благодаря дополнительным кинематическим условиям для установившегося среднего молярного движения. Для влияния этих добавочных условий, суживающих пределы возможных значений критического числа, имеется, таким образом, некоторый простор.

о) Решающее уравнение дает также определенное выражение для сопротивления. По условиям динамического подобия это выражение зависит при существовании геометрического подобия от значения количества:

$$\frac{\rho}{\mu^2} \frac{dp}{dx} b^n,$$

где b есть один из поперечных размеров трубы. Само выражение для сопротивления очень сложно, но оно показывает, что скорости относительного молярного движения при скоростях среднего движения, выше критических, ограничены и что сопротивление возрастает, как некоторая степень средней скорости, большая первой.

РАЗДЕЛ II.

Среднее движение и тепловое движение и их различие при помощи их периодов. Среднее молярное и относительное молярное движения. Причина различения и превращения энергии. Две системы уравнений. Решающее уравнение.

§ 6. Рассмотрим общие уравнения движения несжимаемой жидкости при отсутствии внешних объемных сил:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} + \rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yx} + \rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zx} + \rho u w) \right\}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_{xy} + \rho v u) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yy} + \rho v v) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zy} + \rho v w) \right\}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_{xz} + \rho w u) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yz} + \rho w v) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zz} + \rho w w) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и уравнение непрерывности:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2)$$

Выражения p_{xx} , p_{yz} и другие представляют любые напряжения на единицу площади, действующие с отрицательной стороны плоскости, перпендикулярной к той координате, которая обозначена в виде первого индекса. Направление напряжения отмечено вторым индексом.

Умножая написанные уравнения соответственно на u , v , w , интегрируя их по частям и складывая, мы получим уравнение для кинетической энергии E :

$$2E = \rho (u^2 + v^2 + w^2),$$

отнесенной к единице объема:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) E = \\ = - \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} (u p_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (u p_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (u p_{zx}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (v p_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v p_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (v p_{zy}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (w p_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (w p_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (w p_{zz}) \end{aligned} \right\} \\ + \left\{ \begin{aligned} &p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + p_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ &+ p_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \\ &+ p_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + p_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Левая часть равенства выражает скорость изменения кинетической энергии (отнесенной к единице объема) элемента объема жидкости, движущегося со скоростью u , v , w .

Первый член второй части выражает элементарную работу напряжений, действующих на данный элемент объема со стороны окружающей его жидкости.

По закону сохранения энергии второй член правой части равенства выражает скорость изменения разности кинетической энергии и работы напряжений. Насколько мне известно, при отсутствии других сил и каких-либо изменений потенциальной энергии, этот член был признан равным скорости, с которой теплота переходит в энергию движения. Это было указано первый раз Г. Стоксом в качестве следствия закона сохранения энергии, только что установленного в то время Джоулем. (Philos. Transactions of Cambridge, т. IX, стр. 57.)

§ 7. Это заключение, т. е. что второй член правой части равенства (3) представляет собою скорость превращения теплоты, как то обычно принимается, может быть правильно. Существует, однако, одно следствие этого положения, которое очень близко связано с методом рассуждения, принятым в настоящей статье, и на которое, насколько мне известно, еще не было до сих пор определенно обращено внимание.

Составляющие скоростей в уравнениях движения вязкой жидкости.

Насколько мне известно, нигде не делалось попыток дать вполне строгое определение скоростей u , v и w , входящих в уравнения движения. Они определяются обыкновенно в качестве скоростей частицы жидкости в точке с координатами x , y , z . Это может означать или что u , v , w являются составляющими действительной скорости той материальной точки, которая в данный момент проходит через точку x , y , z , или же, что u , v , w являются средними скоростями всей массы, заключенной в некотором объеме, внутри которого лежит точка x , y , z или, наконец, что это средние за данный промежуток времени скорости материальных точек, проходящих через точку x , y , z .

Если принять первое определение, то правая часть написанного выше равенства представляет собою скорость увеличения кинетической энергии на единицу объема материи в данной точке. Интеграл этого выражения по определенному ограниченному объему S , движущемуся вместе с жидкостью, будет представлять скорость увеличения полной кинетической энергии в этом объеме, включая сюда и энергию теплового движения. Следовательно, разность между производимой на поверхности S работы и увеличением кинетической энергии может представлять собою по закону сохранения энергии только ту теплоту, которая образуется и которая не составляет энергии движения. Отсюда вытекает следствие:

а) Предположение, что второй член уравнения (3) представляет собою скорость превращения теплоты, определяет u , v , w таким образом, что эти количества не могут представлять собою действительной скорости материальной точки, проходящей через данную точку пространства.

Далее, если под u , v , w подразумевать составляющие средней скорости некоторого объема или для некоторого промежутка времени, таким образом, чтобы выражения $\sum ru$, $\sum rv$ и $\sum rw$ представляли собою составляющие количества движения, а выражения $z \sum rv - y \sum rw$ и т. д. —

моменты количеств движения той массы, для которой производится осреднение, то все же возникает вопрос, для каких же объемов или для каких промежутков времени определяются средние скорости. Таким образом:

б) Предположение, что второй член уравнения (3) представляет скорость превращения теплоты, определяет объемы и промежутки времени, для которых рассчитываются средние скорости таким образом, чтобы E могло представлять собою полную энергию среднего движения (молярного), за исключением энергии теплового движения.

Уравнения являются приближенными за исключением только трех частных случаев.

§ 8. Из рассуждения предыдущего параграфа вытекает, что если второй член уравнения (3) выражает скорость перехода тепловой энергии в энергию молярного движения, то следует принять одно из двух заключений, а именно: можно принять, что ru , rv , rw выражают составляющие среднего количества движения в некотором объеме S_0 , заключающем точку x , y , z и относятся к определенному моменту времени. Скорости u , v , w рассматриваются в качестве функций точки x , y , z , которая является центром тяжести объема S_0 , а ρ представляет собою среднюю плотность в этом объеме.

Можно сделать и другое предположение, что ru , rv и rw представляют собою средние значения количеств движения в определенной точке x , y , z , но вычисленные для промежутка τ времени. При этом ρ есть средняя плотность за время τ . Если t есть момент времени, для которого рассматриваются скорости u , v , w , t' —какой-либо другой момент, а ρ — истинная плотность, то, суммируя для всего промежутка τ времени, мы должны иметь

$$\sum [(t - t') \rho] = 0.$$

Уравнения движения предполагают, однако, что ρ , u , v , w являются непрерывными функциями координат и времени. Можно показать, что это возможно только при соблюдении определенных условий относительно распределения средних скоростей, выбора объема S_0 или промежутка времени τ .

Среднее и относительное движения материи.

Каково бы ни было движение материи в определенном объеме S в данный момент времени, средние значения составляющих u , v , w скорости будут иметь выражения:

$$\bar{u} = \frac{\sum (\rho u)}{\sum (\rho)} \quad \text{и т. д.} \quad (4)$$

Если принять затем $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ в качестве скоростей точки x , y , z мгновенного центра тяжести объема S , то количества движения центра тяжести могут быть представлены в виде

$$\rho u = \rho \bar{u} + \rho u' \quad \text{и т. д.,} \quad (5)$$

где u' и т. д. суть скорости относительно осей, имеющих начало в центре тяжести объема S и движущихся со средней скоростью $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

В любом объеме произвольного размера можно определить форму и размеры меньшего объема S около каждой точки x, y, z с таким расчетом, чтобы эта точка была центром тяжести массы в объеме S . Поэтому скорости движения в данном большем объеме могут быть разбиты на два поля скоростей: на поле средних скоростей $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ в каждой точке и на поле скоростей u' , v' , w' в той же точке относительно средних скоростей.

Однако, если $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ должны представлять действительные средние скорости, то необходимо, чтобы суммы $\sum(\rho u')$, $\sum(\rho v')$, $\sum(\rho w')$, взятые по всему объему S около каждой точки, были каждая равны нулю. Для этого необходимо соблюдение некоторых условий.

Действительно, пусть x, y, z суть координаты точки G центра тяжести материи, заключенной в объеме S , а x', y', z' — координаты другой произвольной точки в объеме S . Наконец, пусть a, b, c суть размеры объема S в направлении осей x, y, z *, считаемые от точки $G(x, y, z)$. Скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ должны быть непрерывными функциями координат, а потому, сдвигая объем S таким образом, чтобы центр его тяжести оказался в точке x', y', z' , мы найдем для значения скорости $\bar{u}$ в этой точке выражение:

$$\bar{u} = \bar{u}_G + (x' - x) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_G + (y' - y) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_G + (z' - z) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_G + \dots, \quad (6)$$

в котором производные взяты для точки G . Такие же выражения мы получим и для $\bar{v}$ и $\bar{w}$.

Значение скорости u' в точке x', y', z' получится, если мы вычтем это значение $\bar{u}$ из соответствующего значения полной скорости u в той же точке. Суммируем теперь эти разности по объему S , заключающему точку G с координатами x, y, z . По определению мы должны иметь, суммируя по S , равенства:

$$\sum[\rho(u - \bar{u}_G)] = 0 \quad \text{и} \quad \sum[\rho(x' - x)] = 0, \quad (7)$$

а потому

$$\sum(\rho u') = - \left\{ \frac{1}{2} \sum[\rho(x - x')^2] \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)_G + \frac{1}{2} \sum[\rho(y - y')^2] \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)_G + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum[\rho(z - z')^2] \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right)_G + \dots \right\} \quad (8A)$$

т. е.

$$\frac{\sum(\rho u')}{\sum(\rho)} < - \left\{ \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right)_G + \frac{b^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)_G + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right)_G + \dots \right\}$$

* То-есть наибольшая длина линейных размеров. *Прим. перев.*

Тем же путем мы получим, суммируя по интервалу времени τ , заключающему момент t , следующие равенства для этого момента:

$$\bar{u} = \frac{\sum(\rho u)}{\sum(\rho)} \quad \text{и} \quad \rho \bar{u} = \rho u + \rho u',$$

и для произвольного другого момента t' в интервале τ уравнение:

$$\bar{u} = \bar{u}_t + (t - t') \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)_t + \frac{1}{2} (t - t')^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right)_t + \dots,$$

где $\sum \rho(t - t') = 0$ и $\sum \rho(\bar{u}_t - u) = 0$.

Мы получим, таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum(\rho u') &= \sum \frac{1}{2} \rho (t - t')^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right)_t + \dots \\ \frac{\sum(\rho u')}{\sum(\rho)} &< -\frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right)_t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8B)$$

Из неравенств (8A) и (8B) и подобных же для $\sum(\rho v')$ и $\sum(\rho w')$ мы заключаем, что если имеют место равенства:

$$\sum(\rho u') = \sum(\rho v') = \sum(\rho w') = 0,$$

в которых суммы берутся по объему S или для промежутка времени τ , то правые части равенств (8A) или (8B) должны быть всегда равны нулю, т. е. первые производные по координатам скоростей $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ должны быть постоянными.

Это условие удовлетворяется, если средние скорости от времени не зависят или меняются равномерно с течением времени, причем движение со средними скоростями совершается в одном направлении, если скорости в этом направлении и не изменяются.

Действительно, предположим, что среднее движение происходит в направлении координаты x . При периодическом движении с периодом $2a$ мы получим, суммируя по объему $2a \, dy \, dz$, равенство:

$$\sum(\rho u') = 0,$$

как бы мала ни была площадь $dy \, dz$. А так как средняя скорость может изменяться только в направлении y или z , для которых можно принять b и c бесконечно малыми, то при постоянном значении производной $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ все перечисленные условия будут в точности удовлетворены.

Указанные условия будут также удовлетворены, если среднее движение сводится к равномерному расширению или сжатию или если оно является движением твердого тела.

Указанные три случая, для которых, как легко видеть, изменения средних скоростей везде равномерны в направлении движения или являются равномерно переменными с течением времени, являются единственными, для которых условия (8A) или (8B) точно выполняются.

Условия будут тем не менее приближенно удовлетворяться, если первые производные скоростей $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ будут приближенно постоянны в объеме S .

В таком случае можно пренебречь правой частью уравнения (8А) или (8В). Степень точности этого приближения будет определяться относительной величиной членов

$$\frac{a}{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \text{ и т. д. или } \tau \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

по сравнению с членами

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \text{ и т. д. или } \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}.$$

Поскольку в дальнейшем часто придется иметь дело с относительной величиной этих количеств и поскольку для периодических движений относительная величина таких членов измеряется отношением периодов (в пространстве или во времени) к значениям a , b , c , и τ , которые также могут быть в некотором смысле названы периодами скоростей u' , v' , w' , мы и обозначим эти отношения выражением „периоды“ в указанном смысле. При этом следует заметить, что средние скорости не будут периодическими, т. е. будут иметь бесконечно большие периоды, когда они будут постоянны в направлении движения и равномерно переменны с течением времени.

§ 9. Таким образом мы видим, что сведение скоростей какой-либо системы к сумме средних переменных скоростей и таких относительных скоростей, для которых количество движения (с относительными скоростями), отнесенное к объему с размерами a , b , c , равно нулю, может быть сделано с известным приближением.

Точность такого приближения тем больше, чем больше относительная величина периодов скоростей $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ по сравнению с периодами для скоростей u' , v' , w' . Эта точность измеряется отношением порядков величины периодов тех и других скоростей.

Тепловое движение приближенно может рассматриваться как движение относительное.

Общезвестный из опыта факт, что количество движения материальных систем ни в какой мере не зависит от теплоты, показывает, что тепловое движение является относительным для того среднего движения, которое определяется для объемов физически заметных размеров. Тепловое движение во всяком случае не является единственно возможным видом относительного движения материи. Если тепловое движение является относительным движением в отношении к любому среднему движению с какими угодно периодами, то должна существовать причина такого разделения, причина, исключающая возможность существования других относительных движений помимо тепловых и благодаря которой существуют только такие средние движения, периоды которых в пространстве и времени имеют порядок величины, во много раз

превосходящий порядок величины периодов чисто теплового движения. В противном случае тепловые движения, как это следует из уравнений (8A) и (8B), не могли бы с высокой степенью приближения являться движениями 'чисто' относительными по отношению ко всем другим видам движения. В таком, случае мы не имели бы с очень большой точностью равенства:

$$\left. \begin{aligned} & p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + p_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ & + p_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \\ & + p_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + p_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} = - \frac{d}{dt} (pH), \quad (9)$$

в котором выражение в правой части означает скорость превращения теплоты в энергию среднего движения.

Превращение энергии относительного молярного движения в энергию движения теплового.

§ 10. Наличие некоторой причины обособления молярного и теплового движений, обуславливающей различие порядков величины периодов относительного молярного движения и движения теплового, подтверждает существование другого явления: превращения энергии относительного молярного движения с периодами 'большого' порядка величины в энергию теплового движения с меньшими периодами.

Если относительное молярное движение не может иметь периодов, порядок которых близок к порядку периодов теплового движения, то и доказанное Джоулем превращение энергии молярного движения в тепловую не может происходить с постепенным уменьшением периодов относительного молярного движения до тех пор, пока они не сравняются с периодами теплового движения. Во всяком случае в последних этапах этого перехода энергии должно существовать некоторое явление превращения энергии без промежуточных состояний относительного молярного движения с понижающейся величиной периодов.

Такой переход энергии относительного молярного движения в энергию тепловую может быть назван в собственном смысле слова превращением. Это станет очевидным, если мы вспомним, что скорости осредненные и скорости относительные не имеют обособленного существования и являются только количествами, полученными путем некоторого определенного метода отвлечения. Таким образом некоторые перемены, испытываемые действительными скоростями, могут выразиться таким путем отвлечения в виде превращения отвлеченной энергии одного из видов отвлеченных скоростей в отвлеченную энергию другого вида отвлеченных же скоростей.

Все подобные превращения должны сводиться к некоторым определенным изменениям истинных, действительных скоростей материи, зависеть от свойств материальных тел и объясняться механическими законами. Поэтому непосредственный переход энергии относительного молярного

движения в энергию теплового движения без промежуточных стадий свидетельствует о существовании некоторой причины, которая изменяет истинные скорости действительного движения материи, что и сказывается в виде такого превращения. Эту причину мы назовем „причиной превращения“.

Причины разделения скоростей и причина превращения энергии.

§ 11. Мы уже говорили, что тепловое движение является по отношению к молярному движению движением относительным. Помимо этой особенности характерное и известное свойство теплового движения состоит в том, что оно является конечным видом движения материи. Поскольку скорости молярного движения равномерны в пространстве и состояние материи неизменно во времени, остается неизменным и тепловое движение. Насколько нам известно, это свойство характеризует тепловое движение. Отличие теплового движения от молярного обуславливается в конечном счете некоторыми основными свойствами материи.

Однако из этого еще не следует, что причина превращения энергии или даже причина разделения целиком определяется этими свойствами материи. Как обстоит дело в действительности, может показать только опыт. Если обе указанные причины или только одна из них зависят только от таких свойств материи, которые сказываются в тепловом движении, то аналогичных явлений не может существовать в молярном движении среднем и относительном, как бы ни была велика разность их периодов. Если же, с другой стороны, эти две причины зависят от общих свойств материи при всяких видах движения, то должно существовать различие в величине периодов среднего молярного движения и относительного молярного движения, должно существовать и превращение энергии одного из этих видов движения в энергию другого, а также и превращение энергии общего молярного движения в энергию теплового движения.

Тем не менее ни при каких обстоятельствах соотношение между средним молярным движением и относительным молярным не может быть совершенно тождественным отношению между молярным и тепловым движениями, так как тепловое движение не может отсутствовать, и наряду с превращениями энергии среднего молярного движения и относительного молярного одной в другую существует одновременно переход энергии молярного движения, как среднего, так и относительного, в энергию тепловую. Этот переход энергии молярного движения в тепловую может оказывать существенное влияние как на переход энергии из среднего молярного в относительное молярное движение, так и на ту причину, которая разделяет их периоды.

Несмотря на осложняющее влияние всегда присутствующего теплового движения, можно думать, что наблюдения над средним и относительным молярными движениями могут привести к разъяснению тех свойств материи, от которых зависят как разделение видов движения, так и причина превращения энергии.

§ 12. Доказать принадлежность этих свойств только тепловому движению материи можно было бы, доказав их отсутствие при других

видах движения. Если эти свойства присущи материи при всяком движении, хотя бы и в слабой степени, то весьма невероятно, чтобы в молярном движении их действие было настолько незначительно, что для его обнаружения необходимы особо сложные и точные приемы. Свойства материальных тел, обуславливающие собою разделение молярного и теплового движений, настолько всеобщие и после того, как такое разделение было установлено, стали настолько обычными, что их теперь считают в числе основных свойств природы и перестали интересоваться их причиной. Если эти свойства действительно существуют, то их действие при молярном движении должно сказываться существенным и всеобщим образом. Повидимому, таким общим действием этих свойств следует рассматривать те явления и законы, известные из опыта, которые до сих пор еще не были рационально объяснены. Таковы законы: сопротивления жидкости, ограниченной твердыми телами и сопротивлению, оказываемого жидкостью движению тел, погруженных в нее. При непериодическом общем движении это сопротивление почти пропорционально квадрату скорости. Таковы же законы общего рассеяния энергии и второй закон термодинамики.

§ 13. Обращаясь к первому приведенному примеру, мы видим, что он дает непосредственное свидетельство о свойствах материи, которыми обусловлено превращение энергии среднего движения в энергию относительного движения. Так, мои опыты с окрашенными струями при установившемся среднем движении показывают, что когда сопротивление движению жидкости становится пропорциональным некоторой степени средней скорости потока больше первой, то состояние движения всегда характеризуется присутствием поперечных скоростей, приводящих к извилистому движению.

Повидимому, когда имеется такое сопротивление, то это является признаком существования действия некоторой причины, благодаря которой энергия среднего молярного движения с бесконечными периодами непосредственно превращается в энергию относительного движения с периодами конечными, причем это относительное движение характеризуется турбулентным извилистым движением жидкости. Относительное движение поддерживается путем непрерывного перехода энергии из среднего движения, несмотря на одновременную постоянную убыль энергии относительного движения благодаря превращению ее в теплоту.

Мы имеем, таким образом, прямое свидетельство опыта о существовании свойств материи, являющихся причиной превращения энергии, общее и значительное действие которой наблюдается не только в одном тепловом движении.

Точно так же мне удалось экспериментальным путем показать, что относительное молярное движение с турбулентностью конечных периодов, характеризующееся как извилистыми движениями, так и сопротивлением, может поддерживаться только при определенных условиях. Эти условия определяют наибольшее значение скорости среднего движения с бесконечными периодами, значение периодов относительного движения и определяют критерий K :

$$K = \rho \frac{DU_m}{\mu}. \quad (10)$$

Эти данные являются не только прямым опытным доказательством существования причины разделения видов движения, благодаря которой периодическое молярное движение может существовать только с периодами, значительно превышающими периоды теплового движения; они указывают также на то, что эта причина разделения зависит от свойств материи как при тепловом, так и в молярном движении.

Выражения для скорости превращения энергии и причина разделения.

§ 14. В § 8 мы показали, что уравнения движения дают приближенные выражения для соотношения между скоростями молярного движения и напряжениями в том случае, когда отношение периодов молярного движения к периодам теплового очень велико. Это приближение тем точнее, чем больше указанное отношение приближается к бесконечности. Отсюда следует, что механические или кинематические основания для перехода энергии из среднего в относительное молярное движение должны выводиться из этих уравнений движения.

Мы доказали, что свойства материи, обуславливающие переход энергии из среднего движения в относительное, сказываются не только при тепловом движении, но и при относительном молярном движении.

Применим уравнения движения к тому случаю, когда молярные скорости могут быть разложены на среднюю скорость молярного движения и скорость относительную. Среднюю скорость в точке x, y, z мы получим, интегрируя в объеме S_1 истинные скорости молярного движения и выбирая объем S_1 так, чтобы его центр тяжести находился в точке x, y, z . Суммируя количества относительного движения по объему S_1 , мы получим суммы, равные нулю. Из только что сказанного следует:

1) уравнения движения должны заключать в себе выражение для скорости превращения энергии среднего молярного движения в энергию относительного молярного движения, а также и выражения для превращения энергии того и другого вида молярного движения в энергию теплового движения.

2) интегрируя эти уравнения по всей системе, мы найдем, что сохранение энергии относительного молярного движения зависит при всяких условиях от относительной величины возможных значений периодов относительного молярного движения и периодов теплового движения.

Уравнения движений среднего молярного и относительного молярного.

§ 15. Последние заключения позволяют не только проверить результаты предшествующих рассуждений, но и указывают на то, как надо воспользоваться уравнениями движения для такой проверки.

Положим:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad (11)$$

где

$$\bar{u} = \frac{\sum \rho u}{\sum \rho} \quad \text{и т. д.}, \quad (12)$$

а суммирование производится по объему S_1 с центром тяжести в точке x, y, z . Скорости u, v, w суть непрерывные функции x, y, z , а потому и скорости $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, а также u', v', w' являются также непрерывными функциями x, y, z . Плотность ρ предполагается постоянной, а потому уравнения непрерывности обеих систем скоростей имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Обе системы скоростей должны также удовлетворять пограничным условиям, каковы бы ни были эти условия.

Обозначая, далее, посредством $\bar{p}_{xx}$ и т. д. средние значения напряжений в объеме S_1 , мы положим:

$$p'_{xx} = p_{xx} - \bar{p}_{xx} \quad \text{и т. д.} \quad (14)$$

Определим объем S_1 таким образом, чтобы вариации скоростей u, v, w от точки к точке этого объема могли быть приближенно приняты постоянными и обозначим через $\bar{u}'\bar{u}'$ и т. д. средние значения квадратов, и произведений скоростей относительного молярного движения.

Уравнения среднего молярного движения будут следующие:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}'_{xx} + \rho \bar{u}\bar{u} + \rho \bar{u}'\bar{u}') + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}'_{yx} + \rho \bar{u}\bar{v} + \rho \bar{u}'\bar{v}') + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}'_{zx} + \rho \bar{u}\bar{w} + \rho \bar{u}'\bar{w}') \right\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения приближенно справедливы, поскольку верны и уравнения (1) для молярного движения.

Вычитая почленно эти уравнения из уравнения молярного движения, мы получим:

$$\rho \frac{\partial u'}{\partial t} = - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [p'_{xx} + \rho (\bar{u}u' + u'\bar{u}) + \rho (u'u' - \bar{u}'\bar{u}')] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [p'_{yx} + \rho (\bar{u}v' + u'\bar{v}) + \rho (u'v' - \bar{u}'\bar{v}')] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [p'_{zx} + \rho (\bar{u}w' + u'\bar{w}) + \rho (u'w' - \bar{u}'\bar{w}')] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и т. д.

Это есть уравнение для количества движения относительного молярного движения в каждой точке.

Умножая последовательно уравнения среднего молярного движения на $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, складывая и полагая $2\bar{E} = \rho (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$, мы получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E} =$$

$$= - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u} (\bar{p}_{xx} + \rho \bar{u}' u')] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{u} (\bar{p}_{yx} + \rho \bar{u}' v')] + \frac{\partial}{\partial z} [\bar{u} (\bar{p}_{zx} + \rho \bar{u}' w')] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{v} (\bar{p}_{xy} + \rho \bar{v}' u')] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{v} (\bar{p}_{yy} + \rho \bar{v}' v')] + \frac{\partial}{\partial z} [\bar{v} (\bar{p}_{zy} + \rho \bar{v}' w')] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{w} (\bar{p}_{xz} + \rho \bar{w}' u')] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{w} (\bar{p}_{yz} + \rho \bar{w}' v')] + \frac{\partial}{\partial z} [\bar{w} (\bar{p}_{zz} + \rho \bar{w}' w')] \end{aligned} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{p}_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{p}_{yx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{p}_{zx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \\ & + \bar{p}_{xy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{p}_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{p}_{zy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \\ & + \bar{p}_{xz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{p}_{yz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{p}_{zz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned} \right\} + \rho \left\{ \begin{aligned} & \bar{u}' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}' w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \\ & + \bar{v}' u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}' v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v}' w' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \\ & + \bar{w}' u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w}' v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}' w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Это есть приближенное уравнение для энергии среднего молярного движения в том же смысле, в каком является приближенным уравнение (3) молярного движения.

Аналогично, умножая последовательно на u' , v' , w' уравнения (16) и складывая, мы получили бы уравнение энергии относительного молярного движения для каждой точки. Однако, мы получили бы таким способом ряд членов, среднее значение которых для объема S_1 равно нулю. Поскольку все такие члены в уравнении превращения энергии молярного движения в теплоту исключаются при суммировании по объему S_0 , то не имеет смысла вводить подобные члены для объема S_1 . Поэтому, отбрасывая такие члены, мы получим, полагая

$$2E' = \rho (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2), \quad (18)$$

следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E}' =$$

$$= - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [u' (p'_{xx} + \rho u' u')] + \frac{\partial}{\partial y} [u' (p'_{yx} + \rho u' v')] + \frac{\partial}{\partial z} [u' (p'_{zx} + \rho u' w')] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [v' (p'_{xy} + \rho v' u')] + \frac{\partial}{\partial y} [v' (p'_{yy} + \rho v' v')] + \frac{\partial}{\partial z} [v' (p'_{zy} + \rho v' w')] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [w' (p'_{xz} + \rho w' u')] + \frac{\partial}{\partial y} [w' (p'_{yz} + \rho w' v')] + \frac{\partial}{\partial z} [w' (p'_{zz} + \rho w' w')] \end{aligned} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{aligned} & p'_{xx} \frac{\partial u'}{\partial x} + p'_{yx} \frac{\partial u'}{\partial y} + p'_{zx} \frac{\partial u'}{\partial z} + \\ & + p'_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + p'_{yy} \frac{\partial v'}{\partial y} + p'_{zy} \frac{\partial v'}{\partial z} + \\ & + p'_{xz} \frac{\partial w'}{\partial x} + p'_{yz} \frac{\partial w'}{\partial y} + p'_{zz} \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned} \right\} - \left\{ \begin{aligned} & \rho \bar{u}' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{u}' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho \bar{u}' w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \\ & + \rho \bar{v}' u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho \bar{v}' v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \rho \bar{v}' w' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \\ & + \rho \bar{w}' u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \rho \bar{w}' v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \rho \bar{w}' w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

В правой части равенства сохранены только средние значения для объема S_1 .

Таково выражение для скорости изменения средней для объема S_1 энергии относительного молярного движения. Можно заметить, что скорость изменения энергии среднего молярного движения и средней энергии относительного молярного движения дают в сумме скорость изменения полной энергии молярного движения. Складывая выражения (17) и (19), мы получаем для энергии молярного движения то же уравнение, которое выводится из уравнения (3), если взять средние значения для объема S_1 .

Выражения для превращения энергии среднего молярного движения в энергию относительного молярного движения.

§ 16. При сложении выражений (17) и (19) единственными членами, которые не войдут в уравнение для средней энергии молярного движения, будут последние члены в правой части обоих уравнений, которые равны, но обратны по знаку.

Эти члены не представляют собою никакого изменения полной энергии всего молярного движения в целом и могут выражать только превращение энергии среднего движения в энергию относительного движения. А так как они являются единственными выражениями, которые из уравнений (17) и (19) не входят в общее выражение скорости изменения средней энергии молярного движения, то из этого следует, что они выражают собою полный обмен энергии между средним и относительным молярными движениями.

Можно видеть, кроме того, что действие, выражаемое этими членами, имеет чисто кинематический характер, так как оно зависит исключительно от мгновенного распределения скоростей средних и относительных, каковы бы ни были свойства материи или механические причины, обуславливающие это распределение скоростей. Эти члены выражают собою, таким образом, переход энергии из среднего движения в относительное и не выражают собою ничего другого. Наличие этих членов полностью подтверждает сделанное выше первое заключение в § 14.

Предпоследний член в правой части уравнения (17) для энергии среднего движения выражает собою скорость превращения энергии теплового движения в энергию среднего молярного движения и совершенно не зависит от относительного движения.

Точно так же предпоследний член правой части уравнения (19) для энергии относительного молярного движения является выражением скорости перехода энергии теплового движения в энергию относительного молярного движения и совершенно не зависит от среднего движения.

§ 17. В обоих уравнениях (17) и (19) первые члены правой части выражают скорости увеличения энергии соответственно среднего или относительного движения благодаря работе напряжений и благодаря переносу относительным движением количества движения.

Отметим, что в то время как первый член правой части уравнения (19) для энергии относительного движения не зависит от скоростей среднего движения, соответствующий член в уравнении (17) для среднего движения зависит от относительных скоростей.

Решающее уравнение.

§ 18. Интегрируя уравнения по объему, имеющему скорости среднего молярного движения жидкости, мы можем выразить интегралы первых членов правой части равенств в виде поверхностных интегралов. Эти интегралы представляют скорость работы, произведенной напряжениями, действующими на поверхности, а также скорость поступающей через поверхность энергии при среднем движении или при относительном.

Если область интегрирования обнимает собою всю систему или такую часть ее, что полная энергия, приносимая относительным движением через поверхность, равна нулю, то в таком случае скорость изменения полной энергии относительного движения представится в виде разности полного количества энергии, полученной от среднего молярного движения и полного количества энергии, превращающейся в теплоту. Таким образом, интегрируя уравнение (19), мы получаем:

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E}' dx dy dz = \\ & = - \int \int \int \left\{ \begin{aligned} & \rho \bar{u}' \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{u}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \\ & + \rho \bar{v}' \bar{u}' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho \bar{v}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \rho \bar{v}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \\ & + \rho \bar{w}' \bar{u}' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \rho \bar{w}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \rho \bar{w}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned} \right\} dx dy dz + \\ & + \int \int \int \left\{ \begin{aligned} & p'_{xx} \frac{\partial u'}{\partial x} + p'_{yx} \frac{\partial u'}{\partial y} + p'_{zx} \frac{\partial u'}{\partial z} + \\ & + p'_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + p'_{yy} \frac{\partial v'}{\partial y} + p'_{zy} \frac{\partial v'}{\partial z} + \\ & + p'_{xz} \frac{\partial w'}{\partial x} + p'_{yz} \frac{\partial w'}{\partial y} + p'_{zz} \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned} \right\} dx dy dz. \quad (20) \end{aligned}$$

Это уравнение выражает собою следующие основные соотношения:

1) Единственное полное интегральное влияние, оказываемое на относительное молярное движение со стороны среднего молярного движения, выражается в виде полной интегральной скорости превращения энергии среднего движения в энергию относительного.

2) За исключением того случая, когда энергия движения изменяется действием сил или переносом через поверхность объема интегрирования, полная энергия относительного молярного движения будет увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, больше или меньше полное количество энергии, поступающей в этот объем от среднего движения, чем та энергия относительного молярного движения, которая превращается в тепловую энергию.

§ 19. Подставим для напряжений p'_{xx} , p'_{yx} и т. д., их выражения, определяемые теорией вязкости, приближенная верность которой уже установлена.

Полагая таким образом:

$$\left. \begin{aligned} p'_{xx} &= p + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x} \text{ и т. д.} \\ p'_{yx} &= -\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и подставляя в последний член уравнения (20), представляющего переход энергий относительного движения в теплоту, мы получим:

$$\begin{aligned} & - \int \int \int \frac{\partial}{\partial t} (pH) dx dy dz = \\ & = \int \int \int \left\{ p \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \mu \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz. \quad (22) \end{aligned}$$

μ есть функция одной температуры. Принимая плотность ρ постоянной, имеем:

$$\begin{aligned} & - \int \int \int (pH) dx dy dz = \\ & = -\mu \int \int \int \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz. \quad (23) \end{aligned}$$

Если энергия относительного молярного движения сохраняется на одном уровне, то, подставляя полученное значение в уравнение (20), мы получим:

$$\begin{aligned} & - \rho \int \int \int \left\{ \begin{aligned} & \overline{u'u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \\ & + \overline{v'u'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{v'v'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \\ & + \overline{w'u'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \overline{w'v'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \overline{w'w'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned} \right\} dx dy dz - \\ & - \mu \int \int \int \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Таково решающее уравнение, дающее условия, при которых может поддерживаться относительное молярное движение.

§ 20. Написанное уравнение однородно относительно скоростей относительного молярного движения, и ясно, что условие, которое им выражено, не зависит от энергии относительного движения, деленной на ρ . Если отношение $\frac{\mu}{\rho}$ постоянно, то это условие зависит только от производных средних скоростей, распределения по величине и на-

правлению скоростей относительного молярного движения и, наконец, от квадратов и произведений периодов относительного молярного движения.

Второй член уравнения, представляющий скорость превращения теплоты в энергию относительного молярного движения, всегда остается отрицательным. Поэтому, каково бы ни было распределение по величине и направлению относительных скоростей и какова бы ни была изменчивость в пространстве средних молярных скоростей, это уравнение дает низший предел возможной скорости изменения в пространстве средних молярных скоростей в зависимости от возможных предельных значений периодов относительного молярного движения, при которых возможно сохранение этого движения, и затем от количества $\frac{\mu}{\rho}$. До

тех пор пока предельные значения периодов относительного молярного движения конечны, низший предел скорости изменения в пространстве средних молярных скоростей не будет равен нулю.

Таким образом подтверждается и второе заключение § 14, а вместе с тем и весь ход предыдущего рассуждения. Свойства материи, препятствующие сохранению молярного движения с периодами того же порядка величины, как и периоды теплового движения, являются свойствами, вытекающими из уравнений движения, правильность которых подтверждается опытом.

Причина превращения энергии.

§ 21. Функция, выражающая превращение энергии и фигурирующая в уравнениях средней энергии среднего молярного движения и относительного молярного, не объясняет еще причины этого превращения. Этой функцией выражается только кинематическое основание вариаций средних скоростей молярного движения и распределения относительных скоростей. Для того чтобы выяснить те свойства материи и те механические основания, от которых зависит влияние изменчивости в пространстве средних молярных скоростей на распределение величины и направлений относительных молярных скоростей, следует вернуться к уравнению (16) для относительных количеств движения. При рассмотрении этого уравнения следует искать объяснение причины в общем суммарном влиянии тех действий, которые выражены в этом уравнении в дифференциальной форме. Определение этой причины хотя и не имеет значения для доказательства существования критерия, выведенного из уравнения движения, однако может послужить к разъяснению того, что оставалось еще до сих пор не совсем понятным в отношении связи термодинамики с законами механики. Что это так, можно видеть хотя бы из существования отдельных уравнений среднего и относительного молярных движений.

Уравнение относительного молярного движения и уравнения термодинамики.

§ 22. При рассмотрении вопроса можно сразу видеть, что между соотношением, с одной стороны, уравнений среднего и относительного молярных движений, а с другой — уравнений молярного движения и теплового в термодинамике существует не просто случайная аналогия.

Если учесть влияние не только одного теплового движения на количество движения посредством введения напряжений p_{xx} и других, но учесть в то же время и действие относительного молярного движения, приняв для этой цели напряжения p_{xx} , p_{yz} и др. равными соответствующим суммам:

$$\bar{p}_{xx} + \rho \overline{u'u'}, \quad p_{yz} + \rho \overline{v'u'}, \dots$$

и подставить эти значения в уравнения (15) и (17), то уравнения (15) для среднего молярного движения станут по форме тождественными с уравнениями (1) для полного молярного движения, а уравнение (17) для энергии среднего молярного движения совпадет по форме с уравнением (3) для энергии полного молярного движения.

Уравнения, полученные из уравнений (15) и (17), верны наряду с уравнениями (1) и (3). Осреднение в первых уравнениях производится по объему S_1 , вместо объема S_0 во вторых. Вместо выражения (9) мы получим для значения последнего члена уравнений выражение:

$$p_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dots = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \rho \overline{u'u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dots \quad (25)$$

Правая часть этого равенства представляет собою сумму скоростей превращения теплоты и энергии относительного молярного движения в энергию среднего молярного. Уравнение (19) показывает, откуда эта энергия происходит.

Аналогия явления превращения энергии среднего молярного движения в энергию относительного молярного с явлением перехода энергии полного молярного движения в теплоту показывает, что эти явления тождественны с формальной точки зрения и что переход энергии из молярного движения в тепловое может быть выражен в качестве превращения энергии функцией превращения, подобной той, которую мы определили для относительного молярного движения, с тем только отличием, что мы должны в данном случае заменить скорости относительного молярного движения скоростями теплового движения, а в качестве плотности рассматривать истинную плотность в каждой точке. Отсюда следует, что те общие уравнения, частным случаем которых для постоянной плотности являются уравнения (16) и (19), должны дать указания на свойства материи и дать механическое объяснение закона всемирного рассеяния энергии и второго закона термодинамики.

Доказательство существования критерия, выведенного из уравнений движения, совершенно не зависит от тех свойств материи и законов механики, на основании которых пространственные производные скоростей среднего молярного движения влияют на распределение относительных молярных скоростей.

Исследование этих свойств и законов требует рассмотрения условий движения, не выводимых из уравнений молярного движения несжимаемых жидкостей, а потому это исследование не относится к предмету настоящей статьи. Мы оставляем этот вопрос до особого исследования более общими методами.

Критерий в случае установившегося среднего молярного движения.

§ 23. Как было уже сказано, из решающего уравнения видно, что возможность сохранения относительного молярного движения зависит: от количества $\frac{\mu}{\rho}$, от производных по координатам средних молярных скоростей и от периодов самого относительного молярного движения.

Предположим, что скорости среднего молярного движения направлены вдоль оси x и зависят только от координаты y , а скорости u' , v' , w' периодичны относительно координат x , y , z с наибольшим периодом, равным a . Таким образом интегралы этих скоростей по x вдоль длины, равной a все равны нулю. Пусть a есть коэффициент при всех периодических множителях.

