

Е. К. ПАЎЛАЎ

Д Е П

# КУРС МЕХА'НІКІ

ДЛЯ ТЭХНІКУМАЎ БУДАЎНІЧАЙ  
І ДАРОЖНАЙ СПЕЦЫЯЛЬНАСЦЕЙ

КНІГА ІІІ

СТАТЫКА ЗБУДАВАННЯУ

1) 303031  
381322

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
БИБЛИОТЕКА

НКЛП БССР

ДЗЯРЖАЎНАЕ НАВУКОВА-ТЭХНІЧНАЕ ВYДАВЕЦТВА  
М Е Н С К

1934

Стыль Ляшэвіча  
Карэктурa Каплан  
Тэх.-рэд. К. Фрыдман  
Набрана брыгадай Нячаева  
Здана ў набор 21/III—34 г.  
Падпісана да друку 10-V—34 г.  
Адк. кар. друк, В. Гараўскі.



## П Р А Д М О В А

У сучасны момант, у момант перагляду і перабудовы методыкі выкладання ў вышэйшай школе і тэхнікумах у адпаведнасці з асноўнымі задачамі соцыялістычнай рэканструкцыі, нашаму студэнцтву вельмі патрэбны занова апрацаваныя, метадалагічна вытрыманыя падручнікі, якія адпавядалі б апошнім дасягненням навукі і тэхнікі.

Пастанова ЦК ВКП(б) і ЦВК СССР „Аб навучальных праграмах і рэжыме ў вышэйшай школе і тэхнікумах“—уносіць вельмі важныя карэктыў у практыку выкладання: лекцыі павінны актывізавацца і прапрацоўвацца. У сувязі з гэтым палажэннем пастановы падручнік павінен аб'яднаць абодвы састаўныя элементы вучэбнай літаратуры—тэарэтычны курс і зборнік прыкладаў і задач для практыкавання шляхам іх зліцця ў агульны дапаможнік для поўнага ўсваення дысцыпліны.

З другога боку, у звязку са спецыялізацыйнай тэхнікумай, новы вучэбны дапаможнік павінен адпавядаць спецыфічным праграмным асаблівасцям тэхнікумай кожнай галіны. Улічваючы гэтыя два асноўныя палажэнні, аўтар і ўклаў курс механікі для тэхнікумай, дарожнай і будаўнічай спецыяльнасцей. Разлічваючы на аудыторыю з пролетарскага студэнцтва, аўтар імкнуўся весці выкладанне зместу ў агульна-даступнай форме, ілюструючы яго дастатковай колькасцю чарцяжоў.

Прымаючы пад увагу важнасць паралельнага вырашэння пытанняў графічным і аналітычным метадам, аўтар прымяняў гэты прыём у неабходных выпадках, наколькі дазволіў аб'ём кніжкі. Некаторыя найбольш простыя пытанні тэорыі аўтар пакідаў на самастойнае вырашэнне студэнтамі ў час лабараторных заняткаў.

Што датычыць прыкладаў і задач, то пры іх падборы мелася на ўвазе як паглыбленне ведаў па тэорыі, так і іх дапасаванне на практыцы, г. зн. развіццё навыкаў правільнага вырашэння практычных пытанняў у дарожных і будаўнічых вобласцях тэхнікі.

Аўтар таксама лічыць метаэагодным у кожным раздзеле спачатку даваць досыць значную частку прыкладаў і задач з рашэннямі, а потым ужо задачы без рашэнняў для практыкавання.

## У С Т У П

Статка збудаванняў, якая складае другую частку будаўнічай механікі (першая частка яе — „Супраціўленне матэрыялаў“, займаецца даследаваннем устойлівасці і трываласці збудаванняў. У адрозненне ад супраціўлення матэрыялаў, якое даследуе пругкія ўласцівасці і законы супраціўлення паасобнага цвёрдага цела пры дзеянні на яго знешніх сіл, — статка збудаванняў займаецца даследаваннем законаў супраціўлення сістэм пругкіх цвёрдых цел, у выглядзе маставых і кроквенных ферм, земляных адкосаў, скляпенняў і інш.

Для дасягнення сваіх мэт статка збудаванняў карыстаецца двума метадамі: па-першае, аналітычным, вызначаючы ўсе неабходныя велічыні пры дапамозе формул і вылічэнняў, і па-другое, графічным, вызначаючы тыя-ж велічыні пры дапамозе геаметрычных пабудов, толькі карыстаючыся цыркулем і лінейкай.

Графічныя спосабы разліку ў большасці выпадкаў больш простыя, чым аналітычныя, чаму патрабуюць значна менш часу для дасягнення тых-жа вынікаў. Апрача гэтага графічныя спосабы разліку з прычыны сваёй нагляднасці, дазваляюць адразу прыкмеціць вокам кожную памылку, між тым для выяўлення памылак пры аналітычных разліках патрэбна грунтоўная праверка ў большасці выпадкаў доўгіх матэматычных выкладак.

Аднак найбольш просты і хуткі метада разлікаў — гэта рацыянальнае камбінаванне абодвух спосабаў — графічнага і аналітычнага, а не выкарыстанне кожнага з іх паасобку, у чыстым іх выглядзе. Такі камбінаваны метада дае магчымасць прыстасаваць да кожнага выпадку той спосаб, які прасцей і хутчэй прыводзіць да мэты.

Адаючы перавагу графічным метадам доказы і разліку, мы пры выкладанні гэтага курса ўсё-ж будзем карыстацца і аналітычнымі доказамі і разлікамі, калі яны акажуцца больш простымі і больш нагляднымі, а таксама будзем падаваць паралельна той і другі метада. Адмовіцца зусім ад аналітычнага метада нерацыянальна, па-першае, таму, што ён у некаторых выпадках больш просты за графічны і, па-другое, што графічны метада патрабуе некаторай габітнай абстаноўкі, што рэдка бывае на месцы выканання работ, дзе часта для тае ці іншае пабудовы патрэбна зрабіць некаторыя неадкладныя разлікі.

## АСНОЎНЫЯ ПАНЯЦЦІ

### § 1. Вымярэнне і графічная пабудова сіл

Адзінкай для вымярэння сіл служыць адзінка вагі, іменна кілограм; адзінкамі, вытворнымі ад кілограма, з'яўляюцца грам і тона. Велічыня сілы, вымеранай у прынятых адзінках, выражаецца некаторым лікам; абазначым яго літарай  $P$ . Сіла  $P$ , прыкладзеная ў пункце  $A$  (чарц. 1), гранічна прадстаўляецца адрэзкам  $AB$ , адкладзеным ад пункта прылажэння ў кірунку сілы. Даўжыня адрэзка змяшчае  $P$  адзінак даўжыні і залежыць ад выбранага маштабу. Так, напр., пры маштабе  $1 \text{ см} = 500 \text{ кг}$ , сіла, роўная  $3000 \text{ кг}$ , выразіцца адрэзкам  $AB = 3000 : 500 = 6 \text{ см}$ . Наадварот, ведаючы велічыню сілы  $P$  і адрэзак, якім яна прадстаўляецца, можна вызначыць маштаб. Пункт  $A$  называецца *пачаткам сілы*  $P$ , пункт  $B$  — *канцом сілы*. У канцы  $B$  ставіцца стрэлка, якая ўказвае кірунак сілы.



Чарц. 1.

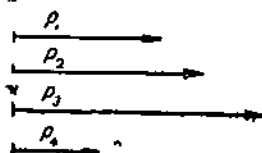
Сілы могуць складацца і раскладацца. Пад складаннем сіл разумеюць знаходжанне роўнадзейнай іх, г. зн. адной такой сілы, дзеянне якой роўна агульнаму дзеянню ўсіх даных сіл. Даная складаемая сілы носяць назву *складаючых*. Раскладанне сіл ёсць дзеянне адваротнае складанню, г. зн. зводзіцца да знаходжання двух ці некалькіх сіл, супольнае дзеянне якіх роўна дзеянню данай сілы, прынятай як-бы за роўнадзейную даных сіл.

### § 2. Сілы, накіраваныя па адной прамой

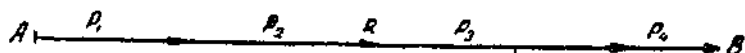
Калі адвольны лік сіл адволькавага кірунку дзейнічае па адной прамой, то роўнадзейная роўна іх суме. Кірунак роўнадзейнай супадае з кірункам заданых сіл.

Напрыклад:  $P_1, P_2, P_3$  і  $P_4$  — заданыя сілы (чарц. 2),  $AB = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$  — роўнадзейная  $R$  даных сіл, якая мае кірунак сіл  $P$ , г. зн. ад  $A$  да  $B$ .

Пры складанні двух сіл рознага кірунку роўнадзейная  $R$  роўна іх розніцы і мае кірунак большай сілы. Няхай, напрыклад, трэба



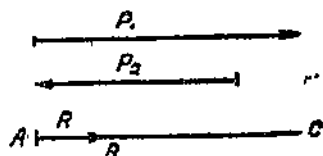
скласці 2 сілы  $P_1$  і  $P_2$ ; тады большая сіла  $P_1$  адкладаецца ад  $A$  ў кірунку яе дзеяння да пункта  $C$ , сіла-ж  $P_2$  адклад-



Чарц. 2.

аецца ад  $C$  у адваротным кірунку да пункта  $B$ ; роўнадзейная  $R = AB$ .

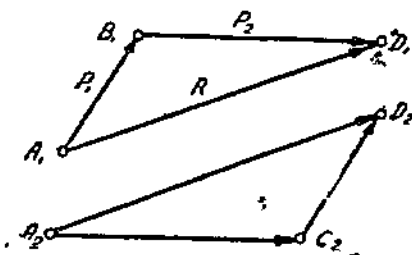
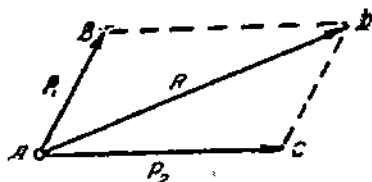
Раскладанне адной сілы на дзве або наогул на  $n$  складаючых магчыма толькі ў тым выпадку, калі задана па велічыні і кірунку адна складаючая ці ў агульным выпадку  $n-1$ . У супраціўным выпадку задача робіцца неазначанай, і дапускае бесканечнае мноства рашэнняў.



Чарц. 3.

### § 3. Сілы, прыложаныя ў адным пункце

Калі на пункт  $A$  дзейнічаюць дзве якія-небудзь сілы  $P_1$  і  $P_2$ , то роўнадзейная іх становіць сабою дыяганаль паралелаграма, пабудаванага на гэтых сілах. У звязку з тым, што ў паралелаграме супроцьлеглыя бакі роўны і паралельны, то для вызначэння роўнадзейнай няма патрэбы будаваць увесь паралелаграм,



Чарц. 4.

а дастаткова пабудоваць ці трохвугольнік  $A_1B_1D_1 = ABD$  ці  $A_2C_2D_2 = ACD$ .

Разглядаючы гэтыя трохвугольнікі, заўважаем, што ў іх:

- 1) пры пераходзе ад адной данай сілы да другой кірунак іх

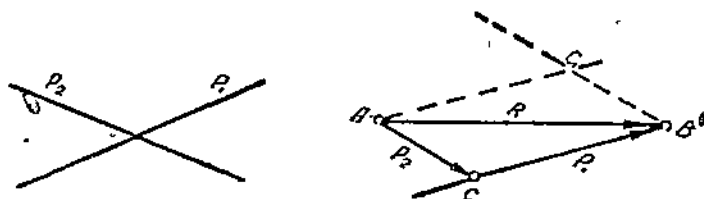
дзеяння не мяняецца, а ідзе ў адным сэнсе, роўнадзейная-ж накіравана ў *другім* сэнсе; 2) велічыня і кірунак роўнадзейнай не залежыць ад парадку складання сіл. Адсюль вынікае наступнае правіла: для пабудовы роўнадзейнай двух сіл, прыложаных у адным пункце, трэба адкласці любую з гэтых сіл па паралелі да гэтай сілы; праз канец  $B$  гэтай сілы правесці паралель да другой сілы і адкласці яе ад  $B$  так, каб сэнс кірунку ў пункце  $B$



Чарц. 5.

не мяняўся. Тады прмая, якая злучае пачатак  $A$  першай сілы з канцом  $C$  другой сілы з суароцьлеглым даным сілам кірункам, даць велічыню і кірунак роўнадзейнай (чарц. 5). Трохвугольнік  $ABC$  носіць назву *трохвугольніка сіл*, а прмая  $AC$  — *замыкаючай*.

Для раскладання адной сілы на дзве складаючыя даных кірункаў трэба правесці праз пачатак і канец гэтай сілы паралелі да заданых кірункаў, тады пункт перасячэння  $C$  (ці  $C_1$ , гледзячы

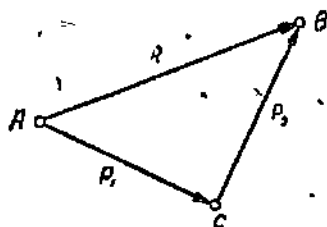


Чарц. 6.

па тым, да якой сілы праведзены паралелі праз дадзены канец) вызначыць велічыні шуканых складаючых сіл  $P_1$  і  $P_2$  (чарц. 6).

З падамага вынікае, што ва ўсіх трохвугольніках, у якіх адзін бок выражае сілу  $R$ , два другія бакі можна разглядаць, як складаючыя  $P_1$  і  $P_2$  гэтай сілы, прычым стрэлкі апошніх павінны быць накіраваны ў адваротным  $R$  сэнсе (чарц. 7).

Калі дана раскладзі сілу  $R$  (чарц. 8) на дзве складаючыя заданых велічынь, то для знаходжання іх кірункаў трэба з пачатку і канца данай сілы  $R$  апісаць



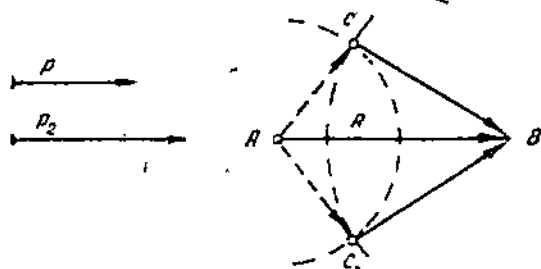
Чарц. 7.

дугі радыусамі, роўнымі даным сілам; пункты перасячэння дуг  $C$  ці  $C_1$  (бо заўжды атрымліваюцца 2 рашэнні) вызначаюць іх кірунак,

Раскладанне магчыма пры ўмове, калі  $R$  менш сумы і больш розніцы двух даных па велічыні сіл.

**Задача.** Раскладзі сілу  $R$  на 2, калі дана велічыня і кірунак адной складаючай  $P_1$ .

**Задача.** Знайсі сілу, што нацягвае часткі тросу, які падтрымлівае ліхтар вагою ў 5 кг; левая частка тросу ўтварае з вертыкаллю вугал у  $30^\circ$ , а правая ў  $45^\circ$ .



Чарц. 8.

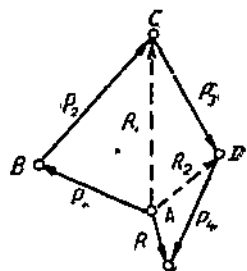
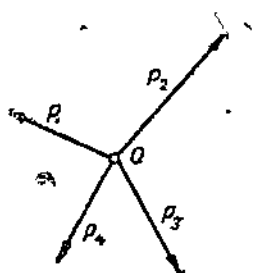
Пры складанні некалькіх сіл, прыложаных у адным пункце, спачатку складаюць 2 якія-небудзь сілы (чарц. 9)  $P_1$  і  $P_2$  і знаходзяць іх роўнадзейную  $R_1$  (AC). Атрыманую роўнадзейную складаюць з трэцяй сі-

лай  $P_3$ ; замыкаючая AD дасць роўнадзейную  $R_2$  сіл  $R_1$  і  $P_3$ , ці, што тое самае, сіл  $P_1, P_2$  і  $P_3$ . Такім-жа чынам складаюць сілы  $R_2$  і  $P_4$ ; замыкаючая AE дасць роўнадзейную сіл  $P_1, P_2, P_3$  і  $P_4$ . Разглядаючы многавугольнік ABCDE, лёгка ўбачыць, што прамежныя роўнадзейныя  $R_1$  і  $R_2$  можна не праводзіць, а для знаходжання агульнай роўнадзейнай дастаткова пабудавать, пачынаючы з пункта A многавугольнік так, каб пачатак кожнай наступнай сілы супадаў з канцом папярэдняй і кірунак сіл быў у аднолькавым сэнсе. Замыкаючая, якая злучае пачатак першай сілы з канцом апошняй, дае роўнадзейную ўсіх сіл, пры гэтым кірунак яе будзе адваротным кірунку астатніх сіл.

Такі многавугольнік называецца *многавугольнікам сіл*. Парадак складання сіл не мае ўплыву на роўнадзейную. Праверыць гэтае палажэнне могуць самі чытачы.

**Задача** раскладання адной сілы больш чым на 2 складаючыя заданых кірункаў, дапускае бесканечную колькасць рашэнняў, чаму і з'яўляецца неазначанай задачай.

Сілы, прыложаныя ў адным пункце, узаемна ўроўнаважваюцца, калі іх роўнадзейная роўна нулю. У гэтым выпадку апошняя



Чарц. 9.

вяршыня многавугольніка сіл супадае з першай вяршыняй і многавугольнік сіл называецца *замкнутым*. Такім чынам, для роўнавагі сіл, прыложаных у адным пункце, неабходна і дастаткова, каб многавугольнік сіл быў замкнутым.

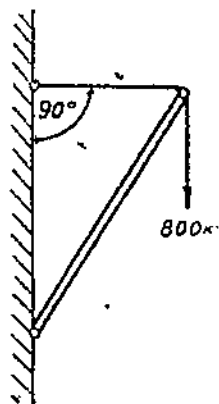
У замкнутым многавугольніку сіл цяжэнне бакоў, якое паказана стрэлкамі, в'яжэцца непарарывным, і ні ў адным вугле не бывае сустрэчы двух кірункаў. Такі многавугольнік сіл называецца *планам сіл*.

Калі ёсць адвольны лік узаемна ўроўнаважаных сіл з агульным пунктам прылажэння, то кожная з іх у плане сіл роўна па велічыні і супроцьлегла па кірунку роўнадзейнай усіх іншых сіл. Такім чынам, калі ў плане сіл змяніць кірунак цяжэння адной са складаючых, то апошняя будзе становіць сабой роўнадзейную ўсіх іншых сіл.

**Задача.** На абсалютна гладкай нахіленай роўніцы, якая ўтварае з гарызонтам вугал  $\alpha$ , ляжыць цела вагою  $P$ . На роўніцы яно ўтрымліваецца ніткай, працягнутай паралельна нахіленай роўніцы і прымацаванай да нерухомага пункта. Патрэбна вызначыць ступень нацягнення ніткі.

**Задача.** Знайсці вугал натуральнага адкосу гравітацыі, для якога каэфіцыент цярця роўны  $m = 0,7$ .

**Задача.** Знайсці супраціўленне апор кроквеннай фермы, на якую цісне вецер з сілаю 1000 кг. Вецер дэме справа, яго ціск прыложан да сярэдзіны скату. Нага кроквы даўжынёй у 4 м утварае з гарызонтам вугал  $33^\circ$ , адлегласць паміж восямі апор, з якіх адна шарнірная рухомая, а другая шарнірная нерухома—6,70 м. Вагу фермы не браць пад увагу.



Чарц. 10.

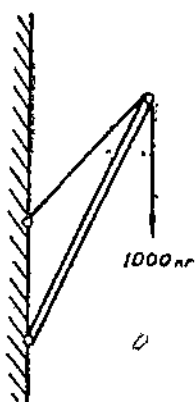
**Задача.** Для ўзняцця грузаў умацавалі ўверсе блок і перакінулі праз яго канат. Рабочыя цягнуць за канец каната, нахіленага да гарызонта пад вуглом у  $45^\circ$ . З проц. іх ўсілля ідзе на перамаганне шкодных супраціўленняў. Знайсці, якое патрэбна ўсілле для ўзняцця груза ў 100 кг і вызначыць нацягненне канату, які падтрымлівае блок ўверсе.

**Задача.** Брускі  $AC$  і  $BC$  прымацаваны ў пунктах  $A$  і  $B$  да вертыкальнай сцяны, а ў пункце  $C$  злучаны між сабою; брусок  $AC$  мае кірунак гарызантальны, брусок  $CB$  утварае з гарызонтам вугал  $\alpha$ ; злучэнні ў пунктах  $A$ ,  $B$  і  $C$ —шарнірныя. Да шарнірнага балта  $C$  прыложана вертыкальная сіла  $P$ . Трэба вызначыць ўсілля ў брусках.

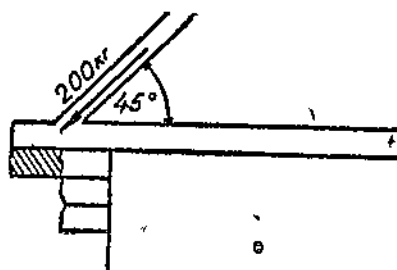
**Задача.** Груз вагою 800 кг падвешан да падкосу даўжынёй 2,5 м, падкос утрымліваецца цяжам, даўжыня якога 1,5 м. Вызначыць ўсілле ў падкосе і цяжы (чарц. 10).

**Задача.** Па нахільных досках даўжынёй у 3 м укатваюць груз, вагою ў 750 кг, пры дапамозе вяроўкі, працягнутай паралельна гэтым доскам. Якую сілу трэба прылажыць, калі вышыня пад'ёму  $= 1$  м.

**Задача.** На бэльку даўжынёй у 5,5 м, адзін канец якой умацаваны ў сцяне, а другі падтрымліваецца цяжам даўжынёю ў 6 м, прывешан груз у 200 кг. Вызначыць усілы, якія ўзнікаюць у цяжы і бэльцы пад уплывам груза.



Чарц. 11.



Чарц. 12.

**Задача.** Падкос даўжынёй у 3 м утрымліваецца цяжам даўжынёй 2,5 м; на канцы падкосу вісіць груз у 1000 кг (чарц. 11). Вызначыць дзеянне груза на падкос і цяж, калі адлегласць між замацаванымі на сцяне канцамі падкосу і цяжа, 1 м.

**Задача.** У кірунку нагі кроквы (чарц. 12) дзейнічае сіла ў 200 кг. Якое ўсілле атрымліваецца ў кірунку зацяжкі і якая сіла дзейнічае ў вертыкальным кірунку, калі вугал між нагой кроквы і гарызантальнай зацяжкай  $= 45^\circ$ .

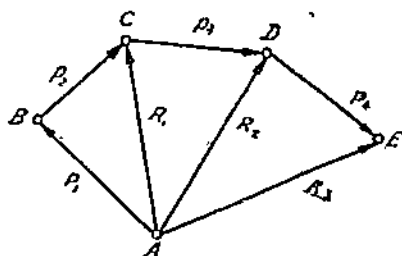
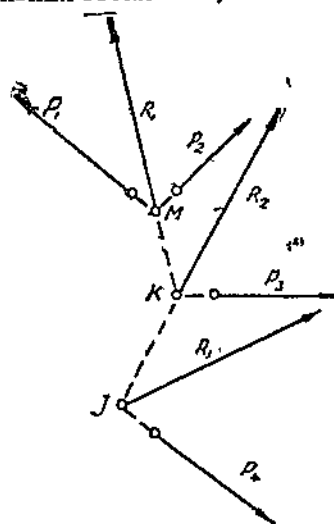
## § 4. Сілы, прыложаныя да розных пунктаў

Калі даныя сілы прыложаны да розных пунктаў роўніцы і кірункі іх не перасякаюцца ў адным пункце, то складаць іх можна наступным парадкам: сілы  $P_1$  і  $P_2$  (чарц. 13) працягнуць да перасячэння ў пункце  $M$  і скласці па спосабу трохвугольніка сіл у адну роўнадзейную  $R_1$ , якая прыложена ў тым-жа пункце. Гэта роўнадзейная працягваецца да перасячэння з сілай  $P_3$  у пункце  $K$ , з якой і складаецца ў роўнадзейную  $R_2$  з пунктам прылажэння  $K$ . Апошняя роўнадзейная працягваецца да перасячэння з сілай  $P_4$  у пункце  $J$ , складаецца з гэтай сілай у роўнадзейную  $R_3$  і г. д. да атрымання агульнай роўнадзейнай.

З многавугольніка сіл можна бачыць, што для атрымання велічыні і кірунку роўнадзейнай няма патрэбы праводзіць прамежныя роўнадзейныя, бо знаходзіцца яна тым-жа спосабам, як і ў выпадку, калі-б усе сілы былі прыложаны ў адным пункце.

Пры гэтым застаецца нявырашаным пытанне аб пункце прылажэння гэтай сілы, бо немагчыма вызначыць палажэнне пунктаў  $K$  і  $J$ .

Спосаб гэты аднак нязручны тады, калі даныя сілы перасякаюцца пад вельмі вострым вуглом, ці за межамі чарцяжа, і зусім не можа быць скарыстан, калі сілы паралельныя.

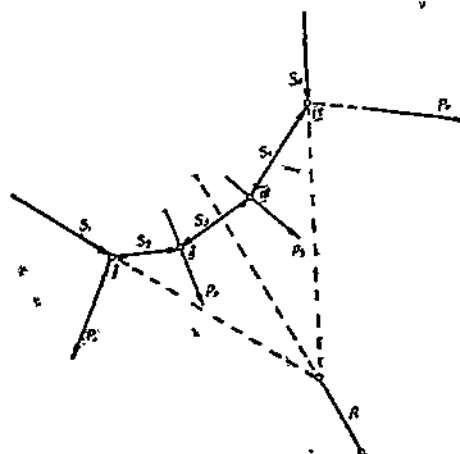


Чарц. 13.

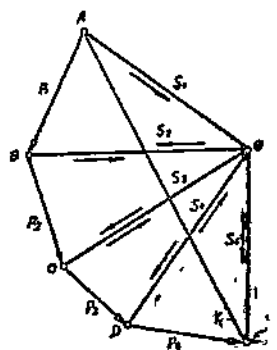
## §5. Вярочны многавугольнік

Існуе другі, больш агульны спосаб, які не патрабуе пабудовы гэтых пунктаў перасячэння.

Дапусцім, што патрэбна пабудаваць роўнадзейную сіл  $P_1, P_2$



Чарц. 14.



$P_3, P_4$  (чарц. 14). Будзем спачатку многавугольнік сіл  $ABCDE...$ , з якога вызначаецца велічыня і кірунак роўнадзейнай  $R$ . Сапраўднае-ж месца  $R$ , г. зн. пункт прылажэння яе вызначаецца наступным

чынам. Выбіраем у многавугольніку сіл адвольны пункт  $O$  і праводзім прамыя  $OA$  і  $OB$ , якія разглядаем, як складаючыя сілы  $P_1$  з кірункамі, указанымі стрэлкамі ўнутры трохвугольніка  $AOB$ . Узяўшы на сіле  $P_1$  адвольны пункт  $I$ , як пункт прылажэння гэтай сілы, раскладаем  $P_1$  у гэтым пункце на складаючыя, для чаго праводзім праз пункт  $I$   $S_1$  і  $S_2$ , паралельныя і роўныя  $AO$  і  $BO$ . Такім чынам сілу  $P_1$  замяняем двума сіламі з кірункамі, указанымі стрэлкамі каля гэтай сілы. Далей праводзім у многавугольніку сіл прамую  $OC$  і разглядаем  $OB$  і  $OC$ , як складаючыя сілы  $P_2$  з кірункамі па стрэлках у трохвугольніку  $BOC$ . Пунктам прылажэння сілы  $P_2$  выбіраем пункт  $II$  перасячэння яе з  $S_2$  і раскладаем  $P_2$  у гэтым пункце на сілы  $S_2$  і  $S_3$ , паралельныя і роўныя  $BO$  і  $CO$ . Складаючая  $S_2$  сілы  $P_2$  супадае з складаючай  $S_2$  сілы  $P_1$ , бо пункт  $II$  узяты на апошняй складаючай і абедзве яны паралельныя адной і той-жа, прамой  $BO$ . З многавугольніка сіл відаць, што яны роўны паміж сабой і маюць узаемна супроцьлеглыя кірункі. Правёўшы гэтак сама прамыя  $OD$  і  $OE$  і расклаўшы сілы  $P_3$  і  $P_4$  у пунктах  $III$  і  $IV$ , якія ляжаць на працягу папярэдніх сіл, на складаючыя  $S_3$ ,  $S_4$  і  $S_4$ ,  $S_5$  замяняем усе даныя сілы  $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$  іх складаючымі. Складаючыя  $S_3$  і  $S_4$ , таксама як і  $S_2$ , дзейнічаюць папарна па адной і той-жа прамой і папарна-ж роўны, а таму так-жа сама, як і  $S_2$ , узаемна знішчаюцца; дзве-ж сілы  $S_1$  і  $S_5$ , якія засталіся, замяняюць сабой усю сістэму сіл  $P_1$  і  $P_2 \dots$ . З многавугольніка сіл можна бачыць, што роўнадзейная  $R$  сіл  $P_1, P_2 \dots$  у той-жа час ёсць і роўнадзейная сіл  $AO$  і  $OE$  ( $S_1$  і  $S_5$ ), г. зн. яна павінна прайсці праз пункт перасячэння сіл  $S_1$  і  $S_5$ . Сілы  $S_1, S_2$  і  $S_3 \dots$  можна разглядаць як сілы, якія ўроўнаважваюць даныя сілы  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , кірункі-ж іх у гэтым выпадку будуць адваротнымі ўказаным на чарцяжы. Прамежныя сілы  $S_2, S_3$  і  $S_4$  і тут знішчаюцца, як роўныя і ўзаемна супроцьлеглыя. Астатнія сілы —  $S_1$  і  $S_5$  ўроўнаважваюцца роўнадзейнай  $R$ , якая і ў гэтым выпадку павінна прайсці праз пункт перасячэння сіл  $S_1$  і  $S_5$ .

Пункт  $O$ , у якім перасякаюцца прамыя  $OA, OB, OC \dots$ , называецца *полюсам*. З прычыны таго, што пункт  $O$  выбран адвольна, то і ўсякі другі пункт можа служыць полюсам і палажэнне яго зусім адвольнае. Прамыя  $OA, OB, OC \dots$  наз. *полюснымі променямі*, лік променяў заўсёды на адзінку больш ліку даных сіл, ломаная лінія  $S_1, S_2$  і  $S_3 \dots$  носіць назву *вяровачнага многавугольніка*, ці *многавугольніка Варыньёна*. Прамая  $S_1, S_2 \dots$  наз. *бакамі* вярочнага многавугольніка, а з іх  $S_1$  і  $S_5$  — *крайнімі бакамі*. Вярочны многавугольнік цалкам нагадвае форму невагомай вярочкі, якая знаходзіцца ў роўнавазе пад дзеяннем прыложаных у вузлавых пунктах даных сіл. Выгляд вярочнага многавугольніка залежыць ад палажэння полюса; з тае прычыны, што полюс можа быць выбран адвольна, то для данай сістэмы сіл можа быць пабудавана бесканечнае мноства вярочных многавугольнікаў, але ўсе яны маюць адну ўласцівасць, якая закля-

чаецца ў тым, што пункты перасячэння крайніх бакоў ляжаць на адной прамой ( $R$ ). Прадастаўляем чытачам самім пераканацца ў гэтым, узяўшы (чарц. 14) за полюс другі пункт і пачаўшы пабудову вярэвочнага многавугольніка не з пункту I, а з другога адвольнага, які ляжыць на кірунку сілы  $P_1$ .



Чарц. 15.

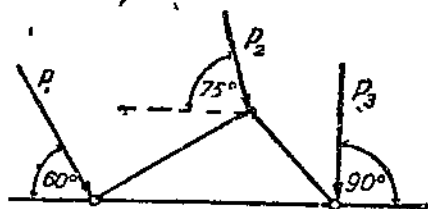
З папярэдняга вынікае наступнае правіла вызначэння роўнадзейнай спосабам вярэвочнага многавугольніка:

1. Бяруць маштаб сіл і адлегласцей і будуюць чарцеж з паказаннем усіх сіл.

2. Будуюць многавугольнік сіл; яго замыкаючая дасць па велічыні і кірунку роўнадзейную.

3. Прымаюць адвольны пункт за полюс і праводзяць з яго промені ва ўсе вяршыні сілавога многавугольніка; пачынаючы з адвольнага пункта на адной з сіл будуюць вярэвочны многавугольнік; яго бок між якіх-небудзь двух сіл павінен быць паралельны променю, праведзенаму ў вяршыню сілавога многавугольніка, дзе адна з гэтых сіл пачынаецца, а другая канчаецца.

4. Роўнадзейная пройдзе праз пункт перасячэння крайніх бакоў вярэвочнага многавугольніка. Як велічыня і кірунак, так і пункт прылажэння роўнадзейнай не залежаць ад парадку складання даных сіл у многавугольніку сіл. Пабудова застаецца такою-ж, неабходна толькі мець на ўвазе, што ў вярэвочным многавугольніку бок, паралельны пэўнаму променю, злучае тыя сілы, якія ў многавугольніку сіл раздзяляюцца гэтым променем.



Чарц. 16.

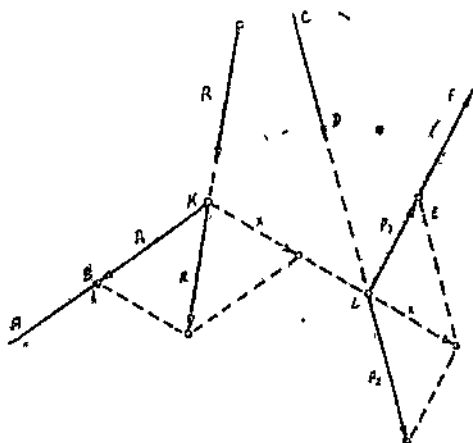
Задача. Складзі пры дапамозе вярэвочнага многавугольніка сілы  $P_1 = 3 \text{ т}$ ,  $P_2 = 5 \text{ т}$ ,  $P_3 = 4 \text{ т}$ ,  $P_4 = 7 \text{ т}$  і  $P_5 = 2 \text{ т}$ , спачатку ў парадку іх паслядоўнасці, а потым у парадку:  $P_1$ ,  $P_3$ ,  $P_5$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  (чарц. 15).

Задача. Знайсці роўнадзейную ціску на кроквенную ферму вагі крышы, пакрытай снегам, і ціску ветру, які дзмі злева; іх дзеянне выражаецца сіламі:  $P_1 = 500 \text{ кг}$ ;  $P_2 = 1000 \text{ кг}$  і  $P_3 = 375 \text{ кг}$ , прыложанымі, як паказана на чарц. 16.

## § 6. Раскладывание сил

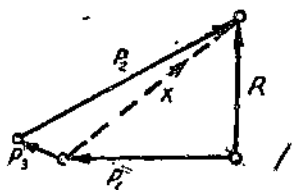
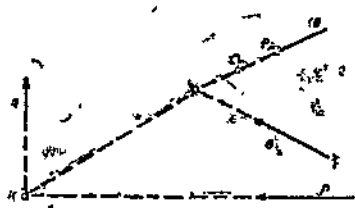
Задачу гэту магчыма рашыць толькі ў тым выпадку, калі патрэбна сілу раскласці на 3 складаючыя, якія не перасякаюцца ў адным пункце, па трох даных кірунках. Пры большым ліку складаючых атрымоўваецца бесканечнае мноства рашэнняў, чаму задача робіцца неазначнай.

Дапусцім, што патрэбна даную сілу  $R$  раскласці на 3 складаючыя, якія дзейнічаюць у трох даных кірунках  $AB$ ,  $CD$  і  $EF$  і не перасякаюцца ў адным пункце.



Чарц. 17.

Перш за ўсё вызначаем пункт перасячэння аднаго з даных кірункаў, напрыклад,  $AB$  з данай сілай; у гэты пункт  $K$  пераносім сілу  $R$ ; знаходзім пункт перасячэння  $L$  двух другіх даных кірункаў; пункт  $K$  і  $L$  злучаем. Сілу  $R$  раскладаем па двух кірунках:  $AB$  і  $KL$  на сілы  $P_1$  (першая шуканая складаючая) і  $X$ . Сілу  $X$  пераносім у пункт  $L$ , дзе раскладаем яе па двух кірунках:  $CD$  і  $EF$  на дзве складаючыя  $P_2$  і  $P_3$  (чарц. 17). Тую-ж задачу можна рашыць пры дадзёным многавугольніку сіл (чарц. 18). Даная сіла  $R$  раскладаецца спачатку на сілы  $P_1$  і дапаможную сілу  $X$  у кірунках, ад пункта перасячэння  $R$  з  $P_1$  —  $K$  да пункта  $L$  перасячэння кірункаў  $CD$  і  $EF$ .



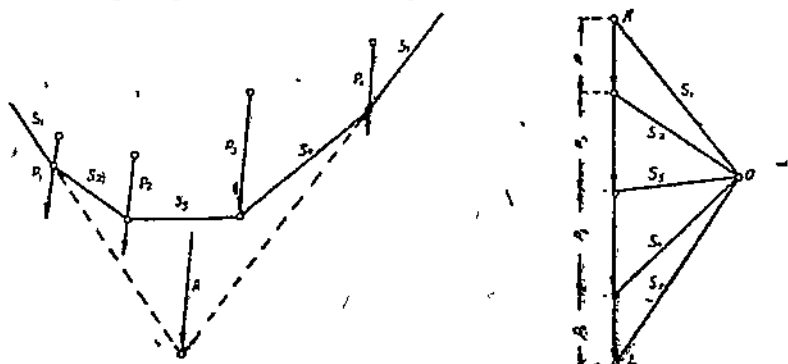
Чарц. 18.

Нарэшце сіла  $X$  раскладаецца на  $P_2$  і  $P_3$ , якія дзейнічаюць у кірунках  $CD$  і  $EF$ , і перасякаюцца ў пункце  $L$ .

Калі сіла  $R$  павінна ўроўнаважвацца сіламі  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$ , то пры той-жа велічыні іх і той-жа пабудове кірунак іх будзе толькі супроцьлеглым.

## § 7. Паралельныя сілы

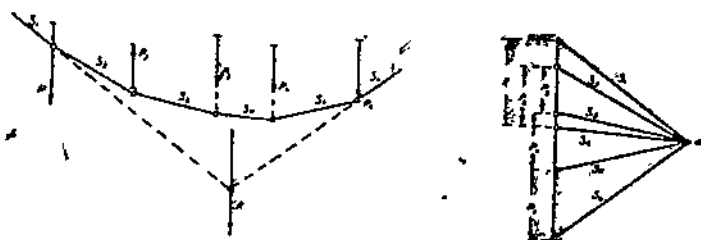
Асабліва мэтазгодна карыстацца вярочным многавугольнікам пры вызначэнні роўнадзейнай паралельных сіл. У гэтым выпадку многавугольнік сіл ператвараецца ў *лінію сіл*, якая становіць сабою ў той-жа час і роўнадзейную даных сіл. Яна роўна іх алгебрычнай суме і праходзіць праз пункты перасячэння крайніх бакоў вярочнага многавугольніка.



Чарц. 19.

Разгледзім спачатку выпадак, калі даныя сілы маюць аднолькавы кірунак. Ад адвольнага пункта  $K$  (чарц. 19) прамой, паралельнай даным сілам, адкладваем паслядоўна кожную з даных сіл да пункта  $L$ . Тады роўнадзейная супадае па велічыні і кірунку з лініяй сіл  $KL$ .

Затым з адвольна ўзятага полюса  $O$  праводзяцца промені  $S_1, S_2, S_3, \dots$  і праз адвольна выбраны пункт на сіле  $P_1$  будуюцца вярочны многавугольнік; роўнадзейная пройдзе праз пункт перасячэння крайніх бакоў. Калі кірунак даных сіл узаемна супроцьлеглы, то парадак вызначэння роўнадзейнай застаецца той-жа



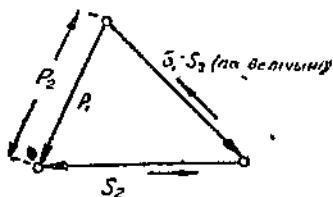
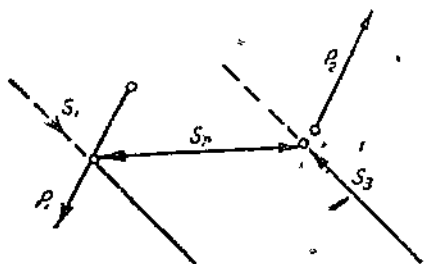
Чарц. 20.

самы, але толькі пры адкладванні сіл на лініі сіл трэба ўлічваць кірунак.

Далучым, што трэба знайсці роўнадзейную сіл  $P_1, P_2, P_3, P_4$  і  $P_5$  (чарц. 20).

Сіла  $P_2$  на лінії сіл'адкладаецца ад канца сілы  $P_1$  уверх згодна яе кірунку; роўнадзейная роўна алгебрычнай суме даных сіл.

Вызначэнне роўнадзейнай двух паралельных узаемна супроцьлеглых сіл магчыма толькі пры ўмове, што гэтыя сілы *нероўны*. Калі-ж даныя сілы роўны па велічыні і супроцьлеглы па напрамку то многавугольнік сіл сам сабой замыкаецца і роўнадзейная роўна нулю (чарц. 21); у вярвочным-жа многавугольніку крайнія бакі паралельны, у той час як у многавугольніку сіл супадаюць.

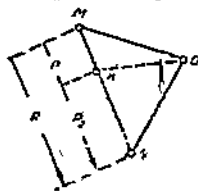
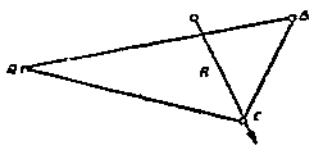


Чарц. 21..

Роўнавагі ў даным выпадку няма, а ў выніку атрымліваецца пара сіл, якая дае вярвочальны момант.

Пры дапамозе вярвочнага многавугольніка можна раскладаць даную сілу на 2 паралельныя складаючыя, якія праходзяць праз заданыя 2 пункты. Дапусцім, што сілу  $R$  патрэбна раскласці на 2 паралельныя сілы, якія праходзяць праз пункты  $A$  і  $B$  (чарц. 22).

Будзем адвольны вярвочны многавугольнік  $ABC$ ; затым праводзім  $MN$ , роўную і паралельную  $R$ . Праз пункт  $M$  праводзім прамую, паралельную  $AC$ , а праз  $N$ —паралельную  $BC$ . Праз



Чарц. 22.

пункт перасячэння іх  $O$  праводзім прамую, паралельную  $AB$ , якая пунктам  $K$  раздзеліць  $MN=R$  на дзве часткі:  $MK=P$  і  $KN=P_2$ . Каб упэўніцца ў правільнасці зробленай пабудовы, трэба атрыманыя 2 складаючыя  $P_1$  і  $P_2$  зноў прывесці да роўнадзейнай. Прасачыўшы пабудову многавугольніка сіл  $MKN$  і вярвочнага многавугольніка  $ABC$ , прыходзім да выніку, што  $R$  па велічыні і кірунку атрымліваецца роўнаю першапачаткова заданай велічыні  $MN$  і пункт  $C$  з'яўляецца пунктам перасячэння крайніх бакоў вярвочнага многавугольніка.

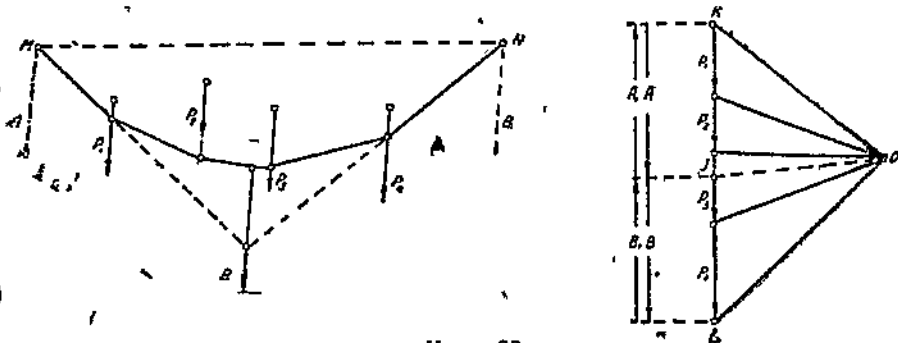
Так-жа сама вырашаецца пытанне аб уроўнаважванні данай сілы двума паралельнымі, якія праходзяць праз заданыя пункты.

**Задача.** Па масту даўжынёю ў 6 м праязджае гармата і знаходзіцца ў даны момант на адлегласці 2-х м ад левай апоры. Ціск на мост гарматы роўны 500 кг. Вызначыць ціск маста на апоры, калі ўласную вагу маста пад увагу не прымаць.

Падобным-жа чынам рашаецца другая задача, якая сустракаецца пры вызначэнні ціску бэлеа на апоры:

знайсці дзве паралельныя сілы  $A$  і  $B$ , даныя па палажэнні, якія замянілі-б сістэму паралельных сіл:  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (чарц. 23)

Будуем для даных сіл многавугольнік сіл; бярэм які-небудзь пункт  $O$  за полюс і будуем для іх вярвочны многавугольнік



Чарц. 23.

Пункт перасячэння крайніх бакоў яго вызначыць палажэнне роўнадзейнай  $R$  данай сістэмы сіл, а адрэзак  $KL$  выразіць яе велічыню і кірунак.

Затым трэба раскласці атрыманую роўнадзейную на дзве складаючыя  $A$  і  $B$ . Для гэтага карыстаюцца тым-жа вярвочным многавугольнікам, працягнуўшы крайнія бакі яго да перасячэння з прамымі, на якія дзейнічаюць сілы  $A$  і  $B$  у пунктах  $M$  і  $N$ . Прамая  $JO$ , праведзеная ў многавугольніку сіл праз полюс  $O$  паралельна  $MN$ , падзеліць  $R = KL$  на дзве часткі  $KJ = A$  і  $JL = B$ .

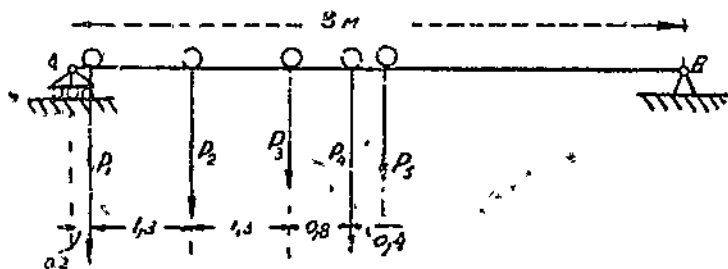
Калі сістэма сіл павінна быць уроўнаважана двума паралельнымі сіламі, якія дзейнічаюць па даных прамых, то ўся пабудова застаецца той-жа, толькі многавугольнік сіл павінен быць замкнутым, г. зн.  $A_1$  і  $B_1$ , застаючыся роўнымі  $A$  і  $B$ , павінны мець супроцьлеглыя кірункі (чарц. 23).

**Задача.** На мост пралётам у 8 м дзейнічаюць колы паравоза (чарц. 24). Уласную вагу маста, роўную  $P_6 = 18$  т, можна лічыць прыложанай пасярэдзіне. Вызначыць рэакцыі апор, калі  $P_1 = 20$  т,  $P_2 = 15$  т,  $P_3 = 12$  т і  $P_4 = 15$  т.

**Задача.** Раскласці сістэму паралельных сіл  $P_1 = 6$  т,  $P_2 = 4$  т,  $P_3 = 5$  т і  $P_4 = 7$  т, якія знаходзяцца адна ад адной на адлег-

ласці:  $P_1$  ад  $P_2$  — на два м,  $P_2$  ад  $P_3$  — на 1,3 м;  $P_3$  ад  $P_4$  — на 1,5 м на дзве сілы, якія дзейнічаюць у двух кірунках, паралельных даным сілам, і прыложаны па-за сіламі на адлегласцях 1 м ад  $P_1$  і 1,2 м ад  $P_4$ .

**Задача.** Раскладзі сістэму паралельных сіл  $P_1 = 2,5$  т;  $P_2 = 3,4$  т;  $P_3 = 5$  т;  $P_4 = 1,8$  т і  $P_5 = 2$  т, якія знаходзяцца



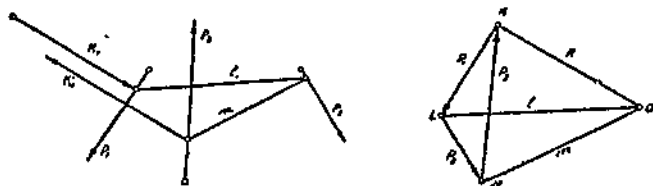
Чарц. 24.

на адлегласці  $P_1$  ад  $P_2$  — 0,8 м;  $P_2$  ад  $P_3$  — 0,5 м;  $P_3$  ад  $P_4$  — 1 м;  $P_4$  ад  $P_5$  — 1,2 м, на дзве складаючыя, паралельныя даным сілам і змешчаныя між гэтымі сіламі на адлегласці ад  $P_1$  на 0,3 м і ад  $P_5$  на 0,8 м.

**Задача.** Знайсці роўнадзейную даных паралельных сіл  $P_1 = 12$  т;  $P_2 = 8$  т;  $P_3 = 5$  т і  $P_4 = 10$  т, якія знаходзяцца на адлегласці:  $P_1$  ад  $P_2$  — 0,8 м;  $P_2$  ад  $P_3$  — 0,5 м;  $P_3$  ад  $P_4$  — 1,1 м, прычым складанне рабіць у наступным парадку:  $P_3$ ,  $P_1$ ,  $P_4$  і  $P_2$ .

## § 8. Умовы роўнавагі сіл на роўніцы

Для роўнавагі сіл, прыложаных у адным пункце, неабходна і дастаткова, каб роўнадзейная ўсіх сіл раўнялася нулю, г. зн. каб сілавы многавугольнік быў замкнуты. Для сіл-жа, якія не сходзяцца ў адным пункце, гэтая ўмова неабходная, але яшчэ недастатковая, каб атрымалася роўнавага гэтых сіл. Няхай на якое-



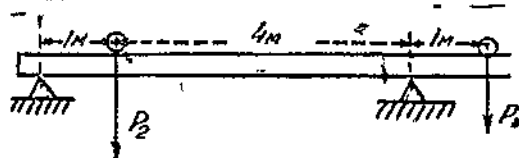
Чарц. 25,

небудзь цела дзейнічаюць 3 сілы  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$  (чарц. 25). Пабудавашы сілавы многавугольнік, заўважам, што ён замкнуты, а роўнавагі ўсё-такі не будзе.



Задача. Тая-ж задача для 6-цялявай гаубіцы, калі яе вага 2162 кг, а адпаведныя адлегласці—2865 мм і 3040 мм.

Адказ. Ціск на сашнік 120 кг.



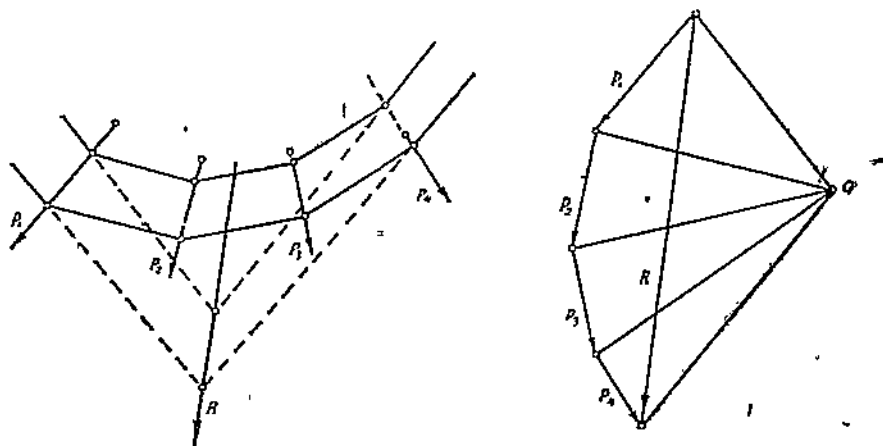
Чарц. 27.

Задача. Кансольная бэлька нагружана 2 сіламі:  $P_1 = 6 \text{ т}$  і  $P_2 = 8 \text{ т}$  (чарц. 27). Вызначыць рэакцыі апор, не прымаючы пад увагу вагі бэлькі.

Адказ. Левая 5,2 т.

## § 9. Сувязь паміж многавугольнікам сіл і вярочачным многавугольнікам

Пры пабудове вярочачнага многавугольніка на адной з сіл бярэцца адвольны пункт, праз які праводзіцца бок паралельна адпаведнаму променю. З тае прычыны, што такіх пунктаў можна ўзяць бесканечнае мноства, то пры адным і тым-жа полюсе можна пабудаваць для данай сістэмы сіл бесканечнае мноства вярочачных многавугольнікаў, якія маюць тую ўласцівасць, што адпаведныя бакі іх паралельны (чарц. 28).



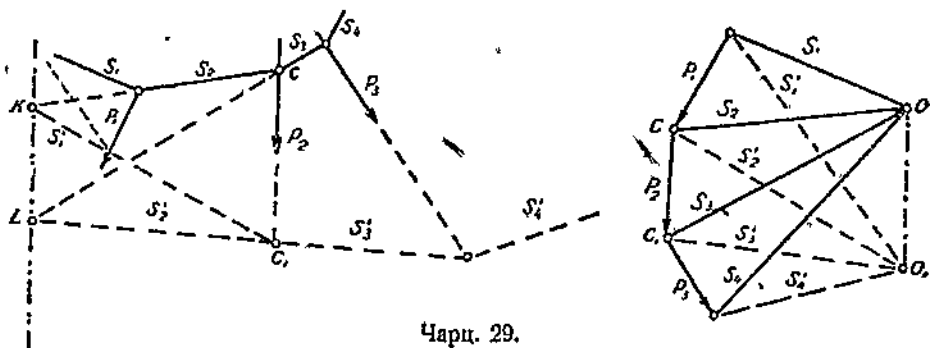
Чарц. 28.

Вызначым цяпер залежнасць між вярочачнымі многавугольнікамі, пабудаванымі для адной і той-жа сістэмы сіл, але пры розных полюсах. Гэта залежнасць выражаецца ў наступным вы-

глядзе: адпаведныя бакі двух вярочных многавугольнікаў, якія пабудаваны для адной і той-жа сістэмы сіл, але маюць розныя полюсы, перасякаюцца на прамой паралельнай лініі, што злучае іх полюсы.

Няхай дана сістэма сіл  $P_1, P_2, P_3$ ; будзем многавугольнік сіл і вярочных многавугольнікі пры палажэннях полюсаў у пунктах  $O$  і  $O_1$  (чарц. 29).

Працягнуўшы бакі вярочных многавугольнікаў  $S_2$  і  $S'_2$  да перасячэння ў пункце  $K$ , а бакі  $S_3$  і  $S'_3$  — да перасячэння ў пункце  $L$ ,



Чарц. 29.

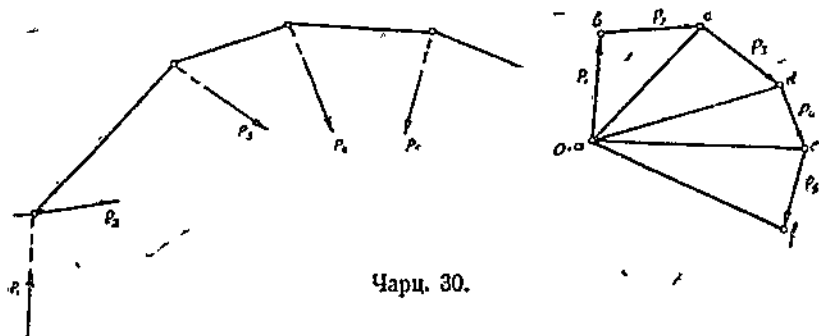
злучаем пункты  $K$  і  $L$ , а таксама  $O$  з  $O_1$ , і заўважаем, што ў чатырох вугольніках  $CC_1LK$  і  $OO_1C_1C$  ёсць 5 пар адпаведных элементаў (бакі і дыяганалі), паралельных згодна пабудове, значыць паралельна і шостая пара, г. зн.  $KL \parallel OO_1$ . З тае прычыны, што гэта справядліва для ўсіх падобных чатырохвугольнікаў, то значыць пункты перасячэння ўсіх адпаведных бакоў вярочных многавугольнікаў ляжаць на адной прамой, паралельнай  $OO_1$ .

## § 10. Лінія роўнадзейных, як прыватны выпадак вярочнага многавугольніка

Калі выбраць полюс у пачатковым пункце многавугольніка сіл, пабудаванага для данай сістэмы сіл, то з кірункам кожнага боку вярочнага многавугольніка супадзе кірунак роўнадзейнага ўсіх сіл, папярэдніх гэтаму боку, а гэта значыць, што з кірункам апошняга боку супадзе кірунак роўнадзейнай усіх даных сіл.

Калі пабудоваць многавугольнік сіл для данай сістэмы сіл:  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , то дыяганаль  $ac$  (чарц. 30) будзе станаць сабою а велічыні і кірунку роўнадзейную сіл  $P_1$  і  $P_2$ , дыяганаль  $ad$  — роўнадзейную сіл  $P_1, P_2$  і  $P_3$ , дыяганаль  $ae$  — роўнадзейную сіл  $P_1, P_2, P_3$  і  $P_4$ , і нарэшце  $af$  — роўнадзейную ўсёй сістэмы. Калі сумясціць полюс  $o$  з пачатковым пунктам  $a$ , то ў выніку ператварэння першага полюснага променя ў пункт, першы бок вярочнага многавугольніка выразіцца адвольным пунктам на

кірунку сілы  $P_1$ ; другі бок вярочнага многавугольніка супадае з прамой, якая выражаецца сілай  $P_1$ ; трэці — мае кірунак дыяга-



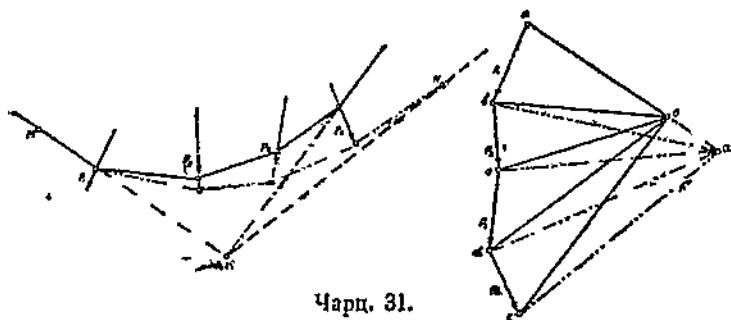
Чарц. 30.

налі  $ac$ ; чацверты — кірунак дыяганалі  $ad$  і г. д. Значыць, бакі вярочнага многавугольніка супадаюць з кірункам роўнадзейных напярэдніх сіл.

## § 11. Пабудова вярочнага многавугольніка, які праходзіць праз 2 даныя пункты

Дапусцім, што даны 2 пункты  $M$  і  $N$ , праз якія павінен прайсці вярочны многавугольнік для сістэмы сіл  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (чарц. 31).

Будуем сілавы многавугольнік і вярочны многавугольнік пры адвольным полюсе з першым бокам, які праходзіць праз даны пункт  $M$ . Вызначаем пункт перасячэння  $K$  крайніх бакоў вярочнага многавугольніка, які злучаем з другім даным пунктам  $N$ ; у сілавым многавугольніку з пункта  $I$  праводзім прамую, паралельную  $KN$ , да перасячэння з променем  $Oa$  у пункце  $O_1$ , што



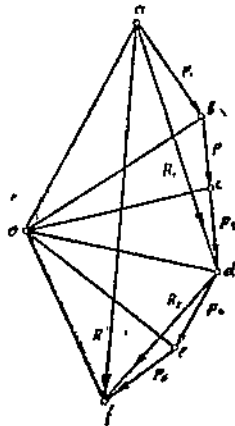
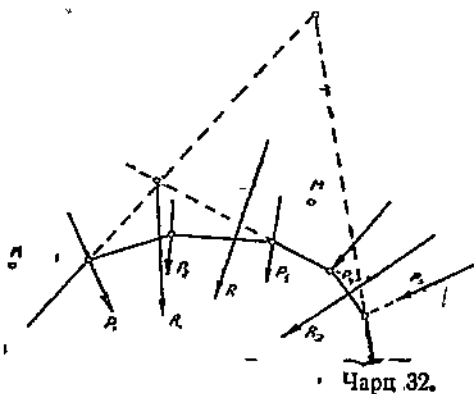
Чарц. 31.

і будзе полюсам, пры якім вярочны многавугольнік пройдзе праз заданыя два пункты. Кантролем правільнасці пабудовы з'яўляецца знаходжанне пунктаў перасячэння абодвух вярочных многавугольнікаў на прамой  $MK$ .

**§ 12. Побудова вярочага многавугольніка, які  
праходзіць праз 3 заданыя пункты**

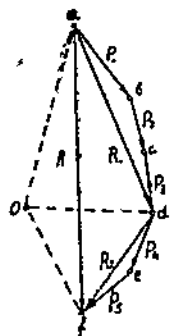
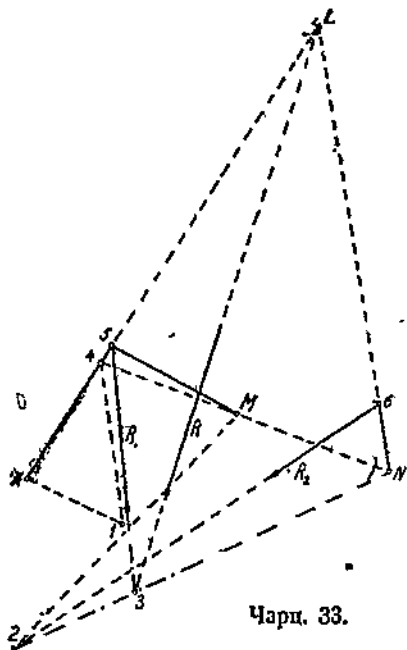
Няхай дані 3 пункти  $K$ ,  $M$  і  $N$ , праз якія панінен прайсці вярочны мно-  
гавугольнік для данай сістэмы сіл  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  і  $P_5$  (чарц. 32).

Будуем сілавы многавугольнік і пры адвольным полюсе вярочны мпога-



вугольцік. Знаходзім роўнадзейныя сіл, якія знаходзяцца між даных пунктаў, а імянна: між  $K$  і  $M—R_1$ , між пунктаў  $M$  і  $N—R_2$ , а таксама агульную роўнадзейную  $R$ .

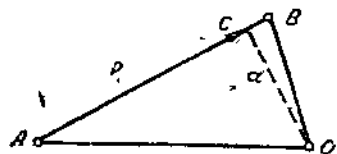
Шукани вярвовачны многавугольнік ёсць трохвугольнік, вяршыні якога знаходзяцца на знойдзеных прамых  $R_1, R_2, R_3$  і  $R_4$  і бакі якога павінны, праходзячы праз 3 даныя пункты  $K, M$  і  $N$ . Для пабудовы гэтага трохвугольніка, праводзім праз пункт  $K$  (царц. 33) адвольную прамую  $K_1$ . Пункт 1 перасячэння яе з  $R_1$  злучаем з  $M$  і працягваем  $1M$  да перасячэння з  $R_2$  у пункце 2. Праводзім прамую  $2N$  і знаходзім пункт 3 перасячэння з  $R_3$ . Гэты пункт 3 злучаем



да  $L5$ , і праз  $f$ —паралель да  $6N$  да перасячэння іх у пункце  $O$ , які з'яўляецца  
мучаным полісам.

### § 13. Статычны момант сіл

Статычным момантам сілы адносна пункта, як вядома, называецца здабытак сілы на яе адлегласць ад пункта, якая называецца плячом. Адзінкамі вымярэння моманту служаць складаныя адзінкі: кілограмаметр, тонаметр і г. д. Графічна велічыня моманту ізабражаецца плошчай прамавугольніка, адзін бок якога ёсць сіла, адкладзеная ў маштабе сіл, а другая—плячо, адкладзенае ў маштабе даўжыні.



Чарц. 34.

Калі злучыць пачатак і канец сілы з пунктам, адносна якога бярацца момант (чарц. 34), то плошча трохвугольніка  $OAB = \frac{AB \times CO}{2} = \frac{P_1 \cdot a}{2} = \frac{\text{моманту}}{2}$ ; адкуль вынікае, што момант сілы роўны падвоенай плошчы трохвугольніка, у якога асновай з'яўляецца сіла, а супроцьлеглай вершыняй — пункт, адносна якога бярацца момант.

#### ТЕОРЕМА ВАРЫНЬОНА

Вывучым цяпер складанне момантаў сіл адносна пункта.

Пачнем з найпрасцейшага выпадку, калі абедзве сілы перасякаюцца ў адным пункце (чарц. 35).

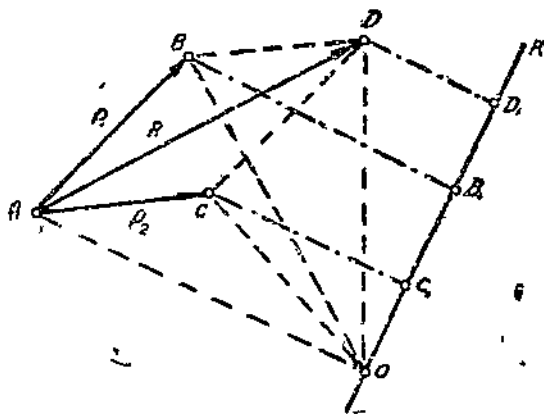
Момант сілы  $P_1$  адносна  $O$  роўны падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOB$ , сілы  $P_2$  — падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOC$ , момант роўнадзейнай  $R$  — падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOD$ . Правядзем  $OK$  перпендыкулярна да  $AO$  і спраектуем усе сілы на  $OK$ :

$$OC_1 = B_1D_1, \text{ а таму}$$

$$OD_1 = OB_1 + OC_1.$$

Памножыўшы абедзве часткі роўнасці на  $2OA$  і падзяліўшы на 2, атрымаем:

$$2 \cdot \frac{OA \cdot OD_1}{2} = 2 \cdot \frac{OB_1 \cdot OA}{2} + 2 \cdot \frac{OC_1 \cdot OA}{2}, \text{ г. зн. } 2 \text{ плошчы трохвугольніка } OAD = 2 \text{ плошчам трохвугольніка } AOB \text{ плюс } 2 \text{ плошчы трохвугольніка } AOC, \text{ адкуль выцякае, што сума момантаў скла-}$$



Чарц. 35.

даючих сіл адносна ўсякага пункта роўна моманту роўнадзейнай адносна таго-ж пункта.

Калі даны адвольны лік сіл  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ , якія ляжаць у адной роўніцы з агульнай роўнадзейнай  $R$ , то для выяснення залежнасці між момантамі сіл і іх роўнадзейнай складзем спачатку сілы  $P_1$  і  $P_2$  у адну роўнадзейную  $R_1$ ; момант апошняй згодна папярэдняга раўнання роўны суме момантаў сіл  $P_1$  і  $P_2$ . Затым складзем  $R_1$  з  $P_3$  у роўнадзейную  $R_2$ , тады момант сілы  $R_2$  будзе роўны суме момантаў сіл  $R_1$  і  $P_3$  і значыць суме момантаў сіл  $P_1, P_2$  і  $P_3$ . Працягваючы такім-жа чынам складаць і ўсе астатнія сілы, атрымваем:

*статычны момант роўнадзейнай усякага ліку сіл, якія знаходзяцца ў адной роўніцы, роўны алгебрычнай суме статычных момантаў усіх складаючых сіл адносна таго-ж пункта.*

Далупусцім цяпер, што сілы маюць розназначныя моманты, напр. момант сілы  $P_1$ —дадатны, а момант сілы  $P_2$ —адмоў-

ны (чарц. 35-а) адносна пункта  $O$ . Злучыўшы вяршыні паралелаграма  $A, B, C$  і  $D$  з пунктам  $O$ , атрымваем, што момант сілы  $P_1$  адносна  $O$  роўны падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOB$ ; момант сілы  $P_2$  роўны (па абсалютнай велічыні) падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOD$  і момант роўнадзейнай  $R$  роўны падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOC$ . Правядзем  $OK$  перпендыкулярна да  $AB$  і спраектуем усе сілы на  $OK$ . З чарцяжа відаць, што

$$OC_1 = OB_1 - B_1C_1,$$

але

$$OD_1 = B_1C_1,$$

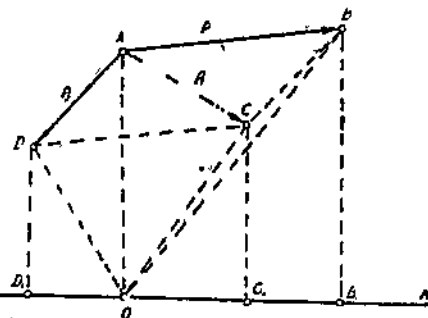
як праекцыі роўных і паралельных адрэзкаў  $AD$  і  $BC$ , а таму маем

$OC_1 = OB_1 - OD_1$ . Памножыўшы абедзве часткі роўнасці на  $2OA$  і падзяліўшы на 2, атрымваем:

$$2 \cdot \frac{OA \cdot OC_1}{2} = 2 \cdot \frac{OB_1 \cdot OA}{2} - 2 \cdot \frac{OA \cdot OD_1}{2},$$

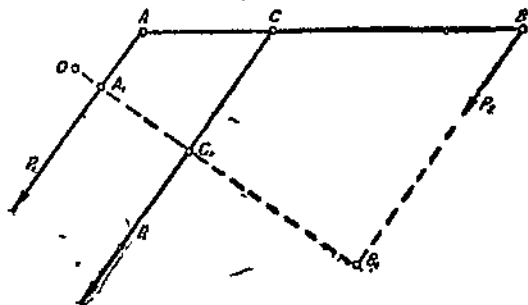
ці 2 плошчы трохвугольніка  $AOC = 2$  плошчам трохвугольніка  $AOB - 2$  плошчы трохвугольніка  $AOD$ , г. зн. і ў гэтым выпадку момант роўнадзейнай роўны алгебрычнай суме момантаў складаючых.

Калі сілы паралельны, то і ў гэтым выпадку момант роўнадзейнай роўны алгебрычнай суме момантаў складаючых.



Чарц. 35-а.

Далучым, даны паралельныя сілы  $P_1$  і  $P_2$ , прыложаныя ў пунктах  $A$  і  $B$  і накіраваныя ў адзін бок (чарц. 5-6); роўнадзейная  $R$  прыложана ў пункце  $C$ . Правёўшы з пункта  $O$  (цэнтра момантаў) прамую, перпендыкулярную да лініі дзеяння сіл, атрымаем:



Чарц. 5-6.

$P_1 \cdot OA_1 + P_2 \cdot OB_1 = P_1 \cdot (OC_1 - A_1C_1) + P_2 \cdot (OC_1 + O_1B_1) = (P_1 + P_2) \cdot OC_1 + P_2 \cdot C_1B_1 - P_1 \cdot A_1C_1$ , але  $P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC$ , а з тае прычыны, што  $AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1$ , то  $P_1 \cdot A_1C_1 = P_2 \cdot B_1C_1$ , апрача таго  $P_1 + P_2 = R$ . Зрабіўшы замену ў першай роўнасці, атрымаем:

$$P_1 \cdot OA_1 + P_2 \cdot OB_1 = R \cdot OC_1.$$

**Практыкаванне.** Вывесці тэарэму момантаў для выпадкаў, калі цэнтр момантаў знаходзіцца: 1) між сіламі  $P_1$  і  $R$  і 2) між сіламі  $R$  і  $P_2$ .

**Практыкаванне.** Вывесці тэарэму момантаў для адвольнага ліку паралельных сіл.

**Практыкаванне.** Вывесці тэарэму момантаў для паралельных сіл, накіраваных у супроцьлеглыя бакі.

#### ТЭАРЭМА КУЛЬМАНА

*Статычны момант адвольнага ліку сіл адносна якога-небудзь пункта  $C$  роўны здабытку полюснай адлегласці іх роўнадзейнай на той адрэзак паралелі да роўнадзейнай, праведзенай праз  $C$ , які заключаецца між крайніх бакоў вяртаючага многавугольніка.* Няхай дана сістэма сіл  $P_1, P_2, P_3, P_4$  і  $P_6$ , патрэбна вызначыць момант яе адносна пункта  $C$  (чарц. 36).

Будзем сілавы і вяртаючы многавугольнікі; момант роўнадзейнай адносна пункта  $C$  роўны  $M = R \cdot r$ . Правёўшы  $LN$  паралельна да  $R$  і  $H$  перпендыкулярна да  $af$ , з падобнасці трохвугольнікаў  $LNK$  і  $afo$  маем:

$r : y = H : R$ , адкуль:  $R \cdot r = H \cdot y$ . Значыць шуканы момант будзе:

$$M = H \cdot y$$

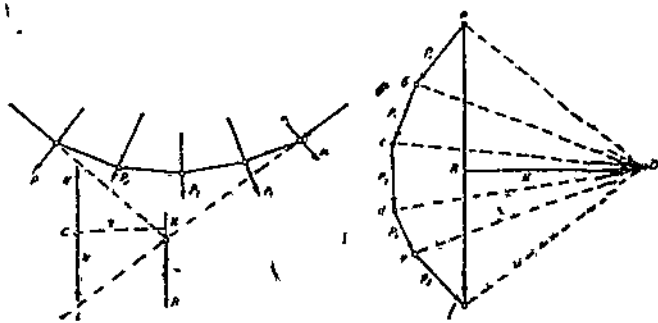
(1)

У здабытку  $H \cdot y$  велічыня  $H$  становіць сабою сілу, а  $y$  — даўжыню; можна аднак не парушаючы канчатковага выніку, вымераць  $H$  маштабам лініі, а  $y$  — маштабам сіл. Калі  $H$  выбраць роўным 1, то атрымаем:

$$M = H \cdot y = 1 \cdot y = y, \quad (2)$$

значыць адрэзак  $y$ , выражаны ў маштабе сіл, дае непасрэднае значэнне моманту.

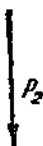
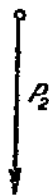
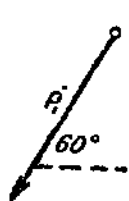
Гэты спосаб выражэння статычнага моманту ў выглядзе здабытку полюснай адлегласці  $H$  на адрэзак  $y$  бывае асабліва зручным і простым у прыватным выпадку, калі ўсе сілы паралельны.



Чарц. 36.

У гэтым выпадку многавугольнік сіл ператвараецца ў прамую лінію, дзякуючы чаму полюсная адлегласць  $H$  для ўсіх сіл застаецца пастаяннай.

**Задача.** Вызначыць момант сіл  $P_1$ , і  $P_2$  адносна пункта  $C$  (чарц. 37), калі  $P_1 = 100$  кг,  $P_2 = 75$  кг,  $P_3 = 50$  кг. Маштаб сіл 1 см = 25 кг, маштаб адлегласцей 1 см = 1 м.



Чарц. 37.

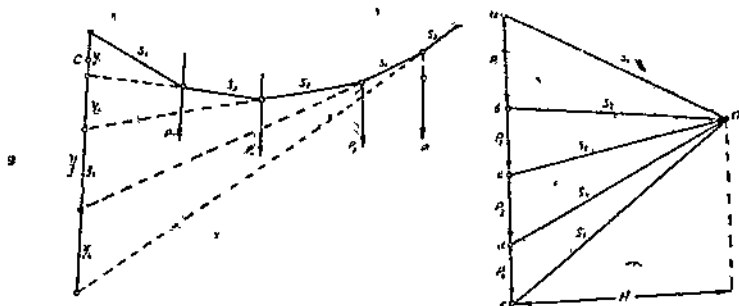
Чарц. 38.

**Задача.** Вызначыць момант сіл  $P_1$ ,  $P_2$  і  $A$  адносна пункта  $C$  (чарц. 38), калі  $P_1 = 2$  т;  $P_2 = 3$  т;  $A = 6$  т.

Калі даны паралельныя сілы  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  і пастаянны пункт вярчэння  $C$  (чарц. 39), то набудоваўшы сілавы і вярчальны многавугольнікі, праводзім праз  $C$  паралель да кірунку даных сіл.

Для сіл  $P_1$  крайнімі бакамі вярочнага многавугольніка будуць  $S_1$  і  $S_2$ , якія адсякаюць ад прамой, што праходзіць праз  $C$ , адрэзак  $y_1$ , такім чынам момант сілы  $P_1$  адносна  $C$  будзе  $M_1 = H \cdot y_1$ . Для сілы  $P_2$  крайнімі бакамі з'яўляюцца  $S_2$  і  $S_3$ , якія адсякаюць ад той-жа прамой адрэзак  $y_2$ , г. зн. момант сілы  $P_2$  будзе  $M_2 = H \cdot y_2$ . Гэтак сама і для астатніх сіл:  $M_3 = H \cdot y_3$ ;  $M_4 = H \cdot y_4$ .

Адсюль вынікае, што калі праз пункт  $C$  правесці прамую, паралельную кірунку даных паралельных сіл, то 2 бакі вярочнага многавугольніка, што перацякаюцца на якой-небудзь



Чарц. 39.

сіле, адсякаюць ад гэтай паралелі адрэзак, які, калі яго памножыць на поўсюную адлегласць, дае момант гэтай сілы адносна пункта  $C$ .

Роўнадзейная  $R$  праходзіць праз пункт перасячэння крайніх бакоў вярочнага многавугольніка і момант яе адносна пункта  $C$ :

$$\bar{M} = H \cdot y = H \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = H \cdot y_1 + H \cdot y_2 + H \cdot y_3 + H \cdot y_4, \text{ ці} \\ \bar{M} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4,$$

адкуль вынікае, што момант роўнадзейнай роўны суме момантаў складаючых сіл адносна таго-ж пункта \*).

Разгледзім выпадак, калі сілы паралельны і накіраваны ў розныя бакі, прычым патрэбна вызначыць момант ад групы сіл, якія дзейнічаюць з аднаго боку ад пункта  $C$ . Няхай даны сілы  $P_1, P_2, P_3$ , якія ўроўнаважваюцца сіламі  $A$  і  $B$  (чарц. 40). Трэба вызначыць адносна пункта  $C$  момант сіл, якія дзейнічаюць лявей гэтага пункта.

Лявей пункта  $C$  дзейнічаюць сілы  $A$  і  $P_1$ , роўнадзейная якіх  $R_1 = be$ , дзейнічае знізу ўверх і прыложена ў пункце перасячэння крайніх бакоў вярочнага многавугольніка гэтых сіл ( $S_0$  і  $S_2$ ). Момант  $M_1$  адносна пункта  $C$ :

$$M_1 = H \cdot y_1.$$

\*) Гэта не з'яўляецца доказам тэарэмы Варыньёна з тае прычыны, што тэарэма Кульмана выводзіцца на падставе тэарэмы Варыньёна.

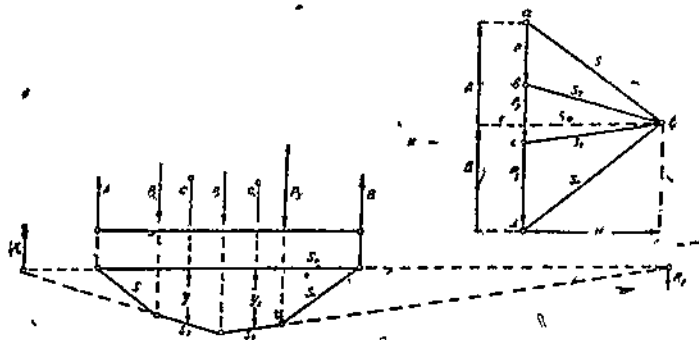
Для сячэння  $C_1$  сілы, якія дзейнічаюць лявей яго, будуць  $A$ ,  $P_1$  і  $P_2$ ; іх роўнадзейная  $R_2 = ec$ , дзейнічае зверху ўніз і прыложена ў пункце перасячэння крайніх бакоў вярочавага многавугольніка гэтых сіл ( $S_0$  і  $S_3$ ).

Момант гэтых сіл:  $M_2 = H \cdot y_2$ .

Пры полюснай адлегласці  $H=1$  гэтыя моманты прымаюць выгляд:

$$M_1 = y_1 \text{ і } M_2 = y_2.$$

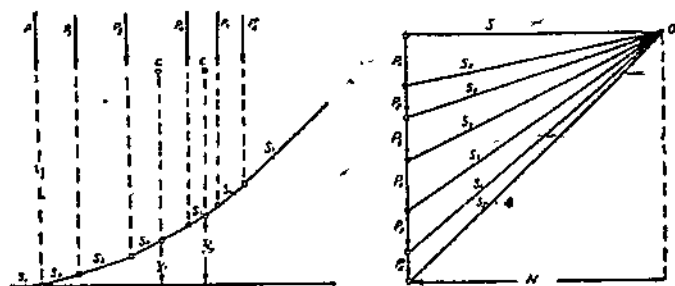
Такім чынам прыходзім да выніку: момант знешніх паралельных сіл, якія дзейнічаюць на адзін бок ад усякага пункта роўны



Чарц. 40.

адрэзку паралелі да даных сіл, праведзенай праз гэты пункт, прычым гэты адрэзак заключаецца паміж замыкаючым бокам вярочавага многавугольніка і тым бокам яго, які перасякаецца гэтай паралеллю.

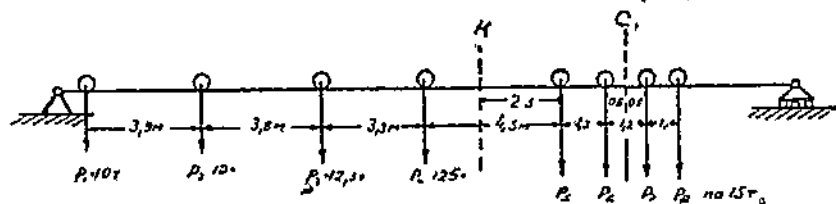
Пабудове чарцяжа можна прыдаць больш зручны выгляд, для чаго трэба выбраць палажэнне полюса  $O$  так, каб промень  $S_1$ , які ідзе ад першай сілы, быў-бы перпендыкулярны да кірунку сіл.



Чарц. 41.

Няхай даны паралельныя сілы:  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  і на-  
трэбна вызначыць моманты сіл, што знаходзяцца з левага боку  
ад пунктаў  $C, C_1, \dots$ , адносна апошніх (чарц. 41). Пабудаваўшы

сілавы і вярочны многавугольнікі, праз пункты  $C, C_1, \dots$  правядзем прамыя, паралельныя кірунку даних сіл. Тады момант сіл, якія знаходзяцца злева ад пункта  $C$ , выразіцца здабыткам  $H \cdot y$ ; момант для пункта  $C_1$  вызначыцца здабыткам  $H \cdot y_1$ . Такім чынам велічыні момантаў прапарцыянальны ардынатам у бакоў вярочнага многавугольніка адносна першага яго боку і змяняюцца між сумежных сіл паводле закону прамой.



Чарц. 42.

**Задача.** Цягнік, рухаючыся па масту, цісне на яго, як укавана на чарц. 42. Вызначыць суму момантаў для пункта  $C$  сіл вагі, прыложаных лявей гэтага пункта.

Маштаб сіл:  $1 \text{ мм} = 1 \text{ т}$ ; маштаб адлегласцей:  $1 \text{ мм} = 0,2 \text{ метра}$

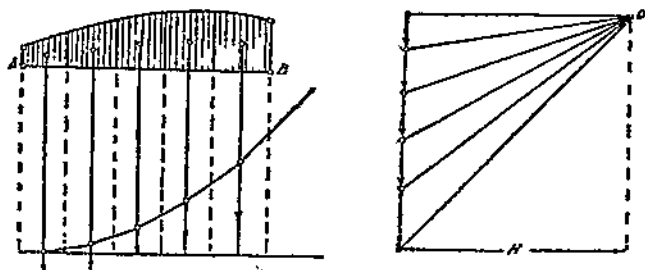
Адказ:  $M = 548 \text{ т. м.}$

**Задача.** Пры тых-жа даных вызначыць момант адносна пункта  $K$  для сіл, змешчаных правей ад яго.

Адказ:  $M_1 = 258 \text{ т. м.}$

## § 14. Вярочная крывая

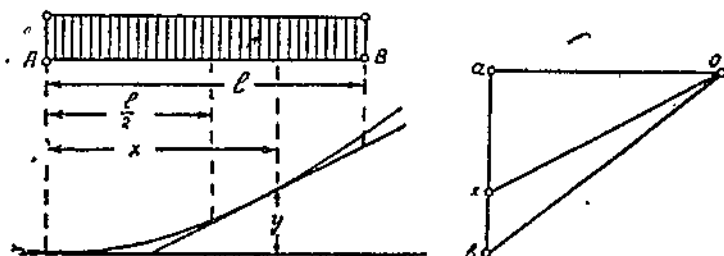
Калі ёсць суцэльныя сілы, якія маюць вертыкальныя кірункі і размяркованы непарарывна па даўжыні гарызантальнай прамой, то для іх вярочны многавугольнік пераходзіць у вярочную крывую.



Чарц. 43.

Раздзелім суцэльныя сілы (чарц. 43) на  $n$  элементарных частак і зацямім кожную частку згрупаванай нагрузкай у цэнтры цяжару адпаведнай плошчы. Пабудуем для такіх сіл сілавы і вярочны многавугольнікі.

Лёгка заўважыць, што пры больш дробных дзяленнях у абодвух многавугольніках з'явіцца толькі прамежныя промені, якія не ўплываюць на напярэдня; у звязку з гэтым у вярвочным многавугольніку толькі абламаюцца вуглы, што ў канчатковым выніку пры бяжэжным павелічэнні ліку частак  $n$ , дасць крывую,



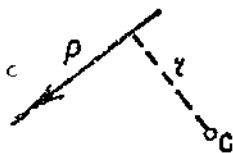
Чарц. 44.

упісаную ў першапачатковы вярвочны многавугольнік, прычым пункты дотыку будуць ляжаць супроць лініі раздзелу плошчы нагрузчай крывой.

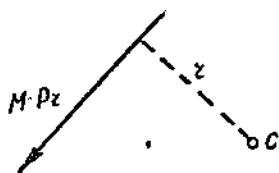
(1) У выпадку роўнамерна-суцэльнай нагрузкі вярвочны многавугольнік ператвараецца ў парабалу (чарц. 44), пры гэтым кірунак яе элементаў ці датычных да крывой павінен быць паралельны адпаведным променям.

## § 15. Моменты сіл вышэйшых ступеней

Калі ёсць сіла  $P$ , якая знаходзіцца ад пункта вярчэння  $C$  на адлегласці  $r$ , то выражэнне  $M = P \cdot r^2$  называецца момантам 2-й ступені, ці момантам інерцыі сілы  $P$ . Гэта можна падаць



Чарц. 45.



Чарц. 46.

у такім выглядзе:  $M = (P \cdot r) \cdot r$ , дзе  $P \cdot r$  — статычны момант сілы  $P$  адносна пункта  $C$  (чарц. 45). З гэтага відаць, што момант другой ступені можна разглядаць, як статычны момант моманту сілы  $P$  адносна пункта  $C$ . Графічна момант другой ступені можна падаць, калі ў кірунку сілы адкладзі ў пэўным маштабе  $M = P \cdot r$  (чарц. 46).

Усе законы, выведзеныя для статычнага моманту, датычаць і моманту другой ступені, які таксама можа быць пабудаваны

графічна, прычым замест сіл на іх кірунках трэба адкладваць адпаведныя ім моманты. Апрача моманту другой ступені, ёсць моманты вышэйшых ступеней, напр.:

$$M_1 = P \cdot r^3; M_2 = P \cdot r^4 \text{ і г. д.}$$

## § 16. Статычныя моманты плоскіх фігур

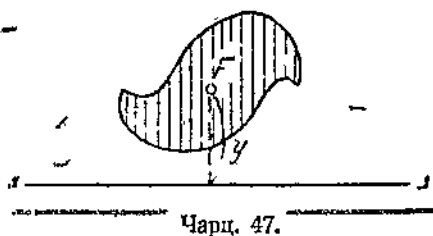
Статычным момантам фігуры адносна восі наз. здабытак плошчы гэтай фігуры на адлегласць ад цэнтра яе цяжару да восі (чарц. 47)  $S = F \cdot y$ .

Усе тэарэмы, выведзеныя для статычных момантаў сіл, датычаць і статычных момантаў плоскіх фігур.

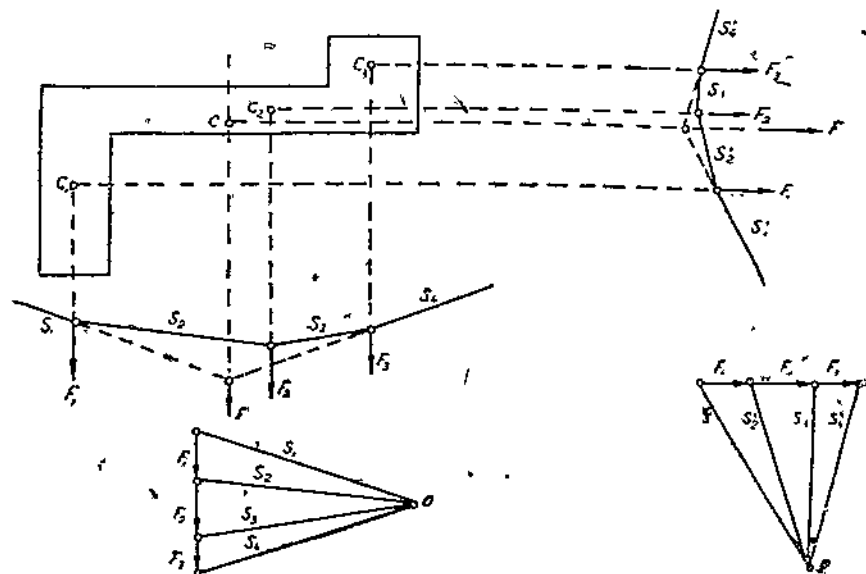
Статычны момант некалькіх фігур роўны суме статычных момантаў гэтых фігур адносна той-жа восі.

Графічна цэнтр цяжару вызначаецца пры дапамозе вярочага многавугольніка. Дапусцім, што патрэбна вызначыць цэнтр

цяжару плошчы, паказанай на чарц. 48. Падзяляем даную фігуру на простыя фігуры, цэнтры цяжараў якіх вядомы, і разглядаем плошчы  $F_1, F_2, F_3$  гэтых фігур, як паралельныя сілы, што прыложаны ў цэнтрах цяжару і дзейнічаюць у адвольным кірунку.



Чарц. 47.



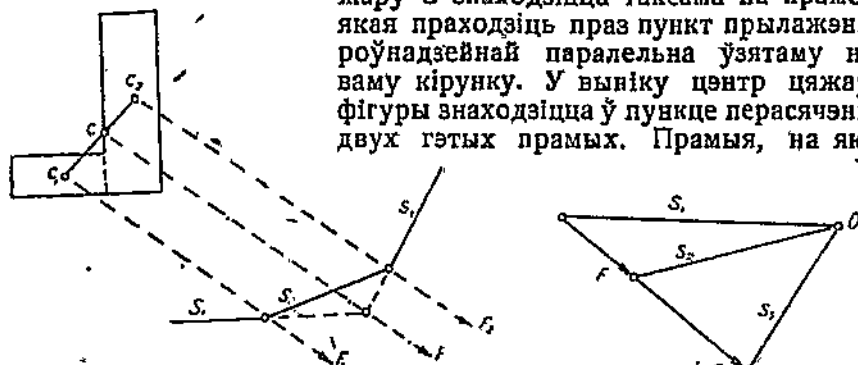
Чарц. 48.

Пры дапамозе сілавога і вярочаага многавугольнікаў знаходзім роўнадзейную:

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

і пункт яе прыляжэння. Цэнтр цяжару фігуры  $F$  павінен ляжаць на прамой, якая праходзіць праз гэты пункт паралельна ўзятаму кірунку.

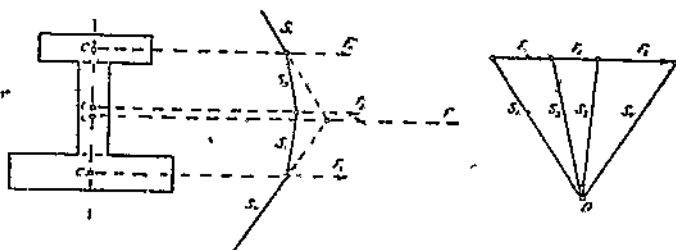
Дапамагаўшы той-жа чарцёж да другога кірунку, таксама адвольнага, знаходзім пункт прыляжэння роўнадзейнай; цэнтр цяжару  $C$  знаходзіцца таксама на прамой, якая праходзіць праз пункт прыляжэння роўнадзейнай паралельна ўзятаму новаму кірунку. У выніку цэнтр цяжару фігуры знаходзіцца ў пункце перасячэння двух гэтых прамых. Прамыя, на якіх



Чарц. 49.

знаходзіцца цэнтр цяжару, носяць назву *восей цяжару*.

Калі даная фігура разбіваецца на дзве простыя фігуры  $F_1$  і  $F_2$  (чарц. 49), то пабудова чарцяжа спрашчаецца, бо цэнтр цяжару  $C$  павінен знаходзіцца на прамой  $C_1C_2$ , якая злучае цэнтры цяжару  $C_1$  і  $C_2$ ; апошняя наз. лініяй цэнтраў цяжару.



Чарц. 50.

Пабудоваўшы сілавы і вярочааы многавугольнікі для адвольнага (які не супадае з лініяй цэнтраў цяжару) напрамку, знаходзім адну вось цяжару; на перасячэнні яе ў пункце  $C$  з лініяй цэнтраў цяжару  $C_1C_2$ , знаходзім цэнтр цяжару ўсёй фігуры.

Такім-жа чынам, пры дапамозе адной восі цяжару (чарц. 50), можна знайсці цэнтр цяжару фігуры, якая разбіваецца на больш, чым дзве простыя фігуры, калі гэта фігура мае вось сіметрыі.

## § 17. Визначення моменту інерції площі при дапамозе вярочнага многавугольніка

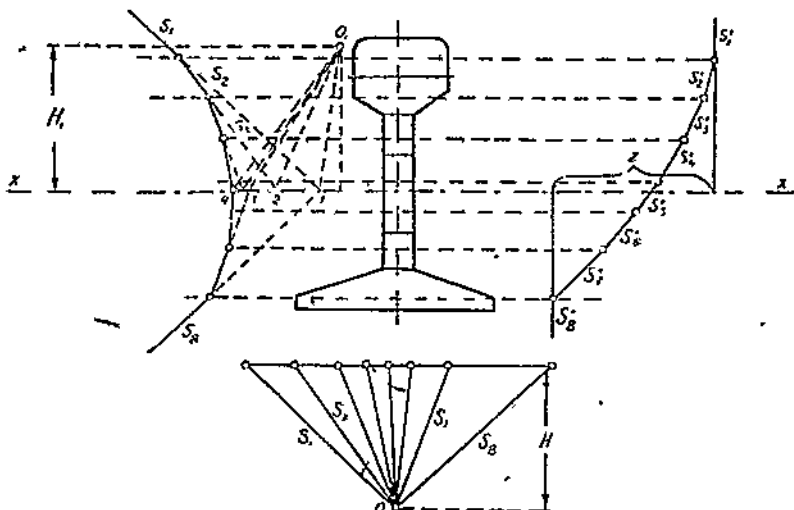
Допустім, што патрэбна знайсці момант інерцыі плошчы, пададанай на чарц. 51, адносна восі  $xx$ , якая праходзіць праз цэнтр цяжару сячэння. Падзелім даную плошчу прамымі паралельнымі  $xx$ , на плошчы  $F_1, F_2, F_3, \dots$  з ардынатамі цэнтра цяжара  $y_1, y_2, y_3, \dots$ . Набліжаная велічыня моманту інерцыі будзе такая:

$$Y = F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + \dots = \Sigma F y^2.$$

Ператворыўшы плошчы  $F_1, F_2, F_3, \dots$  у прамавугольнікі з роўнымі асновамі (вышынямі)  $a$ , так што  $F_1 = ab_1$ ;  $F_2 = ab_2$ ;  $F_3 = ab$ , атрымаем:

$$Y = \Sigma F \cdot y^2 = a \Sigma b y^2.$$

Адрэзкі  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , прапарцыянальныя плошчам  $F_1, F_2, F_3, \dots$  прымем за сілы, паралельныя восі  $xx$  і прыложаныя ў цэнтры



Чарц. 51.

