

681.2

Н 78

С. А. НОЗДРОВСКИЙ

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА
РАСЧЕТА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ
ПРИБОРОВ**

ОБОРОНГИЗ
1939



681.2
Н48

С. А. НОЗДРОВСКИЙ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

52514
Цена 8 руб. 50 коп. в переплете

шр 84 96,08
РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

8

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБОРОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

МОСКВА

1939

ЛЕНИНГРАД

Книга состоит из трех частей.

В первой части содержатся основные сведения из метрологии и исследование принципиальных уравнений и методических погрешностей приборов; далее рассматриваются основные элементы приборов и классификация их, приводятся краткие сведения из общей теории погрешностей и, наконец, подробно рассматриваются инструментальные погрешности при статических измерениях. Выводы иллюстрируются конкретными примерами из различных отраслей приборостроения (электротехнические и авиационные приборы).

Во второй части рассматривается теория колебаний и исследуются инерционные погрешности при замерах количественных факторов, как кратковременно протекающих непериодических явлений, так и периодических.

В третьей части приводится методика расчета измерительных приборов на нескольких примерах.

Приложения к книге содержат выводы принципиальных уравнений рассматриваемых приборов.

Книга предназначена для студентов приборостроительных вузов, инженеров приборной промышленности, а также для инженерного и научно-исследовательского персонала, работающего в области измерений.

Основательная предварительная разработка теории и расчета прибора с избытком экономит время при его осуществлении.

ПРЕДИСЛОВИЕ

К познанию любого предмета можно идти двумя путями: изучая частное, знакомиться с элементами общего, или, наоборот, от изучения общего переходить к изучению частного.

До настоящего времени в области подготовки специалистов по приборостроению идут первым путем. При изучении группы приборов той или иной специальности (электрических, авиационных и т. п.) учащихся знакомят с погрешностями этих приборов, с влиянием различных факторов на качество именно данной группы приборов и т. д. Казалось бы, этот путь не наилучший: во-первых, он не обеспечивает перспективы на все приборостроение в целом и не дает никаких обобщений; во-вторых, при таком методе изучения целый ряд элементов общей теории может быть упущен, поскольку для данной группы приборов они могут оказаться несущественными.

В данной работе сделана первая попытка создания общей теории измерительных приборов, т. е. обобщения основных факторов, влияющих на качество прибора, независимо от того, к какой группе относится прибор. В связи с этим все выводы продемонстрированы на нескольких примерах, относящихся к двум отличным областям — на приборах, использующих электрические принципы, и на приборах, использующих обыкновенные механические принципы.

Настоящий труд не претендует на исчерпывающую полноту охвата темы, однако необходимо указать, что ряд вопросов, как например некоторые специфические погрешности, опущен сознательно, так как они не дают никаких обобщений.

В заключение выражаю признательность Герою Советского Союза проф. И. Т. Спирину, проф. Н. Г. Бруевичу и Л. В. Залуцкому, доценту С. С. Тихменеву, инж. Л. Н. Михайлову и Н. И. Тюрину, взявшим на себя труд просмотреть настоящую работу и давшим ряд ценных замечаний.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

1. УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИЗМЕРИТЕЛЬНОМ ПРИБОРЕ

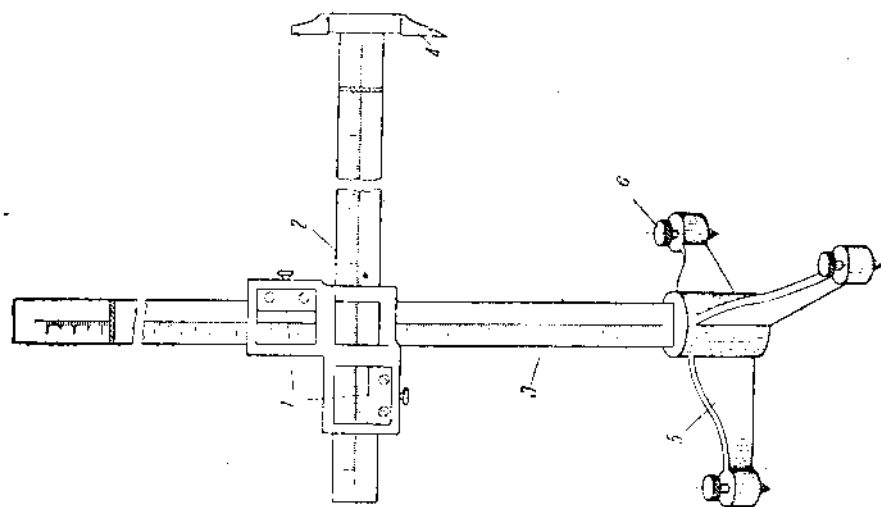
Прежде чем перейти к изложению некоторых основных положений общей теории измерительных приборов, необходимо уточнить, что именно нужно подразумевать под наименованием «измерительный прибор» или просто «прибор».

Не всегда наличие шкалы и стрелки указывает на измерительный прибор, — эти детали могут быть установочными. В качестве примера можно указать на супорт токарного станка, имеющий шкалу и стрелку: в данном случае указанные элементы служат не для измерения, а для установок. Соответственно и механизмы, связанные с такими шкалами, имеют назначение перемещать не стрелку, а установленный на станке предмет в заданное положение и удерживать его в этом положении. В этом заключается глубокая принципиальная разница.

Установочные механизмы в связи с тем, что они должны выдерживать определенные и иногда очень большие нагрузки, с точки зрения выполнения и с точки зрения конструкции всегда бывают значительно более громоздкими и грубыми.

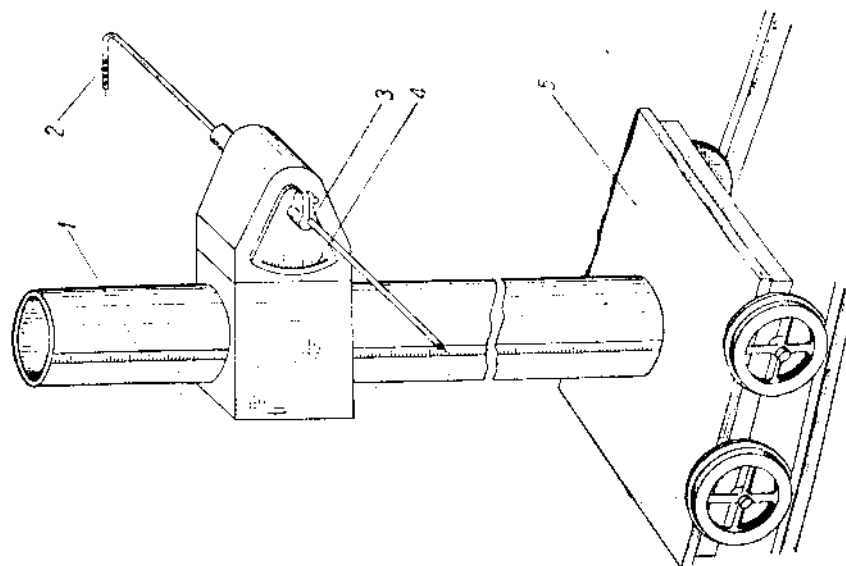
В качестве примера можно еще указать координатник, применяющийся при работе в аэродинамических трубах. Координатники бывают двух видов: измерительный, применяемый в препараторской и служащий специально для промеров, и установочный, применяемый в самих трубах и служащий для установки и удержания насадка в различных точках поля аэродинамической трубы во время работы.

Конструкция этих двух механизмов различна: первый (фиг. 1) представляет собой по существу два спаренных под углом 90° штангенциркуля, в то время как второй представляет (фиг. 2) солидное сооружение (похожее на кран) с солидной колонной около 180—250 мм диаметром, перемещаемой на специальной каретке по рельсам. Кроме того, измерительный координатник снабжен на конце горизонтальной линейки неподвижной циркульной ножкой, которая по аналогии с другими измерительными приборами несет некоторые функции чувствительного элемента (как далее будет указано, чувствительным называется такой элемент измерительного прибора, который воспринимает измеряемое явление); у установочного координатника такого элемента нет, — на его месте находится насадок.



Фиг. 1. Измерительный координатник.

1—носок, 2—горизонтальная плита, 3—вертикальная шкала, 4—неподвижная циркулярная головка, 5—штатив, 6—установочный винт.



Фиг. 2. Установочный координатник.

1—шкала для вертикального перемещения, 2—насадка с зажимом для горизонтального перемещения, 3—штука для углового перемещения, 4—телешка, 5—телешка.

Таким образом мы условимся в дальнейшем называть измерительными приборами или просто приборами те механизмы, которые предназначены специально для измерения; механизмы, которые имеют шкалы и стрелки, но другого назначения, к измерительным приборам относить не будем.

В лабораторных условиях встречаются еще устройства, называемые установками. В аэродинамической лаборатории мы имеем дело с трубой, в авиаприборных лабораториях встречаются вибрационные установки, барокамеры, термобарокамеры и ряд других. Эти устройства имеют специальное назначение воспроизводить в лаборатории условия, близкие к эксплуатационным, в которых работает исследуемый предмет, но отнюдь не измерять какую-либо из величин этих условий. Нередко в практике пытаются и эти установки подводить под рубрику измерительных приборов и даже называть их приборами. Их можно называть только измерительными установками, а отнюдь не приборами и тем более измерительными, так как их назначение — не производить измерение, а только создавать надлежащие условия для измерения.

Есть случаи, когда измерительный прибор и установка так тесно сближаются, что их разграничить нельзя, например рычажная разрывная машина Амслера. На этой машине, нагружая исследуемый материал, т. е. создавая в нем напряжение, одновременно тем же элементом производят замер создаваемого напряжения, и обратно. Но в гидравлической разрывной машине разграничение между установкой и измерительным прибором достаточно резкое. Установкой в данном случае можно назвать все сооружение, которое создает напряжение в материале, измерительным же прибором — манометр, с помощью которого измеряется действующее напряжение замером гидравлического давления.

В заключение необходимо еще остановиться на подразделении всей измерительной аппаратуры на две существенно отличающиеся друг от друга группы — на измерительные приборы и меры. Существенная разница между этими двумя группами заключается в том, что измерительный прибор всегда служит для сравнения измеряемой величины с единицей измерения (см. ОСТ/ВКС 7636), в то время как мера является вещественным воспроизведением единицы измерения или ее кратного или дробного значения (см. тот же ОСТ/ВКС 7636). Примером последнего могут служить гиря, штриховая мера длины, плитка, колба, камертон, катушка сопротивления, нормальный элемент, конденсатор постоянной емкости и пр.

2. ЗНАЧЕНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ В НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ

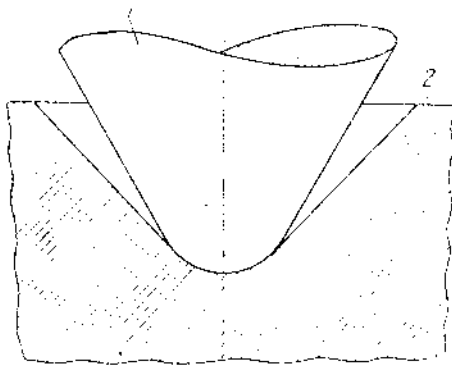
Всем известно значение измерительных приборов в народном хозяйстве, но тот факт, что в жизни народного хозяйства наступает такой момент, когда оно не может развиваться дальше без развития измерительной техники, пожалуй, воспринимается достаточно ясно не всеми.

В народном хозяйстве на настоящей его ступени развития наступил такой момент, когда оно не может развиваться дальше, если не будут достаточно экономично расходоваться его ресурсы.

Возьмем такой важный вопрос, как топливный. Нельзя достаточно экономно расходовать топливо без применения, например, газоанализатора, который позволяет судить о том, насколько полно и хорошо происходит сгорание.

Народное хозяйство не может развиваться, если известные технические возможности не будут использованы полностью, т. е. если не будет достигнуто наивысшее возможное в данных условиях качество.

При данном уровне развития народного хозяйства технология материала приобретает исключительное значение. Например проводить термическую обработку по старинке, на-глаз, когда специалист на основе личного большого опыта определял температурный режим, сейчас нельзя. Здесь приходится также пользоваться соответствующей измерительной аппаратурой.



Фиг. 3. Опора на шпильях (керпах).

1—керн, 2—полушка.

В некоторых случаях приходится допускать в материалах весьма высокие напряжения для получения наивысшего качества. Например в призмах весовых приборов напряжение в ноже призмы доходит до 400 кг/мм^2 . В данном случае ребро призмы, служащее ножом, делается не острым, а закругленным, причем радиус закругления часто бывает в 0,1 мм или даже в несколько сотых миллиметра. Если будет отсутствовать возможность измерения радиуса, полученного при выполнении ножа, то мы рискуем получить прибор, который или скоро выйдет из строя, потому что нож затупится (при радиусе меньше заданного), или окажется нечувствительным, если радиус будет больше заданного.

В электроизмерительных приборах имеется опора на шпильях (шаровая вершина конуса) (фиг. 3). В этих случаях опять-таки, несмотря на то, что вес подвижной системы электроизмерительного прибора не превосходит нескольких граммов, допускаемое напряжение в керне все-таки достигает $150\text{--}200 \text{ кг/мм}^2$. Здесь приходится брать от техники все возможное с точки зрения получения наименьших моментов трения.

В электроизмерительных приборах мы имеем дело с весьма малыми восстанавливающими моментами. В самом лучшем случае величина удельного момента (т. е. момента, отнесенного к одному радиану) достигает $1\text{--}1\frac{1}{2} \text{ гсм}$. В большинстве же случаев соответствующие моменты не превосходят 500 мгсм , а иногда и 100 и даже 50 мгсм.

Ясно, что при таких моментах вес подвижной системы в 1—2 г или даже меньше приобретает достаточно серьезное значение.

Здесь приходится делать все, чтобы момент трения подвижной системы свести до минимума. Поэтому радиус закругления керна приходится делать порядка десятых и сотых долей миллиметра. Ясно, что обеспечение технически грамотного выполнения этих деталей возможно только при наличии достаточно хорошей измерительной аппаратуры.

Эти примеры говорят достаточно убедительно о том, какое значение имеет измерительный прибор для качества.

Народное хозяйство не может двигаться вперед без развития научной мысли. Как говорит Хвольсон, научная работа заключается в том, чтобы открыть явление, изучить и объяснить его. Изучение явления состоит из теоретического и экспериментального его исследования.

Если при теоретическом исследовании орудием, которым мы пользуемся, является математика, то при экспериментальном исследовании основным орудием является прибор. Очевидно, если не будет достаточно развитого приборного хозяйства, то и здесь двигаться вперед мы не сможем. Чтобы народное хозяйство развивалось нормально, оно должно быть в полной безопасности. В этом отношении приборное дело играет исключительно важную роль. В тактике и стратегии место и время имеют самое основное значение. Если самый лучший самолет не будет иметь возможности в любой момент определить свое местоположение и к нужному сроку прийти в назначенное место, то боевые его качества будут сведены до минимума. Определение местоположения и обеспечение прихода в назначенное место к назначенному сроку связано с использованием штурманских методов самолетовождения, что полностью основано опять-таки на измерительных приборах.

3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕТРОЛОГИИ

Установление единиц измерения

Прежде чем перейти к изложению общей теории измерительных приборов, необходимо хотя бы весьма элементарно познакомиться с некоторыми основными положениями метрологии. Как уже указывалось выше, измерительным прибором мы называем механизм, с помощью которого осуществляется сравнение измеряемой величины с соответствующей единицей измерения.

Естественно должен возникнуть вопрос, что же представляет собой единица измерений, как она устанавливается и как хранится.

Вообще говоря, установление единиц измерения является делом совершенно произвольным. Мы не имеем в природе никаких факторов, которые могли бы чем-либо с физической точки зрения обусловить выбор именно этой величины в качестве единицы, а не другой. Единственный фактор, который мы можем назвать метрологическим, повлиявший на выбор величин единиц метрической системы (которой как международной системы единиц мы только и будем касаться), заключается в необходимости иметь возможность при любых обстоятельствах проверить и в случае необходимости восстановить однажды выбранную и установленную единицу измерений с помощью такого

явления в природе, которое зависело бы только от основных свойств материи.

Под влиянием этого фактора были установлены единицы метрической системы. В 1798—1799 гг. за единицу длины было предложено принять длину, равную 1 : 10 000 000 четверти меридиана, названную метром, и за единицу массы — массу 1 дм^3 воды при температуре ее наибольшей плотности, названную килограммом. Для хранения этих единиц были изготовлены архивные эталон метра и эталон килограмма.

Однако последующие исследования показали¹, что архивный эталон метра не представляет собой одной десятиллионной части четверти меридиана. Отклонения получились как вследствие погрешностей, допущенных французскими геодезистами и астрономами и обнаруженных впоследствии Бесселем, так и вследствие недостаточной точности измерений, выполненных Деламбра и Мешена.

Точно так же не вполне точным оказался эталон и второй единицы — килограмма, установленной на основании экспериментов Лефевра-Жино.

Эти обстоятельства вызвали серьезную критику метрической системы и в конце концов привели к образованию в 1867 г. специального Комитета мер и весов, в который вошли ученые различных стран. В 1872 г. французским правительством была создана специальная Международная метрическая комиссия, в которую вошли представители 30 государств Европы и Америки. Комиссия постановила изготовить для всех стран, которые пожелают ввести у себя метрическую систему, совершенно одинаковые эталоны длины и массы, причем один из изготовленных метров и один из изготовленных килограммов по выбору решено было оставить в качестве международных прототипов.

Эталоны должны были быть изготовлены из платины с 10% иридия (с допуском $\pm 2\%$).

Новый международный метр подлежал изготовлению по архивному метру в его тогдашнем состоянии, но в виде штриховой, а не концевой меры.

Новый международный килограмм комиссия также постановила изготовить по архивному килограмму в его тогдашнем состоянии, хотя он и давал отклонения, как мы увидим ниже, порядка 28 мг от массы 1 дм^3 воды при температуре ее наибольшей плотности. Такое постановление комиссии было вызвано слишком большими трудностями, связанными с изменением метрической единицы массы. Одновременно комиссия постановила организовать новые измерения массы 1 дм^3 воды².

В 1889 г. состоялось распределение по жребии между различными государствами изготовленных для них эталонов метра и килограмма, причем один из изготовленных эталонов метра и один из изготовлен-

¹ В данном случае автором использована статья проф. Залуцкого «Введение метрической системы в СССР» (Бюллетень Главного управления мер и весов НКВД СССР—Метрология и поверочное дело, № 3, июль 1938 г., стр. 2).

² Здесь не приведено полное постановление комиссии. Желающие могут его найти в уже указанной статье проф. Залуцкого.

ных эталонов килограмма были оставлены в качестве прототипов этих единиц в Международном бюро мер и весов в Севре во Франции. Все остальные эталоны были сравнены с этими прототипами. Россия получила эталоны метра № 28 и 11 и эталоны килограмма № 12 и 26. Уравнения этих эталонов следующие ¹:

эталон № 28 = $1 \text{ м} + 0,5 \text{ м} + 8,650 T_{\text{м}} + 0,00100 T_{\text{м}}^2 \pm 0,2 \text{ м}$,

эталон № 11 = $1 \text{ м} - 0,5 \text{ м} + 8,650 T_{\text{м}} + 0,00100 T_{\text{м}}^2 \pm 0,2 \text{ м}$,

эталон № 12 = $1 \text{ кг} + 0,068 \text{ мг} \pm 0,002 \text{ мг}$,

эталон № 26 = $1 \text{ кг} - 0,032 \text{ мг} \pm 0,002 \text{ мг}$.

При таких обстоятельствах были установлены международные единицы длины и массы. Таким образом за основную единицу длины, с которой производятся сличения всех остальных эталонов длины, принят международный прототип метра, помеченный буквой М и хранящийся в Международном бюро мер и весов в Севре (Франция). Для СССР за прототип метра принята копия международного метра, носящая знак № 28 и хранящаяся во Всесоюзном институте метрологии в Ленинграде.

За основную единицу массы принят международный прототип килограмма, имеющий обозначение М и хранящийся также в Международном бюро мер и весов в Севре. Для СССР за прототип килограмма принята копия международного килограмма, носящая знак № 12 и хранящаяся во Всесоюзном институте метрологии в Ленинграде (см. ОСТ/ВКС 5859).

Системы единиц

Кроме единиц метрической системы во всех странах имеется еще достаточное количество других различных единиц для измерений величин одного и того же рода. На них мы останавливаться не будем, укажем только, что преимущества метрической системы заставили почти все страны (кроме США и Англии) ввести ее у себя в качестве обязательной. В России вопрос о введении был поднят в 1870 г., но лишь советская власть декретом от 14 сентября 1918 г. разрешила этот важный для метрологического хозяйства страны вопрос.

Параллельно с вопросом установления международных единиц измерения разрешался еще и второй вопрос исключительной важности. Не так давно было время, когда единицы измерений различных физических величин не имели между собой никакой объединяющей связи. При таких условиях глубокое изучение физических явлений, приводящее к общей стройной теории и к обобщенному пониманию физических явлений в различных областях физики, невозможно или, во всяком случае, очень затруднено. Все это привело к тому, что еще в прошлом столетии для большинства единиц ² физических величин была установлена связь с единицами трех независимых друг от друга физических величин — единицами длины, массы и времени.

¹ В приведенных уравнениях эталонов $\pm 2 \text{ м}$ и $\pm 0,002 \text{ мг}$ означают точность определения.

² В настоящее время за исключением только единиц температуры.

За единицу длины был принят сантиметр (одна сотая метра), за единицу массы — грамм (одна тысячная килограмма) и за единицу времени — секунда (одна восемьдесят шесть тысяч четырехсотая средних солнечных суток). На основании связи с этими тремя единицами, названными основными, для всех остальных единиц, названных производными, была установлена особая система единиц, получившая название абсолютной системы единиц или системы CGS. Связь производных единиц с основными определяется физическими зависимостями, и большинство производных единиц можно определить с помощью трех либо двух основных единиц. Отсюда следует, что независимое определение единиц, подобно единице длины (метру) и единице массы (килограмму), достаточно сделать еще только для одной¹ единицы — времени.

Установленные единицы времени также необходимо было связать с каким-либо явлением в природе. Это явление должно было иметь периодический характер с безусловно постоянным периодом. Кроме того, оно должно было быть легко наблюдаемым. Вращение земли вокруг ее оси, равномерность которого была проверена с помощью качания маятника, как раз представляет собой такое явление. Исследованием видимого движения светил было установлено равенство периода кажущегося движения небесной сферы и продолжительности одного обращения земли вокруг своей оси. Поэтому время, соответствующее одному полному обращению земли вокруг ее оси, и было принято за единицу времени, названную звездными сутками. Проверка звездных суток может быть очень легко выполнена путем измерения промежутка времени между двумя последовательными верхними кульминациями (прохождениями через плоскость меридиана наблюдателя) какой-либо звезды или точки небесной сферы.

Исследования последнего времени, выполненные с весьма большой точностью, показали не полную безупречность и этой единицы, что потребовало некоторого уточнения ее. В настоящее время за единицу времени принята секунда, равная 1/86400 промежутка времени между двумя последовательными верхними кульминациями точки небесной сферы, прямое восхождение которой, отнесенное к средней точке весеннего равноденствия,

$$\alpha_m = 18^h 38^m 45^s,836 + 8640184^s,542 K + 0^s,0929 K^2,$$

где K — частное от деления на 36525 числа средних солнечных суток, истекших с гриничского среднего полудня 31 декабря 1899 г. (см. ОСТ/ВКС 7132).

Однако независимое определение существует и еще для некоторых единиц, в частности для электрических, что привело к образованию

¹ Для определения некоторых производных единиц, например световых, некоторых тепловых и электрических единиц, требуются дополнительные основные независимо определяемые единицы. Некоторые тепловые единицы имеют четвертую размерность температуры θ , в определение световых единиц входит в качестве четвертой размерности коэффициент видности V , наконец в настоящее время в Международном бюро мер и весов стоит вопрос об установлении ома или ампера в качестве четвертой основной единицы для определения электрических единиц.

самостоятельной системы международных электрических единиц параллельно с абсолютными электромагнитной и электростатической системами единиц (CGS).

В качестве основных единиц в системе международных электрических единиц приняты международный ом и международный ампер, установленные конгрессом электриков в Чикаго в 1893 г. и окончательно утвержденные Лондонской международной конференцией в 1908 г.¹

Согласно достигнутому на конгрессе и конференции соглашению международный ом и международный ампер определяются независимо от абсолютных единиц следующим образом:

1) международный ом есть сопротивление при неизменном электрическом токе и при температуре тающего льда ртутного столба длиной в 106,300 см, имеющего одинаковое сечение по всей длине и массу 14,4521 г;

2) международный ампер есть сила неизменяющегося электрического тока, который отлагает 0,00111800 г серебра в секунду, проходя через водный раствор азотнокислого серебра (см. ОСТ 515)².

Появление системы международных электрических единиц объясняется главным образом невозможностью достаточно простого и точного воспроизведения абсолютных единиц, которые, однако, были приняты за основу для определения норм на изготовление легко выполнимых эталонов ома и ампера. Было установлено, что ом равен 10^9 см/сек, или 10^9 абсолютных электромагнитных единиц сопротивления, и ампер равен 10^{-1} см ^{$\frac{1}{2}$} г ^{$\frac{1}{2}$} сек⁻¹, или 10^{-1} абсолютных электромагнитных единиц силы тока.

Кинетическая теория электрических явлений, созданная Максвеллом, весьма приблизила понимание этих явлений к механическим. Однако полностью сводить электрические явления к механическим нельзя. Об этом достаточно ясно говорит сам Максвелл. Мы приведем здесь несколько фраз из второго тома гл. IV § 569 его «Трактата об электричестве и магнетизме» в переводе на русский язык, взятых нами из книги акад. Миткевича³: «То, что вызывает электрические токи, называется электродвижущей силой: это название уже с давних пор было с успехом употребляемо и никогда не приносило в научный язык никаких противоречий. Электродвижущую силу нужно всегда понимать как нечто, действующее только на электричество, но не на несущие его тела. Никогда не следует смешивать ее с механической силой, действующей только на тела, но не на электричество. Если мы когда-нибудь узнаем формальное соотношение, которое существует между электричеством и обыкновенной материей,

¹ М а л и к о в М. Ф., Современное положение вопроса об электрических единицах и эталонах, ВИМС, Ленинград 1933.

² Все ОСТ, на которые имеются ссылки в тексте, см. Л е с о х и н, Единицы измерений, научно-технические термины и обозначения, Стандартгиз, Москва—Ленинград 1936.

³ М и т к е в и ч, Физические основы электротехники, Кубуч, 1933.

то, вероятно, мы узнаем и соотношение между силой электродвижущей и обычной (механической) силой».

Природа электрических явлений и в настоящее время еще недостаточно изучена. Однако, приняв, например, одну из электромагнитных величин, в частности коэффициент μ , характеризующий среду и носящий название «магнитной проницаемости среды», за отвлеченную величину¹, равную в пустоте единице, можно все остальные величины выразить как функции длины, массы и времени, пользуясь формулой Кулона:

$$f = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f — механическая сила, с которой магнитные массы m_1 и m_2 , расположенные на расстоянии r одна относительно другой, воздействуют друг на друга.

Таким образом была создана электромагнитная система единиц CGS_μ, которая, как уже было указано, легла в основу международных электрических единиц.

Мы не ставим себе задачей дать полные сведения о том, каким образом были установлены все единицы измерений (эти сведения можно почерпнуть из имеющейся литературы по метрологии, а также по отдельным отраслям приборостроения), а потому ограничимся уже сказанным.

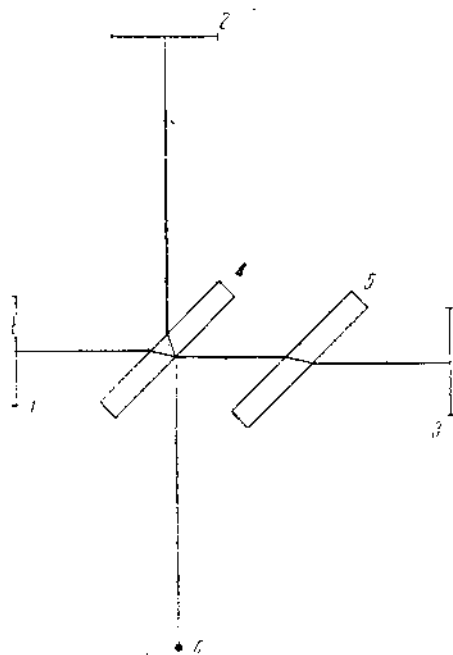
Хранение единиц измерений и передача установленных законных единиц от эталонов к рабочим мерам и рабочим измерительным приборам

Вопрос о хранении установленных единиц измерений представляет интерес с двух точек зрения: 1) с точки зрения неизменности принятых международных единиц со временем и 2) с точки зрения одинаковости этих единиц во всех странах. Исключительное значение этих двух факторов, пожалуй, не нуждается в особом пояснении. В конечном итоге физические законы выводятся на основании количественной сходимости результатов исследований различных явлений, и можно указать ряд случаев, когда исследователи были введены в заблуждение вследствие недостаточной точности измерений. Очевидно, изменение единиц измерений со временем могло бы поставить под сомнение результаты целого ряда исследований. Известно также, какое громадное значение для движения науки вперед имеет возможность сравнения между собой результатов исследований, проводимых в различных странах, т. е. вопрос одинаковости единиц измерения (или во всяком случае наличия точных данных об их соотношениях).

Вопрос о сравнимости количественных результатов исследований различных стран имеет исключительно важное значение. Неудивительно поэтому, что все культурные страны мира тратят громадные средства на свои метрологические хозяйства, а также уделяют громадное внимание работам Международного бюро мер и весов.

¹ См. сноску 1 на стр. 11.

Одна из основных задач Международного бюро мер и весов заключается в хранении и изучении основных эталонов единиц—международных прототипов метра и килограмма. Однако наличие международных прототипов метра и килограмма еще не обеспечивает абсолютной надежности сохранности этих основных единиц. Во-первых, несмотря на исключительно высокое качество изготовления этих прототипов и совершенно особые условия их хранения, все же нельзя быть



Фиг. 4. Схема интерферометра.

1—экран, 2—первое зеркало, 3—второе зеркало, 4—первая плоско-параллельная пластинка, 5—вторая плоско-параллельная пластинка, 6—источник света.

уверенным, что они со временем не будут претерпевать каких-либо, хотя бы и весьма ничтожных, изменений (что, между прочим, и было обнаружено); во-вторых, нет гарантии в том, что какое-либо стихийное бедствие не уничтожит их. В связи с этим наличие какого-либо явления в природе, которое зависело бы исключительно от свойств материи и которое могло бы воспроизвести утерянную единицу, играет исключительно важную роль.

При определении норм для изготовления эталонов целого ряда независимо определяемых единиц используются кроме некоторых соответствующих основных свойств материи еще и основные единицы системы CGS — длина, масса и время. Например, в определении норм на изготовление эталона ома входят длина и масса, и эталона ампера — масса и время. В

свою очередь единица массы может быть восстановлена по единице длины, так как масса 1 дм^3 воды при температуре ее наибольшей плотности равна $0,999972 \text{ кг}$. Хранение единицы времени базируется на достаточно устойчивом явлении в природе — вращении земли вокруг ее оси. Следовательно, вопрос о возможности соответствующего восстановления единиц с помощью явлений, зависящих только от основных свойств материи, главным образом относится к единице длины — прототипу метра.

Американский ученый Майкельсон предложил в качестве такого явления для эталона длины принять длину световой волны красной линии спектра паров кадмия при температуре сухого наружного воздуха 15° по водородной шкале, при нормальном давлении и нормальном ускорении силы тяжести. Такие измерения производятся с по-

мощью интерферометров, основанных на принципе интерференции световых лучей.

Устанавливаются две совершенно одинаковые плоско-параллельные пластинки и два зеркала, как показано на фиг. 4. Если пропустить через пластинки луч от источника света, то он частично отразится от первой пластинки, преломится через вторую и пойдет ко второму зеркалу, отразится обратно, преломится через обе пластинки и в конце концов упадет на экран. Частично луч света преломится через первую пластинку, пойдет к первому зеркалу, вернется обратно, отразится от внутренней поверхности первой пластинки и упадет на экран. В зависимости от того, какое расстояние пройдут эти оба луча (они могут иметь разницу на четное или нечетное количество полу-волн или на часть полуволны), на экране в поле зрения получаются чередующиеся темные и светлые полосы. Иногда эти полосы могут сомкнуться в кольца, тогда мы будем иметь дело с так называемыми ньютоновыми кольцами. При перемещении одного из зеркал светлые и темные полосы перемещаются в определенном направлении.

Рассматривая эти полосы в микроскоп, можно определить их толщину с точностью до десятых долей ширины этих полос. Перемещая одно из зеркал, по количеству проходящих полос можно сосчитать количество полуволн световых колебаний.

Построенные на этом принципе приборы позволяют измерять длину не свыше 100 мм с точностью до 0,02 μ . В настоящее время существует мнение, что точность абсолютного интерференционного метода не превосходит 0,05 μ (см. статью проф. Залуцкого «К вопросам об определении метра в длинах световых волн», напечатанную в Известиях Академии Наук СССР за 1938 г., из которой взята приведенная ниже таблица определений длины λ_R и некоторые другие изложенные здесь сведения).

Ниже даны результаты семи фундаментальных определений метра в длинах световых волн красной линии λ_R спектра паров кадмия, приведенных к «нормальному воздуху» (абсолютно сухой воздух с содержанием 0,03% углекислоты, упругостью 760 мм Hg при 15°):

1895 г., Майкельсон	0,64384691 μ
1906 г., Бенуа, Фабри и Перо	0,64384687 »
1927 г., Ватанобе и Имайзumi	0,64384682 »
1933 г., Сирс и Барелл	0,64384714 »
1933 г., Кестерс и Лампе	0,64384674 »
1934/35 г., Сирс и Барелл	0,64384708 »
1935 г., Кестерс и Лампе	0,64384682 »

Необходимо отметить, что указанная выше точность абсолютного интерференционного метода 0,02 μ не относится к определениям метра в длинах волн. Поскольку в данном случае мы имеем длину более 100 мм, то приходится проводить сравнение концевых мер со штриховыми на компараторе или на измерительной машине системы СИП, что дает погрешность порядка $\pm 0,3 \mu$ (точность сравнения штриховых мер между собой в настоящее время считается порядка 0,1 μ).

Приведенные здесь слишком краткие сведения могут дать только самое поверхностное понятие о том положении, в котором находится

сейчас вопрос о надежном установлении и хранении единицы длины, и о тех точностях, которые в настоящее время достигнуты в метрологии в отношении измерения длины. Желая ознакомиться с этим вопросом более подробно следует обратиться к специальной литературе. Здесь укажем только несколько величин, относящихся к абсолютному интерференционному методу и узаконенных в настоящее время Международным бюро мер и весов и законодательством нашего Союза. Так, в 1927 г. VII Генеральной конференцией мер и весов на основании имевшихся к тому времени опытов было принято считать длину волны красной линии паров кадмия $\lambda_R = 0,64384696 \mu$ при 15° по водородной шкале в сухом воздухе, при нормальном давлении и нормальном ускорении силы тяжести. Следовательно, метр равен $1553164,13 \lambda_R$.

Поскольку, однако, указанные условия для практических измерений не вполне удобны, то согласно ОСТ/ВКС № 7762 интерференционные измерения у нас надлежит проводить согласно следующему определению: «При всех интерференционных измерениях длин, производимых в СССР, длина волны красной линии паров кадмия принимается с пересчетом на нормальную температуру 20° , на нормальное давление и на влажность воздуха, соответствующую 10 мм упругости водяного пара, равной $0,64385033 \mu^1$ ».

В заключение приведем здесь еще несколько цифр, характеризующих достигнутые точности в определении некоторых других единиц.

Так, при проверке астрономическим методом (с помощью пассажного инструмента) единицы времени момент верхней кульминации светила определяется с точностью до $0,01—0,005$ сек. О точностях, которые в настоящее время достигнуты в определении единицы массы можно судить по приведенным ниже данным, взятым из некролога, написанного проф. Залуцким по поводу смерти одного из наиболее выдающихся метрологов нашего времени — директора Международного бюро мер и весов Шарля Эдуарда Гильома (эта статья напечатана в № 4 Бюллетеня Главного управления мер и весов НКВД):

Гильом	1,000029	дм ³
Шапю	1,0000264	»
Моссе де-Лапине, Бюиссон и Бенуа	1,000027	»
Узаконенное значение	1,000028	»

Эта таблица дает объем воды при температуре ее наибольшей плотности, соответствующий массе прототипа килограмма. Мы видим, что результат, полученный Гильомом, всего на 1 мм^3 отличается от принятого в настоящее время официального значения. Для получения этого результата Гильом затратил 10 лет непрерывной работы.

Таким образом точность определения единицы массы этим методом 10^{-6} . Точность весовых измерений массы достигает 10^{-8} , а в исключительных случаях даже больше. Точность определения международных электрических единиц в настоящее время порядка 10^{-5} . В от-

¹ Л е с о х и л, Единицы измерений, научно-технические термины и обозначения. Стандартгиз, 1936.

ношении повышения точности определения данных единиц наибольшее затруднения встречаются в определении ампера с помощью серебряного вольтметра. Точность воспроизведения международного ампера — порядка $2 \cdot 10^{-5}$ — $3 \cdot 10^{-5}$. Точность воспроизведения международного ома — порядка 10^{-5} . Точность сравнения двух нормальных элементов Вестона — порядка 10^{-6} . Вообще говоря, точность относительных электрических измерений можно считать порядка 10^{-6} .

Точность определения абсолютного ампера (в системе CGS с помощью тангенс-гальванометра) и абсолютного ома с помощью аппарата Лоренца (вращающийся металлический диск в поле катушки, в цепи которой находится источник тока и измеряемое сопротивление) будет порядка 10^{-4} . О соотношениях между международными и абсолютными единицами можно судить по следующей таблице ¹:

Международный ом	=	1,00053	абс. ома
»	ампер	=	0,99991 » ампера
»	вольт	=	1,00044 » вольта
»	ватт	=	1,00035 » ватта

Ограничившись этими данными, остановимся кратко на последнем вопросе из области метрологии — на вопросе о перенесении верных размеров установленных законных единиц измерений от эталонов к рабочим мерам и приборам. Для этого существует целая система образцовых мер и образцовых измерительных приборов, а также определенный установленный порядок работ. Таблица на стр. 18, взятая из ОСТ/ВКС 6101 ², может дать об этом некоторое представление.

Для пояснения этой таблицы дадим следующие формулировки из того же ОСТ:

«Эталонами называются образцовые меры и образцовые измерительные приборы, служащие для целей воспроизведения и хранения единиц с наивысшей достижимой при данном состоянии измерительной техники точностью».

Точность воспроизведения единиц эталонами (т. е. наивысшая точность) называется метрологической точностью.

«Образцовыми мерами и образцовыми измерительными приборами ограниченной точности называются меры и измерительные приборы, имеющие установленную меньшую, чем метрологическая, точность и служащие для практических работ по поверке и градуировке всякого рода мер и измерительных приборов в соответствии с требуемой последними степенью точности».

За остальными положениями желающие могут обратиться к указанным в сноске источникам.

Все остальные меры и приборы, предназначенные для практических целей измерения, называются рабочими мерами и рабочими измерительными приборами.

¹ Маликов М. Ф. Современное положение вопроса об электрических единицах и эталонах, ВИМС, Ленинград, 1933.

² Лесохин, Единицы измерений, научно-технические термины и обозначения, Стандартиз, 1936.

Таким образом перенос верного значения установленной единицы измерения от прототипа или основного эталона к рабочей мере или рабочему прибору происходит через посредство целого ряда промежуточных образцовых мер и образцовых измерительных приборов как метрологической, так и ограниченной точности.

Таблица классификации образцовых мер и образцовых измерительных приборов

Отделы классификации	Разряды	Виды
I. Эталоны	Первичные эталоны	Основные эталоны (в том числе и прототипы) Рабочие эталоны (первоначальные и производные)
	Вторичные эталоны	Копии Свидетели Эталоны сравнения Рабочие эталоны
	Третичные эталоны	Рабочие эталоны
II. Образцовые меры и образцовые измерительные приборы ограниченной точности	Образцовые меры и образцовые измерительные приборы первого разряда	
	Образцовые меры и образцовые измерительные приборы второго разряда	
	Образцовые меры и образцовые измерительные приборы третьего разряда	

Хотя этот фактор в теории погрешностей рабочих измерительных приборов обычно является совершенно несущественным, поскольку требуемая точность от этих приборов в большинстве случаев несоизмеримо мала по сравнению с метрологическими точностями, которыми в настоящее время владеют современные метрологи, однако совершенно обойти его нельзя.

Согласно существующей теории погрешностей случайные погрешности образцовой меры или измерительного прибора, равные одной десятой или даже одной пятой от средней погрешности поверяемого прибора, оказывают достаточно малое влияние на результат поверки, и ими можно пренебречь. Несмотря на накопление погрешностей при переносе единиц измерений от основных эталонов к образцовым мерам и измерительным приборам ограниченной точности (обыкновенно служащим для поверки рабочих мер и рабочих измерительных прибо-

ров), все же в большинстве случаев удовлетворение приведенного выше требования теории погрешностей достигается достаточно легко.

Но не исключены и такие случаи, когда этот фактор (накопления погрешностей) начинает играть достаточно существенную роль. Целый ряд областей современного машиностроения в настоящее время предъявляет такие требования в отношении точности, которые вплотную подходят к метрологическим точностям. Например при изготовлении измерительных плиток классов высшей точности (классы АА и А) для размеров 20—25 мм допуск для класса АА составляет всего $\pm 0,05$ м, а для класса А всего $\pm 0,09$ м. Таким образом мы видим, что в этих случаях легко может оказаться, что метод поверки поглотит весь допуск, не оставляя ничего на неточность изготовления. Очевидно, при таких обстоятельствах приходится пользоваться методами и приборами, обеспечивающими высшие метрологические точности, и в частности при поверке измерительных плиток высших классов применять непосредственно интерференционный метод измерения.

Однако такие случаи, относящиеся непосредственно к области метрологии, поскольку они выдвигают вопрос о новом более точном методе измерения, прямого отношения к поставленной в настоящей работе теме не имеют. В большей своей массе поверка рабочих измерительных приборов может быть вполне обеспечена образцовыми измерительными приборами ограниченной точности, накопленные погрешности которых не превышают значений, удовлетворяющих указанному выше требованию теории погрешностей. Следовательно, этой категорией погрешностей можно пренебречь, предварительно удостоверившись только в том, что случайная погрешность образцового прибора, по которому происходит поверка рабочего прибора, безусловно не превышает одной десятой или, в крайнем случае, одной пятой от допустимой погрешности поверяемого прибора. В более редких случаях, когда это условие не может быть удовлетворено, и случайная погрешность образцового прибора, по которому должна производиться поверка изготавливаемых приборов, несколько более высокого порядка, следует соответственно повысить требования к изготовлению подлежащих поверке приборов, снизив допустимую погрешность на соответствующую величину.

Укажем здесь еще на один фактор, значительно усложняющий перенос установленных единиц измерений от эталонов к рабочим измерительным приборам даже тогда, когда требования точности еще далеки от достигнутых в данной области метрологических точностей. Такие случаи встречаются при необходимости переноса производных единиц к измерительным приборам и в особенности к приборам, работающим на принципе косвенных измерений (указатели скорости, в частности указатели воздушной скорости), т. е. тогда, когда производная единица измерений не может быть изготовлена в виде простой образцовой меры или простого надежно работающего образцового прибора.

Казалось бы, единица скорости может быть достаточно просто проверена с весьма большой точностью по пройденному расстоянию и времени, поскольку эти две величины могут быть измерены с доста-

точно большой точностью. Однако для проверки указателя скорости необходимо создать еще такую установку, которая могла бы с достаточной точностью создавать условия, аналогичные действительным условиям, имеющим место при работе прибора. Так как указатели воздушной скорости обыкновенно работают на принципе замера разности давлений, получаемой в результате скоростного напора, то в данном случае в основном вопрос сводится к созданию образцового приемника, работающего на принципе трубки Пито, а также условий для надежной поверки рабочих приемников по образцовому.

Как известно, до сего времени для этой цели пользовались и пользуются аэродинамической трубой в качестве установки для поверки указанных приемников. С другой стороны, известно, что на разность давлений, создаваемую приемником, влияет не только скорость, но и некоторые свойства потока (турбулентность, равномерность, направление и пр.). Все эти факторы в большой степени снижают точность поверки и тем самым создают весьма большие осложнения в использовании подобного рода установок.

Можно было бы привести и еще ряд подобных примеров. Но все эти вопросы, поскольку они непосредственно являются вопросами переноса единиц измерения от образцовых мер и образцовых измерительных приборов к рабочим мерам и рабочим измерительным приборам, относятся полностью к области метрологии, а потому мы на них более детально останавливаться не будем. Настоящая работа ставит своей задачей освещение вопросов измерительной аппаратуры не метрологического порядка, а конструктивно-производственного.

Очевидно, последние вопросы в первую очередь связаны с погрешностями измерительной аппаратуры, но с погрешностями не метрологического порядка, а конструктивно-производственного, т. е. такими, источником которых является в той или иной мере изготовляемая аппаратура, а не методы поверки этой аппаратуры. Укажем только, что вопросы поверки измерительной аппаратуры являются вопросами первостепенной важности, особенно для всякого рода научно-исследовательских институтов, в некоторых случаях создающими весьма большие затруднения, вопросами, исключительная важность которых во многих случаях недооценивается некоторыми научно-исследовательскими институтами.

МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБОРОВ

Глава I

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

1. ПРЯМЫЕ И КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

В очень немногих случаях можно производить измерения путем непосредственного сравнения интересующей нас величины с единицей этой величины. В тех случаях, когда это можно делать, измерение называется прямым.

Прямое измерение можно делать в тех случаях, когда единицу измерения либо ее кратное или дробное значение можно выполнить в виде меры, т. е. в виде простого предмета, вещественно воспроизводящего данную единицу. В частности длину можно измерить с помощью прямого измерения, потому что масштабная линейка является как раз мерой длины с переменным значением, вещественно воспроизводящей дробные значения единицы длины — метра.

Можно измерить массу тоже прямым измерением, поскольку гиря является мерой массы.

В большинстве же случаев нельзя вещественно воспроизвести единицу измерения. Например нельзя изготовить единицу измерения силы тока в виде простого предмета (меры). В таких случаях приходится искать какой-то другой способ измерения — замерять не самую интересующую нас величину, а величину другого рода, связанную с первой определенной известной зависимостью. В этом случае будет уже не прямое, а косвенное измерение.

Всякое косвенное измерение в конце концов нужно привести к прямому измерению. Дело в том, что прибор производит измерение не самостоятельно, а является только вспомогательным приспособлением для измерительного аппарата, который находится в самом человеке. Развитие органов чувств человека таково, что он в основном может наиболее точно измерять только две величины — длину и время.

Остальные органы чувств не так развиты, чтобы можно было при помощи их производить более точные измерения. Например, определить, во сколько раз один предмет тяжелее или теплее другого, трудно. Если же приходится иметь дело с длиной, то можно на-глаз разбить

длину на 2, на 3 части и т. д. с той или другой степенью точности. Точно так же чувство ритма в музыке и движениях — это свойство человека производить измерение времени.

Тот факт, что человек может наиболее точно производить измерения только длины и времени, конечно, отразился и на всем приборостроении.

Второй фактор, определивший также в большой степени структуру измерительного прибора, заключается в том, что человек может производить (без измерительного прибора) в конечном результате только прямое измерение. Вследствие этого всякое косвенное измерение в конце концов приводится к прямому измерению, в частности к такому, где бы приходилось измерять длину. Вследствие этого всякий измерительный прибор, как правило, снабжен шкалой и стрелкой, т. е. в каждом измерении дело сводится в конечном результате к измерению длины.

Чтобы привести любое измерение к измерению длины, обычно приходится преобразовывать интересующее нас явление в силовое (динамическое), т. е. в какую-то силу, которая могла бы перемещать стрелку по шкале.

Поэтому в большинстве приборов мы имеем три основных элемента, о которых будет говориться дальше: 1) чувствительный элемент, который воспринимает явление и преобразовывает его (почти во всех случаях) в силу или момент, вызывающие в конечном результате некоторое перемещение, 2) передаточный механизм, увеличивающий это перемещение, и 3) шкалу и стрелку.

Таким образом при косвенных измерениях мы фактически измеряем не самую интересующую нас величину, а величину другого рода и в большинстве случаев величину силы или момента, связанных с интересующей нас величиной определенной закономерной зависимостью.

Примерами косвенных измерений могут служить измерения силы электрического тока с помощью амперметров, электрического напряжения с помощью вольтметров, угловой скорости вращения с помощью тахометров, поступательной скорости с помощью указателей скорости и т. д. Во всех этих случаях по шкале прибора непосредственно отсчитывается интересующая нас величина, приборы же принципиально представляют собой пружинные весы, выполненные в той или другой форме, замеряющие в конечном итоге величины другого рода — силу, момент, связанные той или другой закономерной зависимостью с явлениями, которые нас интересуют.

Примером непосредственного косвенного измерения, при котором мы фактически замеряем не величину силы, а количественный фактор другого явления и в частности, например, число колебаний маятника, могут служить часы. Заводная пружина, имеющаяся в часах, играет роль сервомотора и по своему принципиальному назначению не сходна с измерительными пружинами, имеющимися в других приборах, например хотя бы с пружиной в пружинных весах.

Имеется еще один способ определения интересующей нас величины и именно такой, когда значение этой величины получается путем ко-

венных или прямых измерений целого ряда отдельных величин и последующим вычислением. Такие определения интересующих нас величин можно было бы назвать комплексными измерениями.

В качестве примера комплексного измерения можно указать измерение путевой скорости самолета, при котором замеряются время и пройденный путь и по ним определяется путевая скорость.

2. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Очевидно, комплексные измерения значительно менее удобны по сравнению с косвенными, поскольку они связаны с последующими вычислениями. Поэтому важно находить такие методы измерений, которые обеспечивали бы непосредственное считывание со шкалы интересующих нас величин. Для этого приходится подыскивать физические явления, которые давали бы определенную закономерную зависимость между явлением, величину количественного фактора которого нужно измерить, и динамическим явлением, могущим обеспечить перемещение подвижной части прибора.

В качестве примеров таких физических явлений можно указать: скоростной напор, который обеспечивает закономерную зависимость между скоростью, например воздушного потока, и динамическим давлением, создаваемым скоростным напором в приемнике; центробежное ускорение, которое обеспечивает определенную закономерную зависимость между угловой скоростью и центробежной силой; появление и взаимодействие магнитных полей при пропускании электрического тока через обмотку катушек и т. д.

Явление, которое нас интересует, будем условно называть первичным, а силовое явление (в некоторых случаях оно может быть и не силовым), количественные факторы которого фактически измеряются, — вторичным. Эту связь можно использовать только в том случае, если будет известна закономерная зависимость между этими двумя явлениями. Исследуя эту зависимость, можно иметь четыре основных случая, которые и определяют некоторые дальнейшие свойства приборов.

Приводимое ниже деление уравнений на четыре основных вида по существу может показаться несколько искусственным, но с точки зрения особенностей осуществления измерений и приборов, использующих различные закономерные зависимости, оно, несомненно, отражает наиболее характерные из этих особенностей.

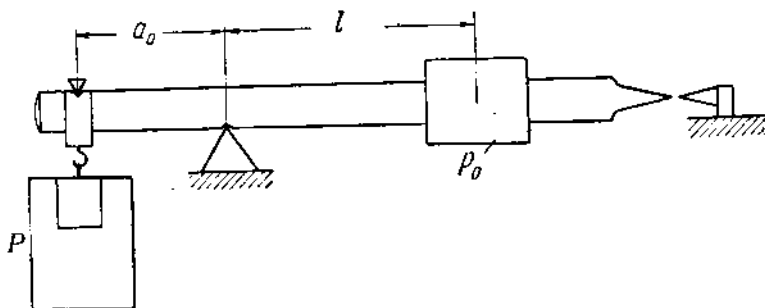
3. ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ. В УРАВНЕНИЕ КРОМЕ ПОСТОЯННЫХ ВХОДЯТ ТОЛЬКО ОДНА НЕЗАВИСИМАЯ И ОДНА ЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННЫЕ

Первый случай — наиболее простой, когда уравнение, выражающее закономерную зависимость между первичным и вторичным явлениями, имеет только одну зависимую и одну независимую переменные. Возьмем для примера весы с рейтером. К одному (постоянному) плечу рычага весов (фиг. 5) подвешивается взвешиваемый предмет.

По другому плечу перемещается постоянный груз. Уравнение равновесия можно написать так:

$$P = \rho_0 \frac{l}{a_0} \quad (1)$$

В данном случае мы определяем вес предмета путем измерения длины (плеча l). Это — простейший пример косвенного измерения. Если рассматривать приведенное уравнение, то можно видеть, что в качестве первичного явления здесь фигурирует вес P , который нужно измерить. Условимся первичное явление всегда рассматривать в качестве независимой переменной. Зависимой же переменной будет



Фиг. 5. Схема весов с рейтером.

длина рычага l , на которую перемещается постоянный груз ρ_0 . В данном случае длина рычага l будет вторичным (и в частности не силовым) явлением. Кроме того, в уравнении имеются еще две постоянные величины: ρ_0 — вес постоянного груза (рейтера) и a_0 — длина постоянного плеча.

С точки зрения приборной техники такой случай является для нас наиболее выгодным. Если не касаться степени неизменности постоянных, которые входят в данное уравнение, а также качества прибора и качества произведенного эксперимента, то этот случай обеспечивает принципиально наибольшую точность и именно ту, которую мы получаем при измерении длины переменного рычага.

4. ВТОРОЙ СЛУЧАЙ. В УРАВНЕНИЕ ВХОДЯТ КРОМЕ ОСНОВНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ РЯД ДОБАВОЧНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В качестве примера воспользуемся барометрической формулой, служащей для измерения высот:

$$H = 18401,2 (\lg B_0 - \lg B_H) (1 + 0,00367 t_{cp}) \left(1 + 0,00259 \cos 2\varphi + 2 \frac{H_1}{R} \right) \times \\ \times (1 + 0,375 k) \pm \Delta H, \quad (2)$$

где H — высота, т. е. явление, которое мы хотим измерить (первичное явление),

B_H — давление на высоте, т. е. явление, которое мы фактически измеряем (вторичное явление),

B_0 — давление внизу,

t_{cp} — средняя температура столба воздуха от начальной плоскости до высоты H ,

φ — широта местности,

H_1 — некоторая высота, отличная от измеряемой (см. приложение стр. 284),

R — радиус земли,

$k = \frac{1}{2} \left(\frac{b_n}{B_0} + \frac{b_H}{B_H} \right)$ — полусумма отношений давлений водяных паров к барометрическим давлениям внизу и на высоте, наконец

ΔH — поправка на рельеф местности (поскольку с помощью барометрического высотомера мы измеряем высоту не от земной поверхности, а от некоторой барометрической плоскости).

Таким образом в уравнение (2) кроме основной независимой переменной (первичного явления) H и основной зависимой переменной (вторичного явления) B_H входят еще следующие величины: давление внизу B_0 , являющееся добавочной независимой переменной, т. е. такой величиной, которая может произвольно изменяться и изменение которой барометрическим высотомером, в какие бы условия мы данный прибор ни поставили, учитываться не может; средняя температура столба воздуха t_{cp} — вторая добавочная независимая переменная, которая может также совершенно произвольно меняться и изменение которой прибор также не учитывает; широта φ может достаточно произвольно изменяться, как и давление b водяных паров и поправка ΔH на рельеф местности. Все эти величины являются также добавочными независимыми переменными.

Краткое принципиальное описание прибора см. в приложении I на стр. 287.

По существу шкалу для такого прибора построить нельзя, или нужно построить какой-то сложный прибор с автоматическим приспособлением, которое измеряло бы величины всех этих независимых переменных и вносило бы все необходимые поправки на изменения добавочных независимых переменных, что по существу для целого ряда независимых переменных не представляется возможным.

Попытки вводить такие добавочные механизмы в приборы были (например указатель скорости системы Дюжи), но от этого пришлось отказаться потому, что механизм, представляющий исключительную ценность своей простотой, от этого усложняется, а также и потому, что эти усложнения вводят добавочные погрешности, снижающие точность прибора.

Другой выход — добавочные независимые переменные принять за постоянные и построить шкалу для каких-то определенных их значений. В частности у нас для построения шкалы барометрического высотомера принимаются $B_0 = 760$ мм рт. ст., температура у земли $t_0 = +15^\circ$ и изменение температуры с высотой (температурный

градиент) $t_{gr} = -0,65^\circ$ на каждые 100 м (до 11 000 м высоты). Отсюда можно получить среднюю температуру столба воздуха для каждой высоты $t_{cp} = \frac{t_0 + t_H}{2}$. Таким образом расчетная формула для шкалы высотомера (до 10 000 м высоты) будет иметь следующий вид:

$$\lg B_H = 2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H}, \quad (3)$$

причем добавочные множители в этой формуле, зависящие от широты местности, от давления водяных паров и от отношения $\frac{H_1}{R}$, опускаются, поскольку их влияние на конечный результат достаточно мало (значительно меньше, чем сделанные нами допущения).

Совершенно очевидно, что при таких допущениях вносится целый ряд погрешностей, так как истинные значения добавочных независимых переменных всегда в большей или меньшей степени отличаются от тех значений, которые приняты для расчета шкалы при таких условиях. Но, учитывая исключительную простоту и удобство данного метода, а также и тот факт, что другие методы, являясь значительно более сложными и значительно менее удобными, все же не обеспечивают большей точности, с этим приходится мириться. Например, можно было бы измерять высоту с самолета с помощью дальномера по формуле:

$$H = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

где H — высота,
 a — база дальномера,
 α — измеряемый угол.

Этот метод не имеет указанных источников погрешностей, но при больших отношениях $\frac{H}{a}$ он весьма неточен, не говоря уже об исключительной сложности применения этого метода на самолете.

При необходимости более точных измерений высоты с помощью барометрического высотомера приходится параллельно производить измерения значений тех добавочных независимых переменных, которые служат источником достаточно больших погрешностей, и вводить поправки в показания прибора на отклонение действительных значений этих переменных от тех значений, которые приняты для расчета шкалы. Для упрощения вычислений при введении поправок строятся специальные номограммы.

Таким образом, если в уравнении, выражающем закономерную зависимость между первичным и вторичным явлениями, имеются добавочные независимые переменные, то этот случай является самым неудобным. Здесь имеется целый ряд источников погрешностей, которые мы называем методическими, так как в конце концов они зависят не от прибора, а от выбранного метода измерения.

Различие между методическими и инструментальными погрешностями

Вводя понятие о методических погрешностях, необходимо кратко остановиться на том, что мы называем инструментальными погрешностями, и на разнице между инструментальными и методическими погрешностями. В большинстве случаев величины, которые входят в уравнение прибора, являются его параметрами [например для весов с рейтером (уравнение 1) величины p_0 и a_0] и при рассмотрении методических погрешностей приняты за постоянные, фактически также могут подвергаться некоторым изменениям. Так, плечо рычага a_0 не является постоянным, — оно может изменяться от ряда факторов, в частности от некоторых смещений точки опоры тяги и др. Имеется целый ряд и других причин, которые могут изменять размеры этих величин. Погрешности, которые происходят от изменения переменных, являющихся параметрами прибора, или неточного их соответствия требуемым значениям, называются инструментальными.

Между методическими и инструментальными погрешностями большая принципиальная разница. Рассмотрим ее на примере высотомера. Подставив в уравнение (2) барометрического высотомера

$$B_H = \frac{F_0 l_H}{A},$$

где F_0 — средняя упругость пружины и мембраны,

l_H — изморяемый прогиб пружины,

A — эффективная площадь мембраны,

и отбросив последние два множителя и ΔH , получим уравнение в следующем виде:

$$H = 18401,2(\lg B_0 - 1 - \lg F_0 l_H)(1 + 0,00367 t_{cp}). \quad (4)$$

Температурная погрешность здесь может быть двоякого рода: 1) может оказаться расхождение между истинной средней температурой столба воздуха t_{cp} и той средней температурой столба воздуха, которую мы приняли при построении шкалы; 2) под влиянием изменения температуры, в которой работает прибор, может изменяться средняя упругость пружины и мембраны F_0 (в данном случае F_0 и A являются параметрами прибора, принимаемыми за постоянные, зависимой же переменной является l_H). Совершенно очевидно, что в первом случае будет получена погрешность, не зависящая от прибора; сущность данной погрешности кроется в самом методе, в самой зависимости физического явления. Во втором случае с изменением температуры изменяется постоянная прибора. Это последнее влияние изменения температуры можно в конце концов устранить, поместив, например, прибор в постоянные температурные условия или выполнив его более совершенным, т. е. внося в его конструкцию соответствующие дополнения в виде температурной компенсации и пр. Путем подбора определенных условий эксперимента, путем изготовления лучшего прибора можно влиять на инструментальные погрешности, в то время как на методические погрешности путем улучшения прибора (не ме-

няя данного принципа измерения) и путем установки прибора в определенные условия влиять никак нельзя.

Таким образом мы условимся называть инструментальными погрешностями, получающиеся в результате того, что переменные, являющиеся параметрами прибора, подвергаются изменению или их значения не точно соответствуют требуемым величинам; методическими будем называть погрешности, являющиеся результатом наличия в уравнении кроме основной независимой переменной еще ряда добавочных независимых переменных (не являющихся параметрами приборов).

Такие уравнения являются самыми невыгодными для измерительной техники, и ими приходится пользоваться в самых исключительных случаях, когда это оправдывается особо важными обстоятельствами. Высотомер в данном случае оправдывает себя своей исключительной простотой, а также отсутствием, как было указано, в настоящее время другого достаточно простого и точного метода. При введении в его показания соответствующих поправок он может служить и для более точного измерения высоты.

Различное влияние добавочных независимых переменных

Для полноты освещения методических погрешностей необходимо отметить, что некоторые добавочные независимые переменные имеют большое влияние на показания прибора, некоторые — малое, причем в рассмотренном на стр. 25 случае степень этого влияния никак не может быть изменена. Так, в случае барометрического высотомера изменения величин B_0 и t_{cp} значительно влияют на результат измерения, в то время как влияние изменения величин φ , $\frac{b_0}{B_0}$ и $\frac{b_H}{B_H}$ на результат измерения незначительно. Различное влияние независимых переменных на конечный результат измерения может иметь место по двум причинам: 1) в зависимости от коэффициентов, с которыми входит данная независимая переменная в уравнение, от вида их функций и от других аналогичных условий и 2) по той причине, что пределы возможных изменений значений независимых переменных могут быть весьма различны.

В барометрическом высотомере различное влияние изменения величин независимых переменных на конечный результат измерения объясняется первой из указанных выше причин.

Весьма наглядным примером различной степени влияния изменения независимых переменных на результат измерения вследствие различного возможного диапазона изменений значений этих независимых переменных (вторая причина) может служить измерение воздушной скорости самолета. В данном случае мы измеряем воздушную скорость путем замера разности давлений (статического и динамического), созданной скоростным напором. Не останавливаясь на устройстве самого прибора, приведем уравнение, выражающее зависимость между разностью давлений, создаваемой скоростным напором (воспринимаемой трубкой Пито), и скоростью самолета:

$$\Delta p = \frac{V^2 \gamma}{2g} \quad (5)$$

В данном случае независимой переменной будет скорость V , зависимой переменной — разность давлений Δp . Плотность воздуха γ будет добавочной независимой переменной. Как известно, плотность воздуха зависит от абсолютной температуры T и от давления p . Следовательно, обозначив некоторые начальные значения плотности, давления и абсолютной температуры с помощью γ_0 , p_0 и T_0 , мы получим:

$$\Delta p = \frac{V^2 \gamma_0}{2g} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}. \quad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что по характеру зависимости количественное влияние равных по абсолютной величине относительных изменений температуры и давления на конечный результат измерения одинаково (в обоих случаях зависимость первой степени). Однако возможные в действительных условиях относительные изменения p и T различны. В то время как при подъеме на высоту давление p может изменяться в несколько раз, изменение абсолютной температуры T может происходить всего максимум на десятки процентов. Таким образом в данном случае добавочная независимая переменная p является источником значительно больших погрешностей, нежели добавочная независимая переменная T .

Из приведенных примеров видно, насколько различно могут влиять добавочные независимые переменные на конечный результат измерения.

Кроме того, необходимо обратить внимание на то, что в приведенных примерах как-либо воздействовать на степень влияния возможных изменений этих независимых переменных на конечный результат измерения нельзя. О таких случаях можно только сказать, что, когда добавочные независимые переменные значительно влияют на конечный результат измерения, это значительно ухудшает результаты измерения.

Для уточнения конечного результата измерений в этих случаях приходится прибегать к дополнительным измерениям действительных значений добавочных независимых переменных и вводить соответствующие поправки в показания прибора на отклонения этих действительных значений независимых переменных от тех значений, которые были приняты в качестве постоянных величин при построении шкалы прибора.

Если влияние добавочных независимых переменных незначительно, ими можно просто пренебречь.

5. ТРЕТИЙ СЛУЧАЙ. В УРАВНЕНИЕ ВХОДЯТ КРОМЕ ОСНОВНОЙ ФУНКЦИИ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДОБАВОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Разберем третий случай, когда в уравнение входит только одна независимая переменная, зависимая же переменная входит в уравнение в виде сложной функции, либо наряду с простейшей линейной алге-

браической функцией зависимой переменной в уравнение входят добавочные ее функции, например трансцендентные. Таким образом мы имеем случай, когда в конечном итоге нельзя решить уравнение относительно зависимой переменной в явном виде. Простейшую линейную функцию зависимой переменной мы условимся называть основной функцией зависимой переменной, остальные — добавочными. Например, напишем уравнение центробежного тахометра с кольцевым грузом, где момент центробежной силы

$$M_{ц} = \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (J_{yz} - J_{xz}). \quad (7)$$

Вывод уравнения и краткое принципиальное описание прибора см. на стр. 289.

Здесь мы имеем в качестве первичного явления, т. е. основной независимой переменной, угловую скорость $\omega = 2\pi n$ и в качестве второго явления, т. е. зависимой переменной, момент центробежной силы $M_{ц}$.

Разность моментов инерции относительно двух плоскостей ($J_{yz} - J_{xz}$) кольцевого груза можно считать величиной постоянной. Что касается величины $\sin 2\alpha$, т. е. синуса удвоенного угла, образуемого плоскостью симметрии xz кольцевого груза с главным валом, то эта величина является добавочной функцией зависимой переменной. Действительно, момент центробежной силы $M_{ц}$ можно также выразить через удельный момент M_0 измерительной пружины (стр. 289, фиг. 68) и угол $\alpha - \alpha_0$ закручивания этой пружины:

$$M_{ц} = M_0 (\alpha - \alpha_0).$$

Тогда уравнение (7) переписется так:

$$[M_0 (\alpha - \alpha_0) = \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (J_{yz} - J_{xz}). \quad (8)$$

Таким образом в данном случае в качестве зависимой переменной мы имеем в конечном итоге не момент центробежной силы $M_{ц}$, а угол α . Не имея возможности решить в явном виде относительно угла α рассматриваемое уравнение (8), мы получаем уравнение, в которое входят две функции зависимой переменной — линейная алгебраическая и трансцендентная. Итак, согласно с теми определениями, какие мы условились применять в начале настоящего параграфа, линейная функция угла α будет основной функцией зависимой переменной, а трансцендентная ($\sin 2\alpha$) — добавочной функцией зависимой переменной.

Удельный момент M_0 при рассмотрении методических погрешностей можно принять за постоянную величину.

Посмотрим, что дает добавочная функция зависимой переменной. Мы видели, что, если в уравнение входит добавочная независимая переменная, это крайне ухудшает данный метод измерения, являясь источником методических погрешностей. Поскольку же добавочная

функция зависимой переменной произвольно меняться не может, ее влияние на показание прибора может быть учтено при построении шкалы прибора. Таким образом, добавочная функция зависимой переменной ни в коем случае не служит источником методических погрешностей. Однако добавочная функция зависимой переменной влияет на шкалу прибора.

Выравнивание шкал с помощью добавочных функций зависимой переменной

Влияние добавочной функции зависимой переменной на шкалу прибора может быть весьма выгодным и весьма невыгодным. В данном рассматриваемом нами случае добавочная функция зависимой переменной для нас выгодна. Дело в том, что в приборе в большинстве случаев желательно иметь равномерную шкалу. В редких случаях неравномерная шкала может представлять некоторые преимущества, но, как правило, всегда стараются иметь в приборе равномерную шкалу на всем диапазоне измерений. Характер шкалы в первую очередь определяется видом функции основной независимой переменной. Если эта функция линейная, как и функция зависимой переменной, то при отсутствии добавочных функций зависимой переменной и в случае постоянного передаточного отношения передаточного механизма мы получаем равномерную шкалу. Если, как в данном случае, она квадратичная, то при отсутствии добавочной функции зависимой переменной мы получили бы квадратичную шкалу. Каким-то образом эту шкалу пришлось бы выравнивать. В приборе мы имеем два места выравнивания шкалы: во-первых, чувствительный элемент и, во-вторых, передаточный механизм.

В данном случае чувствительным элементом прибора является кольцевой груз с пружиной (см. стр. 290, фиг. 69).

Выравнивание шкалы в чувствительном элементе может быть выполнено двумя способами: 1) либо изготовлением специальной конструкции измерительной пружины с переменной упругостью, что достаточно сложно и не рекомендуется (о чем будет сказано ниже); 2) либо для этого может быть использовано влияние добавочной функции зависимой переменной на шкалу прибора. В данном случае как раз и удастся в значительной степени выровнять шкалу именно благодаря наличию в уравнении добавочной функции зависимой переменной. Мы можем подобрать такой начальный и конечный углы α_0 и $\alpha_{\max}$, что $\sin 2\alpha$ в большей степени и в значительных пределах будет компенсировать квадратичность шкалы (см. стр. 291).

Таким образом в данном случае добавочная функция зависимой переменной приносит нам значительную пользу. Используя ее влияние на шкалу, можно выравнивать шкалу значительно проще и лучше, нежели другими указанными выше способами.

В тех случаях, когда добавочная функция зависимой переменной отсутствует, выравнивание шкалы может быть выполнено только либо с помощью пружины с переменной упругостью, либо с помощью передаточного механизма.

Рассмотренный нами выше пример барометрического высотомера дает как раз такой случай (уравнение 2). Действительно там зависимость между независимой и зависимой переменными не прямолинейная, а логарифмическая, добавочной же функции зависимой переменной не имеется.

Таким образом в барометрическом высотомере с пружиной (см. стр. 287, фиг. 66), т. е. в высотомере с такими анероидными коробками, упругость мембран которых мала, почему они и снабжались (в настоящее время такие высотомеры не изготавливаются) специальной добавочной пружиной, мы получили бы шкалу высот, близкую к логарифмической. Выравнивание шкалы в этих высотомерах производилось с помощью передаточного механизма путем подбора соответствующих углов и плеч малого ломаного рычага (см. приложение 1, фиг. 66, а также гл. 5, стр. 112) и другими способами, что далеко не так просто и иногда значительно усложняет передаточный механизм вследствие необходимости в подборе специального переменного передаточного отношения передаточного механизма, удовлетворяющего данной зависимости.

В настоящее время высотомеры делаются с коробками без пружин, т. е. с такими коробками, в которых мембрана служит измерительной пружиной. Подбором соответствующих форм мембраны и гофр удастся добиться такой зависимости между прогибом и нагрузкой мембраны, которая почти целиком компенсирует логарифмический характер шкалы высотомера.

Высотомеры с беспружинными коробками могут служить прекрасным примером весьма удачного выравнивания шкал с помощью пружин с переменной упругостью. Однако этот случай нельзя рассматривать как правило. Дело в том, что высотомеры относятся к группе мембранных приборов; мембрана же по своей природе является пружиной с переменной упругостью, поскольку при прогибах материал мембраны работает не только на изгиб, но и на растяжение (теория Джелетта о невозможности деформации замкнутого объема без вредных растягивающих деформаций). В приборах с нормальными измерительными пружинами переменную упругость следует считать крайне нежелательной, поскольку это усложняет самый ответственный элемент прибора, что в большинстве случаев несомненно приведет к лишним источникам погрешностей ¹.

Таким образом наличие в уравнении добавочной функции зависимой переменной часто оказывается весьма выгодным. Однако, как увидим дальше, имеется целый ряд обратных примеров.

Отрицательное влияние добавочных функций зависимой переменной

Рассмотренный выше случай имеет место тогда, когда функция основной независимой переменной не линейная. Если же эта функция линейная, то влияние добавочной функции зависимой переменной выражается в том, что она искажает равномерную шкалу прибора, т. е. влияние ее явно вредно.

Рассмотрим пример магнитоэлектрического амперметра.

В приложении 4, стр. 293, приведен такой случай.

Уравнение, которым в данном случае пользуемся, имеет следующий вид ¹:

$$M = M_0(\alpha - \alpha_0) = \frac{1}{981} H \cdot \frac{I}{10} a b n' \sin \alpha, \quad (9)$$

где H — напряжение магнитного поля, создаваемого постоянным магнитом в зазоре, в котором вращается рамка,

I — сила тока, проходящего по проводнику рамки,

a и b — высота и ширина рамки (произведение ab будет площадью рамки),

$n' = nl$ — количество витков проводника, наложенного на рамку,

α — угол между направлениями магнитных полей рамки и постоянного магнита,

α_0 — угол, определяющий начальное положение рамки при $M=0$,
 M_0 — удельный момент пружинки (волоска).

Если такую рамку поместить в магнитное поле и пропустить через нее ток, то на рамку будет действовать вращательный момент вследствие взаимодействия ее собственного магнитного поля с магнитным полем постоянного магнита.

В данном случае основной независимой переменной будет сила тока I , основной функцией зависимой переменной — угол α , напряжение магнитного поля H , параметры рамки a и b , количество витков n' можно считать постоянными, наконец $\sin \alpha$ будет добавочной функцией зависимой переменной. Функция основной независимой переменной — линейная. Таким образом, если бы добавочная функция зависимой переменной отсутствовала, мы получили бы равномерную шкалу. В таких случаях приходится тем или иным способом устранять влияние добавочной функции зависимой переменной, причем полностью устранить это влияние нельзя.

Принципиально в магнитоэлектрическом приборе можно было бы использовать 180° поворота рамки, но так как в этом случае момент изменялся бы от нуля до максимального и опять до нуля независимо от силы тока, то такое использование невозможно. Таким образом, поворот рамки приходится ограничивать 100, максимум 110°, т. е. в первую очередь добавочная функция зависимой переменной ограничивает использование шкалы. В этих пределах $\sin \alpha$ будет изменяться примерно от 0,6 до единицы на середине шкалы и снова до 0,6 на другом конце шкалы. В пределах данного поворота рамки, т. е. 100—110°, влияние $\sin \alpha$ устраняется соответствующей формой полюсных наконечников, а также влиянием сердечника, несколько изменяющего направление магнитного поля в воздушном зазоре.

В целом ряде случаев необходимость сужения шкалы до 100—110° оказалась настолько отрицательным фактором, что многие конструкторы стали искать другие способы конструктивного оформления приборов, работающих на этом принципе (с кольцевыми магнитами и т. п.). Этому вопросу мы еще раз коснемся ниже (стр. 45).

Таким образом в этом случае наличие добавочной функции зависимой переменной является крайне невыгодным, и приходится искусственными мероприятиями устранять ее влияние.

¹ Вывод уравнения и краткое принципиальное описание прибора см. стр. 295 и сл.

6. ЧЕТВЕРТЫЙ СЛУЧАЙ. ДОБАВОЧНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ВХОДЯТ В УРАВНЕНИЕ В ВИДЕ ФУНКЦИЙ, СВЯЗЫВАЮЩИХ ИХ С ПАРАМЕТРАМИ ПРИБОРА

Перейдем к последнему четвертому случаю, когда в уравнение входят добавочные независимые переменные, причем они входят в выражениях, связывающих их с параметрами прибора. В качестве наглядного примера для данного случая могут служить электродинамические приборы.

По принципу действия электродинамические приборы весьма схожи с магнитоэлектрическими, с той только разницей, что в магнитоэлектрических приборах магнитное поле, в котором вращается подвижная рамка, создается постоянным магнитом, а в электродинамическом — неподвижной рамкой. Это обстоятельство позволяет с помощью электродинамических приборов производить соответствующие измерения не только при постоянном токе, но и при переменном.

Уравнение, выражающее зависимость, использованную для данной группы приборов, имеет следующий вид¹:

$$M = M_0 (\alpha - \alpha_0) = \frac{2\pi^2}{981} \frac{I_1}{10} \frac{I_2}{10} \frac{r_2^2}{r_1} n'_1 n'_2 \sin \alpha, \quad (10)$$

где I_1 — сила тока в неподвижной рамке,

I_2 — сила тока в подвижной рамке,

$n'_1 = n_1 l'_1$ и $n'_2 = n_2 l'_2$ — количества витков неподвижной и подвижной рамок,

r_1 и r_2 — радиусы неподвижной и подвижной рамок,

α — угол между направлением магнитных полей неподвижной и подвижной рамок,

α_0 — угол, определяющий начальное положение подвижной рамки (при $M = 0$),

M_0 — удельный момент пружинки (волоска).

Совершенно очевидно, что в случае амперметра сила тока I_1 является основной независимой переменной, угол α — основной функцией зависимой переменной, величины n'_1 , n'_2 , r_1 , r_2 можно считать постоянными, $\sin \alpha$ является добавочной функцией зависимой переменной.

Поскольку далее подвижная рамка шунтирует неподвижную, можно написать:

$$I_2 = \frac{e}{\sqrt{R_2^2 + (2\pi\nu L_2)^2}},$$

где $e = I_1 R_1$ — падение напряжения в неподвижной рамке,

R_1 и R_2 — омические сопротивления неподвижной и подвижной рамок,

L_2 — коэффициент самоиндукции подвижной рамки,

ν — частота переменного тока.

Тогда уравнение (10) примет следующий вид:

$$M = M_0 (\alpha - \alpha_0) = \frac{2\pi^2}{981} \frac{I_1^2}{100} \frac{R_1}{\sqrt{R_2^2 + (2\pi\nu L_2)^2}} = \frac{r_2^2}{r_1} n'_1 n'_2 \sin \alpha. \quad (11)$$

¹ Вывод уравнения и краткое принципиальное описание прибора см. стр. 295 и сл.

Параметры R_1 , R_2 и L_2 в данном случае также можно считать постоянными величинами, частота же переменного тока γ является добавочной независимой переменной.

Однако значение этой добавочной независимой переменной несколько иного характера, чем в тех случаях, которые были рассмотрены выше (стр. 28). В данном случае можно в значительных пределах изменять степень ее влияния на конечный результат измерений. Соответствующим подбором параметров подвижной рамки, именно омического сопротивления R_2 и коэффициента самоиндукции L_2 , можно это влияние в известных пределах частот довести до таких малых значений, что им можно будет пренебречь. Это имеет место потому, что в данном случае добавочная независимая переменная входит в качестве слагаемого в двучлен, другим слагаемым которого является параметр прибора R_2 , который в известных пределах можно подбирать произвольно, а также и потому, что в коэффициент при данной добавочной независимой переменной входит второй параметр прибора L_2 , который в известных пределах также можно подбирать произвольно. Подбрав R_2 достаточно большим и L_2 достаточно малым, в определенных пределах частот γ можно сделать показания прибора в достаточной степени независимыми от этих частот.

Из рассмотренных примеров видно, что между добавочными независимыми переменными уравнений, выражающих закономерные зависимости между первичными и вторичными явлениями, может существовать глубокая принципиальная разница, так как их влияние на конечный результат измерения может зависеть или не зависеть от тех или иных параметров прибора.

Влияние добавочной функции зависимой переменной здесь то же самое, что и в приведенных выше примерах. Так, в случае электродинамического ваттметра уравнение (10) примет следующий вид:

$$M = M_0(\alpha - \alpha_0) = \frac{2\pi^2}{981} \frac{I_1}{10} \frac{E}{R_2^2 + (2\pi\gamma L_2)^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1} n'_1 n'_2 \sin \alpha, \quad (12)$$

где E — напряжение в цепи, подводимое к подвижной рамке (в данном случае не шунтирующей неподвижную рамку и имеющей добавочное балластное сопротивление),

$I_1 E = W$ — мощность, расходуемая в данной цепи и подлежащая измерению.

Влияние добавочной функции зависимой переменной $\sin \alpha$ в данном случае явно вредное, и это влияние устраняется путем создания соответствующей неравномерности магнитного поля, в котором перемещается подвижная рамка (т. е. магнитного поля, создаваемого неподвижной рамкой). Это достигается подбором определенных соотношений между диаметрами подвижной и неподвижной рамок, а также выполнением неподвижной рамки из двух половинок (как показано на фиг. 73а). Сдвигая или раздвигая эти половинки, можно чисто эмпирически подобрать нужную неравномерность магнитного поля.

Несмотря на то, что в электродинамическом амперметре основная независимая переменная сила тока I_1 входит в уравнение в виде квад-

ратичной функции, влияние добавочной функции зависимой переменной $\sin \alpha$ в данном случае следует признать неблагоприятным, поскольку в первую очередь она, как и в примере магнитоэлектрического амперметра, ограничивает возможность использования шкалы также $100—110^\circ$. Использование же ее для выравнивания шкалы в данном случае затруднительно вследствие того, что в первой половине шкалы эта функция возрастает, т. е. имеет обратный характер тому, что требуется для выравнивания шкалы¹.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИБОРОВ

1. ТРИ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Как правило, измерительные приборы имеют три основных элемента:

1) Чувствительный элемент, воспринимающий первичное явление и преобразующий его во вторичное (в большинстве случаев в момент или силу и в конечном результате в перемещение). В более редких случаях, именно в некоторых так называемых дистанционных приборах, преобразование первичного явления в динамическое происходит в приемнике, например в приемнике Пито аэродинамического указателя скорости (см. дистанционные приборы). Кроме того, имеется ряд случаев, когда чувствительный элемент преобразовывает воспринимаемое им явление не в динамическое (силовое), а в какое-либо другое, позволяющее в конечном результате произвести измерение.

2) Передаточный механизм, передающий перемещение чувствительного элемента на стрелку с определенным постоянным или переменным передаточным отношением.

3) Шкалу со стрелкой.

2. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Роль чувствительного элемента уже в значительной степени была освещена.

Чувствительный элемент состоит в громадном большинстве случаев из элемента, воспринимающего интересующее нас явление и преобразующего его в динамическое, и измерительной пружины, уравновешивающей силу или момент, получающиеся в результате динамического явления. Взаимодействие этих двух элементов создает перемещение соответствующих элементов приборов. В большинстве случаев эти два элемента связаны непосредственно, в некоторых же более редких случаях (например в приведенном в приложении 4 тахометре инж. Тихменева) — через специальную передачу.

¹ Здесь не разбирается более глубоко теория как данного электродинамического прибора, так и других. Например не рассматриваются погрешности ваттметра в результате различного сдвига фаз в неподвижной и подвижной рамках, источником которых в конечном результате является та же добавочная независимая переменная, и ряд других. Это не входит в поставленную задачу данной темы, которая ограничивается изложением основных наиболее общих положений общей теории измерительных приборов и демонстрацией их на ряде конкретных примеров.

В качестве примеров могут служить упоминавшиеся выше приборы. Например анероидная коробка и измерительная пружина в высотомере (стр. 287, фиг. 66), главный вал с грузами и измерительной пружиной в тахометре (стр. 290, фиг. 69), подвижная рамка и пружинки (волоски) в магнитоэлектрических и электродинамических электроизмерительных приборах (стр. 301, фиг. 73, 73а) и т. д. являются подобного рода чувствительными элементами.

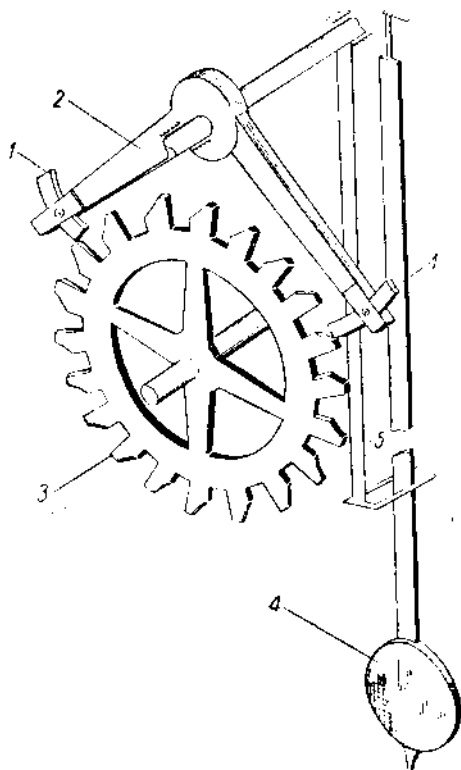
Особые случаи чувствительных элементов

В более редких случаях чувствительный элемент, воспринимая интересующее нас явление, не преобразовывает его в динамическое. Таким примером могут служить хотя бы часы.

В данном случае в качестве чувствительного элемента мы имеем маятник или баланс с ходом. Используя свойства маятника или упругой системы, имеющих определенную массу или момент инерции, сохранять при определенных данных постоянных параметрах этой системы определенный, соответствующий данной системе период колебания, мы тем самым как бы воспринимаем с помощью данного чувствительного элемента интересующую нас величину — время — и преобразуем его с помощью так называемого хода во вращательное строго ритмичное движение.

Таким образом в данном случае чувствительный элемент, выражаясь условно ¹, воспринимающий интересующую нас величину — время, преобразует его не в силу или момент, а в определенное ритмичное круговое движение.

Устройство этого чувствительного элемента следующее. Маятник (фиг. 6) подвешивается

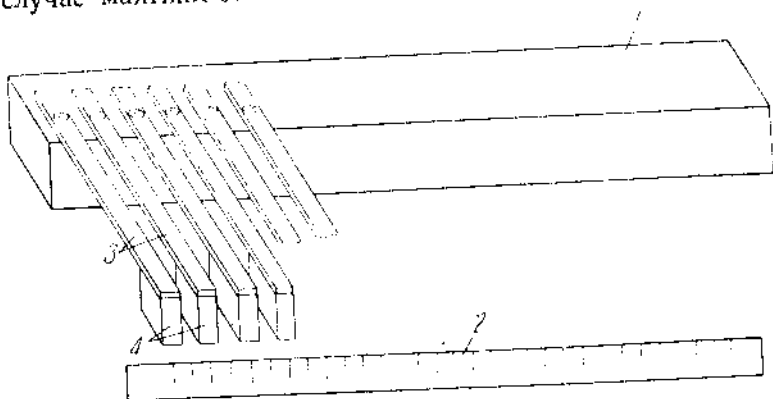


Фиг. 6. Схема хода Грагхама с маятником

1—палеты, 2—якорь, 3—ходовое колесо, 4—маятник, 5—вилка.

¹ Поскольку время представляет собой не явление, а объективно существующую «реальную форму бытия», то по существу мы не можем говорить о воздействии времени, а поэтому проводить параллель между чувствительным элементом часов и чувствительными элементами других приборов мы можем только условно. В данном случае чувствительный элемент (маятник или упругая система с массой или моментом инерции) воспринимает через храповое колесо импульсы, поддерживающие колебательное движение, являющееся определенной функцией времени.

на плоской тонкой пружинке (волоске). Около него расположен ход, состоящий из ходового колеса и якоря с двумя палетами (входной и выходной). На оси якоря имеется вилка, охватывающая стержень маятника. Назначение хода — преобразовывать колебательное движение маятника в ритмичное круговое движение, которое через передаточный механизм передается на стрелки, а также поддерживать это колебательное движение, давая ему импульсы, так как в противном случае маятник остановился бы.



Фиг. 7. Схема виброметра.

1—основание, 2—шкала, 3—упругие пластинки, 4—грузы.

Происходит это следующим образом. Колебательное движение маятника передается через вилку якорю, который с помощью палет то останавливает (или иногда даже несколько отводит назад), то освобождает ходовое колесо. В свою очередь ходовое колесо, приводимое в движение заводной пружины, через палеты, якорь и вилку сообщает импульсы маятнику.