Положим, далее,

$$\pm \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = C_1^2.$$

Интеграл по объему, равному a^3 , всех восемнадцати квадратов и пронаведений во втором члене решающего уравнения (24) может быть представлен выражением:

$$-18\mu C_2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 a^2 a^3.$$

Интеграл первого члена не может быть больше количества

$$\rho C_2 a^2 C_1^2 a^3.$$

Следовательно, если поддерживается относительное молярное движение то на основании решающего уравнения: ρC_1^2 больше, чем $700 \frac{\mu}{a^2}$, или иначе, равенство

$$\rho \frac{a^2}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2} = 700 \quad (26)$$

есть предельное равенство, при котором относительное молярное движение уже не может поддерживаться в жидкости, средние молярные скорости которой направлены вдоль оси x , не изменяются вдоль этой оси и равномерно изменяются в нормальном направлении к средней скорости потока.

Указанный предел не является точным. Для определения точного предела необходимо найти полные выражения периодических функций u' , v' , w' , которые удовлетворяли бы уравнениям (15) и (16), а также уравнению непрерывности (13). Входящие в эти выражения периодические функции должны иметь выражения вида:

$$\sum \left\{ A_r \cos \left[r \left(nt + \frac{2\pi}{a} x \right) \right] \right\},$$

где $r=1, 2, 3, \dots$ и т. д. Можно показать, однако, что сохранение в этом выражении членов, для которых $r > 1$, приведет к увеличению предельного значения.

§ 24. Из этого следует, что существование условия (26), при котором не может поддерживаться никакое чисто периодическое относительное молярное движение с периодом α , доказывает существование некоторого действительного предела, значение которого находится между 700 и бесконечностью.

Опыт показывает, что дополнительные кинематические условия, налагаемые уравнениями движения вязкой жидкости, не служат препятствием для такого относительного молярного движения. Таким образом для вязких жидкостей уравнение (26) показывает, что истинное предельное значение выражения левой части равенства (26), которое отделяет случаи возможности и невозможности чисто периодического относительного молярного движения с периодом α , должно всегда быть больше 700.

Написав уравнение (26) в форме:

$$\sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2} = 700 \frac{\mu}{\rho \alpha^2},$$

легко видеть, что это условие не дает для возможности сохранения относительного молярного движения такого критерия, который зависел бы от скорости $\frac{d\bar{u}}{dy}$, изменения средней скорости $\bar{u}$ при всяких периодах относительного движения. Действительно, каково бы ни было значение $\frac{d\bar{u}}{dy}$, относительное движение может быть сделано всегда возможным при достаточно большом значении α^2 .

Существование критерия, как можно видеть, зависит от существования некоторых условий, ограничивающих возможные значения периодов относительного молярного движения, т. е. условий, определяющих высший возможный предел значений α .

Такой предел максимальных значений α может быть обусловлен многими причинами. В случае, когда $\frac{d\bar{u}}{dy}$ есть периодическая функция, ее периоды могут определить такой предел. Однако в настоящей статье мы намерены рассмотреть влияние только одних ограничивающих поток поверхностей твердых тел. Ограничения, которые они вносят, двух родов: ограничения, налагающиеся на скорости, нормальные к этим поверхностям, и ограничения скоростей, касательных к ним. Первые легко могут быть определены, для вторых необходимы опытные данные, подобные тем, которые получены Пуазейлем. Я покажу, что эти ограничения определяют предельное значение периода α , пропорциональное расстоянию D между пограничными поверхностями. В таком случае, если имеет место равенство

$$\sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2} = \frac{U}{D},$$

то уравнение (26) доказывает существование критерия

$$\rho \frac{DU}{\mu} = K. \quad (27)$$

Для потока вязкой жидкости между двумя гладкими поверхностями, нормальными к оси y , одна из которых неподвижна, а другая движется в направлении оси x со скоростью U , этот критерий определяет возможность сохранения относительного молярного извилистого движения.

Раздел III.

Критерий, определяющий условия невозможности сохранения относительного молярного движения в случае вязкой жидкости, текущей с равномерными симметричными средними молярными скоростями между двумя параллельными стенками. Выражение для сопротивления.

§ 25. Определенные экспериментальные данные для значений критерия K имеются только для случая установившегося потока в прямой круглой трубе с постоянным сечением. Поэтому было бы, повидимому, желательным рассмотреть для теоретического исследования случай круглой трубы. Однако мы применим теорию только для доказательства существования нижнего предела для значений критерия, который всегда больше некоторого количества, определяемого плотностью и вязкостью жидкости и условиями потока. А потому ввиду значительно большей сложности получаемых для круглой трубы выражений, чем для потока между параллельными стенками, мы рассмотрим условия, определяемые стенками в последнем случае.

Случай 1.

Условия.

§ 26. Жидкость имеет всюду постоянную плотность ρ и вязкость μ и течет под действием равномерного градиента давления $\frac{d\bar{p}}{dx}$ в направлении оси x между параллельными стенками, неограниченными в направлении z и y и определяемыми уравнениями:

$$y = -b_0 \quad \text{и} \quad y = +b_0. \quad (28)$$

Пограничные условия.

1) У стенок не может быть скоростей, нормальных к пограничной поверхности, т. е.

$$v = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b_0. \quad (29)$$

2) Касательные скорости у стенок равны нулю:

$$u = w = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b_0. \quad (30)$$

Отсюда на основании равенства (21) мы получаем, обозначая u' через u :

$$p_{yx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из уравнения непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ мы выводим дальнейшие пограничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при } y = \pm b_0. \quad (31)$$

Особое решение.

§ 27. Если средние скорости имеют везде направление оси x , то на основании уравнения непрерывности они не зависят от координаты x , и периоды движения, как то было указано в § 8, бесконечны. Уравнения (1), (3) и (9) удовлетворяются с полной точностью. Следовательно, если

$$\bar{v} = \bar{w} = u' = v' = w' = 0, \quad (32)$$

то мы имеем условия, при которых возможно особое решение уравнений для данного случая, решение, возможное при любых b_0 , $\frac{\partial p}{\partial x}$, ρ и μ .

Подставляя в уравнения (1) значения (21) для p_{xx} , p_{xy} и т. д. и заменяя u' через u и т. д., мы получим следующее уравнение:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (33)$$

Это уравнение не допускает решения, если в начальный момент жидкость находилась в покое, но при условии установившегося движения, когда $\frac{\partial u}{\partial t}$ всюду равно нулю, а $\frac{\partial p}{\partial x}$ постоянно, мы найдем для уравнения

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

с пограничными условиями:

$$u = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при } y = \pm b_0$$

следующее решение:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2 - b_0^2}{2}. \quad (34)$$

Таково одно из возможных состояний установившегося движения с бесконечными периодами скорости u согласно § 8. Для этого случая уравнения молярного движения при существовании теплового являются вполне точными на основании сказанного в § 8, каковы бы ни были значения количеств u , b_0 , ρ , μ и $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Уравнение (34) представляет выражение особого решения уравнений (15) для установившегося молярного или даже среднего молярного движения, при котором все количества u' , v' , p' и т. д. равны нулю, так что уравнения (16) относительного молярного движения тождественно удовлетворяются.

Для того чтобы отметить скорость u особого решения, я введу следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} u &= U, \quad \int_{-b}^{+b} u \, dy = 2b_0 U_m, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{3\mu}{b_0^3} U_m, \\ U &= \frac{3}{2} U_m \frac{b_0^2 - y^2}{b_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Из уравнений движения следует, что такое особое решение, при соблюдении условий его существования всегда возможно, но способ, которым получено это решение уравнений (1), не дает еще никаких указаний на то, является ли оно единственно возможным и могут ли быть осуществлены необходимые условия его существования. Этот вопрос может быть разрешен только экспериментальной проверкой выводов, сделанных из особого решения, или же посредством наблюдений над различными видами движения жидкости, подобных тем, которые были сделаны в моих опытах с окрашенными струями.

Только фактическое осуществление условий существования такого рода движения при определенных обстоятельствах и дало возможность проверить предпосылку относительно пограничных условий, не допускающую скольжения жидкости вдоль стенок, и гипотезу относительно коэффициента вязкости μ , не зависящего от распределения в пространстве скоростей молярного движения.

Проверки предпосылок для уравнения движения вязкой жидкости.

§ 28. Согласно опытам Пуазейля и экспериментам, произведенным впоследствии, результаты теории остаются в согласии со всеми данными опыта, пока скорости u' , v' , w' равны нулю. Так, при средней скорости 376 мм (1,23 фута) в секунду в трубках диаметра 0,014 мм, длиною потока 1,25 мм и при напоре в 30 дюймов ртутного столба обнаружено, что если бы существовало какое-либо скольжение, то его скорость была бы меньше одной тысячной средней скорости потока, хотя касательное напряжение у стенок равнялось 0,2 г/см², а градиент скоростей в потоке равнялся

$$\frac{du}{dr} = 215,000.$$

Напомним, что поверхностное сопротивление при ходе парохода со скоростью 25 узлов не достигает 6 фунтов на квадратный фут. Можно сказать поэтому, что предпосылки относительно пограничных условий и относительно постоянства μ проверены с исключительной точностью измерений, как касательных напряжений, так и сопроти-

Свидетельство опыта о возможности других решений.

§ 29. Установившееся молярное движение наблюдается почти всегда только в капиллярных трубках. В трубках же большего радиуса оно наблюдается только при незаметно малой скорости потока. При больших скоростях движение уже становится извилистым и турбулентным. Этот факт свидетельствует о возможности появления при некоторых обстоятельствах иных решений уравнений помимо особого.

При таких движениях скорости u' , v' , w' поддерживаются в потоке не в виде установившегося поля периодических скоростей, но в виде такого поля относительных скоростей, влияние которого на средние скорости потока имеет установившийся стационарный характер. В этом случае уравнения (1) справедливы только с приближением.

Применение уравнений движения среднего молярного и относительного молярного.

§ 30. Вследствие того, что в рассматриваемом случае скорости среднего молярного движения равны нулю в направлении координат y и z , а среднее движение является установившимся, мы имеем:

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0. \quad (36)$$

В то же время средние значения квадратов и произведений скоростей u' , v' , w' остаются постоянными в направлении потока, а потому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \overline{w'u'} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ и т. д.} \quad (37)$$

На основании выражений (21) и равенств (37) уравнения (15) для средних скоростей примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right\}, \\ \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \right\}, \\ \rho \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Уравнение энергии среднего молярного движения (17) будет следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= -\bar{u} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right\} - \\ &- \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} \overline{u'w'}) \right\} - \mu \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right\} + \\ &+ \rho \left\{ \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Точно так же уравнение для средней энергии относительного молярного движения (19) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial y} [u' (p'_{yx} + \rho \bar{u}' \bar{v}') + v' (p'_{yy} + \rho \bar{v}' \bar{v}') + w' (p'_{yz} + \rho \bar{w}' \bar{v}')] - \\ & -\frac{\partial}{\partial z} [u' (p'_{zx} + \rho \bar{u}' \bar{w}') + v' (p'_{zy} + \rho \bar{v}' \bar{w}') + w' (p'_{zz} + \rho \bar{w}' \bar{w}')] - \\ & -\mu \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho \left[\bar{u}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

Интегрируем почленно эти два уравнения относительно y и z в пределах пограничных поверхностей, принимая во внимание пограничные условия, а именно, что $\bar{u}$, u' , v' , w' равны нулю у границ, и равным образом, что интегралы относительно z количеств:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} \cdot \rho \bar{u}' \bar{w}'), \quad \frac{\partial}{\partial z} u' (p'_{zx} + \rho \bar{u}' \bar{w}')$$

и других должны быть также равны нулю. Мы получаем, таким образом, для энергии среднего молярного движения уравнение:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} dy dz = & - \int \int \left[\bar{u} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] dy dz + \\ & + \rho \int \int \left[\bar{u}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] dy dz. \quad (41) \end{aligned}$$

Уравнение же для средней энергии относительного молярного движения примет вид:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}' dy dz = & - \int \int \left[\rho \left\{ \bar{u}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\} \right] dy dz - \\ & - \mu \int \int \left[2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz. \quad (42) \end{aligned}$$

Если среднее молярное движение является установившимся, то из уравнения (41) вытекает, что работа постоянного градиента давления при средней скорости $\bar{u}$

$$- \int \int \bar{u} \frac{\partial p}{\partial x} dy dz$$

частью превращается в энергию относительного молярного движения со скоростью перехода

$$- \int \int \rho \left(\bar{u}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) dy dz,$$

а частью в тепловую энергию со скоростью превращения

$$\mu \int \int \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz.$$

Уравнение (42) интегральной энергии относительного молярного движения показывает, что единственная энергия, приобретаемая относительным молярным движением, получается из превращения энергии среднего молярного движения, а единственная энергия, им теряемая, есть энергия, переходящая в теплоту и выражаемая последним членом уравнения.

Следовательно, если полная энергия E' остается постоянной, то энергия, поступающая из среднего молярного движения, равна энергии относительного движения, переходящей в теплоту. Решающее уравнение в таком случае напишется таким образом:

$$\int \int \rho \left(\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) dy dz = -\mu \int \int \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} dy dz. \quad (43)$$

Условия, которым должны удовлетворять скорости $\bar{u}$, u' , v' , w' .

§ 31. При установившемся среднем молярном движении скорость $\bar{u}$ должна удовлетворять

1) пограничным условиям:

$$\bar{u} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b_0; \quad (44)$$

2) уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0; \quad (45)$$

3) первому уравнению движения (38):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right\}, \quad (46)$$

или же, полагая $\bar{u} = U + \bar{u} - U$ и $\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 U}{dy^2}$ как и в особом решении, получаем уравнение (46) в следующем виде:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 (\bar{u} - U)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} - U)}{\partial z^2} \right) = \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right\}. \quad (47)$$

4) Интегрируя уравнение (47) по площади сечения и замечая, что интеграл левой части равен нулю, мы имеем среднее значение:

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \mu \frac{dU}{dy} \quad \text{при} \quad y = \pm b_0. \quad (48)$$

Из условия (3) вытекает, что если скорость u симметрична относительно пограничных поверхностей, то относительное молярное движение должно распространяться по всей трубе. Таким образом мы находим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right] dz \quad (49)$$

должно быть функцией y^2 , а так как такое условие при установившемся среднем молярном движении необходимо, чтобы удовлетворялись уравнения (38) и (16) для среднего и относительного молярных движений, то мы и будем считать его среди необходимых условий при разыскании критерия.

Скорости относительного молярного движения должны удовлетворять следующим условиям:

1) Условиям (12) для периодов. Если $2c$ есть размер трубы в направлении координаты z , то эти условия напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a u' dx = \int_0^a v' dx = \int_0^a w' dx = 0, \\ \int_{-b_0}^{+b_0} \int_{-c}^{+c} u' dy dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

2) Уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

3) Пограничным условиям, которые на основании уравнения непрерывности приводят к равенствам:

$$u' = v' = w' = \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad \text{при } y = \pm b_0. \quad (51)$$

4) Условиям, налагаемым симметричностью среднего движения:

$$\int_{-c}^{+c} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right] dz = 2c \cdot f(y^2). \quad (52)$$

Условия (1) — (4) должны быть удовлетворены для того, чтобы скорость $\bar{u}$ была симметрична при произвольных скоростях u' , v' , w' , налагающихся на то среднее движение, которое вытекает из особого решения.

5) Если молярное движение также должно оставаться установившимся, то скорости u' , v' , w' должны удовлетворять еще дополнительным кинематическим условиям, которые получаются исключением $\bar{p}$ из уравнений (38) среднего молярного движения и исключением p' из уравнений (16) относительного молярного движения.

Условия (1) — (4) определяют нижний предел для критерия.

§ 32. Фактическое определение условий (5) невозможно. Однако при соблюдении этих условий скорости u' , v' , w' должны удовлетворять более общим условиям, которые определяются решающим уравнением. Из этого уравнения вытекает, что как бы малы по сравнению со скоростью $\bar{u}$ ни были скорости u' , v' , w' , удовлетворяющие условиям (1) — (4), энергия относительного молярного движения должна будет все же убывать, если превращающаяся в тепло энергии этого движения будет больше той, которая переходит из среднего молярного движения.

Таким образом, если значения периодических скоростей u' , v' , w' таковы, что отношение функции перехода энергии из среднего молярного движения к функции превращения энергии в тепло принимает максимальное значение меньшее единицы, то сохранение какого-либо относительного молярного движения уже невозможно.

Каковы бы ни были дальнейшие ограничения, возникающие из кинематических условий, существование низшего предела для значения критерия остается доказанным.

Выражения для возможных скоростей относительного молярного движения.

§ 33. Для того чтобы удовлетворялись первые три равенства (50), необходимо, чтобы u' , v' , w' были непрерывными периодическими функциями координаты x с наибольшим периодом a и чтобы они удовлетворяли уравнению непрерывности.

Если мы положим $l = \frac{2\pi}{a}$, а через n обозначим целые числа от 1 до ∞ , то мы получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \sum_0^{\infty} \left[\left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_n}{\partial z} \right) \cos (nlx) + \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial y} + \frac{\partial \delta_n}{\partial z} \right) \sin (nlx) \right], \\ v' &= \sum_0^{\infty} [nl\alpha_n \sin (nlx) - nl\beta_n \cos (nlx)], \\ w' &= \sum_0^{\infty} [nl\gamma_n \sin (nlx) - nl\delta_n \cos (nlx)], \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

удовлетворяющие условию непрерывности.

Если функции α , β , γ , δ удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial \delta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } y = \pm b_0, \quad (54)$$

а функции $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ зависят только от y^2 , то, повидимому, таковы будут самые общие выражения для возможных скоростей относительного молярного движения.

Плоскопараллельное относительное молярное движение.

§ 34. Если относительное молярное движение совершается так же, как и среднее, в плоскости (x, y) , то мы должны повсюду иметь:

$$\gamma = \delta = w' = 0. \quad (55)$$

Выражения (53) представят самый общий вид функций u' , v' для случая плоскопараллельного возмущения.

Такое ограничение, конечно, совершенно произвольно. Мало того, при выполнении дополнительных кинематических условий, не зависящих

от тех условий, которые определяются решающим уравнением, и самый характер движения при плоскопараллельном возмущении становится совершенно иным. Однако при определении предельного значения критерия кинематические условия роли не играют. Предварительный же расчет показывает, что значение низшего предела для критерия почти совпадает с тем, которое получается для общего случая трехмерного движения. Мы приводим поэтому в настоящей статье один только расчет для плоскопараллельного движения, так как оно значительно проще.

Функции превращения энергии и перехода в теплоту при плоскопараллельном движении.

§ 35. Обозначим через $\frac{\partial}{\partial t}(pH')$ скорость превращения в теплоту энергии относительного молярного движения, т. е. выражение, которое фигурирует в правой части решающего уравнения (43). Мы найдем:

$$\begin{aligned} \int \int \int \frac{\partial}{\partial t}(pH') dx dy dz = \\ = \mu \int \int \int \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} \right\} dx dy dz. \end{aligned} \quad (56)$$

Подставим выражения (53) для u' и v' , интегрируем по x в пределах от $x=0$, до $x=\frac{2\pi}{l}$ и отбросим те члены, которые при интегрировании по y дадут на основании пограничных условий количества, равные нулю. Мы найдем:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\partial}{\partial t}(pH') dy dz = \frac{\mu}{2} \int \int \sum \left\{ (nl)^4 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) + \right. \\ \left. + 2 (nl)^2 \left[\left(\frac{d\alpha_n}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\beta_n}{dy} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta_n}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dy dz. \end{aligned} \quad (57)$$

Точно так же выражение для скорости перехода энергии из среднего молярного движения, стоящее в левой части решающего уравнения (43), после подстановки выражений (53) для u' и v' (53) и после интегрирования по x принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \int \int \overline{\rho u' v'} \frac{d\bar{u}}{dy} dy dz = \\ = \frac{1}{2} \int \int \sum \left[nl \left(\alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} - \beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} \right) \frac{d\bar{u}}{dy} \right] dy dz. \end{aligned} \quad (58)$$

На основании равенства (47), выражающего в § 31 условие (3):

$$\mu \frac{d^2}{dy^2} (\bar{u} - U) = \rho \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}), \quad (59)$$

мы найдем, интегрируя и принимая в расчет пограничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{d}{dy} (\bar{u} - U) &= \rho u' v', \\ \mu (\bar{u} - U) &= \rho \int_{-b_0}^y \bar{u}' v' dy. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

На пограничной поверхности $\bar{u} - U$ равно нулю, а потому

$$\rho \int_{-b_0}^{+b_0} \bar{u}' v' dy = 0. \quad (61)$$

Подставим в правой части равенства (58) $U + \bar{u} - U$ вместо $\bar{u}$, примем для $\bar{u} - U$ значение (60) и интегрируем по частям. Замечая, что:

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = -3 \frac{U_m}{b_0^2} = \text{const.} \quad (62)$$

и

$$u' v' = \frac{1}{2} \sum \left\{ nl \left(\alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} - \beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} \right) \right\}, \quad (63)$$

мы находим следующее выражение для функции перехода:

$$\begin{aligned} \int_{-b_0}^{+b_0} (\rho u' v') \frac{d\bar{u}}{dy} dy &= \sum \left\{ \frac{3}{2} \rho \frac{U_m}{b_0^2} \int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y nl \left(\alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} - \beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^2}{4\mu} \int_{-b_0}^{+b_0} (nl)^2 \left(\alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} - \beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} \right)^2 dy \right\}. \quad (64) \end{aligned}$$

Если u' , v' достаточно малы, можно пренебречь последним членом четвертого порядка.

Подставляя полученные выражения в решающее уравнение (43), мы можем написать его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho b_0 U_m}{\mu} &= \\ 2b_0^3 \int_{-b_0}^{+b_0} \sum \left\{ (nl)^4 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) + 2(nl)^2 \left[\left(\frac{d\alpha_n}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\beta_n}{dy} \right)^2 \right] + \left(\frac{d^2 \alpha_n}{dy^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \beta_n}{dy^2} \right)^2 \right\} dy & \\ = \frac{3 \int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y \sum \left\{ nl \left(\beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} - \alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} \right) \right\} dy,}{\mu} & \quad (65) \end{aligned}$$

Пределы для периодов.

§ 36. В качестве функций y , количества α_n и β_n определяются пограничными условиями, почему и периоды их ограничены сверху расстоянием $2b_0$ между стенками.

В направлении координаты x , однако, не существует такого прямого соотношения между b_0 и периодами, выраженными количествами $\frac{2\pi}{nl}$.

Пределы для таких периодов по необходимости существуют и на основании кинематических условий, необходимых для установившегося характера средних молярных скоростей, эти пределы периодов связаны с предельными значениями для α_n и β_n . Однако кинематические условия не могут быть определены, пока не получено общего решения для уравнений движения.

Из самой формы решающего уравнения (43) ясно, что такое точное определение этих пределов и не требуется для доказательства существования нижнего предела критерия.

Пограничные условия определяют для α_n и β_n те же пределы, каково бы ни было значение nl . Таким образом, если α_n и β_n определены таким образом, чтобы количество

$$\frac{2\rho b_0 U_m}{\mu}$$

имело минимальное значение, каково бы ни было значение nl , то затем уже можно определить и то значение nl , для которого это минимальное значение наименьшее, поскольку ряды как в числителе, так и в знаменателе становятся более сходящимися при значениях nl , более далеких от nl в обоих направлениях. Таким путем может быть определено то предельное значение, к которому стремится выражение для $\frac{2\rho b_0 U_m}{\mu}$.

Обозначая для краткости nl , α_n , β_n соответственно через l , α , β , а предельное значение критерия K_1 через

$$K_1 = \frac{2\rho b_0 U_m}{\mu}, \quad (66)$$

мы найдем:

$$\frac{3}{2} K_1 = b_0^3 \frac{\int_{-b_0}^{+b_0} \left\{ l^4 (\alpha^2 + \beta^2) + 2l^2 \left[\left(\frac{d\alpha}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy} \right)^2 \right] + \left(\frac{d^2\alpha}{dy^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2\beta}{dy^2} \right)^2 \right\} dy}{l \int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y \left(\beta \frac{d\alpha}{dy} - \alpha \frac{d\beta}{dy} \right) dy}, \quad (67)$$

где α и β суть такие функции y , что K_1 является минимумом при всех значениях l , а l определено затем так, чтобы этот общий минимум, определенный для всех значений l получил при некотором искомом значении l наименьшее значение.

Принимая во внимание пограничные и прочие условия и отбрасывая члены, которые только увеличивают числитель, не изменяя значения знаменателя, мы найдем в качестве наиболее общих выражений для α и β следующее:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sum_0^n [a_{2s+1} \sin (2s+1)p], \\ \beta &= \sum_0^n [b_{2t} \sin (2t p)], \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где

$$p = \frac{\pi y}{2b_0}.$$

Для того чтобы удовлетворить пограничным условиям, мы должны будем положить:

$$\begin{aligned} s &= 2r && \text{при } s \text{ четном;} \\ s &= 2r + 1 && \text{при } s \text{ нечетном;} \\ t &= 2r + 1 && \text{при } t \text{ нечетном;} \\ t &= 2(r + 1) && \text{при } t \text{ четном.} \end{aligned}$$

Мы имеем, далее: вследствие того, что $\alpha = 0$ при $p = \pm \frac{\pi}{2}$ (т. е. у стенок)

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} (\alpha_{4r+1} - \alpha_{4r+3}) &= 0 \\ \text{и так как } \frac{d\beta}{dy} &= 0 \text{ при } p = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ то} \\ \sum_0^{\infty} [-(4r+2)b_{4r+2} + 4(r+1)b_{4r+4}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Из выражения для K_1 видно, что каждый член разложений для α и β увеличивает значения для K_1 на количество, зависящее от r . Следовательно, K_1 будет иметь минимальное значение, если

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a_1 \sin p + a_3 \sin 3p, \\ \beta &= b_2 \sin 2p + b_4 \sin 4p. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Эти выражения удовлетворяют пограничным условиям, когда

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= a_1, \\ b_2 &= 2b_4. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Таким образом в качестве значений для α и β , при которых K_1 имеет минимум, каково бы ни было значение l , мы находим выражения:

$$\frac{\alpha}{a_1} = \sin p + \sin 3p; \quad \frac{\beta}{b_2} = \sin 2p + \frac{1}{2} \sin 4p$$

и далее:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2b_0}{\pi a_1} \frac{d\alpha}{dy} &= \cos p + 3 \cos 3p; \\ \frac{2b_0}{\pi b_2} \frac{d\beta}{dy} &= 2 \cos 2p + 2 \cos 4p, \\ \frac{2b_0}{\pi a_1 b_2} \left(\alpha \frac{d\beta}{dy} - \beta \frac{d\alpha}{dy} \right) &= \frac{1}{4} [-3 \sin p - 3 \sin 3p + \\ &\quad + \sin 5p + \sin 7p]. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Произведя два раза интегрирование, найдем:

$$l \int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y \left(\beta \frac{d\alpha}{dy} - \alpha \frac{d\beta}{dy} \right) dy = -1,325 l \frac{2b_0}{\pi} a_1 b_2. \quad (73)$$

Вводя обозначение $L \frac{\pi}{2b_0} = l$, мы получаем значение знаменателя в выражении (67) для $\frac{3}{2} K_1$, равное

$$-1,325 L a_1 b_2.$$

Таким же образом мы находим и значение числителя:

$$b_0^4 \left(\frac{\pi}{2b_0} \right)^4 \{ L^4 (2a_1^2 + 1,25 b_2^2) + 2L^2 (10a_1^2 + 8b_2^2) + 82a_1^2 + 80b_2^2 \}.$$

Коэффициенты при a_1 и b_2 в числителе почти равны, а потому мы не сделаем существенной ошибки, полагая

$$b_2 = -a_1.$$

В таком предположении имеем:

$$\frac{3}{2} K_1 = \frac{L^4 + 2 \cdot 5,53 L^2 + 50}{0,408 L} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4. \quad (74)$$

Мы найдем минимум этого выражения, равный

$$K_1 = 517 \quad (75)$$

при

$$L = 1,62. \quad (76)$$

Отсюда следует, что в плоской трубе с безграничной шириною значения критерия

$$\rho \frac{2b_0 U_m}{\mu} > 517 \quad (77)$$

§ 37. Полученное значение должно быть меньше искомого значения критерия при рассмотренных условиях движения. Насколько оно меньше, теоретически определить невозможно без определения общего решения уравнений движения, а насколько мне известно никаких опытов еще не было произведено с плоскими трубами. Экспериментальное значение 1900, найденное мною для круглых труб, тоже еще не может служить указанием на значение для плоских труб, за исключением того только, что и теоретически и опытами подтверждается, что критическая скорость U_m изменяется в обратно пропорциональном отношении к гидравлическому радиусу. Из этого обстоятельства можно вывести указание, что и значение критерия вдвое меньше, так как гидравлический радиус плоской трубы вдвое больше радиуса круглой трубы. Таким образом найденное значение имеет порядок величины, равный $0,61 K$. Это указание с достаточной степенью убедительности показывает, что найденное теоретически значение абсолютного предела есть количество того же порядка, как и найденное опытным путем значение. Таким образом можно считать, что опыт подтверждает теорию, которая со своей стороны дает объяснение наблюдаемым фактам.

• Состояния движения для скоростей выше критических.

§ 38. Для определения предельного значения критерия необходимо было рассмотреть наименьшие значения скоростей u' , v' , w' и можно было пренебречь членами четвертого периода в решающем уравнении. Пренебрежение этими членами возможно только при разыскании предельного значения. Принимая же эти члены в расчет, можно вывести из решающего уравнения выражение для сопротивления в случае установившегося среднего молярного движения.

Полное выражение для функции перехода энергии среднего молярного в относительное движение дано равенством (64):

$$\int_{-b_0}^{+b_0} \left(\rho \overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) dy = \sum \left[\rho \frac{3U_m}{2b_0^2} \int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y nl \left(\alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} - \beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} \right) dy + \right. \\ \left. + \frac{\rho^2}{4\mu} \int_{-b_0}^{+b_0} (nl)^2 \left(\alpha_n \frac{d\beta_n}{dy} - \beta_n \frac{d\alpha_n}{dy} \right)^2 dy \right]. \quad (77a)$$

Заменяя $\bar{u}$ в левой части этого равенства через $U + \bar{u} - U$ и интегрируя по частям с учетом пограничных значений, мы получаем выражение:

$$\frac{3U_m}{b_0^2} \int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y \rho \overline{u'v'} dy + \frac{\rho^2}{\mu} \int_{-b_0}^{+b_0} (\overline{u'v'})^2 dy. \quad (78)$$

Первый член этого выражения соответствует первому члену последней части уравнения (64), который мы сохранили при вычислении предела для критерия, а второй тем членам, которыми мы пренебрегли.

На основании равенства (35) мы имеем:

$$\frac{3U_m}{b_0^2} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (78a)$$

а потому, делая подстановку полученных выражений в решающее уравнение (43), мы получим или уравнение:

$$- \frac{2}{3} \rho \frac{b_0^3}{\mu^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2b_0^3}{3} \frac{\int_{-b_0}^{+b_0} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\rho H') dy + \frac{\rho^2}{\mu^2} \int_{-b_0}^{+b_0} (\overline{u'v'})^2 dy}{\int_{-b_0}^{+b_0} dy \int_{-b_0}^y \overline{u'v'} dy}, \quad (79)$$

или уравнение:

$$\mu \frac{d^2 \bar{\mu}}{dy^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (80)$$

Таким образом пока количество

$$\frac{2}{3} \rho \frac{b_0^3}{\mu^2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

остается постоянным, мы при геометрическом подобии условий движения имеем и динамическое подобие.

Уравнение (79) показывает, что в случае, когда количество

$$-\frac{2}{3} \rho \frac{b_0^2}{\mu^2} \frac{\partial p}{\partial x} > K,$$

то количество $\overline{u'v'}$ имеет конечное, не равное нулю значение. Последний член в числителе вносит уменьшение скоростей перехода энергии и тем замедляет увеличение $\overline{u'v'}$. Последний член числителя уравнения (79) имеет порядок величины

$$\rho^2 L^4 \frac{\alpha^4}{\mu^2},$$

в то время как первый член $\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} (pH')$ имеет порядок величины

$$L^4 \alpha^2.$$

Легко видеть, каким образом влияет предельное значение критерия. Из уравнения (79) видно также, что закон сопротивления при скоростях выше критических становится очень сложным и с трудом поддающимся выражению. Видно только, что сопротивление изменяется как некоторая степень скорости большая первой.

О ПЕРЕНОСЕ ВИХРЕЙ И ТЕПЛА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ ¹⁾.

(Приложение: Фейдж и Фалькнер, сообщение об экспериментальном исследовании температур и скоростей в потоке за обтеканием нагретым цилиндрическим препятствием).

В хорошо известной теории турбулентного движения Рейнольдса действие турбулентности на осредненное движение уподобляется действию системы напряжений, подобных силам вязкости, которые могут иметь как нормальные, так и касательные составляющие для каждого элемента площади. Так, при ламинарном осредненном движении, когда осредненные скорости горизонтальны и постоянны по направлению и величине на данном уровне, составляющие этих напряжений в горизонтальной плоскости на высоте z будут равны:

$$F_x = -\rho \overline{uv}, \quad F_y = -\rho \overline{vw},$$

где u, v, w суть составляющие турбулентной скорости, отнесенные к горизонтальным осям Ox и Oy и к вертикальной оси Oz . Черта сверху означает осредненное значение для очень большой горизонтальной площади, а ρ есть плотность жидкости. Существование напряжения F_x указывает на корреляцию скоростей u и w . Прайдлть развил дальше эту теорию и сделал тот вывод, что эта корреляция зависит от градиента осредненной скорости. Вкратце эта теория сводится к следующему:

Некоторая масса жидкости, имеющая осредненную скорость U_0 , соответствующую ее высоте z_0 , передвигается в слое жидкости на уровне $z_0 + l$, сохраняя при этом осредненную скорость U_0 . На высоте же $z + l$ предполагается, что эта масса жидкости перемещивается с соседними массами того же слоя. При малом значении длины l осредненная скорость слоя на высоте $z + l$ равняется $U_0 + l \frac{dU}{dz}$, где U есть осредненная скорость на высоте z . Таким образом $u = -l \frac{dU}{dz}$, откуда и следует, что

$$F_x = \rho \overline{wl} \frac{dU}{dz}. \quad (1)$$

¹⁾ Cs. I. Taylor, F. R. S., The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Appendix: A. Page a. V. M. Falkner, Note on experiments on the temperature a. velocity in the wake of a heated cylindrical obstacle. Proceedings of the Royal Society, Series A, т. 135, NA. 828, April 1, 1932.

Количество $\rho \overline{w}l$ имеет размерность коэффициента вязкости и рассматривается в теории Прандтля как некоторый коэффициент вязкости, притом переменный от одной точки поля скорости к другой.

При выводе выражения (1) предполагается, что различные градиенты давления в жидкости, сопровождающие ее турбулентное движение, не влияют на движение массы жидкости при ее вертикальном перемещении. Эти массы при перемещении продолжают сохранять количество движения в горизонтальном направлении того слоя, из которого они вышли, до тех пор, пока они не перемешаются на новом уровне с соседними массами. Не имея данных о том, как зависит количество $\overline{w}l$ от пограничных условий и не зная зависимости U от высоты z , невозможно проверить теорию непосредственным наблюдением над осредненными скоростями двухмерного движения жидкости. Все, что можно сделать, это, исходя из правдоподобных гипотез о значении $\overline{w}l$, вывести распределение осредненной скорости потока и сравнить его с опытом. Или же, наоборот, вычислить те значения $\overline{w}l$, которые соответствуют данному наблюдением распределению осредненной скорости.

Несколько лет назад, будучи незнаком с работой Прандтля, я изложил несколько сходную теорию¹⁾.

Эта теория, однако, отличается в одном существенном отношении. Я предполагал, что каждый элемент жидкости при переходе из одного слоя в другой сохраняет напряжение вихря, но не количество движения того слоя, из которого он вышел. В других отношениях теории совпадают, длина l перемешивания играет ту же роль в обеих теориях. Мною было обращено внимание на перенос вихрей, а не на перенос количества движения, по той причине, что в двухмерном потоке местные различия давления не влияют на величину вихрей. Прандтль же был вынужден или пренебречь действием этих разностей давления или произвольно отрицать их влияние на осредненное значение переносимого количества движения, хотя действие разностей давления на перенос каждым отдельным элементом массы количества движения не подлежит сомнению. Чтобы пояснить различие двух теорий, рассмотрим случай двухмерного потока с осредненной скоростью в направлении горизонтальной оси Ox . Ось Oz направим при этом в вертикальном направлении.

По теории Прандтля касательное напряжение F равно:

$$F = \rho \overline{w} \frac{dU}{dz}.$$

Избыток количества движения, поступающего благодаря переносу в слой жидкости, с площадью горизонтального основания, равной единице, и толщиной δz будет равен:

$$\rho \frac{d}{dz} \left[\overline{w} \frac{dU}{dz} \right] \delta z.$$

Если поток обусловлен равномерным средним градиентом давления p ,

¹⁾ Phil. Trans., A, т. 215, 1915.

то из этого следует что осредненная скорость U должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{d}{dz} \left[\overline{lw} \frac{dU}{dz} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

Если движение сводится к сдвигу между двумя параллельными плоскими стенками в относительном движении друг к другу, то мы имеем:

$$\overline{lw} \frac{dU}{dz} = \text{const.} \quad (3)$$

Выразим теперь, что турбулентное движение переносит от одного слоя к другому не количество движения, а напряжение вихрей. Пренебрегая вязкостью, мы можем написать уравнение движения в виде:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Вводя для вихря обозначение

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

мы получаем уравнение:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + 2w\eta.$$

Осредняя и предполагая в среднем поток равномерным вдоль оси Ox , мы найдем:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\overline{dp}}{dx} = 2\overline{w\eta}. \quad (4)$$

Введем теперь предположение (которое, как известно, оправдывается для двумерного потока идеальной жидкости), что вихри переносятся без изменения турбулентным движением совершенно таким же образом, как по теории Рейнольдса и Прандтля переносится горизонтальная составляющая количества движения. В таком случае мы имеем корреляцию между η и w совершенно так же, как в теории Прандтля корреляцию между u и w . Осредненное напряжение вихря в каком-либо слое равно $\frac{1}{2} \frac{dU}{dz}$. Масса жидкости, переходя из одного горизонтального слоя z в другой $z+l$ на расстоянии l , переносит с собою вихрь, значение которого больше вихря в слое z на количество:

$$-l \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{dU}{dz} \right).$$

Следовательно, мы имеем:

$$2\overline{w\eta} = -\overline{wl} \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

Уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\overline{dp}}{dx} = \overline{wl} \frac{d^2 U}{dz^2}. \quad (5)$$

На первый взгляд уравнения (2) и (5) кажутся очень сходными. В частности, они совпадают, когда $\overline{wl}$ от высоты z не зависит.

Переходя теперь к задаче, как поставить наблюдения для того, чтобы дать опытное разрешение вопроса, которая из двух теорий справедлива (и вообще верна ли которая-нибудь из них), нетрудно будет видеть, что в общем случае одни измерения скоростей не позволят еще предпочесть одну теорию другой.

Если осредненные значения скорости и давления измерены в каждой точке турбулентного потока, то из этих измерений можно вывести приращение M количества движения. По теории Прандтля мы имеем:

$$M = \rho \frac{d}{dz} \left(\overline{wl} \frac{dU}{dz} \right).$$

При переносе вихрей мы имеем:

$$M = \rho \overline{wl} \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

Каждая из двух теорий позволяет вычислить $\overline{wl}$ в виде функции от высоты z , но в обоих случаях мы получим различные функции.