цяжару аднаведных палос. Для гэтых сіл будзем сілавы/і вярочачны многавугольнікі. Перасячэнне крайніх бакоў  $S_1$  і  $S_8$  вызначае цэнтр цяжару сячэння і палажэнне яго восі  $xx$ . Потым знаходзім пункты перасячэння 2, 3, 4, ... бакоў  $S_2, S_3, S_4, \dots$  вярочачнага многавугольніка з воссю  $xx$ , прымем адрэзкі  $\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \dots$  за новыя сілы. Чэрцім для іх сілавы і вярочачны многавугольнікі з полюснай адлегласцю  $H_1$ .

Адрэзкі  $\overline{12}, \overline{23}, \dots$  роўныя  $x_1, x_2, \dots$ , прапарцыянальныя статычнаму моманту данай паласы адносна восі  $xx$ . Паводле Кульмана:

$$x_1 = \frac{b_1 y}{H}.$$

З другога вярочнага і сілавата многавугольнага палоса паводле Кульмана:

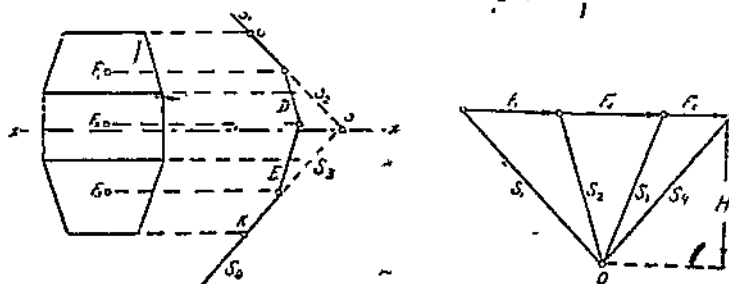
$Z_1 \cdot H_1 = x_1 \cdot y_1$ ; падставіўшы замест  $x_1$  знойдзенае значэнне, маем:

$$Z_1 \cdot H_1 = \frac{b_1 \cdot y_1^2}{H}, \text{ адкуль}$$

$$b_1 y_1^2 = Z_1 H \cdot H_1 \text{ ці } \Sigma b y^2 = Z \cdot H \cdot H_1, \text{ а}$$

$$Y = a \cdot \Sigma b y^2 = a \cdot H \cdot H_1 \cdot Z. \quad (3)$$

Згодна спосабу Мора момант інерцыі якой-небудзь плошчы (ці сячэння) можа быць вызначаны пабудовай толькі аднаго,



Чарц. 52.

а іменна першага вярочнага многавугольніка  $S_1, S_2, S_3, \dots$  (чарц. 52). Для гэтага неабходна вылічыць плошчу  $CDEKS$ , заключаную паміж працягам крайніх бакоў вярочнага многавугольніка  $S_1$  і  $S_4$  і астатнімі бакамі  $S_2$  і  $S_3$ .

Абазначыўшы гэтую плошчу праз  $F$ , будзем мець:

$$\Sigma b y^2 = 2F \cdot H;$$

$$Y = a \cdot \Sigma b y^2 = 2a \cdot H \cdot F. \quad (4)$$

Велічыня моманту інерцыі атрымліваецца тым больш дакладна, чым меншыя бяруцца размеры палосак, на якія дзеліцца данае сячэнне. Пры бесканечна малых размерах гэтых палос вярочны многавугольнік ператвараецца ў вярочную крывую, якая датыкаецца бакоў  $S_1, S_2, \dots$  у пунктах  $C, D, E, \dots$  (чарц. 52), г. зн. у пунктах перасячэння іх з прамымі, якія падзяляюць даныя сячэнні на палосы. У самай справе датычныя ў гэтых пунктах вярочнай крывой з'яўляюцца крайнімі бакамі часцей  $CD, DE, \dots$  і павінны перасякацца на прамых, якія праходзяць праз цэнтры цяжару палос давай плошчы, складаючы такім чынам вярочны многавугольнік, апісаны каля вярочнай крывой. Для пабудовы гэтай крывой дастаткова мець невялікую колькасць пунктаў, у звязку з чым спосаб Мора дае больш дакладныя вынікі, чым папярэдні спосаб Кульмана, пры адным і тым жа ліку палос разглядаемай плошчы.

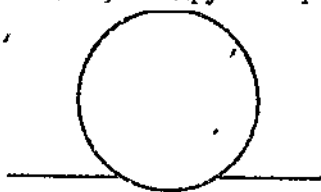
## ПРОСТЫЯ БЭЛЬКІ

## § 18. Агульныя паняцці

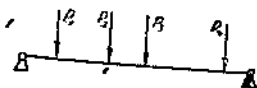
Бэлька ёсць збудаванне, якое служыць для перадачы знешніх сіл апорам; яна пры дапамозе ўнутраных напружанняў прыводзіць у роўнавагу грузы і рэакцыі апор.

Вось бэлькі звычайна бывае прамалінейнай, а сілы, якія дзейнічаюць на яе, — вертыкальны і размешчаны ў роўніцы восі бэлькі. Усе грузы, якія дзейнічаюць на бэльку і апорныя рэакцыі, якія ўроўнаважваюць гэтыя грузы, у адносінах да бэлькі наз. *знешнімі сіламі*. Яны так называюцца ў адрозненне ад унутраных напружанняў, якія з'яўляюцца ў самой бэльцы. Рэакцыі апор вызначаюцца нагрузкай і відамі замацавання бэлькі на апорах, таму перш за ўсё неабходна азнаёміцца з відамі нарузкі і апорных замацаванняў.

Нагрузка можа складацца або з грузаў, прыложаных у пачатковых пунктах бэлькі, або можа быць размяркована па ўсёй бэльцы або па некаторай яе частцы. Нагрузка першага віду наз. *згрупаванай*, а другога — *размяркованай*. З размяркованай



Чарц. 53.



Чарц. 54.

нагрузкі патрэбна адзначыць *роўнамерна-размяркованую* нагрузку, г. зн. такую, пры якой нагрузка на адзінку даўжыні бэлькі ёсць велічыня пастаянная. Велічыня нарузкі, якая прыходзіцца на адзінку даўжыні бэлькі, завецца *інтэнсіўнасцю* нарузкі.

Строга кажучы, цалкам згрупаванай нарузкі не бывае, а яна размяркована па некаторай, хоць і вельмі малой, плошчы. Так, напр. кола, у выніку пругкасці матэрыялу, не датыкаецца паверхні, па якой коціцца, але некалькі ўціскаецца ў яе (чарц. 53),

таму супраціўленне адбываецца толькі на некаторай паверхні. Згрупаваная і размяркованая нагрузка могуць дзейнічаць на бэльку і адначасова. На чарц. 54, 55 і 56 прыведзены прыклады нагрузак: згрупаванай, размеркаванай на частку бэлькі і роўна-мерна-размеркаванай па ўсёй бэльцы.

Паводле спосабу дзеяння на бэльку нагрузка можа быць: *мастайнай*, як, напрыклад, вага самой бэлькі, якая дзейнічае



Чарц. 55.



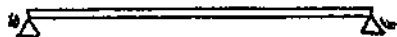
Чарц. 56.

на бэльку заўсёды, і *часовай*, якая дзейнічае на бэльку перыядычна, як, напрыклад, вага аўтамабіля, павозкі, ціск ветру, ціск снегу, ціск натоўпу людзей. Часовая нагрузка бывае *нерухомай*, калі яна прыложана ў пэўных пунктах бэлькі, ці *рухомая*, калі пункт прылажэння нагрузкі мяняецца.

Паводле роду перадачы нагрузка падзяляецца на *прямую* ці *непасрэдную*, калі нагрузка можа дзейнічаць непасрэдна на бэльку,

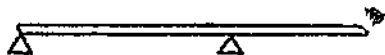


Чарц. 57.

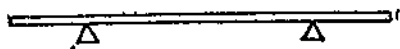


Чарц. 58.

(чарц. 54, 55 і 56), і на *вузлавую*, калі нагрузка перадаецца галоўнай бэльцы праз перадачныя прылады ў пэўных пунктах — вузлах; напр. дзеянне нагрузкі перадаецца асноўнай бэльцы праз асобныя дапаможныя бэлечкі; прамежак паміж двума сумежнымі вузламі наз. *панеллю* (чарц. 57).



Чарц. 59.



Чарц. 60.

На чарц. 57 нагрузка прыложана непасрэдна да бэлечак:  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$ , якія перадаюць яе асноўнай бэльцы  $AD$  у вузлах  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ...

Паводле пабудовы андр і паводле іх ліку адрозніваюцца бэлькі наступных відаў:

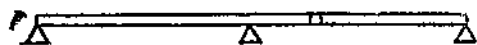
1) *простая бэлька*, якая *свабодна ляжыць* на двух апорах (чарц. 58), прычым апоры знаходзяцца каля самых канцоў бэлькі,

2) *кансольная бэлька*, якая ляжыць *свабодна* на двух апорах з адным або двума канцамі, якія звешваюцца за апорамі (чарц. 59, 60),

3) шарнірна бэлька або бэлька Гербера—мае больш двух апор, але ў яе ўключаны шарніры, якія дапускаюць паварот бэлькі на шарнірах (чарц. 61 і 62),

4) бэлька, замацаваная адным канцом, прычым другі канец яе свабодны (чарц. 63),

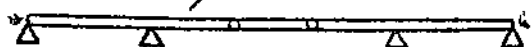
5) неразрэзная бэлька або многапралётная, якая свабодна ляжыць на больш чым двух апорах (чарц. 64).



Чарц. 61.

Маюцца і іншыя віды, напр., бэлька, замацаваная двума канцамі і інш.

Разлічыць бэльку—значыць знайсці ў кожным яе пункце ўнутраныя напружанні, якія выклікаюцца дзеяннем знешніх сіл на бэльку. Гэта магчыма ў тых выпадках, калі ўсе знешнія сілы, да якіх належаць і апорныя супраціўленні, вядомы. На практыцы звычайна даецца нагрузка бэлькі, а апорныя супраціўленні ці рэакцыі апор невядомы. Для вызначэння гэтых невядомых ёсць тры ўмовы роўнавагі:



Чарц. 62.

1 і 2) сума праекцый усіх сіл на кожную з двух адвольна ўзятых узаемна-перпендыкулярных восей павінна быць роўна 0, г. зн.

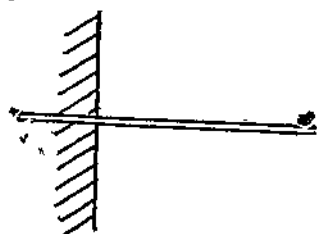
$$\sum x = 0$$

$$\sum y = 0. \quad (5)$$

3) сума момантаў усіх сіл адносна любога пункта роўна 0, г. зн.

$$\sum M = 0. \quad (6)$$

Заўважым, што няма неабходнасці кожную задачу рашаць абавязкова пры дапамозе двух раўнанняў праекцый і аднаго раўнання моманту. У некаторых выпадках больш зручна праектаваць сілы на адну толькі вось, але за тое скласці два раўнанні момантаў адносна двух розных пунктаў ці скласці 3 раўнанні момантаў, не карыстаючыся зусім раўнаннямі праекцый.



Чарц. 63.

У выпадку паралельных сіл накіруем вось  $y$  паралельна даным сілам, а вось  $x$ —перпендыкулярна да  $ix$ ; калі ўзяць

суму праекцый на вось  $x$ , то атрымаем тожсамасць:  $0 = 0$ .

Калі-ж спраектаваць сілы на вось  $y$  і скласці моманты адносна якога-небудзь пункта, то атрымаем 2 раўнанні роўнавагі:



Чарц. 64.

$$1) \sum P = 0 \quad \text{і} \quad 2) \sum M = 0, \quad (7)$$

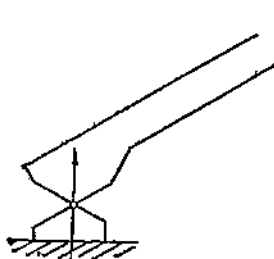
г. эн. для роўнавагі паралельных сіл неабходна і дастаткова, каб алгебрычная сума ўсіх сіл была роўна нулю і каб сума момантаў адносна якога-небудзь цэнтра таксама была роўна нулю.

Такія бэлькі, для якіх рэакцыі апор можна знайсці толькі з умоў роўнавагі, наз. „*знешня-статычна вызначальнымі*“, калі-ж адных умоў роўнавагі недастаткова для вызначэння ўсіх невядомых рэакцый апор, то бэлькі наз. „*знешня-статычна невызначальнымі*“. Для вырашэння пытання аб статычнай вызначальнасці трэба ведаць спосабы пабудовы апор.

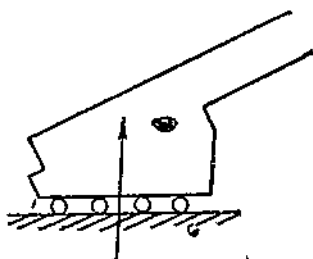
## § 19. Апоры бэлек

Апоры могуць быць наступных відаў:

I. *Нерухомая апора з шарніра* (чарц. 65). Тут пункт прыляжэння рэакцыі апоры вядомы—рэакцыя павінна праходзіць праз



Чарц. 65.

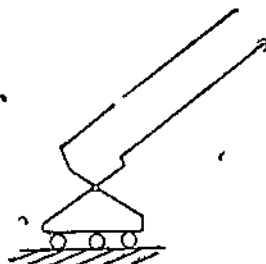


Чарц. 66.

цэнтр шарніра, бо ў супраціўным выпадку бэлька павярнулася-б каля шарніра пад дзеяннем моманту, які ўтварыўся. Неабходна вызначыць: 1) велічыню рэакцыі; 2) яе кірунак; такім чынам тут два невядомых, прычым дапускаецца толькі адзін рух—вярчальны каля цэнтра.

II. *Апора на катках* (чарц. 66). Тут вядомы кірунак рэакцыі, які для роўнавагі павінен быць перпендыкулярны да роўніцы апоры, бо каток не можа супраціўляцца сіле, паралельнай гэтай роўніцы. У гэтым выпадку неабходна вызначыць 2 невядомых: 1) велічыню рэакцыі, 2) пункт яе прыляжэння. У гэтай апоры адзін рух—перамяшчэнне ўздоўж роўніцы апоры.

III. *Апора з шарнірам і каткамі* (чарц. 67). У гэтым выпадку вядомы: 1) пункт прыляжэння рэакцыі, якая праходзіць праз цэнтр шарніра і 2) кірунак яе, перпендыкулярны да роўніцы апоры. Выходзіць трэба вызначыць толькі велічыню рэакцыі. Гэтая апора дапускае два рухі: 1) вярчэнне каля вядомага цэнтра і 2) наступальны рух у адным кірунку.



Чарц. 67.

IV. *Бэлька, нерухома замацаваная адным канцом*; у гэтым выпадку (чарц. 68) ёсць тры невядомых у рэакцыі апоры: 1) велічыня рэакцыі, 2) кірунак рэакцыі і 3) пункт яе прылажэння. Гэтыя тры невядомыя могуць быць вызначаны з 3-х умоў роўнавагі:

$$\Sigma x = 0; \quad \Sigma y = 0; \quad \Sigma M = 0.$$

Значыцца, такую бэльку можна статычна вызначыць, але толькі пры ўмове, што другі канец яе свабодны; калі падперці другі канец яе, то бэлька зробіцца статычна невызначальнай. Такім чынам прыходзім да выніку, што пры зусім нерухомай апоры рэакцыя заключае 3 невядомыя адзнакі; пры апоры, якая дапускае адзін рух—2 невядомыя адзнакі; пры дваякай свабодзе руху—1 невядомую адзнаку.



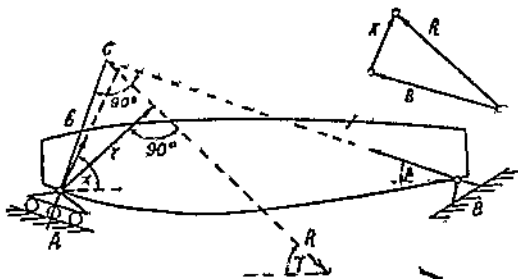
Чарц. 68.

Бэлькі могуць быць *простыя* і *складаныя*: простая бэлька становіць сабою суцэльнае цела; складаная бэлька складаецца з некалькіх злучаных між сабой стрыжняў.

Не беручы зараз пад увагу другіх даных, дапускаем толькі, што бэлька жорсткая, г. зн. паасобныя часткі яе не могуць перамяшчацца адна адносна другой. Дапускаецца, што нагрузка, якая дзейнічае на бэльку, ці сілы, якія ляжаць у адной роўніцы з воссю бэлькі, выклікаюць настолькі малыя дэфармацыі яе частак, што іх пры разліках можна не браць пад увагу.

## § 20. Камбінацыя апор

Для бэлек са статычна вызначальнымі рэакцыямі лік невядомых у апорных супраціўленнях не павінен быць большы за 3. Ведаючы з папярэдняга колькасць невядомых адзнак у кожнага роду апоры, можна злучыць іх так, каб агульны лік невядомых не быў большы за 3. Напрыклад, калі бэлька на двух апорах, то адну апору можна злучыць з двума невядомымі, а другую з адным невядомым, г. зн. адну апору з шарнірам, а другую—з шарнірам і катком (чарц. 69).



Чарц. 69.

Для першай рэакцыі невядомы велічыня і кірунак, а для другой—толькі велічыня. Няхай  $R$  ёсць роўнадзейная прыложаная да бэлькі нагрузка,  $A$  і  $B$ —рэакцыі апор. З тае прычыны, што сілы  $R$ ,  $A$  і  $B$  павінны знаходзіцца ў роўнавазе, то яны перася-

жаюцца ў адным пункце  $C$ , які вызначыцца, калі працягнуць рэакцыю  $A$  да перасячэння з роўнадзейнай  $R$ . Праз гэты пункт павінна прайсці і рэакцыя  $B$ , якая выходзіць з шарніра  $B$ . Паводле вядомых напрамкаў велічыні апорных рэакцый знойдуцца пры разлажэнні сілы  $R$  на складаючыя з дапамогай трохвугольніка сіл. Значыцца, гэтая бэлька — статычна вызначальная. Аналітычна гэта выразіцца наступным чынам:

1) спраектуем усе сілы на гарызантальную вось; з умоў роўнавагі атрымаем:

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + R \cos \gamma = 0, \quad (1)$$

2) праектуючы на вертыкальную вось, маем:

$$A \sin \alpha + B \sin \beta + R \sin \gamma = 0, \quad (2)$$

3) узяўшы момант адносна пункта  $A$ , атрымаем:

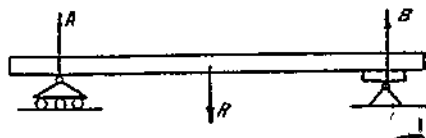
$$R \cdot r + B \cdot b = 0. \quad (3)$$

У гэтых 3-х раўнаннях невядомы  $A$ ,  $B$  і вугал  $\beta$ .

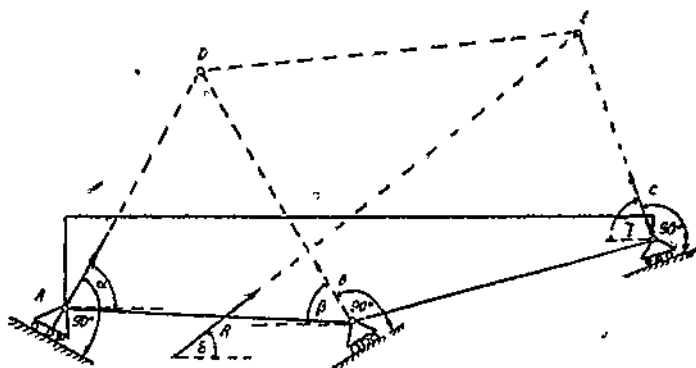
Часцей за ўсё на практыцы сустракаецца гэты выпадак, прычым у выпадку гарызантальнай лініі слізгання апоры  $A$  бэлькі пры вертыкальнай нагрузцы маюць і рэакцыі абодвух апор таксама вертыкальнымі (чарц. 70).

Калі бэлька мае 3 апоры, то ў кожнай апоры можа быць адно невядомае, каб бэлька была статычна вызначальная, г. зн. усе апоры павінны быць з шарнірамі і каткамі (чарц. 71).

Для графічнага вызначэння невядомых велічынь рэакцый апор  $A$ ,  $B$  і  $C$  раскладаем спачатку  $R$  у кірунку  $C$  і  $DE$ , дзе  $E$  — пункт



Чарц. 70.



Чарц. 71.

перасячэння  $R$  і  $C$ , а  $D$  — пункт перасячэння  $A$  і  $B$ . Затым складаючую  $DE$  раскладзем у кірунках  $A$  і  $B$ .

Для апарытнага вызначэння рэакцый аперных сіл выкажам велічыні вуглоў, утвораных сіламі  $R$ ,  $A$ ,  $B$  і  $C$  з гарызантальнай лініяй праз  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ; затым, праектуючы на вось  $xx$  (гарызантальную), атрымоўваем:

$$A \cdot \cos \alpha + B \cdot \cos \beta + C \cdot \cos \gamma + R \cdot \cos \delta = 0. \quad (I)$$

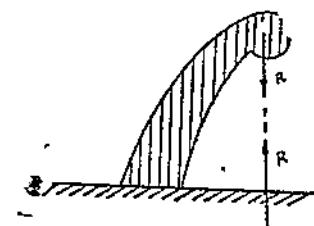
Праектуючы на вертыкальную вось, будзем мець:

$$A \cdot \sin \alpha + B \cdot \sin \beta + C \cdot \sin \gamma + R \cdot \sin \delta = 0 \quad (II)$$

і нарэшце, узяўшы суму момантаў усіх знадворных сіл адносна пункта  $A$ , атрымаем:

$$R \cdot r + B \cdot b + C \cdot c = 0,$$

дзе  $r$ ,  $b$  і  $c$  ёсць адлегласці сіл  $R$ ,  $B$  і  $C$  ад пункта  $A$ . З гэтых 3-х раўнанняў вызначаем 3 невядомыя апорныя рэакцыі  $A$ ,  $B$  і  $C$ .

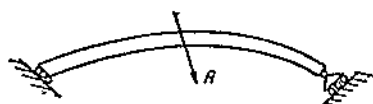


Чарц. 72.

Калі роўніца апор гарызантальная, то вуглы  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ , у выніку чаго першая ўмова роўнавагі прымае выгляд тожсамасці:  $0 = 0$  і такім чынам задача робіцца неазначанай, бо застаюцца толькі 2 раўнанні з 3 невядомымі. Тая-ж неазначанасць атрымоўваецца і пры графічным вызначэнні  $A$ ,  $B$  і  $C$ , бо ўсе пункты перасячэння сіл уходзяць

у бесканечнасць з прычыны паралельнасці кірункаў рэакцый.

Бэлька можа мець адну нерухомую апору, рэакцыя якой павінна быць роўнай і супроцьлеглай роўнадейнай  $R$ , прыложанай да бэлькі нагрузкі (чарц. 72).



Чарц. 73.

Задача. Вызначыць рэакцыі апор бэлькі, умацаванай на двух рухомах апорах: адной плоскай (на катках) і другой шарнірнай (чарц. 73), калі  $R = 35$  т.

**§ 21. Выгібаючы момант і папярочная сіла.** Аналітычнае і графічнае вызначэнне рэакцый апор, выгібаючых момантаў і папярочных сіл у простых бэльках

Напружанне ў кожным сячэнні бэлькі магчыма вызначыць на падставе метадаў супраціўлення матэрыялаў, калі для гэтага сячэння будучыя вядомы: папярочная сіла ці перарэзваючае ўсіддзе і выгібаючы момант знешніх сіл.

Няхай ёсць бэлька (чарц. 74)  $AB$ , на якую дзейнічаюць знешнія сілы. Возьмем адвольнае сячэнне бэлькі  $mn$  і няхай  $Q$  будзе роўнадейнай усіх знешніх сіл, дзеючых на бэльку левей сячэння  $mn$ . Прыложым у самым сячэнні  $mn$  да бэлькі дзве роўныя і супрацьлеглыя сілы  $Q$  і  $Q_1$ , дзеянне якіх роўна нулю (бо яны узаемна

уроўнаважваюцца). Сілы  $Q$ —прыложаныя на адлегласці  $x$  і су процьлегла накіраваныя, утвараюць момант  $Q \cdot x$ , чаму застаецца свабодная сіла  $Q_1 = Q$ , прыложаная ў сячэнні. Сіла  $Q_1$  імкнецца ўтварыць перарэзванні ці зрух бэлькі ў сячэнні *тл* і зрушыць левую частку ад сячэння паралельна ў кірунку сілы, чаму і носіць назву *перарэзваючай ці папярочнай сілы*. Момант-жа імкнецца ўтварыць згіб бэлькі, чаму і наз. *выгібаючым момантам*. З паданага вынікае:

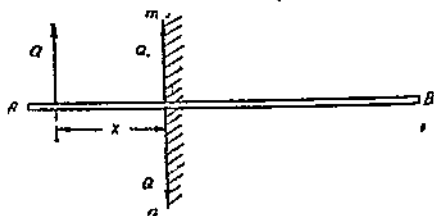
1) *папярочная сіла для данага сячэння роўна роўнадзейнай усіх сіл, дзеючых на бэльку левей сячэння і прыложана ў сячэнні і*

2) *выгібаючы момант у даным сячэнні роўны статычнаму моманту роўнадзейнай ці, другімі словамі, суме момантаў усіх сіл, дзеючых на бэльку ўлева ад сячэння, адносна цэнтра цяжару гэтага сячэння.*

Умоўна лічаць папярочную сілу *дадатнай*, калі яна ў левай частцы бэлькі дзейнічае *ўніз* і *адмоўнай*, калі яна дзейнічае *зверху* ўніз. Гэта ўмоўная знешняя сіла  $Q$  уводзіцца ў разгляд таму, што яе велічыня непасрэдна выражае ўнутраныя сілы ў бэльцы. Момант прынята лічыць *дадатным*, калі ён у левай частцы бэлькі ўтварае вярчэнне ў кірунку *стрэлкі* гадзінніка, *выгібаючы* бэльку пукатасцю ўніз, і *адмоўным*, калі кірунак яго вярчэння супроць стрэлкі гадзінніка і ён *выгібае* бэльку пукатасцю ўверх.

Калі бывае нягэтай у якім-небудзь выпадку вызначыць знак ці велічыню папярочнай сілы ці моманту паводле папярочнай сілы ці моманту знешніх сіл *правай* часткі бэлькі адносна таго-ж сячэння, то трэба мець на ўвазе, што папярочныя сілы  $Q_1$  і  $Q$  і моманты  $M_1$  і  $M$  сіл *правай* і *левай* частак бэлькі павінны быць роўнымі і супрацьлеглымі з прычыны роўнавагі бэлькі, г. зн.

$$Q = -Q_1 \text{ і } M = -M_1.$$

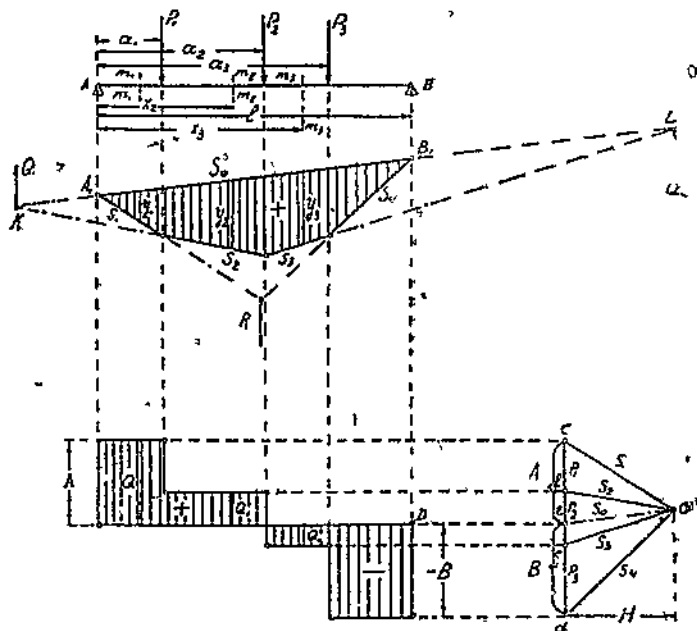


Чарц. 74.

## § 22. Пастаянная прамая нагрузка згрупаванымі грузамі

Вызначым рэакцыі апор, папярочныя сілы і выгібаючыя моманты для гарызантальнай прамой бэлькі, якая свабодна ляжыць на двух апорах, калі на яе дзейнічае непасрэдная нагрузка ў выглядзе згрупаваных грузаў, накіраваных вертыкальна. Адна з апор мае шарнір, а другая—шарнір і каткі. Апорныя рэакцыі, якія выклікаюцца знешнімі сіламі, павінны быць вертыкальнымі; рэакцыя апоры з каткамі будзе вертыкальнай, бо гэтая апора не можа супраціўляцца (пры гарызантальным яе палажэнні) нахіленым сілам, а другая—вертыкальнай, бо яна павінна перасякаць роў-

надзейную сілу ў тым-жа пункце, як і першая, г. зн. у бесканечнасці. Тое-ж самае можна даказаць аналітычна: пры нахіленым кірунку рэакцыі нерухомай апоры праекцыя ўсіх узаемна ўроўнаважаных сіл на гарызонтальную вось была-б няроўнай нулю. Графічна рэакцыі апор вызначаюцца наступным чынам (чарц. 75): будуюцца многавугольнік сіл  $cd$  з даных сіл  $P_1, P_2, P_3$  і пры адвольным полюсе  $O$ —вяровачны многавугольнік, крайнія бакі якога перасякаюць апорныя вертыкалі ў пунктах  $A_1$  і  $B_1$ . Праводзіцца замыкаючая  $A_1B_1(SO)$ , бо пры роўнавазе сіл вярочачны



Чарц. 75.

многавугольнік павінен быць замкнуты; затым праз полюс  $O$  праводзіцца промень, паралельны замыкаючаму боку, які перасякае многавугольнік сіл у пункце  $e$ ; тады атрымаецца:

рэакцыя  $A = ec$ ; рэакцыя  $B = de$  (чарц. 75).

Для аналітычнага вызначэння рэакцыі апор  $A$  і  $B$  скарыстаем умову  $\Sigma M = 0$ . Спачатку складзем суму момантаў усіх сіл адносна правай апоры  $B$ . Паводле ўмовы роўнавагі яна роўна нулю:

$$A \cdot l - P_1 \cdot (l - a_1) - P_2 \cdot (l - a_2) - P_3 \cdot (l - a_3) \dots = 0,$$

ці скарачана:

$$A \cdot l - \Sigma P \cdot (l - a) = 0,$$

адкуль вызначаем невядомую велічыню  $A$ :

$$A = \frac{P_1(l - a) + P_2(l - a_2) + P_3(l - a_3)}{l} = \frac{\Sigma P \cdot (l - a)}{l} \quad (8)$$

Аналогічна, склаўшы суму момантаў адносна левай апоры  $A$ , таксама знойдзем рэакцыю апоры  $B$ :

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3 - B \cdot l = 0,$$

ці скарачана:

$$\Sigma P \cdot a - B \cdot l = 0,$$

адкуль:

$$B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3}{l} = \frac{\Sigma P \cdot a}{l}. \quad (9)$$

Рэакцыю апоры  $B$  можна вызначыць таксама, праектуючы ўсе сілы на вертыкальную вось  $y$  з умовы  $\Sigma y = 0$ .

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 = 0, \text{ ці}$$

$$A + B - \Sigma P = 0, \text{ адкуль:}$$

$$B = P_1 + P_2 + P_3 - A = \Sigma P - A. \quad (10)$$

Выгібаючы момант у кожным сячэнні вызначаецца на аснове таго, што ён роўны статычнаму моманту сіл, якія дзейнічаюць улева ад сячэння, адносна гэтага сячэння. Так, напр., для сячэння  $m_2 m_2$ , якое знаходзіцца на адлегласці  $x_2$  ад левай апоры  $A$ , выгібаючы момант:

$$M_2 = A \cdot x_2 - P_1 \cdot (x_2 - a_1).$$

Для сячэння-ж  $m_3 m_3$  на адлегласці  $x_3$  ад левай апоры  $A$  выгібаючы момант:

$$M_3 = A \cdot x_3 - P_1 \cdot (x_3 - a_1) - P_2 \cdot (x_3 - a_2) \text{ або наогул:}$$

$$\odot M = A \cdot x - \Sigma P(x - a). \quad (11)$$

Графічна выгібаючы момант для кожнага сячэння вызначаецца адрэзкам у між замыкаючай і бокам вярочнага многавугольніка, які перасякаецца вертыкальна, што праходзіць праз данае сячэнне, памножанае на полюскую адлегласць.

Так напр. для сячэння  $m_2 m_2$  выгібаючы момант будзе:  $M_2 = H \cdot y_2$ . Сапраўды, для групы сіл  $A$  і  $P_1$ , левей сячэння  $m_2 m_2$ , крайнімі бакамі вярочнага многавугольніка з'яўляюцца  $S_0$  і  $S_2$ , якія перасякаюцца вертыкальна праз  $m_2 m_2$ . Зусім таксама для сячэння  $m_3 m_3$  выгібаючы момант будзе  $M_3 = H \cdot y_3$ , бо крайнімі бакамі для сіл  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  з'яўляюцца бакі  $S_0$  і  $S_3$ .

Папярочная сіла  $Q$  згодна азначэння ёсць роўнадзейная ўсіх знешніх сіл або, што пры паралельных сілах тое-ж самае, алгебрычнай сума ўсіх сіл, якія дзейнічаюць улева ад сячэння. На аснове гэтага для ўсякага сячэння  $m_1 m_1$  між левай апорай і першай сілай папярочная сіла  $Q_1 = A$ , бо левей сячэння  $m_1 m_1$  дзейнічае толькі адна сіла  $A$ ;  $Q_1$  будзе дадатная, бо накіравана внізу

ўверх. Для сячэння-ж  $m_2 m_3$  між першай і другой сіламі папярочная сіла  $Q_2 = A - P_1$ . У сячэнні пад самай сілай  $P_1$  папярочная сіл робіць скачок і мае значэнне  $Q_1$  і  $Q_3$  у залежнасці ад таго, з якога боку сячэння мы бяром сілу  $P_1$  — з правага ці з левага або наогул:

$$Q = A - \Sigma P \text{ лев.} \quad (12)$$

Таксама для сячэння  $m_2 m_3$  папярочная сіла  $Q_3 = A - P_1 - P_2$  і г. д.

Калі адкласці ад гарызантальнай прамой пад кожным сячэннем велічыню папярочнай сілы ў гэтым сячэнні ў маштабе сіл і злучыць канцы адкладзеных адрэзкаў, то атрымаецца ступенчатая лінія, якая пачынаецца з велічыні  $A$  і канчаецца велічынёй  $B$  з уступамі, роўнымі сілам у пунктах прылажэння гэтых сіл. Гэту лінію можна пабудоваць графічна, правёўшы гарызантальную прамую праз пункт  $e$  ў многавугольніку сіл, затым гарызантальную прамую праз пункт  $c$  ад апорнай вертыкальнай лініі да  $P_1$  і гарызантальную прамую праз пункт  $f$  ад сілы  $P_1$  да сілы  $P_2$  і г. д.

У многавугольніку сіл папярочная сіла выражаецца адрэзкам між пунктамі  $e$  і  $f$  тым променем, адпаведны бок якога перасякаецца сячэннем, напр. для сячэння  $m_1 m_2$  папярочная сіла  $Q_1 = e \cdot c$ , для сячэння  $m_2 m_3$  —  $Q_2 = ef$ , для сячэння  $m_3 m_4$  —  $Q_3 = -eg$ . Папярочная сіла будзе дадатнай тады, калі адрэзак ляжыць вышэй променя  $S_0$ , г. зн. пункта  $e$ , і адмоўная, калі гэты адрэзак ляжыць ніжэй пункта  $e$ .

Плошча вярэвачнага многавугольніка, абмежаваная замыкаючай  $S_0$  і бакамі  $S_1, S_2, S_3$ .. наз. „эпюрай момантаў“, плошча-ж, абмежаваная гарызантальнай прамой, апорнымі вертыкальнымі прамымі і ступенчатой лініяй называецца „эпюрай папярочных сіл“.

У гэтых эпюрах знаходзім моманты і папярочныя сілы ў сячэннях ад данай нагрузкі, адкладзеныя ў выглядзе ардынат непасрэдна пад адпаведнымі сячэннямі. Яны наглядна паказваюць змену момантаў і папярочных сіл для ўсякіх сячэнняў па даўжыні бэлькі.

*Выгібаючы момант для ўсякага сячэння бэлькі, якая свабодна ляжыць на двух апорах, пры дзеянні на яе вертыкальнай нагрузкі мае заўсёды дадатнае значэнне.*

Сапраўды, пакуль сячэнне знаходзіцца між левай апорай  $A$  і першай сілай  $P_1$ , левей сячэння дзейнічае толькі адна сіла  $A = Q$  у кірунку знізу ўверх, прычым момант яе адносна сячэння будзе мець дадатнае значэнне.

Калі сячэнне знаходзіцца між першай і другой сіламі, роўнадзейная сіл  $A$  і  $P_1$ , якія дзейнічаюць улева ад сячэння, роўна  $Q_2 =$  адрэзку  $ef$ ; яна дзейнічае знізу ўверх і прыложена ў пункце перасячэння крайніх променяў  $K$  (улева ад сячэння), у выніку чаго момант яе будзе мець таксама дадатнае значэнне. Пры пераходзе сячэння на ўчастак ад  $P_2$  да  $P_3$  левей сячэння дзейнічаюць сілы  $A, P_1, P_2$ , роўнадзейная якіх  $Q_2 = eg$  прыложена ў пункце  $L$  (управа ад сячэння) і дзейнічае зверху ўніз. Такім

значенне. Урэшце, калі сячэнне знаходзіцца між сілай  $P_3$  і правай апорай  $B$ , то роўнадзейная сіла  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , якія дзейнічаюць улева ад сячэння, роўна  $B$ , дзейнічае зверху ўніз і прыложана ў пункце  $B$ —перасячэння крайніх бакоў  $S_0$  і  $S_4$  вярэвачнага многавугольніка для гэтай групы сіл. Такім чынам момант яе таксама мае дадатнае значэнне. На аднолькавасць знакаў моманту для кожнага сячэння бэлькі паказвае таксама і тое, што ўсе ардынаты  $u$ , якія вызначаюць велічыню моманту, знаходзяцца з аднаго боку замыкаючай вярэвачнага многавугольніка, г. зн. эпюры момантаў.

Для разліку бэлькі неабходна ведаць *найбольшы момант*. Каб вызначыць яго да плошчы момантаў паралельна замыкаючай  $S_0$  трэба правесці датычную. Яна даткнецца плошчы момантаў у адной з вяршынь вярэвачнага многавугольніка, ці, у прыватным выпадку, супадае з адным з бакоў гэтага многавугольніка, калі гэты бок паралельны  $S_0$ . У пункце, у якім датычная даткнецца плошчы момантаў, ардыната  $u$  мае найбольшае значэнне, а таму найбольшым будзе момант для сячэння на адной вертыкалі з гэтым пунктам. Што датычыць папярочнай сілы  $Q$ , то, змяняючыся скачкамі ад  $+A$  да  $-B$ , яна пад адной з сіл праходзіць праз  $O$  і толькі ў прыватным выпадку  $Q$  можа быць роўнай  $O$  для ўсіх сячэнняў між двума сіламі, калі  $A - \Sigma P_{лев} = 0$  і адзін з гарызантальных уступаў супадае з гарызантальнай прамой  $CD$ .

Часам велічыні моманту і папярочнай сілы бывае лягчэй знайсці з разглядання знешніх сіл, прыложаных да *правай* часткі бэлькі. У такім выпадку трэба мець на ўвазе, што моманты і папярочныя сілы правай і левай частак бэлькі павінны быць роўны і супрацьлеглыя.

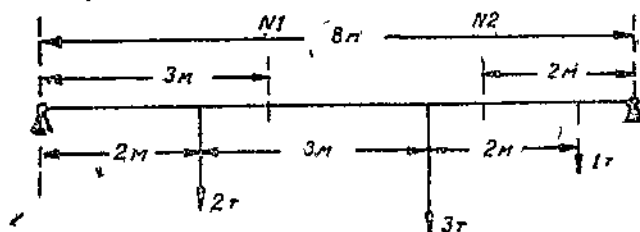
Пры вызначэнні папярочнай сілы і моманту для кожнага сячэння бэлькі зусім не мае ніякага значэння ці разглядаецца частка яе ўлева ці ўправа ад сячэння. Сапраўды, калі ўзяць сячэнне  $m_2m_2$ , то на левую частку бэлькі дзейнічаюць сілы  $A$  і  $P_1$ , роўнадзейная якіх  $Q_2 = A - P_1$ , праходзіць праз пункт  $K$ , па велічыні роўна адрэзку  $ef$  у многавугольніку сіл і дзейнічае па вертыкалі зізну ўверх. На правую частку бэлькі дзейнічаюць сілы  $B$ ,  $P_2$  і  $P_3$ ; у многавугольніку сіл адрэзак  $ef$  дае велічыню іх роўнадзейнай  $Q_2' = B - P_2 - P_3$ , якая прыложана ў тым-жа пункце  $K$  і дзейнічае зверху ўніз. Роўнадзейныя  $Q_2$  сіл  $A$  і  $P_1$  і  $Q_2'$  сіл  $B$ ,  $P_2$  і  $P_3$ , як сілы, якія ляжаць у адной вертыкалі, узаемна роўныя і накіраваныя ў супрацьлеглыя бакі, узаемна ўроўнаважваюцца.

Моманты тых-жа роўнадзейных адносна сячэння  $m_2m_2$  па велічыні таксама роўны, але маюць супрацьлеглыя знакі, значыць таксама ўзаемна знішчаюцца.

**Задача.** На бэльку даўжынёй у 8 м ціснуць 3 грузы ў 2 т, 3 т і 1 т. Размяшчэнне грузаў указана на чарц. 76. Вызначыць аналітычна рэакцыі апор, выгібаючыя моманты і папярочныя сілы

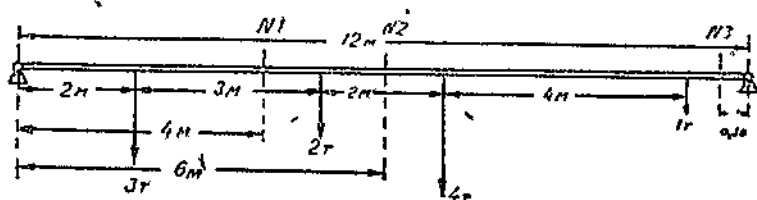
ў сячэннях №№ 1 і 2 (маштаб сіл  $1 \text{ т} = 1 \text{ см}$ , маштаб адлегласцей  $1 \text{ м} = 1 \text{ см}$ ). Уласная вага ў разлік не прымаецца.

**Задача.** На бэльку даўжынёй у 12 м дзейнічае ціск у 3 т, 2 т, 1 т і 4 т. Размяшчэнне згрупаваных грузаў указана на чарц. 77.



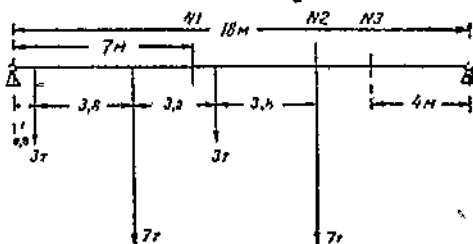
Чарц. 76.

Вызначыць графічна рэакцыі апор, выгібаючыя моманты і папярочныя сілы ў сячэннях №№ 1, 2 і 3, пабудавать энкры момантаў і папярочных сіл. Маштаб сіл  $1 \text{ т} = 1 \text{ см}$ , маштаб адлегласцей  $1 \text{ м} = 1 \text{ см}$ . Уласную вагу бэлькі ў разлік не прымаць.



Чарц. 77.

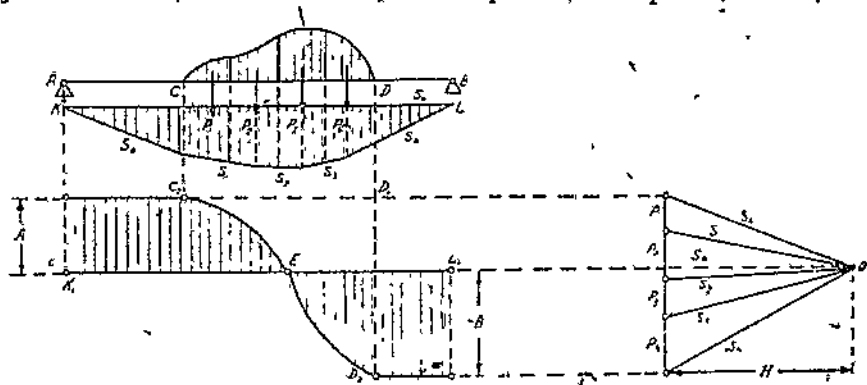
**Задача.** На бэльку даўжынёй 18 м дзейнічае ціск колаў 2-х грузавікоў (чарц. 78). Вызначыць аналітычна і графічна рэакцыі апор, выгібаючыя моманты і папярочныя сілы ў сячэннях №№ 1, 2 і 3, пабудавать энкры момантаў і папярочных сіл. Уласную вагу бэлькі ў разлік не прымаць.



Чарц. 78.

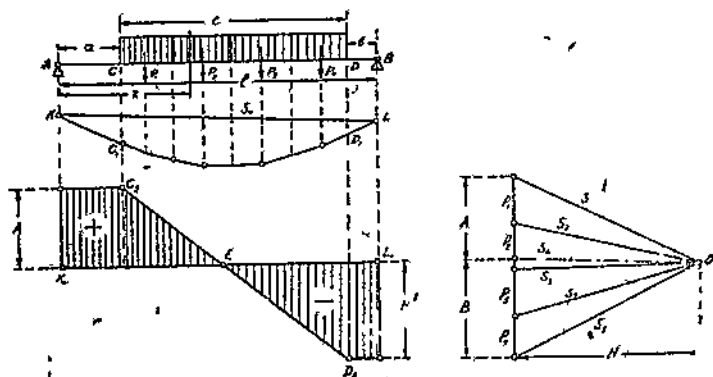
## § 23. Непасрэдна размеркаваная нагрузка

Калі на бэльку ці яе частку (чарц. 79) дзейнічае размеркаваная нагрузка, то па даўжыні бэлькі гэтую нагрузку можна падзяліць на элементарныя часткі і разглядаць іх, як згрупаваныя, грузы. Падзяляем плошчу нагрузкі вертыкальнымі лініямі на вузкія палоскі, якія можна было-б прыняць за трапецыі. У цэнт-



Чарц. 79.

рах цяжару гэтых трапецый прыкладваем згрупаваныя грузы  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ , роўныя вазе гэтых трапецый. Будзем многавугольнік  $с_1$  і вярочны многавугольнік, праводзім замыкаючую  $KL$ . Частка вярочнага многавугольніка між вертыкалямі,



Чарц. 80.

праведзенымі праз канцы суцэльнай нагрузкі, г. зн. між пунктамі  $C_1$  і  $D_1$ , будзе мець тым больш бакоў, чым на большы лік частак падзелена плошча нагрузкі. Пры бесканечна вялікім ліку гэтых частак вярочны многавугольнік у часці  $C_1D_1$  абарочваецца ў вярочную крывую. Пасобныя бакі раней пабудова-

нага многоаугольника абарочваюцца ў датычныя, прычым пункты  $C_1, D_1$  і пункты, якія ляжаць на вертыкалях, што падзяляюць нагрузку на элементарныя палосы, з'яўляюцца пунктамі дотыку. Момент для кожнага папярочнага сячэння роўны адпаведнай ардынаце  $y$ , памножанай на полюсную адлегласць  $H$ . Папярочная сіла  $Q$  мае пастаяннае значэнне, роўнае рэакцыі апоры  $A$  ад левай апоры да пункта  $C$ . Між пунктамі  $C$  і  $D$  яна змяншаецца па крывой  $C_2D_2$  і дасягае ў пункце  $D_2$  свайго найбольшага адмоўнага значэння, роўнага  $-B$ , якое і захоўваецца нязменным да правай апоры. Пункт  $E$  перасячэння прамой  $K_1L_1$  з крывой  $C_2D_2$  вызначае той пункт бэзкі, дзе папярочная сіла роўна 0, а момант мае найбольшае значэнне.

У выпадку роўнамерна-размеркаванай (суцэльнай) нагрузкі (чарц. 80) на частцы бэзкі  $CD$  апорныя рэакцыі і вярочныя крывыя будуць так, як і ў папярэднім выпадку. Але ў эпіюры папярочных сіл  $Q$  замест крывой  $C_2D_2$  атрымліваецца *прамая*.

Сапраўды, калі абазначыць велічыню нагрузкі на пагонную адзінку даўжыні бэзкі праз  $p$  (інтэнсіўнасць нагрузкі), адлегласць якога-небудзь сячэння ад левай апоры праз  $x$ , то велічыня папярочнай сілы для гэтага сячэння будзе:

$$Q = A - p(x - a),$$

што з'яўляецца раўнаннем прамой.

Аналітычна апорныя рэакцыі вызначаюцца з раўнання момантаў адносна пункта  $B$  для роўнадзейнай нагрузкі:

$$R = p \cdot C = p[l - (a + b)], \quad (13)$$

пункт прыкладання якой знаходзіцца ад  $B$  на адлегласці:

$$b + \frac{C}{2}, \text{ але } \frac{C}{2} = \frac{l - (a + b)}{2},$$

значыць гэтая адлегласць роўна:

$$b + \frac{l - (a + b)}{2}.$$

Сума момантаў адносна пункта  $B$  усіх сіл роўна 0, г. зн.  $\Sigma M = 0$ , такім чынам:

$$A \cdot l - R \cdot \left[ b + \frac{l - (a + b)}{2} \right] = 0;$$

з гэтага вызначаем  $A$ :

$$A = \frac{p \cdot [l - (a + b)] \cdot \left[ b + \frac{l - (a + b)}{2} \right]}{l}. \quad (14)$$

Момант для кожнага сячэння на адлегласці  $x$  ад левай апоры роўны:

$$M = Ax - p \cdot (x - a) \cdot \frac{(x - a)}{2} = Ax - \frac{(p - x)^2}{2}. \quad (15)$$

Папярочная сіла роўна:

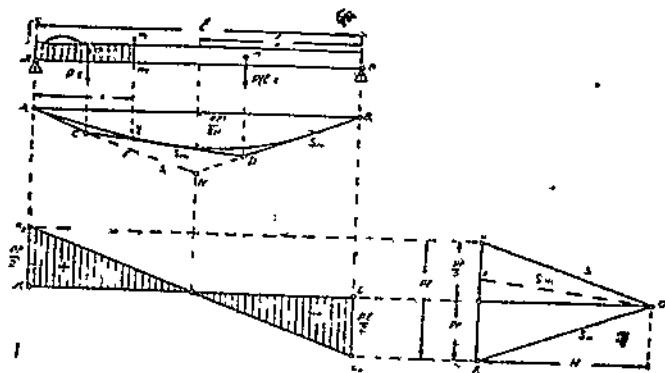
$$Q = A - p \cdot (x - a), \quad (16)$$

Калі бэлька нагружана роўнамерна-размеркаванай нагрузкай на ўсёй даўжыні бэлькі, то поўная нагрузка бэлькі роўна  $p \cdot l$ . Для вызначэння рэакцыі левай апоры  $A$  трэба скласці раўнанне моманту адносна правай апоры:  $\Sigma M = 0$ , што дае наступнае раўнанне:

$$M_B = A \cdot l - p \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

адкуль вызначаецца (чарц. 81)

$$A = \frac{p \cdot l}{2}. \quad (17)$$



Чарц. 81.

Для вызначэння рэакцыі правай апоры бяром раўнанне момантаў сіл адносна левай апоры:

$$M_A = -B \cdot l + p \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

адкуль

$$B = \frac{p \cdot l}{2}. \quad (18)$$

Момант для ўсякага сячэння бэлькі на адлегласці  $x$  ад левай апоры:

$$M_x = A \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

замяніўшы  $A$  знойдзеным яе значэннем, атрымаем:

$$M_x = p \cdot \frac{l}{2} \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

адкуль

$$M_x = \frac{p \cdot x}{2} (l - x). \quad (19)$$

Для сярэдзіны бэлькі, дзе  $x = \frac{l}{2}$ , маем:

$$M_{\max} = \frac{p \cdot l^2}{8}. \quad (20)$$

Для кожнага сячэння, якое знаходзіцца на адлегласці  $x$  ад левай апоры,  $M_x = y \cdot H$ , дзе  $y$  ардыната вярочнай крывой,  $H$ —полюсная адлегласць. Параўноўваючы 2 раўнанні:

$$M_x = \frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x) \text{ і } M_x = y \cdot H,$$

выводзім:

$$H \cdot y = \frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x) \text{ ці } y = \frac{p \cdot x}{2 \cdot H} \cdot (l - x),$$

што з'яўляецца раўнаннем парабалы. Такім чынам вярочная крывая ёсць парабала, ардынаты якой: пры  $x = 0$   $y = 0$ , пры

$$x = \frac{l}{2} \text{ адп. маем:}$$

$$y_{\max} = \frac{p l^2}{8 H}. \quad (21)$$

пры  $x = l$  адпав.  $y = 0$ .

*Парабала гэта сіметрычна адносна вертыкалі, якая праходзіць праз сярэдзіну бэлькі.*

Сапраўды, калі ўзяць выводную ад  $y = \frac{p x}{2 H} \cdot (l - x)$ , якая выражаецца праз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \cdot l}{2 H} - \frac{p \cdot x}{H}, \text{ то пры } x = \frac{l}{2}$$

гэта выводная абарочваецца ў 0 або

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

апошняе выражэнне ўказвае на тое, што датычная да парабалы ў пункце перасячэння вертыкалі з сярэдзіны бэлькі з парабалай гарызантальна. Найбольшы момант атрымліваецца для сярэдзіны бэлькі; сапраўды, возьмем выводную ад функцыі  $M_x = \frac{p \cdot x}{2} (l - x)$ :

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{p l}{2} - \frac{2 p \cdot x}{2}$$

Гэта выводная пры  $x = \frac{l}{2}$  ператвараецца ў 0, г. зн.  $\frac{dM_x}{dx} = 0$ , адпаведна і найбольшая ардыната будзе:

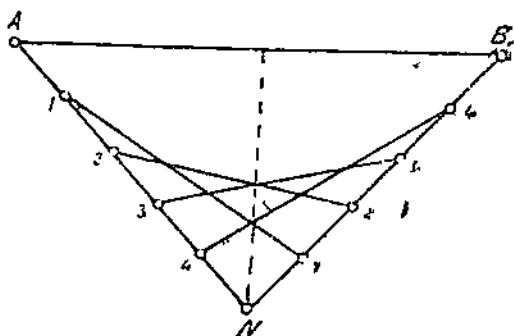
$$y_{\max} = \frac{p \cdot l^2}{8H}.$$

Цяпер прайдзем да пабудовы парабалы, якая абмяжоўвае плошчу момантаў, для чаго разгледзім пабудову адвольнага пункта парабалы  $F$ , якая знаходзіцца ад левай апоры на адлегласці  $x$  — сячэнне  $mm$ .

Гэтым сячэннем нагрузка падзяляецца на 2 часткі:  $px$  і  $p \cdot (l-x)$ ; апошнія можна разглядаць, як згрупаваныя грузы, прыкладзеныя ў пунктах  $O$  і  $O_1$ , якія з'яўляюцца цэнтрамі цяжару адпаведных грузавых плошчаў. Калі ў сілавым многавугольніку  $ae = px$  і  $eb = p \cdot (l-x)$  і калі пабудоваць вярэвачны многавугольнік  $S_1 S_m S_n$ , пры полюсе  $O$ , то бок  $S_m$  вярэвачнага многавугольніка і яго замыкаючая  $A_1 B_1$  адсякуць ад вертыкалі, што праходзіць праз сячэнне  $mm$ , адрэзак  $у$ , здабытак якога на полюсную адлегласць  $H$  дае велічыню моманту:  $M_x = y \cdot H$ ; пры  $H = 1$  маем:  $M_x = y$ .

Пры змене  $x$  адпаведна змяняецца і палажэнне боку  $S_m$  вярэвачнага многавугольніка, праекцыя-ж яго даўжыні на вось бэлькі, роўная адлегласці паміж цэнтрамі цяжару  $OO_1$ , застаецца заўсёды пастаяннай і роўна палове даўжыні бэлькі. Сапраўды:  $\frac{x}{2} + \frac{l-x}{2}$  пры ўсякім  $x$  роўна  $\frac{l}{2}$ .

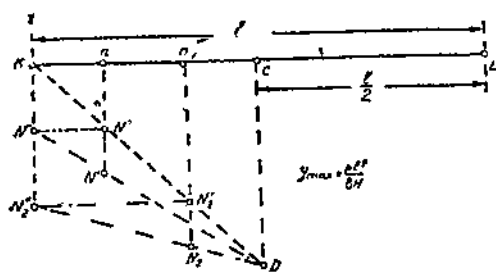
Гэты бок  $S_m$  з'яўляецца датычным у сячэнні  $mm$  да вярэвачнай крывой. Значыць розныя палажэнні яе вызначаюць аб'ёмную або парабалу. Гэта ўласцівасць дае спосаб пабудовы датычных: падзяліўшы крайнія бакі (чарц. 82)  $A_1 N$  і  $B_1 N$ , праведзеныя паралельна променям  $aO$  і  $bO$  (пры полюсе  $O$ , які ляжыць на перпендыкуляры да  $ab$ , праведзеным праз сярэдзіну  $ab$ ) на адволькавы лік роўных між сабою частак, злучым прамымі пунктамі дзялення, абазначаныя адволькавымі цыфрамі. Праекцыі гэтых злучальных ліній на прамую  $A_1 B_1$  роўны  $\frac{A_1 B_1}{2}$ , а таму яны з'яўляюцца датычнымі да крывой, якая вызначаецца тым больш дакладна, чым больш дзяленняў узята на  $A_1 N$  і  $B_1 N$ .



Чарц. 82.

Замыкающую  $A_1B_1$  можна змясціць гарызантальна, для чаго трэба выбраць палажэнне потюса на перпендыкуляры з сярэдняй сілавой лініі.

Будуецца парабала па пунктах пры вядомай яе страле  $f = y_{\max} = \frac{pl^2}{8H}$  для сярэдняй наступным чынам (чарц. 83): праз сярэдзіну замыкаючай праводзяць вертыкальную прамую, на якой адкладваюць  $y_{\max} = \frac{pl^2}{8H} = CD$ . Затым злучаюць пункты  $D$  і  $K$ . Праз якое-небудзь сячэнне, напр.  $n_1$ , праводзяць вертыкальную



Чарц. 83.

прамую, а праз пункт перасячэння яе з  $DK$ — гарызантальную прамую да пункта перасячэння з апорнай вертыкаллю ў пункце  $N_1''$ . Правёўшы прамую  $N_1''D$ , у пункце перасячэння яе з вертыкаллю, праведзенай з данага сячэння, знаходзяць пункт парабалы  $N_1$ . Прабіўшы гэта для другіх сячэнняў  $n_2, n_3 \dots$  знао-

дзяць пункты парабалы  $N_1, N_2 \dots$ , якія злучаюць плаўнай крывой.

Папярочная сіла для ўсякага сячэння (чарц. 81), якое знаходзіцца на адлегласці  $x$  ад левай апоры, вызначаецца з формулы

$$Q_x = A - p \cdot x = \frac{pl}{2} - px = p \left( l - \frac{x}{2} \right). \quad (22)$$

Такім чынам *папярочная сіла  $Q$  ёсць лінейная функцыя адлегласці  $x$* ; графічна яна выражаецца *прамой лініяй*: пры  $x=0$

будзе  $Q = +\frac{pl}{2}$ ; пры  $x = \frac{l}{2}$  адпав.  $Q=0$ ; пры  $x=l$  будзе

$$Q = -\frac{pl}{2}.$$

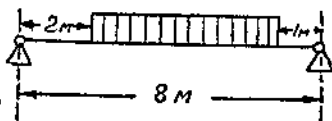
**Задача.** Бэлька, даўжынёю ў  $l=6$  м, свабодна ляжыць на двух апорах, прычым загружава суцэльнай роўнамерна-размеркаванай нагрузкай  $p=0,5$  т на 1 паг. м даўжыні бэлькі. Трэба вызначыць вылічэннем: рэакцыі апор, найбольшы выгібаючы момант, папярочныя сілы і выгібаючыя моманты для сячэнняў, якія знаходзяцца ад левай апоры на 1 м і на 5 м.

**Задача.** Бэлька, якая свабодна ляжыць на 2 апорах, загружана па ўсёй даўжыні роўнамерна-размеркаванай нагрузкай  $p=1,2$  т на 1 паг. м; даўжыня бэлькі 8 м. Патрэбна пабудаваць эпіору момантаў, эпіору папярочных сіл і графічна вызначыць велічыні выгібаючых момантаў і папярочных сіл для сячэнняў, якія знаходзяцца ад левай апоры на 2 м і 7 м.

**Задача.** Бэлька даўжынёю 10 м, якая свабодна ляжыць на 2-х апорах (чарц. 84) загружана на частцы даўжынні роўнамерна-размеркаванай нагрузкай  $p = 0,6 \text{ т}$  на 1 паг. м. Вызначыць вылічэннем: рэакцыі апор, моманты і папярочныя сілы для сячэнняў, якія знаходзяцца ад левай апоры на 2, 3, 4 і 7 м.

**Задача.** Бэлька, якая свабодна ляжыць на двух апорах, загружана згодна чарц. 84 роўнамерна-размеркаванай нагрузкай  $p = 600 \text{ кг}$  на 1 паг. м. Пабудавать эпюру момантаў, эпюру папярочных сіл, вызначыць графічна апорныя рэакцыі, выгібаючыя моманты і папярочныя сілы для сячэнняў на адлегласці ад левай апоры 2 м, 3 м, 4 м і 7 м.

**Задача.** Бэлькі даўжынёю (разліковаю) у 5,6 м, размешчаныя на адлегласці 0,70 м між ваямі, павінны падтрымліваць уласную вагу столі, роўную 120 кг на 1 кв. метр, і вагу зярна, рассыпанага слоём таўшчынёю 1 м і вагою 800 кг у куб. м. Вызначыць рэакцыі апор, найбольшы выгібаючы момант, пабудавать эпюры момантаў і папярочных сіл. Вызначыць размеры жалезных двутаўравых бэлек, калі дапушчальнае напружанне для данага выпадку  $1000 \text{ кг/см}^2$ .



Чарц. 84.

**Задача.** Каменная сцяна ў 4,5 м даўжынні, 4,2 м вышыні і 0,3 м таўшчынні падтрымліваецца жалезнымі двутаўравымі бэлькамі. На адлегласці 2,4 м ад левай апоры ёсць дзвярны праём у 1,1 м шырыні і 2,2 м вышыні; 1 куб. м кладкі ваżyць 1600 кг. Вызначыць рэакцыі апор, найбольшы выгібаючы момант і сячэнне двутаўравых бэлек. Уласную вагу ў гэтых задачах у разлік не прымаць.

## § 24. Складаная нагрузка

Апрача роўнамерна-размеркаванай нагрузкі, бэлька можа падпадаць адначасова і дзеянню згрупаваных грузаў. Гэты выпадак заўсёды бывае тады, калі на бэльку дзейнічаюць згрупаваныя грузы, бо ўласная вага бэлькі ёсць нагрузка роўнамерна-размеркаваная па ўсёй даўжынні.

Моманты, папярочныя сілы і апорныя рэакцыі вызначаюцца, як алгебрычныя сумы адпаведных велічынь для кожнага віду нагрузкі. Для атрымання сумы ардынат абодвух плошчаў момантаў і папярочных сіл непасрэдна ў выглядзе адрэзкаў, трэба браць полюсы для згрупаваных грузаў і роўнамерна-размеркаванай нагрузкі з розных бакоў адпаведных ім многавугольнікаў сіл на адной і той-жа полюснай адлегласці  $H$  ад многавугольніка сіл; пры гэтым для атрымання гарызантальнай замыкаючай полюс, для размеркаванай нагрузкі трэба браць на перпендыкуляры з сярэдзіны многавугольніка сіл, а для згрупаваных грузаў так

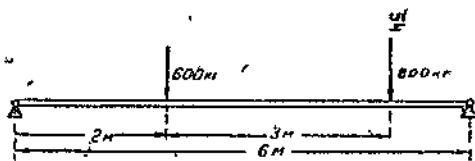


Графічна реакція опор  $A$  атримоуєаецца як сума адрэзкаў  $A_p$  і  $A_R$ , узятых з адпаведных сілавых многавугольнікаў. Момент у кожным сячэнні на адлегласці  $x$  ад опоры  $A$  вызначаецца так:

$$M_x = M_p + M_R = \frac{px(l-x)}{2} + \frac{\Sigma P(l-a)}{l} \cdot x - \Sigma P_{лев}(x-a). \quad (24)$$

Графічна:  $M_x = H \cdot y$ , дзе  $H$ —поліусная адлегласць і  $y$ —сума ардынат парабалы для размеркаванай нагрузкі і вярочнага многавугольніка—для згрупаванай пабудаваных з замыкаючымі, якія супадаюць.

Найбольшы момант атримоуєаецца ў тым сячэнні, дзе у прымае найбольшае значэнне, г. зн. дзе датычная да парабалы



Чарц. 86.

паралельна адпаведнаму боку вярочнага многавугольніка. Сячэнне, для якога  $y$  атримоуєае тахітм, можа быць вызначана з эпюры папярочных сіл,—у гэтым сячэнні папярочная сіла роўна 0.

Папярочная сіла аналітычна вызначаецца, як алгебрычная папярочных сіл ад абодвух нагрузак: ад размеркаванай:

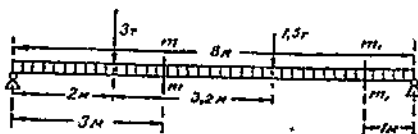
$$Q'_x = A_p - px = \frac{pl}{2} - px = p \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right), \text{ ад згрупаванай: } Q''_x = \\ = A_p - P_1 = \frac{\Sigma P(l-a)}{l} - P_1, \text{ адкуль:}$$

$$Q_x = p \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) + \frac{\Sigma P(l-a)}{l} - \Sigma P_{лев}. \quad (25)$$

Графічна эпюра папярочных сіл, пачынаючыся на опоры  $A$  з велічыні  $A = A_p + A_R$ , паступова змяншаецца паралельна эпюры размеркаванай нагрузкі да сілы  $P_1$ , дзе адразу змяншаецца на велічыню гэтай сілы, затым ідзе ізноў паралельна эпюры размеркаванай нагрузкі да сілы  $P_2$  і г. д., пакуль у пункце правай опоры не дасягне велічыні  $-B = -(B_p + B_R)$ .

**Задача.** Вызначыць вылічэннем рэакцыі опор, выгібаючыя моманты і папярочныя сілы на адлегласцях ад левай опоры ў 2 м і 5 м для бэлькі вагой 115 кг на 1 паг. м, нагружанай згрупаванымі грузамі, згодна чарц. 86.

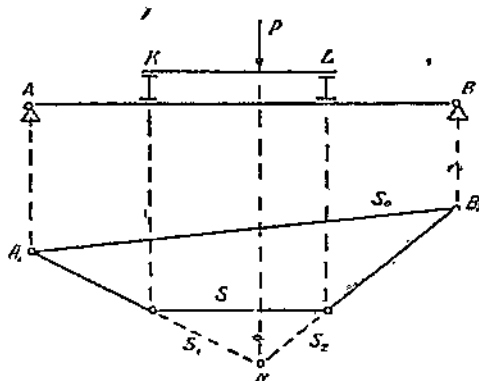
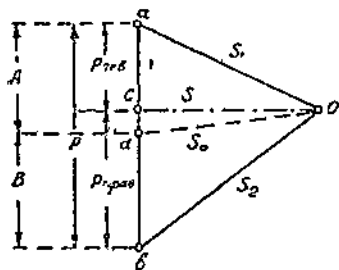
**Задача.** Визначити реакції опор, найбільш вигідний момент, папярочныя сілы і моменти для сячэння  $mn$ , узаканых на чарц. 87. Бэлька загрузана роўнамерна-размеркаванай нагруквай (улічваючы і ўласную вагу) у 2000 кг на 1 паг. м і згрупаванымі грузамі, згодна чарц. 87.



Чарц. 87.

## § 25. Вузлавая згрупаная нагрукка

Разгледзім цяпер вузлавую перадачу якой-небудзь нагруккі. Няхай на асноўную бэльку (чар. 88) апіраюцца дзве папярочныя з прадольнай бэлечкай, на якую дзейнічае груз  $P$ . Сілу  $P$  можна лічыць за роўнадзейную сіл, якія дзейнічаюць на бэлечку  $KL$ .



Чарц. 88.]

сіла  $P$  перадаецца асноўнай бэльцы ў выглядзе 2-х сіл: у пункце  $K$ —як  $P_{лев.}$  і ў пункце  $L$ —як  $P_{прав.}$ , якія становяць сабою рэакцыі апор  $K$  і  $L$  бэлечкі  $KL$  ад дзеяння на яе груза  $P$ .

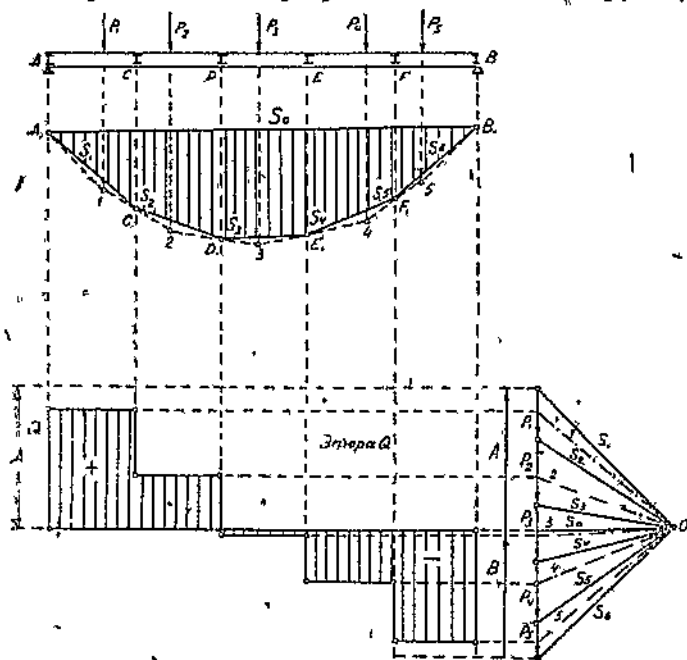
Відавочна, што рэакцыі апор  $A$  і  $B$  атрымліваюцца такія-ж, як пры непасрэднай нагрукцы; у самай справе, рэакцыя апоры напр.  $A$  вызначаецца з умовы роўнавагі:  $A \cdot l - M_B = 0$ , адкуль  $A = \frac{M_B}{l}$ , але сума момантаў складаючых  $P_{лев.}$  і  $P_{прав.}$  роўна моманту

роўнадзейнай. З гэтага-ж прычыны момант для сячэння, узятага ў якім-небудзь вузлавым пункце, атрымліваецца такі-ж, як і пры непасрэднай перадачы.



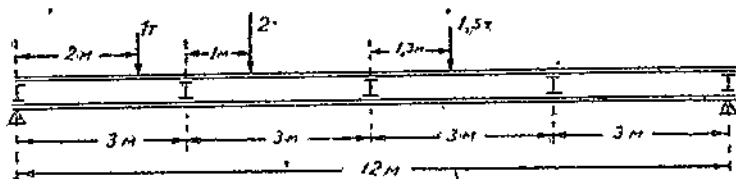
$C_1$  з  $D_1$ ,  $D_1$  з  $E_1$ ,  $E_1$  з  $F_1$  і  $F_1$  з  $B_1$ , атрымаем эпіюру момантаў для вузлавой перадачы.

Папярочная сіла пры вузлавой перадачы застаецца пастаяннай між двух сумежных вузлоў. У сячэнні на левай апоры  $Q = A - P_{1\text{лев.}}$ , у вузлавым пункце  $C$   $Q$  адразу памяншаецца на  $P_{1\text{прав.}} + P_{2\text{лев.}}$ .



Чарц. 90.

**Задача.** Вызначыць вылічэннем апорныя рэакцыі, папярочныя сілы для кожнай панелі, выгібаючы момант на адлегласці 10 м ад левай апоры і найбольшы выгібаючы момант для бэлькі, паказанай на чарц. 91.

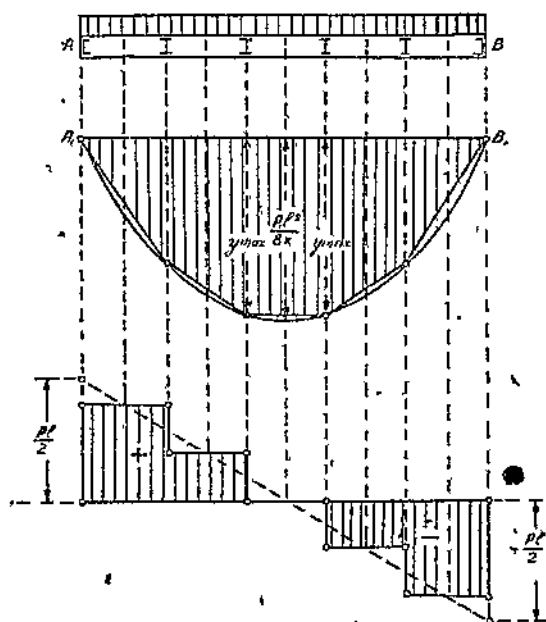


Чарц. 91.

**Задача.** Пабудоваць эпіюры момантаў і папярочных сіл, вызначыць графічна апорныя рэакцыі, папярочныя сілы для кожнай панелі і найбольшы выгібаючы момант для бэлькі, паказанай на чарц. 91.

## § 26. Вузловая роўнамерна-размеркаваная нагрузка

Няхай на бэльку (чарц. 92) дзейнічае роўнамерная нагрузка, якая займае ўсю даўжыню бэлькі і перадаецца на яе праз вузлы. Рэакцыі апор будуць тэя-ж, што і для непасрэднай нагрузкі, г. зн.  $A = B = \frac{1}{2}pl$ . Калі роўнамерная нагрузка займае якую-небудзь панэль даўжынёю  $d$ , то дзеянне гэтай нагрузкі выражаецца ціскамі,



Чарц. 92.

якія перадаюцца на вузлы панелі і роўны кожны  $\frac{1}{2} \cdot pd$ . Такім чынам велічыня папярочнай сілы для данай панелі, левы вузел якой адсунуты на  $x$  ад левай апоры, будзе выражацца так:

$$Q_x = \frac{1}{2}pl - px - \frac{1}{2}pd. \quad (26)$$

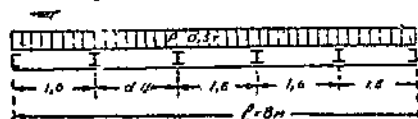
Калі абазначым праз  $x_1$  адлегласць сярэдзіны ўзятай намі панелі да сярэдзіны бэлькі, то тады будзем мець:  $Q_x = p \cdot x_1$ , прычым  $x_1$  лічыцца дадатным улева і адмоўным управа ад сярэдзіны бэлькі; гэты выраз  $Q_x$  становіць сабою адносна адлегласці  $x_1$  прамую, якая праходзіць праз сярэдзіну бэлькі ( $x_1 = 0$ ).

Для пабудовы эпіюры  $Q$  трэба правесці гэтую прамую, адклаўшы на апорах ардынаты  $\frac{1}{2}pl$  і  $-\frac{1}{2}pl$ ; тады ардынаты гэтай

прямой пад сярэдзінамі панелей дадуць для іх велічыні папярочнай сілы, а праведзеная праз канцы іх гарызантальная ступенчатая лінія дасць шуканую эпіюру папярочнай сілы для ўсёй бэлькі.

Эпіюрай момантаў з'яўляецца  $m \cdot x$ , упісаны ў парабалу, якая становіць сабою эпіюру для прамой нагрузкі.

Вузлавая нагрузка з'яўляецца выгаднай і ў выпадку роўнамерна-размеркаванай нагрузкі, бо ардынаты плошчы момантаў, якія вызначаюць сабой велічыні момантаў, роўны ардынатам плошчы



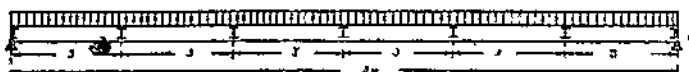
Чарц. 93.

момантаў для прамой нагрузкі толькі ў вузлавых пунктах і панелях, што не нясуць нагрузкі, у межах-жа іншых панелей між вузламі яны змяншаюцца на часткі, якія адсякаюцца прамымі.

Ясна, што для атрымання меншага  $M_{\max}$  не трэба размяшчаць

запярочныны так, каб яны знаходзіліся ў сячэннях, дзе для непасрэднай нагрузкі атрымліваецца  $M_{\max}$ ; напрыклад, пры нагрузцы згрупаванымі грузамі—у пунктах прыляжэння сіл, а пры роўнамерна-размеркаванай нагрузцы—пасярод бэлькі.

Задача. Вызначыць вылічэннем рэакцыі апор, папярочныя сілы для кожнай панелі і найбольшы выгібаючы момант для бэлькі (чарц. 93), загрузанай роўнамернай нагрузкай  $p = 0,5 \text{ т}$  на адзінку даўжыні.



Чарц. 94.

Задача. Пабудаваць эпіюры момантаў і папярочных сіл, вызначыць графічна папярочныя сілы ў кожнай панелі, найбольшы выгібаючы момант, а таксама момант на адлегласці 7,50 м ад левай апоры (чарц. 94)  $p = 1,2 \text{ т}_{\text{вар.м.}}$ .

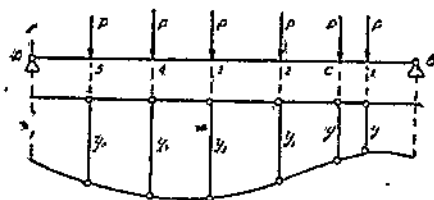
## ИНФЛЮЕНТНЫЯ ЛІНІІ (ЛІНІІ УПЛЫВУ)

### § 27. Агульныя ўласцівасці інфлюэнтных ліній

Вызначыць момант  $M$  і папярочную сілу  $Q$  ад рухомай на-  
грузкі лягчай за ўсё пры дапамозе *інфлюэнтных ліній*. Інфлю-  
энтныя лініі, ці лініі ўплыву, выкарыстаныя ўпершыню Вінклерам,  
спрашчаюць разлікі, якія сустракаюцца ў статыцы, і надаюць ім  
нагляднасць. Уплыў паралельных рухомах грузаў можа выражацца  
ў якім-небудзь адным з тых невядомых  $Z$ , якое трэба вызначыць  
пры разліку, напрыклад у рэакцыі апор, выгібаючым моманце,  
папярочнай сіле, усіх і ў стрыжані і інш. колькасцях.

Дапусцім ёсць бэлька (чарц. 95), азначым для яе якую-небудзь  
велічыню  $Z$  (напрыклад, рэакцыю апоры, момант для пэўнага  
сячэння, папярочную сілу і г. д.)

пры розных палажэннях груза  
 $P$  у пунктах 1, 2, 3 і . . . ,  
затым адкладзем гэтыя зной-  
дзеныя велічыні  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$   
ад гарызантальнай адвольнай  
прамой пад адпаведным пала-  
жэннем груза, у выглядзе ар-  
дынат, нарэшце злучым іх кан-  
цы перарываючай лініяй, якая  
носіць назву *інфлюэнтнай лініі*, ці *лініі ўплыву*.



Чарц. 95.

Плошча-ж, абмяжованая гарызантальнай прамой і *інфлю-  
энтнай лініяй*, называецца *плошчай ўплыву*.

Інфлюэнтная лінія, апрача таго што наглядна паказвае змены  
данай велічыні  $Z$ , дае магчымасць вызначыць  $Z$  без вылічэння  
для кожнага палажэння груза  $P$  у пункце напр.  $C$ .

Для гэтага трэба толькі вымераць пад гэтым пунктам арды-  
нату  $y$  ў тым-жа маштабе, у якім адкладваліся  $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ .  
Неабходна мець на ўвазе, што *рознiца між эпіюрай і інфлюэнтнай  
лініяй заключаецца ў тым, што ардынаты эпіюры становяць  
сабою даную велічыню для сячэнняў непасрэдна над ардынатамі  
пры пэўным і пастаянным палажэнні нарузкі, ардынаты-ж  
інфлюэнтнай лініі становяць сабою даную велічыню для аднаго  
і таго-ж сячэння пры палажэнні груза непасрэдна над гэтымі  
ардынатамі.*

Інфлюентная лінія выражае закон змены велічыні  $Z$  (рэакцый апоры, папярочнай сілы, моманту) для данага сячэння бэлькі пры руху груза па бэльцы.

Адносна ўплыву ўведзены наступныя дапушчэнні:

1) Уплыў прапарцыянальны сіле і можна быць выражан:

$$Z' = \alpha \cdot P \cdot y,$$

дзе  $y$  не залежыць ад велічыні  $P$ , а толькі ад яго палажэння, сістэмы, на якую дзейнічае  $P$ , і сілы, для якой пабудавана ін-

флюентная лінія;  $\alpha = \frac{1}{P}$ . Ёсць ка-

эфіцыент, які залежыць ад велічыні груза  $P$ , для якога пабудавана інфлюентная лінія. Каб не залежаць ад велічыні сіл, звычайна будуець інфлюентную лінію для груза  $P=1$ , у гэтым вы-

падку  $\alpha = \frac{1}{P} = 1$  і тады:

$$Z = P \cdot y. \quad (27)$$

2) Паводле закону незалежнасці дзеяння ў выпадку некалькіх грузаў уплыў іх складаецца.

Калі  $Z_1 = P_1 \cdot y_1$ ;  $Z_2 = P_2 \cdot y_2 \dots$ , то

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \dots = \Sigma P \cdot y. \quad (28)$$

Калі дана інфлюентная лінія, то можна вызначыць велічыню  $Z$ , якая выклікаецца ўсякай сістэмай грузаў:  $P_1, P_2 \dots$  (чарц. 96)

Для гэтага трэба вымяраць (або вылічыць з падобных тр-ў) ардынаты  $y_1, y_2 \dots$  пад адпаведнымі грузамі  $P_1, P_2 \dots$ , памножыць іх на адпаведныя грузы і скласці сумы, г. зн. скласці папярэднюю роўнасць:  $Z = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \dots = \Sigma P \cdot y$ .

## § 28. Вузлавая перадача

Пры вузлавой перадачы інфлюентная лінія між сумежнымі вузламі ў межах адной панелі выражаецца прамой лініяй.

Няхай груз  $P$  знаходзіцца паміж вузламі  $m$  і  $m+1$  (чарц. 97) на адлегласці  $x$  ад вузла  $m$  пры даўжыні панелі  $d$ .

Сіла  $P$  раскладаецца на 2 складаючыя  $P_m$  і  $P_{m+1}$ , якія прыложаны ў вузлах  $m$  і  $(m+1)$  і вызначаюцца паводле правіла Архімеда:

$$P_m = P \cdot \frac{d-x}{x} \quad \text{і} \quad P_{m+1} = P \cdot \frac{x}{d} *).$$

\*) Сілы  $P_m$  і  $P_{m+1}$  могуць быць вызначаны і згодна правіл для рэакцый апор.

Калі інфлюэнтная лінія для якой-небудзь колькасці  $Z$  мае пад вузлавымі пунктамі  $m$  і  $(m+1)$  адпаведныя ардынаты  $y_m$  і  $y_{m+1}$  і пад грузам  $P$  ардынату  $y$ , то відавожна:

$$P \cdot y = P_m \cdot y_m + P_{m+1} \cdot y_{m+1}.$$

Падстаўляючы ў гэтае раўнанне знойдзеныя выражэнні  $P_m$  і  $P_{m+1}$  і скарачаючы на агульны множнік  $P$ , маем:

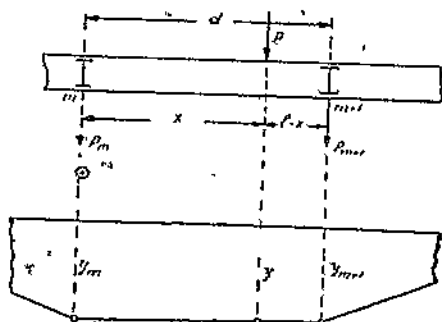
$$y = y_m \cdot \frac{d-x}{d} + y_{m+1} \cdot \frac{x}{d}.$$

Тут  $y_m$  і  $y_{m+1}$  маюць пэўныя значэнні для вузлавых пунктаў незалежна ад віду перадачы грузаў,  $x$  — незалежная пераменная і  $y$  — функцыя, залежная ад  $x$  вызначаецца раўнаннем:

$$y = y_m \cdot \frac{d-x}{d} + y_{m+1} \cdot \frac{x}{d}$$

з тае прычыны, што гэта раўнанне першай ступені, то яно выражае прамую лінію.

На падставе даказанага можна, маючы інфлюэнтную лінію пры прамой нагрузцы, пабудавать лінію пры вузлавой нагрузцы, для чаго трэба спраміць ломаныя ўчасткі між сумежнымі вузламі, пакінуўшы ардынаты вузлавых пунктаў ранейшымі.



Чарц. 97;

## § 29. Роўнамерна-размеркаваная нагрузка

Дзеянне роўнамерна-размеркаванай нагрузкі выражаецца адпаведнай плошчай інфлюэнтнай лініі, памножанай на велічыню  $p$  нагрузкі на адзінку даўжыні бэлькі.

Дапусцім, што на бэльку  $AB$  дзейнічае між пунктамі  $C$  і  $D$  роўнамерна-размеркаваная нагрузка  $p$  на адзінку даўжыні бэлькі (чарц. 98).

Выдзелім з роўнамерна-размеркаванай нагрузкі элементарную нагрузку на працяжэнні элементу  $dx$ ; гэтую нагрузку можна прыняць за згрупаваны груз, уплыў якога будзе:

$$dz = p \cdot dx \cdot y,$$

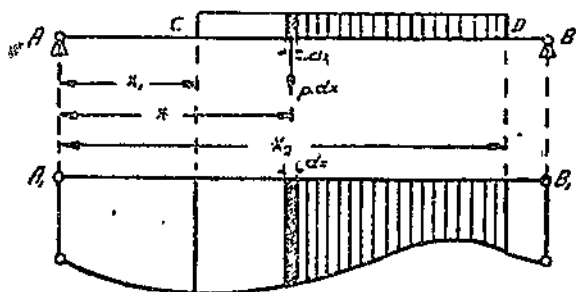
а ўплыў усёй нагрузкі:

$$Z = \int_{x_1}^{x_2} p \cdot dx \cdot y = p \cdot \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx,$$

дзе  $y \cdot dx$ —участак плошчы інфлюэнтнай лініі для  $Z$  шырынёю  $dx$ , а  $\int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$  выражае плошчу інфлюэнтнай лініі між вертыкалямі, якія праходзяць праз пункты  $C$  і  $D$ . Абазначыўшы гэту плошчу праз  $w$ , атрымаем:

$$Z = p \cdot w. \quad (29)$$

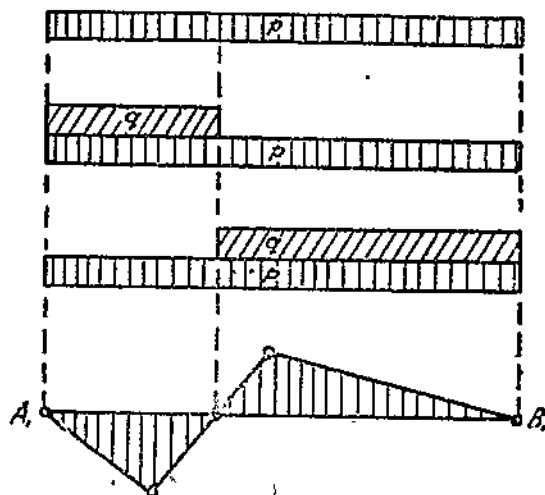
Вельмі часта ардынаты  $y$  у розных пунктах бэлькі маюць



інфлюэнтная лінія для  $Z$

Чарц. 98.

розныя знакі; пункт  $K$ , у якім інфлюэнтная лінія (чарц. 99) перасякае гарызантальную прамую  $A_1 B_1$ , наз. пунктам падзелу нагрузкі ці нулявым пунктам.



Чарц. 99.

Нулявыя пункты дзеляць  $A_1 B_1$  на дадатныя і адмоўныя ўчасткі. Пункты першых адпавядаюць дадатным ардынатам  $y$ , а пункты другіх—адмоўным.

Калі роўнамерна-размеркаваная нагрузка складаецца з нагрузак на адзінку даўжыні—пастаяннай  $p$  і часовай  $q$ , то ўплыў першай нагрузкі:

$$Z_p = p \cdot F_1 - p \cdot F_2 = p(F_1 - F_2), \quad (30)$$

дзе  $F_1$  і  $F_2$ —плошчы ўчасткаў розных знакаў;  $p$  нагружае ўсю бэльку і не можа быць размеркавана на адным толькі ўчастку: ці то на дадатным, ці то на адмоўным.

Часовай-жа нагрузкай  $q$  можна нагрузіць і адзін участак—або дадатны, або адмоўны. Адпаведна гэтаму атрымоўваецца *max* і *min* тады, калі апрача пастаяннай нагрузкі *часовая* распаложана толькі на дадатным участку; тады маем:

$$\text{Max. } Z = p \cdot (F_1 - F_2) + q \cdot F_1 \quad (31)$$

а *min* тады, калі *часовая* нагрузка размешчана толькі на адмоўным участку:

$$\text{Min. } Z = p \cdot (F_1 - F_2) - q \cdot F_2. \quad (32)$$

### § 30. Згрупаваныя грузы

Калі часовай нагрузкай з'яўляюцца згрупаваныя грузы, то для атрымання *Max. Z* неабходна нагрузіць магчыма большаю колькасцю грузаў толькі дадатны участак, а для атрымання *Min. Z*—адмоўны участак, тады будзем мець:

$$\text{Max. } Z = p \cdot (F_1 - F_2) + \Sigma P \cdot y'. \quad (33)$$

$$\text{Min. } Z = p \cdot (F_1 - F_2) - \Sigma P \cdot y'', \quad (34)$$

дзе  $y'$ —ардынаты дадатнага ўчастка пад грузамі  $P$ , а  $y''$ —ардынаты адмоўнага ўчастка.

Для атрымання *Max.* ўплыву найбольшыя грузы неабходна размясціць там, дзе інфлюэнтная лінія мае найбольшыя ардынаты, прычым адзін з гэтых грузаў павінен быць змешчаны ў пункце пералому інфлюэнтнай лініі з найбольшай ардынатай (так наз. крытычны груз).

Палажэнне сістэмы грузаў, пры якім атрымоўваецца *Max.* ўплыву, называецца крытычным палажэннем, ці небяспечным палажэннем нагрузкі.

Крытычнае палажэнне сістэмы грузаў вызначаецца ў залежнасці ад абрысу лініі ўплыву.

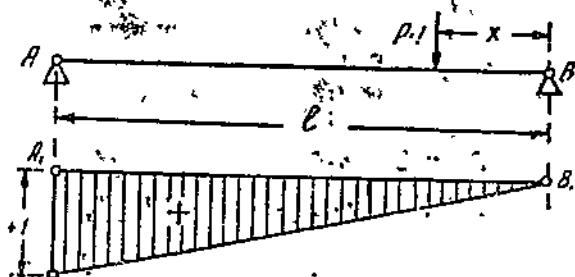
Задача гэтая хутчэй за ўсё вырашаецца праз параўнанне між сабой велічынь  $Z$ , атрыманых для розных палажэнняў сістэмы грузаў. Для гэтага чэрціць на паперы даную сістэму грузаў і гэтую паперу перасоўваюць па інфлюэнтнай лініі, вызначаючы для кожнага палажэння  $\Sigma P \cdot y$  і параўноўваючы іх між сабою.

### § 31. Інфлюентна лінія реакції опори

Приложим да бѣлькѣ силу (груз), роўную адзінцы сіл, на адлегласці  $x$  ад правай апоры (чарц. 100). Тады рэакцыя апоры  $A$  будзе:  $A = \frac{P \cdot x}{l}$ , што пры  $P=1$  дае  $A = \frac{1 \cdot x}{l}$ . Тут сувязь паміж функцыяй  $A$  і незалежнай пераменнай  $x$  становіць сабою раўнанне першай ступені і выражаецца графічна прамой лініяй. Для вызначэння палажэння гэтай прамой неабходна ведаць палажэнне 2-х пунктаў яе. 2 пункты гэтай прамой вызначаюцца каардынатамі:

$$(x=0; A=0) \text{ і } (x=l; A=1)$$

пры восі абсцыс  $B_1 A_1$  і пачатку каардынат у пункце  $B_1$ . Пабудаваўшы гэтыя 2 пункты на каардынатах і злучыўшы іх прамой лініяй, атрымаем шуканую інфлюентную лінію рэакцыі апоры  $A$ . З тае прычыны, што рэакцыя апоры  $A$  праз увесь час знаходжання груза паміж  $A$  і  $B$  дзейнічае знізу ўверх, то яна, згодна прынятага раней абазначэння, заўсёды дадатная, і плошча ўплыву рэакцыі апоры для прастой бѣлькі заўсёды дадатная.



Чарц. 100.

З разгляду формы плошчы ўплыву відаць, што для атрымання  $\text{Max } A$  неабходна, пры згрупаваных грузах, адзін найбольшы груз паставіць непасрэдна над апорай  $A$ , а астатнія, магчыма большыя грузы, бліжэй да яе, прычым на бѣлцы трэба паставіць магчыма большую колькасць грузаў.

Пры роўнамерна-размеркаванай нагрузцы  $P$  на адзінку даўжыні бѣлькі для атрымання  $\text{Max } A$  неабходна нагрузіць усю бѣлцу ад  $A$  да  $B$ , тады рэакцыя апоры будзе:

$A = p \cdot w = p \cdot \frac{1 \cdot l}{2} = \frac{p \cdot l}{2}$ , што раней было выведзена другім спосабам.

Прыклад. Пабудаваць для бѣлькі даўжынёй  $l = 10$  м інфлюентную лінію для рэакцыі правай апоры.

## § 32. Інфлюентная лінія момантаў

Прыложым да бэлькі  $AB$  (чарц. 101) сілу (груз), роўную адзінцы, управа ад пункта  $C$ ; адносна якога бярацца момант. Адлегласць (пераменная) ад правай апоры няхай будзе  $x$ . Пакуль груз знаходзіцца ўправа ад сячэння, на левую частку бэлькі дзейнічае толькі рэакцыя апоры  $A$ , такім чынам момант у сячэнні  $C$  будзе:  $M = A \cdot a$ , але з тае прычыны, што  $A = \frac{1 \cdot x}{l}$ , то  $M = \frac{1 \cdot x}{l} \cdot a$ .

Адсюль вынікае, што інфлюентная лінія для ўчастка  $BC$  ёсць *прамая*, бо пераменная  $x$  уваходзіць у першай ступені. Для пабудовы гэтай прамой дастаткова ведаць каардынаты 2-х якіх-небудзь пунктаў яе: ( $x=0, M=0$ ) і ( $x=l, M=a$ ).