Мы имеем и другие примеры такого рода чувствительных элементов. Например виброметр замеряет частоту вибраций на принципе резонанса. Одна (или две-три) из специального набора упругих пластинок, подобранных с определенной последовательностью периодов собственных колебаний (фиг. 7), попадая в резонанс с возмущающим колебанием, приходит в колебательное движение значительно большей амплитуды, чем остальные пластинки. По ней и определяют измеряемую частоту колебаний. Таким образом в качестве чувствительных элементов мы здесь имеем указанные пластинки, воспринимающие интересующее нас явление — частоту вибраций — и преобразующие его в колебательное движение. Данный прибор обладает той особенностью (о чем будет идти речь дальше), что он имеет целый набор чувствительных элементов, но не имеет ни передаточного механизма, ни стрелки.

Таким образом, мы видим, что назначение чувствительного элемента — воспринимать интересующее нас явление и во всех случаях косвенных измерений преобразовывать это явление в соответствующую

щее вторичное явление, позволяющее тем или иным способом произвести измерение.

В конце концов чувствительные элементы могут быть построены на самых разнообразных принципах, например существуют краски, которые под влиянием изменения температуры меняют цвет и тем самым позволяют определить температуру и т. п.

3. ПЕРЕДАТОЧНЫЙ МЕХАНИЗМ

Основная роль передаточного механизма заключается в том, чтобы перемещение чувствительного элемента с тем или другим передаточным отношением передать на стрелку.

В большинстве случаев передаточный механизм увеличивает перемещение чувствительного элемента, увеличивая таким образом чувствительность прибора. В этом заключается его основное назначение. Это имеет место во всех упоминавшихся выше приборах с передаточным механизмом, за исключением часов. В последнем случае передаточный механизм, наоборот, уменьшает скорость перемещения минутной и часовой стрелок по сравнению со скоростью перемещения чувствительного элемента — ходового колеса, передающего свое движение обыкновенно непосредственно на секундную стрелку. Но чувствительный элемент в часах, как указывалось выше, вообще во многом отличается от чувствительных элементов большинства других приборов.

Второе назначение передаточного механизма, которое, правда, мы используем далеко не всегда, но достаточно часто, заключается в возможности влиять на шкалу путем передачи к стрелке с переменным по мере перемещения чувствительного элемента передаточным отношением.

Рычажный передаточный механизм

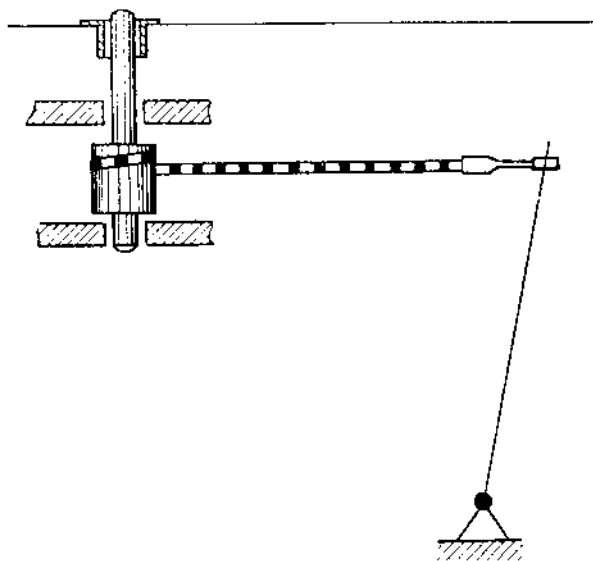
В большинстве случаев в измерительных приборах применяется рычажный передаточный механизм, состоящий из одного или нескольких прямых и ломаных рычагов, заканчивающийся в приборах с круговой шкалой сектором с трибкой (или цепочкой Галля, наматывающейся на барабанчик).

В последнем звене механизма на оси стрелки помещается волосок (тонкая спиральная пружинка с большим углом закручивания и весьма малой упругостью), назначение которого — устранить люфты в передаточном механизме. Момент его рассчитывается таким образом, чтобы в самом неблагоприятном случае он мог преодолеть силы трения передаточного механизма.

Наиболее типичный пример рычажного передаточного механизма имеется в барометрическом высотомере с пружиной (стр. 287, фиг. 66).

Преимущества рычажного передаточного механизма заключаются в его простоте и в малых силах трения, что весьма просто достигается большим отношением плеч рычагов к радиусам их осей, а также и в простом осуществлении передачи с переменным передаточным отношением.

При применении рычага, шарнирно соединенного с ведущей его тягой, мы имеем передачу, передаточное число которой при известных параметрах передачи примерно изменяется по синусоидальной зависимости. Если же ведомое плечо рычага скользит по поступательно перемещающейся детали прибора, то обычно мы имеем передачу, передаточное число которой меняется примерно по тангенциальной зависимости.



Фиг. 8. Схема передачи с цепочкой Галля.

Вообще говоря, соответствующим подбором плеч рычагов, длин тяг и взаимного расположения осей рычагов можно в весьма больших пределах варьировать характер передачи. Например в высотомерах с помощью рычажной передачи удастся полностью выровнять логарифмическую шкалу, в указателях скоростей — в большой степени квадратичную шкалу.

Одной из весьма интересных разновидностей рычажной передачи является так называемая лекальная передача, т. е. такая, при которой одно из скользящих друг по другу плеч рычагов выполнено в виде определенной формы лекала, обеспечивающего нужный характер изменения передачи ¹ (применялась в старых высотомерах ГГО).

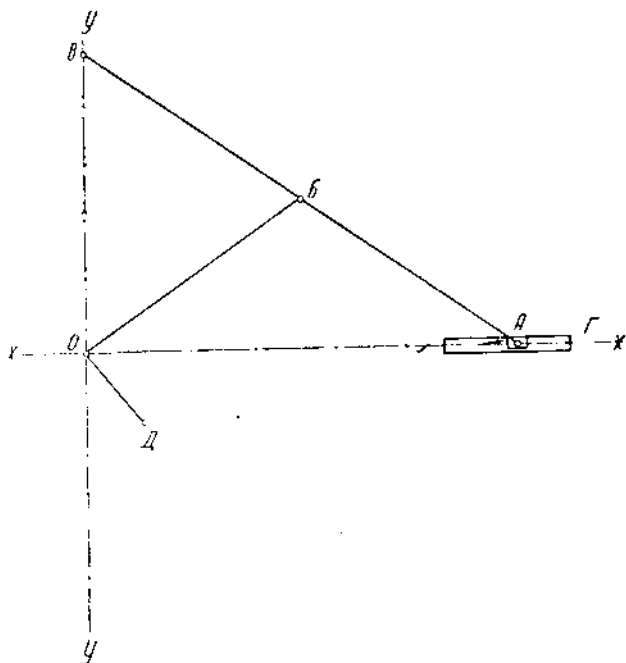
В рычажной передаче имеется один недостаток — это невозможность преобразования движения чувствительного элемента в круговое с большим углом поворота, вследствие чего приходится при круговых шкалах заканчивать такую передачу в последнем звене сектором и трибкой. Так как изготовление зубчатой передачи (сектора и трибки) с достаточно малым трением и большой равномерностью

¹ Однако в связи с необходимостью выполнения этих лекал весьма малых габаритов они не получили большого распространения.

хода ранее встречало достаточно большие затруднения, то во многих случаях сектор и трибка заменялись микрометрической цепочкой Галля, наматывающейся на барабанчик, насаженный на оси стрелки (фиг. 8).

Особые виды рычажных передач

При прямолинейных шкалах, особенно в самописцах, при необходимости иметь перемещение конца пишущего рычага по ленте близким к прямолинейному в качестве рычажной передачи применяются многошарнирные механизмы типа Эванса, Чебышева и др.

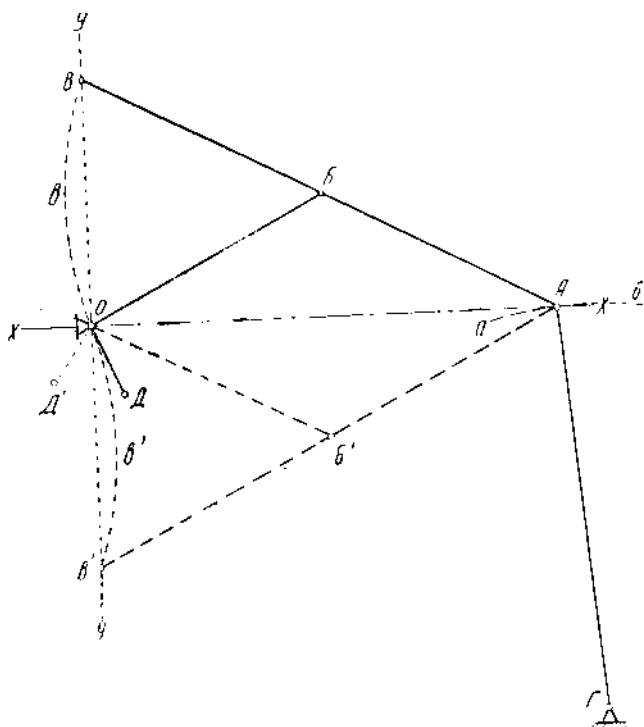


Фиг. 9. Схема механизма Эванса.

Механизм Эванса (фиг. 9) состоит из ломаного ведущего рычага DOB . На большом ведущем плече его OB насажен шарнирно прямой ведомый рычаг ABV , один конец которого скользит по направляющей $Г$.

При выполнении условия $AB = BV = OB$ и расположении точки O опоры ведущего рычага DOB на оси xx , по которой перемещается (по направляющей) конец A ведомого рычага ABV , второй конец прямого рычага будет перемещаться по прямой, совпадающей с осью yy . В некоторых случаях для уменьшения трения и упрощения направляющую $Г$ заменяют тягой (фиг. 10). Тогда конец A ведомого рычага ABV будет перемещаться не по прямой, а по окруж-

ности aAb , что вызовет перемещение другого его конца по некоторой кривой B_0O_0B' , которая при подборе соответствующих параметров может быть весьма близка к прямой¹.



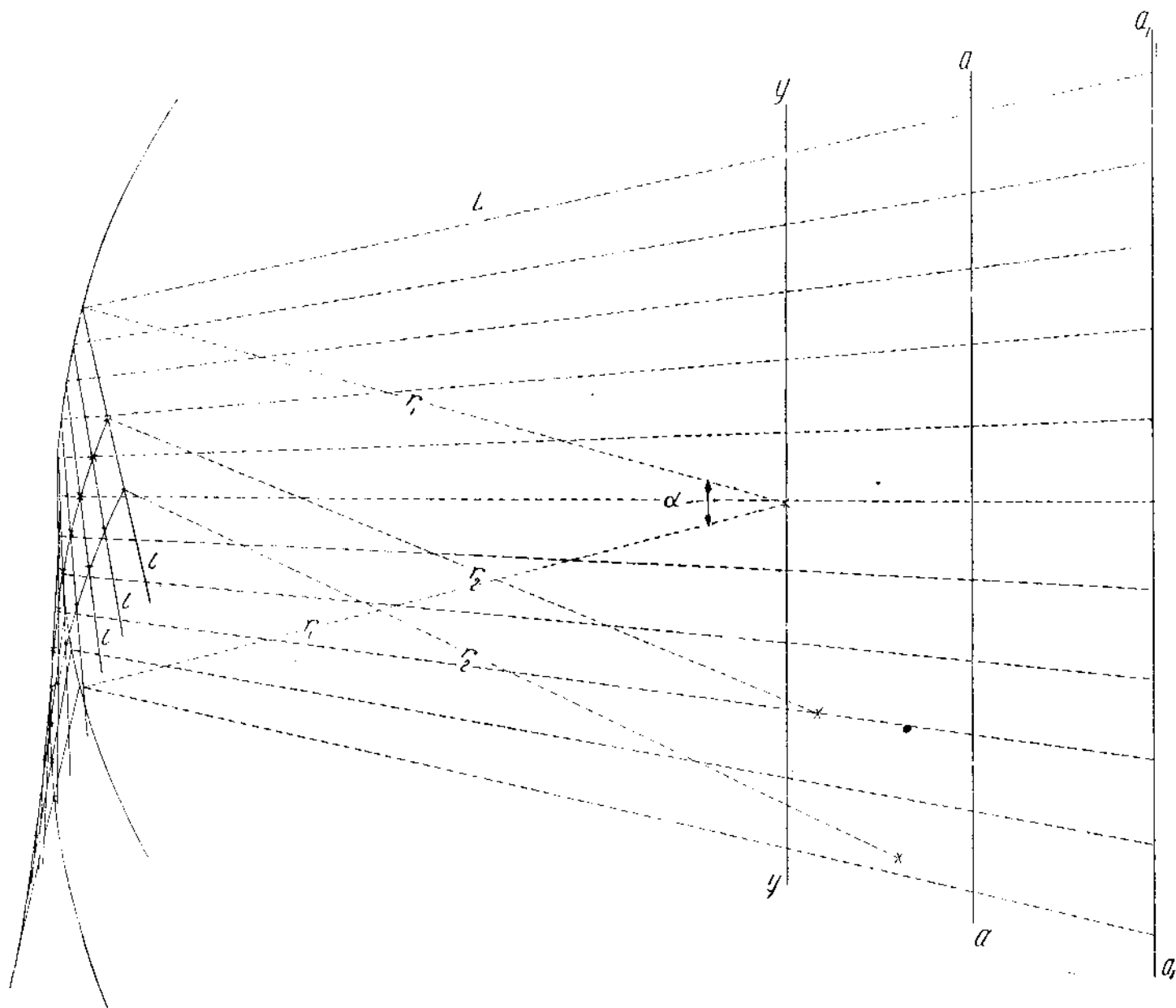
Фиг. 10. Схема механизма Эванса с тягой вместо направляющей.

Механизм Чебышева (фиг. 11) состоит из ломаного ведущего рычага DO_1B . Большое ведущее плечо его O_1B шарнирно соединено с ломаным ведомым рычагом ABV , конец малого плеча BV которого перемещается по окружности Vvv' благодаря направляющей тяге O_2V . При соответствующем подборе параметров конец A большого плеча ведомого рычага ABV перемещается по некоторой кривой, весьма близкой к прямой.

Аналитический подбор этих параметров довольно затруднителен. П. А. Чебышев в целом ряде статей, помещенных в Известиях Академии Наук, СПб 1907, т. I и II, дает необходимые условия для выполнения таких механизмов. На фиг. 12 и 13 даны некоторые разновидности этих механизмов.

Между прочим подбор параметров четырехзвенного механизма такого вида, как на фиг. 11, очень просто может быть выполнен гра-

¹ З е р н о в, Прикладная механика, изд. 1925. Последний случай по существу дает разновидность механизма Чебышева, о котором речь будет дальше.



Фиг. 14. Графический подбор параметров механизма Чебышева.

на прямой aa , так и на прямой a_1a_1 или на любой другой), тем самым несколько меняя передаточное отношение механизма.

Подобного рода многозвенные механизмы, которые можно было бы применить в приборостроении, очень распространены и они вполне могли бы послужить темой для специальной работы. Но поскольку подробное их рассмотрение скорее относится к вопросам деталей точной индустрии, чем к нашей теме, то больше на них останавливаться мы не будем.

Зубчатые передачи

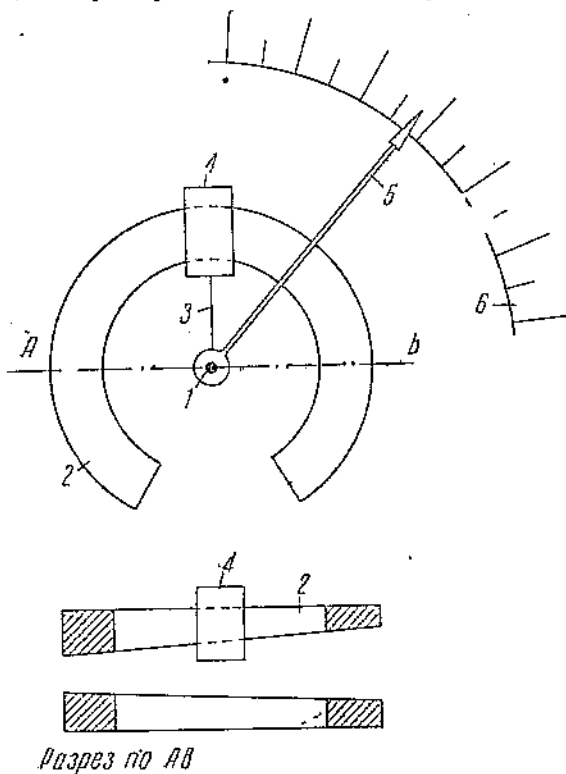
По причинам, указанным выше (простота и необходимость во многих случаях применения передач с переменным передаточным числом), применение зубчатых передач (кроме последнего звена — сектора и трибки) в приборах весьма редко. По совершенно ясным причинам (необходимость во всех звеньях получения кругового вращения) зубчатая передача применяется во всех часовых механизмах. В последнее время зубчатые передачи начинают получать большее распространение и в других измерительных приборах. Так, в настоящее время строятся дустрелочные барометрические высотомеры, одна из стрелок которых делает до 10 и даже 20 оборотов на весь диапазон измерений.

Изготовление такой передачи весьма сложно, так как она должна работать с минимальным трением и возможно малыми люфтами. Последнее требование приобретает особое значение: потому, что при таком количестве оборотов стрелки установка в последнем звене волоска становится невозможной вследствие большого угла закручивания. Указанные качества такой зубчатой передачи достигаются возможно большим диаметром шестерен с возможно более мелким зубом, а также и качеством выполнения. В данном случае применяется модуль 0,1 и число зубьев первой ведущей шестерни достигает 600—800 и более (правда, эта шестерня изготавливается не полной, а в виде сектора). Самое изготовление шестерен производится обкаткой с последующей полировкой зубьев.

При всех положительных свойствах передаточного механизма, заключающихся, как указано выше, в увеличении перемещений чувствительного элемента, т. е. в повышении чувствительности прибора, а также в возможности влиять на шкалу, он имеет и весьма крупные отрицательные свойства. Прежде всего он создает добавочное трение, и тем большее, чем больше передаточное число. В связи с этим, несомненно, является более выгодным везде, где это можно, создавать возможно большее перемещение чувствительного элемента и уменьшать передаточное число передаточного механизма.

Имеется целый ряд случаев, когда затирания в передаточном механизме начинают давать себя чувствовать настолько сильно, что хороший прибор с таким передаточным механизмом построить нельзя. Примером могут служить электроизмерительные приборы (стр. 301, фиг. 73 и 73а). Действующие моменты в этих приборах настолько малы (в некоторых случаях они не превышают 50—100 мгсм и в редких случаях достигают 1—1½ гсм), что преодолевать трение в переда-

точном механизме без значительных погрешностей от затирания они не в состоянии. Поэтому такие приборы обыкновенно строятся без передаточного механизма. Это, конечно, большой недостаток, потому что приходится пользоваться только частью шкалы, и именно сектором, равным, как уже указывалось, максимум $100-110^\circ$.



Фиг. 15. Схема чувствительного элемента магнитоэлектрического прибора с кольцевым постоянным магнитом.

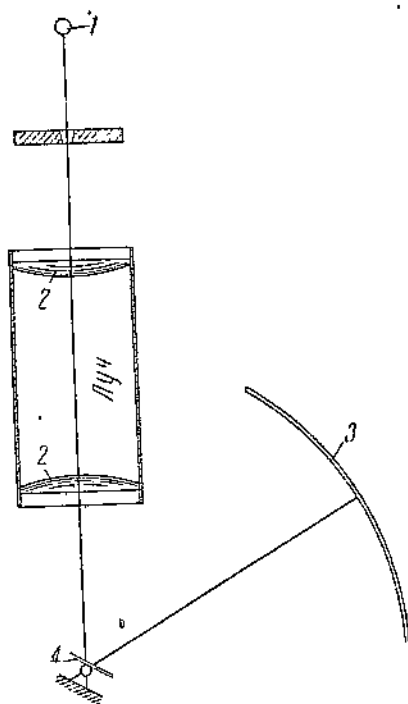
1—ось, 2—кольцевой магнит, 3—крепление рамки к оси, 4—подвижная рамка, 5—стрелка, 6—шкала.

Во многих случаях это обстоятельство начинает играть столь большую отрицательную роль, что ряд конструкторов стал искать другие конструктивные формы выполнения чувствительных элементов электроизмерительных приборов. Например строят магнитоэлектрические приборы с кольцевым постоянным магнитом (фиг. 15), на один из полюсов которого надевают рамку и заставляют эту рамку перемещаться на угол около 270° .

Оптическая передача

Так как увеличение перемещения чувствительного элемента обыкновенно связано с большими затруднениями, а иногда и вообще не представляется возможным, то часто используют еще один особый вид передачи — оптический.

На чувствительном элементе (фиг. 16) укрепляют зеркальце, на которое от источника света через оптическую систему под определенным углом отбрасывается сходящийся луч, отражаемый зеркальцем на шкалу, расположенную в фокусе оптической системы. Таким образом на шкале получается перемещающаяся светящаяся точка



Фиг. 16. Схема оптической передачи.

1—источник света, 2—линзы, 3—прозрачная матовая шкала, 4—подвижное зеркальце, крепящееся на чувствительном элементе.

или тонкая линия (заменяющая стрелку). С помощью такой передачи можно достигнуть почти без всяких трений весьма значительных увеличений перемещения чувствительного элемента.

Конструктивные оформления данного вида передачи могут быть весьма разнообразны. Недостатки ее заключаются в необходимости иметь источник света, в достаточной сложности оптической системы, а также в увеличении габаритов прибора.

Влияние передаточного механизма на точность прибора

Как уже указывалось, с одной стороны, передаточный механизм повышает точность прибора, увеличивая его чувствительность и тем самым снижая погрешности отсчета, с другой, увеличивает погрешности от трения. Последнее обстоятельство ставит определенный предел в повышении чувствительности приборов путем увеличения передаточного отношения передаточного механизма. Однако передаточ-

ный механизм может служить источником еще и других погрешностей. Так, под влиянием температуры в некоторых случаях передаточный механизм может менять передаточное отношение и тем вносить искажения в показания приборов.

Однако эти изменения передаточного механизма обыкновенно настолько ничтожны, что о них можно вообще не говорить. В гл. V, стр. 106 мы еще раз вернемся к этому вопросу.

Значительно большие погрешности передаточный механизм может вызвать вследствие неравномерности хода или неточности передаточного отношения. Неравномерность хода обычно встречается в грубо выполненных зубчатых сцеплениях. Чем мельче зуб и больше диаметр зубчатых передач, тем больше равномерность хода. Погрешности от неточности передаточного отношения передаточного механизма тесно связаны с погрешностями от неточности хода чувствительных элемен-

тов. Складываясь, обе эти категории погрешностей в конечном итоге дают так называемую шкаловую погрешность, которой будет посвящен специальный параграф в гл. V.

Остановившись кратко на тех погрешностях, источником которых может служить передаточный механизм, укажем, что вопросами наиболее целесообразного устранения этих погрешностей мы здесь заниматься не будем, поскольку они непосредственно связаны с кинематикой и технологией передаточных механизмов, т. е. вопросами, которые скорее относятся к теме о деталях точной индустрии, чем к данной.

4. ШКАЛА И СТРЕЛКА

Назначение шкалы и стрелки — привести косвенное измерение к прямому измерению, и именно — измерению длины.

Стрелка отсекает на шкале целое или дробное число делений. В последнем случае отсеченная часть целого деления определяется на-глаз наблюдателем.

В соответствии с этим конец стрелки, перемещающейся около шкалы, должен быть четко виден, толщина его должна отвечать соответствующим данным шкалы, а именно толщине отметок шкалы и расстоянию между отметками шкалы; последние в свою очередь определяются условиями работы прибора (расстоянием от наблюдателя и др.). Расстояние между шкалой и концом стрелки, по которому производится отсчет, должно быть достаточно малым в целях уменьшения погрешностей от параллакса. С этой же целью конец стрелки иногда изготавливается в более точных приборах лабораторного типа в виде ножа, причем в этом случае параллельно и в непосредственной близости около шкалы зачастую закладывается зеркало для совмещения ножа стрелки с его отражением, что значительно уменьшает погрешности от параллакса и тем самым увеличивает точность отсчетов.

В некоторых более редких случаях приборы строятся с перемещающимися шкалами; в этом случае стрелка выполняется в виде неподвижного индекса. Преимущество такой конструкции прибора заключается в уменьшении участка на приборе, служащего для наблюдения и снятия отсчета, и в том, что отсчет всегда производится в одном и том же месте. С другой стороны, такая конструкция страдает отсутствием наглядности, поскольку не дает возможности быстро оценить положение стрелки относительно шкалы, не считывая соответствующего цифрового обозначения на шкале. Кроме того, она обладает еще одним весьма большим недостатком, заключающимся в увеличении затираний в приборе, так как шкала всегда значительно тяжелее стрелки, почему ее и не выгодно устанавливать на подвижной части прибора.

Шкалы бывают круглые плоские, круглые цилиндрические (т. е. нанесенные не на диск, а по окружности цилиндра) и прямые, а также неподвижные и подвижные. Наибольшее распространение получили первые ввиду их простоты и других значительных преимуществ. Круглые цилиндрические шкалы с использованием всей окружности

могут применяться в силу причин, не требующих объяснений, только в случае подвижных шкал. Прямые шкалы обладают тем неудобством, что требуют прямолинейного перемещения конца стрелки, т. е. выпрямляющего механизма; кроме того, прямые шкалы обыкновенно увеличивают габариты прибора.

При необходимости совмещения на одной приборной доске большого количества приборов, особенно если эти приборы измеряют величину одного и того же рода, но в различных точках (распределение давлений), прямые шкалы могут иметь значительные преимущества в отношении лучшего использования места на приборной доске и в особенности в отношении удобства отсчетов.

Подвижные шкалы в связи с указанным выше их недостатком применяются только в редких случаях в технических не особенно точных приборах, а также в компасах. Наибольшее применение они нашли в жидкостных компасах, где они устанавливаются на поплавке картушки, компенсирующем вес как их, так и всего чувствительного элемента компаса.

Встречаются шкалы секторные и круговые. О причинах, вызывающих необходимость применения секторных шкал, говорилось выше (ограниченное перемещение чувствительного элемента и невозможность применения передаточного механизма). Само собой разумеется, секторные шкалы являются весьма невыгодными с точки зрения целесообразного использования габаритов прибора.

Наконец шкалы могут быть равномерными и неравномерными. В большинстве случаев в приборах наиболее целесообразно применение равномерных шкал, так как их производство значительно легче, а также потому, что при этом обеспечивается одинаковая чувствительность прибора на всем диапазоне измерений, на который рассчитан прибор. Только в приборах специального назначения с заранее известным определенным наиболее ответственным участком шкалы неравномерная шкала может оказаться целесообразнее.

В заключение необходимо отметить, что качество выполнения шкалы является весьма важным фактором в измерительном приборе, так как оно обеспечивает соответствующую точность снятия наблюдателем отсчетов по прибору. В связи с этим необходимо обращать особое внимание на достаточную четкость шкалы, зависящую от толщины и размеров отметок шкалы, от нанесения цифр, расположения нуля, окраски шкалы и отметок и других факторов. Все эти факторы определяются в зависимости от условий использования прибора. Циферблаты шкал рекомендуется по возможности освобождать от всяких излишних надписей.

5. УСПОКОИТЕЛИ

В целом ряде приборов кроме перечисленных выше основных трех элементов зачастую применяется еще четвертый—успокоитель.

Подвижные элементы большинства приборов представляют собой в совокупности упругую систему с массой. Если такая система будет выведена из положения равновесия, она будет некоторое время коле-

баться, прежде чем установится неподвижно. Успокоение колебаний такой системы может наступить только за счет так называемого сухого (кулоновского) трения в подвижной системе прибора и за счет трения о воздух.

Последнее в большинстве случаев настолько мало, что о нем говорить не приходится.

Что касается первого, то по отношению к действующим в приборе силам оно также должно быть достаточно малым. Это следует из того, что трение является непосредственным источником погрешностей. Таким образом, чем лучше качество прибора в отношении затираний, тем медленнее будет наступать успокоение колебаний системы. При достаточно больших массах подвижной части прибора и малых действующих силах период колебания достаточно велик, и такое успокоение может потребовать весьма значительного времени.

Хорошим примером в данном случае могут служить аналитические весы. При работе с аналитическими весами производят отсчеты крайних отклонений стрелки при ее колебании и по последним определяют ее среднее положение.

При достаточно больших периодах колебаний этот метод отсчета наиболее точный. Но при меньших периодах такой метод отсчета будет крайне неточным. В связи с этим, для того чтобы не приходилось долго ждать отсчета, в некоторых приборах приходится ставить специальные устройства, называемые успокоителями, которые создают так называемое жидкостное трение, т. е. трение, пропорциональное скорости.

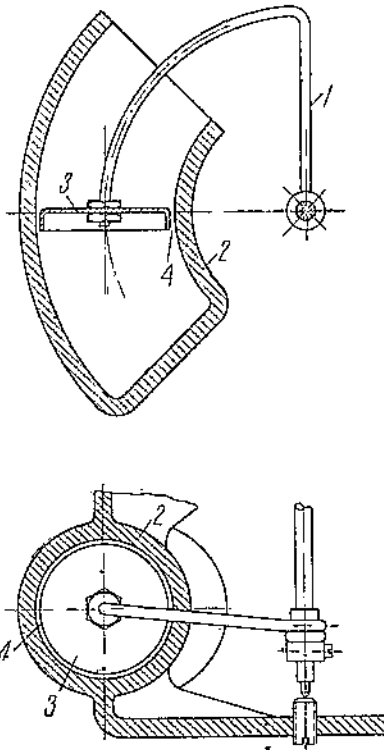
Жидкостное трение пропорционально первой степени скорости и при нуле скорости равно нулю, при больших же скоростях может достигать достаточно больших значений. Поэтому такие устройства, совершенно не увеличивая погрешностей от затирания, могут быстро поглощать накапливающуюся кинетическую энергию в системе и тем самым содействовать скорейшему успокоению колебаний подвижной системы прибора.

Конструкции успокоителей достаточно разнообразны, но в основном их можно подразделить на три группы: 1) воздушные, 2) жидкостные и 3) электрические. Воздушные и жидкостные успокоители принципиально отличаются друг от друга только тем, что в первом случае через какой-то зазор проталкивается воздух; во втором — жидкость. В остальном они принципиальных различий не имеют. Обыкновенно они выполняются в виде поршеньков, проталкивающих воздух или жидкость через зазор между поршнем и цилиндром или через специальные отверстия (фиг. 17 и 18).

Применение воздушных успокоителей значительно проще и удобнее, но малая вязкость и сжимаемость воздуха¹ заставляют при необходимости применения достаточно мощных успокоителей пользоваться жидкостными.

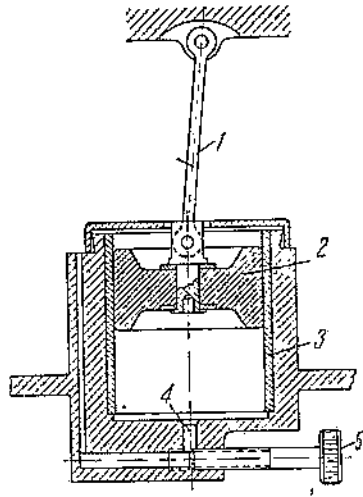
Электрические успокоители используют возникновение вихревых токов при перемещении замкнутого проводника в магнитном поле.

¹ Особенно сказывается сжимаемость воздуха при большой частоте колебаний системы, в связи с чем в этих случаях воздушные успокоители мало действительны.



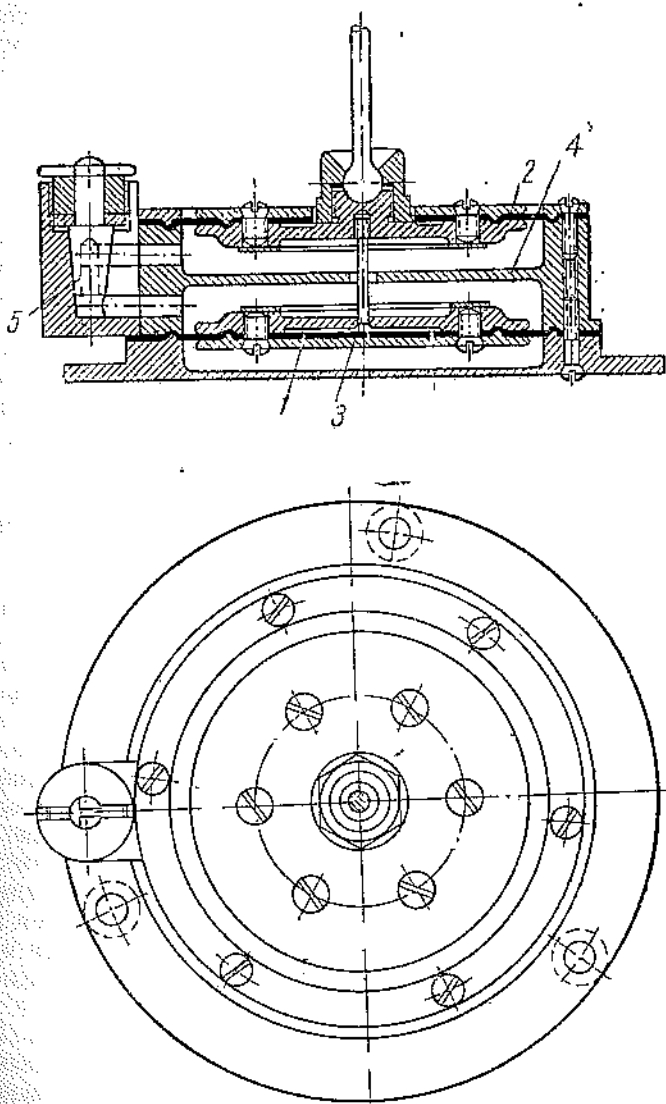
Фиг. 17а. Схема воздушного успокоителя без кулоновского трения.

1—рычаг, укрепленный на оси чувствительного элемента, 2—цилиндр, 3—поршень, 4—зазор.



Фиг. 17б. Схема воздушного успокоителя с кулоновским трением кроме жидкостного.

1—тяга, соединяющая поршень успокоителя с соответствующей подвижной деталью прибора, 2—поршень, 3—цилиндр, 4—регулируемое отверстие, 5—винт для регулирования отверстия.



Фиг. 18. Схема жидкостного успокоителя.¹

1—нижняя мембрана, 2—верхняя мембрана, 3—тяги, соединяющая мем-
браны, 4—перегородка, 5—регулируемое отверстие, сообщающее внутреннего
намеру с внешней.

Например алюминиевый каркас рамки в магнитоэлектрических приборах (стр. 301, фиг. 73) одновременно служит и успокоителем. Электрические успокоители весьма удобны, особенно там, где имеется достаточно мощное магнитное поле, например в магнитоэлектрических приборах. Но если для их применения приходится специально создавать магнитное поле, то по сравнению с другими успокоителями они становятся довольно громоздкими и тяжелыми.

Глава III

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИБОРОВ

1. ПРИБОРЫ СТРЕЛОЧНЫЕ И БЕССТРЕЛОЧНЫЕ

Группируя приборы по особым их признакам, одновременно кратко остановимся на том, чем вызваны те или иные разновидности приборов и какие они дают преимущества и недостатки.

Прежде всего приборы можно подразделить на стрелочные и бесстрелочные. Нормальный прибор, к которому мы привыкли, имеет шкалу и стрелку, но целый ряд приборов имеет только шкалу. В качестве примера таких приборов можно указать виброметр, использующий принцип резонанса.

Устройство этого прибора, как указывалось выше, следующее (фиг. 7). Имеется набор упругих пластинок (плоских пружин) с грузами на концах, укрепленных на основании прибора. Грузы на концах этих пластинок подобраны так, что каждая пластинка имеет свой собственный соответствующий период колебаний. Если привести эту систему в колебательное движение с определенной частотой, совпадающей с собственной частотой одной из пластинок, то попавшая в резонанс пластинка начнет колебаться с большей амплитудой¹.

Свободные концы пластинок расположены по одной прямой около шкалы, так что торцы их составляют четко видимую в состоянии покоя пластинок линию определенной толщины. При колебании одной из пластинок в месте расположения пластинки наблюдается разрыв линии.

В данном случае мы имеем дело с бесстрелочным прибором. Особенность этого типа приборов заключается в том, что в нем передаточный механизм и стрелка заменены большим количеством чувствительных элементов, причем каждый из них дает только одно соответствующее его настройке показание.

Преимущества бесстрелочных приборов достаточно велики. Прежде всего они отличаются простотой в связи с отсутствием передаточного механизма и, следовательно, всех неприятностей, связанных с трением и рядом других факторов.

Такой виброметр можно применить и в качестве тахометра. Сравним теперь хотя бы центробежный тахометр (стр. 290, фиг. 69 и стр. 293, фиг. 71) с подобного рода вибрационным тахометром.

¹ Если собственные частоты соседних пластинок достаточно близки к частоте основной резонирующей пластинки, то они также могут притти в заметное колебательное движение, но с значительно меньшей амплитудой.

Не говоря уже о значительно более простой теории и конструкции вибрационного тахометра, он обладает большей надежностью, так как по существу в этом приборе нет изнашивающихся деталей, как в нормальном тахометре.

Он не требует особой связи (в виде гибкого вала или другого соединения) с вращающейся деталью. Для получения показаний достаточно плотно приложить его к основанию вращающейся детали.

Но, с другой стороны, эта группа приборов обладает и весьма существенным неудобством, заключающимся в том, что такие приборы дают не непрерывные показания, а ступенчатые. Совершенно очевидно, что пластинки приходится подбирать ступеньками, т. е. с определенными интервалами. Для большей точности промежуточных отсчетов эти интервалы необходимо делать возможно меньшими и при больших диапазонах измерений, если нужна значительная точность, набор пластинок окажется настолько большим, что подобный прибор будет громадных размеров. Таким образом ступенчатость показаний, понижающая точность промежуточных отсчетов, и большие габариты значительно ограничивают область применения приборов этого рода.

2. ПРИБОРЫ С НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ОТСЧЕТОМ И ПРИБОРЫ С НАВОДКОЙ

Приборы с непосредственным отсчетом

Стрелочные приборы можно подразделить на две подгруппы: приборы с непосредственным отсчетом и приборы, требующие предварительных манипуляций, — приборы с наводкой.

К приборам с непосредственным отсчетом относятся все приборы, о которых говорилось выше, т. е. такие, которые, будучи приведены в действие, дают на всем диапазоне измерений, для которых они предназначены, соответствующие показания, не требуя вмешательства наблюдателя. Такие приборы представляют наибольшее удобство в эксплуатации. В ряде случаев только такие приборы и могут быть использованы, и именно в таких случаях, когда требуются быстрые отсчеты и наблюдатель должен быть по возможности разгружен от всяких излишних действий.

С другой стороны, приборы с непосредственным отсчетом обладают двумя существенными недостатками:

1) всякое повышение чувствительности прибора с непосредственным отсчетом всегда связано со значительными затруднениями как принципиального, так и технологического порядка, кроме того, оно упирается в определенные ограничения, которые сравнительно легко могут быть преодолены применением другой методики измерения;

2) приборы с непосредственным отсчетом, обладающие большой чувствительностью, всегда весьма нежны и предъявляют повышенные требования в отношении ухода и условий эксплуатации.

Так как в конечном результате каждое измерение приходится тем или иным способом приводить к измерению длины (отсчеты по шкале), то повышение чувствительности прибора может быть достигнуто за счет двух мероприятий: 1) за счет увеличения перемещения

чувствительного элемента и 2) за счет увеличения передаточного отношения передаточного механизма.

Увеличение перемещения чувствительного элемента, не говоря о целом ряде других обстоятельств, связано с увеличением габаритов прибора (например в высотомере оно связано либо с увеличением числа anerоидных коробок, либо с увеличением их диаметра) и с уменьшением упругости системы чувствительного элемента. Оба обстоятельства не только невыгодны, но и в целом ряде случаев недопустимы. Уменьшение упругости при всех остальных равных условиях увеличивает собственный период колебаний прибора. Увеличение же передаточного отношения передаточного механизма без соответствующего улучшения его качеств (облегчения, уменьшения потерь на трение) тоже в большой степени влияет на увеличение собственного периода колебаний прибора и может в значительной степени увеличивать затирания в приборе.

Увеличение чувствительности, связанное с увеличением затираний в приборе или даже с увеличением хотя бы только масштаба погрешности от трения, не всегда рационально, так как чувствительность прибора должна находиться в строгом соответствии с его погрешностями.

Изменением чувствительности прибора по существу преследуется единственная цель — уменьшение погрешностей отсчета. Очевидно, что в правильно построенном приборе эти погрешности должны находиться в совершенно определенном соотношении с другими погрешностями, в частности с погрешностями от трения, о чем будет говориться ниже при исследовании инструментальных погрешностей приборов.

Нулевой метод измерения

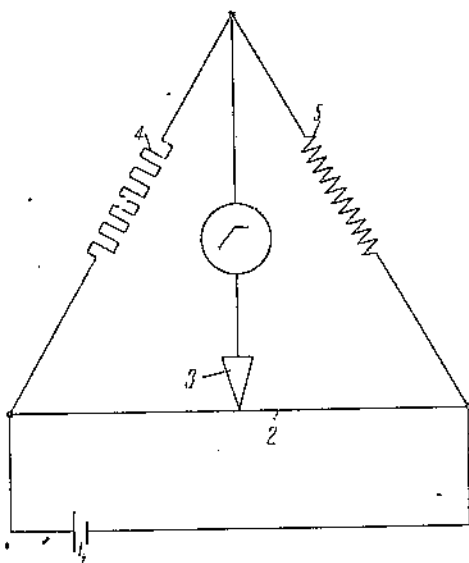
Таким образом мы видим, что постройка приборов большой чувствительности с непосредственным отсчетом связана со значительными затруднениями. В этом случае приходится прибегать к другому методу измерений, именно к так называемому нулевому методу.

Этот метод в основном заключается в том, что чувствительный элемент освобождается полностью от измерительных функций¹ или значительно ограничиваются пределы измерений, производимых непосредственно с помощью чувствительного элемента. В первом случае чувствительный элемент совершенно не измеряет интересующую нас величину, а только определяет наличие или отсутствие некоторого явления. На основании этого судят о совпадении или несовпадении измеряемой величины с некоторой известной величиной (одного и того же рода). Самое же измерение производится путем соответствующих манипуляций с прибором, производимых до тех пор, пока чувствительный элемент не покажет полного исчезновения данного явления.

¹ Согласно ОСТ/ВКС 7767 нулевой метод определяется так: нулевой метод заключается в подборе таких параметров измерительной схемы, в которых эффект, производимый измеряемой величиной, сопоставляется с эффектом другой известной величины так, чтобы суммарный эффект сводился к нулю.

В качестве простейшего примера нулевого метода измерений могут служить обыкновенные весы. Но весы относятся к разряду компарирующих приборов, т. е. таких измерительных приборов, которые служат для сравнения мер друг с другом или для сравнения измеряемой величины с отдельными от прибора мерами или образцами (компаратор и т. п.).

В качестве второго примера данного метода измерений может служить линейный мост Уитстона, применяющийся для измерений электрических сопротивлений. Мост Уитстона (фиг. 19) состоит из четырех сопротивлений, одно из которых подлежит измерению, три остальных являются измерительными и называются плечами. Одно из этих трех сопротивлений (плечо) постоянное, величина же двух других может меняться путем перемещения скользящего контакта. В частном случае простейшего моста Уитстона два переменных сопротивления представляют собой калиброванную струну, по которой перемещается скользящий контакт.



Фиг. 19. Схема линейного моста Уитстона.

1—батарея, 2—калиброванная струна (сопротивления R_1 и R_2), 3—скользящий контакт, 4—постоянное сопротивление, 5—измеряемое сопротивление, Г—гальванометр.

Все сопротивления представляют замкнутую цепь. Между точкой соединения постоянного и измеряемого сопротивлений и скользящим контактом включен гальванометр, а к точкам соединения переменных сопротивлений с постоянным и измеряемым (т. е. к концам калиброванной струны) подводится напряжение батареи. Таким образом электрический ток пройдет от одного полюса батареи к другому как через постоянное и измеряемое сопротивление, так и параллельно через оба переменных сопротивления. При известных условиях ток может не ответвляться в цепь гальванометра, при изменении же этих условий ток может частично ответвляться в ту или другую сторону через гальванометр.

Необходимое условие для того, чтобы ток не ответвлялся через гальванометр, заключается в том, чтобы произведения сопротивлений противоположных плеч мостика были равны. Это условие выводится из того обстоятельства, что разность потенциалов, зависящая от потери напряжения по пути следования тока по двум параллельным цепям моста между точками присоединения гальванометра, т. е.

местом соединения постоянного и измеряемого сопротивления и скользящим контактом, должна равняться нулю, т. е.

$$R_x R_1 = R_2 R_3,$$

где R_x — измеряемое сопротивление,
 R_3 — постоянное сопротивление,
 R_1 и R_2 — переменные сопротивления.
 Отсюда

$$R_x = R_3 \frac{R_2}{R_1}.$$

Так как R_3 для данного прибора является величиной постоянной, то измерение сводится к измерению сопротивлений R_1 и R_2 , которое производится (в данном частном случае) путем измерения участков калиброванной струны (т. е. калиброванного сопротивления) между ее концами и скользящим контактом (т. е. плеч калиброванной струны). Если через K обозначить удельное сопротивление струны (сопротивление на единицу длины струны) и через l_1 и l_2 — длины плеч калиброванной струны, т. е. $R_1 = K l_1$ и $R_2 = K l_2$, то будем иметь:

$$R_x = R_3 \frac{l_2}{l_1}.$$

Так как $l_2 = L - l_1$ (где L — длина всей струны — величина постоянная для данного прибора), то

$$R_x = R_3 \frac{L - l_1}{l_1}. \quad (13)$$

Здесь в конечном результате, как и в приборах с непосредственным отсчетом, измерение интересующего нас явления — электрического сопротивления — сводится к измерению длины.

Разница по сравнению с приборами с непосредственным отсчетом заключается в том, что в данном случае необходимое перемещение стрелки около измерительной шкалы производится не чувствительным элементом прибора, а рукой наблюдателя путем перемещения скользящего контакта, связанного со стрелкой. Кроме того, существенная разница заключается еще и в том, что наблюдатель, прежде чем сделать отсчет, должен выполнить ряд манипуляций, т. е. переместить скользящий контакт в соответствующее положение, наблюдая одновременно за поведением гальванометра.

Гальванометр также имеет шкалу и стрелку, но в данном случае шкала гальванометра служит не для измерений, а только для качественной оценки явления, а именно в первую очередь для определения наличия или отсутствия тока, а также для определения направления перемещения скользящего контакта и для примерной оценки, насколько нужно изменить величину переменных сопротивлений. По существу на шкале гальванометра достаточно иметь только нуль шкалы.

При таких обстоятельствах условия работы чувствительного элемента значительно облегчаются, так как для повышения качества прибора в данном случае достаточно добиться большей чувстви-

ности гальванометра только на небольшом участке — около нуля шкалы; что же касается перемещения стрелки около измерительной шкалы, то там мы можем получить любую чувствительность, так как там никакие затирания не страшны.

Смешанный метод измерения

При смешанном методе измерения чувствительный элемент производит измерение только в небольшом диапазоне; при измерениях же в больших диапазонах наблюдателю приходится выполнять соответствующие манипуляции. Примером такого прибора может служить статоскопический высотомер (фиг. 20).

Этот прибор, как и простой высотомер, имеет анероидную коробку (не одну в целях повышения чувствительности прибора, а набор из четырех беспружинных коробок, расположенных для взаимного уравновешивания попарно сверху и снизу большого рычага). Одной стороной каждая пара коробок соединена с большим рычагом (каждая пара коробок со своим плечом), передающим перемещение чувствительного элемента на стрелку. Другой стороной каждая пара коробок крепится на подвижном основании, выполненном в виде винта. Подвижные основания перемещаются с помощью расположенной снаружи прибора головки валика, соединенного с помощью шестерен с гайками, перемещающими подвижные основания коробок.

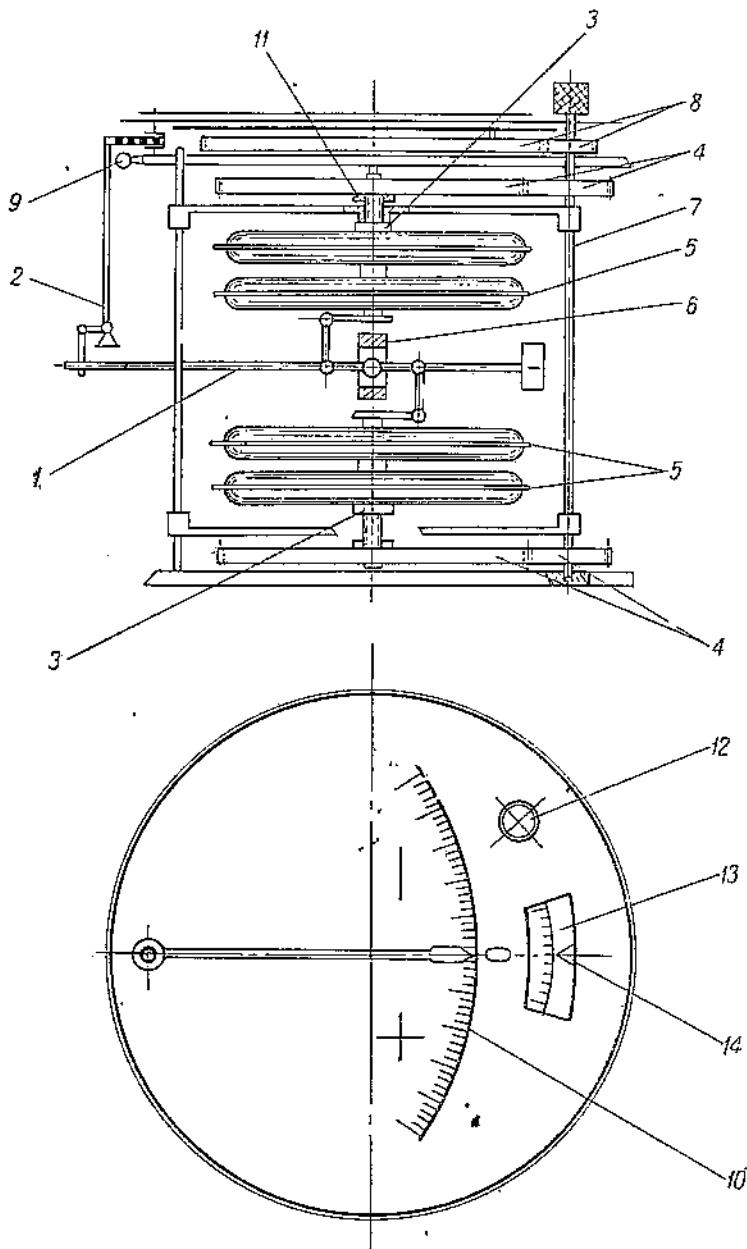
Вращая валик, можно сближать и удалять друг от друга обе пары коробок. Сближение ограничивается упорами на коробках. При крайнем сближении коробок их дальнейшее перемещение не изменяет положения стрелки, а только вызывает дополнительный прогиб мембран коробок. При удалении друг от друга коробок стрелка будет перемещаться (в обратную сторону) до тех пор, пока не дойдет до ограничителя, после чего большой рычаг отойдет от малого ломаного рычага, в который он в рабочем положении упирается. Таким путем прибор предохраняется от поломки.

Перемещение оснований коробок связано с перемещением второй более грубой шкалы относительно неподвижного индекса.

Следовательно данный прибор имеет две шкалы — одну мелкую (менее точную), связанную с перемещением оснований коробок, и другую крупную (более точную), относительно которой движется стрелка, перемещаемая чувствительным элементом.

Отсчет по данному прибору можно брать только в том случае, если стрелка не ушла из пределов крупной шкалы.

Производя измерения с помощью данного прибора, отсчет можно произвести двумя способами. Переместив коробки в такое положение, чтобы стрелка на крупной чувствительной шкале стала на нуль шкалы, отсчет производят только по одной мелкой (грубой) шкале, связанной с перемещением оснований коробок. Такой отсчет менее точен. Можно перемещать коробки до тех пор, пока стрелка крупной (чувствительной) шкалы не отойдет от упора и не остановится где-то в пределах крупной (чувствительной) шкалы, индекс же, относительно которого перемещается мелкая (грубая) шкала, совпадет с одной из



Фиг. 20. Схема статоскопического высотмера.

1—большой рычаг, 2—малый ломаный рычаг, 3—подвижное основание коробок, 4—зубчатая передача и гайка, перемещающей коробки, 5—беспружинные анероидные коробки, 6—упор, 7—валик, 8—зубчатая передача на грубую шкалу, 9—ограничитель, 10—крупная (чувствительная) шкала, 11—гайка, 12—головка валика, 13—грубая подвижная шкала, 14—неподвижный индекс.

отметок на этой шкале. В этом случае отсчет приходится брать по двум шкалам. Отсчет получается более точным вследствие того, что совмещение индекса с отметкой мелкой шкалы может быть произведено более точно, отсчет же по крупной шкале, который должен прибавляться или вычитаться из показания на мелкой шкале (в зависимости от знака, указанного на правой и левой частях шкалы, нуль которой находится посередине), обеспечивает также большую точность.

Этот прибор в пределах небольших изменений измеряемой величины является прибором с непосредственным отсчетом, при замерах же больших изменений замеряемой величины — прибором с наводкой, так как наблюдателю приходится перед отсчетом выполнить указанные выше манипуляции.

Чем же оправдывается применение такого смешанного метода измерений? При втором способе замера, с одной стороны, получается более чувствительный прибор, с другой, перемещение стрелки с помощью чувствительного элемента в этом приборе ограничивается 90° . Если бы такой же чувствительности прибор построить на весь диапазон измерений с непосредственным отсчетом, то чувствительному элементу пришлось перемещать стрелку на много оборотов, что сильно усложнило бы передаточный механизм (пришлось бы применить зубчатую передачу, т. е. построить двухстрелочный высотмер, о котором говорилось выше).

Кроме того, применение высотмера со смешанным измерением оправдывается еще и особыми эксплуатационными условиями, имеющими место в некоторых случаях: иногда летчику задается определенная высота полета, которую он должен держать с определенной точностью неизменно в течение всего полета. В этом случае данный прибор представляет значительные удобства. Заданная высота устанавливается заранее по мелкой шкале, и летчику остается только следить по крупной шкале за тем, чтобы отклонение от заданной высоты, т. е. от нуля крупной шкалы, не превосходило заданной величины.

Таким образом мы видим, что при значительных неудобствах нулевого метода измерений в целом ряде случаев он все-таки представляет ряд преимуществ. Если точность измерений начинает играть преимущественную роль, условия же работы наблюдателя позволяют загрузить его выполнением добавочных манипуляций перед отсчетом, такой метод измерения представляет определенные преимущества.

Приборы с наводкой

Приборы, построенные на принципе использования нулевого метода измерений, называются приборами с наводкой. Таким образом основное преимущество этих приборов заключается в том, что чувствительный элемент разгружается от значительной части работы, именно от перемещения стрелки по шкале, по которой производятся отсчеты показаний прибора.

Однако приборы с наводкой строятся с использованием нулевого метода измерений не только в целях повышения чувствительности. В целом ряде случаев нельзя найти нужной зависимости между

явлением, количественный фактор которого мы хотели бы замерить, и динамическим явлением. Например это имеет место при угловых измерениях.

Так, для замеров угловых расстояний между намеченными объектами с помощью теодолита нельзя построить такой чувствительный элемент, который бы сам, без помощи наблюдателя, отыскивал необходимый объект и прекращал бы движение нониуса относительно шкалы в момент, когда его оптическая ось переместится на величину угла, подлежащего измерению. Если по аналогии с другими приборами оптическую трубу теодолита с крестом нитей считать чувствительным элементом, то необходимо отметить, что такого рода чувствительные элементы выполняют только часть функций нормального чувствительного элемента: воспринимая интересующее нас явление (совпадение оптической оси с направлениями, образующими замеряемый угол), они позволяют только судить о совпадении замеряемого угла с известным углом, никак самостоятельно не реагируя на несовпадение или на изменение замеряемой величины.

По тем же причинам иногда приборы с наводкой строятся и не в связи с применением нулевого метода измерений, например планиметры.

Таким образом в целом ряде случаев приходится строить приборы, называемые «приборами с наводкой», которые, будучи приведены в действующее состояние, для получения показаний требуют еще особых передвижений самого прибора или его части (ОСТ/ВКС 7636).

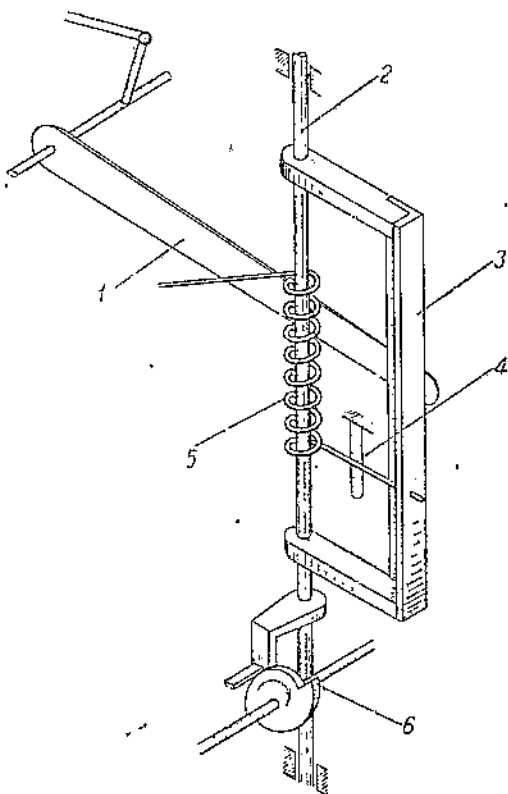
Имеется и еще один вид приборов, так называемых интегрирующих (например электрические счетчики), но мы на них особо останавливаться не будем, так как появление этого вида приборов обуславливается потребностью особого вида измерений, а не повышением какого-либо качества прибора в связи с применением такого метода измерений. Точно так же мы не будем останавливаться на комплектных приборах, являющихся по существу разновидностью компарирующих приборов (см. ОСТ/ВКС 7636).

3. ПРИБОРЫ С ВИЗУАЛЬНЫМ ОТСЧЕТОМ И САМОПИШУЩИЕ

Показывающие приборы делятся на приборы с визуальным отсчетом и самопишущие. Самописцы, требуя дополнительного механизма для перемещения ленты, на которой производится запись, обыкновенно более сложны. Кроме того, самописцы требуют затраты добавочной мощности на преодоление трения пера о бумагу, действующего на большом плече, и поэтому обыкновенно менее точны по сравнению с соответствующими приборами с визуальным отсчетом. Габариты их обычно значительно больше габаритов приборов с визуальным отсчетом, что обусловлено как добавочными механизмами, перемещающими ленту, так и необходимостью использования более или менее прямолинейной шкалы. В этом заключается значительный их недостаток. Преимущество этих приборов заключается в том, что они записывают свои показания и в процессе выполнения измерения не тре-

буют наличия наблюдателя. Кроме того, при применении таких приборов после измерения остается документ.

Некоторым усложнением самопишущих приборов можно добиться значительного повышения их точности, например заменой чернильной (или другой подобной) записи накальвающей записью (фиг. 21). В этом случае стрелка движется относительно ленты без трения. Накол (фиг. 21) происходит вследствие периодических ударов конца накальвающего рычага с иглой о ленту, вызываемых специальным ударным механизмом. Это мероприятие, конечно, еще больше усложняет прибор, но благодаря ему можно получить прибор, в отношении точности не уступающий прибору с визуальным отсчетом. В данном случае погрешности от трения уменьшаются не только за счет отсутствия трения на конце пишущего рычага, но и за счет сотрясений, которые дает накальвающий механизм. Кроме того, накальвающая запись дает исключительные эксплуатационные преимущества, совершенно исключая необходимость весьма сложного ухода за прибором (зарядка чернилами и пр.).



Фиг. 21. Схема ударного механизма накальвающей записи.

1—накальвающий рычаг, 2—ось ударной рамки, 3—ударная рамка, 4—ограничитель, 5—вводящая пружина ударной рамки, 6—эксцентрик, вводящий ударную рамку.

Значительное повышение точности дает также фотозапись, при которой используются оптические передачи (о которых говорилось выше), но этот способ записи представляет значительные эксплуатационные неудобства, требуя предохранительных мер от засвечивания ленты и последующего ее проявления.

4. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ЗАПИСЫВАЮЩИМ МЕХАНИЗМАМ

При выполнении самопишущего прибора необходимо иметь в виду следующие требования. Записывающий механизм должен обеспечивать: 1) сохранение постоянной длины пишущего рычага, т. е. неизменность положения пишущего конца пера относительно пишущего

рычага; 2) возможно более тонкую линию записи; 3) наименьшее трение пера о бумагу; 4) надежность записи; 5) удобство эксплуатации.

Чернильная запись более или менее удовлетворяет первым двум требованиям, третьему и четвертому требованиям она удовлетворяет не полностью (последнему вследствие высыхания, замерзания чернил, загрязнения пера и ряда других причин); пятое требование она не разрешает совсем.

Весьма хорошие результаты дает запись по копченой бумаге с последующей фиксацией лаком, но она плохо удовлетворяет третьему требованию, полностью не удовлетворяет пятому и неприменима при использовании длинных лент, перематывающихся с одного барабана на другой. Фотозапись удовлетворяет первым четырем требованиям, но совершенно не удовлетворяет пятому.

Большой интерес представляет микроскопическая запись алмазом по стеклу, в особенности в связи с тем, что она позволяет значительно уменьшать габариты приборов и передаточные отношения передаточных механизмов, уменьшая масштаб записи как по ординате, так и по абсциссе. Но она плохо удовлетворяет пятому требованию, так как расшифровка ее с помощью микроскопа очень сложна.

Существует еще целый ряд различных способов записи: электролитический с помощью тока (4 V, 2—3 mA) по влажной бумажной ленте, обработанной иодистым калием и крахмалом, искровая запись (током высокого напряжения 800—900 V и выше), запись с помощью серебряного штифта на специальной бумаге, способ применения копировальной бумаги и ряд других.

Но можно с уверенностью сказать, что при условии возможности использования некоторой избыточной мощности ведущего бумажную ленту механизма накалывающий способ является наиболее целесообразным в большинстве случаев, так как он полностью удовлетворяет всем пяти пунктам.

5. ДИСТАНЦИОННЫЕ ПРИБОРЫ

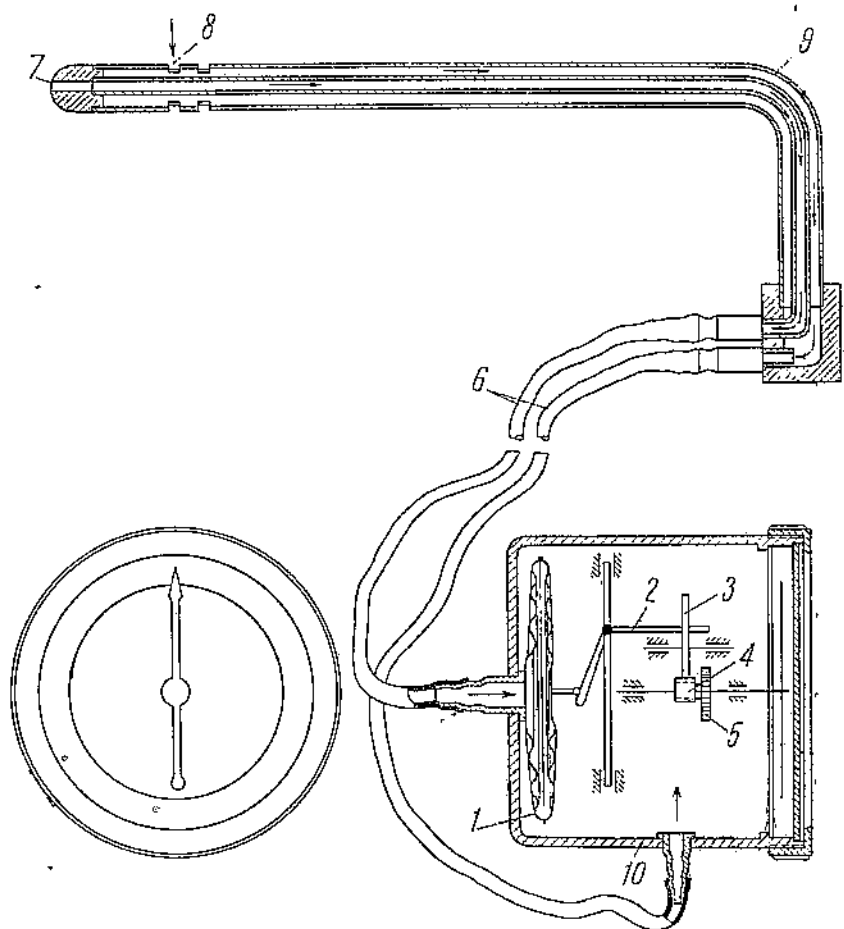
Приборы с визуальным отсчетом и самопишущие приборы, как и ряд других, указанных выше, могут быть как дистанционными (действующими на расстоянии), так и недистанционными.

Дистанционные приборы обязательно состоят из трех элементов: 1) элемента, расположенного в месте измерений, 2) элемента, расположенного у наблюдателя, и 3) соединительной проводки.

Эта группа приборов может быть разбита на две подгруппы: 1) приборы, воспринимающие измеряемое явление на расстоянии, 2) приборы, передающие измеряемую величину на расстояние.

Указанные выше три элемента прибора первой подгруппы будут: 1) приемник, т. е. та часть прибора, которая воспринимает измеряемое явление и в том или другом виде передает его измерителю; 2) измеритель — элемент, производящий измерение и являющийся по существу собственно измерительным прибором; 3) соединительная проводка.

В качестве примера можно привести аэродинамический указатель скорости (фиг. 22). Трубка Пито с нифером в данном приборе является приемником, воспринимающим скорость воздушного потока. Последняя преобразуется в трубке Пито в давление скоростного напора



Фиг. 22. Схема указателя скорости с приемником системы Пито.

5—манометрическая коробка системы Види, 2—рычажная передача, 3—сектор, 4—трещинка, 1—волосок, 6—соединительная проводка, 7—динамическое отверстие (давление скоростного напора), 8—статическое отверстие (нифер), 9—приемник, 10—измеритель.

(динамическое давление), которое, как и статическое давление, воспринимаемое нифером, передается измерителю. Манометр с манометрической коробкой системы Види, измеряющий разность передаваемых статического и динамического давлений, является измерителем. Соединительные алюминиевые или резиновые трубки, по которым передается давление от приемника к измерителю, являются соединительной проводкой.

В качестве другого примера может служить электрический тахометр, где приемником служит небольшой генератор, устанавливаемый на валу, обороты которого подлежат измерению, и преобразующий воспринимаемое явление—угловую скорость—в электрическое напряжение. Вольтметр, измеряющий напряжение на зажимах генератора, является измерителем, а электрические провода — соединительной проводкой.

Несколько иной вид дистанционных приборов, относящихся ко второй подгруппе, встречается при применении тех или других видов синхронных передач. В данном случае (что встречается чаще) в том месте, где необходимо произвести измерение, ставится измерительный прибор, перемещение стрелки или чувствительного элемента которого с помощью синхронной передачи передается к месту нахождения наблюдателя. Таким образом в этом случае измерение производится в том месте, где протекает интересующее нас явление, и к месту расположения наблюдателя передается уже готовый результат измерения.

В некоторых случаях с помощью синхронной передачи к месту нахождения наблюдателя передается и самое явление, где оно замедляется с помощью нормального измерительного прибора. Например, при замере скорости вращения можно с помощью синхронной передачи это вращение передать в любое место и там замерить его угловую скорость с помощью нормального тахометра. В этом случае мы будем иметь дело с прибором, относящимся к первой группе.

Дистанционные приборы, представляя собой в большинстве случаев значительно более сложные механизмы, имеют громадное преимущество, позволяя помещать наблюдателя независимо от места измерения. Таким образом они дают возможность не только производить измерения в тех местах, где во время измерения нахождение наблюдателя невозможно, но и концентрировать показания приборов, производящих измерения в различных местах, у одного наблюдателя.

6. СТАТОСКОПЫ

В заключение необходимо остановиться на особом виде приборов, называемых статоскопами. Эти приборы по существу не являются измерительными приборами, так как они не дают количественных показаний. Они показывают только наличие или отсутствие и характер того или другого явления. К таким приборам можно отнести указатель поворота, применяемый на самолете, который показывает наличие угловой скорости самолета в правую или левую сторону (или ее отсутствие), но не замеряет величины этой угловой скорости. Такие приборы обыкновенно не имеют самостоятельного применения, а применяются в комбинации с другими в качестве вспомогательных. В частности такой указатель поворота применяется вместе с компасом, облегчая летчику ведение по прямой самолета (и выполнение некоторых других эволюций самолета в соединении с относительным уклоном).

Заканчивая рассмотрение вопроса о классификации приборов, необходимо упомянуть еще об одном подразделении приборов, поскольку оно является важной самостоятельной областью. Собственно измерительный прибор, являющийся в данной категории приборов основным элементом, по существу ничем не отличается от остальных измерительных приборов, за исключением того, что он должен давать импульсы (путем замыкания контактов и другими способами), приводящие в действие исполнительные механизмы. К этому подразделению относятся автоматы и полуавтоматы.

Область автоматики в настоящее время получает исключительно широкое развитие.

В самом начале мы условились называть измерительными приборами только те, которые имеют своим назначением измерение явления. Единственно, чем мы позволяем еще нагружать измерительные приборы кроме измерения, — это управлением¹.

Вот здесь-то и имеется обширная область для автоматики, разработкой которой сейчас занимаются специальные институты и организации. Эти приборы не только дают показания, но и, кроме того, сами претворяют свои показания в то или иное действие. В зависимости от того, дают ли такого рода приборы только сигналы о необходимости выполнения тех или других действий, или одновременно приостанавливают процесс, или же полностью регулируют процесс, они подразделяются на автоматы и полуавтоматы.

В настоящее время в целом ряде областей технологический процесс производства очень усложнился и требует одновременного строго

¹ Здесь мы сталкиваемся с вопросом терминологии: что относить к области измерительных приборов. Так как настоящая работа не ставит целью установления всеобъемлющей терминологии, то подробно на этом вопросе мы останавливаться не будем, выскажем только некоторые общие соображения, относящиеся к этому вопросу.

Так, подходя к автоматике, мы встречаемся с целым рядом градаций измерительных элементов автоматических и полуавтоматических устройств, начиная с нормального измерительного прибора, не только управляющего с помощью вспомогательных устройств теми или другими механизмами, но и дающего показания измеряемой величины, и кончая приспособлением в виде максимальных выключателей, которые, реагируя на определенную величину, характеризующую данное явление, производят соответствующие действия. Кажется бы, последние не соответствуют названию измерительных приборов. К измерительным приборам следовало бы относить только те измерительные элементы автоматических и полуавтоматических устройств, которые сами не являются исполнителями тех или других действий, требующихся для измерения или приостановления данного процесса (подобно максимальным выключателям), а только с помощью соответствующих приспособлений (контакты, реле и пр.) управляют специальными исполнительными механизмами.

Таким образом к разряду измерительных приборов, по нашему мнению, следовало бы относить только такие измерительные устройства, которые сами реагируют во всем диапазоне измерений, на который они рассчитаны, или в части диапазона (например при нулевом методе измерений) на изменение в обе стороны измеряемой величины и которые дают визуальный отчет, записывают значения измеряемой величины, управляют соответствующими механизмами либо, наконец, делают и то и другое совместно.

согласованного участия большого количества механизмов, требующих в свою очередь быстрого и точного управления. Усложнение процесса настолько велико, что человек уже не в состоянии полностью управлять процессом. В данном случае на помощь приходит автоматика как высшая ступень развития техники, заменяющая наиболее сложный механизм — мозг человека.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. ЗНАЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ И ИЗМЕРЕНИЯХ

Создание любого объекта народного хозяйства страны связано с тремя этапами работ. Первым этапом является научно-исследовательская работа, разрабатывающая метод осуществления данного объекта и метод его расчета; вторым этапом является расчет объекта и конструктивное его оформление; третьим этапом является его выполнение.

Все эти три этапа обладают той особенностью, что ни один из них не может быть выполнен с абсолютной точностью. Это происходит потому, что ни измерений, ни большинства вычислений нельзя делать с абсолютной точностью. Нельзя построить такой прибор, который не давал бы в результате измерения той или другой, хотя бы и весьма малой, погрешности, нельзя найти такой метод измерения или обработки результата измерения, который позволил бы полностью исключить все погрешности прибора.

Не говоря уже о том, что при вычислениях обыкновенно пользуются теми или другими неточными величинами, полученными в результате соответствующих измерений, часто само вычисление может быть такого рода, что не дает решения во вполне законченном виде, например при оперировании с иррациональными числами. Наконец, выполнение того или другого объекта опять-таки нельзя произвести с абсолютной точностью.

Однако любое измерение, вычисление и выполнение могут быть осуществлены с весьма различными точностями, т. е. различными количественными несовпадениями тех величин, которые получаются в результате действий, с истинными значениями этих величин. Так как повышение точности, т. е. уменьшение количественных расхождений, связано с усложнением, иногда весьма значительным, выполняемой работы, то возможность предварительного определения необходимой и получаемой точности в результате тех или других действий играет исключительную роль.

Определяя перед началом работы необходимую точность всех отдельных участков работы, можно тем самым своевременно выявить недостаточную точность какого-нибудь одного, возможно незначительного, по сравнению со всем объемом, участка работы и тем самым предупредить получение недоброкачественных результатов всей работы.

Обратно, можно тем же самым предупредить стремление на целом ряде участков работы к излишней ненужной точности и таким образом предупредить выполнение иногда весьма большого количества излишней ненужной работы и этим удешевить и ускорить результат работы. В качестве примера можно привести указание академика А. И. Крылова в его курсе «Теория корабля» на то, что в прежнее время судостроительные заводы в своих проектах проделывали до $9/10$ и даже до $34/35$ излишней вычислительной работы, производя вычисление с излишней совершенно ненужной степенью точности.

Таким образом, резюмируя все изложенное, необходимо отметить исключительную важность совершенно четкого согласования необходимой точности выполнения отдельных участков работы между собой, а также правильного установления требуемой точности конечного результата работы. Для решения всех этих вопросов служит теория погрешностей.

2. АБСОЛЮТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Как уже указывалось, мы всегда имеем дело с большим или меньшим расхождением численных значений ¹ тех или других величин, которые получаются в результате работы (измерения, вычисления или выполнения), с истинными или заданными численными значениями этих величин. Величину расхождения этих численных значений мы называем абсолютной погрешностью. Таким образом, если в результате, например, измерения какой-либо величины, истинное численное значение которой есть A , мы получим численное значение a , то

$$\Delta a = A - a$$

и будет абсолютной погрешностью. Полученное нами численное значение может быть меньше и больше истинного численного значения данной величины.

Совершенно очевидно, что абсолютная погрешность сама по себе еще не определяет качества данного измерения. Например если при измерении некоторого неизвестного нам расстояния будет допущена абсолютная погрешность, равная 1 см, то это еще никак не определит качества выполненного измерения. Если же мы будем знать, что при измерении расстояния в 1—2 м была допущена абсолютная погрешность, равная 1 см, то мы можем утверждать, что произведенное измерение весьма невысокого качества. Производя же, скажем, измерение расстояния в несколько километров и допустив при этом ту же самую абсолютную погрешность, равную 1 см, мы вправе утверждать, что произведенное измерение весьма высокого качества.

Таким образом абсолютная погрешность только тогда определяет качество измерения, когда мы ее рассматриваем в соотношении со

¹ Численным значением мы называем число, показывающее, сколько раз единица данного рода содержится в измеряемой величине (одного и того же с ней рода). Численное значение обратно пропорционально величине выбранной единицы, поэтому при получении численного значения в результате измерения всегда указывается единица, с помощью которой было произведено измерение, т. е. численное значение является числом именованным.

всей измеренной величиной. В связи с этим в большинстве случаев удобнее пользоваться другой величиной, характеризующей измерение, именно относительной погрешностью, определяемой как отношение численного значения абсолютной погрешности Δa к истинному численному значению A всей измеренной величины. Если обозначить относительную погрешность буквой δ , то согласно нашему определению

$$\delta = \frac{\Delta a}{A}.$$

Вводя понятие об относительной погрешности, мы получаем и еще ряд важных преимуществ, — получаем возможность сравнивать между собой результаты измерений, выраженные в разных единицах измерений, а также сравнивать качество выполненных измерений не только величин одного и того же рода, но и измерений величин разного рода.

Так как относительная погрешность, являясь отношением двух именованных чисел, — число отвлеченное, то она дает возможность сравнивать два измерения величин одного и того же рода, но произведенные с помощью различных единиц измерения. Например можно утверждать, что качество измерения расстояния в 1 м с абсолютной погрешностью в 1 мм в сто раз хуже качества измерения расстояния в 1 км с абсолютной погрешностью в 1 см, хотя абсолютная погрешность второго измерения в 10 раз больше абсолютной погрешности первого.

Мы утверждаем это потому, что относительная погрешность первого измерения

$$\delta_1 = \frac{1}{1000},$$

относительная же погрешность второго измерения

$$\delta_2 = \frac{1}{100\,000}.$$

По этой же самой причине (относительная погрешность — отвлеченное число) можно сравнивать два измерения величин разного рода. Например можно утверждать, что при настоящем развитии техники весовые измерения можно производить значительно более высокого качества, чем измерения, скажем, ряда электрических величин. Для лучших электроизмерительных приборов (для лабораторных магнитоэлектрических амперметров и вольтметров первого класса) допускается относительная приведенная погрешность $\delta = 0,002 = 2 \cdot 10^{-3}$, в то время как обыкновенные лабораторные аналитические весы на 200 г дают возможность производить взвешивание с относительной погрешностью порядка $\delta = 0,000001 = 10^{-6}$. Как уже указывалось, наивысшая точность относительных электрических измерений в настоящее время достигает 10^{-6} , в то время как наивысшая точность весовых измерений достигает 10^{-8} , а в некоторых случаях бывает и выше.

Таким образом относительная погрешность определяет полностью качество измерения или, как мы говорим, степень точности измерения

Относительные погрешности обычно выражаются в процентах (%) или промиллях (‰).

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

Определив понятие об абсолютной и относительной погрешностях, необходимо заметить, что в большинстве случаев невозможно определить абсолютную погрешность, а вместе с тем, следовательно, и относительную. В большинстве случаев бывает неизвестно истинное численное значение A тех величин, с которыми приходится иметь дело. Производя, например, измерение, мы получаем только то численное значение интересующей нас величины, которое дает нам прибор, истинное же значение этой величины мы не знаем. Применяя более точные методы измерений и более точные приборы, можно все более и более приближаться к истинному значению, но только в тех пределах, которые определяются данным уровнем развития измерительной техники.

Однако, исследуя качество прибора, всегда можно определить максимальную погрешность, которую может в худшем случае дать данный прибор, т. е. предельное значение погрешности, которое при правильном использовании прибора ни в коем случае не может быть превзойдено. Например, при упоминании о лабораторных магнитоэлектрических вольтметрах и амперметрах первого класса указывалось, что для этих приборов допускаемая приведенная ¹ погрешность ² $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$. Это значит, что при измерении, например, одноамперным прибором величины любой силы тока в пределах 1 А абсолютная погрешность не может превзойти $2 \cdot 10^{-3}$. Не зная истинного значения измеряемой величины, нельзя сказать точно, какую именно мы получим абсолютную погрешность при данном измерении силы тока, но можно утверждать, что она ни в коем случае не превзойдет указанной выше величины, т. е. действительное абсолютное значение абсолютной погрешности будет равно или меньше этой величины:

$$\Delta a \leq \pm 2 \cdot 10^{-3} A$$

или

$$|\Delta a| \leq |\Delta' a|.$$

Значение максимальной абсолютной погрешности $\Delta' a$, т. е. такой, абсолютное значение которой при соблюдении всех необходимых условий ни в коем случае не может быть превзойдено при данном методе измерений, называется предельной абсолютной погрешностью.

¹ Для измерительного прибора со шкалой под приведенной погрешностью понимается погрешность его показания, отнесенная к верхнему пределу измерения, если прибор имеет одностороннюю шкалу, к сумме верхнего и нижнего пределов измерения, если прибор имеет двухстороннюю шкалу, к разности между верхним пределом измерения и значением измеряемой величины, соответствующим началу шкалы, если прибор имеет безнулевую шкалу (ОСТ/ВКС 7636).

² Это указывает на то, что выполнение прибора должно быть такого качества, чтобы при правильном его использовании в наиболее неблагоприятном случае, если все его погрешности сложатся и будут иметь максимальное значение, суммарная погрешность для определенных пределов измерения была меньше или в крайнем случае равна указанной величине.

Таким образом истинное значение A измеряемой величины больше или, в крайнем случае, равно разности значения, полученного в результате измерения, и значения предельной абсолютной погрешности, а с другой стороны, меньше или, в крайнем случае, равно сумме полученного значения и значения предельной абсолютной погрешности, т. е.

$$a - \Delta' a \leq A \leq a + \Delta' a.$$

Иначе говоря, предельная абсолютная погрешность $\Delta' a$, взятая с отрицательным знаком, меньше или, в крайнем случае, равна разности истинного значения измеряемой величины и полученного значения в результате измерения, и та же предельная абсолютная погрешность, взятая с положительным знаком, больше или, в крайнем случае, равна той же разности, т. е.

$$-\Delta' a \leq A - a \leq +\Delta' a.$$

Отношение значения предельной абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины называется предельной относительной погрешностью:

$$\delta' = \frac{\Delta' a}{A}.$$

Однако по той же причине, что указывалось выше, в качестве предельной относительной погрешности на практике приходится брать отношение значения предельной абсолютной погрешности не к истинному значению измеряемой величины (которое в большинстве случаев неизвестно), а к значению, полученному в результате измерения или вычисления, т. е.

$$\delta'' = \frac{\Delta' a}{a}.$$

Допускаемая при этом неточность настолько мала, что ею можно пренебречь, а именно:

$$\delta'' - \delta' = \frac{\Delta' a}{a} - \frac{\Delta' a}{A} = \delta'' \left(1 - \frac{a}{A} \right).$$

Так как

$$A = a + \Delta a = a(1 + \delta) = a(1 + \delta''),$$

где

$$-1 \leq \delta \leq +1,$$

то

$$\delta'' - \delta' = \delta'' \left[1 - \frac{a}{a(1 + \delta'')} \right] = \frac{\delta''^2 a}{1 + \delta''}.$$

Таким образом, мы пренебрегаем квадратом величины, которая сама по себе является величиной достаточно малой и, как правило, бывает не более нескольких процентов.

Так как на практике по существу приходится иметь дело почти исключительно с предельными абсолютными и предельными относительными погрешностями, то в дальнейшем изложении мы в некоторых случаях будем опускать слово предельная, подразумевая всегда под выражениями абсолютной и относительной погрешностей понятия предельных значений этих погрешностей.

4. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ И СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Ознакомившись с понятием, что называется погрешностью, необходимо несколько остановиться на самой природе погрешностей. Так, погрешности могут появляться в результате тех или других явлений, не поддающихся нашему наблюдению, например погрешности измерительных приборов, появляющиеся в результате затираний подвижных частей приборов. Очевидно, до тех пор, пока изменение измеряемой величины не достигнет таких пределов, при которых затирания в приборе будут превзойдены и стрелка прибора начнет перемещаться, нельзя определить, происходят ли какие-либо изменения измеряемой величины или нет, а следовательно, нельзя определить, влияет ли в данный момент затирание на показание прибора или нет, и если влияет, то в какую сторону и в какой мере. Присутствие таких погрешностей можно обнаружить только повторными измерениями одной и той же величины, проведенными с одинаковой тщательностью, при которых получаются числовые результаты, расходящиеся в последних значущих цифрах. Такие погрешности мы называем случайными.

В целом ряде случаев явления, вызывающие те или другие погрешности приборов, поддаются наблюдению, и зависимости между этими явлениями и погрешностями поддаются изучению. Известно, что температурные изменения могут влиять на показания приборов, хотя бы, например, в связи с изменением упругости измерительных пружин приборов и т. п. Изменение упругости измерительных пружин в зависимости от изменения температуры, а вместе с тем и изменение показаний прибора может быть изучено, температура же, в которой работает прибор, в большинстве случаев может быть измерена. Таким образом эти погрешности приборов могут быть изучены и при пользовании прибором могут быть с известной точностью исключены путем наблюдения за явлением, их вызывающим, и последующим введением соответствующих поправок. Такие погрешности мы называем систематическими.

Поскольку систематические погрешности поддаются устранению последующим введением соответствующих поправок в показания приборов, наличие и размеры этих погрешностей во всех случаях, когда условия измерения позволяют вести наблюдение за явлением, их вызывающим, а также вводить соответствующие поправки, не играют существенной роли. Наличие и размеры случайных погрешностей во всех случаях измерений играют весьма важную роль, непосредственно определяя качество конечного результата измерения.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Исследования погрешностей при вычислениях и измерениях тесно связаны между собой.

Исследование погрешностей при измерениях можно разбить на два этапа: первый этап заключается в исследовании, какие явления, как и по каким причинам претерпевают те или другие количественные изменения при данном измерении; второй этап заключается в исследовании, как отражаются данные количественные изменения этих яв-

ний на конечном результате измерения. Для исследования второго этапа нужно знать закономерную зависимость между явлениями, влияющими на конечный результат измерений, выражаемую соответствующими уравнениями. Поэтому исследование погрешностей, соответствующее второму этапу, сводится к исследованию этих уравнений, т. е. к исследованию погрешностей, получающихся в результате выполнения тех или других математических действий, необходимых для решения данного уравнения. При этом эти погрешности могут получиться как за счет неточности величин, входящих в уравнения, так и за счет неточности выполнения самих математических действий. В связи с этим в первую очередь целесообразно остановиться на некоторых начальных положениях теории приближенных вычислений, касающихся различных действий при вычислениях¹.

В первую очередь необходимо указать, что при оперировании с числами имеется весьма простой способ определения относительной погрешности (предельной) путем счета верных десятичных знаков, начиная с первой слева значащей цифры. Всякое число можно написать в виде десятичной дроби. Первая цифра слева направо, отличная от нуля, называется первой значащей цифрой. Например в двух числах 293,758 и 0,00087985 в первом первой значащей цифрой будет 2, во втором — 8. Любое иррациональное число может быть написано с любым количеством знаков. Например число π можно написать с восемью знаками $\pi = 3,1415927$, с тремя $\pi = 3,14$ и с любым другим количеством знаков. Однако во всех вычислениях берется определенное количество знаков в зависимости от требуемой степени точности. Отбрасывая лишние знаки, можно не менять последнюю оставляемую цифру или же в том случае, если первая из отбрасываемых цифр больше 5, добавлять к оставляемой цифре 1, если же меньше, то оставлять ее без изменения. В первом случае мы поступаем, не пользуясь правилом дополнения, во втором поступаем по правилу дополнения. Написав число π с пятью десятичными знаками и оставив последнюю цифру без изменения ($\pi = 3,1415$), мы поступаем, не пользуясь правилом дополнения, если же мы к последней из оставшихся цифр прибавим 1 ($\pi = 3,1416$), то мы поступим по правилу дополнения. Очевидно, в первом случае мы допускаем абсолютную погрешность, ни в коем случае не превышающую единицу последнего знака данного числа, во втором — половину этой единицы. Принято говорить, что число a является приближением числа A с n верными знаками в том случае, если абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего n -го знака, и число a является приближением числа A с n верными знаками по правилу дополнения в том случае, если абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего n -го знака. Таким образом, предельная абсолютная погрешность в первом случае будет:

$$\Delta a = 1 \cdot 10^{m-n+1},$$

¹ Я. Безикович, Теория приближенных вычислений, ГТТИ, 1932.
А. Виньерон, Обработка результатов физико-химических наблюдений, 1934.

где m определяет порядок величины первой значащей цифры. Во втором случае предельная абсолютная погрешность будет:

$$\Delta a = \frac{1}{2} 10^{n-n+1}.$$

Следовательно, предельная относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta a}{A} = \frac{10^{m-n+1}}{A},$$

если не пользоваться правилом дополнения, и

$$\delta = \frac{\Delta a}{A} = \frac{10^{m-n+1}}{2A},$$

если пользоваться правилом дополнения.