С другой стороны, измерения температуры могли бы дать другой способ для определения значения $\overline{wl}$. Обозначая через σ теплоемкость, мы можем выразить перенос тепла через единицу площади горизонтальной поверхности в виде:

$$Q = \rho \sigma \overline{wl} \frac{d\theta}{dz},$$

где θ есть средняя температура в данной точке. Измерения Q и $\frac{d\theta}{dz}$ могли бы нам дать независимо от измерения скоростей значение $\overline{wl}$. Это значение и можно было бы сравнить с теми, которые мы получаем из измерений средних скоростей по той или другой из двух теорий.

В том виде, как мы изложили теорию переноса вихрей, она касается только простого случая, когда осредненные скорости и пульсации турбулентного движения рассматриваются в двухмерном пространстве. Некоторые наблюдения, произведенные в последнее время Феджем и Тоунендом, показали, что на границе твердого тела (стенки) та составляющая скорости пульсации, которая параллельна пограничной поверхности, но нормальна к направлению осредненной скорости потока, всегда значительно больше двух других составляющих. В этом случае и движение не является уже двухмерным. Таким образом наблюдения над распределением температуры в потоке, омывающем нагреваемую поверхность, будут бесполезны для решения поставленной задачи. С другой стороны, очень вероятно, что турбулентное движение, которое происходит в вихревом хвосте позади цилиндрического препятствия, обтекаемого ветром, когда ось цилиндра перпендикулярна к направлению ветра, в значительной мере действительно является движением двухмерным. Это можно предвидеть, исходя из теоретических соображений, так как в идеальной жидкости распределение осредненных скоростей в вихревом хвосте за препятствием является неустойчивым для двухмерных возмущений.

Мы имеем мало опытных данных относительно характера турбулентного движения за препятствиями. Гипотеза Кармана о вихревой дорожке

позади цилиндрического препятствия дает картину двумерного движения. Те опыты, которые подтверждают существование вихрей Кармана, говорят и в пользу двумерного характера турбулентного движения позади препятствия. Поэтому казалось желательным изучить теоретически и на опыте связь между распределением температур и распределением скоростей в воздушном потоке позади нагреваемого цилиндра.

Рассеяние количества движения за цилиндрическим препятствием.

Распределение скоростей за цилиндрическим препятствием было недавно исследовано теоретически и на опыте Шлихтингом¹⁾.

Хорошо известно, что с расстоянием от препятствия, находящегося в установившемся потоке, увеличивается и ширина вихревого хвоста, а разность скоростей в этом хвосте и в окружающем его потоке убывает. Шлихтинг нашел, что на некотором расстоянии x от цилиндрического препятствия (более 30 диаметров последнего) в расходящейся вихревой области (в хвосте) уже получается установившийся режим движения, причем скорость в центре области пропорциональна $x^{-\frac{1}{2}}$, в то время как ширина ее пропорциональна $x^{\frac{1}{2}}$.

Если U_0 есть скорость потока при отсутствии препятствия, $U_0 - u$, v — составляющие скорости в вихревой области за препятствием, то результаты экспериментальных наблюдений Шлихтинга могут быть выражены равенством:

$$\frac{u}{U} = x^{-\frac{1}{2}} f(\eta), \quad (6)$$

где $\eta = ux^{-\frac{1}{2}}$, а u означает расстояние точки от центральной оси области. Соответствующее выражение для v , удовлетворяющее уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(U - u) + \frac{\partial}{\partial y}v = 0,$$

будет иметь вид:

$$\frac{v}{U} = -\frac{1}{2} x^{-1} \eta f'(\eta). \quad (7)$$

При малой ширине области, т. е. когда значения u малы по сравнению с x , а u мало по сравнению с U_0 , уравнение движения, соответствующее теории Прандтля для переноса количества движения, будет иметь вид:

$$-U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (8)$$

где k есть коэффициент рассеяния благодаря турбулентности, т. е. $\overline{uv}$. В предположении, что как осредненная скорость, так и турбулентные

¹⁾ H. Schlichting, Über das ebene Windschattenproblem, Ingenieur-Archiv, 1930. См. также Tollmien, Handb. Exp. Phys., т. 4. В этой статье дан график для сравнения теории Шлихтинга с опытными наблюдениями.

пульсации зависят только от двух координат, мы получим уравнение для переноса вихрей в виде:

$$-U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Переходя к выражениям при помощи η , мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y=\text{const.}} &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} f(\eta) - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \eta f'(\eta) = \\ &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\eta} [\eta f(\eta)]. \end{aligned} \quad (10)$$

При малой ширине вихревой области имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{d\eta} = U_0 x^{-1} f'(\eta).$$

Таким образом уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} [\eta f(\eta)] = -\frac{d}{d\eta} [k f'(\eta)].$$

Так как при $\eta=0$ $f'(\eta)=0$, то интегрируя мы получим:

$$\frac{1}{2} \eta f(\eta) = -k f'(\eta). \quad (11)$$

Точно так же уравнение (9) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} [\eta f(\eta)] = k \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}. \quad (12)$$

Мы увидим ниже, что η входит в уравнение (11) или (12). Таким образом из экспериментальных данных Шлихтинга вытекает, что k зависит только от η . В опытах Шлихтинга скорость u была измерена трубкой Пито, а затем была определена и функция $f(\eta)$. Мы видим, что согласно с теорией Прандтля мы получим:

$$-k = \frac{\eta f(\eta)}{2 f'(\eta)}, \quad (13)$$

в то время как по теории переноса вихрей

$$-k = \frac{f(\eta) + \eta f'(\eta)}{2 f''(\eta)}. \quad (14)$$

В обоих случаях можно определить k в виде функции от η при помощи измерения скоростей за препятствием. Однако одними этими измерениями нельзя еще решить вопроса, которая из двух теорий справедлива.

Перенос тепла.

Предположим теперь, что цилиндрическое препятствие в опытах Шлихтинга было нагрето. Тепло стало бы рассеиваться в области за препятствием и мы получили бы уравнение для переноса тепла в виде

$$U_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (15)$$

где θ есть разность температуры в области за нагретым препятствием и в потоке вдали от препятствия.

Это уравнение такое же, как и уравнение (8), с тою только разницей, что u заменено через θ и, таким образом, θ должно иметь вид:

$$\theta = x^{-\frac{1}{2}} \varphi(\eta). \quad (16)$$

Подставляя это значение в уравнение (15), мы получим:

$$k = -\frac{\eta \varphi'(\eta)}{2\varphi'(\eta)}. \quad (17)$$

Мы можем теперь сравнить распределение температуры, которое вытекает из теории Прандтля и из теории переноса вихрей.

По теории Прандтля переноса количества движения мы имеем:

$$\frac{\varphi'(\eta)}{\varphi(\eta)} = -\frac{\eta}{2k} = \frac{f'(\eta)}{f(\eta)},$$

так что

$$\frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)} = \text{const.}, \quad (18)$$

т. е. распределение тепла и количества движения тождественны между собою, что ясно само по себе.

По теории же переноса вихрей мы находим:

$$\frac{\varphi'(\eta)}{\varphi(\eta)} = -\frac{\eta}{2k} = \frac{\eta f''(\eta)}{f(\eta) + \eta f'(\eta)},$$

так что

$$\ln \varphi(\eta) = \int \frac{\eta f''(\eta) d\eta}{f(\eta) + \eta f'(\eta)} + \text{const.} \quad (19)$$

Мы можем вывести распределение температуры из распределения скоростей, полученного измерениями, но эти функции распределения не будут одинаковыми.

Распределение скоростей за препятствием.

Для того чтобы определить распределение скоростей за препятствием (фиг. 75), Шлихтинг пользуется гипотезой Прандтля, которая дает выражение для параметра k :

$$k = Al^2 \left| \frac{du}{dy} \right|, \quad (20)$$

где A есть постоянный коэффициент, l — длина перемешивания и $\left| \frac{du}{dy} \right|$ — абсолютная величина производной $\frac{du}{dy}$. В качестве дальнейшей особой гипотезы Шлихтинг принимает значение l постоянным для каждого сечения области за препятствием плоскостью $x = \text{const.}$, так что l является функцией x . Шлихтинг полагает, что l пропорционально $\sqrt{x}$ и является всегда определенной долей ширины области. Принимая

$l = a \sqrt{x}$, мы находим, что значение k , принимаемое Шлихтингом, равно

$$k = -Aa^2 f'(\eta). \quad (21)$$

так что k является функцией только η , которая удовлетворяет требованию, чтобы ширина турбулентной области за препятствием была пропорциональна $\sqrt{x}$, требованию, вытекающему из наблюдений Шлихтинга.

Делая такие предположения, мы можем представить уравнение (11) в виде:

$$\eta f(\eta) = 2Aa^2 [f'(\eta)]^2. \quad (22)$$

Интегрируя это уравнение, мы находим:

$$\sqrt{f(\eta)} = \frac{\eta \sqrt{\eta}}{\sqrt{18}Aa^2} + \text{const.} \quad (23)$$

Согласно теории Шлихтинга вся рассматриваемая область заключена внутри параболы $\eta = \eta_0$, где η_0 есть, таким образом, значение η на границе расходящейся области. Следовательно, мы имеем,

что $f(\eta) = 0$ для $\eta = \eta_0$. Полагая $\xi = \frac{\eta}{\eta_0}$, мы получаем из уравнения (23):

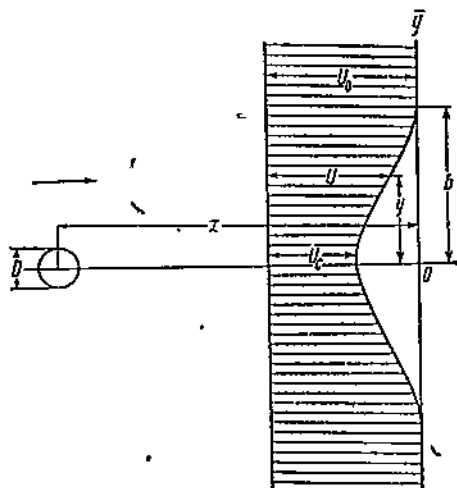
$$f(\eta) = \frac{1}{18Aa^2} \eta_0^3 (1 - \xi \sqrt{\xi})^2. \quad (24)$$

Если u_0 есть значение u на центральной оси области, в любом сечении на расстоянии x от препятствия, то мы можем дать этому уравнению следующий вид:

$$\frac{u}{u_0} = (1 - \xi^{\frac{3}{2}})^2. \quad (25)$$

Данные экспериментальных наблюдений Шлихтинга прекрасно совпадают с вычислениями по этой формуле и подтверждают ее точность. По моей просьбе Фейдж и Фалькнер произвели в Национальной физической лаборатории измерения для двух случаев, которые также подтвердили эту формулу ¹⁾.

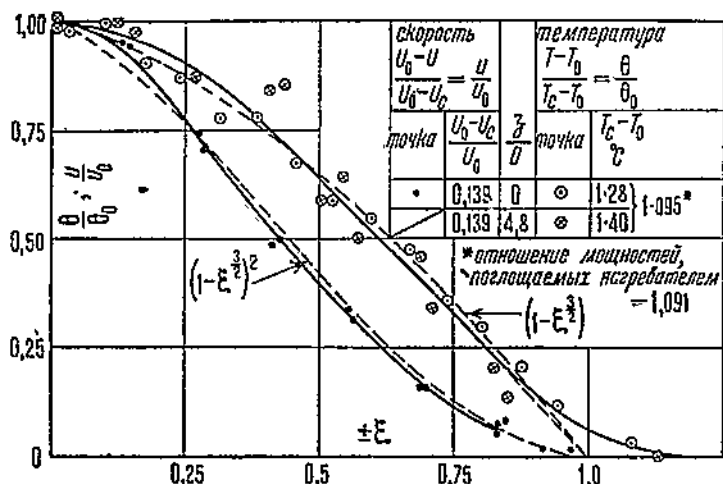
На фиг. 76 и 77 представлены значения $\frac{u}{u_0}$ и ξ , полученные из наблюдений и выведенные из формулы (25) Шлихтинга. Как видно, сов-



Фиг. 75.

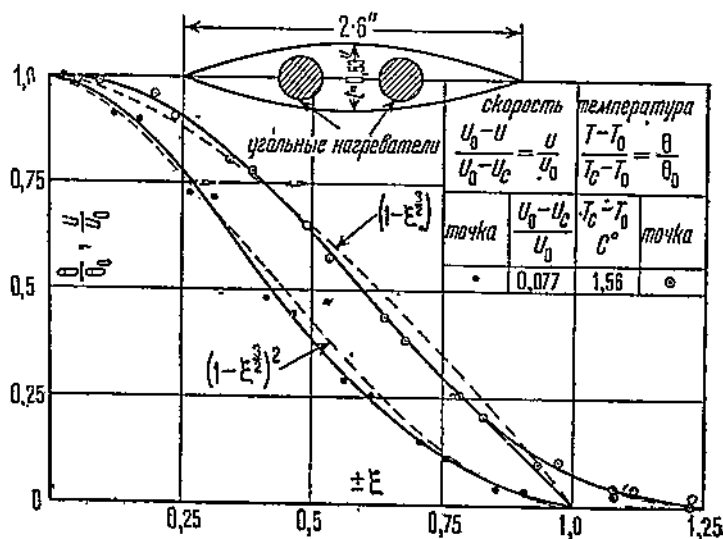
¹⁾ В аэродинамической трубе, специально устроенной так, чтобы в нее не попадало извне турбулентных возмущений, опыты дали несколько иной результат, что, вероятно, объясняется тем, что режим установившегося движения за препятствием не был получен. Исследования в этом направлении еще продолжаются.

падение результатов хорошее. На первый взгляд может казаться, что теория Прандтля переноса количества движения правильна, а теория переноса вихрей неверна. Такое заключение было бы не справедливо,



Фиг. 76. Цилиндр 5/8" в аэродинамической трубе (диаметр 3 фута).

$$U_0 = 51,7 \text{ фут/сек}, \frac{2b}{D} = 9, \frac{x}{D} = 30.$$



Фиг. 77. Модель в аэродинамической трубе (диаметр 1 фут) с открытой рабочей частью.

так как, делая те же предпосылки относительно параметра k , мы и из теории переноса вихрей получим совершенно то же распределение скоростей.

Для доказательства этого подставим значение $k = -Aa^2 f'(\eta)$ в уравнение (12). Дифференциальное уравнение для $f(\eta)$ принимает следующий вид:

$$Aa^2 f''(\eta) = \frac{f(\eta) + \eta f'(\eta)}{2f''(\eta)}. \quad (26)$$

Интегрируя, находим:

$$\eta f(\eta) = Aa^2 [f'(\eta)]^2. \quad (27)$$

Мы получаем такое же уравнение, как и уравнение (22), только с тем отличием, что мы имеем теперь постоянную Aa^2 вместо $2Aa^2$. Интегрируя (27), мы найдем:

$$f(\eta) = \frac{1}{9Aa^2} \eta_0^3 \left(1 - \xi^{\frac{3}{2}}\right)^2, \quad (28)$$

и если u_0 есть значение u в центре области, то мы опять приходим к уравнению, тождественному с уравнением (25):

$$\frac{u}{u_0} = \left(1 - \xi^{\frac{3}{2}}\right)^2, \quad (29)$$

Таким образом мы видим, что при сделанной специальной предпосылке пропорциональности параметра k функции $f'(\eta)$ или $\frac{du}{dy}$, обе теории приводят к тому же самому распределению скоростей в области позади препятствия, которое очень точно подтверждается данными опытных наблюдений.

Распределение температур в области за препятствием при условии справедливости уравнения $\frac{u}{u_0} = \left(1 - \xi^{\frac{3}{2}}\right)^2$.

Согласно теории переноса количества движения мы получаем распределение температур такое же, как и распределение скоростей; следовательно, обозначая через θ_0 температуру вдоль центральной оси области, мы должны иметь:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(1 - \xi^{\frac{3}{2}}\right)^2. \quad (30)$$

Распределение же температуры, которое можно ожидать на основании теории переноса вихрей, получится, если мы подставим значение:

$$f(\eta) = \frac{\eta_0^3}{9Aa^2} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2.$$

в уравнение (19). Полагая $\xi = \frac{\eta}{\eta_0}$, мы получим для интеграла

$$\int \frac{\eta f''(\eta)}{f(\eta) + \eta f'(\eta)} d\eta$$

выражение

$$\int \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{\xi} + 6\xi^2}{1 - 5\xi^{\frac{3}{2}} + 4\xi^3} d\xi,$$

равное

$$\ln\left(1 - \xi^{\frac{3}{2}}\right) + \text{const.} \quad (31)$$

Отсюда на основании уравнения (19) следует, что

$$\ln \varphi(\eta) = \ln\left(1 - \xi^{\frac{3}{2}}\right) + \text{const.},$$

или

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \xi^{\frac{3}{2}}. \quad (32)$$

На первый взгляд кажется парадоксальным, что обе теории приводят к одному и тому же распределению скоростей и к различному распределению температуры, хотя уравнения для распределения скоростей различны, а уравнение для распределения температуры принято нами одинаковым в обоих случаях. Объяснение этого следует искать в том обстоятельстве, что параметр Aa^2 , необходимый для данного распределения скоростей по теории переноса вихрей, вдвое больше того значения параметра, которому по теории переноса количеств движения соответствует то же самое распределение скоростей. Этот параметр Aa^2 , определяет теплопроводность, создаваемую турбулентным движением, таким образом, что при заданном распределении скоростей распределение температуры будет определяться в области за нагретым препятствием турбулентной теплопроводностью, которая по теории переноса вихрей должна быть вдвое больше той теплопроводности, которая вытекает из теории переноса количеств движения. Можно отметить при этом, что влияние местных градиентов давления, которым пренебрегают в теории Прандтля, сказывается в данном случае увеличением скорости рассеяния тепла по сравнению с теорией Прандтля. Авторы, занимавшиеся этим вопросом раньше с чисто качественной точки зрения, предполагали, наоборот, уменьшение степени рассеяния тепла ¹⁾.

Сравнение с опытными данными.

С целью выяснить правильность той или другой теории Фейдж и Фалькнер произвели в Национальной физической лаборатории ряд измерений скоростей и температуры в области за нагретым цилиндрическим препятствием. Их опыты описаны в сообщении, прилагаемом в конце настоящей статьи. Распределение скоростей измерялось трубкою Пито в сечениях области на расстояниях от 25 до 40 диаметров цилиндра. Этими измерениями были определены ширина области $2b$ и положение центральной плоскости. На фиг. 75 дана схема, заштрихован-

¹⁾ V. W. Ekman n, Meeresströmungen, Handbuch der Physikalischen u. technischen Mechanik (Auerbach u. Hort), стр. 203.

ная часть которой представляет область, в которой делались измерения. Затем для каждой точки, в которой были произведены измерения, было вычислено значение безразмерной переменной $\xi = \frac{y}{b}$.

Далее, были получены значения разности температур θ и разности скоростей u измерениями в точках области и в потоке вдали от препятствия вне области. Эти значения путем деления на соответствующие значения на центральной плоскости θ_0 и u_0 были также приведены к безразмерным количествам $\frac{\theta}{\theta_0}$ и $\frac{u}{u_0}$.

На фиг. 76 и 77 значения $\frac{\theta}{\theta_0}$ и $\frac{u}{u_0}$ приведены в зависимости от ξ . Вследствие симметрии движения на диаграммах приводится только половина всего поля, причем измерения, относящиеся к отрицательным значениям ξ , нанесены на той же полуплоскости чертежа, как и данные для положительных значений ξ .

В том и в другом случаях кривые с ординатами $(1 - \xi^2)^2$ и $1 - \xi^2$ представлены в виде ломаных линий.

Из фиг. 76 мы видим, что точки, представляющие $\frac{u}{u_0}$, ложатся очень близко к кривой $(1 - \xi^2)^2$. Эти опыты относятся к цилиндрическому препятствию с диаметром $\frac{5}{8}$ дюйма, сделанные в аэродинамической открытой трубе с диаметром в 3 фута. Это соответствует тому соотношению, которое, при специальных предположениях относительно параметра k , одинаково вытекает из обеих теорий переноса вихрей или переноса количеств движения. С другой стороны, точки, изображающие значения $\frac{\theta}{\theta_0}$, распределяются около кривой $1 - \xi^2$, как то следует из теории переноса вихрей, и в действительности лежат очень далеко от кривой $(1 - \xi^2)^2$, на которой они должны были бы находиться по теории переноса количеств движения.

Рассеяние точек $\frac{\theta}{\theta_0}$ в этом опыте довольно значительно. Предполагалось, что это объясняется случайными отклонениями температуры того здания, в котором находилась аэродинамическая труба. Поэтому были произведены опыты в замкнутой аэродинамической трубе с диаметром 1 фут. В этой трубе было введено цилиндрическое препятствие с диаметром в $\frac{1}{2}$ дюйма. Эти опыты дали большую устойчивость температуры, но небольшой диаметр (1 фут) потока в трубе привел к тому, что движение за препятствием (с диаметром в $\frac{1}{2}$ дюйма) на расстоянии 30 диаметров препятствия уже утратило свой характер двухмерного движения¹⁾.

¹⁾ То, что в центральной части потока в аэродинамической трубе с диаметром в 3 фута поле осредненных скоростей оставалось двухмерным, можно видеть из отсутствия систематического отклонения друг от друга данных измерений, произведенных в центре трубы (отмеченных на чертеже $\odot$), и на расстоянии трех дюймов от оси трубы (на чертеже точки $\otimes$).

С целью восстановить двухмерный характер потока необходимо было уменьшить ширину вихревой области за препятствием. Для этого круглый цилиндр (с диаметром в $1/2$ дюйма) был заменен цилиндром с чечевиным сечением, толщиной 0,53 дюйма и шириной 2,6 дюйма.

Результаты наблюдений с этим препятствием представлены на фиг. 77.

Можно видеть, что разбросанности точек, представляющих $\frac{0}{\theta_0}$, больше не наблюдается. Точки же, изображающие $\frac{1}{\theta_0}$ ложатся так же близко

к кривой Шлихтинга $(1 - \xi^{\frac{3}{2}})^2$, как и раньше. Существует, однако, систематическое отклонение, которое быть может объясняется тем, что движение не успело на таком расстоянии сделаться вполне установившимся, так как ширина области за препятствием была только в пять раз больше ширины самого препятствия. Такое же систематическое отклонение можно наблюдать и от кривой $1 - \xi^{\frac{3}{2}}$ для точек, изображающих $\frac{0}{\theta_0}$. Однако, несмотря на эти отклонения, теория переноса вихрей подтверждается разительным образом, так как эти отклонения, даже самые большие из них, очень малы по сравнению с разностью ординат кривых $1 - \xi^{\frac{3}{2}}$ и $(1 - \xi^{\frac{3}{2}})^2$.

Доказательство неверности теории переноса количеств движения в двухмерном поле скоростей.

Хотя теорию Прандтля обыкновенно излагают математически для двухмерного движения, можно, однако, дать математическое же доказательство ее неверности в случае двухмерного характера как осредненных скоростей, так и турбулентных пульсаций. Пусть ψ есть функция тока двухмерного движения несжимаемой вязкой жидкости. Вся система может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения с равномерной угловой скоростью Ω . При этом относительное движение в плоскости вращения относительно осей координат, вращающихся с угловой скоростью Ω , может оставаться во всех отношениях таким же, как и без вращения. Вращение Ω изменяет только давление p , которое становится равным

$$p + 2\rho\Omega\psi + \frac{1}{2}\rho\Omega^2r^2,$$

где r есть расстояние точки до оси вращения.

Напряжения, создаваемые вязкостью, а также и турбулентностью, останутся при этом без изменения. В случае, когда осредненные скорости обусловлены общим вращением всей системы, турбулентные напряжения по теории Прандтля имеют выражение:

$$F = \rho \overline{wl} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Vr) \right],$$

где V есть скорость, касательная к осредненным траекториям. Вращение всей системы вызовет без изменения множителя $\overline{wl}$ увеличение

скорости V на количество Ωr . Сила F благодаря вращению получит приращение, равное по теории Прандтля $2r\overline{\omega}I\Omega$.

Как мы сказали, в предположении двухмерного движения равномерное вращение изменит только силу давления, но оставит без изменения касательные напряжения. То же заключение вытекает и из теории переноса вихрей, потому что, если напряжение вихрей увеличится во всем поле скоростей на одно и то же количество, то перенос вихрей турбулентным движением от этого не изменится.

Из этого следует заключить, что теория Прандтля не применима к двухмерному движению, так как в этой теории пренебрегается действием местного распределения давлений на движение тех элементарных масс жидкости, которые переносят количество движения из одного слоя потока в другой.

Этот источник ошибки всегда будет иметь место, за исключением только тех случаев, когда пульсации турбулентного движения происходят исключительно в плоскостях, перпендикулярных к осредненной скорости¹⁾.

Например, при движении между двумя соосными круговыми цилиндрами можно ожидать, что теория Прандтля окажется применимой в случае, если турбулентное движение обусловлено круговыми вихрями, симметрично расположенными вокруг общей оси. Такие движения возможны с соблюдением некоторых условий, когда цилиндры имеют вращательное движение.

Обобщение теории переноса вихрей на случай трехмерного движения.

Уравнения установившегося движения идеальной жидкости могут быть представлены в следующем виде:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial x} + 2(\overline{w\eta'} - \overline{v\zeta'}) \quad (33)$$

с двумя другими аналогичными уравнениями. X, Y, Z означают составляющие внешней объемной силы, отнесенной к единице массы, U, V, W — составляющие осредненной скорости, а P — осредненное значение давления. Скорость в каждой точке равна $U + u, V + v, W + w$; далее, $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ и, наконец, ξ', η', ζ' , причем

$$\xi' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \text{ и т. д.}$$

являются составляющими вектора вихря. Мы имеем: $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$, а потому $\bar{\xi}' = \bar{\eta}' = \bar{\zeta}' = 0$.

Уравнения (33) являются для трехмерного пространства аналогией уравнения (4). Однако для трехмерного пространства мы не можем вывести теми же методами, как и для двухмерного, уравнений, анало-

¹⁾ То-есть, когда все частицы, лежащие на одной какой-либо прямой, параллельной осредненной скорости, всегда остаются во время движения в любой момент на прямых, параллельных тому же направлению.

гичных уравнению (5), потому что вектор вихря в элементе массы остается неизменным только в случае двухмерного движения. Пользуясь переменными Лагранжа, мы можем выразить вихрь в данный момент времени в зависимости от его значения в какой-либо предшествующий момент. Пусть ξ, η, ζ , составляющие вихря в данный момент, а ξ_0, η_0, ζ_0 — их значения в предшествующий момент, когда координаты элемента (x, y, z) были равны a, b, c .

Мы имеем: ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \xi + \xi' &= \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \\ \eta + \eta' &= \xi_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial y}{\partial c}, \\ \zeta + \zeta' &= \xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Теперь мы можем формулировать то соображение, которое лежало в основании определения „длины перемешивания“ в случае двухмерного движения. А именно: мы предположим, что элемент массы, который в момент t занимает положение (x, y, z) , имел в какой-либо предшествующий момент t_0 то же значение вихря, какое господствовало в момент t_0 в окрестности точки (a, b, c) . В таком случае, предполагая длину переноса малой и поле осредненных скоростей установившимся, мы можем разложить ξ_0 в ряд Тейлора, сохраняя только члены первого порядка, а именно:

$$\xi_0 = \xi - (x-a) \frac{\partial \xi}{\partial x} - (y-b) \frac{\partial \xi}{\partial y} - (z-c) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (35)$$

с двумя другими аналогичными выражениями для η_0 и ζ_0 . Подставляя эти значения в выражения (34), мы получим для $w\eta' - \zeta'\xi'$ следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} &\xi \left(w \frac{\partial y}{\partial a} - v \frac{\partial z}{\partial a} \right) + \eta \left(w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial b} \right) + \zeta \left(w \frac{\partial y}{\partial c} - v \frac{\partial z}{\partial c} \right) + \\ &+ (x-a) \left(v \frac{\partial z}{\partial a} - w \frac{\partial y}{\partial a} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (y-b) \left(v \frac{\partial z}{\partial a} - w \frac{\partial y}{\partial a} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \\ &+ (z-c) \left(v \frac{\partial z}{\partial a} - w \frac{\partial y}{\partial a} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} + (x-a) \left(v \frac{\partial z}{\partial b} - w \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ &+ (y-b) \left(v \frac{\partial z}{\partial b} - w \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + (z-c) \left(v \frac{\partial z}{\partial b} - w \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \\ &+ (x-a) \left(v \frac{\partial z}{\partial c} - w \frac{\partial y}{\partial c} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (y-b) \left(v \frac{\partial z}{\partial c} - w \frac{\partial y}{\partial c} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \\ &+ (z-c) \left(v \frac{\partial z}{\partial c} - w \frac{\partial y}{\partial c} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Это выражение с двумя другими, которые получаются циклической перестановкой (x, y, z) , (a, b, c) и (ξ, η, ζ) , представляют действие

¹⁾ Lamb, Hydrodynamics, изд. 4-е, стр. 197.

турбулентности на поле средних скоростей согласно теории переноса вихрей. В общем случае эти выражения настолько сложны, что они представляют мало практического интереса. В некоторых специальных случаях, однако, возможны большие упрощения.

Случай ламинарного осредненного движения.

Рассмотрим случай, исследованный выше, когда средняя скорость U параллельна оси Ox и зависит только от координаты z . В таком случае имеем:

$$\xi = \zeta = 0 \text{ и } \eta = \frac{1}{2} \frac{dU}{dz};$$

квадрат скорости пульсации q^2 можно также предполагать функцией одного z и потому уравнение (33) принимает вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dU}{dz} \left(w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial c} \right) - \frac{d^2 U}{dz^2} (z - c) \left(w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial c} \right). \quad (37)$$

Можно показать, что как уравнение Прандтля переноса количества движения, так и простое уравнение, выведенное мною для переноса вихрей, являются частными случаями этого уравнения (37).

Случай А. Двухмерное турбулентное движение, параллельное плоскости (xz) . В этом случае мы имеем $v = 0$, $\frac{\partial y}{\partial b} = 1$, так что уравнение (37) принимает вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{d^2 U}{dz^2} (z - c) w. \quad (38)$$

В этом уравнении $z - c$ имеет то же значение, как и l в уравнении (5), так что эти уравнения тождественны.

Случай В. Турбулентное движение происходит в плоскости (yz) . К этому случаю может быть приложена теория Прандтля переноса количества движения, так как те градиенты давления, которые могли бы изменить количество движения точек, лежащих на прямых, параллельных оси Ox , при таком движении отсутствуют. y и z являются функциями b , c и t . Мы можем поэтому рассматривать b и c как функции y , z , t . Напомним, что в переменных Лагранжа уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial b} = 1. \quad (39)$$

Уравнения для преобразования переменных имеют вид:

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial c}, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial b}, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial b}, \quad \frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{\partial y}{\partial c}.$$

Следовательно:

$$w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial b} = w \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Возьмем среднее значение $\overline{w \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial y}}$ для очень большой ширины L в направлении оси Oy . Мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L w dy &\rightarrow 0, & \overline{w \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial y}} = \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L \left\{ w \frac{\partial}{\partial z} (z-c) + v \frac{\partial}{\partial y} (z-c) \right\} dy - \frac{1}{L} \int_0^L v \frac{\partial}{\partial y} (z-c) dy = \\ &= -\frac{1}{L} \left[v(z-c) \right]_0^L + \frac{1}{L} \int_0^L (z-c) \frac{\partial v}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

а так как при возрастании L произведение $v(z-c)$ не возрастает, то имеем:

$$\frac{1}{L} \left[v(z-c) \right]_0^L \rightarrow 0.$$

Далее, мы имеем:

$$\partial v = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \int_0^L (z-c) \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^L (z-c) \frac{\partial w}{\partial z} dy,$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \overline{w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial c}} &= -\frac{1}{L} \int_0^L \left\{ w \frac{\partial}{\partial z} (z-c) + (z-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dy = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \overline{[w(z-c)]}. \end{aligned} \quad (41)$$

Преобразуя таким же образом коэффициент при $\frac{d^2 U}{dz^2}$ в уравнении (37), мы найдем:

$$-(z-c) \left(w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial c} \right) = -(z-c) \left(w \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial b}{\partial y} \right)$$

и затем:

$$\begin{aligned} -(z-c) w \frac{\partial c}{\partial z} &= (z-c) w \frac{\partial}{\partial z} (z-c) - w (z-c) = \\ &= \frac{1}{2} w \frac{\partial}{\partial z} (z-c)^2 - w (z-c); \\ -(z-c) v \frac{\partial b}{\partial y} &= (z-c) v \frac{\partial}{\partial y} (z-c) = \frac{1}{2} v \frac{\partial}{\partial y} (z-c)^2 = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2L} v (z-c)^2 \right]_0^L - \frac{1}{2L} \int_0^L (z-c)^2 \frac{\partial v}{\partial y} dy = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_0^L (z-c)^2 \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{1}{2} \overline{(z-c)^2 \frac{\partial w}{\partial z}}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$-(z-c) \left(w \frac{\partial y}{\partial b} - v \frac{\partial z}{\partial c} \right) = -w(z-c) + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} w(z-c)^2.$$

При выводе уравнений (36) и (37) была сделана предпосылка, что длина перемешивания $z-c$ настолько мала, что можно пренебречь количеством $(z-c)^2$ по сравнению с $z-l$. С этой степенью приближения уравнение движения (37) примет вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{dU}{dz} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \overline{w(z-c)} - \frac{d^2 U}{dz^2} \overline{w(z-c)},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{d}{dz} \left[\overline{w(z-c)} \cdot \frac{dU}{dz} \right]$$

или, пользуясь обозначениями, принятыми выше для равенства (2):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{d}{dz} \left(\overline{wl} \frac{dU}{dz} \right). \quad (43)$$

Это тождественно уравнению Прандтля для переноса количества движения.

Заключительные замечания.

Повидимому, единственный случай движения помимо рассмотренного в настоящей статье, для которого был сделан полный ряд измерений распределения как скоростей, так и температуры, — это поток воздуха, обтекающий плоскую нагретую пластинку. Очень тщательно произведенные эксперименты Ф. Элиаса ¹⁾ показали, что распределение скоростей и температуры почти тождественны, как этого и следует ожидать согласно теории Рейнольдса и Прандтля для переноса количества движения. Мы видели, что существует особый тип турбулентного движения, для которого обе теории переноса, как количества движения, так и вихревого напряжения, приводят к тождественным результатам. Этот тип характеризуется тем, что пульсации турбулентного движения происходят только в плоскости, перпендикулярной к осредненной скорости. В заметке, помещенной мною относительно опытов Фейджа и Тоуненда, наблюдавших пульсации в трубе и измеривших наибольшие значения составляющих пульсации, я показал, что движение около стенок очень близко подходит к указанному типу турбулентного движения. Однако требуются новые наблюдения, чтобы окончательно выяснить, не этим ли именно обстоятельством объясняется совпадение между распределением температуры и распределением скоростей в опытах с нагретой пластинкой.

Теория переноса вихрей была развита в мемуаре, за который была в 1915 г. присуждена премия Адамса. Опытная проверка, о которой говорится в настоящей статье, была вызвана чтением работы Шлихтинга.

¹⁾ F. Elias, Die Wärmeübergang einer geheizten Platte an strömende Luft, Abh. Aerodyn. Institut Aachen, Heft 9.

Резюме.

Теория, согласно которой динамика турбулентного движения должна сводиться к рассеянию вихрей, а не к переносу количества движения, была выдвинута автором в 1915 г. Частный случай двухмерного движения был также рассмотрен, но настолько кратко, что на него не было обращено внимания. В настоящей статье исследование обобщено и на случай трехмерного движения. Далее, нами показано, что теория Рейнольдса и Прандтля о переносе количеств движения согласуется с теорией переноса вихрей только в одном случае, когда турбулентное движение имеет двухмерные пульсации, совершающиеся в плоскости, перпендикулярные к осредненной скорости.

Когда же и поле осредненных скоростей и пульсации находятся при двухмерном движении в одной плоскости, обе теории приводят к совершенно различным выводам.

Проверкою правильности и преимуществ одной теории по сравнению с другой послужили произведенные измерения температуры и скоростей в вихревой области, образующейся в потоке, который обтекает нагреваемое препятствие. По теории переноса количеств движения распределение температур и распределение скоростей должны совпадать между собою, во всяком случае — на достаточном расстоянии от препятствия. По теории переноса вихрей эти виды распределения должны быть различны и связаны некоторым соотношением, для которого и выводятся уравнения. Произведенные в Национальной физической лаборатории измерения обнаружили предсказанное нами глубокое различие распределения температур и скоростей и подтвердили полностью правильность теоретически выведенного распределения на основании теории переноса вихрей при двухмерном движении, для которого турбулентные пульсации совершаются в плоскости осредненных скоростей.

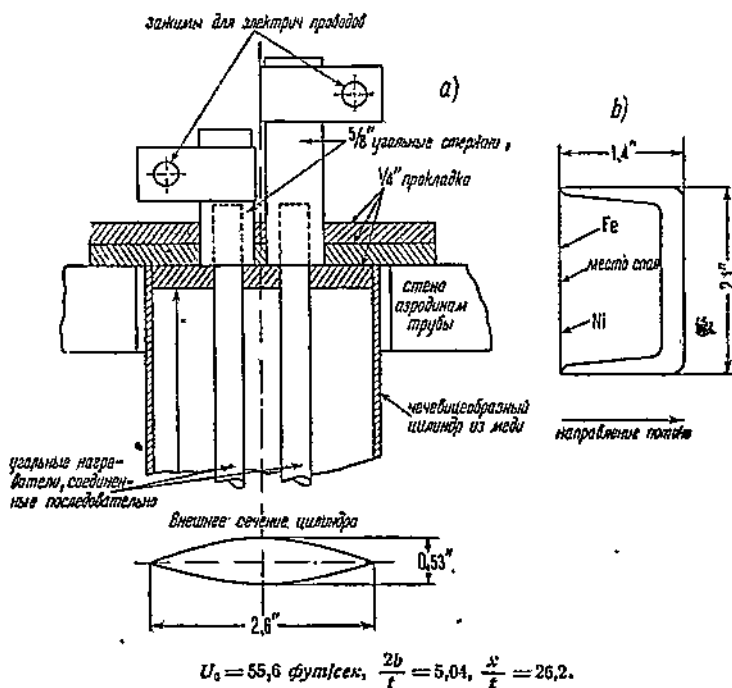
Приложение: Фейдж и Фалькнер. Сообщение об экспериментальном исследовании температур и скоростей в потоке за обтекаемым нагретым цилиндрическим препятствием.

Описание препятствия. Для производства опытов, результаты которых приведены на фиг. 76, твердый каменноугольный стержень диаметром $\frac{5}{8}$ дюйма был укреплен в аэродинамической трубе с диаметром в 3 фута типа N.F.L. (Национальной физической лаборатории.) Длина стержня составляла 3 фута. Стержень нагревался непосредственным проведением через него тока силой около 70 А.

Эксперименты, результаты которых изображены на фиг. 77, были сделаны с тонкостенным медным цилиндром с чечевицеобразным сечением ($2,60 \times 0,53$ дюйма), укрепленном в аэродинамической трубе (диаметром в 1 фут) с открытой рабочей частью. Цилиндр нагревался закрепленными внутри него двумя угольными нагревателями в виде тонких стерженьков диаметром в $\frac{5}{16}$ дюйма с последовательным гальваническим соединением (фиг. 78а). Подвергавшаяся действию потока длина цилиндра была равна 12,5 дюйма. Ток, проводимый через угольные нагреватели, имел силу 19 А.