Злучыўшы пункт  $A_1'$ , які знаходзіцца на апорнай вертыкалі ад  $A_1$  на адлегласці  $a$ , з пунктам  $B_1$ , атрымаем прамую  $B_1A_1'$ , частка якой  $B_1C_1'$  будзе адпавядаць сапраўднаму моманту, бо пры пераходзе груза налева ад пункта  $C$  умовы моманту, мяняюцца; сапраўды, улева ад сячэння  $C$  дзейнічаюць 2 сілы:  $A$  і  $P=1$  і момант складаецца з алгебрычнай сумы момантаў гэтых сіл:

$$M = A \cdot a - 1 \cdot (x + a - l), \text{ або } M = 1 \cdot (l - a) \cdot \frac{l - x}{x}.$$

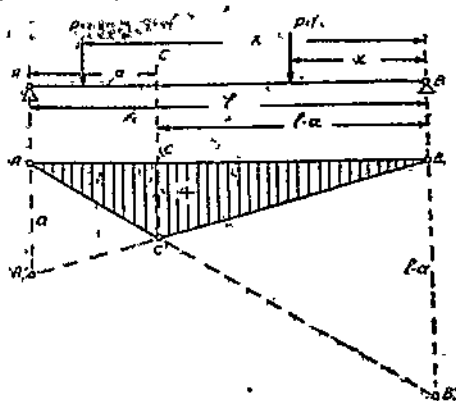
З гэтага раўнання вынікае, што для часткі  $AC$  бэлькі інфлюентная лінія ёсць *прамая*. Для яе пабудовы дастаткова ведаць каардынаты 2-х пунктаў:

$$B_1' (x=0, M=l-a) \text{ і } A_1 (x=l, M=0).$$

Адклаўшы на апорнай вертыкалі  $B$  ад  $B_1$   $(l-a)$  да пункта  $B_1'$  і злучыўшы апошні з пунктам  $A_1$ , атрымаем шуканую прамую, якая толькі ў частцы сваёй  $A_1C_1'$  будзе адпавядаць сапраўднаму моманту.

З раўнання для першай прамой:  $M = 1 \cdot a \cdot \frac{x}{l}$  і для другой

$M = 1 \cdot (l - a) \cdot \frac{l - x}{x}$  вынікае, што пры  $x = l - a$ , г. зн. пад сячэннем  $C$  ардынаты як для першага ўчастка ( $B_1C_1'$ ), так і для другога ( $A_1C_1'$ ) роўны між сабой. З гэтага вынікае, што плошча ўплыву для моманту ў сячэнні  $C$  мае выгляд трохвугольніка  $A_1C_1'B_1$  з вяршыняй  $C_1'$  пад сячэннем  $C$ . З тае прычыны, што ўсякі груз,



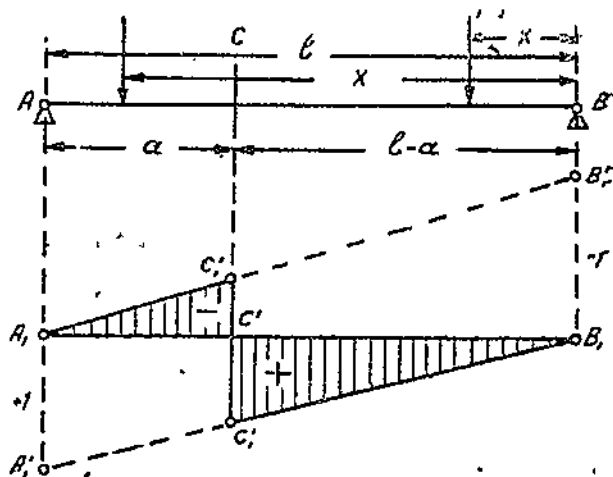
Чарц. 101.

які знаходяться на балці, викликає додатний момент, то знак площі впливу буде  $+$ .

Для атримання *Мах. М* необхідна загрузка уся балку маґчыма большим лікам грузаў, найвялікшы з іх змясціць як мага бліжэй ад сячэння, а адзін з іх пад самым сячэннем.

### § 33. Інфлюентная лінія папярочнай сілы

Возьмем сячэнне *C* на адлегласці *a* ад левай апоры (чарц. 102). Абазначым пераменную адлегласць груза  $P=1$  ад правай апоры праз *x*. Пакуль груз, які перамяшчаецца ад *B* да *A*, знаходзіцца



Чарц. 102.

на ўчастку *BC* злева ад сячэння *C*, дзейнічае толькі адна сіла: рэакцыя апоры *A* ў кірунку знізу ўверх, які лічыцца дадатным (для сіл, распаложаных улева ад сячэння).

Папярочная сіла ў сячэнні *C* выразіцца наступным чынам:

$$Q = A = 1 \cdot \frac{x}{l}.$$

Гэта раўнанне паказвае, што *інфлюентная лінія папярочнай сілы Q для ўчастку BC* балкі ёсць *прамая*. Прамую гэту можна пабудаваць, ведаючы каардынаты 2-х пунктаў:

$$B_1(x=0, Q=0) \text{ і } A_1'(x=l, Q=+1).$$

Адклаўшы ад пункта  $A_1$  ардынату  $+1$  да пункта  $A_1'$  і злучыўшы яе з пунктам  $B_1$  атрымаем прамую  $B_1A_1'$ , сапраўдную толькі ў межах  $B_1C_1'$ , бо пасля пераходу сілы *P* улева ад *C* умовы мяняюцца, а іменна:  $Q = A - P$ , прычым *Q* ёсць велічыня адмоўная,

бо  $A = P \cdot \frac{x}{l}$  менш за  $P$ . Калі ў роўнасці  $Q = A - P$  замяніць  $A$

на  $P \cdot \frac{x}{l}$  і прыняць  $P = 1$ , то атрымаем:

$$Q = 1 \cdot \left( \frac{x}{l} - 1 \right).$$

Гэта раўнянне выражае прамую, якую можна пабудоваць на каардынатах двух пунктаў:

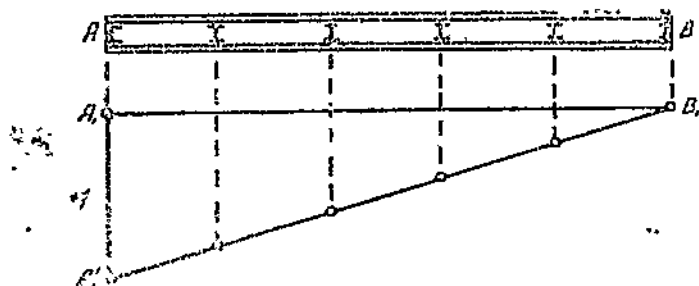
$$B_1'(x=0, Q=-1); A_1(x=l, Q=0).$$

Адклаўшы велічыню—1 вышэй пункта  $B_1$  да пункта  $B_1'$  і злучыўшы  $A_1$  з  $B_1'$ , атрымліваем прамую лінію  $B_1'A_1$ , якая будзе сапраўднай толькі ў межах  $A_1C_1''$ . Пры знаходжанні груза над самым сячэннем  $C_1$  ён можа быць аднесены як да часткі  $BC$ , так і да часткі  $AC$  бэзлікі і адпаведныя ардынаты тады будуць  $+C_1C_1'$  і  $-C_1C_1''$ . Для папярочнай сілы  $Q$  у сячэнні  $C$  атрымоўваюцца дзве плошчы інфлюэнтнай лініі: дадатная  $B_1C_1'C_1$ , і адмоўная  $A_1C_1''C_1$  з нулявым пунктам у  $C_1$ .

## В. Пабудова інфлюэнтных ліній пры вузлавой перадачы

### § 34. Інфлюэнтная лінія рэакцыі апоры

Калі крайнія папярочныны знаходзяцца над самімі апорамі (ці крайнія вузлы ляжаць на адной вертыкалі з апорамі), то інфлюэнтная лінія апорнай рэакцыі застаецца такой-жа, як і пры прамой пе-

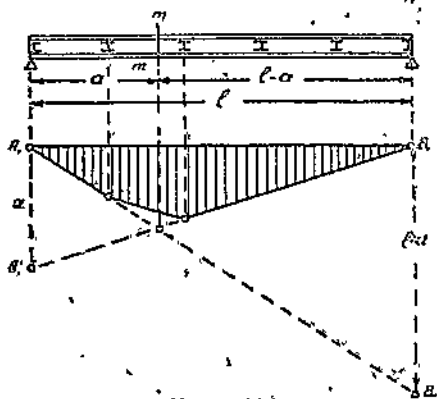


Чарц. 103.

радачы. Сапраўды, калі груз  $P=1$  знаходзіцца над вузлавымі пунктамі, то ардынаты пад ім і супадаюць з ардынатамі інфлюэнтнай лініі для бэзлікі з прамой перадачай. З тае прычыны, што ў межах панелі, згодна даказанага, інфлюэнтная лінія ёсць прамая, то ўсе прамыя між вузламі павінны супадаць з прамой  $B_1A_1'$ , якая становіць сабой інфлюэнтную лінію пры прамой перадачы на грузкі (чарц. 103).

## § 35. Інфлюентная лінія момантаў

Допустім, што для бэлькі з вузлавай перадачай нагрузкі з крайнімі вузламі, якія ляжаць на адной вертыкалі з апорамі  $A$  і  $B$  (чарц. 104), пабудавана інфлюентная лінія выгібаючага моманту



Чарц. 104.

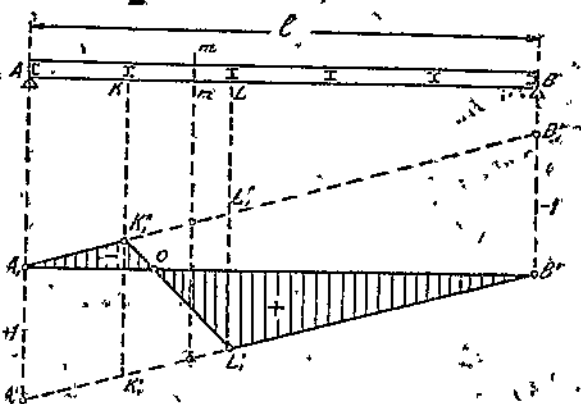
для сячэння  $mm$  на адлегласці  $a$  ад левай апоры пры ўмове прамой перадачы.

Калі груз  $P=1$  знаходзіцца над вузлавымі пунктамі, уплыў яго будзе такім-жа, як і пры прамой перадачы, і ардынаты над вузлавымі пунктамі супадучь з пабудаванымі ардынатамі інфлюентнай лініі для прамой перадачы. З тае прычыны, што ў межах адной панелі інфлюентная лінія ёсць прамая, то для пабудовы інфлюентнай лініі  $M$  пры вузлавай перадачы трэба спраміць ломаны ўчастак між вузлавымі

пунктамі той панелі, у якой ёсць сячэнне, адносна якога бяруцца выгібаючыя моманты.

## § 36. Інфлюентная лінія папярочных сіл

Допустім, што дана бэлька з вузлавай перадачай нагрузкі, прычым вузлавая пункты ляжаць на адной вертыкалі з апорамі  $A$  і  $B$ . Сячэнне  $mm$ , адносна якога патрэбна пабудавань інфлюентную лінію, няхай знаходзіцца ў межах панелі  $KL$  (чар. 105). Аналагічна інфлюентнай лініі для момантаў інфлюентная лінія папярочных сіл пры вузлавай перадачы ў участках  $AK$  і  $BL$  бэлькі  $AB$  супадучь з адпаведнымі інфлюентнымі лініямі



Чарц. 105.

$A_1K_1''$  і  $B_1L_1'$  для прамой нагрузкі. Інфлюентнай лініяй для панелі  $KL$  будзе служыць прамая  $K_1''L_1'$ , якая перасякае прамую  $A_1B_1$  у пункце  $O$  (вузлавая пункт).

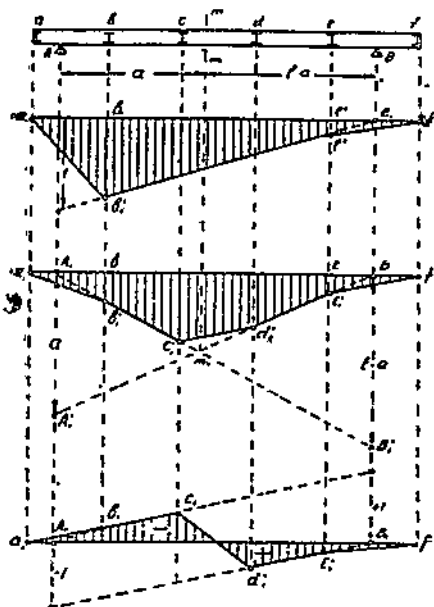
Інфлюентная лінія  $Q$  не залежыць ад палажэння сячэння  $tt$  у межах адной і той-жа панелі, што згодна з раней даказаным адносна незмяняльнасці папярочнай сілы ў межах адной панелі.

Плошча ўплыву для панелі  $KL$  складаецца з дадатнага трохвугольніка  $B_1L_1'O$  і адмоўнага  $\frac{A_1K_1''O}{K}$ . Для крайніх панелей, што каля апор, плошча ўплыву прымае выгляд трохвугольніка аднаго знака.

Практыкаванне. Пабудова інфлюентную лінію папярочных сіл для крайніх панелей, што каля апор, пры бэльцы даўжынёй у 15 м і з панелямі даўжынёю па 3 м.

### § 37. Пабудова інфлюентных ліній, калі крайнія вузлавая пункты не знаходзяцца на адной вертыкалі з апорамі

1. Інфлюентная лінія рэакцыі апоры. Дапусцім, што ёсць бэлька  $AB$  з вузлавой перадачай у вузлах  $a, b, c, d$  і  $f$ . З пераходам груза  $P=1$  улева ад апоры  $A$  і ўправа ад апоры  $B$ , да



Чарц. 105.

пунктаў  $a$  і  $f$ , дзеянне груза на бэльку не спыняецца, а таму інфлюентныя лініі павінны быць даведзены да пунктаў  $a_1$  і  $f_1$ , якія знаходзяцца на гарызанталі  $A_1B_1$  (чарц. 106).

Для панелі  $ab$  інфлюентная лінія будзе  $a_1b_1'$ , дзе  $b_1'$  знаходзіцца на лініі, пабудаванай для прамой перадачы бэлькі  $AB$ . Для панелі  $ef$  прыбаўляецца трохвугольнік  $e_1'B_1f_1$ , бо інфлюентная лінія ў межах панелі павінна быць прамой ад  $e_1'$  да  $f_1$ .

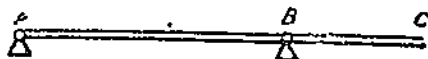
2. *Інфлюентная лінія момантаў.* Будуем спачатку інфлюентную лінію для бэлькі  $AB$  і сячэння  $t t$ , якое знаходзіцца на адлегласці  $a$  ад левай апоры  $A_1C_1'd_1'B_1$ . Для крайніх панелей  $ab$  і  $ef$  прыбаўляюцца трохвугольнікі  $a_1A_1b_1'$  і  $e_1'B_1f_1$  на той падставе, што інфлюентная лінія ў межах панелі павінна быць прамой ад  $b_1'$  да  $a_1$  і ад  $e_1'$  да  $f_1$ .

3. *Інфлюентная лінія папярочнай сілы.* Будуем інфлюентную лінію  $Q$  для панелі  $cd$  бэлькі  $AB$  (чарц. 106), затым прыбаўляем трохвугольнікі для крайніх панелей: для панелі  $ab$  трохвугольнік  $a_1A_1b_1'$  і для панелі  $ef$  трохвугольнік  $e_1'B_1f_1$ , улічваючы, што ў межах панелей інфлюентная лінія павінна быць прамой.

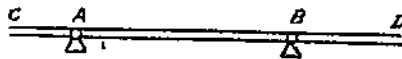
## КАНСОЛЬНЫЯ БЭЛКІ

### § 38. Агульнае паняцце

Кансольнымі бэлькамі ці бэлькамі са звісаючымі канцамі называюцца такія бэлькі, якія апіраюцца на дзве апоры—рухомую і нерухомую—і маюць звісаючыя за апорамі часткі, якія называюцца кансолямі. У залежнасці ад размяшчэння апор, бэлькі

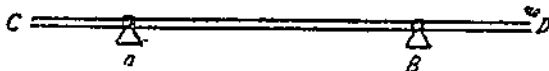


Чарц. 107.



Чарц. 108.

могуць быць ці з адным звісаючым канцом або кансолю (чарц. 107) ці з двума кансолямі, прычым даўжыня гэтых кансолей можа быць або розная (чарц. 108) або аднолькавая (чарц. 109).



Чарц. 109.

Пры разліку кансольных бэлек, як і пры разліку простых, патрэбна вызначыць рэакцыі апор, выгібаючыя моманты і папярочныя сілы для адвольнага сячэння бэлькі. Разгледзім розныя спосабы нагрузак.

### §. 39. Нерухомая нагрузка. Згрупаваныя грузы

Дапусцім, што ёсць бэлька  $CD$  з апорамі  $A$  і  $B$  (чарц. 110), на якую дзейнічаюць згрупаваныя грузы  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_6, P_7$ . Апорныя рэакцыі вызначым з умоў роўнасці нулю моманту знешніх сіл, г. зн.  $\sum M = 0$ . Тады ўзяўшы момант усіх сіл адносна пункта  $B$  і прыраўняўшы яго да нуля, атрымаем рэакцыю  $A$ :

$$A = -\frac{M_B}{l},$$

дзе  $M_B$  абазначае момант знешніх сіл, адносна апоры  $B$ . Увёўшы абазначэнні, указаныя на чарц. 110, атрымаем для моманту  $M_B$  наступнае:

$$M_B = -P_1(l+a_1) - P_2 \cdot (l+a_2) - P_3 \cdot b_3 - P_4 \cdot b_4 - P_5 \cdot b_5 + P_6 \cdot d_6 + P_7 \cdot d_7.$$

Абазначым:

1) суму момантаў усіх сіл, якія знаходзяцца на левай кансолі адносна  $B$ , праз  $\Sigma_C^A P_{лев.}(l+a)$ ;

2) суму момантаў сіл, прыложаных паміж апорамі:  $\Sigma_A^B P \cdot b$ ;

3) суму момантаў усіх сіл правай кансолі адносна  $B$ , праз:

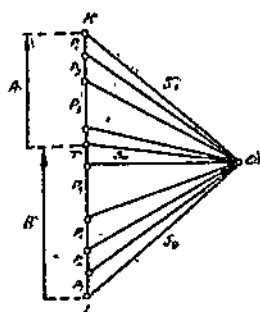
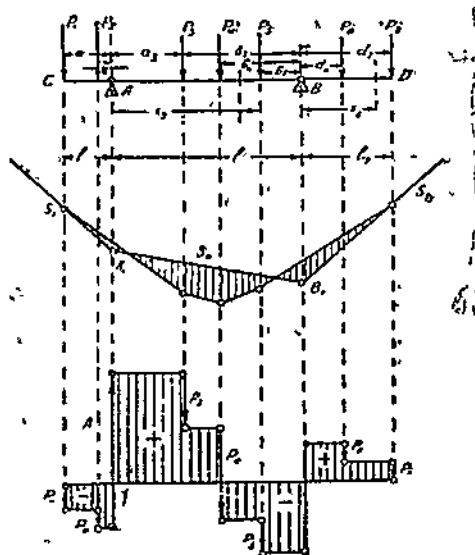
$$\Sigma_B^D P_{прав.} \cdot d;$$

атрымаем пасля падстаноўкі:

$$M_B = -\Sigma_C^A P_{лев.}(l+a) - \Sigma_A^B P \cdot b + \Sigma_B^D P_{прав.} \cdot d.$$

Пасля гэтага для апорнай рэакцыі  $A$  атрымаем наступнае:

$$A = \frac{-\Sigma_C^A P_{лев.}(l+a) - \Sigma_A^B P \cdot b + \Sigma_B^D P_{прав.} \cdot d}{l} \quad (35)$$



Чарц. 110.

З гэтага раўнання відаць наступнае: грузы, размешчаныя на левай кансолі, выклікаюць у левай апоры дадатную рэакцыю, г. зн. такую, якая дзейнічае знізу ўверх, а грузы правай кансолі — адмоўную.

Калі  $\Sigma_B^D P_{прав.} \cdot d$  будзе больш  $\Sigma_C^A P_{лев.}(l+a) + \Sigma_A^B P \cdot b$ , то рэакцыя  $A$  будзе мець адмоўнае значэнне і бэлька будзе імкнуцца

аддзяліцца ад апоры  $A$  ўверх. Каб унікнуць гэтага апору  $A$  трэба пабудоваць так, каб яна аказвала і адмоўнае супраціўленне, г. зн. не дазваляла бэльцы падывацца ўверх (чарц. 111).

З таго-ж раўнання вынікае, што для атрымання  $M_{ax}$ .  $A$  неабходна загрузіць бэльку магчыма большым лікам грузаў на ўчастку  $CB$ , прычым найвялікшыя з іх павінны быць змешчаны як мага бліжэй да свабоднага канца  $C$ . Для атрымання-ж  $M_{in}$ .  $A$  неабходна загрузіць кансоль  $BD$ , прычым найбольш цяжкія грузы трэба змясціць магчыма бліжэй да  $D$ .

Для апорнай рэакцыі  $B$  маем:

$$B = \frac{\sum_{\text{прав.}} P_{\text{прав.}} \cdot (l + d) + \sum_{\text{л.}} P_{\text{л.}} \cdot (l - b) - \sum_{\text{л.}} P_{\text{л.}}}{1} \quad (36)$$

Вынік пяхай зробіць чытачы гэтай кнігі.

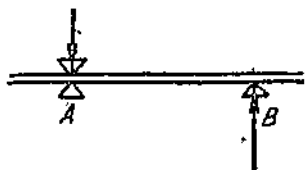
Апорная рэакцыя  $B$  можа быць вызначана пры ўмове, што апорная рэакцыя  $A$  вядома; з раўнання роўнавагі:

$$\sum y = 0, \text{ адкуль } B = \sum P - A,$$

дзе  $\sum P$  азначае суму ўсіх грузаў, змешчаных на бэльцы між  $C$  і  $D$ .

Рэакцыі апор можна вызначыць і графічна; для гэтага будзем сілавую многавугольную для ўсіх даных сіл  $P_1, P_2, \dots, P_6, P_7$  і пры

адвольным полюсе вярочны многавугольнік (чарц. 110). Працягнуўшы крайнія бакі яго да перасячэння з апорнымі вертыкалямі ў пунктах  $A_1$  і  $B_1$  і правёўшы замыкающую  $A_1B_1$  праз полюс  $O$ , праводзім  $OT$  паралельна  $A_1B_1$ . Тады пункт  $T$  падзеліць роўнадзейную ўсіх сіл на 2 часткі:  $KT = A$  і  $TL = B$ . Пры гэтым могуць быць 2 выпадкі: 1) калі пункт  $T$  будзе знаходзіцца паміж  $K$  і  $L$ , то абедзве рэакцыі дадатныя (чарц. 110); 2) калі-ж промень паралельнай замыкаючай пройдзе з аднаго боку променяў, якія адпавядаюць грузам, то адна рэакцыя будзе мець адмоўнае значэнне (чарц. 111). На чарц. 112 рэакцыя апоры  $A$  мае знак мінус,  $LT = B$  і  $TK = A$ .



Чарц. 111.

**Выгібаючы момант.** Для сячэння ў кансолі  $CA$  на адлегласці  $x_1$  ад апоры  $A$  (чарц. 110) значэнне моманту будзе:

$$M_{x_1} = -P_1(a_1 - x_1) - P_2x_1(a_2 - x_1) - \dots, \text{ ці наогул:}$$

$$M_{x_1} = -\sum C P \cdot (a - x_1) \quad (37)$$

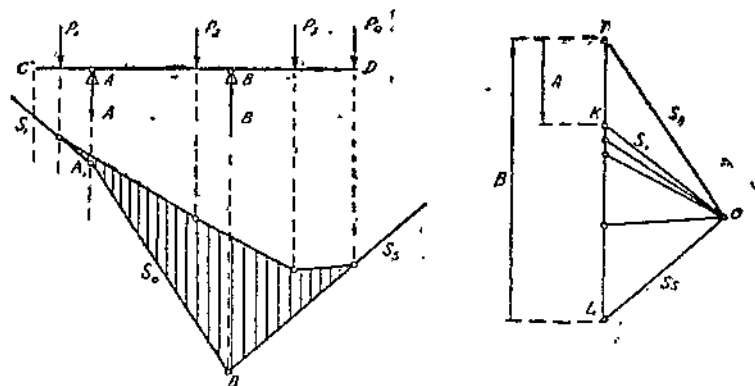
Найбольшага значэння адмоўнага момант кансолі дасягае ў пункце  $A$ , г. зн. пры  $x_1 = 0$ ;

$$M_A = -\sum C P \cdot a. \quad (38)$$

У сячэнні між апорамі на адлегласці  $x_2$  ад апоры  $A$  выгібаючы момант мае значэнне:

$$M_{x_2} = A \cdot x_2 - \sum C P \cdot (x_2 + a) - \sum A P \cdot (x_2 - a), \quad (39)$$

дзе знак моманту рэакцыі  $A$  прымаецца адпаведна сэнсу вярчэння гэтага моманту адносна сячэння ў залежнасці ад знака рэакцыі  $A$ . Момант для сячэння між апорамі можа мець як дадатнае, так і адмоўнае значэнне ў залежнасці ад палажэння сячэння і грузаў, а таксама велічыні апошніх. Ён заўсёды меншы за момант тых-жа сячэнняў бэлькі, якая ляжыць сваімі канцамі на двух апорах пры аднолькавых пралётах. Гэта відаць з чарц. 110, дзе замыкаючая кансольная бэлька ляжыць ніжэй замыкаючай прастай бэлькі.



Чарц. 112.

Для сячэння ў кансолі  $BD$  выгібаючы момант прасцей вызначаецца як і ў левай кансолі, прычым чарцёж паварочваецца на  $180^\circ$ . Момант гэты мае заўсёды адмоўнае значэнне.

Графічна выгібаючы момант вызначаецца з плошчы момантаў, абмяжованай вярэвочным многавугольнікам і замыкаючай, як здабытак ардынаты  $y$  на голюсную адлегласць  $H$ ; пры гэтым ардынаты, змешчаныя ніжэй замыкаючай—дадатныя, а вышэй—адмоўныя. Адпаведна гэтаму:

$$M_{x_1} = -y_1 \cdot H; \quad M_{x_2} = +y_2 \cdot H; \quad M_{x_3} = -y_3 \cdot H.$$

З чарц. 110 відаць, што для сячэнняў між апорамі  $A$  і  $B$  ардынаты  $y$  і адпаведна імі моманты могуць быць дадатнымі і адмоўнымі, а ў пунктах перасячэння замыкаючай з вярэвочным многавугольнікам роўнымі нулю.

Калі замыкаючая  $S_0$  ляжыць ніжэй вярэвочнага многавугольніка, не перасякаючы апошняга, то ардынаты для ўсіх сячэнняў бэлькі маюць адмоўнае значэнне і, значыць, той-жа знак мінус маюць і моманты для гэтых сячэнняў.

Папярочныя сілы могуць быць вызначаны пасля знаходжання апорных рэакцый. Для сячэння  $x_1$  у левай кансолі (чарц. 110) папярочная сіла будзе:

$$Q_{x_1} = -\sum_{C^*}^* P. \quad (40)$$

Яна адмоўная, бо дзейнічае зверху ўніз. Для сячэння непасрэдна над апорай  $A$  папярочная сіла  $Q_A$  роўна:

$$Q_A = A - \Sigma_C^A P, \quad (41)$$

дзе  $A$  бярэцца са знакам плюс, калі яна дзейнічае знізу ўверх і са знакам мінус, калі яна дзейнічае зверху ўніз. Такім чынам  $Q_A$  можа быць велічыняй дадатнай ці адмоўнай у залежнасці ад велічыні і знака  $A$ . Для сячэння  $x$ , між апорамі:

$$Q_x = A - \Sigma_C^x P - \Sigma_A^x P \quad (42)$$

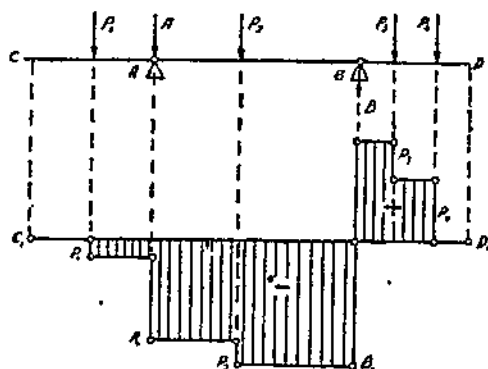
Непасрэдна над апорай  $B$ :

$$Q_B = A + B - \Sigma_C^B P. \quad (43)$$

$Q_B$  заўсёды дадатная, бо  $A + B + \Sigma_C^D P$  і  $\Sigma_C^B P < \Sigma_C^D P$ , ці што тое самае  $A + B > \Sigma_C^B P$ .

Эпіюра папярочных сіл для згрупаваных грузаў атрымліваецца *ступенчатай*; яна перасякае вось абсцыс у 3-х пунктах (чарц. 110), калі абедзве апорныя рэакцыі  $A$  і  $B$  дадатныя і  $A > \Sigma_C^A P$ , а  $B > \Sigma_B^D P$ , ці ў адным пункце, калі апорная рэакцыя  $A$  адмоўная (чарц. 113), ці калі  $A < \Sigma_C^A P$ , хоць-бы яна была дадатная (чарц. 114).

Максімумы момантаў і тут адпавядаюць нулявым пунктам папярочных сіл, іх бывае 3, калі эпіюра папярочных сіл перасякае



Чарц. 113.

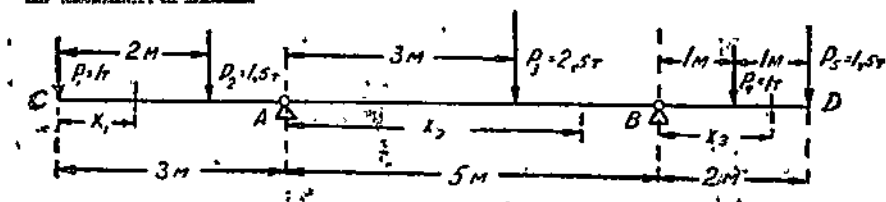
вось абсцыс у 3-х пунктах—2 адмоўных на апорах і адзін дадатны сярод пралёту, ці адзін адмоўны на апоры, калі эпіюра  $Q$  перасякае вось абсцыс у адным пункце, а іменна на апоры.

**Задача.** Визначити аналітично реакцію опору, вигібальні моменти і папярочныя сілы для сячэнняў  $x_1$ ,  $x_2$  і  $x_3$  кансольнай бэлькі (чарц. 115).



Чарц. 114.

**Задача.** Пабудаваць эпіюры момантаў і папярочных сіл, вызначыць графічна опорныя рэакцыі, вигібальныя момены і папярочныя сілы ў сячэннях:  $x_1$ ,  $x_2$  і  $x_3$  для бэлькі (чарц. 116) і па раўнацы вынікі, атрыманыя графічным спосабам, з вынікамі па пярэдняй задачы. Визначыць найбольшыя вигібальныя момены.



Чарц. 115.

рочныя сілы ў сячэннях:  $x_1$ ,  $x_2$  і  $x_3$  для бэлькі (чарц. 116) і па раўнацы вынікі, атрыманыя графічным спосабам, з вынікамі па пярэдняй задачы. Визначыць найбольшыя вигібальныя момены.

## § 40. Нерухомае роўнамерна-размеркаваная нагрузка

Визначым опорныя рэакцыі, момены і папярочныя сілы для кансольнай бэлькі  $CD$  з апорамі ў  $A$  і  $B$ , нагружанай роўнамерна-размеркаванай нагрузкай. Абазначым: пралёт бэлькі  $l$ , даўжыню левай кансолі  $l_1$  і правай  $l_2$ , нагрузка на адзінку даўжыні  $p$  (чарц. 116).

Рэакцыі апору вызначаюцца таксама, як і для згрупаваных грузаў з раўнання момантаў адносна пунктаў апору. З раўнання  $M_B = 0$ , маем  $A \cdot l - p \cdot l_1 \left( l + \frac{l_1}{2} \right) - p \cdot l \cdot \frac{l}{2} - p \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} = 0$ , адкуль пасля ператварэння атрымваем:

$$A = p \cdot \frac{[(l + l_1)^2 - l_2^2]}{2l} = p \cdot \frac{(l + l_1 + l_2)(l + l_1 - l_2)}{2l} \quad (44)$$

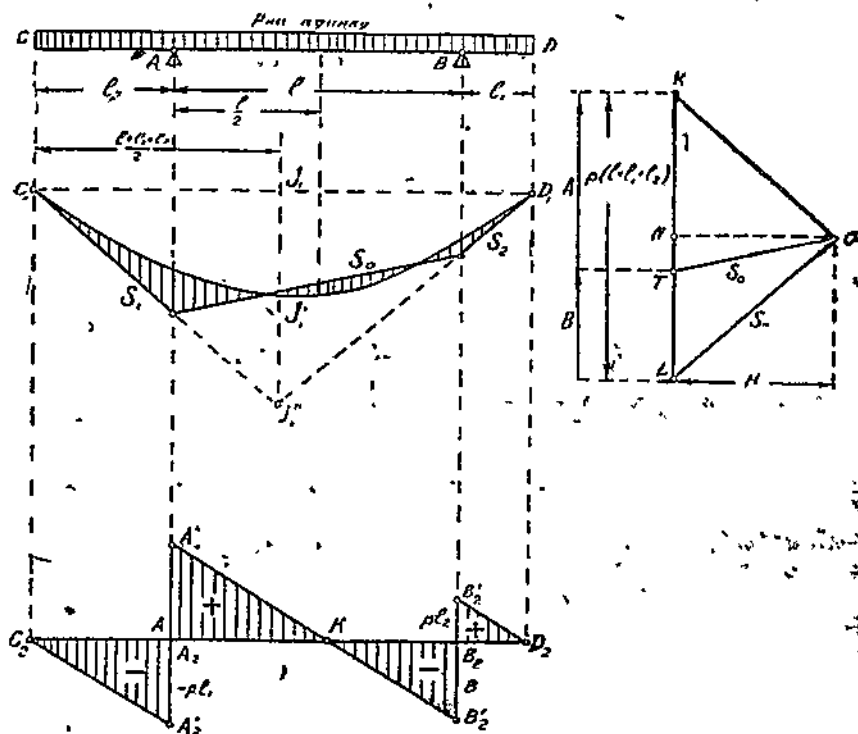
Практикаванне. З'раўнання момантаў вызначыць рэакцыю апоры В.

$$\text{Адказ. } B = p \cdot \frac{[(l_1 + l_2)^2 - l_1^2]}{2l_1}$$

Пры кансолях роўнай даўжыні  $l_2 = l_1$  маем:

$$A = B = p \cdot \frac{(b_1 + 2l_1)}{2},$$

г. зн. рэакцыі апор роўныя палове нагрузкі ўсёй бэлькі ад С да D.



Чарц. 116.

§ 13. Папярочная сіла ў сячэнні  $x_1$  на левай кансолі дзейнічае зверху ўніз і вызначаецца з раўнання:

$$Q_1 = -p \cdot (l_1 - x_1) \quad (45)$$

Свайго найбольшага значэння яна дасягае на апоры А пры  $x_1 = 0$ ; тады  $Q_1 = -p l_1$  і змяняецца па прамой  $A_2'C_2$  (чарц. 116). У пункце А папярочная сіла падымаецца ад пункта  $A_2'$  да пункта  $A_2''$  на велічыню апорнай рэакцыі А.

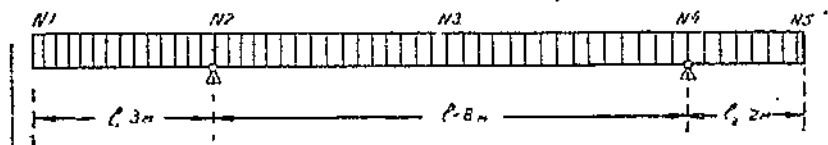
Для сячэння  $x_2$  між апорамі  $A$  і  $B$  папярочная сіла  $Q$  прымае значэнне:

$$Q_2 = A - p \cdot l_1 - p \cdot x_2 = A - p(l_1 + x_2);$$

падставіўшы замест  $A$  яе значэнне, атрымаем:

$$Q_2 = \frac{p}{2l} \cdot (l^2 + l_1^2 - l_2^2 - 2lx_2); \quad (46)$$

з гэтага раўнання вынікае, што ад пункта  $A_2''$  папярочная сіла мяняецца па прамой да пункта  $B_1'$ , дзе падыхаецца да велічыню рэакцыі  $B$  да пункта  $B_2''$ , адкуль ізноў па прамой пры-



Чарц. 117.

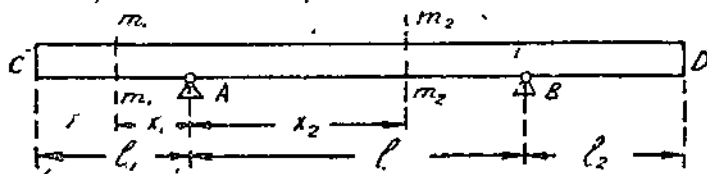
ходзіць да нуля ў пункце  $D_2$ . Такім чынам папярочная сіла праходзіць праз нуль у 3-х пунктах: над апорамі  $A$  і  $B$  і ў пункце  $K$  між апор. Палажэнне пункта  $K$  можна вызначыць з раўнання (46)

$$Q_2 = \frac{p}{2l} \cdot (l^2 + l_1^2 - l_2^2 - 2lx_2).$$

Калі прыраўняць  $Q_2$  нулю і рашыць раўнанне адносна  $x_2$ , тады атрымаем:

$$x_2 = \frac{l^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l}.$$

**Практыкаванне.** Вызначыць палажэнне нулявых пунктаў для папярочнай сілы пры кансолях роўнай даўжыні.



Чарц. 118.

**Задача.** Вызначыць рэакцыі апор і папярочныя сілы для сячэнняў, указаных на чарц. 117, г. зн, на канцах кансолей, на апорах і пасярэдзіне пралёту, пры нагрузцы на 1 паг. м  $p = 0,50$  т.

**Выгібаючы момант.** Дастаткова разгледзець момант для 2-х палажэнняў сячэння: 1) на левай кансолі на адлегласці  $x_1$  ад апоры  $A$  і 2) між апорамі  $A$  і  $B$  на адлегласці  $x_2$  ад левай апоры  $A$  (чарц. 118). Што-ж датычыцца правай кансолі, то яна ёсць перавёрнутая на  $180^\circ$  левая.

1) Калі сячэнне знаходзіцца ў левай кансолі, то выгібаючы момант:

$$M_{x_1} = -p \cdot (l_1 - x_1) \cdot \frac{l_1 - x_1}{2} = -p \cdot \frac{(l_1 - x_1)^2}{2} \quad (47)$$

Свайго максімуму ён дасягае на апоры  $A$  пры  $x_1 = 0$ :

$$M = -\frac{p l_1^2}{2} \quad (48)$$

2) Калі сячэнне знаходзіцца паміж апорамі  $A$  і  $B$ , то момант будзе:

$$M_{x_1} = A \cdot x_2 - p \cdot (l_1 + x_2) \cdot \frac{l_1 + x_2}{2} = A \cdot x_2 - p \cdot \frac{(l_1 + x_2)^2}{2}.$$

Пасля падстаноўкі сюды значэння  $A$ , атрымаем:

$$M_{x_1} = \frac{p[(l + l_1)^2 - l_2^2]}{2l} \cdot x_2 - \frac{p \cdot (l_1 + x_2)^2}{2}.$$

З гэтага раўнання пасля ператварэння, атрымаем:

$$M_{x_1} = \frac{p}{2l} \cdot [(l - x_2) \cdot (lx_2 - l_1^2) - l_2^2 \cdot x_2] \quad (48)$$

**Практыкаванне.** Выходзячы з апошняга раўнання момантаў, вызначыць моманты адносна апор.

$$\text{Адказ. } M_A = -\frac{p l_1^2}{2}.$$

**Практыкаванне.** З папярэдняга раўнання для  $M_{x_1}$  вызначыць пункты, у якіх момант  $M_{x_1}$  роўны нулю.

$$\text{Адказ. } x_2 = \frac{l_1^2}{l} \text{ і } x_2 = l - \frac{l_2^2}{l}.$$

**Практыкаванне.** Вызначыць нулявыя пункты для  $M$  пры кансолях роўнай даўжыні:  $l_2 = l_1$ .

**Адказ.** Нулявыя пункты знаходзяцца на роўных адлегласцях ад апор.

**Практыкаванне.** Вызначыць выгібаючы момант для сярэдзіны пралёту.

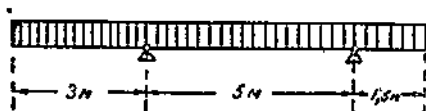
$$\text{Адказ. } M = \frac{p}{8} \cdot (l^2 - 2l_1^2 - 2l_2^2).$$

3. Практикування. Визначить вигібаючы момент для сярэдзіны пралёту пры роўных кансолях.

$$\text{Адказ. } M = \frac{p}{8} \cdot (l^2 - 4l_1^2).$$

Графічна плошча момантаў будзецца, як для бэлькі  $CD$  з апорамі ў  $C$  і  $D$ , г. зн. у выглядзе парабалы  $C_1D_1$  са стралой дасярэдзіне  $l_1$ .  $l_1 = \frac{p \cdot (l + l_1 + l_2)^2}{8H}$  (чарц. 116). Гэта прасцей за ўсё робіцца наступным чынам: будзецца многавугольнік, сіл  $kl$ , для чаго адкладваецца  $kl = p \cdot (l + l_1 + l_2)$ , выбіраецца полюс на перпендыкуляры  $NO$ , уведзеным з сярэдзіны  $kl$ , праводзяцца крайнія промені  $S_1S_2$ , а праз пункты  $C_1D_1$ —паралельныя ім бакі вярэвачнага многавугольніка  $S_1$  і  $S_2$ , якія перасякаюцца ў пункце  $I''_1$  на вертыкалі сярэдзіны бэлькі. Ардынату  $l_1I''_1$  роўную  $p \cdot \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{4H}$  дзеляць папалам і атрымваюць пункт  $I'_1$ , са-

стаўляючы сабою вяршыню парабалы. Крайнія бакі  $S_1$  і  $S_2$  працягваюць да перасячэння з апорнымі вертыкалямі ў пунктах



Чарц. 119.

$A_1$  і  $B_1$ . Злучыўшы гэтыя пункты прамой  $A_1B_1 = S_0$ , атрымваем замыкаючы бок  $S_0$  вярэвачнага многавугольніка, паралель да якога праз полюс  $O$  у сілавым многавугольніку раздзеліць  $kl$  на 2 часткі:  $TK = A$  і  $LT = B$ . У вярэвачным-

жа многавугольніку ардынаты у між бакамі  $S_1$ ,  $S_0$  і  $S_2$  з аднаго боку, і парабай з другога, вызначаць велічыню вигібаючага моманту:  $M = H \cdot u$ , прычым  $M$  будзе дадатным ці адмоўным у залежнасці ад таго, ці ляжыць у ніжэй, ці вышэй замыкаючай  $S_0$ .

Троім нулявым пунктам для папярочнай сілы  $Q$  адпавядаюць тры максімумы вигібаючых момантаў: два адмоўныя на апорах  $A$  і  $B$  і адзін дадатны ў пункце  $K$ .

Задача. Пабудаваць эпюры момантаў і папярочных сіл для кансольнай бэлькі з пастаяннай роўнамерна-размеркаванай нагрукі  $p = 1 \text{ т/паг. м.}$

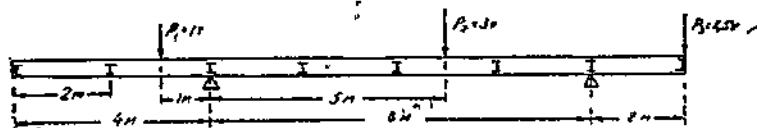
Визначыць графічна папярочныя сілы на апорах і канцох кансоль, а таксама найбольшыя вигібаючыя моманты (чарц. 119).

Задача. Для падтрымання балкона, які выступае на 1,8 м, служачь выпушчаны за сцяну будынку столевыя жалезныя бэлькі, якія ляжаць на адлегласці 0,8 м вось ад восі, пры пралёце ў 5,2 м. Нагрузка столі роўна  $450 \text{ кг/м}^2$ . Нагрузка балкона  $= 600 \text{ кг/м}^2$  і вага прылаў роўна  $120 \text{ кг}$  у паг. м. Визначыць рэакцыі апор, найбольшы вигібаючы момант, пабудаваць эпюры момантаў і папярочных сіл.

Адказ: Найбольшы вигібаючы момант  $= 95 \text{ 040 кг/см.}$

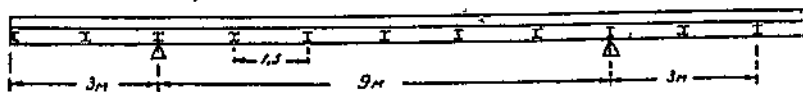
## § 41. Вузловая передача

При вузловой передаче груза различие кансольной балки выдвигается аналогично различию простой балки при гетой передаче. Плотчаю моментау тут служыць многовугольнік, упісаны ці ў вярочны многовугольнік пры згрупаваных грузах, ці ў парабалу пры роўнамерна-размеркаванай нагрузцы. Эпюра папярочных сіл становіць сабою ступенчатую лінію з ступенямі пад вузламі.



Чарц. 120.

**Задача.** Пабудаваць эпюру моментаў і папярочных сіл для кансольнай балкі, змеічанай на чарц. 120.



Чарц. 121.

**Задача.** Пабудаваць эпюры моментаў і папярочных сіл для кансольнай балкі, нагружанай роўнамерна-размеркаванай нагрузкай  $p = 0,70 \text{ т на } 1 \text{ паг. м}$  (чарц. 121).

## § 42. Рухомая нагрузка

Прасцей за ўсё вызначаецца самае нявыгаднае палажэнне рухомой нагрузкі пры данымзе інфлюэнтных ліній. Вызначыўшы гэта нявыгаднае палажэнне грузаў, уявім сабе, што яны засталіся ў гэтым палажэнні і вызначым для іх неабходнае для разліку велічыні: апорныя рэакцыі, выгібаючыя моманты, папярочныя сілы.

## § 43. Інфлюэнтная лінія апорных рэакцый

Дапусцім, што на балцы  $CD$  з пралётам  $l$  і кансолямі  $l_1$  і  $l_2$  даўжынёй (чарц. 122) рухаецца груз  $P=1$ . Пакуль гэты груз знаходзіцца між апорамі  $A$  і  $B$  інфлюэнтная лінія апорнай рэакцыі  $A$  такая-ж, як і для простой балкі  $AB$ . Працягнуўшы гэтую прамую да пунктаў  $C_1$  і  $D_1$  на вертыкалях у канцах балкі, атрымаем інфлюэнтную лінію апорнай рэакцыі  $A$ .

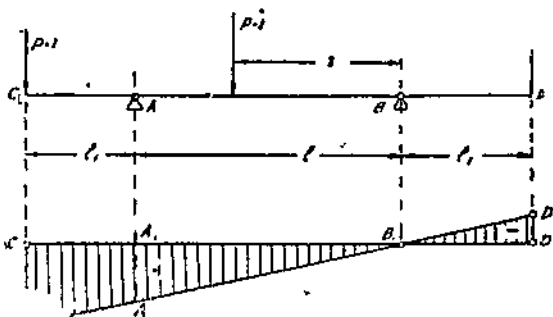
У самой справе, калі груз  $P=1$  знаходзіцца ў пункце  $C$ , то з раўнання момантаў адносна  $B$ , маем:

$$A = 1 \cdot \frac{l + l_1}{l}.$$

З падобнасці трохвугольнікаў  $B_1C_1C'_1$  і  $B_1A_1A'_1$  маем:

$$C_1C'_1 = 1 \cdot \frac{l + l_1}{l}.$$

Такім чынам калі груз  $P=1$  знаходзіцца ў пункце  $C$ , то  $A = C_1C'_1$ , адкуль вынікае, што  $A'_1C'_1$  ёсць інфлюэнтная лінія для кансолі  $CA$ . Аналагічна можна даказаць, што  $B_1D'_1$  ёсць



Чарц. 122.

інфлюэнтная лінія для кансолі  $BD$ , для чаго трэба ўзяць раўнанне момантаў адносна  $B$  і падобныя трохвугольнікі  $B_1A_1A'_1$  і  $B_1D_1D'_1$ , адкуль маем:

$$A = -D_1D'_1.$$

**Практыкаванне.** Пабудаваць інфлюэнтную лінію для апорнай рэакцыі  $B$ .

## § 44. Інфлюэнтная лінія папярочных сіл

Разгледзім тры выпадкі: а) сячэнне знаходзіцца ў левай кансолі, б) сячэнне між апорамі і в) сячэнне ў правай кансолі.

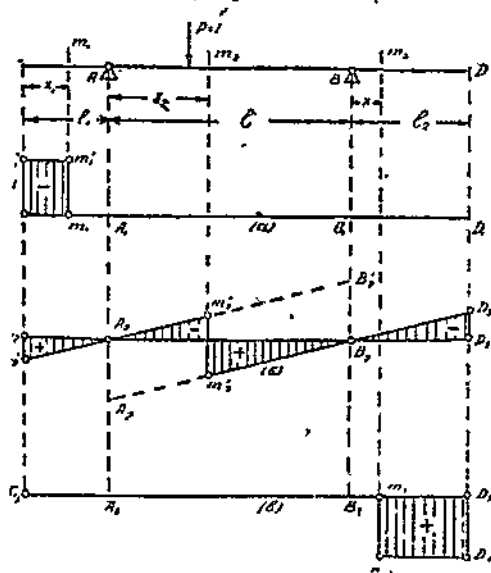
а) Калі груз  $P=1$  знаходзіцца ўлева ад сячэння  $m_1$  (чарц. 123), то  $Q = -1$  і лінія інфлюэнтная становіць сабою прамую  $C'_1m'_1$ , паралельную восі абсцыс  $C_1D_1$  (чарц. 123-а). Але як толькі груз прайдзе ад сячэння ўправа, то  $Q = 0$  і інфлюэнтная лінія супадае з воссю абсцыс  $C_1D_1$ .

б) Калі сячэнне  $m_2$  знаходзіцца між апорамі  $A$  і  $B$ , то інфлюэнтная лінія (чарц. 123-б), калі груз  $P=1$ , знаходзіцца між апорамі, такая-ж; як для простага бэлькі з апорамі  $A$  і  $B$ . Інфлю-

ентныя лініі для кансоль становяць сабою працяг прамых  $A_2m''_2$  і  $m'_2B_2$ . Плошча ўплыву складаецца з двух дадатных і двух адмоўных трохвугольнікаў.

в) Пакуль груз  $P=1$  знаходзіцца ўлева ад сячэння  $m_2$  папярочная сіла ў сячэнні роўна 0, бо роўнадзейная ўсіх сіл, якія знаходзяцца ўлева ад сячэння, роўна 0, што вынікае з умовы  $\Sigma y=0$ , ці для данага выпадку  $A+B-P=0$ .

Пры пераходзе груза  $P=1$  управа ад сячэння, улева ад яго застаюцца толькі сілы  $A$  і  $B$ , прычым  $A+B=P$ . З тае прычыны,



Чарц. 123.

што  $(A+B)$  дзейнічае знізу ўверх, то папярочная сіла дадатная і  $Q=A+B=P=+1$ ; такім чынам інфлюэнтная лінія ў даным выпадку будзе  $m'_2 D'_2$ , г. зн. прамая паралельная восі абсцыс і мае ардынату  $+1$ .

## § 45. Інфлюэнтная лінія момантаў

Разгледзім у паасобку інфлюэнтныя лініі момантаў для сячэнняў: а) у левай кансолі; б) між апорамі і в) у правай кансолі.

а) Калі сячэнне знаходзіцца ў левай кансолі, то момант ў сячэнні  $x_1$  выклікаецца толькі тады, калі груз  $P=1$  знаходзіцца ўлева ад сячэння, прычым найбольшай велічыні ён дасягае  $-1 \cdot (l_1 - x_1)$  пры знаходжанні груза над канцом С (чарц. 124-а). Плошча ўплыву, якая мае форму роўнаплечнага трохвугольніка, адмоўная, г. зн. усякі груз у кансолях выклікае адмоўныя моманты.

б) Калі сячэнне  $m_2 m_2'$  бярэцца між апораў, то пакуль груз  $P=1$  знаходзіцца між апорамі  $A$  і  $B$ , яго знаходзіцца ва ўмовах сячэння бэлькі з апорамі ў канцах  $A$  і  $B$ , і значыць інфлюэнтная лінія будзе такая-ж, як для простае бэлькі, г. зн.  $B_2 m_2' A_2$  з ардынатамі роўнымі  $1 \cdot x_2 = A_2 A_2'$  і  $B_2 B_2' = 1 \cdot (l - x_2)$  на апорных вертыкалях.

Дакажам, што пры пераходзе груза  $P=1$  улева ад  $A$  на кансоль  $L_1$  інфлюэнтная лінія будзе працягам  $A_2 C_2'$  прамой  $A_2 m_2'$ . Сапраўды, калі груз  $P=1$  знаходзіцца ў пункце  $C$ , то выгібаючы момант у сячэнні  $m_2 m_2'$  будзе:

$$M = A \cdot x_2 - P(x_2 + l_1).$$

Рэакцыя-ж апоры  $A$ :

$$A = \frac{P \cdot (l + l_1)}{l}.$$

Падставіўшы гэтае значэнне ў раўняанне момантаў, атрымаем:

$$M = \frac{P(l + l_1)}{l} \cdot x_2 - P(x_2 + l_1);$$

ці пры  $P=1$ :

$$M = - \frac{1 \cdot (l - x_2) l_1}{l}.$$

З падобнасці трохвугольнікаў  $A_2 C_2' C_2$  і  $A_2 B_2 B_2'$  маем:

$$C_2 C_2' = - \frac{1 \cdot (l - x_2) \cdot l_1}{l},$$

такім чынам  $C_2 C_2' = M$ .

Аналагічна гэтаму, калі груз  $P=1$  будзе на правай кансолі, то інфлюэнтная лінія будзе  $B_2 D_2'$  — працяг прамой  $m_2' B_2$ .

Такім чынам для сячэння між апорамі плошча ўплыву мае два адмоўныя участкі, якія адпавядаюць палажэнням

груза на кансолях, і адзін дадатны, які адпавядае палажэнням груза між апорамі.

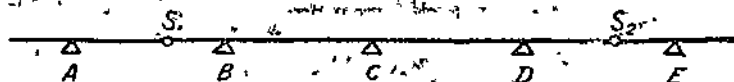
в) Сячэнне ў правай кансолі знаходзіцца ва ўмовах сячэння ў левай кансолі, толькі павернутага на  $180^\circ$ , і таму інфлюэнтная лінія  $m_2 D_2'$  будзеца гэтак-жа сама.

Чарц. 124.

## УРОЇНАВАЖАННЯ БЭЛЬКІ ЦІ БЭЛЬКІ ГЕРБЕРА

### § 46. Агульныя ўласцівасці

Пры разглядзе апор у бэльках было выведзена, што для статычнай вызначальнасці бэлэк, неабходна, каб лік апорных невядомых не перавышаў трох, а пры гарызантальных апорах апошніх не павінна быць больш двух, з якіх адна нерухомая—глухі шарнір, а другая—рухомая—балансір на катках. Калі бэльку, што ляжыць больш чым на двух апорах, з якіх адна нерухомая, а астатнія рухомыя, скласці з асобных частак, звучаных між сабой шарнірамі, то адносна кожнага шарніра ёсць умова, што сума момантаў знешніх сіл адносна яго роўна нулю, бо ў супраціўным выпадку не магло-б быць роўнавагі, а ўтварыўся-б паворот адной часткі адносна другой, бо шарнір гэтаму павароту не супраціўляецца. Такім чынам кожны ўведзены ў такую бэльку шарнір дадае да трох асноўных умоў па адной новай умове роўнавагі. Значыць, увёўшы ў бэльку столькі шарніраў, колькі недастае умоў для вызначэння апорных рэакцый, бэльку на многіх апорах (больш 2-х) можна зрабіць статычна вызначальнай.



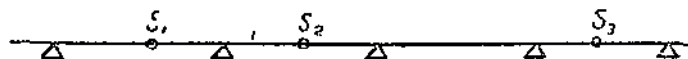
Чарц. 125.

Калі ёсць бэлька на  $n$  шарнірных апорах, з якіх толькі адна нерухомая, то лік апорных невядомых будзе  $n+1$  (кожная рухомая апора па 1 невядомай, а нерухомая—2 невядомых). Для вызначэння гэтых невядомых ёсць тры асноўныя ўмовы роўнавагі; недастае-ж  $n+1-3$ , г. зн.  $n-2$  умоў, адкуль вынікае, што неабходны лік шарніраў  $n-2$ .

Пры размяшчэнні шарніраў на пралётах павінны быць захаваны наступныя ўмовы:

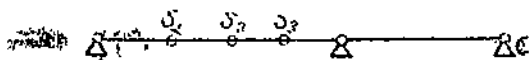
1) ні адна частка бэлькі не павінна ляжаць больш, чым на 2-х апорах, ці што тое самае,—два суседнія пралёты не павінны быць без шарніраў (чарц. 125), бо частка  $S_1S_2$ , якая ляжыць на трох апорах, застаецца статычна невызначальнай.

2) Ні адна частка бэлькі не павінна, ляжаць толькі на адной апоры (чарц. 126), напрыклад, частка  $S_1S_2$ , ці што тое самае, шарніры не павінны быць размешчаны ў двух суседніх пралётах, бо ў гэтым выпадку канструкцыя ў выніку паяўнасці балансіраў не будзе мець жорсткасці.



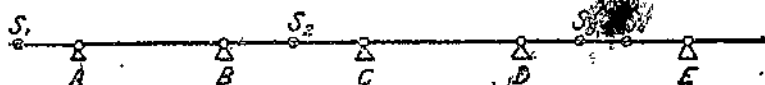
Чарц. 126.

3) На адным пралёце не павінна быць больш двух шарніраў, бо ў супраціўным выпадку канструкцыя не мае жорсткасці (чарц. 127); апроч гэтага, у такім выпадку адна з бесшарнірных частак ляжыць на трох апорах.

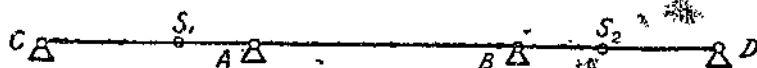


Чарц. 127.

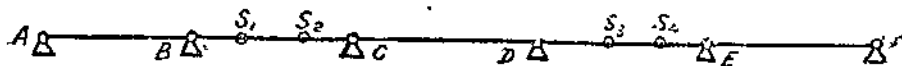
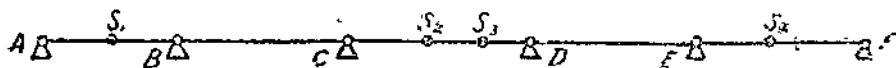
4) У пралётах  $AB$  і  $CD$  (чарц. 128), што знаходзяцца між двух сумежных пралётаў  $AB$  і  $CD$ , якія ня маюць шарніраў, не можна быць уключай адзін толькі шарнір  $S_2$ , бо ў гэтым выпадку канструкцыя будзе статычна невызначальнай; неабходна два шарніры.



Чарц. 128.



Чарц. 129.



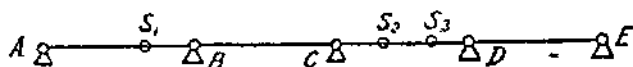
Чарц. 130.

На практыцы часцей за ўсё ўроўнаважаныя бэлькі прымяняюцца пры чотным ліку апор. На чарц. 129 паказаны значна пашыраныя ўроўнаважаныя бэлькі пры 4-х апорах, з якіх першая камбінацыя часта сустракаецца ў мастах, а другая ў крокавых фермах. Размяшчэнне шарніраў пры 6 апорах паказана на чарц. 130.

Пры большым ліку апор шарніры звычайна размяшчаюцца па два праз пралёт, прычым крайнія пралёты маюць па 1 шарніру, ці ў іх няма зусім шарніраў.

## § 47. Разлік уроўнаважаных бэлек

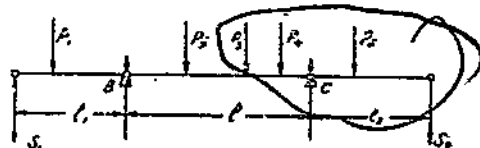
Уроўнаважаная бэлька (чарц. 131) складаецца з частак  $AS_1$  і  $S_2S_3$ , якія становяць сабою простыя бэлькі, што ляжаць сваімі канцамі на апорах ці шарнірах, і частак  $S_1S_2$  і  $S_3E$ , якія становяць



Чарц. 131.

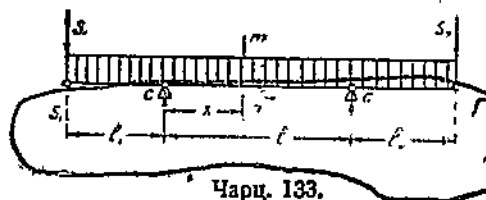
вяць сабой кансольныя бэлькі з двума і адным звісаючымі канцамі. З гэтага вынікае і спосаб разліку: часткі  $AS_1$  і  $S_2S_3$  разлічваюцца як простыя бэлькі на двух апорах, прычым вызначаюцца апорныя ціскі, якія перадаюцца на шарніры:  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$ .

Ціскі гэтыя прылічваюцца да грузаў, якія дзейнічаюць на адпаведную кансольную частку  $S_1S_2$  і  $S_3E$  і разлічваюцца як кансольныя бэлькі, прычым ціскі  $S_1$  і  $S_2$  (чарц. 132) уваходзяць у агульную сістэму грузаў  $P$ , якія дзейнічаюць між шарнірамі  $S_1$  і  $S_2$ .



Чарц. 132.

Сілы  $S_1$  і  $S_2$  з'яўляюцца заўсёды згрупаванымі грузамі пры ўсякай нагрузцы бэлькі (чарц. 133) як пры згрупаванай, так і роўнамерна-размеркаванай, а таму ў апошнім выпадку кансольныя ўчасткі разлічваюцца на складаную нагрузку. Для гэтага, згодна прынцыпу незалежнасці дзеяння сіл, вызначаюцца шуканыя велічыні асобна ад кожнага віду нагрузкі і вынікі суміруюцца.



Чарц. 133.

Практыкаванне. Вызначыць апорную рэакцыю  $C$  і выгібачны момант у сячэнні  $m$  (чарц. 133) бэлькі з роўнамерна-размеркаванай нагрузкай  $p$ .

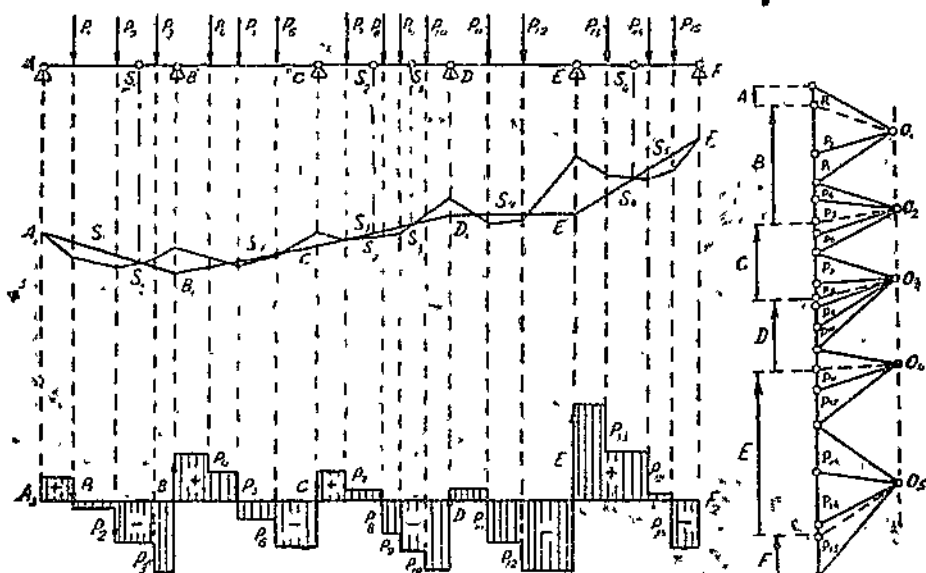
$$\text{Адказ. } C = \frac{p \cdot [(l + l_1)^2 - l_2^2]}{2l} + \frac{S_1(l + l_1) - S_2l_2}{l},$$

$$M_x = \frac{p[(l + l_1)^2 - l_2^2]}{2l} \cdot x - \frac{p(l_1 + x)^2}{2} + \frac{S_1(l_1 + l_1) - S_2l_2}{2} - S_2(l_1 + x).$$

## § 47-а. Графічны разлік уроўнаважаных бэлэк

Дапустім, што на бэльку (чарц. 134) дзейнічае сістэма згрупаваных грузаў:  $P_1, P_2, P_3...$

Для кожнага пралёту  $AB, BC, CD...$  будуюцца самастойныя сілавыя і вярочныя многавугольнікі, якія служаць працягам адзін для другога. Каб мець агульны для ардынаты усіх пралётаў маштаб, для полюсаў  $O_1, O_2...$  выбіраецца агульная полюсная адлегласць  $H$ . Замыкаючыя  $S_1, S_2, S_3...$  павінны быць праведзены



Чарц. 134.

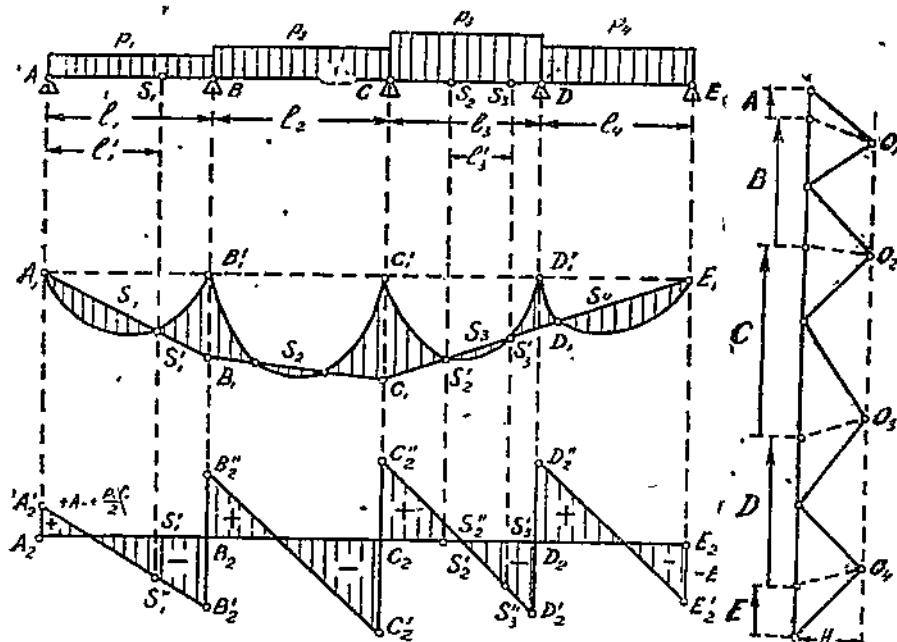
так, каб ардынаты ў пунктах  $A, S_1, S_2, S_3, S_4$  і  $F$  былі роўны нулю, бо моманты ў гэтых пунктах павінны быць роўны нулю. Значыць, правёўшы праз гэтыя пункты вертыкалі да перасячэння ў пунктах  $A_1, S_1', S_2', S_3', S_4'$  і  $F_1$  можна правесці праз іх замыкаючыя  $A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1$  для пралётаў  $AB, CD$  і  $EF$ . Замыкаючыя для пралётаў  $BC$  і  $DE$  атрымуюцца, калі злучыць прамымі пункты  $B_1$  і  $C_1$ , а таксама  $D_1$  і  $E_1$ . Рэакцыі апор атрымуюцца, калі ў сілавым многавугольніку правесці праз адпаведныя полюсы паралелі для гэтых замыкаючых  $S_1, S_2...$ , якія раздзяляць роўнадзейную ўсіх сіл на часткі, роўныя апорным рэакцыям. Эпіюра папярочных сіл складаецца з ступенчатай лініі (чарц. 134), якая перасякае гарызанталь  $A_2F_2$  над апорамі і пад адной з сіл на пралётах, у пунктах, якім адпавядаюць найбольшыя выгібаючыя моманты.

При роўнамерна-размеркаванай нагрузцы, не зварачаючы ўвагі на шарніры, будуюцца для кожнага пралёту параболы са стрэламі:

$$\frac{p_1 l_1^2}{8H}, \frac{p_2 l_2^2}{8H}, \frac{p_3 l_3^2}{8H} \text{ і } \frac{p_4 l_4^2}{8H}$$

ад гарызанталі  $A_1 E_1$ .

З тае прычыны што моманты ў пунктах  $A, S_1, S_2, S_3$  і  $E$  павінны быць роўны нулю, то перанёшы іх вертыкалі на параболы ў пункты  $A_1, S_1', S_2', S_3'$  і  $E_1$  (чарц. 135) і правёўшы праз іх замыкаючыя  $S_1$  і  $S_3$ , знойдзем апорныя ардынаты  $B_1' B_1, C_1' C_1$



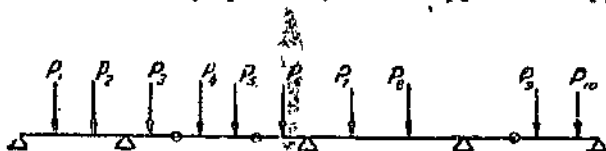
Чарц. 135.

і  $D_1' D_1$ . Злучыўшы пункты  $B_1$  з  $C_1$  і  $D_1$  з  $E_1$  атрымаем замыкаючыя  $S_2$  і  $S_4$ . Калі правесці паралелі замыкаючым вярочнай крывой у сілавым многавугольніку праз адпаведныя полюсы, то яны раздзяляць роўнадзейную нагрузку на апорныя рэакцыі  $A, B, C, D$  і  $E$ .

Для пабудовы эпюры напярочных сіл (чарц. 135) адкладаем на вертыкалі  $A$  адрэзак  $A_2 A_2' = -A = -\frac{p_1 l_1^2}{2}$ ; на вертыкалі  $S_1$ —адрэзак  $S_1' S_1'' = -S_1 = -\frac{p_1 l_1^2}{2}$ ; на вертыкалі  $S_2$ —адрэзак  $S_2' S_2'' = +S_2 = +\frac{p_2 l_2^2}{2}$ ; на вертыкалі  $S_3$ —адрэзак  $S_3' S_3'' = -S_3 = -\frac{p_3 l_3^2}{2}$

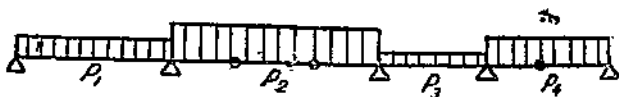
і на вертикалі  $E$ —адрезак  $E_2E_2' = -E$ . Затым злучаем пункты  $A_2'$  з  $S_1''$  і  $S_2''$  з  $S_2''$  прамымі, якія працягваем да перасячэння з апорнымі вертыкалямі  $B, C$  і  $D$  у пунктах  $B_2', C_2''$  і  $D_2'$ . Нарэшце, адклаўшы  $B_2' B_2'' = B; C_2'' C_2' = C$  і  $D_2' D_2'' = D$ , праводзім прамыя  $B_2''C_2'$  і  $D_2''E_2'$  і атрымліваем замкнутую эпюру папярочных сіл, у якой участкі над  $A_2E_2$  дадатныя, а пад ёй—адмоўныя.

**Задача.** Пабудаваць эпюры момантаў і папярочных сіл для ўроўнаважанай бэлькі (чарц. 136) з нагрузкай згрупаванымі грузамі.



Чарц. 136.

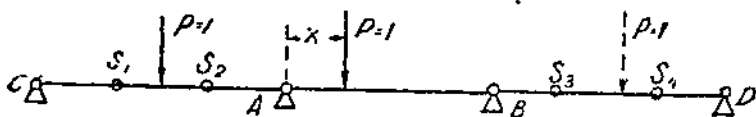
**Задача.** Пабудаваць эпюры момантаў і папярочных сіл для бэлькі Гербера, нагружанай роўнамерна-размеркаванай нагрузкай. (чарц. 137).



Чарц. 137.

## § 48. Інфлюэнтныя лініі ўроўнаважаных бэлек

Дапусцім, ёсць ўроўнаважаная бэлька (чарц. 138). Возьмем частку яе, якая складаецца з сярэдняй кансольнай бэлькі  $S_2S_3$  і двух падвесных бэлек  $S_1S_2$  і  $S_3S_4$ ; падвесныя бэлькі з'яўляюцца простымі бэлькамі, чаму інфлюэнтныя лініі для іх адпавядаюць інфлюэнтным лініям для простых бэлек, значыць дастаткова разглядзець толькі кансольную бэльку  $S_2S_3$ . Пакуль груз  $P=1$  знаходзіцца на бэльцы  $S_2S_3$ , ён робіць на яе такое-ж дзеянне, як



Чарц. 138.

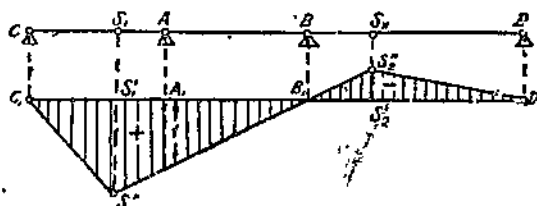
і на кансольную бэльку без падвесных частак, у выніку чаго інфлюэнтныя лініі будуць тыя-ж. Пры знаходжанні-ж груза  $P=1$  на участках  $S_1S_2$  і  $S_3S_4$  яго дзеянне на бэльку  $S_2S_3$  выразіцца ціскам, які перадаецца ад яго ў пункт  $S_2$  ці  $S_3$ , такім чынам у гэтым выпадку будзе мець месца вузлавое дзеянне нагрузкі. Зна-

чыць інфлюэнтныя лініі між пунктамі  $S_1$  і  $S_2$  ці  $S_3$  і  $S_4$  павінны складацца з прамых ліній. Нарэшце, пры пераходзе груза  $P=1$  улева ад  $S_1$  ці ўправа ад  $S_4$ , ён ніякага дзеяння на бэльку  $S_2S_3$  рабіць не будзе.

### а) Інфлюэнтныя лініі апорных рэакцый

Будуецца інфлюэнтная лінія  $S_1''S_2''$  з ардынатай на апоры  $A_1A_1'=1$  для часткі  $S_1S_2$ , пасля чаго пункт  $C_1$  злучаецца з  $S_1''$  і пункт  $D_1$  — з  $S_2''$ . Шуканая плошча ўплыву складаецца з двух трохвугольнікаў: дадатнага  $C_1S_1''B_1$  і адмоўнага  $B_1S_2''D_1$  (чарц. 139).

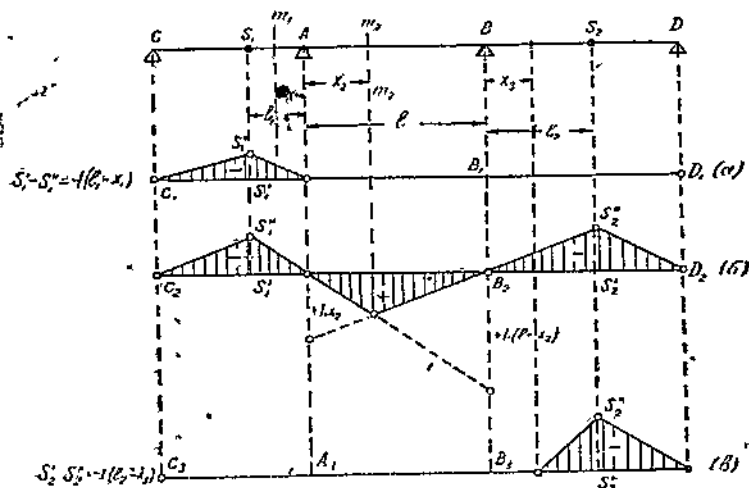
**Практыкаванне.** Пабудаваць інфлюэнтную лінію для рэакцыі апоры  $B$  уроўнаважанай бэлькі (чарц. 139).



Чарц. 139.

### б) Інфлюэнтная лінія выгібайчых момантаў

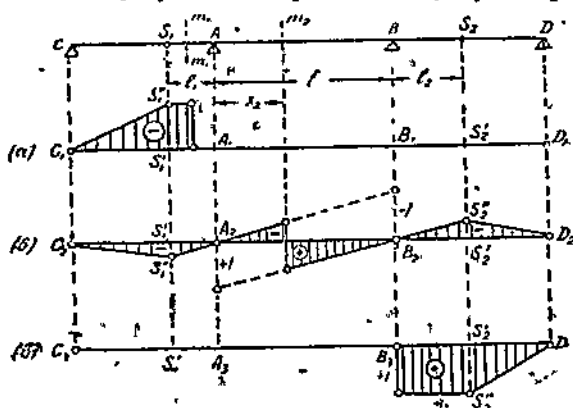
Чарцёж будуецца аналагічна чарцяжу кансольных бэлек з дадаткам: прамых  $C_1S_1''$  у лініі ўплыву для сячэнняў у левай кансолі (чарц. 140-а);  $C_2S_1''$  і  $D_2S_3''$  для інфлюэнтнай лініі між апорамі (чарц. 140-б) і прамой  $S_3''D_3$  — у правай кансолі (чарц. 140-в).



Чарц. 140.

а) *Інфлюентнія лінії напярочных сіл*

Інфлюентнія лініі пабудаваны на чарц. 141 для сячэнняў:  
а) на левай кансолі, б) між апорамі А і В, в) на правай кансолі;

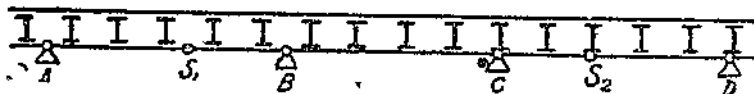


Чарц. 141.

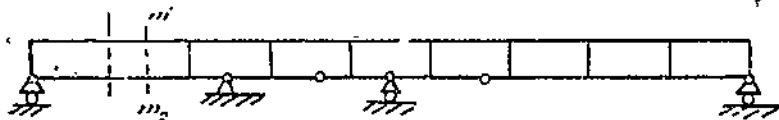
**Задача.** Пабудаваць інфлюентныя лініі выгібаючых момантаў і напярочных сіл для ўроўнаважанай бэлькі ў выпадку вузлавой перадачы (чарц. 142) для сячэнняў між апорамі і на кансолях.

**Задача.** Пабудаваць інфлюентныя лініі момантаў для сячэнняў  $m_1$  і  $m_2$  пры прамой і вузлавой перадачах для ўроўнаважанай бэлькі (чарц. 143).

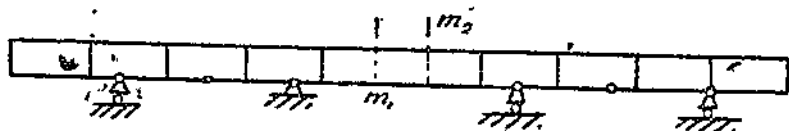
**Задача.** Пабудаваць інфлюентныя лініі момантаў для сячэнняў  $m_1$  і  $m_2$  пры прамой і вузлавой перадачах для ўроўнаважанай бэлькі (чарц. 144).



Чарц. 142.

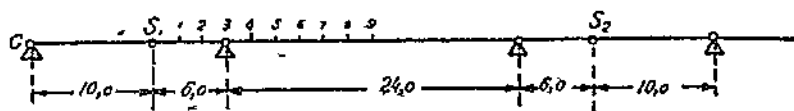


Чарц. 143.



Чарц. 144.

**Задача.** Визначиць при дапамозе інфлюентных ліній выгібаючыя моманты і папярочныя сілы ў сячэннях праз 2 метры бэлькі Гербера з сярэднім пралётам  $l=24,0$  м, кансолямі па  $l_1=6,00$  м і пераходнымі бэльчкамі  $l_0=10,0$  м (чарц. 145).



Чарц. 145.

Уласная вага кансольнай бэлькі  $p_1=2400$  кг/м, а пераходных бэльчак —  $p_2=1800$  кг/м; часовую нагрузку бэлькі складае роўнамерна-размеркаваная нагрузка  $q=1200$  кг/м.

## ТРОХШАРНІРНЫЯ АРКІ

## § 49. Агульнае паняцце

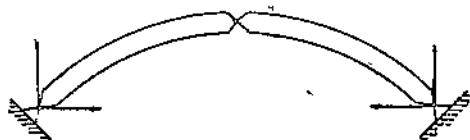
Прызматычны брус, выгнуты ў роўніцы па крывой (парабале, ці дуге акружыны), як апіраецца канцамі на шарніры, называецца аркай з двума шарнірамі, ці двухшарнірнай аркай (чарц. 146). У такой арцы лік невядомых апорных рэакцый роўны 4. Сапраўды, у кожным шарніры апорная рэакцыя, невядомая па велічыні і кірунку, можа быць раскладзена на 2 складаныя: гарызонтальную і вертыкальную. Для вызначэння-ж гэтых 4-х невядомых ёсць толькі 3 раўнанні статыкі:

Чарц. 146.

$$\Sigma x = 0; \quad \Sigma y = 0; \quad \Sigma M = 0.$$

Адсюль вынікае, што двухшарнірная арка становіць сабою *статычна-невывязальнае збудаванне*.

Калі ў двухшарнірную арку ўвесці яшчэ адзін шарнір (чарц. 147), які падзяляе арку на дзве поўаркі, то момант усіх знешніх сіл, якія дзейнічаюць на кожную частку аркі адносна восі гэтага 3-га шарніра, павінен быць роўны нулю, бо ў супраціўным выпадку разглядаемая частка аркі не будзе знаходзіцца ў роўнавазе, а будзе паварочвацца навакол шарніра. Другімі словамі, *роўна-дзейная сіл, якія перадаюцца ад адной часткі аркі на другую, павінна праходзіць праз сярэдні шарнір*.

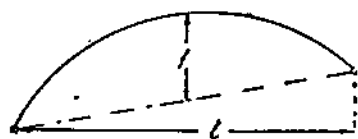


Чарц. 147.

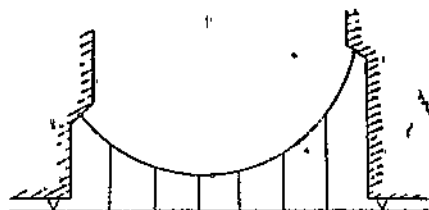
Увядзенне 3-га шарніра дазваляе скласці яшчэ адно раўнанне, а іменна: раўнанне момантаў усіх сіл, прыложаных да адной часткі аркі, адносна ключавога шарніра. Такім чынам гэтае раўнанне разам з 3-ма раўнаннямі статыкі дае 4 раўнанні для вызначэння 4-х невядомых складаных апорных рэакцый. Такім чынам *трохшарнірная арка становіць сабою статычна вызначальнае збудаванне*.

## § 50. Трохшарнірныя аркі з суцэльнай сценкай

Трохшарнірная арка з суцэльнай сценкай становіць сабою бэльку з крывалінейнай воссю, якая ляжыць у вертыкальнай роўніцы. Форма крывой: дуга акружыны, парабалы ці другая якая-небудзь з крывых (чарц. 148). Шарніры становяцца звычайна ў пятах і ключы, г. зн. у вышэйшым пункце аркі. Гарызантальная адлегласць між цэнтрамі пятавых шарніраў называецца пралётам аркі. Вертыкальная адлегласць у цэнтры ключавага шарніра ад прамой, якая злучае цэнтры пятавых шарніраў, называецца стралою аркі.



Чарц. 148.



Чарц. 149.

З тае прычыны, што рух грузаў па крывалінейнай роўніцы (чарц. 149) немагчымы, то з'яўляецца неабходнасць у пабудове гарызантальнага палатна з вузлавой перадачай нагрузкі. Крайнія папярочныны звычайна знаходзяцца па-за пралётам. Пятавыя шарніры могуць знаходзіцца на розных вышынях ці на адной гарызанталі.

З тае прычыны, што рух грузаў па крывалінейнай роўніцы (чарц. 149) немагчымы, то з'яўляецца неабходнасць у пабудове гарызантальнага палатна з вузлавой перадачай нагрузкі. Крайнія папярочныны звычайна знаходзяцца па-за пралётам. Пятавыя шарніры могуць знаходзіцца на розных вышынях ці на адной гарызанталі.

## § 51. Разлік аркі пры пастаяннай нагрузцы

Калі на арку дзейнічае вертыкальная нагрузка, то замест рэакцыі яе апор звычайна разглядаюць іх складаючыя, якія атрымліваюцца праз раскладанне кожнай з іх у вертыкальным кірунку і па лініі  $AB$ , што злучае цэнтры пятавых шарніраў (чарц. 150). Абазначым вертыкальныя складаючыя апорных рэакцый праз  $A$  і  $B$ , а састаўляючыя па прамой  $AB$  праз  $H_1$  і  $H_2$ . Вызначым гэтыя велічыні спачатку аналітычна.

Праектуючы ўсе сілы на гарызантальную вось, маем:

$$\Sigma x = H_1 \cos \alpha - H_2 \cos \alpha = 0,$$

адкуль  $H_1 = H_2$ . Сіла  $H_1 = H_2$  называецца *распорам аркі*; гарызантальная складаючая распора:  $H = H_1 \cos \alpha$  называецца *гарызантальным распорам*.

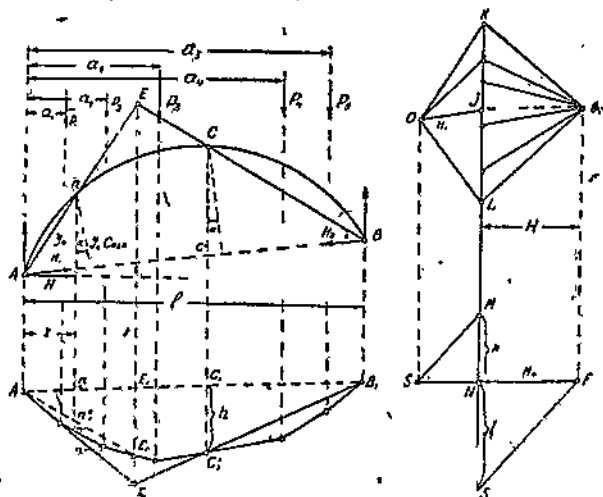
Складаючи раўнанне момантаў адносна центраў  $B$  і  $A$  пята-  
вых шарніраў, маем:

$$A \cdot l = \Sigma P \cdot (l - a) \quad \text{і} \quad B \cdot l = \Sigma P \cdot a,$$

адкуль вызначаем:

$$A = \frac{\Sigma P(l - a)}{l} \quad \text{і} \quad B = \frac{\Sigma P \cdot a}{l}, \quad (49)$$

г. зн. тыя-ж формулы, што і для апорных рэакцый проста-  
бэлькі пралётам  $l$ , якая ляжыць канцамі на апорах.



Чарц. 150.

Складаем цяпер раўнанне момантаў сіл, прыложаных толькі  
да левай поўаркі, адносна центра ключавага шарніра:

$$A \cdot x_0 - \Sigma P_{\text{лев.}} \cdot (x_0 - a) - H_1 \cdot f \cdot \cos \alpha = 0.$$

Але  $A \cdot x_0 - \Sigma P_{\text{лев.}} \cdot (x_0 - a)$  становіць сабою момант сіл проста-  
бэлькі адносна сячэння, якое знаходзіцца ад апоры  $A$  на адлег-  
ласці  $x$ . Абазначым гэты момант  $M_c^0$ , а  $H_1 \cdot \cos \alpha = H_1$ . Такім  
чынам папярэдняя формула прымае наступны выгляд

$$M_c^0 - f \cdot H = 0,$$

адкуль

$$H = \frac{M_c^0}{f}. \quad (50)$$

Тыя-ж велічыні:  $A$ ,  $B$ ,  $H_1$  і  $H$  вызначым графічным спосабам.  
Будзем многавугольнік сіл  $KL$  і вярочаны многавугольнік  $A_1C_1'B_1$ ,  
які адпавядае адвольнаму полюсу  $O_1$ . Праводзім замыкающую  
 $A_1B_1$ , затым праз  $O_1$  прамую, паралельную гэтай замыкаючай,  
якая падзеліць  $KL$  у пункце  $I$  на дзве часткі:

$$IK = A \quad \text{і} \quad LI = B.$$

Для визначення гарызантальнаго распору  $H$  адкладаем на працягу  $KL$  велічыні  $MN=h$  і  $NG=f$ , праводзім  $SNF \perp KG$ , адкладаем  $NF$ , роўную полюснай адлегласці  $H_0$  і праводзім  $SM$ , паралельную  $GF$ . Дакажам, што  $NF=H$  (гарызантальнаму распору); сапраўды з падобнасці трохвугольнікаў  $NMS$  і  $NFG$  маем:

$$\frac{NS}{NF} = \frac{MN}{NG} \text{ або } \frac{NS}{H_0} = \frac{h}{f},$$

адкуль:

$$NS = H_0 \cdot \frac{h}{f}.$$

З раўнання-ж:  $H = \frac{M_c^0}{f}$  на падставе таго, што момант для простага бэлькі роўны здабытку полюснай адлегласці на ардынату плошчы момантаў, г. зн.  $M_c^0 = H_0 \cdot h$  атрымаем:

$$H = H_0 \cdot \frac{h}{f}, \text{ адкуль вынікае, што } NS = H.$$

Калі цяпер правесці праз пункт  $I$  паралель да  $AB$  і нанесці на ёй пункт  $O$ , які будзе знаходзіцца ад  $KL$  на адлегласці  $H$ , вымеранай у гарызантальным кірунку, то адрэзак  $IO$  і дасць апорную складаючую рэакцыю  $H_1$ .

## § 52. Выгібаючы момант

*Аналітычнае вызначэнне моманту.* Выгібаючы момант для адвольнага пункта  $n$  восі аркі, якая знаходзіцца па гарызанталі на адлегласці  $x$  ад апоры  $A$ , мае значэнне:

$$M_n = A \cdot x - P_1 \cdot (x - a_1) - H_1 \cdot y_n \cdot \cos \alpha;$$

але  $Ax - P_1(x - a_1)$  становіць сабою выгібаючы момант простага бэлькі, які абазначан праз  $M_n^0$ ;  $y_n$  становіць сабою вертыкальную адлегласць пункта  $n$  ад прамой  $AB$  (чарц. 150). Калі момант вызначаецца не адносна пункта  $n$ , які ляжыць на восі аркі, а адносна якога-небудзь другога пункта, напрыклад, абрысу ядра сячэння, то ў папярэдняй формуле ўсе велічыні захоўваюць сваё папярэдняе значэнне і  $y_n$  ёсць вертыкальная адлегласць гэтага пункта да  $AB$ .

*Графічнае вызначэнне выгібаючага моманту.* Пабудаваны вярочачны многавугольнік (чарц. 150)  $A_1C_1B_1$  для полюса  $O_1$ , дае:  $M_n^0 = H_0 \cdot n_1 n_1'$ , дзе  $n_1 n_1'$  ёсць ардыната вярочачнага многавугольніка пад пунктам  $n$ . Падставіўшы ў формулу для  $M_n$  гэтае значэнне, а таксама:  $H = H_0 \cdot \frac{h}{f}$ , атрымаем:

$$M_n = H_0 \cdot n_1 n_1' - H_0 \cdot \frac{h}{f} \cdot y_n \quad 0^*$$

або

$$M_n = H_0 \cdot \left( n_1 n_1' - \frac{h}{f} \cdot y_n \right).$$

Калі працягнуць  $Al$  і  $BC$  да сустрэчы іх у пункце  $E$  і правесці праз пункт  $E$  вертыкаль да перасячэння ў пункце  $E_1''$  з прамой  $B_1C_1'$ , а затым  $A_1$  і  $E_1''$  злучыць прамой  $A_1E_1'$ , то атрымаем:

$$\frac{n_1 n_1'''}{h} = \frac{y_n}{f},$$

адкуль:

$$n_1 n_1''' = \frac{h}{f} \cdot y_n.$$

Значыць,

$$M_n = H_0 \cdot (n_1 n_1' - n_1 n_1''') \text{ або } M_n = -H_0 \cdot n_1' n_1''',$$

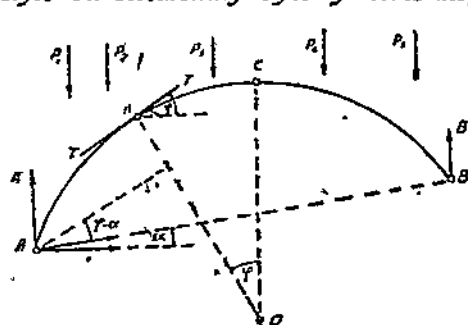
абазначыўшы  $n_1'$   $n_1'''$  праз  $Z$  атрымаем:

$$M_n = -H_0 \cdot Z \quad (51)$$

Момант  $M_n$  будзе адмоўны ці дадатны, у залежнасці ад таго ці ляжыць  $n_1'''$  ніжэй (як на чарц. 150), ці вышэй вярэвочнага многавугольніка  $A_1C_1'B_1$ .

### § 53. Папярочная сіла

Папярочная сіла ў арцы ёсць сума праекцый сіл, якія знаходзяцца з левага боку ад сячэння, на прамую, перпендыкулярную да элементу дугі ў сячэнні, г. зн. на нармаль.



Чарц. 151.

мент дугі ў сячэнні  $n$  (чарц. 151) ці, што тое-ж, датычная  $TT$  утвораць з гарызанталлю ўгаль  $\varphi$ , то нармаль  $nO$  утвораць з вертыкаллю таксама вугаль  $\varphi$ ;  $H_1$  утвораць з паралеллю да  $TT$  вугаль  $(\varphi - \alpha)$ , дзе  $\alpha$  ёсць вугаль, утвораны лініяй апор  $AB$  з гарызанталлю.

У гэтым выпадку праекцыі ўсіх сіл, якія знаходзяцца ўлева ад пункта  $n$  на нармаль  $nO$ , г. зн. па-

пярочная сіла ў сячэнні  $n$ :

$$Q_n = A \cdot \cos \varphi - \Sigma P_{\text{лев.}} \cdot \cos \varphi - H_1 \cdot \sin (\varphi - \alpha),$$

адкуль:

$$Q_n = (A - \Sigma P_{\text{лев.}}) \cdot \cos \varphi - H_1 \cdot \sin (\varphi - \alpha),$$

але  $A - \Sigma P_{\text{лев.}} = Q_n^0$ , г. зн. папярочнай сіле прастай бэлькі, а  $H_1 = \frac{H}{\cos \varphi}$ ; такім чынам атрымоўваем:

$$Q_n = Q_n^0 \cdot \cos \varphi - H \cdot \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}. \quad (52)$$

$Q_n$  будзе дадатнай, калі яна дзейнічае з унутранага ўвагнутага боку аркі да знешняга і, наадварот, адмоўнай пры дзеянні са знешняга пукатага боку да ўнутранага.

## § 54. Задачы

**Задача а.** Вызначыць аналітычна апорныя рэакцыі, гарызантальны распор і распор трохшарнірнай аркі, калі вядомы: пралёт аркі  $l = 20$  м, страла аркі  $f = 4$  м, цэнтры пятавых шарніраў на адной гарызанталі, вертыкальныя грузы  $P_1 = 10$  т,  $P_2 = 15$  т і  $P_3 = 20$  т, прыложаныя на адлегласці ад цэнтра левага пятавага шарніра адпаведна: 4 м, 14 м і 16 м.

**Задача б.** Вызначыць аналітычна апорныя рэакцыі, распор і гарызантальны распор для трохшарнірнай аркі, калі ёсць наступныя даныя: пралёт аркі  $l = 40$  м, адлегласць ад цэнтра левага шарніра да цэнтра ключавага шарніра  $l_1 = 24$  м, страла  $f = 6$  м, вугал нахілу прамой, якая злучае цэнтры пятавых шарніраў з гарызанталлю  $10^\circ$ . Вертыкальная нагрузка:  $P_1 = 10$  т,  $P_2 = 15$  т і  $P_3 = 20$  т прыложана на адлегласцях ад цэнтра левага шарніра адпаведна: 8 м, 28 м і 32 м.