Каждое число можно представить в следующем виде:

$$A = z_1 10^m + z_2 10^{m-1} + z_3 10^{m-2} + \dots + z_n 10^{m-n+1}.$$

Например

$$293,758 = 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}.$$

Обозначим z_1 с помощью z , т. е. $z_1 10^m = z 10^m$, а остальные слагаемые напомним так:

$$10^m \left(\frac{z_2}{10} + \frac{z_3}{10^2} + \frac{z_4}{10^3} + \dots + \frac{z_n}{10^{n-1}} \right).$$

В этом случае выражение в скобках является правильной десятичной дробью, т. е. оно меньше единицы. Следовательно, заменив выражение в скобках единицей, мы допускаем абсолютную погрешность $\Delta a \leq 1 \cdot 10^m$. Таким образом, можно утверждать, что число A лежит в пределах:

$$z 10^m \leq A \leq z 10^m + 10^m$$

или

$$z 10^m \leq A \leq 10^m(z+1).$$

Например, если

$$A = 293,758 = 2 \cdot 10^2 + 10^2 \left(\frac{9}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{8}{10^5} \right),$$

то, так как

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{8}{10^5} < 1,$$

будем иметь:

$$2 \cdot 10^2 < A < 10^2(2+1).$$

Обозначая число 2 с помощью z и сумму в скобках с помощью Δa , т. е.

$$\Delta a = \frac{9}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{8}{10^5},$$

можно распространить сказанное выше на любое число, причем в этом случае z будет первой значащей цифрой любого числа, значение же Δa может меняться в пределах от 0 до 1. Следовательно, в общем виде получим:

$$z 10^m \leq A \leq 10^m(z+1),$$

где знак равенства соответствует возможным крайним значениям Δa .

Из изложенного следует, что истинная предельная относительная погрешность δ_{π} будет:

$$\delta_{\pi} \leq \frac{10^{m-n+1}}{z \cdot 10^m} = \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$$

без правила дополнения и

$$\delta_{\pi} \leq \frac{10^{m-n+1}}{2 z \cdot 10^m} = \frac{1}{2 z \cdot 10^{n-1}}$$

по правилу дополнения, т. е. если число a есть приближение числа A с n верными знаками, то предельная относительная погрешность ни в коем случае не будет превышать единицы, деленной на первую значащую цифру числа a , умноженную на 10 в степени $n - 1$ без правила дополнения, и половины этой величины по правилу дополнения. Эта теорема дает возможность весьма просто, правда, достаточно грубо, судить по количеству верных знаков о допустимой предельной относительной погрешности.

Можно приближенно решить и обратную задачу: определить, меньше какого количества верных знаков ни в коем случае не будет иметь число, если его относительная погрешность не превышает определенной величины. Для этого нужно пользоваться другой зависимостью:

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{1}{(z+1)10^{n-1}}.$$

Это видно из следующих соображений. Так как по большей части

$$z \cdot 10^m < A,$$

то, следовательно, для случая, когда

$$\delta_{\text{зад}} = \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}},$$

мы имели бы

$$\delta_{\text{зад}} > \frac{10^{m-n+1}}{A},$$

т. е. для данного значения $\delta_{\text{зад}}$ количество верных знаков может оказаться меньше n . Чтобы число верных знаков не было меньше n , необходимо сохранение условия

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{10^{m-n+1}}{A}.$$

Это условие удовлетворяется всегда в том случае, если

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{10^{m-n+1}}{(z+1) 10^m}$$

или

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{1}{(z+1)10^{n-1}}$$

поскольку

$$(z+1)10^m > A.$$

При пользовании правилом дополнения указанное выше условие будет:

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{1}{2(z+1)10^{n-1}}.$$

Таким образом, если

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{1}{(z+1)10^{n-1}}$$

без правила дополнения, и если

$$\delta_{\text{зад}} \leq \frac{1}{2(z+1)10^{n-1}}$$

по правилу дополнения, можно утверждать, что число верных знаков будет n или больше n .

При исследовании погрешностей простейших арифметических действий могут быть поставлены две задачи: 1) определить относительную погрешность конечного результата при выполнении этих вычислений с числами, относительные погрешности которых известны, и 2) определить, какие допустимы относительные погрешности чисел, входящих в данное вычисление, для получения конечного результата с определенной точностью.

Предположим, мы должны произвести некоторые арифметические действия над рядом чисел, одно из которых может меняться в пределах от a до $a + \Delta a$. Если обозначить конечный результат вычисления для указанных выше предельных значений этого числа через A и $A + \Delta A$, то можно написать следующие зависимости:

$$A = f(a) \text{ и } A + \Delta A = f(a + \Delta a).$$

На основании формулы Лагранжа для конечных приращений можно написать:

$$f(a) - f(a + \Delta a) = \Delta a f'(a + \theta \Delta a)$$

или

$$\Delta A = \Delta a f'(a + \theta \Delta a),$$

где $0 < \theta < 1$.

Так как далее Δa (под Δa подразумевается предельная абсолютная погрешность) мала по сравнению с a , а $\theta \Delta a$ — тем более, то величиной $\theta \Delta a$ можно пренебречь, и мы получим следующее выражение для определения абсолютной погрешности конечного результата вычислений:

$$\Delta A \approx \Delta a f'(a). \quad (14)$$

В таком случае относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a f'(a)}{f(a)}. \quad (15)$$

Но

$$\frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{d \ln f(a)}{da}.$$

Следовательно

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{d \ln f(a)}{da} \Delta a. \quad (16)$$

Таким образом относительную погрешность конечного результата вычислений можно получить весьма просто, прологарифмировав исследуемую функцию, взяв затем производную логарифма данной функции по числу a и помножив полученную производную на величину абсолютной погрешности числа a . Конечно, необходимо помнить, что все эти рассуждения справедливы только до тех пор, пока относительная погрешность достаточно мала и именно порядка долей процента или в крайнем случае нескольких процентов.

Пользуясь приведенным выше приемом определения относительной погрешности для случая, когда одно из чисел, входящих в вычисление, может меняться в определенных пределах, можно его распространить и на тот случай, когда несколько чисел, входящих в вычисление, могут меняться в определенных пределах. В последнем случае можно написать следующую зависимость:

$$A=f(a, b, c, \dots, n).$$

Пользуясь приведенным выше способом определения частной погрешности (на основании формулы Лагранжа для конечных приращений) и считая, что входящие в приведенную выше функцию числа $a, b, c, \dots$ могут меняться в пределах от a до $a + \Delta a$, от b до $b + \Delta b$, от c до $c + \Delta c$ и т. д., можно написать следующие выражения для частных погрешностей:

$$\Delta A_1 = \Delta a f'_a(a, b, c, \dots, n);$$

$$\Delta A_2 = \Delta b f'_b(a, b, c, \dots, n);$$

$$\Delta A_3 = \Delta c f'_c(a, b, c, \dots, n);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta A_n = \Delta n f'_n(a, b, c, \dots, n).$$

Складывая алгебраически все частные погрешности, получим значение абсолютной погрешности конечного результата:

$$\begin{aligned} \Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \dots + \Delta A_n = & \Delta a f'_a(a, b, c, \dots, n) + \\ & + \Delta b f'_b(a, b, c, \dots, n) + \Delta c f'_c(a, b, c, \dots, n) + \dots + \\ & + \Delta n f'_n(a, b, c, \dots, n), \end{aligned} \quad (17)$$

т. е. абсолютная погрешность конечного результата вычисления будет равна сумме произведений абсолютных погрешностей чисел, входящих в данное вычисление, умноженных на соответствующие частные производные.

Относительная погрешность вычисления будет:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{A} (\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \dots + \Delta A_n) = \\ = \frac{1}{f(a, b, c, \dots, n)} [\Delta a f'_a(a, b, c, \dots, n) + \Delta b f'_b(a, b, c, \dots, n) + \\ + \Delta c f'_c(a, b, c, \dots, n) + \dots + \Delta n f'_n(a, b, c, \dots, n)], \end{aligned} \quad (18)$$

или, как было указано выше:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\partial \ln f(a, b, c, \dots, n)}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \ln f(a, b, c, \dots, n)}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial \ln f(a, b, c, \dots, n)}{\partial c} \Delta c + \dots + \frac{\partial \ln f(a, b, c, \dots, n)}{\partial n} \Delta n. \quad (19)$$

Таким образом, чтобы получить относительную погрешность конечного результата тех или других действий над числами, входящими в ту или иную функцию, достаточно прологарифмировать данную функцию, взять полный дифференциал логарифма функции и заменить дифференциалы чисел $a, b, c, \dots, n$ соответствующими конечными значениями абсолютных погрешностей этих чисел.

При измерениях, если приходится иметь дело со случайными погрешностями, знак этих погрешностей неизвестен. Поэтому для получения предельной погрешности следует независимо от знака, полученного при дифференцировании, случайные погрешности брать всегда со знаком, при котором погрешность конечного результата получается наибольшей.

6. ПОГРЕШНОСТИ ДЕЙСТВИЙ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ И ЛОГАРИФИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

С у м м а. Предположим, что

$$A = a + b.$$

В этом случае

$$\ln A = \ln(a + b),$$

и предельная абсолютная погрешность будет:

$$\Delta A = \Delta a + \Delta b.$$

Предельная относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a + b} + \frac{\Delta b}{a + b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}.$$

Напомним еще раз, что, так как нас интересуют предельные абсолютные и относительные погрешности конечного результата вычислений, то все погрешности мы будем всегда брать с положительным знаком. Далее можно заменить абсолютные погрешности Δa и Δb относительными. Тогда, так как $\Delta a = \delta_1 a$ и $\Delta b = \delta_2 b$, будем иметь:

$$\delta = \frac{\delta_1 a + \delta_2 b}{a + b}.$$

Если $\delta_1 > \delta_2$, то

$$\delta = \delta_1 \frac{a + \frac{\delta_2}{\delta_1} b}{a + b},$$

из чего следует, что

$$\delta < \delta_1,$$

так как

$$\frac{a + \frac{\delta_2}{\delta_1} b}{a + b} < 1,$$

т. е. предельная относительная погрешность суммы меньше наибольшей относительной погрешности слагаемых.

Далее укажем, что на относительную погрешность конечного результата наибольшее влияние имеют относительные погрешности наибольших слагаемых, конечно, в том случае, если относительные погрешности других слагаемых являются величинами одного и того же порядка.

Р а з н о с т ь. Предположим, что

$$A = a - b.$$

Тогда

$$\ln A = \ln(a - b).$$

Предельная абсолютная погрешность в этом случае будет:

$$\Delta A = \Delta a + \Delta b.$$

Предельная относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a - b} + \frac{\Delta b}{a - b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$$

или

$$\delta = \frac{\delta_1 a + \delta_2 b}{a - b}.$$

Из последнего равенства видно, что если вычитаемое мало по сравнению с уменьшаемым, то рассуждения, приведенные выше относительно суммы, до известной степени справедливы и для разности; если же уменьшаемое и вычитаемое являются величинами одного и того же порядка, то в этом случае предельная относительная погрешность результата может достигать весьма больших размеров даже при достаточно малых относительных погрешностях уменьшаемого и вычитаемого (поскольку знаменатель $a - b$ может оказаться весьма малой величиной). Поэтому таких зависимостей следует по возможности избегать или в таких случаях в значительной степени повышать точность отдельных операций.

П р о и з в е д е н и е и ч а с т н о е. Предположим, что

$$A = abc \dots$$

Тогда

$$\ln A = \ln a + \ln b + \ln c \dots$$

Предельная абсолютная погрешность в этом случае будет:

$$\Delta A = bc \Delta a \dots + ac \Delta b \dots + ab \Delta c \dots$$

Предельная относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \dots$$

или

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$$

При делении будем иметь:

$$A = \frac{a}{b} \text{ и } \ln A = \ln a - \ln b.$$

Предельная абсолютная погрешность в данном случае будет ¹:

$$\Delta A = \frac{\Delta a}{b} + \frac{\Delta b a}{b^2}.$$

¹ Знак минус здесь заменен, как мы условились выше, плюсом, так как мы хотим получить предельную погрешность, частные же погрешности могут быть как положительными, так и отрицательными.

Предельная относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

или

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Пользуясь этими методами для определения предельных абсолютной и относительной погрешностей произведения и частного, на самом деле мы допускаем некоторую неточность вследствие того, что пренебрегли, как выше было указано, величиной $\theta \Delta a$. Покажем еще раз, что получаемая таким образом неточность достаточно мала.

Так как

$$A + \Delta A = (a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab + b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b$$

и

$$A = ab,$$

то действительная предельная абсолютная погрешность произведения будет:

$$\Delta A = b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b,$$

откуда действительная относительная погрешность произведения будет:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a\Delta b}{ab} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2.$$

Совершенно очевидно, что произведение $\delta_1 \delta_2$, как и $\Delta a \Delta b$, являются величинами второго порядка малости относительно $\delta_1 + \delta_2$ и $b \Delta a + a \Delta b$, т. е. ими можно пренебречь. Таким образом относительная погрешность произведения или частного равна приблизительно сумме относительных погрешностей множителей или делимого и делителя. Отсюда можно вывести следующее правило: произведение или частное всегда будет иметь на один или в крайнем случае на два верных знака меньше, чем наименьшее число верных знаков множителей или делимого и частного, если количество последовательных действий не превосходит 10.

Чтобы получить в этом случае в произведении или частном n верных знаков, необходимо множители или делимое и делитель брать с $n + 1$ или в крайнем случае с $n + 2$ верными знаками.

При пользовании этими весьма простыми, но достаточно грубыми правилами для определения нужного количества верных знаков в большинстве случаев получаемый результат вычисления будет значительно точнее. Поэтому в соответствующих случаях может оказаться целесообразным более точная проверка точности получаемого результата и вместе с тем необходимого количества верных знаков тех чисел, с которыми придется производить действия умножения и деления, что может значительно сэкономить время.

Степень и корень. Предположим, что

$$A = a^k.$$

Тогда

$$\ln A = k \ln a.$$

В этом случае абсолютная погрешность будет:

$$\Delta A = k a^{k-1} \Delta a.$$

Относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} k = \delta_1 k.$$

Так как каждый корень может быть представлен в виде дробной степени, то

$$A = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$$

и

$$\ln A = \frac{1}{k} \ln a.$$

Абсолютная погрешность будет:

$$\Delta A = \Delta a \cdot \frac{1}{k} \cdot a^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}.$$

Относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} \frac{1}{k} = \delta_1 \frac{1}{k}.$$

Таким образом, относительная погрешность степени или корня равняется относительной погрешности числа, возводимого в степень, или числа, из которого извлекается корень, соответственно умноженной на абсолютное значение показателя степени или на единицу, деленную на абсолютное значение показателя корня.

В отношении количества верных знаков степени очевидно можно применить то же правило, что и для умножения; при извлечении же корня относительная погрешность результата уменьшается и для получения n верных знаков корня можно брать подкоренное количество с $n - 1$ верными знаками, а в некоторых случаях с $n - 2$ и даже меньшим количеством верных знаков в зависимости от величины показателя корня.

Предположим далее, что

$$A = k^a$$

и

$$\ln A = a \ln k,$$

т. е. показатель степени может меняться в пределах от a до $a + \Delta a$.

В этом случае абсолютная погрешность конечного результата вычислений будет:

$$\Delta A = \Delta a k^a \ln k.$$

Относительная погрешность будет:

$$\delta = \Delta a \ln k,$$

следовательно, в данном случае абсолютная погрешность конечного результата вычисления степени будет равна произведению абсолютной погрешности показателя степени на степень и натуральный логарифм числа, возводимого в степень; относительная погрешность будет равна произведению абсолютной погрешности показателя степени на натуральный логарифм числа, возводимого в степень.

Разобранные погрешности степени и корня и др. будут предельными в том случае, если Δa будет предельной абсолютной погрешностью, что, конечно, в большинстве случаев и имеет место. То же самое относится и к рассматриваемым ниже погрешностям тригонометрических функций и логарифмов.

Тригонометрические функции. Предположим:

- 1) $A_1 = \sin \alpha$;
- 2) $A_2 = \cos \alpha$;
- 3) $A_3 = \operatorname{tg} \alpha$;
- 4) $A_4 = \operatorname{ctg} \alpha$.

Абсолютная погрешность соответственно будет:

- 1) $\Delta A_1 = \Delta \alpha \cos \alpha$;
- 2) $\Delta A_2 = \Delta \alpha \sin \alpha$;
- 3) $\Delta A_3 = \Delta \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;
- 4) $\Delta A_4 = \Delta \alpha \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Знак минус мы опускаем по указанным выше причинам.

Мы видим, что абсолютная погрешность конечного результата при выполнении действий с функциями синуса и косинуса при тех же самых абсолютных погрешностях в углах значительно меньше абсолютных погрешностей конечных результатов при выполнении действия с функциями тангенсов и котангенсов, особенно при больших углах для тангенса и при малых углах для котангенса.

Относительные погрешности будут:

- 1) $\delta = \frac{\Delta A_1}{A_1} = \Delta \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \delta_1 \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;
- 2) $\delta = \frac{\Delta A_2}{A_2} = \Delta \alpha \operatorname{tg} \alpha = \delta_1 \alpha \operatorname{tg} \alpha$;
- 3) $\delta = \frac{\Delta A_3}{A_3} = \Delta \alpha \frac{2}{\sin 2\alpha} = \delta_1 \alpha \frac{2}{\sin 2\alpha}$;
- 4) $\delta = \frac{\Delta A_4}{A_4} = \Delta \alpha \frac{2}{\sin 2\alpha} = \delta_1 \alpha \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

Относительная погрешность конечного результата вычисления равна абсолютной погрешности угла (или же относительной погрешности угла, умноженной на абсолютное значение угла), помноженной для синуса на котангенс угла, для косинуса — на тангенс угла, для тангенса и котангенса — на двойку, деленную на синус удвоенного угла.

Л о г а р и ф м ы. Предположим, что

$$A = \ln a.$$

Тогда

$$\ln A = \ln \ln a.$$

Абсолютная погрешность будет:

$$\Delta A = \frac{\Delta a}{a} = \delta,$$

т. е. абсолютная погрешность натурального логарифма равна относительной погрешности числа.

Относительная погрешность будет:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a \ln a} = \frac{\delta_1}{\ln a}.$$

Абсолютная погрешность для десятичного логарифма будет:

$$\Delta A = 0,434 \delta_1;$$

относительная погрешность

$$\delta = 0,434 \frac{\delta_1}{\lg a}.$$

Отсюда можно вывести некоторые правила для пользования логарифмическими таблицами для случаев умножения, деления и возведения в степень. Так как при пользовании логарифмами все эти действия сводятся к сложению или вычитанию логарифмов и к умножению или делению логарифмов на показателя степени или корня, то в конце концов конечную предельную абсолютную погрешность результирующего логарифма получим как сумму предельных абсолютных погрешностей отдельных логарифмов или как произведение предельной абсолютной погрешности логарифма на показатель степени (корень мы также можем выразить как дробную степень). Если обозначить с помощью $\Delta \lg$ предельную абсолютную погрешность результирующего логарифма и $\Delta \lg_1, \Delta \lg_2, \dots, \Delta \lg_k$ — предельные абсолютные погрешности отдельных логарифмов, то предельная абсолютная погрешность результирующего логарифма будет:

$$\Delta \lg = \Delta \lg_1 + \Delta \lg_2 + \Delta \lg_3 + \dots + \Delta \lg_k.$$

Каждая из предельных абсолютных погрешностей отдельных логарифмов в свою очередь будет слагаться из предельной абсолютной погрешности, полученной вследствие неточности взятого числа, — $\Delta' \lg_k$ и из предельной абсолютной погрешности, полученной вследствие неточности вычисленного логарифма для данного числа, — $\Delta'' \lg_k$, т. е.

$$\Delta \lg = \Delta' \lg_1 + \Delta'' \lg_1 + \Delta' \lg_2 + \Delta'' \lg_2 + \dots + \Delta' \lg_k + \Delta'' \lg_k.$$

Как было указано,

$$\Delta' \lg = 0,434 \delta'.$$

Поэтому, если все взятые числа имеют одинаковое количество верных знаков, т. е. предельные относительные погрешности чисел равны,

то, следовательно, и все предельные абсолютные погрешности логарифмов будут равны. Кроме того, все мантиссы логарифмов вычислены также с одинаковой предельной абсолютной погрешностью. Поэтому будем иметь:

$$\Delta \lg = k \Delta' \lg + k \Delta'' \lg.$$

Так как при потенцировании мы допускаем еще одну погрешность $\Delta'' \lg$, то можно считать, что конечная предельная относительная погрешность произведения выразится тогда таким образом:

$$\delta = \frac{\Delta \lg}{0,434} + \frac{\Delta'' \lg}{0,434} = \frac{k \Delta' \lg}{0,434} + \frac{(k+1) \Delta'' \lg}{0,434}.$$

Так как

$$\Delta' \lg = 0,434 \delta',$$

то

$$\delta = k \delta' + \frac{(k+1) \Delta'' \lg}{0,434}.$$

Как и следовало ожидать, предельная относительная погрешность произведения при пользовании логарифмическими таблицами складывается из двух: из предельной относительной погрешности от умножения или возведения в степень (которая рассматривалась выше):

$$\delta_1 = k \delta' = \delta'_1 + \delta'_2 + \dots + \delta'_k,$$

и из предельной относительной погрешности логарифмирования:

$$\delta_2 = \frac{(k+1) \Delta'' \lg}{0,434}.$$

Проанализируем последнюю погрешность. Если имеется таблица логарифмов с n_1 знаками, то, так как таблицы вычисляются по правилу дополнения,

$$\Delta'' \lg \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{n_1}}$$

или

$$\delta_2 \leq \frac{k+1}{0,434 \cdot 2 \cdot 10^{n_1}}.$$

Если $k \leq 9$, то

$$\delta_2 \leq \frac{1}{8,68 \cdot 10^{n_1-2}}.$$

Если бы мы имели дело с абсолютно верными числами, то получили бы исключительно погрешность от логарифмирования, которая в таком случае выразилась бы так:

$$\delta_2 \leq \frac{1}{2(3,34+1) \cdot 10^{n_1-2}}.$$

Условие для получения n верных знаков по правилу дополнения имеет следующий вид:

$$\delta_2 \leq \frac{1}{2(z+1) 10^{n_1-1}}.$$

Следовательно, мы получили бы $n_1 - 1$ надежное количество верных знаков в том случае, если первая значащая цифра результирующего числа $z < 4$, а при $z \geq 4$ — на один или на два знака меньше, чем количество знаков логарифмической таблицы. Совершенно очевидно, что при меньшем количестве операций, например при $k \leq 3$, мы получим:

$$\delta_2 \leq \frac{1}{2(9,85+1)10^{n_1-2}},$$

т. е. во всех случаях количество надежных верных знаков $n_1 - 1$.

Отсюда можно вывести следующее правило: если приходится оперировать с абсолютно верными числами, то для надежного получения n верных знаков в конечном результате по правилу дополнения нужно пользоваться $(n+1)$ - или $(n+2)$ -значными таблицами логарифмов, в зависимости от количества k выполняемых действий и величины первой значащей цифры z результирующего числа. Если нужно получить надежное количество n верных знаков без правила дополнения, то можно во всех случаях, когда $k \leq 7$, пользоваться $(n+1)$ -значными таблицами. Отсюда следствие: нет смысла стремиться получить результирующее число с большим количеством знаков, чем $n - 1$, при пользовании n -значными логарифмическими таблицами.

Если приходится оперировать с числами с n верными знаками, то нужно пользоваться $(n+1)$ -значными логарифмическими таблицами или n -значными таблицами в зависимости от величины первых значащих цифр ($z_1, z_2, \dots$) тех чисел, с которыми производятся действия, а также отчасти в зависимости от того, берутся ли эти числа с n верными знаками по правилу дополнения или нет. Это совершенно очевидно из следующего. Возьмем два предельных случая. Пусть первая значащая цифра числа, которое, например, возводится в степень, равна 9, т. е. $z = 9$, и число взято с n верными знаками по правилу дополнения. Тогда предельная относительная погрешность от возведения в степень при $k = 9$ будет:

$$\delta' \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}}.$$

Общая предельная относительная погрешность будет:

$$\delta = \delta' + \delta_2 \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}} + \frac{1}{8,68 \cdot 10^{n-2}}.$$

Если взять логарифмические таблицы со столькими знаками, что $n = n_1 - 1$, то

$$\delta \leq \frac{1}{2 \cdot 10^{n_1-2}} + \frac{1}{8,68 \cdot 10^{n_1-2}},$$

т. е. погрешность от логарифмирования будет почти в пять раз меньше погрешности от возведения в степень.

Следовательно, практически согласно приведенному выше указанию Оствальда¹ ею можно пренебречь, или, другими словами, логарифмированием мы не ухудшим результата.

¹ На практике можно пренебрегать погрешностью, если она меньше одной десятой или даже одной пятой самой большой из отдельных погрешностей.

Второй крайний случай, когда первая значащая цифра числа $z = 1$ и взято число с n верными знаками без правила дополнения. В этом случае при $k = 9$

$$\delta' \leq \frac{1}{1,1 \cdot 10^{n-2}}.$$

Общая предельная относительная погрешность будет:

$$\delta \leq \frac{1}{1,1 \cdot 10^{n-2}} + \frac{1}{8,68 \cdot 10^{n-2}},$$

т. е. погрешностью от логарифмирования можно пренебречь даже в том случае, если $n = n_1$ или, другими словами, можно пользоваться логарифмическими таблицами с таким количеством верных знаков, с каким количеством верных знаков взяты числа, с которыми производится данное действие.

Несколько иначе обстоит дело с извлечением корня. В этом случае мы получим:

$$\delta = \frac{\delta'}{k} + \frac{k+1}{k} \frac{\Delta'' \lg}{0,434}.$$

Если при этом будут абсолютно верные числа, то для $k = 9$

$$\delta = \delta_2 = \frac{k+1}{k} \frac{\Delta'' \lg}{0,434} \leq \frac{1}{7,82 \cdot 10^{n_1-1}},$$

т. е.

$$\delta_2 \leq \frac{1}{2(2,91+1) \cdot 10^{n_1-1}}.$$

В худшем случае, если $k = 2$,

$$\delta_2 \leq \frac{1}{5,56 \cdot 10^{n_1-1}},$$

т. е.

$$\delta_2 \leq \frac{1}{2(1,78+1) 10^{n_1-1}}.$$

Таким образом мы получим n_1 надежное количество верных знаков по правилу дополнения при $z \leq 2$ или $z \leq 1$ в зависимости от величины показателя корня. То же самое будет при $z \leq 6$ или при $z \leq 4$ без правила дополнения. Следовательно, в данном случае для получения n верных знаков нужно пользоваться $(n+1)$ - или n -значными логарифмами. При извлечении же корня из числа с n верными знаками по тем же соображениям, что указывались выше (чтобы погрешность от логарифмирования практически не влияла на количество верных знаков конечного результата), необходимо пользоваться $(n+1)$ - или $(n+2)$ -значными логарифмическими таблицами в зависимости от того, берется ли число, из которого извлекается корень, с n верными знаками по правилу дополнения или без правила дополнения, а также в зависимости от абсолютного значения показателя корня и величины первой значащей цифры числа, из которого извлекается корень.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Приведенные выше правила исследования погрешностей вычислений целиком и полностью могут быть также применены и к исследованию погрешностей измерений. Результат любого измерения можно выразить с помощью соответствующих уравнений и, исследуя указанные выше способами эти уравнения, можно выявить, как влияют те или другие изменения параметров, по которым была построена шкала прибора, на конечный результат измерения. При этом нужно только уметь правильно определять, какие и от каких причин могут быть изменения количественных соотношений тех явлений, которые влияют на конечный результат измерений, т. е. входят в виде тех или других параметров в исследуемое уравнение. Таким образом исследование результатов измерений сводится к двум исследованиям:

1) к исследованию количественного влияния на конечный результат измерения возможных изменений количественных соотношений соответствующих явлений, что по существу сводится к изложенным выше методам исследования погрешностей вычислений;

2) к исследованию возможных количественных изменений количественных соотношений этих явлений и причин, вызывающих эти изменения.

Причины, вызывающие изменения количественных соотношений тех или других явлений, влияющих на конечный результат измерений, частично уже разобраны в гл. I настоящей работы. В основном они сводятся:

1) к наличию в уравнениях, выражающих закономерные зависимости, на которых построено данное измерение, добавочных независимых переменных, не являющихся параметрами прибора, вызывающих методические погрешности;

2) к наличию независимых переменных, входящих в эти уравнения, являющихся параметрами прибора и изменяющихся под влиянием особых условий, в которых находится самый прибор, а также к появлению в приборе или воздействию на прибор каких-либо посторонних сил, вызывающих инструментальные погрешности;

3) к погрешностям отсчета или, другими словами, к личным погрешностям наблюдателя.

Выше мы довольно подробно останавливались на методических погрешностях, последние же две группы погрешностей (инструментальные и личные) более подробно будут рассматриваться ниже. Кроме этих трех групп погрешностей существует еще одна специфическая группа так называемых инерционных погрешностей, появляющихся при замерах быстро протекающих явлений; эта группа погрешностей также будет рассмотрена ниже.

Перечислив все возможные источники погрешностей измерительных приборов, прежде чем перейти к подробному рассмотрению последних трех групп погрешностей, поясним на некоторых примерах, каким образом теория погрешностей вычислений применяется к исследованию погрешностей измерений и какие при этом могут решаться задачи.

Возьмем в качестве первого примера простейший случай магнито-электрического амперметра [см. стр. 301, фиг. 73 и уравнение (9)]. При условии устранения влияния (см. стр. 32) $\sin \alpha$ мы получим равномерную шкалу и уравнение (9) переписывается так:

$$M_0 \alpha = \frac{1}{981} \frac{I}{10} H' abnl, \quad (20)$$

где H' — некоторое осредненное значение переменного напряжения магнитного поля.

Следовательно,

$$I = \frac{9810 M_0 \alpha}{H' abnl},$$

где I — сила тока,
 M_0 — удельный момент волоска,
 α — угол поворота стрелки,
 H' — осредненное напряжение магнитного поля,
 a, b, l — высота, ширина и осевая длина рамки,
 n — количество витков на единицу длины рамки.

В данном случае методические погрешности отсутствуют. Очевидно, коэффициент 9810 и общее количество витков nl рамки ни при каких условиях измерений меняться не могут. Из параметров этого уравнения под влиянием, например, температуры и других факторов могут меняться упругий момент волоска M_0 , осредненное напряжение магнитного поля H' , параметры рамки a, b и может быть погрешность в отсчете угла α .

Для получения предельной относительной погрешности прологарифмируем приведенное выше уравнение:

$$\ln I = \ln 9810 + \ln M_0 + \ln \alpha - \ln H' - \ln a - \ln b - \ln (nl).$$

Взяв производную данной функции и заменив значения дифференциалов конечными значениями предельных абсолютных погрешностей, в конце концов получим следующее выражение для предельной относительной погрешности:

$$\delta_I = \delta_{M_0} + \delta_\alpha + \delta_{H'} + \delta_a + \delta_b. \quad (21)$$

Рассмотрим в первую очередь, какого порядка могут быть систематические погрешности прибора под влиянием изменения температуры, предположим на 10° . В этом случае для бронзового волоска $\delta_{M_0} = -0,4\%$, для постоянного магнита $\delta_{H'} = 0,0004 - 0,0005$ на 1° или в среднем $\delta_{H'} = -0,45\%$, для красной меди $\delta_a = 0,017\%$, $\delta_b = 0,017\%$. Так как мы исследуем систематические погрешности, то должны взять не предельную, а действительную относительную погрешность, которая выразится так:

$$\delta_I = \delta_{M_0} - \delta_{H'} - \delta_a - \delta_b. \quad (22)$$

Подставив указанные выше значения относительных погрешностей для повышения температуры на 10° в выражение (22), получим:

$$\delta_I = -0,4\% + 0,45\% - 0,017\% - 0,017\% = 0,016\%.$$

Температурная погрешность, источником которой являются изменения габаритов рамки, как видно, более чем в 20 раз меньше температурных погрешностей от изменения момента волоска и напряжения магнитного поля. Как указывает Оствальд, погрешностями, составляющими одну десятую и даже одну пятую наибольшей погрешности, на практике можно пренебрегать. Таким образом, если бы температурные погрешности от изменения упругости волоска и напряжения магнитного поля складывались, то температурными изменениями габаритов рамки вообще можно было бы пренебречь.

Далее мы видим, что температурные погрешности, источником которых являются изменения упругости волоска и габаритов рамки, в сумме вычитаются из температурной погрешности, источником которой являются изменения магнитного поля постоянного магнита, так что в результате мы получаем температурную погрешность амперметра $\delta_{\text{т}} = 0,016\%$ на 10° . Столь малой погрешностью, очевидно, можно пренебречь, т. е. в данном случае ряд температурных влияний компенсирует друг друга и тем самым сводит погрешность к ничтожно малой величине.

Рассмотрим случайные погрешности. В данном случае может быть только два источника случайных погрешностей — трение и неточность отсчета угла α . В зависимости от направления движения трение будет вызывать увеличение или уменьшение момента волоска, т. е. в приведенном выше уравнении вместо $M_0\alpha$ будем иметь $M_0\alpha \pm M_{\text{тр}}$. Так как

$$\pm M_{\text{тр}} = \pm M_0\alpha',$$

где α' — угол трения, то

$$M_0\alpha \pm M_{\text{тр}} = M_0(\alpha \pm \alpha'),$$

т. е. вследствие трения стрелка будет ошибочно устанавливаться в пределах

$$\pm \alpha' = \pm \Delta'\alpha.$$

Эту величину $\pm \Delta'\alpha$ учесть никак нельзя, — это и будет предельной абсолютной погрешностью в определении угла поворота стрелки в зависимости от трения.

Кроме этой погрешности, будет еще одна $\pm \Delta''\alpha$, источником которой служит неточность отсчета положения стрелки по шкале.

Таким образом общая случайная предельная относительная погрешность в определении угла отклонения стрелки будет:

$$\delta_\alpha = \delta'_\alpha + \delta''_\alpha$$

или

$$\delta_\alpha = \delta_\alpha = \delta'_\alpha + \delta''_\alpha. \quad (23)$$

Указанные предельные абсолютные погрешности $\Delta'\alpha$ и $\Delta''\alpha$ можно считать постоянными для всей шкалы, следовательно, предельные относительные погрешности δ'_α и δ''_α будут меняться, увеличиваясь к началу шкалы. Пусть задана приведенная погрешность $\delta_{\text{л}} = 0,5\%$.

Следовательно,

$$\delta'_\alpha + \delta''_\alpha = 0,5\%.$$

Если, приняв все необходимые меры, мы увидим, что приведенная погрешность от затирания δ_a' не может быть снижена, предположим, более чем до 0,3% (т. е. $\delta_a' = 0,3\%$), то необходимо обеспечить прибору такую шкалу, чтобы

$$\delta_a = 0,5 - 0,3 = 0,2\%.$$

Обратно, если заданы такие габариты прибора и условия отсчета, что приведенная погрешность отсчета никак не может быть снижена более чем, например, до 2%, то согласно указаниям Оствальда добиваться большего снижения приведенной погрешности от затирания δ_a' , чем до 0,2—0,4%, нет никакого смысла.

На основании изложенного видно, что исследование погрешностей позволяет наиболее рационально построить прибор. В некоторых случаях оно позволяет предусмотреть, чтобы те или другие погрешности не были слишком велики и тем самым не свели на-нет достигнутые результаты в отношении других погрешностей. В других случаях оно предохраняет нас от излишних ненужных затрат на снижение одних погрешностей в том случае, если другие все равно не могут быть снижены.

Возьмем другой пример — измерение сопротивлений с помощью уравновешенного моста Уитстона (уравнение 13):

$$R_x = R_3 \frac{L - l_1}{l_1}. \quad (13)$$

В данном случае имеем следующую зависимость для предельной относительной погрешности:

$$\delta_{R_x} = \delta_{R_3} + \delta_{l_1} + \delta_{L-l_1}. \quad (24)$$

Так как R_3 является постоянным плечом моста и может быть определено с достаточной степенью точности, то погрешностью δ_{R_3} можно пренебречь. Следовательно, остаются только две погрешности δ_{l_1} и δ_{L-l_1} , т. е. основным источником погрешностей служит отсчет по шкале или, другими словами, определение переменных плеч моста.

Посмотрим, как эти погрешности влияют на конечный результат измерения. Так как

$$\left| \delta_{l_1} \right| = \left| \frac{\Delta l_1}{l_1} \right| \quad \text{и} \quad \left| \delta_{L-l_1} \right| = \left| \frac{\Delta l_1}{L-l_1} \right|,$$

то

$$\delta_{R_x} = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_1}{L-l_1} = \frac{\Delta l_1 L}{l_1(L-l_1)}. \quad (25)$$

Из уравнения (25) видно, что δ_{R_x} может меняться в очень значительных пределах в зависимости от условий измерения и может достигать бесконечности ($\delta_{R_x} = \infty$) при $L = l_1$ и при $l_1 = 0$.

Посмотрим, при каких условиях δ_{R_x} будет наименьшим, т. е. какие условия будут наивыгоднейшими для измерения. Так как δ_{R_x} будет иметь минимум при наименьшем значении $\frac{L}{l_1(L-l_1)}$, то решим

задачу на определение максимума и минимума этой величины. Обозначим отношение $\frac{\delta R_x}{\Delta l_1}$ через $f(\delta)$. В этом случае:

$$f'(\delta) = -\frac{L(L-2l_1)}{l_1^2(L-l_1)^2}.$$

Так как вторая производная положительная¹, то, приравняв первую производную нулю, получим условие для минимума:

$$\frac{L(L-2l_1)}{l_1^2(L-l_1)^2} = 0$$

или

$$L(L-2l_1) = 0.$$

Величина L не может быть равна нулю, следовательно,

$$L-2l_1 = 0$$

или

$$L = 2l_1,$$

откуда

$$l_1 = \frac{L}{2},$$

т. е. предельная относительная погрешность будет наименьшей в том случае, если переменные плечи моста будут равны.

Таким образом исследование погрешностей позволяет решить еще одну задачу — определить наивыгоднейшие условия работы прибора.

Здесь следует отметить, что в большинстве случаев полезно определить не только условия для минимума погрешности, но и самый характер перегиба кривой погрешностей в точке минимума, поскольку это даст возможность судить о том, насколько можно отходить от условий минимума, не вызывая существенного увеличения погрешности.

Рассмотрим еще один пример — определение ускорения силы тяжести с помощью гравитационного маятника.

Период качания маятника, выполненного в виде шарика с радиусом R и подвешенного на тонкой нити длиной l (до центра тяжести шарика), для достаточно малых амплитуд α будет:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l + \frac{2R^2}{5l}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \quad (27)$$

откуда

$$g = \frac{\pi^2}{T^2} \left(l + \frac{2R^2}{5l}\right) \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

$$^1 f''(\delta) = \frac{2L(L^2 - 3Ll_1 + 3l_1^2)}{l_1^3(L-l_1)^3}. \quad (26)$$

С учетом плотности воздуха γ_0 и шарика γ будем иметь:

$$g_0 = \frac{\pi^2}{T^2} \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_0} \left(l + \frac{2R^2}{5l} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2. \quad (28)$$

Отсюда предельная относительная погрешность определения ускорения силы тяжести будет:

$$\begin{aligned} \delta_{g_0} = & 2\delta_\pi + 2\delta_T + \delta_\gamma - \frac{\Delta\gamma}{\gamma - \gamma_0} + \frac{\Delta\gamma_0}{\gamma - \gamma_0} + \delta_l \frac{\left(1 - \frac{2R^2}{5l^2} \right)}{\left(1 + \frac{2R^2}{5l^2} \right)} + \\ & + \delta_R \frac{4R^2}{5l^2 \left(1 + \frac{2R^2}{5l^2} \right)} + \frac{\Delta\alpha}{4} \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Так как значение γ_0 мало по сравнению с γ и члены $\frac{2R^2}{5l^2}$ и $\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ малы по сравнению с единицей, то, пренебрегая этими величинами, мы допускаем погрешности малости высших порядков, поэтому можно написать:

$$\delta_{g_0} = 2\delta_\pi + 2\delta_T + \delta_\gamma - \frac{\gamma_0}{\gamma} + \delta_l + \delta_R \frac{4R^2}{5l^2} + \frac{\alpha}{4} \delta_\alpha \sin \alpha.$$

Так как далее отношение $\frac{\gamma_0}{\gamma}$ достаточно мало, то погрешностью δ_γ можно пренебречь. Наконец, если радиус шарика R и длину нити l измерить с одинаковой абсолютной погрешностью, то относительной погрешностью δ_R можно также пренебречь, так как множитель $\frac{4R^2}{5l^2}$ при ней достаточно мал. В результате получим:

$$\delta_{g_0} = 2\delta_\pi + 2\delta_T + \delta_l + \frac{1}{4} \delta_\alpha \sin \alpha. \quad (30)$$

Зададимся длиной нити маятника $l = 250$ мм и амплитудой качания маятника $\alpha = 8^\circ$. Тогда период одного качания при $g = 9,81$ будет $T \approx 1,02$ сек. ($T = 1,017417$), и получим следующую зависимость:

$$\delta_{g_0} = 2\delta_\pi + 2\delta_T + \delta_l + 0,00488 \delta_\alpha.$$

Из последнего уравнения видно, что на точность конечного результата (если не считать погрешности $2\delta_\pi$) наибольшее влияние оказывают относительные погрешности отсчета времени. Если задаться точностью конечного результата в 0,1% и остальные две погрешности (определение длины маятника l и угла качания α) принять в 0,05%, то при условии отсчета времени колебаний с точностью до 0,1 сек. количество отсчитываемых колебаний должно быть порядка $n \geq 400$. В этом случае

$$2\delta_T \leq 0,05\%.$$

Как указывалось выше, сумма погрешностей

$$\delta_l + 0,00488 \delta_\alpha \leq 0,05\%.$$

Следовательно, если длину маятника определить с точностью до 0,05 мм, то получим:

$$\delta_l = 0,02\%.$$

Угол колебания маятника при этом необходимо определить с точностью не менее 0,5°, тогда

$$0,00488 \delta_\alpha \approx 0,03\%.$$

Чтобы погрешностью числа π можно было пренебречь, необходимо сохранение условия

$$2 \delta_\pi \leq 0,01\%.$$

Для этого согласно уравнению

$$\delta \leq \frac{1}{2 \times 10^{n-1}}$$

π нужно взять с пятью верными знаками по правилу дополнения. В таком случае мы получим заданную величину предельной относительной погрешности:

$$\delta_{g_0} = 0,05 + 0,02 + 0,03 \approx 0,1\%.$$

Рассмотрим еще в качестве последнего примера барометрический высотомер (см. приложение 1, стр. 287, фиг. 66). Напишем приведенное в гл. I уравнение (2):

$$H = 18401,2 (\lg B_0 - \lg B_H) (1 + 0,00367 t_{cp}) \times \\ \times \left(1 + 0,00259 \cos 2\varphi + 2 \frac{H_1}{R} \right) (1 + 0,375 k). \quad (2)$$

Так как при пользовании этим уравнением множителями

$$\left(1 + 0,00259 \cos 2\varphi + 2 \frac{H_1}{R} \right) (1 + 0,375 k)$$

очень часто пренебрегают, мы не будем решать его в явном виде относительно H и определим, какие допускаются погрешности при решении уравнения (2) без этих множителей и в каких случаях это допустимо.

Предельная относительная погрешность приближенно будет:

$$\delta_H = \delta_{B_0} \frac{0,434}{(\lg B_0 - \lg B_H)} + \delta_{B_H} \frac{0,434}{(\lg B_0 - \lg B_H)} + \Delta t_{cp} \frac{0,00367}{(1 + 0,00367 t_{cp})} + \\ + \Delta \varphi \frac{2 \cdot 0,00259 \sin 2\varphi}{\left(1 + 0,00259 \cos 2\varphi + 2 \frac{H_1}{R} \right)} + \Delta \frac{H_1}{R} \frac{2}{1 + 0,00259 \cos 2\varphi + 2 \frac{H_1}{R}} + \\ + \Delta k \frac{0,375}{(1 + 0,375 k)}. \quad (31)$$

Слагаемыми в знаменателях дробей, стоящих в качестве множителей при абсолютных погрешностях Δt_{cp} , $\Delta \varphi$, $\Delta \frac{H_1}{R}$ и Δk , ввиду их малости по сравнению с единицей можно пренебречь. Так как

$$0,00367 = \frac{1}{T_0},$$

где T_0 — абсолютная температура при 0° , то имеем:

$$\delta_H = \delta_{B_0} \frac{0,434}{(\lg B_0 - \lg B_H)} + \delta_{B_H} \frac{0,434}{(\lg B_0 - \lg B_H)} + \frac{\Delta t_{\text{ср}}}{T_0} + \\ + 0,00518 \sin 2\varphi \Delta\varphi + 2\Delta \frac{H_1}{R} + 0,375 \Delta k. \quad (32)$$

Вспомним дальше, что δ_{B_0} , $\frac{\Delta t_{\text{ср}}}{T_0}$, $\Delta\varphi$ и Δk являются методическими погрешностями, не зависящими от качества прибора, и, таким образом, из всех погрешностей только δ_{B_H} является инструментальной погрешностью, зависящей от качества прибора. Посмотрим теперь, какого порядка могут быть основные методические погрешности δ_{B_0} и $\delta_{t_{\text{ср}}}$, в том случае, если не вводить поправок на отклонения истинных значений атмосферного давления внизу и средней температуры столба воздуха от тех значений, которые были приняты при расчете шкалы. Отклонение истинных значений атмосферного давления внизу от расчетного может достигать 7—8 мм рт. ст. и больше, т. е. относительная погрешность может быть порядка 1% и выше. Примем $\delta_{B_0} = 1\%$. Отклонение средней температуры столба воздуха от принятой в расчет может быть (особенно для меньших высот и зимой) порядка 20—30°, т. е. данная относительная погрешность может быть порядка 10%, а иногда и выше.

Так как с высотой температура воздуха становится более постоянной, будем считать, что данная погрешность при изменении высоты от 0 до 12 000 м меняется от 10 до 2%. Коэффициенты при δ_{B_0} и δ_{B_H} для 1000, 6000 и 12 000 м будут примерно следующими:

$$\frac{0,434}{\lg B_0 - \lg B_{1000}} \approx 8,33,$$

$$\frac{0,434}{\lg B_0 - \lg B_{6000}} \approx 1,28,$$

$$\frac{0,434}{\lg B_0 - \lg B_{12000}} \approx 0,6.$$

Таким образом при тех условиях, которыми мы задались, погрешность от неучета истинного давления на земле может достигать значений от 0,6 до 8,3%, и погрешность от неучета истинной средней температуры столба воздуха — от 10 до 2% в зависимости от высоты.

Посмотрим теперь, какого порядка могут быть погрешности от неучета влияния на определение высоты широты места, отношения высоты H_1 к радиусу земли и упругости водяных паров. В этом случае погрешность от неучета широты местности не может превзойти значения порядка 0,5%; максимальная погрешность от неучета отношения высоты H_1 к радиусу земли в данном случае будет на высоте 12 000 м и не превзойдет значения порядка 0,4%; наконец погрешность от неучета влажности даже в самом неблагоприятном случае (при абсолютной влажности) на малой высоте и при достаточно высокой

температуре не сможет превзойти значений порядка 0,8%. При этом еще необходимо отметить, что погрешность от неучета отношения высоты H_1 к радиусу земли, в данном случае максимальная на высоте 12 000 м, уменьшается пропорционально высоте, погрешность же от неучета влажности достигает максимальных значений на малых высотах и при остальных равных условиях (что тоже мало реально) на высоте 12 000 м падает приблизительно до 0,4% (фактически же до еще меньших значений). Из этого следует, что в сумме все эти погрешности никак не превзойдут значений порядка 1,2—1,5%. Таким образом мы получим следующие возможные максимальные погрешности для различных высот:

$$\begin{aligned} 1\,000\text{ м } \delta &= 8,3\% + 8,3\delta_{BH} + 10\% + 1,5\%; \\ 6\,000\text{ м } \delta &= 1,28\% + 1,28\delta_{BH} + 5\% + 1,5\%; \\ 12\,000\text{ м } \delta &= 0,6\% + 0,6\delta_{BH} + 2\% + 1,5\%. \end{aligned}$$

Можно сделать следующие выводы:

1) от нуля до высоты 6000 м погрешностью в 1,5% можно пренебречь и не усложнять вычислений шкалы введением в формулу факторов, определяющих эти погрешности;

2) при данных условиях нет никакого смысла добиваться особой точности от прибора; если прибор будет давать предельную относительную погрешность порядка 0,5—1%, то этого будет вполне достаточно.

Если вводить поправки в показания высотомера, замеряя ¹ во время полета давление на земле хотя бы с абсолютной погрешностью порядка 0,25 мм рт. ст. и замеряя температуру воздуха на земле и на высоте хотя бы с абсолютной погрешностью порядка ² 0,5°, то картина совершенно изменится, и мы получим следующее соотношение возможных погрешностей для различных высот:

$$\begin{aligned} 1\,000\text{ м } \delta &= 0,28\% + 8,3\delta_{BH} + 0,4\% + 1,5\%; \\ 6\,000\text{ м } \delta &= 0,04\% + 1,28\delta_{BH} + 0,4\% + 1,5\%; \\ 12\,000\text{ м } \delta &= 0,02\% + 0,6\delta_{BH} + 0,4\% + 1,5\%. \end{aligned}$$

При этих условиях влияние широты местности, отношения измеряемой высоты к радиусу земли (при больших высотах) и влажности учитывать следует. Кроме того, при этих условиях и к прибору необходимо предъявлять значительно более высокие требования.

Если предельная относительная погрешность прибора не будет превышать примерно 0,05%, т. е. $\delta_{BH} \approx 0,05\%$, и учет остальных факторов (широты места, отношения высоты H_1 к радиусу земли и влажности) также обеспечит снижение данной суммарной погреш-

¹ Получая сведения по радио или в случае использования результатов измерений после полета путем введения поправок при последующей обработке результатов измерения.

² Следует, однако, отметить, что замер температур с такой точностью на высоте на самолете встречает значительные затруднения.

ности, предположим, до 0,1%, то предельная относительная погрешность измерения высоты может быть снижена для различных высот до следующих значений:

1 000 м до $\delta \approx 1,2\%$;
6 000 м до $\delta \approx 0,6\%$;
12 000 м до $\delta \approx 0,55\%$.

Глава V

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ СТАТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерения разделяются на две основные группы: измерения статические, или измерения величин, не меняющихся во времени, и измерения динамические, или измерения величин, которые с большей или меньшей скоростью изменяются во времени. Между этими двумя основными группами измерений имеется существенная разница. Она заключается в том, что первой группе измерений не присущ особый вид погрешностей — так называемых инерционных.

На более точном определении инерционных погрешностей мы остановимся ниже — при исследовании погрешностей динамических измерений. Сейчас же перейдем к исследованию тех погрешностей, которые присущи не только динамическим, но и статическим измерениям, к так называемым инструментальным погрешностям статических измерений.

Для этого рассмотрим подвижную систему прибора с точки зрения статического равновесия сил, т. е. пренебрегая инерцией подвижных частей прибора. Иначе говоря, мы будем рассматривать систему прибора по прошествии некоторого достаточного времени, после того как на нее действовали соответствующие силы и система пришла в некоторое новое положение, т. е. после того как собственные колебания системы прекратились (затухли) и система пришла в состояние покоя (система успокоилась), причем воздействовавшие на систему силы все время остаются неизменными.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФАКТОРОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПРИЧИНОЙ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ СТАТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Как уже указывалось, инструментальные погрешности могут появляться в результате двух причин: 1) от изменения переменных, являющихся параметрами прибора или просто от их несоответствия требуемым значениям, 2) от появления в приборе или воздействия на прибор каких-либо посторонних сил.

Следовательно, имея дело с той или иной схемой прибора, в первую очередь нужно исследовать: 1) какие параметры прибора претерпевают изменения, 2) под влиянием каких явлений происходит изменение параметров, 3) какие могут быть изменения параметров, 4) в каких условиях работает прибор, 5) какие внутренние или внешние посторонние силы могут действовать на прибор.

С этой точки зрения приведенные в гл. I принципиальные уравнения, определяющие те или иные зависимости, которыми мы пользуемся для выполнения некоторых измерений, являются далеко не полными. Эти уравнения необходимо развить и дополнить, пользуясь методами, приведенными в гл. IV (что частично и сделано на примерах, приведенных в конце главы), проанализировав все параметры прибора, а также условия, в которых приходится работать прибору.

Между прочим отсюда вытекает одно исключительно важное следствие: каждый инженер-приборостроитель, решая поставленную перед ним задачу по созданию прибора для замера тех или иных величин, в первую очередь должен подробнейшим образом изучить все условия, в которых предстоит работать прибору.

3. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ ВСЕХ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ СРЕЛОК ПРИБОРОВ

Напишем для примера уравнение (20) магнитоэлектрического амперметра:

$$M_0 a = \frac{1}{981} \frac{l}{10} H' a b l n. \quad (20)$$

Обозначим через y линейное перемещение указывающего конца стрелки около шкалы и через r радиус стрелки. Тогда получим:

$$y = r a,$$

и уравнение (20) можно переписать в следующем виде:

$$y = \frac{1}{981} \frac{l}{10} H' a b l n \frac{r}{M_0}. \quad (33)$$

В первую очередь посмотрим, какие переменные, являющиеся параметрами прибора, и под влиянием каких условий могут претерпевать изменения. Осредненное напряжение магнитного поля H' постоянного магнита может изменяться от трех причин: 1) от температуры и 2) времени и 3) от сотрясений¹.

Далее от температурных условий могут меняться параметры a и b — ширина и высота рамки; изменение радиуса стрелки r погрешностей не вносит. От температурных же условий (а также от времени) может также меняться удельный момент M_0 волоска. Повидимому, этим исчерпываются все нормальные причины, могущие вызвать изменение переменных, являющихся параметрами прибора. Произведение $l n$ как от изменения температуры, так и от воздействия других факторов меняться не будет, так как с увеличением l соответственно уменьшается n и наоборот.

Далее следует разрешить вопрос, как велики могут быть изменения тех явлений, которые вызывают изменение параметров прибора,

¹ В дальнейшем изменение напряжения магнитного поля H' и удельного момента волоска M_0 от времени, а также изменение напряжения магнитного поля H' от сотрясений мы рассматривать не будем, поскольку правильное изготовление этих элементов прибора и нормальные условия работы должны исключать возможность этих изменений.

и насколько большое влияние эти изменения могут оказывать на показания прибора. Нормально технические условия, по которым строится прибор, должны содержать в себе указания, в каких пределах могут изменяться эти явления, а также и характер их изменений (быстро, медленно и т. п.).

Характер изменения влияющего на прибор явления играет в большинстве случаев существенную роль, так как от этого может зависеть, к какой категории следует отнести погрешность, вызываемую влиянием данного явления, и именно к категории систематических или случайных погрешностей.

Так, при достаточно медленных изменениях температуры можно с достаточной степенью точности считать, что все детали прибора принимают температуру наружной среды, и следовательно, при условии замера температуры наружной среды можно отнести температурные погрешности прибора к систематическим. При быстрых же изменениях температуры наружной среды температурная погрешность переходит в категорию не поддающихся учету, т. е. случайных погрешностей, поскольку за изменением истинной температуры деталей прибора с достаточной степенью точности следить нет возможности.

Определив возможный диапазон изменения явлений, вызывающих погрешности прибора, необходимо приступить к исследованию относительной и абсолютной значимости этих погрешностей. Мы не будем повторять здесь этого исследования, поскольку оно дано на стр. 87, укажем только, что температурные погрешности, вызываемые температурными изменениями параметров M_0 , H' , a и b , настолько малы по своей абсолютной и относительной значимости даже для колебаний температур в пределах $\pm 50^\circ$ (суммарная максимальная погрешность в данном случае достигает значений порядка 0,08%), что ими вообще можно пренебречь.

Для магнитоэлектрического вольтметра последнее уравнение имело бы следующий вид:

$$y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' a b \ln \frac{r}{M_0}, \quad (34)$$

где R — электрическое сопротивление прибора.

Так как электрическое сопротивление основного электрического проводника (красной меди) имеет достаточно значительный температурный коэффициент ($\frac{\Delta R_t}{R} = 0,4\%$ на 1°), то совершенно очевидно, что этой погрешностью пренебрегать нельзя.

Воспользовавшись методами, указанными в гл. IV, можно написать следующие уравнения для добавочного перемещения $\Delta_1 y$ указывающего конца стрелки вольтметра в зависимости от изменения параметра R прибора (для абсолютной температурной погрешности):

$$\Delta_1 y = - \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' a b \ln \frac{r}{M_0} \frac{\Delta R_t}{R}$$

Так как

$$R = R_0 (1 + \beta \Delta t),$$

то

$$\frac{\Delta R_t}{R_0} = \beta \Delta t,$$

где R_0 — сопротивление, для которого была построена шкала,
 β — температурный коэффициент сопротивления.

В таком случае

$$\frac{\Delta R_t}{R} = \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t},$$

и

$$\Delta_1 y = -\frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' a b \ln \frac{r}{M_0} \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t}. \quad (35)$$

Полное перемещение указывающего конца стрелки при температуре, отличной от той, для которой была построена шкала прибора, будет:

$$y_t = y - \Delta_1 y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' a b \ln \frac{r}{M_0} \left(1 - \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t} \right). \quad (36)$$

Величина Δt может быть положительной и отрицательной в зависимости от того, повысится или понизится температура по сравнению с той, для которой была подсчитана шкала. При отрицательном значении Δt знак перед $\Delta_1 y$ изменится на обратный.

Рассмотрим последний фактор: какие внутренние или внешние добавочные силы могут влиять на показания прибора.

Переходя к исследованию внешних сил, могущих оказывать влияние на показания данного прибора, в первую очередь необходимо остановиться на влиянии внешних магнитных полей.

Если бы вместо магнитоэлектрического прибора речь шла об электродинамическом приборе, то благодаря очень слабому основному магнитному полю, создаваемому такими приборами, влияние даже сравнительно слабых внешних магнитных полей могло бы значительно исказить направление основного магнитного поля прибора и тем самым вызвать неправильные его показания. В данном случае на этой погрешности особо можно не останавливаться, так как в нормальных условиях прибору не приходится работать в условиях воздействия на него достаточно сильных внешних магнитных полей.

Кроме внешних магнитных полей, на прибор может действовать еще только одно явление — гравитационное поле земли. Оно может вызывать появление в приборе добавочных сил или моментов в виде добавочных моментов от неуравновешенности деталей прибора, а также в виде моментов трения.

Таким образом уравнение (20) придется представить в следующем виде:

$$M_0 \alpha = \frac{1}{981} \frac{I}{10} H' a b \ln \pm M_{тр} \pm M_{\Delta p},$$

где $M_{тр}$ — момент трения в подвижной системе прибора,
 $M_{\Delta p}$ — момент от неуравновешенности деталей прибора.

Знак $\pm$ указывает, что погрешности случайные, т. е. моменты могут действовать как в одну, так и в другую сторону.

Для вольтметра точно так же получим:

$$M_0 \alpha = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \pm M_{\text{тр}} \pm M_{\Delta p}.$$

Отсюда для вольтметра будем иметь следующее уравнение для перемещения конца стрелки:

$$y' = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0} \pm \frac{M_{\text{тр}} r}{M_0} \pm \frac{M_{\Delta p} r}{M_0}.$$

Принимая

$$\pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0} r = \pm \Delta_2 y$$

и

$$\pm \frac{M_{\Delta p}}{M_0} r = \pm \Delta_3 y,$$

можем написать:

$$y' = y \pm \Delta_2 y \pm \Delta_3 y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0} \pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0} r \pm \frac{M_{\Delta p}}{M_0} r. \quad (37)$$

Таким образом, уравнение для полного перемещения стрелки с учетом всех возможных влияний на прибор будет:

$$y - \Delta_1 y \pm \Delta_2 y \pm \Delta_3 y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0} \left(1 - \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t} \right) \pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0} r \pm \frac{M_{\Delta p}}{M_0} r. \quad (38)$$

На данном примере мы рассмотрели основные факторы, оказывающие наибольшее влияние на показания прибора и наиболее часто встречающиеся. Однако кроме этих факторов может иметь место и еще ряд других. Например, если прибор работает в условиях действующих на него вибраций и если детали его полностью не уравновешены, то, кроме динамического влияния вибраций на показания прибора, выражающегося в вибрации стрелки, при известных условиях вибрации могут создавать еще добавочные моменты, искажающие показания прибора (эффект Максвелла). Кроме трений в шарнирных соединениях прибора искажения показаний прибора могут еще вызываться явлением гистерезиса (межмолекулярным трением) в упругих элементах прибора и т. п.

Не останавливаясь сейчас на этих явлениях, укажем, что уравнение (38) дает для рассмотренных условий работы прибора зависимость основных интересующих нас факторов от параметров прибора, а именно:

1. Перемещение указывающего конца стрелки в зависимости от изменения измеряемого явления:

$$y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0}. \quad (34)$$

Принимая $E = 1$, получаем уравнение, выражающее чувствительность прибора (см. стр. 152):

$$y_0 = \frac{1}{9810} \frac{1}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0}. \quad (39)$$

2. Добавочное перемещение указывающего конца стрелки от воздействия температуры на величину сопротивления прибора R или температурную погрешность:

$$-\Delta_1 y = -\frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' a b \ln \frac{r}{M_0} \frac{\beta}{1 + \beta} \Delta t. \quad (35)$$

3. Добавочное перемещение указывающего конца стрелки (вернее, недоход стрелки до соответствующего положения) от затираний, или погрешность трения:

$$\pm \Delta_2 y = \pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0} r. \quad (40)$$

4. Добавочное перемещение указывающего конца стрелки от неуравновешенности подвижных деталей прибора, или погрешность от неуравновешенности:

$$\pm \Delta_3 y = \pm \frac{M_{\Delta p}}{M_0} r. \quad (41)$$

Тщательной балансировкой подвижной системы прибора последняя погрешность нормально должна быть практически сведена к нулю.

На погрешностях гистерезиса и упругого последствия здесь останавливаться не будем, потому что правильно рассчитанный и изготовленный волосок практически не должен давать этого рода погрешностей.

Рассмотрим еще один пример анероидного высотомера с чувствительным элементом (анероидная коробка с пружиной или без пружины) с постоянной упругостью. Этот пример не вполне реален, поскольку в настоящее время анероидные коробки для беспружинных высотомеров изготавливаются с переменной упругостью, причем переменная упругость подбирается таким образом, что ход коробок в известных пределах остается пропорциональным изменению высоты. Кроме того, чувствительный элемент с анероидной коробкой с пружиной также обладает не вполне постоянной упругостью. Для простоты же мы остановимся сейчас на случае чувствительного элемента с постоянной упругостью, т. е. таком, когда ход коробки пропорционален изменению давления. В дальнейшем изложении мы коснемся случая прибора и с переменной упругостью.

Как мы видели в гл. I, принципиальное уравнение для расчета шкалы барометрического высотомера до 11 000 м (уравнение 3) имеет следующий вид:

$$\lg B_H = 2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H}. \quad (3)$$

Для чувствительного элемента с постоянной упругостью можно написать следующую зависимость:

$$B_H A = F_0 l_H,$$

где A — эффективная площадь коробки,

F_0 — упругость,

l_H — прогиб коробки на высоте H .

Обозначив прогиб коробки для начального давления $B_H = B_0$ через l_0 и разность между прогибом коробки при начальном давлении и прогибом на высоте H через Δl , получим:

$$B_H = \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l).$$

Обозначив далее через y перемещение указывающего конца стрелки около шкалы, можно написать следующую зависимость:

$$y = k \Delta l,$$

где k — некоторое среднее (для перемещений от l_0 до $l_0 - \Delta l$) передаточное отношение передаточного механизма с переменным передаточным отношением.

Подставив значение Δl в последнее уравнение, будем иметь:

$$B_H = \frac{F_0}{A} \left(l_0 - \frac{y}{k} \right). \quad (42)$$

На основании уравнения (42) уравнение (3) можно переписать так:

$$\lg \frac{F_0}{A} \left(l_0 - \frac{y}{k} \right) = 2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H}. \quad (43)$$

Произведя потенционирование, получим:

$$\frac{F_0}{A} \left(l_0 - \frac{y}{k} \right) = 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H} \right)},$$

откуда

$$y = k \left[l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H} \right)}}{F_0} \right]. \quad (44)$$

Так как

$$\frac{y}{k} = \Delta l,$$

то

$$\Delta l = l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H} \right)}}{F_0}. \quad (44a)$$

Проанализировав, как и в первом случае, какие параметры прибора и от каких причин могут претерпевать те или иные изменения, а также, какие посторонние силы могут влиять на показания прибора, придем к следующим результатам.

Во-первых, под влиянием температурных условий могут меняться длины рычагов. Кроме того, что эти изменения достаточно незначительны, одинаковое относительное удлинение всех рычагов не дает изменения передаточного отношения. Таким образом этим фактором можно пренебречь.

Далее под влиянием температурных условий может меняться упругость F_0 anerоидной коробки. Эти изменения могут быть достаточно велики.

Изменением эффективной площади A коробки вследствие температурных изменений ее габаритов можно пренебречь, так как оно достаточно мало.

Что касается добавочных сил, то в данном случае следует принять во внимание те же силы, что и в случае вольтметра — трение в подвижных частях механизма и неуравновешенность.

Если высота H не меняется, но меняется упругость F_0 , то на основании уравнения (44а) получим:

$$\frac{d \Delta l}{d F_0} = \frac{A \cdot 10 \left(\frac{2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H}}{F_0^2} \right)}{F_0^2}.$$

Так как

$$\frac{dy}{d \Delta l} = k_1,$$

где k_1 является истинным передаточным отношением передаточного механизма, т. е. передаточным отношением в данном его положении (см. стр. 104), то

$$\frac{dy}{d F_0} = k_1 \frac{A \cdot 10 \left(\frac{2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H}}{F_0^2} \right)}{F_0^2}.$$

Следовательно, заменяя на основании теории погрешностей дифференциалы конечными малыми приращениями, в конечном результате можно написать:

$$\Delta_1 y = k_1 \frac{A \cdot 10 \left(\frac{2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H}}{F_0} \right)}{F_0} \frac{\Delta F_0}{F_0}. \quad (45)$$

Так как

$$\frac{\Delta F_0}{F_0} = - \frac{\beta \Delta t}{1 - \beta \Delta t},$$

где β является температурным коэффициентом упругости F_0 мембраны, Δt — соответствующим изменением температуры, получим следующую зависимость, выражающую изменение показаний прибора вследствие температурных влияний:

$$\Delta_1 y = - k_1 \frac{A \cdot 10 \left(\frac{2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H}}{F_0} \right)}{F_0} \frac{\beta \Delta t}{1 - \beta \Delta t}. \quad (45a)$$

Дополнив далее уравнение (44), дающее зависимость перемещения указывающего конца стрелки в идеальном случае (при отсутствии в приборе трений и других действующих сил) соответствующими членами, выражающими эти силы, получим:

$$y' = k \left[l_0 - \frac{A \cdot 10 \left(\frac{2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H}}{F_0} \right)}{F_0} \right] \pm \frac{F_{тр}}{F_0} k_1 \pm \frac{F_{\Delta p}}{F_0} k_1,$$

где $F_{тр}$ — суммарная сила трений, приведенная к жесткому центру коробки,

$F_{\Delta p}$ — суммарная сила от всех неуравновешенностей подвижной системы, также приведенная к жесткому центру коробки.

Приравняв

$$\pm \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} k_1 = \pm \Delta_2 y \quad \text{и} \quad \pm \frac{F_{\Delta p}}{F_0} k_1 = \pm \Delta_3 y,$$

можно последнее уравнение переписать так:

$$y' = y \pm \Delta_2 y \pm \Delta_3 y = k \left[l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0} \right] \pm \pm \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} k_1 \pm \frac{F_{\Delta p}}{F_0} k_1. \quad (46)$$

Уравнение, выражающее полное перемещение стрелки с учетом всех основных факторов, напишется так:

$$y - \Delta_1 y \pm \Delta_2 y \pm \Delta_3 y = k \left[l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0} \right] - - \frac{k_1 A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0} \frac{\beta \Delta t}{1 - \beta \Delta t} \pm \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} k_1 \pm \pm \frac{F_{\Delta p}}{F_0} k_1. \quad (47)$$

Таким образом последнее уравнение в общем виде нам дает следующее.

1. Зависимость перемещения указывающего конца стрелки от высоты и параметров прибора:

$$y = k \left[l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0} \right]. \quad (44)$$

2. Приняв за единицу 1 км высоты и подставив в последнее уравнение $H = 1000$ м (можно взять и другую единицу высоты), получим уравнение для чувствительности прибора (см. стр. 152):

$$y_0 = k_{(H=1000)} \left[l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{1000}{19412,2 - 219,062} \right)}}{F_0} \right], \quad (48)$$

где y_0 — постоянная чувствительность прибора в случае высотомера с равномерной шкалой, выравниваемой с помощью передаточного механизма с переменным передаточным отношением.

Если бы мы имели передаточный механизм с постоянным передаточным отношением, т. е. $k = \text{const}$, то для получения чувствительности

прибора для данной точки шкалы нужно было бы взять производную $\frac{dy}{dH}$:

$$\frac{dy}{dH} = \frac{kA \cdot 10 \left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}{F_0} \frac{44698,2}{(19412,2 - 0,219062H)^2}$$

или

$$y'_0 = \frac{44698,2 \cdot kA \cdot 10 \left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}{(19412,2 - 0,219062H)^2 F_0}, \quad (49)$$

где чувствительность прибора y'_0 (см. стр. 152) является величиной переменной.

3. Температурную погрешность

$$-\Delta_1 y = - \frac{k_1 A \cdot 10 \left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}{F_0} \frac{\beta \Delta t}{1 - \beta \Delta t}. \quad (45a)$$

4. Погрешность трения

$$\pm \Delta_2 y = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} k_1. \quad (50)$$

5. Погрешность от неуравновешенности

$$\pm \Delta_3 y = \pm \frac{F_{\Delta p}}{F_0} k_1. \quad (51)$$

В данном случае мы опять-таки рассмотрели только основные погрешности прибора. Мы не останавливаемся здесь на таких погрешностях, как, например, погрешность от гистерезиса, так как при правильном подборе толщины материала с точки зрения допустимых напряжений эти погрешности в основном зависят от технологического процесса изготовления мембран, а не от расчета.

4. СРЕДНЕЕ И ИСТИННОЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

Если передаточное отношение k будет величиной постоянной, то, очевидно, мы получим неравномерную шкалу по высотам. Чтобы в данном случае получить равномерную шкалу по высотам, передаточное отношение передаточного механизма должно быть переменным и удовлетворять определенному условию. При равномерной шкале по высотам можно написать следующую зависимость:

$$y = y_0 H,$$

где y_0 — некоторый постоянный масштаб шкалы или, другими словами, чувствительность прибора.

В таком случае уравнение (43) можно переписать так:

$$\lg \frac{F_0}{A} \left(l_0 - \frac{y}{k} \right) = 2,88081 - \frac{y}{19412,2 y_0 - 0,219062 y}$$

или

$$\lg \frac{F_0}{A} \left(l_0 - \frac{y}{k} \right) = 2,88081 - \frac{k \Delta l}{19412,2 y_0 - 0,219062 k \Delta l},$$

откуда, заменяя и в левой части уравнения $\frac{y}{k}$ через Δl и решая его относительно k , получим:

$$k = \frac{19412,2 y_0 \left[2,88081 - \lg \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l) \right]}{\Delta l \left\{ 1 + 0,219062 \left[2,88081 - \lg \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l) \right] \right\}}. \quad (52)$$

Так как

$$\Delta l = \frac{A(B_0 - B_H)}{F_0} \quad \text{и} \quad \lg \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l) = \lg B_H,$$

то

$$k = \frac{19412,2 y_0 F_0 (2,88081 - \lg B_H)}{A(B_0 - B_H) \{ 1 + 0,219062 (2,88081 - \lg B_H) \}}. \quad (52a)$$

Как уже указывалось выше, k является средним передаточным отношением, соответствующим данному перемещению жесткого центра коробки Δl . Истинное же передаточное отношение передаточного механизма, определяющее отношение скоростей перемещений некоторых двух точек механизма в приборе в каждый данный момент, может быть получено как производная

$$\frac{dy}{d\Delta l} = k_1.$$

Подставив в уравнение (52), определяющее зависимость среднего передаточного отношения от соответствующих параметров, выражение $\frac{y}{\Delta l} = k$, получим:

$$y = \frac{(19412,2 y_0 \left[2,88081 - \lg \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l) \right])}{1 + 0,219062 \left[2,88081 - \lg \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l) \right]},$$

откуда

$$k_1 = \frac{dy}{d\Delta l} = \frac{8430,7 y_0}{(l_0 - \Delta l) \left\{ 1 + 0,219062 \left[2,88081 - \lg \frac{F_0}{A} (l_0 - \Delta l) \right] \right\}^2},$$

или

$$k_1 = \frac{8430,7 y_0 F_0}{AB_H (1 + 0,219062 (2,88081 - \lg B_H))^2}.$$

В окончательном виде будем иметь:

$$k_1 = \frac{8430,7 y_0 F_0}{AB_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}. \quad (53)$$

Таким образом между k и k_1 существует следующая зависимость. Так как

$$dy = k_1 d\Delta l,$$

то

$$y = \int_{\Delta l=0}^{\Delta l=\Delta l_H} k_1 d\Delta l.$$

Так как далее

$$y = k\Delta l_H,$$

то

$$k = \frac{1}{\Delta l_H} \int_{\Delta l=0}^{\Delta l=\Delta l_H} k_1 d\Delta l. \quad (54)$$

Приведя примеры анализа источников погрешностей статических измерений и составления в общем виде полных уравнений, определяющих перемещение указывающего конца стрелки в зависимости от всех факторов, влияющих на это перемещение в пределах, подлежащих учету, перейдем к краткому рассмотрению этих погрешностей и способов их снижения.

5. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Основным источником температурных погрешностей служит изменение под влиянием температуры модуля упругости упругих элементов приборов, в частности измерительных пружин чувствительных элементов и т. п. Эти изменения могут быть различны в зависимости от материала и обработки. Так, для бронзовых волосков, применяемых в электроизмерительных приборах, температурный коэффициент модуля упругости по Кайнату равен примерно 0,04% на 1°; для бронзовых анероидных коробок, выдавленных гидравлическим способом (Матвеева), он будет порядка 0,04% на 1° (по Бромбахеру для фосфористой бронзы температурный коэффициент равен 0,038%); для стальных пружин температурный коэффициент модуля сдвига g — порядка 0,025 до 0,03% на 1°; по Бромбахеру для рояльной проволоки $\frac{\Delta g}{g} = -0,26\%$; для хромованадиевой стали $\frac{\Delta g}{g} = -0,029\%$ и для молибденовой стали $\frac{\Delta g}{g} = -0,03\%$.

В электроизмерительных приборах, как мы видели выше, имеются еще источники температурных погрешностей, например, изменение напряжения магнитного поля постоянных магнитов, изменение сопротивления обмоток, рамок и пр. Кроме того, изменение температуры может вызвать изменение соотношения плеч рычагов передаточных механизмов, но эти изменения обыкновенно достаточно малы и вообще могут иметь место только при изготовлении отдельных плеч рычагов из различных материалов, что обыкновенно не имеет места, или в том случае, если основание, на котором крепятся опоры рычагов, изготовлено из другого материала, чем рычаги.

6. КОМПЕНСАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Если изменения температуры происходят медленно и, измеряя температуру наружной среды, можно быть уверенным, что эта температура соответствует температуре деталей прибора, температурные погрешности могут быть изучены, и тогда их относят к группе систематических погрешностей. В конечном результате по величине они могут достигать в некоторых случаях довольно значительных размеров. Так как необходимость введения поправок исключает возможность быстрого использования результатов измерения, и не всегда можно быть уверенным, что температура окружающей среды совпадает с температурой элементов прибора, которые являются источником температурных погрешностей, в ряде случаев исключительную важность приобретает вопрос устранения или хотя бы снижения температурных погрешностей. Достигается это с помощью температурной компенсации, которая может быть двух родов:

1) компенсация в чувствительном элементе, когда тем или иным способом можно уменьшить температурные изменения в чувствительном элементе, или же явлению, вызываемому температурным влиянием на чувствительный элемент, противопоставляется другое явление, уравновешивающее частично или полностью первое под влиянием тех же температурных изменений;

2) компенсация в передаточном механизме (кинематическая), заключающаяся в том, что температурные изменения чувствительного элемента компенсируются соответствующими перемещениями передаточного механизма или изменением передаточного отношения передаточного механизма.

Температурная компенсация магнитоэлектрического вольтметра с большим балластным сопротивлением

В качестве примера компенсации в чувствительном элементе путем снижения влияния на чувствительный элемент температуры можно привести следующую температурную компенсацию.

Рассмотрим простейший пример магнитоэлектрического вольтметра на большие напряжения, т. е. такие напряжения, при которых в цепь рамки приходится вводить добавочное балластное сопротивление. Если обозначить через β' остаточный¹ температурный коэффициент волоска, через β'' — температурный коэффициент сопротивления рамки R_1 и через β''' — температурный коэффициент балластного сопротивления R_0 , то, оставляя остальные обозначения теми же, что и раньше, можно уравнение (20) переписать в следующем виде:

$$M_0(1+\beta'\Delta t)\alpha = \frac{H'}{9810} \frac{E}{[R_0(1+\beta'''\Delta t)+R_1(1+\beta''\Delta t)]} ab \ln, \quad (55)$$

$$1 + \frac{1-\beta_1\Delta t}{1-\beta_2\Delta t} = 1 + \frac{(\beta_2-\beta_1)\Delta t}{1-\beta_2\Delta t} \approx 1 + \beta'\Delta t,$$

где β_1 и β_2 — температурные коэффициенты волоска и постоянного магнита,

$$\beta' = \beta_2 - \beta_1 \quad (\text{см. стр. 87}).$$

где Δt — изменение температуры,

E — измеряемое напряжение, $\frac{E}{R_0 + R_1} = I$.

Тогда

$$E = \frac{9810 M_0 \alpha}{H' ab \ln} [R_0(1 + \beta''' \Delta t) + R_1(1 + \beta'' \Delta t)](1 + \beta' \Delta t). \quad (56)$$

β'' и β''' можно обозначить через β (результатирующий температурный коэффициент всего сопротивления), величина которого определится по следующей зависимости:

$$\beta(R_0 + R_1) = \beta''' R_0 + \beta'' R_1. \quad (57)$$

Отсюда видно, что соответствующим подбором температурных коэффициентов и сопротивлений, входящих в R_0 , можно подобрать такое значение β , которое при данных β'' и β' позволит получить нужный температурный коэффициент β . Таким образом последнее уравнение можно переписать так:

$$E = \frac{9810 M_0 \alpha}{H' ab \ln} (R_0 + R_1) (1 + \beta \Delta t) (1 + \beta' \Delta t)$$

или

$$E = \frac{9810 M_0 \alpha}{H' ab \ln} (R_0 + R_1) (1 + \beta \Delta t + \beta' \Delta t + \beta \beta' \Delta^2 t). \quad (58)$$

Из уравнения (58) видно, что наименьшая погрешность получается при $\beta \rightarrow 0$.

Если $\beta_1 > \beta_2$, т. е. $\beta' \Delta t$ отрицательно, уравнение (58) примет следующий вид:

$$E = \frac{9810 M_0 \alpha}{H' ab \ln} (R_0 + R_1) (1 + \beta \Delta t - \beta' \Delta t - \beta \beta' \Delta^2 t).$$

Тогда при $\beta = \beta'$ имеем:

$$E = \frac{9810 M_0 \alpha}{H' ab \ln} (R_0 + R_1) [1 - (\beta' \Delta t)^2]. \quad (59)$$

Так как $\beta' \Delta t$ является в пределах интересующих нас температур величиной малой по сравнению с единицей, то квадратом этой величины можно пренебречь.

Таким образом в последнем случае (уравнение 59) на основании зависимости (57) температурный коэффициент балластного сопротивления должен быть равен:

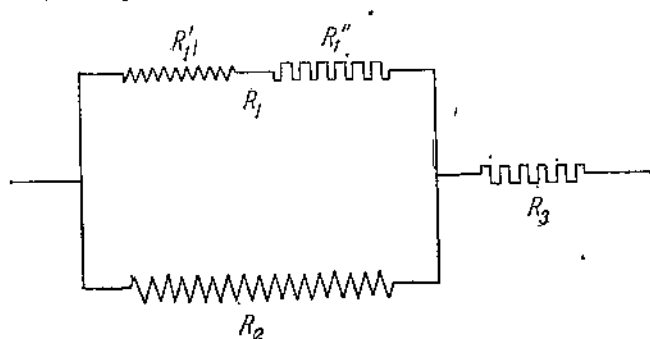
$$\beta''' = \frac{\beta' (R_0 + R_1) - \beta'' R_1}{R_0}. \quad (60)$$

Температурная компенсация магнитоэлектрического вольтметра с малым сопротивлением цепи рамки

В качестве примера температурной компенсации в чувствительном элементе путем противопоставления явлению, вызываемому температурным влиянием на чувствительный элемент другого явления, приведем следующий случай.

Если вольтметр предполагается для замера малых напряжений, т. е. увеличение сопротивления цепи рамки необходимо иметь возможно

меньшим, температурная компенсация в чувствительном элементе может быть осуществлена другим способом: сопротивление R_1 подвижной рамки¹ шунтируется добавочным сопротивлением (фиг. 23) R_2 и последовательно с обоими параллельными сопротивлениями R_1 и R_2 включается незначительное сопротивление R_3 . Сопротивление R_3 должно иметь температурный коэффициент, по возможности близкий к нулю ($\beta_3 \approx 0$). Температурный коэффициент шунтирующего рамку сопротивления R_2 должен быть, как увидим ниже, больше коэффициента рамки R_1 .



Фиг. 23. Схема температурной компенсации в чувствительном элементе электроизмерительных приборов.

В этом случае при наличии сопротивления R_3 и при соответствующем температурном коэффициенте β_2 шунтирующего рамку сопротивления R_2 изменение сопротивления R_1 компенсируется соответствующим изменением падения напряжения в сопротивлении R_3 . Сопротивление R такой цепи будет:

$$R = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

и общая сила тока

$$I = \frac{E}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Интересующая нас сила тока в рамке будет:

$$I_1 = I - I_2.$$

Так как

$$I_1 R_1 = I_2 R_2,$$

то

$$I_2 = I_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

и в этом случае

$$I_1 = \frac{I}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.$$

¹ Сопротивление R_1 может состоять из сопротивления самой рамки R'_1 и незначительного балластного сопротивления R''_1 , температурный коэффициент которого близок к нулю.

Заменяв общую силу тока I ее значением, получим:

$$I_1 = \frac{E}{\left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} = \frac{E}{\frac{R_1}{R_2} (R_2 + R_3) + R_3}. \quad (61)$$

Чтобы температурное изменение сопротивления R_1 не влияло на силу тока в рамке I_1 , — а именно это условие и обеспечивает исключение температурной погрешности, вызываемой температурными изменениями сопротивления R_1 , — необходимо, чтобы

$$I_1 = I_{1t}$$

или после соответствующих сокращений

$$(R_2 + R_3) = \frac{(1 + \beta_1 \Delta t)}{(1 + \beta_2 \Delta t)} [R_2 (1 + \beta_2 \Delta t) + R_3] \quad (62)$$

(как указывалось выше, считаем, что $\beta_3 = 0$).

На основании уравнения (62) получим:

$$1 = \frac{1 + \beta_1 \Delta t}{1 + \beta_2 \Delta t} \left(1 + \beta_2 \frac{R_2}{R_2 + R_3} \Delta t\right)$$

или

$$R_3 = R_2 \frac{\beta_1 (1 + \beta_2 \Delta t)}{\beta_2 - \beta_1}. \quad (63)$$

Из уравнения (63) видно, что полная компенсация для всех точек температурной кривой невозможна, но для некоторой температуры, отличной от нормальной для данного прибора, можно полностью скомпенсировать температурную погрешность, подобрав соответствующие соотношения между R_3 и R_2 , а также между R_2 и R_1 . Так как необходимо, чтобы $\beta_2 > \beta_1$, то надо подобрать материалы для шунтирующего сопротивления с большим температурным коэффициентом, чем медь (из которой изготавливается обмотка рамки), либо последовательно с сопротивлением рамки и параллельно с шунтирующим сопротивлением включить незначительное добавочное сопротивление с температурным коэффициентом, близким к нулю, либо сделать и то и другое, чтобы получить при данном напряжении максимальную силу тока I_1 в рамке.

Еще более совершенный метод температурной компенсации в чувствительном элементе магнитоэлектрических приборов заключается в применении магнитных шунтов из специальных материалов, меняющих магнитную проводимость в зависимости от температуры.

Температурная компенсация в чувствительном элементе высотомера с постоянной упругостью чувствительного элемента

Другим примером температурной компенсации в чувствительном элементе может служить компенсация температурной погрешности anerоидных приборов путем оставления некоторого остаточного давления в anerоидной коробке. Рассмотрим случай anerоидного барометра с беспружинной anerоидной коробкой с постоянной упругостью. Для этого случая можно написать:

$$B = \frac{F_0 l}{A}, \quad (64)$$

где B — соответствующее атмосферное давление,
 l — прогиб анероидной коробки,
 F_0 — упругость анероидной коробки,
 A — ее эффективная площадь.

Если внутри анероидной коробки (см. приложение 1, стр. 288, фиг. 67) оставить давление p , то при постоянном объеме в зависимости от изменения температуры давление в коробке будет меняться по следующему закону:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right).$$

Кроме того, по мере уменьшения объема внутренней полости коробки вследствие сближения противоположных мембран при повышении наружного давления давление внутри коробки будет повышаться, и в конечном итоге получим:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \left(\frac{h}{h - k_2 l} \right), \quad (65)$$

где $k_2 \approx \frac{1}{3} \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right)$,

R — радиус мембран,

r — радиус жесткого центра,

h — расстояние (приведенное) между мембранами при $l = 0$.

Таким образом, если оставить давление внутри коробки, мы получим следующую зависимость:

$$B - p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \left(\frac{1}{h - k_2 l} \right) = \frac{F_0 l}{A}. \quad (66)$$

Если дальше предположить, что упругость мембран имеет следующую температурную зависимость:

$$F_0 = F_{00} (1 - \beta \Delta t),$$

то будем иметь:

$$B - p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \left(\frac{h}{h - k_2 l} \right) = \frac{F_{00} l}{A} (1 - \beta \Delta t).$$

В конечном результате

$$B = \frac{F_{00} l}{A} (1 - \beta \Delta t) + p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \left(\frac{h}{h - k_2 l} \right). \quad (67)$$

Для получения полной компенсации необходимо, чтобы для любых температур и прогибов l была удовлетворена следующая зависимость:

$$\frac{F_{00} l}{A} \beta = \frac{p_0}{T_0} \frac{h}{h - k_2 l},$$

на основании чего будем иметь ¹:

$$l^2 - \frac{h}{k_2} l + \frac{A p_0 h}{F_{00} \beta T_0 k_2} = 0. \quad (68)$$

¹ В данном случае мы задались такой температурной зависимостью для упругости мембраны, при которой при нулевом прогибе температурное смещение мембран равно нулю. На самом же деле анероидные коробки обладают температурным прогибом, весьма различным для различных коробок и при нулевом прогибе. Поэтому ФАИ дает следующую поправку на температурную погрешность:

$$\Delta p = (a - \beta p) \Delta t,$$

где a — некоторый постоянный коэффициент, определяемый индивидуально для каждой коробки.

Уравнение (68) дает два решения для l , из чего следует, что с помощью данной компенсации можно скомпенсировать температурную погрешность только для двух точек шкалы (для каких-либо двух значений измеряемого давления).