Измерение скоростей. Скорости определялись по разности динамического и статического давлений.

Измерения динамического (напорного) давления и статического давления производились отдельно очень малыми измерительными трубками. Одновременно измерялось давление в надлежаще избранном месте на стенке аэродинамической трубы. Ширина вихревой области и положение центральной плоскости определялось показаниями при измерении динамического давления, наносимого в виде кривой на график. Для того, чтобы точно определить эту кривую, производилось достаточное число наблюдений. В общем случае скорости очень быстро и в совер-



Фиг. 78.

шенно определенных точках принимали значение скоростей установившегося потока трубы вне вихревой области. Таким образом ширина областей могла быть определена с точностью от 2 до 30%. Если U есть скорость в какой-либо точке, U_0 — скорость потока вне вихревой области, а U_c — скорость в центре, то в таком случае

$$\frac{u}{u_0} = \frac{U_0 - U}{U_0 - U_c}.$$

Измерения температуры. Распределение температуры в области за препятствием определялось показаниями железо-никелевой термопары и сравнением их с показаниями другой термопары, которая помещалась в той же плоскости производившихся измерений, но вне вихревой области.

Каждая термопара состояла из 2 дюймов проволоки (1 дюйма железной и 1 дюйма никелевой), подверженной действию потока (фиг. 78b). Термопара ставилась в положение, при котором проволока была параллельна оси цилиндрического препятствия. Таким образом вся длина проволоки находилась равномерно под действием температуры измеряемой точки, так как распределение скоростей в потоке и распределение температур было вполне двухмерным. Причины погрешностей в связи с теплопроводностью вдоль проволоки были устранены. Тарировка термопар в теплотехническом отделении Национальной физической лаборатории дала 53,5 микровольт на каждый градус Цельсия разности температур.

Термическая электромагнитная сила измерялась стандартным образом потенциометром. Наибольшее увеличение температуры в вихревой области достигало всего около $1,5^\circ \text{C}$. Поэтому для получения достаточно точных показаний был применен потенциометр Тинслея (Tinsley) и очень чувствительный зеркальный гальванометр Гамбрела (Gambrell).

Поправок на тепловую радиацию нагретого препятствия не делалось. Эта поправка, вероятно, очень незначительна, потому что расстояние от препятствия до обеих термопар — стационарной и той, которой измерялось температурное распределение в области, — было очень велико и к тому же почти одинаково до каждой из них.

Если T есть температура в какой-либо точке, T_0 — температура потока вне вихревой области и T_c — температура в центре, то мы имеем:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}.$$

Центр нагретой области определялся по кривой разности $T - T_0$ температур в зависимости от поперечного расстояния. Значение ширины $2b$ области для вычисления значений ξ определялось по кривой скоростей.

Вообще говоря, ширина нагреваемой области оставалась несколько неопределенной, как то можно видеть по фиг. 76 и 77. Для определения T_0 приходилось поэтому делать измерения на большом расстоянии от исследуемой области.

ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ ¹⁾.

Почти во всех проблемах гидродинамики и аэродинамики, в которых наряду с силами инерции учитывается и внутреннее трение жидкости или газа, появляется в качестве существенного параметра так называемое „число Рейнольдса“. Например, если мы рассматриваем сопротивление, испытываемое твердым телом при равномерном его движении в жидкости, то мы легко можем вывести из дифференциальных уравнений движения жидкости, что при геометрическом подобии движущихся твердых тел потоки будут подобны также и механически, если число

$$\frac{U \cdot d \cdot \rho}{\mu}$$

для рассматриваемых потоков будет одинаковым. Здесь U есть скорость тела, d — его линейный размер, ρ — плотность жидкости и μ — коэффициент ее вязкости. Если мы, как то обыкновенно и принято, будем относить сопротивление W тела к единице площади f его живого сечения и к напору $\rho \frac{U^2}{2}$ жидкости, определяя сопротивление выражением:

$$W = \psi f \rho \frac{U^2}{2},$$

то окажется, что параметр ψ этого выражения, так называемый коэффициент сопротивления, есть функция числа:

$$R = \frac{U \cdot d \cdot \rho}{\mu}.$$

Для объяснения значения, которое имеет число Рейнольдса, обыкновенно ссылаются на то обстоятельство, что этот параметр выражается единственно возможной безразмерной комбинацией: с одной стороны, физических постоянных ρ и μ , а с другой стороны, — тех количеств, которыми характеризуется поток, именно — скорости U и линейного размера d тела. Далее можно указать еще и на то, что число Рейнольдса является мерою отношения сил инерции к силам трения, так как первые пропорциональны скоростному $\rho \frac{U^2}{2}$, а последние — количеству $\mu \frac{U}{d}$. (Трение равно произведению коэффициента трения и нормальной состав-

¹⁾ Th. v. Kármán, Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl, Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut Aachen, № 4, 1925.

вляющей скорости; при соблюдении подобия потока нормальная составляющая прямо пропорциональна самой скорости U и обратно пропорциональна размеру d .)

Наряду с такими чисто гидродинамическими истолкованиями числа Рейнольдса (к их числу можно отнести и толкование, данное Мизесом как о „приведенной скорости“) быть может представит некоторый интерес и другое толкование, которое дает ему наглядное выражение. Это последнее объяснение вытекает (по крайней мере для идеальных газов) из вывода коэффициента трения в кинетической теории газов.

Кинетическая теория газов объясняет появление внутреннего трения переносом количеств движения в направлении, нормальном к потоку. Рассмотрим площадку, имеющую площадь, равную единице, касательную к направлению скорости v потока. Трение вдоль этой площадки, т. е. касательное напряжение будет равно составляющей количества движения в направлении потока, которая будет переноситься в единицу времени через эту площадку. Для определения этого количества движения можно сделать следующий упрощенный расчет.

С каждой стороны площадки рассмотрим слой жидкости, имеющий толщину, равную „среднему пути пробега“ λ молекул. Такой двойной слой и является той областью, в которой происходит перенос молекулами количества движения. Обозначая через c среднюю скорость молекул при тепловом беспорядочном движении, мы видим, что число молекул, переносимых через площадку в единицу времени, пропорционально cr . Если градиент $\frac{\partial v}{\partial n}$ скорости v в нормальном направлении не равен нулю, то в таком случае количество движения, переносимое молекулами с той стороны площадки, где скорость больше, в сторону, где скорость потока меньше, будет больше количества движения, переносимого в обратном направлении. Средняя скорость потока в слое, лежащем на стороне положительной нормали к площадке, равна $v + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v}{\partial n}$, а скорость в другом слое со стороны отрицательной нормали равна $v - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v}{\partial n}$. Избыток переносимого в одном направлении количества движения пропорционален, таким образом, количеству $cr\lambda \frac{\partial v}{\partial n}$. Касательное напряжение определяют обыкновенно, исходя из соображений феноменологического характера выражением:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Таким образом „коэффициент трения“ μ пропорционален количеству $cr\lambda$.

Коэффициент же пропорциональности зависит от того, как определяются средние значения (скорости c и длины λ).

Если мы теперь внесем это значение в выражение числа Рейнольдса, то мы можем представить его в виде произведения двух отношений:

$$R' = \frac{U}{c} \cdot \frac{d}{\lambda},$$

т. е. произведения отношения поступательной скорости U к молекулярной скорости c и отношения размеров тела к средней длине пробега молекул.

Полное исследование вопроса о сопротивлении можно провести примерно по следующей схеме:

а) Область броуновского движения $\frac{U}{c} \ll 1$, $\frac{d}{\lambda} \sim 1$. Поступательная скорость очень мала по сравнению с молекулярной. Размеры тела сравнимы по величине с длиной λ пробега молекул. Известно, что при таких условиях формула сопротивления Стокса не применима и должна быть исправлена на основании кинетической теории газов [например, формула Куингама (Cunningham)].

б) Гидро- и аэродинамическая область $\frac{U}{c} \ll 1$, $\frac{d}{l} \gg 1$. Уравнения гидродинамики имеют место. Для закона сопротивления и состояния движения потока имеет значение только произведение $R' = \frac{Ud}{ck}$, т. е. число Рейнольдса. Состояние потока определяется при малых значениях R' трением (по линейному закону Стокса). При возрастании числа Рейнольдса движение в потоке принимает сначала вид неустановившегося вихревого движения с известной регулярной периодичностью (вихревые дорожки, почти квадратическое сопротивление с „большими коэффициентами“). Затем при еще больших значениях R' наступает обычно скачком (критическое число) беспорядочное, но в среднем установившееся стационарное состояние движения (турбулентный поток, квадратичный закон сопротивления с „малыми коэффициентами“).

с) Баллистическая область $\frac{U}{c} \sim 1$, $\frac{d}{\lambda} \gg 1$. Скорость поступательного движения того же порядка, что и молекулярная или, что равносильно этому, порядка скорости звука или больше ее. Для состояния движения в потоке имеют значение уже чисто термические явления.

Можно, таким образом, сказать, что явления гидродинамические и аэродинамические, в собственном смысле слова, происходят только в случае б). Как в случае а), так и в случае с) мы должны обратиться к термодинамике. — В первом случае мы должны рассматривать термодинамику явления с точки зрения молекулярной динамики, а во втором мы можем ограничиться чисто феноменологическим рассмотрением термодинамики.

[ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА И ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ¹⁾].

I.

Осборн Рейнольдс ²⁾ так характеризовал сущность турбулентного движения: в потоке жидкости, в котором видимое (т. е. среднее) движение происходит в виде параллельных струй, помимо внутреннего трения происходит передача касательных напряжений путем переноса количества движения. Если средняя скорость совпадает по направлению с осью x , а составляющие пульсирующих скоростей будут u , v , w , то касательное напряжение, отнесенное к единице площади в плоскости (x , z), будет равно:

$$\tau = -\overline{\rho uv},$$

где ρ есть плотность жидкости, а $\overline{uv}$ — осредненное значение произведения uv . Существует, следовательно, аналогия между турбулентным переносом напряжений и молекулярным механизмом внутреннего трения. Последнее также обусловлено переносом количества движения, происходящим при беспорядочном тепловом молекулярном движении. Мы приходим к представлению — уже определенно высказанному Рейнольдсом — о существовании двух полей, которые налагаются одно на другое: поля беспорядочного теплового движения и поля беспорядочного турбулентного движения.

Если нам дана определенная геометрическая картина движения, то состояние движения, как известно, зависит от так называемого числа Рейнольдса, которое является просто мерою отношения сил инерции к силам трения. Понятие о числе Рейнольдса становится особенно наглядным, если мы введем вместо коэффициента вязкости (трения) первоначальные количества молекулярной физики. Числом Рейнольдса называется безразмерное количество $R = \frac{U d}{\mu}$, где U есть скорость потока в какой-нибудь точке поля скоростей или установки, d — линейный размер этой установки, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости или внутреннего трения. По кинетической теории газов коэффициент μ пропорционален количеству $\rho \lambda c$, где λ есть средняя

¹⁾ Th. v. Kármán, Über die Stabilität der Laminarströmung u. die Theorie der Turbulenz, Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut Aachen, № 5, 1925.

²⁾ Osborn Reynolds, Philos. Transactions, т. 174, 1883.

длина пути пробега молекул, а c — средняя молекулярная скорость. Мы получаем поэтому ¹⁾:

$$R = \text{const.} \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{U}{c}.$$

Число Рейнольдса является по существу произведением двух отношений, отношения характерного размера d к среднему пути молекулы λ , с одной стороны, и отношения скорости U потока к средней скорости молекул c — с другой. При обычных явлениях в гидродинамике и аэродинамике d чрезвычайно велико по сравнению с λ . Если порядок величины $\frac{d}{\lambda}$ близок к единице, то гидродинамические уравнения уже не могут служить для описания явлений (например, при броуновском движении, при оседании чрезвычайно мелких тел в жидкости). Мы должны в таком случае обратиться к кинетической теории. С другой стороны, если отношение $\frac{U}{c}$ очень близко к единице, то мы переходим к скоростям, близким к скорости звука, так что для разрешения проблем о состоянии движения мы должны принять в расчет данные термодинамики.

Между этими двумя областями находится область гидродинамики или аэродинамики в собственном более узком смысле слова. В пределах этой области, в которой все явления объясняются уравнениями гидродинамики, мы и будем рассматривать проблему турбулентного движения.

II.

В многочисленных работах, касающихся проблемы турбулентности, на первое место выдвигаются, главным образом, два вопроса. Ни тот ни другой до сего времени не получили еще удовлетворительного разрешения.

Первый вопрос касается условий возникновения турбулентного движения. Второй вопрос сводится к задаче установить закономерности в уже образовавшемся турбулентном движении, а именно, зависимость турбулентной силы трения от скорости и геометрических размеров (закон сопротивления при турбулентном движении).

Опыт показывает, что в большинстве случаев происходит внезапный переход от ламинарного движения, при котором совершенно отсутствует турбулентный перенос сил внутреннего трения, к турбулентному состоянию движения. Если мы обратимся, например, к движению в цилиндрической трубе, то мы найдем, что можно увеличивать скорости, при которых совершается такой переход от одного состояния движения к другому. Существует, однако, такая предельная скорость (вернее, предельное критическое значение числа Рейнольдса), при которой турбулентное движение вовсе невозможно. При увеличении скорости за пределы этого критического значения после некоторой

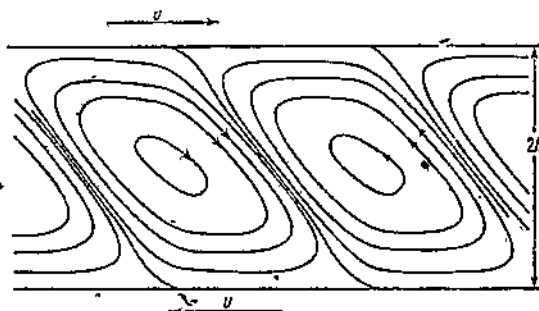
¹⁾ Th. v. Kármán, Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl. Abhandl. aus dem Aerodynam. Institut Aachen № 4, 1925. См. перевод этой статьи на стр. 249 настоящего сборника.

неопределенной стадии движения наступает такое состояние, которое отличается ясно выраженной закономерной зависимостью сопротивления от средней скорости потока и совершенно специфическим распределением осредненных по времени скоростей по поперечному сечению потока. Из этого следует заключить, что как критическое значение числа Рейнольдса, так и закон сопротивления и распределение средних скоростей по сечению потока должны выводиться теоретически из уравнений гидродинамики.

III.

Для разрешения вопроса об условиях возникновения турбулентного состояния движения прибегали к двум методам: методу энергетического критерия и методу малых колебаний.

Согласно энергетическому методу на поле ламинарных скоростей налагается второе поле: скоростей возмущения. Затем в случае, когда



Фиг. 79.

движение жидкости предоставлено само себе (без работы внешних сил), исследуется, увеличится ли или уменьшится энергия поля возмущенных скоростей. Ограничимся рассмотрением плоского движения в плоскости (x, y) с основным потоком, направленным по оси Ox между двумя стенками, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга (фиг. 79). Распределение скоростей в основном потоке зададим функцией $U(y)$ в пределах $-h < y < +h$. Легко показать, что приращение в единицу времени энергии возмущенного движения, т. е. количество энергии перешедшей из основного поля в поле возмущения равняется интегралу:

$$-\rho \int \int \frac{dU}{dy} uv dx dy$$

(где u и v — скорости возмущения), а количество энергии, поглощаемой внутренним трением, выражается интегралом:

$$\mu \int \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

Таким образом энергия возмущения убывает при соблюдении неравенства:

$$\mu \int \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx dy > -\rho \int \int \frac{dU}{dy} uv dx dy.$$

Генрих Лоренц¹⁾, предполагая такое распределение скоростей, при котором uv имеет наибольшее значение при неизменности величины рассеяния энергии, воспользовался этим неравенством в качестве критерия возникновения турбулентности. Он наложил на ламинарный поток поле эллиптических вихрей. Рассмотрим, например, поток между двумя параллельными подвижными стенками, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга, из которых одна движется со скоростью U , а другая — со скоростью $-U$. При $\xi = \frac{x}{h}$ и $\eta = \frac{y}{h}$ указанное неравенство получит вид:

$$\int \int \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta > - \frac{Up \cdot h}{\mu} \int \int uv d\xi d\eta.$$

Можно подсчитать предельное наименьшее значение для числа Рейнольдса $\frac{Up \cdot h}{\mu}$, при котором при всяких размерах и любом порядке эллиптических вихрей энергия возмущения будет убывать. Лоренц получил при своих предположениях число:

$$\frac{Up \cdot h}{\mu} = 72.$$

Можно уточнить энергетический критерий, как то сделал впервые Ор²⁾, затем Гамель³⁾ и автор настоящей статьи, если перейти к любому распределению скоростей u и v , не ограничиваясь больше построением специальных моделей, вроде эллиптических вихрей Лоренца. Вопрос может быть поставлен следующим образом: при каком распределении скоростей u и v отношение обоих интегралов

$$\frac{- \int \int uv d\xi d\eta}{\int \int \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta}$$

принимает максимальное значение? Это максимальное значение соответствует, очевидно, наиболее опасному возмущению и наименьшему значению числа Рейнольдса, при котором еще возможен прирост энергии возмущенного движения. Если мы введем функцию тока ψ , определяемую равенствами:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

то мы можем формулировать задачу еще и таким образом: найти минимум интеграла

$$J = \int \int (\Delta \psi)^2 d\xi d\eta$$

при условиях: на стенках

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0,$$

¹⁾ H. Lorentz, Abhandl. d. theor. Physik, т. I, 1907.

²⁾ W. Orr, Proc. Irish Royal Academy, XXVII (A), 1907.

³⁾ G. Hamel, Göttinger Nachrichten, 1911.

а внутри области

$$-\int \int \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\xi d\eta = 1.$$

Эта задача вариационного исчисления приводит к уравнению:

$$\Delta \Delta \psi + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0,$$

где λ есть множитель Лагранжа. Ограничиваясь рассмотрением одних периодических решений относительно ξ , можно разложить ψ в тригонометрический ряд Фурье. Таким образом можно получить критическую длину волны и наиболее опасное начальное распределение скоростей, т. е. наиболее опасное распределение вихрей. Соутвелл¹⁾ указал на очень наглядную аналогию поставленной в таком виде задачи. Рассмотрим бесконечную очень тонкую упругую полосу с постоянной шириной $2h$, находящуюся под действием касательных напряжений, равномерно распределенных вдоль обоих параллельных краев полосы. Поставим вопрос об условиях устойчивости подобной системы. Равномерно распределенные напряжения в каждом элементе полосы могут быть сведены к давлению и натяжению в двух ортогональных между собою направлениях, которые оба наклонены под углом 45° к оси полосы. При косом направлении давления делается возможным выпучивание полосы. Уравнение в частных производных для прогиба f в направлении, нормальном к плоскости полосы, имеет такой же вид, как и уравнение для ψ . Пограничные условия также будут совпадать, если мы заделаем борты полосы. Таким образом кривые равного уровня изогнутой полосы при выпучивании изобразят линии тока при существовании того поля скоростей косо расположенных вихрей, которое налагается на основное поле скоростей. В качестве параметра, характеризующего решение, мы получаем $\frac{h^2 S}{D}$ (S есть касательное напряжение на единицу длины, D — жесткость полосы). Числовое значение этого параметра тождественно с числом Рейнольдса для аналогичной гидродинамической задачи (по сделанному определению R мы имеем: $R = \frac{2h^2 S}{D}$).

При более точном применении энергетического критерия мы должны получить меньшее значение для критического числа ($R_k = 44,2$), чем то, которое дано Лоренцем. Действительно, налагая на ψ меньшие ограничения чем те, которые получаются в поле эллиптических вихрей, мы получаем для минимума интеграла J меньшее значение.

Полученное Лоренцем значение R_k ничтожно мало по сравнению со значением, полученным из опыта. При точном решении расхождение с опытом делается еще больше. Энергетический критерий дает только самый нижний предел устойчивости, в том смысле, что при меньших числах Рейнольдса всякое вихревое поле, отличное от основного, немедленно же затухает. Для больших значений R мы можем заключить только следующее: существует распределение вихревых скоростей, при

¹⁾ Soutwell a. Skun, Proc. Roy. Soc. (A), т. 105, 1924.

которых в первый момент имеет прирост энергии. Этим, однако, не исключается возможность того, что в дальнейшем эта энергия рассеется. Поэтому можно предполагать казалось бы, что метод исследования малых колебаний даст лучшее согласие с опытом.

IV.

Метод малых колебаний был применен для решения задачи об устойчивости ламинарного движения еще Релеем¹⁾ и Кельвином²⁾, однако с не совсем правильными пограничными условиями для налагаемого на основной поток поля скоростей. Зоммерфельд³⁾ в своем докладе на Международном математическом съезде в Риме в 1908 г. снова поставил эту проблему и дал ей точную математическую формулировку. Под влиянием этого доклада появляется затем ряд работ в этом направлении Гопфа⁴⁾, Мизеса⁵⁾ и Гаупта⁶⁾. Ими было доказано, что для случая, рассмотренного Куэттом, т. е. для потока между плоскими параллельными стенками, передвигающимися в своей плоскости, ламинарный поток является устойчивым с точки зрения теории малых колебаний. В данном случае этот метод привел, таким образом, вместо уточнения результатов, полученных из рассмотрения энергии и лучшего согласия с опытом, к совершенно неприемлемому выводу.

К сожалению, указанные математически точные исследования относились только к случаю линейного распределения скоростей в основном потоке⁷⁾. Вопрос о том, останутся ли эти выводы без изменения и для случая нелинейного распределения (случай Пуазейля) или же, наоборот, ламинарный поток в этом случае может стать неустойчивым — остается открытым до сих пор. Математические выводы в указанных работах слишком сложны, за ними не видно чисто физических явлений и соотношений.

Прандтль сделал попытку подойти к физической природе явления, исходя из предельного случая идеальной жидкости с небольшим локализованным внутренним трением⁸⁾. Основанием для выводов Прандтля послужило исследование Релея о малых колебаниях в идеальной жидкости. Он отметил, далее, что имеется существенное отличие между потоком Куэтта и потоком Пуазейля. В последнем при отсутствии внутреннего трения колебательные движения возможны, в случае же движения Куэтта они отсутствуют. Точнее: если мы рассмотрим уравнения для волнового колебательного движения, отбросим в них члены, зависящие от внутреннего трения, и будем искать решения, для которых

1) Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc., 1878.

2) Kelvin, Philos. Mag. (5), 1887.

3) Sommerfeld, Atti del congr. intern. Math., Roma 1908.

4) L. Hopf, Ann. d. Physik, 1914.

5) R. V. Mises, H. Weber-Festschrift, 1912.

6) Haupt, Sitzber. Bayer. Ak., München 1912.

7) Видоизменение распределения скоростей, введенное Нетером для потока между двумя подвижными параллельными стенками (Sitz-Ber. Bayer. Akad. d. Wiss., 1913), приводит, как то показал Блюменталь, также к отрицательному результату.

8) L. Prandtl, Phys. Zeitschr., 1922.

нормальная скорость у стенок равна нулю, то для случая параболического распределения скоростей в основном потоке мы найдем незатухающие решения уравнений, а при линейном распределении таких решений не существует совсем. Естественно, что в этих решениях (для случая Пуазейля) мы найдем для касательных скоростей у стенок отличные от нуля значения, так как при полном отсутствии трения нет никаких оснований к тому, чтобы эти скорости затухали у стенок. Если же мы допустим сколь угодно малое внутреннее трение, то эти скорости станут равны нулю. Прандтль в согласии со своей теорией пограничного слоя предположил существование трения только в тонком слое, непосредственно прилегающем к стенкам, и исследовал его влияние на указанные выше колебательные движения. Он получил удивительный на первый взгляд результат: движение оказалось неустойчивым. Ничем не задерживаемые при отсутствии трения колебания начинают под влиянием трения не затухать, а наоборот, усиливаться. Вопрос поэтому должен был быть поставлен иначе в обратном смысле. Следовало найти причину затухания возмущений, так как из опыта известно, что при значениях числа Рейнольдса, меньших критического (приблизительно равного 2000), ламинарный поток всегда остается устойчивым.

Нетрудно, однако, видеть, что кроме пограничного слоя у стенок имеется еще другой, в котором нельзя пренебрегать внутренним трением, как бы мал ни был коэффициент трения — это тот слой, в котором скорость в основном потоке равна скорости распространения колебаний. Производя оценки рассматриваемых количеств, Прандтль нашел, что усиление колебаний благодаря трению у стенок пропорционально $R^{-\frac{1}{2}}$, а их затухание благодаря трению в указанном слое пропорционально $R^{-\frac{2}{3}}$. Таким образом усиление колебаний при больших значениях числа R имеет большее значение, чем затухание; обратно — при малых значениях R . В случае потока Куэтта это рассуждение неприменимо, так как в этом потоке оба слоя совпадают, причем при $R = \infty$, и возмущение распространяется со скоростью самой стенки. Таким образом понятно, что в этом случае затухание всегда сказывается сильнее.

Соображения Прандтля делают вероятным предположение, что ламинарный поток Куэтта всегда устойчив, тогда как для потока Пуазейля должно существовать критическое значение числа Рейнольдса. Это предположение подтверждается также опубликованным впоследствии исследованием Гейзенберга¹⁾.

Однако применяемый им в этой работе метод приближенных вычислений и законность его применения могут вызвать некоторые сомнения. Остается еще разрешить возникающее противоречие теории, согласно которой случаи Куэтта и Пуазейля дают для малых колебаний совершенно различную картину с тем опытным фактом, что оба потока ведут себя совершенно одинаковым образом при переходе из лами-

¹⁾ W. Heisenberg, Ann. d. Physik, 1924.

нарного в турбулентное состояние движения. Однако надо признать, что трудно воспроизвести опытным путем поток Куэтта. Вместо подвижных плоских стенок приходится прибегать к движению соосных цилиндров, так что нельзя исключить влияния концов цилиндров и избежать появления трехмерных колебаний. Тем не менее, мне кажется, что способ малых колебаний мало пригоден для объяснения физической природы явления.

V.

Вопрос еще более важный, чем проблема возникновения турбулентного движения, — это вопрос о законах, управляющих установившимся турбулентным движением, а именно о законах сопротивления. Мы вкратце резюмируем основные данные опыта.

Лучше всего изучены явления при движении жидкости в цилиндрических трубах. Мы ограничимся сначала случаем совершенно гладкой стенки трубы, так как в этом случае закон сопротивления зависит исключительно от одного числа Рейнольдса. При шероховатых же стенках приходится рассматривать по крайней мере еще один параметр, характеризующий состояние движения: отношение высоты неровностей стенок к диаметру трубы. По результатам, полученным Блазиусом, можно выразить падение давления h в области больших значений числа Рейнольдса следующей формулой ¹⁾:

$$h = 0,316 \frac{l}{d} \frac{v^2}{\sqrt[4]{\frac{vd}{\nu}}},$$

где l есть длина, d — диаметр, v — средняя скорость.

Сила сопротивления, отнесенная к единице площади стенки, получается поэтому следующее выражение:

$$\tau = 0,079 \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{vd}{\nu}}} \gamma \frac{v^2}{2g}.$$

Фромм исследовал применимость этой формулы для широких каналов, т. е. практически для потока между параллельными стенками ²⁾. Он нашел для нее хорошее совпадение вплоть до числового значения коэффициента с данными опыта, если заменить в ней $\frac{d}{4}$ гидравлическим радиусом.

Основным вопросом становится следующий. Является ли эта столь простая зависимость результатом хорошо подобранной в известных пределах простой интерполяционной формулы, или же она есть следствие внутренней закономерности, которую возможно теоретически объяснить. (В этой формуле сопротивление зависит от скорости в степени $7/4$, а потому мы будем обозначать этот закон названием закона степени $7/4$.) Имеются некоторые основания для обеих точек зрения.

¹⁾ H. Blasius, Forschungsarbeiten VDI, 1913.

²⁾ K. Fro mm, Z. F. ang. Math. u. Mech., 1923.

За предположение, что этот закон выражает истинную закономерность, говорит то, что из этой формулы можно вывести распределение скоростей в потоке. Предположив, что распределение скоростей остается подобным при возрастании числа R , а вблизи стенок всецело определяется физическими количествами ρ и μ и касательным напряжением τ_0 , мы можем вывести из соображений подобия выражение ¹⁾:

$$u(y) = \text{const.} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{7}} \left(\frac{y}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad (A)$$

где y означает расстояние от стенки в нормальном к ней направлении. Эта формула подтверждается непосредственными измерениями скоростей. Далее, переходя к несколько более сложным случаям (пластинка в безграничном потоке, вращающийся диск), мы можем исходить из этого распределения скоростей и подсчитать сопротивление. Результаты подсчета хорошо совпадают с данными экспериментальных измерений. С другой стороны, — непосредственные измерения сопротивления обнаруживают существование отклонения от закона Блазиуса при возрастании числа R . Измерения, произведенные Стантоном и Паннелом ²⁾, а также измерения Якоби и Эрка ³⁾ показывают, что сила сопротивления при увеличении R удовлетворяет все в большей степени закону квадратичного сопротивления, аналогичному закону сопротивления жидкостей движению твердых тел. Из этого затруднения можно выйти, рассматривая стенки всякой трубы при больших значениях R , шероховатыми, а не гладкими. Известно, что шероховатые стенки оказывают при больших R сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Такое представление становится вероятным, если сделать гипотезу, что сопротивление шероховатой стенки складывается из сопротивления ее отдельных неровностей. Очевидно, шероховатость есть свойство относительное. Гладкой стенку можно считать только до тех пор, пока ее неровности малы относительно тех вихрей, которые переносятся турбулентным движением из области около стенок в центральную часть потока. На самой же стенке мы имеем чисто ламинарное сопротивление трения, так как обе составляющие скорости u и v , а потому и значение u^2 , равны нулю. Представление о существовании у стенок чисто ламинарного пограничного слоя уже потому необходимо, что закон распределения скоростей (A) давал бы в противном случае бесконечное значение для производной $\frac{du}{dy}$, т. е. бесконечное значение силы трения. Можно также вывести из выражения $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ приблизительную оценку толщины ламинарного пограничного слоя ⁴⁾. При тех измерениях, которые обнаруживают отклонения от закона степени $1/4$, оказывается, что эта толщина пограничного слоя — величина того же порядка, как и неровности тех стенок, которые с технической точки зрения считаются гладкими.

1) Th. v. Kármán, Z. F. ang. Math. u. Mech., 1921.

2) Stanton a. Pannell, Phil. Trans. Roy. Soc. (A), т. 214, 1914.

3) Jacob u. Erk, Forschungsarbeiten VDI, 1924.

4) H. Latzko, Z. F. ang. Math. u. Mech., 1921.

Таким образом еще не исключается возможность того, что закон степени $7/4$ является точным законом в предельном случае абсолютно гладких стенок ¹⁾.

VI.

Каков бы ни был истинный закон сопротивления, не подлежит никакому сомнению, что законы установившегося турбулентного состояния должны быть выведены из уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости без дальнейших предпосылок эмпирического характера. Можно было бы полагать сначала, что эти уравнения движения ввиду их нелинейности имеют наряду с тривиальным решением для ламинарного потока, другие решения нестационарного периодического характера. Однако опытные наблюдения над явлениями турбулентности, повидимому, не подтверждают такого взгляда. Наблюдения приводят к убеждению, что мы имеем дело с беспорядочным движением, для которого эмпирически установленные простые закономерности имеют чисто статистическое основание.

На основании этого последнего представления И. Бюргерс первый сделал попытку статистического вычисления турбулентного сопротивления ²⁾. Он дал прежде всего такое выражение для сопротивления, в котором зависимость касательного напряжения от скорости выражается при помощи одних средних значений скоростей пульсирующего возмущения. Рассмотрим снова случай потока между двумя параллельными стенками, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга и движущимися со скоростями $\pm u$. Пусть средняя скорость в каком-либо слое $y = \text{const.}$ равна $u_0(y)$, а скорости пульсации равны u, v . Тогда для касательного напряжения, передаваемого от слоя к слою и отнесенного к единице площади, мы получим выражение:

$$\tau = \mu \frac{du_0}{dy} - \rho \overline{uv}.$$

Баланс энергии, поступающей каждую секунду из поля осредненных скоростей в поле пульсирующих скоростей и расходуемой в этом последнем вследствие рассеяния, выразится в виде следующего уравнения:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{du_0}{dy} \rho \overline{uv} dy + \int_{-h}^{+h} \mu \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}} \right)^2 dy = 0.$$

¹⁾ Правда, с этим трудно согласовать измерения Кемпера с длинными пластинками (Werft, Reederei und Hafen, т. 5 стр. 521, 1924 г.; см. также Über den Reibungswiderstand von Flächen verschiedener Form, diese Verhandlungen, Vorträge der III Sektion). Кемпф нашел, что поверхностное трение пластинок, поставленных параллельно направлению потока, при очень больших числах Рейнольдса пропорционально их длине, точнее говоря, что вновь добавленные одинаковые площади испытывают одинаковое трение. Между тем по закону степени $7/4$ сила трения на единицу поверхности с длиной пластинки падает. Так как толщина пограничного слоя в направлении потока скорее растет, чем уменьшается, то это нельзя объяснить влиянием шероховатости. (См. также Stanton and Marschall, Trans. Inst. Naval. Arch. Shigemitsu, там же.)

²⁾ См. статью Бюргерса, стр. 287 настоящего сборника.

Исключая из обоих уравнений $\frac{du_0}{dy}$, мы получим:

$$\int_{-h}^{+h} \left\{ \rho^2 \overline{uv^2} + \tau \overline{uv} + \mu^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dy = 0,$$

откуда

$$\tau = - \frac{\int_{-h}^{+h} \left\{ \rho^2 \overline{uv^2} + \mu^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dy}{\int_{-h}^{+h} \rho \overline{uv} dy}.$$

Если мы положим, что

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h}^{+h} \frac{du_0}{dy} dy = \frac{\tau}{\mu} h + \frac{1}{2\mu} \int_{-h}^{+h} \overline{uv} dy,$$

то будет ясно, что закон сопротивления будет нам известен, коль скоро мы будем знать значения следующих интегралов:

$$\int_{-h}^{+h} \overline{uv} dy, \quad \int_{-h}^{+h} \overline{uv^2} dy, \quad \int_{-h}^{+h} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dy.$$

Бюргерс определяет значения этих интегралов для поля скоростей с тою же системой эллиптических вихрей, из которой исходил Лоренц при определении критического числа Рейнольдса. Эти вихри определяются их площадью (диаметром), эксцентриситетом и углом с осью Ox направления их сжатия. Все эти количества сначала остаются неопределенными.

Без введения новых гипотез нельзя еще, таким образом, определить закон сопротивления. Бюргерс сделал попытку определить, при каком расположении вихрей и при какой их форме сопротивление получит наибольшее значение при неизменной скорости стенок. Это требование определяет средние размеры вихрей или, в случае, если все вихри превосходят по размерам определенный минимальный размер, оно определяет нижний предел размера вихрей. Это условие определяет также напряжение, эксцентриситет и ориентировку вихрей. Таким образом и сопротивление делается тоже вполне определенным. Мы получаем в первом случае (вихри одинаковых размеров):

$$\tau = \text{const.} \cdot U^{\frac{3}{2}}.$$

Во втором случае:

$$\tau = \text{const.} \cdot U^2.$$

Эти значения сильно отклоняются от измеренных экспериментально: первое выражение дает слишком малые значения, второе — слишком большие.

VII.

Мною была сделана попытка получить выражение вероятности рас-
пределения без дополнительных экспериментальных условий (возможно
большого сопротивления), исходя из оснований, близких к кинетической
теории газов. В нижеследующих строках я постараюсь резюмировать
ход рассуждений, который приводит к такому статистическому исследо-
ванию состояния турбулентного движения и к определению силы
сопротивления. Делаю это в полном сознании того, что никаких окон-
чательных результатов мне пока не удалось получить. Представим себе
опять две параллельные стенки, находящиеся на расстоянии $2h$ друг от
друга и движущиеся со скоростями $\pm U$. При этом мы делаем предпо-
сылку, что большая часть энергии, получаемой благодаря работе сил,
движущих стенки, рассеивается в средней части канала в некоторой
средней области, в которой состояние движения приблизительно можно
рассматривать равномерным. Иными словами можно в этой области
заменить беспорядочное движение движением осредненным. Обозначим
опять скорости пульсации через u , v . Если бы u и v были совершенно
случайны и независимы при одном условии, например заданного
количества полной энергии, то среднее значение $\overline{uv}$ было бы равно
нулю. В действительности же количество $\overline{uv}$ не равно нулю. Между
скоростями u и v существует корреляция, определяемая условием рас-
сеяния энергии, о которой мы уже несколько раз говорили.

Мы ограничимся специальной формой движения. По крайней мере
в области, где мы можем рассматривать поток непрерывным, мы пред-
положим существование некоторой периодичности в отношении обеих
координат x и y . Для простоты примем для функции тока ψ выражение:

$$\psi = A \cos(\alpha x + \beta y)$$

и составим выражения скоростей пульсации:

$$u = A \beta \sin(\alpha x + \beta y), \quad v = -A \alpha \sin(\alpha x + \beta y).$$

Осредненные значения, которые нас интересуют в первую очередь,
будут равны:

$$\overline{uv} = -\frac{1}{2} A^2 \alpha \beta, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = (\Delta \psi)^2 = \frac{A^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2)^2.$$

Энергия пульсации на единицу массы равна:

$$\frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2}) = \frac{A^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2).$$

Среднюю скорость пульсации обозначим через c и напомним:

$$\frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2}) = \frac{1}{2} c^2 = \frac{A^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2).$$

Заменяя A его выражением через c , мы получим:

$$\overline{uv} = -\frac{c^2}{2} \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{c^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2).$$

Вообще необходимо было бы варинировать значение квадрата c^2 пуль-

сации и определить его вероятнейшее распределение. Однако для нас наиболее существенно изучить распределение периодичностей по координатам, т. е. α и β . Поэтому примем для c фиксированное среднее значение и ограничимся исследованием вероятности для совокупности α и β . Мы применим к этому случаю известное рассуждение из кинетической теории газов.