**Задача с.** Абедзве папярэднія задачы рашыць графічным спосабам.

**Задача д.** Вызначыць аналітычна выгібаючы момант для сячэння, якое знаходзіцца ад цэнтра левага пятавага шарніра на адлегласці 10 м. Даныя ўзяць з задачы а.

**Задача е.** Вызначыць аналітычна і графічна выгібаючы момант для сячэння, якое знаходзіцца на адлегласці 13 м ад цэнтра левага шарніра. Даныя ўзяць з задачы б.

**Задача ф.** Вызначыць папярочную сілу  $Y$  тым сячэнні, дзе датычная ўтварае з гарызанталлю вугал  $\varphi = 25^\circ$ . Даныя ўзяць з задачы б.

## § 55. Рухомая нагрузка

Для рухомай нагрузкі выведзем пабудову адпаведных інфлюэнтных ліній, пры дапамозе якіх можна вызначыць самае нявыгаднае палажэнне нагрузкі, і затым вызначыць шуканыя велічыні, адным з спосабаў, як і для пастаяннай нагрузкі.

## § 56. Інфлюэнтная лінія апорных рэакцый

Інфлюэнтныя лініі вертыкальных складаючых апорных рэакцый будуць такія-ж, як і для апорных рэакцый простага бэлькі аднолькавага з аркаю пралёту.

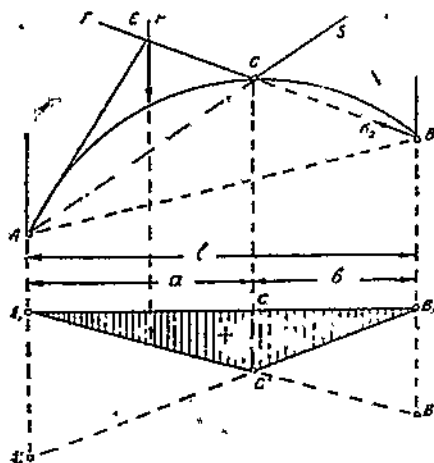
**Практыкаванне.** Пабудоваць інфлюэнтныя лініі вертыкальных складаючых апорных рэакцый; даныя ўзяць з задач а і б.

## § 57. Інфлюентная лінія гарызантальнага распора

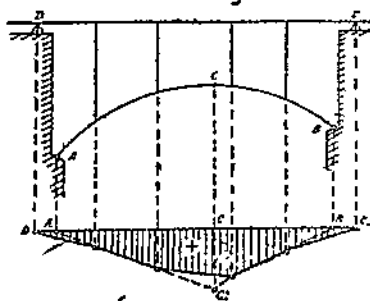
Велічыня гарызантальнага распора вызначаецца, як выведзена вышэй, з формулы:

$$H = \frac{M_c^0}{f},$$

дзе  $M_c^0$  ёсць велічыня выгібаючага моманту для простае бэлькі. Такім чынам інфлюентная лінія  $H$  будзе падобна да інфлюентнай лініі моманту  $M_c^0$  (чарц. 152) простае бэлькі  $A_1B_1$  і атрымліваецца тады, калі на апорнай вертыкалі  $A$  адкладзем ардынату  $A_1A_1'$ , роўную  $\frac{a}{f}$  і пункт  $C_1'$



Чарц. 152.



Чарц. 153.

перасячэння прамой  $B_1A_1'$  з вертыкаллю  $C_1C_1'$  злучым з  $A_1$ . Лінія  $A_1C_1'B_1$  будзе шуканай інфлюентнай лініяй.

Пры вузлавой перадачы нагрузкі інфлюентная лінія атрымліваецца з інфлюентнай лініі пры прамой перадачы праз адыманне ці прыбаўленне адпаведных трохвугольнікаў. Пры руху груза  $P$  па арцы пункт  $E$  (чарц. 152) перасячэння яго з апорнымі рэакцыямі  $K_1$  і  $K_2$  апісвае некаторую крывую, якая завецца *лініяй апорных супраціўленняў*. Для трохшарнірнае аркі яна становіцца сабой ломаную лінію  $FCG$ , якая ўтвараецца працягам прамых  $AC$  і  $BC$ .

Практыкаванне. Пабудова інфлюентнай лініі гарызантальнага распора пры вузлавой нагрузцы (чарц. 153).

## § 58. Інфлюентная лінія выгібаючых момантаў

Момант  $M_n$  у якім-небудзь пункце  $n$  сячэння аркі будзе:

$$M_n = M_n^0 - H \cdot y_n$$

Інфлюентная лінія  $M_n^0$ , як момант простае бэлькі  $A_1B_1$  для сячэння  $n_1$ , згодна папярэдняга, мае форму  $A_1n_1'B_1$

(чарц. 154) з ардынатай  $A_1A_1' = +1 \cdot a$  і вершыняй  $n_1'$  пад пунктам  $n_1$ . З атрыманай інфлюэнтнай лініі для  $M_n^0$  неабходна яшчэ адняць значэнне  $H \cdot y_n$ . Але згодна даказанага:

$$H = \frac{M_c^0}{f},$$

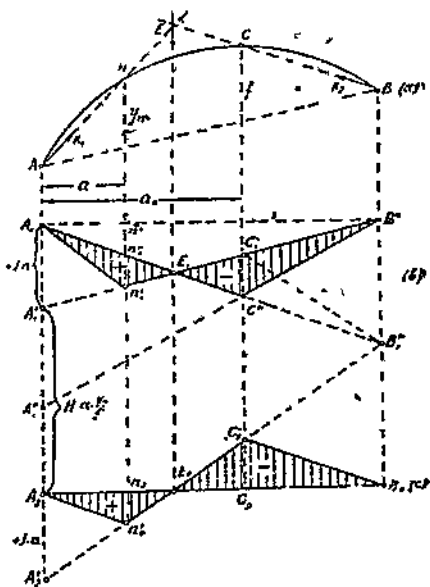
значыць:

$$H \cdot y_n = M_c^0 \cdot \frac{y_n}{f}.$$

Такім чынам уплыў  $Hu_n$  прапарцыянальны ўплыву моманту  $M_c^0$ , г. зн. інфлюэнтная лінія  $Hu_n$  мае выгляд трохвугольніка  $A_1C''B_1$  з вершыняй  $C_1''$  пад пунктам  $C$  і ардынатай

$$A_1A_1' = +1 \cdot a \cdot \frac{y_n}{f}.$$

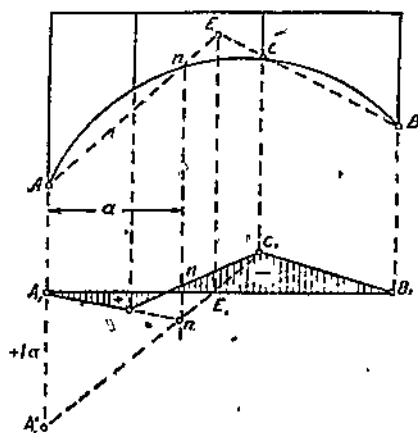
Лінію  $A_1C''B_1$  лёгка пабудавать яшчэ і пры дапамозе нулявога пункта  $E_1'$ . Сапраўды, калі па арцы рухаецца сіла  $P = 1$ , якая знаходзіцца ў права ад сячэння  $n$ , то злева ад яго дзейнічае толькі апорная рэакцыя  $K_1$ . Момант яе адносна пункта  $n$  будзе роўны нулю, калі яна будзе праходзіць праз гэты пункт, а для гэтага патрэбна, каб лінія дзеяння сілы  $P$  праходзіла праз пункт  $E$  перасячэння прамых  $BC$  і  $Al$ . Правёўшы праз пункт  $E$  вертыкаль да перасячэння яе з прамой  $B_1A_1'$  у пункце  $E_1'$ , атрымаем нулявы пункт інфлюэнтнай лініі  $M_n$ . Для пабудовы трохвугольніка  $A_1C_1''B_1$



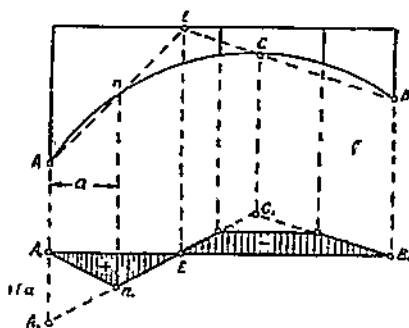
Чарц. 154.

застаецца толькі правесці прамую  $A_1E_1'$  да перасячэння яе ў пункце  $C_1''$  з вертыкаллю праз  $C$  і злучыць  $C_1''$  з  $B_1$  прамой  $C_1''B_1$ . Такім чынам, плошча ўплыву выгібаючага моманту  $M_n$  складаецца з двух трохвугольнікаў: дадатнага  $A_1n_1'E_1'$  і адмоўнага  $E_1'C_1''B_1$ . Тэты чарцёж можна спрасціць наступным чынам: калі працягнуць прамую  $A_1C_1''$  да пункта  $B_1''$  і правесці прамую  $C_1'C_1''$ , то ардынаты трохвугольніка  $B_1''C_1''E_1'$  будуць роўны ардынатам трохвугольніка  $B_1C_1''E_1'$ . Значыцца, усе ардынаты інфлюэнтнай лініі  $M_n$  можна адкласці ад адной прамой  $A_1B_1''$ . Надаўшы гэтай лініі гарызантальнае палажэнне  $A_2B_2$  (чарц. 154-с), адкладваюць ад  $A_2$  па апорнай вертыкалі ардынату  $A_2A_2' = +1 \cdot a$ . Злучыўшы пункт  $A_2'$  прамой з пунктам  $E_2$ , які ляжыць на вертыкалі  $A$ , і працягнуўшы яе, атрымаем пункты  $n_2'$  і  $C_2'$  на пера-

сяченнях з вертикалями, што проходзяць праз  $n$  і  $c$ . Правёўшы затым прамыя  $A_2n_2'$  і  $C_2'B_2$ , атрымаем два трохвугольнікі  $A_2n_2'E_2$  і  $B_2C_2'E_2$  з ардынатамі, роўнымі ардынатам трохвугольнікаў



Чарц. 155.



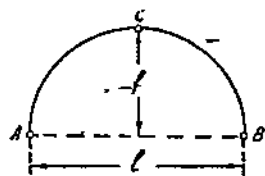
Чарц. 156.

$A_1n_1'E_1'$  і  $B_1C_1'E_1'$ . Гэта дае магчымасць вымяраць усе ардынаты ад адной гарызантальнай лініі  $A_2B_2$ .

Пры вузлавой перадачы нагрузкі інфлюэнтныя лініі будуцца паводле агульнага спосабу, г. зн. як для прамой перадачы і затым, прымаючы пад увагу, што між двума вузлавымі пунктамі інфлюэнтная лінія ёсць прамая, уносяцца адпаведныя змены.

**Практыкаванне.** Пабудоваць інфлюэнтныя лініі для розных выпадкаў вузлавой нагрузкі (чарц. 155 і 156).

**Задача.** Пабудоваць інфлюэнтную лінію распора  $H$  для сіметрычнай трохшарнірнай аркі (чарц. 157).



Чарц. 157.

## § 59. Інфлюэнтная лінія папярочных сіл

Вышэй была выведзена формула для папярочнай сілы  $Q_n$ :

$$Q_n = Q_n^0 \cdot \cos \varphi - H \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

З гэтай формулы відаць, што інфлюэнтная лінія сілы  $Q_n$  атрымаецца, калі з ардынат лініі  $Q_n^0 \cdot \cos \varphi$  адняць ардынаты лініі:

$$H \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} = M_c^0 \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{f \cdot \cos \alpha}.$$



і злучыўшы гэты пункт з  $B_1$ , атрымаем інфлюэнтную лінію  $Q_{\pi}$ , складзеную з 3-х трохвугольнікаў: аднаго дадатнага  $n_1'''n_1'E_1'$  і двух адмоўных:  $A_1n_1''n_1'''$  і  $E_1'C_1''B_1$ .

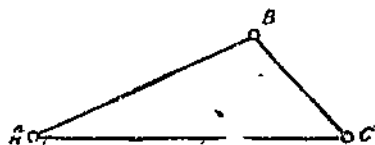
Калі адкладзем усе ардынаты ад адной гарызантальнай лініі  $A_2B_2$  (чарц. 158-с), то атрымаем дадатны трохвугольнік  $n_2n_2'E_2$  і два адмоўных:  $A_2n_2''n_2$  і  $E_2C_2'B_2$ . Калі пункт  $E$  ляжыць управа ад  $C$  (чарц. 158-с), то інфлюэнтная лінія мае выгляд  $A_1n_1''n_1'C_1'B_1$  з адным толькі нулявым пунктам і складаецца з двух толькі частак: адной дадатнай і адной адмоўнай. Пры вузлавой перадачы нагрузкі, калі пункт  $n$  ляжыць між двума вузламі,  $n_2'n_2''$  прыме нахіленае палажэнне.



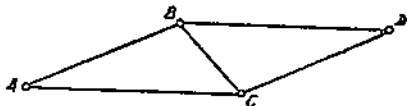
# ФЕРМЫ

## § 60. Агульная тэорыя плоскай рашоткі

Найпрасцейшую ферму ўтвараюць тры стрыжаны, размешчаныя як бакі трохвугольніка і змацованыя папарна балтамі (шарнірамі), свабоднымі ад церця (чарц. 159), такім чынам узаемадзеянне між шарнірамі і звязаным з ім стрыжанем становіць сабою сілу, якая праходзіць праз цэнтр шарніра.

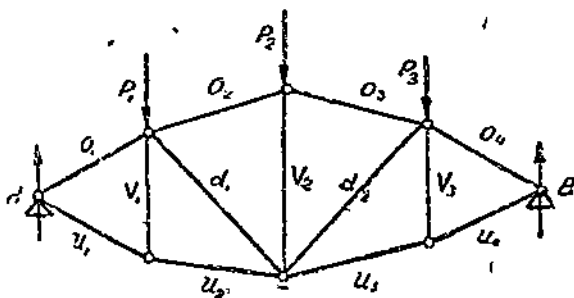


Чарц. 159.



Чарц. 160.

Шарніры  $A, B, C$  называюцца *вузламі фермы*. Калі да трохвугольнай фермы  $ABC$  дадаць вузел  $D$  і злучыць яго з фермай стрыжаннямі  $DB$  і  $DC$ , то атрымаецца ферма  $ABCD$  (чарц. 160).



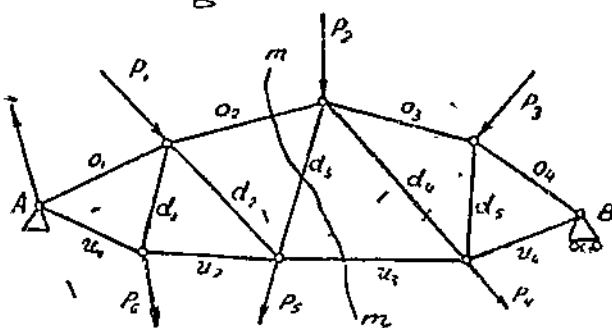
Чарц. 161.

Такім чынам, прылучаючы паслядоўна вузлы, злучаныя са стрыжаннямі, атрымваем больш складаныя фермы.

Плоскай фермай (рашоткай) называецца канструкцыя стрыжанняў, канцы якіх злучаны адзін з другім шарнірамі без церця, і восі якіх ляжаць у адной роўніцы. Стрыжаны, якія абмяжоўваюць ферму знізу і зверху, называюцца *паясамі*:  $U_1, U_2, U_3, \dots$  ніжнім паясам і  $O_1, O_2, O_3, \dots$  верхнім паясам (чарц. 161).

Стрыжані, якія злучаюць верхні пояс з ніжнім, утвараюць уласна *рашотку*. Між стрыжаняў рашоткі адрозніваюць вертыкальныя *стойкі*:  $V_1, V_2, V_3, \dots$  і нахіленыя—*дыяганалі* ці *раскосы*:  $d_1, d_2, d_3, \dots$

Знешнія сілы, якімі в'яўляюцца і апорныя рэакцыі  $A$  і  $B$ , вызначаюцца як і ў простых бэльках; у фермах яны прыложаны ў вузлавых пунктах. Такім чынам паасобныя стрыжані не нясуць ніякай знешняй нагрузкі, апрача ўласнай вагі стрыжаняў, якая



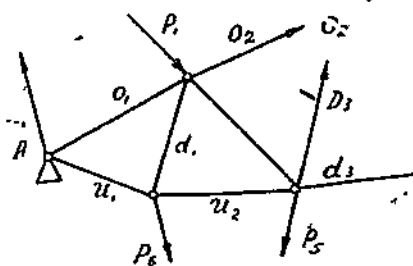
Чарц. 162.

размеркавана роўнамерна па ўсёй іх даўжыні і перадаецца ферме пароўну ў двух вузлах, злучаных разглядаемым стрыжанем.

Актыўныя знешнія сілы, прыложаныя да вузлавых пунктаў, выклікаюць: 1) рэакцыі апор, якія становяць сабою знешнія сілы—*пасіўныя* і 2) унутраныя сілы, якія дзейнічаюць у стрыжанях фермы, гэтыя ўнутраныя сілы называюцца *ўсіллямі*.

Каб выявіць гэтыя ўсілі робыць (мыслена) *сячэнне фермы*.

Калі адрэжам частку фермы сячэннем  $mn$ , то на левую частку фермы дзейнічаюць сілы:  $A, P_1, P_2$  і  $P_6$ , роўнадзейная якіх няхай будзе  $R$  (чарц. 162). Калі ўдаліць правую частку фермы, то для роўнавагі левай часткі да кожнага перасечанага сячэннем  $mn$  стрыжаня:  $o_2, d_3$  і  $u_3$  (чарц. 163) неабходна прыкладзі сілы, якія цалкам замяняць сабою уплыў удаленай правай часткі фермы.



Чарц. 163.

Няхай гэтыя сілы адпаведна:  $O_2, D_3$  і  $U_3$ . Гэтыя сілы, у адрозненне ад знешніх сіл, называюцца *ўнутранымі ўсіллямі* ці *ўсіллямі стрыжаняў*. Кірунак усілля ў стрыжані павінен заўсёды супадаць з кірункам восі самаго стрыжаня. Каб даказаць гэта, дапусцім, што кірунак усілля ў стрыжані  $O_2$  не супадае з кірун-

кам восі стрыжання, а дзейнічае пад вуглом да яе (чарц. 164); тады можна ўсілле  $O_2$  раскласці па двух кірунках: па восі стрыжання і перпендыкулярна да яе; у такім выпадку складаючае ўсілле, перпендыкулярнае да восі, выклікала-б вярчэнне стрыжання каля шарніра, што супярэчыла-б палажэнню аб роўнавазе адсечанай часткі. У апошняй умове заключаецца перавага рашотчатых ферм, бо ў кожным стрыжані фермы выклікаецца толькі расцяжэнне ці сцісканне, у выніку чаго напружанне размяркоўваецца роўнамерна па ўсім сячэнні стрыжання, а значыць матэрыял апошняга ўтылізуецца поўнаасцю, у той час як у стрыжані, які падпадае дзеянню выгібаючых сіл, напружанне размяркоўваецца нероўнамерна па сячэнні і матэрыял такім чынам скарыстоўваецца няпоўнаасцю.



Чарц. 164.

Уласная вага фермы эдастатковай дакладнасцю можа быць прынята, як нагрузка роўнамерна-размеркаваная па ўсёй даўжыні фермы і прыложаная да вузлоў фермы, прычым кожны стрыжань перадае сваю ўласную вагу пароўну двум вузлам, якія ён злучае.

Калі ўсілле ўсіх стрыжанняў фермы могуць быць вызначаны выключна пры дапамозе ўмоў роўнавагі, то такая ферма называецца ўнутрана-статычна вызначальнай, у адрозненне ад знешня-статычна вызначальнай, калі пры дапамозе ўмоў роўнавагі вызначаюцца невядомыя апорныя рэакцыі.

Калі-ж для вызначэння ўсілляў у стрыжаннях недастаткова ўмоў роўнавагі, а прыходзіцца выкарыстоўваць яшчэ дэфармацыі стрыжанняў, то такая ферма носіць назву ўнутрана-статычна невызначальнай.

Ферма, у якой вузлы не могуць змяняць свайго ўзаемнага размяшчэння без змены даўжыні стрыжанняў, называецца жорсткай.

Фермы-ж, якія дапускаюць узаемную змену палажэння вузлоў без змен даўжыні стрыжанняў, называюцца няжорсткімі, ці рухомымі. У гэтых фермах усіллі ў стрыжаннях з'яўляюцца неазначанымі і роўнавагі ў іх быць не можа, бо пад уплывам знешніх сіл будуць перамяшчацца, у звязку з чым на практыцы такая фермы не ўжываюцца.

Для вырашэння пытання аб унутранай статычнай вызначальнасці і жорсткасці фермы ўвядзем наступныя абазначэнні: лік стрыжанняў— $n$ , лік вузлоў— $k$ . Кожны вузел фермы можна выразаць, г. зн. аддзяліць ад другіх частак фермы кругавым сячэннем. Для кожнага вузла маем дзве ўмовы роўнавагі, а іменна:  $\Sigma x = 0$  і  $\Sigma y = 0$ ; што датычыць трэцяе ўмовы:  $\Sigma M = 0$ , то яна не можа быць выкарыстана, бо ператвараецца ў тоежсамасць: усе сілы і ўсіллі перасякаюцца ў адным пункце—вузеле. Такім

чынам для вызначэння ўсіх невядомых ёсць два раўнанні ў кожным вузле, а ўсяго для  $K$  вузлоў— $2K$  раўнанні. У гэты лік уваходзяць і тры ўмовы:  $\sum x = 0$ ,  $\sum y = 0$ ,  $\sum M = 0$ , неабходныя для вызначэння рэакцый апор, а значыць для вызначэння ўсіх ліній у стрыжаннях застаецца:  $2K - 3$  раўнанні.

Пры ліку стрыжняў  $n$  могуць быць тры выпадкі:

1)  $n = 2K - 3$ ; у гэтым выпадку ўсе ўсілі ў стрыжаннях могуць быць вызначаны пры дапамозе ўмоў роўнавагі—ферма жорсткая і статычна вызначальная.

2)  $n < 2K - 3$ ; ферма не можа быць жорсткай, бо роўнавага магчыма толькі тады, калі знешнія сілы задавальняюць некаторым умовам.

3)  $n > 2K - 3$ ; ферма статычна невызначальная, бо недастатковы лік умоў роўнавагі.

Фермы, складзеныя з адных трохвугольнікаў, заўсёды жорсткія і ўнутрана-статычна вызначальныя; сапраўды пры пэўным палажэнні двух вяршынь (ці аднаго боку), трэці пункт (вяршыня) і абодва астатнія бакі маюць пэўнае палажэнне, якое не можа быць зменена без змены даўжыні гэтых стрыжняў.

У чатырохвугольніку-ж пры пастаянным палажэнні аднаго боку  $KL$  (чарц. 165) тры другія бакі:  $KN$ ,  $MN$  і  $ML$  без змен сваёй даўжыні могуць прымаць розныя палажэнні:  $KN$  і  $ML$ , верцячыся каля пунктаў  $K$  і  $L$ , а  $MN$ ,—злучаючы пункты  $M$  і  $N$ . Адсюль вынікае, што ферма, у якую ўваходзіць чатырохвугольнік, не можа быць жорсткай.

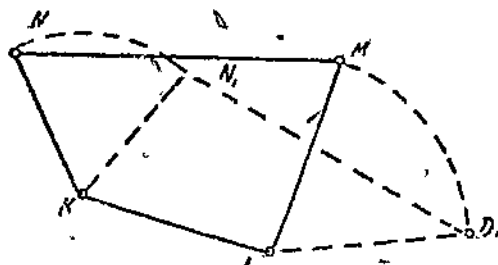
Практыкаванне. Вызначыць ці мае ферма, паданая на чарц. 166, жорсткасць, калі-ж не мае, то паказаць спосабы, як надаць ёй жорсткасць.

З папярэдняга вынікаюць наступныя ўмовы:

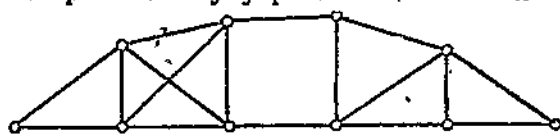
1) Ферма з'яўляецца жорсткай і ўнутрана-статычна вызначальнай, калі да двух жорсткіх (пастаянных) пунктаў яе астатнія пункты прылучаюцца па адной пры дапамозе двух стрыжняў кожная.

Практыкаванне. Ці выканана гэта ўмова ў чатырохвугольніку на чарц. 166.

2) Умова статычнай вызначальнасці  $n = 2K - 3$  пашыраецца і на простыя фермы і на кансольныя фермы. Для знешня-статычнай вызначальнасці адна з апор павінна быць з шарнірам,



Чарц. 165.



Чарц. 166.

а другая з шарнірам і каткамі. Пры большай колькасці апор для знешня-статычнай вызначальнасці ферм уключаюцца, як і пры ўроўнаважаных бэльках, шарніры  $S_1, S_2 \dots$  (чарц. 167) ці будуюцца апоры. Кожны шарнір дае адну ўмову роўнавагі, а іменна момант у ім роўны нулю.

Калі невядомых у апорных рэакцыях— $n$ , а лік шарніраў— $a$ , то для вызначэння ўсіх ўсілляў у стрыжаннях і невядомых апорных рэакцый ёсць  $2K + a$  раўнанняў і, значыць, для вызначэння ўсілляў стрыжанняў застаецца  $2K + a - n$  раўнанняў, а таму для



Чарц. 167.

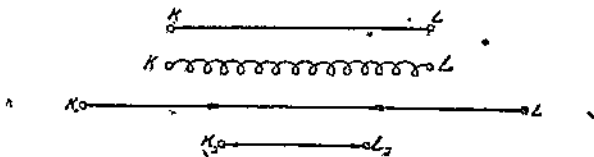
ўнутранай статычнай вызначальнасці павінна быць задаволена ўмова, каб лік стрыжанняў  $S$  было роўна  $2K + a - n$ . Для знешняй-жа статычнай вызначальнасці неабходна каб  $n - a = 3$ , адкуль лік шарніраў:  $a = n - 3$ . Адсюль вынікае, што пры  $n - a > 3$  ферма знешня-статычна невызначальна, а пры  $S > 2K - a + n$  ці пры  $a < n - 3$  ферма ўнутрана-статычна невызначальна.

Адна з апор робіцца з шарнірам, а астатнія з шарнірам і каткамі.

## § 61. Вызначэнне ўсілляў у стрыжаннях ферм

Пад уплывам унутраных сіл (ўсілляў) стрыжанняў будзе ці расцягвацца (падаўжацца) ці сціскацца (укарочвацца). Прынята лічыць расцягваючыя ўсіллі дадатнымі, а сціскаючыя—адмоўнымі. Для нагляднасці заменім стрыжань  $KL$  пругкай спружынай  $KL$  (чарц. 168).

Калі спружына расцягнецца, канцы яе  $K$  і  $L$  будуць на большай адлегласці  $K_1L_1$  адзін ад другога; тады спружына будзе



Чарц. 168.

імкнуцца прыйсці ў ранейшы стан і ў вузлах  $K_1$  і  $L_1$  з'явіцца ўсіллі, якія дзейнічаюць ад вузлоў. Калі-ж спружына ўкароціцца і канцы яе будуць на меншай адлегласці  $K_2L_2$  адзін ад другога,

тады ў вузлах  $K_2$  і  $L_2$  з'яўца ўсілі, якія дзейнічаюць да вузлаў. Такія-ж уздзеянні на вузлы ўтвараюць і пругкія стрыжані ферм.

Адсюль вынікае правіла адносна кірункаў усілляў: *расцягваючае ўсілле накіравана ад вузла, а сціскаючая—да вузла.*

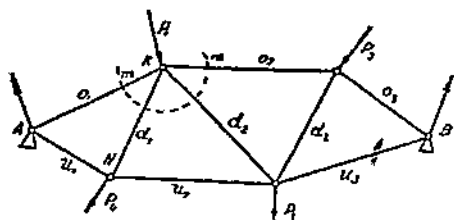
Калі вызначана сіла, з якой стрыжань дзейнічае на адзін вузел, то вядома і сіла, з якой ён дзейнічае на другі вузел: яна роўна па велічыні знойдзенай сіле і мае прама супрацьлеглы кірунак.

Падобна простым бэлькам, фермы могуць мець як пастаянную (нерухомую), так і часовую (рухомую) нагрузку, таму разгледзім вызначэнне ўсілляў для той і другой нагрузкі.

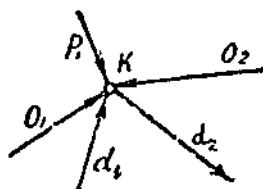
# ПАСТАЯННАЯ (НЕРУХОМАЯ) НАГРУЗКА

## § 62. Спосаб Максвела-Крэмона

З тае прычыны, што знешнія сілы перадаюцца ферме толькі ў вузлах, то кожны з іх падпадае дзеянню роўнадзейнай  $P$  гэтых сіл і ўнутраных усілляў стрыжанняў, якія сходзяцца ў гэтым вузле. Выражам сячэннем *тут* вузел  $K$  (чарц. 169) і мыслена ўдалім



Чарц. 169.



Чарц. 170.

астатнюю частку фермы, тады на вузел  $K$  (чарц. 170) будзе дзейнічаць роўнадзейная знешніх сіл  $P$  і ўсілляў стрыжанняў  $O_1, O_2, d_1$  і  $d_2$ . Усілля гэтыя павінны быць такімі, каб яны цалкам замянілі сабой дзеянне удаленай часткі фермы, г. зн. каб вузел  $C$  знаходзіўся ў роўнавазе, значыць яны павінны задавальняць разам з сілай  $P_1$  умовам роўнавагі сіл, прыложаных у адным пункце.

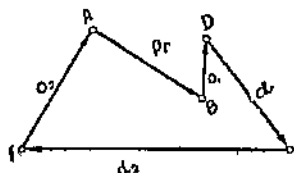
На гэтым прынцыпе і заснаваны спосаб Крэмона для вызначэння ўсілляў.

Пры аналітычным спосабе гэтыя ўмовы роўнавагі будуць:

$$1) \sum x = 0 \text{ і } 2) \sum y = 0.$$

Гэты два раўнанні лёгка скласці, ведаючы вуглы, якія ўтвараюцца сілай  $P_1$  і стрыжаннямі з гарызантальнай воссю  $x$ . З іх пры вядомай знешняй сіле  $P_1$  і двух усілляў стрыжанняў, можна вызначыць усілле астатніх двух стрыжанняў, якія сходзяцца ў даным вузле  $K$ . З гэтага можна вывесці наступны ход разліку фермы.

Пачынаем з вузла, у якім сходзяцца толькі 2 стрыжані (чарц. 169), напрыклад, з вузла  $A$ ; складаем умовы роўнавагі сіл:  $A$ ,  $O_1$  і  $U_1$  і вызначаем велічыні  $O_1$  і  $U_1$ . Затым, ведаючы, што дзеянне ўсіх стрыжняў велічынёю аднолькавае на абодва вузлы, якія злучае гэты стрыжань, і прамы супрацьлеглы кірункам, пераходзім да наступнага вузла, у якім засталіся два невядомыя ўсілі, а іменна да вузла  $N$ . На яго дзейнічае роўнадзейная  $P_1$  знешніх сіл, усілле ў стрыжані  $U_1$ , ужо вызначанае ў вузле  $A$  (але супрацьлеглага кірунку), і два невядомыя ўсілі  $d_1$  і  $U_2$ ,



якія і вызначаем з двух умоў роўнавагі для вузла  $N$ . Пераходзячы да наступнага вузла  $K$ , дзе вядомы  $P_1$ ,  $O_1$  і  $d_1$ , вызначаем  $O_2$  і  $d_2$ , і падобным-жа чынам вызначаем другія ўсілі.

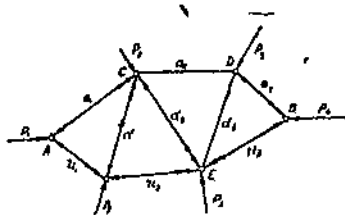
Пры графічным спосабе, які амаль выключае

і прыстасоўваецца на практыцы, умова роўнавагі для вузла  $K$  патрабуе, каб усе сілы:  $P_1$ ,  $O_1$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  і  $O_2$  складалі замкнуты многавугольнік (чарц. 171) з аднолькавым кірункам стрэлак. Гэты многавугольнік можна быць пабудаваны, калі з усілляў, прыложаных да вузла, ёсць не больш 2-х невядомых.

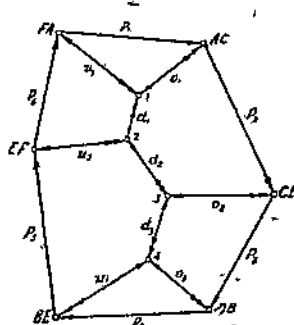
Чарц. 171.

Дапусцім, што вядомы (вызначаны раней) усілі  $O_1$  і  $d_1$ ; тады склаўшы вядомыя сілы  $P_1$ ,  $O_1$

і  $d_1$  у сілавым многавугольніку з аднолькавым кірункам стрэлак і правёўшы праз канечныя яго пункты  $A$  і  $E$  паралелі да невядомых усілляў  $O_2$  і  $d_2$ , атрымаем:  $EF = d_2$  і  $FA = O_2$ , прычым стрэлкі павінны быць у аднолькавым сэнсе з  $P_1$ ,  $O_1$  і  $d_1$ . Такім чынам, пры вядомых знешніх сілах можна пабудаваць многаву-



Чарц. 172.



гольнікі сіл для ўсіх вузлоў, пачынаючы з вузла, у якім сходзяцца толькі 2 элементы і, канчаючы тым, у якіх засталіся толькі два невядомыя ўсілі.

Разгледзім ферму  $ABCDEF$  (чарц. 172), у вузлах якой дзейнічаюць сілы:  $P_1$ ,  $P_2$ ..., якія становяць сабой роўнадзейную

знешніх сіл у гэтых вузлах. З тае прычыны, што ферма павінна знаходзіцца ў роўнавазе, то гэтым сілам адпавядае замкнуты многавугольнік, у якім гэтыя сілы размешчаны ў парадку вузлоў  $A, C, D, B...$  Вяршыні ж многавугольніка абазначаны літарамі тых прамых, якія ў плане фермы злучаюць пункты прылажэння сіл, што ў сілавым многавугольніку ўтвараюць даную вяршыню.

Пабудову пачынаем з вузла  $A$  і вызначаем усіллі  $O_1$  і  $U_1$  элементаў, якія сходяцца ў ім, для чаго правядзем паралельна ім праз кайцы  $AC$  і  $FA$  сілы  $P_1$  прамых  $AC$  і  $FA$ . Атрымаем трохвугольнік сіл, кірункі якіх адпавядаюць сіле  $P$  і ў трохвугольніку паказаны адзіночнымі стрэлкамі.

Адпаведныя стрэлкі ставім таксама ў плане фермы на стрыжаннях  $O_1$  і  $U_1$  каля вузла  $A$ . Атрыманыя з трохвугольніка сіл усіллі  $O_1 = AC \cdot 1$  і  $U_1 = FA \cdot 1$  дзейнічаюць і на вузлы  $C$  і  $F$  з той-жа, па велічыні, сілай, але супрацьлеглы накіраванай — у кірунку падвойных стрэлак. З кірункаў стрэлак ў стрыжаннях  $O_1$  і  $U_1$  (яны накіраваны ад сярэдзіны да вузлоў) відаць, што абодвы стрыжанні сціснуты.

Затым пераходзім да вузла  $F$ , у якім прыложаны вядомыя сілы  $P_6$  і  $U_1$  і шуканыя  $U_2$  і  $d_1$ . У сілавым многавугольніку  $P_6$  і  $U_1$  утвараюць перарывуную лінію сіл з аднолькавым кірункам стрэлак. Замыкаючы яе прамымі, праведзенымі праз вяршыню  $EF$  паралельна  $U_2$  і праз пункт 1 паралельна  $d_1$ , атрымаем многавугольнік сіл для вузла  $F$ , які даць усіллі  $U_2 = EF \cdot 2$  і  $d_1 = 1 \cdot 2$ , апошняе дзейнічае ў кірунку адзіночных стрэлак на вузел  $F$ .

Спыняючыся цяпер на вузле  $C$ , бачым, што сілы яго  $d_1$ ,  $O_1$  і  $P_1$  ужо вядомы і ў многавугольніку сіл складаюць перарывуную лінію сіл. Калі яе замкнуць прамымі, паралельнымі стрыжанням  $O_2$  і  $d_2$ , то вызначыцца велічыня і кірунак усілляў гэтых стрыжанняў. Пры гэтым прамая, паралельная  $O_2$  павінна быць праведзена праз вяршыню  $CD$ , а паралельная  $d_2$  праз пункт 2.

Пераходзячы такім чынам да апошняга вузла і знаходзячы ўсілле ўсіх стрыжанняў, атрымаем замкнутую фігуру, у якой ні адно ўсілле не паўтараецца. Гэтая фігура называецца *эпюрай ці дыяграмай Крэмона*.

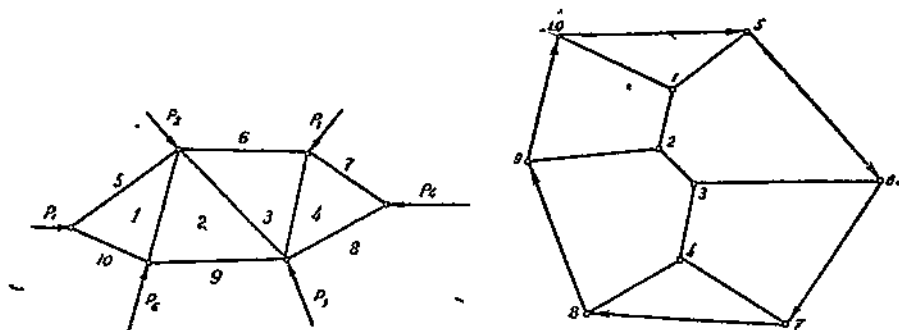
Для таго каб у дыяграме ўсілли не паўтараліся і для палёгкай пабудовы дыяграмы, карысна заўважыць наступныя суадносіны між чарцяжом фермы і дыяграмай:

1) Усілли элементаў  $O_1, O_2, ..., U_1, U_2, ...$ , якія складаюць абрысы фермы і ляжаць між сіламі  $P_1$  і  $P_2, P_2$  і  $P_3, ...$  на дыяграме, праходзяць праз вяршыні  $AC, CD, ...$  між тымі-ж знешнімі сіламі.

2) Усілли элементаў, якія складаюць у ферме трохвугольнікі, перасякаюцца па тры ў пунктах 1, 2, 3..., напрыклад, усіллі:  $d_1, d_2$  і  $U_2$ , якія складаюць трохвугольнік  $CEF$ , перасякаюцца ў пункце 2.

Амерыканскі інжынер Боу (*R. Bow*) прапанаваў больш просты і наглядны спосаб абазначэння дыяграмы ўсілляў. Паводле гэтага

способу на эскізе фермы кожная<sup>7</sup> паасобная прастора між часткамі фермы (замкнутая), а таксама і прастора між сіламі і часткамі фермы (незамкнутая), абазначаюцца асобна літарай ці цыфрай так, каб кожную сілу, ці кожную частку фермы можна было назваць двума літарамі, ці цыфрамі, якія гэтае сіла ці стрыжань раздзяляе, так, напр., сілу  $P_2$  можна абазначыць праз  $5/6$ , стрыжань  $O_1—5/1$ , стрыжань  $d_1—1/2$  і г. д. (чарц. 173). Калі-ж будзецца дыяграма ўсілляў, то кожную сілу і кожнае ўсілле абазначаюць з канцоў тымі-ж літарамі, ці цыфрамі, між якіх знаходзіцца на эскізе фермы даная сіла ці стрыжань.



Чарц. 173.

Пры вызначэнні ўсілляў спосабам Крэмона раіцца як у эскізе фермы, так і ў дыяграме ўсілляў праводзіць *даныя сілы чорнымі лініямі, расцягнутыя стрыжані—чырвонымі, а сціснутыя—сінімі*, велічыню-ж усілляў, вымераных у маштабе сіл, выпісваць на адпаведных стрыжаннях эскіза фермы.

Дыяграма Крэмона мае наступныя ўласцівасці:

- 1) лік бакоў дыяграмы роўны ліку знешніх сіл і ўсілляў;
- 2) кожнай лініі фермы (сіле ці стрыжаню) адпавядае паралельны ёй бок дыяграмы;
- 3) кожнаму вузлу фермы адпавядае замкнуты многавугольнік дыяграмы, бакі якога паралельны сілам і ўсіллям фермы, што сходяцца ў гэтым вузле;
- 4) лік вяршынь дыяграмы роўны ліку палёў фермы (лічачы палі ўнутраныя абмежаваныя і палі знешнія—бязмежныя).

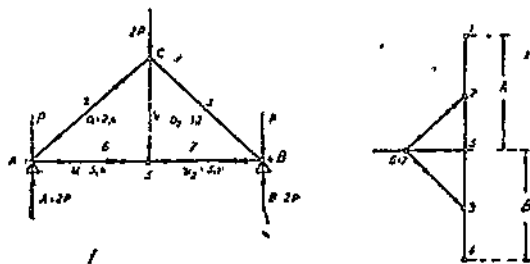
## § 63. Прыклады ўжывання спосабу Крэмона

Разгледзім некалькі прыкладаў ужывання дыяграмы Крэмона. Апошняй звычайна карыстаюцца пры разліку ферм у грамадзянскіх збудаваннях, дзе гэтыя фермы нясуць у большасці выпадкаў *нерухомую* нагрузку. Параўнальна рэдка дыяграмаю Крэмона карыстаюцца пры разліках маставых ферм.

### § 63-а. Приложение 1. Простая кроквенная ферма

Визначить усиллі ў стрижанях простай кроквеннай фермы з зацяжкой і бабкay (чарц. 174). Роўнамерна-размеркавальная нагрузка крышы перадаецца кожнай кроквеннай нагой пароўну па  $P$  на два суседнія вузлы; вузлы маюць нагрузку:  $A—P$ ;  $B—P$ ;  $D—2P$ . Апорныя рэакцыі:  $A=B=2P$ . Вертыкальны груз  $P$ , які перадаецца кроквеннай нагой  $AB$  вузлу  $A$ , непасрэдна ўспрымаецца апорай  $A$  і ўплыву на ўсілье ў стрижанях фермы не робіць. У звязку з гэ-

5.2. Для гэтага праз пункт 5 праводзім прамую 5.6 паралельна  $U_1$  і праз пункт 2 прамую 2.6 паралельна  $O_1$ ; з тае прычыны, што  $A-P=5.2$  дзейнічае



Чарц. 174.

анізу ўверх, то стрыжань  $O_1$  будзе спіснуты, а  $U_1$  расцягнута. З эскіза фермы відно, што ў вузле  $C$  усілле  $U_1$ , паказанае падвойнай стрэлкай, успрыймаецца непасрэдна стрыжанем  $U_2$  і стойцы  $V$  зусім не перадаецца, г. зн.  $U_2 = U_1$  і  $V = 0$ . Гэта-ж вынікае з дыяграмы ўсілляў: раскладаючы сілу  $U_1$ , роўную 5-6 на 2 сілы паралельныя  $U_2$  і  $V$ , мы павінны правесці 5-7 паралельна  $U_2$  праз 5 і 6-7 паралельна  $V$  праз 6. Але 5-7 супадае з 5-6, як паралельным прамой  $AB$ , а пункт 7 супадае з пунктам 6, як перасячэнне 5-7 з 6-7. Для вызначэння  $O_2$  пераходзім к вузлу  $D$  і сілы  $O_1$  і  $2P$  роўныя 6-2 і 2-3 раскладаем ў кірунках  $O_2$  і  $V$ , г. зн. праз 3 праводзім паралель да  $O_2$ . З тае прычыны, што пункт 7 супадае з пунктам 6, то і праведзеная праз пункт 3 паралель да  $O_2$  павінна прайсці праз гэты пункт. З чарцяжа відаць, што  $O_2 = O_1$ ,  $5-2 = 5-3 = P$  і  $5-7 = 5-6$ . Адсюль выводзім, што ў сіметрычных фермах з сіметрычнай нагрузкай усілле ў сіметрычных стрыжаннях роўны як велічыню, так і знакам. На гэтай падставе дастаткова пры разліку такіх ферм вызначаць усілле стрыжанняў да паловы фермы, уключаючы ў лік іх і агульны абодвум паловам стрыжань, напрыклад стойку  $V$ .

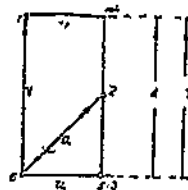
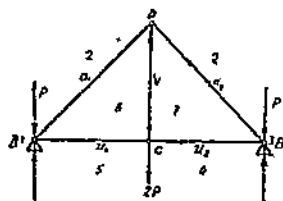
### § 64. Приклад 2. Простая кроквенная ферма з нагрузкай у ніжніх вузлах

Калі тая-ж ферма служыць маставой фермай, то нагружан будзе ніжні пояс, прычым вузлу А (чарц. 175) — перадаецца

сіла  $P$ , вузлу  $C$ —сіла  $2P$  і вузлу  $B$ —сіла  $P$ . Апорныя рэакцыі  $A=B=2P$ .

Замкнуць многавугольнік сіл у парадку вузлоў:  $A, D, B$  і  $C$  будуюцца наступным чынам: ад пункта 5 адкладваем уверх сілу  $A^{(5/1)}$  да пункта 1; ад пункта 1—уніз да пункта 2 сілу  $P^{(1/2)}$ , ад пункта 2—уніз да пункта 3, які супадае з пунктам 5, сілу  $P^{(2/3)}$ , ад пункта 3—уверх да пункта 4, які супадае з пунктам 1, сілу  $B^{(3/4)}$  і нарэшце ад пункта 4—уніз сілу  $2P$ , канец якой павінен супасці з пунктам 5.

Вызначэнне ўсілляў у стрыжаннях пачынаем з вузла  $A$ , бо груз  $P$ , які прыходзіцца на вузел  $A$ , успрымаецца непасрэдна апорай, то ў кірунках  $U_1$  і  $O_1$  раскладаем сілу  $A=P$ ,



Чарц. 175.

г. зн. 2.5, адкуль атрымваем:  $O_1 = -2.6$  і  $U_1 = +5.6$ . Падшыюшы да вузла  $C$ , раскладзем вядомыя нам сілы  $U_1$  і  $2P = (4/6)$ , якія дзейнічаюць на гэты вузел ( $2P$  зверху ўніз, і  $U_1$  у кірунку падвойнай стрэлкі) і ўтвараюць многавугольнік з аднолькавымі кірункам стрэлак,—на кірункі  $U_2$  і  $V_1$  знойдзем, што  $U_2 = +4.7 = +5.6 = U_1$  і  $V = +6.7 = +4.5 = 2P$ . Усілле стрыжання  $O_2$ , у выніку сіметрычнасці фермы і нагрузкі, роўна ўсіллу  $O_1$ .

Як гэта відаць з папярэдніх пабудов, грузы, якія прыходзяцца на вузлы непасрэдна на апорах, маюць значэнне толькі пры разліку апор, што непасрэдна іх успрымаюць і не маюць ніякага ўплыву на велічыні ўсілляў у стрыжаннях фермы, на якія ўплывае толькі частка апорнай рэакцыі  $A_1 = A - P$ , што становіць сабою апорнае супраціўленне грузаў, прыложаных да астатніх вузлоў фермы. У звязку з гэтым пры разліку ферм звычайна не прымаюцца пад увагу знешнія сілы, якія дзейнічаюць на апорныя вузлы, а вызначаюцца толькі часткі апорных рэакцый  $A_1$  і  $B_1$  ад грузаў, прыложаных у другіх вузлах фермы.

### § 65. Прыклад 3. Простая кроквенная ферма з нагрузкай абодвух паясоў

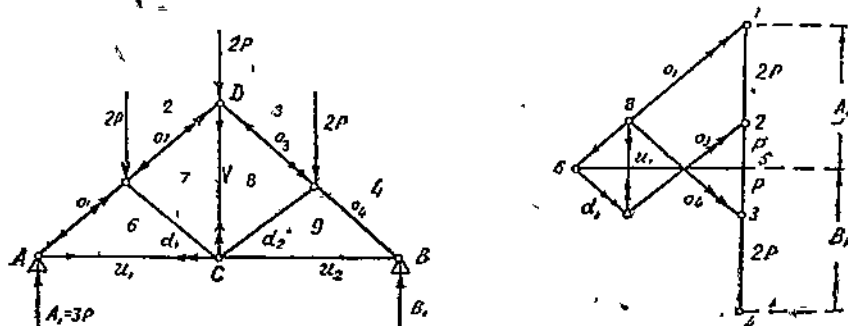
Вызначыць усіллі ў стрыжаннях фермы (чарц. 176) пры нагрузцы абодвух паясоў (напрыклад, верхні пояс нясе нагрузку даха, а ніжні пояс або зацяжка—нагрузку столі). Дапусцім вузел  $K$  нясе нагрузку  $2P_1$  ад вагі столі, а вузел  $D$ —нагрузку  $2P$  да вагі даха. Перш за ўсё вызначаем апорныя рэакцыі ад грузаў  $2P_1$  і  $2P$ :  $A_1 = B_1 = P + P_1$ . Затым будзем замкнуць сілавы многавугольнік, адкладваючы ад пункта 4 уверх сілу  $A_1$  да пункта 1,



## § 67. Приклад 5. Ферма з падкосамі і бабкай

Вызначыць усілі ў ферме з падкосамі і бабкай (чарц. 178).

Апорныя рэакцыі:  $A_1 = B_1 = 3P$ . Замкнуты многавугольнік сіл будзецца так: адкладваецца ад пункта 5 рэакцыя апоры  $A_1^{(5/1)}$  знізу ўверх да пункта 1, уніз да пункта 2—сіла  $2P^{(1/2)}$ , ад пункта 2 уніз да пункта 3—сіла  $2P^{(2/3)}$ ; ад пункта 3 уніз да пункта 4—сіла  $1P^{(3/4)}$  і нарэшце ад пункта 4 ўверх да пачатко-



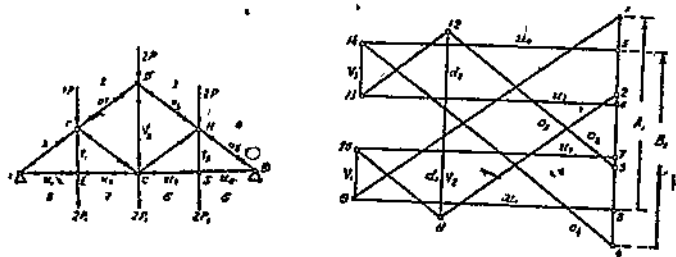
Чарц. 178.

вага пункта 5 рэакцыя апоры  $B_1$ . Вызначэнне ўсілляў пачынаецца з вузла A, у якім сходяцца толькі 2 стрыжні, прычым атрымоўваецца:

$$U_1 = U_2 = +5.6; O_1 = O_4 = -1.6; O_2 = O_3 = -2.7; \\ d_1 = d_2 = -6.7 \text{ і } V = +7.8.$$

## § 68. Приклад 6. Ферма трайная падвесная

Вызначыць усілі ў стрыжнях трайной падвеснай фермы (чарц. 179). Дапусцім, што ферма нясе ў вузлах F, D і H на-



Чарц. 179.

грузку даха вагою па  $2P$  на кожны вузел, а ў вузлах E, C і G вагу столі па  $2P$  на вузел. Рэакцыя апор:  $A_1 = B_1 = 3P + 3P_1$ .

Замкнуты многовугольник сіл будуюцца наступным чынам: ад пункта 8 адкладаецца ўверх да пункта 1 рэакцыя апоры  $A_1(8/1)$ , а ад пункта 1 уніз да пунктаў 2, 3 і 4—сілы  $2P(1/2)$ ,  $2P(2/3)$  і  $2P(3/4)$ , затым ад пункта 4 ўверх апорная рэакцыя  $B_1(4/5)$  да пункта 5, а ад яе ўніз да пунктаў 6, 7 і 8—сілы  $2P_1(5/6)$ ,  $2P_1(6/7)$  і  $2P_1(7/8)$ . Вызначэнне ўсіляў у стрыжнях пачынаем з вузла А, раскладаючы апорную рэакцыю  $A_1(8/1)$  на кірункі  $U_1$  і  $O_1$ , адкуль атрымліваем:  $U_1 = +8 \cdot 9$  і  $O_1 = -1 \cdot 9$ . Затым пераходзім да вузла Е і раскладаем  $2P_1(7/8)$  і  $U_1(8/9)$  на кірункі  $U_2$  і  $V_1$  і знаходзім:

$$U_2 = +7 \cdot 10 = U_1 \text{ і } V_1 = +9 \cdot 10 = 2P.$$

Пераходзячы паслядоўна да вузлоў:  $F$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $C_1$  і  $H$ , вызначаем усілі ў астатніх стрыжнях:  $O_2 = -2 \cdot 11$ ;  $d_1 = -10 \cdot 11$ ;  $O_3 = -3 \cdot 12$ ;  $V_2 = +11 \cdot 12$ ;  $U_3 = +6 \cdot 13$ ;  $d_2 = -12 \cdot 13$ ;  $U_4 = +5 \cdot 14$ ;  $V_3 = +13 \cdot 14$  і нарэшце  $O_4 = -4 \cdot 14$ .

## § 69. Прыклад 7. Ферма кроквенная нямецкая

Вызначыць усілі ў стрыжнях нямецкай кроквеннай фермы (чарц. 180).

Простая нямецкая ферма складаецца з 2 кроквенных ног  $AC$  і  $BC$ , раздзеленых напаям рыгелем  $DE$ . Сярэдзіна рыгеля  $F$  злучана стрыжнямі з вяршыняй  $C$  і апорамі  $A$  і  $B$ . Нагрузка вузлоў  $D$ ,  $C$  і  $E$  складаецца з груза  $2P$ . Рэакцыі апор:  $A_1 = B_1 = 3P$ . Замкнуты многовугольник сіл будуюцца па чарзе вузлаў:  $A$ ,  $D$ ,  $C$  і  $B$  ад пункта 5 да пункта 1, 2, 3, 4 і 5. Вызначэнне ўсіляў пачынаем з вузла  $A$  і затым пераходзім да вузлоў:  $D$ ,  $C$ ,  $F$  і  $E$ . Пры гэтым атрымліваем:

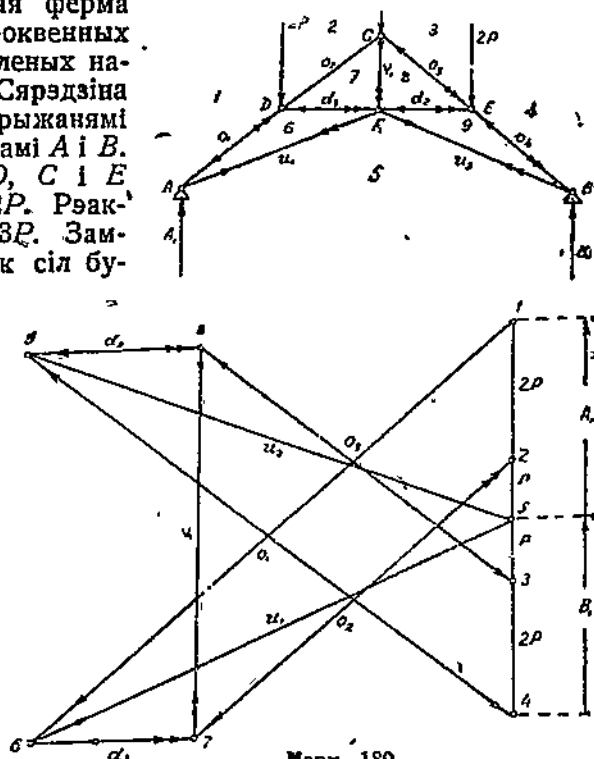
$$U_1 = +5 \cdot 6;$$

$$O_1 = -1 \cdot 6;$$

$$O_2 = -2 \cdot 7;$$

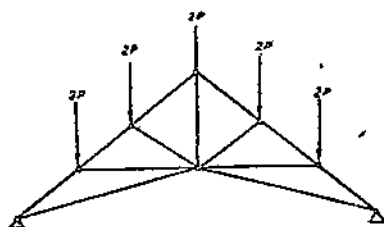
$$d_1 = -6 \cdot 7;$$

$$V = +7 \cdot 8.$$

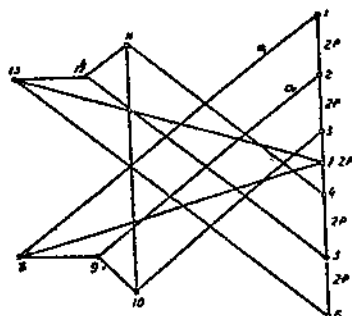


Чарц. 180.

Зад ача. Визначиць усілі ў стрыжаннях нямецкай кроквеннай фермы (чарц. 181).



Чарц. 181.

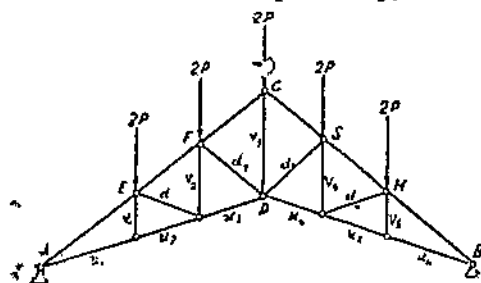


Чарц. 182.

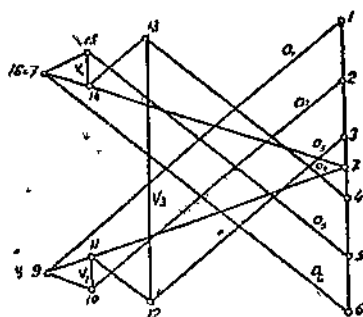
## § 70. Прыклад 8. Ферма кроквенная англійская

Визначиць усілі ў стрыжаннях англійскай кроквеннай фермы (чарц. 183).

Англійская кроквенная ферма складаецца з вертыкальных стоек і нахіленых раскосаў, якія злучаюць яе паясы, прычым

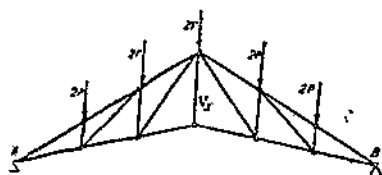


Чарц. 183.



раскосы могуць апускацца да сярэдзіны фермы (чарц. 183) і ў гэтым выпадку быць сціснутымі, а стойкі расцягнутымі або

раскосы могуць падымцца да сярэдзіны фермы (чарц. 134) і тады на іх дзейнічаюць усілі расцяжэння, а на стойкі — сціскання. Апошнія для фермы больш выгадна ў тых адносінах, што сціснутымі з'яўляюцца больш кароткія стрыжані, у выніку чаго небяспека прадоўжнага выгібу меншая і стрыжані могуць мець меншае сцяжэнне. Усілі ў сумежных з апорамі стойках роўны нулю. Ніжні пояс, як і ва ўсіх фермах, расцягнуты,



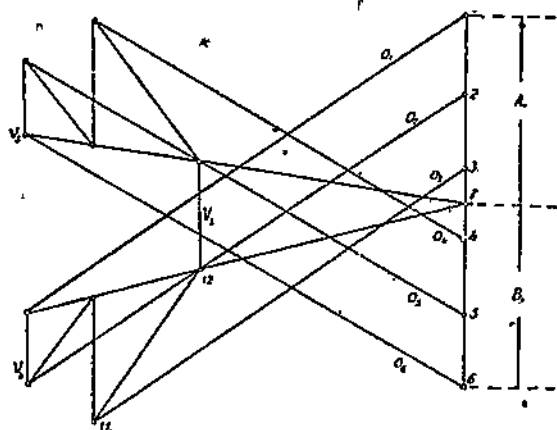
Чарц. 184.

жэтым выпадку быць сціснутымі, а стойкі расцягнутымі або раскосы могуць падымцца да сярэдзіны фермы (чарц. 134) і тады на іх дзейнічаюць усілі расцяжэння, а на стойкі — сціскання. Апошнія для фермы больш выгадна ў тых адносінах, што сціснутымі з'яўляюцца больш кароткія стрыжані, у выніку чаго небяспека прадоўжнага выгібу меншая і стрыжані могуць мець меншае сцяжэнне. Усілі ў сумежных з апорамі стойках роўны нулю. Ніжні пояс, як і ва ўсіх фермах, расцягнуты,

-а верхні—спіснуты. Ніжні пояс можа мець або прамую форму або пункт  $D$  можа быць прыпадмыты. Пункт  $B$  можа быць апушчан ніжэй прамой  $AB$ , у апошнім выпадку трываласць фермы павялічваецца, але яна становіцца цяжкаважчай і мае непрыгожы выгляд.

**Задача.** Вызначыць усілі ў стрыжаннях англійскай кроквеннай фермы (чарц. 184) з раскосамі, якія падымаюцца да сярэдзіны фермы.

**Рашэнне** дана на чарц. 185.

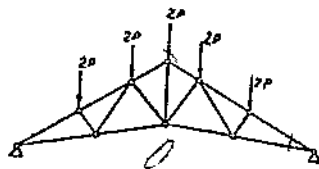


Чарц. 185.

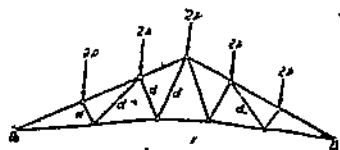
## § 71. Бельгійская кроквенная ферма

**Задача.** Вызначыць усілі ў стрыжаннях бельгійскай кроквеннай фермы (чарц. 186).

**Заўвага.** У гэтай сістэме няма вертыкальных стоек, а рашотка ўтворана двума сістэмамі раскосаў, з якіх адна сістэма  $d$  (чарц. 187) перпендыкулярна да стрыжанняў верхняга пояса ў



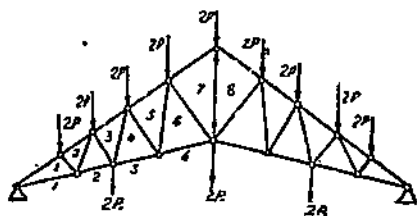
Чарц. 186.



Чарц. 187.

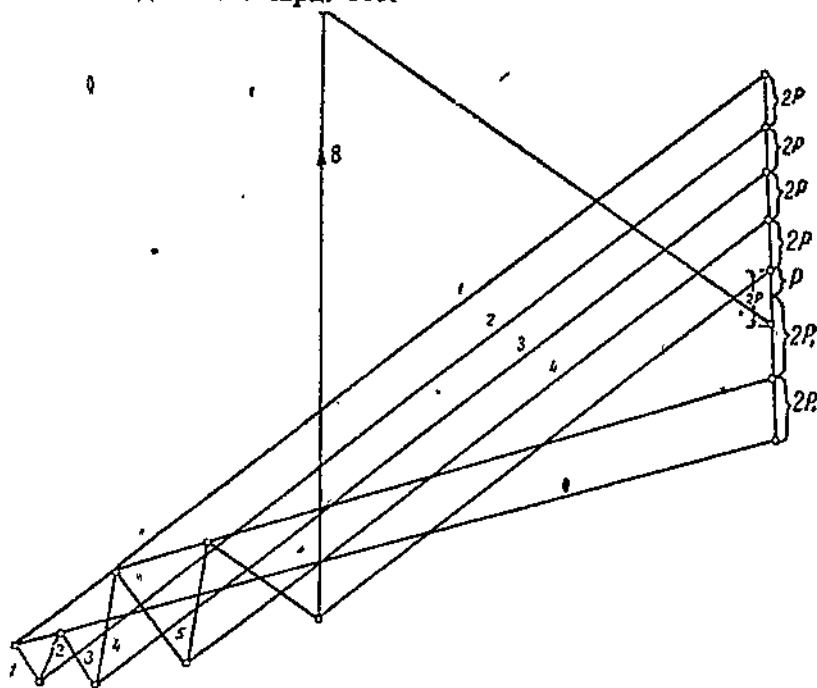
пунктах падзелу іх на панелі, а другая сістэма раскосаў  $d_1$  служыць для ўтварэння рашоткі. Разлік вядзецца аналагічна разліку англійскіх кроквенных ферм.

**Задача.** Вызначыць усілі ў стрыжаннях бельгійскай кроквеннай фермы (чарц. 187).



Чарц. 187.

**Задача.** Вызначыць усілі ў стрыжаннях бельгійскай фермы пры вертыкальнай нагрузцы згодна чарц. 188. Рашэнне дана на чарц. 189.



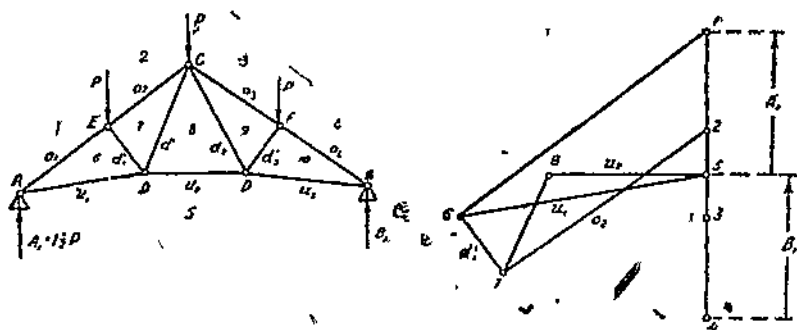
Чарц. 189.

### § 71-а. Прыклад 9. Ферма сістэмы Полонсо

Вызначыць усілі ў стрыжаннях французскай фермы сістэмы Полонсо.

У фермы сістэмы Полонсо дзве часткі верхняга пояса (чарц. 190) у найпрасцейшым выпадку падзелены кожная пер-

пендыкулярным да яе падкосам і ніжнія канечныя пункты гэтых падкосаў злучаны стрыжаннямі між сабой, з апорамі і вяршыняй. Ніжні пояс можа мець прыпаднутую сярэдзіну, утвараючы ў вузлах пераломы, або ён бывае на ўсім працягу паміж апорамі прамалінейным.

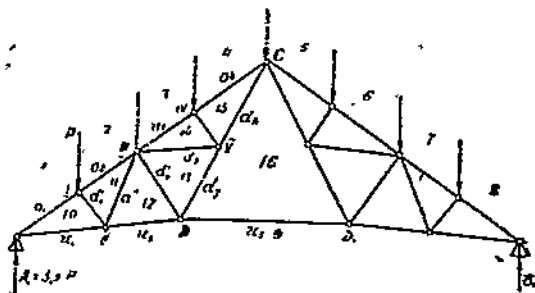


Чарц. 190.

З дыяграмы відаць, што верхні пояс і падкосы  $d_1'$  і  $d_2'$  сціснуты, а ніжні пояс і раёкосы  $d_1$ ,  $d_2$  расцягнуты.

**Прыклад 10.** Вызначыць усілі ў стрыжаннях фермы Полонсо з адволькавай нагрузкай верхніх вузлоў (чарц. 191).

Рашэнне: сіла  $A_1(9 \cdot 1)$ , якая дзейнічае ў вузле А, раскладаецца (чарц. 191 і 192) на  $U_1 = +9 \cdot 10$  і  $O_1 = -1 \cdot 10$ . У вузле І раскладаецца  $O_1$  і  $P$  на  $O_2 = -2 \cdot 11$  і  $d_1' = -10 \cdot 11$ . У вузле ІІ



Чарц. 191.

раскладаюцца ўжо вызначаныя ўсілі  $U_1$  і  $d_1'$  на ўсілі ў кірунку стрыжняў  $U_2$  і  $d_2$ , прычым  $U_2 = +9 \cdot 12$  і  $d_2 = +11 \cdot 12$ . У вузле ІІІ вядомы тры сілы:  $d_1$ ,  $O_2$  і  $P$  і невядомы таксама тры:  $d_2'$ ,  $d_3$  і  $O_3$ , якія можна вызначыць толькі дзякуючы таму, што ўсілі  $d_1$  і  $d_2$  роўны. Сапраўды, раскладаючы знешнюю сілу  $P$ , прыложаную ў вузле ІІІ (чарц. 193), на  $P \cdot \sin \alpha$ , паралельную  $O$  і на  $P \cdot \cos \alpha$ , перпендыкулярную  $O$ , мы бачым, што сіла  $P \cdot \sin \alpha$  можа

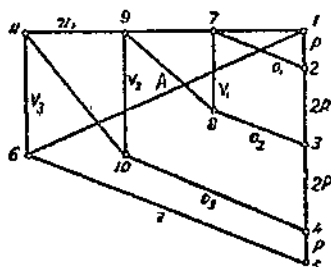
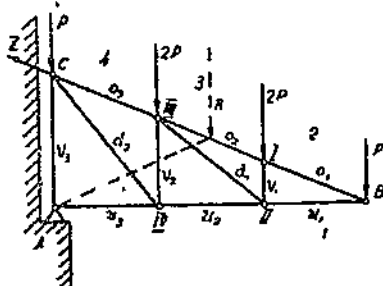


## ВЫЗНАЧЕННЕ ЎСІЛЛЯЎ У СТРЫЖАННЯХ НАВЕСАЎ

### § 72. Прыклад 1. Навес, які свабодна высіць

Няхай трэба вызначыць усілі ў стрыжаннях навеса, які свабодна высіць, г. зн. замацованы толькі да самага збудавання ў 2 пунктах (чарц. 194).

Няхай  $Z$  з'яўляецца працягам верхняга пояса; у такім выпадку апорныя рэакцыі  $A$  і  $Z$  вызначаюцца з тае ўмовы, што



Чарц. 194.

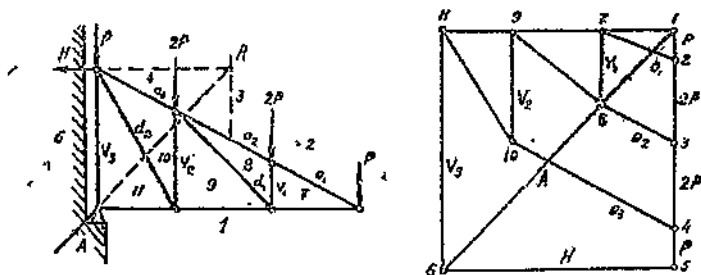
для роўнавагі яны павінны перасякацца ў адным пункце  $S$  з роўнадзейнай  $R$  знешніх сіл. Велічыні  $A$  і  $Z$  вызначаюцца шляхам правядзення ў дыяграме ўсілляў праз пункты 1 і 5 паралелей да  $A$  і  $Z$ , прычым атрымоўваюцца:  $A=6 \cdot 1$  і  $Z=5 \cdot 6$ .

Вызначэнне ўсілляў у стрыжаннях пачынаюць з вузла  $B$ , у якім выходзяцца два стрыжані  $O_1$  і  $U_1$ , затым пераходзяць да вузлаў I, II, III, IV і  $C$ , або пачынаюць з вузла  $A$ , прычым  $A=6 \cdot 11$  раскладаецца на  $U_1=-1 \cdot 11$  і  $V_1=-6 \cdot 11$ , а затым пераходзяць да вузлаў:  $C$ , IV, III, II і I.

### § 73. Прыклад 2. Навес, замацаваны гарызантальна

Вызначыць усілі ў стрыжаннях навеса, замацаванага гарызантальна (чарц. 195). Пункт перасячэння  $S$  рэакцыі апоры  $A$  з роўнадзейнай  $R$  знешніх сіл ляжыць на працягу  $H$  па гарызанталі.

Величини  $A$  і  $H$  знаходяться праз розкладання  $R$  у кірунках  $A$  і  $H$ , причым атрымоўваецца:  $A=6.1$  і  $H=5.6$ . Усілі ў стрыжнях вызначаюцца па папярэдняму.

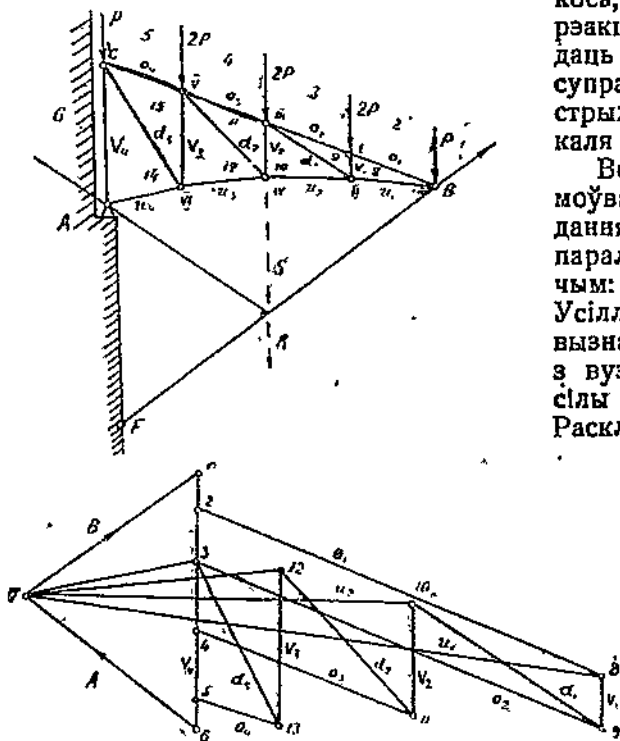


Чарц. 195.

## § 74. Прыклад 3. Навес з падкосамі

Вызначыць ўсілі ў стрыжнях навеса з падкосамі (чарц. 196). Пункт  $S$  перасячэння  $A$  з роўнадзейнай  $R$  знешніх сіл будзе супадаць з пунктам перасячэння апошняй з кірункам восі падкоса, бо кірунак апорнай рэакцыі  $B$  павінен супадаць з воссю  $FB$  (бо ў супраціўным выпадку стрыжняў  $FB$  павернецца каля шарніра  $F$ ).

Велічыні  $A$  і  $B$  атрымоўваюцца пасля раскладання  $R=1.6$  у кірунку, паралельным  $A$  і  $B$ , прычым:  $A=6.7$  і  $B=7.1$ . Усілі ў стрыжнях вызначаем, пачынаючы з вузла  $B$ , дзе вядомы сілы  $B=7.1$  і  $P=1.2$ . Раскладаем іх у кірунках  $U_1$  і  $O_2$ , правёўшы праз пункт 2 паралель да  $O_1$  ( $2/3$ ); тады атрымаем:  $U_1=+7.8$  і  $O_1=-2.8$ , затым пераходзім паслядоўна да вузлоў 1, II... IV і вызначаем усе ўсілі стрыжняў.

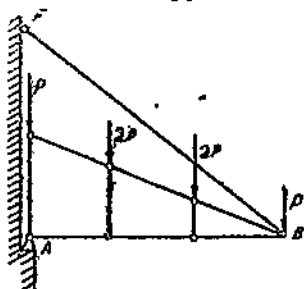


Чарц. 196.

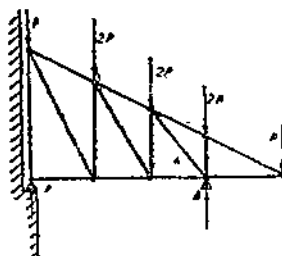
## § 75. Задачы

**Задача.** Вызначыць усіллі ў стрыжаннях падкоса з адцяжкай (чарц. 197).

**Заўвага.** Апорная рэакцыя накіравана па  $BF$  і апорная рэакцыя  $A$  перасякаецца з ёю ў пункце  $S$ —перасячэння роўнадзейнай знешніх сіл з кірункам  $BF$ .



Чарц. 197.



Чарц. 198.

**Задача.** Вызначыць усіллі ў стрыжаннях падкоса, які падтрымліваецца слупом (чарц. 198).

**Заўвага.** Неабходна пры дапамозе сілавога многавугольніка для адвольнага полюса пабудаваць вярочны многавугольнік, правесці замыкающую і паралель ёй праз полюс  $O$  для вызначэння апорных рэакцый  $A$  і  $B$ .

## ЦІСК ВЕТРУ І СНЕГУ

## § 76. Ціск ветру

Для сярэдняй паласы Саюза прымаецца, што ціск ветру на 1 кв. м роўніцы, нармальнай да кірунку яго дзеяння  $v = 180$  кг. Вугал, пад якім дзейнічае вецер у адносінах да гарызонту, складае каля  $10^\circ$ , такім чынам між кірункам ветру і скатам даха вугал  $\alpha + 10^\circ$  (чарц. 199).

Правёўшы лінію  $AC$  нармальна да кірунку дзеяння ветру 1, разглядаючы частку пакрыцця  $AB$  (калі даўжыню даха, перпендыкулярную да роўніцы чарцяжа, прыняць роўнай 1 метру), убачым, што яе цісне прызма ветру з папярочным сячэннем

$$AC = AB \cdot \sin(\alpha + 10^\circ).$$

Ціск-жа ветру на плошчу  $AB$  будзе:

$$V = v \cdot AC = v \cdot AB \cdot \sin(\alpha + 10^\circ).$$

Сілу  $V$  раскладзем на дзве складаючыя, з якіх адна  $W$  нармальна да роўніцы даха, а другая  $T$  паралельна ёй; апошняю можна не браць пад увагу, бо вугал церця ветру аб дах вельмі блізкі 0.

Такім чынам застаецца толькі сіла, нармальная да роўніцы даха:

$$W = V \cdot \sin(\alpha + 10^\circ) = v \cdot AB \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ),$$

якую трэба прынімаць пры разліку. Нармальная складаючая ціску ветру, якая прыпадае на кожны кв. метр плошчы скату:

$$w = \frac{W}{AB} = v \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ).$$

Калі даўжыню панелі па скату абазначыць праз  $a$ , адлегласць між фермамі (чарц. 200) праз  $b$ , то на кожны вузел фермы прыпадзе ціск ветру:

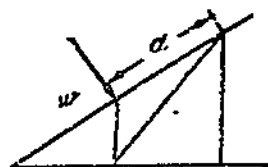
$$W = a \cdot b \cdot w = a \cdot b \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ).$$

Паводле апошніх норм вугал  $\beta$  між кірункам ветру і гарызонтам прымаецца роўным  $3^\circ$ , а паводле норм КМГІ (Кіраўніцтва маскоўскага губерскага інжынера) роўным нулю. Паводле навіейшых даных нармальна складаючая ціску ветру прымаецца прама-прапарцыянальнай першай ступені  $\sin(\alpha + \beta)$ , а не яго квадрата, г. зн.:

$$W = V \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Пры  $\beta = 0$ :

$$W = V \cdot \sin \alpha,$$



Чарц. 200.

дзе  $V = 80 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} - 150 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$  у залежнасці ад вышыні будынка і размяшчэння яго ў адносінах да іншых пабудов.

Пагодле норм Дзяржплана ціск ветру накіраван нармальна да паверхні. Інтэнсіўнасць гэтага ціску вылічаецца паводле эмпірычнай формулы:

$$p = p_0 \cdot (1 + 0,01 h) \cdot \sin \alpha,$$

дзе  $p_0$  ёсць эмпірычная велічыня, якая бярэцца з табліцы;  $h$ —вышыня ў метрах цэнтра пляжару пляцоўкі, на якую вецер робіць ціск, над гарызонтам мясцовасці;  $\alpha$ —вугал паміж пляцоўкай і кірункам ветру, які прымаецца за паралельны да гарызонту.

ТАБЛІЦА  
для вызначэння велічыні  $p_0$

| Месца знаходжання пабудовы       | Г р а д а ц ы я |     |    |
|----------------------------------|-----------------|-----|----|
|                                  | а               | б   | в  |
| У раўніннай мясцовасці . . . . . | 100             | 80  | 60 |
| У гарадах . . . . .              | 125             | 100 | 75 |
| На морскім пабярэжжы . . . . .   | 150             | 120 | 90 |

## § 77. Ціск снегу

Вага снегу прымаецца, згодна норм КМГІ на 1 кв. метр гарызантальнай праекцыі:

|                                                    |        |
|----------------------------------------------------|--------|
| пры вугле нахілу ад $0^\circ - 10^\circ$ . . . . . | 120 кг |
| „ „ „ „ „ $15^\circ$ . . . . .                     | 110 „  |
| „ „ „ „ „ $20^\circ$ . . . . .                     | 100 „  |
| „ „ „ „ „ $25^\circ$ . . . . .                     | 90 „   |
| „ „ „ „ „ $30^\circ$ . . . . .                     | 80 „   |
| „ „ „ „ „ $35^\circ$ . . . . .                     | 60 „   |
| „ „ „ „ „ $40^\circ$ . . . . .                     | 40 „   |
| „ „ „ „ „ $45^\circ$ . . . . .                     | 20 „   |

При нахилі даха звичайно  $45^\circ$  нагрузка ад снегу ў разлік не прымаецца. Для прамажных значэнняў вугла вытвараецца інтэрналяцыя. Дапускаецца, што пры адсутнасці ветру снег загружае абодва скаты. Калі-ж ёсць і ціск ветру, то прымаюць загрузжаны снегам толькі адзін скат. Пры разліку ферм дзеянне нагрузак звычайна прымаюць у наступных трох камбінацыях:

- 1) дзеянне пастаяннай нагрузкі і поўнага снегу
- 2) " " " " і поўнага ветру
- 3) " " " " і сумеснага дзеяння 75 проц. нагрузкі поўнага снегу і ветру, прычым дапускаецца, што снег можа знаходзіцца на адным ці абодвух скатах даха.

Разлік для кожнага выпадку можна рабіць двума спосабамі:

- 1) Адначасова на ўсе складнікі, прычым вызначаюцца роўнадейныя ўсіх знешніх сіл, якія дзейнічаюць у адзін і той-жа час на кожны вузел. З гэтых роўнадейных будуюцца сілавы мнагавугольнік, які замыкаецца апорнымі рэакцыямі, і адпаведным

раскладаннем сіл вызначаюцца ўсілі стрыжанняў.

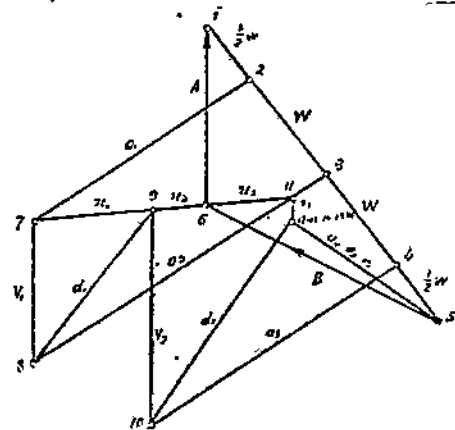
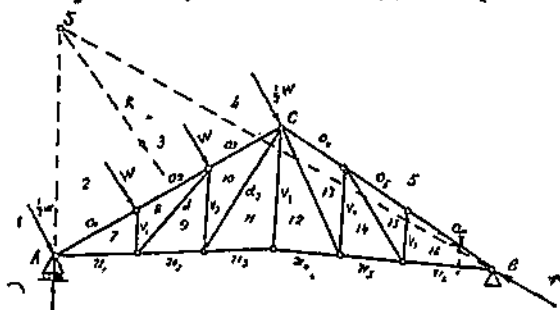
- 2) Усілі ў стрыжаннях вызначаюцца ад кожнага складніка паасобку і потым складваюцца ў агульныя ўсілі.

Вызначэнне ўсіляў ад вертыкальнай нагрузкі ўжо разглядавана вышэй, а таму застаецца разгледзець вызначэнне ўсіляў ад ціску ветру, а таксама ад аднабаковага ціску снегу.

## § 78. Вызначэнне ўсіляў ад ціску ветру

Дапусцім ёсць англійская кроквенная ферма (чарц. 201). Вызначым ўсілле ў стрыжаннях фермы выключна ад ціску ветру з левага боку.

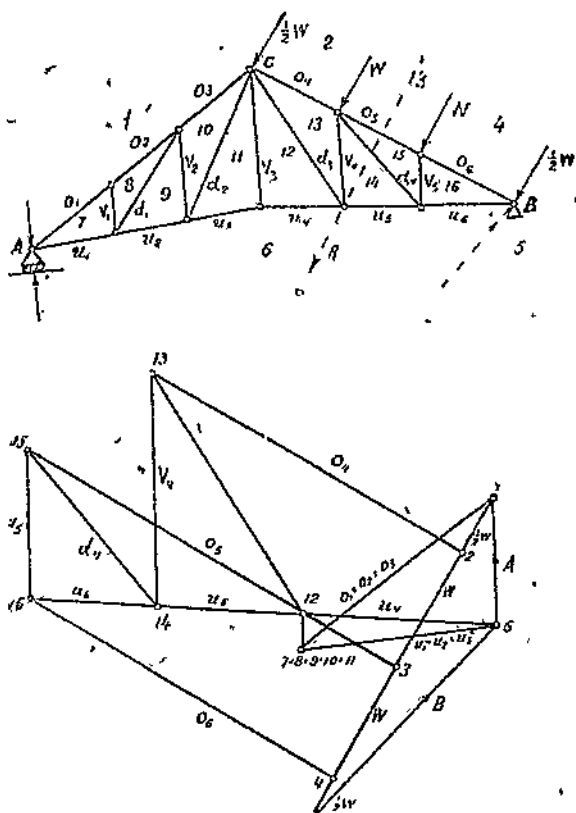
Няхай на вузлы I' і III дзейнічае нармальны да паверхні даха ціск  $W$ , тады на вузлы A і C будзе дзейнічаць ціск  $\frac{1}{2} W$ . Дапусцім, апора A пабудавана.



Чарц. 201.

з шарнірам і катками, апора  $B$ —з шарнірам. Тады  $A$  праходзіць праз шарнір перпендыкулярна да роўніцы апоры; рэакцыя-ж апоры  $B$  праходзіць праз пункт перасячэння  $S$  апорнай рэакцыі  $A$  з роўнадзейнай  $R$  і шарнір  $B$ . Велічыня і кірунак рэакцыі  $A$  і  $B$  вызначыцца з сілавага многавугольніка, калі праз пункт  $I$  правесці паралель да  $A$ , а праз пункт  $5$ —паралель да  $B$ . Пасля вызначэння рэакцый знаходзім усіллі ў стрыжнях:

$$\begin{aligned} u_1 &= +6.7; & o_1 &= -2.7; & v_1 &= -7.8; & d_1 &= +8.9; & u_2 &= +6.9; \\ u_3 &= 6.11; & u_4 &= -6.12; & u_5 &= -6.14 = -6.12; & u_6 &= -6.16 = \\ &= -6.12; & o_2 &= -3.8; & o_3 &= 4.10; & o_4 &= -5.13; & o_5 &= -5.15 = \\ &= -5.13; & o_6 &= -5.16 = -5.13; & v_2 &= -9.10; & v_3 &= -11.12; \\ v_4 &= 0 (13.14); & v_5 &= 0 (15.16); & d_2 &= +10.11; & d_3 &= 0 (12.13); \\ d_4 &= 0' (14.15). \end{aligned}$$



Чарц. 202.

Калі вецер дзейнічае з правага боку, г. зн. з боку апоры без каткоў, то рэакцыі апор і ўсілляў вызначаюцца згодна чарц. 202.

Велічыні ўсілляў:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = +6.11; \quad o_1 = o_2 = o_3 = -1.11; \quad u_4 = +6.11; \\ u_5 = +6.11; \quad u_6 = +6.12; \quad u_7 = +6.14; \quad u_8 = +6.16; \quad o_4 = -1.11; \\ o_5 = -1.11; \quad o_6 = -2.13; \quad o_7 = -3.15; \quad o_8 = -4.14; \quad v_1 = o = v_2; \\ v_3 = +11.12; \quad v_4 = -13.14; \quad v_5 = -15.16; \quad d_1 = d_2 = o; \\ d_3 = +12.13; \quad d_4 = +14.15. \end{aligned}$$

## § 79. Аднабаковы ціск снегу

Пры аднабаковым ціску снегу нагрузка фермы несіметрычна і таму ўсілли ў сіметрычных стрыжанях не роўны між сабою, у звязку з чым дыяграму ўсілляў трэба пабудавать для ўсёй

фермы. Дзякуючы таму, што нагрузка вертыкальна, то і апорныя рэакцыі вертыкальны, але яны не будуць у гэтым выпадку роўны.

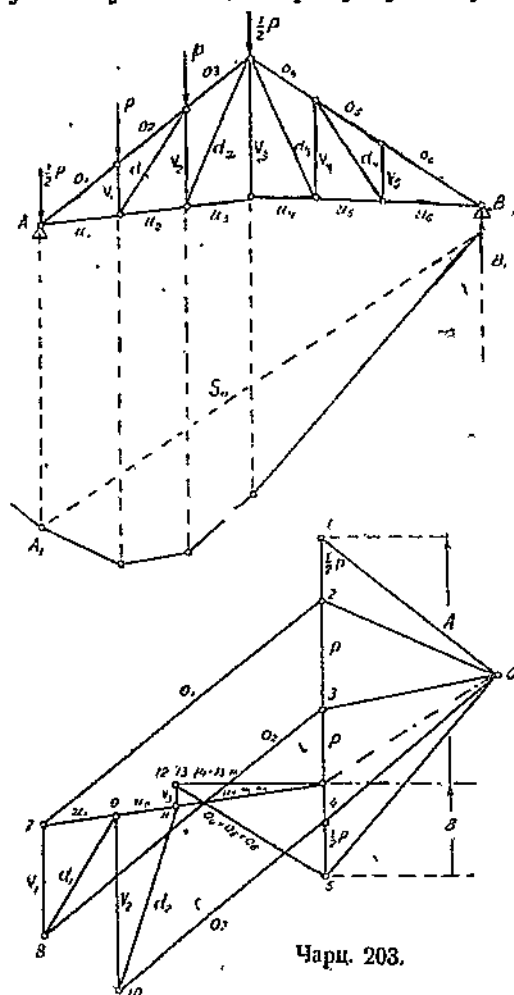
Апорныя рэакцыі вызначаюцца пабудовай вярвочнага многавугольніка (чарц. 203) для адвольнага полюса  $o$  і правядзеннем променя 0-6, паралельнага замыкаючай  $S_0$  вярвочнага многавугольніка.

З гэтай пабудовы атрымоўваем

$$A = 6.1 \text{ і } B = 5.6.$$

Усілли ў стрыжанях вызначаюцца паводле агульнага метаду, пачынаючы з вузла  $A$ .

Калі знойдзены ўсілли стрыжняў ад уласнай вагі, пастаяннай нагрузкі, ціску ветру і снегу, то для атрымання *max* і *min* ўсілляў ў кожным стрыжані складаюць усілли ў гэтых стрыжанях ад розных нагрузак.



Чарц. 203.

## § 80. Складаная нагрузка

Калі разлік вытвараецца адначасова на ўсе ціскі, то перш за ўсё трэба вызначыць роўнадзейную  $R$  усіх сіл, якія дзейнічаюць на кожны вузел. Гэта можна зрабіць у неперарыўным многавугольніку сіл. Знайшоўшы пры дапамозе вярочачнага многавугольніка агульную роўнадзейную  $R_0$  сіл, якія дзейнічаюць на вузлы і пункты прыляжэння яе, знаходзім перасячэнне  $S$  гэтай роўнадзейнай  $R_0$  з апорнай вертыкаллю  $A$ ; гэтым вызначыцца апорная рэакцыя  $B$ , якая будзе роўна  $BS$ .

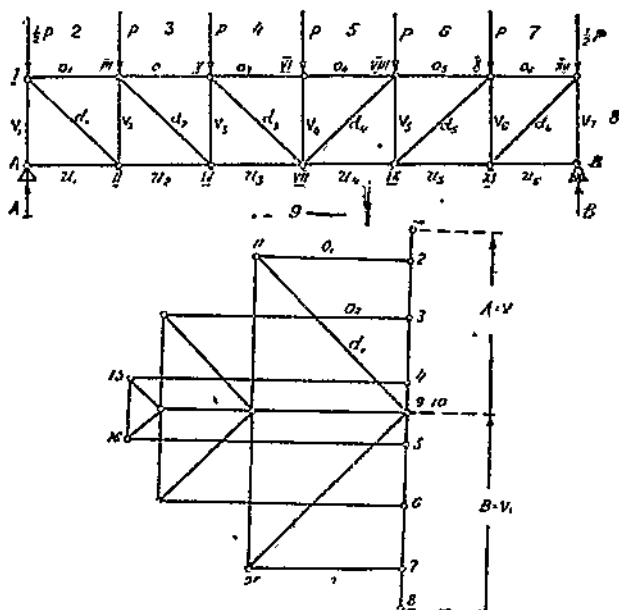
Практыкаванне. Вызначыць рэакцыі апор і ўсіхлі ў стрыжках фермы (чарц. 203), робячы разлік адначасова на ўсе нагрузкі: вертыкальную пастаянную  $P$ , вертыкальную ад снегу  $P_1$  і ціск ад ветру  $W$ .

# МАСТАВЫЯ ФЕРМЫ—СПОСАБ КРЭМОНА

Усілі ў стрыжаннях маставых ферм ад сталай нагрузкі вызначаюцца аналагічна таму, як і ў кроквенных фермах.

## § 81. Прыклад I. Ферма з паралельнымі паясамі і нагружанымі верхнімі вузламі (чарц. 204).

Няхай дана роўнамерная нагрузка і кожны вузел нясе нагрузку  $P$ ; тады крайнія вузлы нясуць  $\frac{1}{2}P$ . Апорныя рэакцыі:  $A = B = \frac{6P}{2} = 3P$ . Вызначэнне ўсіляў у стрыжаннях фермы пасля па-



Чарц. 204.

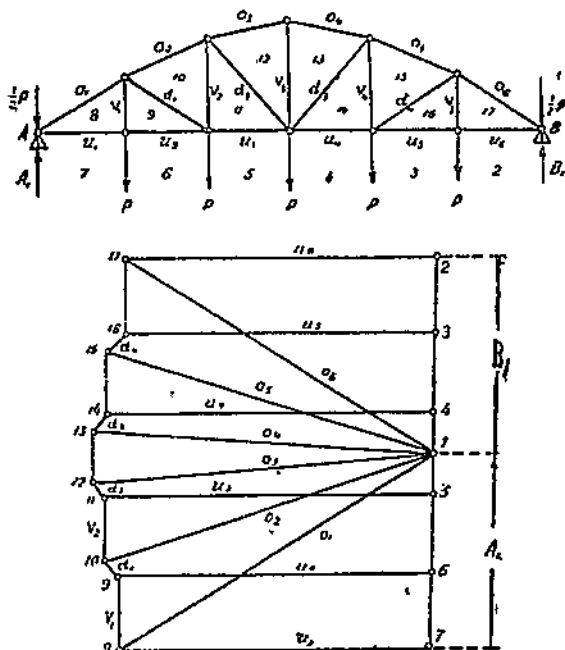
будовы замкнутага сілавога многавугольніка  $9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ , пачынаем з вузла  $A$ , раскладаючы сілу  $A^{(9)}_1$  на  $u_1$  і  $v_1$ , для чаго неабходна праз пункт 9 правесці паралель да  $u_1$ , а праз пункт 1—паралель да  $v_1$ . З тае прычыны, што кірунак  $v_1$ , супа-

дає з  $A$ , то паралель да  $v_1$ , праведзена праз пункт 1, супадає з 1-9 і перасячэнне яе 10 з паралеллю да  $u_1$ , праведзенай праз пункт 9, супадає з гэтым пунктам, г. зн.  $u_1 = 9 \cdot 10 = 0$ , а  $v_1 = -A = -9 \cdot 1$ . Потым пераходзім да вузла 1 і сілы  $v_1$  і  $\frac{1}{2}P$ , складзеныя ў многавугольнік 10-1-2, раскладаем на:  $d_1 = +10 \cdot 11$  і  $o_1 = -2 \cdot 11$ .

Перайшоўшы затым да вузла II, знаходзім  $u_2 = +9 \cdot 12$  і  $v_2 = +11 \cdot 12$  і г. д.

Наогул маем: стрыжаны верхняга пояса сціснуты, стрыжаны ніжняга—расцягнуты, стойкі сціснуты, раскосы расцягнуты.

## § 82. Прыклад II. Парабалічная ферма з нагружанымі ніжнімі вузламі (чарц. 205)



Чарц. 205.