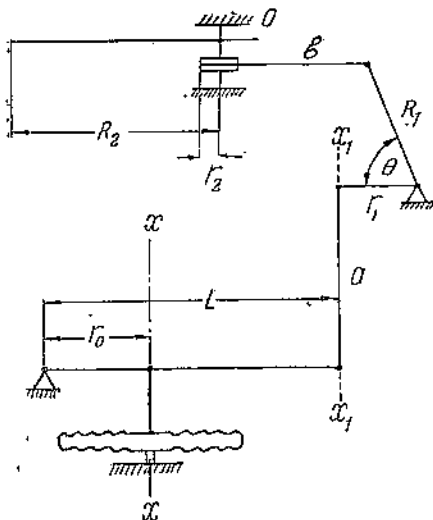
Кинематическая температурная компенсация высотомера с постоянной упругостью чувствительного элемента

В качестве примера температурной компенсации в передаточном механизме (кинематической) может служить компенсация высотомеров с помощью биметалла.

Как уже мы видели выше (стр. 102), температурное влияние на чувствительный элемент (анероидную коробку) высотомера вызывает следующее перемещение $\Delta_1 y$ указывающего конца стрелки:

$$\Delta_1 y = \frac{k_1 A \cdot 10^{\left(\frac{2,88081}{19412,2 - 0,219062 H} \right)} \frac{\Delta F_0}{F_0}}{F_0} \quad (45)$$

Для устранения данной температурной погрешности с помощью кинематической температурной компенсации необходимо, чтобы под влиянием тех же температурных условий в передаточном механизме произошли некоторые изменения, в результате которых указывающий конец стрелки переместился бы в обратном направлении на ту же величину $\Delta_1 y$.



Фиг. 24. Схема передаточного механизма с переменным передаточным отношением.

Схема передаточного механизма с переменным передаточным отношением, применявшегося в типах высотомеров с пружинами и весьма удовлетворительно выравнивавшего логарифмический характер шкалы последних¹ (фиг. 24), следующая.

Обозначим через r_0 и L малое плечо и длину большого рычага, r_1 и R_1 — малое и большое плечи малого мостика, r_2 — радиус блока, на который наматывается цепочка Галля, и R_2 — указывающее плечо стрелки. В дальнейшем пренебрежем практически незначительным при известных условиях влиянием поворота тяги a и угла наклона цепочки Галля b . Обозначим через x перемещение жесткого центра коробки, считая $x = 0$ при прогибе, соответствующем давлению $B = B_0$, через x_1 — перемещение конца большого рычага, к которому крепится тяга a

¹ Подбор параметров механизма см. стр. 302.

через α — угол между малым плечом малого мостика и плоскостью, перпендикулярной к направлению хода x коробки, через α_0 — начальный угол между малым плечом r_1 малого мостика и плоскостью, перпендикулярной к ходу x коробки, при $x = 0$, через θ — постоянный угол между малым и большим плечами малого мостика, через z — перемещение проекции конца большого рычага R_1 малого мостика на плоскость, перпендикулярную к оси O стрелки, и через γ — угол поворота стрелки. Обозначив через y' перемещение указывающего конца стрелки в зависимости от параметров передаточного механизма, приближенно будем иметь:

$$y' = R_2 \gamma;$$

$$\gamma = \frac{z}{r_2};$$

$$z = R_1 [\cos(\alpha_0 + \theta) - \cos(\alpha + \theta)];$$

$$x_1 = r_1 (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

и

$$x_1 = x \frac{L}{r_0}.$$

Сделав соответствующие подстановки, будем иметь:

$$y' = \frac{R_2 R_1}{r_2} \left[\frac{xL}{r_1 r_0} \sin \theta + (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) \cos \theta \right].$$

После соответствующих преобразований, так как

$$\cos \alpha_0 - \cos \alpha = \frac{xL}{r_1 r_0} \frac{\sin \alpha + \sin \alpha_0}{\cos \alpha + \cos \alpha_0} = \frac{xL}{r_1 r_0} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0),$$

последнее уравнение примет следующий вид:

$$y' = x \frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \left[\sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0) \right], \quad (69)$$

где

$$\frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \left[\sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0) \right] = k' \quad (70)$$

является средним передаточным отношением передаточного механизма при ходе коробки от нуля до x .

Как оказывается, с помощью данной функции, подбирая соответствующие значения углов α_0 и θ и диапазон изменения углов α , можно получить передаточный механизм с переменным передаточным отношением, достаточно хорошо выравнивающим логарифмическую зависимость между давлением в высоте.

Можно сделать переменными под влиянием температуры следующие параметры передаточного механизма: x , L , r_1 , θ , R_1 и наконец непосредственно угол поворота стрелки γ . Делая эти параметры в зависимости от температуры переменными, мы получили бы для каждого из них следующее компенсирующее перемещение указывающего конца стрелки:

$$1) \Delta' y_1 = k'_1 \Delta x; \quad (71)$$

$$2) \Delta' y_2 = \frac{x}{L} k'_1 \Delta L \text{ (если при } x=0 \text{ } L \perp a); \quad (72)$$

$$3) \Delta' \gamma_3 = - \frac{x + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha_0}{r_1} k'_1 \Delta r_1; \quad (73)$$

$$4) \Delta' \gamma_4 = x \frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \left[\cos \theta - \sin \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0) \right] \Delta \theta; \quad (74)$$

$$5) \Delta' \gamma_5 = x \frac{L}{r_0} \frac{1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \left[\sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0) \right] \Delta R_1; \quad (75)$$

$$6) \Delta' \gamma_6 = R_2 \Delta \gamma. \quad (76)$$

В этих уравнениях k'_1 является истинным фактическим ¹ передаточным отношением передаточного механизма для данного его положения, зависимость которого от параметров передаточного механизма выражается следующим образом:

$$k'_1 = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \left\{ \sin \theta + \cos \theta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0) + \frac{x}{r_1} \frac{L}{r_0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0) \cos \alpha} \right] \right\}. \quad (70a)$$

Для полной кинематической температурной компенсации необходимо, чтобы алгебраическая сумма

$$\Delta' \gamma + \Delta_1 \gamma = 0.$$

В частном случае можно поставить условие, чтобы

$$-\Delta' \gamma_{(3)} + \Delta_1 \gamma = 0,$$

или, что то же самое, на основании уравнений (45) и (73):

$$- \frac{k_1 A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0} \cdot \frac{\Delta F_0}{F_0} + \frac{x + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha_0}{r_1} k'_1 \Delta r_1 = 0. \quad (77)$$

Так как $x = \Delta l$, то на основании уравнения (44a)

$$x = l_0 - \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0}.$$

Далее можно принять, что $k_1 = k'_1$, и уравнение (77) переписать так:

$$+ \frac{A \cdot 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062H} \right)}}{F_0} \left(\frac{\Delta F_0}{F_0} - \frac{\Delta r_1}{r_1} \right) + \left(l_0 + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha_0 \right) \frac{\Delta r_1}{r_1} = 0. \quad (78)$$

¹ В отличие от истинного передаточного отношения передаточного механизма, обозначенного выше через k_1 и выражающего только необходимое истинное передаточное отношение передаточного механизма для компенсации логарифмического характера шкалы.

Наиболее просто подобрать биметалл, изменяющий длину малого плеча r_1 малого мостика таким образом, что при любых температурах

$$\frac{\Delta F_0}{F_0} = \frac{\Delta r_1}{r_1}.$$

Однако в этом случае нельзя получить полной температурной компенсации, так как

$$\left(l_0 + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha_0\right) \frac{\Delta r_1}{r_1} \neq 0.$$

Чтобы скомпенсировать и это перемещение указывающего конца стрелки, соответствующее члену $\left(l_0 + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha\right) \frac{\Delta r_1}{r_1}$, необходимо получить в передаточном механизме еще одну кинематическую температурную компенсацию:

$$\Delta' y_1 = k'_1 \Delta x, \quad (71)$$

подобрав биметалл таким образом, чтобы

$$\left(l_0 + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha_0\right) \frac{\Delta r_1}{r_1} = \Delta x.$$

При этих условиях получается полная компенсация температурной погрешности с той точностью, с какой удовлетворены приведенные выше условия. Роль получающейся в данном случае двойной кинематической температурной компенсации можно пояснить на следующем условном примере. Предположим, у нас имеется какой-то чувствительный элемент с постоянной упругостью, дающий некоторую равномерную шкалу, удовлетворяющую следующей зависимости:

$$C = \frac{k_0}{k'} F_0 y,$$

где k_0 — коэффициент пропорциональности,
 k' — передаточное отношение передаточного механизма.

Предположим далее, что температурное изменение упругости можно выразить таким образом:

$$F_0 = F_{00} (1 - \beta \Delta t),$$

а температурное изменение передаточного отношения передаточного механизма, соответствующее кинематической температурной компенсации, можно выразить так:

$$k' = k'_{00} (1 - \beta \Delta t).$$

Изобразим данную равномерную шкалу с помощью прямой OB (фиг. 25), причем прогиб, равный нулю $l = 0$ совпадает с точкой O (фиг. 25), т. е. с нулем шкалы. Так как температурное изменение упругости вызывает поворот прямой OB около точки O на некоторый угол

$$\Delta \alpha = \arctg \frac{k_0 F_{00}}{k'_{00}} - \arctg \frac{k_0 F_{00} (1 - \beta \Delta t)}{k'},$$

то, поставив температурную компенсацию, действующую таким образом, что

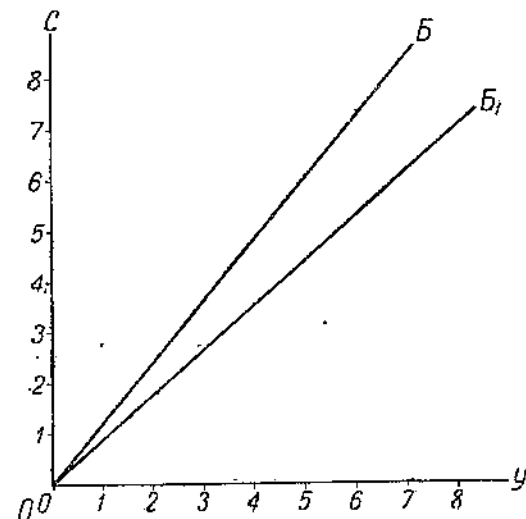
$$k' = k'_{00} (1 - \beta \Delta t),$$

тем самым поворачиваем прямую OB на нужный угол в обратную сторону и полностью устраняем температурную погрешность. Если прогиб, равный нулю $l = 0$, совпадает с точкой B , т. е. шкала удовлетворяет зависимости:

$$C = k_0 F_0 \left(l_0 - \frac{y}{k'} \right),$$

то прямая, изображающая равномерную шкалу, повернется при остальных равных условиях на угол $\Delta \alpha$ около точки B (фиг. 26).

Принципиальной разницы с точки зрения кинематической температурной компенсации между первым и вторым примерами нет, но только



Фиг. 25. График температурного поворота прямой, изображающей равномерную шкалу.

до тех пор, пока к кинематике передаточного механизма не предъявляется особых требований, как это приходится делать в случае высотомера, где нулевому прогибу чувствительного элемента должно соответствовать бесконечно большое передаточное отношение передаточного механизма.

В этих случаях иногда представляется более удобным применять такую кинематическую температурную компенсацию, которая поворачивала бы кривую¹, изображающую зависимость шкалы, на угол $\Delta \alpha$ не около точки B , лежащей при таких условиях в бесконечности, а около какой-то другой точки², и затем передвигала бы ее параллельно самой себе

¹ Здесь уравнение

$$C = k_0 F_0 \left(l_0 - \frac{y}{k'} \right)$$

уже не будет уравнением прямой, так как в случае высотомера k' является переменной величиной, зависящей от y .

² Изменением передаточного отношения k' можно повернуть прямую вокруг точки O_1 (фиг. 26) если расположение передаточного механизма таково, что при изменении передаточного отношения k' мы не смещаем точки O_1 , т. е. мы не изменяем величины

$$C_0 = k_0 F_{00} (1 - \beta \Delta t) l_0.$$

Но часто может оказаться, что при изменении передаточного отношения k' смещается точка O_1 , иначе говоря, поворот получается не вокруг точки O_1 , а вокруг какой-то другой на прямой BO_1 . Таким образом, при известном расположении передаточного механизма можно при изменении k' получить поворот вокруг любой точки прямой BO_1 .

до совпадения с начальной кривой; это достигается способом, рассмотренным выше на примере высотомера с двойной кинематической температурной компенсацией.

Компенсация $\left(l_0 + \frac{r_0}{L} r_1 \sin \alpha_0\right) \frac{\Delta r_1}{r_1} - \Delta x = 0$ в этом случае является как раз той частью кинематической температурной компенсации, которая передвигает изображающую шкалу кривую, повернутую около какой-то точки, отличной от точки B , параллельно самой себе до совпадения с начальной кривой. Эту часть температурной компенсации иногда называют компенсацией нулевой точки, что принципиально не вполне правильно, так как по существу точка (фиг. 27), около которой поворачивается на угол $\Delta\alpha$ изображающая шкалу кривая, может лежать и в любой другой точке шкалы. В частном случае, соответствующем старым высотомерам, поворот происходит в точке, в которой $\alpha=0$. В этих высотомерах, таким образом, имеем $\alpha_0=0$, следовательно приведенное выше условие принимает следующий вид:

$$l_0 \frac{\Delta r_1}{r_1} - \Delta x = 0.$$

Так как

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\Delta F_0}{F_0},$$

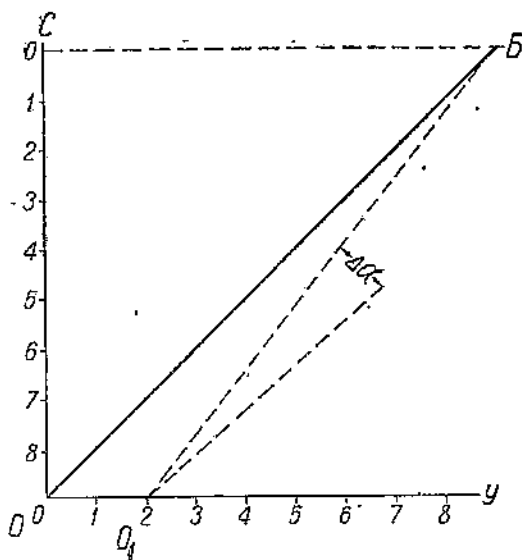
то последнее условие можно переписать в таком виде:

$$l_0 \frac{\Delta F_0}{F_0} - \Delta x = 0,$$

откуда видно, что $l_0 \frac{\Delta r_1}{r_1} = l_0 \frac{\Delta F_0}{F_0}$ является ни чем иным, как температурным прогибом чувствительного элемента, соответствующим нулю шкалы.

Компенсация, удовлетворяющая зависимости:

$$-\Delta'' y_3 = x k_1' \frac{\Delta r_1}{r_1}, \quad (73)$$



Фиг. 26. График температурного поворота прямой, изображающей равномерную шкалу.

дает по существу переменное в зависимости от температуры передаточное отношение передаточного механизма, удовлетворяющее условию:

$$k'_1 = k'_{00}(1 - \beta \Delta t),$$

соответственно температурному изменению упругости по зависимости:

$$F_0 = F_{00}(1 - \beta \Delta t),$$

т. е. является частью двойной кинематической температурной компенсации, которая поворачивает прямую O_1B вокруг какой-то точки на угол $\Delta\alpha$.

Выбор точки, около которой поворачивается в данном случае прямая, изображающая шкалу, на угол:

$$\Delta\alpha = \arctg \frac{k_0 F_{00}}{k'_{00}} - \arctg \frac{k_0 F_{00}}{k'} (1 - \beta \Delta t),$$

как уже указывалось, может быть произвольным.

В конечном итоге он зависит от передаточного механизма. Чтобы осуществить требующийся от кинематической температурной компенсации поворот прямой, изображающей шкалу, вокруг какой-либо ее точки, необходимо, чтобы температурные изменения в передаточном механизме не давали перемещений стрелки при положении механизма, соответствующем этой точке шкалы. При отклонении передаточного механизма от этого положения в обе стороны необходимо, чтобы те же температурные изменения вызывали перемещения передаточным механизмом стрелки, возрастающие с увеличением отклонения в определенной зависимости.

Каким образом это условие выполняется в рассмотренном выше передаточном механизме высотомера, укажем ниже, вообще же говоря, это зависит исключительно от кинематики передаточного механизма. В общем случае, в зависимости от характера кинематики передаточного механизма, может оказаться (и именно когда $\alpha_0 \neq 0$), что точка, в которой температурные изменения в передаточном механизме не вызывают перемещения стрелки, т. е. около которой происходит поворот кривой, изображающей шкалу, и не совпадает с нулем шкалы.

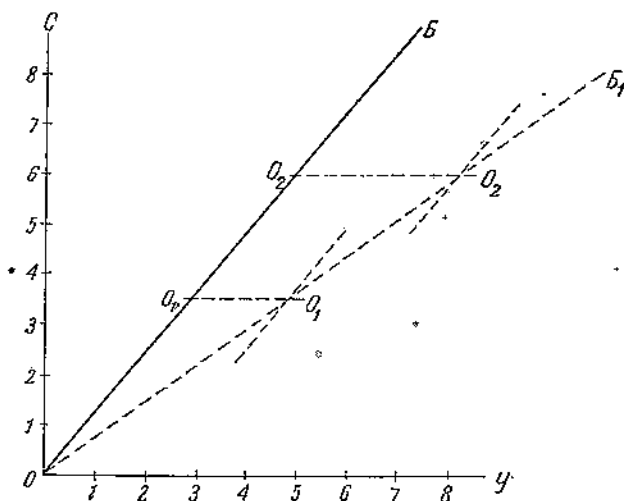
По условиям кинематики передаточного механизма эта точка может оказаться в любом участке шкалы, что, однако, никакого принципиального значения не имеет, влияя исключительно на величину второй температурной компенсации, задача которой — переместить уже повернутую кривую, изображающую шкалу, параллельно самой себе до совпадения ее с начальным положением.

Влияние точки, около которой поворачивается прямая, изображающая шкалу, на величину второй температурной компенсации видно из фиг. 27.

По мере приближения этой точки к нулевому прогибу величина второй температурной компенсации уменьшается, и при совпадении

этой точки с нулевым прогибом необходимость второй температурной компенсации отпадает.

Положение передаточного механизма высотомера (фиг. 24), при котором температурные изменения размеров малого плеча r_1 малого мостика не вызывают перемещений стрелки, должно быть таково, чтобы эти изменения происходили в плоскости, перпендикулярной к тяге a . В этом случае температурные перемещения биметалла малого мостика будут вызывать только незначительный поворот тяги и практически не будут вызывать перемещений стрелки.



Фиг. 27. График температурного поворота прямой, изображающей равномерную шкалу.

Выполнение малого плеча r_1 малого мостика в виде биметаллической пластинки (фиг. 28), к свободному концу которой крепится тяга, полностью удовлетворяет требованию температурной компенсации, меняющей передаточное отношение. Вторая температурная компенсация (в частном случае компенсация нулевой точки) обыкновенно устанавливается на большом рычаге (фиг. 28) и таким образом компенсирует температурный прогиб коробки на той точке, на которой в случае высотомера $H = 0$.

Необходимо указать, что те же результаты могут быть получены и с помощью одной биметаллической пластинки, устанавливаемой на малом мостике. Но в этом случае биметаллическую пластинку приходится ставить под некоторым углом ε (фиг. 29).

Если обозначить через Δz температурное перемещение биметалла, то в этом случае

$$\Delta r_1 = \Delta z \cos \varepsilon,$$

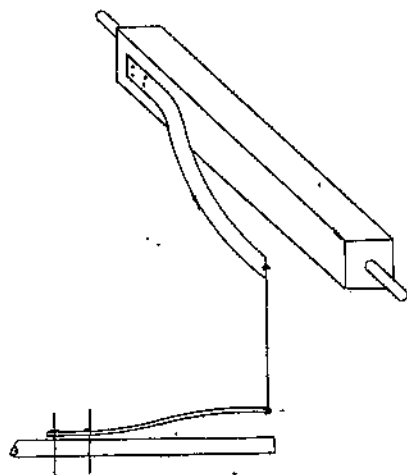
а

$$\Delta x = \Delta z \sin \varepsilon,$$

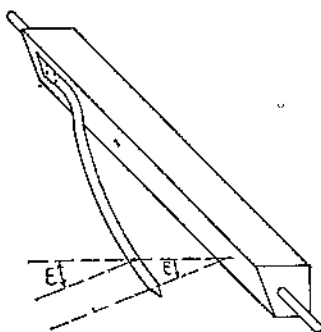
и уравнение (78) при условии, что $\alpha_0 = 0$, переписывается так:

$$\frac{A \cdot 10 \left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H} \right)}{F_0} \left(\frac{\Delta F_0}{F_0} - \frac{\Delta z}{r_1} \cos \varepsilon \right) + \left(\frac{l_0}{r_1} \Delta r_1 - \Delta z \sin \varepsilon \right) = 0. \quad (79)$$

Остальные приведенные варианты кинематической температурной компенсации, соответствующие уравнениям (72), (74), (75) и (76), обыкновенно не применяются, так как они менее удобны. Например шестой вариант (уравнение 76) вполне мог бы заменить первый (уравнение 71),



Фиг. 28. Схема биметаллической температурной компенсации высотмера с пружинной коробкой.



Фиг. 29. Схема биметаллической температурной компенсации на малом мостике.

но он значительно менее удобен, так как устанавливается в последнем звене передаточного механизма и требует значительно больших перемещений от биметалла, нежели первый.

Температурная погрешность высотометров с чувствительным элементом с переменной упругостью

Небезынтересно рассмотреть температурную компенсацию для случая беспружинных анероидных коробок с переменной упругостью. Будем считать, что переменная упругость подобрана таким образом, что на определенном диапазоне высот прогиб коробок пропорционален высоте. Перепишем уравнение (3) в следующем виде:

$$H = \frac{19412,2 \lg \frac{B_0}{B_H}}{1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}}. \quad (80)$$

Для равномерной шкалы, т. е. для постоянной чувствительности прибора, зависимость между высотой и перемещением указывающего конца стрелки можно представить в следующем виде:

$$y = y_0 H,$$

где y_0 — чувствительность (см. стр. 152) прибора.

Тогда

$$y = y_0 \frac{19412,2 \lg \frac{B_0}{B_H}}{1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}}. \quad (81)$$

Продифференцировав последнее выражение, получим:

$$\frac{dy}{dB_H} = - \frac{8430,7 y_0}{B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}\right)^2}. \quad (82)$$

С другой стороны, так как

$$\frac{dy}{d\Delta l} = k_1$$

и

$$-d\Delta l = \frac{A dB_H}{F'_{0B_H}},$$

то можно написать:

$$\frac{dy}{dB_H} = -k_1 \frac{A}{F'_{0B_H}},$$

где F'_{0B_H} — упругость, соответствующая данному давлению B_H (другими словами — прогибу y).

Следовательно, на основании последнего уравнения и уравнения (82) получим:

$$k_1 \frac{A}{F'_{0B_H}} = \frac{8430,7 y_0}{B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}\right)^2}$$

или

$$F'_{0B_H} = \frac{k_1 A B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}\right)^2}{8430,7 y_0}.$$

Так как по теории сопротивления материалов переменная упругость получается не за счет изменения модуля упругости материала, а за счет нелинейной зависимости изменения напряжений в материале от прогиба, то переменную упругость можно выразить через модуль упругости в виде следующей зависимости:

$$F'_{0B_H} = E k'_{0B_H}.$$

В данном случае k'_{0B_H} является некоторым размерным коэффициентом $k'_{0B_H} = [L^{-1}]$, меняющимся в зависимости от прогиба и характеризую-

щим изменения напряжений в материале в зависимости от той же причины. Для случая анероидной коробки с переменной упругостью, имеющей ход, пропорциональный изменению высоты, коэффициент k'_{0B_H} должен удовлетворить следующему условию:

$$k'_{0B_H} = \frac{k_1 A B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}{8430,7 y_0 E}. \quad (83)$$

Подставляя в уравнение (42) вместо F_0 среднюю упругость $F'_{0cp} = E k'_{0cp}$, получим:

$$(kl_0 - y) E = k \frac{B_H A}{k'_{0cp}}.$$

При постоянном прогибе y , т. е. если изменение модуля упругости E скомпенсировалось изменением давления B_H , а следовательно, и при постоянном значении k'_{0cp} будем иметь:

$$(kl_0 - y) dE = \frac{k A}{k'_{0cp}} dB_H.$$

Из двух последних равенств получим:

$$\frac{dB_H}{B_H} = \frac{dE}{E}. \quad (84)$$

На основании уравнения (84) можно рассуждать так, что бесконечно малое изменение прогиба dy , вызываемое бесконечно малым относительным изменением давления $\frac{dB_H}{B_H}$:

$$dy = - \frac{dB_H}{B_H} \frac{8430,7 y_0}{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}, \quad (82)$$

компенсируется обратным бесконечно малым прогибом — dy , вызываемым относительным бесконечно малым температурным изменением модуля упругости $\frac{dE}{E}$, равным по уравнениям (84) и (82) следующей величине:

$$-dy = - \frac{dE}{E} \frac{8430,7 y_0}{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}. \quad (85)$$

Заменив в уравнении (85) на основании теории погрешностей дифференциалы малыми конечными приращениями, и так как $\frac{\Delta E}{E} \approx -\beta \Delta t$, получим:

$$\Delta y = - \frac{8430,7 y_0^2}{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2} \Delta t. \quad (86)$$

Из уравнения (86) видно, что температурная погрешность и в данном случае представляет собой некоторую (значительно медленнее по сравнению с коробками с постоянной упругостью) убывающую с уменьшением давления величину. Снижение данной температурной погрешности также достигается с помощью двойной кинематической температурной компенсации путем выполнения малого плеча малого мостика из биметалла и установкой второй биметаллической компенсации на самой коробке.

Температурная компенсация в чувствительном элементе высотомера с переменной упругостью чувствительного элемента

В некоторых случаях (при применении особых передаточных механизмов) значительный интерес представляет возможность хотя бы частичной компенсации температурной погрешности с помощью остаточного давления в коробках. Как уже указывалось (уравнение 65), зависимость между остаточным давлением p , температурой t и изменением объема коробки следующая:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \left(\frac{h}{h - k_2 t} \right). \quad (65)$$

При остаточном давлении в анероидных коробках и при постоянной упругости уравнение (42) примет следующий вид:

$$\left(l_0 - \frac{y}{k} \right) F_0 = A (B_H - p), \quad (87)$$

откуда изменение прогиба dy будет:

$$-dy = k_1 \frac{A}{F_0} (dB_H - dp). \quad (88)$$

При переменной упругости F''_{0BH} (как и выше, будем считать, что $F''_{0BH} = Ek'_{0BH}$, где k'_{0BH} — коэффициент, характеризующий изменение упругости в зависимости от прогиба коробок) можно написать:

$$-dy = k_1 \frac{A}{F''_{0BH}} (dB_H - dp). \quad (89)$$

Так как на основании уравнения (65) зависимость между изменением прогиба и изменением давления внутри коробок при остальных неизменных условиях будет следующей:

$$dp = p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 t)^2} dt, \quad (90)$$

и так как

$$dl = -\frac{dy}{k_1},$$

то будем иметь:

$$\left[F''_{0BH} + Ap_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 t)^2} \right] dy = -k_1 A dB_H \quad (91)$$

или

$$\frac{dy}{dB_H} = - \frac{k_1 A}{\left[F_{0B_H}^* + A p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 l)^2} \right]} = - \frac{8430,7 y_0}{B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}.$$

Следовательно, на основании последней зависимости при наличии остаточного давления в коробках будем иметь:

$$F_{0B_H}^* = \frac{k_1 A B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}{8430,7 y_0} - A p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 l)^2} \quad (92)$$

или

$$k_{0B_H}'' = \frac{k_1 A B_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2}{8430,7 y_0 E} - \frac{A p_0}{E} \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 l)^2}. \quad (92a)$$

Уравнение, на основании которого можно было бы подсчитать параметры температурной компенсации с помощью остаточного давления в коробках, можно получить следующим образом.

Для переменной упругости аналогично тому, как это было сделано выше, можно написать следующую зависимость:

$$\left(l_0 - \frac{y}{k} \right) E k_{0\text{ср}}'' = A (B_H - p). \quad (93)$$

Если температурное изменение модуля упругости E компенсируется температурным изменением остаточного давления p в коробках, т. е. прогиб $\left(l_0 - \frac{y}{k} \right) = l_H$ и давление B_H остаются неизменными, на основании уравнения (93) получим:

$$\left(l_0 - \frac{y}{k} \right) k_{0\text{ср}}'' dE = -A dp.$$

Так как

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{h}{h - k_2 l}, \quad (65)$$

то при неизменном прогибе

$$dp = p_0 \frac{dT_0}{T_0^2} \frac{h}{h - k_2 l}$$

или

$$\left(l_0 - \frac{y}{k} \right) k_{0\text{ср}}'' dE = -A p_0 \frac{1}{T_0} \frac{h}{h - k_2 l} d\Delta t. \quad (94)$$

Разделив уравнение (94) на уравнение (93), получим:

$$\frac{dE}{E} = - \frac{p_0 \frac{1}{T_0} \frac{h}{h - k_2 l}}{B_H - p} d\Delta t.$$

На основании уравнения (65) и заменяя на основании теории погрешностей дифференциалы конечными малыми приращениями, будем иметь:

$$\left[B_H - p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{h}{h - k_2 l} \right] \frac{\Delta E}{E} = - \frac{p_0}{T_0} \frac{h}{h - k_2 l} \Delta \Delta t.$$

Так как

$$\frac{\Delta E}{E} \approx -\beta \Delta t,$$

и принимая $\Delta t = 0$, последнее уравнение можно переписать так:

$$B_H \beta = p_0 \frac{h}{h - k_2 l} \left(\frac{1}{T_0} + \beta \right)$$

или

$$p_0 \frac{h}{h - k_2 l} = \frac{B_H T_0 \beta}{1 + T_0 \beta}. \quad (95)$$

Если бы удалось подобрать остаточное давление p_0 и параметр анероидной коробки h таким образом, чтобы уравнение (95) удовлетворялось на всем диапазоне шкалы, то мы получили бы полную компенсацию температурной погрешности. Однако это не всегда удается сделать, и обыкновенно остаточное давление p_0 и высота h коробки подбираются таким образом (см. стр. 304), чтобы скомпенсировать наиболее целесообразно температурную погрешность для двух точек шкалы.

Изменение упругости анероидных коробок при температурной компенсации с помощью остаточного давления

Небезынтересно еще посмотреть, что получится, если в анероидной коробке, упругость мембран которой подобрана так, чтобы ее ход был пропорционален высоте, мы оставим остаточное давление, необходимое для температурной компенсации. Для этого на основании уравнений (82), (83) и (91) напишем следующие два уравнения:

$$\frac{dy_1}{dB_H} = - \frac{k_1 A}{F'_{0B_H}}$$

и

$$\frac{dy_2}{dB_H} = - \frac{k_2 A}{F'_{0B_H} + A p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 l)^2}}.$$

Так как в данном случае имеется в виду одна и та же коробка, то, следовательно, для одинаковых прогибов y_1

$$F'_{0B_H} = F''_{0B_H}.$$

Однако ввиду того, что при остаточном давлении для одного и того же значения B_H , $y_2 < y_1$, то и $F'_{0B_H} < F''_{0B_H}$. Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{F'_{0B_H}}{F'_{0B_H}} + \frac{A p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 l)^2}}{F'_{0B_H}}.$$

Обозначив $F'_{0BH} = F'_{0BH} - \Delta F'_{0BH}$, можно последнее уравнение переписать в таком виде:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = 1 - \frac{\Delta F'_{0BH} - A p_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0}\right) \frac{k_2 h}{(h - k_2 l)^2}}{F'_{0BH}}. \quad (96)$$

На основании уравнения (96) можно заключить, что остаточное давление может вызвать как увеличение, так и уменьшение упругости коробки в зависимости от того, как оно меняется от прогиба: если эта функция дает более быстрое приращение упругости, чем приращение упругости F'_{0BH} , зависящее от прогиба мембран, то будет увеличение упругости мембраны, в противном случае — наоборот.

Биметалл

Если обозначить через l_0 — длину биметаллической пластинки, α_1 и α_2 — температурные коэффициенты расширения металлов, из которых сделана биметаллическая пластинка, E_1 , h_1 и E_2 , h_2 — их модули Юнга и толщины, то угол φ изгиба биметаллической пластинки выразится следующей зависимостью (вывод формулы см. на стр. 306):

$$\varphi = \frac{6 E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{(E_1 h_1^3 - E_2 h_2^3) + 4 E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)^2} l_0 (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t.$$

Если $\varphi = 0$ (при $t = 0$):

$$\varphi = \frac{6 E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{(E_1 h_1^3 - E_2 h_2^3) + 4 E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)^2} l_0 (\alpha_1 - \alpha_2) t.$$

Обыкновенно биметалл подбирается таким образом, чтобы

$$E_1 h_1^3 - E_2 h_2^3 = 0.$$

Тогда будем иметь следующую простую зависимость:

$$\varphi = \frac{3}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2} l_0 t. \quad (97)$$

Если обозначить

$$\frac{3}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2} = k_0,$$

то

$$\varphi = k_0 l_0 t.$$

Прогиб конца биметаллической пластинки в таком случае можно получить из следующего соотношения:

$$df = d\varphi (l_0 - l),$$

где f — прогиб,

l_0 — вся длина пластинки,

l — текущая координата элемента dl пластинки.

Так как

$$d\varphi = k_0 t dl,$$

то

$$df = k_0 t (l_0 - l) dl$$

или

$$f = k_0 t \int_{l=0}^{l=l_0} (l_0 - l) dl = k_0 t \frac{l_0^2}{2}. \quad (98)$$

В данном выводе мы пренебрегли наклоном элементов пластинки, потому что имеем дело с малыми углами, так как прогиб f биметалла мал по сравнению с длиной пластинки l_0 .

7. ШКАЛОВЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Шкаловые погрешности относятся также к систематическим погрешностям. Источником их служит неполное соответствие шкал приборов соответствующим перемещениям стрелок как вследствие возможных неточностей производственного выполнения шкал или производственного выполнения механизмов приборов (чувствительных элементов и передаточных механизмов), так и вследствие неточностей расчета шкал.

Правильный подбор передаточных механизмов, обеспечивающих по всей шкале необходимое передаточное отношение, особенно при выравнивании шкал с помощью переменных передаточных отношений передаточных механизмов, является весьма существенным фактором для снижения шкаловых погрешностей.

Не менее важным фактором в этом отношении является также надлежащее выполнение передаточных механизмов (особенно зубчатых передач и некоторых других), чем обеспечивается плавность хода, сохранение правильности передаточного отношения и т. д., т. е. опять-таки снижение шкаловых погрешностей. Как уже указывалось, последние шкаловые погрешности тесно связаны со шкаловыми погрешностями, источником которых является чувствительный элемент. Специальное исследование погрешностей передаточных механизмов и измерительных пружин чувствительных элементов в зависимости от их подбора и изготовления представляет значительный интерес. Однако эти вопросы достаточно обширны и, как уже указывалось, скорее относятся к теме деталей точной индустрии, чем к настоящей, поэтому мы ограничимся только тем, что обратим на них внимание читателя.

При тщательном выполнении и расчете шкал, а также при тщательном подборе и выполнении механизмов приборов эти погрешности могут быть сведены до минимума, как и при выполнении индивидуальных шкал и нанесении их эмпирическим путем. При массовом производстве приборов индивидуальное изготовление шкал несколько удорожает производство; в этом случае снижение шкаловых погрешностей достигается исключительно высоким качеством производства всех элементов прибора, обеспечивающим однородность продукции.

Снижение шкаловых погрешностей достигается, кроме того, обеспечением в приборе соответствующей простой и удобной регулировки¹.

¹ Если регулировка недостаточно проста и производство не обеспечивает достаточной однородности изготавливаемых механизмов, то изготовление индивидуальных шкал может оказаться экономически целесообразнее индивидуальной подгонки механизмов приборов под данную шкалу.

Шкаловые погрешности могут быть следствием еще одной причины: изменения со временем некоторых параметров прибора, например упругости пружин, изменения напряжения поля постоянных магнитов и пр. (в данном случае имеются в виду не температурные изменения, а изменения со временем). Но наличие таких источников шкаловых погрешностей свидетельствует о невысоком качестве изготовления прибора.

Следовательно, борьба со шкаловыми погрешностями в весьма большой степени сводится к борьбе за правильный технологический процесс, обеспечивающий наивысшее качество продукции и наибольшую ее однородность.

8. ПОГРЕШНОСТИ ТРЕНИЯ

Погрешности от затираний являются одной из самых важных категорий погрешностей как вследствие того, что эти погрешности относятся к случайным погрешностям, т. е. не поддающимся учету, так и вследствие того, что во многих случаях вопрос о снижении этих погрешностей является наиболее сложным, определяющим почти целиком и полностью тот или иной метод проведения данного измерения, а также и конструкцию прибора. Так, например, конструкция электроизмерительных приборов полностью предопределяется этим фактором (отсутствие передаточного механизма — секторные шкалы). Нулевой метод измерения также служит снижению погрешностей трения.

Сущность погрешности трения заключается в том, что силы и моменты, действующие в приборе, прежде чем переместить подвижную систему прибора, должны преодолевать силу или момент трения подвижных частей прибора.

Погрешности трения в приборах без передаточного механизма

Рассмотрим погрешности трения на простейшем примере магнито-электрического вольтметра. Для этого напишем уравнение (38), дающее зависимость перемещения указывающего конца стрелки от всех основных факторов, влияющих на прибор, а также уравнения (34), (39) и (40):

$$y - \Delta_1 y + \Delta_2 y + \Delta_3 y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r^R}{M_0} \left(1 - \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t} \right) \pm \pm \frac{M_{тр}}{M_0} r \pm \frac{M_{\Delta p}}{M_0} r. \quad (38)$$

Это уравнение, как уже указывалось, дает перемещение указывающего конца стрелки, соответствующее истинному показанию прибора:

$$y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0}. \quad (34)$$

Принимая $E = 1$, получим выражение для чувствительности прибора:

$$y_0 = \frac{1}{9810} \frac{1}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0}. \quad (39)$$

Погрешность трения

$$\pm \Delta_3 y = \pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0} r. \quad (40)$$

Так как чувствительность прибора для равномерных шкал определяется отношением перемещения стрелки к соответствующему этому перемещению изменению измеряемой величины (стр. 152), т. е. в данном случае:

$$y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta E},$$

то, следовательно, на основании уравнения (39):

$$\frac{\Delta y}{\Delta E} = \frac{1}{9810} H' ab \ln \frac{r}{RM_0}.$$

Подставив последнюю зависимость в уравнение (40), получим:

$$\pm \Delta_3 E = \pm \frac{9810 RM_{\text{тр}}}{H' ab \ln}. \quad (99)$$

Из уравнения (99) видно, что при постоянном моменте трения $M_{\text{тр}}$ (в общем случае — приведенном к чувствительному элементу) абсолютная погрешность трения $\Delta_3 E$, выраженная в единицах измеряемой величины, не зависит от упругости измерительной пружины чувствительного элемента и не зависит от радиуса стрелки (момент трения $M_{\text{тр}}$ при увеличении радиуса стрелки остается постоянным).

Абсолютная погрешность трения при том же условии $M_{\text{тр}} = \text{const}$ не зависит от перемещения y , т. е. она по всей шкале остается величиной постоянной.

Относительная погрешность трения

$$\delta_{3E} = \frac{\Delta_3 E}{E} = \frac{9810 R}{H' ab \ln} \frac{y_0}{y} M_{\text{тр}} \quad (100)$$

в этом случае с увеличением показания прибора будет уменьшаться.

Так как отношение $\frac{y_0}{y}$ для данного замеряемого напряжения является величиной постоянной, то относительная погрешность непосредственно от чувствительности прибора не зависит.

Таким образом влиять на погрешности трения можно только путем изменения отношения момента трения $M_{\text{тр}}$ к моменту, развиваемому чувствительным элементом, отнесенному к единице измеряемой величины.

Так как $\frac{y}{r} = \alpha$ и $M_0 \alpha = M$, то уравнение [(34) можно переписать в таком виде:

$$\frac{H' ab \ln}{9810 R} E = M.$$

Для $E = 1$ последнее уравнение примет следующий вид:

$$\frac{H' ab \ln}{9810 R} = M_{(E=1)},$$

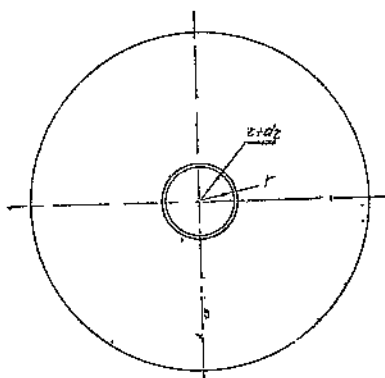
и уравнения (99) и (100) можно переписать так:

$$\pm \Delta_3 E = \frac{M_{\text{тр}}}{M_{(E=1)}}; \quad (101)$$

$$\delta_3 E = \frac{M_{\text{тр}}}{M_{(E=0)}} \frac{y_0}{y}. \quad (102)$$

Зависимость между весом подвижной системы и моментом трения в электроизмерительных приборах

В приборах, не имеющих передаточного механизма (например у большинства электроизмерительных), момент трения $M_{\text{тр}}$ зависит исключительно от качества конструктивного и производственного выполнения подвижной системы прибора, т. е. чувствительного элемента прибора (в данном случае — рамки с осью и стрелкой).



Фиг. 30. Схема, поясняющая вывод уравнения для момента трения в опорах.

В электроизмерительных приборах в большинстве случаев применяются опоры на шпильках (кернах). В правильно построенном электроизмерительном приборе должна существовать строго определенная зависимость между моментом трения $M_{\text{тр}}$ подвижной системы и ее весом P , определяемая (см. «Electrical Measuring Instruments» Jolley and Dreysdal) следующим образом:

$$M_{\text{тр}} = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}} P^{1.5},$$

где P — вес подвижной системы прибора,

μ — коэффициент трения,

σ — допускаемое напряжение в материале шпильки (керны) и цапфы (подпятника).

Это уравнение получается на основании существующей определенной зависимости между радиусом опорной площадки шпильки (керны) и весом подвижной системы:

$$r_0 = \sqrt{\frac{P}{\pi \sigma}}.$$

Получается она на основании следующих рассуждений.

Обозначим (фиг. 30) переменный радиус опорной площадки через r , бесконечно малое приращение радиуса через dr и давление от веса системы на единицу площади через p . Элементарное давление dP на элементарную площадь ds будет:

$$dP = p ds.$$

Площадь рассматриваемого кольца

$$ds = 2\pi r dr,$$

и элементарный момент трения для этого кольца будет ¹:

$$dM_{\text{тр}} = \mu r dP = 2\pi \mu p r dr = 2\pi \mu p r^2 dr,$$

¹ Данный вывод, строго говоря, относится к торцевой опоре, т. е. предполагает одинаковое давление по всей площади соприкосновения шпильки с опорой. На самом деле при шаровидном конце шпильки давление p неодинаково по всей площади соприкосновения и будет какой-то функцией радиуса r . Обычно считают, что в данном случае эпюра давлений имеет вид полусферы. Тогда давление p в точке, отстоящей на расстоянии r , будет:

$$p = p_0 \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0}.$$

Следовательно,

$$dM'_{\text{тр}} = \frac{2\pi \mu p_0}{r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2} r^2 dr.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$dM'_{\text{тр}} = 2\pi \mu p_0 r_0^3 \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0} \frac{r^2}{r_0^2} \frac{dr}{r_0},$$

откуда

$$M'_{\text{тр}} = 2\pi \mu p_0 r_0^3 \int_0^{r_0} \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}} \frac{r^2}{r_0^2} \frac{dr}{r_0}.$$

Принимая

$$\frac{r}{r_0} = \sin \varphi,$$

получим:

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}} = \cos \varphi \text{ и } \frac{dr}{r_0} = \cos \varphi d\varphi,$$

т. е.

$$M'_{\text{тр}} = 2\pi \mu p_0 r_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi$$

или

$$M'_{\text{тр}} = \frac{\pi \mu p_0 r_0^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi,$$

или

$$M'_{\text{тр}} = \frac{\pi^2 \mu p_0 r_0^3}{8}.$$

Так как

$$dP = \frac{2\pi p_0}{r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2} r dr,$$

то

$$P = \frac{2\pi p_0}{r_0} \int_0^{r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2} r dr = \frac{2\pi p_0}{r_0} \left[-\frac{1}{3} (r_0^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right],$$

т. е.

$$P = \frac{2}{3} \pi p_0 r_0^2$$

откуда

$$M_{\text{тр}} = 2 \pi \mu p \int_{r=0}^{r=r_0} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi \mu p r_0^3.$$

Так как

$$\pi r_0^2 p = P,$$

то

$$M_{\text{тр}} = \frac{2}{3} \mu P r_0. \quad (103)$$

С другой стороны,

$$\frac{P}{\pi r_0^2} = \sigma$$

или

$$r_0 = \sqrt{\frac{P}{\pi \sigma}}.$$

Подставив выражение для r_0 в уравнение (103), получим:

$$M_{\text{тр}} = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}} P^{1.5} \quad (104)$$

Заменив в уравнении (102), определяющем зависимость относительной погрешности от параметров прибора, момент трения $M_{\text{тр}}$ его значением из уравнения (104), будем иметь:

$$\delta_{3E} = \frac{2}{3} \frac{y_0}{y} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}} \frac{P^{1.5}}{M_{(E=1)}}. \quad (105)$$

На основании уравнений (101) и (104) для абсолютной погрешности зависимость будет следующая:

$$\Delta_3 E = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}} \frac{P^{1.5}}{M_{(E=1)}}. \quad (106)$$

Коэффициент качества электроизмерительных приборов

Таким образом на основании уравнений (105) и (106) при обеспечении наименьшего коэффициента трения μ (для агата $\mu = 0,105 \div 0,3$) и при наибольшем допустимом для данных условий работы прибора напряжении σ в материале (при отсутствии вибраций и ускорений в электротехнических приборах напряжение σ допускается от 150 до 200 кг/мм²) задача снижения погрешностей трения сводится к максимальному снижению отношения $\frac{P^{1.5}}{M_{(E=1)}}$.

или

$$M'_{\text{тр}} = \frac{3}{16} \pi \mu P r_0.$$

Если сравнить полученный момент трения с полученным по уравнению (103), то заметим, что последний примерно на 13% больше, т. е.:

$$\frac{M'_{\text{тр}}}{M_{\text{тр}}} \approx 1,13,$$

что принципиального значения в данном случае не имеет.

В электроприборостроении наилучшее решение этой задачи является основным фактором, определяющим качество прибора. Это достаточно наглядно показано на приведенном ниже примере магнитоэлектрического вольтметра. Качество прибора в основном определяется его точностью или, другими словами, его погрешностями.

Из уравнения (38), включающего все основные абсолютные погрешности магнитоэлектрического вольтметра:

$$y - \Delta_1 y \pm \Delta_2 y \pm \Delta_3 y = \frac{1}{9810} \frac{E}{R} H' ab \ln \frac{r}{M_0} \left(1 - \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta \Delta t} \right) \pm \pm \frac{M_{тр}}{M_0} r \pm \frac{M_{\Delta p}}{M_0} r, \quad (38)$$

видно, что показания данного прибора в основном искажаются тремя наиболее существенными погрешностями.

Последняя из этих погрешностей (от неуравновешенности) достаточно легко устраняется хорошей балансировкой подвижной системы. Из остающихся двух погрешностей (температурной и трения) температурная является, с одной стороны, систематической, с другой, как мы видели выше, она также поддается достаточно полной компенсации. Таким образом наиболее существенной остается погрешность трения.

Определяющие на основании уравнения (106) эту погрешность первые два фактора (коэффициент трения μ и допускаемое напряжение в материале σ) являются в электроприборостроении факторами, достаточно установившимися и относящимися скорее к области качества технологического процесса. Что касается третьего фактора — отношения $\frac{P^{1.5}}{M(E=1)}$, то при расчете нового прибора его каждый раз приходится подбирать особо. Таким образом задача расчета нового прибора, например магнитоэлектрического и некоторых других, по существу сводится к наилучшему подбору именно этого отношения.

В связи с этим проф. Кайнат предложил ввести особый коэффициент k_D , характеризующий качество электроизмерительных приборов (Gute-faktor — коэффициент качества или коэффициент добротности), определяемый следующей зависимостью:

$$k_D = \frac{10 M}{P^{1.5}}. \quad (107)$$

Если сравнить этот коэффициент с абсолютной погрешностью трения (уравнение 106), то заметим, что он представляет собой не что иное, как обратную величину этой погрешности, умноженную на 10 и на величину

$$\frac{2}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}}; \quad k_D = 10 \frac{2}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}} \frac{1}{\Delta_3 E}. \quad (108)$$

Умножая обратную величину абсолютной погрешности трения на $\frac{2}{3} \frac{\mu}{\sqrt{\pi \sigma}}$, проф. Кайнат тем самым исключает влияние на этот коэффициент, определяющий качество прибора, величин, достаточно установившихся в электроприборостроении. Умножением на 10 проф. Кайнат получает

коэффициент качества, равный для лучших современных приборов примерно единице, что представляет известное удобство при пользовании этим коэффициентом.

Метод нахождения параметров прибора, обеспечивающих наибольшее снижение погрешностей трения

Из изложенного видно, что качество электроизмерительных приборов, имеющих в качестве чувствительного элемента рамку на шпильках (кернах), в основном зависит от снижения погрешностей трения; это достигается главным образом снижением отношения веса подвижной системы прибора в полуторной степени к отнесенному к единице измеряемой величины вращательному моменту рамки, т. е. снижением отношения $\frac{P^{1,5}}{M_{(E=t)}}$.

В связи с этим подбор таких параметров подвижной системы прибора, которые обеспечили бы наименьшую величину этого отношения, приобретает особое значение.

Общий вес подвижной системы прибора складывается из двух весов: из мертвого веса, т. е. веса таких деталей, которые на вращательный момент никакого влияния не оказывают (стрелка, противовесы, каркас, рамки, ось и т. п.), и полезного веса, т. е. веса таких деталей, которые являются непосредственным источником вращательного момента (т. е. обмотки подвижной рамки).

Обозначим в дальнейшем через:

P_1 — мертвый вес в граммах,
 P_2 — полезный вес в граммах,
 P_3 — вес металла обмотки рамки в граммах,
 k_x и k_y — условные множители коэффициента качества (добротности),

k_1 — отношение мертвого веса подвижной системы к весу обмотки рамки ($k_1 = \frac{P_1}{P_3}$),

k_2 — отношение веса металла обмотки рамки к весу всей обмотки ($k_2 = \frac{P_2}{P_3}$),

I_1, n_1, r_1 и l_1 — силу тока в амперах, число витков на единицу длины, средний радиус и осевую длину неподвижной рамки в сантиметрах,

I_2, n_2, r_2 и l_2 — то же для подвижной рамки,
 q_2 — сечение обмотки подвижной рамки в мм²,
 e_2 — падение напряжения в обмотке подвижной рамки в вольтах,

k_4 — k_{10} — постоянные коэффициенты,
 a и b — высоту и ширину прямоугольной рамки в сантиметрах,

γ — удельный вес материала проводника (для меди $\gamma = 8,91$, алюминия $\gamma = 2,6$ г/см³),

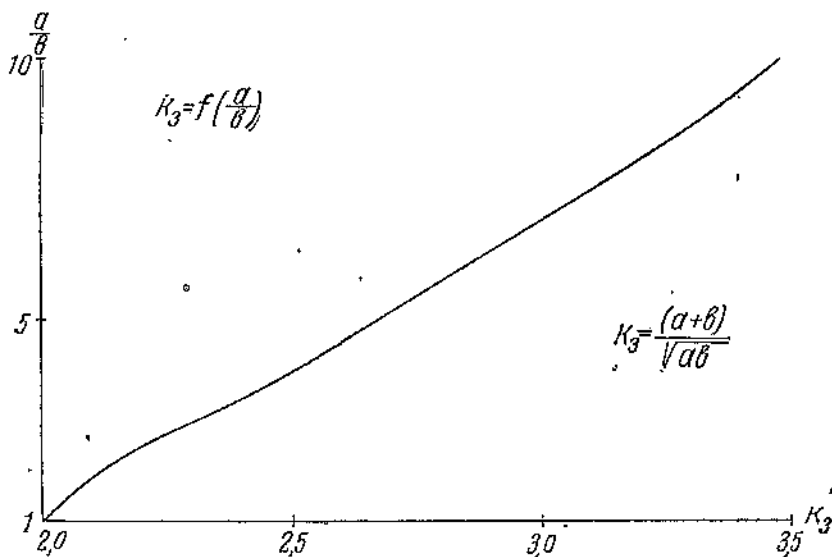
ρ — удельное сопротивление материала проводника в омах (для меди $\rho = 0,0175$, алюминия $\rho = 0,03$).

1. Тогда для магнитоэлектрических приборов при заданной силе тока будем иметь следующие зависимости. Для момента

$$M = k_4 H' a_2 b_2 n_2 l_2 I_2,$$

где

$$k_4 = \frac{1}{9810}.$$



Фиг. 31. График функции $k_3 = f\left(\frac{a}{b}\right)$.

Для веса металла обмотки

$$P_3 = k_5 k_3 \sqrt{a_2 b_2} n_2 l_2 q_2 \gamma_2,$$

где

$$k_5 = \frac{2}{10^3} \text{ и } k_3 = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$$

(значение k_3 см. фиг. 31).

В последнем уравнении мы вводим коэффициент k_3 , чтобы заменить сумму параметров $a + b$ их произведением, принимая $a + b = k_3 \sqrt{ab}$, что представляет значительные удобства при дальнейшем использовании приведенных уравнений для вращательного момента и веса. Как видно из графика (фиг. 31), в пределах возможных на практике изменений отношения $\frac{a}{b}$ (от 1 до 2) изменение k_3 весьма незначительно (от 2 до 2,1).

2. Для магнитоэлектрических приборов при заданном падении напряжения, так как

$$I_2 = \frac{e_2 q_2}{k_3 (a_2 b_2)^{0.5} k_3 n_2 l_2 \rho_2},$$

где $k_6 = \frac{2}{10^3}$, вращающий момент будет:

$$M = \frac{k_4 H' (a_2 b_2)^{0,5} e_2 q_2}{k_6 k_3 \rho_2}.$$

3. Для электродинамических приборов при заданной силе тока в подвижной рамке получим следующие зависимости для момента ¹

$$M = k_7 I_1 I_2 n_1 n_2 l_1 l_2 \frac{r_2^2}{r_1},$$

где

$$k_7 = 10 \cdot 200 \cdot 2\pi^2 10^{-9},$$

и для веса металла обмотки

$$P_3 = k_8 r_2 n_2 l_2 q_2 \gamma_2,$$

где

$$k_8 = \frac{2\pi}{10^3}.$$

4. Для электродинамических приборов при заданном падении напряжения в подвижной рамке, так как

$$I_2 = \frac{e_2 q_2}{k_9 r_2 n_2 l_2 \rho_2},$$

где

$$k_9 = \frac{2\pi l}{10^3},$$

вращающий момент будет:

$$M = \frac{k_7 I_1 n_1 l_1 r_2 q_2 e_2}{k_9 \rho_2 r_1}.$$

Зависимость коэффициента качества k_D от параметров прибора можно выразить так:

$$k_D = 10 \frac{M}{(P_1 + P_2)^{1,5}} = \frac{10 M}{(P_1 + k_2 P_3)^{1,5}} = \frac{10 M}{k_2^{1,5} P_3^{1,5} \left(\frac{P_1}{k_2 P_3} + 1 \right)^{1,5}}. \quad (109)$$

Обозначим выражение $\frac{k_2^{1,5} P_3^{1,5}}{M}$ через k_y , т. е.

$$\frac{M}{k_2^{1,5} P_3^{1,5}} = \frac{1}{k_y},$$

и $\frac{P_1}{k_2 P_3}$ через k_1 . Тогда уравнение для k_D переписется так:

$$k_D = \frac{10}{k_y (k_1 + 1)^{1,5}}. \quad (110)$$

¹ Предполагается, что в пределах шкалы $\sin \alpha$ скомпенсирован соответствующей неравномерностью магнитного поля, создаваемого неподвижной рамкой, что достигается соответствующим конструктивным выполнением.

Для указанных выше случаев после соответствующих подстановок в той же последовательности k_y будет принимать следующие значения:

$$1) \quad k_{y1} = \frac{k_5^{1,5} k_2^{1,5} k_3^{1,5} \gamma_2^{1,5} n_2^{0,5} l_2^{0,5} q_2^{1,5}}{k_4 H' (a_2 b_2)^{0,25} I_2}; \quad (111)$$

$$2) \quad k_{y2} = \frac{k_6 k_5^{1,5} k_2^{1,5} k_3^{2,5} \gamma_2^{1,5} \rho_2 (a_2 b_2)^{0,25} n_2^{1,5} l_2^{1,5} q_2^{0,5}}{k_4 H' e_3}; \quad (112)$$

$$3) \quad k_{y3} = \frac{k_8^{1,5} k_2^{1,5} \gamma_2^{1,5} r_1 n_2^{0,5} l_2^{0,5} q_2^{1,5}}{k_7 I_1 n_1 I_2 r_2^{0,5}}; \quad (113)$$

$$4) \quad k_{y4} = \frac{k_8^{1,5} k_6 k_2^{1,5} \gamma_2^{1,5} \rho_2 r_1 r_2^{0,5} n_2^{1,5} l_2^{1,5} q_2^{0,5}}{k_7 I_1 n_1 I_2 e_2}. \quad (114)$$

Значение k_1 будет определяться следующими уравнениями:

1) для магнитоэлектрического прибора

$$k_1 = \frac{P_1}{k_2 P_3} = \frac{P_1}{k_2 k_8 k_9 (a_2 b_2)^{0,5} n_2 l_2 q_2 \gamma_2}; \quad (115)$$

2) для электродинамического прибора

$$k_1 = \frac{P_1}{k_2 P_3} = \frac{P_1}{k_3 k_8 r_2 n_2 l_2 q_2 \gamma_2}. \quad (116)$$

Предположим далее, что какой-нибудь из параметров, входящих в выражения для k_y и k_1 , мы изменили в x раз (x может быть как целое, так и дробное число). В таком случае на основании уравнения (110) получим новое значение коэффициента качества, которое можно написать так:

$$k_D = \frac{1}{k_y x^{z_1} \left(\frac{k_1}{x^{z_2}} + 1 \right)^{1,5}}, \quad (117)$$

где z_1 и z_2 — те степени, в которых входит данный параметр в выражениях k_y и k_1 .

Для получения наибольшего значения коэффициента качества k_D необходимо, чтобы знаменатель принял наименьшее значение. Решая задачу на максимум и минимум, получим следующее условие для получения максимального значения коэффициента качества:

$$\frac{k_1}{x^{z_2}} = \frac{1}{1,5 \frac{z_2}{z_1} - 1}. \quad (118)$$

Из приведенных выше уравнений для k_1 и k_y видно, что для одних и тех же параметров при значении степени $z_2 = 0,5$ степень z_1 в числителе k_y может иметь только одно значение: $z_1 = 0,25$; при значении степени $z_2 = 1$ степень z_1 может иметь следующие значения: 0,5, 1,5 и 2,5. В отношении тех величин, которые входят в знаменатель k_y с любой степенью, или тех величин, которые входят в числитель k_y , но со сте-

пению 1,5 и выше (т. е. при $z_2 = 1$ для отношения $\frac{z_1}{z_2} = 1,5$ и выше), можно утверждать, что увеличение первых и, наоборот, уменьшение вторых во всех случаях (т. е. при любом отношении $\frac{k_2}{x^{z_2}}$) увеличивает коэффициент качества k_D .

Действительно, для $\frac{z_1}{z_2} = 1,5$ из равенства (118) получается $\frac{k_1}{x^{z_1}} = \infty$, а для больших значений $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{k_1}{x^{z_1}}$ становится отрицательным, что не имеет смысла. Таким образом, когда $\frac{z_1}{z_2} \geq 1,5$, функция (117) не имеет максимума при конечных значениях x . Значит эта функция имеет или постоянное возрастание или постоянное убывание при возрастании x . Но производная по x знаменателя выражения 1 (117) является положительной величиной в случае $\frac{z_1}{z_2} \geq 1,5$. Таким образом при возрастании x знаменатель возрастает, а самая функция убывает, а при убывании x получается обратное.

Выведенное уравнение (118), являющееся условием для получения максимального значения коэффициента качества или, другими словами, минимальной погрешности трения, необходимо решить в цифровых величинах только для двух значений z_1 и z_2 , именно для $z_1 = 0,25$ и $z_2 = 0,5$, $z_1 = 0,5$ и $z_2 = 1$, т. е. в обоих случаях для отношения $\frac{z_2}{z_1} = 2$.

Для отношения $\frac{z_2}{z_1} = 2$ максимум функции, определяющей коэффициент качества, получается при $\frac{k_1}{x^{z_1}} = 0,5$.

Таким образом, увеличив до возможных конструктивных пределов все величины, входящие в знаменатель k_D , и уменьшив до возможных конструктивных пределов все величины, входящие в числитель k_D и имеющие степень 1,5 и выше, нужно по возможности остальные величины подобрать таким образом, чтобы окончательное значение $k_{10} = \frac{k_1}{x^{z_1}}$ было близко к 0,5; под x подразумевается общее увеличение всего произведения этих величин. В таком случае мы получим максимальное значение коэффициента качества или минимальную погрешность трения.

Те же величины, которые входят в числитель k_D и не входят в знаменатель k_1 , независимо от их степени (например r_1 в третьем и четвертом случаях) следует для получения наивысшего коэффициента качества уменьшить до пределов, допустимых по конструктивным и другим соображениям.

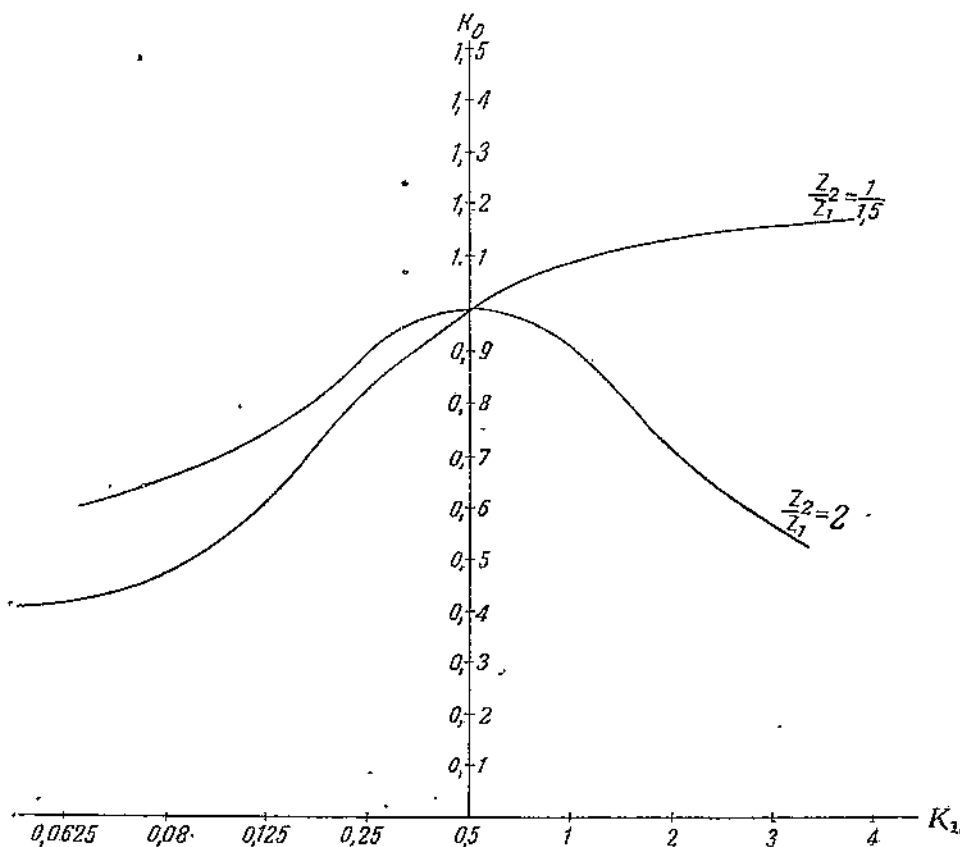
На фиг. 32 дан график изменения коэффициента качества k_D в зависимости от окончательного значения $k_{10} = \frac{k_1}{x^{z_1}}$ для $\frac{z_2}{z_1} = 2$ и для $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{1,5}$,

$$^1 \frac{dA}{dx} = \frac{k_D z_2 x^{z_1}}{x^{z_1} + 1} \left(\frac{k_1}{x^{z_1}} + 1 \right)^{0,5} \left[\frac{z_1}{z_2} k_1 + \frac{z_1}{z_2} x^{z_2} - 1,5 k_1 \right],$$

где A — знаменатель уравнения (117).

причем для $k_{10} = 0,5$ коэффициент качества условно принят равным единице.

По этому графику видно, что кривая коэффициента качества для отношения степеней $\frac{z_2}{z_1} = 2$ имеет достаточно пологий максимум, мало меняю-



Фиг. 32. График изменения коэффициента качества k_D .

щийся в пределах изменения k_{10} , примерно от 0,375 до 0,65; кривая же для отношения степеней $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{1,5}$ хотя и имеет максимум в бесконечности, но, начиная примерно от значений $k_{10} = 1$ и выше, ее подъем становится достаточно отлогим. Этот фактор имеет большое значение, так как он определяет эффективность тех или иных мероприятий конструктора.

Пользуясь изложенным методом, можно совершенно просто подобрать наиболее выгодные параметры подвижной рамки, обеспечивающие наименьшую погрешность трения, а также в случае вынужденного

изменения того или иного параметра определить, как это изменение отразится на погрешности трения, т. е. на качестве прибора.

Если указанными мероприятиями не представляется возможным снизить погрешности трения до нужных пределов (слишком большая чувствительность прибора), приходится переходить к такой конструкции чувствительного элемента, которая обеспечивала бы полное устранение момента трения в подвижной системе прибора. Это достигается заменой опоры на шпильях (кернах) подвеской подвижной системы прибора на тонких упругих нитях или ленточках из фосфористой бронзы. Восстанавливающий момент в данном случае создается не упругостью волосков, а упругим крутильным моментом нитей или ленточек, возникающим при их закручивании. Упругий крутильный момент этих подвесов может быть подсчитан с помощью следующих уравнений.

Для круглого подвеса

$$M_0 = \frac{\pi}{2l} \left(\frac{d}{2} \right)^4 E \frac{\text{дин} \cdot \text{см}}{\text{рад}}, \quad (119)$$

для ленточного подвеса

$$M_0 = \frac{1}{3,3l} ab^3 E \frac{\text{дин} \cdot \text{см}}{\text{рад}}, \quad (120)$$

где l — длина подвеса в сантиметрах,

d — диаметр подвеса в сантиметрах,

E — модуль упругости материала в дин/см^2 ,

a и b — большая и малая стороны прямоугольного сечения подвеса (более подробно см. «Электрические и магнитные измерения» под редакцией проф. Е. Г. Шрамкова, ОНТИ, 1937 г.).

Погрешности трения в приборах с передаточным механизмом

Выше была рассмотрена погрешность трения в приборах, не имеющих передаточного механизма, но с трением в чувствительном элементе. Рассмотрим теперь другой случай, когда трение в чувствительном элементе отсутствует, но имеется трение в передаточном механизме.

В качестве примера возьмем высотомер с беспружинной анероидной коробкой с постоянной упругостью и с выравнивающим шкалу передаточным механизмом¹. Для этого воспользуемся уравнением (47), определяющим полное перемещение стрелки такого высотомера с учетом всех основных влияющих на него факторов:

$$\gamma - \Delta_1 \gamma \pm \Delta_2 \gamma \pm \Delta_3 \gamma = k \left[l_0 - \frac{A 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H} \right)}}{F_0} \right] - \frac{k_1 A 10^{\left(2,88081 - \frac{H}{19412,2 - 0,219062 H} \right)}}{F_0} \frac{\beta \Delta l}{1 - \beta \Delta l} \pm \frac{F_{\text{тп}}}{F_0} k_1 \pm \frac{F_{\Delta p}}{F_0} k_1. \quad (47)$$

В данном случае также одной из наиболее трудно преодолеваемых погрешностей, начинающей играть особо существенную роль при зна-

¹ Этот пример для настоящего развития техники производства анероидных высотомеров не вполне реален, но он достаточно типичен, поэтому мы остановимся на нем.

чительном повышении чувствительности прибора, является погрешность трения. Погрешность от неуравновешенности сравнительно легко может быть устранена соответствующей балансировкой подвижных элементов прибора и применением в чувствительном элементе двух уравновешивающих друг друга систем анероидных коробок. Температурная погрешность, как мы видели выше, поддается достаточно хорошей компенсации и в большинстве случаев, так как она относится к систематическим погрешностям, играет менее существенную роль. Погрешность трения при повышении чувствительности прибора в лучшем случае может оставаться постоянной, и именно она ставит определенный предел для рационального увеличения чувствительности. О погрешностях гистерезиса (внутреннего трения) мы в данном случае не говорим, так как при правильном технологическом процессе изготовления мембран эти погрешности достаточно малы (порядка нескольких десятых долей процента для бронзовых мембран, а для кварцевых мембран и еще меньше). Кроме того, эти погрешности при известных обстоятельствах (правда, далеко не всегда) также можно отнести к категории систематических, и при определенных условиях проведения эксперимента их можно в известных пределах учитывать.

Воспользуемся уравнениями (50) и (53), определяющими абсолютную погрешность трения $\Delta_2 y$ и истинное передаточное отношение k_1 передаточного механизма:

$$\pm \Delta_2 y = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} k_1 \quad (50)$$

и

$$k_1 = \frac{8430,7 y_0 F_0}{AB_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2} \quad (53)$$

Так как

$$y = y_0 H$$

и

$$\Delta y = y_0 \Delta H,$$

где y_0 — постоянная чувствительность прибора, то абсолютная погрешность трения, выраженная в единицах высоты, будет:

$$\pm \Delta_2 H = \pm \frac{8430,7}{AB_H \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)^2} F_{\text{тр}} \quad (121)$$

Относительную погрешность, воспользовавшись уравнением (80), можно выразить так:

$$\pm \delta_2 H = \pm \frac{\Delta_2 H}{H} = \pm \frac{0,434}{AB_H \lg \frac{B_0}{B_H} \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H} \right)} F_{\text{тр}} \quad (122)$$

Из полученных уравнений для абсолютной и относительной погрешностей трения видно, что изменение чувствительности (см. стр.152) прибора путем изменения упругости анероидных коробок (передаточный механизм и приведенная к чувствительному элементу сила трения $F_{\text{тр}}$ остаются неизменными) на величину этих погрешностей не влияет.

Иначе обстоит дело, если, оставляя чувствительность прибора постоянной, соответственно одновременно изменять упругость и передаточное отношение передаточного механизма или изменять чувствительность прибора путем изменения передаточного отношения передаточного механизма. В обоих этих случаях при увеличении передаточного отношения передаточного механизма погрешности трения будут увеличиваться, так как будет увеличиваться приведенная к чувствительному элементу сила трения $F_{тр}$, и обратно.

С увеличением эффективной площади A коробок, т. е. с увеличением мощности чувствительного элемента, погрешности трения уменьшаются.

Определение приведенных к чувствительному элементу сил или моментов трения

При рассмотрении уравнений (121) и (122) видно, что как абсолютная, так и относительная погрешности трения увеличиваются с увеличением высоты (с уменьшением B_H относительная погрешность сначала уменьшается, так как при $B_H = B_0$ она равна бесконечности, и затем начинает снова возрастать). Это происходит как вследствие уменьшения B_H , так и вследствие увеличения приведенной силы трения $F_{тр}$.

При наличии в приборе передаточного механизма с переменным передаточным отношением приведенная к чувствительному элементу сила трения $F_{тр}$ будет меняться в зависимости от перемещения чувствительного элемента. Покажем это на примере передаточного механизма с переменным передаточным отношением, применявшегося для выравнивания шкалы высотомера.

Приведенную к чувствительному элементу силу или момент трения удобнее всего подсчитывать как сумму элементарных работ трения в отдельных звеньях механизма, отнесенных к элементарному перемещению чувствительного элемента.

Таким образом, если обозначить через x или α перемещение чувствительного элемента и через $A_1, A_2, \dots, A_n$ работы трений в отдельных звеньях механизма прибора, то суммарные приведенные сила или момент трения будут:

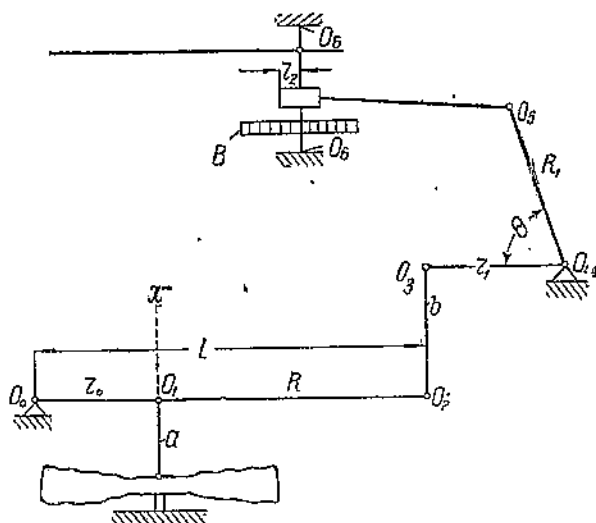
$$F_{тр} = \frac{dA_1}{dx} + \frac{dA_2}{dx} + \dots + \frac{dA_n}{dx}$$

или

$$M_{тр} = \frac{dA_1}{d\alpha} + \frac{dA_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dA_n}{d\alpha}$$

Рассматриваемый механизм показан на фиг. 33. Предположим, что чувствительный элемент, имеющий прямолинейное перемещение Δx , поворачивает с помощью тяги a рычаг длиной L вокруг оси O_0 . Рычаг L в свою очередь с помощью тяги b поворачивает малый мостик (ломаный рычаг) вокруг оси O_4 с малым плечом r_1 и большим плечом R_1 . К концу большого плеча R_1 (в точке O_5) крепится цепочка Галля, наматы-

вающаяся на насаженный на ось стрелки барабанчик с радиусом r_2 . Волосок B устраняет все люфты в механизме и дает натяг цепочки Галля. Обозначим через r_0 малое плечо большого рычага, угол между плечами малого мостика r_1 и R_1 через θ , моменты трения в шарнирах $O_0, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$ и O_6 соответственно через $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ и M_6 , углы поворота рычага L через $\Delta\alpha_0$, малого мостика через $\Delta\alpha_4$, тяг a и b через $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$, цепочки Галля в точке O_5 через $\Delta\alpha_5$. Кроме того



Фиг. 33. Схема передаточного механизма высотомера.

обозначим момент трения в звеньях цепочки Галля через M_7 . Суммарный угол поворота всех звеньев цепочки Галля при наматывании ее на барабан будет равен углу поворота барабана $\Delta\alpha_6$. Тогда суммарная работа трения будет:

$$W_{тр} = M_0 \Delta\alpha_0 + M_1 (\Delta\alpha_0 + \Delta\alpha_1) + M_2 (\Delta\alpha_0 + \Delta\alpha_2) + M_3 (\Delta\alpha_3 - \Delta\alpha_2) + M_4 \Delta\alpha_4 + M_5 (\Delta\alpha_4 + \Delta\alpha_5) + M_6 \Delta\alpha_6 + M_7 \Delta\alpha_6. \quad (123)$$

Длину тяг a и b и среднюю длину свободного конца цепочки Галля обозначим через l_1 , l_2 и l_3 . Углы α_0 , α_4 и α_5 будем отсчитывать от плоскостей, перпендикулярных к ходу коробок, углы α_1 и α_2 — от плоскостей, параллельных ходу. Тогда углы поворота рычагов и тяг будут:

$$\Delta\alpha_0 = \arcsin \left[\frac{\Delta x - l_1 (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha''_1)}{r_0} + \sin \alpha'_0 \right] - \alpha'_0; \quad (124)$$

$$\Delta\alpha_1 = \arcsin \left[\frac{r_0 (\cos \alpha'_0 - \cos \alpha''_0)}{l_1} + \sin \alpha'_1 \right] - \alpha'_1; \quad (125)$$

$$\Delta\alpha_2 = \arcsin \left[\frac{L (\cos \alpha'_0 - \cos \alpha''_0) + r_1 (\cos \alpha'_4 - \cos \alpha''_4)}{l_2} + \sin \alpha'_2 \right] - \alpha'_2; \quad (126)$$

$$\Delta\alpha_4 = \arcsin \left\{ \frac{L}{r_0} [\Delta x - l_1 (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha''_1)] - l_2 (\cos \alpha'_2 - \cos \alpha''_2) \right\} + \sin \alpha'_4 - \alpha'_4; \quad (127)$$

$$\Delta\alpha_5 = \arcsin \left\{ \frac{R_1 [\sin (\alpha'_4 + \theta) - \sin (\alpha''_4 + \theta)]}{l_3} + \sin \alpha'_5 \right\} - \alpha'_5; \quad (128)$$

пренебрегая углом поворота тяг, имеем:

$$\Delta\alpha_6 = \frac{R_1}{r_2} \left[\cos (\alpha''_4 + \theta) - \cos (\alpha'_4 + \theta) + \frac{l_3}{R_1} (\cos \alpha'_5 - \cos \alpha''_5) \right], \quad (129)$$

где α' — начальное значение соответствующего угла,
 α'' — конечное.

Если не пренебречь углами поворота тяг и цепочки Галля, то, как видно из полученных уравнений, определение приведенной силы трения значительно усложняется. Поэтому рассмотрим на частном примере, какого порядка будет погрешность, если пренебречь указанными выше углами.

Зададимся значениями следующих величин: $L = 50$ мм, $r_0 = 20$ мм, $l_1 = 10$ мм, $\Delta x = 2,5$ мм, $r_1 = 10$ мм, $R_1 = 30$ мм, $l_2 = 25$ мм, $l_3 = 30$ мм, $r_2 = 2$ мм; кроме того, будем для примера считать, что при начальном положении механизма

$$\alpha'_0 = \alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_4 = \alpha'_5 = 0$$

и при конечном положении

$$\sin (\alpha''_4 + \theta) = 1.$$

Принятые упрощения, а также отклонения от величин, которыми мы задались, возможные в реальном механизме, как увидим дальше, не внесут существенных изменений в принципиальные рассуждения и порядок величин приводимых ниже.

Перепишем уравнение (123) в таком виде:

$$\begin{aligned} W_{\text{тр}} = & M_0 \Delta' \alpha_0 \left[1 - \frac{\Delta \Delta \alpha_0}{\Delta' \alpha_0} + \frac{M_1}{M_0} \left(1 - \frac{\Delta \Delta \alpha_0}{\Delta' \alpha_0} + \frac{\Delta \alpha_1}{\Delta' \alpha_0} \right) + \frac{M_2}{M_0} \left(1 - \frac{\Delta \Delta \alpha_0}{\Delta' \alpha_0} + \frac{\Delta \alpha_2}{\Delta' \alpha_0} \right) \right] + \\ & + M_4 \Delta' \alpha_4 \left[1 - \frac{\Delta \Delta \alpha_4}{\Delta' \alpha_4} + \frac{M_3}{M_4} \left(1 - \frac{\Delta \Delta \alpha_4}{\Delta' \alpha_4} - \frac{\Delta \alpha_2}{\Delta' \alpha_4} \right) + \frac{M_5}{M_4} \left(1 - \frac{\Delta \Delta \alpha_4}{\Delta' \alpha_4} + \frac{\Delta \alpha_5}{\Delta' \alpha_4} \right) \right] + \\ & + M_6 \Delta' \alpha_6 \left[1 + \frac{M_7}{M_6} - \frac{\Delta \Delta \alpha_6}{\Delta' \alpha_6} \left(1 + \frac{M_7}{M_6} \right) \right], \end{aligned} \quad (130)$$

где $\Delta \Delta \alpha_0$, $\Delta \Delta \alpha_4$ и $\Delta \Delta \alpha_6$ — погрешности в определении углов $\Delta \alpha_0$, $\Delta \alpha_4$ и $\Delta \alpha_6$, получающиеся в результате пренебрежения углами поворота тяг.

Далее преобразуем уравнение (130) так:

$$\begin{aligned} W_{\text{тр}} = & M_4 \Delta' \alpha_4 \left[\frac{M_0 \Delta' \alpha_0}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_1}{M_0} + \frac{M_2}{M_0} \right) + \left(1 + \frac{M_3}{M_4} + \frac{M_5}{M_4} \right) + \frac{M_6 \Delta' \alpha_6}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_7}{M_6} \right) \right] + \\ & + M_4 \Delta' \alpha_4 \left[\frac{M_0 \Delta' \alpha_0}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left[\frac{M_1 \Delta \alpha_1}{M_0 \Delta' \alpha_0} + \frac{M_2 \Delta \alpha_2}{M_0 \Delta' \alpha_0} - \frac{\Delta \Delta \alpha_0}{\Delta' \alpha_0} \left(1 + \frac{M_1}{M_0} + \frac{M_2}{M_0} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{M_3 \Delta \alpha_2}{M_4 \Delta' \alpha_4} + \frac{M_5 \Delta \alpha_5}{M_4 \Delta' \alpha_4} - \frac{\Delta \Delta \alpha_4}{\Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_3}{M_4} + \frac{M_5}{M_4} \right) - \frac{M_6 \Delta \Delta \alpha_6}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_7}{M_6} \right) \right] \end{aligned} \quad (131)$$

(во втором слагаемом собраны все члены, зависящие от углов поворота тяг $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \Delta\Delta\alpha_0, \Delta\Delta\alpha_4$ и $\Delta\Delta\alpha_8$).

Из уравнения (131) видно, что, пренебрегая углами поворота тяг, мы допустим следующую относительную погрешность в определении работы трения:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{\text{тр}}}{W_{\text{тр}}} = & \frac{M_0 \Delta' \alpha_0 \left[\frac{M_1 \Delta \alpha_1}{M_0 \Delta' \alpha_0} + \frac{M_3 \Delta \alpha_2}{M_0 \Delta' \alpha_0} - \frac{\Delta \Delta \alpha_0}{\Delta' \alpha_0} \left(1 + \frac{M_1}{M_0} + \frac{M_2}{M_0} \right) \right]}{M_4 \Delta' \alpha_4 \left(1 + \frac{M_1}{M_0} + \frac{M_3}{M_0} \right) + \left(1 + \frac{M_3}{M_4} + \frac{M_5}{M_4} \right) + \frac{M_6 \Delta' \alpha_6}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_7}{M_6} \right) + \Delta} + \\ & + \frac{- \frac{M_3 \Delta \alpha_2}{M_4 \Delta' \alpha_4} + \frac{M_5 \Delta \alpha_3}{M_4 \Delta' \alpha_4} - \frac{\Delta \Delta \alpha_4}{\Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_3}{M_4} + \frac{M_5}{M_4} \right) - \frac{M_6 \Delta \Delta \alpha_8}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_7}{M_6} \right)}{M_4 \Delta' \alpha_4 \left(1 + \frac{M_1}{M_0} + \frac{M_3}{M_0} \right) + \left(1 + \frac{M_3}{M_4} + \frac{M_5}{M_4} \right) + \frac{M_6 \Delta' \alpha_6}{M_4 \Delta' \alpha_4} \left(1 + \frac{M_7}{M_6} \right) + \Delta}, \quad (132) \end{aligned}$$

где через Δ обозначена для упрощения написания последнего уравнения величина, стоящая в числителе.

Таким образом для оценки допускаемой нами относительной погрешности в определении приведенной к чувствительному элементу работы трения передаточного механизма нужно определить, во-первых, отношения пренебрегаемых нами углов к двум основным углам поворота $\Delta' \alpha_0$ и $\Delta' \alpha_4$, затем отношения моментов трения в различных частях механизма к двум основным моментам трения M_0 и M_4 , наконец значения отношений $\frac{M_0 \Delta' \alpha_0}{M_4 \Delta' \alpha_4}$ и $\frac{M_6 \Delta' \alpha_6}{M_4 \Delta' \alpha_4}$.

Соответственно величинам, которыми мы задались выше, получим следующие искомые отношения для углов:

$$\frac{\Delta \Delta \alpha_0}{\Delta' \alpha_0} \approx \frac{2'}{429'} \approx 0,005,$$

$$\frac{\Delta \alpha_1}{\Delta' \alpha_0} \approx \frac{53'}{429'} \approx 0,124,$$

$$\frac{\Delta \alpha_2}{\Delta' \alpha_0} \approx \frac{332'}{429'} \approx 0,774,$$

$$\frac{\Delta \Delta \alpha_4}{\Delta' \alpha_4} \approx \frac{64'}{2256'} \approx 0,028,$$

$$\frac{\Delta \alpha_3}{\Delta' \alpha_4} \approx \frac{332'}{2256'} \approx 0,147,$$

$$\frac{\Delta \alpha_5}{\Delta' \alpha_4} \approx \frac{600'}{2256'} \approx 0,266,$$

$$\frac{\Delta' \alpha_0}{\Delta' \alpha_4} \approx \frac{429'}{2256'} \approx 0,190,$$

$$\frac{\Delta' \alpha_6}{\Delta' \alpha_4} \approx \frac{526^\circ}{37,6^\circ} \approx 14,00,$$

$$\frac{\Delta \Delta \alpha_8}{\Delta' \alpha_4} \approx \frac{3^\circ}{37,6^\circ} \approx 0,080.$$

При определении моментов трения в шарнирах передаточного механизма необходимо знать, какие факторы при этом следует учитывать. Моменты трения в шарнирах передаточного механизма создаются вследствие действия на механизм в основном двух факторов — силы тяжести и натяга волоска.

Так как назначение волоска — устранить люфты в механизме, то волосок при любых положениях должен преодолевать суммарное трение механизма, т. е. приведенная к чувствительному элементу сила волоска должна быть всегда больше приведенной силы трения. Если обозначить через η к. п. д. механизма, через k_1 переменное передаточное отношение механизма для каждого его положения, через M_b момент волоска и через F_b приведенную к чувствительному элементу силу волоска, то

$$F_b = \frac{M_b}{R_2} k_1 \eta, \quad (133)$$

где R_2 — радиус стрелки.

Если приведенная сила волоска F_b должна быть в n раз больше приведенной силы трения от веса деталей $F_{тр}$, т. е.

$$F_b = n F_{тр},$$

то получим следующее выражение для момента волоска:

$$M_b = F_{тр} \frac{n}{k_1} \frac{R_2}{\eta}. \quad (134)$$

Работа волоска в таком случае будет:

$$W_b = \frac{M_b}{R_2} k_1 \Delta x = \frac{n}{\eta} F_{тр} \Delta x.$$

Отсюда потерянная на трение работа волоска будет:

$$\Delta W_b = \frac{1 - \eta}{\eta} n F_{тр} \Delta x.$$

Так как

$$F_{тр} \Delta x = \Delta W_{тр},$$

где $\Delta W_{тр}$ — работа трения от веса деталей, то

$$\frac{\Delta W_b}{\Delta W_{тр}} = \frac{1 - \eta}{\eta} n. \quad (135)$$

Коэффициент полезного действия η передаточных механизмов приборов нормально должен быть достаточно велик — порядка 0,97—0,95. Следовательно, если волосок будет подобран таким образом, чтобы максимальное значение коэффициента запаса n не превышало 2—4 (это достигается при малой упругости волоска и достаточном угле предварительного натяжения), то добавочная работа трения от волоска будет составлять от 6 до 20% основной работы трения от веса деталей механизма.

Исходя из изложенного, погрешность не будет слишком большой, если при определении отношений моментов трений в основном руководствоваться весом деталей. Так как механизм должен быть уравновешен, то будем считать, что большой рычаг L уравновешивается вместе с обеими тягами относительно оси O_0 и малый мостик — относительно оси O_4 . Можно задаться примерно следующими отношениями моментов трений (что отвечает примерно обычным размерам деталей старого высотомера):

$$\frac{M_1}{M_0} \approx 0,1, \quad \frac{M_7}{M_6} \approx 0,2,$$

$$\frac{M_2}{M_0} \approx 0,2, \quad \frac{M_8}{M_4} \approx 1,0,$$

$$\frac{M_3}{M_4} \approx 0,05, \quad \frac{M_6}{M_4} \approx 0,2.$$

$$\frac{M_5}{M_4} \approx 0,2,$$

Подставляя соответствующие величины в уравнение (132) для допускаемой погрешности в определении работы трения в случае пренебрежения углами поворота тяг, получим:

$$\frac{\Delta W_{\text{тр}}}{W_{\text{тр}}} \approx \frac{0,022}{4,88} \approx 0,00455 \approx 0,5\%.$$

т. е. пренебрегая углами поворота тяг, мы допускаем погрешность в определении работы трения в сторону преуменьшения (так как она имеет знак плюс) порядка 0,5%.