Пусть частота состояния, определяемого значениями α между α и $\alpha + d\alpha$ и значениями β в пределах от β до $\beta + d\beta$, будет равна $f(\alpha, \beta)$. Логарифмическая вероятность функции распределения $f(\alpha, \beta)$ равна:

$$S = \int_0^\infty \int_0^\infty f \ln f d\alpha d\beta.$$

В качестве дополнительного условия мы имеем уравнение рассеяния, которому мы дадим следующий вид: работа сил вдоль единицы длины подвижной стенки равна:

$$\tau U = -\rho \overline{uv} \cdot U + \mu U \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Пренебрегаем последним членом и предполагаем, что значительно большая часть этой работы рассеивается в поле скоростей пульсации. Мы можем в таком случае приближенно положить:

$$-\rho \overline{uv} \cdot U = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \cdot h,$$

где средние значения вычислены для всей средней области движения. Это условие мы можем написать, выражаясь языком статистики, в следующем виде:

$$U\rho \int_0^\infty \int_0^\infty f(\alpha, \beta) \cdot \frac{c^2}{2} \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha d\beta + \mu h \int_0^\infty \int_0^\infty f(\alpha, \beta) \frac{c^2}{2} (\alpha^2 + \beta^2) d\alpha d\beta = 0$$

или

$$\frac{c^2}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\alpha, \beta) \left\{ \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\mu h}{U\rho} (\alpha^2 + \beta^2) \right\} d\alpha d\beta = 0.$$

Условие максимального значения для S совместно с последним дополнительным условием (с множителем Лагранжа Λ) нам дадут:

$$\ln f + 1 + \Lambda \left[\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\mu h}{U\rho} (\alpha^2 + \beta^2) \right] = 0,$$

т. е.

$$f(\alpha, \beta) = C e^{-\lambda \left[\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\mu h}{U\rho} (\alpha^2 + \beta^2) \right]}.$$

Введем вместо α и β переменные:

$$\alpha^2 + \beta^2 = h^2, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg} \theta.$$

Мы получим:

$$f = C e^{-\lambda \left(\sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{\mu h}{U\rho} h^2 \right)}.$$

Множитель Λ Лагранжа мы найдем, если подставим полученное решение в дополнительное условие энергии и перейдем к переменным k и ϑ . Мы получим:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} 1^{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta + \frac{\mu h}{U_p} k^2} \left[\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta + \frac{\mu h}{U_p} k^2 \right] k \, dk \, d\vartheta = 0,$$

или иначе:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} e^{-\Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \int_0^\infty e^{-\frac{\Lambda \mu h}{U_p} k^2} k \, dk + \\ & + \int_0^{2\pi} e^{-\Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta \int_0^\infty e^{-\frac{\Lambda \mu h}{U_p} k^2} \frac{\mu h}{U_p} k^3 \, dk = 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначение:

$$\frac{\Lambda \mu h}{U_p} k^2 = \xi,$$

мы получим:

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-\Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta} \Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta}{\int_0^{2\pi} e^{-\Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta} = - \frac{\int_0^\infty e^{-\xi} \xi \, d\xi}{\int_0^\infty e^{-\xi} d\xi}.$$

Оба интеграла могут быть выражены посредством функций Бесселя порядка 0 и 1 и равняются:

$$\int_0^{2\pi} e^{-\Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta = 2\pi J_0\left(\frac{i\Lambda}{2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-\Lambda \sin \vartheta \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = -2\pi \frac{dJ_0}{d\Lambda}\left(\frac{i\Lambda}{2}\right) = i\pi J_1\left(\frac{i\Lambda}{2}\right).$$

Правая часть полученного равенства равна -1 .

Таким образом написанное уравнение принимает вид:

$$J_0\left(\frac{i\Lambda}{2}\right) + \frac{i\Lambda}{2} J_1\left(\frac{i\Lambda}{2}\right) = 0.$$

Числовое значение для корня Λ равно:

$$\Lambda = 3,22.$$

Таким путем мы находим наиболее вероятную функцию распределения в виде:

$$f(\alpha; \beta) = C e^{-3,22 \left(\sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{\mu h}{U_p} k^2 \right)}.$$

Мы можем теперь вычислить все осредненные значения количеств, которые нас интересуют, и в первую очередь частоту в направлении

от Ox , т. е. длину волны возмущения. Вычислим среднее значение $\bar{\alpha}^2$. Мы получим при $\alpha = k \sin \vartheta$:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^2 &= \frac{\iint f \alpha^2 d\alpha d\beta}{\iint f d\alpha d\beta} = \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} e^{-3,22 \sin \vartheta \cos \vartheta} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^\infty k^3 e^{-3,22 \frac{\mu h}{U_p} k^2} k^2 dk}{\int_0^{2\pi} e^{-3,22 \sin \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta \int_0^\infty k e^{-3,22 \frac{\mu h}{U_p} k^2} dk} = 0,155 \frac{U_p}{\mu h}.\end{aligned}$$

Среднее значение $\bar{\lambda}$ длины волны равно ¹⁾:

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 2,5 \sqrt{\frac{\mu h}{U_p}} = 2,5 \frac{h}{\sqrt{R}}.$$

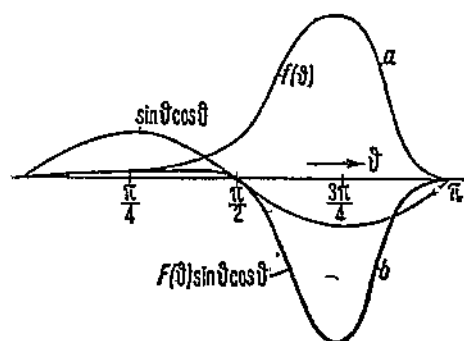
В качестве приложений приводим два числовых примера:

а) Поток воды между двумя стенками. Пусть $2h=2$ см, $v=0,01$ см²/сек. В таком случае длина волны λ для нижеследующих скоростей будет равна:

$$\begin{array}{ll} \text{для } U = 1 \text{ м/сек} & \lambda = 2,5 \text{ мм}, \\ \text{„ } U = 5 \text{ м/сек} & \lambda = 1 \text{ мм}, \\ \text{„ } U = 10 \text{ м/сек} & \lambda = 0,8 \text{ мм}. \end{array}$$

б) Поток ветра над поверхностью земли. Предполагая, что на высоте 100 м над поверхностью скорость ветра равна 10 м/сек и делая предположку, что явления происходят так же, как в одной половине области только что рассмотренного случая движения (при $y=0$ $U=0$, при $y=h$ $U=10$ м/сек), мы получим в среднем

$$\lambda \approx 3 \text{ см}.$$



Фиг. 80.

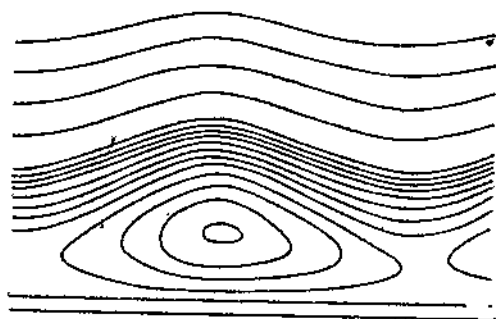
вероятность f косого положения ϑ при постоянном α (постоянная длина волны). Кривая b дает значения $f(\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta$. Можно видеть, насколько вероятность вихрей, при которых uv отрицательно, больше вероятности тех вихрей, при которых uv положительно.

¹⁾ Мы полагаем для упрощения $\bar{\alpha} = \sqrt{\bar{\alpha}^2} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}$, что не совсем правильно. Более точное вычисление вряд ли уместно производить ввиду грубости приближения всей этой теории.

VIII.

Как мы видели в предыдущем параграфе, соображения о вероятности позволяют определить частоту пространственного расположения и направление вихрей. Интенсивность же их (средняя энергия пульсации $\frac{\bar{u}^2}{2}$) остается неопределенной. Ясно и с физической точки зрения, что мы можем определить эту интенсивность, а вместе с тем и расход энергии и сопротивление только после того, как мы введем в рассмотрение те явления, которые происходят вблизи стенок. Для этой цели мы должны были бы выполнить вычисления для областей вблизи стенок и установить условия, при которых так называемые уравнения пограничного слоя допускают периодические решения. Однако этот путь представляет очень большие трудности, а потому мы удовольствуемся грубым приближением. Мы примем для простоты, что средняя скорость потока во всей средней части канала, вплоть до некоторого расстояния δ от стенок, остается постоянной (в настоящем случае — равной нулю), а в тонком слое толщиной δ у стенки очень быстро изменяется от своего значения в средней области до скорости самой стенки U . Далее, опять для упрощения примем, что скорость $u_0(y)$ изменяется линейно. Таким образом мы примем тот же профиль скоростей в виде ломаной линии, который рассматривали Релей и Прандтль. С этими упрощениями мы можем положить:

$$\tau = \mu \frac{U}{\delta} = -\rho (\overline{uv})_y < h-\delta.$$



Фиг. 81.

Прандтль и Титъенс изучили поле периодических возмущений, которое накладывается на такое распределение скоростей в основном потоке, и определили длину тех волн, которые при этом не усиливаются и не затухают. Такое состояние движения изображено на фиг. 81.

Если ввести безразмерные количества: число Рейнольдса для пограничного слоя $\xi = \frac{U\delta\rho}{\mu}$ и отношение длины λ волны к толщине δ пограничного слоя, то из вычислений Титъенса можно вывести определенное соотношение между количествами:

$$\xi = \frac{U\delta\rho}{\mu} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\lambda}{\delta}.$$

Мы сопоставим это соотношение с полученными нами уравнением для

средней длины волны в чисто турбулентной области движения, предполагая, что у стенок образуется пограничный слой такой толщины δ , что длина волны, обусловленной вихрями в этом слое, равна той средней длине волны, которая получена нами и для турбулентной области движения.

Полученное нами равенство мы напомним в следующем виде:

$$\frac{U\lambda^2\rho}{\mu} = B.$$

Полагая, например, при постоянном A , что

$$\frac{U\delta\rho}{\mu} = A \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^n,$$

мы получим для определения λ и δ два уравнения:

$$\frac{U\delta^{n+1}\rho}{\lambda^n\mu} = A,$$

$$\frac{U\lambda^2\rho}{\mu} = B,$$

откуда

$$\delta = \text{const.} \cdot U^{-\frac{2+n}{2n+2}}.$$

и, следовательно,

$$\tau = \mu \frac{U}{\delta} = \text{const.} \cdot U^{\frac{3n+4}{2n+2}}.$$

Таким образом:

$$\text{для } n = 0 \quad \tau = \text{const.} \cdot U^2$$

$$,, \quad n = 1 \quad \tau = \text{const.} \cdot U^{\frac{7}{2}}$$

$$,, \quad n = \infty \quad \tau = \text{const.} \cdot U^{\frac{3}{2}},$$

т. е. мы получаем те же пределы возможных изменений закона сопротивления, к которым пришел Бюргерс.

На основании вычислений Титенса мы можем получить определенные значения для сопротивления. Напишем:

$$\tau = \mu \frac{U}{\delta} = C\rho \frac{U^2}{2},$$

Таким образом коэффициент сопротивления C равен:

$$C = \frac{2\mu}{U\delta\rho} = \frac{2}{\xi}.$$

С другой стороны, из равенства

$$\frac{U \lambda^2 \rho}{\mu h} = B$$

следует:

$$\frac{U^2 \delta^3 \rho^2}{\mu^2} \cdot \frac{\lambda^2}{\delta^2} \cdot \frac{\mu}{U \rho h} = B,$$

или иначе:

$$\xi^2 \eta^2 \cdot \frac{1}{R} = B,$$

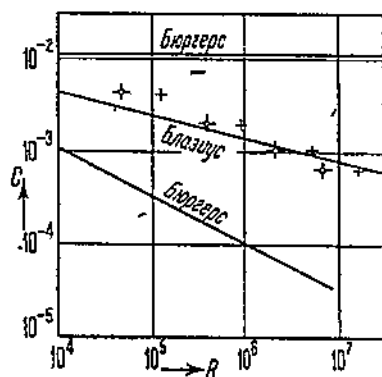
$$R = \frac{\xi^2 \eta^2}{B}.$$

Мы получим, таким образом, выражение для коэффициента сопротивления C в функции числа Рейнольдса R , если только нам станет известно соотношение между ξ и η .

На фиг. 82 нанесены в логарифмическом масштабе значения C , в функции R , вычисленные на основании работы Титьенса. Кроме того, нанесены кривые, соответствующие предельным оценкам Бюргерса, и кривые для значений, полученных эмпирически по формуле Блазиуса. (Крестики соответствуют предположению, что длина волны в чисто турбулентной области равна длине волны, вызываемой вихрями в пограничном слое. Значения, обозначенные кружками, вычислены, исходя из гипотезы, что средняя длина вихрей равна длине вихря в пограничном слое). Как видим, зависимости коэффициента C от R еще не удается воспроизвести с полной точностью. Тем не менее в первый раз получаются чисто теоретическим путем правильные результаты для порядка величины сопротивления.

Физический смысл соображений, положенных в основу сделанных расчетов, можно резюмировать приблизительно следующим образом:

Статистическое равновесие возможно только тогда, когда оно устойчиво, т. е. когда всякое отклонение обратимо. Предположим, что по какой бы то ни было причине пульсации усилятся во внутренней области потока. Напряжение $\tau = -\rho \overline{u'v'}$, а вместе с тем и $\mu \frac{U}{\delta}$ станут больше, т. е. δ станет меньше. Пограничный слой станет тоньше и изменение скорости потока у стенки быстрее. Благодаря этому длина волны пограничных вихрей станет тоже меньше, а пространственная частота пульсаций, т. е. их густота возрастет. Это поведет к более усиленному рассеянию энергии пульсаций и к более быстрому их затуханию, пока равновесное состояние вновь не восстановится.



Фиг. 82.

Недостатком теории является то, что мы ничего еще не узнаем о распределении скоростей. Для этого наши общие предпосылки (в особенности суммарное рассмотрение всей средней области турбулентного движения) еще слишком грубо приближенные. Следовало бы рассмотреть и определить распределение пульсаций в зависимости от ординаты y , в качестве количества, которое изменяется от одного слоя к другому. Мне кажется поэтому, что можно будет следуя намеченному пути при более точном и подробном исследовании, прийти к полному пониманию рассматриваемых явлений.

Т. КАРМАН.

МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ¹⁾.

1. Введение.

Гидродинамические исследования за последние десятилетия показали, что теоремы динамики идеальной жидкости при удачном их применении могут служить для объяснений даже таких явлений, которые по существу не могут считаться независимыми от вязкости. В этом отношении особенно полезными оказались теоремы из теории вихрей. Позволю себе напомнить хотя бы теорию вихревых дорожек, которая в некоторых случаях дает возможность определить сопротивление обтекаемых тел с достаточной степенью точности, хотя такого сопротивления вовсе не было бы в жидкости, не имеющей вязкости. Оставляя без рассмотрения вопрос о происхождении вихрей, можно описать состояние движения за обтекаемым телом с хорошим приближением, исходя из представления о существовании обособленных вихрей в потоке и основываясь на одних законах движения таких вихрей в идеальной жидкости. Теория индуктивного сопротивления тел, имеющих форму крыла аэроплана, представляет другой пример того, как далеко может идти теоретическое объяснение, не выходя из пределов динамики идеальной жидкости.

Перспективы при объяснении явлений турбулентного движения кажутся на первый взгляд хуже. При исследовании вопроса о происхождении турбулентности ясно по смыслу самой задачи, что решающее значение будет иметь отношение сил внутреннего трения к силам инерции и, таким образом, указанный подход к решению вопроса окажется неприменимым. Но помимо этой задачи существует другая: проблема „установившейся турбулентности“, т. е. задача построения теории движения с установившимся характером турбулентного режима и эта вторая задача имеет, быть может, еще большее значение с практической точки зрения. Имеется много указаний на то, что к решению можно подходить и в этом случае, пренебрегая силами трения или, вернее, учитывая их действие только в определенной области в непосредственной близости к стенкам. Несколько времени назад В. Фрич ²⁾ сделал в Аахенском аэродинамическом институте ряд измерений для определения скоростей в потоке между двумя параллельными стенками. При сохранении того же расстояния между стенками в значительной степени менялась их шероховатость. Выяснилось, что кривые распределения ско-

¹⁾ Th. v. Kármán, Mechanische Ähnlichkeit u. Turbulenz, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Kl., 1930,

²⁾ W. Frietsch, Z. f. angew. Math. u. Mech., стр. 215, 1928.

ростей почти полностью совпадали, за исключением области вблизи самих стенок, когда переносимое на стенки касательное напряжение имело одно и то же значение. Это наблюдалось при всяких стенках как полированных, так и шероховатых при соответственном уменьшении скорости и даже при шероховатости распиленного дерева. Сопротивление при таких очень шероховатых стенках следует так называемому квадратическому закону, т. е. оно пропорционально плотности жидкости и квадрату скорости потока и не зависит от степени вязкости жидкости. Не следует ли из этого заключить, что вязкость не имеет решающего значения, при развитии распределения скоростей в потоке. Настоящая работа представляет собою попытку сделать шаг вперед в этом направлении и дать расчетные формулы для законов турбулентного движения в трубах с возможно меньшим числом произвольных предположений.

2. Дополнительные турбулентные напряжения.

Мы обязаны О. Рейнольдсу определением роли пульсаций в турбулентном движении, которые были названы им молярными пульсациями в отличие от молекулярных движений, обуславливающих явления внутреннего трения при ламинарном режиме.

Если мы разобьем скорости и давление на составляющие, зависящие от времени, которые мы будем называть пульсациями, и на средние скорости и давление, относящиеся к основному среднему движению, то легко показать, исходя из общих гидродинамических уравнений, что количества движения, которые переносятся пульсацией скоростей, представляются для среднего движения в виде дополнительных напряжений. Выражения для этих напряжений представляются в виде средних значений попарного произведения составляющих скоростей пульсации.

Ограничимся рассмотрением двухмерного потока и обозначим через U среднюю скорость в направлении потока, т. е. оси Ox , а среднюю скорость в направлении оси Oy через V . Дополнительные скорости пульсации обозначим соответственно через u и v .

Выражения для дополнительных напряжений будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\overline{\rho u^2}, \\ \sigma_y &= -\overline{\rho v^2}, \\ \tau &= -\overline{\rho u \cdot v}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Формально эти напряжения вполне соответствуют напряжениям ламинарного движения, которые являются следствием молекулярного движения и которые имеют выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \tau &= \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Аналогия становится особенно наглядной, когда мы припомним вывод значения коэффициента вязкости. Это значение пропорционально про-

извлечению $\mu \approx \rho \lambda c$, где ρ есть плотность жидкости, λ — средняя длина пути пробега молекул, c — средняя скорость молекулярного движения.

Рассмотрим в качестве примера прямолинейное движение в направлении Ox , т. е. положим $U = U(y)$, $V(y) = 0$ и выражение для напряжений возьмем, с одной стороны, в виде $\tau = -\rho u v$, а с другой — в виде:

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \sim \rho \lambda c \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для скоростей пульсации в молекулярном движении мы получаем выражения:

$$u = \pm c \pm l \frac{dU}{dy}, \quad v = \pm c,$$

причем, если $v = +c$, то

$$u = \pm c - l \frac{dU}{dy};$$

если же $v = -c$, то

$$u = \pm c + l \frac{dU}{dy}.$$

Ясно, что для количества uv мы получаем выражение:

$$\overline{uv} = -cl \frac{dU}{dy}.$$

Этим и подтверждается аналогия обоих приведенных выше выражений для касательных напряжений.

Естественно для математического выражения турбулентного касательного напряжения ввести в расчетные формулы „коэффициент турбулентного трения“, как то было предложено Буссинеском и в особенности Стантоном ¹⁾,

Стантон заметил, что если мы выразим изменение средних скоростей в гладкой трубе в зависимости от расстояния от оси трубы, то мы получим соотношение:

$$U_{\max} - U = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot f\left(\frac{y}{r}\right), \quad (3)$$

где τ_0 есть касательное напряжение у самой стенки трубы, r — радиус трубы, а y — расстояние от оси трубы. Этому соотношению, выведенному из принципа подобия, можно удовлетворить, введя средний коэффициент μ_t турбулентного трения, пропорциональный количеству $U_{\max} \cdot r$ и полагая ²⁾:

$$\tau = \text{const.} \cdot U_{\max} \cdot r \cdot \frac{dU}{dy}. \quad (4)$$

¹⁾ Boussinesq. Mém. prés. par. div. savants. Paris 1877; T. E. Stanton, Proc. Roy. Soc., т. 85, стр. 366, 1911.

²⁾ Было бы более правильным положить.

$$\mu_t = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot r,$$

но так как, по крайней мере при больших числах Рейнольдса, отношение $\frac{\tau_0}{\rho}$ почти пропорционально $U_{\max}^2$, то будет приближенно верно и написанное выше выражение.

Треер ¹⁾ сделал попытку, исходя из некоторых дополнительных эмпирических предпосылок, привести это соотношение на имеющемся в настоящее время материале наблюдений.

Тем не менее ясно, что подобное выражение основано на слишком далеко идущем осреднении и не может привести к выводу истинного распределения скоростей. Соотношение Стантона следует рассматривать как приблизительное выражение закона подобия в среднем. Для объяснения же механизма турбулентного движения — как мне думается — следует уточнить несколько закон подобия.

3. Закон подобия для скоростей пульсации.

Мы сделаем попытку проверить следующее предположение: допустим, что осредненный поток является прямолинейным в направлении оси x и что пульсации представляют собою такие возмущения поля скоростей в направлении оси y , которые увлекаются, по крайней мере в течение определенного промежутка времени, основным потоком в виде установившегося поля добавочных скоростей. Мы исследуем, при каких условиях эти возмущения в различных точках могут быть подобны между собою, так что скорости около двух каких-либо точек, имеющих различные значения координаты y , отличались бы между собою только постоянным множителем подобия скоростей пульсации и различным масштабом меры длины. Мы допускаем, таким образом, подобие пульсаций независимо от той точки в потоке, в окрестности которой эти пульсации рассматриваются.

Отнесем движение к подвижной системе координат, движущейся со скоростью, равной средней скорости потока в рассматриваемой точке, через которую и проводим ось $y=0$ этой системы. Разлагая среднюю скорость U в ряд по степеням y , мы получим:

$$U = U_0' y + U_0'' \frac{y^2}{2} + \dots$$

Функция тока $\Psi(x, y)$ в окрестности рассматриваемой точки имеет выражение:

$$\Psi(x, y) = U_0' \frac{y^2}{2} + U_0'' \frac{y^3}{6} + \dots + \psi(x, y), \quad (5)$$

где $\psi(x, y)$ есть функция тока скоростей пульсации. Полагая

$$\left. \begin{aligned} x &= l\xi, \\ y &= l\eta, \\ \Psi &= A \cdot f(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

мы ставим условие, чтобы от выбора рассматриваемой точки зависели только множители l и A , функция же $f(\xi, \eta)$ оставалась от него независимой.

¹⁾ M. F. Treer, Phys. Zeitschr., т. 30, стр. 542, 1929.

Гидродинамические уравнения установившегося плоского движения могут быть сведены к одному так называемому уравнению переноса вихрей:

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi = \nu \Delta \Delta \Psi, \quad (7)$$

где

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

есть вихревое напряжение, а ν — кинематическая вязкость. Мы пренебрежем сначала силами вязкости и ограничимся при исследовании поля скоростей пульсации в окрестности оси $y=0$, согласно сделанному предположению, только членами первого порядка.

Мы получим, таким образом:

$$\left(U_0' y + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} U_0'' - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi = 0. \quad (8)$$

Подставляя выражения (6), получим, далее:

$$U_0' l \eta \frac{A}{l^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta f - \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi} U_0'' + \frac{A^2}{l^3} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta f - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta f \right) = 0. \quad (9)$$

В этом равенстве символ Δ относится уже к переменным ξ и η . Написанное равенство будет тождественно удовлетворяться при всяких значениях A и l или же соответственно U_0' и U_0'' при соблюдении соотношений:

$$\left. \begin{aligned} U_0' \cdot l &\sim \frac{A}{l}, \\ U_0'' &\sim \frac{A}{l^3}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} l &\sim \frac{U_0'}{U_0''} \\ A &\sim \frac{U_0'^3}{U_0''^2} \sim l^3 U_0'^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Чтобы выяснить смысл полученных соотношений, вычислим значение касательного напряжения τ . Получим:

$$\tau = -\rho u \cdot v = \rho \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = \rho \frac{A^2}{l^3} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad (12)$$

или иначе:

$$\tau \sim \rho l^2 U_0'^2. \quad (13)$$

Следовательно, условия подобия могут быть сведены к двум следующим положениям:

а) Поле пульсаций характеризуется определенным масштабом длины, который определяется условием:

$$l \sim \frac{U_0'}{U_0''} \sim \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}.$$

б) Касательное напряжение пропорционально квадрату характеристической длины l , плотности ρ и квадрату градиента скорости $\frac{\partial U}{\partial y}$.

Длина l определяется только с точностью до постоянного множителя, поэтому мы можем принять:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (14)$$

и

$$l = k \frac{U'}{U''},$$

где постоянный безразмерный числовой множитель k зависит от данного вида турбулентного движения, т. е. от решения соответствующего уравнения для функции $f(\xi, \eta)$. Это единственная постоянная, входящая в развиваемую нами теорию турбулентности.

4. Теория Прандтля длины пути перемешивания.

Полученные результаты прежде всего могут служить подтверждением рабочей гипотезы, выдвинутой Прандтлем для вывода законов турбулентного движения. Исходя из выражения

$$\tau = -\rho u \cdot v$$

для касательного напряжения, Прандтль полагает сначала, аналогично молекулярной теории, что $u = l \frac{dU}{dy}$, и называет длину l , введенную им, длиной пути перемешивания, соответствующей длине свободного пробега молекул. Если мы будем исходить из того представления, что частица жидкости пробегает при пульсации длину l пути в направлении, перпендикулярном к средней скорости без передачи количества движения, то мы, действительно, найдем для количества движения, переносимого частицею в тот слой потока, куда она переместится после пробега пути l , значение, равное $\rho l \frac{dU}{dy}$.

Составляющую v скорости пульсации Прандтль также положил пропорциональной произведению длины l пути перемешивания и абсолютного значения $\left[\frac{dU}{dy} \right]$, градиента средней скорости, так что в согласии с равенством (13) мы получаем выражение:

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2.$$

С точки зрения теории пульсаций эта гипотеза равносильна предположению, что корреляция между составляющими u и v пульсации не

зависит от рассматриваемой точки в потоке. Эта предпосылка соответствует сделанному нами предположению о подобии, а потому и неудивительно, что мы находим подтверждение гипотезы Прандтля.

Наше предположение дает, однако, больше этого и приводит к соотношению, определяющему длину пути перемешивания, которое в первом приближении приводит к выражению в виде отношения двух первых производных средней скорости. Мы увидим, к каким следствиям приводит это выражение при определении распределения средних скоростей в турбулентном движении.

5. Поток между параллельными стенками.

Предположим, что основной поток в направлении оси x ограничен двумя параллельными стенками $y = \pm h$ (фиг. 83). Если касательное напряжение вблизи самой стенки равно τ_0 , то на расстоянии y от середины канала оно будет

$$\tau = \tau_0 \frac{y}{h}. \quad (16)$$

Для распределения скоростей мы получим уравнение:

$$\tau_0 \frac{y}{h} = k^2 \rho \frac{U'^4}{U'^2}, \quad (17)$$

или иначе

$$\frac{U''}{U'^2} = \frac{k \sqrt{h}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

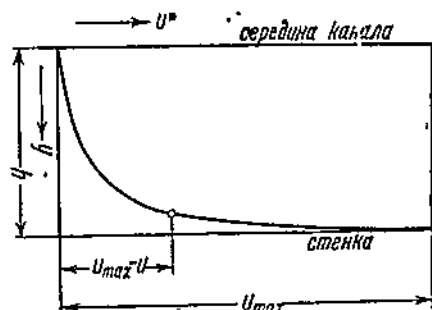
Интегрируя, мы получим:

$$-\frac{1}{U'} = 2k \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \sqrt{y} + \text{const.}$$

или, вводя постоянное количество a :

$$U' = \frac{1}{2k} \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{a - \sqrt{y}}. \quad (18)$$

Постоянная a должна быть определена условиями у стенок. При больших числах Рейнольдса производная $\frac{dU}{dy}$ принимает вблизи стенок чрезвычайно большие значения и должна по своему значению приближаться к $\frac{\tau_0}{\mu}$. Последнее количество при малых значениях μ очень велико по сравнению со значениями $\frac{dU}{dy}$ в некотором отдалении от стенок. Мы можем с достаточной степенью точности принять значение y , при



Фиг. 83.

котором $\frac{dU}{dy}$ становится бесконечным, равным h . Мы получаем в таком случае:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h-y}}. \quad (19)$$

Распределение скоростей получается из этого равенства интегрированием. Наибольшее значение скорости при $y=0$ мы обозначим через $U_{\max}$. Мы имеем тогда:

$$U_{\max} - U = \int_0^y \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{2kh} \cdot \frac{dy}{1 - \sqrt{\frac{y}{h}}},$$

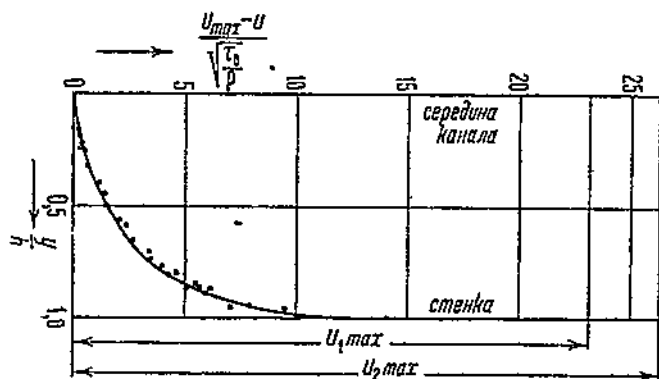
или

$$U_{\max} - U = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right) + \sqrt{\frac{y}{h}} \right], \quad (20)$$

откуда

$$U = U_{\max} + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right) + \sqrt{\frac{y}{h}} \right]. \quad (20a)$$

Эта формула была мною проверена по двум сериям измерения Дёнка и Никурдзе ¹⁾.



Фиг. 84.

Значения количества $\frac{\tau_0}{\rho}$ были определены указанными исследователями, так что оставалось определить значение только одной постоянной k . Значением, лучше всего согласующимся с распределением скоростей, является $k=0,36$. Из закона же сопротивления, как мы покажем ниже, получается значение $k=0,38$.

На фиг. 84 представлены результаты сравнения формулы с опытными данными, которые надо признать вполне удовлетворительными.

¹⁾ J. Nikuradse, Forschungsarbeiten VDI, Heft 289, 1929; F. Dönch, Forschungsarbeiten VDI, Heft 282, 1926.

Небольшое систематическое отклонение, быть может, и замечается, однако оно не удивительно, если обратить внимание на довольно грубое приближение, получаемое из принципа подобия, и на то, что действие вязкости совсем не было принято в расчет.

Сделаем еще одно замечание о ходе характеристической длины l , так называемой длины пути перемешивания. Мы получаем простым вычислением:

$$l = k \frac{U'}{U''} = 2kh \sqrt{\frac{y}{h}} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}}\right). \quad (21)$$

Полагая $y = h - y_1$, мы получим для точек вблизи стенки:

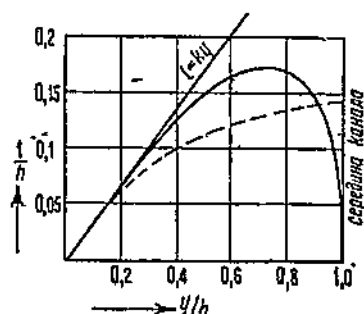
$$l = 2kh \left\{ \sqrt{1 - \frac{y_1}{h}} + \frac{y_1}{h} - 1 \right\} = ky_1 \left\{ 1 - \frac{y_1}{4h} - \frac{y_1^2}{8h^2} - \dots \right\}. \quad (22)$$

Изменение количества

$$\frac{l}{h} = f\left(\frac{y_1}{h}\right)$$

представлено на фиг. 85. Этот ход кривой не совпадает с теми данными, которые были получены Дёнхом и Никурадзе из опытов путем пересчета их по формуле:

$$l = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}{\frac{dU}{dy}}.$$



Фиг. 85.

Кривая, получаемая этим путем, нанесена на фиг. 85 пунктиром. По утверждению указанных авторов длина l принимает в середине канала некоторое постоянное значение, тогда как из наших вычислений следует, что она для $y_1 = \frac{3}{4}h$ принимает наибольшее значение и убывает далее до значения, равного нулю в середине канала при $y_1 = h$. Нельзя не сделать при этом двух замечаний. Во-первых, определение значения l при помощи дифференцирования функции распределения скоростей, заданной только в отдельных точках, очень затруднительно и ненадежно. Во-вторых, Дёнх и Никурадзе определяют длину l пути перемешивания в середине канала по обобщенной формуле, законность которой не стоит вне сомнения. Далее, при расчете принимается, что $\frac{dU}{dy} = 0$ при $y = 0$. Кривая распределения скоростей сглаживается, таким образом, у своей вершины. Наша формула дает при $y = 0$ для кривой точку излома, что естественно свидетельствует о недостаточной степени точности расчетной формулы. Однако, что всего более удивительно, это то, что несглаженная кривая скоростей тоже имеет в этой точке излом конечной величины. Я думаю, что данных наблюдений еще недостаточно для безошибочного определения изменения длины l в середине канала.

6. Закон сопротивления.

При очень больших значениях градиента $\frac{dU}{dy}$ скорости, как, например, вблизи стенок, изложенная нами теория подобия уже не имеет места, так как здесь нельзя пренебрегать действием вязкости. Вопрос сводится к тому, можно ли пренебрегать количеством $\mu \cdot \frac{dU}{dy}$ по сравнению с кинематическим касательным напряжением — $\rho u \cdot v$. Опыт показывает, что вблизи стенок существует нечто подобное ламинарному пограничному слою. Для того чтобы получить закон сопротивления, т. е. для определения значений $U_{\max}$, соответствующих данным значениям количества $\frac{\tau_0}{\rho}$, необходимо сделать сопряжение кривой распределения скоростей с этим ламинарным слоем.

Пока мы еще не имеем более точной теории поля пульсационных скоростей, можно испробовать два пути для теоретического вывода, которые оба приводят к тем же вполне приемлемым заключениям.

а) Мы можем предположить, что характеристическая длина l , убывая, принимает в пределе значение, равное не нулю, а некоторой длине, пропорциональной толщине ламинарного слоя.

Допустим, что это значение действительно принимается переменной длиной l у границы ламинарного слоя и затем сделаем сопряжение ламинарного слоя с областью турбулентного движения. Для того чтобы дать дальнейшее развитие этой точке зрения, мы будем исходить из воззрений Г. Тейлора. Тейлор давно уже, основываясь на соображениях подобия, высказал мысль, что пространственное распределение вихрей в турбулентном потоке у стенки (т. е. характеристическая длина) зависит только от касательного напряжения τ_0 и должно быть пропорционально количеству:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Принимая для этого предельного значения длины l выражение:

$$l = \alpha \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

мы получим и соответствующие выражения для u у границы ламинарного слоя

$$u = \frac{1}{k} \cdot \alpha \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

а для разности U^* скоростей в середине канала и у границы ламинарного слоя

$$U^* = U_{\max} - U(y) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \frac{h \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\frac{\alpha}{k}} + \text{const.} \right]. \quad (23)$$

Мы должны еще определить значение разности U^{**} скоростей на обеих границах ламинарного слоя, т. е. у стенки и на свободной его границе. Так как, с одной стороны, толщина δ ламинарного слоя пропорциональна

$$\delta \sim \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}},$$

а с другой стороны, — можно положить

$$\tau_0 = \mu \frac{U^{**}}{\delta},$$

то мы получим:

$$U^{**} \sim \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Таким образом для разности скоростей в середине канала и у стенки мы получим выражение:

$$U_{\max} = U^* + U^{**} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \frac{h \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\nu} + A \right], \quad (24)$$

которое и дает искомое соотношение. (Постоянные A и k безразмерны и не зависят от числа Рейнольдса.)

б) К этому же выводу мы придем, если примем, что не все касательное напряжение τ в целом пропорционально количеству

$$\rho l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2,$$

а только та его часть

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy},$$

которая зависит от турбулентности.

В таком случае можно свободно предположить, что длина l убывает до нуля, и вывести уравнение для распределения скоростей вблизи стенки:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} = k^2 y^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2. \quad (25)$$

Таким путем мы снова приходим к выражению, которое еще раньше было дано Вада ¹⁾. Его очень изящная статья, к сожалению, не обратила на себя того внимания, которое она заслуживает.

К сожалению, Вада предположил, что выведенное им выражение применимо во всем канале и получил поэтому слишком сложные формулы. В частности, результаты, которые излагаются в настоящей работе, уже заключаются в неявной форме в теории Вада.

¹⁾ Journal of Japanese Soc. Naval Arch., т. 41, стр. 108, 1927.

Для вывода закона сопротивления введем незначительное видоизменение в принятые выражения для параметров, от которых зависит сопротивление. А именно, положим:

$$\left. \begin{aligned} R_m &= \frac{U_{\max} \cdot h}{\nu}, \\ \Psi &= \frac{\tau_0}{\rho \frac{U_{\max}^2}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Эти параметры отличаются от обыкновенно принятых — числа Рейнольдса и коэффициента сопротивления — только выбором наибольшей скорости $U_{\max}$ вместо обычной средней в качестве стандартной скорости.

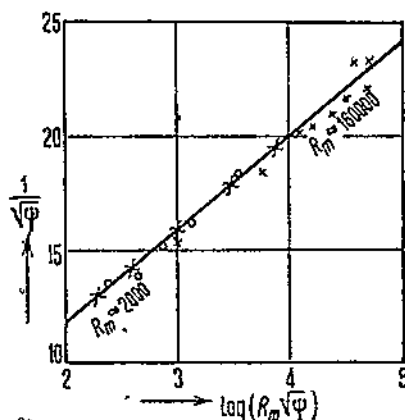
Тогда равенство (24) дает нам соотношение:

$$\frac{k \sqrt{2}}{\sqrt{\Psi}} = \ln(R_m \sqrt{\Psi}) + A - \frac{1}{2} \ln 2 \quad (27)$$

или

$$\frac{k \sqrt{2}}{\sqrt{\Psi}} = \ln(R_m \sqrt{\Psi}) + C. \quad (28)$$

Мы вывели зависимость между $U_{\max}$ и Ψ для случая плоского потока. Можно, однако, показать, что эта зависимость сохраняется и для движения в круглой трубе, причем значение постоянной k остается



Фиг. 86.

неизменным и меняется только значение постоянной C . Действительно, для вывода этого соотношения мы пользуемся только тем результатом, что длина l , пути перемешивания равна расстоянию от стенки, умноженному на k , и оценкою толщины пограничного ламинарного слоя. Можно принять, что эти выводы сохраняют силу и для круглой трубы, причем все изменение скажется только на значении постоянной C .

На фиг. 86 сведены для значений $\frac{1}{\sqrt{\Psi}}$ и $\lg(R_m \sqrt{\Psi})$ данные из самых различных источников и материалов опытного исследования ($R_m = \frac{U_{\max} \cdot r}{\nu}$, причем r есть радиус трубы)¹⁾.

Как видно, в широкой области изменения числа Рейнольдса от $R_m = 2000$ до $R_m = 1600000$ между $\frac{1}{\sqrt{\Psi}}$ и $\lg(R_m \sqrt{\Psi})$ наблюдается

¹⁾ Данными для очень больших чисел Рейнольдса я обязан любезности Н. Куралде, сообщившего мне свои еще неопубликованные результаты измерений.

очень точная линейная зависимость. Значения обеих постоянных получаются при этом следующие:

$$\left. \begin{aligned} k &= 0,38, \\ C &= 1,83. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Первая постоянная, как мы уже упомянули, имеет, по всей вероятности, универсальное значение, тогда как значение второй относится исключительно к круглым трубам.

7. Так называемые степенные законы.

Как известно, закон сопротивления хорошо воспроизводится в довольно широких пределах изменения числа Рейнольдса выражением вида:

$$\Psi = \frac{\text{const.}}{R^m}. \quad (30)$$

Исходя из этого, можно, следуя хорошо известному выводу Прандтля, показать, что зависимость изменения скорости от расстояния от стенки может быть представлена следующей формулой:

$$U = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot y \right)^{\frac{m}{2-m}}. \quad (31)$$

Область применимости такого степенного закона не доходит до стенки благодаря существованию ламинарного пограничного слоя. Замечательно то, что в другом направлении эта область доходит почти до середины канала. При увеличении числа Рейнольдса показатель $n = \frac{m}{2-m}$ убывает (для области, которая была до сих пор исследована, — от значения $1/7$ приблизительно до $1/10$).