Грузы, якія прыпадаюць на апорныя вузлы  $A$  і  $B$ , успрымаюцца непасрэдна апорамі і ўплыву на ўсілі ў стрыжаннях не робяць і таму іх уразлік не прымаем.

Тады

$$A_1 = B_1 = \frac{\Sigma P}{2} = 2 \frac{1}{2} P.$$

Замкнуты сілавы многавугольнік будоўем, адкладаючы ад пункта 7 да пункта 1 сілу  $A_1$  ( $\frac{1}{2}P$ ) і ад пункта 1 да пункта 2 — сілу  $B_1$  ( $\frac{1}{2}P$ ), а затым ад пункта 2 да пунктаў 3, 4, 5, 6 і 7—сілы  $P$ .

Пабудову, як і раней, пачынаем з вузла  $A$  і атрымोўваем замкнутую дыяграму ўсілляў 1-2...17. Пры гэтым верхні пояс сціснут, а ніжні—расцягнуты, стойкі—расцягнуты, а раскосы—сціснуты.

### § 83. Межы прыстасавання метаду Максвела-Крэмона

Неабходна адзначыць, што пабудова дыяграмы Максвела-Крэмона магчыма не для ўсякіх ферм, а толькі для такіх, у якіх лік вяршынь фігуры  $m$ , лік ліній у ёй  $n$  і лік граняў  $p$  задавальняюць умове:

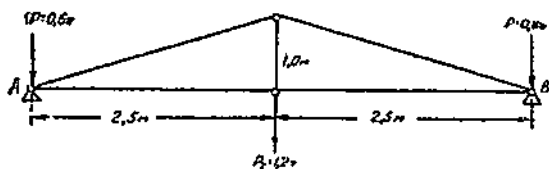
$$m + p = n + 2, \quad (52)$$

згодна тэарэмы Эйлера адносна ўсякага замкнутага многавугольніка.

Далей, не заўсёды ўказанія правілы прыводзяць да мэты. У самай справе, умовы роўнавагі ўсякага вузла патрабуюць, каб ўсе сілы, прыложаныя ў вузле, складалі замкнуты многавугольнік сіл з аднолькавым кірункам стрэлак; гэты многавугольнік можа быць пабудаваны; калі з усілляў, прыложаных да вузла, ёсць не больш двух невядомых. У ферме, напрыклад, Полонсо (чарц. 191) у некаторых вузлах сустракаецца больш двух невядомых усілляў, для вызначэння якіх у агульным выпадку, патрэбна дапасаванне дадатковых спосабаў Кульмана або Рытэра (гл. § 85, 86). Але пры вертыкальнай нагрузцы ці нагрузцы, якая дзейнічае перпендыкулярна да нагі, у выпадках, якія сустракаюцца на практыцы, можна карыстацца больш простым рашэннем, указаным у прыкладзе фермы Полонсо (чарц. 191) у выніку роўнасці ўсілляў у стрыжаннях  $d_1$  і  $d_2$ . Для выпадку, калі знешнія сілы не паралельны і не выходзяць у адным пункце, патрэбна чарцёж фермы з прыложанымі да яе знешнімі сіламі дапоўніць шарнірным палігонам для ўсёй сістэмы знешніх сіл.

Калі некаторыя з нагрузкаў знаходзяцца ўнутры фермы, тады трэба прыстасаваць асобы штучны прыём для перавосу іх на контур.

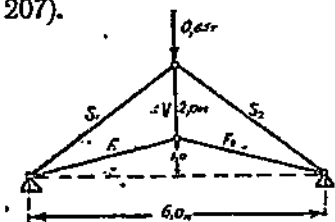
### § 84. Задачы на метад Максвела-Крэмона



Чарц. 206.

**Задача.** Вызначыць рэакцыі апор і ўсілля ў стрыжаннях шпрэнгельнай бэлькі (чарц. 206).

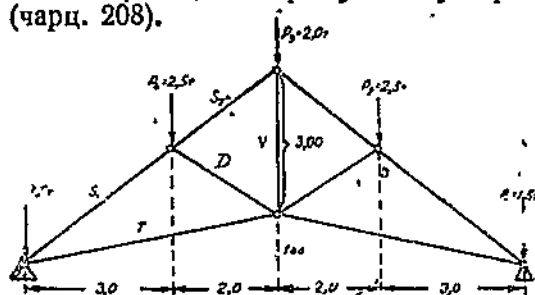
**Задача.** Визначити реакції апор і зусиллі у стрижнях кроквенної ферми (чарц. 207).



Чарц. 207.

Адказ:  $S_1 = S_2 = -0,689 \text{ т}; F_1 = F_2 = +0,514 \text{ т}; V = +0,325 \text{ т}.$

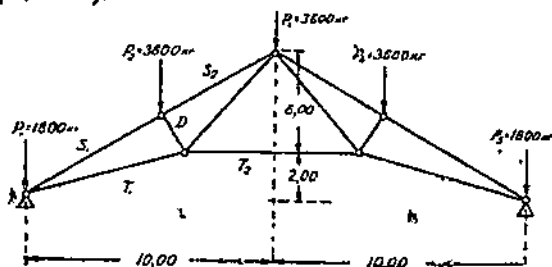
**Задача.** Визначити реакції апор і зусиллі у стрижнях кроквенної ферми (чарц. 208).



Чарц. 208.

Адказ:  $S_1 = -7,467 \text{ т}; S_2 = -5,333 \text{ т}; T = +5,960 \text{ т}; D = -2,033 \text{ т}; V = +4,666 \text{ т}.$

**Задача.** Визначити реакції апор і зусиллі у стрижнях ферми Полонсо (чарц. 209).

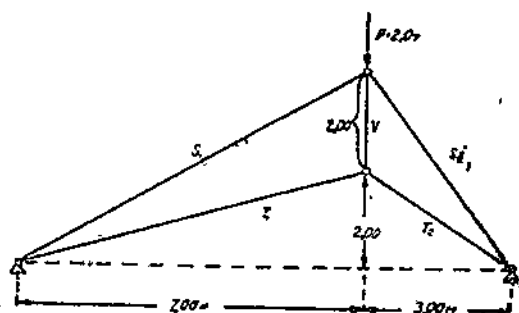


Чарц. 209.

Адказ:  $S_1 = -13915 \text{ кг}; S_2 = -11666 \text{ кг}; D = -2811 \text{ кг}; T_2 = +6000 \text{ кг}.$

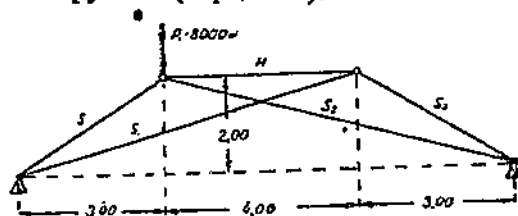
**Задача.** Визначити усілі й стрижанях несиметричної ферми (чарц. 210).

Адказ:  $S_1 = -2,419 \text{ т}$ ;  $S_2 = -3,500 \text{ т}$ ;  $T_1 = +2,184 \text{ т}$ ;  $T_2 = +2,524 \text{ т}$ ;  $V = P$ .



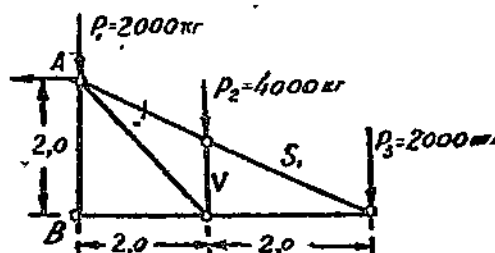
Чарц. 210.

**Задача.** Визначити реакції опор і усілі й стрижанях ферми з аднабаковою навантаженням (чарц. 211).



Чарц. 211.

Адказ:  $A = 5600 \text{ кг}$ ;  $B = 2400 \text{ кг}$ ;  $S = -17667 \text{ кг}$ ;  $S_1 = +15288 \text{ кг}$ ;  $S_2 = +6552 \text{ кг}$ ;  $S_3 = -7571 \text{ кг}$ .



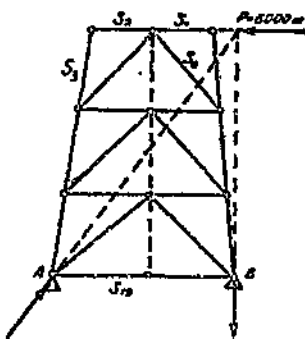
Чарц. 212.

**Задача.** Визначити усілі й стрижанях навіса (чарц. 212).

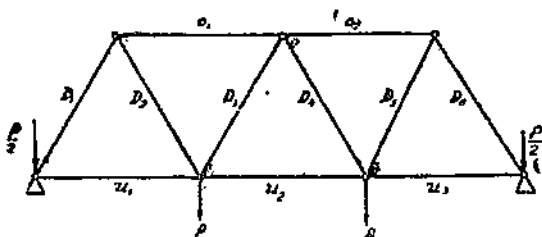
Адказ:  $A = 8000 \text{ кг}$ ;  $B = 11324 \text{ кг}$ ;  $S_1 = +4472 \text{ кг}$ ;  $V = -4000 \text{ кг}$ .

**Задача.** Визначити реакції опор і усіли в стрижнях опор-  
най ферми (чарц. 213).

Адказ:  $A = 9900 \text{ кг}$ ;  $B = 7800 \text{ кг}$ ;  $S_1 = 6000 \text{ кг}$ ;  $S_2 = S_3 = 0$ ;  
 $S_4 = 0$ ;  $S_{19} = 3000 \text{ кг}$ .



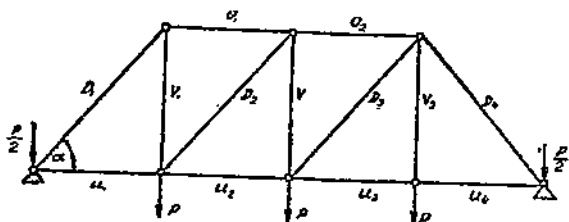
Чарц. 213.



Чарц. 214.

**Задача.** Визначити усіли в стрижнях у раскосной фермы  
(чарц. 214), яка складається з рівнобедрених трикутників.

Адказ:  $D_1 = D_2 = D_3 = D_6 = \frac{2P \cdot \sqrt{3}}{3}$ ;  $U_1 = U_2 = U_3 = \frac{P \cdot \sqrt{3}}{3}$ ;  
 $D_2 = U_2 = D_6 = + \frac{2\sqrt{3} \cdot P}{3}$ ;  $D_3 = D_4 = 0$ .



Чарц. 215.

**Задача.** Визначити усіли в стрижнях раскосной фермы  
(чарц. 215).

Адказ:  $D_1 = D_4 = - \frac{3P}{2 \cdot \sin \alpha}$ ;  $U_1 = U_2 = U_3$ ;  $V_1 = + \frac{3 \cdot P}{2}$ .

# ВЫЗНАЧЭННЕ ЎСІЛЛЯЎ У СТРЫЖАННЯХ ФЕРМЫ СПОСАБАМІ КУЛЬМАНА І РЫТЭРА

## § 85. Спосаб Кўльмана

Гэты спосаб зручны тым, што пры дапамозе яго можна вызначыць усіллі ў любым стрыжані, не вызначаючы, як у спосабе Крэмона, усіллі ў ва ўсіх папярэдніх стрыжаннях. Заснаваны гэты спосаб на тым прыцыпе, што, калі разрэзаць ферму адвольным сячэннем на дзве часткі і выдаліць адну з частак, то для роўнавагі астатняй часткі ўсе знешнія сілы, якія дзейнічаюць на яе, у тым ліку і рэакцыі апор, уроўнаважваюцца ўнутранымі ўсіллямі; перарэзаных сячэннем стрыжанняў. Сячэнне павінна быць выбрана так, каб яно перасякала толькі тры стрыжані, якія не зыходзяцца ў адным пункце; гэта вынікае з таго, што даную сілу (у гэтым выпадку роўнадзейную знешніх сіл, якая дзейнічае на разглядаемую частку фермы, ці папярочную сілу  $Q$ ) можна раскласці толькі на тры сілы, якія не перасякаюцца ў адным пункце.

Няхай ёсць ферма  $AB$  (ч.р. 216).

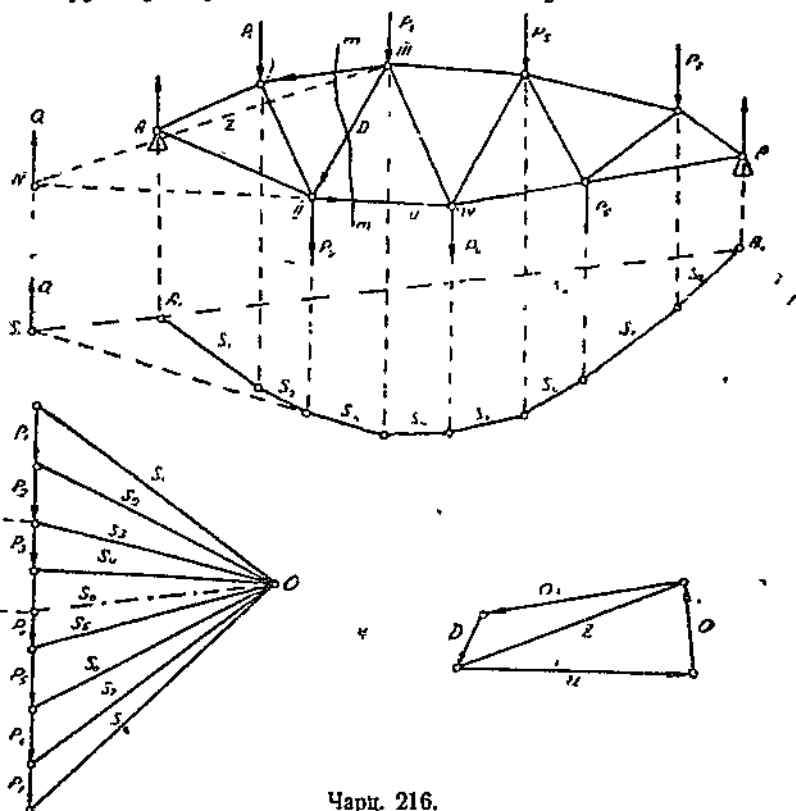
Правядзем сячэнне  $mn$ , якое перасякае тры стрыжані:  $O$ ,  $U$  і  $D$ , кірункі якіх не сустрэкаюцца ў адным пункце.

Лявей гэтага сячэння дзейнічаюць сілы: апорная рэакцыя  $A$  і сілы:  $P_1$  і  $P_2$ . Роўнадзейная іх  $Q$  атрымоўваецца з многавугольніка сіл. Пунктам яе прылажэння будзе пункт  $S_1$ , перасячэнне крайніх бакоў  $S_0$  і  $S_2$  вярэвочнага многавугольніка для сіл:  $A$ ,  $P_1$  і  $P_2$ .

Відавочна, што калі правая частка фермы будзе ўдалена, то левая частка павінна знаходзіцца ў роўнавазе, а таму роўнадзейная  $Q$  і ўсілли  $O$ ,  $U$  і  $D$  павінны ўзаемна ўроўнаважвацца. Для вызначэння велічыні гэтых усілляў трэба працягнуць адзін са стрыжанняў, якія сустрэкаюцца сячэннем  $mn$ , напрыклад, стрыжань  $U$  да перасячэння ў пункце  $N$  з роўнадзейнай  $Q$  і раскласці апошнюю на кірункі  $U$  і  $N III$ , дзе  $III$  ёсць пункт перасячэння двух астатніх стрыжанняў. Затым дапаможную сілу  $N III$  ( $z$ ) трэба раскласці ў кірунках  $O$  і  $D$ . Пасля гэтага атрымоўваецца замкнуты сілавы многавугольнік з бакамі:  $Q$ ,  $O$ ,  $D$  і  $U$ .

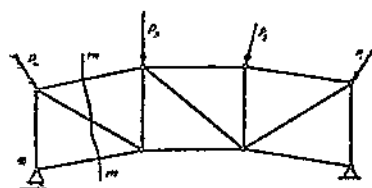
З тае прычыны, што гэтыя сілы павінны ўзаемна ўроўнаважвацца, то стрэлкі на іх павінны быць накіраваны ў аднолькавым

сәнсе з  $Q$ . Затым гэтыя стрэлкі пераносяць на стрыжані фермы ў плане апошняй, ставячы іх *лявей сячэння*, калі ўдалена была *правая* частка, ці *правей* яго, калі ўдалялася *левая* частка. Паводле кірункаў стрэлак вызначаецца знак усілля.

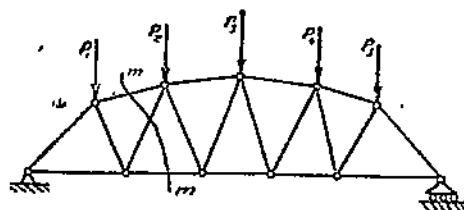


Чарц. 216.

**Задача.** Спосабам Кульмана вызначыць усілли ў стрыжанях фермы (чарц. 217), перасечаных сячэннем  $mn$ .



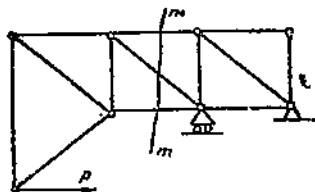
Чарц. 217.



Чарц. 218.

**Задача.** Спосабам Кульмана вызначыць усілли ў стрыжанях фермы, перасечаных сячэннем  $mn$  (чарц. 218).

**Задача.** Для фермы (чарц. 219), нагружанай гарызонтальнай сілай  $P$ , вызначыць спосабам Кульмана ўсілі ў стрыжаннях, перасечаных сячэннем  $mn$ ,



Чарц. 219.

## § 86. Спосаб Рытэра

Гэты спосаб ёсць самы агульны, бо мае вартасці спосабу Кульмана, даючы магчымасць вызначыць усілі ў любым стрыжанні без вызначэння папярэдніх усілляў, ён дапускае рашэнні, як у графічнай, так і ў аналітычнай форме. У апошній ён часцей за ўсё прыстасоўваецца на практыцы.

Спосаб Рытэра заснаваны на наступнай умове роўнавагі: у левай, аддзеленай сячэннем, частцы фермы момант знешніх сіл і ўнутраных усілляў перасечаных стрыжанняў, адносна кожнага з трох адвольных пунктаў роўніцы фермы роўны 0. Калі пункты вярчэння ўзяць адвольна, то ў кожнае раўнанне роўнавагі ўвойдуць па тры невядомыя ўсілі перасечаных стрыжанняў, дзякуючы чаму вызначэнне гэтых усілляў было-б на практыцы нязручна. У звязку з гэтым пункт вярчэння трэба абраць так, каб у кожным раўнанні момантаў два члены з двума невядомымі зніклі, а гэта будзе тады, калі за пункт вярчэння будзе ўзяты пункт перасячэння двух стрыжанняў, якія сустракаюцца сячэннем, бо момант усілляў іх адносна гэтага пункта роўны 0. У выніку атрымоўваюцца тры раўнанні, але кожнае з адным невядомым. Пры складанні раўнання момантаў усе ўсілі стрыжанняў разглядаюцца з пачатку як расцяжэнні; калі-ж для ўсілля ў стрыжанні атрымоўваецца пры рашэнні раўнання адмоўнае значэнне, то стрэлку ў гэтым стрыжанні трэба замяніць стрэлкай супроцьлеглага кірунку, тады атрымаецца спіскаючае ўсілле.

Правядзем у ферме (чарц. 220) сячэнне  $mn$ , якое перасякае тры стрыжанні  $O$ ,  $D$  і  $U$ . Для вызначэння  $U$  пунктам вярчэння выбіраем  $C$ —пункт перасячэння стрыжанняў  $O$  і  $D$ . Няхай плячо  $U$  адносна пункта  $C$  будзе  $r_u$ , а сума момантаў знешніх сіл, якія ляжаць улева ад сячэння  $mn$ , г. зн. выгібаючы момант у пункце  $C$  няхай будзе  $M_c$ , ён будзе дадатны, як гэта вынікае з ужо высветленай уласцівасці бэлькі, якая свабодна ляжыць на двух апорах. Момант-жа ўсілля  $U$  адносна  $C$  адмоўны, бо пры дапушчэнні расцяжэння ў  $U$ , ён паварочвае роўніцу чарцяжа

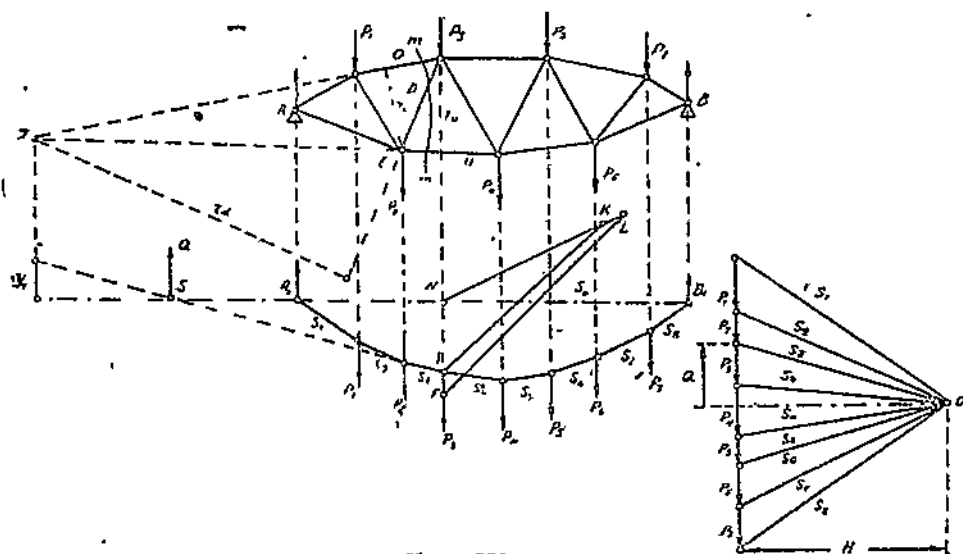
левай часткі фермы каля пункта  $C$  супроць гадзіннікавай стрэлкі. Такім чынам умова роўнавагі будзе:

$$M_c - U \cdot r_u = 0,$$

адкуль вызначаецца  $U$ :

$$U = + \frac{M_c}{r_u}. \quad (53)$$

Гэтаму выразу можна надаць другі выгляд на падставе таго, што  $M_c = y_c \cdot H$ , дзе  $y_c$  ёсць ардыната плошчы момантаў, якая



Чарц. 220.

адпавядае вузлу  $C$ , а  $H$  — полюсная адлегласць. Замяніўшы  $M_c$ , атрымаем:

$$U = + \frac{y_c \cdot H}{r_u},$$

адкуль маем:

$$\frac{U}{H} = \frac{y_c}{r_u}.$$

Апошняе раўнанне дае магчымасць вызначыць  $U$  графічна \*). Для гэтага праз пункт  $N$  ардынаты  $y_c$  праводзім адвольную прамую  $NK$  і адкладваем на ёй  $LN = H$ , а на ардынаце  $y_c$  адкладаем  $NF = r_u$ . Злучыўшы пункты  $F$  і  $L$  прамой  $FL$  і правёўшы

\*) Да трох даных пабудоваць чацвёртую прапарцыянальную.

праа  $I$  паралельную ёй да перасячэння з  $NK$  у пункце  $K$ , атрымаем, што  $NK = U$ . У самой справе:

$$\frac{NK}{NL} = \frac{NI}{NF}, \text{ або } \frac{U}{H} = \frac{y_\epsilon}{r_u}.$$

Для вызначэння ўсілля  $O$  выбіраем пункт вярчэння  $E$  у перасячэнні  $U$  і  $D$ . Усілле  $O$ , якое прымаецца спачатку за расцягваючае, утварае вярчэнне левай часткі фермы навокал  $E$  па гадзінніковай стрэлцы, г. зн. момант  $M_E$  яго адносна  $E$  дадатны, і ўмовай роўнавагі будзе:

$$M_E + 0 \cdot r_0 = 0, \text{ адкуль вызначаецца велічыня ўсілля } O.$$

$$0 = - \frac{M_E}{r_0}. \quad (54)$$

Замявіўшы  $M_E$  яго значэннем, г. зн.  $y_E \cdot H$ , атрымаем:

$$0 = - \frac{y_E \cdot H}{r_0}.$$

Адмоўны знак азначае, што верхні пояс сціснуты.

Нарэшце для вызначэння ўсілля  $D$  возьмем пункт вярчэння ў пункце  $T$  перасячэння стрыжняў  $O$  і  $U$ . З тае прычыны, што ўсілле  $D$ , якое разглядаецца як расцягваючае, утварае вярчэнне навокал  $T$  супроць гадзінніковай стрэлкі, то раўнанне момантаў будзе наступным:

$$M_T - D \cdot r_d = 0,$$

адкуль:

$$D = + \frac{M_T}{r_d}$$

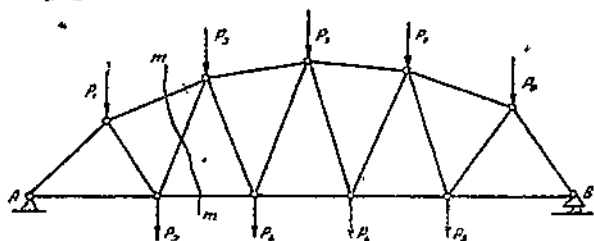
або

$$D = + \frac{y_T \cdot H}{r_d}.$$

Момант  $M_T$ , які складае суму момантаў сіл, прыложаных да фермы ўлева ад сячэння ці, што тое-ж самае, момант роўнадзейнай  $Q$  гэтых сіл адносна пункта вярчэння  $T$  можа быць дадатным ці адмоўным у залежнасці ад палажэння пункта прылажэння  $S$ , гэтай роўнадзейнай, адносна пункта вярчэння  $T$ , і ад кірунку  $Q$ . У даным выпадку пункт  $S$  ляжыць правей  $T$ ,  $Q$  накіравана знізу ўверх і ўтварае вярчэнне навокал  $T$  супроць гадзінніковай стрэлкі, значыць  $M_T$  мае адмоўнае значэнне і ўсілле  $D$  будзе сціскаючае.

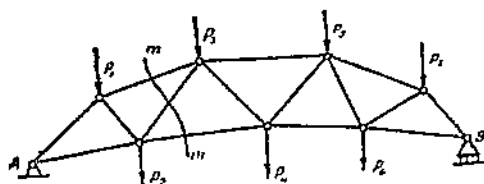
З усяго сказанага вынікае, што пры *вертыкальных знешніх сілах* для ферм, якія *свабодна ляжаць на двух апорах* як усіллі  $O$ , так і  $U$  на ўсім працягу між апорамі маюць *аднолькавы знак*, бо момант знешніх сіл—дадатны, пры гэтым *верхні пояс заўсёды сціснут, а ніжні—расцягнут*. Графічна  $O$  і  $D$  вызначаюцца так-жа сама, як і  $U$ .

**Задача.** Визначити сили в стрижнях, пересечених сяченням  $mn$  для ферми, навантаженої на чарц. 221.



Чарц. 221.

**Задача.** Визначити сили в стрижнях ферми, пересечених сяченням  $mn$  (чарц. 222).



Чарц. 222.

**Задача.** Визначити сили в раскосах і стойках ферми з паралельними поясами (чарц. 214 і 215).

**Заувага.** Треба узяти рівняння рівноваги:

$$\sum y = 0.$$

## РУХОМАЯ НАГРУЗКА

## § 87. Агульныя паняці

Пры рухомай нагрузцы грузы заўсёды мяняюць сваё палажэнне на ферме, у выніку чаго і ўсілі ў стрыжаннях фермы ўвесь час мяняюць сваё значэнне і кожнаму палажэнню грузаў адпавядае пэўнае ўсілле ў кожным стрыжанні фермы, якое для данага палажэння можа быць вызначана адным з вышэй апісаных спосабаў. З тае прычыны што грузы могуць займаць бесканечнае мноства розных палажэнняў, то адпаведна гэтаму і ўсілляў у кожным стрыжанні бесканечнае мноства. Аднак для практычных мэт, г. зн. вызначэння трываласці збудаванняў дастаткова ведаць толькі крайнія межы гэтых усілляў, г. зн. іх *Max* і *Min*, бо яны з'яўляюцца небяспечнымі для трываласці стрыжання. Стрыжань, які трывала супраціўляецца гэтым гравічным усіллям, яшчэ больш трывала будзе супраціўляцца ўсім прамежным усіллям. З сказанага вынікае, што для кожнага стрыжання неабходна было-б вызначыць усілі ад мноства палажэнняў нагрузак і ўзяць крайнія з іх, г. зн. *Max* і *Min*. Але з тае прычыны, што гэта непасільная задача, то ўсё пытанне зводзіцца да вызначэння палажэння нагрузкі, якое з'яўляецца для кожнага стрыжання найбольш небяспечным, г. зн. такога, якое выклікае ў даным стрыжанні *Max* і *Min* усілля. Палажэнне нагрузкі, якое выклікае ў даным стрыжанні *Max* і *Min* усілляў, называецца крытычным палажэннем для гэтага стрыжання.

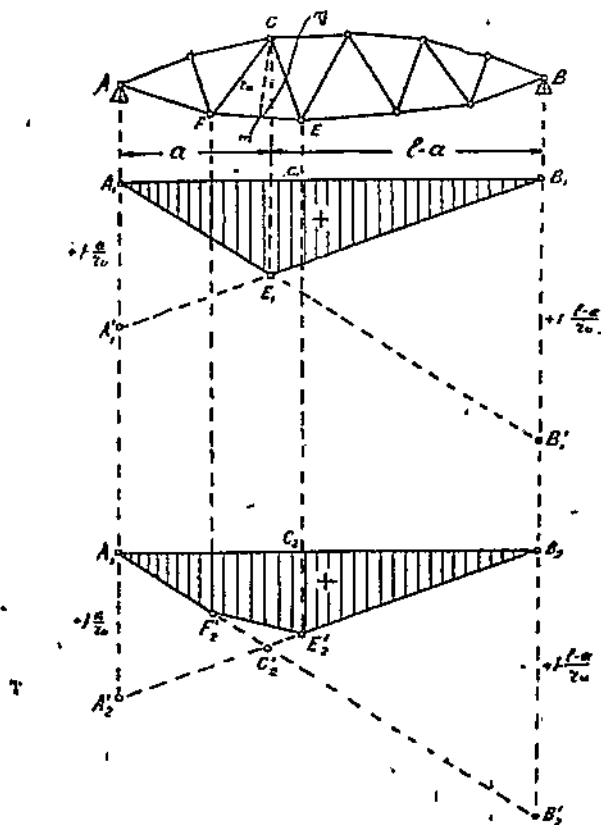
## § 88. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у стрыжаннях фермы

Інфлюэнтныя лініі для ўсілляў у стрыжаннях фермы маюць тое-ж значэнне, што і ў простых бэльках: ардынаты іх паказваюць велічыню ўсілляў у пэўным стрыжанні, для якога гэтая лінія пабудавана, ад груза роўнага адзіцы, непасрэдна пад пунктам прылажэння гэтага груза. Усе законы, выведзеныя для інфлюэнтных ліній у простых бэльках, застаюцца ў сіле і тут. Пабудову інфлюэнтных ліній для ўсілляў у стрыжаннях фермы разгледзім асобна для паясоў і стрыжанняў рашоткі.

§ 88-а. Інфлюентныя лініі ўсілляў у паясах фермы, якая свабодна ляжыць на двух апорах

Разгледзім агульны выпадак: ферму, якая ляжыць сваімі канцамі на двух апорах  $A$  і  $B$  (чарц. 223).

Калі правядзем сячэнне  $mn$ , якое перасякае тры стрыжаны  $U$ ,  $D$  і  $O$ , то па спосабу Рытэра момант знешніх сіл  $M_c$



Чарц. 223.

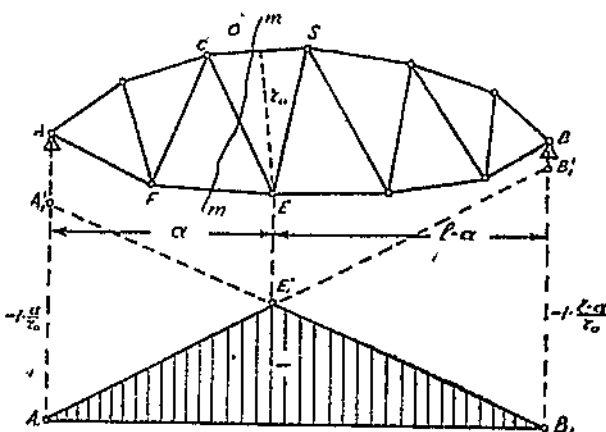
адносна пункта  $C$  уроўнаважваецца момантам ўсілля  $U$  адносна таго-ж пункта, значыць:

$$U = \frac{M_c}{r_n}$$

З тае прычыны, што пры ўсіх вертыкальных знешніх сілах зусім няма ніякай розніцы, адносна якога пункта на вертыкалі праз  $C$  узяць момант, то  $M_c$  роўны моманту простага бэлькі  $AB$

зв'язки с'ячення на адлегласці  $a$  ад апори  $A$ . Таму інфлюентная лінія  $U$  атрымліваецца з інфлюентнай лініі выгібаючага моманту  $M_c$ , калі ардынаты апошняй раздзяліць на плячо  $r_a$  ўсілля  $U$ .

Такім чынам трэба адкласці на апорнай вертыкалі  $A$  адрэзак  $A_1A_1' = 1 \cdot \frac{a}{r_a}$ , а на вертыкалі пункта  $B$ —адрэзак  $B_1B_1' = 1 \cdot \frac{l-a}{r_a}$  і правесці прамыя  $B_1A_1'$  і  $A_1B_1'$ , якія перасякуцца ў пункце  $C_1'$  на вертыкалі праз  $C$ . Атрыманая трохвугольная плошча ўплыву мае знак  $+$ , бо ніжні пояс заўсёды расцягнуты. Такая трохвугольная лінія ўплыву атрымліваецца пры яздзе па версе, калі



Чарц. 224.

груз  $P=1$  можа дзейнічаць непасрэдна на вузел  $C$ . Пры яздзе-ж па нізе грузу ў вузеле  $C$  дзейнічаць не можа і інфлюентная лінія будзе мець выгляд  $A_2F_2'E_2'B_2$ .

Для верхняга пояса да Рытэру маем:

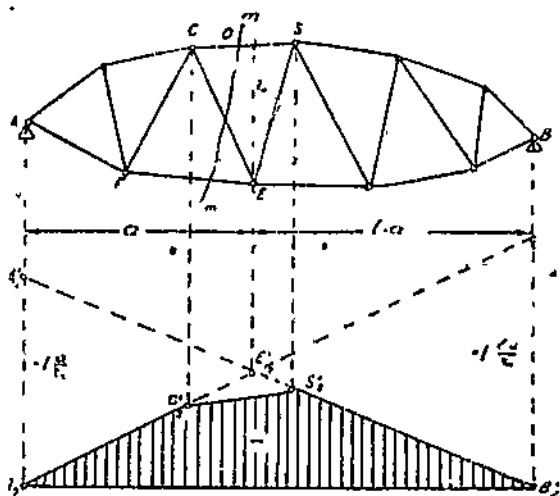
$$0 = -\frac{M_2}{r_0},$$

адкуль вынікае, што інфлюентная лінія для ўсілля  $O$  атрымліваецца з інфлюентнай лініі для  $M_E$  пры дапамозе дзялення ардынаты апошняй на плячо  $r_0$  ўсілля  $O$ . Адсюль вынікае спосаб пабудовы: адклаўшы на апорных вертыкалях  $A_1A_1' = -1 \cdot \frac{a}{r_0}$

і  $B_1B_1' = -1 \cdot \frac{l-a}{r_0}$ , атрымаем трохвугольную плошчу ўплыву  $A_1E_1B_1'$  для ўсілля  $O$  пры руху грузаў па ніжнім поясе (чарц. 224).

Плошча гэтая адмоўная, бо верхні пояс заўсёды сціснут.

Аналогічна ланцюжковій при русі груза на верхній поясе атримаем чатырохвугольную інфлюентную плошчу  $A_1C_2'G_2'B_2$  (чарц. 225).



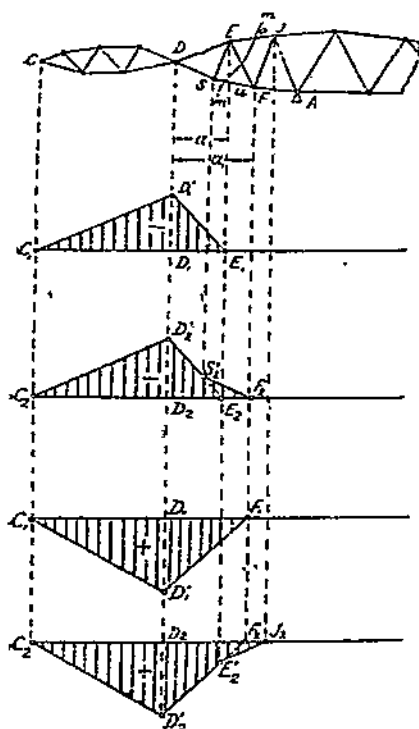
Чарц. 225.

Выведзеныя простыя суадносіны між інфлюентнымі лініямі для ўсіляў у стрыжнях паясоў і момантаў для іх пунктаў вярчэння застаюцца ў сіле і для кансольных ферм і ферм Гербера.

## КАНСОЛЬНЫЯ ФЕРМЫ І ФЕРМЫ ГЕРБЕРА

## § 89. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у паясах

§ Ферма Гербера адрозніваецца ад кансольнай толькі наяўнасцю падвесных ферм у выглядзе простых бэлечных ферм  $CD$  і  $EF$ , якія маюць апоры на канцах  $C, D, E$  і  $F$ . З гэтае прычыны дастаткова разглядаць толькі фермы Гербера, бо інфлюэнтныя лініі для чыста кансольных ферм атрымоўваюцца з адпаведных інфлюэнтных ліній для ферм Гербера, калі адкінуць тую частку іх, якія датычаць падвесных бэлек.



Чарц. 225.

Узяўшы сячэнне  $m-m$  у кансолі  $DA$  (чарц. 226), якое перасякае тры стрыжні  $U, O$  і  $D$ , атрымаем пункт вярчэння  $E$  для стрыжня  $U$ , пункт вярчэння  $F$  для стрыжня  $O$  і адпаведныя ім плечы:  $r_u$  і  $r_o$ . Згодна спосабу Рытэра маем:

$$U = + \frac{M_E}{r_u} \quad \text{і} \quad O = - \frac{M_F}{r_o},$$

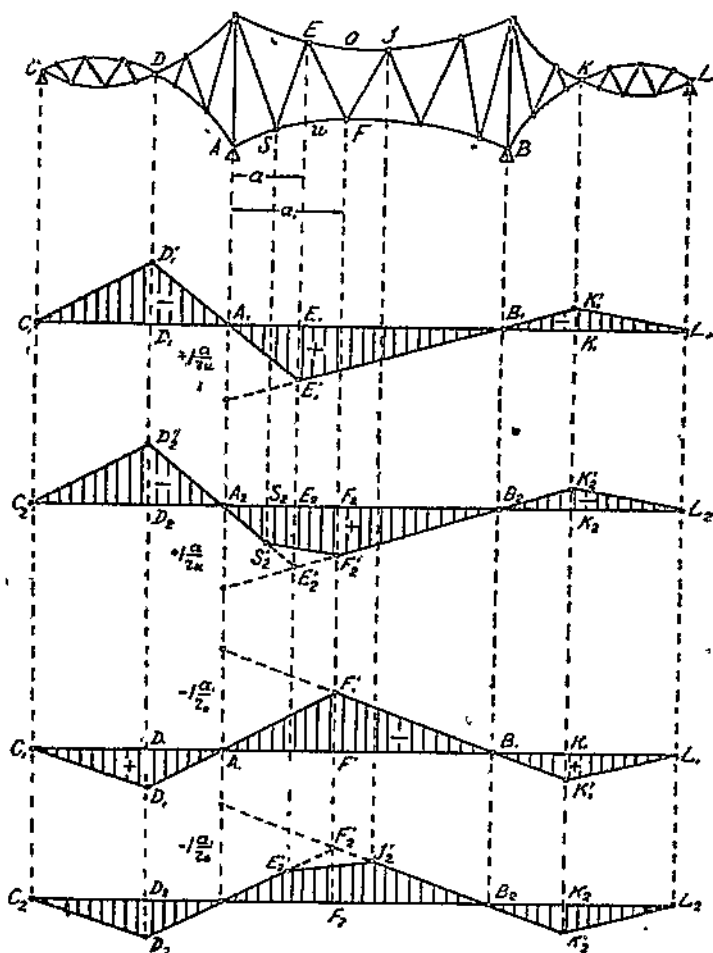
але дзякуючы таму, што моманты  $M_E$  і  $M_F$  (якія становяць сабою моманты ў сячэннях кансолі, што ляжаць на вертыкалях праз  $E$  і  $F$  кансольнай бэлькі) адмоўныя, то ніжні пояс будзе сціснуты, а верхні расцягнуты. Інфлюэнтную лінію для  $U$  атрымаем, адклаўшы на вертыкалі праз  $D$

адрэзак  $DD_1' = -1 \cdot \frac{a}{r_u}$  і злучыўшы пункт  $D_1'$  з пунктамі  $E_1$  і  $C_1$ .

Гэтая інфлюэнтная лінія сапраўдна пры яздзе па верху.

Пры яздзе-ж па нізу інфлюэнтная лінія атрымоўваецца з той-жа лініі праз прыбаўленне трохвугольніка  $E_2 C_2' F_2$  на той падставе, што ў межах панелі  $GF$  інфлюэнтная лінія павінна быць прамой.

Інфлюентная лінія для  $O$  атрымоўваецца аналагічным спосабам: на вертыкалі праз  $D$  адкладваецца адрэзак  $D_1D_1' = D_2D_2' = +1 \cdot \frac{a_0}{r_0}$  пры яздзе па ніз і па верху.



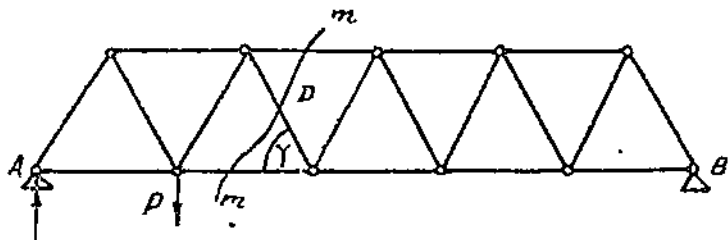
Чарц. 227.

Калі стрыжаны паясоў фермы знаходзяцца між апорамі  $A$  і  $B$ , то інфлюентныя лініі для стрыжняў паясоў  $U_1$  і  $O$  у граніцах між апорамі  $A$  і  $B$  будуцца як для фермы, якая ляжыць канцамі на двух апорах і працягваюцца на працягу кансолей і падвесных частак, як у кансольных бэльках. Пры яздзе-ж па поясу, рухаючыся па якім груз  $P$  не можа дзейнічаць на пункт вярчэння стрыжня, перадача атрымоўваецца вузлавая і ў адпаведнай інфлюентнай лініі адразаюцца адпаведныя трохвугольнікі (чарц. 227).

## ИНФЛЮЕНТНЫЯ ЛІНІЎ ЎСІЛЛЯЎ У СТРЫЖАНЯХ РАШОТКІ

## § 90. Фермы з паралельнымі паясамі

Разгледзім спачатку выпадак фермы з паралельнымі паясамі. Няхай ёсць ферма з паралельнымі паясамі з простаў'трохвугольнай рашоткай (чарц. 228). Калі правесці сячэнне  $m$ , якое сустрэае тры стрыжані  $O$ ,  $U$  і  $D$ , то ўлева ад гэтага сячэння на ферму дзейнічае роўназдзейная сіла  $A$  і прыложаных у гэтай



Чарц. 228.

частцы знешніх сіл, г. зн. напярочная сіла  $Q$ . З умоў роўнавагі  $\Sigma y = 0$ , маем:

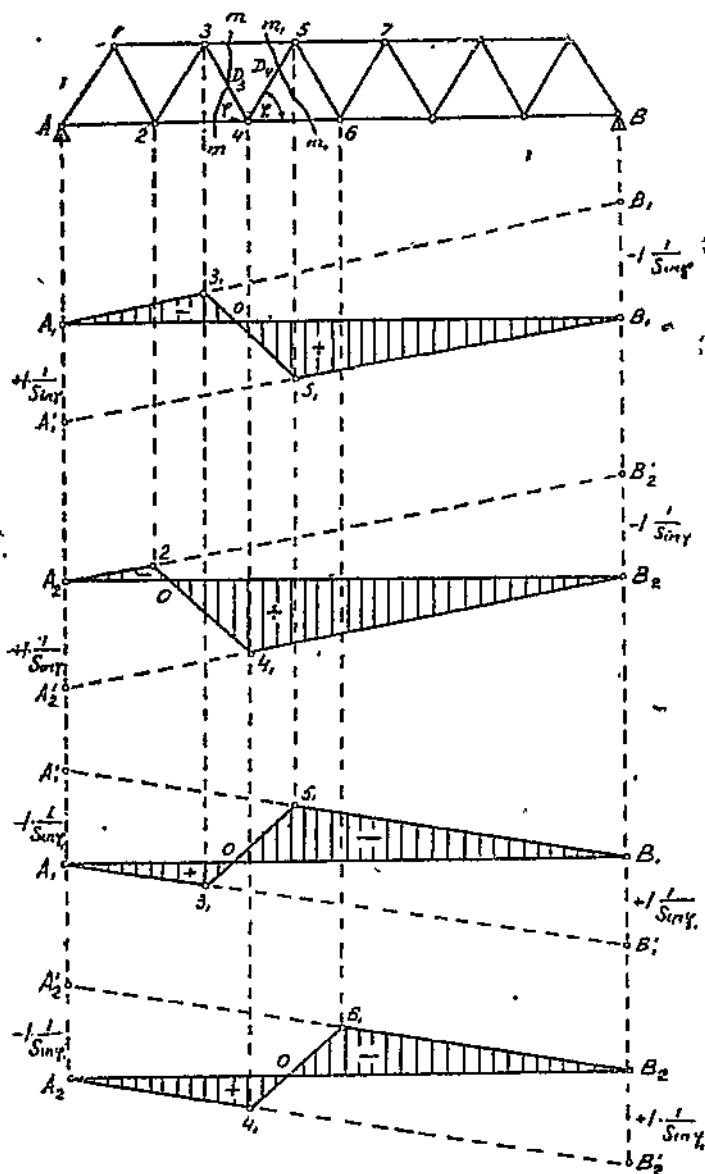
$$Q - D \cdot \sin \gamma = 0,$$

адкуль:

$$D = \frac{Q}{\sin \gamma} \quad \text{або} \quad D = Q \cdot \frac{1}{\sin \gamma}, \quad (55)$$

бо праекцыя  $O$  і  $U$  на вертыкальную вось роўны  $0$ . Гэта простая залежнасць паказвае, што інфлюэнтная лінія для ўсілля  $D$  у раскосах можа быць атрымана з інфлюэнтнай лініі напярочнай сілы шляхам множання ўсіх яе ардынат на  $\frac{1}{\sin \gamma}$ , велічыню пастаянную для данага раскоса. Такім чынам інфлюэнтная лінія для ўсілляў у раскосе складаецца з двух паралельных прамых з ардынатамі на апорных вертыкалях  $1 \cdot \frac{1}{\sin \gamma}$  і трэцяй прамой, якая злучае ардынаты гэтых двух прамых у межах панелі фермы. Так,

напрыклад, калі дана ферма  $AB$  (чарц. 229), то інфлюэнтная лінія для ўсілля ў раскосе  $D_3$  (чарц. 229-а) будзе складацца



Чарц. 229.

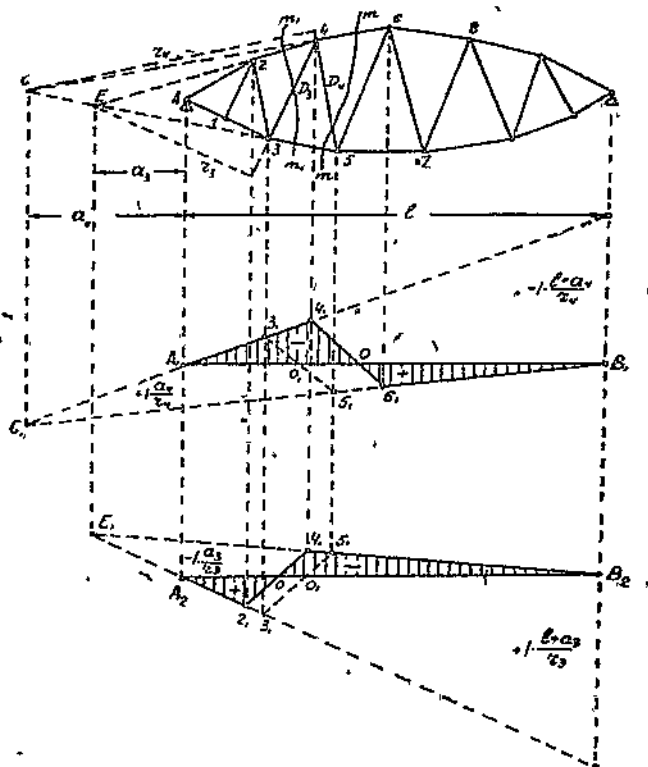
з двух трохвугольнікаў  $A_1B_1O$  і  $OБ_1B_1$  пры яздзе на верху і з трохвугольнікаў  $A_2B_2O$  і  $B_2A_2O$  пры яздзе на нізу.

Знакі гэтых трохвугольнікаў вызначаюцца з наступных меркаванняў: калі груз  $P=1$  будзе знаходзіцца ўправа ад сячэння  $m$ , то раскос  $D_1$  апускаецца ў кірунку да груза і значыць у ім будзе дзейнічаць расцяжэнне, г. зн. правы трохвугольнік  $O5_1B_1$  ці  $O4_1B_2$  будзе дадатны, левы-ж аналагічна будзе адмоўны.

Інфлюентная лінія для ўсіх раскосаў  $D_i$  будзе мець выгляд, паказаны на чарц. 229, прычым правыя трохвугольнікі  $O5_1B_1$  і  $O6_1B_2$  будуць адмоўныя на той падставе, што пры грузе  $P=1$ , які знаходзіцца ўправа ад сячэння  $m$ , раскос  $D_i$  падмаецца да груза, а значыць у ім будзе дзейнічаць сцісканне.

## § 91. Паясы перасякаюцца за апорамі

Разгледзім цяпер выпадак, калі паясы перасякаюцца за апорамі. Няхай дана, што паясы фермы  $AB$  (чарц. 230), перасякаюцца сячэннем, якое праходзіць праз раскос  $D_4$ , прычым пункт пера-



Чарц. 230.

сячэння іх кірункаў знаходзіцца за апорамі ў некаторым пункце  $C$ . Калі груз  $P=1$  знаходзіцца ўправа ад сячэння  $m$ , то на левую частку фермы дзейнічае толькі адна знешняя сіла—апорнае

супраціўленне  $A$  і тры ўсілі стрыжняў, якія сустракаюцца сячэннем  $m$   $m$ . Сума момантаў гэтых чатырох сіл, адносна пункта  $C$ , па Рытэру павінна быць роўнай 0. Моманты ўсілляў, якія перасякаюцца ў  $C$  стрыжняў, роўны 0 адносна гэтага пункта, бо іх плечы роўны 0. Застаюцца такім чынам дзве сілы  $A$  і  $D_4$ , сума момантаў якіх адносна  $C$  павінна быць роўнай 0. Плечы гэтых сіл няхай будуць  $a_4$  і  $r_4$ . Момант сілы  $A$  адносна пункта  $C$  будзе  $A \cdot a_4$  і мае знак мінус. Момант сілы  $D_4$ , па Рытэру, калі раскос палічыць спачатку расцягнутым, г. зн. са стрэлкамі, накіраванымі ад грузаў 4 і 5 да сячэння, для левай часткі, якая разглядаецца, будзе мець велічыню:  $D_4 \cdot r_4$  і знак  $+$ . Такім чынам сума гэтых двух момантаў:

$$-A \cdot a_4 + D_4 \cdot r_4 = 0,$$

адкуль маем:

$$D_4 = +A \cdot \frac{a_4}{r_4}. \quad (56)$$

З тае прычыны, што  $\frac{a_4}{r_4}$  для данага стрыжня ёсць велічыня пастаянная, то інфлюэнтную лінію для  $D_4$  мы атрымаем з інфлюэнтнай лініі апорнай рэакцыі  $A$  шляхам множання ардынаты апошняй на  $+\frac{a_4}{r_4}$ , а для гэтага неабходна на апорнай вертыкалі  $A$  адкласці ад гарызанталі  $A_1B_1$  адрэзак  $A_1A_1' = +1 \cdot \frac{a_4}{r_4}$  і правесці прамую  $A_1'B_1$ . Гэта прамая будзе сапраўднай інфлюэнтнай лініяй для  $D_4$  толькі для правай часткі фермы ад  $B_1$  да вертыкалі праз правы вузел панелі для  $D_4$  (пры яздзе па верху да вертыкалі праз вузел 6, а пры яздзе па нізу—праз вузел 5), бо папярэдняе меркаванне правільна толькі да таго часу, пакуль груз  $P$  знаходзіцца ўправа ад сячэння  $m$   $m$ .

Калі груз  $P = 1$  знаходзіцца злева ад сячэння  $m$   $m$ , то адна толькі знешняя сіла, а іменна, рэакцыя апоры  $B$  будзе дзейнічаць на правую частку. Складзем раўнанне момантаў адносна пункта  $C$ . Аналагічна папярэдняму маем, што сума момантаў усіх сіл адносна  $C$  роўна 0. Момант сілы  $B$  роўна  $B \cdot (l + a_4)$  і мае знак мінус; момант-жа ўсілля  $D_4$  будзе:  $D_4 \cdot r_4$  і мае знак мінус, бо пры расцяжэнні стрыжня  $D_4$  згодна стрэлкі правай часткі фермы, вярчэнне адбываецца супроць гадзіннікавай стрэлкі. Сума гэтых момантаў:

$$-B \cdot (l + a_4) - D_4 \cdot r_4 = 0,$$

адкуль:

$$D_4 = -B \cdot \frac{l + a_4}{r_4} = B \cdot -\frac{l + a_4}{r_4}. \quad (57)$$

З гэтага раўнання вынікае, што інфлюэнтную лінію для  $D_4$  атрымаем, калі ардынаты інфлюэнтнай лініі апорнай рэакцыі памножым на пастаянную для данага стрыжня велічыню:  $-\frac{l + a_4}{r_4}$ , г. зн. на апорнай вертыкалі  $B$  адкладзем адрэзак  $B_1B_1' = -1 \cdot \frac{l + a_4}{r_4}$

і правядзем прамую  $A_1B_1'$ , якая будзе сапраўднай інфлюэнтнай лініяй ад пункта  $A_1$  да вертыкалі праз левы вузел панелі для  $D_4$  (пры яздзе па верху да вертыкалі праз вузел 4, і пры яздзе па нізу праз вузел 3). З тае прычыны, што ў межах панелі інфлюэнтная лінія ёсць прамая, то застаецца толькі злучыць прамой пункты 4, і 6, пры яздзе па верху, ці пункты 3, і 5, пры яздзе па нізу, каб атрымаць поўную інфлюэнтную лінію  $D_4$ . Адпаведна таму, што ўсілле  $D_4$  дадатнае, калі груз знаходзіцца ўправа ад сячэння і адмоўнае пры знаходжанні яго ўлева—і плошчы ўплыву маюць супрацьлеглыя знакі; дадатны для плошчы 06,  $B_1$  і адмоўны для плошчы  $A_140$  пры яздзе па верху (ці пры яздзе па нізу дадатны 0,5,  $B_1$  і адмоўны— $A_13,0_1$ ).

Аналагічна паяраджаму для ўсілля раскоса  $D_3$ , які падймаецца ўправа, плошчы ўплыву будуць пры знаходжанні груза  $P=1$  управа ад сячэння  $m_1m_1$ , сустракаючага стрыжань  $D_3$  і стрыжані паясоў, што перасякаюцца ў пункце  $E$ :

$$D_3 = -A \cdot \frac{a_3}{r_3} = A \cdot -\frac{a_3}{r_3},$$

а пры знаходжанні груза ўлева ад сячэння:

$$D_3 = +B \cdot \frac{l+a_3}{r_3}.$$

Такім чынам для пабудовы інфлюэнтнай лініі на апорнай вертыкалі  $A$  ад гарызанталі  $A_2B_2$  адкладваем адрэзак  $A_2A_2' = -1 \cdot \frac{a_3}{r_3}$ , а на вертыкалі  $B$ —адрэзак  $B_2B_2' = +1 \cdot \frac{l+a_3}{r_3}$  і праводзім прамыя  $B_2A_2'$  і  $A_2B_2'$ , сапраўдныя, адпаведна ад пунктаў  $B_2$  і  $A_2$  да бліжэйшых вузлоў панелі для  $D_3$ , у межах якіх інфлюэнтная лінія ёсць прамая 2,4, пры яздзе па верху ці 3,5, пры яздзе па нізу. Знакі плошчаў уплыву для раскоса  $D_3$ , які падймаецца ўправа, супрацьлеглыя знакам раскоса  $D_4$ , г. зн. левы дадатны, а правы адмоўны.

Калі рашотка складаецца з вертыкальных стоек і нахіленых раскосаў, то стойкі разглядаюцца як раскосы, якія падймаюцца ў супрацьлеглы даным раскосам бок, і інфлюэнтныя лініі для іх будуцца аналагічна інфлюэнтным лініям для тых раскосаў, якія падймаюцца ў супрацьлеглыя бакі.

Лініі  $B_1A_1'$  і  $A_1B_1'$  маюць тую ўласцівасць, што яны перасякаюцца ў пункце  $C_1$ , які ляжыць на адной вертыкалі з пунктам  $C$  перасячэння стрыжняў паясоў. У гэтым лёгка ўпэўніцца з падобнасці трохвугольнікаў  $C_1A_1A_1'$  і  $C_1B_1'B_1$ ; абазначыўшы адлегласць пункта  $C$  ад апорнай вертыкалі  $A$  праз  $x$ , атрымаем:

$$x : 1 \cdot \frac{a_4}{r_4} = (l+x) : 1 \cdot \frac{l+a_4}{r_4},$$

адкуль:

$$x = a_4.$$

Гэтай уласцівасцю можна карыстацца як для праверкі дакладнасці пабудовы інфлюэнтных ліній, так і для самой пабудовы. Сапраўды, калі праведзена прамая  $B, A_1'$  дастаткова працягнуць  $B, A_1'$  да перасячэння з вертыкаллю праз  $C$  у пункце  $C_1$  і апошняю злучыць з пунктам  $A_1$  прамой  $C, A_1$ , якую і працягнуць да пункта  $4_1$  (ці  $3_1$ ) панелі, а апошняю злучыць з пунктам  $6_1$  (ці  $5_1$ ), у залежнасці ад таго, ці адбываецца язда па верху ці па нізку.

## § 92. Паясы перасякаюцца ў межах пралёта

Разгледзім выпадак, калі паясы перасякаюцца ў межах пралёта. Няхай дана ферма  $AB$  (чарц. 231) і трэба пабудаваць інфлюэнтную лінію для раскоса  $D_4$ , які падымаецца ўправа. Правядзем сячэнне  $mm$  так, каб яно перасякала стрыжань  $D_4$  і два стрыжані паясоў, якія маюць сваім пунктам перасячэння пункт  $C$  між апорамі  $A$  і  $B$ . Дапусцім спачатку, што груз  $P=1$  знаходзіцца ўправа ад сячэння  $mm$ , тады злева ад гэтага сячэння дзейнічае толькі адна знешняя сіла—апорная рэакцыя  $A$  і тры ўсіллі, разрэзаных сячэннем  $mm$  стрыжняў. Выбраўшы, па Рытэру, за пункт вярчэння  $C$ , для якога моманты ўсілляў стрыжняў паясоў, што сустракаюцца сячэннем, роўны 0, атрымаем: сума момантаў  $A$  і  $D_4$  павінна быць роўнай нулю:

$$+A \cdot a_4 + D_4 \cdot r_4 = 0,$$

адкуль:

$$D_4 = -A \cdot \frac{a_4}{r_4}.$$



Чарц. 231.

Такім чынам інфлюэнтную лінію  $D_4$  атрымаем з інфлюэнтнай лініі  $A$ , памножыўшы ардынаты яе на пастаянны для данага

стрыжання  $D_4$  множнік  $-\frac{a_4}{r_4}$ . Адклаўшы на вертыкалі  $A$  адрэзак  $A_1A_1' = -1 \cdot \frac{a_4}{r_4}$  і злучыўшы  $A_1'$  з  $B_1$  прамой  $A_1'B_1$  атрымаем інфлюэнтную лінію для  $D_4$ , сапраўдную ад пункта  $B_1$  да правага краю панелі для раскоса  $D_4$  (пры яздзе па верху да пункта  $5_1$ , а пры яздзе па нізу да пункта  $6_1$ ). Калі груз  $P=1$  т знаходзіцца ўлева ад сячэння  $m$  т, то аналагічна папярэдняму маем:

$$-B(l-a_4) - D_4 \cdot r_4 = 0,$$

адкуль

$$D_4 = -B \cdot \frac{l-a_4}{r_4}.$$

Значыць інфлюэнтную лінію атрымаем, адклаўшы на вертыкалі  $B$  адрэзак  $B_1B_1' = 1 \cdot \frac{l-a_4}{r \cdot a_4}$  і правёўшы прамую  $A_1B_1'$ , якая будзе сапраўднай ад  $A_1$  да левага краю панелі для  $D_4$  (пры яздзе па верху да пункта  $3_1$ , а пры яздзе па нізу да пункта  $4_1$ ).

Правёўшы затым у межах панелі прамыя, якія злучаюць канцы гэтай панелі, спраектаваныя на прамыя  $B_1A_1'$  і  $A_1B_1'$  (пры яздзе па верху  $5_13_1$ , а пры яздзе па нізу  $6_14_1$ ), атрымаем усю інфлюэнтную лінію, якая вызначыць плошчу аднаго знака, у даным выпадку адмоўную, а іменна пры яздзе па нізу  $A_14_16_1B_1$ .

Аналагічна папярэдняму і тут лініі  $B_1B_1'$  і  $A_1B_1'$  перасякаюцца ў пункце  $C_1$ , які ляжыць на адной вертыкалі з  $C$ .

Падобным жа чынам будзеца інфлюэнтная лінія  $A_2$   $5_1$   $7_1$   $B_2$  для раскоса  $D_6$ , які падмаецца ўлева, плошча ўплыву, якая мае аднолькавы знак (+), і апорныя ардынаты:

$$A_2A_2' = +1 \cdot \frac{a_6}{r_6} \text{ і } B_2B_2' = +1 \cdot \frac{l-a_6}{r_6}$$

пры яздзе па верху, пры яздзе-ж па нізу гэта лінія прымае выгляд:  $A_2$   $4_1$   $6_1$   $B_2$ .

### § 93. Інфлюэнтныя лініі для рашоткі кансольных ферм

Разгледзім выпадак, калі паясы перасякаюцца ў вызначаным пункце. Няхай дана кансоль фермы  $AS$  (чарц. 232) на шарнір  $S$ , якой апіраецца незалежная бэлька  $CS$ . Няхай трэба пабудавать інфлюэнтную лінію для ўсіх раскоса  $D$ , які апускаецца ўлева. Правядзем сячэнне  $m$  т. Гэтае сячэнне, апроч  $D$ , сустрэне два стрыжаві паясоў, якія перасякаюцца ў пункце  $E$ . Абазначым даўжыню кансолі  $AS$  праз  $C$ , а адлегласць пункта  $E$  ад апоры  $A$  праз  $a$ , пераменную адлегласць груза  $P=1$  ад апоры  $A$  праз  $x$ .

Аналогічна папярэдняму бярем па Рытэру моманты сіл адносна пункта  $E$ . Момант сілы  $P=1$  атрымоўваецца:  $+1 \cdot (a-x)$ , а момант усілля  $D$ , якое прымаецца расцягнутым, у левай частцы кансолі:  $-D \cdot r$ . Такім чынам маем:

$$+1 \cdot (a-x) - D \cdot r = 0,$$

адкуль:

$$D = +1 \cdot \frac{a-x}{r}.$$

З тае прычыны, што гэта раўнанне першай ступені адносна  $x$ , то значыць і ардынаты інфлюэнтнай лініі мяняюцца па прамой якую можна пабудаваць, ведаючы дзве яе ардынаты.

Пры  $x=0$  будзе

$$D = +1 \cdot \frac{a}{r}, \text{ пры}$$

$$x = C$$

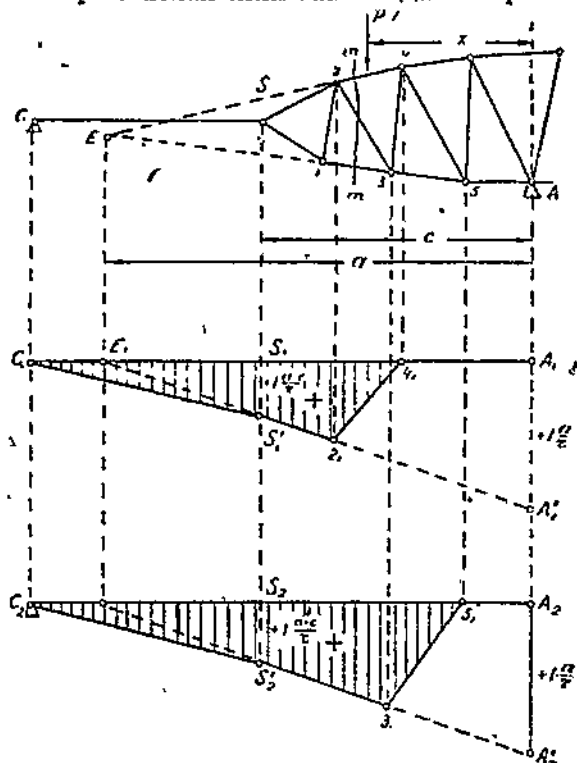
$$D = +1 \cdot \frac{a-c}{r}.$$

Адклаўшы гэтыя ардынаты ад  $A_1$  і  $S_1$  атрымаем пасля злучэння канцоў  $A_1'$  і  $S_1'$  прамой інфлюэнтную лінію, якая для правэркі павінна прайсці праз пункт  $E$ ; сапраўды, калі груз  $P=1$  будзе над пунктам  $E$ , то  $x=a$  і  $D=0$ .

Лінія  $S_1' A_1'$  будзе сапраўднай лініяй уплыву толькі ад шарніра  $S$  да пачатку панелі раскоса  $D$ . У самай справе: для незалежнай бэлькі

$CS$ , якая разглядаецца як панель, інфлюэнтная лінія павінна быць прамой і праходзіць праз  $S_1'$ . Другі пункт гэтай прамой вызначаецца з таго меркавання, што груз, які знаходзіцца ў пункце  $C$  і ўлева ад яго, не робіць уплыву на  $D$ . Значыць інфлюэнтнай лініяй для незалежнай бэлькі будзе прамая  $C_1 S_1'$ .

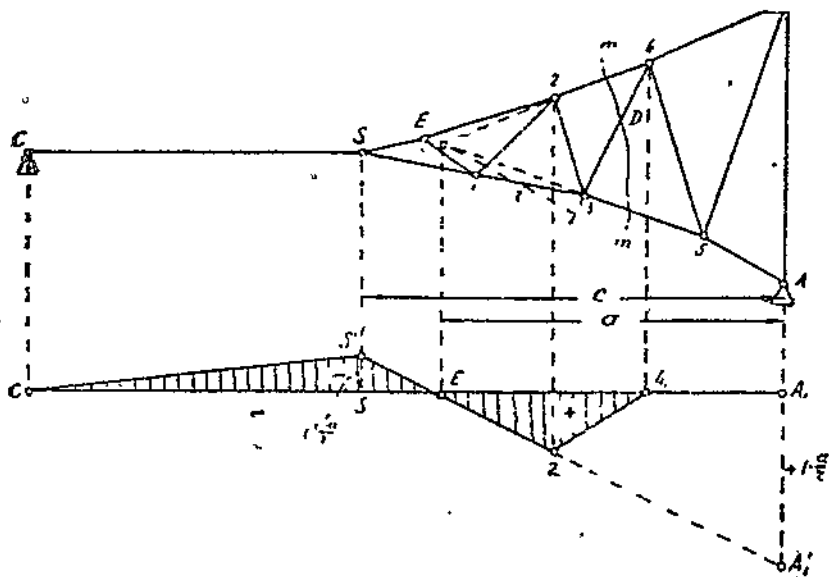
Для панелі-ж 2 4 (пры яздзе па верху) інфлюэнтная лінія ёсць таксама прамая, адным пунктам якой служыць пункт  $2_1$ , а другім— $4_1$ , і вызначаецца яна з таго меркавання, што калі



Чарц. 232.

груз  $P=1$  знаходзіцца ў пункце 4 павелі і ўправа ад яго, то ўсілле ў  $D$  роўна 0, бо на левую частку кансолі не дзейнічае ні адна знешняя сіла.

Калі пункт перасячэння  $E$  паясоў знаходзіцца між шарнірам  $S$  і сячэннем  $m$  (чарц. 233), то інфлюэнтная лінія складаецца з дадатнай і адмоўнай плошчы. Сапраўды, ардыната  $A_1 A_1'$ ,



Чарц. 233.

роўная  $1 \cdot \frac{a}{r}$ , будзе дадатнай, ардыната-ж  $S_1 S_1'$ , роўная  $1 \cdot \frac{a-c}{r}$ , будзе адмоўнай, бо  $c > a$ .

Для раскосаў, якія падыходзяць злева, ці для стоек усе вывады тыя-ж самыя, толькі знакі адваротныя, бо момант усілляў  $D$  будзе дадатным, і  $\Sigma M = 0$  прымае выгляд:

$$+1 \cdot (a-x) + D \cdot r = 0,$$

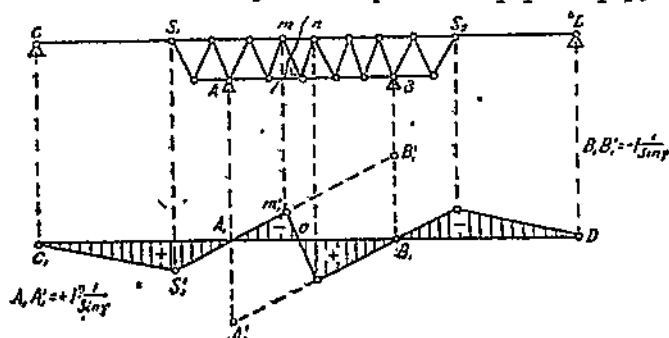
адкуль маем:

$$D = -1 \cdot \frac{a-x}{r}.$$

## § 94. Інфлюэнтныя лініі для рашоткі паміж апорнай часткі

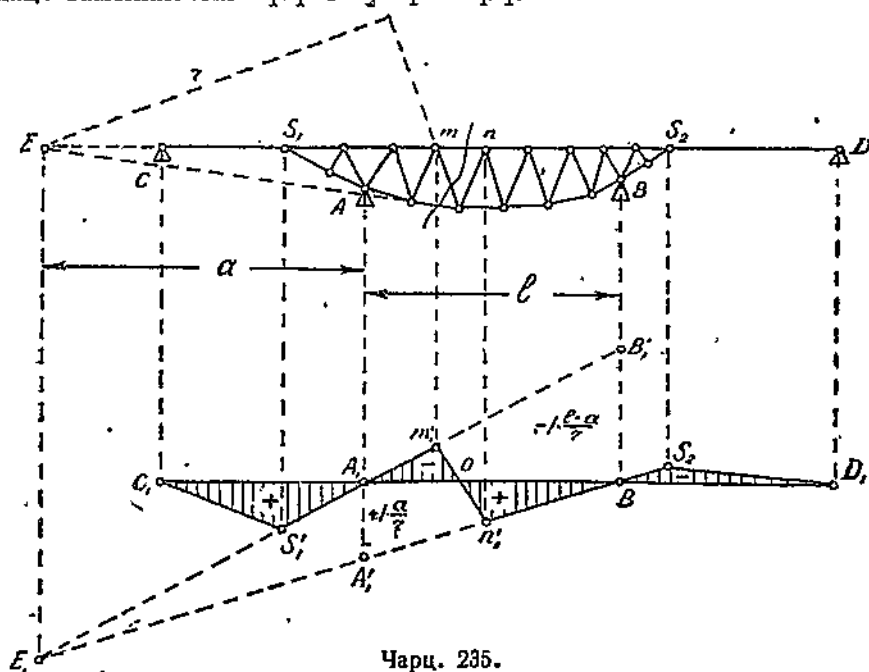
Інфлюэнтныя лініі для стрыжанняў рашоткі, размешчаных між апорамі  $A$  і  $B$  кансольнай фермы  $S_1 S_2$ , будуць таксама, як і для фермы  $AB$ , якая свабодна ляжыць канцамі на апорах  $A$  і  $B$

і у межах між апорами має форму інфлюентних ліній для решітки простої ферми. Далей за апорами  $A$  і  $B$  да шарніра  $S_1$  і  $S_2$  інфлюентними лініями служаць прямая  $A_1S_1'$  і  $B_1S_2'$ , які скла-



Чарц. 234.

даюць працяг прамых  $B_1'A_1$  і  $A_1'B_1$ . У межах-жа незалежных бэлек  $CS_1$  і  $S_2D$ , а таксама панелі  $m$  інфлюентнымі лініямі служаць замыкаючыя  $C_1S_1'$  і  $S_2'D_1$  і  $m_1n_1$ .



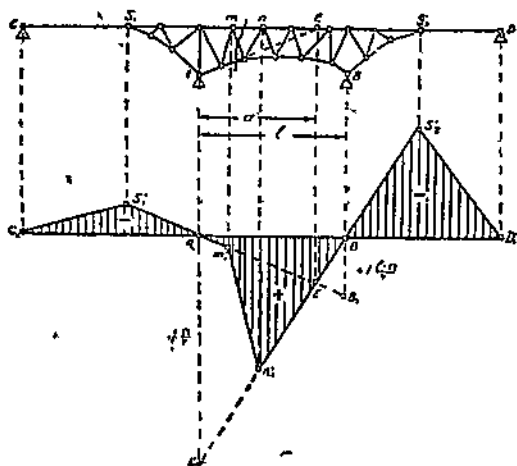
Чарц. 235.

Такім чынам пабудаваны інфлюентныя лініі раскосаў для трох выпадкаў:

1) для фермы з паралельнымі (чарц. 234);

2) для фермы, у якої кірунку сустраскаемых сячэннем  $m$   $m$  стрыжанняў паясоў перасякаюцца ў пункце  $E$ , што ляжыць па-за пралётам (чарц. 235);

3) для фермы, у якої паясы перасякаюцца ў пункце  $E$ , што ляжыць між апорамі  $A$  і  $B$  (чарц. 236).



Чарц. 236.

Ва ўсіх трох выпадках узяты раскосы, якія апускаюцца ўправа і язда мяркуецца па верху.

Для раскосаў, якія падымаюцца ўправа, змяняюцца толькі знакі ўчасткаў інфлюэнтных ліній.

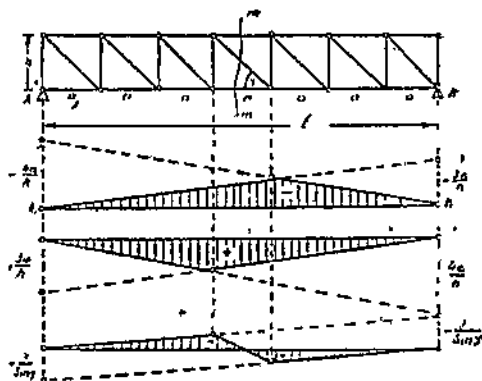
Пры яздзе па нізу інфлюэнтныя лініі будуць тыя-ж, толькі зменіцца палажэнне замыкаючых  $m_1' n_1'$ .

Калі адзін з кірункаў раскосаў заменен вертыкальнымі стой-

камі, то пабудаванне інфлюэнтных ліній для стоек і знакі ўчасткаў падобны раскосам супроцьлеглага кірунку нахіленых раскосаў для ферм без вертыкальных стоек.

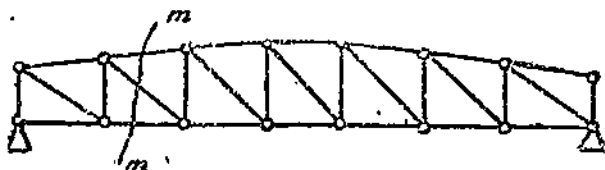
## § 95. Задачы

**Задача.** Для фермы (чарц. 237) пабудаваць інфлюэнтныя лініі ўсіх ляў верхняга і ніжняга паясоў і раскосы пры яздзе па верху. Адказ даны на чарц. 238.



Чарц. 237-238.

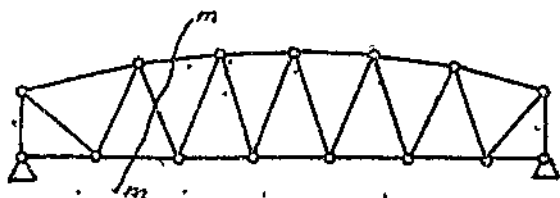
**Задача.** Побудоваць інфлюентныя лініі ўсіляў для фермы (фарт. 239) з нагрузкай у ніжнім поясе, для ўсіляў верхняга і ніжняга паясоў і раскосы ў другой панелі.



**Чарц, 239.**

**Задача.** Таксама для фермы на чарц. 240.

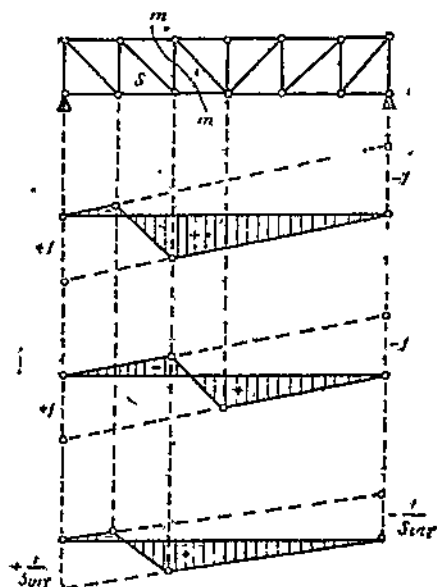
**Задача.** Пабудаваць інфлюэнтныя лініі для фермы з паралельнымі паясамі пры нагрузцы ў ніжніх і верхніх вузлах для трэцяй



Царц. 240.

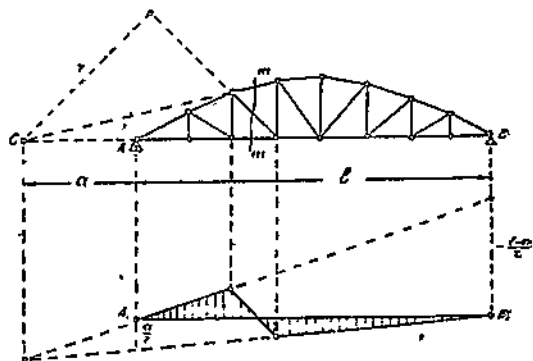
зд. левой опоры стойкі і раскосы ў другой панелі (чарц. 241).

Рашэнне дана на чарц. 242.



Чарц. 241—242.

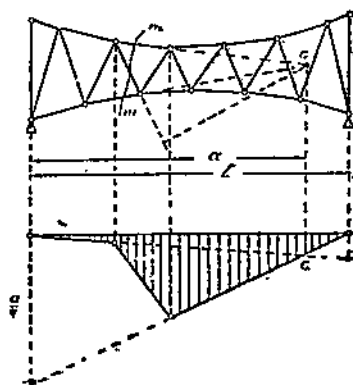
**Задача.** Побудувати інфлюентну лінію зусилля у раскосе параболічній фермы (чарц. 243), ведаючи, що пункт Ритера



Чарц. 243—244.

для другого раскоса знаходзіцца на адлегласці перпендыкуляра  $r$  ад яго, а ад левай апоры—на адлегласці  $a$ ; пралёт фермы— $l$ .

Рашэнне дана на чарц. 244.

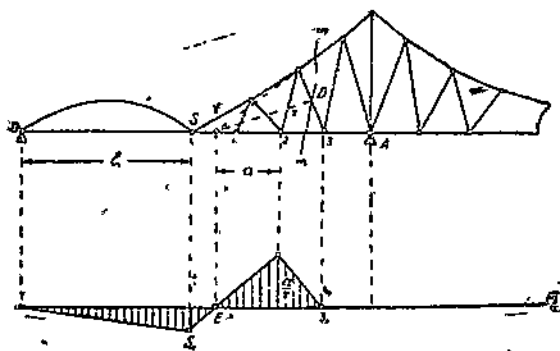


Чарц. 245—246.

**Задача.** Побудувати інфлюентныя лініі зусилля у раскосе параболічнай фермы (чарц. 245); пункт Ритера для 4 раскоса знаходзіцца на адлегласці перпендыкуляра  $r$  ад яго, а ад левай апоры—на адлегласці  $a$ .

Рашэнне дана на чарц. 246.

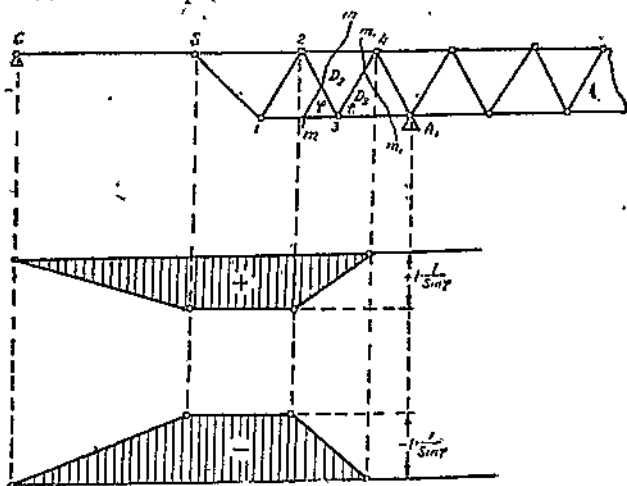
**Задача.** Побудоваць інфлюентну лінію ўсілляў у раскосе ўроўнаважанай фермы; пункт Рытэра раскоса знаходзіцца на



Чарц. 247—248.

адлегласці перпендыкуляра  $r$  ад яго, а ад вузла 2—на адлегласці  $a$  (чарц. 247).

Рашэнне дана на чарц. 248.



Чарц. 249—250.

**Задача.** Побудоваць інфлюентныя лініі ўсілляў у раскосах  $D_2$  і  $D_3$  з нагрузкай верхніх вузлоў для ўроўнаважанай фермы (чарц. 249).

Рашэнне дана на чарц. 250.

## ТРОХШАРНІРНЫЯ АРАЧНЫЯ ФЕРМЫ

## § 96. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у паясах

Калі ўзяць сячэнне  $ss$ , якое сустракае стрыжані  $U$  і  $O$  паясоў, то пунктамі вярчэння гэтых стрыжанняў будуць пункты  $D$  і  $I$ , а плячамі адпаведна:  $r_u$  і  $r_o$  (чарц. 251); раўнанне Рытэра будзе:

$$U = + \frac{M_D}{r_u}.$$

з тае прычыны, што:

$$M_D = M_D^0 - M_C^0 \cdot \frac{y_D}{f},$$

то значыць усілле ніжняга пояса будзе:

$$U = \frac{M_D^0}{r_u} - M_C^0 \cdot \frac{y_D}{f \cdot r_u}, \quad (58)$$

дзе  $M_D^0$  і  $M_C^0$  ёсць моманты для сячэнняў, праведзеных праз  $D$  і  $C$  простаў бэлькі пралётам  $AB$ . Адсюль вынікае, што інфлюэнтная лінія для ўсілля  $U$  атрымаецца, калі з ардынаты лініі  $M_D^0$ , раздзеленыя на  $r_u$ , вылічым ардынаты лініі  $M_C^0$ , памножаныя на  $\frac{y_D}{f \cdot r_u}$ , г. зн. з  $A_1 D_1' B_1$  з апорнай ардынатай  $A_1 A_1'' = +1 \cdot \frac{a_D}{r_u}$

вылічым  $A_1 C_1' B_1$  з апорнай ардынатай  $A_1 A_1'' = 1 \cdot \frac{a_D \cdot y_D}{f \cdot r_u}$ .

Трохвугольнік  $A_1 C_1' B_1$  аднак больш зручна будаваць, карыстаючыся нулявым пунктам  $E$  і праводзячы прамую  $A_1 E_1$  да перасячэння ў пункце  $C_1'$  з вертыкаллю праз  $C$  і злучаючы  $C_1'$  з  $B_1$ . Каб усе ардынаты вымяраць ад адной гарызанталі  $A_2 B_2$ , адкладаем  $A_2 A_2' = +1 \cdot \frac{a_D}{r_u}$  і, спраектаваўшы  $E$  на прамую  $A_2 B_2$  у пункт  $E_2$

праводзім прамую  $A_1' E_2$ , якую працягваем да пункта  $C_2'$  на вертыкалі  $C$ , і нарэшце праводзім  $A_2 D_2'$  і  $C_2' B_2$ . Такім чынам атрымоўваем інфлюэнтную лінію для  $U$ , якая складаецца з двух трохвугольнікаў: дадатнага  $A_2 D_2' E_2$  і адмоўнага  $E_2 C_2' B_2$ .

Аналогічна гэтаму будзем і лінію для 0, якая складаецца з адмоўнага і дадатнага трохвугольнікаў. Знакі тут адваротныя знакам для  $U$ , бо

$$0 = -\frac{M_I}{r_0}$$

і значыць:

$$0 = -\frac{M_I}{r_0} + M_C^0 \cdot \frac{y_I}{f \cdot r_0} \quad (59)$$

## § 97. Інфлюэнтныя лініі рашоткі трохшарнірных арачных ферм

Пры пабудове інфлюэнтных ліній для стрыжанняў рашоткі могуць быць два выпадкі: 1) стрыжані паясоў, якія сустрэкаюцца сячэннем  $s$ , пры сваім працягненні перасякаюцца ў канечных межах і 2) стрыжані паясоў паралельныя.

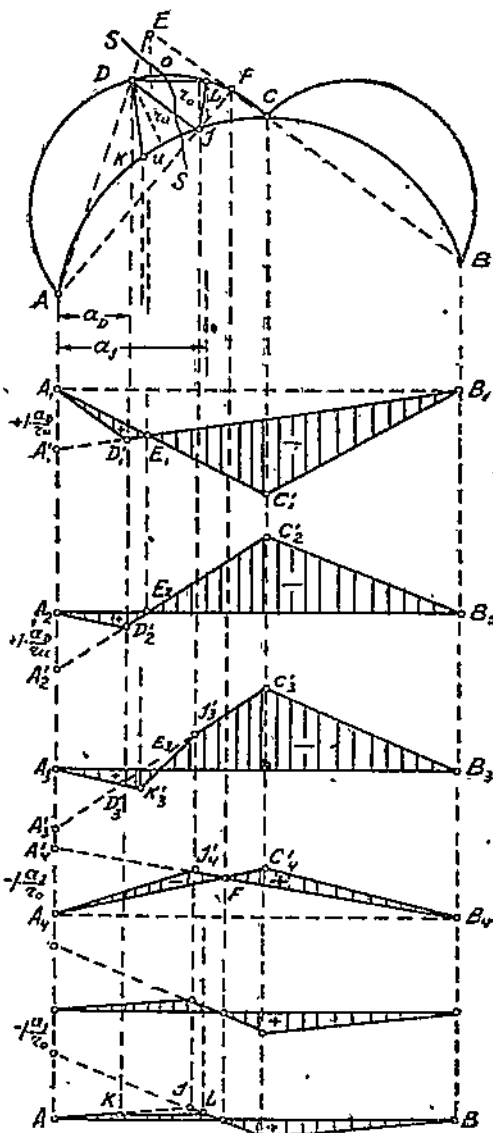
### 1. Стрыжані паясоў перасякаюцца

У данай ферме правядзем сячэнне  $s$  так, каб яно сустрэкала даны раскос  $D$  і два стрыжані паясоў, якія перасякаюцца ў пункце  $F$  (чарц. 252).

Калі груз  $P=1$  знаходзіцца правей сячэння  $s$ , то на левую частку фермы дзейнічаюць знешнія сілы  $A$  і  $H_1$  і ўсілі стрыжанняў  $D$ ,  $0$  і  $U$ . Момент двух апошніх усілляў адносна пункта  $F$  роўны 0, значыць, па Рытэру, застаецца, каб сума моментаў астатніх сіл  $A$ ,  $H_1$  і  $D$  адносна гэтага пункта была роўна 0. Значыць раўнанне моментаў будзе такое:

$$+A \cdot a - H_1 \cdot \cos \alpha \cdot y - D \cdot r_d = 0,$$

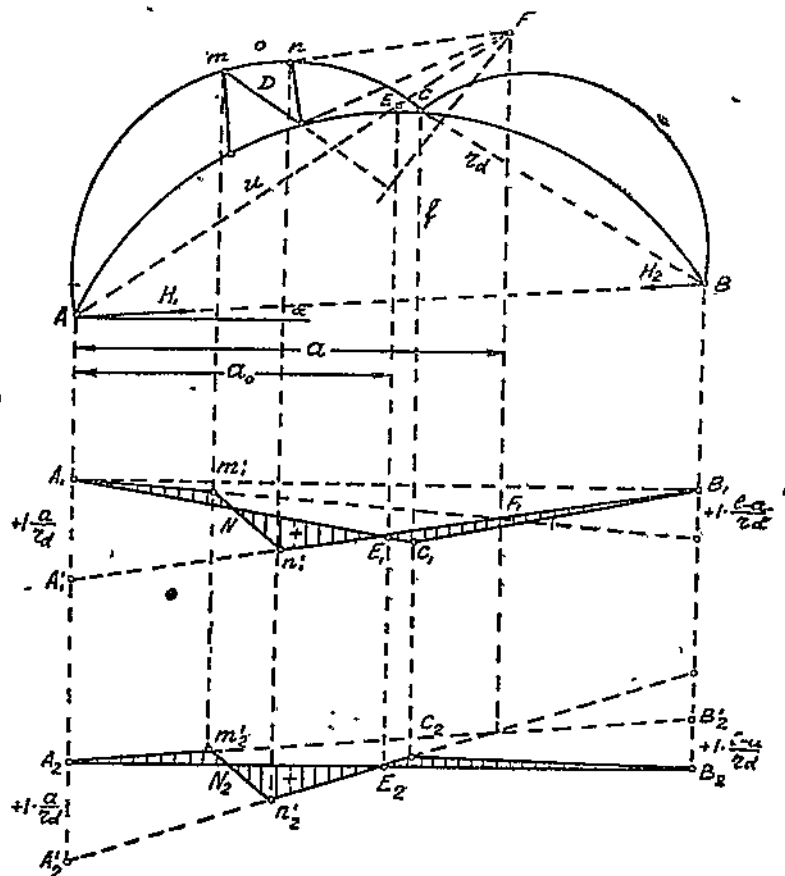
ці, з тае прычыны, што  $H_1 \cdot \cos \alpha = H$  і  $H = \frac{M_C^0}{f}$ ,



Чарц. 251.

дзе  $H$  ёсць гарызантальны распор  $M_C^0$ —момант для пункта  $C$  прастай бэлькі,  $A$ —апорны ціск, які для прастай бэлькі паралёгам  $I$ ,  $y$ —адлегласць па вертыкалі пункта  $F$  ад лініі апор  $AB$  і  $f$ —адлегласць па вертыкалі шарніра  $C$  ад лініі  $AB$ . Падставіўшы гэтыя велічыні, атрымваем:

$$+A \cdot a - M_C^0 \cdot \frac{y}{f} - D \cdot r_d = 0,$$



Чарц. 252.

адкуль:

$$D = A \cdot \frac{a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d} \quad (60)$$

Адсюль вынікае, што ардынаты лініі для  $D$  у межах ад  $B$  да панелі, г. зн. да пункта  $n$  становяць сабою розніцу ардынаты ліній для  $A \cdot \frac{a}{r_d}$  і лініі для  $M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d}$ .

Першая з іх будзеца адкладаннем на апорнай вертыкалі  $A$  адрэзка  $A_1 A_1' = +1 \cdot \frac{a}{r_d}$  і правядзеннем прамой  $B_1 A_1'$ , а другая—адрэзка  $A_1 A_1' = \frac{a_0 \cdot y}{f \cdot r_d}$ . Калі-ж груз  $P$  будзе знаходзіцца ўлева ад сячэння, то раўнанне момантаў правай часткі будзе такое:

$$-B \cdot (l-a) + M_C^0 \cdot \frac{y}{f} + D \cdot r_d = 0,$$

адкуль:

$$D = +B \cdot \frac{l-a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d}. \quad (61)$$

Значыцца інфлюэнтную лінію для ўчастка ад  $A$  да  $m$  можна знайсці, калі на апорнай вертыкалі  $B$  адкласці адрэзак  $B_1 B_1'' = +1 \cdot \frac{l-a}{r_d}$  і правесці прамую  $A_1 B_1'$ , якая перасякаецца з прамой  $B_1 A_1'$  у пункце  $F_1$  на вертыкалі з пункта  $F_1$  і адрэзак  $B_1 B_1'' = \frac{(l-a_0)y}{f \cdot r_d}$ . У межах павелі  $m$  інфлюэнтнай лініяй служыць прамая  $m_1' n_1'$ .

Для пабудовы лініі  $M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d}$  лепш карыстацца нулявым пунктам. Лінія гэта атрымліваецца з інфлюэнтнай лініі  $M$  для пункта  $C$ , як для простага бэлькі, памножаннем яе ардынат на пастаянны каэфіцыент  $\frac{y}{f \cdot r_d}$  і таму мае выгляд трохвугольніка з вяршыняй пад пунктам  $C$ .

Нулявы пункт  $E$ , г. зн. палажэнне груза  $P$ , пры якім момант у пункце  $E$  роўны 0, можна знайсці, калі правесці прамую  $AF$  да перасячэння ў пункце  $E$  з прамой  $BC$ . Спраектаваўшы пункт  $E$  на прамую  $B_1 A_1'$  у пункт  $E_1$ , праводзім прамую  $A_1 E$  і працягваем яе да перасячэння з вертыкаллю праз  $C$  у пункце  $C_1'$ , якую і злучаем з пунктам  $B_1$  прамой  $C_1' B_1$ . Вылічыўшы такім чынам з плошчы ўплыву  $A_1 m_1' n_1' B_1$  плошчу  $A_1 C_1' B_1$ , атрымаем інфлюэнтную лінію для  $D$ , якая складаецца для выпадку, паданага на чарцяжы з трох участкаў: адмоўнага  $A_1 N$ , дадатнага  $NE_1$  і адмоўнага  $E_1 B_1$ . Каб усе ардынаты вымяраць ад адной прамой  $A_2 B_2$  пабудову інфлюэнтнай лініі змяняюць, як паказана на чарцяжы (252—с).