Если считать, что в данном частном случае мы задались слишком благоприятными величинами, а также учесть тот факт, что получено значение некоторой средней погрешности (взяты отношения углов, соответствующих всему диапазону шкалы), а максимальная величина погрешности может быть в несколько раз больше для некоторых положений механизма, и, наконец, что в других случаях погрешность может оказаться даже в 20 раз больше полученной — порядка 10%, то и тогда ею вполне можно пренебречь. Это возможно потому, что в большинстве случаев коэффициенты трения являются величинами достаточно постоянными.

Полученный результат при подсчете погрешности в определении работы трения изменился бы достаточно значительно, если бы мы задались другими значениями начальных углов α_2 , α_3 и α_5 . В нашем случае эти углы взяты так, что погрешность $\Delta\alpha_4$ и погрешность в результате пренебрежения углом $\Delta\alpha_6$ (при определении угла $\Delta\alpha_6$) друг друга компенсируют, вследствие чего в конечном результате погрешность $\Delta\alpha_6$ в определении угла $\Delta\alpha_6$ получается весьма незначительной — порядка 3° при $\Delta\alpha_6 = 525^\circ$.

В самом неблагоприятном случае указанные погрешности могут сложиться, тогда погрешность в определении угла может достигнуть 35° ($\Delta\alpha_6 \approx 35^\circ$), т. е. мы получим

$$\frac{\Delta\alpha_6}{\Delta\alpha_4} \approx 0,93,$$

что между прочим опять-таки изменило бы результат наших подсчетов в допустимых пределах, так как

$$\frac{\Delta W_{\text{тр}}}{W_{\text{тр}}} \approx -0,18 \approx -18\%.$$

В обычных случаях целесообразно длины тяг подбирать так, чтобы изменения проекций плеч рычагов при перемещениях передаточного механизма вызывали возможно меньшее угловое перемещение тяг.

Пренебрегая наклоном тяг и цепочки Галля и считая $\alpha'_0 = \alpha'_4 = 0$, а так же $\cos(\alpha'' + \theta) = 0$, будем иметь:

$$W_{\text{тр}} = (M_0 + M_1 + M_2) \Delta \alpha_0 + (M_4 + M_3 + M_5) \Delta \alpha_4 + (M_6 + M_7) \Delta \alpha_6 \quad (136)$$

и

$$\Delta \alpha_0 = \arcsin \frac{\Delta x}{r_0}; \quad (137)$$

$$\Delta \alpha_4 = \arcsin \frac{L \Delta x}{r_0 r_1}; \quad (138)$$

$$\Delta \alpha_6 = -\frac{R_1}{r_2} \left(\sqrt{1 - \frac{L^2 \Delta^2 x}{r_0^2 r_1^2}} \cos \theta - \frac{L \Delta x}{r_0 r_1} \sin \theta \right); \quad (139)$$

откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{dW_{\text{тр}}}{d\Delta x} = (M_0 + M_1 + M_2) \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - \Delta^2 x}} + (M_3 + M_4 + M_5) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_0 r_1}{L}\right)^2 - \Delta^2 x}} + \\ + (M_6 + M_7) \frac{LR_1}{r_0 r_1 r_2} \left[\sin \theta + \frac{\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{r_0 r_1}{L}\right)^2 - \Delta^2 x}} \cos \theta \right]. \quad (140)$$

Условия снижения погрешностей трения в приборах с передаточным механизмом

Если обозначить через $P_0, P_1, P_2, P_4, P_5, P_6$ и P_7 соответствующие веса деталей механизма, через $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ и ρ_7 — соответствующие радиусы осей шарниров, через P'_2 — часть веса тяги b , приходящегося на шарнир O_3 , и через μ — коэффициент трения, то уравнение (140) примет следующий вид:

$$F_{\text{тр}} \approx \mu \left\{ (P_0 \rho_0 + P_1 \rho_1 + P_2 \rho_2) \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - \Delta^2 x}} + (P_4 \rho_4 + P'_2 \rho_3 + P_5 \rho_5) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r_0 r_1}{L}\right)^2 - \Delta^2 x}} + \right. \\ \left. + (P_6 \rho_6 + P_7 \rho_7) \frac{LR_1}{r_0 r_1 r_2} \left[\sin \theta + \frac{\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{r_0 r_1}{L}\right)^2 - \Delta^2 x}} \cos \theta \right] \right\}. \quad (141)$$

Из уравнения (141) видно, что, увеличивая плечи рычагов передаточного механизма и не меняя передаточного отношения, можно при известных условиях уменьшить приведённую силу трения — в том случае, если веса рычагов будут увеличиваться медленнее, чем плечи.

Уменьшая радиусы осей шарниров, также можно значительно уменьшить приведенную силу трения. Не менее важно рациональное снижение веса деталей, так как при этом тоже снижается приведенная сила трения, т. е. погрешность трения. С увеличением передаточного отношения увеличивается приведенная сила трения, т. е. увеличивается погрешность трения.

В заключение можно упомянуть о некотором значении для погрешности трения целесообразного подбора волоска в отношении получения возможно меньшего коэффициента запаса $n = \frac{F_n}{F_{тр}}$ (см. стр. 146), так как этим тоже можно несколько снизить погрешность трения.

Таким образом конструктор при внимательном анализе стоящей перед ним задачи может использовать целый ряд факторов для снижения погрешности трения, этой наиболее существенной погрешности в измерительном и приборостроительном деле.

Мы здесь не будем останавливаться на таком случае, когда имеется трение и в самом чувствительном элементе. Принципиально такой случай ничем не отличается от только что рассмотренного примера, за исключением того, что в правую часть уравнения для определения приведенной к какой-либо точке чувствительного элемента силы трения войдут еще слагаемые, определяющие приведенные к той же точке силы трения в самом чувствительном элементе.

В заключение необходимо указать, что если подвижные части прибора работают в условиях воздействующих на них незначительных вибраций, то погрешности трения значительно снижаются. В этом случае все силы трения в шарнирных и скользящих соединениях прибора могут уменьшаться во много раз (по некоторым источникам снижение сил трения может достигать 10—20-кратного). С этой точки зрения наклеиваемая запись в самописцах (см. стр. 61), особенно при большой частоте наколов, дает значительные преимущества.

9. ПОГРЕШНОСТИ ОТ ГИСТЕРЕЗИСА

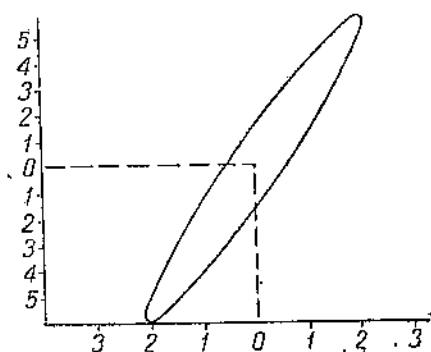
Одной из разновидностей погрешностей трения является погрешность от гистерезиса, вызываемая внутренним молекулярным трением в материале. Эта погрешность зависит полностью от упругих свойств материала и нагрузки. Здесь необходимо различать по существу два явления: одно зависит от времени, другое не зависит.

Первое выражается в том, что нагруженный и разгруженный материал, деформируясь, принимает свою окончательную форму не сразу, а по истечении определенного времени. Это явление называется последействием; оно зависит не только от величины нагрузки, но и от времени действия нагрузки.

Второе явление заключается в том, что после разгрузки материала некоторая часть деформации не восстанавливается совсем. Это достаточно ясно выражено в том случае, если материалу давать многократные положительные и отрицательные нагрузки и построить график величин деформаций в зависимости от нагрузок (фиг. 34). При этом после некоторого количества таких циклов положительных и отрица-

тельных нагрузок установится некоторое постоянное расхождение между деформациями, соответствующими одним и тем же нагрузкам при увеличении и уменьшении их, выражающееся на графике петель; эта петля называется гистерезисной.

Погрешности от гистерезиса сходны с погрешностями трения в самом чувствительном элементе (не приведенного) с той только раз-



Фиг. 34. График гистерезисной петли.

ницей, что они не постоянны, а зависят от величины прогиба упругой системы и от состояния упругой системы до прогиба (т. е. от величины предшествовавшей нагрузки).

В заключение необходимо отметить, что эти погрешности целиком зависят как от условий работы упругой системы, так и от качества технологического процесса обработки. Снижая конструктивными мероприяти-

ми предельные напряжения в материале таким образом, чтобы эти напряжения по возможности дальше отстояли от предела пропорциональности, и, что особенно важно, применяя правильный технологический процесс обработки материала (уплотнение материала, правильная термическая обработка, уничтожение перенапряжений, получающихся при придании соответствующих форм материалу и пр.), можно эти погрешности свести до ничтожно малых размеров — практически до нуля.

Немалое значение имеет правильный выбор материала. Например при изготовлении измерительных пружин весьма важно выбрать сталь, хорошо поддающуюся термической обработке. С этой точки зрения применение в этих случаях рояльной проволоки, не поддающейся термической обработке, не рекомендуется. Термическая обработка должна проводиться очень тщательно по специальному рецепту для каждого сорта стали.

Кроме того, получение высококачественной упругой системы значительно осложняется в том случае, если материалу кроме изгиба еще приходится работать и на растяжение, как это например имеет место в мембранах. Однако и в этом случае соответствующим подбором формы мембран, допускаемых напряжений и в особенности разработкой соответствующего технологического процесса изготовления можно достигнуть весьма значительного снижения погрешностей от гистерезиса, как это имеет место в отношении мембран, выдавливаемых гидравлическим способом.

Мы здесь не будем останавливаться на методах старения упругих систем (путем соответствующего подогрева или путем предварительного массирования, т. е. выполнения большого ряда циклов нагрузок и разгрузок), — укажем только, что соответствующим образом выполненная упругая система может не нуждаться в искусственном старении.

Необходимо сказать несколько слов и об магнитном гистерезисе. Явление магнитного гистерезиса заключается в том, что после выключения электрического тока, например в обмотке электромагнита, магнитные явления в его железном сердечнике исчезают не сразу и проявляются некоторое время после выключения тока в виде явлений остаточного магнетизма. Количественно это явление будет зависеть от свойств материала.

Для полного уничтожения остаточного магнетизма пришлось бы включить электрический ток в обмотку электромагнита в обратном направлении. При многократном перемагничивании железного сердечника с одной полярности на противоположную наблюдается отставание изменения магнитной индукции от изменения напряжения магнитного поля. Это явление и называется магнитным гистерезисом.

При графическом изображении зависимости изменения магнитной индукции от изменения напряжения магнитного поля получается гистерезисная петля, похожая на петлю механического гистерезиса. Затрачиваемая в данном случае работа идет на преодоление каких-то сопротивлений, аналогичных силам внутреннего трения.

Наличие явлений магнитного гистерезиса в электрических приборах может служить также источником погрешностей. Например, погрешности ферродинамических приборов при работе их на переменном токе значительно возрастают по сравнению с электродинамическими, что объясняется появлением погрешностей от гистерезиса и токов Фуко.

10. ПОГРЕШНОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

К этой категории можно отнести такие погрешности:

1) искажение показаний приборов под действием гравитационного поля земли¹, т. е. погрешности положения, вызываемые наличием неуравновешенных деталей в приборе;

2) искажения показаний приборов под действием внешних магнитных полей, искажающих основные поля электрических приборов;

3) вибрационные погрешности, т. е. погрешности, вызываемые периодическими ускорениями;

4) погрешности, вызываемые непериодическими ускорениями и др.

Погрешности положения и погрешности от ускорений (за исключением угловых) устраняются путем тщательной балансировки всех деталей и элементов прибора.

Погрешности от действия внешних магнитных полей электрических приборов устраняются соответствующим экранированием приборов.

11. ЭФФЕКТ МАКСВЕЛЛА

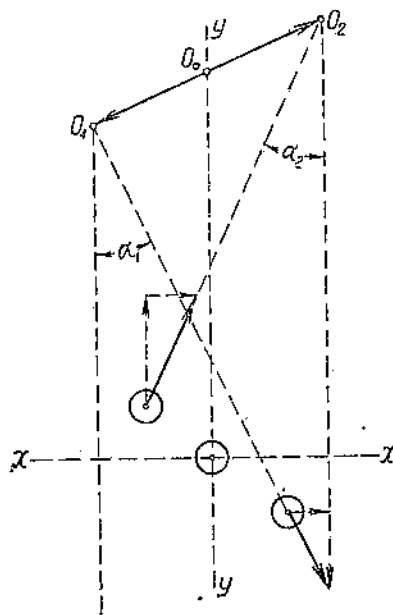
Погрешности (статические), вызываемые периодическими ускорениями (вибрациями), появляются только в особых случаях, когда система, воспринимающая вибрации, обладает достаточно большим момен-

¹ Погрешности трения в основном также вызываются воздействием на прибор гравитационного поля земли (силой тяжести), но так как они могут зависеть еще и от других причин, например от силы натяжения волоска и т. п., и ввиду особого места, которое занимают эти погрешности в приборостроительной технике, они выделены в отдельную группу погрешностей.

том инерции и малым восстанавливающим моментом, а также при условии, что направление вибрации не совпадает с направлением, перпендикулярным к прямой, соединяющей точку подвеса эксцентрично расположенной массы с центром тяжести этой массы. В этих случаях масса

будет стремиться переместиться в такое положение, чтобы ее абсолютные перемещения, вызываемые вибрацией, были минимальными. Последнее будет иметь место при таком расположении центра тяжести неуравновешенной массы относительно ее точки подвеса, при котором прямая, соединяющая точку подвеса с центром тяжести массы, будет перпендикулярна к направлению вибрации. Это явление называется эффектом Максвелла (исследовавшего его математически).

Не вдаваясь в математическую теорию этого явления, объясним его кратко с физической стороны. Предположим, мы имеем маятник (фиг. 35) с массой m , подвешенный в точке O_0 . Стрелки O_1O_2 показывают направление вибрации. Так как такая вибрация вызовет вынужденные колебания маятника, отстающие по фазе на 180° от возмущающего явления, то пунктиром условно показаны крайние положения точки подвеса маятника



Фиг. 35. Схема, поясняющая эффект Максвелла.

в связи с ее перемещением от вибрации. Чтобы маятник отклонился на угол α_2 при перемещении точки подвеса из точки O_0 в точку O_2 , он должен получить через связь, удерживающую его на определенном расстоянии от точки качания O_0 , некоторое ускорение в направлении оси yy . Передаваемую через систему подвеса на массу силу можно разложить на две, показанные на фиг. 35 стрелками: действующую в направлении оси yy и действующую в направлении оси xx . Чтобы маятник отклонился на угол $\alpha_1 = \alpha_2$ при перемещении точки подвеса из O_0 в O_1 , масса должна получить ускорение по оси yy в обратном направлении, что опять-таки потребует передачи на массу через систему подвеса силы, которую можно также разложить по осям yy и xx . В обоих случаях при увеличении α (в обе стороны) получаем силу по оси xx , действующую в одну и ту же сторону при данном направлении вибрации слева направо. Следовательно, маятник будет стремиться поворачиваться в данном случае против часовой стрелки.

12. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРИБОРА

Погрешности отсчета тесно связаны с чувствительностью прибора. Чувствительностью прибора называется отношение приращения

перемещения указывающего конца стрелки k соответствующему ему приращению измеряемой величины.

Если мы обозначим через r радиус шкалы, через α — угол перемещения стрелки и через A — величину измеряемого явления, то чувствительность прибора y_0 выразится следующей зависимостью:

$$y_0 = \frac{r \, d\alpha}{dA}. \quad (142)$$

Заменяя дифференциалы малыми конечными приращениями, получим:

$$y_0 = \frac{r \, \Delta\alpha}{\Delta A}. \quad (143)$$

У приборов с равномерными шкалами чувствительность постоянная; в этом случае приращение угла α и соответствующее ему приращение измеряемой величины A можно брать любое.

13. ПОГРЕШНОСТИ ОТСЧЕТА

Наблюдатель при считывании показания прибора может ошибиться на некоторую линейную величину по шкале $r \, \Delta'\alpha$, соответствующую величине измеряемого явления $\Delta'A$, поэтому абсолютную погрешность отсчета можно выразить так:

$$\Delta'A = \frac{r \Delta'\alpha}{y_0}. \quad (144)$$

Относительная погрешность отсчета будет:

$$\delta = \frac{\Delta'A}{A} = \frac{\Delta'\alpha}{\alpha} \frac{y'_0}{y_0}, \quad (145)$$

где y'_0 — средняя чувствительность прибора для данного отклонения α стрелки в случае неравномерных шкал:

$$y'_0 = \frac{r\alpha}{A}.$$

Для равномерных шкал

$$y'_0 = y_0$$

и в этом случае

$$\delta = \frac{\Delta'\alpha}{\alpha}. \quad (146)$$

Абсолютная погрешность отсчета является функцией двух величин: способности наблюдателя с той или другой линейной точностью сделать отсчет по шкале ($r\Delta'\alpha$) и чувствительности прибора y_0 . Не касаясь индивидуальностей наблюдателя, можно утверждать, что при определенных данных условиях измерения (расстояние от прибора, освещенность, время, за которое должен быть сделан отсчет по прибору, состояние наблюдателя и т. п.) абсолютная погрешность отсчета будет тем меньше, чем больше четкость шкалы и чем больше чувствительность прибора. Таким образом при выполнении всех условий, обеспечивающих наи-

большую четкость шкалы (количество делений, четкость делений, четкость конца стрелки, расстояние конца стрелки от шкалы и пр.), снижение погрешности отсчета возможно только за счет повышения чувствительности прибора. Из изложенного видно, что чувствительность приборов входит в теорию погрешностей приборов как фактор, определяющий в основном абсолютную погрешность отсчета и только эту погрешность. Относительная погрешность зависит также от чувствительности прибора, так как с увеличением чувствительности отношение $\frac{\Delta' \alpha}{\alpha}$ уменьшается.

Условия снижения погрешностей отсчета

Увеличение чувствительности прибора целесообразно только в том случае, если остальные случайные погрешности прибора значительно меньше погрешностей отсчета. В правильно построенном приборе все погрешности должны быть в определенном соответствующем соотношении между собой. Например, нет смысла стремиться к снижению какой-либо из случайных погрешностей более чем до 0,1—0,2 от наибольшей из остальных случайных погрешностей, так как из теории погрешностей известно, что на практике случайными погрешностями, составляющими 0,1 и даже 0,2 от максимальных погрешностей, можно пренебречь.

К случайным погрешностям нужно отнести и все те, которые по своей природе могут быть отнесены к систематическим, но введение поправок на которые невозможно по тем или иным причинам.

В большинстве случаев наибольшим препятствием для повышения чувствительности прибора являются погрешности трения, особенно когда повышение чувствительности возможно только за счет увеличения передаточного отношения передаточного механизма. При этом при увеличении чувствительности прибора, т. е. снижении погрешности отсчета, одновременно увеличивается (см. стр. 148) приведенная к чувствительному элементу сила трения, т. е. погрешность трения. Именно это обстоятельство и заставляет, как уже указывалось (см. стр. 54), экспериментаторов в целом ряде случаев пользоваться нулевыми методами измерений.

14. ТОЧНОСТЬ ПРИБОРОВ

В очень многих случаях смешивают два понятия — чувствительность и точность прибора. Точность прибора или метода измерений, как уже указывалось (см. стр. 68), характеризуется суммарной предельной относительной погрешностью прибора или метода измерений. В конечном итоге точность приборов определяется предельной суммарной погрешностью, в то время как чувствительность (*Empfindlichkeit* у немецких авторов и *sensibilité* у французских), как мы только что видели, в известном отношении определяет только одну погрешность прибора — абсолютную погрешность отсчета. Эти два понятия тесно связаны между собой, но все же принципиально они достаточно различны, и смешивать их не следует.

Точностью измерительного прибора называется степень достоверности результата измерения, оцениваемая путем указания положитель-

ного и отрицательного пределов ($\pm$) наибольшей возможной погрешности или таковых же пределов одной из средних погрешностей, устанавливаемых теорией случайных погрешностей (средняя квадратичная, вероятная, средняя арифметическая) (ОСТ/ВКС 7636).

15. КЛАССЫ ПРИБОРОВ

В заключение следует указать, что в тех отраслях народного хозяйства, где культура измерительной техники достаточно высоко развита, существует деление измерительных приборов на классы. О классах обработки, принятых в геодезии, здесь говорить не будем, так как этот вопрос выходит за пределы данной темы. Укажем только на то, что такая классификация является по существу той же классификацией приборов, так как та или иная точность обработки всегда основана на применении соответствующей точности и измерительной аппаратуры.

Распределение приборов на классы производится в соответствии с их точностью, классы устанавливаются в соответствии с требующимися при тех или иных условиях точностями измерений и развитием на данный момент приборной техники и утверждаются в законодательном

Таблица 1

Характер приборов	I		II	III
	Л.	К.	Т.	У.
Вольтметры и амперметры магнито-электрические . . .	0,2	0,3	1	2
Вольтметры других систем	0,3	0,5	2	4
Амперметры других систем	0,4	0,6	2	4
Ваттметры	0,3	0,5	2	—
Фазометры ¹ . . .	—	—	2°	4°

порядке. Например, электротехнические приборы разбиты на следующие классы: I класс точности — лабораторные и контрольные приборы; II класс — технические, III класс — приборы-указатели. В табл. 1 (ОСТ 5236) указаны требования, предъявляемые к отдельным классам электроизмерительных приборов, выраженные предельной приведенной погрешностью (в процентах).

¹ Для фазометров дана абсолютная погрешность в градусах.

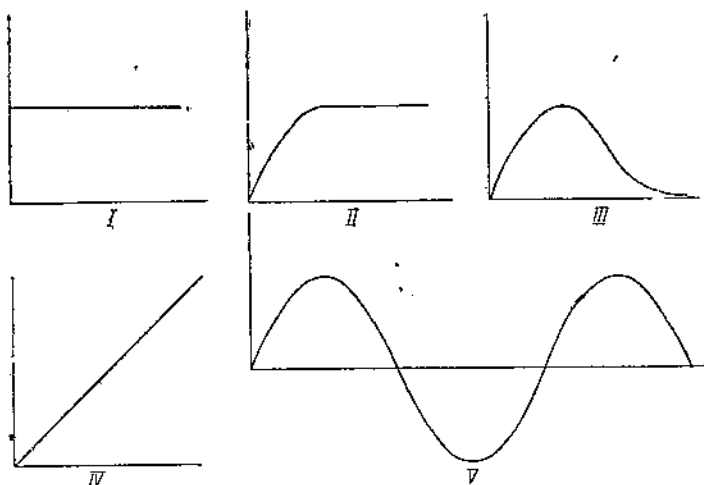
ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ В ПРИЛОЖЕНИИ К ИЗМЕРЕНИЯМ СТАТИЧЕСКИМ, А ТАКЖЕ ИЗМЕРЕНИЯМ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ КРАТКОВРЕМЕННО ПРОТЕКАЮЩИХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Глава VI

ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

1. ПЯТЬ ВИДОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Наиболее типичные и часто встречающиеся измерения можно разбить на пять основных видов.



Фиг. 36. Кривые, поясняющие различные виды измерений.

1. Прибор мгновенно включается для измерения некоторой величины, когда эта величина уже имеет некоторое определенное не меняющееся значение (фиг. 36, I). В качестве примера приведем измерение электрического напряжения с помощью вольтметра при включении этого прибора посредством рубильника в электрическую цепь, уже находящуюся под током постоянного напряжения и постоянной силы. Нарастание силы тока в цепи вольтметра при таких условиях практически можно считать мгновенным.

2. Прибор может быть включен для измерения до появления измеряемого явления и подлежащая измерению величина нарастает до не-

которого постоянного значения при включенном приборе. При этом нас интересует не процесс нарастания измеряемой величины, а только ее конечное установившееся значение (фиг. 36, II). Примером такого измерения может служить электрическая цепь с включенными приборами, сила тока или напряжение в которой доводится до нужного значения с помощью реостата или потенциометра.

3. Третий вид измерений относится к измерениям неустановившихся явлений, т. е. к таким измерениям, когда измеряемая величина по какому-то постоянному или переменному закону нарастает от нуля или от некоторого начального значения до определенных размеров и затем снова падает до начального значения (фиг. 36, III). Такой случай может быть, например, при измерении ускорений при переходе самолета от одного режима полета к другому, например от планирования к горизонтальному полету.

4. Четвертый вид измерений (фиг. 36, IV) относится к измерениям величин только нарастающих или только спадающих с постоянной или переменной скоростью, например замер высоты при подъеме или спуске самолета.

5. Пятый вид измерений относится к измерениям величин, характеризующих периодические явления, например вибрацию (фиг. 36, V).

Первый и второй виды измерений относятся к статическим. Так как для нас не представляет интереса, что происходит с прибором во время нарастания величины при измерении, соответствующем второму случаю, то второй вид измерений, особенно если измеряемая величина нарастает очень быстро, может быть отождествлен с первым. При медленном нарастании измеряемой величины разница в поведении прибора при первом и втором видах измерений заключается в том, что все особенности поведения прибора, неблагоприятно отражающиеся на измерении, которые имеют место при первом виде измерений, проявятся значительно слабее или совершенно исчезнут при достаточно медленном нарастании измеряемой величины. Таким образом первый вид измерений можно рассматривать как предельный случай второго вида, поэтому второй вид измерений мы рассматривать не будем.

2. ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Последние три вида измерений относятся к нестатическим, т. е. к измерениям быстро меняющихся величин вида, показанного на фиг. 36, III и IV, или периодических (фиг. 36, V).

Эти измерения значительно отличаются от статических¹, именно тем, что при нестатических измерениях появляется новый особый вид погрешностей — инерционных. Природа этих погрешностей заключается в том, что прибор вследствие инерции подвижных частей не в состоянии при определенных условиях следить за изменением измеряемой величины. Вследствие этого получаются неверные показания, погрешности

¹ Под статическими подразумеваются такие измерения установившихся явлений, которые обычно производятся после того, как собственные колебания подвижной системы прибора затухли (см. стр. 95).

которых могут достигать 100%, а в особых случаях (например при резонансе) и значительно больших значений.

Изучение всех возможных случаев инерционных погрешностей относится к весьма сложной и обширной области, которую можно было бы назвать теорией колебаний в приборном деле. Эта область вполне может послужить темой для специальной работы, поэтому здесь придется ограничиться только некоторыми самыми общими указаниями, относящимися к простым (гармоническим) колебаниям, которые позволили бы только в самом общем виде представить, как отражается инерция подвижных частей прибора на его поведении при различных условиях измерений.

Глава VII

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ПРИБОРОВ

1. СТАТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Хотя при статических измерениях мы не имеем инерционных погрешностей, но все же инерция подвижных частей прибора и в данном случае вызывает некоторые особенности его поведения, которые сейчас и будут рассмотрены, исходя из условий измерения, соответствующих первому случаю (фиг. 36, I).

Подвижная система прибора, подвергаясь воздействию мгновенно возросшей силы, дойдя до своего нового положения равновесия, не остановится, а в связи с накопленной кинетической энергией будет продолжать двигаться дальше за точку равновесия, пока не израсходует всей накопленной кинетической энергии. При этом большая часть кинетической энергии будет воспринята пружиной в виде потенциальной энергии, и только незначительная часть будет израсходована на трение. Перейдя за точку равновесия на определенное расстояние, подвижная система прибора после остановки начнет двигаться обратно и т. д., т. е. начнет колебаться.

То же самое будет наблюдаться и в обратном случае, когда некоторая постоянная сила мгновенно прекратит свое воздействие на прибор. Такие условия создаются, например при выключении рубильником вольтметра или амперметра из безиндукционной электрической цепи, которая находилась до того под постоянным напряжением и по которой протекал ток постоянной силы.

Разница здесь будет заключаться только в том, что в первом случае колебание будет вызвано воздействием на прибор некоторой мгновенно возросшей постоянной возмущающей силы (или момента) — несвободное колебание системы; во втором случае колебание будет происходить в условиях отсутствия возмущающей силы (или момента) — свободное колебание системы. Так как свободные колебания системы играют существенную роль в теории колебаний вообще, то и здесь в первую очередь будут рассмотрены различные случаи свободных колебаний.

2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ КУЛОНОВСКОГО И ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Уравнение движения подвижной системы в идеальном случае, т. е. при отсутствии каких-либо трений (как кулоновского, так и других),

и при мгновенном снятии с прибора, как указывалось выше, некоторой постоянной нагрузки, можно написать так:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M_0 \alpha = 0, \quad (147)$$

где J — приведенный момент инерции всех подвижных частей прибора,

M_0 — удельный момент системы, т. е. момент пружины, отнесенный к одному радиану поворота приведенной массы,

α — угол поворота приведенной массы.

Разделив уравнение на момент инерции J и подставив

$$k^2 = \frac{M_0}{J},$$

получим:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k^2 \alpha = 0. \quad (148)$$

Решение этого дифференциального уравнения будет иметь следующий вид:

$$\alpha = C \sin(kt + \gamma). \quad (149)$$

Начальные условия для определения постоянных интегрирования C и γ согласно изложенному выше будут следующие: при $t = 0$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_0.$$

При этих начальных условиях получим следующие значения для произвольных постоянных C и γ :

$$C = \alpha_0 \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Подставив эти значения произвольных постоянных в уравнение (149), получим:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right). \quad (150)$$

3. СОБСТВЕННЫЙ ПЕРИОД, СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА И АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ

Уравнение (150) определяет колебательное движение подвижной системы прибора в идеальном случае, не существующем в природе (отсутствие всяких трений). Однако оно играет исключительно важную роль, так как позволяет определить период свободных или собственных, незатухающих колебаний прибора, т. е. период колебаний прибора, зависящий только от его основных конструктивных постоянных — момента инерции подвижной системы и удельного момента пружины. Этот период в дальнейшем условимся называть просто собственным периодом колебаний и обозначать через T_0 в отличие от периода свободных или собственных успокоенных колебаний прибора, который, кроме того, еще зависит, как увидим ниже, от успокоения.

Здесь введен новый термин «собственные колебания». На стр. 158 было указано, что колебание может быть либо свободным, либо несвободным в зависимости от того, происходит ли оно в связи с наличием или при отсутствии возмущающего явления. Ниже мы более подробно познакомимся с тем, что называется вынужденным колебанием. Сейчас необходимо только указать, что каждое несвободное колебание, вызываемое неустановившимся явлением (фиг. 36, III, IV и V), при возникновении обязательно складывается минимум из двух в значительной степени отличающихся друг от друга колебаний — из одного, имеющего период свободного колебания, и другого, имеющего период возмущающего явления.

Хотя первое и имеет период свободного колебания, но свободным его назвать нельзя, так как оно вызвано и протекает в связи с возмущающим явлением. Поэтому в отличие от второго, имеющего период возмущающего явления, которое в дальнейшем будем называть просто вынужденным колебанием, первое, имеющее период свободного, условимся называть собственным колебанием системы или просто собственным колебанием. Термин «незатухающие колебания» будет пояснен ниже, термин «успокоенные» колебания будет пояснен на стр. 163.

Некоторые авторы называют собственный период колебаний прибора основной оперативной постоянной прибора. Это имеет глубокий смысл, так как собственный период колебаний прибора (или обратная ему величина — собственная частота колебаний) является действительно основной константой прибора, характеризующей некоторые весьма важные качества прибора в отношении его измерительных свойств.

На основании того, что одинаковые значения угла α , как это видно из уравнения (150), повторяются, т. е. подвижная система возвращается в исходное положение, или, другими словами, прodelывает один полный период колебания каждый раз, когда $kt = 2\pi$, собственный период колебаний будет:

$$t = T_0 = \frac{2\pi}{k}. \quad (151)$$

Так как

$$k = \sqrt{\frac{M_0}{J}},$$

то

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{M_0}{J}}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M_0}}. \quad (152)$$

Постоянная $k = \sqrt{\frac{M_0}{J}}$ называется частотой колебаний или просто частотой. По аналогии с периодом условимся называть частоту k , соответствующую собственному периоду колебаний, собственной частотой, в отличие от частоты свободных или собственных успокоенных колебаний.

Приведенное уравнение (150) движения системы относится к идеальному не существующему случаю. Согласно этому уравнению система, выведенная однажды из равновесия, будет колебаться бесконечно дол-

гое время с постоянной амплитудой. Такое колебание называется незатухающим.

Амплитудой называется максимальное отклонение подвижной системы от положения равновесия в какую-либо сторону. Расстояние между двумя крайними противоположными положениями системы, равное при незатухающем колебании двойной амплитуде, называется размахом.

На практике такого случая не может быть, и любая упругая система, выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе, рано или поздно остановится — успокоится. Такое колебание мы называем затухающим. Происходит это вследствие наличия целого ряда сопротивлений движению системы в виде кулоновского трения (сила которого не зависит от величины скорости), или жидкостного (трение, пропорциональное первой степени скорости), или внутреннего трения, имеющего место при деформациях материала, следствием которого, как уже указывалось, являются остаточное последствие и гистерезис, или, наконец, какого-либо другого трения, пропорционального не первой, а какой-либо другой степени скорости.

В данном случае мы не будем останавливаться на рассмотрении влияния на колебательное движение двух последних видов трения, так как эти вопросы достаточно сложны и подлежат изучению в специальных курсах. Остановимся на более простых и достаточно типичных первых двух случаях, когда имеется в наличии кулоновское или жидкостное трение, или то и другое вместе.

4. ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ

Предположим в первую очередь, что рассмотренная выше система имеет кулоновское трение в виде момента трения $\pm M_{\text{тр}}$, всегда направленного против движения (поэтому и взят знак $\pm$). В этом случае уравнение движения примет следующий вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2 \pm \frac{M_{\text{тр}}}{J} = 0. \quad (153)$$

Решение этого уравнения будет:

$$\alpha = C \sin(kt + \gamma) \pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0}. \quad (154)$$

Так как

$$\frac{M_{\text{тр}}}{M_0} = \alpha_{\text{тр}},$$

где $\alpha_{\text{тр}}$ — угол трения, то

$$\alpha = C \sin(kt + \gamma) \pm \alpha_{\text{тр}}. \quad (155)$$

В данном случае угол трения меняет свой знак при изменении направления скорости, т. е. мы имеем не непрерывную функцию, поэтому решение этого уравнения, соответствующее начальным условиям при $t = 0$, $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ и $\alpha = \alpha_0$, можно написать только для первого полупериода колебания:

$$\alpha_1 = (\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}) \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_{\text{тр}}.$$

Для второго полукосебания начальные условия изменяются и будут: при $t = \frac{\pi}{k}$, $\frac{dy}{dt} = 0$ и $\alpha = \alpha_{1_0}$, откуда получим новое значение для C :

$$C = -(\alpha_{1_0} + \alpha_{\text{тр}}).$$

Следовательно

$$\alpha_2 = -(\alpha_{1_0} + \alpha_{\text{тр}}) \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} \right) - \alpha_{\text{тр}}.$$

Поступая также и дальше, для α_3 мы бы получили:

$$\alpha_3 = (\alpha_2 - \alpha_{\text{тр}}) \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_{\text{тр}}$$

и т. д.

Отсюда видно, что сухое трение не влияет на период колебаний прибора, который остается прежним:

$$T_0 = \frac{2\pi}{k}.$$

Если определять отклонения α подвижной системы для моментов времени $kt = \pi, 2\pi, 3\pi$ и т. д., т. е. амплитуды последовательных полукосебаний, обозначив их добавочным индексом, то получим:

$$\alpha_{1_0} = (\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}) \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) + \alpha_{\text{тр}} = -\alpha_0 + 2\alpha_{\text{тр}},$$

$$-\alpha_{1_0} = \alpha_0 - 2\alpha_{\text{тр}},$$

$$\alpha_{2_0} = -(\alpha_{1_0} + \alpha_{\text{тр}}) \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) - \alpha_{\text{тр}} = -\alpha_{1_0} - 2\alpha_{\text{тр}}.$$

Так как

$$-\alpha_{1_0} = \alpha_0 - 2\alpha_{\text{тр}},$$

то

$$\alpha_{2_0} = \alpha_0 - 4\alpha_{\text{тр}}.$$

Для α_3 таким же путем получим:

$$-\alpha_{2_0} = \alpha_0 - 6\alpha_{\text{тр}},$$

и т. д.

Знак минус перед α_{1_0} и α_{2_0} означает, что система отклонилась в противоположное крайнее положение относительно положения равновесия по сравнению с α_0 и α_{2_0} . При каждом последующем полукосебании она отклоняется на меньшую величину; отклонение уменьшается на двойной угол трения по сравнению с предшествовавшим отклонением. Если бы исследовать движение системы таким образом и дальше, то мы получили бы отклонение, соответствующее $kt = 4\pi$:

$$\alpha_{4_0} = \alpha_0 - 8\alpha_{\text{тр}},$$

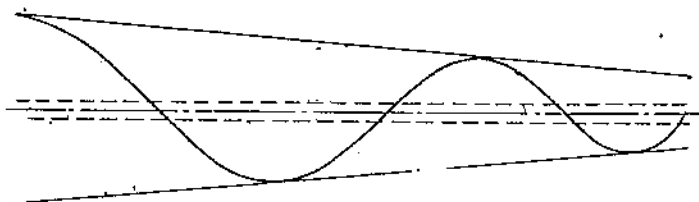
и т. д.

Отсюда можно заключить, что каждое последующее крайнее отклонение системы будет уменьшаться на двойной угол трения. Обозначив через $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ амплитуды — начальную и каждого последую-

щего полукосебания — и рассматривая абсолютные отклонения системы, без учета направления отклонения, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_0 - 2\alpha_{\text{тр}}, \\ a_2 &= a_0 - 4\alpha_{\text{тр}}, \\ a_3 &= a_0 - 6\alpha_{\text{тр}}, \\ a_4 &= a_0 - 8\alpha_{\text{тр}}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= a_0 - 2n\alpha_{\text{тр}}, \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

т. е. при наличии кулоновского трения амплитуда колебаний представляет собой убывающий арифметический ряд.



Фиг. 37. Кривая затухающего колебания при наличии только сухого трения.

Графически затухающее колебание при наличии только кулоновского трения можно изобразить так, как показано на фиг. 37, где расстояние между пунктирными и средней линией соответствует величине угла трения. Трение как бы смещает положение равновесия системы в зависимости от направления движения то в ту, то в другую сторону на угол трения.

Так как качество прибора требует уменьшения трения до возможного минимума, то прибор, имеющий только кулоновское трение, будет успокаиваться весьма продолжительное время, особенно в тех случаях, когда период собственных колебаний прибора велик. Хорошим примером в данном случае служат аналитические весы.

5. ВЛИЯНИЕ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Как уже упоминалось выше (стр. 49), чтобы, не ухудшая качества прибора, ускорить успокоение колебаний его подвижной системы, применяют жидкостное трение. Колебание, которое происходит при наличии жидкостного трения, в дальнейшем условимся называть успокоенным колебанием.

Посмотрим, какое влияние окажет на прибор жидкостное трение. Для простоты сначала рассмотрим идеальный случай без кулоновского трения.

Уравнение движения в данном случае имеет следующий вид:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d\alpha}{dt} + M_0\alpha = 0, \quad (157)$$

где N_0 — момент жидкостного трения, отнесенный к единице угловой скорости:

$$N_0 = \frac{N}{\omega} \left[\frac{z \cdot c \cdot M^2}{\text{сек}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Иногда этот момент называют «удельным успокаивающим моментом» или «постоянной успокоения».

Разделив уравнение (157) на J и заменив

$$\frac{N_0}{J} = 2h,$$

и

$$\frac{M_0}{J} = k^2,$$

получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2\alpha = 0. \quad (158)$$

6. КОЭФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ДОКРИТИЧЕСКОЕ И КРИТИЧЕСКОЕ УСПОКОЕНИЕ

Постоянная h называется коэффициентом сопротивления. При решении данного уравнения могут быть три случая:

$$h < k, \quad h = k \quad \text{и} \quad h > k.$$

Последний случай ($h > k$) имеет малое практическое значение, поэтому мы на нем останавливаться не будем. Остальные два случая играют достаточно существенную роль в теории измерительных приборов. Общее решение уравнения для случая $h < k$ и для начальных условий при $t = 0$, $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ и $\alpha = \alpha_0$ будет иметь следующий вид:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{-ht} \sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right), \quad (159)$$

где $p = \sqrt{k^2 - h^2}$ — частота свободных успокоенных колебаний; в дальнейшем эту частоту, а также частоту собственных успокоенных колебаний будем называть просто частотой успокоенных колебаний в отличие от собственной частоты колебаний k и частоты вынужденных колебаний ω .

Для второго случая ($h = k$) и для тех же начальных условий решение будет иметь следующий вид:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-ht} (1 + ht), \quad (160)$$

Сравнивая оба случая, видим, что колебания остаются периодическими только до тех пор, пока h меньше k , т. е. пока $\frac{N_0}{2J}$ меньше $\sqrt{\frac{M_0}{J}}$, другими словами, пока удельный успокаивающий момент не возрастет до величины, определяемой следующей зависимостью:

$$N_0 = 2\sqrt{M_0 J}. \quad (161)$$

¹ В системе CGS.

В последнем случае колебания нет, и подвижная система будет асимптотически приближаться к положению равновесия, не только не переходя за положение равновесия, но и теоретически достигая его только в течение бесконечно большого промежутка времени ($t=\infty$). Такая система называется аperiодической, а успокоение — критическим.

Дальнейшее увеличение удельного успокаивающего момента N_0 (или силы, если мы имеем не вращательное, а поступательное движение) в обычных случаях бесполезно, так как система уже достигла предельного успокоения колебаний и не переходит за точку равновесия. Дальнейшее увеличение успокаивающего момента, не давая никаких преимуществ, повлечет за собой только еще более медленное перемещение подвижной системы к точке равновесия. Это может только ухудшить работу прибора, замедляя приход стрелки в нужное положение. Поэтому третий случай ($h > \frac{1}{k}$) не имеет практического значения.

7. ВЛИЯНИЕ УСПОКОЕНИЯ НА ПЕРИОД СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ И СТЕПЕНЬ УСПОКОЕНИЯ

По аналогии с изложенным выше период колебаний данной системы будет:

$$t=T=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-h^2}}. \quad (162)$$

Так как

$$h^2=\frac{N_0^2}{4J^2} \quad \text{и} \quad k^2=\frac{M_0}{J},$$

то

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{M_0}{J}-\frac{N_0^2}{4J^2}}}. \quad (163)$$

Из уравнения (163) видно, что с увеличением удельного успокаивающего момента N_0 при остальных неизменных параметрах прибора период колебаний увеличивается. При достижении удельным успокаивающим моментом значения, при котором

$$\frac{N_0^2}{4J^2}=\frac{M_0}{J}$$

или

$$N_0=2\sqrt{M_0J},$$

движение становится аperiодичным, и решение уравнения движения получится в другом виде.

По аналогии с частотой период свободных (или собственных) успокоенных колебаний в дальнейшем условимся называть просто периодом успокоенных колебаний в отличие от собственного периода колебаний T_0 и периода вынужденных колебаний.

Относительное увеличение периода успокоенных колебаний по сравнению с собственным периодом колебаний системы можно получить из следующей зависимости:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{\frac{M_0}{J}}}{\sqrt{\frac{M_0}{J} - \frac{N_0^2}{4J^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{N_0^2}{4JM_0}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

Отношение

$$\frac{N_0}{2\sqrt{JM_0}} = \frac{h}{k} = b$$

назовем степенью успокоения.

Таким образом степень успокоения b при критическом успокоении наибольшая (так как случая сверхкритического успокоения при $h > k$ мы не рассматриваем) и равна единице. При успокоении ниже критического $b < 1$ и при отсутствии успокоения $b = 0$.

Выражение для отношения периодов можно переписать в следующем виде:

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}. \quad (164)$$

Вопрос об успокоении колебаний подвижных систем приборов при статических измерениях связан исключительно с вопросом наиболее быстрого успокоения этих колебаний в целях наиболее быстрого получения отсчета по прибору. Поэтому увеличение периода успокоенных колебаний играет существенную роль. Успокоением уменьшается, с одной стороны, количество колебаний прибора, с другой, как оказывается, увеличивается время каждого колебания. Повидимому, должна быть какая-то наиболее выгодная степень успокоения b , при которой время успокоения прибора будет кратчайшим, или, как говорят, «готовность прибора к отсчету» будет обеспечена наиболее быстро. К сожалению, не удастся решить эту задачу в общем виде таким образом, чтобы условия, обеспечивающие наиболее быструю готовность прибора к отсчету, были достаточно наглядно отражены. В табл. 2 Дрейздель¹ дает приближенные значения отношений $\frac{T}{T_0}$, т. е. периода успокоенных колебаний T к собственному периоду колебаний T_0 , для различных значений степени успокоения b , а также значения отношений $\frac{t}{T_0}$, т. е. промежутка времени t , за который амплитуда колебаний достигает 1 и 0,1% от максимального отклонения, к собственному периоду колебаний T_0 .

Если считать, как видно из табл. 2, что снижение амплитуды колебаний до 0,1% является достаточным условием для снятия отсчета, то значение наиболее выгодной степени успокоения b будет порядка 0,8. Дрейзелем взяты дробные значения степени успокоения b , для того

¹ Dreydsal, ABE, DYC, MIEE and A. C. Jolley E. C. 4, Electrical Measuring Instruments I, Commercial and Indicating Instruments, 1. g. v. London, 1924.

чтобы получить целые числа для значений коэффициента затухания δ (с которым мы сейчас познакомимся), приведенных в последней строке табл. 2.

Таблица 2

	Степень успокоения b				
	0,216	0,454	0,58	0,78	1
Отношение периода затухающих колебаний к собственному периоду колебаний $\frac{T}{T_0}$	1,024	,123	1,22	1,6	∞
Отношение промежутка времени уменьшения амплитуды колебания до 1% к собственному периоду колебаний $\frac{t}{T_0}$	—	1,4	0,99	1,04	1,05
То же до $0,1\%$	—	—	1,61	1,32	1,47
Коэффициент затухания δ	0,5	0,2	0,1	0,02	—

8. КОЭФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ И ЕГО ЗАВИСИМОСТЬ ОТ СТЕПЕНИ УСПОКОЕНИЯ

Коэффициентом затухания δ называется отношение последующей амплитуды успокоенного полукосинуса к предшествующей. При наличии одного жидкостного трения, как мы увидим далее, значение коэффициента затухания δ при данной степени успокоения является величиной постоянной для всех амплитуд, т. е. в течение всего колебания.

Чтобы определить, как меняются амплитуды успокоенных колебаний, поступим следующим образом. В первую очередь определим значения времени t , при которых система достигает крайних положений, т. е. когда скорость системы становится равной нулю:

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

Для этого воспользуемся уравнением (159):

$$a = \frac{a_0}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{-ht} \sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right). \quad (159)$$

Взяв производную $\frac{da}{dt}$, приравняем ее нулю:

$$\frac{da}{dt} = \frac{a_0}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{-ht} \left[-h \sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) + p \cos \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) \right] = 0.$$

Из последнего выражения будем иметь:

$$h \sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) = p \cos \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right)$$

или

$$\sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + h^2}}, \quad (165)$$

$$\cos \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) = \frac{h}{\sqrt{p^2 + h^2}}, \quad (166)$$

$$\operatorname{tg} \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) = \frac{p}{h}, \quad (167)$$

Следовательно,

$$t = \frac{1}{p} \left(\arctg \frac{p}{h} - \arctg \frac{p}{h} \right). \quad (167a)$$

Одно из решений уравнения (167a), соответствующее значению $t = 0$, относится к начальному положению системы, когда $\alpha = \alpha_0$. Обозначим его через t_0 . Остальные решения согласно уравнению (167a) для последующих полупериодов будут:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{\pi}{p} = \frac{1}{p} \pi, \\ t_2 &= t_0 + 2 \frac{\pi}{p} = \frac{2}{p} \pi, \\ &\dots \dots \dots \\ t_n &= t_0 + n \frac{\pi}{p} = \frac{n}{p} \pi. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Подставляя полученные только что значения для $t_1, t_2, \dots, t_n$ в уравнение (159), которое предварительно перепишем так:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-ht} \frac{\sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}},$$

получим значения амплитуд полупериодов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 e^{-\frac{h}{p}\pi} \frac{\sin \left(\pi + \arctg \frac{p}{h} \right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = -\alpha_0 e^{-\frac{h}{p}\pi}, \\ \alpha_2 &= \alpha_0 e^{-\frac{2h}{p}\pi} \frac{\sin \left(2\pi + \arctg \frac{p}{h} \right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = +\alpha_0 e^{-\frac{2h}{p}\pi}, \\ \alpha_3 &= \alpha_0 e^{-\frac{3h}{p}\pi} \frac{\sin \left(3\pi + \arctg \frac{p}{h} \right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = -\alpha_0 e^{-\frac{3h}{p}\pi}, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{2n} &= \alpha_0 e^{-\frac{2nh}{p}\pi} \frac{\sin \left(2n\pi + \arctg \frac{p}{h} \right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = +\alpha_0 e^{-\frac{2nh}{p}\pi}, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha_0 e^{-\frac{(2n+1)h}{p}\pi} \frac{\sin \left[(2n+1)\pi + \arctg \frac{p}{h} \right]}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = -\alpha_0 e^{-\frac{(2n+1)h}{p}\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Разделив каждое последующее уравнение на предшествующее, получим:

$$\frac{-a_{2n+1}}{+a_{2n}} = \frac{+a_{2n}}{-a_{2n-1}} = \dots = \frac{-a_3}{+a_2} = \frac{+a_2}{-a_1} = \frac{-a_1}{+a_0} = e^{-\frac{h}{p}\pi},$$

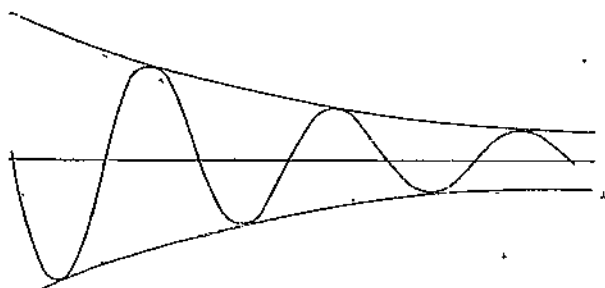
или коэффициент затухания

$$\vartheta = e^{-\frac{h}{p}\pi}. \quad (170)$$

После подстановки вместо h и p их значений уравнение (170) примет следующий вид:

$$\vartheta = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{4JM_0}{N_0^2} - 1}}} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - 1}}}. \quad (171)$$

Зная степень успокоения, очень просто можно определить, во сколько раз амплитуда каждого последующего полупериода будет меньше



Фиг. 38. Кривая затухающего колебания при наличии только жидкостного трения.

амплитуды предшествующего, и, обратно, задавшись нужным коэффициентом затухания, также просто можно определить необходимую для этого степень успокоения:

$$b = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{\ln \vartheta}\right)^2}}. \quad (172)$$

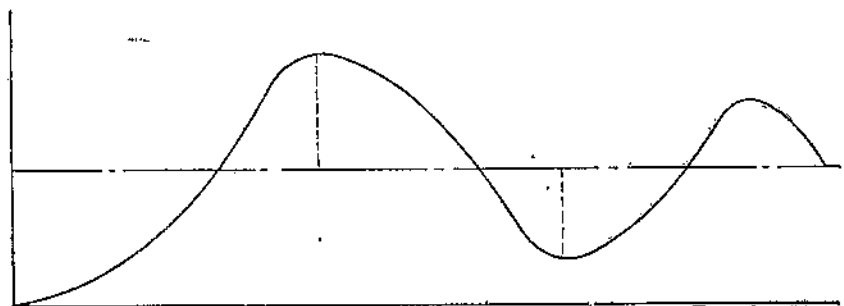
Обозначив амплитуды через $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ и взяв абсолютные их значения по уравнению (170), получим:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \vartheta a_0, \\ a_2 &= \vartheta a_1 = \vartheta^2 a_0, \\ a_3 &= \vartheta a_2 = \vartheta^3 a_1 = \vartheta^3 a_0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= \vartheta^n a_0. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

При наличии успокоения с помощью жидкостного трения амплитуды колебаний убывают по геометрической прогрессии. Фиг. 38 дает графическое изображение успокоенного колебания при коэффициенте затухания $\vartheta = 0,75$.

9. ВЛИЯНИЕ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ НА СИММЕТРИЧНОСТЬ КРИВОЙ КОЛЕБАНИЙ

Небезынтересно отметить еще одну особенность успокоенного колебания. Эта особенность заключается в том, что время нарастания отклонения системы не равно времени спадания отклонения. Таким образом при графическом изображении такого колебания вершины кривой ока-



Фиг. 39. Кривая, характеризующая нарушение симметричности синусоидального колебания, при успокоении с помощью жидкостного трения.

жутся расположенными несимметрично и по оси времени они будут несколько сдвинутыми относительно точек пересечения этой кривой с прямой, соответствующей положению равновесия системы (фиг. 39). Обозначим через t_0' и t_0'' время, прошедшее от начала колебания до момента, когда система пройдет первый и второй раз положение равновесия ($\alpha = 0$), а через t_1 время, соответствующее промежуточному максимальному отклонению системы, т. е. при $\alpha = \alpha_{\max}$. Так как по изложенному выше

$$t_1 = \frac{\pi}{p}$$

и

$$p = \frac{2\pi}{T},$$

то значение времени t_1 можно выразить так:

$$t_1 = \frac{T}{2}.$$

С другой стороны, так как

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{-ht} \sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) = 0$$

при

$$\sin \left(pt + \arctg \frac{p}{h} \right) = 0,$$

т. е. при

$$pt + \arctg \frac{p}{h} = 0 = \pi = 2\pi = 3\pi \quad \text{и т. д.,}$$

$$t'_0 = \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p} \arctg \frac{p}{h},$$

$$t''_0 = \frac{2\pi}{p} - \frac{1}{p} \arctg \frac{p}{h}.$$

Так как

$$p = \sqrt{k^2 - h^2} \quad \text{и} \quad \frac{h}{k} = b,$$

то получим:

$$\Delta' t = t_1 - t'_0 = \frac{T}{2} - \frac{\pi}{p} + \frac{1}{p} \arctg \frac{p}{h} = \frac{T}{2\pi} \arctg \frac{\sqrt{1-b^2}}{b}$$

и

$$\Delta'' t = t''_0 - t_1 = \frac{2\pi}{p} - \frac{1}{p} \arctg \frac{p}{h} - \frac{T}{2} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} \right).$$

Из последних двух уравнений для $\Delta' t$ и $\Delta'' t$ видно, что для данного (успокоенного) колебания время нарастания отклонения меньше, чем время спадания, на величину:

$$\Delta'' t - \Delta' t = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} \right). \quad (174)$$

При степени успокоения b порядка 0,8 эта разница достигает примерно 0,6 от половины периода затухающего колебания:

$$\Delta'' t - \Delta' t \approx 0,6 \frac{T}{2}.$$

При $b = 0$

$$\frac{\sqrt{1-b^2}}{b} = \infty.$$

Так как

$$\arctg \infty = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\Delta'' t - \Delta' t = 0$$

или

$$\Delta'' t = \Delta' t = \frac{T}{4}.$$

Из последнего равенства видно, что для неуспокоенного колебания время нарастания отклонения системы равно времени спадания.

10. ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ УСПОКОЕНИИ

Вернемся к случаю критического успокоения, для которого дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-ht} (1 + ht). \quad (160)$$

Задавшись определенной точностью отсчета показания прибора, т. е. определенной относительной погрешностью $\frac{\alpha}{\alpha_0}$, и так как $h = bk$, $k = \frac{2\pi}{T_0}$ и $b = 1$, то уравнение (160) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \delta = e^{-2\pi \frac{t}{T_0}} \left(1 + 2\pi \frac{t}{T_0} \right). \quad (175)$$

Задавая $\delta = 0,01$, $\delta = 0,001$ и т. д., получим:

$$\frac{t}{T_0} = 1,06;$$

$$\frac{t}{T_0} = 1,47$$

и т. д.

Таким образом с помощью уравнения (160) можно весьма просто с данной определенной степенью точности определить время готовности прибора к отсчету ¹ для случая критического успокоения.

11. ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ УСПОКОЕНИИ

В заключение рассмотрим, как влияет кулоновское трение на колебание системы при наличии жидкостного трения. Уравнение движения в данном случае будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2h \frac{d \alpha}{dt} + k^2 \alpha \pm \frac{M_{\text{тр}}}{J} = 0. \quad (176)$$

Решения этого уравнения в общем виде для $h < k$ и для $h = k$ будут:

$$\alpha = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) \pm \alpha_{\text{тр}}, \quad (177)$$

$$\alpha = e^{-ht} (C_1 + C_2 t) + \alpha_{\text{тр}}. \quad (178)$$

После определения постоянных интегрирования для начальных условий при $t = 0$, $\frac{d \alpha}{dt} = 0$ и $\alpha = \alpha_0$ уравнение (178) получим в следующем виде:

$$\alpha = (\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}) e^{-ht} (1 + ht) + \alpha_{\text{тр}}. \quad (179)$$

Таким образом в случае критического успокоения ($h = k$) из уравнения (179) видно, что для того же времени готовности прибора к отсчету относительная погрешность увеличивается на относительную погрешность трения, умноженную на величину, близкую к единице. Действительно,

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = e^{-ht} (1 + ht) \left(1 - \frac{\alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0} \right) + \frac{\alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0} \quad (180)$$

или

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = e^{-ht} (1 + ht) + \frac{\alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0} [1 - e^{-ht} (1 + ht)]. \quad (181)$$

Если нужно получить ту же точность отсчета, что и в случае отсутствия кулоновского трения (уравнение 175), то время готовности прибора к отсчету увеличится. Уравнение для определения времени в данном случае примет следующий вид:

$$\frac{\alpha - \alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}} = e^{-2\pi \frac{t}{T_0}} \left(1 + 2\pi \frac{t}{T_0} \right). \quad (182)$$

¹ В данном случае к отсчету нуля, но принципиально эти рассуждения остаются в силе и для других показаний прибора.

Из уравнения (182) видно, что увеличение времени готовности прибора к отсчету будет тем больше, чем меньше отношение разностей

$$\frac{\alpha - \alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}}.$$

12. ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ ПРИ ДОКРИТИЧЕСКОМ УСПОКОЕНИИ

Посмотрим, как влияет кулоновское трение при докритическом успокоении.

Определяя по аналогии с разобранным выше случаем колебания при наличии только одного кулоновского трения (см. стр. 161) постоянную интегрирования C каждый раз по новым начальным условиям при перемене знака перед $\alpha_{\text{тр}}$ и подставляя значения $t_1 = \frac{\pi}{p}$, $t_2 = \frac{2\pi}{p}$, ..., $t_n = \frac{2n\pi}{p}$ по аналогии с рассмотренным выше случаем колебания при наличии только одного жидкостного трения (см. стр. 168), можно написать следующую группу уравнений для определения значений α_1 , α_2 , ..., α_{2n} , α_{2n+1} и т. д.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_{\text{тр}} &= (\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi} \frac{\sin\left(\pi + \arctg \frac{p}{h}\right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = -(\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi}, \\ \alpha_2 + \alpha_{\text{тр}} &= -(\alpha_1 + \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi} \frac{\sin\left(2\pi + \arctg \frac{p}{h}\right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = -(\alpha_1 + \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi}, \\ \alpha_3 - \alpha_{\text{тр}} &= (\alpha_2 - \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi} \frac{\sin\left(3\pi + \arctg \frac{p}{h}\right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = -(\alpha_2 - \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi}, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{2n} + \alpha_{\text{тр}} &= -(\alpha_{2n-1} + \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi} \frac{\sin\left(2n\pi + \arctg \frac{p}{h}\right)}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = \\ &= -(\alpha_{2n-1} + \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi}, \\ \alpha_{2n+1} - \alpha_{\text{тр}} &= (\alpha_{2n} - \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi} \frac{\sin\left[(2n+1)\pi + \arctg \frac{p}{h}\right]}{\sin \arctg \frac{p}{h}} = \\ &= -(\alpha_{2n} - \alpha_{\text{тр}}) e^{-\frac{h}{p}\pi}. \end{aligned} \right\} (183)$$

Группа уравнений (183) получена на основании того, что постоянная интегрирования C принимает последовательно в зависимости от начальных условий следующие значения:
для $t = 0$

$$C_1 = \frac{\alpha_0 - \alpha_{\text{тп}}}{\sin \arctg \frac{p}{h}},$$

для $t = \frac{\pi}{p}$

$$C_2 = - \frac{\alpha_1 + \alpha_{\text{тп}}}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{\frac{h}{p} \pi},$$

для $t = \frac{2\pi}{p}$

$$C_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_{\text{тп}}}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{\frac{2h}{p} \pi},$$

для $t = \frac{(2n-1)\pi}{p}$

$$C_{2n} = - \frac{\alpha_{2n-1} + \alpha_{\text{тп}}}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{\frac{(2n-1)h}{p} \pi},$$

для $t = \frac{2n\pi}{p}$

$$C_{2n+1} = \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{\text{тп}}}{\sin \arctg \frac{p}{h}} e^{\frac{2nh}{p} \pi}.$$

Обозначив $e^{\frac{h}{p} \pi}$ через ϑ и сделав соответствующие подстановки, получим:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_1 &= \vartheta (\alpha_0 - \alpha_{\text{тп}}) - \alpha_{\text{тп}} = \vartheta \alpha_0 - \vartheta \alpha_{\text{тп}} - \alpha_{\text{тп}}, \\ +\alpha_2 &= \vartheta (-\alpha_1 - \alpha_{\text{тп}}) - \alpha_{\text{тп}} = \vartheta^2 \alpha_0 - \vartheta^2 \alpha_{\text{тп}} - 2\vartheta \alpha_{\text{тп}} - \alpha_{\text{тп}}, \\ -\alpha_3 &= \vartheta (\alpha_2 - \alpha_{\text{тп}}) - \alpha_{\text{тп}} = \vartheta^3 \alpha_0 - \vartheta^3 \alpha_{\text{тп}} - 2\vartheta^2 \alpha_{\text{тп}} - 2\vartheta \alpha_{\text{тп}} - \alpha_{\text{тп}}, \\ &\dots \dots \dots \\ +\alpha_{2n} &= \vartheta (-\alpha_{2n-1} - \alpha_{\text{тп}}) - \alpha_{\text{тп}} = \vartheta^{2n} \alpha_0 - \vartheta^{2n} \alpha_{\text{тп}} - 2\vartheta^{2n-1} \alpha_{\text{тп}} - \\ &\quad - 2\vartheta^{2n-2} \alpha_{\text{тп}} - \dots - 2\vartheta \alpha_{\text{тп}} - \alpha_{\text{тп}}, \\ -\alpha_{2n+1} &= \vartheta (\alpha_{2n} - \alpha_{\text{тп}}) - \alpha_{\text{тп}} = \vartheta^{2n+1} \alpha_0 - \vartheta^{2n+1} \alpha_{\text{тп}} - 2\vartheta^{2n} \alpha_{\text{тп}} - \\ &\quad - 2\vartheta^{2n-1} \alpha_{\text{тп}} - \dots - 2\vartheta \alpha_{\text{тп}} - \alpha_{\text{тп}}. \end{aligned} \right\} (184)$$

и т. д.

Отсюда абсолютное значение любой n -й амплитуды будет:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \vartheta^n \alpha_0 - \vartheta^n \alpha_{\text{тр}} - 2\vartheta^{n-1} \alpha_{\text{тр}} - 2\vartheta^{n-2} \alpha_{\text{тр}} - \dots - 2\vartheta^2 \alpha_{\text{тр}} - 2\vartheta \alpha_{\text{тр}} - \alpha_{\text{тр}}, \\ a_n &= \vartheta^n \alpha_0 - \alpha_{\text{тр}} (\vartheta^n + 2\vartheta^{n-1} + 2\vartheta^{n-2} + \dots + 2\vartheta^2 + 2\vartheta + 1), \\ a_n &= \vartheta^n \alpha_0 - \alpha_{\text{тр}} \frac{(\vartheta^n - 1)(\vartheta + 1)}{(\vartheta - 1)}, \\ a_n &= \vartheta^n \left[\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}} \frac{\left(1 - \frac{1}{\vartheta^n}\right)(\vartheta + 1)}{(\vartheta - 1)} \right], \\ a_n &= \vartheta^n \left[\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}} \frac{\left(\frac{1}{\vartheta^n} - 1\right)(\vartheta + 1)}{(1 - \vartheta)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Таким образом на основании уравнения (185) видно, что наличие кулоновского трения делает более быстрым успокоение системы. На основании уравнения (177) можно сделать также другой вывод: и в данном случае, т. е. при наличии жидкостного трения, кулоновское трение никак не влияет на период колебания.

При наличии кулоновского трения наивыгоднейшее значение степени успокоения будет таким, когда система при условии отсутствия трения прошла бы за точку равновесия на величину угла трения. В этом случае при наличии трения система придет как раз в точку равновесия, но не асимптотически, как это имело бы место при критическом успокоении, а за четверть периода докритически успокоенного колебания.

Это условие можно выразить так:

$$\alpha_1 = \vartheta (\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}) - \alpha_{\text{тр}} = \alpha_{\text{тр}},$$

откуда

$$\vartheta = \frac{2\alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0 - \alpha_{\text{тр}}}. \quad (186)$$

Так как $\alpha_{\text{тр}}$ мало по сравнению с α_0 , то

$$\vartheta = \frac{2\alpha_{\text{тр}}}{\alpha_0}. \quad (187)$$

13. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В заключение рассмотрим вынужденное колебание подвижной системы прибора, соответствующее условиям статического измерения. Такой случай возможен тогда, когда находившаяся в состоянии покоя подвижная система прибора будет выведена из положения равновесия мгновенно возросшим постоянным моментом M (или силой F). В идеальном случае, при отсутствии кулоновского и жидкостного трения, уравнение движения можно представить в следующем виде:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M_0 \alpha = M \quad (188)$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k^2 \alpha = \frac{M}{J}. \quad (189)$$

Решение этого уравнения будет:

$$\alpha = C \sin(kt + \gamma) + \frac{M}{M_0}. \quad (190)$$

Начальные условия для определения постоянных интегрирования примем следующие: при $t=0$, $\frac{d\alpha}{dt}=0$ и $\alpha=0$, откуда

$$C = -\frac{M}{M_0} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом в конечном виде будем иметь:

$$\alpha = -\frac{M}{M_0} \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{M}{M_0} \quad (191)$$

или

$$\alpha = \frac{M}{M_0} (1 - \cos kt). \quad (192)$$

Так как отношение $\frac{M}{M_0}$ является углом отклонения системы соответственно новому положению равновесия, то, обозначив отношение $\frac{M}{M_0}$ через α_0 , уравнение (192) можно переписать так:

$$\alpha = \alpha_0 (1 - \cos kt). \quad (193)$$

Сравнивая уравнение (193) с уравнением (150), выражающим свободное колебание системы, видим, что по существу оба колебания протекают совершенно аналогично, за исключением того, что в одном случае угол α нарастает от 0 до α_0 и т. д., в другом — убывает от α_0 до 0 и т. д., что и соответствует начальным условиям.

Принципиальная разница, как уже указывалось выше, здесь заключается в том, что в случае, рассмотренном на стр. 159, возмущающая сила отсутствует, и мы имеем дело со свободным колебанием системы, в данном же случае кроме восстанавливающего момента упругой системы M_0 на прибор действует еще постоянный возмущающий момент M , т. е. мы имеем несвободное колебание.

Так как в рассмотренном примере действует не периодическая, а постоянная возмущающая сила, то мы получили только собственное колебание системы. При воздействии на прибор периодических возмущающих сил кроме собственных колебаний системы будут еще и вынужденные.

При наличии постоянной возмущающей силы разница между свободными и собственными колебаниями только принципиальная, поэтому на дальнейших аналогичных примерах мы останавливаться не будем.

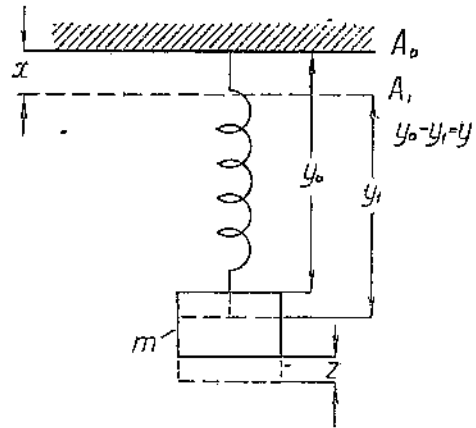
ИЗМЕРЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ КРАТКО-ВРЕМЕННО ПРОТЕКАЮЩИХ ЯВЛЕНИЙ

1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ ЖИДКОСТНОГО И КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ

Рассмотрим в данной главе третий вид измерений, именно таких, когда количественный фактор явления нарастает до некоторой определенной величины и затем спадает до начального значения по какому-то постоянному или меняющемуся закону (фиг. 36, III).

В качестве примера возьмем простейший случай. Предположим, что основание прибора, измеряющего, например, вертикальные ускорения самолета, изменившего вертикальную скорость от нуля до какого-либо определенного значения, за время данного изменения вертикальной скорости переместится из положения A_0 в положение A_1 .

Схема такого прибора показана на фиг. 40. Подвижная часть прибора, имеющая массу m и связанная с основанием A пружиной с упругостью F_0 , переместится при этом в какое-то новое положение (на фиг. 40 показано пунктиром). Обозначим далее



Фиг. 40. Принципиальная схема прибора для замера ускорений.

через x абсолютное перемещение основания A в пространстве, через z — абсолютное смещение массы m и через y — смещение массы m относительно основания A (т. е. изменение прогиба пружины).

Массой пружины пренебрегаем, считая ее малой по сравнению с массой груза. Предположим далее, что прибор не имеет успокоения и все остальные виды трения настолько малы, что ими можно пренебречь.

В таком случае получим следующее уравнение движения:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + F_0 y = 0. \quad (194)$$

Так как

$$z = x + y,$$

то уравнение (194) может быть переписано в следующем виде:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + F_0 y = -m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Разделив обе части уравнения на m , получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{F_0}{m} y = -\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Для простоты предположим, что основание A перемещается в пространстве по синусоидальному закону:

$$x = l \sin(\omega t + \varepsilon),$$

где l — максимальное перемещение (амплитуда),

ω — частота,

ε — начальная фаза.

В таком случае

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -l\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon),$$

и последнее дифференциальное уравнение переписывается в следующем виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = a \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (195)$$

где $k^2 = \frac{F_0}{m}$ и $a = l\omega^2$ (амплитуда ускорения).

Решение этого уравнения без свободного члена будет:

$$y_1 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Частное решение уравнения со свободным членом будет:

$$y_2 = n \sin(\omega t + \varepsilon + \psi).$$

Подставив это решение в уравнение (195), получим:

$$n = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \quad \text{и} \quad \psi = 0.$$

В таком случае общее решение будет:

$$y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{a}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (196)$$

Как видно из уравнения (196), в данном случае имеем два колебания: с собственной частотой k , т. е. с частотой, которую система имела бы, если бы ее вывели из положения равновесия и предоставили самой себе при отсутствии возмущающего явления, и другое — с частотой ω , т. е. с частотой возмущающего явления. Первое колебание будет согласно установленной выше терминологии (см. стр. 160) собственным колебанием системы, второе — вынужденным.

Принципиально, как мы увидим дальше (см. стр. 182), сущность явления не изменится, если начальной фазе придавать различные значения, поэтому для упрощения и большей наглядности будем считать $\varepsilon = 0$.

Определяя произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий при $t = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ и $y = 0$, получим:

$$C_2 = 0$$

и

$$C_1 = -\frac{a}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k}.$$

Окончательное решение получим в следующем виде:

$$y = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right). \quad (197)$$

2. ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ЖИДКОСТНОГО И КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ

Если бы прибор измерял ускорение без искажений, то в каждый данный момент статический прогиб пружины должен был бы оставаться пропорциональным ускорению, т. е.

$$y_{\text{ст}} = \frac{a \sin \omega t}{k^2}.$$

Отсюда видно, что показания прибора в данном случае не всегда будут совпадать с истинными значениями измеряемой величины, причем погрешности выразятся следующей зависимостью:

$$\Delta y = y_{\text{ст}} - y = \frac{a}{k^2} \sin \omega t - \frac{a}{k^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right)$$

или

$$\Delta y = \frac{a}{k^2} \cdot \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} (k \sin kt - \omega \sin \omega t). \quad (198)$$

Эти погрешности вызываются тем, что упругая система прибора, имея массу m , начнет колебаться с большей или меньшей амплитудой в зависимости от отношения $\frac{\omega}{k}$, искажая показания прибора в ту или другую сторону.

Как видно из уравнения (198), при $k > \omega$ знак погрешности будет меняться в основном в зависимости от изменения величины и знака величины $\sin kt$. Но это будет только при $k > \omega$. При $k < \omega$ погрешность за время первой четверти периода возмущающего явления, т. е. до $\omega t = \frac{\pi}{2}$, всегда будет иметь одинаковый знак — положительный, т. е. прибор всегда будет показывать преуменьшенную величину. Это следует из того, что в последнем случае

$$k - \omega < 0$$

и при изменении величины ωt от 0 до $\frac{\pi}{2}$

$$k \sin kt < \omega \sin \omega t$$

(уравнение 198).

За время второй четверти периода возмущающего явления в зависимости от отношения $\frac{k}{\omega}$ наступит момент (и чем меньше отношение $\frac{k}{\omega}$, тем позже), когда $k \sin kt$ сравняется с $\omega \sin \omega t$, т. е. погрешность станет равна нулю, после чего знак погрешности изменится на обратный.

В данном случае мы не останавливаемся на том, как будет себя вести прибор, после того как явление спадет до своего начального

значения или до нуля. Так как прибор не имеет успокоителя и мы пренебрегли трением, то теоретически колебания должны продолжаться бесконечное время с амплитудой, которую приобрела система под влиянием действия возмущающей силы. На самом деле под влиянием трения и сопротивления среды эти колебания (собственные) будут постепенно затухать соответственно с разобранными выше примерами.

Чтобы получить возможность исследовать поведение системы при $k = \omega$, приведенные выше уравнения необходимо преобразовать, так как в противном случае при $k = \omega$ получается неопределенность. Это можно сделать следующим образом. Перепишем уравнение (197) в следующем виде:

$$y = a \frac{\sin \omega t - \sin kt - \frac{\omega}{k} \sin kt + \sin kt}{(k + \omega)(k - \omega)}.$$

Так как

$$\sin \omega t - \sin kt = 2 \cos \frac{\omega + k}{2} t \sin \frac{\omega - k}{2} t,$$

то последнее уравнение можно представить так:

$$y = a \left[\frac{2 \cos \frac{\omega + k}{2} t \sin \frac{\omega - k}{2} t}{(k + \omega)(k - \omega)} + \frac{\left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \sin kt}{(k + \omega)(k - \omega)} \right]$$

или

$$y = a \left[- \frac{t \cos \frac{\omega + k}{2} t \sin \frac{\omega - k}{2} t}{(k + \omega) \frac{\omega - k}{2} t} + \frac{\frac{k - \omega}{k} \sin kt}{(k + \omega)(k - \omega)} \right].$$

Ввиду того что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

т. е. при достаточно малых углах, можно приравнять синус углу, и так как величина $\frac{\omega - k}{2} t$ в данном случае стремится к нулю при приближении значений ω к значению k , то последнее уравнение можно преобразовать так:

$$y = a \left[\frac{\sin kt}{k(k + \omega)} - \frac{t \cos \frac{\omega + k}{2} t}{k + \omega} \right]$$

или при $k = \omega$

$$y = a \left[\frac{\sin \omega t}{2\omega^2} - \frac{t \cos \omega t}{2\omega} \right].$$

Взяв далее $\frac{1}{2\omega^2}$ за скобку, получим:

$$y = \frac{a}{2\omega^2} [\sin \omega t - \omega t \cos \omega t].$$

Так как $\omega^2 = k^2$, то

$$y = \frac{a}{2k^2} [\sin \omega t - \omega t \cos \omega t]. \quad (199)$$

В таком случае для $\omega = k$ уравнение, выражающее погрешность показаний прибора, будет иметь следующий вид:

$$\Delta y = 0,5 \frac{a}{k^2} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t). \quad (200)$$

Кривая, изображающая функцию $y = f(t)$ (уравнение 199), пересечет кривую, изображающую истинное течение явления, $y_{\text{ист}} = f(t)$ при $\Delta y = 0$, т. е. по уравнению (200) при

$$\sin \omega t = -\omega t \cos \omega t,$$

что будет иметь место при

$$\omega t = -\text{tg } \omega t,$$

т. е. при

$$\omega t \approx 0,646\pi.$$

Таким образом при значениях $t < \frac{0,646\pi}{\omega}$ погрешности будут положительные, т. е. показания прибора будут преуменьшенными, при значениях же $t > \frac{0,646\pi}{\omega}$ в течение некоторого промежутка времени погрешности будут отрицательными, т. е. показания прибора будут преувеличенными. Максимумы и минимумы погрешностей будут при

$$\frac{d\Delta y}{dt} = 0.$$

Моменты времени, соответствующие этим значениям погрешностей, получим по уравнению (200) из следующей зависимости:

$$\frac{d(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)}{dt} = 0,$$

т. е. при $\omega t = 2 \text{ ctg } \omega t$.

Другими словами, первый максимум будет при

$$\omega t \approx 0,343\pi;$$

второй максимум — при

$$\omega t > \pi.$$

Однако мы рассматриваем непериодическое явление и при $\omega t > \pi$ возмущающая функция равна нулю. Поэтому, так как по уравнению (199) $\frac{dy}{dt} = 0$ при $\omega t = \pi$, то второй максимум и будет соответствовать этому значению ωt . Следовательно по уравнению (200) получим:

$$\Delta y_{\text{max}} = -\frac{\pi}{2} \frac{a}{k^2}. \quad (201)$$

Вернемся к случаю, когда $k \neq \omega$.

Выразив ω через k и приняв $\omega = nk$ для случая, когда $k \neq \omega$, уравнение (198) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta y = \frac{a}{k^2} \frac{n^2}{1-n^2} \left(\frac{1}{n} \sin kt - \sin nkt \right). \quad (202)$$

С приближением n к единице погрешности возрастают, стремясь к пределу — к значению максимальной погрешности:

$$\Delta y_{\max} = -\frac{\pi}{2} \frac{a}{k^2},$$

т. е. к значению погрешности при $k = \omega$.

При значениях $n \gg 1$ погрешности стремятся в пределе к значению:

$$\Delta y = \frac{a}{k^2}$$

(приблизленно при $\sin nkt = 1$).

Это будет ясно видно, если уравнение (202) переписать в следующем виде:

$$\Delta y = \frac{a}{k^2} \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \left(\sin nkt - \frac{\sin kt}{n} \right). \quad (203)$$

О величинах максимальных погрешностей при различных значениях n можно судить по некоторым значениям, приведенным в табл. 3.

Таблица 3

n	1	0,2	0,1	0,01
$\Delta y / \frac{a}{k^2}$	$\frac{\pi}{2}$	0,242	0,11	0,01

Из табл. 3 видно, что инерционные погрешности прибора искажают запись прибора (для замера быстро протекающих явлений нормально должны применяться самописцы) тем меньше, чем больше отношение собственной частоты прибора к частоте возмущающего явления.

Для полноты картины посмотрим, как отразится на рассмотренных выше погрешностях тот факт, что $\varepsilon \neq 0$. При $\varepsilon \neq 0$ и при тех же начальных условиях, что приведены выше, имеем:

$$C_1 = -\frac{\omega}{k} \frac{a}{k^2 - \omega^2} \cos \varepsilon$$

и

$$C_2 = -\frac{a}{k^2 - \omega^2} \sin \varepsilon.$$

Окончательное решение будем иметь в следующем виде:

$$y = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2} \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon} \sin(kt + \delta) \right], \quad (204)$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{k}{\omega} \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Поступая, как и выше, уравнение для погрешности Δy в данном случае можно написать так:

$$\Delta y = \frac{a'}{k^2} \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} \left[k \sqrt{\cos^2 \varepsilon + \frac{k^2}{\omega^2} \sin^2 \varepsilon} \sin(kt + \delta) - \omega \sin(\omega t + \varepsilon) \right]. \quad (205)$$

Из сравнения уравнения (205) с уравнением (198) видно, что принципиально оба уравнения сходны, за исключением некоторой количественной разницы, которая, правда, при известных условиях, может быть довольно значительной.

Так как случай, когда $\varepsilon = 0$, а также случай, соответствующий приведенным выше начальным условиям (до начала опыта прибор находился в покое), являются наиболее показательными, то мы этим и ограничимся.

Из изложенного видно, что при измерениях количественных факторов быстро протекающих явлений появляется совершенно новый вид погрешностей, отсутствующих при статических измерениях — инерционных. Особенность этих погрешностей заключается в том, что снижение их в основном зависит от отношения периода собственных колебаний (собственного периода) прибора к скорости нарастания и спадания измеряемого явления.

Выражая закон нарастания и спадания измеряемого явления синусоидальной функцией, в данной главе мы не имеем в виду периодической функции и считаем, что время протекания измеряемого явления ограничивается полупериодом. Кроме того, на практике, если нарастание и начало спадания явления и следует синусоидальному закону, то дальнейшее спадание обыкновенно происходит уже по другому закону. При приближении к нулевому значению спадание явления обыкновенно замедляется. Пренебрежение этим фактором по существу отразится только на абсолютных значениях погрешности и в большинстве случаев, имеющих практическое значение, незначительно (более значительно только при значениях ω , близких к значениям k^1) и не изменит сущности дела. Поэтому мы ограничимся только

¹ Так, при $\omega = k$ и при том допущении относительно формы возмущающего явления, которое нами сделано (фиг. 41), максимальное отклонение подвижной системы прибора будет примерно следующим:

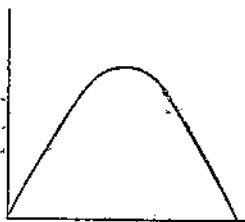
$$y_{\max} \approx 1,57 \frac{a}{k^2}.$$

Если же взять другой крайний случай для $\omega = k$, а именно, что явлениеросло по тому же синусоидальному закону до некоторой величины и затем осталось неизменным (фиг. 42), то максимальное отклонение подвижной системы прибора будет примерно следующим:

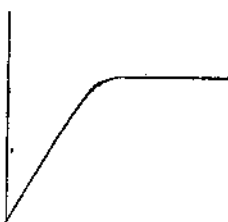
$$y_{\max} \approx 1,93 \frac{a}{k^2}.$$

В пределе в идеальном случае, т. е. если бы всякое сопротивление от трения отсутствовало и возмущающее явлениеросло мгновенно до некоторой величины,

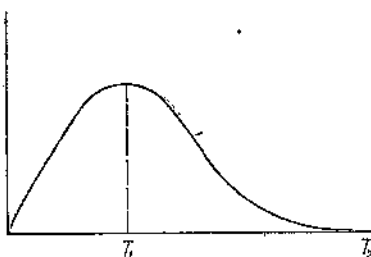
тем, что приведем графики (фиг. 44—49), показывающие, как накладываются собственные колебания подвижной системы прибора на кривую, изображающую течение измеряемого явления с учетом указанного выше фактора. Эти графики взяты из книги акад. Крылова



Фиг. 41. Кривая, характеризующая течение явления соответственно одному крайнему случаю максимальной погрешности.



Фиг. 42. Кривая, характеризующая течение явления, соответственно другому крайнему случаю максимальной погрешности.



Фиг. 43. Кривая, характеризующая обычное течение явления.

«О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах». Возмущающая функция акад. Крыловым взята следующего вида (фиг. 43):

$$f(t) = a \sin \omega t = a \sin \frac{\pi t}{2T_1}$$

для $0 < t < T_1$ и

$$f(t) = ae^{-\frac{h(t-T_1)}{T_2}} \left[1 + \frac{h(t-T_1)}{T_2} \right]$$

для $t > T_1$.

Мы сейчас не будем останавливаться на том, что, начиная с соответствующих отношений собственных частот прибора к частотам возмущающего явления, погрешности от наложения собственных колебаний прибора на запись измеряемого явления могут быть в известных пределах снижены путем соответствующей обработки резуль-

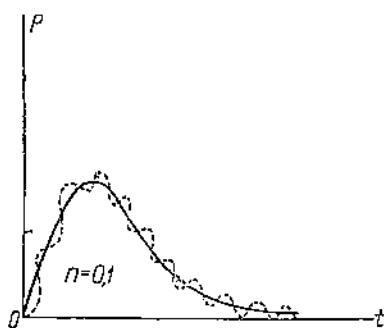
а затем осталось бы неизменным, то максимальное отклонение подвижной системы прибора было бы:

$$y_{\max} = 2 \frac{a}{k^2}.$$

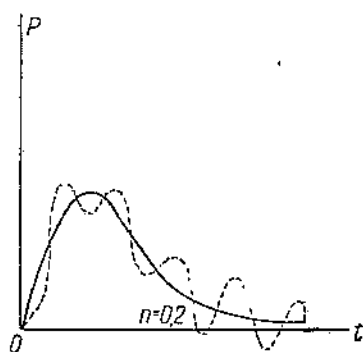
Таким образом мы видим, что даже в худшем случае, т. е. при $k = \omega$, погрешности лежат в пределах

$$\Delta a \approx 1,57 \frac{a}{k^2} \quad \text{и} \quad \Delta a = \frac{a}{k^2},$$

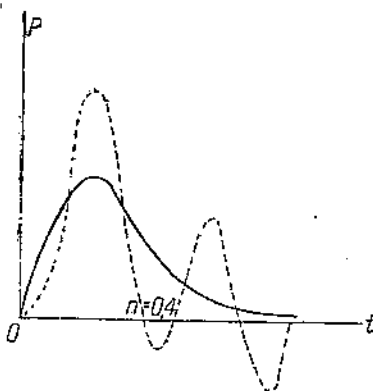
причем случай, соответствующий нашему допущению, является наилучшим.



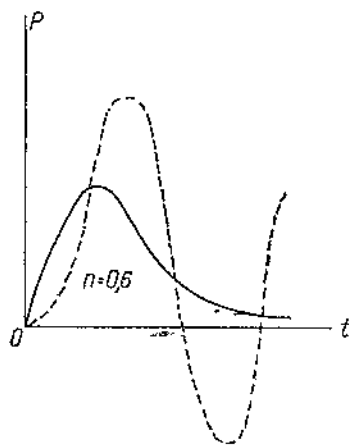
Фиг. 44.



Фиг. 45.

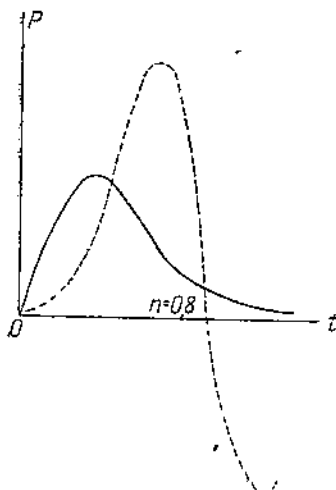


Фиг. 46.

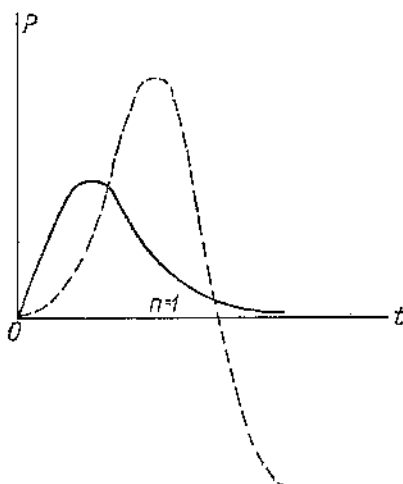


Фиг. 47.

татов записи прибора — проведением средней линии, и перейдем к рассмотрению влияния на работу прибора трения, пропорционального первой степени скорости (жидкостного трения).



Фиг. 48.



Фиг. 49.

3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

В этом случае к схеме на фиг. 40 добавится успокоитель D , как это показано на фиг. 50.

Предположим, что указанный на фиг. 50 успокоитель D при перемещении массы m относительно основания A создает трение, пропорциональное первой степени скорости.