Мне думается, что эта загадка имеет простое объяснение. Формулы, полученные нами в настоящей работе, могут быть написаны с небольшим изменением обозначений в следующем виде:

Для закона сопротивления:

$$\frac{1}{\sqrt{\Psi}} = a + b \ln(R\sqrt{\Psi}). \quad (32)$$

Для распределения скоростей:

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = a' + b' \ln \left(y \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right). \quad (33)$$

Равенства (30) и (31) мы можем переписать, полагая $n = \frac{m}{2-m}$ в следующем виде:

Для закона сопротивления:

$$\frac{1}{\sqrt{\Psi}} = \text{const.} \cdot (R\sqrt{\Psi})^n$$

Для распределения скоростей:

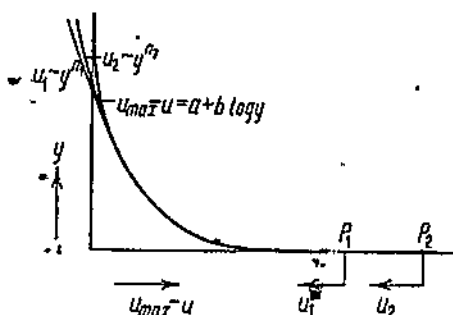
$$\frac{U}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \text{const.} \left(y \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right)^n.$$

Отсюда ясно, что дело идет о приближенном представлении (хорошо известном в элементарной математике) логарифмической кривой при помощи параболы высшего порядка. Можно следующим образом показать при этом, что показатель n должен будет убывать с возрастанием числа Рейнольдса.

Сравним различные состояния движений в том же канале при сохранении того же значения напряжения τ_0 , но с различными значениями вязкости ν . Предположим, например, что ν будет непрерывно уменьшаться. Мы естественно будем иметь то же самое распределение скоростей в потоке до

того расстояния, при котором уже сказывается влияние вязкости. В этой области образуется некоторый слой, подобный ламинарному. Эта точка разделения кривых распределения скоростей перемещается с изменением коэффициента ν вязкости, т. е. с увеличением числа Рейнольдса. Общая дуга кривых распределения

$$y = f(U_{\max} - U),$$



Фиг. 87.

за исключением области в ближайшей окрестности середины канала, может быть представлена показательной кривой (фиг. 87). Мы должны теперь приблизительно изобразить эту кривую рядом последовательных кривых

$$y = U^{\frac{1}{n}},$$

касательных к оси $y = 0$ и с точкою касания, все более отодвигающуюся вправо. Очевидно, что показатель степени $\frac{1}{n}$ должен будет возрастать, т. е. показатель n будет уменьшаться.

8. Шероховатость.

Большее значение, чем только что сделанное, имеет, как нам кажется, следующее заключение относительно сопротивления в очень шероховатых трубах. Часто выдвигалось положение, что для явлений, наблюдаемых у шероховатых стенок, решающее значение имеет отношение толщины пограничного ламинарного слоя к средней высоте неровностей стенки, обуславливающих ее шероховатость. Мы будем говорить, что шероховатость стенки большая, если эти неровности очень велики по сравнению с толщиной ламинарного слоя. В этом случае мы можем

предполагать, что характеристическая длина l имеет наименьшее значение, которое уже определяется не толщиной ламинарного слоя, но размерами элементов шероховатости. Обозначим среднюю высоту неровностей шероховатой стенки через ε (характеристическая длина шероховатости). Мы можем принять наименьшее значение длины l пропорциональным высоте ε и написать соотношение между скоростью $U_{\max}$ в середине канала и напряжением τ_0 у стенки в следующем виде:

$$U_{\max} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(\ln \frac{h}{\varepsilon} + \text{const.} \right) \quad (34)$$

и для коэффициента сопротивления принять выражение:

$$\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}} = \ln \frac{h}{\varepsilon} + \text{const.} \quad (35)$$

Иными словами, сопротивление следует квадратическому закону с коэффициентом сопротивления, который, согласно равенству (35), зависит от относительной шероховатости. Эту формулу легко можно проверить опытным путем, изменяя расстояния $2h$ между стенками при неизменном значении признака шероховатости (τ е. ε). Этот вопрос мы откладываем, однако, до следующей работы.

9. Заключение.

Мы сделали попытку вывести распределение скоростей в турбулентном прямолинейном потоке и соответствующий ему закон сопротивления, исходя из чисто гидродинамических оснований и пользуясь соображениями подобия. Мы получили этим путем подтверждение чисто рабочей гипотезы Прандтля о длине пути перемешивания и получили, далее, соотношение, позволяющее определить ход изменения этой длины в различных точках потока. После этого распределение скоростей в потоке может быть получено прямым вычислением. Из этого распределения вытекает и закон сопротивления, исключительно хорошо совпадающий с данными опыта. Следует при этом отметить, что ход сопротивления и следствия, выведенные в § 6—8, остаются в силе, независимо от закона подобия, если только принять выражение для длины пути перемешивания (11), приведенное выше.

Хотя определение характеристической для пульсаций длины l могло быть выведено при помощи гипотезы о подобии, однако следовало бы ему дать лучшее обоснование. Следовало бы, в частности, доказать существование решения уравнений движения для относительно узкой области перемещений пульсации. Такое решение должно было бы определить значение постоянной k . Остается еще вопрос, применимо ли полученное выражение к другим более сложным случаям движения. Мы хотели бы подчеркнуть, что это далеко не очевидно само по себе. Выражение, полученное нами, равносильно утверждению, что корреляция между составляющими скоростей пульсации остается также во всем поле движения и, таким образом, остается независимой от стенки — поскольку, разумеется, не оказывают действия силы вязкости. Можно

было бы скорее допустить, что имеет место противное и что скорости u уменьшаются с приближением к стенке скорее, чем скорости u . Однако, повидимому, дело обстоит не так, так как в таком случае было бы невозможно определить состояние движения значением одной только длины и средним значением пульсаций.

Как бы то ни было, уравнение для возмущений в движении жидкости, вероятно, может служить основанием для рациональной теории турбулентности и для теоретического разрешения ряда проблем, связанных с турбулентностью; о поверхностном сопротивлении трения обтекаемых твердых тел (вопрос турбулентного пограничного слоя), об устойчивости воздушного потока в атмосфере, о движении потока в изогнутых трубах и в трубах расширяющихся и сужающихся, о распространении струи под влиянием трения (о так называемой свободной турбулентности) и т. д. В направлении решения этих задач было много сделано трудами Прандтля, Бетца, Тейлора, Ричардсона и других на основании полуэмпирических, полутеоретических предположений. Однако самая суть явлений, которая могла бы объяснить все его особенности, остается и до сих пор темной и невыясненной. Далее, возможно, что турбулентное движение должно быть объяснено с точки зрения пульсаций. Должно быть выяснено распределение возмущений по частоте их появления и корреляция между ними. Может быть для этого следует прибегнуть к теории вероятностей, как то пытались сделать И. Бюргерс и автор во многих работах.

Повидимому, статистические теории ставились до настоящего времени на слишком широких и общих основаниях. Следовало бы при статистическом расчете ограничиться рассмотрением только таких возмущений, которые удовлетворяют уравнению возмущенного движения. Мы думаем, что самую гипотезу подобия, которую мы приняли, можно мыслить в качестве статистической гипотезы о распределении пульсаций по интенсивности и направлению во всем поле движения.

И. БЮРГЕРС.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ¹⁾.

Часть первая.

Введение.

Изучение особенностей турбулентного потока жидкости в цилиндрической трубе или между параллельными стенками представляет одну из наиболее интересных проблем гидродинамики. Многие авторы высказывали мнение, что эту задачу следует решать методами статистики²⁾. Однако по сравнению с кинетической теорией газов гидродинамическая проблема представляет при исследовании статистическими методами существенное затруднение, которое вытекает из того, что рассматриваемая система не консервативна. Под влиянием вязкости энергии движения в потоке непрерывно рассеивается. Таким образом для возможности существования стационарного состояния осредненных скоростей потока необходимо предположить работу внешних сил. Другую трудностью является то обстоятельство, что без дальнейшего исследования не ясно, как произвести выбор объектов статистического учета для самого определения вероятностей изучаемых состояний движения.

Мы делаем в настоящей статье попытку несколько подробнее исследовать те методы, которые можно было бы применить при разрешении этой задачи. Для того чтобы иметь возможность преодолеть вторую из указанных трудностей, мы ограничились рассмотрением двумерного потока, для которого состояние движения может быть характеризовано функцией тока ψ .

До составления общих уравнений мы предварительно изложим соображения, резюмирующие определение самого характера турбулентного движения, и напомним некоторые положения, которые были высказаны Рейнольдсом еще в 1895 г.³⁾. Эти соображения позволят в то же время прийти к некоторым выводам и относительно первой упомянутой выше трудности вопроса.

¹⁾ I. M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion, Akademie Wetenschappen te Amsterdam Proceedings, т. XXXII, 1929.

²⁾ T. h. v. Kármán, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., т. 1, стр. 250, 1921; Proc. I. Intern. Congress for Appl. Mech., стр. 105, Delft 1924. R. v. Mises, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., т. 1, стр. 428, 1921; I. Burgers, Akademie Wetensch. te Amsterdam, т. 26, стр. 582, 1923.

³⁾ O. Reynolds, Scientific Papers, т. II, стр. 535.

Напомним, что при изучении турбулентного движения жидкости в трубе или между параллельными стенками обыкновенно разделяют действительные скорости в потоке на скорости „осредненные“ („осредненный“ поток) и на непрерывно пульсирующие „относительные“ скорости. В наиболее важном случае, изучением которого мы и ограничимся, можно рассматривать осредненные скорости не зависящими от времени. Из уравнений, выведенных Рейнольдсом и Лоренцем, вытекает, что относительное движение оказывает влияние на „осредненный“ поток, так как в уравнения движения „осредненного“ потока входят средние значения квадратов и произведений „относительных“ скоростей¹⁾. Основной задачей теории турбулентного движения является вычисление этих средних значений, которые при стационарном потоке от времени не зависят.

Не представляется невероятным, что относительное движение разлагается в „спектр“ более или менее регулярных периодических движений: „фундаментальных колебаний“, амплитуды и фазы которых непрерывно изменяются. Быть может возможно характеризовать каждое подобное колебание некоторой линейной мерой — „длиной волны“, диаметром соответствующего вихря или другим аналогичным количеством. Возможно, что спектр состоит из вибраций с различной „длиной волны“ от малых до больших. Максимальное значение длины волны зависит от диаметра трубы или от расстояния между стенками. С другой стороны, некоторый минимум длины волны будет определяться тем обстоятельством, что колебания с очень малой длиной волны будут скоро затухать благодаря действию сил внутреннего трения. Можно ожидать, что отношение этой наименьшей длины волны к диаметру трубы или канала будет функцией характеристического числа Рейнольдса для потока. Далее, можно предполагать, что это отношение длины наименьшей волны к диаметру будет убывать с возрастанием числа Рейнольдса. С другой стороны, когда число Рейнольдса настолько мало, что минимальный предел длины волны становится больше максимальной длины волны, то относительное движение уже становится вовсе невозможным, поток тогда делается правильным, так называемым ламинарным потоком.

В специальных случаях, например, когда стенки трубы или канала имеют шероховатость с определенным периодом, можно ожидать, что в спектре господствующую роль будут играть определенные колебания. Однако при гладких стенках (а этот случай мы и будем в дальнейшем рассматривать) средняя амплитуда колебаний будет изменяться в пределах спектра, вероятно, достаточно плавно и будет зависеть только от числа R Рейнольдса, подобно тому, как распределение энергии черного излучения зависит от температуры.

Имеет смысл ввести понятие „средней длины волны“ λ_m относительного движения. Если l есть поперечный размер потока, то отношение $\frac{\lambda_m}{l}$ будет функцией R , непрерывно убывающей при возраста-

¹⁾ Н. Lorentz, Abhandlungen, über theoretische Physik, т. I, стр. 43; О. Reynolds, Scientific Papers, т. II, стр. 535.

нии R . Если V есть осредненная скорость потока, то отношение $\frac{\lambda_m}{V}$ может быть принято в качестве меры среднего периода пульсаций относительного движения.

Возвращаясь снова к вопросу о рассеянии энергии относительного движения, мы можем заметить, что количество рассеянной энергии за время одного периода $\frac{\lambda_m}{V}$ очень мало по сравнению с полной энергией осредненного движения. Отношение этих количеств, вероятно, постоянно убывает при увеличении R . Таким образом есть некоторая вероятность того, что в первом приближении можно рассматривать относительное движение как движение идеальной жидкости и движение консервативной системы. Это соображение оправдывает в некоторой степени возможность применения принципов статистической механики. Однако вместо заданного количества полной энергии системы в качестве условия (условия первостепенной важности в статистической механике) мы должны будем обратиться к так называемому условию рассеяния энергии, согласно которому относительное движение получает от осредненного движения каждую секунду такое количество энергии, которое теряется и рассеивается благодаря действию внутреннего трения.

2. Характеристика состояний движения; гипотеза вероятности состояний.

Рассмотрим двухмерный поток между двумя плоскими стенками на расстоянии l , из которых одна движется по отношению к другой со скоростью V в своей плоскости. Число Рейнольдса для потока равно $R = \frac{\rho V l}{\mu}$ (ρ есть плотность, μ — вязкость). Силу сопротивления у стенок обозначим через S . Введем безразмерные количества, разделяя все расстояния на l , скорости на V и т. д. Далее, мы положим $C = \frac{S}{\rho V^2}$. Обозначим затем осредненную скорость потока через U (U есть функция y , возрастающая от нуля при $y=0$ до единицы при $y=1$); а составляющие скоростей относительного движения вдоль координатных осей через соответственно u и v . Штрихом сверху будем отмечать их осредненные значения. Мы получим уравнение осредненного движения в виде:

$$\frac{1}{R} \frac{dU}{dy} = C + \overline{uv}. \quad (1)$$

Условие рассеяния имеет вид:

$$-\int \int dx dy \overline{uv} \frac{dU}{dy} = \frac{1}{R} \int \int dx dy \zeta^2, \quad (2)$$

где ζ есть удвоенное значение вихря ¹⁾ в относительном движении.

¹⁾ При переводе мы придерживаемся принятой в научной литературе на русском языке терминологии. „Вихрь“ определяется равным:

$$\frac{1}{2} \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{Прим. перев.}$$

Интегрирование по y производится от $y=0$ до $y=1$, а по x — вдоль длины L , большей по сравнению с расстоянием l между стенками ¹⁾.

Положим для сокращения:

$$-u\bar{v} = t, \quad -u\bar{v} = \bar{t}, \quad \zeta^2 = z, \quad \bar{\zeta}^2 = \bar{z}. \quad (3)$$

Величина $\bar{t}$ является функцией y . Она везде, кроме стенок, положительна, на стенках же равна нулю. В большей части поля ее значение очень мало отличается от постоянной C . Интегрируя равенство (1), мы получим:

$$C = \int_0^1 dy \bar{t} + R^{-1}, \quad (4)$$

что можно переписать в виде:

$$C = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx \int_0^1 dy \bar{t} + R^{-1}. \quad (4a)$$

Из опытных данных можно заключить, что C велико по сравнению с R^{-1} .

Исключая из равенств (1), (2) и (4) $\frac{dU}{dy}$ и C , мы получим уравнение, которое содержит одни только составляющие относительного движения. Оно дает нам тот вид условия рассеяния, которым мы в дальнейшем и будем пользоваться ²⁾:

$$F = \int \int dx dy \cdot (\bar{t})^2 - \frac{1}{L} \left(\int \int dx dy \cdot \bar{t} \right)^2 - \frac{1}{R} \int \int dx dy \cdot t + \\ + \frac{1}{R^2} \int \int dx dy \cdot \bar{z} = 0. \quad (5)$$

Введем функцию тока ψ для относительного движения, которая связана с u , v и ζ соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\Delta \psi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Чтобы перейти теперь к статистической постановке проблемы, мы сведем поле непрерывных скоростей, зависящих от x и y , к полю скоростей, изменяющихся скачками. Проводим сеть прямых, параллельных осям

¹⁾ По некоторым соображениям удобнее предположить канал замкнутым (например, можно представить пространство, заключенное между двумя концентрическими круглыми цилиндрами, один из которых имеет вращательное движение по отношению к другому). В таком случае L есть полная длина канала. Во избежание затруднений, которые могут возникнуть с появлением центробежных сил, мы можем предположить радиус кривизны стенок канала очень большими по сравнению с размерами сечения канала.

²⁾ J. Burgers, См. уравнение (14) в статье, цитированной на стр. 287, сноска 2.

координат на расстоянии ε друг от друга. Расстояние ε между прямыми мы предполагаем очень малым даже по сравнению с „наименьшей длиной волны“ в относительном движении. Обозначим точки пересечения прямых сети двумя индексами: k_1 — для строк, параллельных оси Ox , и k_2 — для столбцов, параллельных оси Oy . Для упрощения формул мы введем комплексное число $k = k_1 + ik_2$, так что, например, $k + i$ означает ближайшую точку, лежащую над точкою k , а $k - 1$ — ближайшую точку, лежащую налево от точки k в той же строке и т. д. Общее число точек на полосе длиной L обозначим через N .

Рассмотрим теперь только те N значений ψ_k функции тока ψ , которые она принимает в данный момент времени в узловых точках сети. В таком случае выражения (6) могут быть заменены следующими:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2\varepsilon} (\psi_{k+i} - \psi_{k-i}), & v_k &= -\frac{1}{2\varepsilon} (\psi_{k+1} - \psi_{k-1}), \\ \zeta_k &= \frac{1}{\varepsilon^2} (4\psi_k - \psi_{k+1} - \psi_{k-1} - \psi_{k+i} - \psi_{k-i}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Затем рассмотрим N -мерное пространство с координатами:

$$\xi_1 = \psi_1, \quad \xi_2 = \psi_2, \quad \dots, \quad \xi_N = \psi_N.$$

Точка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ представляет состояние относительного движения в данный момент. При изменении с течением времени состояний относительного движения точка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ будет двигаться в N -мерном пространстве ξ . Мы можем изобразить различные состояния относительного движения в равноотстоящие моменты времени рядом точек пространства ξ , число которых равно, например, M . Эти точки будут сгущаться в частях пространства ξ , представляющих те состояния движения, которые наиболее часто случаются, и, наоборот, плотность этих точек будет меньше в тех частях, которые представляют более редкие состояния движения. Очевидно, что при достаточно большом числе M можно, пользуясь представлением состояний относительного движения в пространстве ξ , вычислить средние по времени значения и тех количеств, которые зависят от функции тока ψ .

Выражаясь яснее, мы подразделяем пространство ξ на отдельные ячейки N измерений с объемом $d\Omega$, малым сравнительно с теми значениями ξ или ψ , с которыми мы имеем дело, но, однако, настолько большим, чтобы в нем содержалось множество изображающих движение точек (это достигается выбором достаточно большого числа M). Число точек в ячейках мы обозначим через n_1, n_2, n_3 и т. д. Мы положим, далее,

$$n = \sum n_i = fM d\Omega, \quad (8)$$

так что

$$\sum n = 1 \quad \text{или} \quad \int f d\Omega = 1 \quad (9)$$

(смотря по обстоятельствам мы можем рассматривать суммы или интегралы).

Если X есть функция значений ψ_k (или ξ_k), то ее осредненное значение $\bar{X}$ мы можем выразить следующим образом:

$$\bar{X} = \sum v_k X = \int f X d\Omega. \quad (10)$$

Мы предположим теперь, что можно определить распределение точек по ячейкам, т. е. вычислить количества v или функцию f , исходя из предположки, что это распределение является наиболее вероятным из тех, которые удовлетворяют некоторым общим условиям, а именно условию, что вдоль стенок значения u и v равны нулю и что затем удовлетворяется условие (5).

Условие у стенок

$$u = v = 0$$

выражается при помощи функции тока ψ равенствами:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

(ψ должно с необходимостью иметь одно и то же значение у обеих стенок, так как осредненное значение относительных скоростей равно нулю). Мы удовлетворим этим условиям, если примем значения ψ равными нулю как вдоль самих стенок, так и для точек нашей сети в первых ближайших рядах к границе области движения. Это условие равносильно утверждению, что в пространстве ξ известное число координат имеет постоянное значение, равное нулю.

Условие рассеяния может быть выражено следующим образом. Выражая значения ψ посредством ξ , мы получаем:

$$t_k = \frac{1}{4\epsilon^2} (\xi_{k+1} - \xi_{k-1}) (\xi_{k+1} - \xi_{k-1}), \quad (11a)$$

$$z_k = \frac{1}{\epsilon^4} (4\xi_k - \xi_{k+1} - \xi_{k-1} - \xi_{k+1} - \xi_{k-1})^2. \quad (11b)$$

Далее, из равенства (10) получим:

$$\bar{t}_k = \sum_{\xi} v t_k, \quad \bar{z}_k = \sum_{\xi} v z_k, \quad (12)$$

где знак $\sum_{\xi}$ означает суммирование по всем элементам пространства ξ .

Подставляя эти значения в уравнение (5), мы найдем:

$$\epsilon^{-2} F = \sum_k \left(\sum_{\xi} v t_k \right)^2 - \frac{\epsilon^2}{L} \left(\sum_k \sum_{\xi} v t_k \right)^2 - \frac{1}{R} \sum_k \sum_{\xi} v t_k + \frac{1}{R^2} \sum_k \sum_{\xi} v z_k = 0. \quad (13)$$

Суммирование $\sum_k$ должно быть произведено по всем точкам поля от $y=0$ до $y=1$ и от $x=x_0$ до $x=x_0+L$. Очевидно, это уравнение связывает некоторым соотношением количества v .

Наконец, для того чтобы получить выражение для статистической вероятности распределения точек в пространстве ξ , мы будем следовать тому пути, который принят в кинетической теории газов. Для одной и той же совокупности разных полей возможных состояний относительного движения мы можем произвести $M!$ перестановок M точек. Если мы пренебрежем перестановками точек, лежащих в одной и той же ячейке (которые приводят только к очень незначительному видоизменению потока) и сохраним перестановки точек, лежащих в различных ячейках, то таких перестановок останется только

$$W = \frac{M!}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (14)$$

Это выражение остается неопределенным, пока ничего не сказано о величине самих ячеек. Мы предположим поэтому, что все ячейки имеют один и тот же объем ω .

Мы примем полученное таким образом число W в качестве меры статистической вероятности рассматриваемого множества состояний движения. Мы делаем предположение, что существует определенное множество точек в пространстве ξ , такое, которое позволяет вычислять осредненные значения по формуле (10). Мы делаем еще предположку, что это множество дает числу W максимальное значение при условии соблюдения равенства (13) и при условии, что некоторые координаты сохраняют постоянное значение, равное нулю.

Предварительно, до определения этого наиболее вероятного множества точек, сделаем следующее замечание. Рассматривая M состояний движения в относительном движении, представляемых M точками в пространстве ξ , мы должны помнить, что в действительности каждое поле изменяется с течением времени. Как было указано, это изменение может быть изображено движением соответствующей точки в пространстве ξ . В кинетической теории газов большое значение придается тому обстоятельству, что плотность каждой совокупности точек, изображающих состояние движения, остается неизменной. Это есть теорема Лиувилля и выводится она из канонических уравнений движения¹⁾. На этом основании объем всех ячеек может быть принят один и тот же, так как совокупность точек в одной ячейке, представляющих собою состояния движения, которые уже неразличимы между собою, всегда заполняет один и тот же неизменный объем фазового пространства.

Теперь возникает вопрос: можно ли приписать то же свойство рассматриваемому нами множеству точек пространства ξ ? На первый взгляд это представляется совершенно невероятным, так как мы имеем дело с системой, по самому существу своему диссипативною, а известно, что диссипативная система, предоставленная самой себе, такого свойства не имеет²⁾. Однако в случае турбулентного движения дело обстоит несколько иначе, так как энергия, рассеиваемая в относительном движении, восстанавливается притоком энергии из поля осредненных скоростей. Механизм перехода энергии очень сложен, а потому мы предпочитаем

¹⁾ J. H. Jeans, The dynamical theory of gases, стр. 73, Cambridge 1916.

²⁾ J. H. Jeans, The dynamical theory of gases, стр. 72, Cambridge 1916.

рассмотреть этот вопрос с иной точки зрения, исследуя действительное движение и не разлагая его на осредненный поток и на относительное движение. Обозначая через Ψ функцию тока в действительном движении, мы имеем (обозначая в данном случае через t время):

$$\Psi = \phi + \int_0^y U dy, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (15)$$

Мы можем затем изобразить точками в пространстве ξ вместо значения ϕ значения функции Ψ (пограничные условия будут теперь уже другие, так как Ψ не равно нулю при $y=1$).

Если в то же время мы рассмотрим замкнутый канал между двумя концентрическими цилиндрами очень большого радиуса (как то было указано в примечании на стр. 290), то мы будем иметь конечную систему, в которой рассеиваемая в движении энергия восстанавливается работой CL тех сил, которые поддерживают движение стенок канала.

Имеется, повидимому, очень немного исследований, касающихся статистического изучения диссипативных систем, движение которых поддерживается действием внешних сил. Можно упомянуть об исследовании Треффца относительно диссипативных систем под действием периодической силы ¹⁾. Если в данном случае изобразить состояния движения множеством точек, движущихся в обобщенном пространстве, то оказывается, что эти точки не будут стремиться к некоторым определенным предельным точкам, как то имеет место для диссипативных систем, предоставленных самим себе.

В случае турбулентного движения жидкости допустимо сделать предположение, что все состояния движения, возникающие с течением времени из некоторого данного состояния, произвольно принятого в качестве начального, будут иметь характер нормального турбулентного движения. Разумеется, мы при этом принимаем, как мы то делали неявно и раньше, что число Рейнольдса для потока превышает в достаточной степени критическое свое значение. Точки в пространстве ξ , изображающие состояния движения, не будут сгущаться у предельных точек, а будут иметь характер некоторого циклического движения.

Я не имел возможности исследовать подробнее этот вопрос. При его рассмотрении не следует упускать из вида, что при введении прямоугольной сети точек вместо поля непрерывных скоростей, которое позволяет перейти к N -мерному пространству ξ , остается всегда один искусственный элемент, а именно расстояние ε соседних точек сети. Следующее соображение может разъяснить значение этого элемента. Теорема Лиувилля будет справедлива для множества точек в пространстве ξ , если удастся доказать, что имеет место следующее равенство:

$$\sum_k \frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial \xi_k} = 0, \quad (16)$$

¹⁾ E. Trefftz, Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie, Math. Annalen, т. 95, стр. 307, 1925.

где ξ_k представляет составляющую вдоль оси ξ_k скорости движения точки в пространстве ξ . Скорость предполагается функцией положения точки. Суммирование должно быть произведено по всем координатам точки. Переводя это равенство на язык гидродинамики, мы видим, что ξ_k означает значение $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ в данной точке сети, покрывающей поле потока.

Дифференцирование по ξ_k означает, что мы должны сравнить это значение $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ с тем значением в той же точке, которое $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ получит, когда функция тока Ψ в той же точке (и только в ней) увеличится на некоторое количество. Если мы захотим сделать это сравнение при помощи уравнений гидродинамики, то мы увидим, что в поле непрерывных скоростей вопрос этот не имеет смысла до тех пор, пока не определена площадь, на которой функция Ψ должна получить приращение.

Является ли это затруднение действительным или только кажущимся, судить я пока не могу¹⁾. Следует, однако, упомянуть еще об одном обстоятельстве. Если мы пренебрежем вязкостью, жидкости, как мы о том говорили в конце § 1, и рассмотрим при отсутствии внешних сил движение идеальной жидкости между абсолютно гладкими стенками, то, повидимому, уравнение (16) будет иметь место. Доказательство, хотя и не строгое, может быть намечено следующим образом. Относя обозначения скоростей u , v и напряжение ζ вихря к действительному движению, мы получим соотношения:

$$\Delta \Psi = -\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (17)$$

Если G есть функция Грина для пространства между стенками, то мы можем, введя постоянную c , выразить функцию тока Ψ в виде интеграла:

$$\Psi = cy + \iint G(x, y, x', y') \cdot \zeta(x', y') dx' dy',$$

откуда следует:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \iint G(x, y, x', y') \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx' dy'. \quad (18)$$

Написав значение этого интеграла приближенно при помощи значений переменных в точках сети, мы должны будем заменить интегрирование суммированием. В то же время выразим все количества, входящие в выражения (17), при помощи разностей, как мы это сделали для

¹⁾ Из того обстоятельства, что число Рейнольдса должно быть достаточно велико, можно заключить, что этот вопрос связан с вопросом об устойчивости турбулентного движения, который ставился многими авторами, например Ф. Нетером (F. Noether, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., т. I, стр. 125, 1921). По этому вопросу еще существуют разногласия.

Было высказано предположение, что в случае жидкости, текущей под влиянием разности давлений (или тяжести, когда движение направлено вниз) между двумя неподвижными стенками, мы имеем большую вероятность получить устойчивое турбулентное движение, чем в разбираемом нами случае движения. Формулы § 2 могут быть применены и к такому движению. Основное изменение вносится в выражение условия рассеяния.

выражений (7). Функция Грина G представится в виде ряда чисел $g_{k,p}$, причем $g_{k,k}$ будет иметь в данном случае конечное значение. Таким путем равенство (18) примет следующий вид:

$$\dot{\xi}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{e^2} \sum_i g_{k,i} Z_i(\xi),$$

где Z_i представляет собою квадратичное выражение, составленное из значений ξ для некоторой группы точек, расположенных около точки I . Каждый член в выражении Z_i представляет произведение двух линейных множителей, каждый из которых заключает только разности значений ξ . Таким образом, вычисляя производную по отношению к ξ_k , мы будем в результате иметь только члены с разностями в первой степени. Ввиду того, что мы имеем замкнутый канал, и вследствие свойства функции Грина, которое выражается равенствами¹⁾:

$$g_{k, k-1} = g_{k, k+1} = g_{k, k-1+1} = g_{k, k+1+1} \text{ и т. д.,}$$

можно, повидимому, показать, что при суммировании

$$\sum_k \frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial \xi_k}$$

по всем значениям k все члены сократятся. Другой вывод мы дадим во второй части статьи.

В случае идеальной жидкости это свойство может служить оправданием того, что мы приняли функцию тока для определения вероятностей состояния движения и предположили равными объемы всех ячеек в пространстве ξ , без предварительного определения некоторого рода канонических переменных. Делая те же предположения и в случае вязкой жидкости, возможно, что мы припишем тем самым слишком большую вероятность таким состояниям движения, которые фактически немедленно же затухают благодаря вязкости, так что практически можно было бы считать, что они вовсе не появляются. Однако самое условие рассеяния уже препятствует частому появлению таких состояний движения и поэтому можно надеяться, что вычисления, произведенные с такими предположениями, не будут совершенно бесполезны.

3. Вычисление наиболее вероятного распределения.

Из формулы Стирлинга мы получаем хорошо известное приближенное значение для логарифма выражения (4):

$$\ln W = - \sum n \ln \frac{n}{M} = - M \sum v \ln v. \quad (19)$$

¹⁾ Вопрос о возможности ввести такие канонические переменные все же заслуживает внимания, хотя, повидимому, введение функции тока ψ приводит к более простым выражениям. Для движения параллельных прямолинейных вихрей в идеальной жидкости в случае, когда диаметры очень малы по сравнению с их расстояниями, можно ввести канонические переменные по способу Кирхгофа и Лагалли (см. M. Lagally, Sitz-Ber. Münchener Akademie, стр. 377, 1914). Для этих переменных теорема Лиувилля может быть доказана. Для применения статистических методов нужно при этом задать выражение кинетической энергии.

Количества ν должны удовлетворять равенствам (9) и (13). Произвольная вариация одного из количеств ν дает в равенстве (9) вариацию

$$\delta \nu, \quad (a)$$

а в равенстве (13) вариацию, равную:

$$\varepsilon^{-2} \delta F = \left\{ 2 \sum_k \left(t_k \sum_{\xi'} \nu t_{k'}(\xi') \right) - \frac{2\varepsilon^2}{L} \left(\sum_k t_k \right) \left(\sum_{k'} \sum_{\xi'} \nu t_{k'}(\xi') \right) - \frac{1}{R} \sum_k t_k + \frac{1}{R^2} \sum_k z_k \right\} \delta \nu.$$

Полагая для сокращения

$$\frac{2\varepsilon^2}{L} \sum_{k'} \sum_{\xi'} \nu t_{k'}(\xi') - 2 \sum_{\xi'} \nu t_{k'}(\xi') + R^{-1} = \varphi_k, \quad (20)$$

мы можем написать эту вариацию в виде:

$$\varepsilon^{-2} \delta F = \left\{ \sum_k \left(\frac{z_k}{R^2} - \varphi_k t_k \right) \right\} \delta \nu. \quad (b)$$

В результате вариация $\ln W$ получает выражение:

$$\delta \ln W = -M (\ln \nu - 1) \delta \nu. \quad (c)$$

Для того чтобы определить максимум, мы должны предположить существование линейной зависимости между коэффициентами $\delta \nu$ в выражениях (a), (b) и (c). Мы получаем отсюда равенство:

$$\ln \nu = \alpha - \beta \sum_k \left(\frac{z_k}{R^2} - \varphi_k t_k \right),$$

или

$$\nu = A e^{-\beta \sum_k \left(\frac{z_k}{R^2} - \varphi_k t_k \right)}. \quad (21)$$

Количества α (или A) и β — постоянны. Значения этих постоянных могут быть определены подстановкою выражения (21) в равенства (9) и (13).

Ряд $\sum \nu$ будет сходиться только в случае, если $\beta > 0$. Будет ли это условие достаточным для сходимости во всех случаях, должно быть исследовано в дальнейшем. Предварительно мы предположим, что никаких затруднений в этом отношении не встречается. (Дальнейшее исследование вопроса во второй части статьи приводит к некоторому условию, налагаемому на функцию φ .)

Уравнение (21) в действительности является неявным уравнением, определяющим ν , так как количества φ_k , входящие в показатель, являются сами функциями ν .

Имеет смысл рассмотреть подробнее количества φ_k . Согласно равенствам (12) (4) и (4a) мы можем написать:

$$\sum_{\xi'} \nu t_k(\xi') = \bar{t}_k, \quad \frac{2\varepsilon^2}{L} \sum_{k'} \sum_{\xi'} \nu t_{k'}(\xi') = \frac{2\varepsilon^2}{L} \sum_{k'} \bar{t}_{k'} = 2 \int_0^1 dy \bar{t} = 2(C - R^{-1}).$$

Таким образом мы имеем:

$$\varphi_k = 2C - R^{-1} - 2\bar{t}_k. \quad (22)$$

Вблизи стенок $\bar{t}$ равно нулю. Следовательно, у стенок φ положительно. Следовательно те состояния движения, для которых t принимает положительные значения вблизи стенок, будут встречаться много чаще, чем состояния, получаемые отображением относительно координатных осей Ox или Oy , для которых t отрицательно.

В более центральных частях поля $\bar{t}$, наоборот, только немного меньше C , так что φ становится малым количеством. φ будет, вероятно, все-таки положительно. В противном случае те состояния движения, для которых t отрицательно, появились бы в этой части поля чаще, чем состояния с положительным значением t , а это невозможно, так как $\bar{t}$, осредненное значение, должно быть положительно. Следовательно, мы имеем¹⁾:

$$\bar{t} < C - \frac{1}{2}R^{-1}.$$

Другое выражение для φ можно найти исключением $\bar{t}$ при помощи равенства (1). Мы получаем:

$$\varphi = \frac{1}{R} \left(2 \frac{dU}{dy} - 1 \right). \quad (23)$$

Вычисляя $\bar{t}$ при помощи равенств (12) и (21), мы приходим к следующему уравнению:

$$\bar{t}_k = A \sum_{\xi} t_k(\xi) e^{-\beta \sum_{\xi} \left\{ \frac{z_1(\xi)}{R^2} - [2C - R^{-1} - \bar{t}_i(\xi)] \right\}}. \quad (24)$$

Здесь $t_k(\xi)$, $z_1(\xi)$, $\bar{t}_i(\xi)$ представляют известные функции ξ . Первый знак суммирования относится к пространству ξ , второй означает суммирование по всем точкам сети в поле движения.

Это уравнение является интегральным уравнением для определения $\bar{t}$. Оно имеет значение при изучении потока, так как посредством равенств (1) и (4) мы можем вычислить распределение скоростей и коэффициент сопротивления, коль скоро функция $\bar{t}$ нам известна.

Мы надеемся в дальнейшем сообщении вернуться к рассмотрению некоторых предположений, сделанных в этой статье.

1) Можно было бы предположить, что даже при отрицательном φ состояния движения может поддерживаться теми частями потока, которые находятся вблизи стенок, если значение t положительно. Это предполагает, однако, связность потока, простирающуюся на слишком большие расстояния, что, повидимому, мало вероятно. Как можно заключить из равенства (4), в центральной части потока

$$\bar{t} > C - R^{-1},$$

так что $\bar{t}$ заключено в довольно узких пределах.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

4. Исследование функции φ . Поток между параллельными неподвижными стенками.

Основной целью настоящей второй части статьи является, главным образом, более подробное рассмотрение некоторых предпосылок, сделанных в первой части. Так, в частности, исследование свойств функции φ приводит, с одной стороны, к некоторым многообещающим заключениям, но, с другой, — к такому выражению осредненной скорости U потока, которая не согласуется с выражением, полученным опытным путем.

Функция φ_k была определена выражением (20). Оно зависит только от ординаты y точки с индексом k . Исключая t_k из равенств (24) и (22), мы получаем интегральное уравнение для φ_k :

$$\varphi_k = 2C - R^{-1} - 2A \sum_{\xi} t_k(\xi) e^{-\beta \sum_i \{R^{-2} z_i(\xi) - \varphi_i t_i(\xi)\}}. \quad (25)$$

При исследовании этого уравнения мы прежде всего должны требовать, чтобы суммирование в пространстве ξ давало сходящееся выражение. Для этого требуется, чтобы показательная функция стремилась к нулю, в каком бы направлении точки пространства переменных ξ ни стремились к бесконечности¹⁾. Функции $z_i(\xi)$ существенно положительные, функции же $t_i(\xi)$ могут быть и положительными и отрицательными [см. равенства (11a) и (11b)]. Отсюда следует, что β должно быть количеством положительным, и, далее, необходимо, чтобы выражение

$$e^{-2} \Phi \equiv \sum_i \{R^{-2} z_i(\xi) - \varphi_i t_i(\xi)\} \quad (26)$$

или в развернутом виде:

$$e^{-2} \Phi \equiv \sum_i \left\{ \frac{(4\xi_i - \xi_{i+1} - \xi_{i+2} - \xi_{i-1} - \xi_{i-2})^2}{R^2 \epsilon^4} - \frac{\varphi_i (\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) (\xi_{i+2} - \xi_{i-2})}{4\epsilon^2} \right\}, \quad (26a)$$

(где φ не зависит от ξ) было положительной квадратической функцией N переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$. Ясно, что это требование налагает некоторые условия на функцию φ . Предположим, например, что функция φ положительна; в таком случае для тех направлений в пространстве ξ , для которых Φ становится отрицательным (что возможно только для направлений, при которых t_i положительно в большей части поля), правая часть равенства (25) будет при бесконечном ξ стремиться к $-\infty$ и, таким образом, уравнение (25) никаких решений иметь не будет. Если бы φ приняло в некоторой части поля слишком большие отрицательные значения (φ не может быть отрицательным во всем поле),

¹⁾ Каждый член суммы представляет собою одну из ячеек, на которые было разбито все пространство ξ .