**Практыкаванне.** Пабудова інфлюэнтную лінію для выпадку, паданага на папярэднім чарцяжы, але з яздой па візу.

Разгледзім выпадак, калі пункт  $F$  перасячэння паясоў знаходзіцца за апорай. Калі пункт  $F$  ляжыць управа ад апоры  $B$  (чарц. 253), то аналагічна папярэдняму маем:

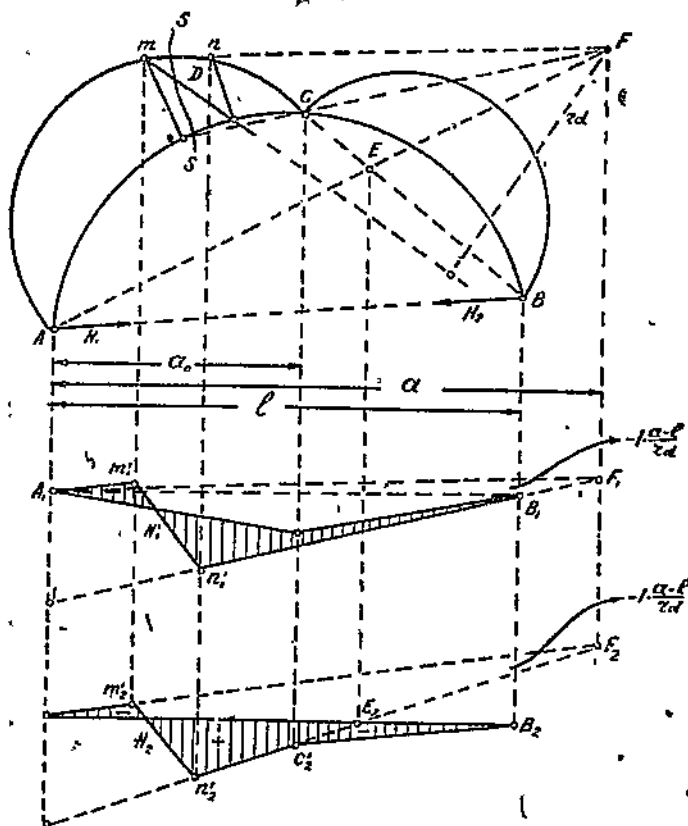
а) калі груз  $P=1$  знаходзіцца ўправа ад сячэння:

$$D = +A \cdot \frac{a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d} \quad (62)$$

звачыць для атрымання першай інфлюентнай лініі адкладаем на апорнай вертыкалі  $A$  адрэзак  $A_1A'_1$ , роўны  $+1 \cdot \frac{a}{r_d}$  і

б) калі груз  $P=1$  знаходзіцца ўлева ад сячэння, то:

$$D = B \cdot \frac{l-a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d}$$



Чарц. 253.

ці, у звязку з тым, што  $a > l$ , то  $l-a$  ёсць велічыня адмоўная і

$$l-a = -(a-l), \text{ то}$$

$$D = -B \cdot \frac{a-l}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d} \quad (63)$$

Такім чынам на вертыкалі  $B$  трэба адкласці ардынату  $B_1B'_1 = -1 \cdot \frac{a-l}{r_d}$ . У астатнім пабудова аналагічна папярэдняму.

**Практикування.** Побудувати інфлюентну лінію  $D$ , коли пункт пересічення паясоу  $F$  знаходиться за опорою  $A$  (чарц. 254).

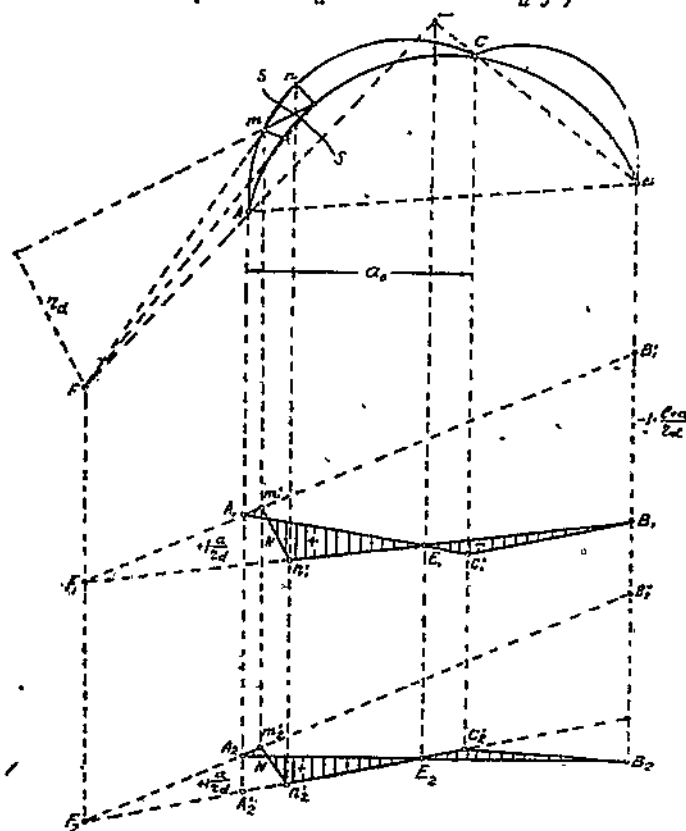
**Указание.**

$$D = A \cdot \frac{a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d};$$

$$\left( A \cdot \frac{a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{-y}{-r_d \cdot f} \right);$$

$$D = -B \cdot \frac{l+a}{r_d} - M_C^0 \cdot \frac{y}{f \cdot r_d};$$

$$\left( B \cdot \frac{l - (-a)}{-r_d} - M_C^0 \cdot \frac{-y}{-r_d \cdot f} \right).$$

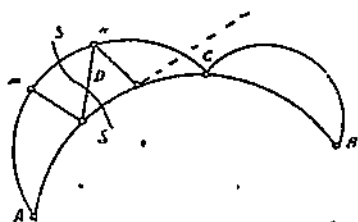


Чарц. 254.

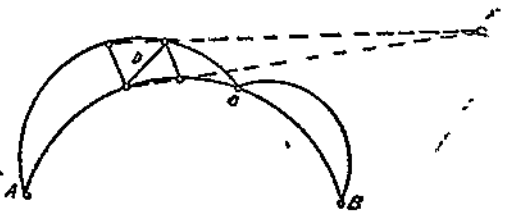
Адсюль вынікае, што для пабудовы інфлюентнай лінії  $D$  патрэбна на апорных вертыкалях адкладзі ардынаты:

$$A_1 A_1' = A_2 A_2' = +1 \cdot \frac{a}{r_d} \quad \text{і} \quad B_1 B_1' = B_2' B_2'' = -1 \cdot \frac{l+a}{r_d}.$$

**Практикування.** Побудоваць інфлюентныя лінії для раскосаў, якія апускаюцца ўлева, і для стоек, калі пункт  $F$  знаходзіцца між апорамі (чарц. 255).

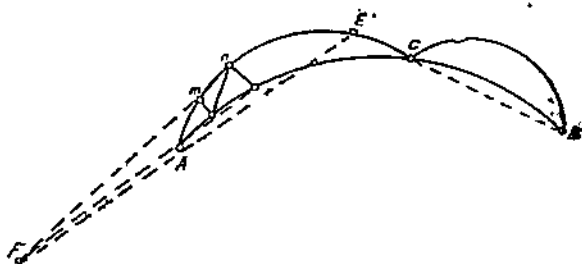


Чарц. 255.



Чарц. 256.

**Практикування.** Побудоваць інфлюентную лінію для раскоса, які апускаецца ўлева, і для стойкі, калі пункт перасячэння паясоў  $F$  знаходзіцца ўправа ад апоры  $B$  (чарц. 256).



Чарц. 257.

**Практикування.** Побудоваць інфлюентную лінію для раскоса, які апускаецца ўлева, ці стойкі, калі пункт перасячэння  $F$  паясоў знаходзіцца ўлева ад апоры  $A$  (чарц. 257).

## 2. Стрыжэнні паясоў паралельныя

Калі стрыжэнні паясоў, якія сустракаюцца сячэннем, паралельныя, то раўнаннем момантаў карыстацца нельга, бо  $a = \infty$  і  $r_d = \infty$  і выраз  $\frac{a}{r_d}$  робіцца неазначаным (чарц. 258). Прыстасуем у гэтым выпадку раўнанне  $\Sigma u = 0$ , прычым за вось  $u$  прымем прамую  $OS$ , перпендыкулярную да кірункаў паясоў. Праекцыі ўсіх знешніх сіл, якія знаходзяцца ўлева ад сячэння, на гэту вось складаюць палярэчную сілу  $Q$ , што мае значэнне:

$$Q = Q^0 \cdot \cos \varphi - H \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

і ўмова роўнавагі  $\Sigma = 0$  прыме выгляд (для часткі ўлева ад сячэння):

$$-D \cdot \sin \gamma + Q = 0,$$

[адкуль:

$$D = \frac{Q}{\sin \gamma}, \text{ або } D = \frac{Q^0 \cdot \cos \varphi}{\sin \gamma} - M_C^0 \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma}, \quad (64)$$

дзе  $\gamma$  — кут, які ўтвараецца раскосам  $D$  з кірункам паясоў  $O$  і  $D$ ;  $Q^0$  — лапарочная сіла прастай бэлькі  $AB$ ;  $M_C^0$  — выгібаючы момант для пункта  $C$  прастай бэлькі.

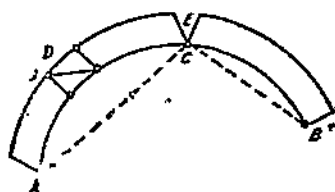
З прыведзеных формул вынікае, што лінія для  $D$  складаецца з лініі  $Q^0$ , прычым усе ардынацыі яе памнажаюцца на пастаянную множнік  $\frac{\cos \varphi}{\sin \gamma}$ ; і з яе адыходзяць лініі  $M_C^0$ , ардынацыі якой памнажаюцца на  $\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{f \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma}$ .

Для пабудовы першай лініі на апорных вертыкалях складаюць адрэзкі  $A_1A_1' = +1 \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \gamma}$  і  $B_1B_1' = -1 \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \gamma}$ , а для другой лініі

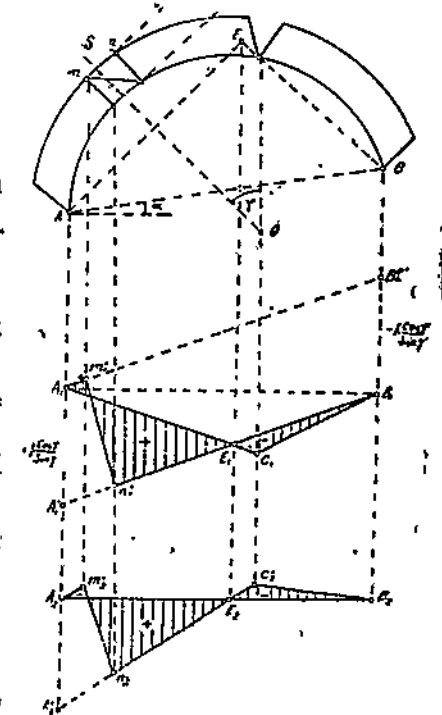
лежы карыстацца нулявым пунктам  $E$ , які атрымліваецца на перасячэнні  $BC$  з прамой  $AE$ , паралельнай паясам  $O$  і  $U$ .

Участак лініі  $EB$  можа быць адмоўным, калі  $E$  ляжыць лявей  $C$ , быць роўным 0, г. зн. злівацца ў адну прамую, калі  $E$  супадае з  $C$ , і дадатным, калі  $E$  знаходзіцца ўправа ад  $C$ .

Практыкаванне. Побудаванне інфлюэнтную лінію для раскоса фермы з паралельнымі паясамі, калі пункт  $E$  супадае з  $C$  (чарц. 259).



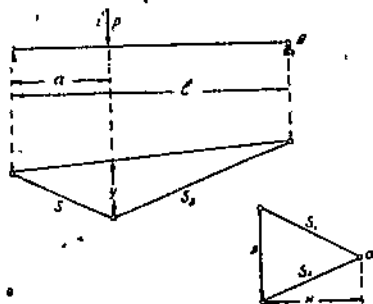
Чарц. 259.



## ВЫЗНАЧЭННЕ НАЙБОЛЬШЫХ ЗНАЧЭННЯЎ ВЫГІБАЮЧЫХ МОМАНТАЎ І ПАПЯРОЧНЫХ СІЛ

### § 98. Асноўныя паняцці

Калі нагрузка рухомая, то велічыні апорных рэакцый, момантаў, папярочных сіл у пэўным сячэнні змяняюцца. Значыць, каб разлічыць бэльку для кожнага сячэння, неабходна вызначыць гэтыя велічыні пры кожным з



Чарц. 261.

бесканечнага мноства палажэнняў нагрузкі. Але з тае прычыны, што разлік бэлькі і інш. утвараецца для вызначэння трываласці яе, а для трываласці яе неабходна, каб найбольшае напружанне ў любым сячэнні не перавышала пэўнае мяжы, то задача зводзіцца:

1) да вызначэння максімум'а гэтых велічынь у адвольна выбраным сячэнні і

2) да вызначэння палажэння таго сячэння бэлькі, для якога гэтыя велічыні прымаюць абсалютны максімум для данай бэлькі.

### § 99. Непасрэдная нагрузка згрупаванымі грузамі

Разгледзім некалькі прыватных выпадкаў нагрузкі:

1) па бэльцы рухаецца адзін груз (чарц. 261). Найбольшае значэнне апорнай рэакцыі  $A$ , якая вызначаецца з раўнання

$A = \frac{P(l-x)}{l}$ , атрымаецца пры  $x=0$ , і тады  $\text{Max. } A$  будзе роўны  $P$ .

Момант у любым сячэнні на адлегласці  $x$  ад апоры  $A$  будзе мець максімум, калі груз  $P$  будзе знаходзіцца непасрэдна над сячэннем

$$M_{\text{max}} = A \cdot x = \frac{P \cdot (l-x)}{l} \cdot x = P \cdot \left( x - \frac{x^2}{l} \right).$$

Графічна  $M_x = y_x \cdot H$ , де  $y_x$  єсть ардината вярвачнага многавугольніка, пабудаванага для сілы  $P$ .

Для вызначэння сячэння, у якім  $M_{\max}$  дасягае свайго абсалютна найбольшага значэння, неабходна знайсці тахітум функцыі  $M_{\max}$ . Прыроўніваючы 0 першую выводную, вызначаем  $x$ :

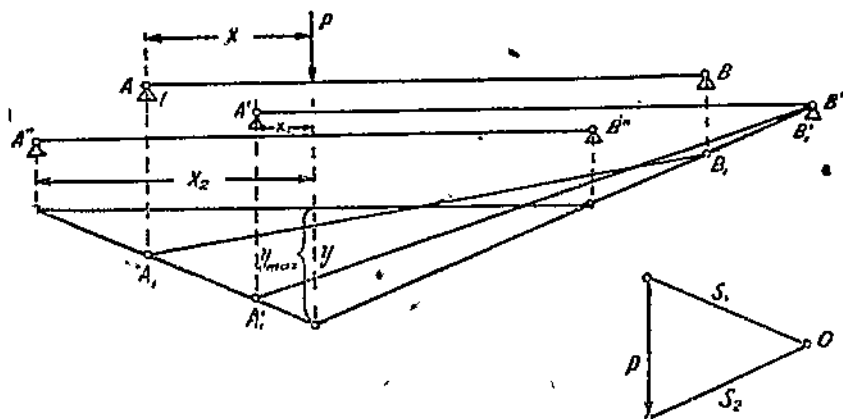
$$\frac{dM_{\max}}{dx} = P - \frac{2P}{l} \cdot x = 0,$$

адкуль  $x = \frac{l}{2}$ , г. зн. абсалютнага тахітум'а момант дасягае для сячэння пасярэдзіне бэлькі і мае значэнне:

$$M_{\max \text{ abs}} = \frac{P \cdot l}{4}. \quad (65)$$

Калі параўнаць гэты момант з момантам ад роўнамерна-размеркаванай нагрузкі, якая мае тую-ж велічыню, г. зн. калі  $pl = P$ , то пры апошняй маем:

$$M_{\max \text{ abs}} = \frac{pl^2}{8} = \frac{p \cdot l}{8} = \frac{P \cdot l}{8},$$



Чарц. 262.

г. зн. для бэлькі згрупаваны груз дае ўдвая большы выгібаючы момант, чым роўнавялікая яму размеркавальная нагрузка.

Графічны момант у любым сячэнні вызначаецца праз ардинату між вярвачным многавугольнікам і замыкаючай. Такім чынам для кожнага сячэння бэлькі і адпаведнага яму палажэння груза над гэтым сячэннем, неабходна будаваць асобны вярвачны многавугольнік. Але задачу можна спрасіць, калі дапусціць, што груз *нерухомы*, а *рухаецца над ім бэлька*.

Вярвачны многавугольнік  $S_1 S_2$  не мяняецца пры гарызантальным перасоўванні бэлькі, але кожнаму паасобнаму палажэнню яе адносна груза  $P$  адпавядае асобная замыкаючая:  $A_1 B_1$ —палажэнню сячэння на адлегласці  $x$  ад апоры A (чарц. 262);  $A_1' B_1'$ —

на  $x_1$  ад  $A$  і г. д. Кожнаму-ж палажэнню замыкаючай адпавядае асобная ардыната  $y$ .

Перасоўваючы паступова бэльку, магчыма знайсці нарэшце і тое палажэнне яе, пры каторым  $y$ , а значыць і  $M$  атрымоўваюць сваё максімальнае значэнне. У даным выпадку яно будзе для сярэзіны бэлькі.

Папярочная сіла  $Q$  для сячэння на адлегласці  $x$  ад апоры  $A$  будзе:  $Q = A$  у тым выпадку, калі сіла  $P$  знаходзіцца ўправа ад сячэння, і  $Q = A - P$ , калі сіла  $P$  знаходзіцца ўлева ад сячэння.

З тае прычыны, што  $A$  заўсёды меншая  $P$ , то  $A - P$  будзе мець адмоўны знак, а значыць тах,  $Q$  можа быць толькі пры палажэнні сілы  $P$  управа ад сячэння. Для вызначэння палажэння груза  $P$ , пры якім атрымоўваецца тах.  $Q$ , разгледзім раўнанне  $Q = A$ . Замяніўшы  $A$  яго значэннем:

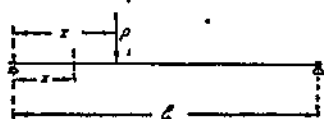
$$\frac{P(l-z)}{l},$$

атрымаем:

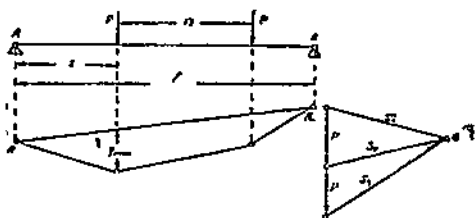
$$Q = \frac{P(l-z)}{l} \quad (\text{чарц. 263}).$$

Функцыя  $\frac{P(l-z)}{l}$  мае тах пры  $z = x$ , тады

$$\text{тах. } Q = \frac{P(l-x)}{l}.$$



Чарц. 263.



Чарц. 264.

З апошняга вынікае, што  $Q$  будзе абсалютна найбольшай у тым сячэнні, для якога  $x$  мае найменшае значэнне, а іменна для сячэння на самай апоры, дзе  $x = 0$  і для яго:

$$\text{тах. abs } Q = \frac{P(l-0)}{l} = P. \quad (66)$$

Разгледзім цяпер выпадак, калі на бэльку дзейнічаюць дзве роўныя сілы, якія перасоўваюцца па бэльцы на адлегласць  $a$  адна ад другой (чарц. 264).

Момант для сячэння  $x$  будзе мець тах, калі адзін з грузаў будзе знаходзіцца на сячэнні, а другі на бэльцы.

$$\begin{aligned} \text{тах } M_x &= A \cdot x, \\ \text{дзе } A &= \frac{P(l-x) + P(l-x-a)}{l} = \frac{P(2l-2x-a)}{l} \end{aligned}$$

і значить:

$$\text{Max. } M_x = \frac{P(2l - 2x - a) \cdot x}{l} = 2Px - \frac{2P}{l} \cdot x^2 - \frac{Pa}{l} \cdot x.$$

Для визначення сячення, у котрому  $M$  буде найбільшим, треба знайти тах функції—тах  $M_x$ ; прирівнюючи першу виводчую нулю, атримаєм:

$$\frac{d(\text{тах } M_x)}{dx} = 2P - \frac{4P}{l} \cdot x - \frac{Pa}{l} = 0,$$

адкуль:

$$x = \frac{1}{2}l - \frac{1}{4}a, \quad (67)$$

г. зн. тах abs  $M$  атримоу-  
ваецца для сячення, яке зна-  
ходзіцца ад сярэдзіны бэлькі  
на  $\frac{1}{4} \cdot a$ .

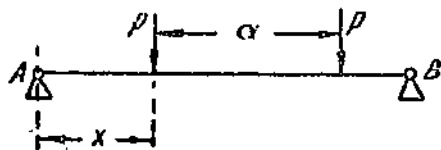
Графічнае вызначэнне моманту. Будзем адзім вярочным многавугольнік  $S_1S_2S_3$  (чарц. 265) і перасоўваем бэльку так, каб сячэнне стала пад першым грузам. Ардыната пад грузам вызначыць момант у кожным сячэнні.

Мах abs у вызначаецца спробамі перасоўвання бэлькі ў той ці другі бок пад грузам. Папярочная сіла для любога сячэння будзе мець тахімум, калі левы груз будзе над сячэннем, правы-ж управа ад яго, бо толькі грузы, якія знаходзяцца ўправа ад сячэння, даюць дадатную папярочную сілу (чарц. 266).

Пры такім размяшчэнні грузаў:

$$Q = A = \frac{P(l-x) - P(l-x-a)}{l} = \frac{P(2l-2x-a)}{l}.$$

Абсалютна найбольшая папярочная сіла будзе там, дзе  $(2l-2x-a)$  будзе найбольшым, г. зн. для сячэння на апоры  $A$ , дзе  $x=0$  і

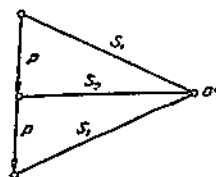
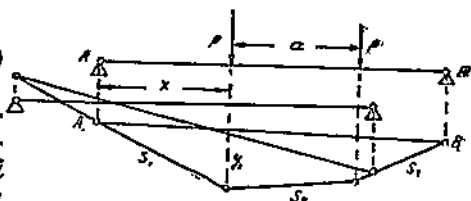


Чарц. 266.

$$A = \frac{P(2l-a)}{l} = Q.$$

З папярэдняга можна вы-  
весці наступныя заключэнні  
для вызначэння тах.  $M$  і тах.  $Q$   
у адвольным сячэнні:

1) для атрымання тах.  $M$  неабходна на бэльку змясціць магчыма больш грузаў, прычым найбольшыя грузы неабходна змясціць як мага бліжэй да сячэння, а адзім з іх непасрэдна над сячэннем;



Чарц. 265.

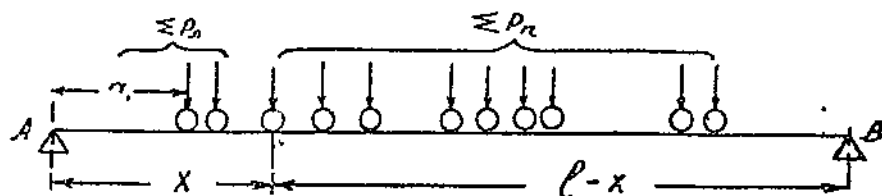
2) для атрымання тах.  $Q$  неабходна самая цяжкія грузы размясціць управа ад сячэння магчыма бліжэй да яго, прычым першы і найбольшы груз змясціць над самым сячэннем; на частцы бэлькі ўправа ад сячэння як мага больш грузаў.

Больш дэталёва з найзручнейшым размяшчэннем грузаў можна пазнаёміцца пры вывучэнні інфлюэнтных ліній, цяпер-жа прайдзем да вызначэння тах.  $M$  і тах.  $Q$  ад рухомай сістэмы, узаемна звязаных грузаў, напрыклад, чыгуначных цягвікоў, рада павозак, аўтамабіляў і інш. Пры гэтым адзначым, што розніца гэтых сістэм не мае ўплыву на ход і характар вызначэння момантаў і папярочных сіл.

## § 100. Выгібаючы момант ад сістэмы рухомах грузаў.

Калі па бэльцы, якая свабодна ляжыць на двух апорах, рухаецца сістэма грузаў (чарц. 267)  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , то для атрымання тах.  $M$  для адвольнага сячэння на адлегласці  $x$  ад левай апоры  $A$ , неабходна размясціць грузы як указана вышэй. Пасля такой устаноўкі:

$$\text{тах. } M = A \cdot x - \sum P_{\text{лев.}} \cdot (l - x).$$



Чарц. 267.

Усё пытанне заключаецца толькі ў тым, якое кола трэба паставіць над сячэннем, каб атрымаць тах.  $M_x$ . Груз, які трэба паставіць над сячэннем, каб атрымаць тах.  $M_x$  называецца **крытычным**. Для вызначэння крытычнага груза Вінклер вывёў раўнанне:

$$\frac{\sum P_{\text{лев.}}}{x} = \frac{\sum P_{\text{прав.}}}{l - x},$$

якому павінен задавальняць крытычны груз. Умова гэтая аднак для згрупаваных грузаў дакладна выканана не можа быць, і таму Шэфлер замест гэтага раўнання дае дзве няроўнасці:

$$\frac{\sum P_{\text{лев.}} + P}{x} > \frac{\sum P_{\text{прав.}}}{l - x} \quad \text{і} \quad \frac{\sum P_{\text{лев.}}}{x} < \frac{\sum P_{\text{прав.}} + P}{l - x}, \quad (69)$$

дзе  $P$  ёсць крытычны груз, змешчаны над сячэннем.

Графічна крытычны груз можна вызначыць такім спосабам: на апорнай вертыкалі  $A$  адкладваюцца паслядоўна грузы:  $P_1, P_2, P_3, \dots$

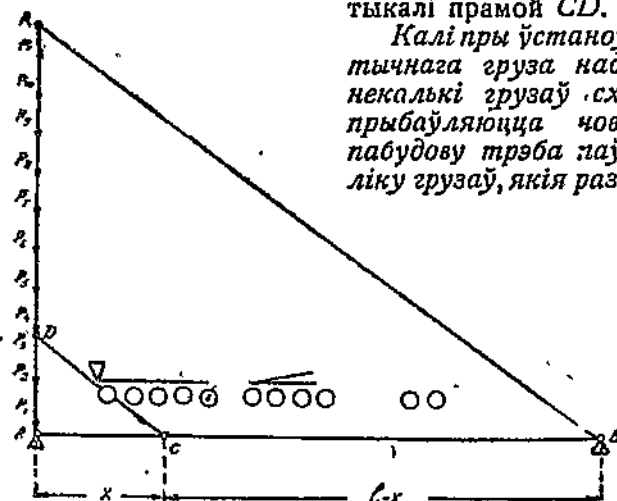
якія змяшчаюцца на бэльцы (чарц. 268). Канец апошняга груза  $A$  злучаюць з  $B$ ; праз сячэнне  $C$  праводзяць  $CD$  паралельна  $AB$ . Крытычным грузам будзе служыць груз, які перасякаецца на вертыкалі прамой  $CD$ .

Калі пры ўстаноўцы знойдзенага крытычнага груза над сячэннем адзін ці некалькі грузаў сходзяць з бэлькі ці прыбаўляюцца човыя, то ўказаную пабудову трэба паўтарыць для новага ліку грузаў, якія размясціліся на бэльцы.

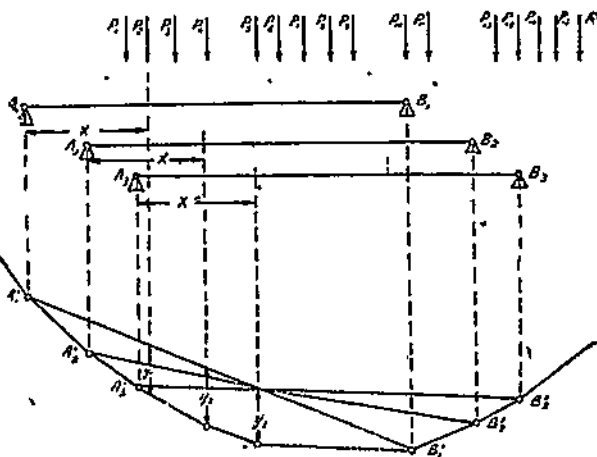
Графічнае вызначэнне тах-М у любым сячэнні. Для данай сістэмы грузаў будуюцца вярочныя многавугольнікі (чар. 269), прычым грузаў трэба браць больш, чым магчыма змясціць на бэльцы. Далей бэлька перасоўваецца пад грузамі так, каб сячэнне стала пад адным з іх, напрыклад, пад грузам  $P_2$  пры палажэнні бэлькі  $A_1B_1$ , пасля праводзяцца апорныя вертыкалі  $A_1A_1'$  і  $B_1B_1'$ , да перасячэння ў пунктах  $A_1'$  і  $B_1'$  з вярочным многавугольнікам і замыкаючая  $A_1'B_1'$ , і пад сячэннем вымяраецца ардыната  $y_1$ . Потым бэлька перасоўваецца ў палажэнне  $A_2B_2$  так, каб сячэнне стала пад другім грузам, напрыклад  $P_4$ ; правёўшы апорныя вертыкалі і замыкаючую вымяраюць ардынату  $y_2$ . Калі  $y_2 > y_1$ , то такім-жа спосабам вымяраюцца і ўсе іншыя ардынаты датуль, пакуль апошняе  $y$  не атрымаецца меншым за папярэдняе. Калі-ж  $y_2 < y_1$ , то бэлька перасоўваецца ў адваротным кірунку.

Знайшоўшы такім чынам  $y_{max}$ , атрымаем:

$$\text{тах} M = y_{max} \cdot H.$$



Чарц. 268.



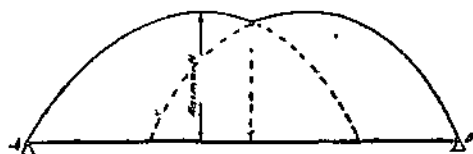
Чарц. 269.

Гэта найбольшы момант ад рухомай нагрузкі, да якога трэба прыкласці яшчэ момант ад уласнай вагі бэлькі.

Калі над кожным сячэнні адкласці тую ардынату  $y$ , якая атрымаецца, калі ў даным сячэнні існуе найбольшы момант, то атрымаецца *крывая найбольшых момантаў* (чарц. 270).

Гэтая крывая складаецца з двух галін, адпаведных руху грузаў у той ці ў другі бок.

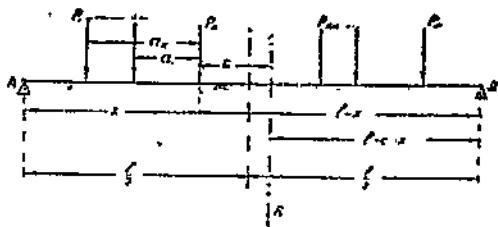
Самы найбольшы момант называецца *Maximum moment* (тах тах  $M$ ); у бэльцы ён атрымоўваецца не пасярэдзіне, а недалёка ад яе. Для разліку вельмі важна ведаць палажэнне і велічыню гэтага самага найбольшага моманту. З тае прычыны, што тах тах  $M$ , адпавядае



Чарц. 270.

сячэнню недалёка ад сярэдзіны бэлькі, то трэба, змясціўшы на бэльцы магчыма большы лік грузаў, самыя цяжкія з іх змясціць каля сярэдзіны бэлькі. Мах тах  $M$  можна чакаць у сячэнні пад тым грузам, які ляжыць найбліжэй да роўнадзейнай усіх грузаў, якія змяшчаюцца на бэльцы. Няхай гэты груз будзе  $P_k$  (чарц. 271).

Пры змене палажэння на бэльцы сістэмы грузаў, адпаведна змяняецца і  $x$ , але адлегласць  $S$  між грузам  $P_k$  і роўнадзейнай  $R$  усіх грузаў, якія знаходзяцца на бэльцы, застаецца пастаяннай да-туль, пакуль не зменіцца колькасць грузаў.



Чарц. 271.

Раўнанне моманту для сячэння пад грузам  $P_k$  будзе:

$$M_x = A \cdot x - \sum_0^k P \cdot a$$

і тах тах  $M$  будзе ў тым сячэнні, у якім гэта функцыя дасягае свайго тах, а гэта будзе пры  $\frac{dM_x}{dx} = 0$ . Падставіўшы ў раўнанне

моманту значэнне  $A = \frac{R \cdot (l - x - c)}{l}$ , атрымаем:

$$M_x = \frac{R}{l} \cdot (l - x - c) \cdot x - \sum_0^k P \cdot a$$

або

$$M_x = \frac{R}{l} \cdot l \cdot x - \frac{R}{l} \cdot x^2 - \frac{R}{l} \cdot c \cdot x - \sum_0^k P \cdot a,$$

адкуль

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{R \cdot l}{l} - \frac{R \cdot 2x}{l} - \frac{R}{l} \cdot c = 0,$$

або

$$l - 2x - c = 0,$$

адкуль

$$x = \frac{l}{2} - \frac{c}{2}, \quad (70)$$

г. зн. роўнадзейная ўсіх грузаў, якія знаходзяцца на бэльцы і сячэнне, для якога ёсць тах тах  $M$ , стаяць сіметрычна да сярэдзіны бэлькі.

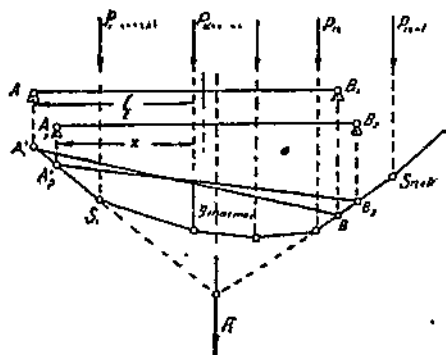
Велічыня тах тах  $M$  атрымліваецца з наступнай формулы:

$$\text{тах тах } M = \frac{R \cdot x^2}{l} = \mu,$$

дзе  $\mu$  ёсць сума статычных момантаў адносна вызначанага сячэння грузаў, якія распаложаны ўлева ад гэтага сячэння.

З тае прычыны, што сячэнне, якое мае тах тах  $M$ , знаходзіцца наблізу ад сярэдзіны бэлькі і набліжаецца да апошняй з павелічэннем пралёта, то амаль заўсёды крытычны для сярэдзіны бэлькі груз з'яўляецца крытычным і для ўказанага сячэння. Адсюль вынікае простая графічная пабудова тах тах  $M$ .

Вызначаем тах  $M$  для сярэдзіны бэлькі і палажэнне  $R$ , якое праходзіць праз перасячэнне крайніх бакоў і  $S_1$  і  $S_{n+1}$  вяршаванага многавугольніка для ўсіх сіл, што змяшчаюцца на бэльцы (чарц. 272). Далей дзелім



Чарц. 272.

папалам адлегласць між крытычным грузам  $P_k$  і  $R$  і над атрыманым пунктам ставім сярэдзіну бэлькі, а пад папярэднім палажэнне сярэдзіны знаходзім ардынату  $y_{\max \text{ тах}}$  між замыкаючай  $A_2' B_2'$  і вяршаваным многавугольнікам, а шуканы момант тады будзе:

$$\text{тах тах } M = y_{\max \text{ тах}} \cdot H.$$

## § 101. Мах. $M$ ад роўнамерна-размеркаванай нагрузкі

Калі рухомай нагрузкай з'яўляецца роўнамерна-размеркаваная нагрузка, то мах  $M$  у любым сячэнні будзе ў тым выпадку, калі нагружана ўся бэлька; велічыню ён роўны моманту для пастаяннай нагрузкі, якая змяняецца па закону парабалы са стралою па сярэдзіне  $\frac{pl^2}{8H}$ .

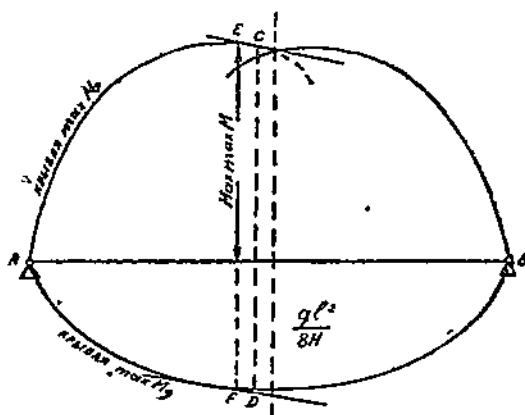
Мах тах  $M$  знаходзіцца ў гэтым выпадку па сярэдзіне бэлькі і роўны:

$$\text{мах} \cdot \text{тах} M = \frac{pl^2}{8} \quad (71)$$

## § 102. Абсалютны максімум.

Да знойдзеных у сячэннях найбольшых момантаў ад часовай нагрузкі неабходна дадаваць моманты ад уласнай вагі. Крывая момантаў становіць сабою парабалу з найбольшай ардынатай  $\frac{ql^2}{8}$  па сярэдзіне.

Найбольшы з момантаў, калі прынята пад увагу ўласная вага, называецца абсалютным максімумам (*maximum absolutum*).

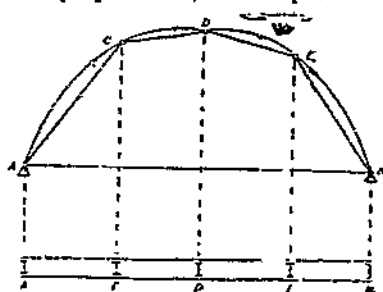


Чарц. 273.

Ён адпавядае сячэнню між найбольшым момантам ад часовай нагрузкі ( $\text{мах} \cdot \text{тах} M$ ) і сярэдняй бэлькі (чарц. 273) там, дзе датычныя да крывых у пунктах  $C$  і  $D$  паралельны між сабой. З прычыны труднасці вызначэння гэтага сячэння, задавальняюцца часта момантам у сячэнні  $EF$ , дзе дзейнічае  $\text{мах} \cdot \text{тах} M$ . Памылка ад гэтага нязначная і не мае практычнага значэння.

### § 103. Лінія найбільших моментів при вузловій нарузцы

Пры вузлавой нарузцы лінія найбільшых моментів становіць сабой многавугольнік, упісаны ў кривую найбільшых моментів для прамой перадачы (чарц. 274). З чарц. 274 вынікае, што вуз-

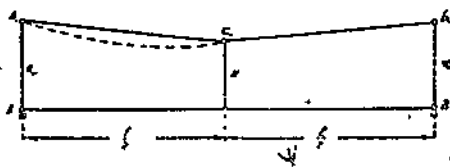


Чарц. 274.

лавяя пункты пры праектаванні бэлькі не трэба змяшчаць там дзе момант для прастай бэлькі мае  $\max \cdot abs$ .

### § 104. Эквівалентная нарузка

Для спрашчэння разліку сістэмы згрупаваных грузаў замяняюць роўназначнай ёй роўнамерна-размеркаванай нарузкай, г. зн. такой, якая ў даным сячэнні дае той-жа выгібаючы момант, як і сістэма згрупаваных грузаў. Такая нарузка называецца



Чарц. 275.

эквівалентнай і вызначаецца яна наступным чынам: знаходзіцца момант ад сістэмы згрупаваных грузаў  $M_p$  і прыраўноўваецца да моманту ад размеркаванай нарузкі  $M_k$  для аднаго і таго-ж адвольнага сячэння:

$$M_k = \frac{k \cdot x}{2} \cdot (l - x); \quad M_p = \frac{k \cdot x(l - x)}{2},$$

адкуль:

$$k = \frac{2M_p}{x \cdot (l - x)} \quad (72)$$

Эквівалентная нагрузка  $K$  розная для розных пралётаў і розных сячэнняў. Калі для аднаго і таго-ж пралёта вызначыць для розных сячэнняў велічыню  $K$ , адкладваць яе на гэтых сячэннях у выглядзе ардынат (чарц. 275) і злучыць канцы гэтых ардынат, то атрымоўваецца адходная крывая  $A_1C_1$ , блізкая да прамой. Для спрашчэння лічаць, што велічыня  $K$  змяняецца ад апоры да сярэдзіны бэлькі па закону прамой лініі. У гэтым выпадку неабходна вызначыць  $K_0$  у апоры і  $K$  пасярэдзіне пралёта, а для астатніх сячэнняў  $K$  знаходзіцца прамалінейнай інтэрпаляцыяй.

Табліца эквівалентных нагрузак для момантаў у тона-метрах адзіночнага шляху, замяняючых дзеянне згрупаваных грузаў нармальнага цяжкіка

| Разлік.<br>пралёт<br>у м | Каля<br>апор $K_0$ | У чвэрці<br>пралёта<br>$K_1$ | У сярэ-<br>дзіне пра-<br>лёта $K$ | Разлі-<br>ковы<br>пралёт<br>у м | Каля<br>апор $K_0$ | У чвэрці<br>пралёта<br>$K_1$ | У сярэ-<br>дзіне пра-<br>лёта $K$ |
|--------------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| 5                        | 22,0               | 18,0                         | 18,0                              | 80                              | 11,16              | 10,60                        | 10,31                             |
| 6                        | 20,83              | 16,66                        | 16,66                             | 90                              | 10,80              | 10,36                        | 9,85                              |
| 7                        | 20,40              | 17,33                        | 17,33                             | 100                             | 10,48              | 10,02                        | 9,47                              |
| 8                        | 19,93              | 17,20                        | 17,20                             | 120                             | 9,98               | 9,45                         | 8,85                              |
| 9                        | 19,45              | 17,27                        | 16,65                             | 140                             | 9,60               | 9,04                         | 8,38                              |
| 10                       | 18,75              | 16,98                        | 16,50                             | 160                             | 9,32               | 8,72                         | 8,05                              |
| 12                       | 17,72              | 15,95                        | 15,69                             | 180                             | 9,09               | 8,45                         | 7,84                              |
| 14                       | 17,23              | 15,31                        | 15,01                             | 200                             | 8,89               | 8,26                         | 7,67                              |
| 16                       | 16,90              | 15,23                        | 14,65                             |                                 |                    |                              |                                   |
| 18                       | 16,67              | 15,13                        | 14,36                             |                                 |                    |                              |                                   |
| 20                       | 15,50              | 15,02                        | 14,37                             |                                 |                    |                              |                                   |
| 30                       | 15,05              | 13,98                        | 13,65                             |                                 |                    |                              |                                   |
| 40                       | 13,97              | 12,95                        | 13,0                              |                                 |                    |                              |                                   |
| 50                       | 12,84              | 12,40                        | 12,32                             |                                 |                    |                              |                                   |
| 60                       | 12,12              | 11,80                        | 11,55                             |                                 |                    |                              |                                   |
| 70                       | 11,60              | 11,25                        | 10,77                             |                                 |                    |                              |                                   |

Усе нагрузкі адносяцца да ціску восей.

Прыклад. Для бэлькі пралётам у 72 м знайсці найбольшым выгібаючы момант для сячэння на адлегласці 12 м ад апоры.

Спачатку вызначаецца  $K_0$  і  $K$  каля апор і пасярэдзіне:

$$K_0 = 11,60 - \frac{11,60 - 11,16}{10} \cdot 2 = 11,512 \text{ т|м.}$$

$$K = 10,77 - \frac{10,77 - 10,31}{10} \cdot 2 = 10,678 \text{ т|м.}$$

Пасля гэтага магчыма вылічыць выгібаючы момант для сячэння на адлегласці 12 м ад апоры. Пры дапамозе інтэрпаляцыі знаходзім  $K_{12}$ :

$$K_{12} = 11,512 - \frac{11,512 - 10,678}{36} \cdot 12 = 11,234 \text{ т|м.}$$

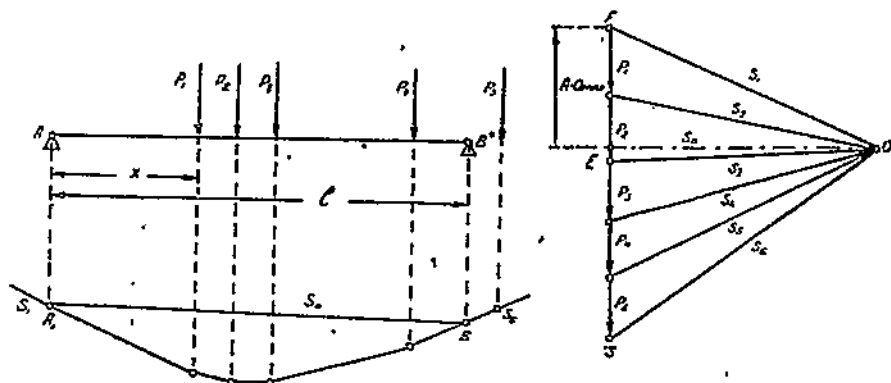
Найбольшы выгібаючы момант:

$$M = \frac{K_{12} \cdot x}{2} \cdot (l - x) = \frac{11,234 \cdot 12}{2} \cdot 60 = 4044,24 \text{ т|м.}$$

## ПАПЯРОЧНАЯ СИЛА АД РУХОМАЙ НАГРУЗКИ

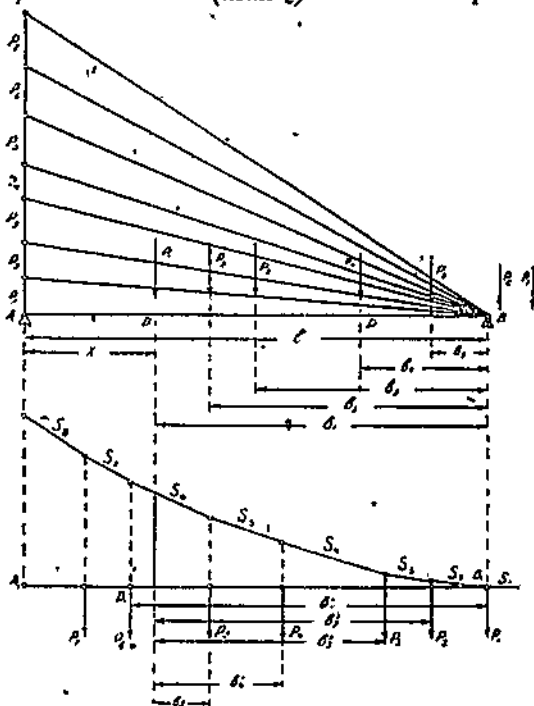
## § 105. Сістэма згрупаваных грузаў. Дыяграма Вінклера.

Для адвольнага сячэння бэлькі папярочная сіла:  $Q = A - \Sigma P_{\text{доп.}}$ . Відавочна, што  $Q$  дасягае тах, калі  $A$  будзе мець тах і  $\Sigma P_{\text{доп.}} = 0$ ; а гэта здарыцца ў тым выпадку, калі ўсе грузы будуць змешчаны ўправа ад сячэння і найбольшыя з іх як мага бліжэй да сячэння, прычым першы з іх будзе змешчаны непасрэдна над



яго вярочны многавугольнік з гарызантальным палажэннем першага боку  $S_1$ .

Тады ардынаты  $y$  між бакамі вярочнага многавугольніка і гарызантальнай прамой  $A_1B_1$  паказуць найбольшыя дадатныя значэнні напярочнай сілы ( $\max Q$ ) для напярочных сячэнняў



Чар. 277.

бэлыкі, якія ляжаць вертыкальна пад гэтымі ардынатамі. Сапраўды, прыняўшы пункт  $B$  за цэнтр момантаў, атрымаем:

$$A \cdot l = P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + \dots + P_s \cdot b_s,$$

а таму, што:

$$b_1 = b_1', \quad b_2 = b_2' \dots, \quad \text{а } A = \max Q,$$

то

$$\max Q \cdot l = P_1 \cdot b_1' + P_2 \cdot b_2' + \dots + P_s \cdot b_s'.$$

Правая частка гэтае роўнасці становіць сабою момант сіл  $P_1, P_2 \dots P_s$  адносна пункта  $D$ , які выражаецца здабыткам ардынаты  $y$  на полюсную адлегласць  $l$ , г. зн.  $P_1 \cdot b_1' + P_2 \cdot b_2' + \dots + P_s \cdot b_s' = M_D = y \cdot l$ . Падставіўшы апошняе значэнне ў напярэдняе раўнанне, атрымаем:  $\max Q \cdot l = y \cdot l$ , адкуль:  $\max Q = y$ .

Гэтай-жа дыяграмай магчыма карыстацца і для знаходжання найбольшых адмоўных значэнняў напярочнай сілы  $Q$ .

## § 106. Роўнамерна-размеркаваная нагрузка

Найбольшае дадатнае значэнне  $Q$  у сячэнні  $D$  втрымаежна, калі будзе нагружан увесь участак  $DB$  бэлькі  $AB$  (чарц. 278), найбольшае-ж адмоўнае—пры нагрузцы часткі  $AD$ .

Для вызначэння  $\max Q$  загрузім бэльку ад  $D$  да  $B$ , тады  $\max Q = A$ ; з раўнання момантаў:

$$A \cdot l - p(l-x) \cdot \frac{l-x}{2} = 0,$$

маём:

$$A = \max Q = \frac{p \cdot (l-x)^2}{2l}. \quad (73)$$

Гэта раўнанне становіць сабою парабалу, якая вызначаецца канечнымі ардынатамі:

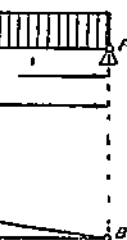
пры  $x=0$ ,  $\max Q = \frac{pl}{2}$ ; пры  $x=l$ ,  $\max Q = 0$ .

Для адмоўных значэнняў  $Q$  атрымоўваецца такая-ж парабола (чарц. 279), толькі павярнутая на  $180^\circ$ .

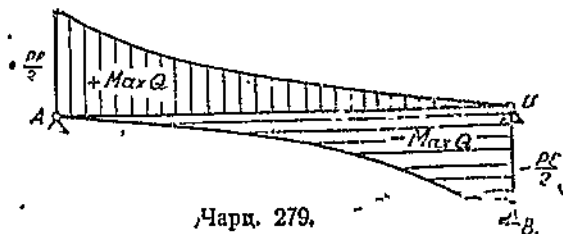
Да напярочных сіл ад рухомай нагрузкі  $p$  неабходна дадаць яшчэ напярочныя сілы ад уласнай вагі  $g$  бэлькі (пастаянная нагрузка) з адпаведнымі знакамі. Эпюра  $Q$  ад пастаяннай нагрузкі набудзе выгляд прамой з ардынатамі:  $+\frac{gl}{2}$  і  $-\frac{gl}{2}$ .

На чарц. 280 пабудавана эпюра  $Q$  ад пастаяннай нагрузкі  $g$  і часовай  $p$ , прычым для зручнасці карыстання эпюрай дадатныя значэнні  $Q$  ад пастаяннай нагрузкі адкладзены ў адваротны бок, г. зн. уніз ад прамой  $A_1B_1$ . Напярочныя сілы для сячэння ад  $A_1$  да  $S$  будуць дадатныя, а ад  $S$  да  $B$ —адмоўныя.

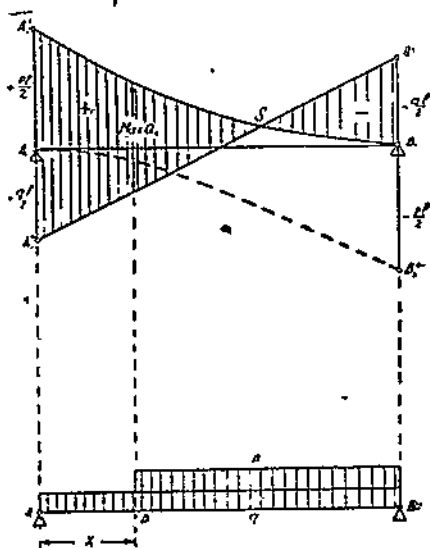
Для адмоўных значэнняў  $Q$  трэба перавярнуць нарэжж на  $180^\circ$ .



Чарц. 278.



Чарц. 279.



Чарц. 280.

## § 107. Эквівалентная нагрузка

Еквівалентная нагрузка каля апор  $K_0$  і пасярэдзіне пралёта  $K$  вызначаецца наступным чынам:

для данага пралёта вызначаецца  $\max Q$  ад згрупаваных грузаў каля апоры. З формулы для роўнамерна-размеркаванай на-  
грузкі:

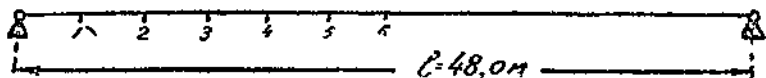
$$\max Q_1 = \frac{p(l-x)^2}{2l},$$

каля апоры маем:

$$\max Q_1 = \frac{K_0 \cdot l}{2},$$

але таму, што  $\max Q$  павінен раўняцца  $\max Q_1$ , то

$$\max Q = \frac{K_0 \cdot l}{2},$$



Чарц. 281.

адкуль:

$$K_0 = \frac{2 \max Q}{l}. \quad (74)$$

Для сярэдзіны-ж пралёта вызначаем  $\max Q_2$  ад згрупаваных грузаў, а ад роўнамерна-размеркаванай нагрузкі маем папярочную сілу для сярэдзіны пралёта:

$$\max Q'_2 = \frac{Kl^2}{8l} = \frac{Kl}{8}.$$

З прычыны-ж роўнасці  $\max Q_2 = \max Q'_2$  маем:

$$\frac{Kl}{8} = \max Q_2,$$

адкуль:

$$K = \frac{8 \cdot \max Q_2}{l}. \quad (75)$$

Для астатніх сячэнняў бэлькі эквівалентная нагрузка бярэцца па інтэрпаляцыі.

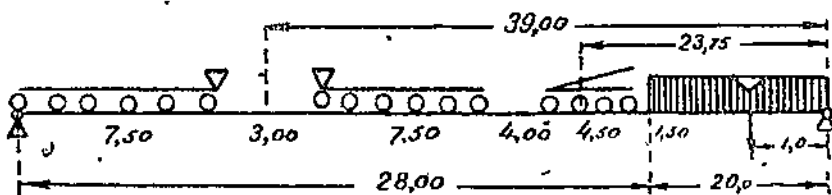
**Прыклад.** Вызначыць папярочныя сілы ад нармальнага цяжніка для бэлькі пралётам 48 м у сячэннях праз 4 м (чарц. 281).

Визначаємо еквівалентну навантаження на опори  $K_0$  і по середньому прольоту  $K$ . Макс  $Q$  на опори ад згрупуваної навантаження атримавця при розтягненні тягніка по схемі (чарц. 282).

$$A = \max Q = \frac{300,00 \cdot 39,00 + 80,00 \cdot 23,75 + 7,00 \cdot 20 \cdot 10}{48} = 312,5 \text{ т.}$$

Найбільша папярочная сіла для середньої бэлькі атрымліваецца пры размяшчэнні тягніка, як паказана на чарц. 283.

$$A_1 = \max Q_1 = \frac{150,00 \cdot 20,25 + 80,00 \cdot 10,25 + 100,00 \cdot 2,75}{48} = 86,096 \text{ т.}$$



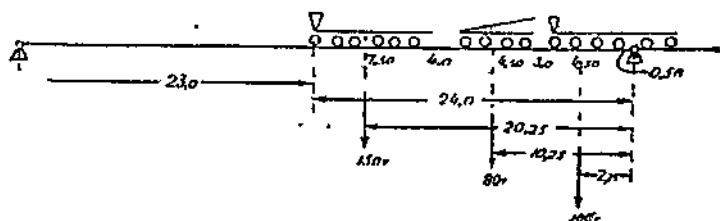
Чарц. 282.

Эквівалентная навантаження каля опоры:

$$K_0 = \frac{2 \cdot 312,5}{48} = 13,02 \text{ т/м,}$$

а па середняй бэлькі:

$$K = \frac{8 \cdot 86,096}{48} = 14,35 \text{ т/м.}$$



Чарц. 283.

$K_x$  на інтэрпаліцы атрымліваецца:

для сячэння 0 —  $K_0 = 13,02$

$$1 - K_1 = 13,02 + \frac{14,35 - 13,02}{24} \cdot 4 = 13,24$$

$$2 - K_2 = 13,02 + \frac{14,35 - 13,02}{24} \cdot 8 = 13,48$$

$$\text{для сечения 3} - K_3 = 13,02 + \frac{14,35 - 13,02}{24} \cdot 12 = 13,68$$

$$\text{" " 4} - K_4 = 13,02 + \frac{14,35 - 13,02}{24} \cdot 16 = 13,90$$

$$\text{" " 5} - K_5 = 13,02 + \frac{14,35 - 13,02}{24} \cdot 20 = 14,12$$

$$\text{" " 6} - K_6 = K = 14,35$$

Наибольшая поперечная сила по формуле:

$$\max Q = \frac{K \cdot (l - x)^2}{2l}$$

$$\text{Сечение 0} - \max Q_0 = \frac{13,02 \cdot (48 - 0)^2}{2 \cdot 48} = 312,50 \text{ м}$$

$$\text{" 1} - \max Q_1 = \frac{13,24 \cdot (48 - 4)^2}{2 \cdot 48} = 266,95 \text{ "}$$

$$\text{" 2} - \max Q_2 = \frac{13,46 \cdot (48 - 4)^2}{2 \cdot 48} = 224,33 \text{ "}$$

$$\text{" 3} - \max Q_3 = \frac{13,68 \cdot (48 - 12)^2}{2 \cdot 48} = 184,68 \text{ "}$$

$$\text{" 4} - \max Q_4 = \frac{13,90 \cdot (48 - 16)^2}{2 \cdot 48} = 148,26 \text{ "}$$

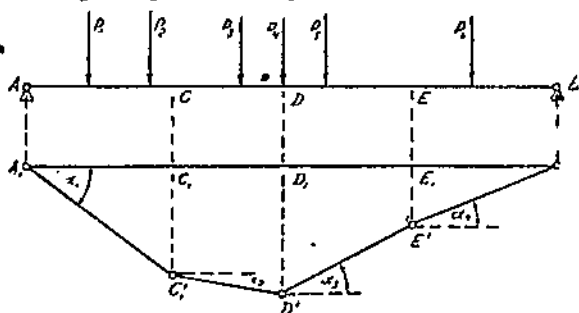
$$\text{" 5} - \max Q_5 = \frac{14,12 \cdot (48 - 20)^2}{2 \cdot 48} = 115,31 \text{ "}$$

$$\text{" 6} - \max Q_6 = \frac{14,35 \cdot (48 - 24)^2}{2 \cdot 48} = 86,10 \text{ "}$$

# ВЫЗНАЧЭННЕ НАЙБОЛЬШЫХ МОМЕНТАЎ І ПАПЯРОЧНЫХ СІЛ ПРЫ ДАПАМОЗЕ ИНФЛЮЕНТНЫХ ЛІНІЙ

## § 108. Многавугольная инфлюэнтная лінія

Няхай инфлюэнтная лінія шуканай велічыні  $z$  (выгібаючага моманту, папярочнай сілы і інш.) становіць сабою многавугольнік (чарц. 284). Палажэнне сістэмы грузаў робіцца небяспечным, калі пры перамяшчэнні грузаў управа ці ўлева ўплыў  $z = \sum P \cdot \eta$  змяняецца, г. зн. атрымлівае адмоўнае прырашчэнне  $dz$ .



Чарц. 284.

Грузы на паасобных участках инфлюэнтнай лініі замяняем праз іх роўнадзейныя:  $K_1, K_2, \dots$  з ардынатамі пад імі:  $\eta_1, \eta_2, \dots$ . Прырашчэнні гэтых ардынат пры перамяшчэнні сістэмы на  $dx$  абазначым праз:  $d\eta_1, d\eta_2, \dots$ . Тады прырашчэнне  $dz$  будзе:

$$dz = R_1 \cdot d\eta_1 + R_2 \cdot d\eta_2 + \dots$$

Прырашчэнні ардынат:  $d\eta_1, d\eta_2, \dots$  можна выразіць праз перамяшчэнне  $dx$  і тангенс вугла, які ўтвараецца адпаведным бокам лініі з восьсю абсцыс  $A_1B_1$ . З трохвугольніка  $ILN$  (чарц. 285), маем:

$$d\eta = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

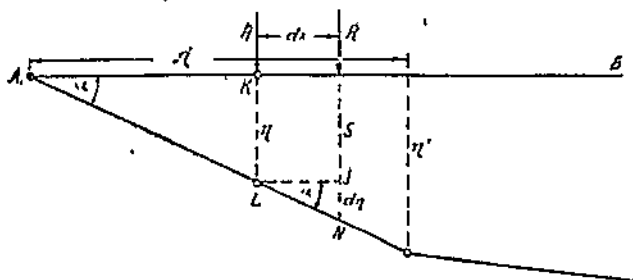
У гэтым раўнанні:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta'}{\lambda},$$

дзе  $\eta'$  вымерана ў маштабе  $z$ , а  $\lambda$ —даўжыня ўчастка ў маштабе даўжынь, таму:  $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \dots$  у даным выпадку з'яўляюцца каэфіцыентамі.

Абазначыўшы праз  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  вуглы, якія ўтвараюцца бакамі інфлюэнтнай лініі з воссю абсцыс, і лічачы іх дадатнымі для тых бакоў, правы канец якіх ніжэй левага, і адмоўнымі—у супраціўным выпадку, атрымаем:

$$d\eta_1 = +dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_1; d\eta_2 = +dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_2; d\eta_3 = -dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 \text{ і } d\eta_4 = -dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_4.$$



Чарц. 285.

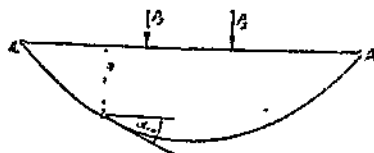
Падставіўшы гэтыя значэнні атрымаем:

$$dz = R_1 \cdot dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \cdot dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 - R_3 \cdot dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 - R_4 \cdot dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_4,$$

або 
$$dz = dx \cdot (R_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 - R_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 - R_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_4)$$

і нарэшце: 
$$dz = dx \cdot \Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Адмоўным гэта прырашчэнне можа быць толькі тады, калі  $dx$  і  $\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha$  маюць розныя знакі. З тае прычыны, што яны маюць розныя знакі ў залежнасці ад перамяшчэння ў той ці іншы бок, то адпаведна гэтаму павінны мяняцца і знакі  $\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . З тае прычыны, што  $\operatorname{tg} \alpha$  не мяняецца (у межах участка), то змена знака ў  $\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha$  можа быць толькі ў выніку змены велічынь  $R$ , а гэта бывае тады, калі пры перамяшчэнні сістэмы грузаў хоць адно кола прайдзе з аднаго ўчастка на другі. Гэта магчыма толькі тады, калі да перамяшчэння сістэмы адзін з грузаў знаходзіўся над адной з вяршынь інфлюэнтнай лініі.



Чарц. 286.

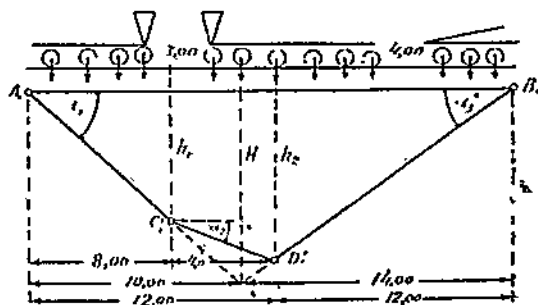
Выведзеным агульным крытэрыем:

$$\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha > 0 \quad \text{і} \quad \Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0 \quad (76)$$

можна карыстацца для адшукання тах $z_1$ , калі інфлюэнтная лінія становіць сабой крывую (чарц. 286), прычым гэту крывую замяніць дастаткова набліжаным да яе многавугольнікам ці прыняць за роўнадзейную самыя грузы, а вуглы:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ —роўнымі вугламі датычных да інфлюэнтнай лініі ў пунктах прылажэння гэтых грузаў.

**Приклад.** Для інфлюентнай лінії  $A_1C_1'D_1'B_1$  знайси небяспечнае палажэнне пагрузкі, якая складаецца з нармальнага цягніка з ціскам па 25 т на вось паравоза і 20 т на вось тэндэра (чарц. 287 і 288). Пры данай форме інфлюентнай лініі:

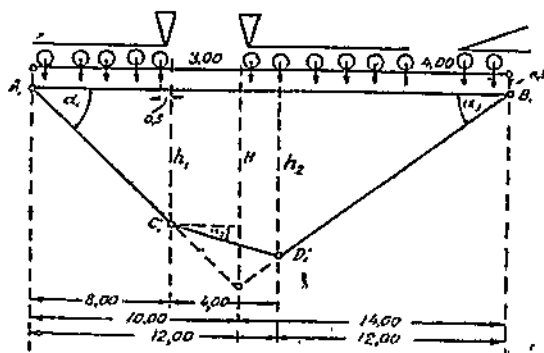
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= +\frac{H}{10}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{H}{14} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= +\frac{h_2 - h_1}{4} = +\frac{H}{4} \cdot \left( \frac{12}{14} - \frac{8}{10} \right) = +\frac{H}{70}. \end{aligned}$$



Чарц. 287.

Прыняўшы за крытычны груз 3-ю вось 2-га паравоза (чарц. 287), складзем  $\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , аднёсшы крытычную вось спачатку да правага, а затым да левага ўчастка:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha &= H \cdot \left( \frac{100}{10} + \frac{50}{70} - \frac{160}{14} \right) = -\frac{50}{70} H. \\ \leftarrow \Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha &= H \cdot \left( \frac{100}{10} + \frac{75}{70} - \frac{135}{14} \right) = +\frac{100}{70} H. \end{aligned}$$



Чарц. 288.

Гэта палажэнне задавальняе патрабаванням тах з, бо  $\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha$  маюць розныя знакі.

Прыняўшы за крытычны груз 2-ю вось 2-га паравоза (чарц. 288), складзем  $\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , аднёсшы крытычную вось спачатку да правага, а затым да левага ўчастка:

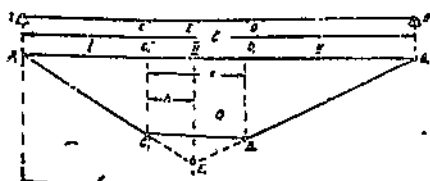
$$\rightarrow \Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha = H \cdot \left( \frac{125}{10} + \frac{25}{70} - \frac{165}{14} \right) = + \frac{75}{70} H.$$

$$\leftarrow \Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha = H \cdot \left( \frac{125}{10} + \frac{50}{70} - \frac{140}{14} \right) = + \frac{225}{70} H.$$

З гэтага вынікае, што прынятая вось не ёсць крытычная.

Для чатырохвугольнай інфлюэнтнай лініі (чарц. 289) можна вывесці наступны крытэрыі, якім зручна карыстацца пры дапамозе табліц цягніка:

$$\left. \begin{aligned} \leftarrow R_1 + (R_2 + P) \cdot \frac{h}{\lambda} &> \frac{l_1}{l} \cdot \Sigma P, \\ \rightarrow R_1 + R_2 \cdot \frac{h}{\lambda} &< \frac{l_1}{l} \cdot \Sigma P, \end{aligned} \right\} (77)$$

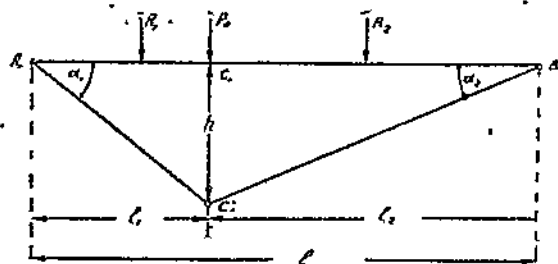


Чарц. 289.

дзе  $R_1$ —вага ўсіх грузаў на першым участку;  $R_2$ —на другім участку;  $\Sigma P$ —вага ўсіх грузаў, якія змяшчаюцца на бэльцы;  $P$ —вага крытычнага груза ў  $D$  між другім і трэцім участкам;  $l$  і  $\lambda$ —даўжыня бэлькі і панелі;  $l_1$ —адлегласць  $E$  ад  $A$ ;  $h$ —адлегласць  $E$  ад бліжэйшага вузла злева (ад  $C$ ).

## § 109. Трохвугольная інфлюэнтная лінія

Грузы, якія стаяць на левым участку (чарц. 290) замяняем роўнадзейнай  $R_1 = \sum_0^{k-1} P$ , а грузы на правым участку роўнадзейнай  $R_2$ .



Чарц. 290.

Крытычны груз, які стаіць над вяршыняй  $C$ , абазначым праз  $P_k$  (тут  $h$  паказвае, якое месца ад пачатку займае груз). Суму ўсіх

грузаў, якія змяшчаюцца на бэльцы, абазначым праз  $\sum_0^n P$ . Крытэрыі возьмем:

$$\Sigma R \cdot \operatorname{tg} \alpha \geq 0$$

$$\leftarrow (R_1 + P_k) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - \left( \sum_0^n P - R_1 - P_k \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 > 0$$

$$\rightarrow R_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - \left( \sum_0^n P - R_1 \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 < 0.$$

Але:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\eta}{l_1}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\eta}{l_2}; \quad l = l_1 + l_2 \quad \text{і} \quad R_1 = \sum_0^{k-1} P.$$

Падставіўшы гэтыя значэнні і зрабіўшы ператварэнні, атрымаем:

$$\left. \begin{aligned} \leftarrow \sum_0^{k-1} P + P_k &> \frac{l_1}{l} \cdot \sum_0^n P \\ \rightarrow \sum_0^{k-1} P &< \frac{l_1}{l} \cdot \sum_0^n P \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Адсюль вынікае, што крытычным будзе той першы груз  $P_k$ , які робіць  $\sum_0^{k-1} P + P_k$  больш за значэнне:  $\frac{l_1}{l} \cdot \sum_0^n P$ , прычым  $\sum_0^{k-1} P$  павінны быць не менш за  $\frac{l_1}{l} \cdot \sum_0^n P$ .

## § 110. Інфлюэнтная лінія, якая складаецца з двух падобных трохвугольнікаў розных знакаў

Скарыстаем для правага трохвугольніка  $OD_1B_1$  крытэрыі:

$$\left. \begin{aligned} R_1 + P_k &> \frac{l_1}{l} \cdot \sum P \\ R_1 &< \frac{l_1}{l} \cdot \sum P \end{aligned} \right\}$$

З прычыны паралельнасці бакоў  $B_1D_1'$  і  $A_1C_1'$  (чарц. 291) можна спрасціць каэфіцыент правай часткі крытэрыя. Працягнем  $B_1D_1'$  да сустрэчы ў пункце  $E_1'$  з прамой  $A_1E_1'$ , праведзенай праз  $A_1$  паралельна  $C_1'D_1'$ ; тады  $A_1E_1'$  роўна даўжыні  $\lambda$  панелі. З падобнасці трохвугольнікаў  $B_1D_1'O_1$  і  $B_1E_1'A_1$  атрымоўваем:

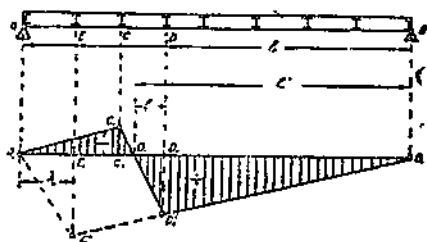
$$\frac{l_1'}{l} = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{m},$$

дзе  $m$ —лік панелей.

Падставіўшы гэта значэнне ў крытэрыі, атрымаем:

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow R_1 + P_k &> \frac{1}{m} \cdot \sum P \\ \rightarrow R_1 &< \frac{1}{m} \cdot \sum P \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Гэтым крытэрыем карыстаюцца так: нагружаюць як мага большым лікам восей заштрыхаваны трохвугольнік з уключэннем усёй панелі  $CD$ , у якой знаходзіцца нулявы пункт, і вызначаюць першы груз, які робіць  $R_1$  больш за  $\frac{1}{m} \cdot \sum P$ ; затым правяраюць другую частку крытэрыя:  $R_1 < \frac{1}{m} \cdot \sum P$ . Груз  $P$ , які задавальняе абодвум часткам крытэрыя і будзе крытычным.



Чарц. 291.

## § 111. Разлік па двайных лініях уплыву

Пры вызначэнні небяспечнага палажэння часовай нагрузкі пры разліку чыгуначных мастоў цяжнік прыходзіцца перамяшчаць толькі ўздоўж маста, бо палажэнне яго ў папярочным кірунку залежыць ад палажэння рээк.

Зусім іншая справа з мастамі пад звычайную дарогу: тут грузы могуць перамяшчацца не толькі ўздоўж маста, але і поперак яго. Самае нявыгаднае палажэнне згрупаваных грузаў таму вызначаюць у два прыёмы. Спачатку перасоўваюць нагрузку ўпоперак маста і знаходзяць тое яе палажэнне, якое з'яўляецца самым нявыгодным для данай фермы. Устанавіўшы такім чынам грузы і прывёўшы іх да рада грузаў, якія дзейнічаюць у роўніцы фермы, устанаўліваюць гэтыя грузы самым нявыгодным чынам па даўжыні фермы. Затым вызначаюць аднаведна папярэднім правілам велічыню  $z$  шуканай колькасці для данай фермы (выгібаючы момант, папярочная сіла і інш.).

Такі спосаб разліку складаны і патрабуе шмат вылічэнняў, калі разлік вядзецца на розныя камбінацыі натоўпу з рознага роду згрупаванай нагрузкай. З гэтага прычыны для падобных разлікаў раіцца спосаб *двайных інфлюэнтных ліній*, вельмі прасты і наглядны спосаб нават пры самых складаных камбінацыях часовай нагрузкі. Для разліку гэтым спосабам трэба вычарціць дзве інфлюэнтныя лініі, з якіх адною карыстаюцца для перасоўвання грузаў упоперак маста (папярочная ўстаноўка), а другою—ўздоўж маста (прадоўжная ўстаноўка). Першая інфлюэнтная лінія становіць сабой заўсёды інфлюэнтную лінію апорнай рэакцыі, бо фермы

з'являюцца заўсёды апорамі для папярочнага збудавання (папярочных бэлек, папярочнага наскілу і інш.), а другая—інфлюэнтную лінію вызначаемай колькасці разглядаемай фермы (выгібаючага моманту, папярочнай сілы і ўсіх у элементах фермы).

Разгледзім вызначэнне ўплыву нагрузкі на ферму спосабам двайных інфлюэнтных ліній.

**Прыклад.** Мост з яздой па верху складаецца з трох галоўных ферм (чарц. 292), даўжынёй  $l$ , на якіх укладзены папярочныя бэлькі, а на іх—прадоўжны наскіл. Няхай патрэбна вызначыць

ўплыў нагрузкі на сярэднюю ферму. Разгледзім паасобна ўплыў згрупаваных грузаў, размешчаных у любым месцы на мосце, і роўнамерна-размеркаванай нагрузкі. Спачатку будзем інфлюэнтную лінію ціску на сярэднюю ферму  $AB$  (II)  $C_1 E_1 A_1$ , адклаўшы пад  $A$  ардынату, роўную 1 тоне; затым справа ад плана будзем інфлюэнтную лінію шуканай колькасці для фермы  $AB$  (напрыклад моманту ў пункце  $O$ ):  $A_1 B_1 H_1' I_1'$ .

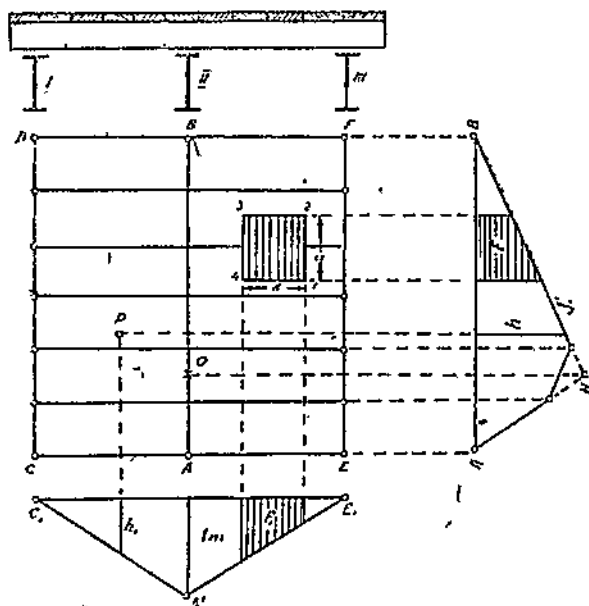
**Згрупаваныя нагрузкі.** Няхай у пункце  $P$  на мосце

дзеінічае груз  $P$ . Карыстаючыся інфлюэнтнай лініяй ціску на ферму  $AB$ , выяўляем, што ад груза фермы  $AB$  перадаецца ціск  $P_H = P \cdot \eta'$ . Перайшоўшы затым да інфлюэнтнай лініі шуканай колькасці, знаходзім, што грузу  $P_H$ , які дзейнічае ў роўніцы фермы, адпавядае ардыната  $\eta$ , а значыць шуканая колькасць будзе:

$$z = P_H \cdot \eta = P \cdot \eta' \cdot \eta,$$

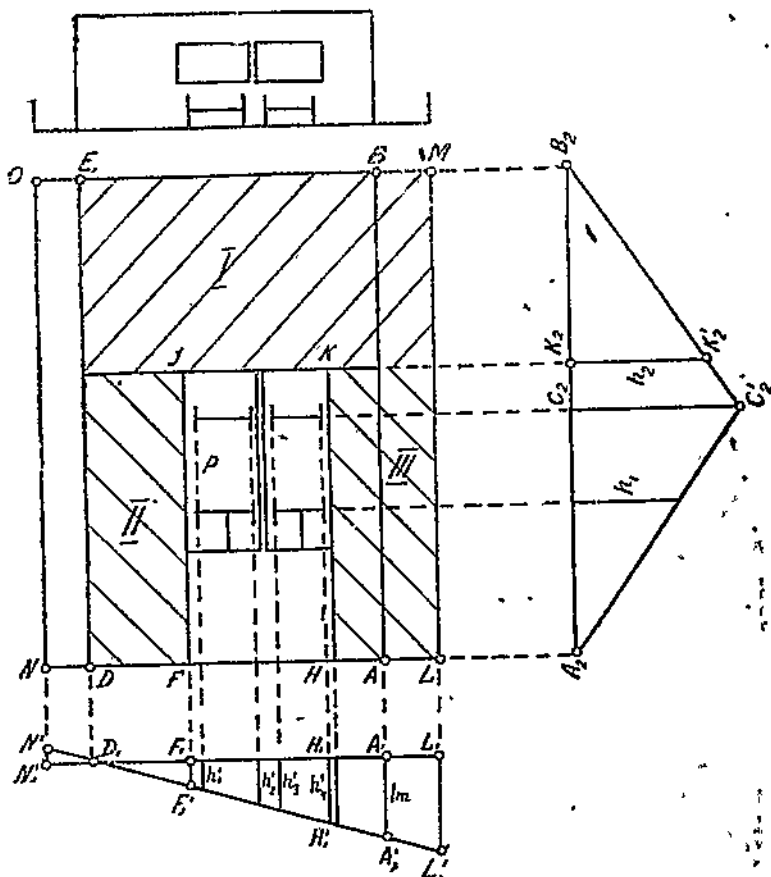
г. зн. прадстаўляе сабой здабытак груза  $P$  на ардынаты той і другой інфлюэнтнай лініі, вымераныя пад гэтым грузам.

**Размеркаваная нагрузка.** Калі на частку маста 1 2 3 4 дзейнічае роўнамерна-размеркаваная нагрузка  $p$  тон на  $m^2$ , то па інфлюэнтнай лініі ціску на ферму  $AB$ , апошняй перадаецца частка  $K_H$  нагрузкі, роўная  $abr$  тон, прычым  $K_H = F \cdot (pa)$ , дзе  $p \cdot a$  ёсць нагрузка на пагон. адзінку інфлюэнтнай лініі  $C_1 E_1$ .



Чарц. 292.

Пераходзячы да інфлюэнтнай лініі колькасці  $z$ , трэба ўзяць пагонную нагрузку ўздоўж фермы  $AB$ , г. зн.  $\frac{K_H}{a}$  ці  $F' \left( \frac{pa}{a} \right) = F' \cdot p$  і памножыць на плошчу  $F$  інфлюэнтнай лініі вызначанай колькасці, тады  $z = p \cdot F' \cdot F$ , г. зн. прадстаўляе сабою здабытак з нагрузкі на 1 кв. метр на тых плошчы абодвух інфлюэнтных ліній, якія адпавядаюць плошчы 1, 2, 3, 4, што займаюцца нагрузкай.



Чарц. 293.

**Прыклад.** Вызначыць выгібаючы момант у вузле  $C$  фермы  $AB$  (чарц. 293) маста з яздой па нізу з двума фермамі, між якімі знаходзіцца праездная частка, а за імі тратуары. Нагрузка складаецца з двух грузавікоў у ціскам: кола ў  $P$  тон і натоўпу людзей, у заштрыхаванай плошчы, вагой  $p$  т/м<sup>2</sup>.

Спачатку будзем інфлюэнтную лінію  $N_1 D_1 A_1 L_1 L'_1 N'_1$  ціску на ферму  $AB$ , адклаўшы пад  $A_1$  ардынату  $A_1 A'_1 = 1m$  (бо тратуары

знаходзяцца на кансолях), а затым з боку плана—інфлюэнтную лінію моманту  $M$  у пункце  $C$  фермы  $AB$ .

Дзеянне ўсіх колаў. Абазначым ардынаты пад коламі праз  $\eta_1'$ ,  $\eta_2'$ ,  $\eta_3'$  і  $\eta_4'$  для інфлюэнтнай лініі ціску на ферму  $AB$  і  $\eta_1$  і  $\eta_2$  для інфлюэнтнай лініі моманту  $M$ . Тады момант ад усіх 8 колаў будзе:

$$M_P = P \cdot \eta_1' \cdot (\eta_1 + \eta_2) + P \cdot \eta_2' \cdot (\eta_1 + \eta_2) + P \cdot \eta_3' \cdot (\eta_1 + \eta_2) + P \cdot \eta_4' \cdot (\eta_1 + \eta_2)$$

ці 
$$M_P = P \cdot (\eta_1 + \eta_2) \cdot (\eta_1' + \eta_2' + \eta_3' + \eta_4').$$

Дзеянне размеркаванай нагрузкі. Падзяляем заштрыхаваную плошчу, занятую натоўпам, на 3 прамавугольныя ўчасткі: I, II і III.

Абазначыўшы моманты, якія выклікаюцца гэтымі ўчасткамі ў пункце  $C$  адпаведна праз  $M_I$ ,  $M_{II}$ ,  $M_{III}$ , згодна папярэдняга атрымаем:

$$M_I = p \cdot (\text{плошч. } D_1 L_1' L_1) \cdot (\text{плошч. } K_2 K_2' B_2)$$

$$M_{II} = p \cdot (\text{плошч. } D_1 F_1' F_1) \cdot (\text{плошч. } A_2 C_2' K_2' K_2)$$

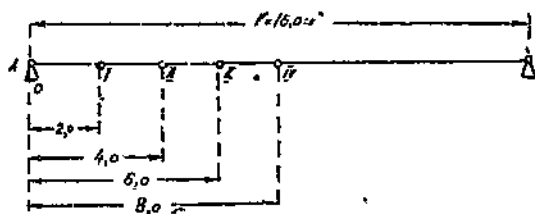
$$M_{III} = p \cdot (\text{плошч. } H_1 H_1' L_1' L_1) \cdot (\text{плошч. } A_2 C_2' K_2' K_2).$$

Шуканы момант  $M$  ад сумеснай нагрузкі вызначыцца як сума паасобных момантаў:

$$M = M_P + M_I + M_{II} + M_{III}.$$

## § 112. Прыклады вызначэння max. і min. момантаў і папярочных сіл для бэлек, якія свабодна ляжаць на двух апорах

Прыклад 1. Бэлька даўжынёю  $l = 16,00$  м з уласнай вагою  $g = 0,600$  т/м нясе часовую нагрузку 7 т грузавікоў, якая пера-



Чарц. 294.

даецца бэльцы поўнасю. Вызначыць max. і min. момантаў і папярочных сіл у сячэннях праз 2 м і абсалютны max. (чарц. 294).

### а) Выгібаючыя моманты

1. Сячэнне 0 (на апоры): выгібаючыя моманты як ад уласнай вагі, так і ад часовай нагрузкі роўны нулю, г. зн.  $M_{g_0} = 0,000$  т. м;

$$M_{p_0} = 0,000 \text{ т. м.}$$

2. Сячэнне I:

$$x = 2,00 \text{ м};$$

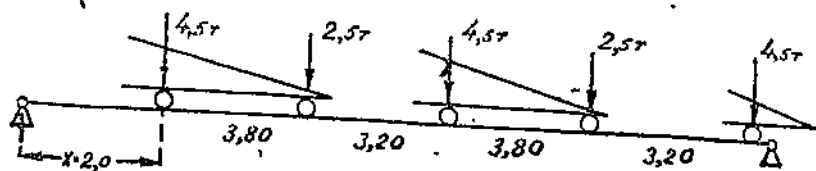
$$M_{g_1} = \frac{gx}{2} \cdot (l-x) = \frac{0,6 \cdot 2,0}{2} \cdot (16,0 - 2,0) = 8,40 \text{ т.м.}$$

Выгібаючы момант ад грузавікоў: пры руху ў кірунку да В (чарц. 295) будзе найбольшым пры ўказаным распалажэнні, бо Шэфлеравы няроўнасці задаволены.

$$\frac{4,50}{2} > \frac{9,50}{14} \quad \text{і} \quad \frac{0}{4} < \frac{14,0}{14,0};$$

$$A = \frac{4,5 \cdot (14,0 + 7,0) + 2,50 \cdot (10,20 + 3,20)}{16,00} = 8,00 \text{ т.}$$

$$M_{p_1} = 8,00 \cdot 2,0 = 16,00 \text{ т. м.}$$



Чарц. 295.

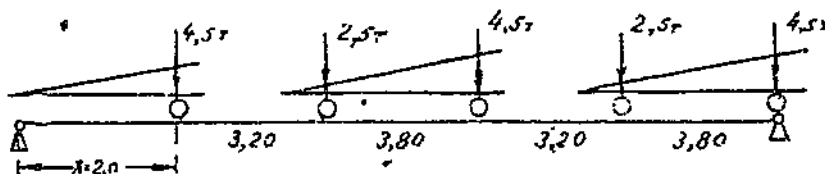
Пры руху ад В да А (чарц. 296):

$$M'_{p_1} = A \cdot x;$$

$$A = \frac{4,5 \cdot (14 + 7) + 2,5 \cdot (10,8 + 3,8)}{16} = 8,1875 \text{ т.}$$

$$M'_{p_1} = 8,1875 \cdot 2,0 = 16,375 \text{ т. м.}$$

Значыць самым нявыгадным з'яўляецца апошні.



Чарц. 296.

3. Сячэнне II:

$$x = 4,00 \text{ м.}$$

Выгібаючы момант ад уласнай вагі:

$$M_{g_2} = \frac{0,60 \cdot 4,0}{2} \cdot (16,0 - 4,0) = 14,400 \text{ т/м.}$$

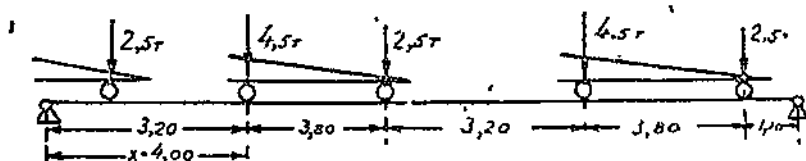
Выгібаючы момант ад часовай нагрузкі пры руху да апоры *Б*—самым нявыгадным будзе ўказаны на чарц. 297, бо Шэфлеравы няроўнасці задаволены:

$$\frac{7,00}{4,00} > \frac{9,50}{12,00} \quad \text{і} \quad \frac{2,50}{4,00} < \frac{14,00}{12,00}.$$

$$M_{p_2} = A \cdot x - 2,5 \cdot 3,20;$$

$$A = \frac{2,5 \cdot (15,2 + 8,2 + 1,2) + 4,5 \cdot (12,0 + 5,0)}{16,0} = 8,625 \text{ т.}$$

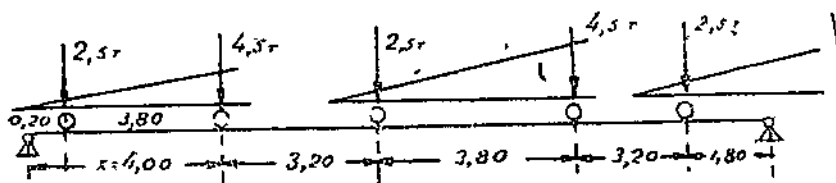
$$M_{p_2} = 8,625 \cdot 4 - 2,5 \cdot 3,2 = 26,5 \text{ т.м.}$$



Чарц. 297.

Пры руху ад апоры *Б* да апоры *А* пры распаляжэнні ўказаным на чарц. 298 Шэфлеравы няроўнасці задаволены:

$$\frac{7,0}{4,0} > \frac{9,5}{12,0} \quad \text{і} \quad \frac{2,5}{4,0} < \frac{14,0}{12,0},$$



Чарц. 298.

а, значыць, гэта ёсць крытычнае палажэнне нагрузкі.

$$M'_{p_2} = A \cdot x - 2,50 \cdot 3,80;$$

$$A = \frac{2,5 \cdot (15,8 + 8,8 + 1,8) + 4,5 \cdot (12,0 + 5,0)}{16,0} = 8,908 \text{ т.}$$

$$M'_{p_2} = 8,908 \cdot 4,00 - 2,50 \cdot 3,80 = 26,132 \text{ т.м.}$$

Значыць самым нявыгадным з'яўляецца першы выпадак.

#### 4. Сячэнне III:

$$x = 6,00 \text{ м.}$$

$$M_{g_3} = \frac{gx}{2} \cdot (x-2) = \frac{0,60 \cdot 6,0}{2} \cdot 10,0 = 18,0 \text{ т. м.}$$

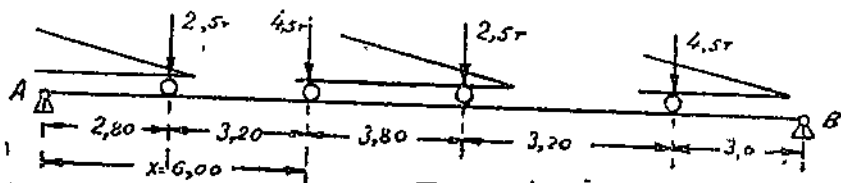
Выгібаючы момант ад часовай нагрузкі пры руху ад *A* да *B* будзе найбольшым пры палажэнні нагрузкі, як на чарц. 299, бо Шэфлеравы няроўнасці пры гэтым задаволены, а іменна:

$$\frac{7,0}{6,0} > \frac{7,0}{10,0} \quad \text{і} \quad \frac{2,5}{6,0} < \frac{11,5}{10,0}.$$

$$M_{p_3} = A \cdot x - 2,5 \cdot 3,2;$$

$$A = \frac{2,5 \cdot (13,2 + 6,2) + 4,5 \cdot (10,0 + 3,0)}{16,0} = 6,1875 \text{ т.};$$

$$M_{p_3} = 32,125 \text{ т. м.}$$



Чарц. 299.

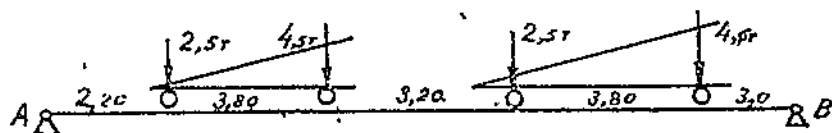
Пры руху ад *B* да *A* (чарц. 300) Шэфлеравы няроўнасці задаволены пры палажэнні грузаў згодна чарц., а іменна:

$$\frac{7,0}{6,0} > \frac{7,0}{10,0} \quad \text{або} \quad 1,167 > 0,7 \quad \text{і} \quad \frac{2,5}{6,0} < \frac{11,5}{10,0} \quad \text{або} \quad 0,41 < 1,15;$$

$$M'_{p_3} = A \cdot x - 2,5 \cdot 3,8;$$

$$A = \frac{2,5 \cdot (13,8 + 6,8) + 4,5 \cdot (10,0 + 3,0)}{16,0} = 6,875 \text{ т.};$$

$$M'_{p_3} = 31,75 \text{ т. м.}$$



Чарц. 300.

Адсюль вынікае, што самым нявыгодным з'яўляецца першы выпадак.

#### 5. Сячэнне IV:

$$x = 8,00 \text{ м.}$$

Выгібаючы момант ад уласнай сягі:

$$M_{g_4} = \frac{0,6 \cdot 0,8}{2} \cdot 8,0 = 19,2 \text{ т. м.};$$

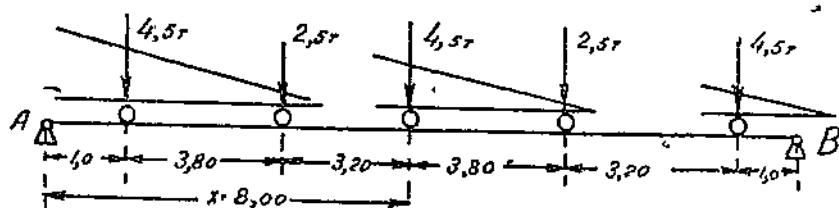
Вигібаючи момент ад часовай нагрузкі: пры руху ад  $A$  да  $B$  самым нявыгадным будзе ў палажэнні, паказаным на чарц. 301, бо пры ёй Шэфлеравы няроўнасці задаволены:

$$\frac{11,5}{8,0} > \frac{7,0}{8,0} \quad \text{і} \quad \frac{7,0}{8,0} < \frac{11,5}{8,0}.$$

$$M_{p_4} = A \cdot x - 4,50 \cdot 7,0 - 2,5 \cdot 3,2;$$

$$A = \frac{4,5 \cdot (15,0 + 8,0 + 1,0) + 2,5 \cdot (11,2 + 4,2)}{16,0} = 9,15625 \text{ т.}$$

$$M_{p_4} = 9,156 \cdot 8,0 - 4,5 \cdot 7,0 - 2,5 \cdot 3,2 = 33,75 \text{ т.м.}$$



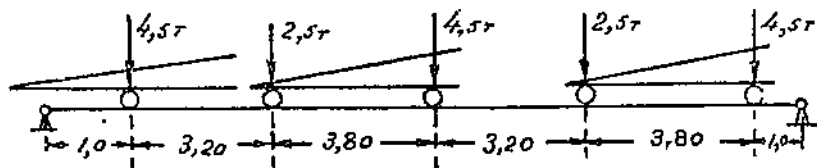
чарц. 301.

Пры руху ад  $B$  да  $A$  самаяй нявыгаднай будзе нагрузка ў палажэнні як на чарц. 302, бо Шэфлеравы няроўнасці задаволены:

$$M'_{p_4} = A \cdot x - 4,5 \cdot 7,0 - 2,5 \cdot 3,8;$$

$$A = \frac{4,5 \cdot (15,0 + 8,0 + 1,0) + 2,5 \cdot (11,8 + 4,8)}{16,0} = 9,36375 \text{ т.}$$

$$M'_{p_4} = 9,334 \cdot 8,0 - 4,5 \cdot 7,0 - 2,5 \cdot 3,8 = 33,75 \text{ т.м.}$$



Чарц. 302.

Значыць, пры абодвух кірунках момант аднолькавы.

6. Абсалютны тах.  $M$  ад часовай нагрузкі. Узяўшы нагрузку, якая дае тах.  $M$  для сярэдзіны пралёта (чарц. 301 і 302), знаходзім палажэнне роўнадзейных ад апоры  $A$ .

Для гэтага абазначым адлегласць шуканага небяспечнага сячэння ад апоры  $A$  праз  $x$  і праз  $R$ —роўнадзейную ўсіх трузаў,

якія змяшчаюцца на пралёце на адлегласці  $x_1$  ад апоры А, знаходзім статычны момант усіх сіл адносна А:

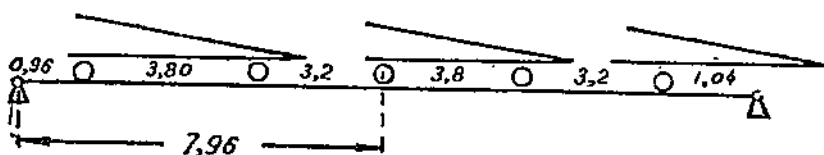
$$R \cdot x_1 = 4,5 \cdot (1,0 + 8,0 + 15,0) + 2,5 \cdot (4,8 + 11,8),$$

адкуль пры  $R = 4,5 \cdot 3 + 2,5 \cdot 2 = 18,50 \text{ т}$ , маем:

$$x_1 = \frac{108,0 + 41,5}{18,5} = 8,08 \text{ м};$$

а таму што небяспечнае сячэнне і роўнадзейная змешчаны сіметрычна ў адносінах да сярэдзіны пралёта, то

$$x = 16,0 - \frac{8,0 + 8,08}{2} = 7,96 \text{ м}$$



Чарц. 303.