В таком случае соответственно новой схеме к уравнению движения (195) добавится еще один член, зависящий от первой степени скорости относительного перемещения массы m , и уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2y = a \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (206)$$

где

$$2h = \frac{N'_0}{m}.$$

Через $N'_0 = \frac{N_0}{l^2}$ (см. уравнение 157) обозначена сила сопротивления, отнесенная к единице относительной скорости (размерность $^1 N'_0$ в $\frac{2}{сек}$).

Решение уравнения (206) без свободного члена для $h < k$ будет:

$$y_1 = Ce^{-ht} \sin(pt + \gamma), \quad (207)$$

где C и γ — постоянные интегрирования.

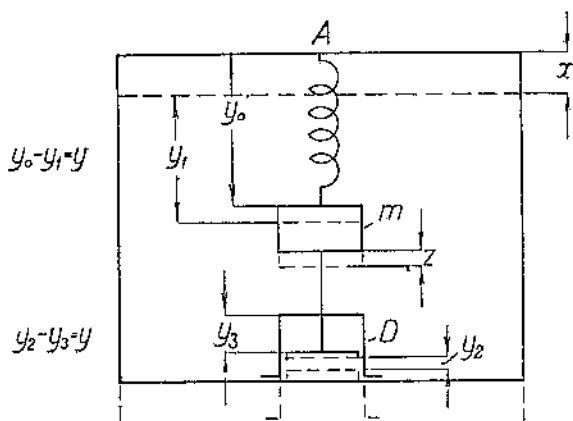
¹ В системе CGS.

Для $h = k$ то же решение получим в таком виде:

$$y_1 = e^{-ht} (C_1 + C_2 t), \quad (208)$$

где C_1 и C_2 — также постоянные интегрирования.

Частное решение уравнения со свободным членом будем искать



Фиг. 50. Принципиальная схема прибора при наличии жидкостного трения.

в следующем виде:

$$y = A \sin(\omega t + \varepsilon + \psi). \quad (209)$$

Тогда получим:

$$A = \frac{a}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \quad (210)$$

$$\cos \psi = \frac{k^2 - \omega^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \quad (211)$$

$$\sin \psi = -\frac{2h\omega}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}, \quad (212)$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{2h\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (213)$$

Выражение для величины A перепишем так:

$$A = \frac{a}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}}, \quad (214)$$

где $b = \frac{h}{k}$ является степенью успокоения.

В конечном результате получим следующие общие решения:

$$y = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) + \frac{a}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi) \quad (215)$$

для $h < k$ и

$$y = e^{-ht}(C_1 + C_2 t) + \frac{a}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi) \quad (216)$$

для $h = k$.

4. ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Истинную неискаженную запись мы должны были бы получить по такой зависимости:

$$y_{\text{ст}} = \frac{a}{k^2} \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (217)$$

но запись искажают три фактора.

1. Затухающие собственные колебания системы при $h < k$

$$y_1 = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) \quad (207)$$

или при $h = k$ — добавочный член:

$$y_1 = e^{-ht}(C_1 + C_2 t), \quad (208)$$

определяющий аperiodическое движение системы к положению равновесия.

2. Множитель $\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}}$, называемый коэффициентом ди-

намической восприимчивости и обозначаемый обыкновенно буквой λ :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \quad (218)$$

Этот множитель зависит от отношения частоты вынужденного колебания (т. е. частоты возмущающего явления) к собственной частоте прибора и от степени успокоения. Так как он стоит при величине $\frac{a}{k^2} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi)$, определяющей при $\psi = 0$ статическое отклонение системы, то по существу он определяет, во сколько раз инерционные факторы исказят статическое отклонение системы по амплитуде.

3. Добавочный угол ψ , входящий под знак синуса и называемый сдвигом фаз. Так как уравнение (213) можно представить так:

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}, \quad (219)$$

то и это искажение зависит от отношения частот $\frac{\omega}{k}$ (вынужденной к собственной) и от степени успокоения b .

Угол ψ в основном определяет искажение статического отклонения системы по времени.

Вытя из уравнения, определяющего, каково должно было бы быть истинное неискаженное отклонение подвижной части прибора, уравнение, определяющее фактическое ее отклонение, получим общую погрешность:

$$\Delta y = y_{\text{ст}} - y = \frac{a}{k^2} \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{k^2}{a} C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) - \lambda \sin(\omega t + \varepsilon + \psi) \right] \quad (220)$$

для $h < k$ и

$$\Delta y = y_{\text{ст}} - y = \frac{a}{k^2} \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{k^2}{a} e^{-ht} (C_1 + C_2 t) - \lambda \sin(\omega t + \varepsilon + \psi) \right] \quad (221)$$

для $h = k$.

Как мы увидим в дальнейшем, для получения полной картины влияния жидкостного трения на работу прибора вполне достаточно провести исследование уравнения (220) (когда $h < k$).

Преобразовав это уравнение и заменив ψ его значением, получим абсолютную инерционную погрешность в виде суммы двух погрешностей:

$$\begin{aligned} \Delta_1 y + \Delta_2 y = & \frac{a}{k^2} \left\{ \left[\left(\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right) \sin(\omega t + \varepsilon) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2b \frac{\omega}{k} \cos(\omega t + \varepsilon) \right] - \frac{k^2}{a} C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (222)$$

Разделив обе части уравнения (222) на отношение $\frac{a}{k^2}$, получим уравнение для приведенной инерционной погрешности, выраженной в общем виде, которое разобьем на два:

$$\delta_1 = \lambda^2 \left\{ \left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right] \sin(\omega t + \varepsilon) + 2b \frac{\omega}{k} \cos(\omega t + \varepsilon) \right\}, \quad (223)$$

т. е. получим уравнение, определяющее приведенную инерционную погрешность от динамического увеличения и сдвига фаз, и

$$\delta_2 = -\frac{k^2}{a} C e^{-ht} \sin(pt + \gamma), \quad (224)$$

которое определяет в общем виде приведенную инерционную погрешность от собственных колебаний подвижной части прибора.

Прежде чем продолжать дальнейшее исследование, определим постоянные интегрирования, входящие в погрешность от собственных колебаний подвижной части прибора по следующим начальным условиям, нормально наиболее отвечающим условиям измерения: при $t = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ и $y = 0$. (Все последующие выводы предполагают именно такое начальное состояние подвижной системы прибора, т. е. состояние покоя в нулевом положении).

В этом случае будем иметь:

$$C = -\frac{a}{k^2} \lambda \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{k^2} + b^2}{1 - b^2} \sin^2(\varepsilon + \psi + \delta) + \sin^2(\varepsilon + \psi)}, \quad (225)$$

$$\gamma = \arctg \frac{\sin(\varepsilon + \psi)}{\sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{k^2} + b^2}{1 - b^2} \sin(\varepsilon + \psi + \delta)}}, \quad (226)$$

где

$$\psi = -\arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}$$

и

$$\delta = \arctg \frac{\omega}{kb}.$$

Таким образом, будем иметь:

$$\delta_2 = e^{-ht} \lambda \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{k^2} + b^2}{1 - b^2}} \sin^2(\varepsilon + \psi + \delta) + \sin^2(\varepsilon + \psi) \sin(pt + \gamma). \quad (227)$$

Взяв за знак радикала величину $\sin(\varepsilon + \psi)$, получим:

$$\delta_2 = e^{-ht} \lambda \frac{\sin(\varepsilon + \psi)}{\sin \gamma} \sin(pt + \gamma). \quad (228)$$

Если затем приравнять

$$pt + \gamma = \gamma_1,$$

то будем иметь:

$$t = \frac{\gamma_1 - \gamma}{p} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{k \sqrt{1 - b^2}},$$

и уравнение для δ_2 примет следующий вид:

$$\delta_2 = e^{-\frac{b(\gamma_1 - \gamma)}{\sqrt{1 - b^2}}} \lambda \frac{\sin(\varepsilon + \psi)}{\sin \gamma} \sin \gamma_1. \quad (229)$$

Уравнение (223) для приведенной погрешности от динамического увеличения и сдвига фаз можно преобразовать следующим образом:

$$\delta_1 = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2 \sin(\omega t + \varepsilon + \varphi)}, \quad (230)$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{2b}{\frac{\omega^2}{k^2} + \frac{\omega}{k} (4b^2 - 1)}. \quad (231)$$

5. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ k И b НА ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ И УСЛОВИЯ ДЛЯ НАИБОЛЬШЕГО СНИЖЕНИЯ ЭТИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Полученные уравнения для δ_1 и δ_2 не дают возможности достаточно наглядно судить о том, как влияют параметры k и b на суммарную инерционную погрешность. Поэтому обратимся к графическому методу исследования этих погрешностей путем построения ряда кривых по какому-либо из параметров. Наибольшая наглядность получается при построении ряда кривых, дающих зависимость абсолютных значений этих погрешностей от параметра b для различных отношений частот $\frac{\omega}{k}$. Наибольший интерес представляют всегда предельные погрешности, поэтому построим кривые для максимальных абсолютных значений δ_1 и δ_2 .

Максимальные абсолютные значения погрешности δ_1 будут при

$$\sin(\omega t + \varepsilon + \varphi) = 1,$$

когда

$$\delta_1 = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2}. \quad (232)$$

Что касается погрешности δ_2 , то, решая задачу на максимум и минимум, получим максимальное значение δ_2 при

$$\gamma_1 = \arctg \frac{\sqrt{1-b^2}}{b}$$

или при

$$t = \frac{\arctg \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} - \gamma}{k \sqrt{1-b^2}}. \quad (233)$$

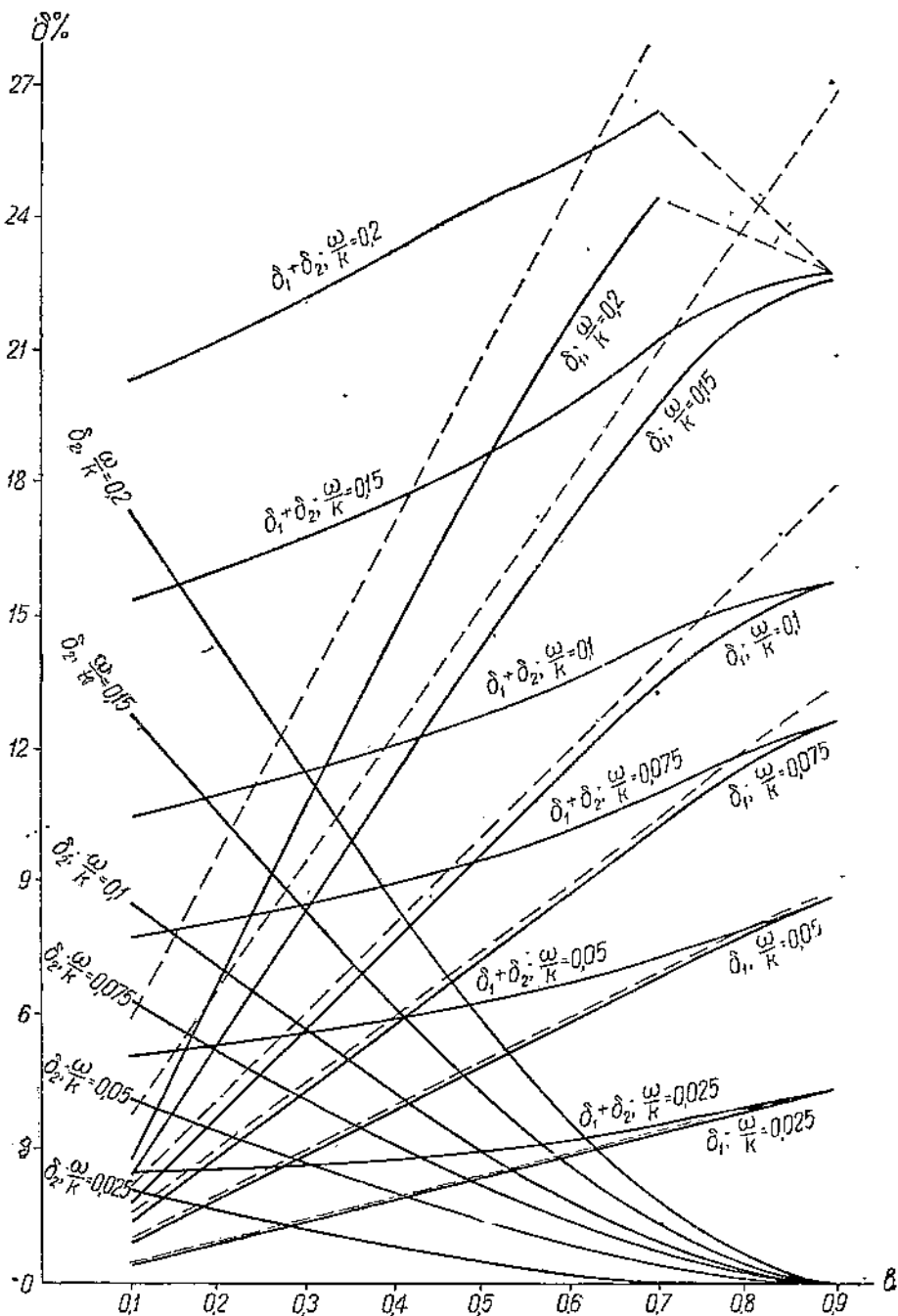
На фиг. 51 сплошные кривые дают зависимость максимальных абсолютных значений погрешностей δ_2 от параметра b для его значений от 0,1 до 0,9, для отношения частот $\frac{\omega}{k}$ 0,2; 0,1; 0,075; 0,05 и 0,025 и для $\varepsilon = 0$; пунктирные кривые дают зависимость максимальных абсолютных значений погрешности δ_1 от того же параметра b для тех же его значений и для тех же значений отношения частот $\frac{\omega}{k}$.

Как видно из графика, увеличение параметра b снижает погрешности δ_2 , т. е. погрешности от собственных колебаний, и увеличивает погрешности δ_1 , т. е. погрешности от динамического увеличения и сдвига фаз. Чтобы судить о том, какое влияние этот параметр оказывает на суммарную инерционную погрешность, необходимо построить кривые $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$.

Максимальные значения погрешностей δ_1 и δ_2 не совпадают по времени, поэтому, для того чтобы их сложить, необходимо значение одной из погрешностей пересчитать для времени, при котором вторая достигает максимума. Так как погрешность δ_1 от динамического увеличения и сдвига фаз менее быстро меняется по времени, то целесообразно пересчитать значение именно этой погрешности для такого значения времени t , при котором погрешность δ_2 , т. е. погрешность от собственных колебаний, достигает максимума.

Сплошные кривые на том же графике дают значения погрешности δ_1 для значений t , при которых δ_2 достигает максимума. Складывая теперь ординаты сплошных кривых $\delta_1 = f(b)$ с ординатами кривых $\delta_2 = f(b)$, получим кривые $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$, дающие зависимость суммарной инерционной погрешности от параметра b для различных значений отношения частот $\frac{\omega}{k}$.

В приведенных графиках даны кривые погрешностей для отношения частот $\frac{\omega}{k}$ от 0,2 до 0,025, так как этот диапазон частот является



Фиг. 51. Кривые погрешностей $\delta_1 = f(b)$, $\delta_2 = f(b)$, $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$ для различных отношений частот возмущающей к собственной.

Таблица 4 (к фиг. 51)

$\frac{\omega}{k} = 0,2$					$\frac{\omega}{k} = 0,15$			
b	$\delta_{1\max}$	$\delta_{1\tau}$	$\delta_{2\max}$	$\delta_1 + \delta_2$	$\delta_{1\max}$	$\delta_{1\tau}$	$\delta_{2\max}$	$\delta_1 + \delta_2$
0,1	0,059	0,028	0,176	0,204	0,038	0,025	0,129	0,158
0,3	0,132	0,108	0,114	0,222	0,094	0,085	0,083	0,168
0,5	0,208	0,184	0,060	0,244	0,153	0,144	0,044	0,188
0,7	0,283	0,244	0,019	0,263	0,211	0,197	0,015	0,212
0,9	0,352	0,228	0,001	0,229	0,267	0,226	0,001	0,227

$\frac{\omega}{k} = 0,1$					$\frac{\omega}{k} = 0,075$			
b	$\delta_{1\max}$	$\delta_{1\tau}$	$\delta_{2\max}$	$\delta_1 + \delta_2$	$\delta_{1\max}$	$\delta_{1\tau}$	$\delta_{2\max}$	$\delta_1 + \delta_2$
0,1	0,023	0,018	0,087	0,105	0,016	0,014	0,064	0,078
0,3	0,061	0,058	0,058	0,116	0,046	0,045	0,042	0,087
0,5	0,101	0,098	0,030	0,128	0,075	0,074	0,023	0,097
0,7	0,141	0,136	0,010	0,146	0,105	0,103	0,008	0,111
0,9	0,179	0,158	0,000	0,158	0,135	0,127	0,000	0,127

$\frac{\omega}{k} = 0,05$					$\frac{\omega}{k} = 0,025$			
b	$\delta_{1\max}$	$\delta_{1\tau}$	$\delta_{2\max}$	$\delta_1 + \delta_2$	$\delta_{1\max}$	$\delta_{1\tau}$	$\delta_{2\max}$	$\delta_1 + \delta_2$
0,1	0,010	0,0098	0,043	0,053	0,005	0,005	0,021	0,026
0,3	0,030	0,0297	0,028	0,058	0,015	0,015	0,014	0,029
0,5	0,050	0,0497	0,015	0,065	0,025	0,025	0,007	0,032
0,7	0,070	0,0695	0,005	0,075	0,035	0,035	0,003	0,038
0,9	0,090	0,0874	0,000	0,090	0,045	0,045	0,000	0,045

$$\delta_{1\max} = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2};$$

$$\delta_{1\tau} = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2} \sin(\omega\tau + \varphi);$$

$$\delta_{2\max} = e^{-h\tau} \frac{\omega}{B};$$

$$\tau = \frac{1}{p} \left[\pi - \arctg \frac{p \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right)}{bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} \right)} \right];$$

$$B = \sqrt{\left[bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} \right) \right]^2 + \left[p \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \right]^2};$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{2b}{\frac{\omega^3}{k^3} + \frac{\omega}{k} (4b^2 - 1)}.$$

наиболее интересным для теории погрешностей измерений количественных факторов кратковременно протекающих явлений. При дальнейшем приближении отношения частот $\frac{\omega}{k}$ к единице инерционные погрешности слишком сильно возрастают, при значениях же отношения частот меньше 0,025 инерционные погрешности убывают по зависимости, достаточно очевидной из приведенных графиков.

Для большего уяснения физической сущности приведенных графиков необходимо указать, что разделение инерционной погрешности на две категории погрешностей — на погрешность от динамического увеличения и сдвига фаз δ_1 и на погрешность от собственных колебаний δ_2 — может показаться несколько условным. На самом деле, в любой момент времени всегда имеется только одна инерционная погрешность, получающаяся в результате сложения вынужденного и собственного колебаний системы, математически изображающих в нашем случае движение системы двумя тригонометрическими функциями с различными параметрами.

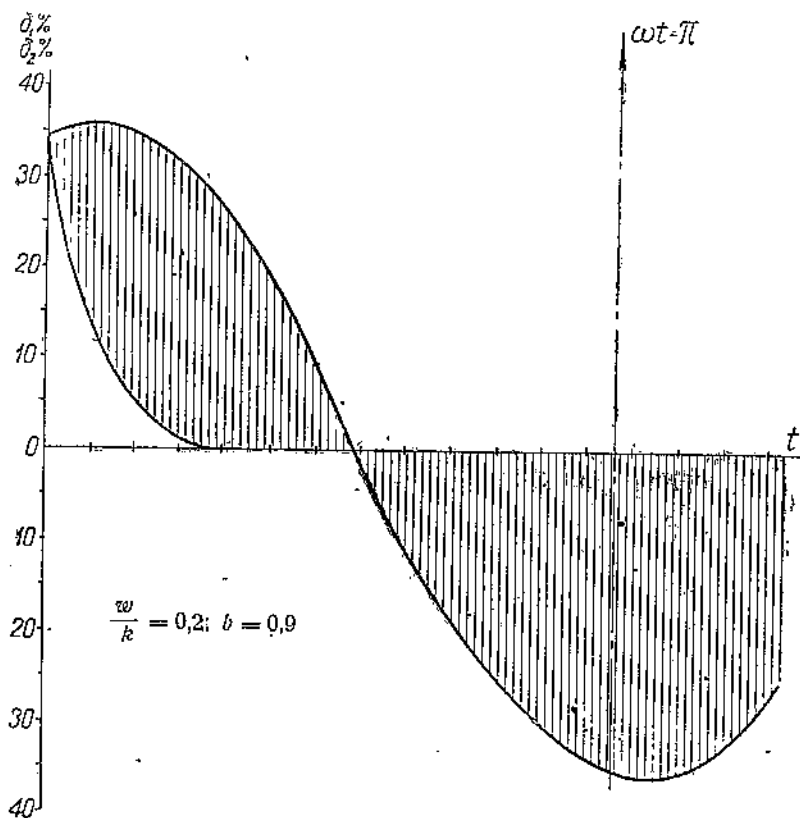
Однако, подобно тому, как были разбиты инструментальные погрешности в зависимости от их природы (на температурные погрешности, погрешности трения и т. д.), так и инерционные погрешности можно разделить на погрешности от сдвига фаз и динамического увеличения и от собственных колебаний, так как природа этих явлений различна.

На фиг. 52 и 53 нанесены кривые тригонометрических функций погрешностей от динамического увеличения и сдвига фаз δ_1 и от собственных колебаний δ_2 по параметру t для отношения частот $\frac{\omega}{k} = 0,2$ и для двух значений степени успокоения $b = 0,9$ и $b = 0,1$ для $\varepsilon = 0$. Для большей наглядности положительные погрешности δ_1 от динамического увеличения и сдвига фаз расположены кверху, а отрицательные — книзу от нулевой линии погрешностей; положительные погрешности δ_2 от собственных колебаний расположены, наоборот, книзу от нулевой линии, а отрицательные — кверху. Фактические значения полной инерционной погрешности для каждого данного момента времени выражаются отрезками ординат, заключенными между этими кривыми (заштрихованная область).

График фиг. 51 дает зависимость не только суммарной инерционной погрешности $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$ от указанного выше параметра, но и отдельных слагаемых: $\delta_1 = f(b)$ и $\delta_2 = f(b)$ суммарной погрешности, по природе своей значительно отличающихся друг от друга. Наличие в этом графике кривых $\delta_1 = f(b)$ и $\delta_2 = f(b)$ дает возможность более отчетливо представить физическую сущность явлений, возникающих при введении в прибор успокаивающих приспособлений, создающих жидкостное трение.

Из этих кривых ясно видно, что, успокаивая собственные колебания прибора, мы не снижаем суммарную инерционную погрешность, а наоборот, увеличиваем ее, переводя один вид погрешности в другой. Успокоение отнюдь не является средством для снижения инерционных погрешностей прибора. Единственным рациональным средством

для снижения этих погрешностей является увеличение собственной частоты прибора k или, другими словами, уменьшение отношения частот $\frac{\omega}{k}$.



Фиг. 52. Кривые, характеризующие сложение погрешностей от собственных колебаний и от динамического увеличения и сдвига фаз для $\frac{\omega}{k} = 0,2$ и для $b = 0,9$.

Таблица 5 (к Фиг. 52)

pt	δ_2	pt	δ_2	ωt	δ_1	ωt	δ_1
0	0,341	1,401	0,001	0	0,341	2,600	0,249
0,321	0,106	1,762	0,000	0,245	0,352	3,385	0,352
0,681	0,015	2,123	0,000	1,030	0,249	4,170	0,341
1,041	0,001	2,483	0,000	1,815	0		
1,248	0						

$$\delta_2 = c - \frac{b(\gamma_2 - \gamma)}{\sqrt{1 - b^2}} \lambda \frac{\sin \psi}{\sin \gamma} \sin \gamma_2; \quad \frac{\omega}{k} = 0,2; \quad b = 0,9.$$

$$\delta_d = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2}(4b^2 - 1)\right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k}\right)^2} \sin(\omega t + \varphi);$$

$$\gamma_1 = pt + \gamma;$$

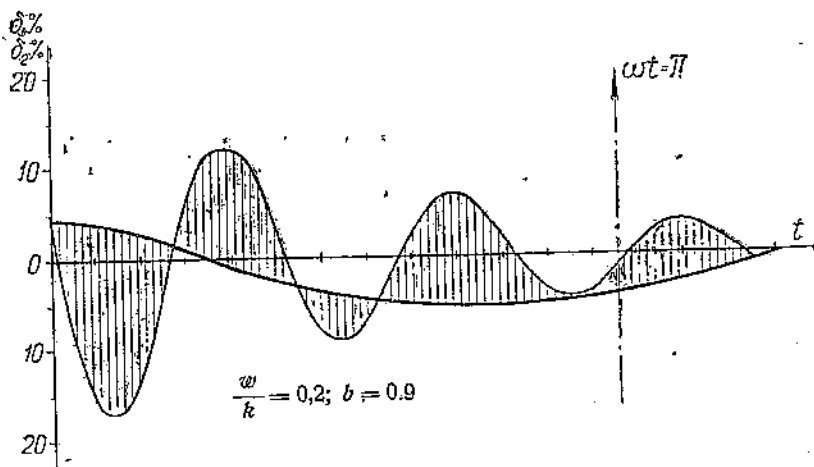
$$\gamma = \arctg \frac{\sin \phi}{\sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{k^2} + b^2}{1 - b^2} \sin(\phi + \delta)}};$$

$$\delta = \arctg \frac{\omega}{kb};$$

$$\phi = -\arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}};$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{2b}{\frac{\omega^2}{k^2} + \frac{\omega}{k}(4b^2 - 1)}.$$



Фиг. 53. Кривые, характеризующие сложение погрешностей от собственных колебаний и от динамического увеличения и сдвига фаз для $\frac{\omega}{k} = 0,2$ и для $b = 0,1$.

Таблица 6 (к фиг. 53)

pt	δ_2	pt	δ_2	pt	δ_2	pt	δ_2	ωt	δ_1	ωt	δ_1
0	0,043	0,984	0,127	2,083	0,02	3,183	0	0	0,043	3,183	0,042
0,042	0	1,141	0,083	2,240	0,067	3,340	0,028	0,827	0	3,969	0
0,199	0,134	1,298	0	2,397	0,044	3,497	0,037	1,612	0,042		
0,356	0,175	1,455	0,071	2,554	0	3,654	0,024	2,398	0,059		
0,513	0,015	1,612	0,093	2,711	0,038	3,812	0				
0,670	0	1,769	0,061	2,868	0,050						
0,827	0,098	1,926	0	3,025	0,033						

$$\delta_2 = e^{-\frac{b(\gamma_1 - \gamma)}{\sqrt{1-b^2}}} \lambda \frac{\sin \psi}{\sin \gamma} \sin \gamma_1; \quad \frac{\omega}{k} = 0,2; \quad b = 0,1.$$

$$\delta_1 = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + 2b \frac{\omega}{k}} \sin(\omega t + \varphi).$$

$$\gamma_1 = pt + \gamma;$$

$$\gamma = \arctg \frac{\sin \psi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2} + b^2}};$$

$$\sqrt{\frac{1 - b^2 \sin(\psi + \delta)}{1 - b^2}}$$

$$\delta = \arctg \frac{\omega}{kb};$$

$$\psi = -\arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}};$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}};$$

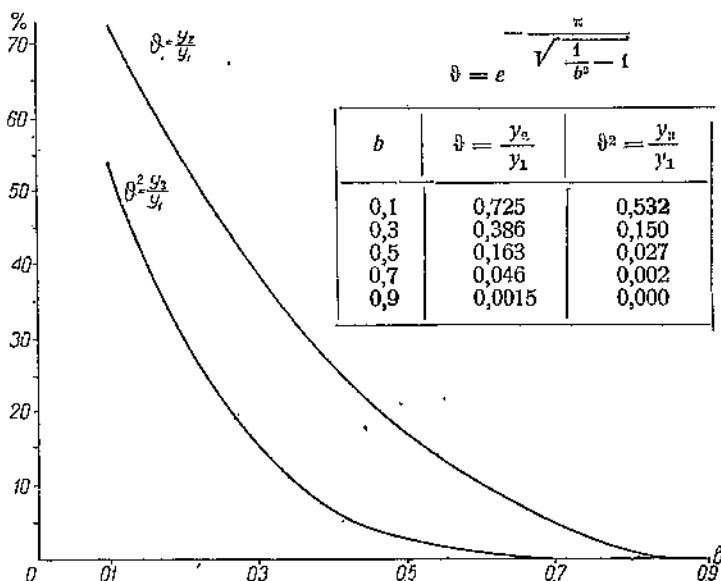
$$\varphi = \arctg \frac{2b}{\frac{\omega^3}{k^3} + \frac{\omega}{k} (4b^2 - 1)}.$$

Однако полный отказ от успокоения собственных колебаний прибора также не всегда является вполне рациональным. Не говоря уже о том, что в некоторых случаях, например при воздействии на прибор вибраций (см. стр. 211), большее или меньшее успокоение является со-

вершено необходимым, но даже и с точки зрения скорейшего погашения собственных колебаний прибора успокаивающие приспособления с незначительной степенью успокоения безусловно могут оказаться рациональными.

Такие приспособления, сравнительно мало увеличивая суммарную инерционную погрешность, все же заставляют с большей или меньшей скоростью убывать со временем амплитуду собственных колебаний подвижной системы прибора, а следовательно, и суммарную инерционную погрешность (фиг. 53).

Таблица 7 (к фиг. 54) .



Фиг. 54. Кривые, характеризующие уменьшение второй и третьей полуамплитуд собственных колебаний в зависимости от параметра b .

Табл. 7 и фиг. 54 показывают, как снижаются вторая и третья амплитуды собственных колебаний прибора в зависимости от величины степени успокоения b . Из фиг. 54 видно, что уже при величине степени успокоения $b = 0,3$ амплитуда третьего полуколебания прибора составляет всего 15% от амплитуды первого полуколебания, которая и является максимальной погрешностью δ_2 от собственных колебаний, показанной на фиг. 51 в виде кривых $\delta_2 = f(b)$.

В большинстве случаев нас интересуют погрешности на всем диапазоне данного измерения. Поэтому здесь даны графики максимальных погрешностей. Однако могут быть и такие случаи, когда будут представлять интерес погрешности, соответствующие только данному участку измерения. В таких случаях необходимо с помощью приведенных выше уравнений и построив графики, как на фиг. 52 и 53,

проверить действительное значение инерционных погрешностей в области, представляющей интерес, предварительно подобрав приближенное значение параметров k и b по фиг. 51 и 54.

Кривые $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$ на фиг. 51 не всегда достаточно точно соответствуют действительным значениям максимальной инерционной погрешности. Это следует как из фиг. 51, так и из фиг. 52, где видно, что при больших степенях успокоения (от $b = 0,7$ до $b = 0,9$) суммарная погрешность $\delta_1 + \delta_2$ оказывается меньше максимальной δ_1 от сдвига фаз и динамического увеличения. Это получается в связи с тем, что величина погрешности δ_1 от сдвига фаз и динамического увеличения, по времени соответствующая значению максимальной погрешности δ_2 от собственных колебаний, значительно отличается в этих случаях от своего значения, соответствующего максимуму.

Таким образом на участках кривых фиг. 51 после пересечения кривых $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$ с пунктирными $\delta_1 = f(b)$ действительное значение максимальной суммарной инерционной погрешности будет приближенно соответствовать значениям максимальной погрешности δ_1 , нанесенным на фиг. 51 пунктирными кривыми. При степенях успокоения примерно от $b = 0,7$ и ниже, особенно при отношениях частот $\frac{\omega}{k} < 0,1$, максимальные значения погрешностей δ_1 от сдвига фаз и динамического увеличения (пунктирные кривые) настолько мало отличаются от значений этих погрешностей, соответствующих максимальным значениям погрешности δ_2 от собственных колебаний (сплошные кривые на фиг. 51), что кривые суммарных погрешностей $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$ можно считать достаточно точно соответствующими максимуму суммарной инерционной погрешности. В областях, близких к пересечению кривых $\delta_1 + \delta_2 = f(b)$ с пунктирными $\delta_1 = f(b)$, значение суммарных погрешностей $\delta_1 + \delta_2$ будет несколько меньше максимальных, но это отличие незначительно.

Для больших значений степени успокоения b , близких к 0,9, максимальная погрешность δ_1 от сдвига фаз и динамического увеличения соответствует значениям $\omega t > \pi$ (фиг. 52), другими словами, погрешность достигает своего максимума уже после того, как заемая величина снизилась до нуля, но, как видно из фиг. 52, величина погрешности δ_1 , соответствующая значению $\omega t = \pi$, весьма мало отличается от ее максимума.

Из полученных уравнений для погрешности δ_1 и максимума погрешности δ_2 не ясно, действительно ли эти погрешности во всех случаях будут с одинаковыми знаками, т. е. действительно ли полученный максимум для погрешности δ_2 всегда сложится со значением погрешности δ_1 , соответствующим этому максимуму.

Ниже из уравнения (235) и далее увидим, что максимум погрешности δ_2 получается при $\frac{T_{\text{соб}}}{4} \leq \tau \leq \frac{T_{\text{соб}}}{2}$. Что же касается погрешности δ_1 , то даже при самых малых значениях степени успокоения b всегда $\varphi < \pi$ (уравнение 231). Поэтому при $\varepsilon = 0$ она вначале всегда положительна и остается положительной до тех пор, пока

$$\omega t + \varphi \leq \pi.$$

При

$$\omega t + \varphi = \pi$$

имеем:

$$t = \frac{\pi - \varphi}{\omega}.$$

Обозначив $\frac{\omega}{k} = n$, получим:

$$\omega = kn = \frac{pn}{\sqrt{1-b^2}}.$$

Таким образом при $\omega t + \varphi = \pi$

$$t = \frac{(\pi - \varphi) \sqrt{1-b^2}}{pn}$$

или

$$t = \frac{T_{\text{свб}}}{2} \frac{(\pi - \varphi) \sqrt{1-b^2}}{\pi n}.$$

При $b = 0,9$ и $n = 0,2$, $\varphi = 75^\circ 47'$, т. е.

$$\frac{(\pi - \varphi) \sqrt{1-b^2}}{\pi n} > 1.$$

С уменьшением отношения частот $\frac{\omega}{k} = n$ угол φ при значениях $b > 0,5$ растет, приближаясь к значению $\frac{\pi}{2}$, при значениях же $b < 0,5$ уменьшается, приближаясь опять-таки к значению $\frac{\pi}{2}$, в то время как знаменатель отношения $\frac{(\pi - \varphi) \sqrt{1-b^2}}{\pi n}$ с уменьшением n быстро уменьшается. Следовательно, этот фактор увеличивает отношение $\frac{(\pi - \varphi) \sqrt{1-b^2}}{\pi n}$.

При уменьшении степени успокоения b до 0,1 при $\frac{\omega}{k} = 0,2$ угол $\varphi \approx 132^\circ 37'$, т. е. и в этом случае отношение $\frac{(\pi - \varphi) \sqrt{1-b^2}}{\pi n} > 1$. Таким образом при уменьшении степени успокоения b до 0,1 и даже ниже, т. е. в пределах интересующего нас диапазона, при отношении частот $\frac{\omega}{k} = n \leq 0,2$,

$$t > \frac{T_{\text{свб}}}{2},$$

т. е. погрешности δ_1 безусловно становятся отрицательными только после того, как δ_2 достигнет максимума.

Что же касается погрешности δ_2 , то, если принять $\varepsilon = 0$, после соответствующих преобразований уравнение (228), выражающее эту погрешность, будет иметь следующий вид:

$$\delta_2 = e^{-ht} \lambda^2 \left[\frac{\omega}{p} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \sin pt - 2b \frac{\omega}{k} \cos pt \right], \quad (234)$$

и условие для максимума (уравнение 233) выразится так:

$$t\delta_{2\max} = \tau = \frac{1}{p} \arctg \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)}{bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right)}. \quad (235)$$

Обозначим

$$\sqrt{\left[bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right)\right]^2 + \left[p \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)\right]^2} = B.$$

Первый максимум или минимум будет в интервале между $t = 0$ и $p\tau = \pi$. Поэтому на основании уравнения (235) для первого максимума получим:

$$\sin p\tau = \frac{p \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)}{B}$$

и

$$\cos p\tau = \frac{bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right)}{B},$$

где B — положительная величина.

Из этих выражений для $\sin p\tau$ и $\cos p\tau$ видим, что первый максимум δ_2 будет при

$$\frac{\pi}{2} \leq p\tau \leq \pi,$$

т. е.

$$\frac{T_{\cos}}{4} \leq \tau \leq \frac{T_{\cos}}{2}.$$

Подставив далее значения $\sin p\tau$ и $\cos p\tau$ в уравнение (234) для $\delta_{2\max}$, получим:

$$\delta_{2\max} = e^{-h\tau} \frac{1}{B} \omega \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) + 2b^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right) \right],$$

или, сделав соответствующие преобразования, будем иметь:

$$\delta_{2\max} = e^{-h\tau} \frac{1}{B} \omega \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2} \right] = e^{-h\tau} \frac{\omega}{B}. \quad (236)$$

Из уравнения (236) видно, что погрешность $\delta_{2\max}$, соответствующая первому максимуму, положительна при любых значениях b (для случая $\varepsilon = 0$).

Из фиг. 51 видим, что простой экстраполяцией полученных кривых можно получить все необходимые точки этих кривых для $b = 1$, поэтому специального исследования уравнения (221) для случая $h = k$ не требуется.

6. ВЛИЯНИЕ НА ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Небезынтересно посмотреть, как отразится на этих погрешностях кулоновское трение. При учете трения уравнение (206) примет следующий вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2y = a \sin(\omega t + \varepsilon) \pm \frac{F_{\text{тр}}}{m}, \quad (237)$$

где через $\pm F_{\text{тр}}$ обозначена сила кулоновского трения, приведенная к массе m ($F_{\text{тр}} > 0$).

Знак $\pm$ перед членом, определяющим влияние на движение системы кулоновского трения, показывает, что в данном случае функция не непрерывная. При изменении направлений скорости сила трения меняет свой знак и именно таким образом, что скорость $\frac{dy}{dt}$ и сила трения $F_{\text{тр}}$ имеют всегда обратные знаки (т. е. трение всегда уменьшает скорость). Это обстоятельство при определении постоянных интегрирования (см. стр. 173) вносит значительные осложнения, требуя каждый раз, когда $\frac{dy}{dt} = 0$, определения постоянных интегрирования по новым начальным условиям.

Для промежутка времени от начала движения и до момента, когда $\frac{dy}{dt} = 0$, можно принять следующие начальные условия: при $t_1 = 0$, $\frac{dy}{dt_1} = 0$, $y = 0$ (через t_1 обозначено время, истекшее с момента начала движения). При наличии трения движение подвижной системы прибора начнется не сразу, а только с того момента, когда возмущающая сила возрастет до величины, равной силе трения, поэтому t_1 можно определить на основании следующего:

$$\frac{F_{\text{тр}}}{m} = a \sin(\omega t_{\text{тр}} + \varepsilon), \quad (238)$$

откуда $t_{\text{тр}}$, т. е. время, за которое возмущающая сила возрастет до величины, равной силе трения, будет:

$$t_{\text{тр}} = \frac{\arcsin \frac{F_{\text{тр}}}{a m} - \varepsilon}{\omega} \quad (239)$$

и

$$t_1 = t - t_{\text{тр}}. \quad (240)$$

Если за рассматриваемый промежуток времени $\frac{dy}{dt} \geq 0$, то сила трения $F_{\text{тр}}$ имеет отрицательный знак, и уравнение (237) примет следующий вид:

$$\frac{d^2y}{dt_1^2} + 2h \frac{dy}{dt_1} + k^2y = a \sin(\omega t_1 + \omega t_{\text{тр}} + \varepsilon) - \frac{F_{\text{тр}}}{m}. \quad (241)$$

Решение уравнения (241) будет иметь аналогичный вид с приведенными выше решениями подобных уравнений. Принимая $\varepsilon=0$, получим:

$$y=e^{-ht_1}(C_1 \sin pt_1+C_2 \cos pt_1)+\frac{a}{k^2} \lambda \sin (\omega t_1+\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{F_{\text{тп}}}{F_0}. \quad (242)$$

После определения постоянных интегрирования по указанным выше начальным условиям уравнение (242) примет следующий вид:

$$y=-e^{-ht_1} \frac{a \lambda}{k^2} \left\{ \left[\frac{h}{p} \sin (\omega t_{\text{тп}}+\psi)+\frac{\omega}{p} \cos (\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{h}{p} \frac{k^2}{a \lambda} \frac{F_{\text{тп}}}{F_0} \right] \sin pt_1+ \right. \\ \left. +\left[\sin (\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{k^2}{a \lambda} \frac{F_{\text{тп}}}{F_0} \right] \cos pt_1 \right\}+\frac{a}{k^2} \lambda \sin (\omega t_1+\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{F_{\text{тп}}}{F_0}. \quad (243)$$

Так как на основании уравнения (238) при $\varepsilon=0$:

$$\frac{F_{\text{тп}}}{F_0} \frac{k^2}{a}=\sin \omega t_{\text{тп}},$$

то уравнение (243) можно переписать так:

$$y=-e^{-ht_1} \frac{a \lambda}{k^2} \left\{ \left[\frac{bk}{p} \sin (\omega t_{\text{тп}}+\psi)+\frac{\omega}{p} \cos (\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{bk}{p \lambda} \sin \omega t_{\text{тп}} \right] \sin pt_1+ \right. \\ \left. +\left[\sin (\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{1}{\lambda} \sin \omega t_{\text{тп}} \right] \cos pt_1 \right\}+\frac{a}{k^2} \lambda \sin (\omega t_1+\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{F_{\text{тп}}}{F_0}, \quad (244)$$

и после соответствующего преобразования будем иметь:

$$y=-e^{-ht_1} \frac{a \lambda^2}{k^2 p} \left\{ \left[bk \left(1+\frac{\omega^2}{k^2}-\frac{1}{\lambda^2} \right) \sin \omega t_{\text{тп}}+ \right. \right. \\ \left. +\omega \left(1-\frac{\omega^2}{k^2}-2b^2 \right) \cos \omega t_{\text{тп}} \right] \sin pt_1+p \left[\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}-\frac{1}{\lambda^2} \right) \sin \omega t_{\text{тп}}- \right. \\ \left. -2b \frac{\omega}{k} \cos \omega t_{\text{тп}} \right] \cos pt_1 \right\}+\frac{a}{k^2} \lambda \sin (\omega t_1+\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{F_{\text{тп}}}{F_0}. \quad (245)$$

Так как

$$\frac{1}{\lambda^2}=\left(1-\frac{\omega^2}{k^2} \right)^2+4b^2 \frac{\omega^2}{k^2},$$

то в окончательном виде получим:

$$y=-e^{-ht_1} \frac{a \lambda^2 \omega}{k^2 p} \left\{ \left[b \frac{\omega}{k} \left(3-\frac{\omega^2}{k^2}-4b^2 \right) \sin \omega t_{\text{тп}}+ \right. \right. \\ \left. +\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}-2b^2 \right) \cos \omega t_{\text{тп}} \right] \sin pt_1+\frac{p}{k} \left[\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}-4b^2 \right) \sin \omega t_{\text{тп}}- \right. \\ \left. -2b \cos \omega t_{\text{тп}} \right] \cos pt_1 \right\}+\frac{a}{k^2} \lambda \sin (\omega t_1+\omega t_{\text{тп}}+\psi)-\frac{F_{\text{тп}}}{F_0}. \quad (246)$$

Отсюда погрешности для промежутка времени, пока $\frac{dy}{dt} > 0$, будут следующими:

$$\Delta_1 y=\frac{a}{k^2} \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4}+\frac{\omega^2}{k^2} (4b^2-1) \right]^2+\left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2} \sin (\omega t_1+\omega t_{\text{тп}}+\psi)+\frac{F_{\text{тп}}}{F_0}; \quad (247)$$

$$\Delta_2' y = e^{-ht_1} \frac{a}{k^2} \lambda^2 \frac{\omega}{p} \left\{ \left[b \frac{\omega}{k} \left(3 - \frac{\omega^2}{k^2} - 4b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \cos \omega t_{\text{TP}} \right] \sin p t_1 + \frac{p}{k} \left[\frac{\omega}{k} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 4b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2b \cos \omega t_{\text{TP}} \right] \cos p t_1 \right\}. \quad (248)$$

Уравнение для времени t_1 , для которого получим максимальную погрешность $\Delta_2' y$, будет:

$$t_{1\Delta_2' y \max} = \tau_{\text{TP}} = \frac{1}{p} \arctg \frac{p \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} + 2b \frac{\omega}{k} \sin \omega t_{\text{TP}} \right]}{bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} - \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}}} \quad (249)$$

Обозначив

$$V \left[p^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} + 2b \frac{\omega}{k} \sin \omega t_{\text{TP}} \right]^2 + \left[bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} - \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}} \right]^2 \right] = B_{\text{TP}} \quad (250)$$

на основании уравнения (249) для первого максимума будем иметь:

$$\sin p \tau_{\text{TP}} = \frac{p \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} + 2b \frac{\omega}{k} \sin \omega t_{\text{TP}} \right]}{B_{\text{TP}}}, \quad (251)$$

$$\cos p \tau_{\text{TP}} = - \frac{bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} - \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}}}{B_{\text{TP}}}. \quad (252)$$

На основании уравнений (248), (251) и (252) уравнение для максимальной приведенной погрешности δ_2' от собственных колебаний можно написать так:

$$\delta_2'_{\max} = e^{-h\tau_{\text{TP}}} \frac{\lambda^2 \omega}{p B_{\text{TP}}} \left\{ \left[b \frac{\omega}{k} \left(3 - \frac{\omega^2}{k^2} - 4b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \cos \omega t_{\text{TP}} \right] p \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} + 2b \frac{\omega}{k} \sin \omega t_{\text{TP}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{p}{k} \left[\frac{\omega}{k} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 4b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}} - 2b \cos \omega t_{\text{TP}} \right] \left[-bk \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} \right) \cos \omega t_{\text{TP}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} - 2b^2 \right) \sin \omega t_{\text{TP}} \right] \right\} \quad (253)$$

и после соответствующих преобразований

$$\delta_2'_{\max} = e^{-h\tau_{\text{TP}}} \frac{\omega}{B_{\text{TP}}} \left(\frac{\omega^2}{k^2} \sin^2 \omega t_{\text{TP}} + b \frac{\omega}{k} \sin 2\omega t_{\text{TP}} + \cos^2 \omega t_{\text{TP}} \right). \quad (254)$$

Уравнение для приведенной погрешности δ_1' от сдвига фаз и динамического увеличения на основании уравнения (247) можно написать так:

$$\delta_1' = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2} \sin (\omega t_1 + \omega t_{\text{TP}} + \varphi) + \frac{F_{\text{TP}}}{F_0} \frac{k^2}{a}. \quad (255)$$

Так как

$$t_1 + t_{\text{тр}} = t,$$

то

$$\delta_1' = \lambda^2 \sqrt{\left[\frac{\omega^4}{k^4} + \frac{\omega^2}{k^2} (4b^2 - 1) \right]^2 + \left(2b \frac{\omega}{k} \right)^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} \frac{k^2}{a}. \quad (256)$$

Из уравнения (254) видно, что, подобно тому, как и при отсутствии трения, первый максимум погрешности от собственных колебаний положителен. Уравнение (256) отличается от уравнения (230) только наличием слагаемого $\frac{F_{\text{тр}}}{F_0} \frac{k^2}{a}$, являющегося положительной величиной. Поэтому можно доказать (см. стр. 199), что погрешность δ_1' от сдвига фаз и динамического увеличения достигнет максимума при

$$t_1 > \frac{T_{\text{св}}}{2} \gg \tau_{\text{тр}},$$

т. е. она в течение времени $\tau_{\text{тр}}$ остается положительной.

Следовательно, обе погрешности за промежуток времени $\tau_{\text{тр}}$ нарастают, оставаясь положительными. Из этого следует, что в течение всего этого промежутка времени происходит нарастание отставания подвижной системы прибора от положения, соответствующего $y_{\text{ст}}$, т. е. от положения равновесия. За промежуток времени $\tau_{\text{тр}}$ и даже больший положительная скорость $\frac{dy}{dt}$ может только нарастать, т. е. никак не может стать нулем. Следовательно, для уравнений (254) и (255) принятые начальные условия остаются в силе.

Вычитая уравнение (230) из уравнения (256) и уравнение (236) из уравнения (254), принимая $\varepsilon = 0$, получим:

$$\delta_1' - \delta_1 = \frac{F_{\text{тр}}}{F_0} \frac{k^2}{a} \sin \omega t_{\text{тр}}, \quad (257)$$

$$\delta_{2\text{max}}' - \delta_{2\text{max}} =$$

$$= \omega \left[\frac{e^{-h\tau_{\text{тр}}}}{B_{\text{тр}}} \left(\frac{\omega^2}{k^2} \sin^2 \omega t_{\text{тр}} + b \frac{\omega}{k} \sin 2\omega t_{\text{тр}} + \cos^2 \omega t_{\text{тр}} \right) - \frac{e^{-h\tau}}{B} \right]. \quad (258)$$

Так как величина $\sin \omega t_{\text{тр}}$ достаточно мала¹, то, пренебрегая величинами второго порядка малости, уравнение (258) можно переписать так:

$$\delta_{2\text{max}}' - \delta_{2\text{max}} \approx \omega \left[\frac{e^{-h\tau_{\text{тр}}}}{B_{\text{тр}}} \left(b \frac{\omega}{k} \sin 2\omega t_{\text{тр}} + \cos^2 \omega t_{\text{тр}} \right) - \frac{e^{-h\tau}}{B} \right] \quad (259)$$

или

$$\delta_{2\text{max}}' - \delta_{2\text{max}} \approx \frac{\omega e^{-h\tau}}{B} \left[-\frac{e^{h\tau_{\text{тр}}}}{B_{\text{тр}}} \left(b \frac{\omega}{k} \sin 2\omega t_{\text{тр}} + \cos^2 \omega t_{\text{тр}} \right) - 1 \right]. \quad (259a)$$

¹ Так как погрешности трения не должны превышать 1–2%, то $\sin \omega t_{\text{тр}} \ll 0,02$.

Множитель $\frac{e^{h\tau} B}{e^{h\tau_{\text{тр}}} B_{\text{тр}}}$ весьма близок к единице, как и величина $\cos^2 \omega t_{\text{тр}}$, поэтому можно приближенно считать:

$$\delta'_{2\text{max}} - \delta_{2\text{max}} \approx e^{-h\tau} \frac{\omega}{B} b \frac{\omega}{k} \left(\sin 2\omega t_{\text{тр}} + \xi \right) \approx \delta_{2\text{max}} b \frac{\omega}{k} \left(\sin 2\omega t_{\text{тр}} + \xi \right),$$

где $+1 > \xi > -1$ — малая положительная или отрицательная величина¹.

Множитель $\delta_{2\text{max}} b \frac{\omega}{k}$ в нашем случае $\left(\frac{\omega}{k} \leq 0,2 \right)$ нормально не может превышать нескольких процентов, поэтому величиной $\delta'_{2\text{max}} - \delta_{2\text{max}}$ можно пренебречь. Следовательно, трение в основном увеличивает суммарную максимальную инерционную приведенную погрешность на приведенную погрешность трения $\sin \omega t_{\text{тр}}$ (уравнение 257), равную (при одинаковых условиях) приведенной погрешности трения при статических измерениях.

7. ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ НЕОБХОДИМОСТИ УЧЕТА ФАКТОРА ВРЕМЕНИ

Рассмотренные погрешности относятся к тому случаю, когда полученные значения замеряемой величины должны быть строго отнесены к соответствующим этим значениям моментам времени.

Иначе обстоит дело, если измерение быстро протекающего явления не связано с абсолютным значением времени. Это может иметь место в том случае, если изменение ординаты измеряемого явления не связано по времени с каким-либо другим фактором, или в том случае, если допустима достаточно сложная обработка результатов измерения путем внесения соответствующих поправок на сдвиг фаз. В последнем случае, зная степень успокоения прибора b и собственную частоту колебаний k и определяя по записи частоту замеряемого явления ω , в ряде случаев можно ввести поправку, пользуясь уже известной зависимостью:

$$\psi = -\arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}} \quad (219)$$

Знак минус перед значением ψ показывает, что запись измеряемого явления отстает от его действительного значения и при расфигуровке из абсолютного значения времени каждый раз нужно будет вычитать² величину погрешности;

$$\Delta t = -\frac{T}{2\pi} \arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}, \quad (260)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период замеряемого явления.

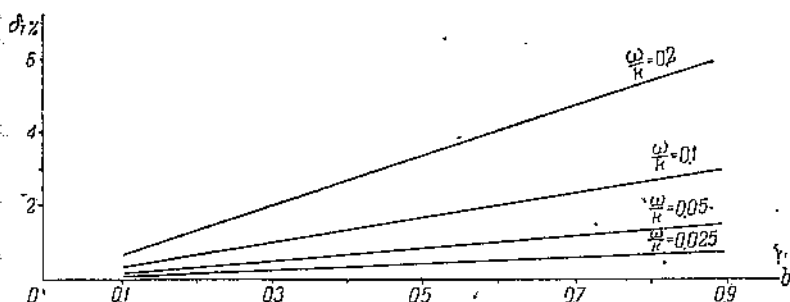
¹ Мы не пренебрегаем величиной ξ , потому что она может быть одного и даже большего порядка по сравнению с величиной $\sin 2\omega t_{\text{тр}}$.

² Чтобы получить действительное время, которому должно соответствовать данное значение измеренной величины.

Разделив обе части уравнения на T , получим:

$$\delta_1 = \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi} \arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}. \quad (261)$$

Величины этих поправок для тех же значений параметров b и $\frac{\omega}{k}$ даны на фиг. 55.



Фиг. 55. Кривые погрешностей от сдвига фаз, построенные по параметру b для различных отношений частот возмущающей к собственной.

Таблица 8 (к фиг. 55)

b	$\frac{\omega}{k} = 0,2$	$\frac{\omega}{k} = 0,1$	$\frac{\omega}{k} = 0,05$	$\frac{\omega}{k} = 0,025$
0,1	0,0066	0,0032	0,0016	0,0008
0,3	0,0199	0,0097	0,0048	0,0024
0,5	0,0330	0,0161	0,0063	0,0040
0,7	0,0464	0,0224	0,0112	0,0056
0,9	0,0597	0,0290	0,0143	0,0072

$$\delta_T = \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi} \arctg \frac{2b \frac{\omega}{k}}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}.$$

Если измерение быстро протекающего явления не связано с абсолютным значением времени, то кроме погрешности от собственных колебаний останется только погрешность от динамического увеличения:

$$\Delta_1' y = \frac{a}{k^2} (1 - \lambda) \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (262)$$

Относительная погрешность в данном случае будет постоянной величиной:

$$\delta_1' = \frac{\Delta_1' y}{\frac{a}{k^2} \sin(\omega t + \varepsilon)} = 1 - \lambda$$

или в окончательном виде:

$$\delta_1' = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{k^4} + 2 \frac{\omega^2}{k^2} (2b^2 - 1)}}. \quad (263)$$

8. УСЛОВИЯ ДЛЯ НАИБОЛЬШЕГО СНИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ НЕОБХОДИМОСТИ УЧЕТА ВРЕМЕНИ

Полученная зависимость (уравнение 263) настолько проста, что можно непосредственно сделать следующие выводы:

1) погрешность $\delta'_1 = 0$ для любых отношений частот при условии, если b подобрано так, что

$$\frac{\omega^4}{k^4} + 2 \frac{\omega^2}{k^2} (2b^2 - 1) = 0,$$

т. е. если

$$b = 0,5 \sqrt{2 - \frac{\omega^2}{k^2}}; \quad (264)$$

2) при значениях $b < 0,5 \sqrt{2 - \frac{\omega^2}{k^2}}$ погрешности отрицательные и при $b > 0,5 \sqrt{2 - \frac{\omega^2}{k^2}}$ погрешности положительные, т. е. в первом случае $\lambda > 1$, во втором $\lambda < 1$;

3) при данной степени успокоения b погрешности тем меньше, чем меньше отношение частот $\frac{\omega}{k}$.

Максимальная погрешность от собственных колебаний δ_2 в начале движения положительна, поэтому наиболее выгодный случай на этом участке будет при $b = 0,5 \sqrt{2 - \frac{\omega^2}{k^2}}$ или при значениях $b < 0,5 \sqrt{2 - \frac{\omega^2}{k^2}}$ в зависимости от того, в какой части данного участка кривой замедляемого явления желательно получить минимальную суммарную погрешность. Следовательно, и в данном случае слишком большая степень успокоения с точки зрения получения минимальных инерционных погрешностей невыгодна, и наиболее рациональный путь к снижению этих погрешностей заключается в увеличении собственной частоты k прибора.

Но не всегда можно до необходимых пределов увеличивать собственную частоту k прибора по причинам, указанным ниже.

9. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ ПРИБОРА, ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ И ПОГРЕШНОСТЯМИ ТРЕНИЯ

При увеличении собственной частоты прибора за счет увеличения упругости чувствительного элемента одновременно снижается чувствительность прибора. Сохраняя при наличии передаточного механизма чувствительность прибора путем увеличения передаточного отношения передаточного механизма постоянной, с одной стороны, увеличивают погрешности трения, с другой — тем самым ставят определенный предел для увеличения собственной частоты. Последнее имеет место потому, что приведенная масса передаточного механизма обычно растет при этом значительно быстрее, чем собственная частота прибора.

Для простейшего частного случая эту зависимость приближенно можно выразить так. Считая, например, что масса подвижных частей

чувствительного элемента заметно не меняется с увеличением его упругости, приведенная же масса передаточного механизма меняется пропорционально квадрату передаточного отношения, и обозначив через: m_1 — приведенную массу чувствительного элемента, через m_2 и F_0 — начальную приведенную массу передаточного механизма и начальную упругость чувствительного элемента, через n — соответствующее увеличение упругости и передаточного отношения передаточного механизма, получим следующую зависимость для собственной частоты прибора от параметров F_0 , m_2 и n :

$$k = \sqrt{\frac{F_0 n}{m_1 + m_2 n^2}}$$

или

$$k = \sqrt{\frac{F_0}{\frac{m_1}{n} + m_2 n}} \quad (265)$$

Из уравнения (265) видно, что при условии сохранения чувствительности прибора постоянной увеличивать его собственную частоту путем увеличения упругости чувствительного элемента можно только до тех пор, пока

$$\frac{m_1}{n} > m_2 n.$$

После того как $\frac{m_1}{n}$ сравняется с $m_2 n$, дальнейшее увеличение влечет за собой уменьшение собственной частоты.

Таким образом видно, что, сохраняя чувствительность прибор постоянной, можно только до известных пределов увеличивать его собственную частоту.

10. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ ПРИБОРА И ВОСПРИИМЧИВОСТЬЮ ПРИБОРА К ВИБРАЦИЯМ

В некоторых, правда, редких, случаях увеличение собственной частоты прибора неблагоприятно отражается на поведении прибор в отношении других факторов, в частности в отношении вибраций. Так приборы, подвижная система которых по принципу их действия не может быть полностью уравновешена, например измерители ускорений, при увеличении собственной частоты и при определенных условиях воздействия на них вибрации настолько сильно начинают реагировать на нее, что пользование ими может оказаться совершенно невозможным.

При исследовании вопроса о восприимчивости приборов к вибрациям рассмотрим два случая; когда влияние неуравновешенной массы на поведение подвижной системы прибора настолько велико по сравнению с влиянием наличных в подвижной системе прибора уравновешенных масс, что последними можно пренебречь; второй — когда влияние уравновешенных масс достаточно велико.

11. ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ НА ПРИБОРЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ УРАВНОВЕШЕННЫХ МАСС

Если обозначить через y_1 относительное перемещение приведенной массы m от вибраций, через l_1 амплитуду абсолютных перемещений основания прибора при вибрациях, через ω_1 , ε_1 , ϕ_1 частоту, начальную фазу и сдвиг фаз вибраций и остальные обозначения оставить те же, что и выше, то можно написать:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2h \frac{dy_1}{dt} + k^2 y_1 = l_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1). \quad (266)$$

Поступая так же, как и выше (см. стр. 187), получим решение этого уравнения в следующем виде:

$$y_1 = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) + \frac{l_1}{k^2} \frac{\omega_1^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega_1^2}{k^2}}} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \phi_1), \quad (267)$$

где

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{2b \frac{\omega_1}{k}}{1 - \frac{\omega_1^2}{k^2}}.$$

Когда $\omega_1 \gg \omega$, т. е. частота вибрации значительно больше частоты исследуемого явления, запись прибора получим в виде размытой линии (при визуальном приборе мы получим размытый конец стрелки) с амплитудой:

$$y_{10} = \frac{l_1}{k^2} \frac{\omega_1^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega_1^2}{k^2}}}. \quad (268)$$

Собственных колебаний в данном случае мы рассматривать не будем, считая, что те дополнительные собственные колебания, которые будут вызваны влиянием вибрации, до начала измерения затухнут. В остальном в отношении собственных колебаний система будет себя вести так же, как и при отсутствии вибраций.

Перепишем уравнение (268) в следующем виде:

$$y_{10} = \frac{l_1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{1}{\omega_1^2 k^2}}}. \quad (269)$$

Приняв $\frac{k}{\omega_1} = n_1$, уравнение (269) можно переписать так:

$$y_{10} = \frac{l_1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^4} [1 + n_1^4 + 2n_1^2(2b^2 - 1)]}}. \quad (270)$$

12. УСЛОВИЯ ДЛЯ НАИБОЛЬШЕГО СНИЖЕНИЯ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПРИБОРА К ВИБРАЦИИ

Из уравнения (270) можно сделать следующие выводы:

1. Если $\omega_1 \gg k$ или, наоборот, $k \gg \omega_1$, то амплитуда вибрации стрелки или амплитуда размытости записи от вибрации y_1 почти не зависит от степени успокоения b . Это следует из того, что если $n_1 \gg 1$, то величина $2n_1^2(2b^2 - 1)$, даже при максимальном значении $b = 1$, будет мала по сравнению с величиной n_1^4 ; если же $n_1 \ll 1$, то величина $2n_1^2(2b^2 - 1)$ будет мала по сравнению с единицей. Например, при $n_1 = 5$

$$2n_1^2(2b^2 - 1) < 10\% n_1^4$$

и при $n_1 = 0,2$

$$2n_1^2(2b^2 - 1) < 10\% \text{ единицы.}$$

При приближении значения n_1 к единице влияние успокоения возрастает и при значениях n_1 , близких к единице, успокоение сильно снижает влияние вибрации.

2. Амплитуда вибрации y_1 тем меньше, чем меньше собственная частота прибора k . Это видно из следующего.

Перепишем уравнение (215) в следующем виде:

$$y = Ce^{-\lambda t} \sin(pt + \gamma) + \frac{a}{k^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{k^4} + 2 \frac{\omega^2}{k^2} (2b^2 - 1)}} \sin(\omega t + \varepsilon + \phi). \quad (271)$$

Отбросив первый затухающий член собственных колебаний и приняв

$$\frac{k}{\omega} = zn_1,$$

где

$$z = \frac{\omega_1}{\omega},$$

уравнение для амплитуды записи перепишем так:

$$y_0 = \frac{a}{\omega^2} \frac{1}{z^2 \sqrt{\frac{1}{z^4} + n_1^4 + \frac{2}{z^2} n_1^2 (2b^2 - 1)}}. \quad (272)$$

Взяв отношение амплитуд согласно уравнениям (270) и (272), получим:

$$\frac{y_{10}}{y_0} = \frac{l_1}{a} \omega_1^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{z^4} + n_1^4 + \frac{2}{z^2} n_1^2 (2b^2 - 1)}}{\sqrt{1 + n_1^4 + 2n_1^2 (2b^2 - 1)}}. \quad (273)$$

На основании уравнения (273) можно сделать следующий вывод. Так как нормально

$$z = \frac{\omega_1}{\omega} > 1,$$

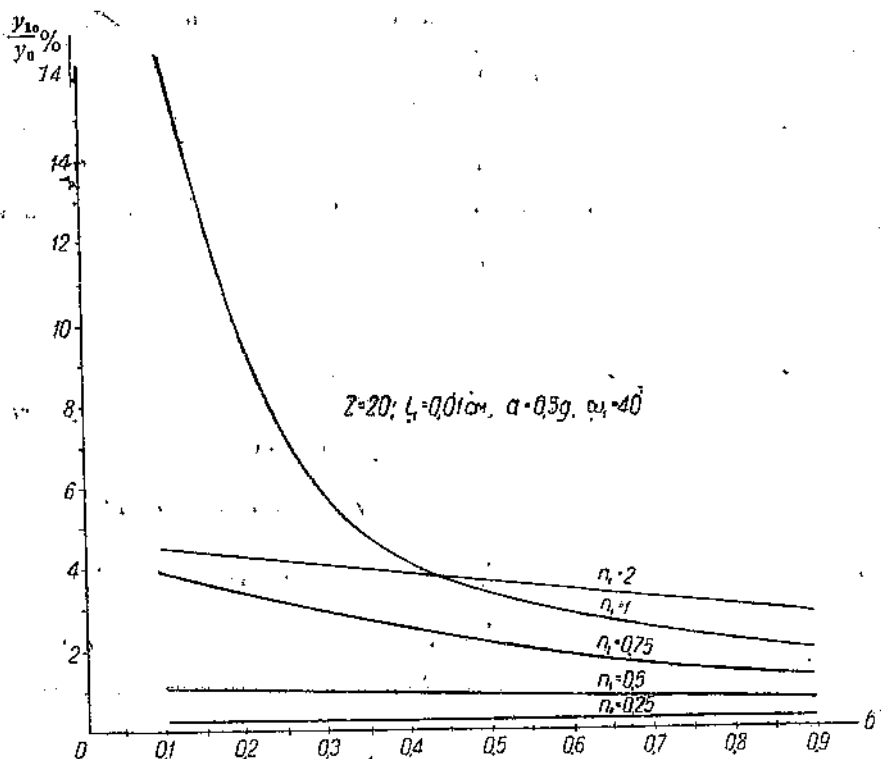
то, уменьшая собственную частоту k , т. е. уменьшая величину n_1 , мы уменьшаем при данных l_1 , a и ω_1 отношение $\frac{y_{10}}{y_0}$, т. е. уменьшаем

влияние вибраций на прибор при данном заданном масштабе $\frac{y_0}{a}$ шкалы прибора.

Чем меньше величина $n_1^4 + 2n_1^2(2b^2 - 1)$ по сравнению с единицей и чем больше величина z , тем влияние уменьшения собственной частоты k больше. При $z = 1$ корни в правой части уравнения сокращаются, т. е. отношение амплитуды записей в этом случае не зависит от собственной частоты k прибора. Наконец при $z < 1$ получается обратное.

На фиг. 56а и 56б нанесены кривые $\frac{y_{10}}{y_0} = f(b)$ для некоторых постоянных значений l_1, a, ω_1 и z : $l_1 = 0,01 \text{ см}$, $a = 0,5g$, $\omega_1 = 40 \frac{1}{\text{сек}}$ и $z = 20$ для значений параметра $n_1 = 0,05; 0,1; 0,2; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ и 2 .

Графики фиг. 56а и 56б полностью подтверждают сделанные выше выводы в отношении влияния собственной частоты для наиболее типичных условий.



Фиг. 56а. Кривые, характеризующие влияние вибраций на подвижную систему прибора, построенные по параметру b для различного отношения частот собственной к возмущающей.

Таблица 9 (к фиг. 56)

b	$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 0,75$	$n_1 = 0,5$	$n_1 = 0,25$	$n_1 = 0,2$	$n_1 = 0,1$	$n_1 = 0,05$
0,1	0,043	0,161	0,039	0,011	0,002	0,00127	0,00025	0,000016
0,3	0,040	0,054	0,029	0,010	0,002	0,00128	0,00026	0,000049
0,5	0,036	0,033	0,021	0,009	0,002	0,00129	0,00029	0,000082
0,7	0,032	0,023	0,016	0,008	0,002	0,00131	0,00033	0,000115
0,9	0,028	0,018	0,013	0,007	0,002	0,00136	0,00038	0,000147

$$\frac{y_{10}}{y_0} = \frac{l_1}{a} \omega_1^2 \sqrt{\frac{1}{z^4} + n_1^4 + \frac{2}{z^2} n_1^2 (2b^2 - 1)};$$

$$z = 20; \quad l_1 = 0,01 \text{ см}; \quad a = 0,5 \text{ г} \text{ и } \omega_1 = 40 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{n_1 z},$$

а потому

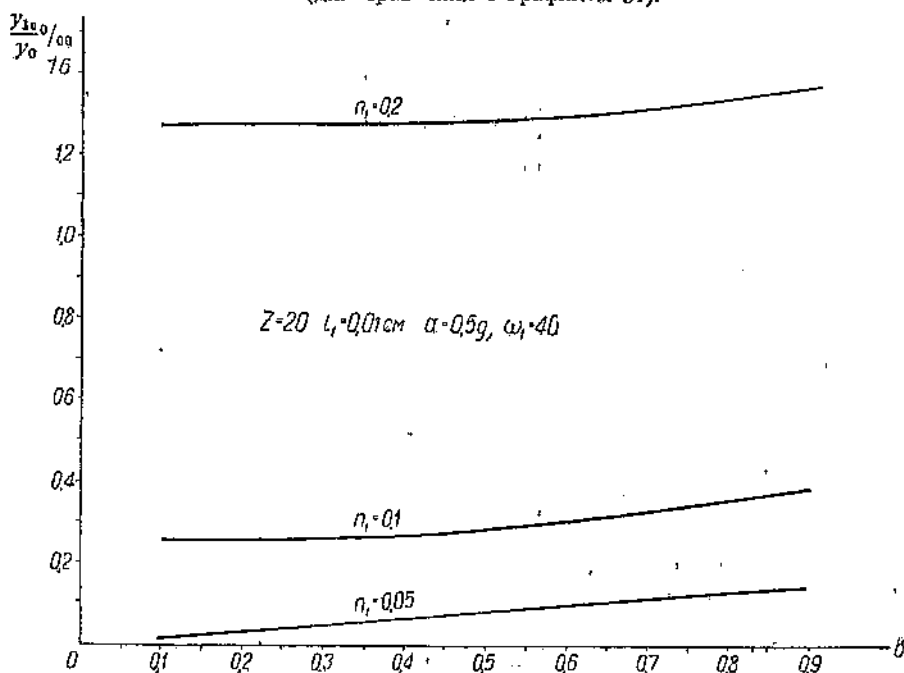
$$n_1 = 2 \quad \text{соответствует} \quad \frac{\omega}{k} = 0,025;$$

$$n_1 = 1 \quad \text{соответствует} \quad \frac{\omega}{k} = 0,05;$$

$$n_1 = 0,5 \quad \text{соответствует} \quad \frac{\omega}{k} = 0,1;$$

$$n_1 = 0,25 \quad \text{соответствует} \quad \frac{\omega}{k} = 0,2$$

(для сравнения с графиком 51).

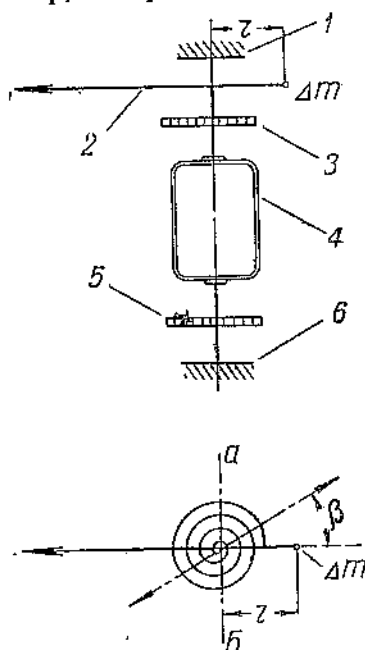


Фиг. 566.

Сравнивая эти графики с графиком фиг. 51, видим, что, уменьшая влияние вибраций, мы увеличиваем инерционные погрешности и, наоборот, уменьшая инерционные погрешности, увеличиваем влияние вибраций. Из этого следует, что при проектировании приборов, измеряющих, например, ускорения и работающих в условиях вибраций, в каждом конкретном случае необходимо особо тщательно находить в отношении этих двух факторов оптимальное решение задачи.

13. ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ НА ПРИБОРЫ ПРИ НАЛИЧИИ, КРОМЕ НЕУРАВНОВЕШЕННЫХ, УРАВНОВЕШЕННЫХ МАСС

Небезынтересно посмотреть, как будет влиять вибрация на прибор, который принципиально может быть уравновешен полностью,



Фиг. 57. Принципиальная схема прибора, имеющего небольшую неуравновешенную массу в подвижной системе.

1—опора, 2—стрелка, 3—волосок, 4—рамка, 5—волосок, 6—опора.

но у которого осталась некоторая неуравновешенность Δm вследствие неточности балансировки подвижной части. Рассмотрим этот случай на примере прибора в роде магнитоэлектрического вольтметра или амперметра; схема такого прибора дана на фиг. 57.

Обозначим имеющуюся неуравновешенность от незначительной массы, расположенной на плече r , относительно оси рамки через Δm . Предположим далее, что направление прямолинейной вибрации составляет угол β с плечом r , на котором расположена неуравновешенная масса Δm . В этом случае, применяя те же обозначения, что и выше, уравнение (157) можно переписать так:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d \alpha}{dt} + M_0 \alpha = -\Delta m r \sin(\beta - \alpha) \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (274)$$

где через x обозначены линейные перемещения прибора при вибрации.

В данном случае не учитывается влияние силы тяжести на перемещение неуравновешенной массы, — считаем,

что сила тяжести направлена по оси стрелки.

Выразив в правой части уравнения (274) синус разности углов через синусы и косинусы этих углов, получим:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d \alpha}{dt} + M_0 \alpha = -\Delta m r (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (275)$$

Так как угол α достаточно мал, можно принять $\cos \alpha = 1$ и $\sin \alpha = \alpha$. Тогда уравнение (275) переписывается так:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d\alpha}{dt} + M_0 z = -\Delta m r (\sin \beta - \alpha \cos \beta) \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (276)$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + \left(k^2 - \frac{\Delta m r \cos \beta}{J} \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \alpha = -\frac{\Delta m r \sin \beta}{J} \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (277)$$

14. УСЛОВИЕ ДЛЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЭФФЕКТА МАКСВЕЛЛА

Уравнение (277) решается довольно сложно, и мы на его решении останавливаться не будем. Укажем только, что при достаточно больших углах β , $\cos \beta$ становится мал и членом $\frac{\Delta m r \cos \beta}{J} \frac{d^2 x}{dt^2}$ можно пренебречь. Точно так же можно пренебречь величиной $\frac{\Delta m r \cos \beta}{J} \frac{d^2 x}{dt^2}$ при достаточно больших значениях k^2 .

Иначе обстоит дело, если значение k^2 будет мало. В этом случае при не слишком больших углах β влияние величины $\frac{\Delta m r \cos \beta}{J} \frac{d^2 x}{dt^2}$ может оказаться достаточно большим и оно сказывается в том, что подвижную систему начинает уводить, — получается погрешность, о которой говорилось на стр. 151. Этот случай исследован Максвеллом, и появляющееся при указанных условиях явление получило название «эффекта Максвелла».

15. ВЛИЯНИЕ УРАВНОВЕШЕННЫХ МАСС НА ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПРИБОРА К ВИБРАЦИИ

Остановимся на исследовании простейшего случая, когда членом $\frac{\Delta m r \cos \beta}{J} \frac{d^2 x}{dt^2}$ можно пренебречь. Тогда уравнение (277) переписывается в следующем виде:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2 \alpha = -\frac{\Delta m r}{J} \sin \beta \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (278)$$

Принимая

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -l_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

получим:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2 \alpha = \frac{\Delta m r}{J} \sin \beta l_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1). \quad (279)$$

Заменим в уравнении (279) момент инерции подвижной системы

$$J = m \rho^2,$$

где ρ — радиус инерции, произведением $m_0 r^2$, где m_0 — масса подвижной системы, приведенная к тому же плечу r , что и неуравнове-

шенная масса Δm . Тогда решение уравнения (279) получим в следующем виде:

$$\alpha = Ce^{-ht} \sin(pt + \gamma) + \frac{\Delta m}{m_0} \sin \beta \frac{l_1}{rk^2} \frac{\omega_1^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega_1^2}{k^2}}} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \psi_1). \quad (280)$$

Отбросив затухающий член собственных колебаний и обозначив через α_0 амплитуду вынужденных колебаний, после соответствующих преобразований получим:

$$\alpha_0 = \frac{\Delta m}{m_0} \frac{l'_1}{rk^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^4} [1 + n_1^4 + 2n_1^2(2b^2 - 1)]}}, \quad (281)$$

где $l'_1 = l_1 \sin \beta$.

Обозначив $\alpha_0 r$ через y'_1 — линейное перемещение неуравновешенной массы Δm , можно уравнение (281) переписать так:

$$y'_1 = \frac{\Delta m}{m_0} \frac{l'_1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^4} [1 + n_1^4 + 2n_1^2(2b^2 - 1)]}}. \quad (282)$$

Разделив уравнение (282) на уравнение (270) для случая, когда влиянием уравновешенных масс можно было пренебречь, и приняв для данного случая $l'_1 = l_1$, получим:

$$\frac{y'_{1_0}}{y_1} = \frac{\Delta m}{m_0}. \quad (283)$$

На основании уравнения (283) можно сделать вывод, что амплитуда вибраций при наличии в подвижной системе прибора уравновешенных масс уменьшается во столько раз, во сколько приведенная к некоторому плечу r неуравновешенная масса меньше приведенной к тому же плечу массы всей подвижной системы прибора.

16. ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ

При учете кулоновского трения уравнение (279) примет следующий вид:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2 \alpha = \frac{\Delta m r}{J} \sin \beta l_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) \pm \frac{M_{\text{тр}}}{J}. \quad (284)$$

Решение уравнения (284) будет следующим:

$$\alpha = Ce^{-ht} \sin(pt + \gamma) + \frac{\Delta m_0}{m_0} \sin \beta \frac{l_1}{rk^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^4} [1 + n_1^4 + 2n_1^2(2b^2 - 1)]}} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \psi_1) \pm \frac{M_{\text{тр}}}{M_0}. \quad (285)$$

При исследовании свободных колебаний системы при наличии жидкостного и сухого трения, проведенном на стр. 173, мы видели, что сухое трение ускоряет затухание свободных колебаний. Однако согласно теории О. Нолм'а¹ собственные колебания при наличии вынужденных колебаний и сухого трения окончательно полностью не затухают даже при установившемся процессе. Мы здесь не будем останавливаться на разборе теории О. Нолм'а, которая достаточно хорошо изложена в указанных источниках, укажем только, что практически при анализе восприимчивости приборов к вибрациям трением можно пренебрегать.

Небезынтересно все же будет несколько остановиться на исследовании тех условий, при которых трение будет полностью уничтожить перемещения от вибраций, так как это может послужить основанием для некоторых выводов в отношении необходимой точности балансировки.

Перемещения, вызываемые вибрацией, не будут иметь места полностью только в том случае, если амплитуда возмущающей силы будет равна или меньше силы трения:

$$\Delta m r \sin \beta l_1 \omega_1^2 \leq M_{\text{тр}} \quad (286)$$

или если

$$\Delta m \leq \frac{M_{\text{тр}}}{\sin \beta l_1} \frac{1}{\omega_1^2} \quad (287)$$

Так как

$$k^2 = \frac{M_0}{m_0 r^2},$$

то

$$\frac{\Delta m}{m_0} \leq \frac{M_{\text{тр}}}{M_0} \frac{1}{\sin \beta} \frac{r}{l_1} \frac{k^2}{\omega_1^2},$$

или

$$\frac{\Delta m}{m_0} \leq \alpha_{\text{тр}} \frac{r}{l_1} \frac{k^2}{\omega_1^2} \quad (288)$$

Отсюда минимальная амплитуда вибраций, которая еще может вызывать некоторые смещения подвижной системы прибора, будет:

$$l_{1\text{min}} = \alpha_{\text{тр}} \frac{m_0 r}{\Delta m} \frac{k^2}{\omega_1^2} \quad (289)$$

При статической балансировке мы имеем следующую зависимость между неуравновешенностью и моментом трения:

$$\Delta m r g \leq M_{\text{тр}},$$

т. е. вполне возможен случай, что

$$\Delta m r g = M_{\text{тр}}$$

или

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{\alpha_{\text{тр}} M_0}{m_0 r g} \quad (290)$$

¹ ЗАММ, Н. 1, 1930, инж. Михайлов, К теории механических вибрографов для полетных исследований, Труды ЦАГИ № 148, 1937 г.

Разделив неравенство (288) на равенство (290) и сделав соответствующие преобразования, получим:

$$1 \leq -\frac{g}{l_1 \omega_1^2}$$

или

$$l_1 \omega_1^2 \leq g. \quad (291)$$

Уравнение (291) позволяет судить о том, какие минимальные амплитуды вибраций еще могут быть записаны вибрографами, речь о которых будет идти дальше (стр. 231).

На основании неравенства (291) можно сделать заключение, что при значительных амплитудах и частотах вибраций простая балансировка подвижной части прибора на собственных опорах может оказаться недостаточной, чтобы обеспечить полное отсутствие вибрации стрелок. Если максимальное ускорение от вибраций больше ускорения силы тяжести, необходима более точная балансировка.

Принципиально балансировка подвижной системы прибора на собственных опорах может быть доведена до большой степени точности следующим образом. Поставив подвижную систему в такое положение, чтобы ось была строго горизонтальной, как и стрелка прибора, одно из плеч стрелки нагружаем (осторожно) до тех пор, пока стрелка не начнет двигаться. Затем проделываем то же самое на противоположном плече стрелки. Измерив длину плеч и вес грузов, вызывавших движение стрелки, можно написать следующие два уравнения:

$$M_{тр} = \Delta m_0 r_0 + \Delta m_1 r_1;$$

$$M_{тр} = \Delta m_2 r_2 - \Delta m_0 r_0.$$

Вычтя одно уравнение из другого, получим величину неуравновешенности $\Delta m_0 r_0$ в данной плоскости:

$$\Delta m_0 r_0 = -\frac{\Delta m_2 r_2 - \Delta m_1 r_1}{2}.$$

Для полного уравнивания подвижной системы то же самое необходимо проделать, повернув стрелку на 90° .

Рассуждая так, предполагаем, что во всех случаях моменты трений одинаковы, в чем, конечно, нельзя быть уверенным. Проверив полученные результаты несколько раз, а также повторив опыт в обратном направлении (т. е. повернув стрелку на 180°), можно во всяком случае получить оценку надежности результата.

17. ВЛИЯНИЕ НЕУРАВНОВЕШЕННОСТИ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ПРИБОРА НА СОБСТВЕННЫЙ ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ

В заключение посмотрим еще, как отразится ускорение силы тяжести на колебаниях подвижной системы прибора, вызываемых вибраций, когда ось системы не вертикальна. Для этого случая вместо уравнения (279) напомним следующее:

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d\alpha}{dt} + M_0 (\alpha + \beta_1) - \Delta m r j \sin(\beta_2 - \alpha) = \\ = \Delta m r \sin \beta_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1), \end{aligned} \quad (292)$$

где $M_0 \beta_1$ — момент волоска, уравновешивающий момент $\Delta m r j \sin \beta_2$, создаваемый неуравновешенной массой, β_2 — угол между плечом неуравновешенной массы и направлением составляющей ускорения силы тяжести j в плоскости, перпендикулярной к оси стрелки.

Так как

$$M_0 \beta_1 = \Delta m r j \sin \beta_2,$$

то уравнение (292) можно переписать так:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d\alpha}{dt} + M_0 \alpha + \Delta m r j [\sin \beta_2 - \sin (\beta_2 - \alpha)] = \Delta m r \sin \beta_1 \omega_1^2 \sin (\omega_1 t + \varepsilon_1). \quad (293)$$

Так как

$$\begin{aligned} \sin \beta_2 - \sin (\beta_2 - \alpha) &= 2 \cos \left(\beta_2 + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \left[\cos \beta_2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right], \end{aligned}$$

то ввиду малой величины угла α , принимая $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$ и $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ и пренебрегая $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta_2$ как величиной второго порядка малости, получим уравнение (293) в следующем виде:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d\alpha}{dt} + (M_0 + \Delta m r j \cos \beta_2) \alpha = \Delta m r \sin \beta_1 \omega_1^2 \sin (\omega_1 t + \varepsilon_1). \quad (294)$$

Разделив обе части уравнения (294) на J , получим:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k_1^2 \alpha = \frac{\Delta m}{m_0 r} \sin \beta_1 \omega_1^2 \sin (\omega_1 t + \varepsilon_1), \quad (295)$$

где

$$k_1^2 = \frac{M_0 + \Delta m r j \cos \beta_2}{J}. \quad (296)$$

Уравнение (295) полностью идентично с уравнением (279), за исключением только того, что изменилась частота собственных колебаний прибора, причем она изменилась в следующем соотношении:

$$\frac{k_1}{k} = \sqrt{\frac{M_0 + \Delta m r j \cos \beta_2}{M_0}}. \quad (297)$$

Обычно момент от неуравновешенности прибора даже при $\cos \beta_2 = \pm 1$ не преодолевает момента трения, т. е.

$$\Delta m r g \leq M_{\text{тр}}.$$

Следовательно, при положительном $\cos \beta_2$

$$1 < \frac{k_1}{k} \leq \sqrt{1 + \alpha_{\text{тр}} \frac{j \cos \beta_2}{g}} \quad (298)$$

и при отрицательном $\cos \beta_2$

$$1 > \frac{k_1}{k} \geq \sqrt{1 - \alpha_{\text{тр}} \frac{j \cos \beta_2}{g}}. \quad (298a)$$

Так как $\alpha_{\text{гр}}$ можно считать порядка не более 0,01 радиана, то нормально изменение частоты собственных колебаний может достигать примерно не более 0,5%, чем вполне можно пренебречь.

18. ИНЕРЦИОННЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ЗАМЕРАХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ЯВЛЕНИЙ, ТОЛЬКО НАРАСТАЮЩИХ ИЛИ ТОЛЬКО СПАДАЮЩИХ С ПОСТОЯННОЙ ИЛИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

При измерениях количественных факторов быстро протекающих явлений нередко встречается еще один случай, когда явление частично или полностью протекает не по закону какой-либо периодической функции, а по прямолинейному закону нарастания или спадания с постоянной скоростью. В этом случае для приборов с постоянной упругостью и постоянной приведенной массой, например магнитоэлектрических измерительных приборов, уравнение движения примет следующий вид:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + N_0 \frac{d\alpha}{dt} + M_0\alpha = At, \quad (299)$$

где через A обозначен некоторый коэффициент, имеющий размерность момента, отнесенного к единице времени.

Разделив обе части уравнения (299) на момент инерции J , получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2\alpha = A_0 t, \quad (300)$$

где $A_0 = \frac{A}{J}$ (размерность (T^{-3}) в системе CGS).