то подобные же затруднения возникли бы для тех направлений в пространстве ξ , для которых в этой части поля ξ_i отрицательные.

До исследования в общем виде условий, налагаемых на φ , я думаю, что лучше вывести соответствующие формулы для потока между двумя неподвижными параллельными стенками, так как этот случай позволяет легче других сделать сравнение результатов с опытными данными. Для случая потока между неподвижными стенками мы введем следующие обозначения: расстояние между стенками h , среднюю скорость потока, считаемую по расходу через поперечное сечение канала V_0 , градиент давления $-\frac{dp}{dx} = J$, силу трения, отнесенную к единице площади стенки S . В таком случае имеем:

$$2S = Jh.$$

Переходим снова к безразмерным количествам, разделив все расстояния на h , все скорости на V_0 и т. д.

Начало координат поместим в середине между стенками, так что стенки будут находиться при $y = -\frac{1}{2}$ и $y = +\frac{1}{2}$. Полагаем, далее:

$$R = \frac{\rho V_0 h}{\mu} \quad \text{и} \quad C = \frac{S}{\rho V_0^2} = \frac{Jh}{2\rho V_0^2}.$$

Уравнение для осредненного движения принимает вид¹⁾:

$$\frac{1}{R} \frac{dU}{dy} = -2Cy + \overline{uv} \quad (27)$$

(так как вследствие симметрии потока $\frac{dU}{dy}$ и $\overline{uv}$ равны нулю вдоль оси канала при $y=0$). Ввиду того, что $U=0$ вдоль обеих стенок, мы имеем равенство:

$$-\int dy \cdot y \frac{dU}{dy} = \int dy \cdot U = 1, \quad (28)$$

из которого получаем:

$$C = 6 \int dy \cdot y \cdot \overline{uv} + 6R^{-1} = \frac{6}{L} \int \int dx dy \cdot y \overline{uv} + 6R^{-1}. \quad (29)$$

Пределами интегрирования являются всегда: для y : $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$ (если не сделано особой оговорки) и для x : x_0 и $x_0 + L$.

Условие рассеяния и для рассматриваемого случая имеет вид равенства (2) § 2. Исключая $\frac{dU}{dy}$ и C и вводя сокращения (3), мы получаем:

$$F = \int \int dx dy (\bar{t})^2 - \frac{12}{L} \left(\int \int dx dy \cdot y \bar{t} \right)^2 + \\ + \frac{12}{R} \int \int dx dy \cdot y \cdot \bar{t} + \frac{1}{R^2} \int \int dx dy \cdot \bar{z} = 0. \quad (30)$$

Переходя опять к представлению состояний движений посредством точек

¹⁾ См. также J. Burgers, Akademie Wetenschappen te Amsterdam, т. 26, стр. 601, 1923.

в пространстве ξ , мы можем выразить это условие в виде, аналогичном равенству (13):

$$\varepsilon^{-2} F = \sum_k \left(\sum_{\xi} v_{\xi k} \right)^2 - \frac{12\varepsilon^2}{L} \left(\sum_k \sum_{\xi} v_{\xi k} t_k \right)^2 + \frac{12}{R} \sum_k \sum_{\xi} v_{\xi k} t_k + \\ + \frac{1}{R^2} \sum_k \sum_{\xi} v_{\xi k} = 0. \quad (31)$$

Это выражение позволяет вычислить вариацию F при произвольной вариации δv одного из количеств v . Для того чтобы привести наши выражения в возможно близкое соответствие с формулами § 3, мы положим:

$$\frac{24\varepsilon^2}{L} y_k \sum_{k'} \sum_{\xi'} v_{\xi' k'} t_{k'}(\xi') - 2 \sum_{\xi'} v_{\xi' k} t_{k'}(\xi') - 12 y_k R^{-1} = \varphi_k. \quad (32)$$

В таком случае, вводя обозначения (26), найдем:

$$\varepsilon^{-2} \delta F = \sum_k (R^{-2} z_k - \varphi_k t_k) \delta v = \varepsilon^{-2} \Phi \delta v. \quad (33)$$

Из этого выражения мы снова получаем для „наиболее вероятного распределения“ выражение (21). Как и в предыдущем случае, мы должны наложить на Φ , а следовательно, и на φ те же условия. Из выражения (32) мы выводим для φ следующее новое выражение:

$$\varphi = 24y \int dy \cdot y \bar{t} - 2\bar{t} - 12yR^{-1} = -y(4C - 12R^{-1}) - 2\bar{t} = \\ = R^{-1} \left(2 \frac{dU}{dy} + 12y \right). \quad (34)$$

На стенке $y = -\frac{1}{2}$, вдоль которой $\bar{t} = 0$, функция φ имеет значение:

$$\varphi \left(-\frac{1}{2} \right) = 2C - 6R^{-1}. \quad (34a)$$

Вдоль другой стенки $y = \frac{1}{2}$ функция φ имеет значение, равное по величине и обратное по знаку. Вдоль оси канала

$$\varphi(0) = 0. \quad (34b)$$

Наконец, мы имеем:

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^0 dy \cdot y \varphi = \frac{1}{2} R^{-1}, \quad (34c)$$

в то время как в предыдущем рассмотренном нами случае соответствующее равенство имело вид:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi dy = \frac{1}{2} R^{-1}.$$

Естественно предположить в рассматриваемом случае, как и в предшествующем, что функция φ вдоль каждой половины поперечного сечения канала является монотонной функцией y . Из такого предположения вытекает монотонный характер изменения и силы $t = -\overline{uv}$ внутреннего трения, вызываемой относительным движением, а вместе с тем и производной $\frac{dU}{dy}$. Никаких указаний к тому, чтобы это предположение оказалось неверным, не имеется. С теоретической точки зрения также нет никаких оснований для того, чтобы дело могло обстоять иначе, за исключением того случая, когда относительное движение имеет ясно выраженный вид поперечных волн вдоль сечения канала. Такое явление, однако, мало вероятно, по крайней мере при гладких стенках.

Возвращаясь к условиям, налагаемым на Φ , и переводим их на язык поля с непрерывными скоростями, полагая в выражении (26):

$$\varepsilon = \xi^2 = (\Delta\psi)^2, \quad t = -\overline{uv} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

и заменяя суммирование по точкам сети интегрированием по x и y . Мы получим таким путем условие:

$$\Phi = \int \int dx dy \left\{ R^{-2} (\Delta\psi)^2 - \varphi(y) \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\} > 0 \quad (35)$$

для всех возможных функций ψ , удовлетворяющих пограничным условиям:

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

у обеих стенок.

Из исследований Лоренца и Ора можно заключить, что существуют такие типы движения, которые происходят в полосе шириною D , удовлетворяют пограничным условиям и для которых

$$\int dx \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} \geq 0 \quad \text{для всех значений } y, \quad (a)$$

$$\int \int dx dy (\Delta\psi)^2 = \frac{A}{D^2} \int \int dx dy \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (b)$$

где A есть некоторый коэффициент, нижний предел которого по исследованию Ора равен 177 ¹⁾.

Мы предположим существование такого движения в полосе $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + D$, где $D < \frac{1}{2}$. Вне этой полосы ψ должно быть

¹⁾ H. Lorentz, Abh. über theor. Physik, т. I, стр. 48. W. Mac. F. Orr, Proc. Roy. Irish Akad., т. 27, стр. 124—127, 1907.

Должен признать, что уравнение (a) было мною проверено только для случая вихрей Лоренца. Если бы настоящая формула оказалась неприменимой к функции, которая дает наименьшее значение для A по теории Ора, то в таком случае для A во всех последующих выкладках следует принять большее значение, но во всяком случае оно должно быть меньше значения 288, которое получается для эллиптических вихрей Лоренца.

равно нулю. Обозначая через $\varphi_{\min}$ наименьшее значение функции φ в полосе, мы найдем:

$$\int \int dx dy \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} > \varphi_{\min} \int \int dx dy \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

или

$$\int \int dx dy \cdot \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} > \varphi_{\min} \frac{D^2}{A} \int \int dx dy (\Delta \psi)^2.$$

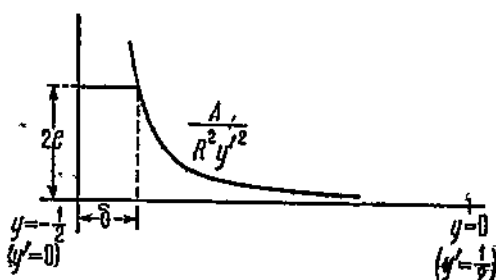
Подставляя это неравенство в условие (35), мы получим:

$$\varphi_{\min} < \frac{A}{R^2 D^2}.$$

Согласно предпосылке монотонного изменения φ , наименьшее значение φ в такой полосе будет находиться у границы $y = -\frac{1}{2} + D$. Обозначая временно через y' значение $y' = \frac{1}{2} + y$, будем иметь:

$$\varphi(y') < \frac{A}{R^2 y'^2}. \quad (36)$$

С другой стороны, наибольшее значение φ дано выражением (34a). Мы заключаем из этого, что значение φ всюду меньше ординаты кривой



Фиг. 88.

изображенной на фиг. 88. Пусть δ есть значение y' , для которого предельное значение (36) равно $2C$. Мы находим без затруднений из рассмотрения фигуры неравенства:

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^0 dy \cdot y \cdot \varphi < \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} dy' \cdot \varphi < C\delta + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} dy' \frac{A}{R^2 y'^2}$$

или

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^0 dy \cdot y \cdot \varphi < \frac{\sqrt{2AC}}{R}.$$

Сравнение с равенством (34с) приводит к неравенству:

$$C > \frac{1}{8A}.$$

Принимая для A наименьшее значение 177, найденное Ором, мы получим:

$$C > 0,00070.$$

Этот результат представляет интерес ввиду существовавшей (продолжающейся и сейчас) дискуссии вопроса: стремится ли значение коэффициента сопротивления $C = \frac{S}{\rho V_0^2}$ при абсолютно гладких стенках к нулю, когда число Рейнольдса беспрестанно возрастает ¹⁾. Обыкновенно принимают, что этот коэффициент почти не зависит от формы сечения канала, если число Рейнольдса определяется для всех случаев посредством так называемого гидравлического радиуса r_H , равного отношению удвоенной площади сечения к его периметру. Наименьшие значения C , которые до сих пор наблюдались для круглых труб, следующие ²⁾:

Стантон и Паннелл	$C = 0,0017$	$\frac{2\rho V_0 r_H}{\mu} =$	440 000
Якоб и Эрк	$C = 0,00166$	"	460 000
Базен	$C = 0,0016$	"	около 1 000 000
Мур	$C = 0,0017$	"	4 000 000
Джонстон	$C = 0,0010$	"	20 000 000

Измерения, произведенные Стантоном и Паннелом, а также Якобом и Эрком, считаются наиболее точными. Результат этих измерений может быть выражен формулой:

$$C = 0,00090 + 0,0763 \left(\frac{2\rho V_0 r_H}{\mu} \right)^{-0,85}.$$

Предельное значение совпадает с тем, которое получается по формуле (37). Однако, надо заметить, что наш способ оценки несколько грубый. Более точный способ мог бы несколько повысить значение нижнего предела для C (если только не окажется, что число 177, данное Ором, неприменимо, но во всяком случае тогда $C > 0,00043$).

Но равенство (36) может послужить и для приближенного определения распределения осредненных скоростей U по ширине канала. На основании уравнения (34) мы находим:

$$\frac{dU}{dy} + 6y = \frac{R\eta}{2} < \frac{A}{2Ry^2}.$$

В центральной части канала, где y не слишком мало по сравнению с единицей, мы можем приближенно написать:

$$\frac{dU}{dy} \approx -6y,$$

¹⁾ L. Hopf, Zeltschr. f. angew. Math. u. Mech., т. 3, стр. 393, 1923; Th. v. Kármán, Proc. I. Internat. Congress. for appl. Mech., стр. 103, Delft 1924, L. Schiller, Physikalische Zeitschrift, т. 26, стр. 473, 592, 1925,

²⁾ T. E. Stanton a. I. R. Pannell, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), т. 214, стр. 199, 1914, M. Jakob u. S. Erk, Forschungsarbeiten VDI, Heft 267, 1924; H. Bazin, Mém. de l'Ac. des Sciences (Sav. étrangers), т. 32, 6, стр. 1, 1902.

Значения Мура Джонстона взяты из диаграммы, приведенной Гонфом (кривые 25, 26 на фиг. 2).

откуда:

$$U \approx \frac{5}{4} - 3y^2. \quad (38)$$

Вдоль оси канала мы получаем скорость в 1,25 раза большую средней скорости. В действительности же наблюдается значительно меньшая скорость — приблизительно в 1,1 раза большая, чем средняя. В случае чисто ламинарного потока мы имеем:

$$\frac{dU}{dy} = -12y, \quad U = \frac{3}{2} - 6y^2.$$

Полученное нами значение для $\frac{dU}{dy^2}$ вдвое меньше соответствующего значения для ламинарного движения.

То же соотношение получается и для случая потока между двумя стенками в относительном движении друг к другу, и насколько я могу судить, рассмотрение движения в круглой трубе тоже не приведет к иному результату, так что в данном случае расхождение с опытными данными получится еще большее ¹⁾.

5. Обзор сделанных в § 2 предпосылок. Физическое истолкование условия.

Ввиду указанного в конце предыдущего параграфа расхождения теории с опытными данными уместно пересмотреть сделанные предпосылки.

Основною рассуждения является предпосылка, что наряду с пограничными условиями и уравнением непрерывности турбулентное движение определяется только одним условием рассеяния. Мы изобразили в пространстве ξ множество всех возможных состояний движения, которые удовлетворяют пограничным условиям и уравнению рассеяния. Всякий возможный тип движения: с вихрями Лоренца, движение, изученное Ором, и решения уравнений движения, построенные разными авторами, — все эти типы движения, а наряду с ними и любые произвольные состояния, представлены в пространстве ξ системой точек. Движения того же самого типа, но отличающиеся по своей интенсивности, представлены точками, лежащими в различных расстояниях от начала координат на одном и том же радиусе векторе.

Дальше мы старались найти принцип, позволяющий выделить совокупность M точек, удовлетворяющих условию (13) [или для другого рассмотренного нами случая — условию (31)] и выбранных таким образом, чтобы они могли служить для вычисления осредненных значений. В качестве такого принципа мы приняли принцип вероятности. Не мешает при этом напомнить, что мы не рассматривали вероятности того или иного специального состояния движения, или вероятности какого-либо распределения вихрей. Мы имели дело только с совокупностью M

¹⁾ Выводы § 4 могут быть перенесены и на случай движения в круглой трубе, хотя методы статистического исследования и не относятся к этому случаю, так как они не были обобщены для трехмерного движения.

произвольных состояний движения, представляемых M точками, и подсчитывали число возможных перестановок этих точек или состояний движения. Только в результате таких вычислений мы пришли к выражению (21), которое дает меру статистической вероятности каждого отдельного состояния движения.

Выражение (21) имеет некоторые особенности, которые делают его очень пригодным для характеристики турбулентного движения. Прежде всего оно не включает никаких неопределенных постоянных; далее, показатель в показательной функции представляет собою квадратичную функцию переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ [см. выражение (26)]; таким образом интегрирование по переменным ξ может быть произведено элементарными вычислениями. Большое число этих переменных (в пределе — бесконечное число) делает, правда, эти вычисления практически невозможными, в особенности ввиду отсутствия функции φ . Хотя не найдено еще способа обойти это затруднение, но, как то можно видеть из интегральных уравнений для $\bar{t}$ или для φ , средняя амплитуда относительного движения может быть вполне определена. Это является следствием того, что условие рассеяния, написанное в виде (5) или (30), неоднородно относительно этой амплитуды.

Уравнение (21) непосредственно приводит к так называемому „ламнарному пограничному слою“ вдоль стенок канала. Вследствие пограничных условий все состояния движения, при которых скорости u и v имеют не слишком малое значение, дают для z очень большое значение. Функции φ по величине не больше $2C$, таким образом член $\sum_k R^{-2} z_k$ в показателе имеет решающее значение, так что значение вероятности γ для таких состояний движения становится чрезвычайно малым.

Наконец, принимая предварительно предпосылку, что функция φ монотонно изменяется в зависимости от y в каждой половине поля скоростей потока, мы видим, что φ имеет тот же знак как и $\frac{dU}{dy}$. Из уравнения (21) вытекает, что везде имеют наибольшую вероятность возникнуть те состояния движения, для которых $t = -uv$ имеет тот же знак, что и $\frac{dU}{dy}$. Так дело и должно обстоит ввиду наблюдаемого большого значения сопротивления. Таким образом мы непосредственно автоматически приходим к связи между скоростями u и v при посредстве уравнения рассеяния, не прибегая совершенно к теориям (которые сами по себе имеют большое значение) Прандтля, Тейлора и др. Эти теории вводят понятие среднего свободного пути пробега элементов жидкости, что само по себе является неизвестным количеством.

Тот факт, что корреляция u и v получается автоматически, есть следствие того, что приход энергии относительного движения определяется в каждый данный момент (в основном) следующим выражением:

$$E = \iint dx dy \left\{ -uv \frac{dU}{dy} - R^{-1} \zeta^2 \right\}. \quad (39)$$

Это количество положительно (при не слишком больших значениях ζ^2) при прямой корреляции и отрицательно при обратной корреляции¹⁾.

Однако в показатель выражения (21) входит не само это выражение, а функция Φ , которая при помощи значения (34) для φ может быть представлена в следующем виде:

$$-R\Phi = \int dx dy \left\{ -uv \left(2 \frac{dU}{dy} + 12y \right) - R^{-1} \zeta^2 \right\}. \quad (40)$$

Мы поставили условие, чтобы функция Φ была всегда положительной. Это условие, разумеется, может быть совместимо с положительным значением выражения (39).

В связи со сказанным необходимо отметить, что выражение (40) имеет смысл и помимо всяких соображений о пространстве ξ или гипотез о вероятности состояний. Для того чтобы это обнаружить, мы будем исходить из равенства:

$$\bar{E} = \int \int dx dy \left\{ -\overline{uv} \frac{dU}{dy} - R^{-1} \zeta^2 \right\}, \quad (41)$$

которое дает выражение для скорости прироста средней энергии относительного движения. В нормальном состоянии турбулентного движения энергия относительного движения остается неизменной, мы имеем $\bar{E} = 0$, и равенство (41) приводит к уравнению (2) § 2 этой статьи.

Если рассматривать турбулентное движение как бы с „микроскопической“ точки зрения, т. е. в ряд моментов через очень малые интервалы времени, то оно представится в виде ряда сильно различающихся состояний движений. Количества $\overline{uv}$ и ζ^2 являются средними значениями количеств uv и ζ^2 . Порядок, в котором следуют отдельные состояния движения, не имеет значения для наших рассуждений. Естественно, однако, предполагать, что в достаточно большом промежутке времени большая часть состояний движения будет повторяться по крайней мере с некоторой степенью приближения и что, таким образом, возможно приписать каждому из них некоторую среднюю амплитуду [как мы то и предположили при выводе формулы (21)]. Сравним теперь этот ряд состояний с таким, в котором интенсивность одного из членов ряда изменена. Например, мы можем в очень короткий промежуток времени увеличить интенсивность, а в следующий уменьшить ее с таким расчетом,

¹ Выражение для притока E энергии, написанное в полном виде, помимо членов, приведенных в тексте, включает члены, относящиеся к конечным сечениям канала при $x = x_0$ и $x = x_0 + L$, и затем интеграл

$$\int \int dx dy \left(u \frac{d\overline{uv}}{dy} + v \frac{d\overline{v^2}}{dy} \right)$$

(см. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, т. I, стр. 63). Имеет значение только первый член этого интеграла. Члены, относящиеся к конечным сечениям, обыкновенно считаются очень малыми и ими пренебрегают. Первый член интеграла меняет знак при полном обращении направления относительного движения [что не имеет места относительно выражения (39)]. Такое обращение остается без влияния на наши формулы, в которых u , v и ζ входят во второй или четвертой степени.

чтобы осредненные значения количеств в первой степени не изменились, а количеств второго порядка — увеличились в известной пропорции. Мы предположим, далее, что такому видоизменению данное состояние подвергается всякий раз, как оно появляется. Если $u, v, 2\zeta$ суть соответственно скорости и вихрь в этом состоянии движения, то в ряду состояний после указанного изменения значения $\bar{u}, \bar{v}$ и $\bar{\zeta}$ будут опять равны нулю, тогда как значения $\overline{uv}$ и $\bar{\zeta}^2$ в каждой точке поля скоростей увеличатся на количества, пропорциональные $u'v', \zeta'^2$ и т. д. Таким образом мы можем написать:

$$\delta \overline{uv} = u'v' \delta a, \quad \delta \bar{\zeta}^2 = \zeta'^2 \delta a, \quad (42)$$

где δa есть положительное количество, зависящее от степени увеличения интенсивности, но не зависящее от x, y и времени.

Новая система значений $\overline{uv}$ и $\bar{\zeta}^2$ будет в общем случае несовместима с начальным осредненным движением. Однако при помощи уравнений Рейнольдса и Лоренца мы можем вычислить такое новое осредненное движение, которое было бы совместимо с новыми измененными значениями $\overline{uv}$ и $\bar{\zeta}^2$, предполагая в то же время, что расход жидкости, проходящей через сечение канала, остался неизменным и постоянным. В таком случае и число Рейнольдса, характеризующее поток, останется без изменения.

Определив новое осредненное движение, мы можем найти и значение $\bar{E}$ для измененной системы. Мы обозначим его через $\delta \bar{E}$ в соответствии с δa . Если теперь окажется, что $\frac{\delta \bar{E}}{\delta a} > 0$, то это будет означать, что для измененного ряда состояний движения — с увеличенной интенсивностью одного из членов ряда — средняя энергия относительного движения увеличилась. Мы, конечно, не в состоянии судить, как этот прирост энергии распределится среди других членов ряда состояний и не сможем поэтому доказать со всей строгостью, что система в таком случае неустойчива. Однако, повидимому, вполне естественно предположить в качестве критерия устойчивости нормального турбулентного движения, что всякое увеличение интенсивности отдельного члена в ряду состояний влечет за собою уменьшение средней энергии и, наоборот, что средняя энергия возрастает при ослаблении отдельного состояния движения.

Мы можем рассмотреть этот вопрос и с другой точки зрения. Всегда возможно найти такие типы движения, для которых $\frac{\delta \bar{E}}{\delta a} < 0$. Следовательно, если бы существовали другие типы движения, для которых $\frac{\delta \bar{E}}{\delta a} > 0$, то мы можем, увеличивая интенсивность отдельных членов ряда, в известных пропорциях (не ослабляя других) построить ряд состояний, для которого $\bar{E} = 0$. Это было бы равносильно тому, что

условие рассеяния не ограничивает среднего значения энергии относительного движения. Такое положение вещей очень мало вероятно¹⁾.

Таким образом мы можем предположить, что для всех типов движения в ряду как действительных, так и просто возможных состояний выполняется условие:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial a} < 0. \quad (43)$$

Существует множество различных способов для вычисления количества $\frac{\partial \bar{E}}{\partial a}$. Мы будем исходить из уравнения полной энергии действительного движения вместо выражения (4). Это не может оказать влияния на получаемый результат, так как энергия осредненного движения от времени не зависит по самому определению осреднения по времени. Таким образом ни сама энергия осредненных скоростей, ни ее вариация не будут входить в выражение для $\bar{E}$, которое должно представлять скорость изменения энергии.

Поскольку вариация $\delta u \bar{v}$, заданная выражением (42), является функцией не только y , но и x , мы уже не можем предполагать, что осредненное движение, видоизмененное вариацией, продолжает сохранять направление, параллельное оси Ox . Мы должны, следовательно, исходить уже из следующих общих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + R^{-1} \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}^2 \frac{\partial}{\partial y} \bar{u} \bar{v}, \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + R^{-1} \Delta V - \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \bar{v} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}^2. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

В то же время уравнение энергии принимает вид:

$$\bar{E} = \int (PU)_I dy - \int (PU)_{II} dy - R^{-1} \int \int dx dy \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \bar{v}^2 \right\}. \quad (45)$$

Здесь V означает составляющую осредненной скорости вдоль оси Oy , а P — осредненное значение давления в каждой точке. Первый и второй интегралы в выражении для $\bar{E}$ означают работу осредненного давления в сечениях канала I (для $x = x_0$) и II (для $x = x_0 + L$), третий член представляет полную потерю энергии под влиянием внутреннего трения. Выражение для $\bar{E}$ не вполне точно, так как часть входящих в полное выражение членов была отброшена. Одни из них выражают работу переменного давления относительного движения в сечениях

¹⁾ Автор имеет в виду следующее: если бы существовали системы, для которых $\frac{\partial \bar{E}}{\partial a} > 0$, то можно было бы к ряду состояний с $\frac{\partial \bar{E}}{\partial a} < 0$ присоединить состояния системы с $\frac{\partial \bar{E}}{\partial a} > 0$. Изменяя интенсивность членов ряда второй системы (не изменяя первой системы), мы могли бы получить $\bar{E} = 0$ для совокупности первой и второй систем. А так как $\bar{E} = 0$ выражает условие рассеяния (2), то мы получили бы систему, для которой это условие не ставит ограничения на рост средней энергии относительного движения. *Прим. перев.*

I и II канала, другие выражают кинетическую энергию движения, переносимую потоком через эти сечения. Мы можем, однако, пренебречь этими членами, так как их величина остается почти неизменной при беспредельном увеличении L . Если мы разделим почленно выражение (45) на L , то эти члены дадут количества порядка $\frac{1}{L}$.

При нормальном турбулентном движении мы имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad V = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{u^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \overline{uv} = 0$$

и далее:

$$P = \text{const.} - Jx - \overline{v^2},$$

где J есть градиент давления.

Производим теперь вариирование, вводя вариации $\delta \overline{u^2} = u'^2 \cdot \delta a$ и т. д. Рассматривая поле скоростей, подобное тому, которое изучено Ором, имеющее неопределенно большое протяжение L и в большей или меньшей степени периодическое, мы найдем, что интегралы вида

$$\int \delta \overline{u^2} dx$$

должны иметь порядок величины, сравнимый с длиной L . По сравнению с ними остальными членами можно пренебречь. В случае такого поля скоростей, при котором скорости могут считаться равными нулю в пространстве вне ограниченной области (например, вихри Лоренца) члены, которыми мы пренебрегаем, автоматически стремятся к нулю, когда сечения I и II канала отодвигаются на все большее расстояние.

Принимая во внимание соотношения, существующие для нормального состояния турбулентного движения, и замечая, что вариации осредненных скоростей δU и δV удовлетворяют уравнению непрерывности, мы найдем:

$$U \frac{\partial}{\partial x} \delta U + \frac{\partial U}{\partial y} \delta V - R^{-1} \Delta (\delta U) + \frac{\partial}{\partial x} \delta P = -\delta a \left(\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} \right), \quad (46a)$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \delta V - R^{-1} \Delta (\delta V) + \frac{\partial}{\partial y} \delta P = -\delta a \left(\frac{\partial (u'v')}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right) \quad (46b)$$

и далее:

$$\delta \bar{E} = \int dy (U \delta P + P \delta U)_I - \int dy (U \delta P + P \delta U)_{II} -$$

$$- R^{-1} \int \int dx dy \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta U - \frac{\partial}{\partial x} \delta V \right) \cdot 2 \frac{dU}{dy} + \zeta'^2 \delta a \right\}. \quad (47)$$

Последнее выражение может быть приведено к более простому виду, если мы пренебрежем членами, порядок величины которых значительно

меньше L , и если мы обратим внимание на то, что расход $\int U dy$ должен оставаться постоянным. Тогда мы получим:

$$\delta \bar{E} = \int dy U (\delta P_I - \delta P_{II}) - R^{-1} \int \int dx dy \left\{ 2 \frac{dU}{dy} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \delta U + \zeta'^2 \delta a \right\}. \quad (48)$$

Интегрируя уравнение (46а) почленно относительно x и снова пренебрегая членами, много меньшими L , мы получим:

$$\delta P_I - \delta P_{II} = -R^{-1} \int dx \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta U + \delta a \int dx \frac{\partial}{\partial y} (u'v'). \quad (49)$$

Уравнение (46в) показывает, что порядок величины количества $\frac{\partial}{\partial y} \delta P$ много ниже L , поэтому все с той же принятой степенью приближения мы можем считать количество $\delta P_I - \delta P_{II}$ независимым от y . В таком случае первый член выражения (48) может быть просто приравнен

$$\delta P_I - \delta P_{II},$$

Умножим равенство (49) на $\left(\frac{3}{2} - 6y^2\right)$ и интегрируя его по ширине канала (выполняя при этом интегрирование по частям), мы найдем:

$$\delta P_I - \delta P_{II} = 12\delta a \int \int dx dy \cdot y u'v'. \quad (a)$$

Далее второй член выражения (48) преобразуем (снова путем интегрирования по частям) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} -R^{-1} \int \int dx dy \cdot 2 \frac{dU}{dy} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \delta U = \\ = -2 (\delta P_I - \delta P_{II}) - 2\delta a \int \int dx dy \frac{dU}{dy} u'v'. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

В результате мы получаем следующее выражение для $\frac{\delta \bar{E}}{\delta a}$:

$$\frac{\delta \bar{E}}{\delta a} = \int \int dx dy \left\{ -u'v' \left(2 \frac{dU}{dy} + 12y \right) - R^{-1} \zeta'^2 \right\}. \quad (50)$$

Оно тождественно с выражением (40).

Таким образом условие, чтобы функция Φ была положительной квадратичной функцией, оказывается равносильным условию (43).

Приведенные вычисления приложимы и к случаю потока вдоль цилиндрической трубы с сечением произвольной формы, когда относительное движение происходит в трехмерном пространстве.

6. Заключительные замечания.

Как уже было указано в конце § 4, наблюдаемое в действительности распределение осредненных скоростей не согласуется с уравнением (38). Значение для $\frac{dU}{dy}$ оказывается значительно более малым, в такой даже степени, что для некоторых состояний относительного движения

поставленное условие для $\frac{\delta E}{\delta a}$, повидимому, не выполняется, когда u' и v' имеют обратную (по отношению к обычно наблюдаемой) корреляцию. Мы должны, повидимому, допустить, что чрезмерная частота подвлияния таких состояний задерживается какой-либо иной причиной, которая не выясняется нашими рассуждениями.

Возвратимся к отправной предпосылке: условие рассеяния имеет для турбулентного движения вязкой жидкости такое же значение, как условие постоянства энергии для движения консервативной системы. Однако мы должны сейчас же отметить одно существенное различие в характере обоих условий. Условие постоянства энергии консервативной системы есть условие точное и безусловное, соблюдающееся в каждый момент. Условие же рассеяния не является условием, налагаемым на каждое мгновенное состояние турбулентного движения. Это условие выражает некоторое соотношение, которое выполняется только приблизительно за очень большой промежуток времени при рассмотрении всей истории данного движения. Этот характер условия в особенности очевиден при рассмотрении количества $\frac{\delta E}{\delta a}$. В наших выводах мы рассматривали вариацию системы, которая может установиться за длительный промежуток времени. Условие рассеяния, повидимому, слишком „эластично“ для того, чтобы его влияние могло тотчас же сказаться при всяком отклонении от „нормального“ состояния.

В том, что условие рассеяния должно удовлетворяться, сомнения не существует. Весь вопрос сводится к тому, каким вариационным уравнением определяется показатель, входящий в выражение функции распределения.

Если бы имелось основание предполагать, что мгновенный прирост энергии, выражаемый формулой (39), имеет влияние на статистическое распределение, то для распределения скоростей можно было бы получить выражение, лучше согласующееся с опытом. В таком случае показатель в уравнении (21) мог бы быть представлен линейной комбинацией выражений (39) и (40), а функция φ [см. выражения (21) и (35)] получила бы выражение следующего вида:

$$\varphi = R^{-1} \left(\frac{2 + \lambda}{1 + \lambda} \frac{dU}{dy} + \frac{12y}{1 + \lambda} \right).$$

Так, в предположении, что $\lambda = 3$, мы получили бы:

$$U \approx 1,1 - 1,2y^2.$$

Для нижнего предела значений C мы нашли бы:

$$\frac{1}{5} A = 0,0011.$$

Мне не удалось найти теоретических оснований, которые приводили бы к формулам такого типа. Имеется, однако, другой, повидимому, не безнадежный путь. При определении осредненного движения мы можем рассматривать средние значения по координате x вместо средних по времени. Такой прием до некоторой степени позволяет обойти затруд-

нение, и мы можем получить уравнение рассеяния, которое приводит к вариационному уравнению, отличающемуся от того, которым мы пользовались до сих пор. Мы надеемся возвратиться к этому вопросу в третьей части статьи.

При всех вычислениях мы придерживались условия, что полный поток жидкости через сечение канала остается безусловно постоянным. Это условие, повидимому, необходимо, так как по уравнению непрерывности полный расход жидкости должен быть одинаковым для всех сечений канала. Таким образом всякое изменение расхода жидкости через какое-либо сечение поведет к изменению расхода и через всякое другое сечение канала, как бы далеко оно ни находилось от первого. Это условие могло бы быть нарушено только при наличии явлений упругости.

7. Приложение к § 2 части первой.

В § 2 было намечено доказательство теоремы для идеальной жидкости (без внутреннего трения) при отсутствии внешних сил, которая выражается равенством:

$$\sum_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_k} = 0. \quad (16)$$

Можно доказать эту теорему, исходя из уравнения (18), после подстановки в него выражений (17), но не переходя к разрывному множеству дискретных значений:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int \int dx' dy' G(x, y, x', y') \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \frac{\partial (\Delta \Psi)}{\partial x'} - \frac{\partial \Psi}{\partial x'} \frac{\partial (\Delta \Psi)}{\partial y'} \right\} \quad (18^*)$$

(В этом уравнении и в дальнейших оператор Δ относится к переменным x' и y' .) Тем не менее, как было уже указано, необходимо при этом определить ту площадь, на которой функция Ψ должна получить приращение. Мы определим ее, принимая следующее выражение для вариации $\delta \Psi$:

$$\delta \Psi = a e^{-\kappa \{ (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \}},$$

в которой мы полагаем параметр κ настолько большим, чтобы количество $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ было очень малым, как по отношению к тем расстояниям, в пределах которых Ψ испытывает заметное изменение, так и по отношению к ближайшему расстоянию точки (x', y') до стенок. Обозначая через $\frac{1}{2}$ отличительный индекс точки (x, y) , мы определим значение вариации $\delta \xi_{\frac{1}{2}}$ выражением:

$$\delta \xi_{\frac{1}{2}} = \int \int dx' dy' \delta \Psi = \frac{\pi a}{\kappa}.$$

В уравнении (18*) мы напомним для функции Грина G следующее выражение:

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} + G^*(x, y, x', y').$$

Непосредственным вычислением мы получаем равенство:

$$-\frac{1}{2\pi} \int \int dx' dy' \cdot \ln \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \times \\ \times \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \Psi \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \Delta \Psi - \frac{\partial}{\partial x'} \Psi \cdot \frac{\partial}{\partial y'} \Delta \Psi \right\} = 0.$$

С другой стороны, интегрируя по частям при достаточно большом значении x мы получим:

$$\int \int dx' dy' G^* \delta \{ \dots \} = - \int \int dx' dy' \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left(G^* \frac{\partial}{\partial x'} \Delta \Psi \right) + \dots \right\} \delta \Psi = \\ = - \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left(G^* \frac{\partial}{\partial x'} \Delta \Psi \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \Delta \left(G^* \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x'} \left(G^* \frac{\partial}{\partial y'} \Delta \Psi \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \Delta \left(G^* \frac{\partial \Psi}{\partial x'} \right) \right\} \xi_k. \\ x' = x, y' = y.$$

Производя дифференцирование и имея в виду, что $\Delta G^* = 0$, мы преобразуем это выражение и получим равенство:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_k} = \gamma = -2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial y'^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial x' \partial y'} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} \right) \right\},$$

где после выполнения указанных дифференцирований мы должны положить $x' = x$ и $y' = y$.

В случае прямолинейного канала мы имеем:

$$\left. \frac{\partial^2 G^*}{\partial x' \partial y'} \right|_{\substack{x'=x \\ y'=y}} = 0,$$

а

$$\left. \frac{\partial^2 G^*}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial y'^2} \right|_{\substack{x'=x \\ y'=y}}$$

не зависит от x .

Отсюда следует равенство:

$$\int \int dx dy \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_k} = -2 \int dy \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial y'^2} \right)_{\substack{x'=x \\ y'=y}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \bigg|_{\substack{x=x_0+L \\ x=x_0}}.$$

Интеграл не будет равен в точности нулю, но сведется к интегралам по пограничным поверхностям конечных сечений при $x = x_0$ и $x = x_0 + L$. При замкнутом канале эти члены могут сократиться. Во всяком случае для двух концентрических цилиндров это обстоятельство может быть доказано. При введении полярных координат мы можем привести выражение количества γ к следующему виду:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{r dr \partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{r^2 \partial \theta} \right) f,$$

где f есть функция одного r . Так как Ψ есть однозначная функция, то интеграл, взятый по всему полю, будет действительно равен нулю.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

8. Вывод нового уравнения для условия рассеяния.

Во второй части мы уделили много внимания соотношению, которое выводится из условия рассеяния и приводит к заключениям о коэффициенте сопротивления и о распределении осредненных скоростей. Ввиду расхождения полученного распределения скоростей с данными опытного наблюдения, мы пытались вникнуть в физический смысл условия рассеяния. Мы встретились при этом со следующим обстоятельством: при определении осредненных скоростей мы рассматриваем средние значения по времени, следовательно, изменение интенсивности относительного движения, вызванное в течение небольшого промежутка времени, приводит к изменению осредненных скоростей для всего рассматриваемого времени. Это же последнее изменение влияет на определение количества энергии, переходящей из поля осредненных скоростей в поле относительного движения, также для всего рассматриваемого времени. Такой результат трудно объяснить с физической точки зрения.

Как было сказано в конце § 6, это затруднение, хотя оно является скорее кажущимся, чем действительным (как то будет показано в § 11), может быть в некоторой степени обойдено определением осредненных скоростей при помощи средних значений относительно координаты x . В случае нормального турбулентного движения мы можем ожидать с уверенностью, что мы придем таким путем к тем же результатам, какие получаются при рассмотрении средних значений по времени. Мы встречаем поэтому в различных исследованиях турбулентного движения средние значения по пространственным координатам, которые употребляются взамен средних по времени или же наряду с последними. В наших предшествующих рассуждениях мы рассматривали средние по времени только потому, что такой способ является наиболее естественным при изучении установившегося осредненного движения.

Чтобы перейти к выражениям при помощи средних относительно координаты x , мы будем исходить снова из действительного движения. Все количества, относящиеся к действительному движению, мы будем отмечать подстрочным индексом r : u_r , v_r , ζ_r , p_r . Определим осредненную скорость U и осредненное давление P выражениями:

$$U = \frac{1}{L} \int u_r dx, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{L} \int \frac{\partial p_r}{\partial x} dx. \quad (51a)$$

Интегралы по x должны быть взяты в пределах от $x = x_0$ до $x = x_0 + L$, где L есть длина, которая может быть произвольно большой.