і пры размяшчэнні грузаў згодна чарц. 303.

$$M_{\max \max} = A \cdot x - 4,5 \cdot 7,0 - 2,5 \cdot 3,2;$$

$$A = \frac{4,5 \cdot (15,04 + 8,04 + 1,04) + 2,5 \cdot (11,24 + 4,24)}{16,0} = 9,2025 \text{ т}.$$

$$M_{\max \max} = 9,2025 \cdot 7,96 - 4,5 \cdot 7,0 - 2,5 \cdot 3,2 = 33,75 \text{ т.м}$$

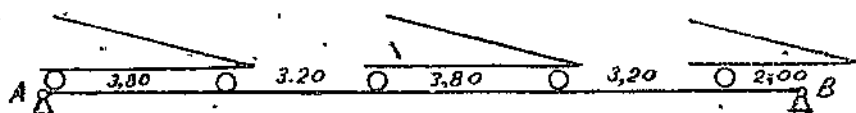
На падставе вылічэнняў складаецца табліца.

| №№ сячэнняў     | Адлегласць сячэнняў ад левай апоры ў м | Выгібаючы момант ад уласнай вагі т.м | Выгібаючы момант ад часов. на-грузкі т.м | Выгібаючы момант |          | Увага                           |
|-----------------|----------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|------------------|----------|---------------------------------|
|                 |                                        |                                      |                                          | мін т. м         | мах т. м |                                 |
| 0               | 0,00                                   | 0,000                                | 0,000                                    | 0,000            | 0,000    | 1) Прынята ў карысць трываласці |
| I               | 2,00                                   | 8,400                                | 8,375                                    | 8,400            | 16,775   |                                 |
| II              | 4,00                                   | 14,400                               | 26,500                                   | 14,400           | 40,900   |                                 |
| III             | 6,00                                   | 18,00                                | 32,125                                   | 18,000           | 50,125   |                                 |
| IV              | 8,00                                   | 19,200                               | 33,750                                   | 19,200           | 52,950   |                                 |
| IV <sub>1</sub> | 7,96                                   | —                                    | 33,7519                                  | 19,200           | 52,9519  |                                 |

в) Папярочныя сілы.

1. Сячэнне  $Q$  (на апоры). Папярочная сіла ад уласнай ваг будзе:

$$Q = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{0,6}{2} \cdot 16,0 = 4,8 \text{ т.}$$



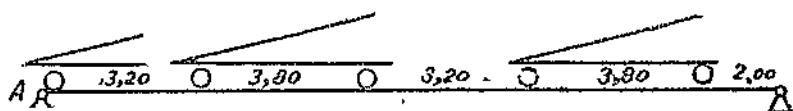
Чарц. 304.

Папярочная сіла ад часовай нагрузкі атрымаецца найбольшая кi пры размяшчэннi грузаў як на чарц. 304, калi:

$$Q_{\max} = \frac{4,5 \cdot (16,0 + 9,0 + 2,0) + 2,5 \cdot (12,2 + 5,2)}{16,0} = 10,3125 \text{ т.}$$

цi пры размяшчэннi грузаў як на чарц. 305, калi:

$$Q_{\max} = \frac{4,5 \cdot (16,0 + 9,6 + 2,0) + 2,5 \cdot (12,8 + 5,8)}{16,0} = 10,500 \text{ т.}$$



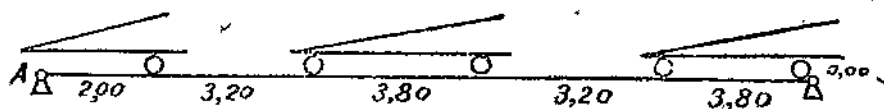
Чарц. 305.

З гэтага вынікае, што самай нявыгаднай нагрузкай будзе другая.

2. Сячэнне I:

$$x = 2,00 \text{ м.}$$

$$Q_g = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{0,6}{2} \cdot 12,0 = 3,600 \text{ т.}$$



Чарц. 306.

Самай нявыгаднай нагрузкай будзе паказаная на чарц. 306, калi:

$$Q_{\max} = A = \frac{4,5 \cdot (14,0 + 7,0) + 2,5 \cdot (10,8 + 3,8)}{16,0} = 8,1875 \text{ т.}$$

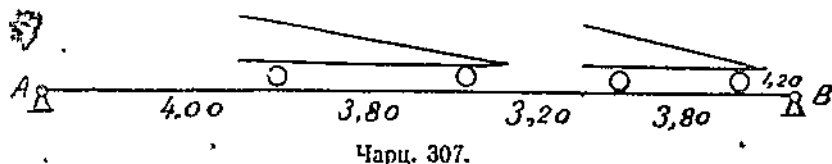
3. Сячэнне II:

$$x = 4,00 \text{ м.}$$

$$Q_g = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{0,6}{2} \cdot 8,0 = 2,400 \text{ т.}$$

Папярочная сіла ад часовай нагрузкі:

$$Q_{\max} = \frac{4,5 \cdot (12,0 + 5,0) + 2,5 \cdot (8,2 + 1,2)}{16,0} = 6,250 \text{ т}$$

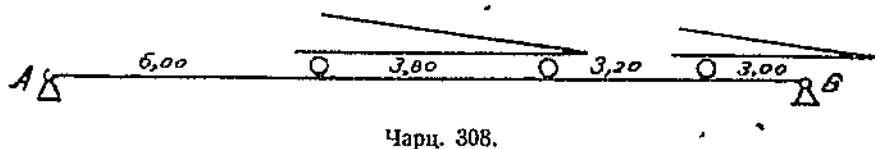


атрымаецца пры размяшчэнні нагрузкі згодна чарц. 307.

4. Сячэнне III:

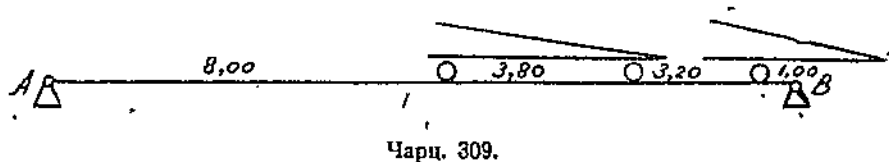
$$x = 6,00 \text{ м.}$$

$$Q_g = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{0,6}{2} \cdot 4,0 = 1,200 \text{ т.}$$



Папярочная сіла ад часовай нагрузкі (чарц. 308):

$$Q_{\max} = \frac{4,5 \cdot (10,0 + 3,0) + 2,5 \cdot 6,2}{16,0} = 4,625 \text{ т.}$$



5. Сячэнне IV (чарц. 309):

$$x = 8,00 \text{ м.}$$

$$Q_g = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{0,6}{2} \cdot 0 = 0,000 \text{ т.}$$

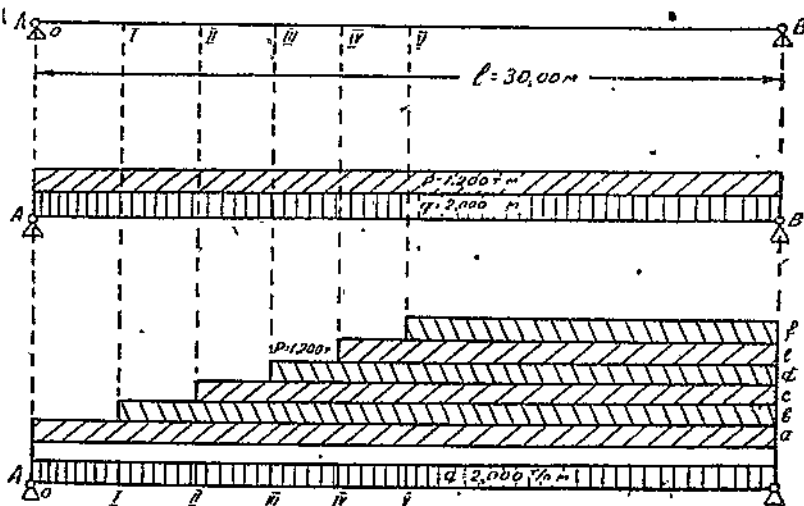
Папярочная сіла ад часовай нагрузкі:

$$Q_{\max} = \frac{4,5 \cdot (8,0 + 1,0) + 2,5 \cdot 4,2}{16,0} = 3,1875 \text{ т.}$$

На падставе вылічэнняў складзена табліца

| №№ сячэнняў | Адлегласць ад апоры $x$ | Папярочная сіла     |                          | Папярочная сіла |           | Увага |
|-------------|-------------------------|---------------------|--------------------------|-----------------|-----------|-------|
|             |                         | Ад уласнай вагі $m$ | Ад часовай на-грузкі $m$ | min $m$         | max $m$   |       |
| 0           | 0,000                   | + 4,800             | + 10,500                 | + 4,800         | + 15,300  |       |
| I           | 2,00                    | + 3,600             | + 8,1875                 | + 3,600         | + 11,7875 |       |
| II          | 4,00                    | + 2,400             | + 6,250                  | + 2,400         | + 8,650   |       |
| III         | 6,00                    | + 1,200             | + 4,625                  | + 1,200         | + 5,825   |       |
| VI          | 8,00                    | + 0,000             | + 3,1875                 | + 0,000         | + 3,1875  |       |

**Прыклад 2.** Вызначыць найбольшы і найменшы выгібаючы моманты і папярочныя сілы ў сячэннях бэлькі праз 3,00 метры, калі разліковая даўжыня бэлькі  $l = 30,00$  м, уласная вага яе  $g = 2,0$  т на паг. м і роўнамерна-размеркаваная нагрузка  $p = 1,20$  т на паг. м.



Чарц. 310.

Абазначэнні:  $M_g$ —выгібаючы момант ад уласнай вагі;  
 $M_p$ —найбольшы выгібаючы момант ад часовай на-грузкі;  
 $Q_g$ —папярочная сіла ад уласнай вагі;  
 $Q_p$ —найбольшая папярочная сіла ад часовай на-грузкі;  
 $x$ —адлегласць сячэння ад левай апоры А.

1) Сячэнне (на апоры) А:

$$x = 0; \quad M_{g_0} = 0,000 \text{ т.м.}; \quad M_p = 0,000 \text{ т.м.};$$

$$Q_{g_0} = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = g \frac{l}{2} = 30,000 \text{ т.}$$

Ад рухомай нагрукі папярочная сіла будзе найбольшай, калі гэта нагрукка даведзена да сячэнняў (чарц. 310)

$$Q_{p_0} = \frac{g(l-x)^2}{2l} = \frac{1,200 \cdot 30^2}{2 \cdot 30} = 18,000 \text{ т.}$$

2. Сячэнне I:

$$x = 3,00 \text{ м.}$$

$$M_{g_1} = \frac{g \cdot x}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{2,00 \cdot 3,00}{2} \cdot 27,0 = 81,000 \text{ т.м.}$$

Найбольшы выгібаючы момант у сячэнні атрымоўваецца пры загрузцы ўсяго пралёта:

$$\text{мах. } M_p = \frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{1,200 \cdot 3,0}{2} \cdot 27,0 = 48,600 \text{ т.м.}$$

Папярочная сіла:

$$Q_{g_1} = \frac{g}{2} \cdot (l - 2x) = \frac{2,000}{2} \cdot 24,00 = 24,000 \text{ т.}$$

$Q_{p_1}$  атрымаецца найбольшым пры загрузцы як на чарц. 310-б.

$$Q_{p_1} = \frac{g(l-x)^2}{2l} = 14,580 \text{ т.}$$

3. Сячэнне II:

$$x = 6,00 \text{ м.}$$

$$M_{g_2} = \frac{2,000 \cdot 6,0}{2} \cdot 24,0 = 144,000 \text{ т.м.}$$

$$M_{p_2} = \frac{1,200 \cdot 6,7}{2} \cdot 24,0 = 86,400 \text{ т.м.};$$

$$Q_{g_2} = \frac{2,000}{2} \cdot 18,0 = 18,000 \text{ т.};$$

$$Q_{p_2} = \frac{1,200 \cdot 24 \cdot 24}{2 \cdot 30 \cdot 30} = 11,520 \text{ т (нагрукка як на чарц. 310-с).}$$

4. Сячэнне III.

$$x = 9,00 \text{ м.}$$

$$M_{g_3} = \frac{2,000 \cdot 9,0}{2} \cdot 21,0 = 189,000 \text{ т.м.}$$

$$M_{p_3} = \frac{1,200 \cdot 9,00}{2} \cdot 21,0 = 113,400 \text{ т.м.};$$

$$Q_{g_3} = \frac{2,000 \cdot 12,0}{2} = 12,000 \text{ т.}$$

$$Q_{p_3} = \frac{1,200 \cdot 21 \cdot 21}{2 \cdot 30} = 8,820 \text{ т (пры нагрукцы як на чарц. 310-d).}$$

5. Сячэнне IV:

$$x = 12,000 \text{ м};$$

$$M_{g_4} = \frac{2,000 \cdot 12,0}{2} \cdot 18,0 = 216,000 \text{ т.м};$$

$$M_{p_4} = \frac{1,200 \cdot 12,0}{2} \cdot 18,0 = 129,600 \text{ т.м};$$

$$Q_{g_4} = \frac{2,000}{2} \cdot 6,0 = 6,000 \text{ т.}$$

$$Q_{p_4} = \frac{1,200 \cdot 18 \cdot 18}{2 \cdot 30} = 6,480 \text{ т (нагрузка як на чарц. 310-е).}$$

6. Сячэнне V:

$$x = 15,0 \text{ м.}$$

$$M_{g_5} = \frac{2,000 \cdot 15,0}{2} \cdot 15,0 = 225,000 \text{ т.м};$$

$$M_{p_5} = \frac{1,200 \cdot 15,0}{2} \cdot 15,0 = 135,000 \text{ т.м};$$

$$Q_{g_5} = \frac{2,000}{2} \cdot 0 = 0,000 \text{ т};$$

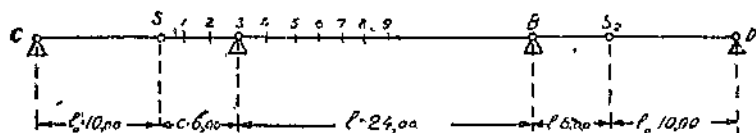
$$Q_{p_5} = \frac{1,200 \cdot 15 \cdot 15}{2 \cdot 30} = 4,500 \text{ т (нагрузка як на чарц. 310-ф).}$$

В о д к а

| №№ сячэнняў | Адлегласць сячэнняў ад апоры А | Выгібаючыя моманты  |                         |          |          | Папярочныя сілы   |                       |        |        |
|-------------|--------------------------------|---------------------|-------------------------|----------|----------|-------------------|-----------------------|--------|--------|
|             |                                | Ад уласнай вагі т.м | Ад часовай нагрузкі т.м | Мін. т.м | Мак. т.м | Ад уласнай вагі т | Ад часовай нагрузкі т | Мін. т | Мак. т |
| 0           | 0,000                          | 0,000               | 0,000                   | 0,000    | 0,000    | 30,000            | 18,000                | 30,000 | 48,000 |
| I           | 3,00                           | 81,000              | 48,600                  | 81,000   | 129,600  | 24,000            | 14,580                | 24,000 | 38,580 |
| II          | 6,00                           | 144,000             | 86,400                  | 144,000  | 230,400  | 18,000            | 11,520                | 18,000 | 29,520 |
| III         | 9,00                           | 189,000             | 113,400                 | 189,000  | 302,400  | 12,000            | 8,820                 | 12,000 | 20,820 |
| IV          | 12,00                          | 216,000             | 129,600                 | 216,000  | 345,600  | 6,000             | 6,480                 | 6,000  | 12,480 |
| V           | 15,00                          | 225,000             | 135,000                 | 225,000  | 360,000  | 0,000             | 4,500                 | 0,000  | 4,500  |

## § 113. Приклады вызначэння тах. і min. момантаў і папярочных сіл для бэлек Гербера

**Прыклад 1.** Вызначыць пры дапамозе інфлюэнтных ліній выгібаючыя моманты і папярочныя сілы ў сячэннях праз 2 м бэлькі Гербера (чарц. 311) з сярэднім пралётам  $l = 24$  м, кансолямі па  $c = 6,0$  м і пераходнымі бэлькамі па  $l_0 = 10,0$  м.



Чарц. 311.

Уласная вага бэлькі  $g = 2,400$  т на паг. м і пераходных бэлек  $g_0 = 1,800$  т на паг. м, часовай-жа нагрузкаю з'яўляецца роўнамерна-размеркаваная нагрузка ў  $1,200$  т на паг. м.

### а) Вызначэнне выгібаючых момантаў

Пабудоваўшы інфлюэнтныя лініі для выгібаючых момантаў у сячэннях 0, 1 . . . 9, атрымліваем плошчы ўплыву для:

1) сячэнне 0 (чарц. 312-а):  $F_1' = 0$ ;

$$\begin{aligned} 2) \text{ сячэнне I (чарц. 312-б): } F_1' &= -\frac{10,0 \cdot 2}{2} = -10,0; F_1 = \\ &= -\frac{2,0 \cdot 2,0}{2} = -2,0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ сячэнне II (чарц. 312-в): } F_1' &= -\frac{10,0 \cdot 4}{2} = -20,0; F_1 = \\ &= -\frac{4,0 \cdot 4,0}{2} = -8,0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ сячэнне III (чарц. 312-г): } F_1' &= -\frac{10,0 \cdot 6,0}{2} = -30,0; F_1 = \\ &= -\frac{6,0 \cdot 6,0}{2} = -18,0; \end{aligned}$$

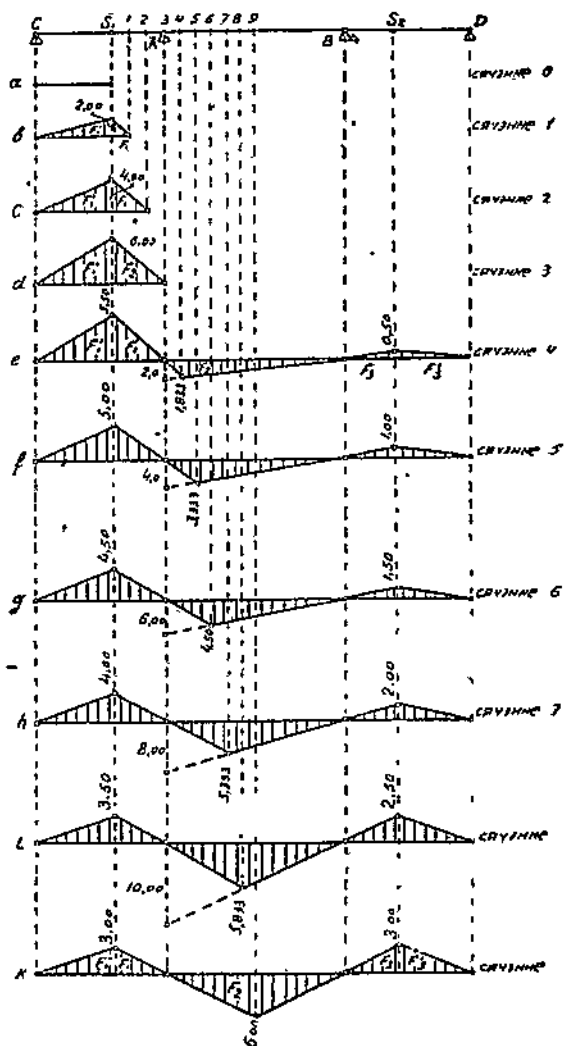
$$\begin{aligned} 5) \text{ сячэнне IV (чарц. 312-д): } F_1' &= -\frac{10,0 \cdot 5,5}{2} = -27,50; F_1 = \\ &= -\frac{6,0 \cdot 5,5}{2} = -16,5; F_2 = +\frac{24,0 \cdot 1,883}{2} = +22,60; \end{aligned}$$

$$F_3 = -\frac{6,0 \cdot 0,50}{2} = -1,50; F_3' = -\frac{10 \cdot 0,5}{2} = -2,50;$$

б) сячэнне V (чарц. 312-f):  $F_1' = -\frac{10,0 \cdot 5,0}{2} = -25,0$ ;

$F_1 = -\frac{6,0 \cdot 5,0}{2} = -15,0$ ;  $F_2 = +\frac{24,0 \cdot 3,333}{2} = +40,0$ ;

$F_3 = -\frac{6,0 \cdot 1,0}{2} = -3,0$ ;  $F_3' = -\frac{10 \cdot 1,0}{2} = -5,0$ ;



Чарц. 312.

$$7) \text{ сячэнне VI (чарц. 312 - g): } F_1' = -\frac{10,0 \cdot 4,5}{2} = -22,5;$$

$$F_1 = -\frac{6 \cdot 4,5}{2} = -13,5; \quad F_2 = +\frac{24,0 \cdot 4,5}{2} = +54,0;$$

$$F_3 = -\frac{6,0 \cdot 1,5}{2} = -4,5; \quad F_3' = +\frac{10,0 \cdot 1,5}{2} = +7,50;$$

$$8) \text{ сячэнне VII (чарц. 312 - h): } F_1' = -\frac{10,0 \cdot 4,0}{2} = -20,0;$$

$$F_1 = -\frac{6,0 \cdot 4,0}{2} = -12,0; \quad F_2 = +\frac{24,0 \cdot 5,333}{2} = +64,0;$$

$$F_3 = -\frac{6,0 \cdot 2,0}{2} = -6,0; \quad F_3' = -\frac{10 \cdot 2}{2} = -10,0;$$

$$9) \text{ сячэнне VIII (чарц. 312 - i): } F_1' = -\frac{10,0 \cdot 3,5}{2} = -17,5;$$

$$F_1 = -\frac{6,5 \cdot 3,5}{2} = -10,5; \quad F_2 = +\frac{24,0 \cdot 5,833}{2} = +7,00;$$

$$F_3 = -\frac{6,0 \cdot 2,5}{2} = -7,5; \quad F_3' = -\frac{10,5 \cdot 2,5}{2} = -12,5;$$

$$10) \text{ сячэнне IX (чарц. 312 - k): } F_1' = -\frac{10,0 \cdot 3,0}{2} = -15,0;$$

$$F_1 = -\frac{6,0 \cdot 3,0}{2} = -9,0; \quad F_2 = +\frac{24,0 \cdot 6,0}{2} = +72;$$

$$F_3 = -\frac{6,0 \cdot 3,0}{2} = -9,00; \quad F_3' = -\frac{10,0 \cdot 3,0}{2} = -15,0.$$

Выгібаючыя моманты атрымваюцца:

1. Сячэнне 0. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_0} = g_0 \cdot F_1' = 0,000 \text{ т. м.};$$

ад часовай нагрузкі:

$$M_{p_0} = p \cdot F_1' = 0,000 \text{ т. м.}$$

2. Сячэнне I. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_1} = g_0 \cdot F_1' + g \cdot F_1 = -1,800 \cdot 10,0 - 2,400 \cdot 2 = -22,850 \text{ т/м.};$$

ад часовай нагрузкі:

$$M_{p_1} = p \cdot (F_1' + F_1) = 1,200 \cdot (-10,0 - 20) = -14,400 \text{ т. м.}$$

3. Сячэнне II. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_2} = g_0 \cdot F_1' + g \cdot F_1 = -1,800 \cdot 20,0 - 2,400 \cdot 8,0 = -55,200 \text{ т. м};$$

ад часовай нагрузкі:

$$M_{p_2} = p \cdot (F_1' + F_1) = 1,200 \cdot (-20,0 - 8,0) = -33,600 \text{ т. м.}$$

4. Сячэнне III. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_3} = g_0 \cdot F_1' + g \cdot F_1 = -1,800 \cdot 30,0 - 2,400 \cdot 18,0 = -97,200 \text{ т. м.}$$

ад часовай нагрузкі:

$$M_{p_3} = p \cdot (F_1' + F_1) = 1,200 \cdot (-30,0 - 18,0) = -57,600 \text{ т. м.}$$

5. Сячэнне IV. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_4} = g_0 \cdot (F_1' + F_3') + g \cdot (F_1 + F_2 + F_3) = 1,800 \cdot (-27,500 - 2,50) + \\ + 2,400 \cdot (-16,50 + 22,0 - 1,50) = -44,400 \text{ т. м};$$

ад часовай нагрузкі: адмоўны пры загрузцы ад С да А і ад В да D:

$$M'_{p_4} = p \cdot (F_1' + F_1 + F_2 + F_3') = 1,200 \cdot (-27,5 - 16,5 - 1,5 - 2,5) = \\ = -57,600 \text{ т. м},$$

і дадатны пры загрузцы ад А да В:

$$M''_{p_4} = p \cdot F_2 = +1,200 \cdot 22,0 = +26,400 \text{ т. м.}$$

6. Сячэнне V. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_5} = g_0 \cdot (F_1' + F_3') + g \cdot (F_1 + F_2 + F_3) = 1,800 \cdot (-25,0 - 5,0) + \\ + 2,400 \cdot (-15,0 + 40,0 - 3,0) = -1,200 \text{ т. м};$$

ад часовай нагрузкі: адмоўны пры загрузцы ад С да А і ад В да D:

$$M'_{p_5} = p \cdot (F_1' + F_1 + F_2 + F_3') = 1,200 \cdot (-25,0 - 15,0 - 3,0 - 5,0) = \\ = -57,600 \text{ т. м},$$

і дадатны пры загрузцы ад А да В:

$$M''_{p_5} = p \cdot F_2 = +1,200 \cdot 40,000 = +48,000 \text{ т. м.}$$

7. Сячэнне VI. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_6} = g_0 \cdot (F_1' + F_3') + g \cdot (F_1 + F_2 + F_3) = 1,800 \cdot (-22,50 - 7,50) + \\ + 2,400 \cdot (-13,50 + 54,0 - 4,5) = +32,400 \text{ т. м};$$

ад часовай нагрузкі: адмоўны пры загрузцы ад С і да А ад В да D:

$$M'_{p_6} = p \cdot (F_1' + F_1 + F_2 + F_3') = 1,200 \cdot (-22,50 - 13,50 + 4,5 - 7,5) = \\ = -57,600 \text{ т. м},$$

і дадатны пры загрузцы ад  $A$  да  $B$ :

$$M''_{p_6} = p \cdot F_2 = +1,200 \cdot 54,00 = +64,800 \text{ т. м.}$$

8. Сячэнне VII. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_7} = g_0 \cdot (F_1' + F_3') + g \cdot (F_1 + F_2 + F_3) = 1,800 \cdot (-20,0 - 10,0) + 2,400 \cdot (-12,0 + 64,0 + 6,0) = +54,600 \text{ т. м.};$$

ад часовай нагрузкі: адмоўны пры загрузцы ад  $C$  да  $A$  і ад  $B$  да  $D$ :

$$M'_{p_7} = p \cdot (F_1' + F_3 + F_3') = 1,200 \cdot (-20,0 - 12,0 - 6,0 - 10,0) = -57,600 \text{ т. м.},$$

і дадатны пры загрузцы ад  $A$  да  $B$ :

$$M''_{p_7} = p \cdot F_2 = +1,200 \cdot 64,0 = +76,800 \text{ т. м.}$$

9. Сячэнне VIII. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_8} = g_0 \cdot (F_1' + F_3') + g \cdot (F_1 + F_2 + F_3) = 1,800 \cdot (-17,50 - 12,50) + 2,400 \cdot (-10,5 + 70,0 - 7,5) = +70,800 \text{ т. м.};$$

ад часовай нагрузкі: адмоўны пры загрузцы ад  $C$  да  $A$  і ад  $B$  да  $D$

$$M'_{p_8} = p \cdot (F_1' + F_1 + F_3 + F_3') = 1,200 \cdot (-17,5 - 10,5 - 7,5 - 12,5) = -57,600 \text{ т. м.},$$

і дадатны пры загрузцы ад  $A$  да  $B$ :

$$M'_{p_8} = p \cdot F_2 = +1,200 \cdot 70,0 = +84,000 \text{ т. м.}$$

10. Сячэнне IX. Ад уласнай вагі:

$$M_{g_9} = g_0 \cdot (F_1' + F_3) + g \cdot (F_1 + F_2 + F_3) = 1,800 \cdot (-15,0 - 15,0) + 2,400 \cdot (-9,0 + 72,0 - 9,0) = +75,600 \text{ т. м.};$$

ад часовай: адмоўны пры загрузцы ад  $C$  да  $A$  і ад  $B$  да  $D$ :

$$M'_{p_9} = p \cdot (F_1' + F_1 + F_3 + F_3') = 1,200 \cdot (-15,0 - 9,0 - 9,0 - 15,0) = -57,600 \text{ т. м.},$$

і дадатны пры загрузцы ад  $A$  да  $B$ :

$$M''_{p_9} = p \cdot F_2 = +1,200 \cdot 70,0 = +86,400.$$

## Зводка вигібальних моментів

| № сечення | Адмгл. сячення ад А<br>у м | Вигібальні моменти  |                       |          |           |           |
|-----------|----------------------------|---------------------|-----------------------|----------|-----------|-----------|
|           |                            | Ад уласнай ваги т.м | Ад часової навантажки |          |           |           |
|           |                            |                     | — т.м                 | + т.м    | Min т.м   | Max т.м   |
| 0         | — 6,00                     | — 0,000             | 0,000                 | 0,000    | 0,000     | 0,000     |
| I         | — 4,00                     | — 22,800            | — 14,400              | 0,000    | — 37,200  | — 22,800  |
| II        | — 2,00                     | — 55,200            | — 33,600              | 0,000    | — 88,800  | — 55,200  |
| III       | 0,00                       | — 97,200            | — 57,600              | 0,000    | — 154,800 | — 97,200  |
| IV        | + 2,00                     | — 44,400            | — 57,600              | + 26,400 | — 102,000 | — 18,000  |
| V         | + 4,00                     | — 1,200             | — 57,600              | + 48,000 | — 58,800  | + 46,800  |
| VI        | + 6,00                     | + 32,400            | — 57,600              | + 64,800 | — 25,200  | + 97,200  |
| VII       | + 8,00                     | — 56,400            | — 57,600              | + 76,800 | — 1,200   | + 133,200 |
| VIII      | + 10,00                    | + 70,800            | — 57,600              | + 84,000 | + 13,200  | + 154,800 |
| IX        | + 12,00                    | + 75,600            | — 57,600              | + 86,400 | + 18,000  | + 162,000 |

## б) Визначення напругових сил Q

Пабудовавши інфлюентні лінії для сечення ад 0 да IX, визначаємо площі впливу:

$$\text{сечення 0 (чарц. 313 - а): } F_1 = -\frac{10,0 \cdot 1,0}{2} = -5,0;$$

$$\begin{aligned} \text{сечення I (чарц. 313 - б): } F_1' &= -\frac{10,0 \cdot 1,0}{2} = -5,0; \\ F_1 &= -2,0 \cdot 1,0 = -2,0; \end{aligned}$$

$$\text{сечення II (чарц. 313 - в): } F_1' = -5,0; F_1 = -4,0;$$

$$\text{сечення III (чарц. 313 - д): } F_1' = -5,0; F_1 = -6,0;$$

$$\text{сечення IV (чарц. 313 - е): } F_1' = +1,25; F_1 = +0,75;$$

$$\begin{aligned} \text{сечення V (чарц. 313 - ф): } F_1' &= +1,25; F_1 = +0,75; \\ F_2 &= -0,083; F_3 = +10,083; F_4 = -0,75; F_4' = -1,25; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{сечення VI (чарц. 313 - г): } F_1' &= +1,25; F_1 = +0,75; \\ F_2 &= -0,75; F_3 = +6,75; F_4 = 0,75; F_4' = -1,25; \end{aligned}$$

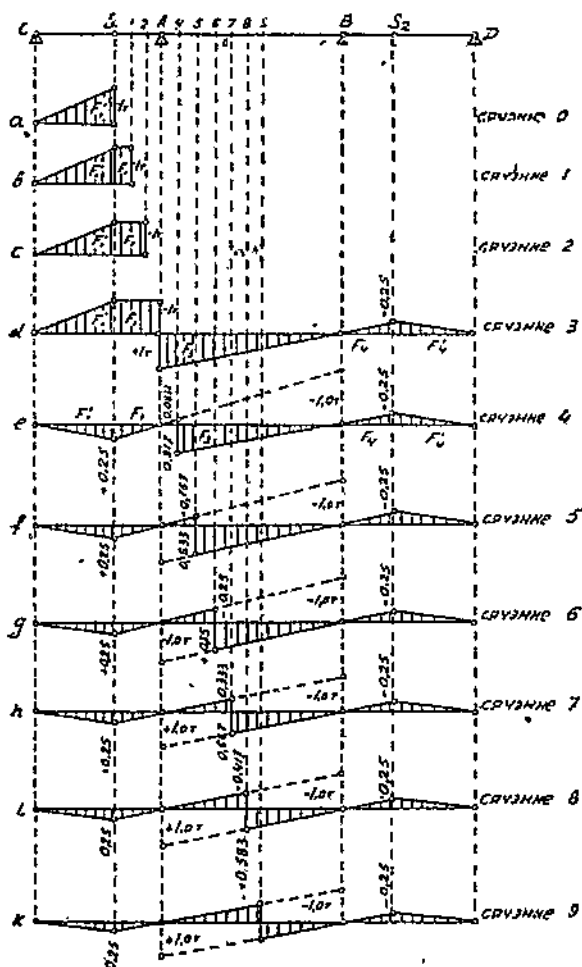
$$\begin{aligned} \text{сечення VII (чарц. 313 - h): } F_1' &= +1,25; F_1 = +0,75; \\ F_2 &= -1,333; F_3 = +5,333; F_4 = -0,75; F_4' = -1,25; \end{aligned}$$

сячэнне VIII (чарц. 313-і):

$$F_1' = +1,25; F_1 = +0,75; F_2 = -2,083; F_3 = +4,083; F_4 = -0,75; F_4' = -1,25;$$

сячэнне IX (чарц. 313-к):

$$F_1' = +1,25; F_1 = +0,75; F_2 = -3,00; F_3 = +3,0; F_4 = -0,74; F_4' = -1,25.$$



Чарц. 313.

Папярочныя сілы атрымоўваем:

1. Сячэнне 0. Ад уласнай вагі:

$$Q_{g_0} = g_0 \cdot F_1' = -1,800 \cdot 5,00 = -9,00 \text{ м};$$

ад часовай нагрузкі:

$$Q_{p_0} = p \cdot F_1' = -1,200 \cdot 5,000 = -6,000 \text{ т.}$$

2. Сячэнне I:

$$Q_{g_0}' = g_0 \cdot F_1' + g \cdot F_1 = -1,800 \cdot 5,00 - 2,400 \cdot 2,00 = -13,800 \text{ т.}$$

ад часовай нагрузкі:

$$Q_{p_1} = p \cdot (F_1' + F_1) = 1,200 \cdot (-5,000 - 2,00) = -8,400 \text{ т і г. д.}$$

Зводка папярочных сіл

| № № сячэнняў | Алегласць сячэння ад апоры ў м | Папярочная сіла ад уласнай вагі ў т | Папярочная сіла ад часовай нагрузкі |         | Агульная папярочная сіла |         | У вага |
|--------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------|--------------------------|---------|--------|
|              |                                |                                     | - т                                 | + т     | min. т                   | max. т  |        |
| 0            | -6,00                          | -9,00                               | -6,000                              | 0,000   | -15,000                  | -9,000  |        |
| I            | -4,00                          | -13,800                             | -8,400                              | 0,000   | -22,200                  | -13,800 |        |
| II           | -2,00                          | -18,600                             | -10,800                             | 0,000   | -29,400                  | -18,600 |        |
| III          | -0,00                          | -27,450                             | -15,600                             | +14,400 | -43,050                  | +43,200 |        |
|              |                                | +28,800                             |                                     |         |                          |         |        |
| IV           | +2,00                          | +24,000                             | -2,500                              | +14,500 | +21,500                  | +38,500 |        |
| V            | +4,00                          | +19,200                             | -2,800                              | +12,400 | +16,400                  | +31,600 |        |
| VI           | +6,00                          | +14,400                             | -3,300                              | +10,500 | +11,100                  | +24,900 |        |
| VII          | +8,00                          | +9,600                              | -4,000                              | +8,800  | +5,600                   | +18,400 |        |
| VIII         | +10,00                         | +4,500                              | -4,900                              | +7,300  | -0,100                   | +12,100 |        |
| IX           | +12,00                         | +0,000                              | -6,000                              | +6,000  | -6,000                   | +6,000  |        |

**Прыклад 3.** Вызначыць найбольшыя і найменшыя выгібаючыя моманты ў сячэнні *n n* кансольнай бэлькі на алегласці 20,00 м ад апоры ў, калі сярэдні пралёт бэлькі  $l = 60,00$  м, кансолей  $c = 12,00$  м, а даўжыня пераходных бэлэк  $l_0 = 30,00$  м.

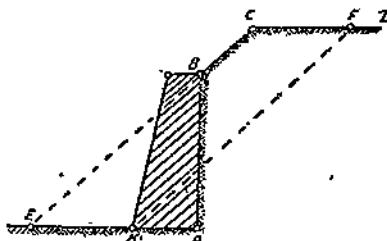
Нагрузку складае нармальны цяжнік, уласная вага кансольнай бэлькі  $g = 4,500$  т і пераходных бэлэк 3,00 т на паг. м.

## ТЕОРИЯ СЫПУЧЫХ ЦЕЛ. ПАДПОРНЫЯ СЦЕНЫ.

## § 114. Агульныя паняцці

На будаўніцтве приходзіцца мець справу з землянымі масамі ў выглядзе насыпаў, выемак і інш., якія з бакоў, для эканоміі прасторы ці для другіх меркаванняў, падтрымліваюцца сценкамі, г. зв. *падпорнымі сценкамі* (чарц. 314).

З чарц. 314 відаць, што дзякуючы падпорнай сцяне  $AB$  эканоміцца плошча  $EK$  ці  $CF$ . Сама-ж падпорная сцяна пры гэтым пад-



Чарц. 314.

падае з аднаго боку ціску зямлі, якую яна падпірае, у звязку з чым павінна быць пабудавана так, каб *устойлівасць і трываласць былі забяспечаны*. Знешнімі сіламі тут з'яўляюцца ўласная вага сцяны і ціск зямлі. Першая сіла вызначаецца проста ў залежнасці ад размераў сцяны і ўдзельнай вагі матэрыялаў; вызначэнне-ж другой сілы—задача больш складаная і патрабуе дапушчэння некаторых умоў.

На велічыню ціску зямлі робіць уплыў: *удзельная вага, вугал трэння зямлі, сапчэнне між часцінкамі*. Удзельная вага зямлі вагаецца ад 1,40 да 2,00. Вугал трэння называецца таксама *вуглом натуральнага адкосу*, бо свабодна насыпаная зямля ўтварае з гэтым вуглом адкос да гарызонту. Велічыня яго вагаецца ад  $20^\circ$  да  $45^\circ$ . У змешчанай ніжэй табліцы падаюцца сярэднія значэнні вагі,

вуглоу трэння і каэфіцыентаў трэння для некаторых характэрных сыпучых цел.

1

| Сыпучае цела і ступень яго вільготнасці | Вугал трэння | Каэфіцыент трэння | Вага куб. м (удзельн. вага) |
|-----------------------------------------|--------------|-------------------|-----------------------------|
| Пясок сухі . . . . .                    | 30°—35°      | 0,58—0,70         | 1,6—1,65                    |
| „ вільготны . . . . .                   | 40°          | 0,84              | 1,8                         |
| „ мокры . . . . .                       | 25°          | 0,47              | 2,0                         |
| Гліна сухая . . . . .                   | 40°—45°      | 0,84—1,00         | 1,5—1,6                     |
| Гравій сухі . . . . .                   | 35°—40°      | 0,70—0,84         | 1,8—1,85                    |
| „ мокры . . . . .                       | 25°          | 0,47              | 1,95                        |
| Галька гранёная . . . . .               | 45°          | 1,0               | 1,8                         |
| „ круглая . . . . .                     | 30°          | 0,58              | 1,8                         |
| Суглінак сухі . . . . .                 | 40°          | 0,84              | 1,5                         |
| „ мокры . . . . .                       | 25°          | 0,47              | 1,9                         |
| Чарназём сухі . . . . .                 | 40°          | 0,84              | 1,4                         |
| „ натуральна вільготны . . . . .        | 45°          | 1,00              | 1,58                        |
| „ насычаны вадой . . . . .              | 27°          | 0,51              | 1,8                         |
| Пшавіца . . . . .                       | 30°—35°      | 0,58              | 1,7—0,8                     |

У кожным паасобным выпадку *вугал трэння* можа быць вызначан практычна; для гэтага зямля насыпаецца на дошку і адзін канец яе падймаецца да таго, пакуль зямля не пачне коўзаць; вугал нахілу дошкі да гарызонту, пры якім пачынаецца коўзанне, роўны вуглу трэння.

*Сашчапленне* хістаецца ад 0 да  $0,6 \text{ т/м}^2$ , але пры разліках яго звычайна пад увагу не прымаюць, бо не ўстаноўлена яшчэ дэталёва, ці дзейнічае адначасова сашчапленне і трэнне, ці, што больш правільна, трэнне пачынае дзейнічаць толькі ў той момант, калі парушана сашчапленне. Апрача таго, сашчапленне мае сваё большае значэнне пры шчыльна зляжалай зямлі, між тым як у рыхлай свежа-насыпанай зямлі, сашчапленне амаль роўна 0. Сіла сашчаплення змяншае ціск зямлі на падпорную сцяну і таму не прынятае яе пад увагу пры разліках вядзе да павелічэння запасу трываласці. Для вызначэння ціску зямлі карыстаюцца рознымі тэорыямі.

1. *Тэорыя земляной прызмы найбольшага ціску.* Згодна гэтай тэорыі пры руху падпорнай сцяны ад земляной масы, што падпіраецца падпорнай сцяной, аддзяляецца некаторая прызма, якая

коузає між некторай роўніцай, г. зв. *роўніцай коўзання*, і ўнутраным бокам падпорнай сцяны.

2. *Тэорыя ціску зямлі ў неабмежаванай прасторы*. Згодна гэтай тэорыі выбіраецца адвольны элемент унутры земляной масы, выводзіцца з яго ўмова роўнавагі і вызначаецца яго ўплыў, на шуканы ціск зямлі, які прадстаўляе сабой суму ціскаў паасобных элементаў.

З прычыны нераспрацаванасці апошняй тэорыі, праблематычнасці ці зусім непраўдападобнасці (у некаторых выпадках) рэзультатаў, яна мае вельмі абмежаванае прымяненне. На практыцы таму карыстаюцца амаль выключна першай тэорыяй.

Пры практычным вырашэнні пытанняў будзем дапускаць, што сячэнне сцяны  $ABEF$  (чарц. 315) ўзята перпендыкулярна да сцяны, якая мае даўжыню, роўную адзінцы, у кірунку, перпендыкулярным да чарцяжа.

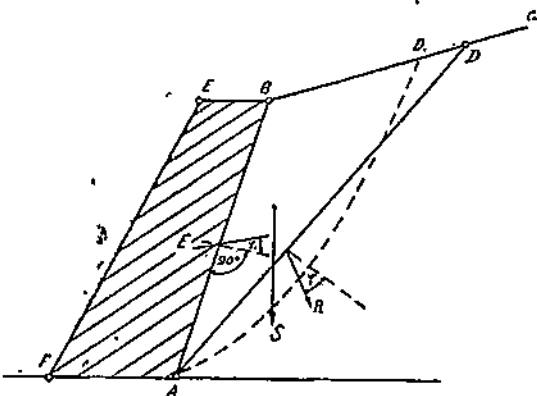
Тую-ж даўжыню мае і прызма коўзання  $ABD$ .

Уласная вага прызмы коўзання ўроўнаважваецца супроцьціскам зямлі  $R$  у роўніцы коўзання  $AD$ , які ўтварае вугал  $\varphi$  з перпендыкулярам да гэтай роўніцы, і супроцьціскам падпорнай сцяны  $E$ , які ўтварае вугал  $\varphi$ , з перпендыкулярам да роўніцы сцяны  $AB$ , што датыкаецца да зямлі. Вугал  $\varphi_2$  прымаецца роўным вуглу  $\varphi$ , што павінна адпавядаць сапраўднасці, бо пры шурпатай паверхні сцяны да апошняй прыліпае слой зямлі, і трэнне ўтвараецца ў далейшым між гэтым слоём і зямлёю прызмы.

Недахоп, указаны Морам, што гэтыя тры сілы, якія павінны знаходзіцца ў роўнавазе, перасякаюцца не ў адным пункце, адпадае, калі прыняць, што паверхня коўзання не ёсць роўніца  $AD$ , а слаба выгнутая цыліндрычная паверхня  $AD$ , прычым сячэнне прызмы ў абодвух выпадках застаецца аднолькавым па велічыні плошчы. Гэтым дасягаецца і большае набліжэнне да сапраўднасці, бо *паверхня коўзання*, якая вызначаецца практыкай і назіраннямі, ёсць *слаба выгнутая цыліндрычная паверхня*.

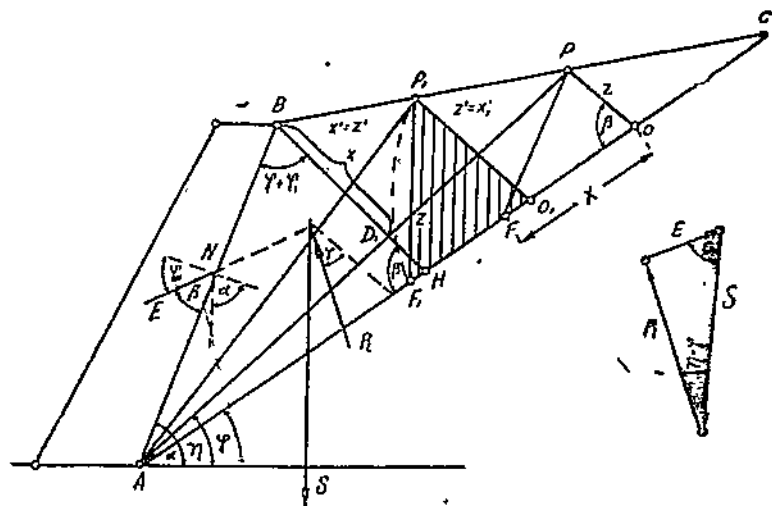
## § 115. Ціск зямлі на плоскую падпорную сцяну пры плоскай паверхні зямлі

Дапусцім, што земляная маса падпіраецца з аднаго боку плоскай падпорнай сцяной  $AB$ , а зверху абмежавана роўніцай  $BC$  (чарц. 316), перпендыкулярнай да роўніцы чарцяжа. Даўжыню



Чарц. 315.

Адвольнай роўніцай  $AP$  з вуглом  $\eta$  да гарызонту, большым за вугал натуральнага адкосу  $\varphi$ , адрэжам ад земляной масы клін  $APB$ . Гэты клін мае імкненне коўзаць між роўніцамі  $AP$  і  $AB$ . Гэты рух быў-бы ў сапраўднасці, калі-б уласная вага прызмы



(кліна) перавысіла трэнне ў паказаных роўніцах і сашчапленне зямлі ў роўніцы *AP*.

Няхай  $E$  і  $R$  сілы, якія ціснуть на клін з боку сцяны  $AB$  і роўніцы  $AP$  у момант гранічнай роўнавагі (калі сцяна пачынае паддавацца). У гэтым выпадку  $E$  утварае з перпендыкулярам да сцяны  $AB$  вугал  $\varphi_1$  і  $R$  з перпендыкулярам да  $AP$ —вугал  $\varphi$ . Сілы  $E$  і  $R$  павінны знаходзіцца ў роўнавазе з уласнай вагой  $S$  земляной прызмы і значыць пабудаваны з гэтых сіл многавугольнік павінен быць замкнутым. Што датычыць вуглоў, якія ўтвараюцца гэтымі сіламі, то сіла  $E$  ўтварае з вертыкаллю, а значыць і з сілаю  $S$ , вугал  $\beta$ , супроцьціск-жа зямлі  $R$  утварае з сілай  $S$  вугал  $(\eta - \varphi)$ .

Калі правесці прамую  $AC$  пад вуглом натуральнага адкосу зямлі  $\varphi$  да гарызанталі, а з  $P$ —прамую  $PO$  пад вуглом  $\beta$  да  $AC$ , то трохвугольнік  $APQ$  будзе падобным трохвугольніку сіл і можа быць скарыстаны для паказання сіл  $E$ ,  $R$  і  $S$ . Бок  $AO$  адпавядае вазе  $S$ , бок  $PO$ —ціску зямлі  $E$  і бок  $AP$ —ціску  $R$ . З падобнасці трохвугольнікаў вынікае:  $\frac{E}{S} = \frac{PO}{AO}$ , адкуль  $E = \frac{PO}{AO} \cdot S$ .

Калі правесці  $BH \parallel PO$ , то ўласная вага  $S$  прызмы  $ABP$  у папярэднім раўнанні можа быць заменена наступным:

$$S = \frac{AP \cdot BD \cdot \sin BOA}{2} \cdot \gamma = \gamma \cdot \frac{AP \cdot BD \cdot \sin(\beta + \eta - \varphi)}{2}.$$

Значыць:

$$E = \gamma \cdot \frac{PO \cdot AP \cdot BD}{2 \cdot AO} \cdot \sin(\beta + \eta - \varphi),$$

ці, з тае прычыны што

$$\frac{AP}{AO} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \eta - \varphi)}; \quad E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot PO \cdot BD.$$

Калі абазначыць  $PO$  праз  $z$  і  $BD$  праз  $x$ , то раўнанне прыме выгляд:

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot z \cdot x.$$

Апошняе раўнанне можна выразіць графічна, а іменна: з пункта  $O$  на  $AC$  адкладваем даўжыню  $OF = x$ , тады плошча трохвугольніка  $POF$  роўна:

$$\frac{x \cdot z \cdot \sin \beta}{2}.$$

З гэтага вынікае, што ціск зямлі  $E$ , які ўтвараецца земляной прызмай  $APB$  на сцяну  $AB$  выражаецца вагой прамой трохвугольнай прызмы, асноваю якой служыць трохвугольнік  $POF$ , а вышыня роўна адзінцы.

З тае прычыны, што пункт  $P$  узяты адвольна, то відавочна, што другому пункту будзе адпавядаць другая прызма, а значыць і другі ціск на сцяну. Такіх пунктаў можна выбраць бесканечнае мноства і ім будзе адпавядаць такія-ж лік ціскаў  $E$ . З усіх гэтых ціскаў, якія вызначаюцца раўнаннем:

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot zx$$

для сцяны мае значэнне тое, якое з'яўляецца найбольшым. Гэта бывае пры  $x = z$  (Максимум функцыі  $E$ ), прычым  $E$  тады роўна ціску зямлі на падпорную сцяну  $AB$ :

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot z^2. \quad (80)$$

\*Земляная прызма, якая прадстаўляе сабою  $E$ , у даным выпадку мае ў аснове роўнаплечны трохвугольнік  $P_1OF_1$  з роўнымі бакамі  $P_1O_1$  і  $O_1F_1$ .

Для пабудовы-ж роўніцы коўзання  $AP$ , маем тую ўмову, што трохвугольнікі  $ABP_1$  і  $AP_1O_1$  роўнавялікія, бо маюць агульную аснову  $AP_1$  і роўныя вышыні ў выніку роўнасці  $x_1$  і  $z_1$ , г. зн.  $AP_1$  падзяляе земляную прызму  $ABP_1O_1$  папалам.



З гэтых роўных адносін маем роўнасць здабыткаў крайніх і сярэдніх членаў

$$SC \cdot ED = BS \cdot CE \quad \& \quad SC \cdot BD = BS \cdot BE.$$

Склаўшы пачленна, атрымаем:

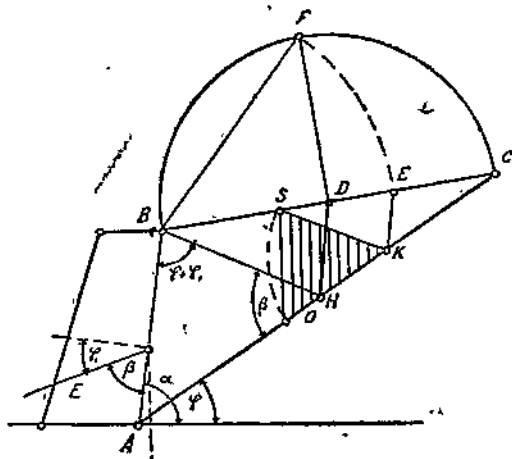
$$SC \cdot (ED + BD) = BS \cdot (CE + BE).$$

Але  $ED + BD = BE$  і  $CE + BE = BC$ .

значыць:  $SC \cdot BE = BS \cdot BC$ .

адкуль маем:  $\frac{SC}{BS} = \frac{BC}{BE} = \frac{BE}{BD}.$

Адсюль вынікае, што  $BE$  ёсць сярэдне-прапарцыянальная між  $BD$  і  $BC$ , далей прмая  $AK$  ёсць сярэдне-прапарцыянальная



Царц. 318.

між  $AH$  і  $AC$ . На підставі гэтага з'яўляецца магчымасць пабудавань роўніцу коўзаньня па аднаму з наступных спосабаў

а) Першы спосаб

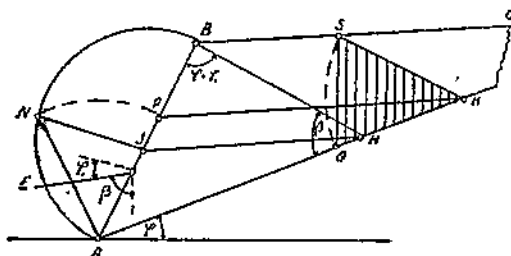
Проводзіць  $AC$  пад вуглом  $\varphi$  натуральнага адкосу да гарызонту, лінію палажэння  $BH$  пад вуглом  $(\varphi + \varphi_1)$  да роўніцы сцяны  $AB$  і прамую  $HD \parallel AB$  (чарц. 318). На  $BC$ , як на дыяметры, будуець поўакружыну і ўзводзяць перпендыкуляр  $DF$  і ад пункта  $B$  адкладваюць на  $BC$  даўжыню  $BE$ , роўную  $BF$ . Тады прмая  $BE$  будзе сярэдняй прапарцыянальнай між  $BD$  і  $BC$ . Нарэшце праводзяць  $EK \parallel AB$  і  $SK \parallel BH$  і атрымваюць у пункце  $S$  верхні кант роўніцы коўзаня.

Ціск зямлі на сцяну  $AB$  вызначаецца з раўнання:

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot SK^2 = \gamma \times \text{площу трикутника } SKO, \text{ у які } SK = KO.$$

б) Другі способ

Калі пункт  $C$  перасячэння лініі  $AC$  з роўніцай засыпкі  $BC$  знаходзіцца ад  $B$  на значнай адлегласці, то пасля правядзення лініі палажэння  $BH$  (чарц. 319) праводзяць  $HI \parallel BC$ . Згодна па-



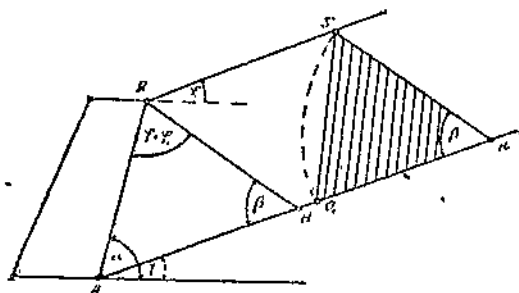
Чарц. 319.

пярэдняга знаходзяць сярэдняю прапарцыянальную між  $AI$  і  $AB$ , праводзяць  $PK \parallel BC$  і  $KS \parallel BH$ . Прамая  $AS$  ёсць шуканая роўніца коўзання.

Калі паверхня зямлі ўтварае з гарызанталлю вугал натуральнага адкосу (чарц. 320), то пункты  $C$  і  $S$  знахо-

дзяцца ў бесканечнасці, а роўніца коўзання—паралельна паверхні зямлі  $BC$ .

Для пабудовы трохвугольніка Рэбхана выбіраем на  $AC$  адвольны пункт  $K'$ , праводзім  $K'S' \parallel BH$  і адкладваем  $K'O' = K'S' = BH$ .



Чарц. 320.

Ціск зямлі мае наступнае значэнне:

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin B}{2} \cdot BH^2,$$

ці калі прыняць  $\varphi = \varphi_1$ , то:

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{2} \cdot BH^2.$$

Практыкаванне. Вызначыць  $E$  ў залежнасці ад вышыні сцяны  $h$ .

Адк.  $E = \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}$

с) Трэці спосаб

Калі праз ніжні пункт  $A$  сцяны  $AB$  (чарц. 321) правесці прамую  $AM$ , паралельную лініі палажэння, ці што тое самае, пад вуглом  $(\varphi + \varphi_1)$  да сцяны  $AB$ , і працягнуць паверхню зямлі  $BC$  да перасячэння з ёй у пункце  $M$ , то атрымаем:

$$\frac{MB}{MS} = \frac{AH}{AK} = \frac{BD}{BE},$$

але дзякуючы таму, што

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{MS}{MC},$$

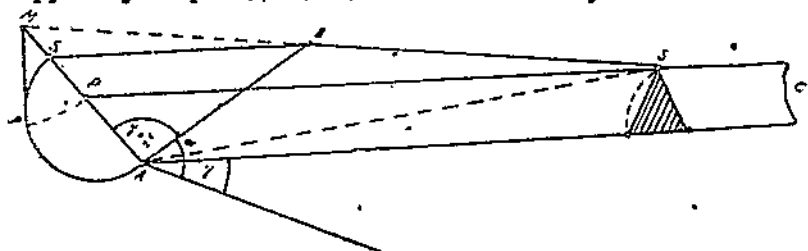
то: 
$$\frac{MB}{MS} = \frac{MS}{MC},$$

г. зн.  $MS$  ёсць сярэдняя прапарцыянальная між

$MB$  і  $MC$  і роўна датычнай з пункта  $M$  да поўакружыны, пабудаванай на  $BC$ , як на дыяметры. Значыць  $MT = MS$ .

а) Чацверты спосаб

Калі пункт  $C$  знаходзіцца за межамі чарцяжа (чарц. 322), то праводзяць  $BS$  паралельна  $AC$ , будуюць на  $AS$ , як на дыяметры, поўакружыну і праводзяць да яе з  $M$  датычную  $MP$ . Апошнюю



Чарц. 322.

пераносяць з  $M$  на прамую  $MA$ , так, каб  $MP = MP'$ ; праводзяць праз  $P'$  прамую  $P'S$ , паралельную  $AC$  і ў  $S$  атрымліваюцца верхні кант роўніцы коўзання, якую патрэбна было вызначыць.

## § 117. Вызначэнне роўніцы коўзання пры ломанай паверхні засыпкі і плоскай сцяне

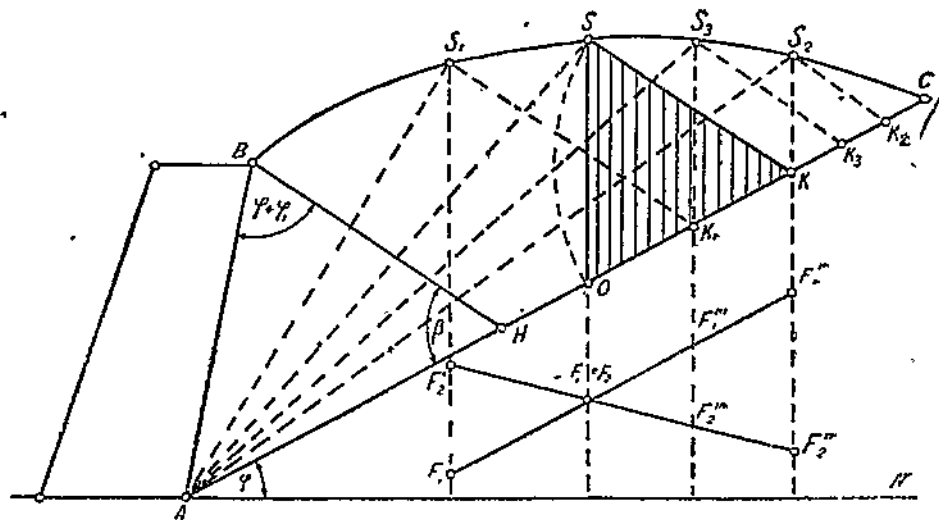
Праводзіцца лінія натуральнага адкосу  $AD$  пад вуглом трэння  $\varphi$  да гарызанталі і замяняецца чатырохвугольная земная маса  $ABCD$  на трохвугольную  $AID$  так, каб плошча  $ABCD =$

= площы  $AID$ . Лінія  $AI$  называецца *лініяй выраўнення* і замяняе ў гэтым выпадку падпорную сцяну  $AB$ . Вызначаецца  $AB$  наступным чынам (чарц. 323): праводзіцца прамая  $AC$  і праз  $B$  прамая, паралельная з  $AC$  да пункта перасячэння  $I$  з працягам  $CD$ . Злучыўшы  $I$  з  $A$  прамой, атрымаем шуканую лінію выраўнення. Прываючы цяпер  $AI$  за падпорную сцяну, а  $ID$  за паверхню засыпкі, будзем роўніцу коўзання  $AS$  і трохвугольнік Рэбхана. Ціск зямлі на падпорную сцяну  $AB$  будзе:

$$E = \gamma \cdot \text{плошчу трохвугольніка } SKO$$

## § 118. Вызначэнне роўніцы коўзання пры адвольнай паверхні засыпкі і плоскай сцяне

У гэтым выпадку роўніца коўзання адшукваецца вопытным шляхам, грунтуючыся на ўласцівасці, што для прызмы найбольшага ціску плошча  $ABS$  роўна плошчы трохвугольніка  $ASK$  (чарц. 324). Спачатку праводзяць адвольную роўніцу коўзання  $4S$



Чарц. 324.

і правёўшы  $S_1K_1$  паралельна лініі палажэння  $BH$  вызначаюць плошчу  $ABS_1 = F_1'K_1$  і  $AS_1K_1 = F_2'$ . Калі пры гэтым атрымліваецца, што  $F_1' < F_2'$ , то трэба выбраць другі пункт  $S_2$  у бок  $C$  і прапрабіць тое-ж самае датуль, пакуль не знойдзецца такая

роўніца коўзання  $AS$ , для якой плошча  $ABS$  будзе роўнай плошчы  $\triangle ASK$ . Ціск зямлі на падпорную сцяну будзе:

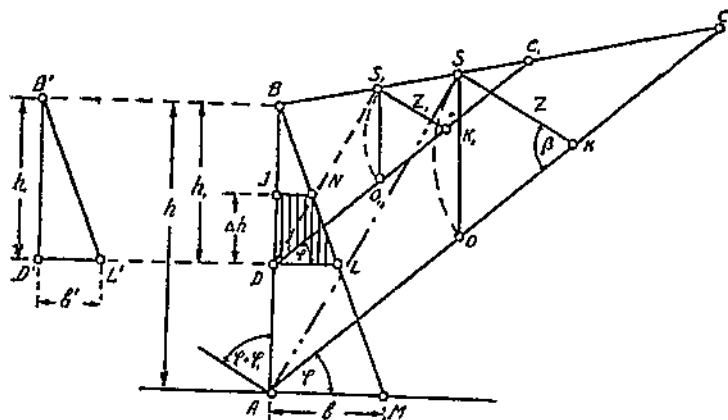
$$E = \gamma \times \text{плошчу } \triangle SKO,$$

дзе  $\triangle SKO$  ёсць Рэбханаўскі трохвугольнік.

Палажэнне пункта  $S$  можа быць вызначана наступным чынам: на вертыкалі пункта  $S_1$ , ад якой-небудзь гарызантальнай прамой, напрыклад  $AN$ , адкладваюцца ў адвольным маштабе плошчы  $F_1'$  і  $F_2'$ ; таксама на вертыкалі  $S_2$ —плошчы  $F_1''$  і  $F_2''$ , на вертыкалі  $S_3$ —плошчы  $F_1'''$  і  $F_2'''$ . Злучыўшы пункты—канцы плошчаў  $F$ , атрымоўваем дзве крывыя плошчаў. Зразумела, што пункт  $S$  павінен знаходзіцца на вертыкалі пункта перасячэння гэтых крывых, бо ён павінен задавальняць умове:  $F_1 = F_2$ .

## § 119. Размеркаванне ціску зямлі на роўніцы сцяны пры плоскай засыпцы

Разгледзім спачатку выпадак, калі сцяна і паверхня засыпкі абмежаваны роўніцамі (чарц. 325). Разгледзім трохвугольнік ціску на ўсю сцяну  $AB$  і на адвольную частку яе  $BD$ ; вывядзем



Чарц. 325.

закон узрастання ціску на адзінку плошчы сцяны ў залежнасці ад адлегласці паверхні зямлі, г. зн. ад глыбіні.

Пабудуем трохвугольнік Рэбхана  $SKO$ , які паказвае ціск зямлі на сцяну  $AB$ , бо:

$$E = \gamma \times \text{плошчу } \triangle SKO = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot SK^2,$$

ці абазначыўшы  $SK$  праз  $z$ , маем:

$$E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot z^2.$$

Тое самае праробім і для часткі сцяны  $DB$ :

$$E_1 = \gamma \cdot \frac{\sin^2 \beta}{2} \cdot z_1^2.$$

Раздзяліўшы пачленна дзве гэтыя роўнасці, атрымаем:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{z_1^2}{z^2}.$$

Роўніца коўзання  $DS_1$  земляной масы  $DBC$ , пры плоскай паверхні зямлі, паралельна роўніцы коўзання  $AS$  усёй зямлі  $ABC$ , а таму:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{h_1}{h},$$

а значыць:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{h_1^2}{h^2},$$

ці:

$$E_1 = \frac{h_1^2}{h^2} \cdot E.$$

Калі ператварыць трохвугольнікі  $SKO$  і  $S_1K_1O_1$  ў роўнавялікія ім прамавугольныя трохвугольнікі напружанняў  $ABM$  і  $D'B'L$  з вышынямі  $h$  і  $h_1$  і асновамі  $E$  і  $E_1$ , то:

$$E = \gamma \cdot \frac{hb}{2} \text{ і } E_1 = \gamma \cdot \frac{h_1 \cdot b_1}{2}.$$

Падставіўшы апошняе значэнне  $E$  ў формулу  $E_1 = \frac{h_1^2}{h^2} \cdot E$ , атрымаем:

$$E_1 = \frac{h_1^2}{h^2} \cdot \gamma \cdot \frac{hb}{2} = \gamma \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{h} \cdot b.$$

З параўнання з формулай:

$$E_1 = \gamma \cdot \frac{h_1}{2} \cdot b_1 = \gamma \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{h} \cdot b.$$

вынікае, што:

$$b_1 = \frac{h_1}{h} \cdot b,$$

ці:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h}.$$

Адсюль вынікае, што аснова трохвугольніка напружанняў, адпаведная  $E_1$  роўна шырыні  $DL$  трохвугольніка  $ABM$  на глыбіні  $h_1$  і частка  $DBL$  трохвугольніка  $ABM$ , якая ляжыць на  $DL$  роўна  $\triangle D'B'L'$ , г. зн. служыць трохвугольнікам напружанняў

для ціску зямлі  $E_1$ . Для вызначэння ціску на частку сцяны  $DI$  неабходна правесці гарызанталі  $IN$  і  $DL$  і вызначыць плошчу трапецыі, якая ляжыць між імі.

Тады:

$$\Delta E = \gamma \cdot \frac{\Delta h}{2} \cdot (IN + DL)$$

Што датычыць ціску зямлі на адзінку плошчы на глыбіні  $y$  ад  $B$ , то пры ціску на ўсю паласу  $y$ , які мае значэнне:

$$E = \gamma \cdot \frac{y^2}{2} \cdot \frac{b}{h}$$

ціск на элемент сцяны, якая мае вышыню  $dy$ , будзе:

$$dE = \gamma \cdot \frac{b}{h} \cdot y \cdot dy,$$

а на квадратную адзінку:

$$\frac{dE}{dy} = \gamma \cdot \frac{b}{h} \cdot y. \quad (81)$$

Адсюль вынікае: *шуканы ціск зямлі на адзінку плошчы (напружанне) узрасце прама прапарцыянальна глыбіні і вымярэнню шырынёй трохвугольніка напружання на данай глыбіні*

## § 120. Размеркаванне ціску зямлі пры ломанай па верхні засыпкі і плоскай сцяне

Разгледзім спачатку выпадак, калі паверхня зямлі ў прыродным стане частцы  $BC$  ідзе пад вуглом натуральнага адкосу  $\varphi$ , а ў задняй частцы  $CD$ —пад вуглом, меншым за  $\varphi$  да гарызанталі (чарц. 326).

Плошча напружанняў тут ужо не будзе трохвугольнікам у выніку таго, што роўніцы коўзання не паралельныя для розных вышынь сцен, а будзе абмежавана некаторай крывой. Для пабудовы крывой паверхню сцяны  $AB$  трэба раздзяліць на адвольны лік роўных частак:  $AF$ ,  $FN$ ,  $NB$  і вызначыць для кожнай з іх ціск зямлі.

Ціск на  $AF$  атрымаецца, калі з ціску на ўсю сцяну  $AB$  вылічыць ціск на  $BF$ , а ціск на  $FN$ ,—калі з ціску на  $FB$  вылічыць ціск на  $NB$ ... Абазначыўшы ціск на  $AB$  праз  $E$ , на  $BF$  праз  $E_1$ , на  $NB$  праз  $E_2$ , ціск на  $AF$  праз  $\Delta E$ , на  $FN$  праз  $\Delta E_1$ , атрымаем:

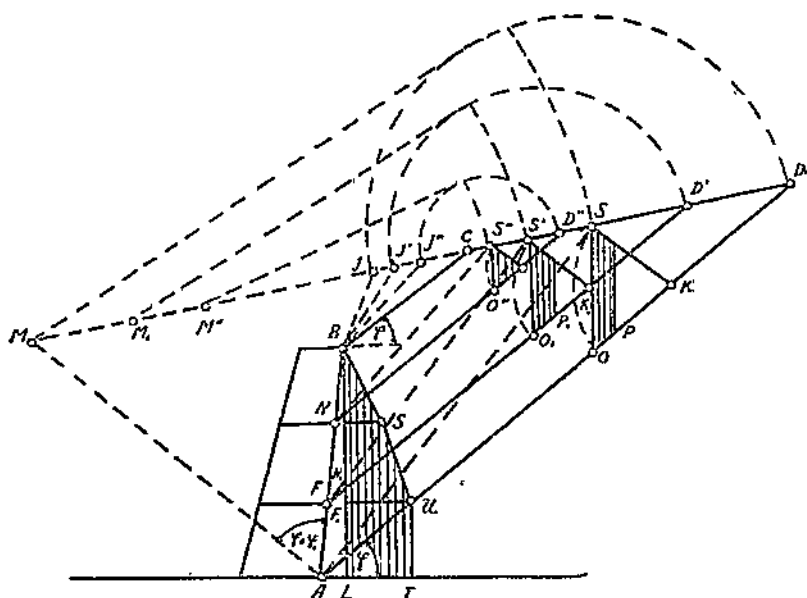
$\Delta E = E - E_1 = \gamma \cdot (\text{плошча } \triangle SKO - \text{плошча } \triangle S'K'O') = \gamma \times \text{плошчу трапецыі } SRPO$ .

$\Delta E_1 = E_1 - E_2 = \gamma \times (\text{плошча } \triangle S'K'O' - \text{плошча } \triangle S''K''O'') = \gamma \times \text{плошчу трапецыі } S'R'P'O' \text{ і г. д.}$

Для пабудовы дыяграмы напружанняў для сцяны  $AB$  трэба пабудаваць спачатку трохвугольнік напружанняў  $N_1SB$  для верх-

най часткі спяны роўнавялікі т-ку  $S''K''O''$ . Для другога ўчастка трапецыю  $S'R'P'O'$  ператвараюць у роўнавялікі ёй прамавугольнік з вышынёю роўнай  $F_1N_1$ , і для атрымання непарарывнай лініі сярэдзіну супроцьлеглага сцяне боку злучаюць з пунктам  $S$  і працягваюць гэтую прамую да пункта  $U$  на гарызанталі ў пункце  $F_1$ .

Зусім таксама для ўчастка  $AF$  ператвараюць трапецыю  $SRPO$  у роўнавялікі ёй прамавугольнік. Праз злучэнне сярэдзіны,



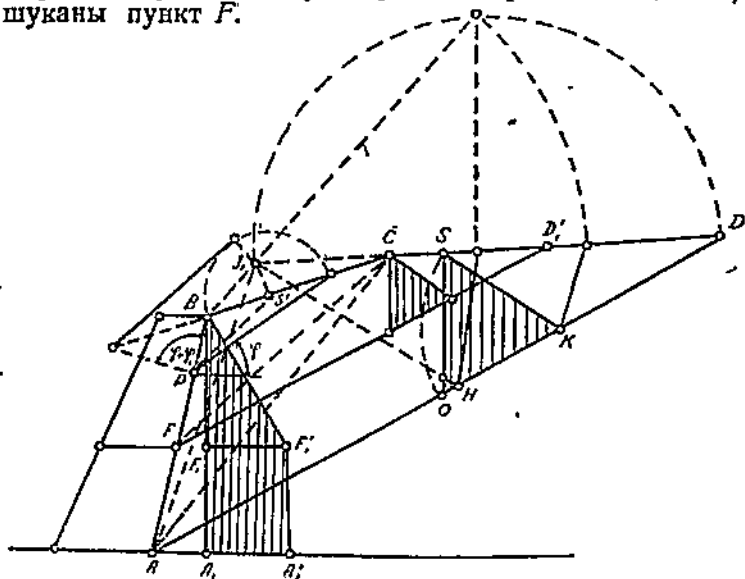
Чарц. 326.

супроцьлеглай сцяне боку з пунктам  $U$  знаходзяць прамую  $UT$ . Плошча  $LBSUT$ , абмежаваная з аднаго боку ломанай лініяй  $BSUT$  і будзе шуканай дыяграмай напружанняў. Пры бесканечна малых вышынях лінія  $BSUT$  ператворыцца ў крывую.

## § 121. Вызначэнне плошчы напружання ў выпадку, калі паверхня зямлі ўтварае вуглы, меншыя за $\varphi$

Калі паверхня зямлі з абодвух бакоў ад пункта пералому ўтварае з гарызонтам вуглы меншыя, чым вугал натуральнага адкосу, то плошча напружанняў складаецца з трохвугольніка  $BF_1F_1'$  і фігуры  $A_1F_1F_1'A_1'$ , абмежаванай з боку  $F_1'A_1'$  крывой (чарц. 327). Вышыню трохвугольніка вызначае пункт  $F$  падпорнай сцяны, для якой роўніца коўзанні праходзіць праз пункт  $C$  пералому паверхні зямлі.

Каб'знайсні яго, будууюць роўніцу коўзання  $PS'$  для адвольнай часткі сцяны  $PB$ , дапускаючы, што паверхня зямлі працягваецца ў кірунку  $BC$ . Правёўшы праз пункт  $C$  паралельна да  $PS'$ , атрымаем шуканы пункт  $F$ .

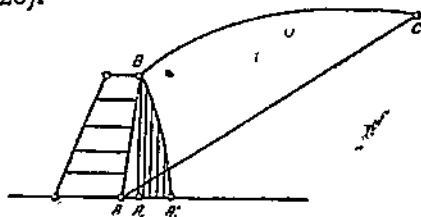


Чарц. 327.

Што-ж датычыць вызначэння ціску на ўсю сцяну  $AB$  ці на частку яе большую за  $FB$ , то тут застаюцца ў сіле прыведзеныя вышэй меркаванні. Неабходна толькі ўказаць, што для часткі сцяны  $BF$  усе роўніцы коўзання паралельны між сабой і  $CF$ ; для часткі-ж, якая ляжыць ніжэй, яны ўтвараюць вуглы адна з другой і адразаюць ад земляной масы  $ABCD$  чатырохвугольны прызмы найбольшага ціску.

## § 122. Эпюра напружанняў пры адвольнай паверхні засыпкі

Пры адвольнай паверхні засыпкі і плоскай сцяне эпюра напружанняў прадстаўляе сабою фігуру, абмежаваную з аднаго боку крывой (чарц. 328).



Чарц. 328.

## § 123. Ціск зямлі з часовай нагрузкай на паверхні

Калі падпоруная сцяна агароджвае дарожны ці чыгуначны насып, то апрача ціску самога насыпу на сцяну перадаецца яшчэ ціск, які ўтвараецца часовай нагрузкай, якая знаходзіцца на паверхні зямлі.

Часовую нагрузку замяняюць паверх насыпу слоем зямлі такой таўшчыні, каб ціск яе на квадратную адзінку плошчы быў роўны ціску часовай нагрузкі на тую-ж адзінку.

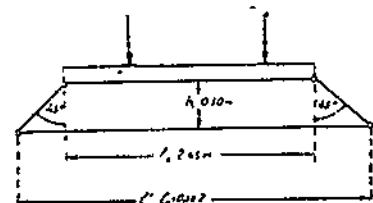
Для насыпаў як праездных, так і пешаходных дарог дастаткова прыняць на 1 кв. м 550 кг.

Для чыгуначных-жа насыпаў трэба кожны раз вызначаць ціск, які прыходзіцца на адзінку плошчы. Абазначым праз:  $g$ —груз, які прыходзіцца на 1 кв. м паверхні зямлі ў тонах,  $\gamma$ —удзельную вагу земляной засыпкі,  $h_0$ —вышыню слою зямлі, які замяняе дакую часовую нагрузку, тады атрымаем:

$$h_0 = \frac{g}{\gamma} \quad (\text{у метрах}). \quad (82)$$

**Прыклад.** Нагрузка праезджай дарогі складае  $550 \text{ кг/м}^2$ ,  $\gamma = 1,5$ . Вызначыць таўшчыню эквівалентнага слою засыпкі.

$$\text{Адказ. } h_0 = \frac{0,550}{1,5} = 0,37 \text{ м.}$$



Чарц. 329.

**Прыклад.** На чыгуначны насып утварае ціск паравоз вагою у 100 т, адлегласць між крайнімі восямі 6 м, даўжыня шпал  $l_0 = 2,65$  м. Таўшчыня баласту пад падошваю шпал  $h = 0,30$  м (чарц. 329).

Для вызначэння ціску на кв. м насыпу дапускаем, што ціск пашыраецца ў слоі баласту пад вуглом  $45^\circ$  да вертыкалі. Адсюль вынікае, што шырыня паласы, на якую пашыраецца ціск, будзе:

$$l_0' = l_0 + 0,30 \cdot 2 = 2,65 + 0,60 = 3,25 \text{ м.}$$

Даўжыня-ж будзе:

$$l' = l + 0,30 \cdot 2 = 6,60 \text{ м.}$$

Плошча ціску:

$$F = 3,25 \cdot 6,60 = 2,45 \text{ м}^2.$$

На 1 м<sup>2</sup> прыходзіцца ціску:

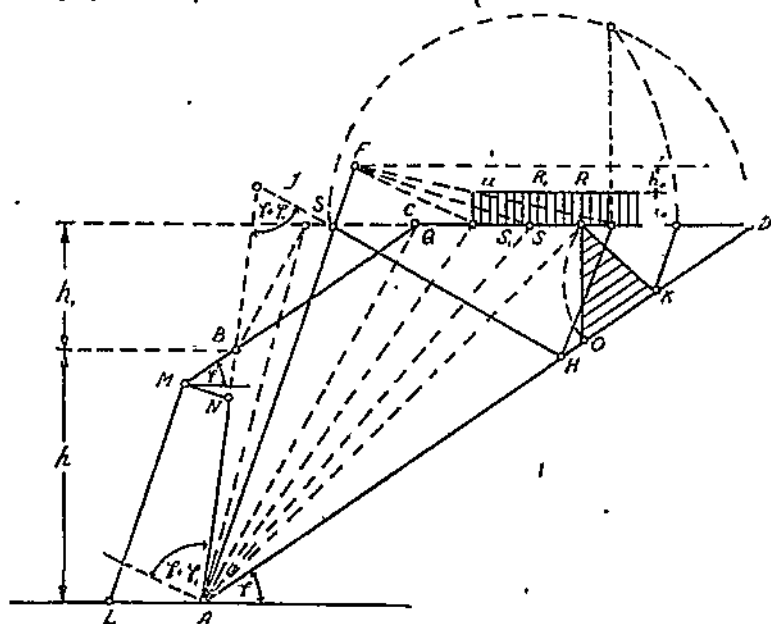
$$g = \frac{100}{2,45} = 4,662 \text{ т.}$$



## § 124. Разлік чыгуначнага насыпу

Дапусцім чыгуначны насып абмяжоўваецца з аднаго боку падпорнаю сцяною  $ANLM$  (чарц. 332). Частка  $BC$  паверхні зямлі  $BCD$  ідзе пад вуглом натуральнага адкосу, частка-ж  $CD$  — гарызантальна; вышыня эквівалентнай нагрузкі  $h_0$ .

Роўніца коўзання вызначаецца наступным чынам: спачатку праводзяць лінію натуральнага адкосу  $AD$  пад вуглом  $\varphi$  да гарызанталі і лінію выраўнення  $A'$  так, каб пл.  $\triangle ABC = \text{пл. } \triangle A'IC$ . Далей будуець т-к  $AFQ$ , роўнавялікі чатырохвугольніку  $ABCQ$



Чарц. 332.

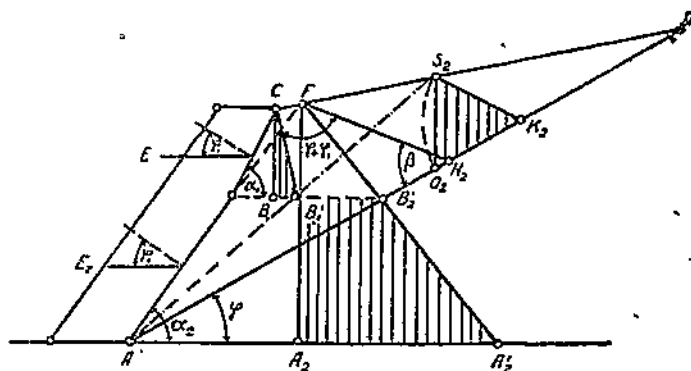
з пунктам  $Q$ , змешчаным на межы часовай нагрузкі, і ператвараюць яго ў роўнавялікі яму трохвугольнік  $AFQ$ , вяршыня  $F$  якога ляжыць на вышыні  $2h_0$  над паверхняй зямлі  $CD$ . Гэта робіцца для таго, каб лёгка было ператварыць адрэзаную любой роўніцаю земляную масу  $ABCS'$  насыпкаю на ёй  $QUR'S'$  у роўнавялікі гэтай суме плошчаў трохвугольнік  $AFQ_1$ .

Калі цяпер правесці лінію палажэння  $SH$  пад вуглом  $(\varphi + \varphi_1)$  да  $AB$  і пабудаваць роўніцу  $AS$ , то плошча  $AFQ = \text{плошчы } ABCQURQ = \text{пл. } \triangle ASK$  і значыць ціск зямлі на сцяну:  $E = \gamma \cdot \text{пл. } \triangle KSO$ .

Зямля  $MNB$ , якая знаходзіцца на сцяне, прылічваецца да сцяны, значыць яе вага і ціск у бок  $MN$  прыбаўляецца непасрэдна да сцяны. Таму ў даным выпадку прымаецца, што роўніца і  $AB$ , а не толькі задняя частка сцяны  $AN$ , падпадае ціску зямлі.

## § 125. Ціск зямлі на ломаныя сценкі

Дапусцім, што зямляная маса з плоскай паверхняй  $DC$  падпіраецца з боку сцяной  $ABC$ , якая мае ў пункце  $B$  злом. Частка  $BC$  утварае з гарызанталлю вугал  $\alpha_1$ , а частка  $AB$ —вугал  $\alpha_2$ . Ціск зямлі  $E_1$ , які дзейнічае на сцяну  $BC$ , вызначаецца вядомымі спосабамі. Дыяграма ціску на гэтую частку будзе тр-к  $B_1CB_1'$ .



Чарц. 333.

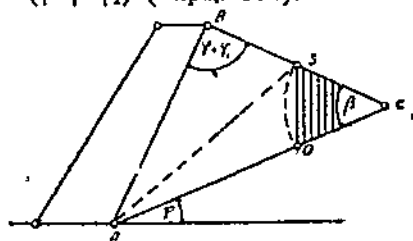
Для вызначэння ціску  $E_2$  на частку сцяны  $AB$  працягваем  $AB$  да перасячэння ў пункце  $F$  з паверхняй зямлі  $CD$ , будзем трохвугольнік ціску  $S_2K_2O_2$  для сцяны  $AB$  і дыяграму ціскаў  $A_2FA_2'$  на ўсю роўніцу  $AF$ . На частку гэтай роўніцы  $BF$  прыходзіцца трохвугольнік  $B_2FB_2'$ , які аджэдваецца, а на частку  $AB$ —трапецыя  $A_2B_2B_2'A_2'$ , значыць:

$$E_2 = \gamma \cdot \text{плошчу } A_2B_2B_2'A_2'.$$

## § 126. Прыватныя выпадкі нахілу паверхні зямлі

1. Паверхня зямлі ўтварае з роўніцай натуральнага адкосу вугал  $\beta$ , ці з роўніцаю сцяны вугал  $(\varphi + \varphi_1)$  (чарц. 334).

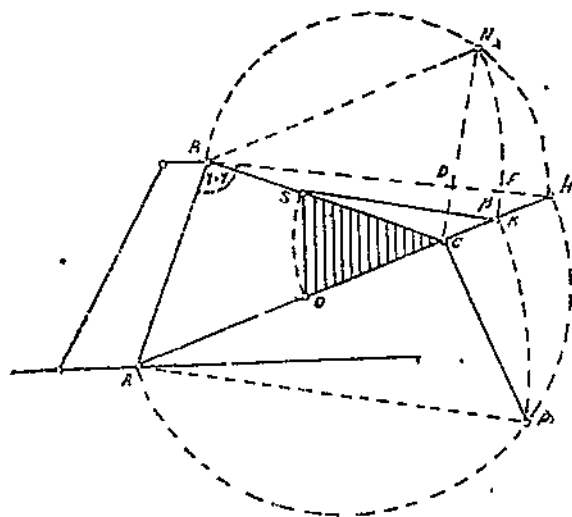
У даным выпадку  $BC$  супадае з лініяй палажэння. Калі  $AS$  ёсць роўніца коўзаньня, то пл.  $\triangle ABS = \text{пл. } \triangle ASC$ . Гэтыя трохвугольнікі маюць агульную аснову  $AS$  і значыць для роўнасці плошчаў павінны мець і аднолькавыя вышыні. Адсюль вынікае, што  $BS = SC$ . Рэзультатнаўскі трохвугольнік будзе  $SCO$ .



Чарц. 334.

2. Паверхня зямлі ўтварае з роўнасцю сцяны вугал меншы за вугал  $(\varphi + \varphi_1)$ , ці з роўніцаю адкосу большы за  $\beta$ .

У гэтым выпадку лінія палажэння  $BH$  (чарц. 335), якая ўтварае з роўніцаю сцяны вугал  $(\varphi + \varphi_1)$ , выходзіць з абрысу зямлі  $BC$ . Тады для вызначэння роўніцы коўзання  $AS$  трэба будаваць поўакружыну не на  $BC$  ці  $AC$ , а на  $BH$  ці  $AH$ .

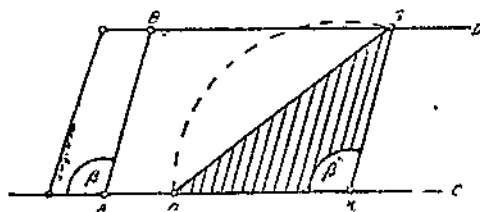


Чарц. 335.

У першым выпадку праз  $C$  праводзяць  $CD$  паралельна да  $AB$ , а ў пункце  $D$  узводзяць перпендыкуляр к  $BH$  да перасячэння з поўакружынаю ў пункце  $N$ , затым адкладваюць  $BF = BH$ , праводзяць  $FK$  паралельна да  $AB$  і  $KS$  паралельна  $BH$ . Пункт  $S$  перасячэння гэтай прамой з  $BC$  і будзе верхнім кантам роўніцы коўзання  $AS$ . Трохвугольнікам ціску зямлі будзе  $\triangle SCO$ , у якім

$SC = CO$ . У другім выпадку ў пункце  $C$  узводзяць перпендыкуляр да  $AC$  да перасячэння з поўакружынамі ў пункце  $P$ , адкладваюць  $AK = AP$  і праводзяць  $KS$  паралельна да  $BH$ .

3. Ціск вады. У гэтым прыватным выпадку вугал  $\varphi = 0$ , і вада цісне на сцяну  $AB$  перпендыкулярна да алошняй, г.зн. вугал  $\varphi = 0$  (чарц. 336).



Чарц. 336.

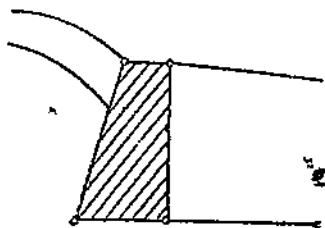
Паверхня вады  $BD$  гарызантальна і паралельна роўніцы натуральнага адкосу, якая супадае з гарызанталлю  $AC$ . Лінія палажэння супадае з  $BA$ . Трохвугольнік ціску  $S'K'O'$  будзеца праз правядзенне  $S'K'$  паралельна да  $BA$  і адкладанне  $K'O' = K'S'$ .

## § 127. Пасіўны ціск зямлі (адпор)

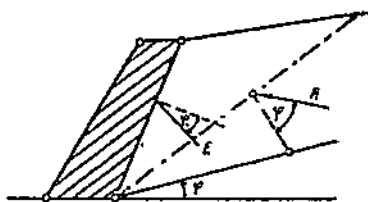
Ва ўсіх вышэй разгледжаных выпадках зямля ціснула на сцяну, імкнучыся яе абварнуць—гэта так званы *актыўны ціск зямлі*.

Але ў некаторых выпадках падпорная сцяна, якая падтрымлівае насып справа, атрымлівае і злева ціск ці ад маставога скляпення аркі, ці ад вады (у рачных шлюзах), ці ад больш высокага насыпу, чым справа (чарц. 337). Пры недастатковых размерах сцяны, пад дзеяннем сіл злева, можа выйсці з роўнавагі і адсунуцца ўправа, утвараючы ціск на правы насып.

У гэтым выпадку насып справа зробіць супроцьдзеянне, пасіўны ціск, адпор.



Чарц. 337.



Чарц. 338.

Пасіўны ціск таксама адхіляецца на вугал  $\varphi_1$  ад нармалі да сцяны, але ў другі бок (чарц. 338), бо ў гэтым выпадку пры парушэнні роўнавагі ўтвораецца перамяшчэнне некаторай прызмы зямлі ўверх і значыць трэня накіравана ў адваротны бок. Тое-ж самае адносіцца і да рэакцыі роўніцы коўзання  $R$ .

З тае прычыны, што кірунак пасіўнага ціску зямлі, а галоўнае, рэакцыі  $R$ , другі, то і роўніца коўзання атрымоўваецца іншая. Пасіўны ціск значна больш актыўнага.

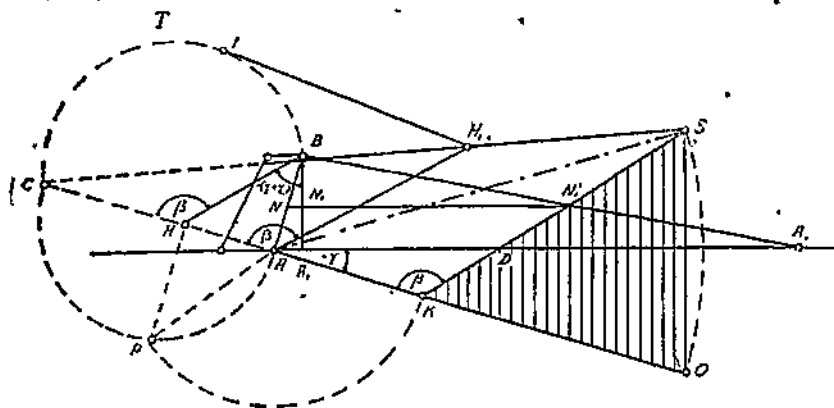
Для пабудовы пасіўнага ціску зямлі трэба вугал  $\varphi$  для правядзення роўніцы натуральнага адкосу адкласці ў адмоўны бок ад гарызанталі  $AD$  (чарц. 339). Зусім таксама ў адмоўны бок ад сцяны  $BA$  неабходна адкласці вугал  $(\varphi + \varphi_1)$ , які вызначае лінію палажэння.

Для вызначэння  $S$  будуецца на  $BC$  поўакружыну, праводзяць  $AN'$  паралельна да  $BH$ , праводзяць з пункта  $N$  датычную да поўакружыны ў пункце  $T$  і адкладаюць  $H'S = HT$ .

Па другому спосабу будуецца поўакружыну на  $AC$ , у пункце  $N$  уводзяць перпендыкуляр з  $AC$  да пункта  $P$ , адкладаюць  $AK = AP$  і праводзяць прамую  $KS$  паралельна да  $BH$ .

Маючы роўніцу коўзання  $AS$ , Рэбханаўскі трохвугольнік будзем згодна папярэдняга: праводзім  $SK$  паралельна да  $BH$  і адкладаем  $KO = KS$ .

Правовугільны трохвугольнік  $A_1BA_1'$  роўнавялікі трохвугольніку  $SKO$ , пабудаваны на  $A_1B$ , як на катэце, прадстаўляе сабой дыяграму ціскаў, прычым шырыня гэтага трохвугольніка ў любым



Чар.п. 339.

месцы, напрыклад  $N_1N_1'$  паказвае ціск на адзінку плошчы сцяны, так званы ўдзельны ціск у супроцьлеглым гэтай шырыні пункце сцяны (у даным выпадку ў пункце  $N$ ).

## § 128. Пункт прыляжэння ціску зямлі

Пункт прыляжэння ціску зямлі знаходзіцца з дыяграмы ціскаў.

Калі ёсць падпорная сцяна  $AB$  (чар.п. 340) і дыяграмы ціскаў  $A_1BA_1'$ , то на частку сцяны  $DF$  дзейнічае ціск зямлі

$$E' = \gamma \times \text{плошч } D_1F_1F_1'D_1',$$

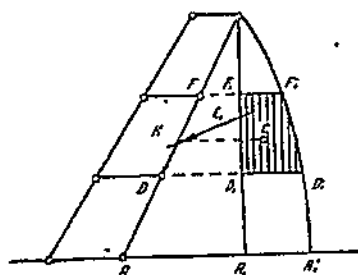
прыложаны на вышыні цэнтра цяжару гэтай плошчы.

Значыць для вызначэння пункта  $K$  прыляжэння ціску зямлі на частку сцяны трэба правясіці праз крайнія пункты данай часткі сцяны гарызанталі (ці пры другіх спосабах пабудовы дыяграмы ліній, паралельных асновам дыяграм).

Такім чынам пры плоскай сцяне пункт прыляжэння ціску зямлі знаходзіцца на адной вышыні з цэнтрам цяжару адпаведнай дыяграмы ціскаў.

Калі сцяна і паверхня прылягаючай зямлі абмежаваны роўніцамі, то, як вядома, дыяграма ціскаў прадстаўляе сабой трохвугольнік, і таму

пункт прыляжэння ціску зямлі знаходзіцца на адной трэці вышыні сцяны, лічачы ад падшвы асновы.



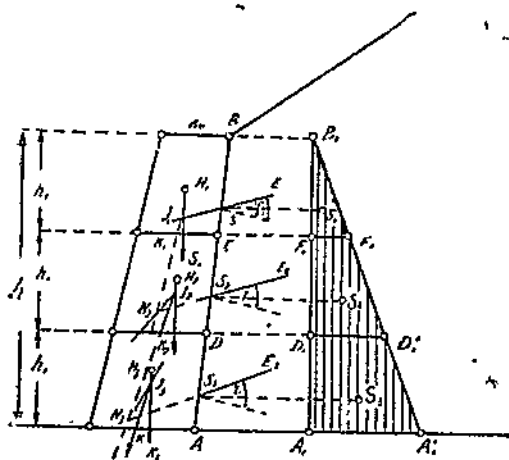
Чар.п. 340.