Решение этого уравнения без свободного члена будет:

$$\alpha_1 = e^{-ht} (C_1 \sin pt + C_2 \cos pt).$$

Частное решение со свободным членом будем искать в следующем виде:

$$\alpha_2 = B_1 t^2 + B_2 t + B_3,$$

откуда

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = 2B_1 t + B_2$$

и

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2B_1.$$

Подставляя значения α_2 и его производных в уравнение (300) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной t , получим:

$$B_1 = 0;$$

$$B_2 = \frac{A_0}{k^2};$$

$$B_3 = -\frac{2hA_0}{k^4}.$$

Полное решение уравнения будет:

$$\alpha = e^{-ht} (C_1 \sin pt + C_2 \cos pt) + \frac{A_0}{k^2} \left(t - \frac{2h}{k^2} \right). \quad (301)$$

Определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 по начальным условиям: при $t=0$, $\frac{d\alpha}{dt}=0$ и $\alpha=0$, и заменяя $h=bk$, получим:

$$\alpha = \frac{A_0}{k^2} e^{-bkt} \frac{1}{k} \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} (2b^2-1) \right]^2 + 4b^2} \sin(pt+\gamma) + \frac{A_0}{k^2} \left(t - \frac{2b}{k} \right), \quad (30)$$

где

$$\gamma = \arctg \frac{2b\sqrt{1-b^2}}{2b^2-1}. \quad (31)$$

Вычитая уравнение (302) из уравнения, определяющего истинное отклонение системы, которое мы получили бы при отсутствии влияний инерционных факторов:

$$\alpha_{ст} = \frac{A_0 t}{k^2},$$

получим инерционные погрешности в следующем виде:

$$\alpha_{от} - \alpha = \Delta_1 \alpha + \Delta_2 \alpha = \frac{A_0}{k^2} \frac{2b}{k} - \frac{A_0}{k^2} e^{-bkt} \frac{1}{k} \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} (2b^2-1) \right]^2 + 4b^2} \sin(pt+\gamma). \quad (32)$$

Следовательно, мы будем иметь следующие инерционные погрешности:

1) постоянную приведенную инерционную погрешность от сдвига фаз; отнесенная к величине измеряемого явления, соответствующего значению времени, равному единице, она будет:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1 \alpha}{\frac{A_0}{k^2}} = \frac{2b}{k}; \quad (33)$$

2) приведенную инерционную погрешность от собственных колебаний; если ее также отнести к величине измеряемого явления, соответствующей значению времени, равному единице, то получим:

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2 \alpha}{\frac{A_0}{k^2}} = -e^{-bkt} \frac{1}{k} \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} (2b^2-1) \right]^2 + 4b^2} \sin(pt+\gamma). \quad (34)$$

Если бы возмущающая функция была не вида At , а, предположим вида $A't^2$, где через A' обозначен некоторый коэффициент, имеющий размерность момента, отнесенного к единице времени в квадрате, то мы получили бы следующее решение:

$$\alpha = \frac{A'_0}{k^2} e^{-bkt} \frac{2}{k^2} \sqrt{\left[\frac{b}{\sqrt{1-b^2}} (3-4b^2) \right]^2 + (1-4b^2)^2} \sin(pt+\gamma') + \frac{A'_0}{k^2} \left(t^2 - \frac{4b}{k} t + \frac{8b^2}{k^2} - \frac{2}{k^2} \right), \quad (35)$$

где $A'_0 = \frac{A'}{J}$ (размерность $[T^{-4}]$ в системе CGS) и

$$\gamma' = \arctg \frac{\sqrt{1-b^2}(1-4b^2)}{b(3-4b^2)}. \quad (308)$$

В этом случае инерционные погрешности будут иметь следующий вид:

1) приведенная (к величине $\frac{A'_0}{k^2}$) инерционная погрешность от сдвига фаз:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1 \alpha}{\frac{A'_0}{k^2}} = \frac{4b}{k} t - \frac{8b^2}{k^2} + \frac{2}{k^2}; \quad (309)$$

2) приведенная (к той же величине $\frac{A'_0}{k^2}$) инерционная погрешность от собственных колебаний:

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2 \alpha}{\frac{A'_0}{k^2}} = -e^{-bkt} \frac{2}{k^2} \sqrt{\left[\frac{b}{\sqrt{1-b^2}} (3-4b^2) \right]^2 + (1-4b^2)^2} \sin(pt + \gamma'). \quad (310)$$

В данном случае мы получаем приведенную инерционную погрешность от сдвига фаз, возрастающую со временем.

19. УСЛОВИЯ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО СНИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ЗАМЕРАХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ЯВЛЕНИЙ, ТОЛЬКО НАРАСТАЮЩИХ ИЛИ ТОЛЬКО СПАДАЮЩИХ С ПОСТОЯННОЙ ИЛИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

На основании уравнений (305), (306), (309) и (310) можно сделать ряд выводов о погрешностях, присущих данному методу измерений.

Инерционные погрешности от динамического увеличения в данном случае отсутствуют. Инерционные погрешности от сдвига фаз растут с увеличением степени успокоения b и уменьшаются с увеличением собственной частоты k прибора. Погрешность от собственных колебаний снижается с увеличением как степени успокоения b , так и собственной частоты k прибора. И в данном случае наилучший путь к снижению инерционных погрешностей заключается в увеличении собственной частоты k прибора и в подборе наименьшей степени успокоения b , обеспечивающей достаточно быстрое затухание собственных колебаний системы.

Жидкостное трение особо неблагоприятно сказывается во втором случае, когда мы имеем возмущающую функцию, возрастающую пропорционально квадрату времени. В этом случае успокоение с помощью жидкостного трения, вообще говоря, за исключением каких-либо особых условий измерения, следует признать нецелесообразным. Успокаивая собственные колебания подвижной системы прибора, мы тем самым не только не снижаем суммарной погрешности для времени, после того как собственные колебания подвижной системы прибора

затухнут полностью, но, наоборот, увеличиваем ее, так как погрешность от сдвига фаз растет пропорционально времени t .

Таким образом снижение инерционных погрешностей во втором случае, как правило, возможно только путем повышения собственной частоты k прибора.

В первом случае, когда возмущающая функция возрастает пропорционально первой степени времени t , применение небольших степеней успокоения с помощью жидкостного трения иногда может оказаться целесообразным. Это бывает в том случае, когда нас не интересует начало измерения и наибольшей точности желательно достичь для таких промежутков времени, когда собственные колебания подвижной системы прибора уже затухнут, причем увеличение собственной частоты k вызывает затруднения.

20. ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ

При наличии кулоновского трения¹ уравнение (300) переписывается так:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2\alpha = A_0 t - \frac{M_{\text{тр}}}{J}. \quad (311)$$

Уравнение для случая возмущающей функции, возрастающей пропорционально квадрату времени, будет:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt} + k^2\alpha = A'_0 t^2 - \frac{M_{\text{тр}}}{J}. \quad (312)$$

Перепишем уравнения (311) и (312) в следующем виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt_1^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt_1} + k^2\alpha = A_0 t_1 + A_0 t_{\text{тр}} - \frac{M_{\text{тр}}}{J}, \quad (313)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt_1^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt_1} + k^2\alpha = A'_0 t_1^2 + 2A'_0 t_{\text{тр}} t_1 + A'_0 t_{\text{тр}}^2 - \frac{M_{\text{тр}}}{J}, \quad (314)$$

где через $t_{\text{тр}}$ обозначено время, истекшее до момента начала движения;

$$A_0 t_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}}}{J}; \quad (315)$$

и

$$A'_0 t_{\text{тр}}^2 = \frac{M_{\text{тр}}}{J}. \quad (316)$$

Отсюда для первого случая

$$t_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}}}{J A_0}, \quad (317)$$

для второго

$$t_{\text{тр}} = \sqrt{\frac{M_{\text{тр}}}{J A'_0}}. \quad (318)$$

¹ Будем считать в первом приближении трение движения равным трению покоя, т. е. момент трения постоянным.

На основании уравнений (315) и (316) уравнения (313) и (314) переписутся в таком виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt_1^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt_1} + k^2\alpha = A_0 t_1; \quad (319)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt_1^2} + 2h \frac{d\alpha}{dt_1} + k^2\alpha = A'_0 t_1^2 + 2A'_0 t_{\text{TP}} t_1. \quad (320)$$

Далее на основании уравнений (305) и (306), (309) и (310) для начальных условий при $t_1=0$, $\frac{d\alpha}{dt_1}=0$ и $\alpha=0$, а также учитывая, что в случае отсутствия трения при данных обозначениях

$$\alpha_{\text{CT}} = \frac{A_0 t_1}{k^2} + \alpha_{\text{TP}}$$

для первого случая и

$$\alpha_{\text{CT}} = \frac{A'_0 t_1^2}{k^2} + \frac{2A'_0 t_{\text{TP}} t_1}{k^2} + \alpha_{\text{TP}}$$

для второго, можно непосредственно написать зависимости для погрешностей: для первого случая

$$\delta'_1 = \frac{2b}{k} + \alpha_{\text{TP}} \frac{k^2}{A_0}; \quad (321)$$

$$\delta'_2 = -e^{-bkt_1} \frac{1}{k} \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} (2b^2-1) \right]^2 + 4b^2 \sin(pt_1 + \gamma)}, \quad (322)$$

где γ определяется по уравнению (303);

для второго случая

$$\delta'_1 = \frac{4b}{k} t_1 - \frac{8b^2}{k^2} + \frac{2}{k^2} + \frac{4bt_{\text{TP}}}{k} + \alpha_{\text{TP}} \frac{k^2}{A'_0}; \quad (323)$$

$$\delta'_2 = -e^{-bkt_1} \frac{2}{k^2} \times$$

$$\times \sqrt{\left\{ \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \left[3-4b^2 + kt_{\text{TP}} \left(2b - \frac{1}{b} \right) \right] \right\}^2 + (1-4b^2 + 2bkt_{\text{TP}})^2 \sin(pt_1 + \gamma_1)}, \quad (324)$$

где

$$\gamma_1 = \arctg \frac{\sqrt{1-b^2} [1-4b^2 + 2bkt_{\text{TP}}]}{b \left[3-4b^2 + kt_{\text{TP}} \left(2b - \frac{1}{b} \right) \right]}.$$

Взяв производную $\frac{d\alpha}{dt_1}$ для первого случая и вторую производную $\frac{d^2\alpha}{dt_1^2}$ для второго, получим следующие зависимости для скорости ω и для ускорения ϵ : для первого случая

$$\frac{d\alpha}{dt_1} = \omega = \frac{A_0}{k^2} \left[1 - e^{-bkt_1} \sqrt{\frac{1}{1-b^2}} \sin(pt_1 + \gamma') \right], \quad (325)$$

где

$$\gamma' = \arctg \frac{\sqrt{1-b^2}}{b}; \quad (326)$$

для второго случая

$$\frac{d^2\alpha}{dt_1^2} = \varepsilon = A_0' \frac{2}{k^2} \left[1 - e^{-bkt_1} \sqrt{\left[\frac{b - kt_{\text{тр}}}{\sqrt{1 - b^2}} \right]^2 + 1} \sin(pt_1 + \gamma'') \right], \quad (327)$$

где

$$\gamma'' = \arctg \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b - kt_{\text{тр}}}.$$

Из уравнения (325) видно, что в первом случае при $b = 0$ значение скорости ω всегда больше нуля (или равно нулю), т. е. скорость всегда остается положительной. Из уравнения (327) можно видеть, что во втором случае при $b = 0$ скорость, оставаясь положительной, все время растет и при значении $t_1 > 0$ всегда больше нуля, так как амплитуда положительного ускорения всегда больше амплитуды отрицательного и при $b = 0$ $180^\circ > \gamma'' > 90^\circ$.

Если $b \neq 0$, то при значениях $t_1 > 0$ скорость ω также всегда больше нуля в обоих случаях. Это видно из следующего.

Если взять вторую производную для первого случая и третью производную для второго, то получим: для первого случая

$$\frac{d^3\alpha}{dt_1^3} = e^{-bkt_1} \frac{A_0}{k} \sqrt{\frac{1}{1 - b^2}} \sin pt_1; \quad (328)$$

для второго случая

$$\frac{d^3\alpha}{dt_1^3} = e^{-bkt_1} \frac{A_0' 2}{k} \sqrt{\frac{(1 - bkt_{\text{тр}})^2}{1 - b^2} + k^2 t_{\text{тр}}^2} \sin(pt_1 + \gamma'''), \quad (329)$$

где

$$\gamma''' = \arctg \frac{kt_{\text{тр}} \sqrt{1 - b^2}}{1 - bkt_{\text{тр}}}.$$

Из уравнений (328) и (329) видно, что при $b \neq 0$ для первого случая положительное увеличение скорости всегда больше следующего за ним отрицательного, т. е. снижения скорости, а во втором случае положительное увеличение ускорения всегда больше отрицательного увеличения, т. е. уменьшения ускорения. На основании этих же уравнений видно, что амплитуда изменения скорости в первом случае и амплитуды изменения ускорения во втором при $b \neq 0$ все время уменьшаются и скорость в первом случае и ускорение во втором с течением времени стремятся к некоторым постоянным величинам.

Из изложенного следует, что за все время измерения сила трения не меняет своего знака и уравнения (321) — (324) для погрешностей при наличии кулоновского трения остаются в силе для всего времени измерения.

Небезынтересно также отметить, что при $b = 0$, т. е. при отсутствии жидкостного трения, собственные колебания подвижной системы прибора не затухают даже при наличии кулоновского трения.

Сравнивая значения погрешностей при наличии кулоновского трения (уравнения 321—324) и при отсутствии его (уравнения 305,

306, 309 и 310) для равных промежутков времени от начала движения подвижной системы прибора, т. е. для значений t , равных значениям t_1 , видим, что при наличии кулоновского трения абсолютная суммарная погрешность ($\Delta_1\alpha + \Delta_{20}$) увеличивается на величину угла трения $\alpha_{тр}$ в первом случае и при $b = 0$ примерно на такую же величину во втором. Такое увеличение суммарной погрешности в первом случае вызывается тем, что при наличии кулоновского трения подвижная система прибора приходит в те же положения, что и при отсутствии этого рода трения, с запаздыванием на промежуток времени $t_{тр}$.

На этом закончим описание инерционных погрешностей, появляющихся при измерениях количественных факторов кратко- временно протекающих явлений¹, разобрав наиболее простые, но достаточно обобщающие и типичные случаи. Мы здесь, например, не касались вопросов поведения подвижной системы прибора при наличии в нем переменной упругости или переменной приведенной массы, а также случаев наличия в приборе сопротивлений, пропорциональных не первой степени скорости, и некоторых других, но все эти факторы значительно осложняют получение решений соответствующих дифференциальных уравнений и выходят за пределы поставленной в данной работе задачи. Все эти вопросы могут служить темой специального курса по теории колебаний в приборном деле. Здесь только нужно указать, что в некоторых случаях, при наличии указанных факторов в приборе, можно иногда пойти на упрощение задачи, ограничившись исследованием только малых перемещений подвижных систем приборов, в пределах которых наличием этих факторов можно пренебречь, считая их постоянными, и затем с надлежащей осторожностью сделать соответствующие выводы для подбора искомых параметров прибора.

Глава IX

ИЗМЕРЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

1. ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ, ОДНОРОДНЫХ С КРАТКОВРЕМЕННО ПРОТЕКАЮЩИМИ ЯВЛЕНИЯМИ

Рассмотренные выше дифференциальные уравнения, определяющие относительные перемещения системы для случаев возмущающих явлений синусоидальной формы, остаются такими же и в том случае, если явление продолжается не половину периода, как упрощенно принималось для случаев измерения количественных факторов кратко-

¹ Настоящий раздел назван «Измерения количественных факторов кратко- временно протекающих явлений» потому, что если при тех же амплитудах изменения количественных факторов явление будет протекать достаточно большое время, то в конце концов можно представить столь медленное изменение количественных факторов данного явления, что измерение можно будет отнести к разряду статических. Особенности измерений, рассмотренных в данном разделе, именно и заключаются в том, что явление протекает относительно достаточно короткое время, т. е. изменение количественных факторов, характеризующих данное явление, происходит достаточно быстро. Так как в данном разделе мы рассматривали не- периодические явления, то относительная скорость изменения количественных факторов и обуславливает относительную кратковременность протекающего явления.

временно протекающих явлений, а в течение времени любой продолжительности, т. е. охватывает любое количество полных периодов. Различные результаты при исследовании погрешностей получатся в основном только в двух случаях: 1) при исследовании инерционных погрешностей при отсутствии успокоения в случае резонанса и 2) при исследовании влияния трения на собственные и вынужденные колебания прибора; этот вопрос нами был рассмотрен только применительно к частным случаям.

В первом случае отличие достаточно явное. При резонансе и отсутствии успокоения максимальная инерционная погрешность в идеальном случае будет бесконечно нарастать пропорционально времени; в отношении же влияния трений мы уже сослались (см. стр. 217) на соответствующую литературу. Поэтому на рассмотрении приведенных выше уравнений применительно к периодическим явлениям специально останавливаться нет надобности. Здесь необходимо только обратить внимание на следующее.

1. В тех случаях, когда вид функции, определяющей течение периодического явления, все время остается постоянным, и при $k > \omega$ и $b \neq 0$, все приведенные выше рассуждения о максимальных погрешностях остаются в силе. По прошествии соответствующего времени (нормально уже после первого полупериода возмущающего явления) инерционные погрешности сведутся только к погрешностям от динамического увеличения и сдвига фаз, так как собственные колебания подвижной системы прибора при соответствующем успокоении (с теми оговорками, которые в данный случай вносит теория О. Нолла в отношении влияния сухого трения) затухнут.

Поэтому при равных условиях замер количественных факторов периодического явления выгодно производить по прошествии некоторого достаточно короткого времени, обычно соответствующего половине или одному периоду исследуемого явления, после включения прибора.

2. При наличии сухого трения собственные колебания системы при известных обстоятельствах могут возникать на каждой вершине кривой вынужденных колебаний, т. е. при изменении знака скорости, другими словами, когда трение меняет свой знак.

3. В тех случаях, когда функция, определяющая течение исследуемого явления меняется, необходимо для нового решения дифференциального уравнения произвести определение постоянных интегрирования по начальным условиям, соответствующим состоянию системы в тот момент, когда функция изменилась.

Примером измерения количественных факторов периодического явления, для которого рассмотренные уравнения движения со сделанными оговорками остаются в силе, мог бы служить замер ускорений, вызываемых, например вибрацией.

2. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИИ

Те же уравнения могут быть использованы и для исследования погрешностей при замерах параметров вибрации (частоты и перемещений), однако выводы, которые будут здесь получены, иные. В пред-

шествующей главе мы уже однажды касались вопроса вибрации, но совершенно в другом разрезе: рассматривался вопрос о снижении влияния вибрации на работу прибора с точки зрения уменьшения восприимчивости прибора к вибрации. Сейчас перейдем к исследованию погрешностей, возникающих при замере параметров вибраций, а также условий, обеспечивающих снижение этих погрешностей.

Рассмотрим простейший случай вибрации синусоидальной формы с неизменными параметрами (частотой и амплитудой). Воспользуемся уравнением (195), несколько преобразовав его:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = l_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (330)$$

где $l_1 \omega^2 = a$.

Решение уравнения (330) для начальных условий при $t = 0, y = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ напомним в следующем виде:

$$y = \frac{l_1 \omega^2}{k^2 - \omega^2} \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \sin(kt + \gamma) \right], \quad (331)$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\omega}{k} \cos \varepsilon}$$

Обозначив через n отношение $\frac{\omega}{k}$, уравнение (331) можно переписать так:

$$y = l_1 \frac{n^2}{1 - n^2} \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma) \right] \quad (332)$$

для $n < 1$, и

$$y = l_1 \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[-\sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma) \right] \quad (333)$$

для $n > 1$.

При $\varepsilon = 0$ будем иметь:

$$y = l_1 \frac{n^2}{1 - n^2} (\sin \omega t - n \sin kt) \quad (334)$$

для $n < 1$, и

$$y = l_1 \frac{n^2}{n^2 - 1} (-\sin \omega t + n \sin kt) \quad (335)$$

для $n > 1$.

Истинное перемещение от вибрации должно быть записано так:

$$y_{00} = l_1 \sin(\omega t + \varepsilon).$$

В таком случае погрешность получим в следующем виде:

$$y_{00} - y = \Delta y = l_1 \frac{n^2}{1 - n^2} \left[\frac{1 - 2n^2}{n^2} \sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma) \right] \quad (336)$$

для $n < 1$, и

Так как при $\omega > k$ сдвиг фаз равен π , но нас интересует не сдвиг фаз, а только величина абсолютной погрешности, то для определения ее величины в данном случае берем разность не $y_{00} - y$, а $[-y_{00}] - y$.

$$l_1[-y_{00}] - y = \Delta y = l_1 \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[\frac{1}{n^2} \sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma) \right] \quad (337)$$

для $n > 1$.

При $\varepsilon = 0$.

$$\Delta y = l_1 \frac{n^2}{1 - n^2} \left[\frac{1 - 2n^2}{n^2} \sin \omega t + n \sin kt \right] \quad (338)$$

для $n < 1$, и

$$\Delta y = l_1 \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[\frac{1}{n^2} \sin \omega t + n \sin kt \right] \quad (339)$$

для $n > 1$.

Выражения для погрешностей Δy получились иными по сравнению с рассмотренным на стр. 179. Причина заключается в том, что в данном случае измеряется абсолютное перемещение в пространстве $l_1 \sin \omega t$ основания прибора, а не сила, вызывающая некоторое перемещение $y = \frac{l_1 \omega^2}{k^2} \sin \omega t$ подвижной системы прибора.

Дальше рассмотрим два случая замера параметров вибрации: с помощью высокочастотного прибора, т. е. при $k > \omega$, и с помощью низкочастотного прибора, т. е. при $k < \omega$.

3. ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ВИБРАЦИЕЙ, С ПОМОЩЬЮ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПРИБОРОВ

Рассматривая погрешности при замерах периодических явлений (уравнения 338 и 339), замечаем, что: 1) погрешности меняются от нуля до некоторого максимума периодически за все время замера явления; 2) максимальное значение, которого достигает погрешность за полпериода вынужденных или собственных колебаний и которое в дальнейшем будем называть амплитудой погрешности, может оставаться постоянным или также периодически меняться с периодом, отличным от периодов собственных и вынужденных колебаний, или нарастать пропорционально времени в пределе до бесконечности.

Последний случай будет при резонансе, когда $n = 1$.

Уравнение (338) для этого случая можно привести к такому виду:

$$\Delta y = 0,5 l_1 (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t), \quad (340)$$

откуда видно, что амплитуда погрешности растет пропорционально времени t от значения, равного $0,5 l_1$ (уравнение 200) при первом полупериоде и до бесконечности при $t = \infty$.

В другом крайнем случае, именно в предположении, что значение n весьма мало и стремится к нулю; уравнение (338), пренебрегая малыми значениями n^2 и $2n^2$ по сравнению с единицей, можно переписать так:

$$\Delta y = l_1 [\sin \omega t + n^2 \sin kt]. \quad (341)$$

В уравнении (341) величиной $n^2 \sin kt$ можно пренебречь, и тогда будет видно, что амплитуда погрешности в данном случае стремится к единице, т. е. $\Delta y \rightarrow l_1$, причем остается постоянной за все время

измерения. Последнее вполне понятно, так как в пределе при $n = 0$ имеем систему с абсолютно жесткой связью, которая, не давая отклонений, перемещается вместе с вибрирующей опорой.

Для промежуточных значений n уравнение (338) можно представить так:

$$\Delta y = l_1 \frac{n^2}{1 - n^2} \left(\frac{1 - 2n^2}{n^2} \sin \omega t + \sin kt \right). \quad (342)$$

В данном случае амплитуда погрешности Δy то возрастает, то убывает по мере того, как член, являющийся функцией вынужденных колебаний $\frac{1 - 2n^2}{n^2} \sin \omega t$ и складывающийся с амплитудой собственных колебаний $\sin kt$, то возрастает, то убывает, достигая известной предельной амплитуды.

При $n = 1/\sqrt{0,5}$ множитель при $\sin \omega t$ становится нулем; в этом случае получим постоянную амплитуду погрешности Δy , которая будет равна $\sqrt{0,5} l_1$. Этот случай, кроме того, соответствует (для $\varepsilon = 0$ и для $n \leq 1$) минимальной предельной амплитуде погрешности Δy .

Если начальная фаза $\varepsilon \neq 0$, то все изложенное остается в силе, за исключением того, что множитель $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma}$ при $\sin kt$ (уравнение 332) может меняться в пределах от n до 1. Так, при $\varepsilon = 0$, как уже видели выше (уравнение 334), этот множитель равен n ; при значении же $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\text{tg } \gamma = \infty$, т. е. $\sin \gamma = 1$, следовательно, $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} = 1$.

Сказанное выше справедливо только для идеального случая, т. е. при полном отсутствии всяких трений (как кулоновского, так и пропорционального той или другой степени скорости), что на практике не может иметь места. Наличие хотя бы кулоновского трения вызовет более или менее быстрое снижение амплитуд собственных колебаний подвижной системы прибора до некоторой постоянной достаточно малой величины¹. Последнее соответствует действительности при нормально допускаемых затираниях в приборах.

Таким образом весь процесс замера перемещений, вызываемых вибрацией, можно разбить на два этапа: первый соответствует неустановившемуся режиму, т. е. постепенному снижению амплитуд собственных колебаний прибора; второй соответствует установившемуся режиму и наступает с момента, когда искажения, вызываемые собственными колебаниями прибора, достигнут некоторого минимального постоянного значения. Нормально замер вибраций следует производить по истечении некоторого времени с того момента, как прибор подвергся их воздействию. Поэтому при нормальных условиях в отличие от измерений кратковременно протекающих явлений можно считать, что собственные колебания прибора успокоятся и не будут искажать показаний прибора, во всяком случае, в пределах, не превышающих погрешностей трения. Таким образом в основном амплитуда искажений показаний прибора будет зависеть только от множи-

¹ См. работу инж. Михайлова, «К теории механических вибрографов для полетных исследований», Технические заметки ЦАГИ, № 148.

теля при $\sin \omega t$, т. е. если трение хотя и не равно нулю, но так мало, что им можно пренебречь, то погрешность будет следующая:

$$\Delta y_1 = l_1 \frac{1 - 2n^2}{1 - n^2} \sin \omega t. \quad (343)$$

Так как $\frac{1}{1 - n^2}$ по существу является коэффициентом динамической восприимчивости (динамического увеличения) при $b = 0$, то при измерениях параметров вибрации погрешности в основном сводятся к погрешностям от динамического увеличения.

Таким образом при пользовании высокочастотными приборами только в одном случае будем иметь погрешность, близкую к нулю, — при $n = \sqrt{0,5}$. При изменении же n в ту и другую сторону погрешность растет, причем достаточно быстро. Так, например, при изменении n всего от 0,707 до 1 погрешность растет от нуля в пределе до бесконечности, и при изменении n в другую сторону всего от 0,707 до $n = 0,5$ амплитуда погрешности растет от 0 до 0,666 l_1 , т. е. больше чем до 50% измеряемой величины.

Из изложенного следует, что с помощью высокочастотного прибора нельзя получить хороших результатов при замере перемещений от вибраций даже при весьма незначительном диапазоне изменения частот — в пределах, меньших, чем от ω до 2ω .

4. ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ВИБРАЦИЕЙ, С ПОМОЩЬЮ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПРИБОРОВ

Иначе обстоит дело с низкочастотными приборами, т. е. если $n > 1$. Для этого случая воспользуемся уравнением (337):

$$\Delta y = l_1 \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[\frac{1}{n^2} \sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma) \right], \quad (337)$$

и для $\varepsilon = 0$ — уравнением (339):

$$\Delta y = l_1 \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[\frac{1}{n^2} \sin \omega t - n \sin kt \right]. \quad (339)$$

Когда $n \gg 1$ и можно пренебречь единицей по сравнению с n , а также считать $\frac{1}{n} \approx 0$, то погрешность в измерении перемещений от вибрации примет следующий вид:

$$\Delta y = -l_1 \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma);$$

и для $\varepsilon = 0$

$$\Delta y = -l_1 n \sin kt,$$

т. е. получим погрешность исключительно за счет собственных колебаний.

Как уже сказано выше, значение $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma}$ меняется от n до 1, следовательно, амплитуда погрешности от собственных колебаний при $n \gg 1$ в зависимости от различных значений начальной фазы ε может меняться в пределах от nl_1 до l_1 .

Однако в реальных условиях погрешностью от собственных колебаний в связи с их успокоением можно пренебречь, поэтому с помощью низкочастотного прибора можно при замере перемещений, вызываемых вибрацией, получить достаточно малые погрешности для любого диапазона частот вибрации при одном лишь условии, чтобы

$$n_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{k} \gg 1.$$

Таким образом в данном случае погрешность замера перемещения от вибраций сведется к погрешности от динамического увеличения, уравнение для которой будет иметь следующий вид:

$$\Delta y = l_1 \frac{1}{n^2 - 1} \sin \omega t. \quad (344)$$

Из уравнения (344) видно, что уже при $n_{\min} = 5$ амплитуда погрешности не превысит примерно 4% l_1 , при всех же других значениях $n > 5$ она будет значительно меньше.

При замерах перемещений от вибраций представляет интерес не столько сама по себе абсолютная или, вернее, относительная погрешность, которая по существу может рассматриваться как определенное изменение масштаба записи, сколько постоянство масштаба записи в необходимом диапазоне изменения отношения частот n .

Чтобы сравнить с этой точки зрения высокочастотные приборы с низкочастотными, посмотрим, каковы будут относительные изменения масштаба, отнесенные к относительным изменениям n , так как по существу

$$\lambda'_2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 - 1}$$

для случая $n_2 > 1$ и

$$\lambda'_1 = \frac{n_1^2}{1 - n_1^2}$$

для случая $n_1 < 1$ являются масштабными коэффициентами в уравнениях (333) и (332). Для этого возьмем производную $\frac{d\lambda'}{dn}$, отнесенную к величине λ' и умноженную на n , которая будет иметь для обоих случаев следующий вид:

$$\frac{n d\lambda'}{\lambda' dn} = \frac{2}{n^2 - 1}.$$

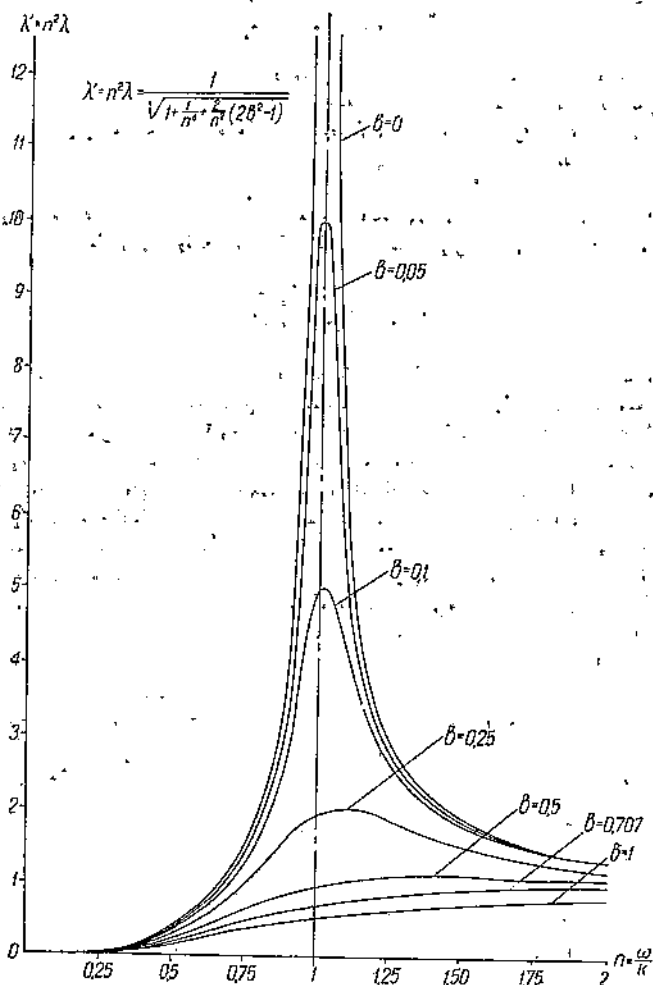
Так как выражение $n^2 - 1$ положительно для $n > 1$ и отрицательно для $n < 1$, то равные по абсолютному значению относительные изменения масштаба, отнесенные к относительным изменениям n , будем иметь в том случае, если

$$1 - n_1^2 = n_2^2 - 1$$

или

$$n_1 = \sqrt{2 - n_2^2}. \quad (345)$$

Подставляя в уравнение (345) различные значения n_2 , увидим, что равные относительные изменения λ' , отнесенные к относительным изменениям n , можно получить только для значений $n_2^2 < 2$. Та например, для значения $n_2 = 1,4$ получим $n_1 = 0,2$.



Фиг. 58. Резонансные кривые.

Рассматривая далее резонансную кривую (фиг. 58), можно установить, что, во-первых, при значениях $n_2^2 < 2$ мы имеем еще достаточно большую скорость изменения λ' в зависимости от изменения n и во-вторых, при значении $n_1 = 0,2$ и ниже $\lambda' \ll 1$, т. е. масштаб записи будет весьма мал, в то время как при $n_2 = 1,4$ и выше масштаб записи близок к единице и с увеличением n_2 стремится к единице.

Из изложенного видно, что замер перемещений, вызываемых вибрацией, выгодно производить с помощью низкочастотных приборов

Однако необходимо указать на одно затруднение, встречающееся при постройке низкочастотных приборов.

Так как

$$[k^2] = \frac{F_0}{m} = \frac{F_0 g}{P} = \frac{g}{l_p},$$

где P — вес неуравновешенной массы,

g — ускорение силы тяжести,

l_p — прогиб пружины под действием веса P неуравновешенной массы m ,

F_0 — упругость пружины,

то прогиб пружины под действием собственного веса груза вибрографа, не имеющего уравновешенных масс, будет:

$$l_p = \frac{g}{k^2} = \frac{g n^2}{\omega^2}. \quad (346)$$

При уменьшении частоты вибраций и при некотором постоянном значении n , как видно из уравнения (346), величина прогиба под собственным весом груза сильно возрастает, что требует значительного увеличения габаритов прибора. Это обстоятельство приобретает еще большее значение в тех случаях, когда прибор, кроме того, еще должен работать в условиях действующих на него перегрузок.

Например, если задаться $n = 5$ и $\omega = 20$ (что примерно соответствует 200 циклам в минуту), то прогиб пружины под собственным весом груза будет равен $l_p = 62,5$ см.

Таким образом с точки зрения уменьшения габаритов прибора целесообразно по возможности увеличивать его собственную частоту k . В большинстве случаев значение имеет не сама по себе относительная погрешность, которая, как указывалось выше, с достаточной точностью может быть учтена в виде масштаба записи прибора, а ее постоянство, другими словами, сохранение постоянства масштаба записи. Поэтому расчет прибора целесообразно вести таким образом, чтобы изменение масштаба записи не превышало заданной величины.

Подходя таким образом к расчету прибора, можно найти удовлетворительные решения задачи для значительно более высоких собственных частот прибора. Пренебрегая членом собственных колебаний, уравнение (333) для масштаба записи при $n > 1$ можно написать в следующем виде:

$$[y_0] = \left| \frac{y}{l_1 \sin \omega t} \right| = \left| \frac{n^2}{n^2 - 1} \right|. \quad (347)$$

Задавшись определенным изменением масштаба в виде отношения

$\frac{y'_0}{y_0} = \delta$, можно написать следующую зависимость:

$$\delta = \frac{y'_0}{y_0} = \frac{n_1^2 (n_2^2 - 1)}{n_2^2 (n_1^2 - 1)}. \quad (348)$$

Обозначив заданное отношение $\frac{n_2}{n_1} = z$, будем иметь:

$$\delta = \frac{z^2 n_1^2 - 1}{z^2 (n_1^2 - 1)},$$

откуда

$$n_1 = \sqrt{\frac{\delta - \frac{1}{z^2}}{\delta - 1}} = \frac{\omega_{\min}}{k} \quad (349)$$

или

$$k = \frac{\omega_{\min}}{\sqrt{\frac{\delta - \frac{1}{z^2}}{\delta - 1}}} \quad (349a)$$

С помощью последней зависимости для низкочастотного прибора весьма просто определяется собственная частота, удовлетворяющая условию требуемого сохранения отношения масштабов δ при диапазоне измеряемых частот от ω до $z\omega$.

5. ВЛИЯНИЕ НАЛИЧИЯ В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ ПРИБОРА НАРЯДУ С НЕУРАВНОВЕШЕННЫМИ УРАВНОВЕШЕННЫХ МАСС

Если в приборе кроме неуравновешенной массы m_1 имеется еще приведенная к последней уравновешенная масса m_2 , то в этом случае получим следующую зависимость между прогибом l_p , частотой k , приведенной уравновешенной массой m_2 и общей массой подвижной системы прибора $m_1 + m_2$:

$$l_p = \frac{g n^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right). \quad (350)$$

Следовательно, с помощью добавочных уравновешенных масс можно создать более благоприятные условия в габаритном отношении. Однако с введением в конструкцию прибора уравновешенных масс ухудшаются условия работы прибора в отношении затираний, причем в данном случае кроме увеличения кулоновского трения появляется еще трение, пропорциональное ускорению.

Кроме того, как уже упоминалось выше (стр. 215), наличие добавочных уравновешенных масс в приборе влияет также на амплитуду перемещений подвижной системы прибора. В идеальном случае без учета сопротивлений будем иметь следующую зависимость между перемещением подвижной системы прибора и перемещением, вызываемым вибрацией:

$$y' = l_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[-\sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \sin(kt + \gamma) \right]. \quad (351)$$

Сравнивая уравнение (351) с уравнением (333) для прибора без дополнительных уравновешенных масс, видим, что принципиальной разницы здесь никакой нет, за исключением уменьшения чувствительности прибора в следующем соотношении:

$$\frac{y'}{y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (352)$$

В заключение следует заметить, что другой параметр вибрации — частота, — так как измерение можно производить после того, как собственные колебания прибора практически успокоились и остались только вынужденные колебания, может быть измерена с помощью как высокочастотного, так и низкочастотного прибора.

6. ВЛИЯНИЕ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

В данном случае мы сошлемся опять-таки на схему фиг. 50 и обозначения на стр. 187, причем основные уравнения останутся теми же, за исключением того, что в левой части амплитуду ускорения a выразим через амплитуду перемещений:

$$a = l_1 \omega^2.$$

В таком случае дифференциальное уравнение напишется так:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2 y = l_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (353)$$

Решение этого уравнения получим в следующем виде:

$$y = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) + l_1 \frac{\omega^2}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi), \quad (354)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2h\omega}{k^2 - \omega^2} = \frac{2h\omega}{\omega^2 - k^2}; \quad (355)$$

$$\sin \psi = \frac{2h\omega}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}; \quad (356)$$

$$\cos \psi = \frac{k^2 - \omega^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}} = - \frac{\omega^2 - k^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}. \quad (357)$$

Обозначив, как и выше,

$$\frac{\omega}{k} = n,$$

$$\frac{h}{k} = b,$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} = \lambda,$$

и определив постоянные интегрирования C и γ по начальным условиям при $t=0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ и $y = 0$ (прибор был заарретирован в нулевом положении), получим:

$$y = l_1 n^2 \lambda \left[\sin(\omega t + \varepsilon + \psi) - e^{-bkt} \frac{\sin(\varepsilon + \psi)}{\sin \gamma} \sin(pt + \gamma) \right], \quad (358)$$

где

$$\gamma = \arctg \frac{\sin(\varepsilon + \psi)}{\sqrt{n^2 + b^2} \sin(\varepsilon + \psi + \delta)} \quad (359)$$

$$\delta = \arctg \frac{n}{b}. \quad (360)$$

Принимая

$$y_{00} = l_1 \sin(\omega t + \varepsilon),$$

выражение для погрешности Δy получим в следующем виде:

$$\Delta y = l_1 \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - n^2 \lambda \sin(\omega t + \varepsilon + \psi) + n^2 \lambda e^{-bkt} \frac{\sin(\varepsilon + \psi)}{\sin \gamma} \sin(pt + \gamma) \right]. \quad (361)$$

Сравним уравнение (361) с уравнением (336) (для случая, когда $b = 0$), которое представим в таком виде:

$$\Delta y_{(b=0)} = l_1 \left[\sin(\omega t + \varepsilon) - n^2 \lambda_{(b=0)} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi_{(b=0)}) + \right. \\ \left. + n^2 \lambda_{(b=0)} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma_{(b=0)}} \sin(kt + \gamma_{(b=0)}) \right]. \quad (362)$$

Из сравнения этих уравнений можно сделать следующие выводы: 1) изменился коэффициент динамической восприимчивости λ , 2) изменился сдвиг фаз ψ и 3) значительно изменился член собственных колебаний, причем наиболее существенное изменение заключается в появлении в уравнении (361) нового множителя e^{-bkt} и в уменьшении собственной частоты прибора k , так как в данном случае частота собственных колебаний

$$p = k \sqrt{1 - b^2}.$$

Наличие множителя e^{-bkt} при члене собственных колебаний дает еще большее право считать, что можно начать измерение после того, как искажения, вносимые собственными колебаниями подвижной системы прибора, станут достаточно малыми. Таким образом, как и выше, будем рассматривать исключительно погрешности от динамического увеличения:

$$\Delta y = l_1 [\sin(\omega t + \varepsilon) - n^2 \lambda \sin(\omega t + \varepsilon + \psi)]. \quad (363)$$

В большинстве случаев замеров параметров вибраций сдвигом фаз можно пренебречь, поэтому мы и рассмотрим такой случай. Уравнение (363) при этом условии можно переписать в следующем виде:

$$\Delta y = l_1 \left[1 - \frac{l_1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}(2b^2 - 1)}} \right] \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (364)$$

На основании уравнения (364) опять-таки приходим к заключению, что при высокочастотном приборе погрешность, равную нулю, можно получить только для какого-либо одного соотношения параметров n и b , именно когда

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}.$$

При нарушении этого условия в ту и другую сторону погрешность растет.

В данном случае резонансные кривые фиг. 58 также могут осветить некоторые вопросы. Например, как видно из этих кривых, в отношении постоянства масштаба и в отношении величины масштаба мы имеем по существу почти то же самое, что и при отсутствии трения, пропорционального первой степени скорости. Именно при $n < 1$ мы имеем значительное уменьшение масштаба (малые λ') или значительно меняющуюся величину λ' , т. е. меняющийся масштаб. При $n > 1$ значения λ' близки к единице и более постоянны. Сравнивая различные резонансные кривые (для различных значений b), замечаем, что резонансные кривые для значений b от 0,5 до 0,707 ($b^2 = 0,5$) дают наиболее постоянный и наиболее близкий к единице масштаб для значений n , близких к единице. Это обстоятельство играет весьма существенную роль в тех случаях, когда нельзя использовать прибор, для которого $n \gg 1$.

Если можно воспользоваться прибором, для которого $n_{\min} \gg 1$ (низкочастотным¹), точно так же, как и при отсутствии сопротивления, пропорционального первой степени скорости, можно получить погрешности, не превышающие определенной заданной величины. Вообще, как уже указывалось выше, при возрастании n успокоение, пропорциональное первой степени скорости, перестает оказывать существенное влияние на работу прибора. Это ясно видно при сравнении уравнения (344) (для случая, когда $b = 0$), представленного в следующем виде:

$$\Delta y_{(b=0)} = I_1 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^2}}} \right] \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (344a)$$

с уравнением (364) для случая, когда $b \neq 0$:

$$\Delta y_{(b \neq 0)} = I_1 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}(2b^2 - 1)}} \right] \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (364)$$

Из этих уравнений видно, что при $n \gg 1$ оба члена подкоренного количества, содержащие n , становятся малы по сравнению с единицей, и ими можно пренебречь. Таким образом, на работу низкочастотных приборов трение, пропорциональное первой степени скорости, оказывает достаточно малое влияние. Поэтому на таких случаях мы больше останавливаться не будем и перейдем к рассмотрению погрешностей таких измерений, когда прибор должен работать при значениях n , близких к единице.

В данном случае на основании тех же соображений, что и выше, целесообразно искать такие параметры прибора, при которых мы должны получить не какую-либо определенную погрешность, не превосходящую заданной величины а определенное заданное постоянство масштаба записи.

Как уже указывалось выше, в соответствии с фиг. 58, повидимому, наилучшие результаты можно получить при степени успокоения b

¹ Низкочастотный прибор мы понимаем не абсолютно, а относительно замеряемой частоты, т. е. такой, для которого $n \gg 1$.

между 0,5 и 0,707. При этих значениях степени успокоения b измения λ' при $n > 1$ и близком к единице наименьшие. Максимум λ' как видно из графика резонансных кривых, по мере увеличения степеней успокоения b смещается в сторону больших значений n и при $b^2 \geq 0,5$, λ' достигает максимума только при $n = \infty$.

Очевидно, прибор сможет удовлетворить требуемому постоянству масштабов даже в том случае, если рабочий диапазон будет расположен по обе стороны максимума коэффициента динамической восприимчивости λ' , который по уравнению (364) определяется следующей зависимостью:

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}(2b^2 - 1)}}. \quad (365)$$

Условие для нахождения максимума λ' получим, взяв производную λ' по n :

$$\frac{d\lambda'}{dn} = \frac{2n[1 + n^2(2b^2 - 1)]}{[1 + n^4 + 2n^2(2b^2 - 1)]^{1,5}},$$

и приравняв ее нулю:

$$1 + n^2(2b^2 - 1) = 0,$$

откуда ¹

$$n^2 = \frac{1}{1 - 2b^2}$$

и

$$b = \sqrt{0,5 - \frac{1}{2n^2}}. \quad (366)$$

Обозначим через n отношение частот, соответствующее максимуму λ' , через n_1 и n_2 крайние значения отношения частот, определяющие диапазон работы прибора, через z_1 отношение $\frac{n}{n_1}$, через z отношение $\frac{n_2}{n}$ и через z_0 отношение $\frac{n_2}{n_1}$ (z_1, z и $z_0 > 1$), через y_0' , y_0'' и y_0 масштабы записи, соответствующие отношениям частот n_1 , n_2 и n , и через δ_1 и допустимые отношения масштаба $\frac{y_0'}{y_0}$ и $\frac{y_0''}{y_0}$. Тогда можно написать следующие уравнения:

$$\delta_1^2 = \left(\frac{y_0'}{y_0} \right)^2 = \frac{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}(2b^2 - 1)}{1 + \frac{z_1^4}{n^4} + \frac{2z_1^2}{n^2}(2b^2 - 1)}; \quad (367)$$

$$\delta^2 = \left(\frac{y_0''}{y_0} \right)^2 = \frac{1 + \frac{1}{z^4 n^4} + \frac{2}{z^2 n^2}(2b^2 - 1)}{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}(2b^2 - 1)}. \quad (368)$$

¹ Подставив полученную величину n во вторую производную λ' по n ($\frac{d^2\lambda'}{dn^2}$) получим отрицательную величину, т. е. при данном значении n получаем максимум коэффициента динамической восприимчивости λ' .

Совершенно очевидно, что $\delta_1 < 1$, а $\delta > 1$. Подставляя в уравнения (367) и (368) значения b из условия для максимума λ' (уравнение 366), получим:

$$\delta_1^2 = \frac{1 + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{z_1^4}{n^4} - \frac{2z_1^2}{n^4}} = \frac{n^4 - 1}{n^4 + z_1^4 - 2z_1^2}; \quad (369)$$

$$\delta^2 = \frac{1 + \frac{1}{z^4 n^4} - \frac{2}{z^2 n^4}}{1 + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^4}} = \frac{1 + z^4 n^4 - 2z^2}{z^4 (n^4 - 1)}. \quad (370)$$

На основании уравнений (369) и (370) можно получить два уравнения для n^4 :

$$n^4 = \frac{1 + \delta_1^2 (z_1^4 - 2z_1^2)}{1 - \delta_1^2}; \quad (371)$$

$$n^4 = \frac{1 + \delta^2 z^4 - 2z^2}{z^4 (\delta^2 - 1)}. \quad (372)$$

Задавшись далее условием, что

$$\frac{1}{\delta_1} = \delta,$$

уравнения (371) и (372) можно переписать в следующем виде:

$$n^4 = \frac{\delta^2 + z_1^4 - 2z_1^2}{\delta^2 - 1}; \quad (373)$$

$$n^4 = \frac{1 + \delta^2 z^4 - 2z^2}{z^4 (\delta^2 - 1)} = 1 + \frac{(1 - z^2)^2}{z^4 (\delta^2 - 1)}. \quad (374)$$

Из уравнения (374) видно, что n всегда больше единицы при $\delta > 1$, т. е. всегда может быть удовлетворено уравнение (366).

Учитывая далее, что

$$zz_1 = z_0,$$

на основании уравнений (373) и (374) получим:

$$z = \sqrt{\frac{z_0^4 - 1}{2(z_0^2 - 1)}}. \quad (375)$$

Знак минус мы опускаем, так как z не может быть отрицательным.

Таким образом, задавшись определенным диапазоном работы прибора z_0 , можно определить значение z и затем, задавшись допустимым значением δ , т. е. допустимым изменением масштаба, определяем значение n из уравнений (374).

Определив по зависимости

$$z_1 = \frac{z_0}{z}$$

значение z_1 , можно для проверки определить значение n и из уравнения (373).

Из условия максимума (уравнение 366) определяем величину степени успокоения:

$$b = \sqrt{0,5 - \frac{1}{2n^2}}. \quad (366)$$

Например, если задаться $z_0 = 3$, то по уравнению (375)

$$z = \sqrt{\frac{z_0^4 - 1}{2(z_0^2 - 1)}} = \sqrt{5} \approx 2,234.$$

Если задаться $\delta^2 = 1,05$, то по уравнению (374)

$$n^4 = \frac{1 + \delta^2 z^4 - 2z^2}{z^4(\delta^2 - 1)} = \frac{1 + 1,05 \cdot 25 - 10}{25 \cdot 0,05} \approx 13,78.$$

По зависимости

$$z_1^2 = \frac{z_0^2}{z^2}$$

получим: $z_1^2 = 1,8$, и на основании уравнения (373) имеем:

$$n^4 = \frac{\delta^2 + z_1^4 - 2z_1^2}{\delta^2 - 1} = \frac{1,05 + 3,24 - 3,6}{0,05} \approx 13,78,$$

т. е.

$$n^2 \approx 3,71 \quad \text{и} \quad n \approx 1,925.$$

Следовательно, прибор может работать в диапазоне отношения частот

$$n_1 = \frac{n}{z_1} \approx 1,434$$

и

$$n_2 = nz \approx 4,32,$$

при степени успокоения (уравнение 366)

$$b = \sqrt{0,5 - \frac{1}{2n^2}} \approx \sqrt{0,365} \approx 0,604.$$

Если, предположим, задана частота $\omega_{\min} = 20 \frac{1}{\text{сек}}$, то собственная частота k прибора должна быть следующая:

$$k = \frac{\omega_{\min}}{n_1} = \frac{20}{1,434} \approx 13,5,$$

и прогиб пружины под собственным весом неуравновешенной массы (для случая отсутствия уравновешенных масс) по уравнению (346) будет:

$$l_p = \frac{g}{k^2} \approx \frac{981}{182} \approx 5,4 \text{ см.}$$

Если подсчитать для тех же условий параметры прибора без успокаивающего приспособления (уравнение 349), то получим:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\delta - \frac{1}{z^2}}{\delta - 1}} \approx 6,04,$$

откуда

$$k = \frac{\omega_{\min}}{n_1} = \frac{20}{6,04} = 3,315,$$

и на основании уравнения (346)

$$l_p = \frac{g}{k^2} \approx \frac{981}{11} \approx 89,2 \text{ см.}$$

Из изложенного видно, что успокоение, пропорциональное первой степени относительной скорости, дает возможность значительно снизить габариты прибора; это играет особо существенную роль в тех случаях, когда приходится замерять перемещения, вызываемые вибрацией малой частоты.

В заключение небезынтересно посмотреть, что может дать успокоение, пропорциональное первой степени абсолютной скорости.

7. УСПОКОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ

При наличии сопротивления, пропорционального первой степени абсолютной скорости (фиг. 59), уравнение движения подвижной системы прибора напишется так:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + N'_0 \frac{dz}{dt} + F_0 y = 0. \quad (376)$$

Так как

$$z = x + y,$$

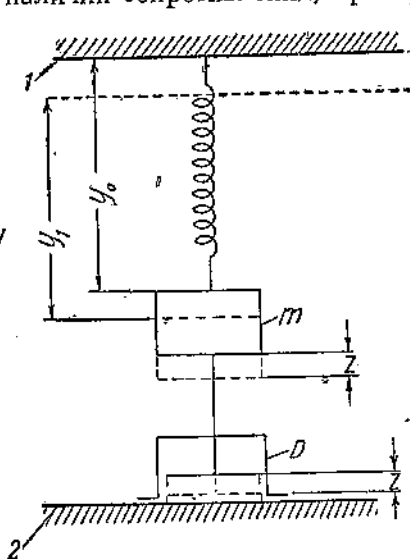
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

и

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2},$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + N'_0 \frac{dy}{dt} + F_0 y &= \\ &= -m \frac{d^2 x}{dt^2} - N'_0 \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$



Фиг. 59. Принципиальная схема прибора, при наличии успокоения, пропорционального первой степени абсолютной скорости.

1—вибрирующая опора, 2—неподвижная опора.

Разделив обе части последнего уравнения на m , получим:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2 y = -\frac{d^2 x}{dt^2} - 2h \frac{dx}{dt},$$

где

$$2h = \frac{N'_0}{m} \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{F_0}{m}.$$

Возмущающую функцию представим, как и выше, в следующем виде:

$$x = l_1 \sin(\omega t + \varepsilon).$$

В таком случае

$$\frac{dx}{dt} = l_1 \omega \cos(\omega t + \varepsilon)$$

и

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -l_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon).$$

В окончательном виде уравнение (376) можно написать так:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2 y = l_1 [\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon) - 2h \omega \cos(\omega t + \varepsilon)]. \quad (377)$$

Решение этого уравнения без свободного члена будет:

$$y_1 = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma).$$

Решение со свободным членом будем искать в следующем виде:

$$y_2 = B \sin(\omega t + \varepsilon + \psi).$$

Следовательно,

$$\frac{dy_2}{dt} = B \omega \cos(\omega t + \varepsilon + \psi)$$

и

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -B \omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon + \psi).$$

Определив значение B :

$$B = \frac{l_1 \omega \sqrt{\omega^2 + 4h^2}}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}},$$

полное решение уравнения (377) получим в таком виде:

$$y = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) + \frac{l_1 \omega \sqrt{\omega^2 + 4h^2}}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi), \quad (378)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{2hk^2}{\omega(k^2 - \omega^2 - 4h^2)}; \quad (379)$$

$$\sin \psi = -\frac{l_1 \omega 2hk^2}{B[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2]} = -\frac{2hk^2}{\sqrt{\omega^2 + 4h^2} \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}; \quad (380)$$

$$\cos \psi = \frac{l_1 \omega^3 (k^2 - \omega^2 - 4h^2)}{B[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2]} = \frac{\omega(k^2 - \omega^2 - 4h^2)}{\sqrt{\omega^2 + 4h^2} \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}. \quad (381)$$

На тех же основаниях, что и выше, и в данном случае будем рассматривать только вынужденные колебания системы:

$$y = \frac{l_1 \omega \sqrt{\omega^2 + 4h^2}}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varepsilon + \psi). \quad (382)$$

Обозначая через y_{00} масштаб записи ¹, получим:

$$y_{00} = \frac{y}{l_1 \sin(\omega t + \varepsilon + \psi)} = \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + 4h^2}}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}$$

или

$$y_{00} = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{b^2}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}(2b^2 - 1)}}. \quad (383)$$

В первую очередь мы видим, что успокоение, пропорциональное абсолютной скорости, вносит по сравнению с успокоением, пропорциональным относительной скорости, существенное изменение в масштаб записи (в коэффициент динамической восприимчивости):

$$\frac{y_{00}}{y_0} = \frac{\lambda''}{\lambda'} = \sqrt{1 + 4 \frac{b^2}{n^2}}. \quad (384)$$

При малых значениях n и значительных степенях успокоения этот множитель вносит весьма существенные изменения.

Далее уравнение (383) можно представить в таком виде:

$$y_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2 + 4b^2}}}. \quad (385)$$

Из уравнения (385) видно, что при успокоении, пропорциональном первой степени абсолютной скорости, все кривые коэффициента динамической восприимчивости для любых значений степени успокоения b пересекаются в одной точке, соответствующей $y_{00} = 1$ и $n^2 = 0,5$, так как при $n^2 = 0,5$

$$\frac{2 - \frac{1}{n^2}}{n^2 + 4b^2} = 0. \quad (386)$$

Условие для максимума в данном случае получим в следующем виде:

$$n^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2b^2}. \quad (387)$$

или

$$b = n \sqrt{\frac{n^2 - 1}{2}}. \quad (388)$$

¹ Предполагается, как и выше, отсутствие передаточного механизма.

Для $b = 1$ максимум y_{00} получается при $n^2 = 2$. В этом случае $y_{00} = 1,155$, т. е. при $b = 1$, при изменении n от 0,707 до 1,414 и далее от 1,414 до ∞ масштаб записи меняется всего от 1 до 1,155 и от 1,155 до 1, т. е. примерно всего на 15%. При еще большем повышении степени успокоения b (сверх критического) изменение масштаба становится еще меньше, и при бесконечно большом b изменение масштаба становится равным нулю. Это вполне понятно, так как последнее условие равносильно абсолютно жесткой связи неуравновешенной массы прибора с какой-то средой, находящейся в покое.

Таким образом успокоение, пропорциональное первой степени абсолютной скорости, весьма выгодно, но осуществить такого рода успокаивающие устройства в большинстве случаев не представляется возможным.

НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ О МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА ПРИБОРОВ

Глава X РАСЧЕТ АКСЕЛЕРОГРАФА ВСТУПЛЕНИЕ

Качество прибора в основном определяется следующими свойствами: 1) простотой, 2) надежностью и 3) точностью. Достигаются эти качества правильным выбором принципиальной схемы прибора, подбором наилучших параметров выбранной схемы и целесообразным конструктивным оформлением расчетных данных.

Последнее в большой степени зависит от конструкторских способностей работника и его конструкторского опыта, обеспечивающего широкое знание различных конструктивных схем и выполнений.

Первые два фактора зависят в наибольшей степени от того, насколько работник владеет расчетом и насколько он владеет анализом; никакой практический опыт в данном случае не сможет полностью заменить этих качеств работника.

Но мало абстрактно владеть расчетом, — нужно уметь целесообразно приложить его к данным конкретным целям. Это качество в первую очередь связано с умением рационально упрощать задачу, целесообразно связывать основные качества, требуемые от прибора, с его параметрами. Одним из основных качеств прибора (а в некоторых случаях и единственным основным качеством) является точность, поэтому в первую очередь расчет должен обеспечить по возможности вывод окончательных уравнений, дающих наиболее простую и наглядную зависимость погрешностей прибора от его параметров.

Мы не будем здесь задаваться целью дать исчерпывающие указания, как следует вести расчет при решении любых задач, а попытаемся только на одном-двух достаточно простых примерах показать, насколько в результате целесообразно построенного расчета можно получить ясный ответ на вопрос, какие условия обеспечивают наилучшие качества прибора.

1. ПРИМЕРНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРИБОРУ

Для примера зададимся следующими техническими требованиями к самописцу ускорений:

1) самописец должен записывать составляющую ускорений, действующую по какой-либо одной из осей исследуемого объекта;

2) ускорение протекает не стационарно, а по синусоидальной зависимости в виде кратковременно протекающего (непериодического) явления, причем наибольшая скорость нарастания и спадания такова, что кривая ускорения примерно соответствует отрезку синусоидальной кривой с полупериодом в 2 сек.;

3) суммарная предельная приведенная погрешность не должна превышать 5% от максимальной заданной амплитуды ускорения;

4) масштаб записи, другими словами, чувствительность, прибора должна обеспечивать запись одного g в 4 см, т. е. $y_0 = 4$ см;

5) габариты прибора должны быть минимальными;

6) максимальная амплитуда составляющих ускорения как замеряемой, так и действующих по другим осям, $0,5g$;

7) при изменении температуры на $\pm 2^\circ$ погрешность ¹ не должна превышать указанной выше величины.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ВЫБОР ПРИНЦИПИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

Так как к прибору предъявляется требование определенной безинертности, то к выбору схемы прибора нужно подойти именно с этой точки зрения.

Наибольшую безинертность могут обеспечить две основных принципиальных схемы прибора: 1) пьезокварцевая и 2) с микрозаписью. Однако эти схемы обладают весьма существенными недостатками: первая требует достаточно сложной аппаратуры для записи пьезоэлектрических явлений (усилитель, осциллограф), вторая требует сложной расшифровки записей прибора с применением оптических систем с многократным увеличением (до 200—600). Кроме того, схема с микрозаписью не соответствует п. 4 технических требований.

Пьезокварцевая схема, между прочим, в данном случае неприемлема еще и потому, что при столь медленном нарастании и спадании замеряемой величины (2 сек.) непостоянство пьезоэлектрических зарядов вследствие утечек становится слишком большим.

Высокую безинертность можно также получить, применяя фотозапись. Однако и в этом случае расшифровка записи и эксплуатация прибора сильно усложняются.

Воспользовавшись проведенным выше исследованием инерционных погрешностей (см. стр. 190), можно прийти к выводу, что при заданной частоте возмущающего явления $\omega \approx 1,5 \frac{1}{\text{сек.}}$, наметив собственную частоту k прибора порядка $60-70 \frac{1}{\text{сек.}}$, можно удовлетворить техническим требованиям в отношении инерционных погрешностей.

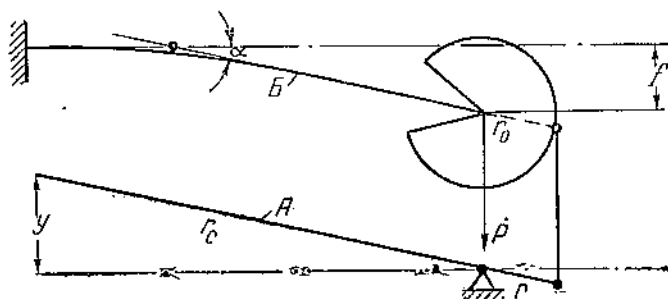
При собственной частоте прибора $k \approx 60-70 \frac{1}{\text{сек.}}$ следует признать наиболее рациональной простейшую механическую систему: пружины с массой, перемещения которой записываются в увеличенном масштабе. Конструктивно эта схема может быть осуществлена

¹ Последнее требование может быть поставлено в такой форме в связи с тем, что температурная погрешность является систематической и может быть учтена при обработке результатов измерения, однако предполагается, что возможная неточность определения температуры прибора может достигать порядка $\pm 2^\circ$.

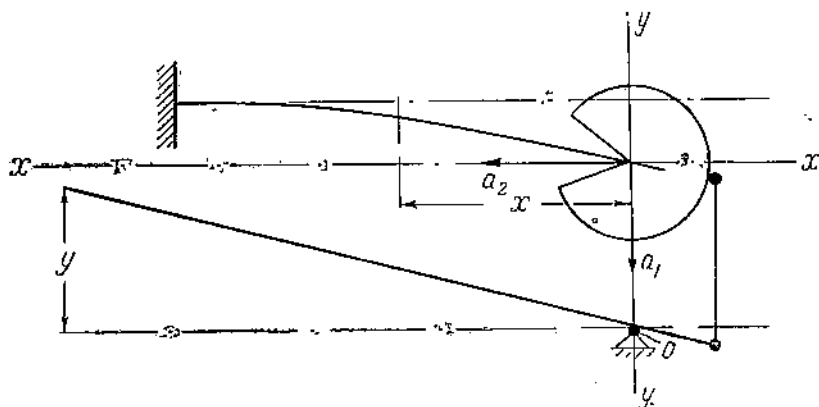
так, как показано на фиг. 60. Груз P удерживается в положении равновесия плоской консольной пружиной B . Незначительные перемещения груза передаются посредством передаточного механизма с соответствующим передаточным отношением на пишущий рычаг A прибора.

3. СОСТАВЛЕНИЕ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ ВСЕХ ФАКТОРОВ, ВЫЗЫВАЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ПРИБОРА

В первую очередь рассмотрим эту схему в условиях статического прогиба, т. е. проведем ее исследование с точки зрения инструментальных погрешностей статических измерений.



Фиг. 60. Кинематическая схема акселерографа.



Фиг. 61. Кинематическая схема акселерографа.

Так как направление полного действующего ускорения может и не совпасть с осью исследуемого объекта, относительно которой надлежит произвести замер составляющей ускорения, то прогиб пружины может быть вызван составляющими ускорения, действующими по двум осям — по оси xx и оси yy (фиг. 61).

В отношении возможной составляющей ускорения по третьей оси прибора можно считать, что она прогиба не вызовет, так как плоская прямоугольная пружина достаточной ширины в направлении третьей оси имеет достаточно большую жесткость.

Примем следующие обозначения (фиг. 60 и 61):

- $a_1 g$ — составляющая ускорения по оси yy ,
- $a_2 g$ — составляющая ускорения по оси xx ,
- ρ — радиус кривизны прогиба пружины,
- M — изгибающий момент,
- y_x — прогиб пружины на расстоянии x от точки приложения сил,
- E — модуль Юнга,
- J — момент инерции площади сечения пружины,
- m — масса груза,
- l — длина пружины.

Тогда можно написать известную зависимость для кривизны оси, изогнутой под действием изгибающих моментов балки:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y_x}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}, \quad (389)$$

где

$$M = mg(a_1 x + a_2 y_x). \quad (390)$$

На основании уравнений (389) и (390) получим:

$$\frac{d^2 y_x}{dx^2} = - \frac{mg}{EJ} (a_1 x + a_2 y_x). \quad (391)$$

Последнему дифференциальному уравнению удовлетворяет следующее частное решение:

$$y_{x_1} = - \frac{a_1}{a_2} x.$$

Общее решение при $a_1 = 0$ будет:

$$y_{x_2} = C_1 \sin \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x.$$

Полное решение уравнения (391) получим в следующем виде:

$$y_x = y_{x_1} + y_{x_2} = C_1 \sin \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x - \frac{a_1}{a_2} x.$$

Произвольные постоянные определяются из следующих условий¹:

$$\frac{dy_x}{dx} = 0 \text{ при } x=l \text{ и } y_x = 0 \text{ при } x=0.$$

Согласно этим условиям

$$C_2 = 0 \text{ и } C_1 = \frac{a_1}{a_2 \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} \cos \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l}.$$

Подставляя значения произвольных постоянных, получим:

$$y_x = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{\sin \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x^2}{\sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} \cos \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l} - x \right), \quad (392a)$$

¹ В данном случае считаем, что центр тяжести груза совпадает с концом пружины и именно с точкой закрепления пружины в грузе.

и для $x = l$:

$$y_{x=l} = l \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2}{l \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}}} - 1 \right). \quad (392)$$

Разлагая $\operatorname{tg} \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2$ в ряд:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2 = \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2 + \frac{\left(\sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2 \right)^3}{3} + \frac{2 \left(\sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2 \right)^5}{3 \cdot 5} + \\ + \frac{17 \left(\sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2 \right)^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \dots,$$

и ограничившись первыми тремя членами, поскольку величина $\sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2$ всегда меньше единицы, получим:

$$y_{x=l} = \frac{mga_1}{\left(\frac{3EJ}{l^3} \right)} + \frac{6}{5} \frac{m^2 g^2 a_1 a_2}{\left(\frac{3EJ}{l^3} \right)^2} \frac{1}{l}. \quad (393)$$

Для случая

$$M = mg(a_1 x - a_2 y_x)$$

получим уравнение (392) в следующем виде:

$$y_{x=l} = l \frac{a_1}{a_2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} h \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2}{l \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}}} \right). \quad (394)$$

Так как

$$\operatorname{tgh} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{3 \cdot 5} - \frac{17z^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \dots,$$

то в конечном результате

$$y_{x=l} = \frac{mga_1}{\left(\frac{3EJ}{l^3} \right)} - \frac{6}{5} \frac{m^2 g^2 a_1 a_2}{\left(\frac{3EJ}{l^3} \right)^2} \frac{1}{l}. \quad (395)$$

В уравнениях (393) и (395) выражение $\frac{3EJ}{l^3}$ является упругостью плоской прямоугольной пружины, нагруженной сосредоточенной нагрузкой на свободном конце.

Обозначив угол поворота элемента пружины в месте крепления груза, а следовательно, и угол поворота самого груза через α и считая, ввиду малости величины $\sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x$

$$\sin \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x \approx \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} x,$$

согласно уравнениям (390) и (392а) получим следующее выражение, определяющее этот угол:

$$\alpha = \int_0^l \frac{M}{EJ} dx = \frac{P}{EJ} \int_0^l x dx = \frac{P}{2EJ} l^2$$

или

$$\alpha = \frac{P}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} \frac{1}{3} l, \quad (396)$$

где через P обозначена некоторая эквивалентная сила $\frac{mga_1}{\cos \sqrt{\frac{mga_2}{EJ}} l^2}$,

действующая на пружину и вызывающая прогиб:

$$\frac{P}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} = y_{x=l}.$$

Таким образом уравнение (396) можно переписать так:

$$\alpha = y_{x=l} \frac{1}{\frac{2}{3} l}. \quad (397)$$

Обозначив через r_0 радиус груза, считая, что место крепления тяги к грузу расположено на расстоянии r_0 от центра тяжести груза, и обозначив через y_{r_0} перемещение места крепления тяги к грузу, получим:

$$y_{r_0} = y_{x=l} + r_0 \sin \alpha$$

или приближенно вследствие малости угла α

$$y_{r_0} = y_{x=l} + r_0 \alpha. \quad (398)$$

Обозначив через r и r_c малое и большое плечи рычага A (фиг. 60), через y'' перемещение пишущего конца рычага A под влиянием воздействия на груз составляющих ускорения по осям yy и xx и пренебрегая изменением наклона тяги как величиной высшего порядка малости, получим:

$$y'' = y_{r_0} \frac{r_c}{r}.$$

На основании уравнений (397) и (398) будем иметь:

$$y'' = y_{x=l} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right).$$

В конечном результате согласно уравнениям (393) и (395) получим:

$$y'' = \frac{mga_1}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right) \pm \frac{6}{5} \frac{m^2 g^2 a_1 a_2}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)^2} \frac{1}{l} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right). \quad (399)$$

Из уравнения (399) видно, что перемещение пишущего конца рычага A , соответствующее замеряемой составляющей ускорения по оси yy :

$$y = \frac{mga_1}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right), \quad (400)$$

искажается дополнительным перемещением $\pm \Delta_1 y$, вызываемым воздействием на прибор составляющей ускорения по оси xx ;

$$\pm \Delta_1 y = \pm \frac{6}{5} \frac{m^2 g^2 a_1 a_2}{(3EJ)^2} \frac{1}{l} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right). \quad (401)$$

Это дополнительное перемещение можно рассматривать как погрешность от воздействия на прибор посторонних сил.

Кроме только что рассмотренной погрешности, будем иметь еще одну от воздействия на прибор посторонних сил — погрешность трения.

Если обозначить через $M_{тр}$ приведенный полный момент трения к оси пикирующего рычага A (с учетом трения в шарнирах тяг), то на конце малого плеча (в месте крепления тяги) пикирующего рычага получим силу трения

$$P_{тр} = \frac{M_{тр}}{r}.$$

Воздействуя через тягу на груз, эта сила создаст добавочное перемещение центра тяжести груза:

$$y'_{x=l} = -\frac{P_{тр}}{EJ} \int_0^l x(x+r_0) dx = -\frac{P_{тр}}{EJ} \left(\frac{l^3}{3} + \frac{l^2 r_0}{2} \right), \quad (402)$$

и поворот груза на угол α' под действием момента $M = P_{тр}(x+r_0)$:

$$\alpha' = -\frac{P_{тр}}{EJ} \int_0^l (x+r_0) dx$$

или

$$\alpha' = \frac{P_{тр}}{(3EJ)^2} \left(\frac{3}{2l} + 3 \frac{r_0}{l^2} \right) = \frac{M_{тр}}{(3EJ)^2} \frac{1}{r} \left(\frac{3}{2l} + 3 \frac{r_0}{l^2} \right). \quad (403)$$

Так как

$$P_{тр} = \frac{M_{тр}}{r},$$

перепишем уравнение (402) в следующем виде:

$$y'_{x=l} = \frac{M_{тр}}{(3EJ)^2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right). \quad (404)$$

Полное перемещение y'' точки крепления тяги к грузу под влиянием момента трения $M_{тр}$ будет:

$$y'' = y'_{x=l} + r_0 \sin \alpha'$$

или вследствие малости угла α'

$$y'' = y'_{x=l} + r_0 \alpha'.$$

Таким образом на основании уравнений (404) и (403) получим следующую зависимость для перемещения y'' :

$$y'' = \frac{M_{\text{тр}}}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} \frac{1}{r} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right). \quad (405)$$

Далее имеем следующую зависимость между перемещением y'' пишущего конца рычага А (фиг. 60) и перемещением y'' точки крепления тяги к грузу:

$$y''' = y'' \frac{r_c}{r}.$$

Поэтому на основании уравнения (405) перемещение или, вернее, недоход пишущего конца рычага А под влиянием сил трения до истинного положения (погрешность трения) будет:

$$\pm \Delta_2 y = \pm y'' \frac{r_c}{r} = \frac{M_{\text{тр}}}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} \frac{r_c}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right). \quad (406)$$

На возможной неуравновешенности передаточного механизма и пишущего рычага мы останавливаться не будем, так как тщательной балансировкой эта погрешность может быть сведена до неощутимо малых размеров. Здесь следует только указать, что не во всех случаях такую неуравновешенность можно рассматривать только как дополнительную приведенную массу к массе груза: при определенном расположении пишущего рычага по отношению к системе груз—пружина эта неуравновешенность может оказаться источником дополнительных погрешностей от действия составляющей ускорения по третьей оси zz .

Таким образом двумя погрешностями $\Delta_1 y$ и $\Delta_2 y$ исчерпываются все погрешности от воздействия на прибор посторонних сил.

При рассмотрении уравнения (400) видим, что добавочные независимые переменные (см. стр. 24), не являющиеся параметрами прибора, в него не входят. Следовательно, в данном случае методические погрешности будут отсутствовать.

Для полного исследования инструментальных погрешностей прибора нужно еще посмотреть, какие параметры прибора, под влиянием каких явлений и какие претерпевают изменения. Так как величина $\frac{3EJ}{l^3}$ является упругостью F_0 пружины, уравнение (400) перепишем так:

$$y = \frac{mga_1}{F_0} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right). \quad (400a)$$

Из входящих в уравнение (400a) параметров прибора под влиянием температуры могут меняться упругость пружины F_0 , размеры плеч пишущего рычага r_c и r , радиус груза r_0 и длина пружины l . Так как пишущий рычаг будет выполнен из одного материала, т. е. относительные температурные изменения длин плеч r_c и r будут

одинаковыми, то отношение $\frac{r_c}{r}$ при любых температурах будет оставаться постоянным. Что касается отношения $\frac{r_0}{l}$, то вследствие разницы в материалах (груз целесообразно делать из латуни или бронзы, пружина должна быть стальной), это отношение может меняться.

Взяв по указанным выше переменным, входящим в уравнение (400а), логарифмическую производную, на основании теории погрешностей получим следующую температурную относительную погрешность прибора:

$$\delta_t = \frac{\Delta y}{y} = -\frac{r \Delta F_0}{F_0} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right)} \left(\frac{\Delta r_0}{l} - \frac{\Delta l}{l^2}\right). \quad (407)$$

Температурный коэффициент стальных пружин может быть порядка $-0,03\%$ на 1° , т. е. в нашем случае на 2° :

$$\frac{\Delta F_0}{F_0} \approx -0,06\%.$$

Коэффициенты линейного расширения латуни и стали $\beta_{\text{л}} = 0,0019\%$ и $\beta_{\text{ст}} = 0,0011\%$ на 1° , т. е. в нашем случае на 2° :

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} \approx 0,0038\%$$

и

$$\frac{\Delta l}{l} \approx 0,0022\%.$$

Поэтому для нашего случая в численном выражении получим следующую температурную относительную погрешность:

$$\delta_t = \mp 0,06 + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right)} (\pm 0,0038 \mp 0,0022) \frac{r_0}{l} \%.$$

Так как в нашем случае $\frac{r_0}{l} < 1$ и, следовательно,

$$\delta_t = \frac{\Delta y}{y} < \mp 0,06\%,$$

то при неучитываемых изменениях температуры не только в пределах $\pm 2^\circ$, но и значительно больших, этой погрешностью можно пренебречь.

Этим исчерпываются инструментальные погрешности статических измерений прибора.

Таким образом на основании уравнений (400), (401) и (406) получим следующее полное уравнение для перемещения пишущего конца рычага А прибора (фиг. 60):

$$y \pm \Delta_1 y \pm \Delta_2 y = \frac{m g a_1}{(3EJ)^2} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right) \pm \frac{m^2 g^2 a_1 a_2}{(3EJ)^2} \frac{r_c}{r} \frac{1}{l} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right) \pm \frac{M_{\text{тр}}}{(3EJ)^2} \frac{r_c}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right), \quad (408)$$

которое складывается из следующих отдельных перемещений:

1. Перемещения, соответствующего замеряемому ускорению $a_1 g$:

$$y = \frac{m g a_1}{\left(\frac{3 E J}{l^3}\right)} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right). \quad (400)$$

Принимая $a_1 = 1$, получим выражение для чувствительности y_0 прибора, т. е. для перемещения пишущего конца рычага A при ускорении, равном g :

$$y_0 = \frac{m g}{\left(\frac{3 E J}{l^3}\right)} \frac{r_c}{r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right). \quad (409)$$

2. Перемещения, соответствующего погрешности от влияния составляющей ускорения по оси xx :

$$\pm \Delta_1 y = \pm \frac{6}{5} \frac{m^2 g^2 a_1 a_2}{\left(\frac{3 E J}{l^3}\right)^2} \frac{r_c}{r} \frac{1}{l} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right), \quad (401)$$

или на основании уравнения (409):

$$\pm \Delta_1 y = \pm \frac{6}{5} \frac{m g a_1 a_2}{\left(\frac{3 E J}{l^3}\right)} \frac{y_0}{l}. \quad (401a)$$

3. Перемещения, соответствующего погрешности трения:

$$\pm \Delta_2 y = \pm \frac{M_{тр}}{\left(\frac{3 E J}{l^3}\right)} \frac{r_c}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right). \quad (406)$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Мы здесь не будем останавливаться на выводе уравнения движения данной системы, а воспользуемся готовым уравнением, выведенным инж. В. А. Волосевичем в его работе по расчету акселерографа (стр. 309):

$$\begin{aligned} & (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \ddot{\xi} + a_{22} N_0 \dot{\xi} + (a_{11} c_{22} - 2 a_{12} c_{12} + a_{22} c_{11}) \ddot{\xi} + \\ & + c_{22} N_0 \dot{\xi} + (c_{11} c_{22} - c_{12}^2) \xi = a_{12} F''(t) + c_{12} F(t), \end{aligned} \quad (410)$$

где ξ — перемещение места крепления тяги,

N_0 — сила трения, пропорциональная первой степени скорости, отнесенная к единице скорости.

Входящие в уравнение (410) коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_{11} = m_r + m_r \frac{\rho_r^2}{r_0^2} + m_y + m_n;$$

$$a_{12} = m_r \frac{\rho_r^2}{r_0^2};$$

$$c_{22} = m_{\Gamma} \frac{r_{\Gamma}^2}{r_0^2} + m_{\Gamma} + m_{\Pi} \frac{r_0^2}{r^2};$$

$$c_{11} = \frac{12EJ}{l^3} + \frac{12EJ}{l^3 r_0} + \frac{4EJ}{lr_0^2};$$

$$c_{12} = \frac{4EJ}{lr_0^2} + \frac{6EJ}{l^2 r_0};$$

$$c_{22} = \frac{4EJ}{lr_0^2}.$$

Обозначим через m общую массу подвижной системы прибора, состоящую из массы груза m_{Γ} , массы успокоителя m_{Π} (шарнирно связанного с грузом в центре тяжести груза) и приведенной массы пружины μ_{Π} , т. е.

$$m = m_{\Gamma} + m_{\Pi} + \mu_{\Pi}.$$

Приведенная масса призматической пружины равна $\frac{33}{140}$ всей массы пружины, т. е.

$$\mu_{\Pi} = \frac{33}{140} m_{\Pi}.$$

Остальные обозначения — см. приложение 9 (стр. 309).
Возмущающую функцию примем следующего вида:

$$F(t) = ma_1 g \sin \omega t, \quad (411)$$

где $a_1 g$ — измеряемое ускорение,
 ω — частота, характеризующая скорость нарастания и спада
нн кратковременно действующего ускорения.

Обозначим далее:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_0;$$

$$a_{22}N_0 = A_1;$$

$$a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12} + a_{22}c_{11} = A_2;$$

$$c_{22}N_0 = A_3;$$

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = A_4;$$

$$c_{12}ma_1 g = A_5;$$

$$a_{12}ma_1 g = A_6.$$

В таком случае неоднородное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами (уравнение 410) можно переписать так:

$$A_0 \ddot{\xi} + A_1 \ddot{\xi} + A_2 \dot{\xi} + A_3 \dot{\xi} + A_4 \xi = A_5 \sin \omega t - A_6 \omega^2 \sin \omega t. \quad (412)$$

Общее решение этого уравнения без правой части будем искать в следующем виде:

$$\xi_1 = e^{\gamma t}.$$

Тогда получим следующее характеристическое уравнение:

$$A_0 \eta^4 + A_1 \eta^3 + A_2 \eta^2 + A_3 \eta + A_4 = 0. \quad (413)$$

Частное решение с правой частью будем искать в следующем виде:

$$\xi_2 = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t.$$

Тогда получим следующие уравнения для определения произвольных постоянных B_1 и B_2 :

$$A_0 B_1 \omega^4 - A_2 B_1 \omega^2 + A_4 B_1 + A_1 B_2 \omega^3 - A_3 B_2 \omega = A_5 - A_6 \omega^2; \quad (414)$$

$$-A_1 B_1 \omega^3 + A_3 B_1 \omega + A_0 B_2 \omega^4 - A_2 B_2 \omega^2 + A_4 B_2 = 0. \quad (415)$$

При возможных конструктивных оформлениях принятой нами схемы прибора порядок численных величин значений постоянных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_6$ возможен следующий:

$$\begin{aligned} A_0 &\approx 1 \cdot 10^3; & A_4 &\approx 1 \cdot 10^8; \\ A_1 &\approx 5 \cdot 10^1; & A_5 &\approx 1,5 \cdot 10^7; \\ A_2 &\approx 1 \cdot 10^5; & A_6 &\approx 2 \cdot 10^2; \\ A_3 &\approx 2,5 \cdot 10^6; \end{aligned}$$

Величина этих коэффициентов может меняться и достаточно значительно в зависимости от конструктивного оформления прибора, но порядок величин этих коэффициентов, что в данном случае имеет решающее значение, значительно измениться не может.

Подставив полученные численные значения, дающие порядок величин постоянных коэффициентов, в характеристическое уравнение, получим:

$$\eta^4 + 5 \cdot 10^3 \eta^3 + 10^5 \eta^2 + 2,5 \cdot 10^6 \eta + 10^8 = 0.$$

Воспользовавшись методом определения корней данного уравнения, предложенным Дандленом, Лобачевским и Греффе¹, и составив в конечном итоге уравнение с корнями Энке 32-й степени (что для нашего случая, т. е. для определения только порядка величин, более чем достаточно), получим следующее решение:

и

$$\eta_{1,2} \approx -75 \pm 307i$$

$$\eta_{3,4} \approx -12,5 \pm 29i,$$

т. е. мы получим систему, могущую совершать собственные гармонические колебания с двумя частотами, с каждой в отдельности; с высокой частотой порядка 307 и с низкой² частотой порядка 29 $\frac{1}{\text{сек.}}$.

¹ Э. Уиттекер и Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933 г., стр. 102, § 54, 57. Вообще говоря, уравнение четвертой степени, воспользовавшись методом Феррари, можно решить точно, но так как в данном случае не требуется точного решения, то в качестве примера общего решения, годного для уравнений и высших степеней, мы приводим указанный метод.

² В данном случае для нас представляют интерес не столько абсолютные значения, сколько значительный интервал между ними.

С точки зрения инерционных погрешностей нас будут интересовать собственные колебания системы, протекающие с низкой частотой. Частота второго собственного колебания (порядка $300 \frac{1}{\text{сек.}}$) весьма высока и значительно больше частоты собственного колебания, протекающего с низкой частотой (порядка $29 \frac{1}{\text{сек.}}$).

Как можно судить по графикам фиг. 51, высокочастотное собственное колебание будет служить источником столь малых инерционных погрешностей по сравнению с инерционными погрешностями от низкочастотного колебания, что ими можно вполне пренебречь.

Таким образом, не нарушая точности исследования с этой точки зрения, вполне возможно значительно упростить задачу и рассматривать данную систему имеющей как будто только одну степень свободы, т. е., как увидим ниже, пренебречь в дифференциальном уравнении членами выше второго порядка. В таком случае мы получим следующее характеристическое уравнение с подставленными в него теми же приближенными численными значениями постоянных коэффициентов:

$$10^5 \eta^2 + 2,5 \cdot 10^6 \eta + 10^8 = 0$$

или

$$\eta^2 + 25\eta + 10^3 = 0,$$

откуда

$$\eta_{1,2} \approx -12,5 \pm 29i,$$

т. е. для свободного колебания, протекающего с низкой частотой, получим то же решение.

На основании уравнений (414) и (415) получим следующие выражения для определения произвольных постоянных B_1 и B_2 :

$$B_1 = \frac{A_5 \left(1 - \frac{A_0}{A_5} \omega^2\right) \left(1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2 + \frac{A_0}{A_1} \omega^4\right)}{A_4 \left[\left(1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2 + \frac{A_0}{A_4} \omega^4\right)^2 + \frac{A_3^2}{A_4^2} \omega^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_3} \omega^2\right)^2 \right]}; \quad (416)$$

$$B_2 = \frac{A_5 A_3 \omega \left(1 - \frac{A_0}{A_5} \omega^2\right) \left(1 - \frac{A_1}{A_3} \omega^2\right)}{A_4^2 \left[\left(1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2 + \frac{A_0}{A_4} \omega^4\right)^2 + \frac{A_3^2}{A_4^2} \omega^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_3} \omega^2\right)^2 \right]}. \quad (417)$$

Если в уравнении (412) пренебречь членами выше второго порядка, то выражение для определения тех же произвольных постоянных B_1 и B_2 получится в следующем виде:

$$B_1 = \frac{A_5 \left(1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2\right)}{A_4 \left[\left(1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2\right)^2 + \frac{A_3^2}{A_4^2} \omega^2 \right]}; \quad (418)$$

$$B_2 = \frac{A_5 A_3 \omega}{A_4^2 \left[\left(1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2\right)^2 + \frac{A_3^2}{A_4^2} \omega^2 \right]}. \quad (419)$$

Из сравнения уравнений (416) и (417) с уравнениями (418) и (419), после подстановки численных значений постоянных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_6$, которыми задались выше, видно, что мы пренебрегаем:

1) величиной

$$\frac{A_0}{A_4} \omega^4 \approx 10^{-8} \omega^4$$

по сравнению с величиной

$$1 - \frac{A_2}{A_4} \omega^2 \approx 1 - 10^{-3} \omega^2;$$

2) величиной

$$\frac{A_1}{A_3} \omega^2 \approx 2 \cdot 10^{-5} \omega^2$$

по сравнению с единицей;

3) величиной

$$\frac{A_6}{A_5} \omega^2 \approx 1,33 \cdot 10^{-5} \omega^2$$

по сравнению с единицей.

Из последнего видно, что при том порядке численных значений постоянных коэффициентов, который был получен для возможных конструктивных оформлений принятой схемы, и при максимальной частоте возмущающего явления $\omega = 1,5 \frac{1}{\text{сек.}}$ постоянные коэффициенты A_0, A_1 и A_6 почти никакого влияния на конечные значения произвольных постоянных B_1 и B_2 не оказывают. Следовательно, и при исследовании вынужденных колебаний системы, пренебрегая в уравнении (412) членами выше второго порядка, в нашем частном случае ($\omega \ll 1,5 \frac{1}{\text{сек.}}$) мы имеем более чем достаточную точность.