Далее, пренебрегая количествами порядка $\frac{1}{L}$, мы имеем:

$$\frac{1}{L} \int v_r dx = 0, \quad \frac{1}{L} \int \zeta_r dx = \frac{dU}{dy} \text{ и т. д.} \quad (51b)$$

Кроме этого, с целью охарактеризовать стационарный характер осредненного движения и для определения осредненного градиента давления,

положим:

$$\frac{1}{L} \int \frac{\partial u_r}{\partial t} dx = 0. \quad (51c)$$

В таком случае мы определим „относительное“ движение следующими выражениями:

$$u = u_r - U, \quad v = v_r, \quad \zeta = \zeta_r - \frac{dU}{dy}, \quad p = p_r - P. \quad (52)$$

Из первого уравнения движения вдоль оси Ox :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u_r^2 + \frac{\partial}{\partial y} u_r v_r = - \frac{\partial p_r}{\partial x} + R^{-1} \Delta u_r$$

мы получим, интегрируя по x и деля на L , уравнение:

$$R^{-1} \frac{d^2 U}{dy^2} = - \frac{P_I - P_{II}}{L} + \frac{1}{L} \int dx \frac{\partial}{\partial y} u_r v_r.$$

Во втором члене правой части мы заменим $u_r v_r$ выражением $Uv + uv$. На основании равенства (51b) член

$$\frac{1}{L} \int dx \frac{\partial}{\partial y} (Uv) = \frac{d}{dy} \left(\frac{U}{L} \int v dx \right)$$

может быть отброшен. Мы получаем, таким образом, уравнение:

$$R^{-1} \frac{d^2 U}{dy^2} = - \frac{P_I - P_{II}}{L} + \frac{1}{L} \frac{d}{dy} \int dx \cdot uv. \quad (54)$$

Рассмотрим снова частный случай движения между двумя параллельными плоскими неподвижными стенками. На основании уравнения для действительного движения вдоль оси Oy мы заключаем, что количество $\frac{P_I - P_{II}}{L}$ можно рассматривать независимым от y . Следовательно, мы получаем из уравнения (54):

$$R^{-1} \frac{dU}{dy} = - \frac{P_I - P_{II}}{L} y + \frac{1}{L} \int dx \cdot uv. \quad (54a)$$

Умножая это уравнение на y и интегрируя вдоль всей ширины канала (от $y = -\frac{1}{2}$ до $y = +\frac{1}{2}$), мы получим:

$$\frac{P_I - P_{II}}{L} = \frac{12}{L} \int \int dx dy \cdot yuv + 12R^{-1}.$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, мы найдем:

$$\frac{dU}{dy} = - 12y - \frac{12Ry}{L} \int \int dx dy \cdot yuv + \frac{12R}{L} \int dx \cdot uv. \quad (55)$$

Уравнение для скорости изменения энергии в действительном движении может быть написано в виде:

$$E = \int (p_r u_r)_I dy - \int (p_r u_r)_{II} dy - R^{-1} \int \int dx dy \zeta_r^2. \quad (56)$$

На основании равенств:

$$\int u_r dx = 0, \quad \zeta_r = \frac{dU}{dy} + \zeta, \quad \frac{1}{L} \int \zeta dx = 0$$

мы можем преобразовать выражение для E к следующему виду:

$$E = (P_I - P_{II}) - R^{-1} L \int dy \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 - R^{-1} \int \int dx dy \zeta^2, \quad (56a)$$

в котором мы пренебрегаем членами, порядок величины которых меньше L .

Подставляя, наконец, написанные выше выражения для $(P_I - P_{II})$ и $\frac{dU}{dy}$, мы получим:

$$E = -\frac{R}{L} \int dy \left(\int dx uv \right)^2 + \frac{12R}{L} \left(\int \int dx dy \cdot uvw \right)^2 + \\ + 12 \int dx dy \cdot uvw - R^{-1} \int \int dx dy \zeta^2. \quad (57)$$

До сих пор мы ограничивались рассмотрением движения в данный момент времени. Теперь мы вводим предположку, что среднее значение E по времени равно нулю. Это предположение даст нам новую форму уравнения для условия рассеяния.

Для того чтобы дать этой предположке такой вид, чтобы она могла служить основанием для статистического расчета, мы будем пользоваться схемой, принятой в § 2 части первой. Изобразим различные состояния относительного движения в ряду состояний нормального турбулентного движения при помощи множества точек в пространстве ξ . Число точек в ячейках с равным объемом ω , на которые разбито пространство ξ , обозначим через $n_1 = v_1 M$, $n_2 = v_2 M$ и т. д., так что $\sum v = 1$ [см. уравнение (9)]. Пользуясь выражением (10) для средних, мы можем написать уравнение для условия рассеяния в следующем виде:

$$\sum v E = 0. \quad (58)$$

Для того чтобы произвести сравнение этого нового вида уравнения с тем, которое было дано в § 4 [уравнение (31)], мы введем сокращения (3) и выразим приближенно интегрирование по плоскости (x, y) при помощи суммирования по значку $k = k_1 + ik_2$. Полагая

$$F^* = -R^{-1} \sum v E, \quad (58a)$$

мы получим:

$$\varepsilon^{-2} F^* \equiv \frac{\varepsilon}{L} \sum_{\xi} v \sum_{k_2} \left(\sum_{k_1} t_k \right)^2 - \frac{12\varepsilon^2}{L} \sum_{\xi} v \left(\sum_k y_k t_k \right)^2 + \\ + \frac{12}{R} \sum_{\xi} \sum_k v y_k t_k + \frac{1}{R^2} \sum_{\xi} \sum_k v z_k = 0. \quad (59)$$

Как видим, первые два члена этого выражения отличаются от соответствующих членов в уравнении (31). Мы можем ожидать, что в нормальном движении для большинства различных состояний движения,

появляющихся с течением времени, средние значения по координате x и по времени будут равны, так что

$$\frac{z}{L} \sum_{k_1} t_k \approx \sum_{\xi} \gamma t_k = \bar{t}_k.$$

В таком случае уравнения (59) и (31) совпадут.

Однако в обоих случаях мы получим различные вариации F^* в зависимости от произвольной вариации одного из количеств γ . На основании выражения (58а) мы имеем:

$$\delta F^* = -R^{-1} E \delta \gamma.$$

Таким образом, сохраняя предпосылку вероятности, изложенную в § 2, мы получим следующее выражение для наиболее вероятного „распределения“ точек в пространстве ξ :

$$\gamma = A e^{\beta \frac{E}{L}}. \quad (60)$$

Для упрощения некоторых выражений, которые мы встретим в дальнейшем, мы ввели в данном случае для параметра обозначение $\frac{\beta}{L}$ вместо β (можно видеть, что $\frac{E}{L}$ представляет среднее значение изменения энергии на единицу длины канала).

Уравнение (60) имеет более простой вид, чем уравнение (21), полученное раньше, в особенности же тем, что уравнение (60) не является неявным. Для всякой данной функции ψ (т. е. в каждой точке пространства ξ) значение для E полностью определено выражением (57). Если мы положим

$$Z = \sum e^{\beta \frac{E}{L}}, \quad (61)$$

где суммирование распространяется на все пространство ξ , то мы будем иметь:

$$A = Z^{-1}. \quad (61a)$$

Значение для β определяется условием (58), которое, как легко заметить, может быть написано в виде уравнения:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = 0. \quad (62)$$

Все средние значения могут быть вычислены, если β будет определено. Так, для коэффициента сопротивления C (см. его определение в § 4) мы получим значение:

$$C = \frac{P_I - R_{II}}{2L} = \frac{6}{L} \frac{\sum (e^{\frac{\beta E}{L}} \iint dx dy \cdot yuv)}{Z} + \frac{6}{R}. \quad (63)$$

Представляет интерес отметить, что можно получить уравнение (60), пользуясь способом Фоулера для вычисления средних посредством функции

распределения. Таким путем мы можем избежать введения в рассмотрение понятия „наиболее вероятного“ распределения (14). Рассуждение сведется к следующему: мы предположим, что течение турбулентного движения может быть описано с „микроскопической“ точки зрения в продолжение периода времени T как смена отдельных состояний движения числом M и отделенных друг от друга промежутками времени, равными $\frac{T}{M}$. В этой последовательности мгновенных состояний движения, представляемых точками в пространстве ξ (или вернее центрами ячеек, на которые это пространство разбивается), отдельные состояния повторяются соответственно n_1, n_2, n_3 и т. д. раз, причем сумма $\sum n$ равна M , если брать сумму по всем ячейкам пространства ξ . Для „макроскопического“ наблюдателя имеет значение только ряд чисел n_1, n_2, n_3 и т. д., различные же комбинации, в которые могут быть последовательно соединены отдельные состояния движения, значения не имеют. Если каждую возможную совокупность состояний, безотносительно к порядку членов, принимать за одну из возможных последовательностей, то при заданных числах n_1, n_2, n_3 и т. д. общее их число будет равно:

$$W = \frac{M!}{n_1! n_2! n_3! \dots}$$

[см. уравнение (14)]. Таким образом среднее значение одного из чисел n_j , например n_j , для множества всех возможных последовательностей будет равно:

$$\bar{n}_j = \frac{\sum^* W n_j}{\sum^* W},$$

где знак $\sum^*$ суммы относятся ко всем возможным значениям чисел n , совместимых с равенствами:

$$\sum_j n_j = M \quad \text{и} \quad \sum_j n_j E_j = 0.$$

Прибегая теперь к методу Фоулера, легко показать, что среднее значение n_j равно тому, которое получается из уравнений (60) — (62). Метод Фоулера сводится в немногих словах к следующему: вводим функцию $f(s)$ распределения:

$$f(s) = \sum_j s^{E_j},$$

где s есть комплексная переменная. Мы имеем тогда:

$$\sum^* W = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ds}{s} [f(s)]^M; \quad \sum^* W n_j = \frac{M}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ds}{s} s^{E_j} [f(s)]^{M-1},$$

где γ есть замкнутый контур интегрирования в плоскости переменной s вокруг точки $s=0$, причем обход контура производится против часовой стрелки. Применение метода „наиболее крутого спуска“¹⁾ дает

¹⁾ Или метода „перевала“ „of the greatest slope“; по-немецки: Sattelpunkt-Methode). См., например, Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I. перевод с немецкого, 1934. Приж. перев.

в конечном итоге следующее приближенное значение:

$$\bar{n}_j = M \frac{\partial^2 f}{\partial s^2},$$

где $\bar{n}$ есть корень уравнения $\frac{df}{ds} = 0$. Подставляя вместо s значение $e^{\frac{\beta}{M}}$ и вместо n_j равное ему число Mn_j , мы получаем результат, равносильный данному выше выражению.

Все осредненные значения мы можем определить тем же путем, так как, исходя из уравнения (10), мы можем написать для любого количества X равенство:

$$\bar{X} = \sum \frac{\bar{n}_j}{M} X_j = \sum_j \left(\frac{\sum^* W \frac{n_j}{M}}{\sum^* W} \right) X_j = \frac{\sum^* W \left(\sum_j n_j \frac{X_j}{M} \right)}{\sum^* W}.$$

Однако это равенство имеет практическое значение только в том случае, когда легко вычислить значение количества:

$$\sum_j n_j X_j.$$

Другой вопрос, заслуживающий внимания, — это определение того среднего значения, которое входит в выражение (63). Можно с этой целью прибегнуть к следующему формальному приему. Мы положим:

$$12 \iint dx dy \cdot yuv = E' L, \quad R^{-1} \iint dx dy \cdot y^2 = E'' L, \\ \iint dy \left(\int dx uv \right)^2 - 12 \left(\iint dx dy \cdot yuv \right)^2 = R^{-1} E''' L^2,$$

так что $E = L(E' - E'' - E''')$. Далее, полагаем

$$Z = \sum e^{\beta' E' - \beta'' E'' - \beta''' E'''} \quad (61a)$$

и заменяем равенство (62) системой уравнений:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta'} + \frac{\partial Z}{\partial \beta''} + \frac{\partial Z}{\partial \beta'''} = 0; \quad \beta' = \beta'' = \beta'''. \quad (62a)$$

В таком случае мы получим:

$$\frac{12}{L} \frac{\sum \left(e^{\frac{\beta E}{L}} \iint dx dy \cdot yuv \right)}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta'} = \frac{\partial}{\partial \beta'} (\ln Z). \quad (63a)$$

При выводах в следующем параграфе мы будем, однако, придерживаться выражения (61) и уравнения (62) с одним параметром β , хотя не представило бы затруднений перейти и к нескольким параметрам β .

9. Исследование уравнения (62).

Первый вопрос, который возникает, — это вопрос о сходимости суммы, входящей в выражение (61). Согласно неравенству Шварца

мы имеем:

$$\int dy \cdot y^2 \cdot \int dy \left(\int dx uv \right)^2 > \left\{ \int dy \left(y \int dx uv \right) \right\}^2,$$

или

$$\frac{1}{12} \int dy (dx uv)^2 > \left(\int \int dx dy \cdot y uv \right)^2.$$

Следовательно, члены выражения E четвертого порядка относительно ψ являются определенной отрицательной формой и количество E будет всегда отрицательным, когда мы удаляемся в любом направлении в бесконечность в пространстве ξ ¹⁾.

Чтобы получить некоторое представление об общем характере распределения точек, определяемого выражением (66), перейдем в пространстве ξ к полярным координатам и рассмотрим конус с бесконечно малым телесным углом $d\Omega$ ²⁾. Полагая

$$\rho^2 = \frac{1}{L} \int \int dx dy \psi^2, \quad (64)$$

мы можем написать:

$$\frac{12}{L} \int \int dx dy \cdot y uv - \frac{1}{RL} \int \int dx dy \xi^2 = K \rho^2, \quad (65a)$$

$$\frac{R}{L^2} \int dy \left(\int dx uv \right)^2 - \frac{12R}{L^2} \left(\int \int dx dy \cdot y uv \right)^2 = H \rho^4. \quad (65b)$$

Количества K и H имеют постоянное значение внутри конуса. Эти значения не зависят к тому же от L и от N . На основании неравенства Шварца H есть всегда положительное количество, тогда как K , наоборот, будет отрицательным для одних направлений в пространстве ξ и положительным для других. Количество $\frac{E}{L}$ может быть выражено теперь в виде:

$$\frac{E}{L} = K \rho^2 - H \rho^4. \quad (66)$$

Расстояние r какой-либо точки в пространстве ξ от начала дается выражением:

$$r^2 = \sum \xi_k^2 = \varepsilon^{-2} \int \int dx dy \psi^2 = \varepsilon^{-2} L \rho^2 = N \rho^2. \quad (67)$$

(Напомним, что число точек сети равно N ; это число равно отношению площади сети к ε^2 . Ширина этой площади равна единице, длина — L , а следовательно, $N = \varepsilon^{-2} L$.) Объем слоя, вырезанного из конуса

1) Вместо неравенства мы могли бы иметь равенство только в том случае, когда количество $\int dx uv$, рассматриваемое как функция y , было бы пропорционально y . Это, однако, невозможно, так как $uv = 0$ на стенках канала, т. е. при

$$y = \pm \frac{1}{2}.$$

2) В N -мерном пространстве. Прим. перев.

шаровыми поверхностями с радиусами r и $r + dr$, равней:

$$r^{N-1} dr d\chi = N^{\frac{N}{2}} \rho^{N-1} \cdot d\rho d\chi.$$

Таким образом уравнение (62) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \int d\chi \int_0^\infty d\rho \cdot \rho^{N-1} \cdot e^{\beta(K\rho^2 - H\rho^4)} = 0. \quad (68)$$

Постоянный множитель $N^{\frac{N}{2}}$ нами опущен, так как он не влияет на закон распределения. Интегрирование по $d\chi$ должно быть сделано по всем возможным направлениям в пространстве ξ .

Вместо этого уравнения мы рассмотрим предварительно приближенную форму уравнения, где интегрирование по $d\chi$ не сделано, и которое относится, следовательно, только к одному элементарному конусу. Так, полагая

$$Z_1 = \int_0^\infty d\rho \cdot e^{N \ln \rho + \beta(K\rho^2 - H\rho^4)},$$

(где для сокращения мы написали N вместо $N-1$), рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \beta} = 0.$$

Мы предположим, что для рассматриваемого конуса $K > 0$, так как в противном случае это уравнение не имело бы решения. Для определения Z_1 мы можем прибегнуть к приближенному способу оценки, исходя из того соображения, что показатель имеет максимум для некоторого значения ρ_0 переменной ρ . Это значение определяется уравнением:

$$\frac{N}{\rho_0} + 2\beta K \rho_0 - 4\beta H \rho_0^3 = 0, \quad (a)$$

которое дает:

$$\rho_0^3 = \frac{K + K\sqrt{1 + \frac{4NH}{\beta K^2}}}{4H}.$$

Ввиду того, что вторая производная показателя принимает при $\rho = \rho_0$ значение:

$$-\frac{N}{\rho_0^2} + 2\beta K - 12\beta H \rho_0^2 = -4\sqrt{\beta^2 K^2 + 4\beta NH},$$

мы можем написать для показателя выражение:

$$N \ln \rho_0 + \beta(K\rho_0^2 - H\rho_0^4) - 2\sqrt{\beta^2 K^2 + 4\beta NH} \cdot (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

Если мы предварительно предположим, что коэффициент при $(\rho - \rho_0)^2$ велик, то мы можем пренебречь ненаписанными членами разложения третьего и более высокого порядков. Мы найдем в таком случае сле-

дующее приближенное выражение для Z_1 :

$$Z_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{N \ln \rho_0 + \beta (K \rho_0^2 - H \rho_0^4)}}{(\beta^2 K^2 + 4\beta NH)^{\frac{1}{4}}}.$$

Обратимся теперь к условию $\frac{\partial Z_1}{\partial \beta} = 0$. Принимая во внимание уравнение (а), мы находим:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1 = K \rho_0^2 - H \rho_0^4 - \frac{2\beta K^2 + 4NH}{4(\beta^2 K^2 + 4\beta NH)} = 0, \quad (b)$$

При беспредельном увеличении L величина N может быть сделана сколь угодно большой. Предполагая предварительно, что β возрастает вместе с N , мы пренебрежем последним членом в уравнении (b). Оно примет тогда вид:

$$K \rho_0^2 - H \rho_0^4 \approx 0, \quad (c)$$

откуда

$$\rho_0^2 = \frac{K}{H},$$

а в таком случае из уравнения (а) следует равенство:

$$\beta = \frac{NH}{2K^2},$$

которое подтверждает предположение, сделанное о порядке величины β . Тот же результат получается при непосредственной подстановке значения ρ_0 в уравнение (b). Вводя для сокращения обозначение:

$$\frac{NH}{\beta K^2} = s,$$

мы можем написать уравнение (b) в следующем виде:

$$1 + 2s + \sqrt{1 + 4s} = \frac{4s}{N} \frac{1 + 2s}{1 + 4s},$$

которое при $N \rightarrow \infty$ имеет решение: $s = 2$.

Уравнение (с) равносильно равенству:

$$E|_{\rho=\rho_0} = 0.$$

Коэффициент при $(\rho - \rho_0)^2$ в разложении показателя принимает теперь значение $\frac{\beta NH}{K}$. Это значение может быть сделано сколь угодно большим при увеличении числа N , что и оправдывает принятый нами способ для вычисления Z_1 . В результате Z_1 принимает следующее значение (если написать опять $N - 1$ вместо N):

$$Z_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{3(N-1)}} \left(\frac{K}{H} \right)^{\frac{N}{2}}.$$

Этот результат показывает, что небольшие отклонения в значении отношения $\frac{K}{H}$ будут иметь очень большое влияние на соответствующее значение Z_1 . Предположим, что это отношение имеет некоторое макси-

мальное значение. Вычисленное значение для Z , соответствует максимальному значению, которое это количество принимает при изменении β . Естественно поэтому предположить, что при вычислении полного интеграла Z :

$$Z = \int d\chi \int_0^{\infty} d\rho e^{(N-1) \ln \rho + \beta (K\rho^2 - H\rho)}$$

будут иметь значение только те элементарные конусы, для которых отношение $\frac{K}{H}$ лишь очень мало отличается от его максимального значения. То значение β , которое дает для Z стационарное значение, будет приблизительно равно

$$\beta = \frac{NH}{2K^2}$$

при максимуме отношения $\frac{K}{H}$.

Таким образом мы приходим к следующему предположению: при изучении „наиболее вероятного“ распределения точек в пространстве ξ и при вычислении средних значений, относящихся к нормальному состоянию турбулентного движения, мы можем ограничиться рассмотрением только тех областей в пространстве ξ , которые расположены около точек, для которых выполняются условия:

$$E = 0 \quad \text{и} \quad \frac{K}{H} = \text{максимум}. \quad (69)$$

Охотно признаем, что приведенное рассуждение имеет только приближенное значение и что очень трудно определить размеры указанных областей в пространстве ξ . Увеличение числа измерений пространства ξ с увеличением L и числа N делает исследование этой проблемы очень сложным. Мы должны также иметь в виду, что разные виды поля скоростей, которые могут быть получены смещением сети вдоль оси Ox на длину, кратную e (число таких видов равно $L e^{-1}$), приведут к почти тем же самым значениям для K и для H ¹⁾.

Такому смещению сети соответствует перестановка координат в пространстве ξ и мы можем предполагать, что может существовать число $L e^{-1}$ различных конусов, для которых значение $\frac{K}{H}$ одинаково и принимает, например, максимальное значение. Наконец, остается отметить, что как K , так и H не меняют значения при обращении знака всех координат в пространстве ξ .

10. Дальнейшие приближения. Введение особого поля вихрей.

Несмотря на все затруднения, перечисленные в конце предыдущего параграфа, мы все же пойдем дальше по пути приближений и предпо-

¹⁾ Получающиеся значения не будут тождественны одинаковыми, так как при смещениях точки, лежавшие на границах $x = x_0$ или $x = x_0 + L$, становятся внутренними точками. Влияние этого обстоятельства будет, однако, очень незначительно.

жим, что при вычислении средних значений можно действительно ограничиться рассмотрением в пространстве ξ только некоторого числа малых элементов объема, равных между собою, с центром в тех точках, которые определяются условиями (69). Мы можем даже ограничиться рассмотрением только одного такого элемента, так как каждый из них дает то же значение. Это равносильно утверждению, что мы можем ограничиться определением поля относительного движения, которое удовлетворяет условию:

$$E = 0 \quad (69a)$$

(т. е. обыкновенному условию рассеяния) и условию:

$$\frac{K}{H} = \text{maximum}. \quad (69b)$$

Мы приходим, таким образом, к постановке задачи, напоминающей точку зрения, изложенную в другой нашей статье о сопротивлении в турбулентном движении (Proceedings Akademie Wetensch. te Amsterdam, т. 26, стр. 582, 1923). В этой статье мы пытались определить максимальное значение коэффициента сопротивления жидкости при турбулентном потоке.

Вводи обозначения [см. указанную статью, уравнение (52)]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int \int dx dy \cdot uvw &= \sigma, \\ \frac{1}{12L^2} \int dy \left(\int dx uv \right)^2 &= (1 + \tau) \sigma^2, \\ \frac{1}{12L} \int \int dx dy \zeta^2 &= \kappa \sigma \end{aligned}$$

и полагая, далее:

$$\rho^2 = \frac{1}{L} \int \int dx dy \psi^2 = \lambda \sigma,$$

мы найдем:

$$\frac{K}{H} \lambda \tau^{-1} (R^{-1} - \kappa R^{-2}).$$

Условие $E = 0$ дает для σ равенство [см. указанную статью, уравнение (53)]:

$$\sigma = \tau^{-1} (R^{-1} - \kappa R^{-2}).$$

Из выражения (63) для коэффициента C сопротивления мы находим ¹⁾:

$$\bar{C} = 6 (\sigma + R^{-1}).$$

В указанной статье мы определяли максимальное значение для σ . В настоящем случае мы ищем максимальное значение для $\frac{K}{H}$. Для того чтобы составить себе представление о порядке величины вводимых количеств, мы можем построить специальные виды поля относительных скоростей

¹⁾ В указанной статье — уравнение (54). В статье 1923 года мы для C получили значение, вдвое большее.

и вычислить для них соответствующие интегралы. Как было указано в упомянутой статье, то поле, которое дает большие значения для ϵ , должно удовлетворять условию, что большие напряжения вихрей находятся только в очень тонком слое вдоль стенок. Это обстоятельство может быть воспроизведено при построении поля скоростей, в котором „средняя длина волны“ мала около стенок и становится больше в центральной части потока. Такое поле может быть построено самым простым образом при помощи совокупности эллиптических вихрей типа, изученного Лоренцем ¹⁾. Эти вихри строятся из круговых вихрей путем сжатия их в отношении $\epsilon = 0,475$ в направлении под некоторым углом к оси Ox . Мы должны рассматривать две группы таких вихрей, одну вдоль стенки $y = -\frac{1}{2}$, где вихри таковы, что произведение uv по большей части отрицательно, и другую вдоль стенки $y = +\frac{1}{2}$, которая получается из первой путем отображения относительно оси Ox . Для вихревой области каждой группы мы определяем толщину D (размер в направлении ординат y), которая может изменяться от единицы до некоторого минимума D_0 . Рассматривая в частности вихри у стенки $y = -\frac{1}{2}$, мы определяем число вихрей и их среднее напряжение с таким расчетом, чтобы вихревой слой, толщина которого заключена между D и $D + dD$, вносил для значения y' :

$$y' = \frac{1}{2} + y < D$$

в значение интеграла

$$\frac{1}{L} \int dx \cdot uv = \overline{uv}$$

элементарную долю, равную:

$$-m \left(D^{-1} - \frac{3}{4} \right) dD \cdot \varphi \left(\frac{y'}{D} \right). \quad (\alpha)$$

В этом выражении m есть постоянная, а

$$\varphi(\eta) = \eta^4 (1 - \eta)^4$$

[см. равенство (55) упомянутой статьи; постоянный множитель m в ней опущен].

При помощи этой формулы значение $\overline{uv}$, обусловленное совокупностью всех вихрей, может быть подсчитано для любой ординаты y . Эти вычисления приводят к равенству:

$$\tau_0 \approx 2,129 D_0$$

[уравнение (57) указанной статьи]. Для каждого отдельного вихря удовлетворяется равенство:

$$\int \int dx dy \zeta^2 = \frac{294}{D^2} \left| \int \int dx dy \cdot uv \right|$$

¹⁾ H. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, т. I, стр. 48—52.

[уравнение (30) указанной статьи]. Интегралы здесь взяты по площади отдельного вихря. Поэтому представилась возможность подсчитать для всей системы вихрей также значение интеграла

$$\iint dx dy \zeta^2.$$

Подсчет дал для количества κ значение:

$$\kappa \approx 131 D_0^{-1}$$

[уравнение (58) указанной статьи]. Количество λ не было рассмотрено в указанной статье. Его можно вычислить тем же способом, как и количество κ при условии, если известен коэффициент α в уравнении:

$$\iint dx dy \psi^2 = \alpha D_0^2 \left| \iint dx dy uv \right|.$$

В этом уравнении интегралы относятся также к площади одного вихря. Нетрудно определить значение множителя α . Эллиптические вихри получаются из круговых вихрей при помощи сжатия последних в отношении ϵ . При этом скорости в направлении сжатия сокращаются в том же отношении. Следовательно, функция тока при эллиптическом вихре равна произведению на ϵ значения функции тока для той же точки при круговом вихре. Не передавая вычислений этого количества, приведем только полученный результат:

$$\alpha = 0,144,$$

что дает для λ значение:

$$\lambda \approx 0,112.$$

Следует отметить, что это количество, хотя бы в первом приближении, не зависит от D_0 .

Теперь мы можем внести значения τ , κ и λ в выражение для $\frac{K}{H}$.

Количество D_0 еще не было фиксировано, мы можем определить его значение с расчетом получить максимум для $\frac{K}{H}$. Легко видеть, что это значение то же, которое соответствует максимуму для σ . Отсюда следует, что условие (69b) равносильно условию максимального сопротивления. Иными словами, мы полностью приходим к постановке проблемы в настоящей нашей статье.

Мы получим, таким образом:

$$D_0 = 262 R^{-1}, \quad \sigma = 0,00090, \quad \frac{K}{H} = 0,00010, \quad \text{и } C = 0,0054.$$

Последнее значение во много раз больше экспериментально наблюдаемого.

Интересно рассмотреть в этой „модели“ движения распределение осредненных скоростей. В соответствии с уравнением (56) упомянутой нашей статьи мы имеем для значений y , меньших чем $\frac{1}{2} - D_0$ равенство:

$$\overline{uv} = \frac{m}{140} y$$

[мы и здесь имеем множитель m , введенный при выводе выражения (2); в соответствии с другим положением осей здесь вместо ординаты $y - \frac{1}{2}$ в нашей указанной выше статье введена ордината y]. Далее было найдено, что

$$\sigma = \int_{-\frac{1}{3}}^{+\frac{1}{3}} dy \cdot y \overline{uv} = \frac{m}{1680} \left(1 - \frac{8}{3} D_0\right) = 0,00090.$$

Вставляя оба эти значения в равенство (55) настоящей статьи, мы получим:

$$\frac{dU}{dy} = -y \left(12 - \frac{8}{3} \frac{m}{140} D_0 R\right) = -4,47 y.$$

Этот результат много лучше полученного в § 4, хотя кривая для U получается несколько более пологой, чем следует.

11. Общие замечания. Другая формулировка проблемы.

Результат, полученный в предыдущем параграфе, не вполне удовлетворителен. Не следует забывать, что мы свели все интегралы по всему пространству к значению подинтегральной функции в одной точке и поэтому дали каррикатурное выражение для общих уравнений. Возможно, следовательно, что наши уравнения сами по себе более ценны, чем это может казаться из рассуждения § 10, и быть может есть надежда на то, что более точные выводы из выражения (63) приведут к более удовлетворительным результатам. Это выражение действительно удовлетворяет всем тем требованиям, которые мы выставили в вышеупомянутой нашей статье. Оно обнимает собою даже нерегулярные смещения и случай деформации вихрей (см. вышеуказанную нашу статью).

В настоящем случае будет уместным изложить некоторые соображения о тех двух методах, при помощи которых мы получили выражения для функции распределения, и сопоставить оба эти метода между собою. Такое сопоставление имеет значение в особенности потому, что возможно развить еще третью систему формул, исходя из точки зрения, которая занимает как бы промежуточное положение между принципами, на которых основаны два изложенные выше метода.

Можно сделать замечание, что способ осреднения по координате x , принятый в § 8, приводит к тем же затруднениям, какие мы встретили при осреднении по времени. С введенным новым определением средних количеств, изменение в относительном движении в некоторой части канала повлечет за собою изменение и средних скоростей во всей длине канала. Более подробное исследование показывает, однако, что это затруднение только кажущееся. Выводы § 8 основаны на рассмотрении мгновенного состояния действительного движения. Все уравнения были выведены только для того, чтобы получить преобразование уравнения (56). При этом преобразовании U и P можно рассматривать как просто формальные количества, не придавая им специального физиче-

ского значения. Если состояние действительного движения известно, то значение для E может быть вычислено непосредственно из выражения (56) или по формуле (57).

Единственная предпосылка, имеющая большое физическое значение, выражена равенством (51с), на котором основан вывод уравнения (55). В рассуждениях § 8 мы предполагали, что оба эти равенства (51) и (55) имеют место в каждый данный момент времени. Поэтому при помощи последнего равенства (55) мы и могли исключить $\frac{dU}{dy}$ из выражения (56) для E .

Аналогичное замечание может быть сделано относительно выводов, сделанных в первой и второй частях настоящей статьи. Цель произведенных вычислений может быть выражена следующим образом: получить для большого промежутка времени значение интеграла по времени от скорости прироста энергии. При таком вычислении осредненные значения по времени могут рассматриваться как чисто формальные количества. Поэтому, по крайней мере в § 4, мы предполагали, что уравнение (27) имеет место для всех точек канала (в § 5 мы перешли к несколько более общей точке зрения).

Теперь мы можем, не делая ни той, ни другой предпосылки, занятой промежуточной точкой зрения и предположить, что уравнение (56) оправдывается только в среднем для большого промежутка времени. Мы можем также заменить уравнение (27) его интегралом по координате x . Последний прием, однако, не так просто может быть выполнен, так как для более строгого вывода следует исходить из уравнений (44). Тем не менее достаточно будет рассмотреть уравнение (55). Мы будем при этом придерживаться предпосылки, что полный поток жидкости через сечение канала (расход) остается безусловно постоянным. Эта предпосылка является кинематическим основанием для пограничных условий, налагаемых на функцию тока.

Имея в виду построить систему формул, совместимых с этими условиями, мы должны сохранить в уравнениях явные выражения действительных скоростей и исключить из них $P_I - P_{II}$ при помощи условия постановки расхода.

Мы можем поэтому написать следующие равенства [см. уравнения (55) и (56)]:

$$\frac{v}{L} = \frac{12y}{L} \int \int dx dy \cdot uuv - \frac{1}{L} \int dx uv + \frac{1}{R} \frac{dU}{dy} + \frac{12y}{R}, \quad (70a)$$

$$\frac{E}{L} = \frac{1}{L} \int \int dx dy (12uuv - R^{-1} \xi^2) - \frac{1}{R} \int dy \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \frac{12}{R}. \quad (70b)$$

В этих выражениях u , v и ξ выводятся из функции тока ψ обычным способом. U зависит от другой функции тока, зависящей только от y . Мы ее обозначим через Y , так что $U = Y'$. Пограничные условия для этих функций следующие:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = -\frac{1}{2}: \quad Y &= -\frac{1}{2}, \quad Y' = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ \text{при } y = \pm \frac{1}{2}: \quad Y &= +\frac{1}{2}, \quad Y' = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Пространство ξ должно быть теперь расширено $s-1$ новыми координатами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, которые представляют значения функции Y вдоль прямой, параллельной оси Oy в точках ее пересечения с прямыми нашей сети. Будет удобнее называть пространство, определяемое значениями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ пространством γ , сохраняя название пространства ξ для пространства, определяемого различными значениями одних количеств $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ и т. д. Значения скорости v (которая, как и Y , является функцией только ординаты y) в различных точках поперечной прямой, параллельной оси Oy , мы обозначим через v_k . При этом должны быть выполнены следующие условия:

$$\sum v E = 0, \quad \sum v v_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, s-1). \quad (71)$$

Суммирование должно быть произведено по всем ячейкам пространств ξ и γ .

Функция распределения получает следующее выражение:

$$v = A e^{\frac{\beta(E + \sum_k \gamma_k v_k)}{L}}.$$

Параметры $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ должны быть определены при помощи условий (71).

Если мы положим

$$Z = \sum e^{\frac{\beta(E + \sum_k \gamma_k v_k)}{L}} = \sum e^{\frac{\beta(E + \int dy \gamma v)}{L}}, \quad (72)$$

где знак суммы снова относится ко всем ячейкам пространства ξ и γ , то мы можем написать условия (71) в виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = 0, \quad \delta Z = 0 \quad \text{для произвольной вариации количества } \gamma(y). \quad (73)$$

Мы не будем входить в подробное рассмотрение этих уравнений и ограничимся некоторыми соображениями. Соединяя вместе различные члены показателя, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{E + \int dy \gamma v}{L} &= \\ &= \frac{1}{L} \int \int dx dy \left\{ -uv \left(-12y \int dy \gamma v + \gamma - 12y \right) - R^{-1} \zeta^2 \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{R} \int dy (U^2 - \gamma U') + \frac{12}{R} \left(\int dy \gamma v + 1 \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Та часть этого выражения, которая зависит от Y , всегда остается отрицательною. Часть, зависящая от ψ , имеет вид, напоминающий формулы § 4 части второй. Если мы положим:

$$\varphi^*(y) = R^{-1} \left(-12y \int dy \gamma v + \gamma - 12y \right), \quad (75)$$

то мы можем написать эту часть в виде:

$$- \frac{R}{L} \int \int dx dy \left\{ R^{-1} (\Delta \psi)^2 - \varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}.$$

Таким образом мы видим, что это количество будет определенной (дефицитной), всегда отрицательной функцией, если только функция φ^* будет удовлетворять тем же условиям, какие были наложены на функцию φ в § 4. Так для $y < 0$ мы имеем [ср. уравнение (36), де

$$y' = \frac{1}{2} + y]:$$

$$-12y \int dy \gamma y + \gamma - 12y < \frac{A}{R(\frac{1}{2} + y)^2}. \quad (76)$$

Когда β и $\gamma(y)$ известны, среднее значение для U' может быть получено из уравнения:

$$\bar{U}' = \frac{\sum U' e^{-\beta R^{-1} \int dy (\gamma y^2 - \gamma U')}}{\sum e^{-\beta R^{-1} \int dy (\gamma y^2 - \gamma U')}}. \quad (77)$$

Легко видеть, что функция U_m для которой показатель получает максимальное значение, определяется уравнением:

$$2Y_m^{IV} = 2U_m''' = \gamma''.$$

Следовательно,

$$\gamma = 2U_m' + c_1 y + c_2.$$

Мы можем предположить, что $\gamma = 0$ вдоль оси канала и, таким образом, принять $c_2 = 0$. Подставляя это значение в неравенство (76), мы получим:

$$2U_m' + 12y < \frac{A}{R(\frac{1}{2} + y)^2}.$$

Это неравенство напоминает результат, полученный в конце § 4, но следует заметить, что в данном случае U_m не равно среднему значению U .

Для выяснения вопроса требуется дальнейшее исследование.

Мне хотелось бы упомянуть о двух вопросах, которые связаны с нашими выводами.

Остается невыясненным вопрос, какое значение имеет число координат в пространстве ξ , в особенности, поскольку это число зависит от величины z [длины промежутков сети, введенной в пространство (x, y)]. Мы уже намекали на это обстоятельство в § 2 части второй в связи с уравнением (16). Другой вопрос связан со следующим обстоятельством: выводы § 9 делают очень вероятным, что для наиболее часто встречающихся состояний движения значение для E будет отличаться от нуля при достаточно большом L только на количества порядка:

$$\frac{L}{\xi} = \frac{2LK^2}{NH} = 2z^2 \frac{K^2}{H}.$$

Представляется неожиданным, что это выражение оказывается зависящим от величины z .

Еще один вопрос заслуживает рассмотрения. Он касается статистического веса отдельных состояний движения. Мы придали одинаковый вес равным объемам пространства ξ . Оставляя в стороне соображения (в § 2), связанные с теоремой Лиувилля, мы можем опять поставить вопрос о правильности такой предпосылки. Не может ли оказаться, что некоторые состояния движения а priori имеют большую вероятность? С точки зрения, принятой в статистической механике, это могло бы иметь место только в том случае, если бы состояния движения могли быть сами построены из каких-либо статистических „единиц“ различными способами. Но рассматриваемые нами состояния являются вполне определенными. Введение же понятия каких-либо „единиц“, из которых значение ψ в каждой точке поля могло бы быть различным образом построено, кажется в достаточной мере лишенным смысла.

Введение фундаментальных решений какого-нибудь уравнения четвертого порядка в частных производных для ψ вряд ли поможет в этом отношении. Каждое состояние движения, которое мы рассматриваем, может быть построено при помощи подобных функций одним только единственным способом. Введение таких функций равносильно введению новой системы координат в пространстве ξ , которая получается ортогональным преобразованием. Такое преобразование не изменит постоянной пропорциональности объема и статистического веса. Введение фундаментальных решений может быть полезно только в том отношении, что они позволяют с большей легкостью дать выражение для энергии и других подобных количеств.

Таким образом, повидимому, нет указаний, которые вынуждали бы нас к выбору другого определения статистического веса.

Б И Б Л И О Т Е К А
Белорусского Политехнического
ИНСТИТУТА
имени И. В. СТАЛИНА
Инв. № 9661

2-й этаж 50

О П Е Ч А Т К И

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
63	17 сверху	$= \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} y}{\nu}$	$= \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} y}{\nu}$
65	14 снизу	Фиг. 21	Фиг. 22

Зак. 3634. „Проблемы турбулентности“.