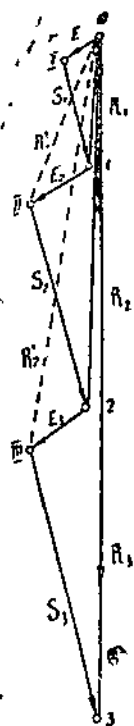
## § 130. Графічне визначення кривої ціску

Для пабудовы кривої ціску трэба раздзяліць сцяну прамымі, паралельнымі пасцельным швам, а дыяграму ціскаў прамымі, паралельнымі яе аснове, на некалькі роўных вышыняў частак:  $BF$ ,  $FD$ ,  $DA$ ... (чарц. 343).

Затым вызначаюць вагу ўсіх гэтых частак:  $S_1, S_2, S_3$ ..., прыложаную ў цэнтрах цяжару:  $H_1, H_2, H_3$ ... і ціскі зямлі:  $E_1, E_2, E_3$ ... на гэтыя часткі, прыложаныя ў пунктах:  $S_1, S_2, S_3$ ... на вышыні адпаведных цэнтраў цяжару частак дыяграмы ціску.



Чарц. 343.



Затым у многавугольніку сіл складаюць сілы  $E$  і  $S$ , у сячэнні сцяны вызначаюць пункт  $I_1$  перасячэння  $S_1$  з  $E_1$ . Праз пункт  $I_1$  праводзяць паралель да  $R_1$ , на перасячэнні якой са швом  $F$  знаходзяць пункт  $K_1$  кривої ціску. Прамую  $I_1K_1$  працягваюць да пункта  $N_2$  перасячэння з  $E_2$  і праводзяць праз яго паралель з  $R_1'$  (011) да перасячэння ў пункце  $I_2$  з сілай  $S_2$ , праз  $I_2$  праводзяць паралель да роўнадзейнай  $R_2$  (02) і атрымліваюць другі пункт кривої ціску  $K_2$  і г. д. Злучыўшы пункт  $K_0$  (сярэдзіну верху сцяны) і пункты  $K_1, K_2, K_3$ ... суцэльнай кривої, атрымалі шуканую кривую ціску.

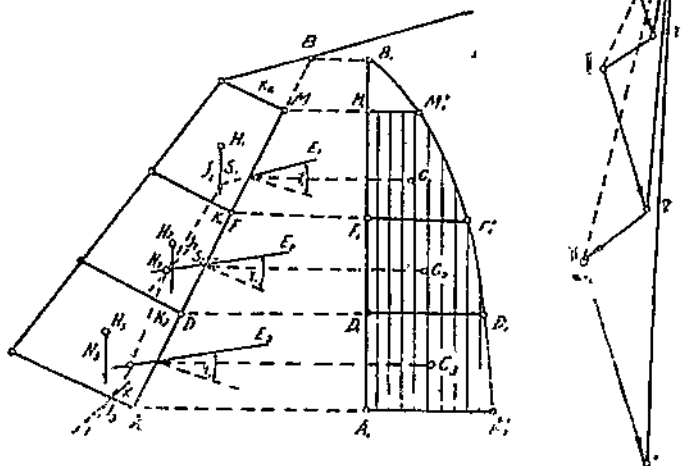
Задача. Пабудаваць кривую ціску для сцяны з нахіленымі швамі і ламанай паверхняй насыпкі (чарц. 344).

Заўвага. Пры сцяне з ламанай задняй паверхняй адзін са швоў праводзяць праз пункт злому сцяны, каб унікаць складаных пабудов, прычым у астатнім пабудова застаецца ранейшай.

**Задача.** Пабудавать кривую ціску з ламанай задняй паверхняй (чарц. 345).

Пры крывой задняй паверхні сцяны яе дзеляць на палосы такой вышыні, каб часткі крывой паверхні можна было прыняць за роўніцы (без вялікай памылкі), у астатнім пабудова як і ў лапярэднім выпадку.

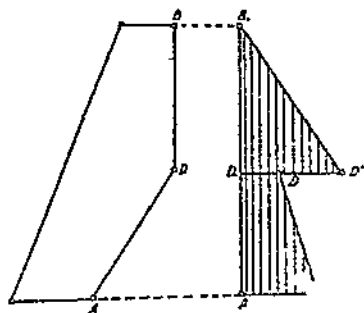
Каб не вылічаць плошчаў палос сцяны  $AB$  і дыяграмы ціскаў, часцей за ўсё карыстаюцца тым, што пры аднолькавай вышыні, плошчы трапецый



Чарц. 344.

прапарцыянальны іх сярэднім лініям:  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $P_1P_1'$ ,  $Q_1Q_1'$  (чарц. 346). Каб гэтыя лініі былі прапарцыянальныя вазе адпаведных частак як кладкі, так і зямлі, неабходна, каб удзельныя вагі кладкі  $\gamma$  і зямлі  $\gamma_1$ , былі аднолькавыя.

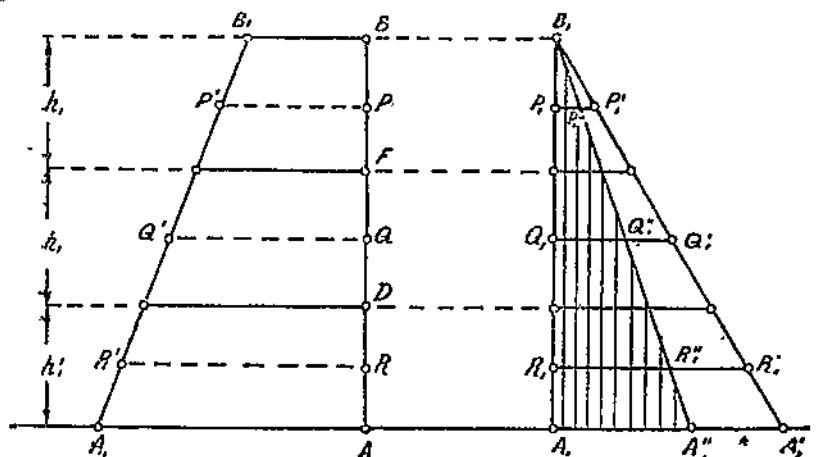
Калі ўдзельныя вагі не аднолькавыя, дыяграму ціскаў прыводзяць да шчыльнасці кладкі, адкладваючы аснову яе  $A_1A_1'' = A_1A_1' \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$  і атрымваюць сярэднія лініі  $P_1P_1''$ ,  $Q_1Q_1''$ ,  $R_1R_1''$ ..., прыведзеныя да шчыльнасці кладкі. Гэтыя сярэднія лініі, вымераныя цыркулем і адкладваюцца ў многавугольніку сіл, як сілы  $E$  і  $S$ .



Чарц. 345.

Калі якая-небудзь паласа мае іншую вышыню, напрыклад,  $h'$ , то сярэднюю лінію яе пры адкладванні ў сілавым многавугольніку змяняюць у адносінах  $\frac{h_1'}{h_1}$ .

Для визначення масштаба сіл, які ў гэтым выпадку невядомы, але можа быць патрэбны, вылічваюць велічыню адной з сіл і параўноўваюць з вымеранай цыркулем даўжынёю адпаведнай сярэдняй лініі.



Чарц. 346.

### § 131. Размеркаванне ціску па пасцельнаму шву

Дапусцім, што на сячэнне  $AB$  сцяны шырынёй  $b$  (чарц. 347), пры даўжынні яе роўнай адзінцы, дзейнічае сіла  $R$  пад вуглом  $\beta$  з перпендыкулярам да сцяны.

Раскладзем яе на нармальную сілу  $N$  і датычную  $Q$ , тады атрымаем:

$$N = R \cdot \cos \beta \text{ і } Q = R \cdot \sin \beta.$$

Калі вугал  $\beta$  меншы за вугал трэння, то з сілай  $Q$  можна не лічыцца, бо яна не здолее зрушыць сцяну.

Адлегласць сілы  $N$  ад сярэдзіны сячэння  $S$  абазначым праз  $e$ ; у сярэдзіне сячэння  $S$  прыложым дзве сілы  $N_1$  і  $N_2$ , роўныя сіле  $N$  і накіраваныя ў супроцьлеглыя бакі. Тады сілу  $N$  можна будзе замяніць момантам сіл  $N_1$  і  $N_2$ , а іменна:  $M = N \cdot e$  і сілай  $N_1$ , прыложанай у сярэдзіне сячэння. Гэтая апошняя выклікае роўнамернае напружанне:

$$\sigma_{n_1} = \frac{N_1}{b \cdot 1} = \frac{N}{b \cdot 1}.$$

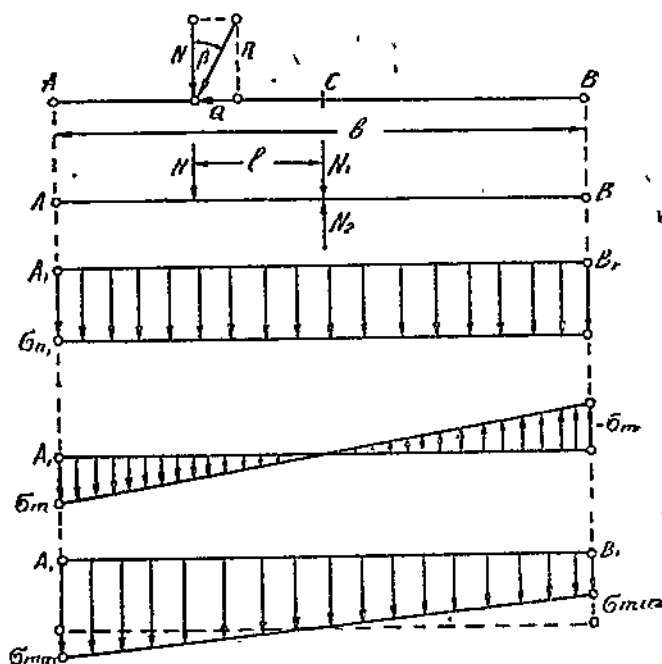
Напружанне, якое выклікаецца момантам  $M$ , па гіпотэзе Нав'е, у адной частцы дадатнае (сцісканне), а ў другой адмоўнае (расцяжэнне).

Найбольшее значение  $\sigma_m$  атрымоўваем з раўнання:

$$\sigma_m = \frac{M}{W}$$

дзе  $W$  ёсць момант супраціўлення сячэння (шва) сцяны, роўны  $I: \frac{b}{2}$ , дзе  $I$  ёсць момант інерцыі плошчы гэтага сячэння, роўны

$$I = \frac{1 \cdot b^3}{12}.$$



Чарц. 347.

Значыць:

$$W = \frac{1 \cdot b^3}{6},$$

а

$$\sigma_m = \pm N \cdot e : \frac{1 \cdot b^3}{6} = \pm \frac{6 \cdot N \cdot e}{1 \cdot b^3}.$$

Усю дыяграму напружання атрымаем, склаўшы абодва значэнні:

$$\sigma_{n1} \text{ і } \sigma_m,$$

пры гэтым у пункце A будзе напружанне:

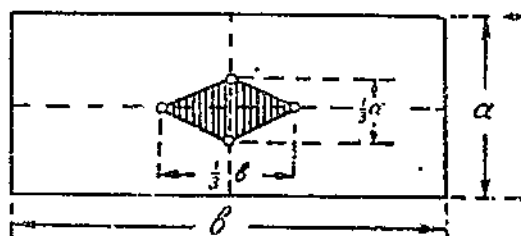
$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_{n1} = \frac{N}{1 \cdot b} + \frac{6 \cdot N \cdot e}{1 \cdot b^3} = \frac{N}{1 \cdot b} \left( 1 + \frac{6e}{b} \right),$$

ці, злучыўшы два раўнанні:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N}{1 \cdot b} \left( 1 \pm \frac{6e}{b} \right). \quad (84)$$

$\sigma_{\max}$  пры ўсіх значэннях пераменнай велічыні  $e$  будзе дадатная,  $\sigma_{\min}$  будзе дадатнай пры ўмове, калі  $1 - \frac{6e}{b} > 0$ , г. зн.  $e < \frac{b}{6}$ , адмоўнаю-ж пры  $1 - \frac{6e}{b} < 0$ , ці  $e > \frac{b}{6}$ .  $\sigma_{\min} = 0$  пры  $1 - \frac{6e}{b} = 0$  ці  $e = \frac{b}{6}$ , г. зн., калі сіла  $N$  прыложана на адлегласці  $\frac{1}{3} b$  ад пункта  $A$ .

Тая прамая, уздоўж якой  $\sigma = 0$ , называецца *нейтральнай воссю*. Калі  $l = \frac{b}{6}$ , то нейтральная вось датыкаецца сячэння



Чарц. 348.

сячэння, пры меншых значэннях  $l$  яна знаходзіцца па-за сцяною, а пры большых—унутры яе. Ядром сячэння называецца тая фігура, унутры якой сіла  $N$  не ўтварае расцягваючых напружанняў.

Для прамавугольнага сячэння з бакамі  $a$  і  $b$  ядро (чарц. 348) мае форму ромба з дыяганялямі, адпаведна бакам, роўнымі

$$\frac{1}{3} a \text{ і } \frac{1}{3} b.$$

$\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$  вызначаюцца графічна наступным спосабам:

дапусцім ёсць сячэнне  $AB$  (чарц. 349) з сярэдзінай  $C$  і пунктам прылажэння сілы  $N$  у пункце  $D$ . Няхай  $E$  і  $F$  контуры ядра, г. зн.  $AE = EF = FB = \frac{1}{3} b$ . Для вызначэння  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$  праводзім вертыкаль у  $C$ , адкладваем на ёй  $CH = \frac{N}{1 \cdot b}$ , злучаем пункт  $H$  з  $E$  і  $F$  і праводзім  $FH$  да перасячэння ў пункце  $K$  з сілай  $N$ ; тады  $DK = \sigma_{\max}$  і  $DI = \sigma_{\min}$ .

Доказати гэта можна з падобнасці трохвугольнікаў:  
 $DKF$  і  $CHE$ :

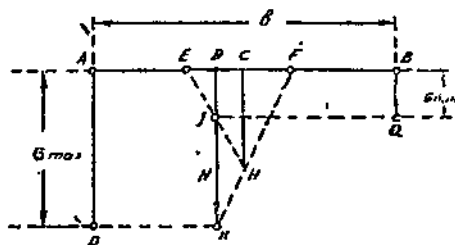
$$\frac{DK}{CH} = \frac{DF}{CE},$$

адкуль:

$$DK = \frac{CH \cdot DF}{CE} = \frac{1 \cdot b}{\frac{b}{6}} \cdot \left( \frac{b}{6} + e \right) = \frac{N}{1 \cdot b} \cdot \frac{b}{6} \cdot \left( 1 + \frac{6e}{b} \right),$$

ці:

$$DK = \frac{N}{1 \cdot b} \cdot \left( 1 + \frac{6e}{b} \right) = \sigma_{\max}.$$



Чарц. 349.

Такім-жа чынам з падобнасці трохвугольнікаў  $CHE$  і  $DIE$  атрымоўваем  $DI = \sigma_{\min}$ .

## § 132. Умовы ўстойлівасці падпорных сцен

Неабходна выкананне наступных умоў для ўстойлівасці падпорнай сцяны:

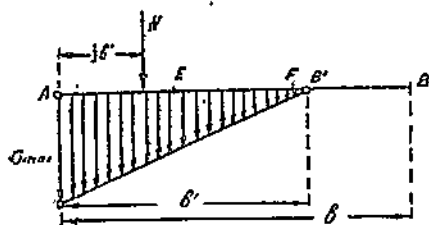
1. Не павінна быць вярчэння сцяны каля крайніх кантаў швоў ці асновы; для гэтага крывая ціску не павінна выходзіць з межаў абрысаў сцяны.

2. Не павінна быць коўзання сцяны: для гэтага роўнадзейная частак сцяны, якія ляжаць вышэй, не павінна ўтвараць з перпендыкулярам да шва ці падшвы асновы вугал, большы за вугал трэння.

Нідзе ў швах не павінна быць перавышана дапускальнае напружанне матэрыялу сцяны, а ў падшве асновы дапускальнае напружанне грунту.

Сіла саччаплення раствору з каменнямі, а таксама яго частак між сабою, вельмі нязначная ў параўнанні з супраціўленнем спіскання, у выніку чаго кладка вельмі кепска супраціўляецца расцяжэнню. Таму пры разліках сцен прымаюць, што коўзанню адных слаёў кладкі па другіх супрацьдзейнічае толькі сіла трэння, якая працягваецца між слаямі; расцягваючы напружанні ў разлік

таксама не прымаюцца, г. зн. кладка разлічваецца толькі на адны сціскаючыя ўсілі. Таму, калі роўнадзейная  $R$  (ці нармальныя сіла  $N$ ) прыложана ў пункце  $D$  (чарц. 350), па-за ядром  $EF$ , то прымаюць  $AD$  за адну трэць асновы  $AB$ , якая падпадае толькі сціскаю. Пры гэтым частка  $B'B$ , на якую дзейнічаюць расцягваючыя ўсілі, з'яўляецца зусім лішняй, а ў некаторых збудаваннях, як, напрыклад, запрудах набярэжных, скляпеннях і інш., у выніку ўтварэння трэшчы ад расцягваючых напружанняў, зусім недапушчальнай.

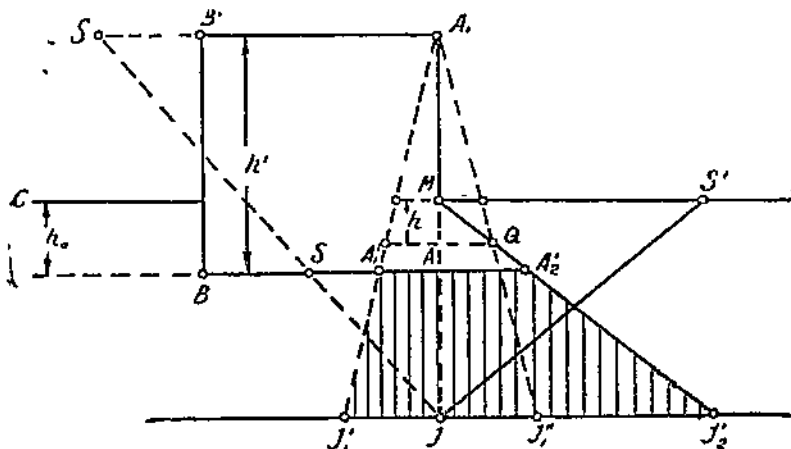


Чарц. 350.

З гэтае прычыны ў тых збудаваннях, у якіх утварэнне трэшчы недапушчальна, крывая ціску не павінна выходзіць з ядра сячэння, г. зн. з сярэдняй трэці сячэння.

### § 133. Глыбіня закладкі фундамента

Асновы маставых апор і наогул усякіх збудаванняў павінны быць закладзены на такую глыбіню, каб не магло здарыцца *выціскання* грунту з-пад падошвы збудавання.



Чарц. 351.

Далупцім  $AB$  (чарц. 351) азначае падошву асновы збудавання, закладзеную на глыбіню  $h_0$  ад паверхні зямлі  $CD$ , і няхай  $h_1 = AA_1$  — вышыня прадпалагаемага слою зямлі, які замяняе ціск на падошву  $AB$  збудавання.

Працягнем роўніцу  $AA_1$  і возьмем на працягу яе які-небудзь пункт  $I$  на глыбіні  $h$  пад падошваю збудавання. Калі разглядаць  $IA$ , як падпорную сцяну, то на яе злева ўтварае ціск земляная прызма  $IAS$  з нагрузкай, што знаходзіцца на ёй, вышынёю  $h_1$ , і дыяграмай ціску  $IAA_1'I_1'$ , якая складае частку трохвугольніка  $IA'I_1'$ , і пабудавана згодна раней указаных правілаў. Ціск гэты прымем перпендыкулярным да роўніцы  $IA$ ; ён імкнецца выпхнуць земляную прызму  $IMS'$  і ўроўнаважваецца пасіўным ціскам зямлі, які дзейнічае справа.

Будзем дыяграму  $IMI_2'$  пасіўнага ціску зямлі. Выцісканне зямлі з-пад падошвы асновы не будзе ўтварацца толькі ў тым выпадку, калі ў любым пункце роўніцы  $A'I$  ўдзельны актыўны ціск будзе меншы за ўдзельны пасіўны ціск, а таму, што ўдзельныя ціскі ў любым пункце роўніцы  $A'I$  роўны шырыні дыяграмы ціску на вышыні гэтага пункта, то шырыня дыяграмы пасіўнага ціску ў любым пункце павінна быць большая за шырыню дыяграмы актыўнага ціску. Калі павярнуць дыяграму актыўнага ціску каля  $IA$  на  $180^\circ$  у палажэнне  $IA'I''$ , то на перасячэнні  $A'I''$  з  $MI_2'$  знойдзем пункт  $Q$  на глыбіні  $h$  ад паверхні зямлі, ніжэй якога выканана паданая ўмова. Значыць глыбіня закладання асновы  $h_0$  павінна быць роўнай ці большай за  $h$ , каб не ўтваралася выціскання грунту.

Звычайна глыбіня закладання фундаменту  $h_0$ , якая атрымліваецца з гэтага разліку, вельмі нязначная і меншая за глыбіню, якая патрабуецца другімі ўмовамі: глыбінёю прамярзання грунту, небяспекаю размыву і другімі ўмовамі, пра якія гаворыцца ў адпаведных курсах.

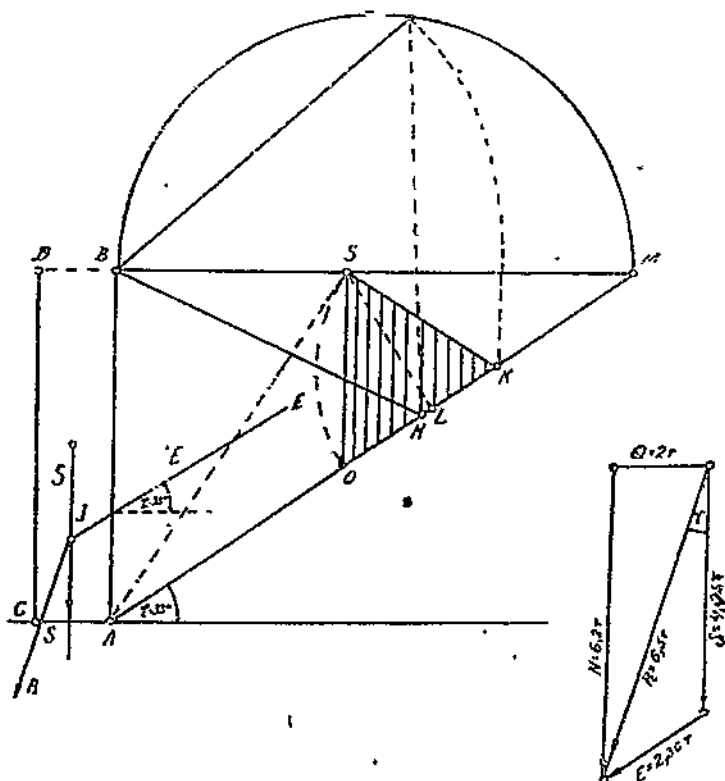
## § 134. Прыклады разліку

**Прыклад 1.** Правярць устойлівасць вертыкальнай цаглянай сцяны, таўшчынёй  $AC=BD=0,75$  м і вышынёй 3 м і вызначыць напружанні ў шве  $AC$ , калі сцяна засыпана пяском на гарызантальнай роўніцы. Удзельная вага кладкі прымаецца:  $\gamma=2,2$ ; тады прыложаная ў цэнтры цяжару сячэння  $ABCD$  вага аднаго паг. м сцяны ў даўжыню будзе:  $S=0,75 \cdot 3,00 \cdot 1,00 \cdot 2,2=4,95$  т.

Прымаючы гранічны вугал натуральнага адкосу пяску  $\varphi=33^\circ$  і вугал трэння пяску аб сцяну  $\varphi_1=\varphi=33^\circ$ , праводзім лінію натуральнага адкосу  $AM$  і лінію палажэння  $BH$ , правёўшы яе пад вуглом  $\varphi+\varphi_1=66^\circ$  да роўніцы сцяны  $BA$ . Далей будзем трохвугольнік Рэбхана  $SKO$ , аснова якога  $KO=1,75$  м і вышыня  $SL=1,50$  м (узятая па маштабу). Значыць плошча трохвугольніка  $F=\frac{1,75 \cdot 1,50}{2}=1,3125$  м<sup>2</sup> і ціск зямлі  $E=\gamma_1 \cdot F=1,3125 \cdot 1,8=2,3625$  т ці, акругляючы,  $E=2,36$  т.

Сіла гэта прыложана на вышыні  $\frac{1}{8}$  сцяны ад пункта  $A$  і ўтварае з перпендыкулярам да сцяны, г. зн. з гарызантальлю вугал  $\varphi_1=33^\circ$ .

Складаємо  $S$  і  $E$  при дапамозе трохвугольніка сіл (чарц. 352) роўнадзейную  $R = 6,50 \text{ т}$  і праз пункт  $I$  перасячэння  $S$  і  $E$  праводзім паралель да  $R$ , якая перасякае аснову сцяны  $AC$  у пункце  $S$ , што знаходзіцца ад пункта  $C$  на адлегласці  $CS = 0,125 \text{ м}$ , ці ад сярэдзіны асновы на  $e = \frac{0,75}{2} = 0,125 = 0,25 \text{ м}$ .



Чарц. 352.

З тае прычыны, што вугал  $\varphi_1'$ , які ўтвараецца роўнадзейнай  $R$  з вертыкаллю, роўны  $18^\circ$ , г. зн. меншы за вугал трэння сцяны аб зямлю, а іменна  $\varphi_1 = 33^\circ$ , то небяспекі зруху сцяны гарызантальнай складаючай  $Q = 2,000 \text{ т}$  сілы  $R$  няма.

Зусім таксама сцяна не можа абрушыцца, бо  $R$  перасякае аснову  $AC$  у пункце  $S$ , які ляжыць у межах гэтай асновы. Калі-б сцяна магла супраціўляцца як сцісканню, так і расцяжэнню, то напружанні грунту, якія выклікаюцца вертыкальнай складаючай  $N = 6,20 \text{ т}$ , атрымаліся-б у пункце  $C$ :

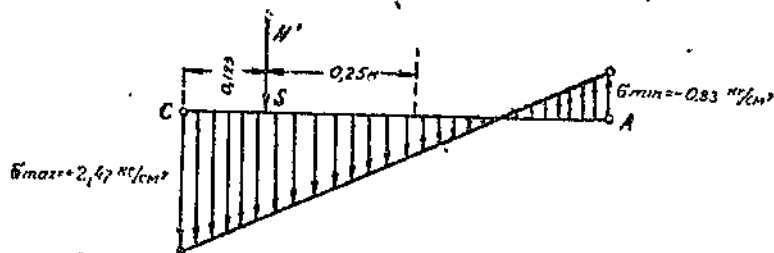
$$\sigma_{\max} = \frac{6200}{75 \cdot 100} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 25}{75}\right) = 2,45 \text{ кг/см}^2,$$

у пункце А:

$$\sigma_{\min} = \frac{6200}{75 \cdot 100} \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot 25}{75}\right) = -0,83 \text{ кг/см}^2$$

і дыяграма напружанняў мела б выгляд, як паказана на чарц. 253.

Але з тае прычыны, што цагляная сцяна можа супраціўляцца толькі сціскаючым, то расцягваючых усяляў у ёй быць не можа і разлік трэба весці ў тым дапушчэнні, што сіла  $N$  уроўнаваж-



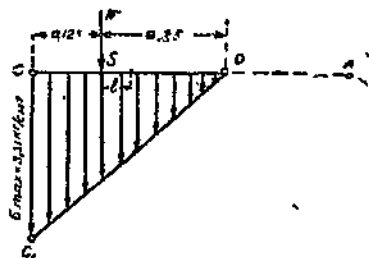
Чарц. 353.

ваецца толькі аднымі сціскаючымі ўсіллямі. У гэтым выпадку шырыня  $CO$  (чарц. 354) часткі шва, якая ўспрымае гэтыя ўсілля, будзе:

$CO = 3 \cdot CS = 0,125 \cdot 3 = 0,375 \text{ м} = 37,5 \text{ см}$  (дапускаючы, што  $N$  прыложена ў крайнім пункце (сярэдняй трэці сячэння)).

Велічыня найбольшага напружання вызначаецца:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{b \cdot a} \cdot \left(1 + \frac{6e}{b}\right),$$



дзе  $b = CO = 37,5 \text{ см}$ ,  $a = 1,0 \text{ м} = 100 \text{ см}$ ,  $e = \frac{1}{6}$ ,  $b = 6,25 \text{ см}$

і  $N = 6200 \text{ кг}$ .

Чарц. 354.

$$\sigma_{\max} = \frac{6200}{37,5 \cdot 100} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 6,25}{37,5}\right) = 3,31 \text{ кг/см}^2$$

ці з тае ўмовы, што плошча дыяграмы напружання  $OCC' \cdot a = N$ ,

$$\text{г. зн. } \frac{CO \cdot \sigma_{\max}}{2} \cdot a = N, \text{ ці } \frac{37,5 \cdot \sigma_{\max} \cdot 100}{2} = 6200,$$

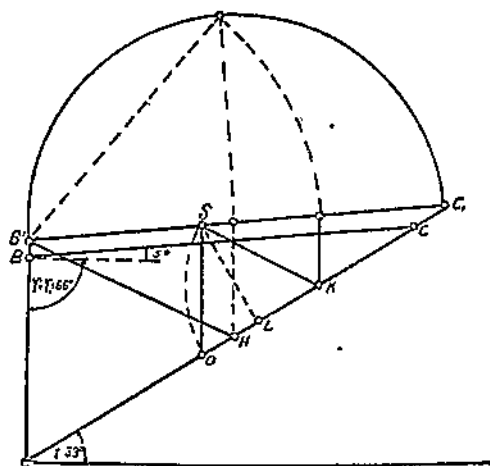
адкуль:

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 6200}{37,5 \cdot 100} = 3,1 \text{ кг/см}^2.$$

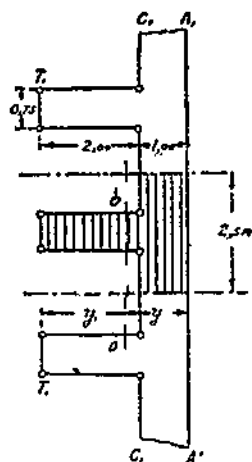
**Прыклад 2.** Вызначыць ціск на грунт (max і min) падпорнай сцяны вышынёй у 4 метры з вертыкальнай задняй роўніцай таўшчынёй у версе 0,75 м і ў нізе 1,00 м; сцяна ўмацавана контра-

форсамі шириной уверсе 0,50 м, а ўнізе 2,0 м і таўшчыняй у 0,75 м размешчанымі на адлегласці 2,50 м вось ад восі. Засыпка гліністай зямлэй з вуглом натуральнага адкосу  $\varphi = 33^\circ$  і ўдзельнаю вагою  $\gamma = 1,80$ , абмежаванай зверху роўніцай з 5-проц. ухілам да сцяны і часовай нагрузкай у 540 кг/м<sup>2</sup>.

Вызначым спачатку ціск зямлі  $E$  на 1 паг. м сцяны; для гэтага заменім часовую нагрузку эквівалентным слоем зямлі



Чарц. 355.

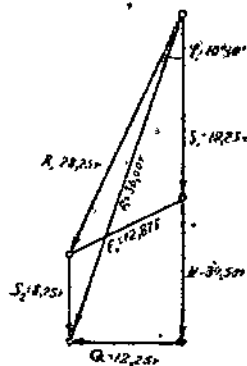
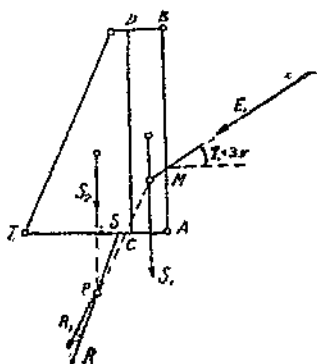


Далей вызначаем палажэнне цэнтра цяжару вылучанага ўчастка адносна  $A'A'$ :

$$y = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{250 \cdot 100 \cdot \frac{100}{2} + 200 \cdot 75 \left(100 + \frac{200}{2}\right)}{250 \cdot 100 + 200 \cdot 75} = 106,25 \text{ см}$$

і адносна  $T'T'$ :

$$y' = (100 + 200) - 106,25 = 193,75 \text{ см.}$$



Чарц. 357.

Момант інерцыі асновы адносна восі  $OO$ , якая праходзіць праз цэнтр цяжару яе, будзе:

$$J = \frac{250 \cdot 100^3}{12} + \left(106,25 - \frac{100}{2}\right)^2 \cdot 250 \cdot 100 + \frac{75 \cdot 200^3}{12} + \left(193,75 - \frac{200}{2}\right)^2 \cdot 75 \cdot 200 = 281945823 \text{ см}^4.$$

Уласная вага кладкі даўжынёй у 2,5 метры пры ўдзельнай вазе  $\gamma_2 = 2,2$  будзе:

$$S_1 = \frac{0,75 + 1,00}{2} \cdot 4,00 \cdot 2,5 \cdot 2,2 = 19,25 \text{ т і контрафорса:}$$

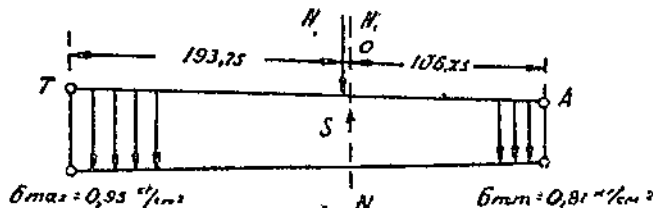
$$S_2 = \frac{0,50 + 2,00}{2} \cdot 4,00 \cdot 0,75 \cdot 2,2 = 8,25 \text{ т.}$$

Складаем сілы  $S_1$  і  $E'$  (чарц. 357) у роўнадзейную  $R'$ , і да яе дадаем  $S_2$ . Агульная роўнадзейная  $R$  дае вертыкальную складваючую  $N = 34,50 \text{ т}$  і гарызантальную  $Q = 12,25 \text{ т}$ .

Затым працягнуўшы  $E'$  да перасячэння з  $S_1$  у пункце  $M$ , праводзім праз гэты пункт паралель  $R'$  да пункта  $P$  перасячэння з сілай  $S_2$ . Праз пункт  $P$  праводзім паралель  $R$  да перасячэння

з падошваю сцяны ў пункце  $S_1$ , які і ёсць пункт прылажэння сілы  $R$  да асновы сцяны, і знаходзіцца ад  $A$  на адлегласці  $AS = 1,10$  м ці ад цэнтра цяжару асновы на  $OS = AS - AO = 1,10 - 1,0625 = 0,0375$  м  $= 3,75$  см.

Для вызначэння напружання ў падошве асновы  $AF$ , у цэнтры цяжару, яго  $O$  (чарц. 358) прыкладваем дзве роўныя сілы  $N$



Чарц. 358.

і прамасупрацьлеглыя сілы  $N'$  і  $N$ . Сіла  $N'$  дае роўнамерную нагрукву (як прыложаная ў цэнтры цяжару):

$$\sigma_m = \frac{N'}{F} \cdot \frac{34500}{250 \cdot 100 + 75 \cdot 200} = +0,86 \text{ кг/см}^2.$$

Сілы-ж  $N$  утвараюць момант:

$$M = OS \cdot N = 0,0375 \cdot 34,5 = 1,29375 \text{ т.м} = 129375 \text{ кг/см}.$$

Гэты выгібаючы момант выкліча ў пункце  $T$  сціскаючае напружанне:

$$\sigma_{MT} = + \frac{M}{I} \cdot y' = + \frac{129375 \cdot 3,75}{281945823} = +0,09 \text{ кг/см}^2$$

і ў пункце  $A$  расцягваючае ўсілле:

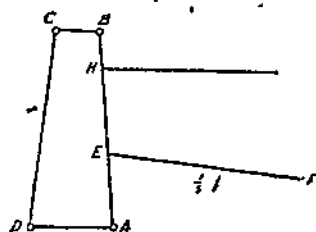
$$\sigma_{MA} = - \frac{M}{I} \cdot y = - \frac{129375 \cdot 106,25}{281945823} = -0,05 \text{ кг/см}^2. \text{ Значыць агуль-}$$

нае напружанне будзе ў пункце  $T$ :

$$\sigma_{\max} = 0,86 + 0,09 = +0,95 \text{ кг/см}^2$$

і ў пункце  $A$  будзе:

$$\sigma_{\min} = 0,86 - 0,05 = +0,81 \text{ кг/см}^2.$$



Чарц. 359.

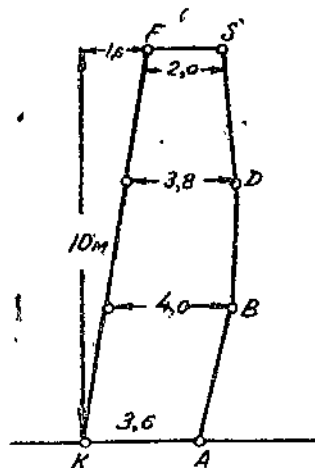
Дано:  $\varphi = \varphi_1 = 30^\circ$ ;  $\gamma = 1,6$  (чарц. 359).

Задача. Для падпорнай сцяны  $ABDSFK$  (чарц. 360):

- 1) вызначыць распор насыпу з часовай нагруквай;
- 2) пабудаваць дыяграму размеркавання распора;

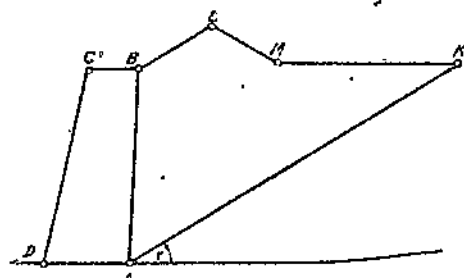
3) побудоваць кривую ціску;

4) перевірьть триваласць і устійлівасць. Вышыня сцяны 10 м; вышыня участкау:  $AB = BD = DS = 3$  м; ухил пярэдняй роўніцы  $1/6$ ; ухил  $SD = 1/4$ ; ухил  $BA = 1/3$ ;  $\gamma = 1,6$ ;  $\gamma_1$  (кладкі)  $= 2,0$ ;  $\varphi = 30^\circ$ ;  $\varphi_1 = 10^\circ$ . Роўнамерная нагрузка  $q = 2$  т/м<sup>2</sup>; глыбіня вадзі злева сценкі  $= 2$  метраў.



Чарц. 360.

**Задача.** Вызначыць распор для сценкі  $ABCD$  (чарц. 361) з насыпам, абмежаваным зверху гарызантальнай роўніцай



Чарц. 361.

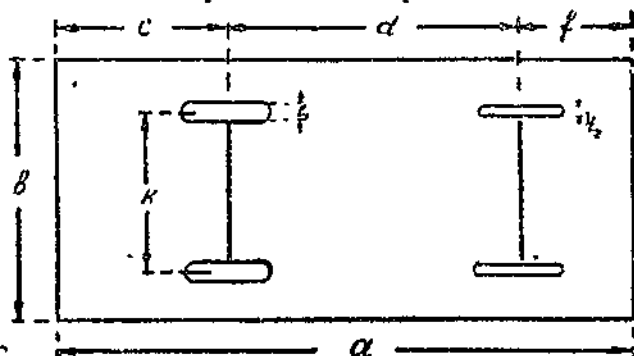
$BK$  і нагружаным валам  $BSM$ ; шырыня вала  $BM$  роўна адлегласці пункта  $B$  да пункта  $M$  перасячэння гарызонту  $BK$  з роўніцай коўзання насыпу  $ABK$ .

Дано:  $\varphi = 30^\circ$ ;  $\varphi_1 = 10^\circ$ ;  $\gamma = 1,6$ ;  $AB = 5$  м.

## Нормы вертикальной нагрузки для мостов над обычными дорогами

По нормам НКШЗ 1927 году для разліку мостов і штучных збудаванняў з усякага роду матэрыялаў устанаўліваецца 7 класаў нагрузкаў. У кожным класе ёсць 3 роды нагрузкаў:

а) *Згрупаваная ў выглядзе грузаў* прымяняецца да даўжынь загрузкі  $\lambda$ , указаных у табліцы I. Вага і размеры грузаў указаны ў той-жа табліцы, прычым абазначэнні прыняты згодна чарц. 362.



Чарц. 362.

На 2-х таксама 3-х і 4-х шляхавых мастах устанаўліваецца 2, а на аднашляхавых—адзін рад грузаў, уздоўжнай восьсю паралельна даўжыні маста (наварот на мосце не дапускаецца), у самым нявыгадным палажэнні ўздоўж і ўпоперак маста, з разрывамі між радамі ці паасобнымі грузаў ці без іх.

На палосах дарогі, занятых грузаў, ніякай другой нагрузкай не дапускаецца. Мсты, разлічаныя на нагрузку 0 ці I, правяраюцца на нагрузку адным грузаў вагой адпаведна 20 ці 15 тон, пры гэтай праверцы лічыцца адсутная ўсякая другая нагрузка на мосце.

б) *Робнамерная нагрузка*, якая замяняе грузаў; велічыня яе, якая залежыць ад даўжыні загрузкі  $\lambda$ , падана ў табліцы II, і ёсць нагрузка размяшчаецца на праезднай частцы ў выглядзе паласы, роўнай адпаведнай шырыні грузаў, і даўжынёю, якая патрэбна на разліку з разрывамі ці без іх.

в) *Нагрузка натоўпам* па табліцы II; размяшчаецца па ўсёй шырыні тротуараў за вылікам шырыні ферм у мастах з яздай па нізку, а ў многашляхавых мастах і на свабодных месцах па-за палосамі праезду грузаў, калі шырыня свабоднай часткі не меншая за 0,50 м.

Пры некалькіх адзначаных участках інфлюэнтных ліній за даўжыню  $\lambda$  прымаецца агульная даўжыня гэтых участкаў, пры гэтым утварэцца праверка пры загрузцы аднаго участка (калі гэта магчыма). Нагрузка пярэя прымаецца—75 кг на кв. м пярэня.

*Гарызантальная нагрузка* ў выглядзе ціску ветру прымаецца 250 кг/м<sup>2</sup> незалежна ад таго, ці знаходзіцца рухомая нагрузка на мосце ці не, прычым у выпадку знаходжання яе на мосце, дапускаюць, што ціск ветру на рухомую нагрузку не пашыраецца. Ветравая нагрузка прымаецца ў магчымай савакупнасці з вертикальнай нагрузкай, якая дае найбольш нявыгаднае палажэнне.

# Т А Б Л І Ц А І

Вага і розміри грузовікоу по нормах НКШБ 1927 году

| Назва даных                                                          | Адзінка меры | Па-за класам | Клас нагрузкі |     |     |     |     |     |     |  |
|----------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
|                                                                      |              |              | 0             | I   | II  | III | IV  | V   | VI  |  |
| Найбольшая даўжыня $\lambda$ для разліку па згрупаваных грузах . . . | м            | —            | 30            | 24  | 17  | 10  | 10  | 10  | 5   |  |
| Найбольшы лік разоў грузавікоў . . . . .                             | рад          | 1            | 2             | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   |  |
| Найбольшы лік грузавікоў у радзе . . . .                             | шт.          | 1            | 3             | 3   | 3   | 2   | 2   | 2   | 1   |  |
| Вага грузавіка $P$ . . . . .                                         | м            | 20           | 15            | 10  | 8   | 6   | 4   | 2,5 | 1,5 |  |
| Ціск на заднюю вось $P_1$ . . . . .                                  | „            | 14           | 11            | 7   | 5,6 | 4,2 | 2,8 | 1,7 | 0,9 |  |
| Таксама на пераднюю $P_2$ . . . . .                                  | „            | 6            | 4             | 3   | 2,4 | 1,8 | 1,2 | 0,8 | 0,6 |  |
| Даўжыня кузава $a$ . . . . .                                         | м            | 8,6          | 7,6           | 7,6 | 7,0 | 7,0 | 7,0 | 6,0 | 5,0 |  |
| Шырыня кузава $b$ . . . . .                                          | „            | 3,0          | 2,7           | 2,7 | 2,7 | 2,7 | 2,7 | 2,7 | 2,4 |  |
| Адлегласць паміж восямі $d$ . . . . .                                | „            | 4,3          | 3,8           | 3,8 | 3,5 | 3,5 | 3,5 | 3,0 | 2,5 |  |
| Задняе звясанне $c$ . . . . .                                        | „            | 2,6          | 2,3           | 2,3 | 2,1 | 2,1 | 2,1 | 1,8 | 1,5 |  |
| Перадняе звясанне $f$ . . . . .                                      | „            | 1,7          | 1,5           | 1,5 | 1,4 | 1,4 | 1,4 | 1,2 | 1,0 |  |
| Каляя (між сярэдзінамі вабадоў) $k$ . . . . .                        | „            | 1,8          | 1,7           | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |  |
| Шырыня вабада задняга $l_1$ . . . . .                                | „            | 0,4          | 0,4           | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |  |
| Шырыня вабада перадняга $l_2$ . . . . .                              | „            | 0,2          | 0,2           | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |  |

Увага. У размеры кузава ўключаны і зазоры між грузовікамі.

## ТАБЛИЦА II

Роўнамерныя нагрукі па нормах НКПЗ 1927 году

| Клас нагрукі      | Роўнамерная нагрузка для замены грузавайкоў |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|---------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                   | 0                                           | I    |      |      | II   | III  | IV   | V    | VI   |      |      |
| λ, м . . . . .    | 30                                          | 50   | ≥ 70 | 24   | ≥ 44 | 17   | ≥ 32 | 10   | ≥ 25 | ≥ 10 | ≥ 5  |
| ρ, т/м² . . . . . | 0,74                                        | 0,54 | 0,40 | 0,54 | 0,40 | 0,52 | 0,40 | 0,45 | 0,40 | 0,30 | 0,20 |

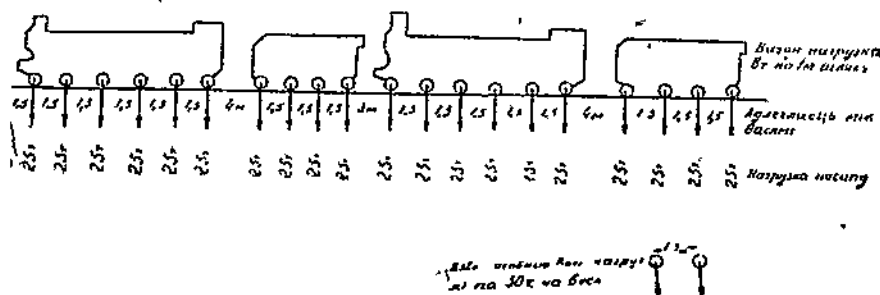
| Нагрузка нагоулам |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| λ, м . . . . .    | 30   | ≥ 40 | 30   | ≥ 40 | 20   | ≥ 30 | 10   | ≥ 20 | ≥ 0  | ≥ 0  |
| ρ, т/м² . . . . . | 0,40 | 0,30 | 0,40 | 0,30 | 0,40 | 0,30 | 0,35 | 0,25 | 0,20 | 0,20 |

Увага. Для прамежных даўжынь загрузжэння велічыня нагрукі вызначаецца прамалінейнай інтэрпалацыяй.

## Нормы рухомай вертыкальнай нагрукі для разліку мастоў і другіх штучных збудаванняў на чыгунках нармальнай каляі

§ 1. Для разліку металічных, каменных, бетонных і жэлезабетонных мастоў і другіх штучных збудаванняў з тых-жа матэрыялаў як пры пабудове новых, так і пры перабудове ці ўмацаванні існуючых, асноўнаю разліковаю нагрукіаю прымаецца нармальная нагрузка „Н”.

§ 3. Нармальная нагрузка „Н” складаецца з двух шасцівосевых паравозаў, вагой кожны ў 150 т, а чатырхвосевымі тэндэрамі, вагой кожны ў 100 т, і вагоннай нагрукіаю ў 8 т на 1 паг. м. Ціск на кожную з восей паравоза і тэндэра— 25 т. Апрача таго, павінна быць правярэна разлікам магчымасць пропуску па



Чарц. 363.

збудаванні двух восей па 30 т з адлегласцямі між імі ў 1500 мм без павышэння дапускатальных напружанняў. Схема такой нагрукі падаана на чарц. 363. Разлік па гэтай схеме вядзецца пры самай нявыгаднай устаноўцы паравоза з тэндэрамі і вагонаў ці двух 30-ці тонных восей, як значана ў § 5.

§ 5. Робячы разлік на пропуск цягніка, трэба дапусціць, што на пачатку цягніка пастаўлены два паравозы з тэндэрамі, прычым паравозы змешчаны трыбамі ў адзін бок—ці у кірунку руху, ці супраць яго.

У аснову разліку бярацца такое размяшчэнне паравозаў з тэндэрамі і вагонаў ці двух паасобных восей, якое выклікае найбольшае напружанне ў разлічваемым элеменце збудавання. Пры гэтым вагоны ставяцца толькі з аднаго боку ад паравозаў, і дапускаецца адзін разрыв цягніка ў любым месцы вагоннай нагрукі, у прыватнасці перад пачаткам вагоннай нагрукі, а таксама адзяленне аднаго паравоза з тэндэрам ад другога паравоза з тэндэрам; адрыў паравоза ад адпаведнага яму тэндэра не дапускаецца. Пры адзяленні паравоза з тэндэрам ён можа быць змешчаны адвольна адносна да другога паравоза.

На двухкалейных мастах рух цягнікоў прымаецца сустрэчны ці паралельны і выбіраецца самы нявыгадны.

Разлік на пропуск двух паасобных восей вядзецца пры адсутнасці другой нагрукі.

Пры разліку бэлечных разразных мастоў дазваляецца і раіцца карыстацца табліцамі эквівалентных нагрузак (табліца ІІІ).

ТАБЛІЦА III

Эквівалентныя нагрузкі для аднакалейных мастоў ад цяжкіх  $H$   
у  $m$  на 1 паг. м калы

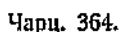
| Разліковы<br>пралёт $l$ ці<br>даўжыня<br>загружанай<br>часткі $\lambda$ у $m$ | Для выгібаючых момантаў      |                           | Для папярочных сіл             |                                |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
|                                                                               | У сярэдзіне<br>пралёта $m/m$ | У чвэрці<br>пралёта $m/m$ | Калі<br>$l-\lambda \leq 4 m/m$ | Калі<br>$l-\lambda \geq 4 m/m$ |
| 1                                                                             | 60,000                       | 60,000                    | 60,000                         | 60,000                         |
| 2                                                                             | 30,000                       | 30,000                    | 37,500                         | 37,500                         |
| 3                                                                             | 20,000                       | 26,667                    | 30,000                         | 30,000                         |
| 4                                                                             | 18,750                       | 22,500                    | 24,375                         | 24,375                         |
| 5                                                                             | 18,000                       | 19,200                    | 22,000                         | 22,000                         |
| 5,50                                                                          | 17,355                       | 17,851                    | 21,488                         | 21,488                         |
| 6                                                                             | 16,667                       | 16,667                    | 20,833                         | 20,833                         |
| 6,5                                                                           | 17,160                       | 17,160                    | 20,710                         | 20,710                         |
| 7                                                                             | 17,347                       | 17,347                    | 20,408                         | 20,408                         |
| 7,50                                                                          | 17,333                       | 17,333                    | 20,000                         | 20,000                         |
| 8                                                                             | 17,188                       | 17,188                    | 19,922                         | 19,922                         |
| 9                                                                             | 16,667                       | 17,284                    | 19,444                         | 19,444                         |
| 10                                                                            | 16,540                       | 17,000                    | 18,830                         | 18,750                         |
| 11                                                                            | 16,248                       | 16,579                    | 18,240                         | 17,975                         |
| 12                                                                            | 15,875                       | 16,139                    | 17,708                         | 17,361                         |
| 13                                                                            | 15,467                       | 15,704                    | 17,456                         | 16,864                         |
| 14                                                                            | 15,051                       | 15,306                    | 17,219                         | 16,582                         |
| 15                                                                            | 14,667                       | 15,333                    | 17,000                         | 16,333                         |
| 16                                                                            | 14,648                       | 15,234                    | 16,895                         | 16,113                         |
| 17                                                                            | 14,533                       | 15,225                    | 16,696                         | 16,003                         |
| 18                                                                            | 14,352                       | 15,123                    | 16,435                         | 15,818                         |
| 19                                                                            | 14,266                       | 14,958                    | 16,136                         | 15,582                         |
| 20                                                                            | 14,125                       | 14,750                    | 15,938                         | 15,438                         |
| 22                                                                            | 13,946                       | 14,325                    | 15,600                         | 15,186                         |
| 24                                                                            | 13,802                       | 14,083                    | 15,408                         | 15,061                         |
| 25                                                                            | 13,760                       | 14,000                    | 15,320                         | 15,021                         |
| 26                                                                            | 13,683                       | 13,955                    | 15,274                         | 14,978                         |

| Разліковы<br>пралёт $l$ ці<br>даўжыня<br>загружанай<br>часткі $\lambda$ у м | Для выгібаючых момантаў      |                             | Для напярочных сіл               |                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
|                                                                             | У сярэдзіне<br>пралёта $m/m$ | У чвэрці пра-<br>лёта $m/m$ | Калі<br>$l - \lambda \leq 4 m/m$ | Калі<br>$l - \lambda \geq 4 m/m$ |
| 28                                                                          | 13,605                       | 13,861                      | 15,179                           | 14,923                           |
| 30                                                                          | 13,460                       | 13,778                      | 15,036                           | 14,778                           |
| 32                                                                          | —                            | —                           | 14,871                           | 14,624                           |
| 35                                                                          | 13,213                       | 13,545                      | 14,607                           | 14,190                           |
| 38                                                                          | —                            | —                           |                                  | 14,382                           |
| 40                                                                          | 13,188                       | 13,392                      |                                  | 14,280                           |
| 42                                                                          | —                            | —                           |                                  | 14,168                           |
| 45                                                                          | 13,037                       | 13,116                      |                                  | 13,989                           |
| 48                                                                          | —                            | —                           |                                  | 13,806                           |
| 50                                                                          | 12,798                       | 12,916                      |                                  | 13,683                           |
| 55                                                                          | —                            | —                           |                                  | 13,384                           |
| 60                                                                          | 12,207                       | 12,463                      |                                  | 13,102                           |
| 65                                                                          | —                            | —                           |                                  | 12,840                           |
| 70                                                                          | 11,621                       | 11,994                      |                                  | 12,597                           |
| 75                                                                          | —                            | —                           |                                  | 12,375                           |
| 80                                                                          | 11,156                       | 11,564                      |                                  | 12,170                           |
| 85                                                                          | —                            | —                           |                                  | 11,982                           |
| 90                                                                          | 10,745                       | 11,195                      |                                  | 11,809                           |
| 95                                                                          | —                            | —                           |                                  | 11,649                           |
| 100                                                                         | 10,372                       | 10,868                      |                                  | 11,501                           |
| 110                                                                         | 10,038                       | 10,584                      |                                  | 11,237                           |
| 120                                                                         | 9,740                        | 10,352                      |                                  | 11,009                           |
| 130                                                                         | 9,479                        | 10,145                      |                                  | 10,810                           |
| 140                                                                         | 9,276                        | 9,957                       |                                  | 10,636                           |
| 150                                                                         | 9,111                        | 9,789                       |                                  | 10,480                           |
| 160                                                                         | 8,977                        | 9,638                       |                                  | 10,343                           |
| 170                                                                         | 8,865                        | 9,508                       |                                  | 10,219                           |
| 180                                                                         | 8,772                        | 9,395                       |                                  | 10,108                           |
| 190                                                                         | 8,693                        | 9,291                       |                                  | 10,007                           |
| 200                                                                         | 8,625                        | 9,195                       |                                  | 9,915                            |

”

Тогда  $M$  заменена сгруппированной нагрузкой  $Y$

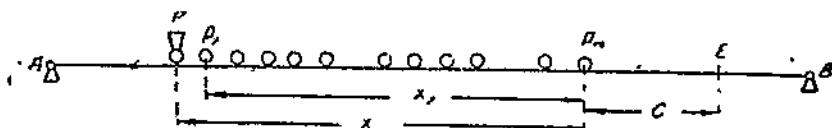
By \_\_\_\_\_, Secretary



Увага.  $n$  — номер кола,  $l$  — адлегласць ад  $n$ -га кола;  $\Sigma P_n$  — сума першых  $n$  грузаў.

У паданай табліцы для кожнага цягніка ёсць 4 графы: у 1-ай графе паказан лік восей; у 2-ой — адлегласць ад першай восі да апошняй, нумар якой знаходзіцца ў 1-ай графе; у 3-ай графе даецца сума грузаў, пачынаючы ад 1-ай восі і ўключаючы апошнюю; у 4-ай графе змешчан статычны момант усіх папярэдніх восей адносна апошняй восі.

Пры дапамозе апошніх двух граф можна разлічыць статычны момант ад любога ліку восей адносна адвольнага пункта  $E$  (чарц. 365).



Чарц. 365.

Абазначым праз  $P_1, P_2, \dots$  ціск восей;  $x_1, x_2, \dots$  адлегласць ад 1-ай, 2-ай... і г. д. восей да апошняй  $n$ -ай восі;  $c$  — адлегласць ад апошняй  $n$ -ай восі да пункта  $E$ , адносна якога разлічваецца момант.

Тады момант адносна пункта  $E$  будзе:

$$M_0 = P_1(x_1 + c) + P_2(x + c) + \dots + P_n \cdot c = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + c(P_1 + P_2 + \dots + P_n).$$

Але  $P_1x_1 + P_2x_2 + \dots = M_n$  ёсць момант усіх папярэдніх грузаў адносна апошняй  $n$ -ай восі паданы ў 4 графе табліцы, а  $(P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \Sigma P_n$ , г. зн. суме ўсіх грузаў і знаходзіцца ў 3-ай графе табліцы, значыць  $M_E = M_n + c \cdot \Sigma P_n$ .

## ЛІТАРАТУРА,

якая часткова служыла дапаможнікам пры састаўленні гэтай кнігі.

- |                    |                                                                   |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------|
| В. Л. Кирпичев.    | Основания графической статистики.                                 |
| Л. Д. Проскураков. | Строительная механика.                                            |
| Ф. С. Ясинский.    | Устойчивость деформации и статика сооружений.                     |
| Мюллер-Бреслау.    | Графическая статика сооружений.                                   |
| П. А. Миняев.      | Статика сооружений.                                               |
| Безухов.           | Статика сооружений.                                               |
| Травчетов.         | Статика сооружений.                                               |
| С. П. Бобровский.  | Статика сооружений.                                               |
| П. А. Велихов.     | Теория инженерных сооружений.                                     |
| Лауенштейн.        | Графическая статика.                                              |
| С. П. Тимошенко.   | Курс статик сооружений.                                           |
| О. А. Ривов.       | Металлические строения                                            |
| И. П. Прокофьев.   | Теория сооружений                                                 |
| С. И. Белзевский.  | Статика сооружений — статика сыпучих тел и расчет подпорных стен. |
| О. Генкель.        | Графическая статика.                                              |
| И. С. Подольский.  | Строительная механика.                                            |
| Бруевич.           | Техническая механика.                                             |
| Николаи.           | Лекции по теор. механике, статика.                                |
| Брилинг.           | Примеры расчета железных частей зданий.                           |
| Левенсон.          | Техническая механика.                                             |
| Митропольский.     | Примеры проектирования мостов.                                    |
| Безухов.           | Подпорные стенки.                                                 |
| Добровольский.     | Техническая механика.                                             |
| R. Saliger.        | Praktische statik, Leipzig und Wien. 1927.                        |
| W. Kaufmann.       | Statik, Berlin, 1923.                                             |



## РАЗДЕЛ III

### Інфлюентныя лініі (лініі ўплыву).

|                                                                                                          | <i>Стар.</i> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 27. Агульная ўласцівасць інфлюентных ліній.                                                              | 63           |
| 28. Вузлавая перадача                                                                                    | 64           |
| 29. Роўнамерна-размеркаваная нагрузка.                                                                   | 65           |
| 30. Згрупаваныя грузы.                                                                                   | 67           |
| А. Пабудова інфлюентных ліній пры непасрэднай перадачы.                                                  | 68           |
| 31. Інфлюентная лінія рэакцыі апоры                                                                      | 69           |
| 32. Інфлюентная лінія момантаў                                                                           | 70           |
| 33. Інфлюентная лінія папярочнай сілы                                                                    | 71           |
| В. Пабудова інфлюентных ліній пры вузлавой перадачы                                                      | —            |
| 34. Інфлюентная лінія рэакцыі апоры                                                                      | 72           |
| 35. Інфлюентная лінія момантаў                                                                           | —            |
| 36. Інфлюентная лінія папярочных сіл                                                                     | —            |
| 37. Пабудова інфлюентных ліній, калі крайнія вузлавыя пункты не знаходзяцца на адной вертыкалі з апорамі | 78           |

## РАЗДЕЛ IV

### Кансольныя бэлькі

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| 38. Агульнае паняцце.                           | 75 |
| 39. Нерухомая нагрузка. Згрупаваныя грузы       | —  |
| 40. Нерухомая роўнамерна-размеркаваная нагрузка | 80 |
| 41. Вузлавая перадача                           | 84 |
| 42. Рухомая нагрузка                            | 85 |
| 43. Інфлюентная лінія апорных рэакцый           | —  |
| 44. Інфлюентная лінія папярочных сіл            | 86 |
| 45. Інфлюентная лінія момантаў                  | 87 |

## РАЗДЕЛ V

### Уроўнаважаныя бэлькі ці бэлькі Гербера

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 46. Агульныя ўласцівасці                  | 89 |
| 47. Разлік уроўнаважаных бэлек            | 91 |
| 47a. Графічны разлік уроўнаважаных бэлек  | 92 |
| 48. Інфлюентныя лініі уроўнаважаных бэлек | 94 |

## РАЗДЕЛ VI

### Трохшарнірныя аркі

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 49. Агульнае паняцце                          | 96  |
| 50. Трохшарнірныя аркі з суцэльнай сценкай    | 99  |
| 51. Разлік аркі пры пастаяйнай нагрузцы       | —   |
| 52. Выгібаючы момант                          | 101 |
| 53. Папярочная сіла                           | 102 |
| 54. Задачы                                    | 103 |
| 55. Рухомая нагрузка                          | —   |
| 56. Інфлюентная лінія апорных рэакцый         | 104 |
| 57. Інфлюентная лінія гарызантальнага распора | —   |
| 58. Інфлюентная лінія выгібаючых момантаў     | —   |
| 59. Інфлюентная лінія папярочных сіл          | 106 |

## РАЗДЗЕЛ VII

### Фермы

Стар.

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| § 60. Агульная тэорыя плоскай рашоткі . . . . .    | 109 |
| § 61. Вызначэнне ўсілляў у стрыжнях ферм . . . . . | 113 |

## РАЗДЗЕЛ VIII

### Пастаянная (нерухомая) нагрузка

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 62. Спосаб Максвела-Крэмона . . . . .                                   | 115 |
| § 63. Прыклады ўжывання спосабу Крэмона . . . . .                         | 118 |
| § 63-а. Прыклад 1. Простая кроквенная ферма . . . . .                     | 119 |
| § 64. " 2. Простая кроквенная ферма з нагрузкай у ніжніх вузлах . . . . . | —   |
| § 65. " 3. Простая кроквенная ферма з нагрузкай абодвух паясоў . . . . .  | 120 |
| § 66. Прыклад IV. Ферма з двума бабкамі і рэгелем . . . . .               | 121 |
| § 67. " V. Ферма з падкосамі і бабкай . . . . .                           | 122 |
| § 68. " VI. Ферма трайная падвесная . . . . .                             | —   |
| § 69. " VII. Ферма кроквенная нямецкая . . . . .                          | 123 |
| § 70. " VIII. Ферма кроквенная англійская . . . . .                       | 124 |
| § 71. Бельгійская кроквенная ферма . . . . .                              | 125 |
| § 71-а. Прыклад IX. Ферма сістэмы Палапсо . . . . .                       | 126 |

## РАЗДЗЕЛ IX

### Вызначэнне ўсілляў у стрыжнях навесаў.

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| § 72. Прыклад 1. Навес, які свабодда высіць . . . . . | 129 |
| § 73. " 2. Навес, замацаваны гарызантальна . . . . .  | —   |
| § 74. " 3. Навес з падкосамі . . . . .                | 130 |
| § 75. Задачы . . . . .                                | 131 |

## РАЗДЗЕЛ X

### Ціск ветру і снегу

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| § 76. Ціск ветру . . . . .                        | 132 |
| § 77. Ціск снегу . . . . .                        | 133 |
| § 78. Вызначэнне ўсілляў ад ціску ветру . . . . . | 134 |
| § 79. Аднабаковы ціск снегу . . . . .             | 136 |
| § 80. Складаная нагрузка . . . . .                | 137 |

## РАЗДЗЕЛ XI

### Маставыя фермы—спосаб Крэмона.

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| § 81. Прыклад 1. Ферма з паралельнымі паясамі . . . . . | 138 |
| § 82. " 2. Парабалічная ферма . . . . .                 | 139 |
| § 83. Межы прымянення метаду Максвела-Крэмона . . . . . | 140 |
| § 84. Задачы на метад Максвел-Крэмона . . . . .         | —   |

## РАЗДЗЕЛ XII

### Вызначэнне ўсілляў у стрыжнях фермы спосабамі Кульмана і Рытэра.

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 85. Спосаб Кульмана . . . . . | 144 |
| § 86. Спосаб Рытэра . . . . .   | 146 |

## РАЗДЕЛ XIII

### Рухомая нагрузка

Стар.

|   |                                                                                              |     |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § | 87. Агульныя паянцы . . . . .                                                                | 150 |
| § | 88. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у стрыжаных фермы . . . . .                                    | —   |
| § | 88-а. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у паясах фермы, якая свабодна ляжыць на двух апорах. . . . . | 151 |

## РАЗДЕЛ XIV

### Кансольныя фермы і фермы Гербера

|   |                                                  |     |
|---|--------------------------------------------------|-----|
| § | 89. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у паясах . . . . . | 154 |
|---|--------------------------------------------------|-----|

## РАЗДЕЛ XV

### Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у стрыжаных рашоткі

|   |                                                                   |     |
|---|-------------------------------------------------------------------|-----|
| § | 90. Фермы з паралельнымі паясамі . . . . .                        | 156 |
| § | 91. Паясы перасякаюцца за апорамі . . . . .                       | 158 |
| § | 92. Паясы перасякаюцца ў межах пралёта . . . . .                  | 161 |
| § | 93. Інфлюэнтныя лініі для рашоткі кансольных ферм . . . . .       | 162 |
| § | 94. Інфлюэнтныя лініі для рашоткі паміж апорнай часткай . . . . . | 164 |
| § | 95. Задачы . . . . .                                              | 166 |

## РАЗДЕЛ XVI

### Трохшарнірныя арачныя фермы

|   |                                                                    |     |
|---|--------------------------------------------------------------------|-----|
| § | 96. Інфлюэнтныя лініі ўсілляў у паясах . . . . .                   | 170 |
| § | 97. Інфлюэнтныя лініі рашоткі трохшарнірных арачных ферм . . . . . | 171 |

## РАЗДЕЛ XVII

### Вызначэнне найбольшых значэнняў выгібаючых момантаў і папярочных сіл

|   |                                                                  |     |
|---|------------------------------------------------------------------|-----|
| § | 98. Асноўныя паянцы . . . . .                                    | 178 |
| § | 99. Нерасрэная нагрузка са згрупаванымі грузамі . . . . .        | —   |
| § | 100. Выгібаючы момант ад сістэмы рухомах грузаў . . . . .        | 182 |
| § | 101. Максімум $M$ ад роўнамерна размеркаванай нагрузкі . . . . . | 186 |
| § | 102. Абсалютны максімум . . . . .                                | —   |
| § | 103. Лінія найбольшых момантаў пры вузлавой нагрузцы . . . . .   | 187 |
| § | 104. Эквівалентная нагрузка . . . . .                            | —   |

## РАЗДЕЛ XVIII

### Папярочная сіла ад рухомай нагрузкі.

|   |                                                              |     |
|---|--------------------------------------------------------------|-----|
| § | 105. Сістэма згрупаваных грузаў. Дыяграма Вінклера . . . . . | 190 |
| § | 106. Роўнамерна-размеркаваная нагрузка . . . . .             | 192 |
| § | 107. Эквівалентная нагрузка . . . . .                        | 193 |

## РАЗДЕЛ XIX

### Вызначэнне найбольшых момантаў і папярочных сіл пры даламоне інфлюэнтных ліній

|   |                                                                                              |     |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § | 108. Многавугольная інфлюэнтная лінія . . . . .                                              | 196 |
| § | 109. Трохвугольная інфлюэнтная лінія . . . . .                                               | 199 |
| § | 110. Інфлюэнтная лінія, якая складаецца з 2-х падобных трохвугольных розных знакаў . . . . . | 200 |

|        |                                                                                                                   |     |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 111. | Разлік па падвойных ліній уплыву                                                                                  | 201 |
| § 112. | Прыклады вызначэння максімуму і мінімуму момантаў і папярочных сіл для бэлек, якія свабодна ляжаць на двух апорах | 204 |
| § 113. | Прыклады вызначэння максімуму і мінімуму момантаў і папярочных сіл для бэлек Гербера                              | 215 |

## РАЗДЗЕЛ XX

## Тэорыя сыялчых цел. Падпорныя сцены

|        |                                                                                                |     |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 114. | Агульныя паняцці                                                                               | 223 |
| § 115. | Ціск зямлі на плоскую падпорную сцяну пры плоскай паверхні зямлі                               | 225 |
| § 116. | Вызначэнне палажэння роўніцы коўзання пры плоскай паверхні засыпкі і плоскай сцяне             | 228 |
| § 117. | Вызначэнне роўніцы коўзання пры ломанай паверхні засыпкі і плоскай сцяне                       | 231 |
| § 118. | Вызначэнне роўніцы коўзання пры адвольнай паверхні засыпкі і плоскай сцяне                     | 232 |
| § 119. | Размеркаванне ціску зямлі па роўніцы сцяны пры плоскай засыпцы                                 | 233 |
| § 120. | Размеркаванне ціску зямлі пры ломанай паверхні засыпкі і плоскай сцяне                         | 235 |
| § 121. | Вызначэнне плошчы напружання ў выпадку, калі паверхня зямлі ўтварае вуглы, меншыя за $\varphi$ | 236 |
| § 122. | Эпюра напружанняў пры адвольнай паверхні засыпкі                                               | 237 |
| § 123. | Ціск зямлі з часовай нагрузкай на паверхні                                                     | 238 |
| § 124. | Разлік чыгуначнага насыпу                                                                      | 240 |
| § 125. | Ціск зямлі на ломаных сценкі                                                                   | 241 |
| § 126. | Прыватныя выпадкі нахілу паверхні зямлі                                                        | —   |
| § 127. | Пасіўны ціск зямлі (адпор)                                                                     | 243 |
| § 128. | Пункт прылажэння ціску зямлі                                                                   | 244 |
| § 129. | Лінія ціску                                                                                    | 245 |
| § 130. | Графічнае вызначэнне крывой ціску                                                              | 246 |
| § 131. | Размеркаванне ціску на пасцельнаму шву                                                         | 248 |
| § 132. | Умовы ўстойлівасці падпорных сцен                                                              | 251 |
| § 133. | Глыбіня закладкі фундаменту                                                                    | 252 |
| § 134. | Прыклады разліку                                                                               | 253 |

|            |                                                             |     |
|------------|-------------------------------------------------------------|-----|
| ДАДАТАК I. | Нормы вертыкальнай нагрузкі для мастоў пад звычайныя дарогі | 260 |
|------------|-------------------------------------------------------------|-----|

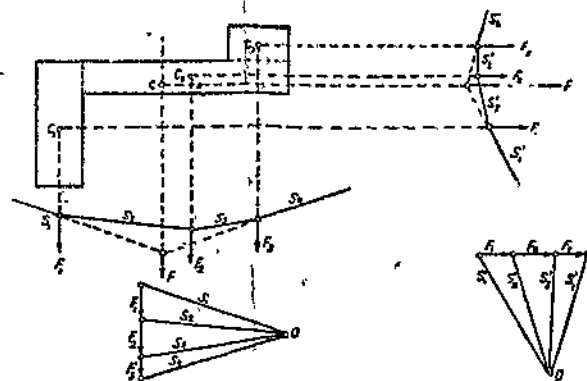
|             |                                                                                                                 |     |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ДАДАТАК II. | Нормы рухомай вертыкальнай нагрузкі для разліку мастоў і другіх штучных збудаванняў на чыгунках нармальнай калі | 263 |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Літаратура |  | 267 |
|------------|--|-----|

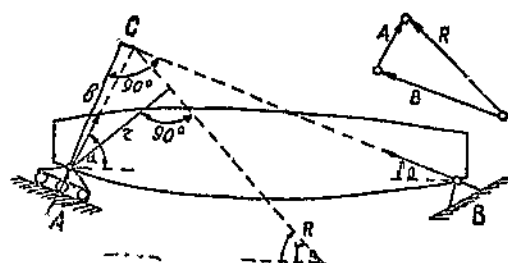
# З а ў в а ж а н ы я п а м ы л к і д р у к у

| Стар. | Радок     | Надрукавана                                                                | Павінна быць                                                 |
|-------|-----------|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 27    | 8 знізу   | Вызначыць момант сіл $P_1, P_2$                                            | Вызначыць моманты сіл $P_1, P_2$                             |
| 31-35 |           | $Y$                                                                        | $I$ (і п'ялікае), як стандартнае абазначэнне моманту інерцыі |
| 55    | 1 зверху  | 10 м,                                                                      | 8 м,                                                         |
| 64    | 1 знізу   | $P_m = P \cdot \frac{d-x}{x}$                                              | $P_m = P \cdot \frac{d-x}{d}$                                |
| 73    | 6 зверху  | $\frac{A_1 K_1'' O}{K}$                                                    | $A_1 K_1'' O$                                                |
| 79    | 11 "      | $A + B + \sum_{cD} P$                                                      | $A + B = \sum_{cD} P$                                        |
| 105   | 11 "      | $A_1 A_1' = +1 \cdot a \cdot \frac{y_n}{f}$                                | $A_1 A_1'' = +1 \cdot a \cdot \frac{y_n}{f}$                 |
| 105   | 7 знізу   | $C_1' C_1''$                                                               | $C_1' B_1''$                                                 |
| 108   | 3 зверху  | $A_1 n_1'' n_1'''$                                                         | $A_1 n_1'' n_1'''$                                           |
| 112   | 29 "      | $KN$ і $ML$                                                                | $KN_1$ і $M_1 L$                                             |
| 112   | 30 "      | $M$ і $N$                                                                  | $M_1$ і $N_1$                                                |
| 112   | 7 "       | $n = 2K - 3$                                                               | $n = 2K - 3$                                                 |
| 135   | 10 "      | $\alpha_3 = 4 \cdot 10$                                                    | $\alpha_3 = -4 \cdot 10$                                     |
| 152   | 8 знізу   | $0 = -\frac{M_2}{r_0}$                                                     | $0 = -\frac{ME}{r_0}$                                        |
| 152   | 2 "       | $A_1 E_1 B_1'$                                                             | $A_1 E_1' B_1$                                               |
| 155   | 3 зверху  | $= D_2 D_2' = +1 \cdot \frac{a_0}{r_0}$                                    | $= D_2 D_2' = +1 \cdot \frac{a_1}{r_0}$                      |
| 170   | 11 знізу  | $A_1 A_1'' = +1 \cdot \frac{a_d}{r_d}$                                     | $A_1 A_1'' = +1 \cdot \frac{aD}{r_u}$                        |
| 173   | 3 зверху  | $A_1 A_1' = \frac{a_0 \cdot y}{f \cdot r_d}$                               | $A_1 A_1'' = \frac{a_0 \cdot y}{f \cdot r_d}$                |
| 179   | 1 знізу   | $A_1' B_2'$                                                                | $A_1' B_1'$                                                  |
| 181   | 13 "      | $Q = A = \frac{P(l-x) - P(l-x-a)}{l}$                                      | $Q = A = \frac{P(l-x) + P(l-x-a)}{l}$                        |
| 183   | 1 зверху  | $A$                                                                        | $A_1$                                                        |
| 183   | 2 "       | $AB$                                                                       | $A_1 B$                                                      |
| 185   | 11 "      | $\max \max M = \frac{R \cdot x^2}{l} = \mu$                                | $\max \max M = \frac{R x^2}{l} = \mu$                        |
| 194   | 9 "       | $K_0 = \frac{2 \cdot 312 \cdot 5}{48}$                                     | $K_0 = \frac{2 \cdot 312 \cdot 5}{48}$                       |
| 196   | 15 знізу  | $K_1, K_2$                                                                 | $R_1, R_2$                                                   |
| 217   | 3 "       | 22,850                                                                     | 22,800                                                       |
| 225   | 19 "      | $\varphi$                                                                  | $\varphi_1$                                                  |
| 225   | 18 "      | $\varphi_2$                                                                | $\varphi_1$                                                  |
| 227   | 10 зверху | $E = \gamma \cdot \frac{\sin p}{2} \cdot z \cdot x$                        | $E = \gamma \cdot \frac{\sin \beta}{2} \cdot z \cdot x$      |
| 227   | 8 "       | $\sin BOA$                                                                 | $\sin BDA$                                                   |
| 231   | 7 знізу   | $P'S$                                                                      | $P'C$                                                        |
| 232   | 3 "       | $ABS_1 = F_1' K'$                                                          | $ABS_1 = F_1'$                                               |
| 232   | 2 "       | $F_1' < F_2'$                                                              | $F_1' < F_2'$                                                |
| 235   | 1 "       | $N_1 S B$                                                                  | $N_1 S_0 B$                                                  |
| 236   | 4 зверху  | $S$                                                                        | $S_0$                                                        |
| 236   | 12 знізу  | $LBSUT$                                                                    | $LBS_0 UT$                                                   |
| 236   | 10 "      | $BSUT$                                                                     | $BS_0 UT$                                                    |
| 240   | 5 "       | $E = \gamma \cdot \text{пл. } \triangle KSO$                               | $E = \gamma \cdot \text{пл. } \triangle KCO$                 |
| 243   | 8 "       | з пункта $H$                                                               | з пункта $H_1$                                               |
| 243   | 7 "       | $H'S = HT$                                                                 | $H_1 S = H_1 T$                                              |
| 253   | 7 "       | $SKO$                                                                      | $CKO$                                                        |
| 253   | 6 "       | $SL$                                                                       | $CL$                                                         |
| 255   | 10 "      | $e = \frac{1}{6}, b = 6,25 \text{ см.}$                                    | $e = \frac{1}{6}, b_1 = 6,25 \text{ см.}$                    |
| 255   | 4 "       | $3,1 \text{ кг/см}^2$                                                      | $3,31 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$                         |
| 258   | 5 зверху  | $AF$                                                                       | $AT$                                                         |
| 267   | 12 "      | $M_0 =$<br>Апрача таго на апошняй старонцы вокладкі:<br>Статика построений | $M_E =$<br>Статика сооружений                                |

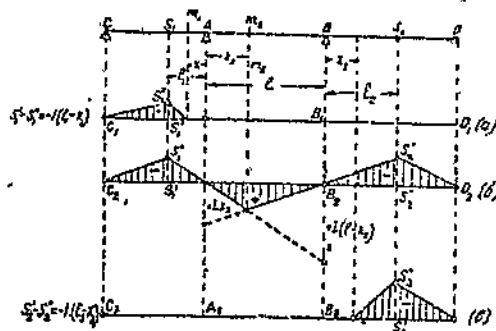
Пералік выпраўленых чарцяжоў, якія ў тэксце надрукаваны з памылкамі



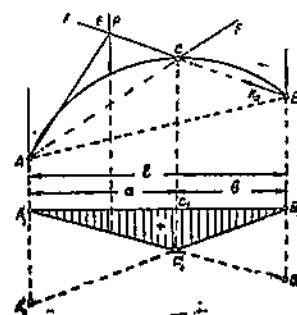
Чарц. 48.



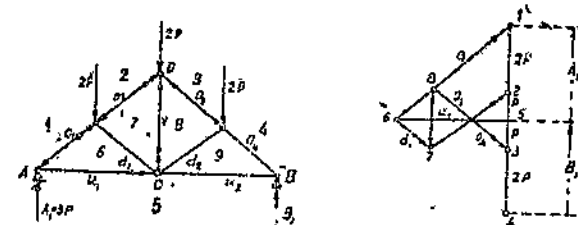
Чарц. 69.



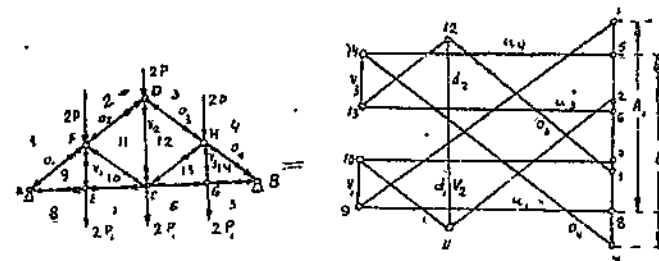
Чарц. 140.



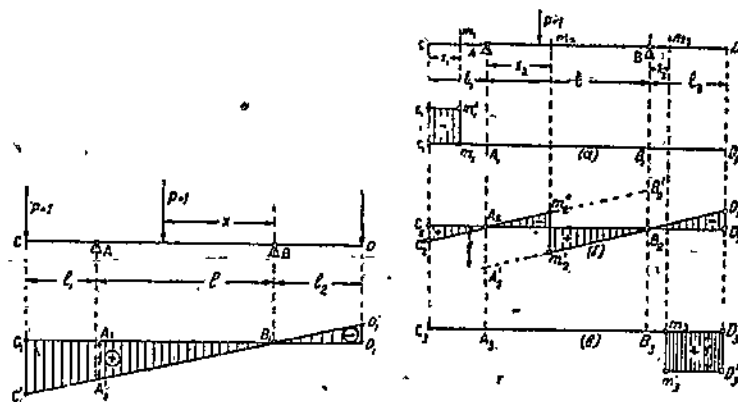
Чарц. 152.



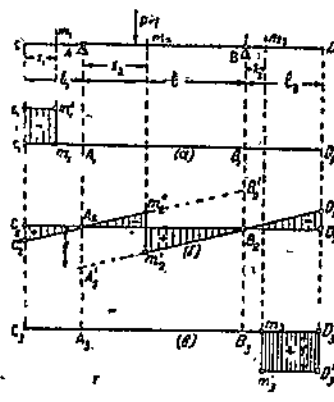
Чарц. 178.



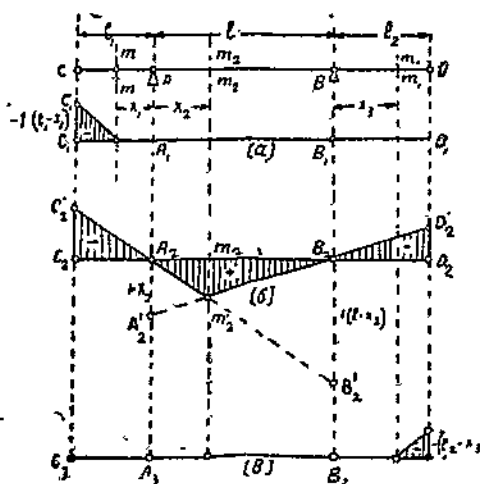
Чарц. 179.



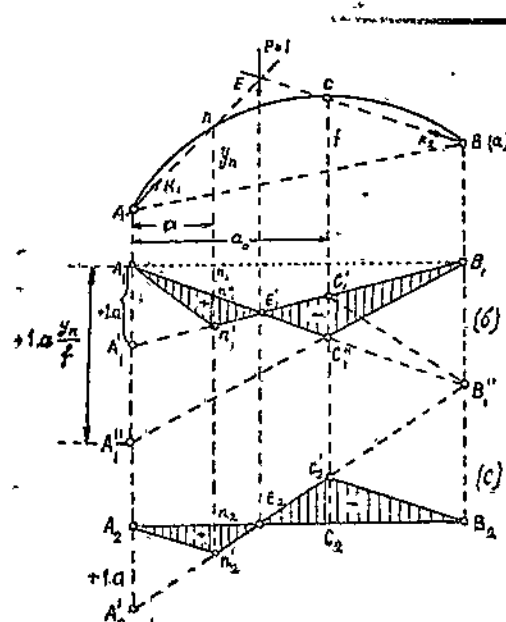
Чарц. 122.



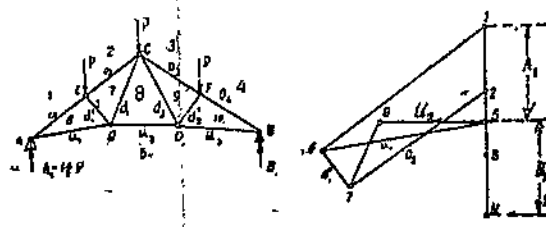
Чарц. 123.



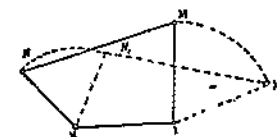
Чарц. 124.



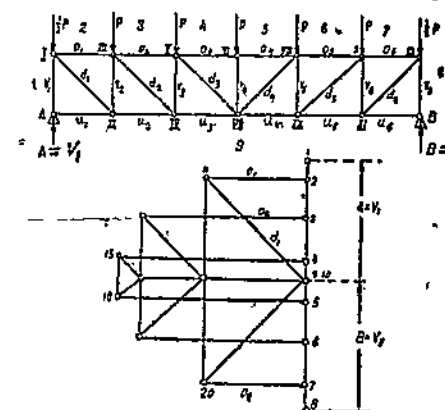
Чарц. 154.



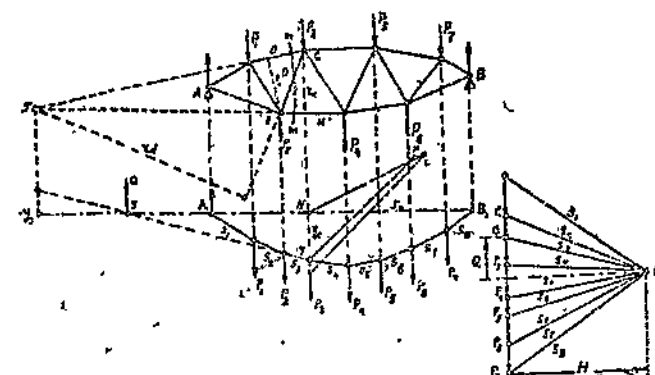
Чарц. 190.



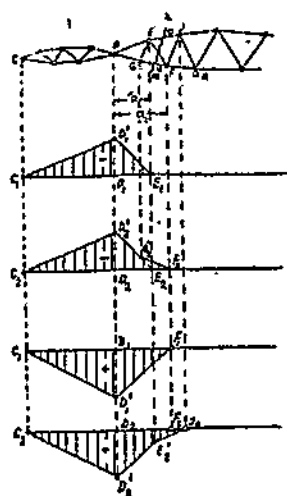
Чарц. 165.



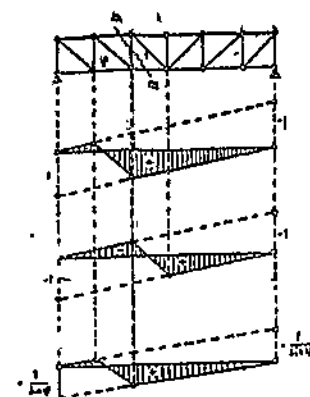
Чарц. 204.



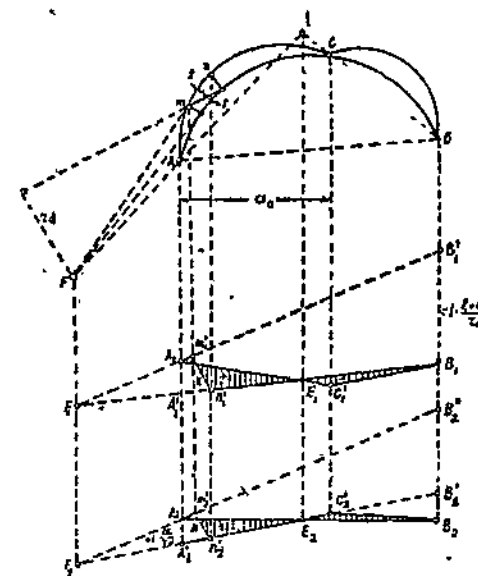
Чарц. 220.



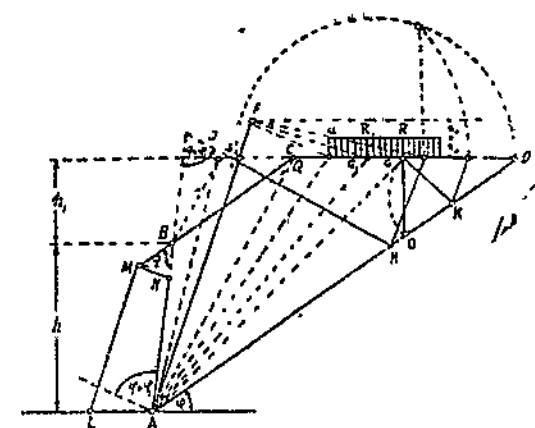
Чарц. 226.



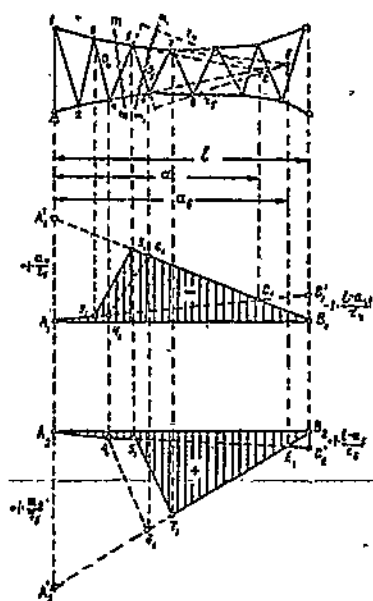
Чарц. 241—242.



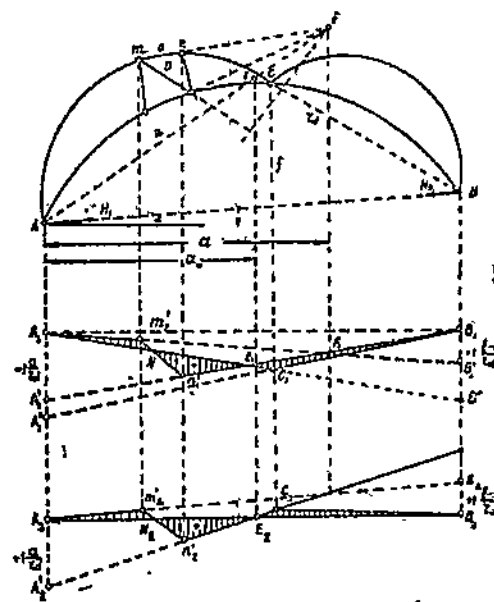
Чарц. 254.



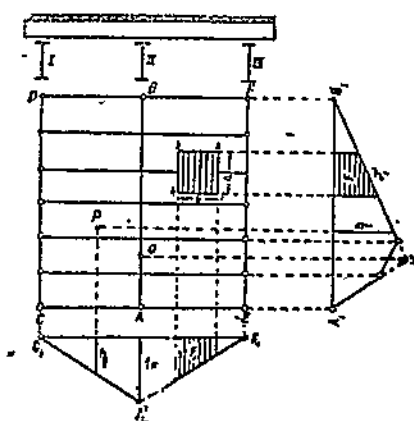
Чарц. 332.



Чарц. 231.

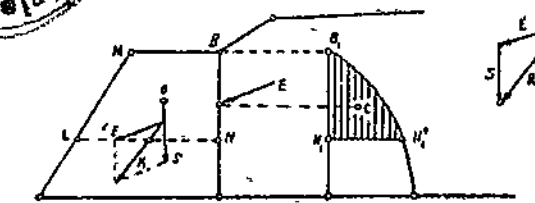


Чарц. 252.

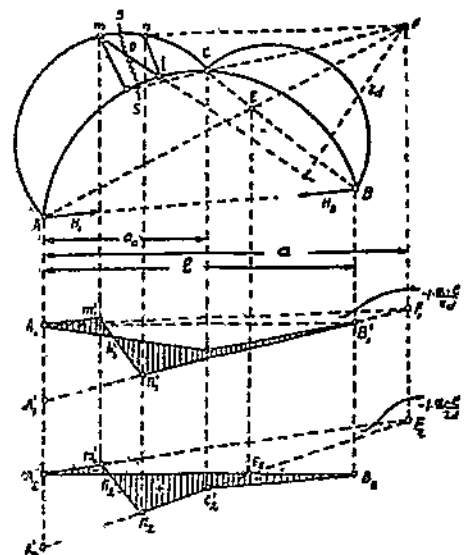


Чарц. 292.

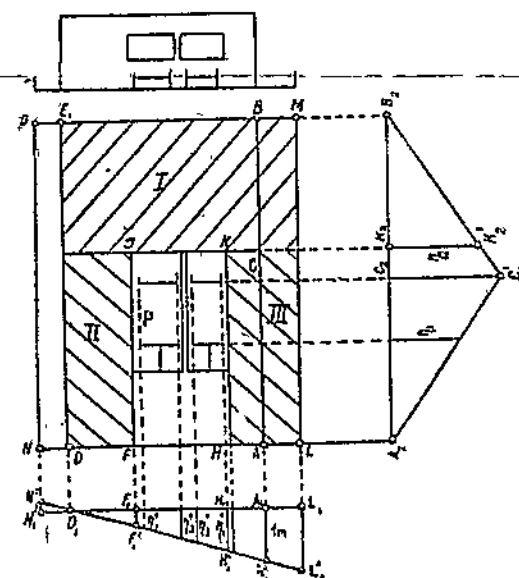
Перевірено 1948 р.



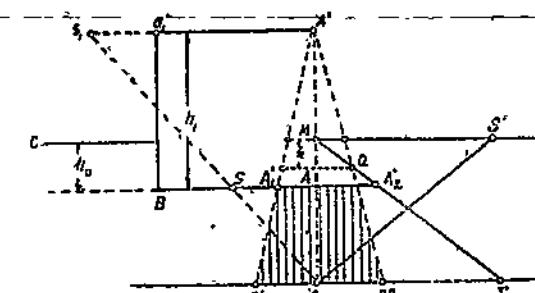
Чарц. 342.



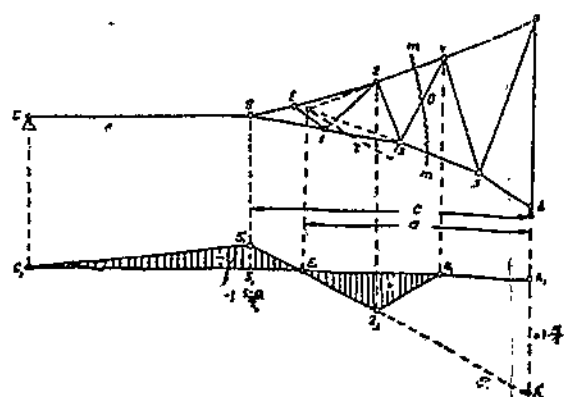
Чарц. 253.



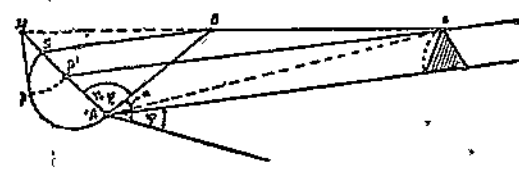
Чарц. 293.



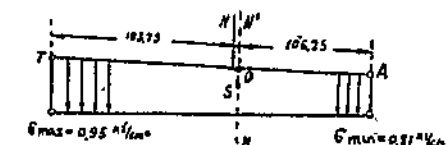
Чарц. 351.



Чарц. 222



Чарц. 322.



Чарц. 358.