Из изложенного следует, что при исследовании инерционных погрешностей в данном случае ($\omega \ll 1,5 \frac{1}{\text{сек.}}$) вполне возможно значительно упростить задачу и воспользоваться неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\ddot{\xi} + 2h\dot{\xi} + k^2\xi = f(t), \quad (420)$$

где

$$2h = \frac{c_{22}N_0}{a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12} + a_{22}c_{11}} = \frac{N_0}{m + \frac{J_1}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) + 3 \frac{J_2}{l^2}}; \quad (421)$$

$$k^2 = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12} + a_{22}c_{11}} = \frac{1}{m + \frac{J_1}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) + 3 \frac{J_2}{l^2}} \cdot \frac{3EJ}{l^3}. \quad (422)$$

Так как

$$\frac{A_6}{A_5} \omega^2 \approx 1,33 \cdot 10^{-5} \omega^2$$

мало по сравнению с единицей, то примем:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{c_{12}m}{a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12} + a_{22}c_{11}} a_{1g} \sin \omega t = \\ &= \frac{m \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right)}{m + \frac{J_1}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) + 3 \frac{J_2}{l^2}} a_{1g} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (423)$$

В уравнениях (421) — (423) через J_1 и J_2 обозначены величины:

$$J_1 = m r^2 + m_c \rho_c^2$$

и

$$J_2 = m_r \rho_r^2.$$

Так как

$$y = \frac{r_c}{r} \xi,$$

то, обозначив

$$\frac{m \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right)}{m + \frac{J_1}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) + 3 \frac{J_2}{l^2}} \frac{r_c}{r} = B,$$

уравнение (420) можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + k^2 y = a_{1g} B \sin \omega t. \quad (424)$$

Мы не будем здесь останавливаться на решении этого уравнения, так как оно ничем не отличается от случая, приведенного при исследовании инерционных погрешностей (стр. 187), и напомним его в готовом виде; для случая $h < k$ (уравнение 215) оно будет:

$$y = C e^{-ht} \sin(pt + \gamma) + a_{1g} \frac{B}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \sin(\omega t + \psi). \quad (425)$$

Приняв, как и выше, истинную запись

$$y_{00} = a_{1g} \frac{B}{k^2} \sin \omega t,$$

и сделав все преобразования и предпосылки, что и раньше (стр. 188), получим совершенно идентичные зависимости для приведенных максимальных погрешностей (отнесенных к амплитуде максимального показания прибора):

1) для погрешности от сдвига фаз и динамического увеличения δ_1 (уравнение 232);

2) для погрешности от накладывания собственных колебаний на запись измеряемого явления δ_2 (уравнение 229).

Для определения значений параметров k и b воспользуемся кривыми фиг. 51. По этим кривым видно, что если остановиться на кривой, соответствующей $\frac{\omega}{k} = 0,025$, т. е. если выбрать для нашего случая параметр $k = \frac{1,5}{0,025} \approx 60 \frac{1}{\text{сек.}}$ и параметр b не выше 0,4, то предельное значение приведенной суммарной инерционной погрешности не превысит 3% т. е., будут полностью удовлетворены технические требования, если все остальные погрешности прибора в сумме не превзойдут 2%. Пока остановимся на этом значении параметра k .

Что касается выбора параметра b , т. е. степени успокоения, то в данном случае можно руководствоваться следующими соображениями. Как видно по знакам инерционных погрешностей δ_1 и δ_2 , в течение первого полупериода собственных колебаний эти погрешности будут складываться. За время второго полупериода погрешность δ_2 будет иметь обратный знак, в то время как знак погрешности δ_1 пока еще остается неизменным. Следовательно, за время второго полупериода погрешности δ_1 и δ_2 будут вычитаться одна из другой; за время третьего полупериода они будут опять складываться и т. д.

Чем быстрее будет убывать погрешность δ_2 с течением времени, тем быстрее амплитуды (максимумы) приведенной инерционной погрешности достигнут минимального значения, соответствующего значению в данный момент погрешности от сдвига фаз и динамического увеличения δ_1 .

Амплитуда собственных колебаний при наличии жидкостного трения (кулоновским трением мы пренебрегаем, потому что оно в данном случае имеет по сравнению с жидкостным очень малое значение) убывает в геометрической прогрессии, знаменатель которой

$$\vartheta = e^{-\frac{\pi}{V \frac{1}{b^2} - 1}}$$

(стр. 198).

Следовательно, величина интересующей нас третьей амплитуды (при второй амплитуде погрешности δ_1 и δ_2 вычитаются одна из другой) будет:

$$y_3 = y_1 \vartheta^2.$$

По фиг. 54 и табл. 4 видно, что при степени успокоения $b = 0,3$ при третьей амплитуде инерционная погрешность δ_2 от собственных колебаний снизится до 15% ее начальной величины; при $b = 0,4$ — до 7,5% и при $b = 0,5$ — до 2,5%. Из кривых δ_1 и δ_2 , соответствующих $\frac{\omega}{k} = 0,025$ (фиг. 51), видно, что, останавливаясь на степени успокоения $b = 0,3$ или $b = 0,4$, получим достаточно малую разницу: суммарная максимальная погрешность (соответствующая первому полупериоду собственных колебаний) меняется примерно от 2,8 до 3%, а суммарная погрешность, соответствующая третьему полупериоду собственных колебаний, меняется примерно от 1,75 до 2,1%. При степени успокоения $b = 0,2$ суммарная погрешность, соответствующая первому полу-

периоду, будет примерно 2,6%, суммарная погрешность, соответствующая третьему полупериоду, примерно 1,7%. Разница получается достаточно малая, поэтому остановимся на $b = 0,4$, так как успокоение все же снижает влияние всяких возмущающих явлений на участке частот, близких к резонансным.

Таким образом остановимся на выборе собственной частоты прибора $k = 60 \frac{1}{\text{сек}}$ и степени успокоения $b = 0,4$.

На основании изложенного получаем еще одно уравнение, связывающее параметры прибора с его погрешностями, в данном случае с инерционными:

$$k^2 = \frac{1}{m + \frac{J_1}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) + 3 \frac{J_2}{l^2}} \frac{3EJ}{l^3}. \quad (422)$$

5. ВЫВОД ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В нашем распоряжении имеются четыре уравнения, связывающие параметры прибора с величинами, которыми можно задаться: 1) уравнение (409), связывающее чувствительность прибора с параметрами прибора, 2) уравнение (401a), связывающее погрешности от влияния составляющей ускорения с параметрами прибора, 3) уравнение (406), связывающее погрешности трения с параметрами прибора, 4) уравнение (422), связывающее собственную частоту прибора, т. е. инерционные погрешности, с параметрами прибора.

Из числа входящих в эти уравнения параметров заданными являются следующие: y_0 , $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$, k , a_1 и a_2 . Кроме того, можно считать до известной степени заданным параметр r_0 , так как длина пишущего рычага в большей степени определяется чувствительностью и амплитудой измеряемого явления. Вместе с параметром r_0 можно считать заданным также параметр и J_1 . Но даже с этими предпосылками шесть параметров остаются неизвестными: m , l , r , J и J_2 . Указанные четыре уравнения не дают возможности определить все шесть искомых параметров, поэтому воспользуемся еще двумя приближенными уравнениями:

$$J_2 \approx \frac{mr_0^2}{2}; \quad (426)$$

$$m \approx \frac{\gamma}{g} \pi r_0^2 h, \quad (427)$$

где через h обозначена высота цилиндрического груза.

Пользуясь этими двумя добавочными уравнениями, приходится однако вводить еще одну неизвестную величину h .

С помощью шести уравнений можно исключить пять неизвестных. Однако, сделав соответствующие преобразования и исключив всего только четыре неизвестных, мы можем получить уравнение, дающее зависимость размеров груза (в виде произведения радиуса цилиндрического груза r_0 на его высоту h) от основных интересующих нас величин: 1) масштаба записи, 2) инструментальных погрешностей

статических измерений, 3) собственной частоты прибора, т. е. инерционной погрешности и некоторых других величин. Для этого поступим следующим образом.

Уравнение (422) можно представить в таком виде:

$$\frac{l^3}{3EJ} \left(m + 3 \frac{J_2}{l^2} \right) = \frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r^2} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) \frac{l^3}{3EJ}. \quad (428)$$

В левую часть уравнения (428) подставляем вместо J_2 его значение из уравнения (426) и в правую часть на основании уравнения (406) величину:

$$\frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \frac{r^2}{r_c} \frac{1}{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right)} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{l^3}{3EJ} m \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{l^2} \right) = \frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}}.$$

Возведя последнее уравнение в квадрат, имеем:

$$\left(\frac{l^3}{3EJ} \right)^2 m^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{l^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right)^2. \quad (429)$$

Разделив уравнение (406) на квадрат уравнения (409), в конечном результате получим:

$$\frac{l^3}{3EJ} = \frac{M_{\text{тр}}}{m^2 g^2} \frac{1}{r_c} \frac{y_0^2}{\Delta_2 y} \frac{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right)}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right)^2}.$$

На основании уравнения (401a) имеем:

$$\frac{l^3}{3EJ} = \frac{5}{6} \frac{\Delta_1 y}{a_1 a_2} \frac{l}{y_0} \frac{1}{mg}.$$

Перемножив последние два уравнения, получим:

$$\left(\frac{l^3}{3EJ} \right)^2 = \frac{5}{6} \frac{l}{m^2 g^2} \frac{y_0}{r_c} \frac{\Delta_1 y}{a_1 a_2} \frac{M_{\text{тр}}}{\Delta_2 y} \frac{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right)}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right)^2}. \quad (430)$$

Подставив значение $\left(\frac{l^3}{3EJ} \right)^2$ из уравнения (430) в уравнение (429), получим:

$$\frac{5}{6} \frac{l}{m g^2} \frac{y_0}{r_c} \frac{\Delta_1 y}{a_1 a_2} \frac{M_{\text{тр}}}{\Delta_2 y} \frac{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{l^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l} \right)^2} = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right)^2. \quad (431)$$

Так как

$$m \approx \frac{\pi \gamma r_0^2 h}{g}, \quad (427)$$

то

$$\frac{5}{6\pi \gamma g^2} \frac{l}{r_0} \frac{1}{r_0 h} \frac{y_0}{r_c} \frac{\Delta_1 y}{a_1 a_2} \frac{M_{\text{тр}}}{\Delta_2 y} \frac{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{l^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right)^2,$$

или окончательно имеем:

$$r_0 h = \frac{5}{6\pi \gamma g^2} \frac{y_0}{r_c} \frac{\Delta_1 y}{a_1 a_2} \frac{1}{\frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right)^2} \times \frac{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right) \left(2 + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right)^2}{\frac{r_0}{l} \left(2 + 3 \frac{r_0}{l}\right)^2}. \quad (432)$$

Из вывода уравнения (432) видно, что хотя разность в скобках знаменателя входит в конечном уравнении в квадрате, т. е. всегда положительна, все же значения величин, входящих в скобки, нужно подбирать таким образом, чтобы всегда было удовлетворено условие:

$$\frac{1}{k^2} > \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}}.$$

Это видно из начального преобразования, где уравнение (429) получено возведением в квадрат зависимости:

$$\frac{l^3}{3EJ} m \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0^2}{l^2}\right) = \frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}}.$$

В последнем уравнении левая часть никак не может быть отрицательной; отсюда величина $\frac{1}{k^2}$ должна быть всегда больше величины $\frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}}$.

Обозначив последний множитель правой части уравнения (432) через C :

$$C = \frac{\left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right) \left(2 + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right)^2}{\frac{r_0}{l} \left(2 + 3 \frac{r_0}{l}\right)^2}, \quad (433)$$

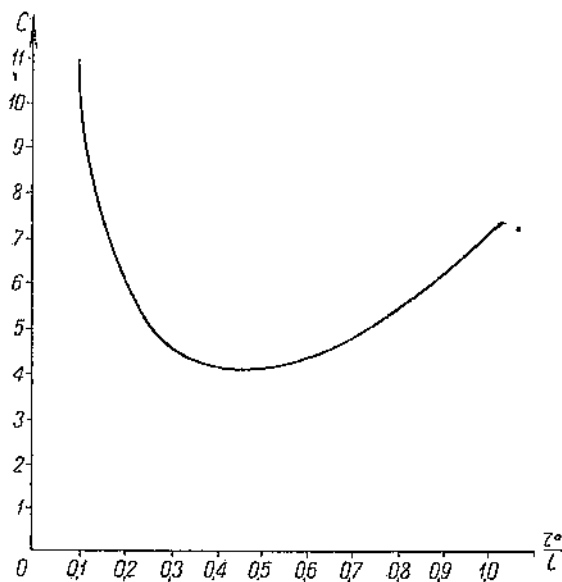
уравнение (432) можно переписать так:

$$r_0 h = \frac{5}{6\pi g^2 \gamma} \frac{y_0}{r_c} \frac{\Delta_1 y}{a_1 a_2} \frac{C}{\frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right)^2}. \quad (434)$$

В правой части уравнения (434) все величины являются заданными за исключением величины C . Построив кривую (фиг. 62)

$$C = f\left(\frac{r_0}{l}\right),$$

увидим, что функция C имеет в пределах от $\frac{r_0}{l} = 0,1$ до $\frac{r_0}{l} = 1$ только один довольно пологий минимум при изменении величины $\frac{r_0}{l}$ от 0,4 до 0,5.



Фиг. 62. Кривая $C = f\left(\frac{r_0}{l}\right)$.

Это обстоятельство весьма ценно, так как дает обоснование для выбора и последней, не заданной величины C , входящей в уравнение (434). С точки зрения получения наименьших габаритов груза, а следовательно, и основного узла прибора значение отношения $\frac{r_0}{l}$ целесообразно выбирать таким, чтобы функция C была наиболее близка к минимуму.

Однако для окончательного подбора параметров груза уравнения (434) не вполне удобно, поэтому сделаем еще следующие преобразования.

Разделив уравнение (401a) на уравнение (409), получим:

$$l = \frac{6}{5} \frac{a_1 a_2}{\Delta_1 y} \frac{y_0^2}{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r_0}{l}\right)} \frac{r}{r_c}. \quad (435)$$

На основании уравнения (406) можно написать следующую зависимость для r :

$$r = \sqrt{\frac{M_{\text{тр}}}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right)} \frac{r_c}{\Delta_2 y} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right)}. \quad (436)$$

Наконец на основании уравнений (401a) и (427) имеем:

$$\frac{3EJ}{l^3} = \frac{6}{5} \gamma \pi \frac{r_0 a_1 a_2 y_0}{\Delta_1 y} \frac{r_0}{l}. \quad (437)$$

Последние три уравнения позволяют написать следующую приближенную зависимость для l :

$$l \approx \sqrt{\frac{6}{5} \frac{M_{\text{тр}} a_1 a_2 y_0^2}{\pi \gamma \Delta_1 y \Delta_2 y r_c r_0 h \frac{r_0}{l}}}, \quad (438)$$

где величину

$$\frac{1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}}{1 + 3 \frac{r_0}{l} + 2,25 \frac{r_0^2}{l^2}}$$

мы приняли, равной единице.

Даже при $\frac{r_0}{l} = 1$ это допущение дает погрешность в определении l порядка не более 5,65%, а при $\frac{r_0}{l} = 0,5$ всего 1,96%.

Подставив в уравнение (438) значение r_0/h из уравнения (434), в окончательном виде будем иметь:

$$l = \frac{6}{5} g y_0 \frac{a_1 a_2}{\Delta_1 y} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right) \frac{1}{\sqrt{c} \sqrt{\frac{r_0}{l}}}. \quad (439)$$

Помножив далее правую и левую части уравнения (439) на $\frac{r_0}{l}$, получим:

$$r_0 = \frac{6}{5} g y_0 \frac{a_1 a_2}{\Delta_1 y} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right) \frac{\sqrt{\frac{r_0}{l}}}{\sqrt{c}}. \quad (440)$$

На основании уравнений (440) и (434) имеем:

$$h = \frac{25}{36} \frac{1}{\gamma \pi g^3} \frac{1}{r_c} \frac{\Delta_1^2 y}{a_1^2 a_2^2} \frac{1}{\frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right)^3} \frac{c \sqrt{c}}{\sqrt{\frac{r_0}{l}}}.$$

Воспользовавшись уравнением (440), возведенным в куб, получим:

$$h = \frac{6}{5} \frac{1}{\gamma \pi} \frac{y_0^3}{r_c} \frac{a_1 a_2}{\Delta_1 y} \frac{M_{\text{тр}}}{\Delta_2 y} \frac{1}{r_0^2 l}. \quad (441)$$

Уравнения (439) — (441) дают достаточно простые зависимости от заданных величин всех трех основных, с точки зрения конструктивного оформления, параметров главного узла прибора.

Обозначим произведение постоянных величин и величин, которые по техническим условиям меняться не могут, через A и B :

$$\frac{6}{5} g y_0 a_1 a_2 = A; \quad \frac{6}{5} \frac{1}{\gamma \pi} \frac{y_0^3}{r_c} a_1 a_2 M_{\text{тр}} = B.$$

В таком случае последние уравнения можно написать так:

$$l = A \frac{1}{\Delta_1 y} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right) \frac{1}{\sqrt{C} \sqrt{\frac{r_0}{l}}}; \quad (442)$$

$$r_0 = A \frac{1}{\Delta_1 y} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{\text{тр}}} \right) \frac{\sqrt{\frac{r_0}{l}}}{\sqrt{C}}; \quad (443)$$

$$h = B \frac{1}{\Delta_1 y^{\frac{3}{2}} \Delta_2 y} \frac{1}{r_0^2 l}. \quad (444)$$

Для нашего случая по конструктивным соображениям, а также задаваясь не слишком большим углом поворота рычага A (фиг. 60) порядка $\pm 10^\circ$, примем $r_c = 12$ см. В таком случае:

$$J_1 \approx 0,06 \text{ гсм}^2;$$

$$M_{\text{тр}} \approx 0,05 \frac{\text{гсм}^2}{\text{сек}^2}.$$

Далее из оставшихся 2% на все остальные погрешности нужно отнести 1% на погрешности расшифровки, исходя из того, что абсолютную погрешность от расшифровки можно принять равной примерно $\pm 0,2$ мм. Следовательно, мы получим приведенную погрешность от расшифровки

$$\pm \delta_3 = \pm \frac{\Delta_2 y}{y_0 a_1} = \pm \frac{0,02}{2} = \pm 1\%.$$

Таким образом сумма двух остальных погрешностей не должна превышать также 1%, т. е.

$$\Delta_1 y + \Delta_2 y \leq 0,02 \text{ см.}$$

Приняв далее следующие значения входящих в уравнения величин: $\gamma = 8,5 \text{ г/сек}^2 \text{см}^2$ (для латуни), $y_0 = 4$ см (по техническим условиям), $a_1 a_2 = 0,25$, $k^2 = 3600 \frac{1}{\text{сек}^2}$ ($k = 60 \frac{1}{\text{сек}}$) (из условия инерционных погрешностей), $E = 2,2 \cdot 10^8 \text{ г/сек}^2 \text{см}$, получим:

$$A = 1178 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2};$$

$$B = 0,003 \text{ см}^6,$$

т. е.

$$l = 1178 \frac{1}{\Delta_1 y} \left(0,000278 - 0,005 \frac{\Delta_2 y}{0,05} \right) \frac{1}{\sqrt{C} \sqrt{\frac{r_0}{l}}} \text{ см};$$

$$r_0 = 1178 \frac{1}{\Delta_1 y} \left(0,000278 - 0,005 \frac{\Delta_2 y}{0,05} \right) \frac{\sqrt{\frac{r_0}{l}}}{\sqrt{C}} \text{ см};$$

$$h = 0,003 \frac{1}{\Delta_1 y \Delta_2 y} \frac{1}{r_0^2 l} \text{ см}.$$

6. ПРИМЕРНЫЙ ПОДБОР ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИБОРА

По полученным уравнениям достаточно легко подобрать наиболее удобные в конструктивном отношении значения параметров l , r_0 и h , удовлетворяющие техническим требованиям. Например, если задаться значениями $\Delta_1 y = 0,0185$; $\Delta_2 y = 0,0015$ и $\frac{r_0}{l} = 0,25$, то из фиг. 62 получим $C \approx 5$. Тогда

$$r_0 \approx 1,82 \text{ см};$$

$$l \approx 7,28 \text{ см};$$

$$h \approx 4,52 \text{ см}.$$

На основании уравнения (437) определяем величину $\frac{3EJ}{l^3}$:

$$\frac{3EJ}{l^3} = \frac{6}{5} \gamma \pi \frac{r_0 h \Delta_1 \Delta_2 y_0}{\Delta_1 y} \frac{r_0}{l} \approx 3630 \frac{2}{\text{сек}^2}.$$

По уравнению (436) получаем:

$$r = \sqrt{\frac{M_{\text{тр}}}{\left(\frac{3EJ}{l^3}\right) \frac{r_0}{\Delta_2 y} \left(1 + 3 \frac{r_0}{l} + 3 \frac{r_0^2}{l^2}\right)}} \approx 0,46 \text{ см}.$$

Так как

$$\frac{3EJ}{l^3} \approx 3630 \frac{2}{\text{сек}^2},$$

то

$$J = \frac{3630 l^3}{3E} \approx 0,000195 \text{ см}^4.$$

Так как далее

$$J = \frac{b h_1^3}{12},$$

где b — ширина, h_1 — толщина пружины, то, приняв ширину пружины равной высоте цилиндрического груза, получим:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{12J}{b}} \approx 0,08 \text{ см} = 0,8 \text{ мм}.$$

В заключение необходимо остановиться еще на одном важном вопросе, касающемся выбора наилучших параметров прибора, — на выборе таких параметров пружины, которые обеспечили бы наименьшие напряжения в ее материале при максимальных прогибах, не превышающие максимальные допустимые напряжения для измерительных пружин. При этом необходимо учитывать, что максимальные допустимые напряжения для измерительных пружин должны быть значительно ниже допустимых напряжений для пружин, имеющих другие назначения.

Для наиболее наглядного освещения вопроса, как влияют остальные факторы на получающиеся максимальные напряжения в пружине данного прибора, напишем уравнение (434) в следующем виде:

$$r_0 h = DC, \quad (445)$$

где

$$D = \frac{5}{6\pi\gamma} \frac{y_0}{g^2} \frac{\Delta_1 y}{r_c} \frac{1}{a_1 a_2} \frac{1}{\frac{\Delta_2 y}{M_{тр}} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{J_1}{r_c} \frac{\Delta_2 y}{M_{тр}} \right)^2},$$

и построим кривую (фиг. 63):

$$r'_0 = f\left(\frac{r_0}{l}\right)$$

для $h = 1$ и $D = 1$.

Воспользовавшись обычным уравнением, дающим зависимость напряжений от прогиба и других некоторых параметров прямоугольных рессор:

$$\sigma_{\max} = \frac{3h_1 E y_{\max}}{2l^2}, \quad (446a)$$

где h_1 — толщина прямоугольной рессоры,

$y_{\max}$ — максимальный возможный прогиб,

и уравнением (409) и считая ширину b пружины равной высоте груза h , перепишем уравнение (446a) в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{r_0}{l} \sqrt[3]{4\pi\gamma' E^2 a_1 y_{\max}^2 \frac{r^2}{r_c^2}} \sqrt[3]{\frac{1}{\left(1 + 1,5 \frac{r_0}{l}\right)^2}} \sqrt[3]{\frac{1}{r_0}}. \quad (446)$$

На основании уравнения (446) построим кривую (фиг. 63)

$$\sigma'_{\max} = f\left(\frac{r'_0}{l}\right),$$

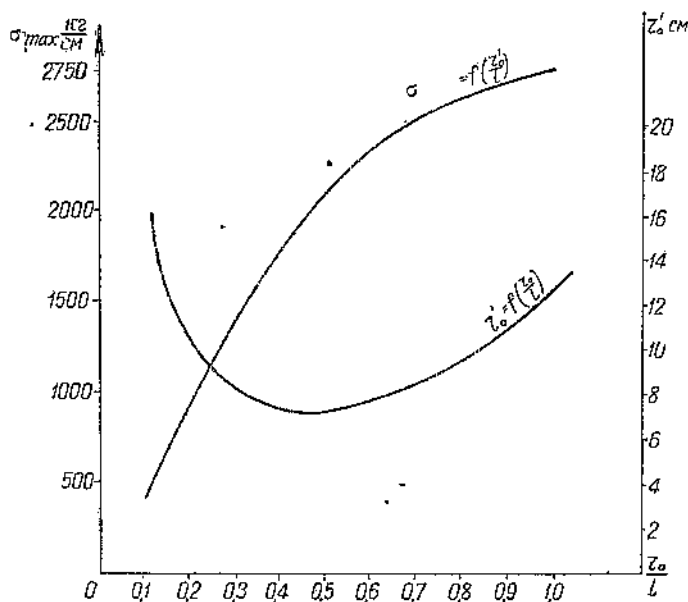
приняв $a_1 = 1$, $\frac{r}{r_c} = 1$, $y_{\max} = 1$, $\gamma' = 8,5$ и $E = 2,2 \cdot 10^6$, а также получая значения r'_0 , на основании уравнения (445), соответствующие значениям функции $\frac{r_0}{l}$.

По этим кривым с большой наглядностью можно проследить, как

изменяется напряжение $\sigma'_{\max}$ в зависимости от $\frac{r'_0}{l}$ и r_0 . Истинное значение $\sigma_{\max}$ для соответствующих параметров можно получить, решив уравнение:

$$\sigma_{\max} = \sigma'_{\max} \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\gamma'} a_1 y_{\max}^2 \frac{r_0^2}{r_c^2} \frac{r_0'}{r_0}}, \quad (447)$$

взяв значение $\sigma'_{\max}$ из графика (фиг. 63).



Фиг. 63. Кривые $r'_0 = f\left(\frac{r_0}{l}\right)$ и $\sigma'_{\max} = f\left(\frac{r_0}{l}\right)$.

Воспользовавшись уравнением (447) и фиг. 63, для нашего случая получим:

$$\sigma_{\max} \approx 1100 \sqrt[3]{1 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 0,00147 \cdot 4,84} \approx 276 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Отношение $\frac{r'_0}{r_0}$ мы получаем следующим образом. Находим из фиг. 63 значение r'_0 как функцию $\frac{r_0}{l}$. В данном случае для принятого значения $\frac{r_0}{l} = 0,25$ получаем $r'_0 = 8,8$. Взятое из фиг. 63 значение r'_0 делим на истинное значение r_0 , полученное на основании уравнения (443). График изменения $\sigma_{\max}$ и r'_0 дается при неизменных остальных параметрах в зависимости от изменения $\frac{r_0}{l}$.

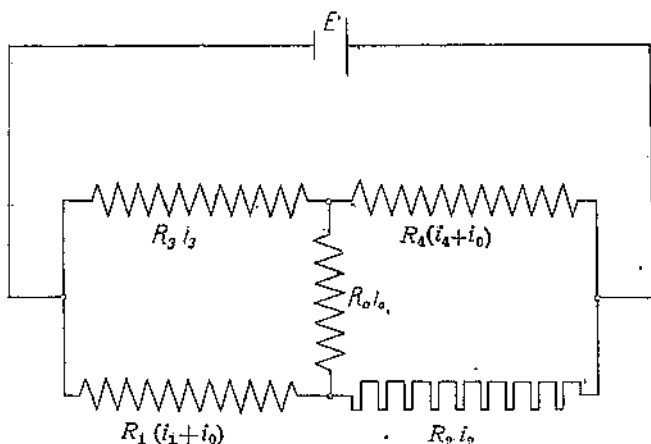
В заключение следует указать, что, решив приведенным выше методом задачу для цилиндрического груза, весьма просто перейти к грузу другой формы, например прямоугольной. Для этого достаточно, не меняя высоты груза h , подобрать эквивалентный груз другой формы, удовлетворяющий условию равенства моментов инерции $J'_2 = J_2$ при одинаковых массах $m' = m$. Центр тяжести груза должен при этом лежать на оси симметрии груза.

Глава XI

ПОДБОР НАИВЫГОДНЕЙШИХ ПАРАМЕТРОВ МОСТА УИТСТОНА ДЛЯ ТЕРМОМЕТРА СОПРОТИВЛЕНИЯ

1. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Предположим, задано построить термометр сопротивления. Мы не будем здесь рассматривать всю задачу в целом, так как расчет магнитоэлектрического миллиамперметра для такого прибора достаточно прост. Метод нахождения наилучших параметров магнитоэлектрического миллиамперметра указан на стр. 134. Поэтому в данном случае мы ограничимся только нахождением таких параметров моста Уитстона, которые обеспечили бы наилучшую работу прибора.



Фиг. 64. Электрическая схема термометра сопротивления.

Для начала будем искать такие значения этих параметров, которые обеспечили бы при наименьшем токе питания наибольшую мощность на приборе.

Обозначим через R_1 , R_2 , R_3 и R_4 (фиг. 64) сопротивления плеч моста Уитстона, через R_0 — сопротивление миллиамперметра, i_1 , i_2 , i_3 , i_4 и i_0 — соответствующие силы токов и E — подаваемое на мост напряжение.

В таком случае можно написать следующие уравнения:

$$i_1 R_1 + i_0 R_1 + i_0 R_0 = i_3 R_3; \quad (448)$$

$$i_1 R_1 + i_0 R_1 + i_2 R_2 = E; \quad (449)$$

$$i_3 R_3 + i_0 R_4 + i_4 R_4 = E. \quad (450)$$

Так как $i_1 = i_2$ и $i_3 = i_4$, то на основании уравнений (449) и (450) имеем:

$$i_1 = i_2 = \frac{E - i_0 R_1}{R_1 + R_2};$$

$$i_3 = i_4 = \frac{E - i_0 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Подставив полученные силы токов в уравнение (448), получим:

$$\frac{E - i_0 R_1}{R_1 + R_2} R_1 + i_0 R_1 + i_0 R_0 = \frac{E - i_0 R_4}{R_3 + R_4} R_3.$$

Помножив обе части последнего уравнения на $(R_1 + R_2)$ и на $(R_3 + R_4)$, перенеся члены с E в качестве множителя в правую часть уравнения, а остальные — в левую, взяв за скобку i_0 и раскрыв все скобки, получим:

$$i_0 = \frac{E(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_0 R_1 R_3 + R_0 R_2 R_3 + R_0 R_1 R_4 + R_0 R_2 R_4}. \quad (451)$$

Предположим далее, что R_2 является температурным сопротивлением, и обозначим через R'_2 величину температурного сопротивления, при которой $i_0 = 0$. Тогда можно написать следующую зависимость:

$$R_2 = R'_2 (1 + \beta \Delta t),$$

где β — температурный коэффициент сопротивления R_2 ,

Δt — изменение температуры.

Так как при $i_0 = 0$ из условия уравновешенного моста

$$\frac{R_1}{R'_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

или

$$R_1 R_4 = R'_2 R_3,$$

то уравнение (451) можно представить в таком виде:

$$i_0 = \frac{E R'_2 R_3 \beta \Delta t}{R_0 \left[\frac{R_1 R_3}{R_0} R'_2 (1 + \beta \Delta t) + \frac{R_1 R_4}{R_0} R'_2 (1 + \beta \Delta t) + \frac{R_1 R_4}{R_0} R_3 + \right.} \\ \left. + \frac{R_2 R_4}{R_0} R'_2 (1 + \beta \Delta t) + R_1 R_3 + R_0 R'_2 (1 + \beta \Delta t) + R_1 R_4 + R_1 R'_2 (1 + \beta \Delta t) \right]}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части уравнения на $R'_2 R_3$ и принимая во внимание, что

$$R'_2 R_3 = R_1 R_4,$$

получим:

$$i_0 = \frac{E\beta\Delta t}{R_0 \left[\frac{R_1}{R_0}(1+\beta\Delta t) + \frac{R'_2}{R_0}(1+\beta\Delta t) + \frac{R_3}{R_0} + \frac{R_4}{R_0}(1+\beta\Delta t) + \frac{R_1}{R'_2} + (1+\beta\Delta t) + 1 + \frac{R_4}{R_3}(1+\beta\Delta t) \right]}$$

или

$$i_0 = \frac{E\beta\Delta t}{R_0 \left[2 + \beta\Delta t + \frac{R_1}{R'_2} + \frac{R_4}{R_3}(1 + \beta\Delta t) + \frac{(R_1 + R'_2)(1 + \beta\Delta t) + R_3 + R_4}{R_0} + \frac{R_4}{R_0}\beta\Delta t \right]}.$$

Далее примем:

$$R_1 + R'_2 = \rho_1,$$

$$R_3 + R_4 = \rho_2,$$

и обозначим через $\frac{1}{\rho_0}$ общую проводимость при $i_0 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2},$$

откуда

$$\rho_2 = \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_1 - \rho_0}.$$

В таком случае получим:

$$i_0 = \frac{E\beta\Delta t}{R_0 \left[2 + \beta\Delta t + \frac{\rho_1 - R'_2}{R'_2} + \frac{R'_2}{\rho_1 - R'_2}(1 + \beta\Delta t) + \frac{\rho_1 \left(1 + \beta\Delta t + \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \right)}{R_0} + \frac{R_4}{R_0}\beta\Delta t \right]}$$

или

$$i_0 \sqrt{R_0} = \frac{E\beta\Delta t}{\sqrt{R_0} \left[2 + \beta\Delta t + \frac{\rho_1 - R'_2}{R'_2} + \frac{R'_2}{\rho_1 - R'_2}(1 + \beta\Delta t) + \frac{\rho_1 \left(1 + \beta\Delta t + \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \right)}{R_0} + \frac{R_4}{R_0}\beta\Delta t \right]},$$

где $i_0 \sqrt{R_0}$ — корень квадратный из мощности, затрачиваемой на прибор.

Последнее уравнение можно преобразовать так:

$$i_0 \sqrt{R_0} = \frac{E \beta \Delta t}{\sqrt{R_0} \left[\frac{\rho_1^2}{R_2'(\rho_1 - R_2')} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \left(\frac{R_2'^2}{R_2'(\rho_1 - R_2')} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} - \frac{R_2'}{R_0} \right) \beta \Delta t + \beta \Delta t \right]}. \quad (452)$$

Так как

$$R_2' < \rho_1$$

и, следовательно, тем более

$$\frac{R_2'^2}{R_2'(\rho_1 - R_2')} < \frac{\rho_1^2}{R_2'(\rho_1 - R_2')},$$

а также

$$\frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} - \frac{R_2'}{R_0} < \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)},$$

то выражение в круглых скобках знаменателя уравнения (452), умноженное на $\beta \Delta t \ll 1$ даже при изменениях температуры на $\pm 50^\circ$ значительно меньше суммы остальных слагаемых.

Следовательно, не будет большой погрешности, если в целях значительного упрощения последующих выводов пренебречь величиной в круглых скобках, умноженной на $\beta \Delta t$. В таком случае уравнение (452) можно написать так:

$$i_0 \sqrt{R_0} = \frac{E \beta \Delta t}{\sqrt{R_0} \left[\frac{\rho_1^2}{R_2'(\rho_1 - R_2')} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \beta \Delta t \right]}. \quad (453)$$

Обозначив через R_5 сопротивление соединительных проводов, можно написать:

$$R_2' \beta \Delta t + R_0 \beta \Delta t = R_2' \beta' \Delta t,$$

где β' — некоторый условный коэффициент.

Тогда

$$\frac{R_5}{R_2} = \frac{(\beta' - \beta) \Delta t}{\beta \Delta t} = \frac{\Delta \beta \Delta t}{\beta \Delta t} = \delta, \quad (454)$$

т. е. при $\Delta' t = \Delta t$ δ будет относительной погрешностью температурного коэффициента сопротивления, вносимой соединительными проводами.

Заменив в уравнении (453) R_2' через $\frac{R_5}{\delta}$, получим:

$$i_0 \sqrt{R_0} = \frac{E \beta \Delta t}{\sqrt{R_0} \left[\frac{\rho_1^2 \delta^2}{R_5(\rho_1 \delta - R_5)} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \beta \Delta t \right]}. \quad (455)$$

2. ВЫВОД ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В последнем уравнении можно считать следующие величины заданными: R_0 , так как минимальное сопротивление соединительных проводов определяется условиями работы прибора; ρ_0 , так как общее сопротивление моста Уитстона определяется расходом тока питания при $i_0 = 0$; δ , так как относительное изменение температурного коэффициента температурного сопротивления определяет добавочную температурную погрешность прибора, вносимую мостом Уитстона; Δt задается техническими условиями; β , так как чем больше температурный коэффициент β температурного сопротивления, тем большую мощность при том же изменении температур будем иметь на приборе.

Таким образом в последнее уравнение в качестве неизвестных входят только две величины — R_0 и ρ_1 .

Далее очевидно, что $i_0 \sqrt{R_0}$ будет максимальным при минимальном значении знаменателя в правой части уравнения (455).

Таким образом нужно определить значения R_0 и ρ_1 из условия минимума следующей величины, которую обозначим через A :

$$A = \sqrt{R_0} \left[\frac{\rho_1^2 \delta^2}{R_0(\rho_1 \delta - R_0)} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \beta \Delta t \right]. \quad (456)$$

[Значения R_0 и ρ_1 , для которых величина A при остальных заданных параметрах будет иметь минимальное значение, можно найти, приравняв частные производные $\frac{\partial A}{\partial R_0}$ и $\frac{\partial A}{\partial \rho_1}$ нулю и решив затем совместно полученные два уравнения с двумя неизвестными, причем минимум величины A получим в том случае, если:

$$1) \frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial R_0 \partial \rho_1} \right)^2 > 0;$$

$$2) \frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} > 0;$$

$$3) \frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} > 0.$$

[Пренебрегая в уравнении (456) в первом приближении малой величиной $\beta \Delta t$ и взяв частные производные $\frac{\partial A}{\partial \rho_1}$ и $\frac{\partial A}{\partial R_0}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \rho_1} &= \sqrt{R_0} \left[\frac{\rho_1 \delta^2 (\rho_1 \delta - 2R_0)}{R_0(\rho_1 \delta - R_0)^2} + \frac{\rho_1 (\rho_1 - 2\rho_0)}{R_0(\rho_1 - \rho_0)^2} \right]; \\ \frac{\partial A}{\partial R_0} &= \frac{1}{2\sqrt{R_0}} \left[\frac{\rho_1^2 \delta^2}{R_0(\rho_1 \delta - R_0)} - \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} \right]. \end{aligned}$$

Приравняв значения частных производных нулю и решив полученные два уравнения относительно R_0 , будем иметь:

$$R_0 = \frac{R_0 (\rho_1 - 2\rho_0)(\rho_1 \delta - R_0)^2}{\delta^2 (\rho_1 - \rho_0)^2 (2R_0 - \rho_1 \delta)}; \quad (457)$$

$$R_0 = \frac{R_5(\rho_1\delta - R_5)}{\delta^2(\rho_1 - \rho_0)} \quad (458)$$

или

$$\frac{R_5(\rho_1 - 2\rho_0)(\rho_1\delta - R_5)^2}{\delta^2(\rho_1 - \rho_0)^2(2R_5 - \rho_1\delta)} = \frac{R_5(\rho_1\delta - R_5)}{\delta^2(\rho_1 - \rho_0)},$$

откуда

$$\rho_1 = \frac{1}{\delta} \left[\frac{3}{4} (\rho_0\delta + R_5) + \sqrt{\frac{9}{16} (\rho_0\delta + R_5)^2 - 2\rho_0\delta R_5} \right] \quad (459)$$

(знак минус перед радикалом опускаем, так как значение ρ_1 не может быть меньше или слишком близко к значению ρ_0 , величина же R_5 обыкновенно меньше единицы).

Чтобы проверить, получен ли нами минимум, возьмем еще следующие вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} = \sqrt{R_0} \left[\frac{2\delta^2 R_5}{(\rho_1\delta - R_5)^3} + \frac{2\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)^3} \right]; \quad (460)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} = \frac{\rho_1^2}{4\sqrt{R_0^3}} \left[\frac{3}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} - \frac{\delta^2}{R_5(\rho_1\delta - R_5)} \right]; \quad (461)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0 \partial \rho_1} = \frac{\rho_1}{2\sqrt{R_0}} \left[\frac{\delta^2(\rho_1\delta - 2R_5)}{R_5(\rho_1\delta - R_5)^2} - \frac{\rho_1 - 2\rho_0}{R_0(\rho_1 - \rho_0)^2} \right]. \quad (462)$$

Из полученных уравнений видим, что второе условие

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} > 0$$

удовлетворено.

Подставив из уравнения (458), которое нами получено в качестве одного из условий минимума, значение R_0 в знаменатель первого члена уравнения (461), получим:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} = \frac{\rho_1^2 \delta^2}{4\sqrt{R_0^3}} - \frac{2}{R_5(\rho_1\delta - R_5)}, \quad (463)$$

откуда видно, что также удовлетворено и третье условие:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} > 0.$$

Подставим далее квадрат того же значения R_0 из уравнения (458) в знаменатель второго члена уравнения (462) и куб того же значения R_0 в знаменатель второго члена уравнения (460). Тогда получим:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0 \partial \rho_1} = \frac{\rho_1 \delta^2}{2\sqrt{R_0} R_5 (\rho_1\delta - R_5)^2} \left[\rho_1\delta - 2R_5 - \delta^2 \frac{R_0}{R_5} (\rho_1 - 2\rho_0) \right];$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} = \frac{2\sqrt{R_0} \delta^2}{(\rho_1\delta - R_5)^3} \left(R_5 + \rho_0^2 \delta^4 \frac{R_0^2}{R_5^3} \right),$$

и первое условие для минимума можно написать в таком виде:

$$\frac{\rho_1^2 \delta^4}{R_0 R_5^2 (\rho_1 \delta - R_5)^4} \left(R_5^2 + \rho_0^2 \delta^4 \frac{R_0^2}{R_5^2} \right) > \frac{\rho_1^2 \delta^4}{4 R_0 R_5^2 (\rho_1 \delta - R_5)^4} \left[\rho_1 \delta - 2 R_5 - \delta^2 \frac{R_0}{R_5} (\rho_1 - 2 \rho_0) \right]^2;$$

или

$$R_5^2 + \rho_0^2 \delta^4 \frac{R_0^2}{R_5^2} > \frac{1}{4} \left[\rho_1 \delta - R_5 - R_5 - \delta^2 \frac{R_0}{R_5} (\rho_1 - \rho_0) + \delta^2 \frac{R_0}{R_5} \rho_0 \right]^2.$$

Так как на основании уравнения (458)

$$\rho_1 \delta - R_5 = \delta^2 \frac{R_0}{R_5} (\rho_1 - \rho_0),$$

то

$$R_5^2 + \rho_0^2 \delta^4 \frac{R_0^2}{R_5^2} > \frac{1}{4} \left[\delta^2 \frac{R_0}{R_5} \rho_0 - R_5 \right]^2$$

или

$$3 \left(R_5^2 + \rho_0^2 \delta^4 \frac{R_0^2}{R_5^2} \right) + 2 \delta^2 R_0 \rho_0 > 0. \quad (46)$$

Из неравенства (464) видно, что и первое условие для получения минимума величины A также удовлетворено. Таким образом, определив из уравнения (459) значение ρ_1 для остальных заданных величин и значение R_0 из уравнения (458), получим максимальную мощность на приборе.

Например, задавшись следующим значением параметров: $\rho_0 = 40$ о, $\delta = 0,02$, $R_5 = 0,2$ ома и $E = 4$ В, т. е. расходом тока питания $I = 0,1$ А, получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 62,1 \text{ ома;} \\ R_0 &= 23,6 \text{ ома.} \end{aligned}$$

Однако здесь необходимо указать, что условие

$$\frac{R_5}{R_2} = \delta$$

по существу ограничивает отношение $\frac{R_5}{R_2}$ только в одну сторону — δ определяет максимальное предельное допустимое значение δ , т. е. $\delta_{\text{пр}}$. Поэтому можно написать, что

$$\frac{R_5}{R_2} = \delta \leq \delta_{\text{пр}},$$

где $\delta_{\text{пр}}$ является заданным предельным значением искажения, зависящего в температурный коэффициент температурного сопротивления соединительными проводами. Таким образом может оказаться, что

наилучшие значения параметров ρ_1 и R_0 , удовлетворяющие одновременно условию

$$\frac{R_5}{R_2} = \delta \leq \delta_{\text{пр}},$$

не будут соответствовать значению $\delta_{\text{пр}}$.

В связи с этим желательно получить такое решение, которое учитывало бы и это последнее обстоятельство.

Так как в уравнение (456) δ входит только в первый член, то из условия минимума этого члена найдем, какому значению должно удовлетворять δ . Обозначив этот член через B и взяв частную производную $\frac{\partial B}{\partial \delta}$, получим:

$$\frac{\partial B}{\partial \delta} = \frac{\rho_1^2 \delta (\rho_1 \delta^2 - 2R_5)}{R_5 (\rho_1 \delta - R_5)^2}.$$

Приравняв частную производную нулю, будем иметь:

$$\delta = \frac{2R_5}{\rho_1}. \quad (465)$$

Взяв вторую производную и подставив в нее полученное значение для δ из уравнения (465), увидим, что условие для минимума удовлетворено.

Подставив полученное значение для δ из уравнения (465) в уравнение (456), получим:

$$A = \sqrt{R_0} \left[4 + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \beta \Delta t \right]. \quad (466)$$

Из уравнения (466) видно, что, удовлетворив согласно уравнению (465) условие минимума первого члена уравнения (456), мы получаем минимум этого члена, не зависящий от величин ρ_1 и R_0 , т. е. при любых значениях этих величин. Следовательно, если далее найдем на основании уравнения (466) условие для минимума величины A по параметрам ρ_1 и R_0 , то тем самым будем иметь условия для минимума величины A по всем трем параметрам δ , ρ_1 и R_0 .

Поэтому, пренебрегая опять-таки в первом приближении малой величиной $\beta \Delta t$, продифференцируем уравнение (466) по переменным ρ_1 и R_0 :

$$\frac{\partial A}{\partial \rho_1} = \frac{\rho_1 (\rho_1 - 2\rho_0)}{\sqrt{R_0} (\rho_1 - \rho_0)^2}; \quad (467)$$

$$\frac{\partial A}{\partial R_0} = \frac{1}{2 \sqrt{R_0}} \left[4 - \frac{\rho_1^2}{R_0 (\rho_1 - \rho_0)} \right]. \quad (468)$$

Приравняв правые части уравнений (467) и (468) нулю, получим:

$$\rho_1 = 2\rho_0; \quad (469)$$

$$R_0 = \rho_0. \quad (470)$$

Так как

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} &= \frac{2\rho_0^2}{\sqrt{R_0}(\rho_1 - \rho_0)^3}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} &= \frac{1}{4\sqrt{R_0^3}} \left[3 \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} - 4 \right], \\ \frac{\partial^2 A}{\partial R_0 \partial \rho_1} &= -\frac{\rho_1(\rho_1 - 2\rho_0)}{2\sqrt{R_0}(\rho_1 - \rho_0)^2},\end{aligned}$$

то, подставив в полученные уравнения из уравнений (469) и (470) $\rho_1 = 2\rho_0$ и $R_0 = \rho_0$, увидим, что условие минимума выполнено, так как

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho_1^2} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0^2} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial R_0 \partial \rho_1} = 0.$$

Если подставить из уравнений (465), (469) и (470) полученные значения δ , ρ_1 и R_0 в уравнение (452), которое на основании уравнения (454) перепишем так:

$$i_0 \sqrt{R_0} = \frac{E\beta \Delta t}{\sqrt{R_0} \left[\frac{\rho_1^2 \delta^2}{R_s(\rho_1 \delta - R_s)} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \left(\frac{R_s}{\rho_1 \delta - R_s} + \frac{\rho_1^2}{R_0(\rho_1 - \rho_0)} + \frac{R_s}{R_0} \right) \beta \Delta t + \beta \Delta t \right]}, \quad (471)$$

то получим:

$$i \sqrt{R_0} = \frac{E\beta \Delta t}{V \rho_0 [8 + 4\beta \Delta t + \beta \Delta t]}, \quad (472)$$

так как на основании уравнений (454), (465), (469) и (470) $\frac{R_s}{R_0} = 1$.

Если задать, например, $\Delta t = 100^\circ$, приняв $\beta = 0,004$ на 1° , а остальные параметры взять те же, что и выше $\rho_0 = 40$ ом, $R_s = 0,2$ ома и $E = 4$ В, то для первого случая (для $\delta = 0,02$) на основании уравнений (459), (458) и (471) получим:

$$i_0 \sqrt{R_0} \approx 0,0197 W^{0,5}$$

или

$$i_0^2 R_0 \approx 0,388 mW$$

при

$$\rho_1 \approx 62,1 \text{ ома}$$

и

$$R_0 \approx 23,6 \text{ ома.}$$

Во втором случае, когда значением δ не задаемся, а получаем его из условия, определяемого уравнением (465), на основании уравнения (472) получим:

$$i_0 \sqrt{R_0} \approx 0,0253 W^{0,5}$$

или

$$i_0^2 R_0 \approx 0,642 \text{ мВ}$$

при

$$\rho_1 = 80 \text{ ом}$$

и

$$R_0 = 40 \text{ ом,}$$

причем в этом случае $\delta = 0,005$, т. е. значение δ не только приемлемое, но и значительно более благоприятное, так как при таком δ искажение температурного коэффициента температурного сопротивления под влиянием соединительных проводов значительно меньше.

Таким образом для нахождения наивыгоднейших значений ρ_1 и R_0 можно в том случае, если значение δ , полученное из уравнения (465), удовлетворяет поставленным техническим требованиям, т. е. $\delta \leq \delta_{\text{пр}}$, пользоваться уравнениями (469) и (470) и для определения $i_0 \sqrt{R_0}$ уравнением (472).

Если же полученное значение $\delta > \delta_{\text{пр}}$, то величины ρ_1 и R_0 найдутся из уравнений (459) и (458), полученных для первого случая, т. е. по заданной δ ; значение же $i_0 \sqrt{R_0}$ находится из уравнения (471).

Например если бы при остальных тех же заданных величинах, что и выше, сопротивление соединительных проводов было не 0,2, а 2 ома, то пришлось бы пользоваться последними зависимостями, так как

$$\frac{2}{40} = 0,05 > 0,02.$$

В этом случае мы получили бы:

$$i_0 \sqrt{R_0} \approx 0,0198 W^{0,5}$$

или

$$i_0^2 R_0 \approx 0,393 \text{ мВ,}$$

при

$$\rho_1 = 160 \text{ ом}$$

и

$$R_0 = 50 \text{ ом.}$$

Далее укажем, что с увеличением силы питающего тока, т. е. с уменьшением ρ_0 , при тех же остальных значениях заданных величин мощность на приборе увеличивается. Это ясно видно из уравнения (472).

Возведя уравнение (472) в квадрат и сделав необходимые преобразования, получим для случая, когда заданные параметры R_b , ρ_0 и $\delta_{лр}$ удовлетворяют условию

$$\frac{R_b}{\rho_0} \leq \delta_{лр},$$

исключительно простые зависимости для определения мощности и силы тока при заданных E и $\beta \Delta t$:

$$i_0^2 R_0 = \frac{E^2 (\beta \Delta t)^2}{\rho_0 (8 + 5\beta \Delta t)^2}; \quad (473)$$

$$i_0 = \frac{E \beta \Delta t}{\rho_0 (8 + 5\beta \Delta t)}. \quad (474)$$

В заключение посмотрим, действительно ли мы получим наилучшее качество прибора, если удовлетворим требованию наибольшей мощности на приборе.

Согласно изложенному ранее (стр. 136) коэффициент качества можно выразить так:

$$k_D = \frac{1}{k_H(k_1 + 1)^{1,5}}. \quad (110)$$

Подставив согласно уравнению (111) в уравнение (110) значение k_H , будем иметь:

$$k_D = \frac{k_4 H' (a_2 b_2)^{0,25} I_2}{k_6^{1,5} k_5^{1,5} k_3^{1,5} k_2^{1,5} n_2^{0,5} I_2^{0,5} q_2^{1,5} (k_1 + 1)^{1,5}}. \quad (475)$$

Так как

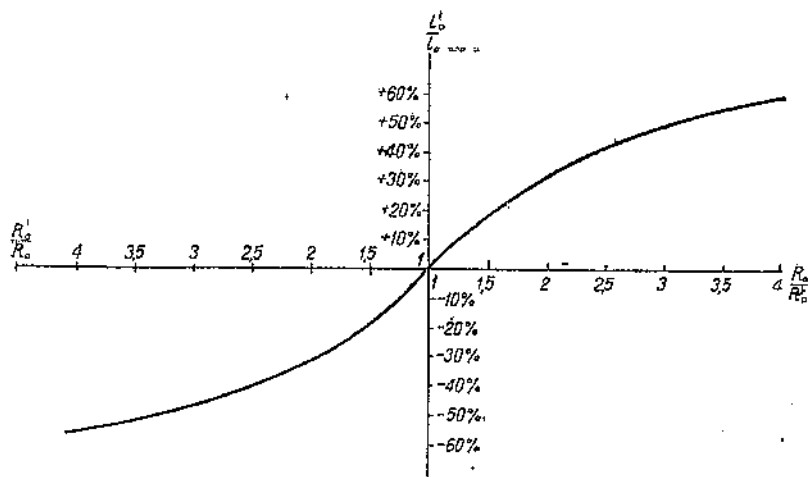
$$\sqrt{R_0} = \frac{k_6^{0,5} k_5^{0,5} (a_2 b_2)^{0,25} n_2^{0,5} I_2^{0,5} q_2^{0,5}}{q_2^{0,5}},$$

то уравнение (475) можно переписать так:

$$\begin{aligned} k_D &= \frac{k_4 H' I_2 \sqrt{R_0}}{k_6^{0,5} k_5^{1,5} k_3^{1,5} k_2^{1,5} n_2^{0,5} I_2 q_2^{0,5} (k_1 + 1)^{1,5}} = \\ &= \frac{k_4 H' W^{0,5}}{k_6^{0,5} k_5^{1,5} k_3^{1,5} k_2^{1,5} n_2^{0,5} I_2 q_2^{0,5} (k_1 + 1)^{1,5}}. \end{aligned} \quad (476)$$

Из уравнения (476) видно, что коэффициент качества при удовлетворении условия его максимума растет пропорционально корню-квадратному из мощности. Однако возможен и такой случай, что, удовлетворив требованию максимальной мощности на приборе, мы все же не получим максимума коэффициента качества. Из уравнения (475) и по изложенному ранее (стр. 138) видно, что величину q_2 желательно, с точки зрения максимума коэффициента качества k_D , брать наимень-

шей. Следовательно, выбрав наименьшее допускаемое сечение q_2 проводника, подбираем затем такие значения n_2 и l_2 , чтобы при данных размерах рамки получить величину сопротивления R_0 , отвечающую требованию наибольшей мощности на приборе. Подобрав значения указанных параметров, следует проверить по уравнениям (115) и (475)



Фиг. 65. Кривая $\frac{i_0'}{i_0} = f\left(\frac{R_0'}{R_0}\right)$.

Таблица 10 (к Фиг. 65)

$$\frac{i_0'}{i_0} = \frac{\rho_0 [8 + 5\beta\Delta t]}{R_0' \left[4 + 4\frac{\rho_0}{R_0'} + \left(1 + 3\frac{\rho_0}{R_0'} \right) \beta\Delta t + \beta\Delta t \right]}$$

$\frac{R_0}{R_0'}$	$\frac{i_0'}{i_0}$	$\frac{R_0'}{R_0}$	$\frac{i_0'}{i_0}$
1,5	1,190	1,5	0,805
2,0	1,315	2,0	0,677
2,5	1,400	2,5	0,580
3,0	1,470	3,0	0,510
4,0	1,560	4,0	0,410

получившуюся при этом величину коэффициента k_1 на максимум k_D . Если значение коэффициента k_1 не соответствует максимуму k_D , то следует несколько изменить соответствующие параметры для приближения величины k_1 к его значению, соответствующему этому максимуму, за счет некоторого изменения R_0 .

Необходимо отметить, что максимум i_0 [I_2 согласно обозначениям в уравнении (475)] не соответствует максимуму $i_0/\sqrt{R_0}$. Как видно из графика фиг. 65, построенного для случая, когда

$$\frac{R_5}{\rho_0} \leq \delta_{\text{пр}},$$

i'_0 растет с уменьшением R'_0 .

Следовательно, по уравнению (475), если изменение k_1 будет требовать уменьшения R_0 , это будет выгодно и вызовет значительное увеличение коэффициента добротности k_D прибора, так как он будет расти вследствие изменения k_1 согласно кривой фиг. 32 и прямо пропорционально увеличению i_0 согласно кривой фиг. 65.

Если подсчитанное значение k_1 будет требовать для повышения коэффициента добротности k_D увеличения R_0 , то по кривым фиг. 32 и 65 следует установить, что окажет большее влияние на его значение — соответствующее ли изменение k_1 или вызываемое этим уменьшение i_0 . Принципиально не исключена даже такая возможность, что изменением коэффициента k_1 в сторону некоторого уменьшения коэффициента добротности k_D в конечном результате все же получим его увеличение вследствие соответствующего роста i_0 .

Для определения, как будет меняться i_0 в зависимости от изменения R_0 для случая, когда

$$\frac{R_5}{\rho_0} \leq \delta_{\text{пр}},$$

можно уравнение (474) переписать в следующем виде:

$$i'_0 = \frac{E\beta\Delta t}{R'_0 \left[4 + 4 \frac{\rho_0}{R_0} + \left(1 + 3 \frac{\rho_0}{R_0} \right) \beta\Delta t + \beta\Delta t \right]}. \quad (477)$$

На основании уравнений (477) и (474) получим:

$$\frac{i'_0}{i_0} = \frac{\rho_0 [8 + 5\beta\Delta t]}{R'_0 \left[4 + 4 \frac{\rho_0}{R_0} + \left(1 + 3 \frac{\rho_0}{R_0} \right) \beta\Delta t + \beta\Delta t \right]}. \quad (478)$$

Приведенные два примера показывают, как рациональными упрощениями и преобразованиями первоначальных уравнений в конечном результате получить простой и ясный ответ, при каких условиях и в какой мере можно удовлетворить поставленным техническим требованиям, а также получить наилучшее решение задачи.

Приложение I

Приведенная на стр. 24 зависимость между высотой и давлением получается следующим образом.

Принимая при некотором достаточно малом изменении высоты весовую плотность γ воздуха постоянной, можно написать следующую зависимость:

$$-dB_H = \frac{\gamma}{13,596} dH, \quad (479)$$

где B_H — давление в мм рт. ст.,

13,596 — весовая плотность ртути, остальные обозначения — те же, что и на стр. 24.

Так как весовая плотность γ связана с массовой плотностью γ_1 следующей зависимостью:

$$\gamma = \gamma_1 g,$$

то уравнение (479) можно переписать так:

$$-dB_H = \frac{\gamma_1 g}{13,596} dH. \quad (480)$$

Как известно, ускорение силы тяжести g под влиянием центробежной силы вследствие вращения земли, а также в связи с формой земли (геоид) меняется с широтой местности φ по следующей зависимости:

$$g' = g_0 (1 - 0,00259 \cos 2\varphi).$$

Учитывая изменение силы тяжести с высотой, в результате получим формулу Birsch'a (см. Хвольсон, ч. 1):

$$g = g_0 (1 - 0,00259 \cos 2\varphi) \left(1 - 2 \frac{H'}{R} \right),$$

где g_0 — ускорение силы тяжести, соответствующее широте $\varphi = 45^\circ$ и высоте $H' = 0$,

R — радиус земли;

$$H' = h + H,$$

h является дополнительной высотой до плоскости, от которой замечается высота барометрическим методом.

Изменение массовой плотности в зависимости от температуры и давления определяется по следующему уравнению:

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_{10}}{1 + \alpha t} \frac{B_H - \frac{3}{8} b_H}{760},$$

где γ_{10} — плотность сухого воздуха при давлении 760 мм рт. ст. и при температуре 0° ,

$\alpha = 0,00367$ — коэффициент температурного расширения газа,

b_H — давление водяных паров.

Подставив вместо γ и g в уравнение (480) их значения, получим:

$$-dB_H = \frac{\gamma_{10} g_0}{13,596} \frac{B_H - \frac{3}{8} b_H}{760} \frac{(1 - 0,00259 \cos 2\varphi) \left(1 - 2 \frac{H'}{R}\right)}{(1 + \alpha t)} dH.$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & - \frac{13,596 \cdot 760}{\gamma_{10} g_0} (1 + \alpha t) (1 + 0,00259 \cos 2\varphi) \frac{dB_H}{B_H \left(1 + \frac{3}{8} \frac{b_H}{B_H}\right)} = \\ & = \left(1 - 2 \frac{H'}{R}\right) dH. \end{aligned}$$

Величина $13,596 \cdot 760$ является давлением, соответствующим высоте 760 мм рт. ст. в кг/м^2 .

Так как

$$\gamma_{10} g_0 = \gamma_0 = 1,293 \text{ кг/м}^2,$$

то последнее уравнение можно еще переписать так:

$$\begin{aligned} & - 7991,463 (1 + \alpha t) (1 + 0,00259 \cos 2\varphi) \left(1 + 0,375 \frac{b_H}{B_H}\right) \frac{dB_H}{B_H} = \\ & = \left(1 - 2 \frac{H'}{R}\right) dH. \end{aligned} \quad (481)$$

Проинтегрировав выражение (481) в пределах от B_0 до B_H и от H_0 до H , заменив при этом переменную t через какую-то среднюю температуру t_{cp} и переменную $\frac{b_H}{B_H}$ через какое-то среднее $\left(\frac{b_H}{B_H}\right)_{cp} = k$ (поскольку зависимость этих величин от B и H неопределенная) и считая при интегрировании величины t_{cp} и k постоянными, будем иметь:

$$\begin{aligned} & 18401,155 (1 + 0,00367 t_{cp}) (1 + 0,00259 \cos 2\varphi) (1 + 0,375 k) \lg \frac{B_0}{B_H} = \\ & = (H - H_0) \left[1 - 2 \frac{\left(h + \frac{H_0 + H}{2}\right)}{R} \right], \end{aligned} \quad (482)$$

причем приближенно

$$t_{cp} = \frac{1}{2} (t_0 + t_H) \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{2} \left(\frac{b_0}{B_0} + \frac{b_H}{B_H} \right).$$

Принимая далее $H_0 = 0$, пренебрегая величинами высших порядков малости, обозначив $h + \frac{H}{2} = H_1$ и прибавив поправку на рельеф местности, в окончательном виде будем иметь:

$$H = 18401,2(1 + 0,00367t_{\text{ср}})(1 + 0,00259 \cos 2\varphi + 2 \frac{H_1}{R}) \times \\ \times (1 + 0,375k) \lg \frac{B_0}{B_H} + \Delta H. \quad (2)$$

Зависимость между давлением B_H и высотой H можно получить и в несколько другом виде. Написав уравнение (479) в общем виде:

$$-dB'_H = \gamma dH, \quad (483)$$

и имея зависимость

$$B'_H V = GRT,$$

где B'_H — давление в кг/м^2 ,

V — объем в м^3 ,

G — вес в кг ,

R — газовая постоянная (в наших широтах $R = 29,27$),

T — абсолютная температура, получим:

$$\frac{G}{V} = \gamma = \frac{B'_H}{RT}$$

и, подставив в уравнение (483) значение γ , будем иметь:

$$-\frac{dB'_H}{B'_H} = \frac{dH}{RT}. \quad (484)$$

Абсолютную температуру T можно выразить так:

$$T = T_0 - t_{\text{гр}} H,$$

где T_0 — некоторая начальная температура, соответствующая $H = 0$,
 $t_{\text{гр}} = 0,0065^\circ$ на 1 м — температурный градиент.

Уравнение (484) тогда переписывается в таком виде:

$$-\frac{dB'_H}{B'_H} = \frac{dH}{R(T_0 - t_{\text{гр}} H)}. \quad (485)$$

Проинтегрировав уравнение (485) в пределах от $B'_H = B_H$ до $B'_H = B_0$ и от 0 до H , получим:

$$\ln B_H - \ln B_0 = \frac{1}{R t_{\text{гр}}} [\ln(T_0 - t_{\text{гр}} H) - \ln T_0]$$

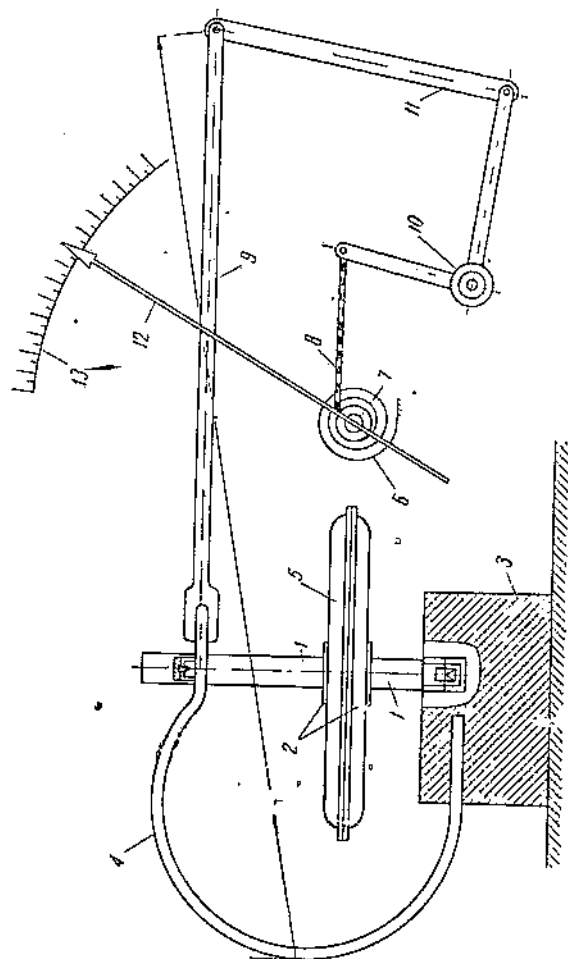
или

$$\lg \frac{B_H}{B_0} = \frac{1}{R t_{\text{гр}}} \lg \frac{T_0 - t_{\text{гр}} H}{T_0}. \quad (486)$$

Пролотенцировав уравнение (486), будем иметь:

$$B_H = B_0 \left(\frac{T_0 - t_{\text{гр}} H}{T_0} \right)^{\frac{1}{R t_{\text{гр}}}}. \quad (487)$$

Вывод уравнения (487) проще и строже, однако в таком виде оно не отражает всех факторов, влияющих на зависимость между давле-

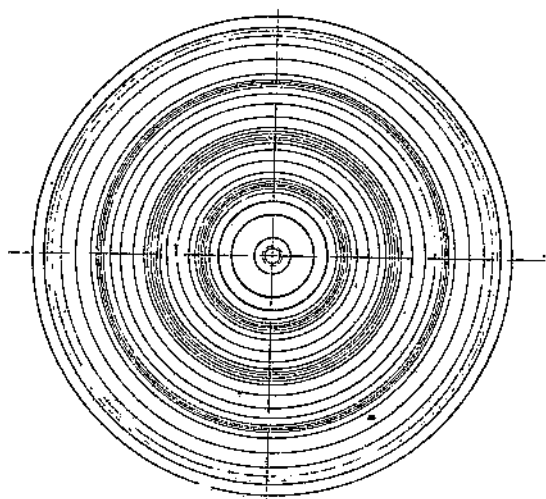


Фиг. 66. Схема барометрического высотомера.

1—верхняя и нижняя шкалы, 2—местные центры, 3—основание, 4—намерительная пружина, 5—аперонидная коробка системы Вилли, 6—вертикаль, 7—сдвигавший, 8—щелочка Галли, 9—рычаг, 10—малый рычаг, 11—тяга, 12—стрелка, 13—шкала.

нием и высотой, поэтому в целом ряде случаев уравнение (2) является более удобным ¹.

Прибор, использующий принцип, основанный на зависимостях, выраженных уравнениями (2) и (487), называется барометрическим высотомером. До изобретения гидравлического способа изготовления беспружинных коробок анероидных устройство его было следующее.



Фиг. 67. Анероидная коробка системы Види.

1 и 2—пружины, 3—мембраны, 4 и 5—лестные центры, 6—место спайки.

меньший прогиб пружины. Перемещение свободного конца пружины

¹ Если, как и раньше, ввести в уравнение (485) влияние влажности, широты местности и высоты, то вместо равенства (485) получим:

$$\frac{dB'_H}{B'_H} = \frac{dH}{R_0 (T_0 - t_{гр} H)} \frac{(1 - 2 \frac{H'}{R})}{(1 + 0,00259 \cos 2\varphi) (1 + 0,375 k)}.$$

Приближенно, взяв при интегрировании средние величины $\frac{H'}{R}$ и k , считая их при интегрировании приближенно постоянными, получим:

$$B_H = B_0 \left(\frac{T_0 - t_{гр} H}{T_0} \right)^{\frac{1}{R t_{гр}} \cdot n},$$

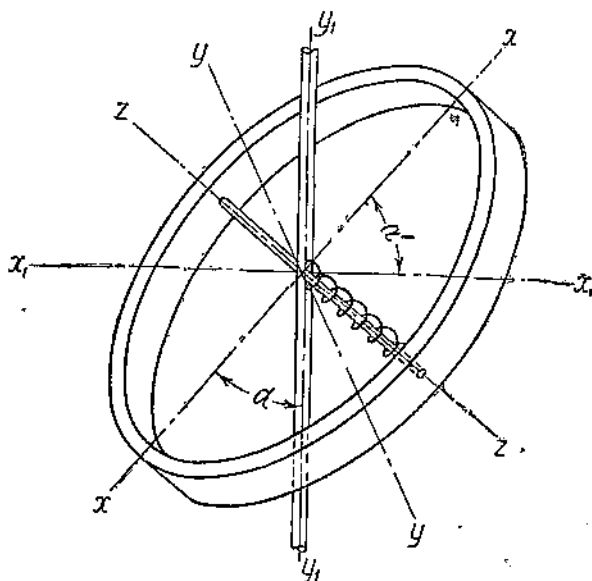
где

$$n = \frac{1 - 2 \frac{H'}{R}}{(1 + 0,00259 \cos 2\varphi) (1 + 0,375 k)}.$$

передается с помощью рычага и тяги на промежуточный ломаный качающийся рычаг, называемый малым мостиком. Мостик натягивает или отпускает микрометрическую цепочку Галля; цепочка наматывается на барабанчик, на оси которого расположена стрелка. Расположенный на той же оси барабанчика волосок натягивает его в одну сторону, устраняя таким образом все люфты.

Приложение 2

Вывод уравнения центробежного тахометра с кольцевым грузом
(см. стр. 30)



Фиг. 68. Принципиальная схема чувствительного элемента центробежного тахометра с кольцевым грузом.

Элементарную центробежную силу f элементарной массы m , дающую момент относительно оси zz (фиг. 68), можно выразить так:

$$f = m r \omega^2,$$

где r — расстояние до плоскости y_1y_1zz .

Обозначив r через x_1 , получим:

$$f = m \omega^2 x_1.$$

Элементарный вращательный момент M' элементарной массы m вокруг оси zz будет равен элементарной силе f , умноженной на ее плечо, т. е. расстояние элементарной массы m до плоскости x_1x_1zz или координату y_1 точки m :

$$M' = m \omega^2 x_1 y_1.$$

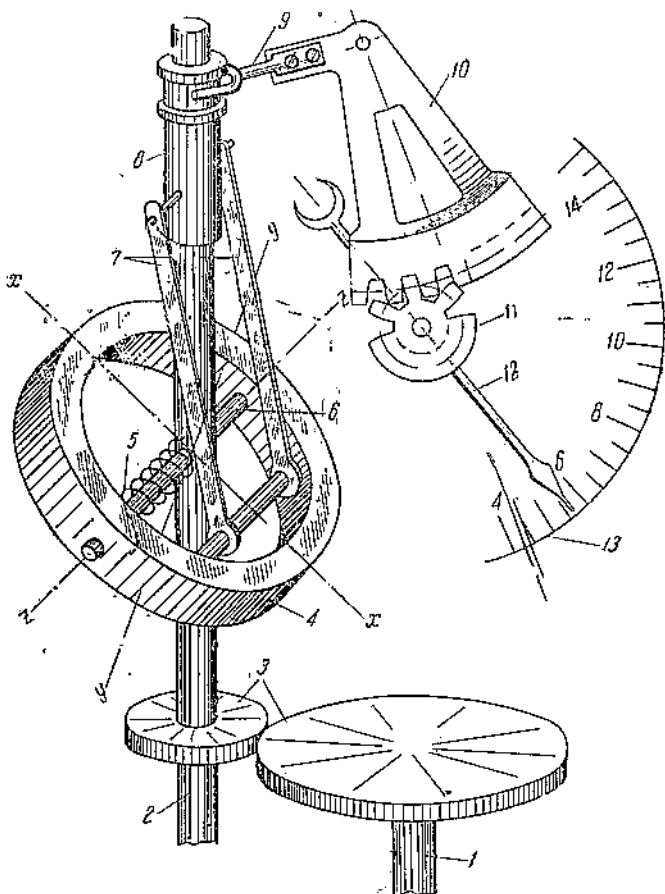
Полный момент M кольцевого груза будет равен сумме элементарных моментов:

$$M = \sum M' = \sum m \omega^2 x_1 y_1. \quad (488)$$

Переходя от неподвижных осей $x_1 y_1$ к подвижным x, y , связанным с кольцевым грузом и являющимися главными осями инерции груза, получим:

$$x_1 = x \cos \alpha' - y \sin \alpha';$$

$$y_1 = y \cos \alpha' + x \sin \alpha'.$$



Фиг. 69. Схема центробежного тахометра с кольцевым грузом.

1—наконечник, 2—главный вал, 3—передача, 4—кольцевой груз, 5—спиральная пружина, 6—ось кольцевого груза, 7—штырь, 8—скользящая муфта, 9—поводок, 10—сектор, 11—трибка, 12—стрелка, 13—шкала.

Уравнение момента центробежной силы примет следующий вид:

$$M = \sum m \omega^2 (x \cos \alpha' - y \sin \alpha') (y \cos \alpha' + x \sin \alpha')$$

или

$$M = \sum m \omega^2 [\sin \alpha' \cos \alpha' (x^2 - y^2) + xy (\cos^2 \alpha' - \sin^2 \alpha')],$$

или

$$M = \sum m \omega^2 \sin \alpha' \cos \alpha' (x^2 - y^2) + \sum m \omega^2 xy (\cos^2 \alpha' - \sin^2 \alpha').$$

Так как $\sum mxy$ является центробежным моментом относительно главных осей инерции, то

$$\sum m \omega^2 xy = 0,$$

т. е.

$$M = \sum m \omega^2 \sin \alpha' \cos \alpha' (x^2 - y^2) = \sum m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha (x^2 - y^2).$$

Так как

$$\sum mx^2 = J_{yz},$$

т. е. величина $\sum mx^2$ равна моменту инерции кольцевого груза относительно плоскости yz ,

$$\sum my^2 = J_{xz},$$

т. е. величина $\sum my^2$ равна моменту инерции кольцевого груза относительно плоскости xz и

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha,$$

то в конечном виде мы получаем;

$$M = \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (J_{yz} - J_{xz}). \quad (7)$$

Устройство центробежного тахометра с кольцевым грузом следующее (фиг. 69).

Главный вал тахометра имеет шестеренную передачу от накопчика, который присоединяется с помощью гибкого вала к валу, скорость вращения которого нужно измерить. На главном валу насажен кольцевой груз на оси, перпендикулярной главному валу, вокруг которой он может поворачиваться. На оси груза имеется спиральная пружина, удерживающая груз в определенном положении относительно главного вала. От кольцевого груза идет тяга к муфте, скользящей по главному валу. Муфта через поводок с вилкой, сектор и трибку передает перемещения кольцевого груза на стрелку.

Приложение 3

Для нахождения значений угла $\alpha_{\min}$ и угла $\alpha_{\max}$, соответствующих начальному и максимальному показаниям центробежного тахометра с кольцевым грузом, именно таких, при которых получается наиболее равномерная шкала, в свое время был предложен следующий весьма простой способ. В каком-нибудь произвольно выбранном масштабе для нескольких значений ω : минимального (от которого должен начинать давать показания тахометр), максимального и нескольких средних значений, отличающихся друг от друга и от $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ (в порядке возрастания) на одинаковые величины $\Delta\omega$ (фиг. 70), строятся синусоиды:

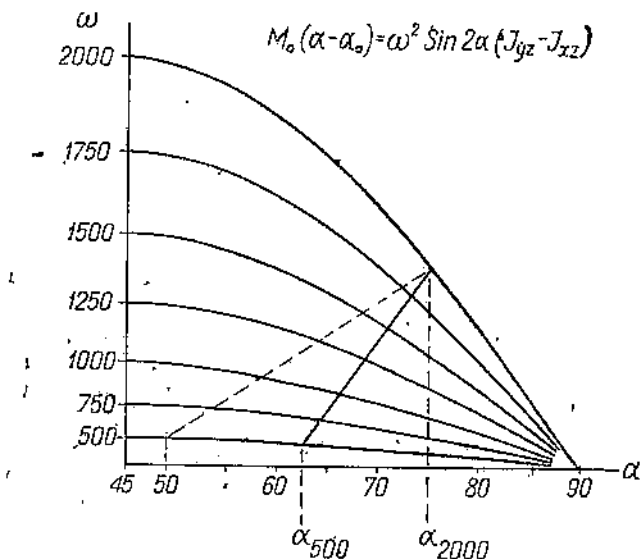
$$x = k \omega^2 \sin 2\alpha,$$

где k — коэффициент пропорциональности, определяющий масштаб.

На полученный график накладывается масштабная линейка и перемещается по нему до тех пор, пока не будет найден участок, на котором отрезки, отсекаемые на линейке синусоидами, будут наиболее одинаковыми. Угол, соответствующий пересечению линейки с синусоидой, соответствующей $\omega_{\min}$, будет $\alpha_{\min}$, и угол, соответствующий пересечению линейки с синусоидой, соответствующей $\omega_{\max}$, будет $\alpha_{\max}$ (фиг. 70). Получив значение углов $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$, можно из следующего уравнения найти требующуюся упругость пружины:

$$M_0 = \frac{\omega_{\max}^2 \sin 2\alpha (J_{yz} - J_{xz})}{2(\alpha_{\max} - \alpha_0)}, \quad (489)$$

где $\alpha_0 = \alpha_{\min} - \delta\alpha$ и $\delta\alpha$ является начальным натяжением пружины (на минимальных измеряемых оборотах).



Фиг. 70. График для подбора $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ в целях компенсации квадратичности шкалы центробежного тахометра с помощью добавочной функции зависимой переменной $\sin 2\alpha$.

На фиг. 70 положение линейки обозначено прямой линией. Как видно из графика, для диапазона работы тахометра от 500 до 2000 об/мин.

$$\alpha_{\min} \approx 62^\circ$$

$$\alpha_{\max} \approx 75^\circ.$$

Следует однако отметить, что при наложении указанным способом масштабной линейки нужно руководствоваться еще соображением, чтобы разность $\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ не была чересчур малой, так как

это ухудшает работу прибора. В этом отношении приходится иногда несколько поступиться равномерностью шкалы. Например может оказаться более целесообразным остановиться на второй пунктирной прямой (фиг. 70), согласно которой

$$\alpha_{\min} = 50^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 15^\circ.$$

Приложение 4

Краткая теория тахометра инженера Тихменева (см. стр. 32)

Чувствительный элемент центробежного тахометра (фиг. 71) инж. Тихменева в основном устроен так. Ось вращения двух накрест расположенных рычагов закреплена на главном валу тахометра. На концах этих рычагов укреплены грузы. Момент центробежных сил грузов системой рычагов и тяг и с помощью скользящей муфты передается на цилиндрическую измерительную пружину, одетую на главный вал.

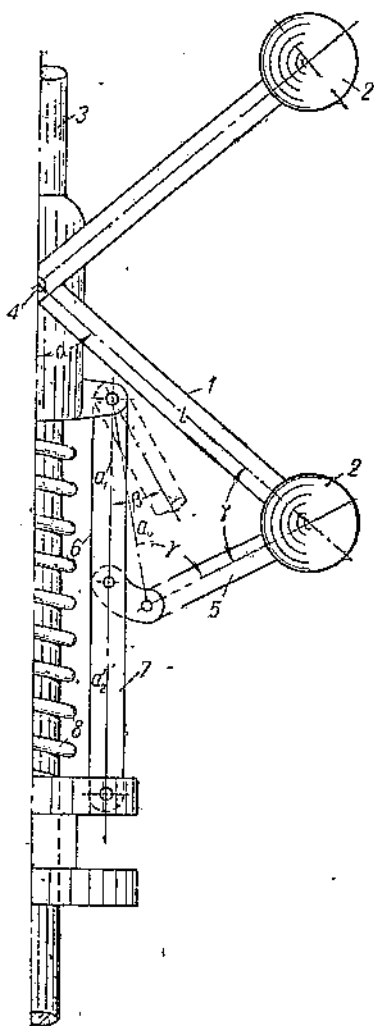
Обозначим через α угол, на который поворачиваются рычаги 1 под влиянием центробежной силы грузов 2 вокруг оси 4 при вращении всей системы вокруг оси 3, и через β угол, на который поворачиваются коленчатые рычаги 6, связанные с рычагами 1 с помощью тяг 5. Система рычагов подобрана так, что изменение угла β всегда почти точно равно удвоенному изменению угла α , причем тахометр начинает работать от угла $\alpha = 45^\circ$ и угла $\beta = 0^\circ$, т. е. мы имеем следующую зависимость:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 45^\circ,$$

следовательно

$$\sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\beta}{2} + 45^\circ\right) = \cos \beta.$$

Момент центробежной силы грузов 2 уравнивается через систему рычагов и тяг пружиной 8.



Фиг. 71. Схема чувствительного элемента центробежного тахометра системы инж. Тихменева.

1, 6 и 7—рычаги, 2—грузы, 3—главный вал, 4—ось, 5—тяги, 8—пружина.

Момент центробежной силы относительно оси 4 для всех четырех грузов будет (см. стр. 291):

$$M_{\text{ц}} = \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (J_{yz} - J_{xz}),$$

или на основании сказанного и в связи с наличием двух рычагов с грузами

$$M_{\text{ц}} = \omega^2 \cos \beta (J_{yz} - J_{xz}). \quad (490)$$

Так как размеры рычагов 6 и 7 равны, т. е.

$$a_1 = a_2 = a,$$

а углы между тягой 5 и рычагом 7 и тягой 5 и плечом a_0 , обозначенные на фиг. 71 пунктиром, приближенно равны друг другу (на фиг. 71 — угол γ), то момент от центробежной силы грузов, действующий относительно центра качания рычага 6, приближенно будет равен:

$$M_{\text{ц}}' = \frac{\omega^2 \cos \beta (J_{yz} - J_{xz}) a_0}{l},$$

а сила, действующая в направлении рычага 7, будет:

$$F_{\text{ц}}' = \frac{\omega^2 \cos \beta (J_{yz} - J_{xz}) a_0}{la \sin 2\beta} = \frac{\omega^2 a_0 (J_{yz} - J_{xz})}{2al \sin \beta}.$$

Таким образом сила, сдвигивающая пружину 9, будет:

$$F_{\text{ц}} \approx \frac{\omega^2 a_0 (J_{yz} - J_{xz}) \cos \beta}{2al \sin \beta} = \frac{\omega^2 a_0 (J_{yz} - J_{xz})}{2al} \operatorname{ctg} \beta.$$

Восстанавливающая сила пружины 9 выразится так:

$$F_{\text{пр}} = F_0 [2a(1 - \cos \beta) + \delta],$$

где F_0 — упругость пружины δ ,

J_{yz} и J_{xz} — моменты инерции рычагов 7 с грузами 2 относительно соответствующих плоскостей (см. стр. 291),

δ — начальное натяжение пружины; остальные обозначения указаны на фиг. 71.

Таким образом в конечном результате мы получим:

$$F_0 [2a(1 - \cos \beta) + \delta] \approx \frac{\omega^2 a_0 (J_{yz} - J_{xz})}{2al} \operatorname{ctg} \beta. \quad (491)$$

Обеспечив такую конструкцию тахометра, можно найти диапазон углов β , для которых в значительных пределах получается равномерная шкала. Кроме того, так как углы β начинают работать от нуля, то такая конструкция тахометра может начинать работать с достаточно малых оборотов. Инж. Тихменевым были построены тахометры, дающие значительную равномерность шкалы в пределах от 100 до 2000 об/мин.

Этот способ выравнивания шкал имеет, однако, два принципиальных недостатка: 1) он несомненно усложняет и удорожает прибор; 2) всякие добавочные шарнирные звенья между элементом, воспринимающим измеряемое явление и преобразующим его в силу, с одной

стороны, и измерительной пружины — с другой, крайне нежелательны, так как они в отличие от передаточного механизма на стрелках работают под полной нагрузкой основных действующих сил в приборе, поэтому могут служить источником значительных погрешностей о затирания.

Однако в защиту данной конструкции можно отметить, что инж. Тихменев, весьма остроумно решив задачу, достиг этим методом очень полной компенсации квадратичности шкалы центробежного тахометра в исключительно широких пределах угловых скоростей, причем благодаря значительной вибрации, имеющей место при работе тахометра особых погрешностей от затираний в этой конструкции выявлено не было.

Приложение

Приведенные на стр. 33 и 34 уравнения (9) и (10), выражающие зависимость между вращательными моментами рамок магнитоэлектрических и электродинамических приборов и их параметрами, получаются следующим образом.

По кинетической теории электромагнитных явлений, созданной Максвеллом, исследования которых он провел с помощью уравнений Лагранжа второго рода, кинетическую энергию системы проводников находящихся под токами различной силы, можно выразить так:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \eta_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \eta_2 \dot{x}_2^2 + \dots + \eta_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \eta_{13} \dot{x}_1 \dot{x}_3 + \dots + \\ & + \frac{1}{2} \zeta_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \zeta_2 i_2^2 + \dots + \zeta_{12} i_1 i_2 + \zeta_{13} i_1 i_3 + \dots + \\ & + \vartheta_{11} \dot{x}_1 i_1 + \vartheta_{12} \dot{x}_1 i_2 + \dots + \vartheta_{21} \dot{x}_2 i_1 + \dots, \end{aligned} \quad (492)$$

где коэффициенты $\eta_1, \eta_2, \dots, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \dots$, зависят исключительно от обобщенных координат и не зависят от их производных (обобщенных скоростей).

Кроме того, эти коэффициенты содержат только геометрические координаты $x_1, x_2, \dots$, электрические же координаты $q_1, q_2, \dots$ в них не входят¹. Совершенно очевидно, что эти коэффициенты содержат также и инерционные факторы.

В качестве обобщенных координат Максвеллом были выбраны: 1) геометрические координаты $x_1, x_2, \dots$, характеризующие данную систему исключительно с механической стороны, и 2) электрические координаты $q_1, q_2, \dots$, обозначающие количества электричества, протекающие через поперечные сечения проводников за данный отрезок времени.

Производная по времени количества электричества q будет сила тока i .

¹ $q_1, q_2, \dots$ — количества электричества, $i_1, i_2, \dots$ — силы токов.

Таким образом уравнение (492) для общей кинетической энергии электродинамической системы можно разбить на три:

$$W_1 = \frac{1}{2} \eta_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \eta_2 \dot{x}_2^2 + \dots + \eta_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \eta_{13} \dot{x}_1 \dot{x}_3 + \dots; \quad (493)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \zeta_1 \dot{i}_1^2 + \frac{1}{2} \zeta_2 \dot{i}_2^2 + \dots + \zeta_{12} \dot{i}_1 \dot{i}_2 + \zeta_{13} \dot{i}_1 \dot{i}_3 + \dots; \quad (494)$$

$$W_3 = \vartheta_{11} \dot{x}_1 \dot{i}_1 + \vartheta_{12} \dot{x}_1 \dot{i}_2 + \dots + \vartheta_{21} \dot{x}_2 \dot{i}_1 + \dots \quad (495)$$

В первое уравнение входят исключительно производные геометрических координат системы независимо от ее электрического состояния, т. е. первое уравнение рассматривает систему исключительно с механической стороны. В связи с этим первое слагаемое W_1 общей кинетической энергии получило название пондеро-кинетической энергии.

Во второе уравнение входят исключительно производные электрических координат. Это уравнение рассматривает систему исключительно с электрической стороны, в связи с чем второе слагаемое W_2 общей кинетической энергии получило название электрокинетической энергии.

Третье слагаемое W_3 общей кинетической энергии системы получило название пондеро-электрокинетической энергии, так как в него входят производные как геометрических, так и электрических координат.

Применяя далее уравнение Лагранжа второго рода, можно написать следующую зависимость для обобщенной механической силы:

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Так как W состоит из трех слагаемых (уравнения 493—495), то можно написать уравнение для обобщенной силы в следующем виде:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{d}{dt} \frac{\partial W_1}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial W_2}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial W_3}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_3}{\partial x}. \quad (496)$$

Рассматривая другую сторону явления — электрическую — за величину, соответствующую обобщенной силе, можно принять ту часть э. д. с.

$$E' = E_0 - Ri,$$

которая идет на изменение электрокинетической энергии.

В приведенной зависимости E_0 является полной э. д. с., приложенной к соответствующей электрической цепи, и Ri — омическое падение напряжения в ней.

Применяя уравнение Лагранжа второго рода, можно, как и в первом случае, написать следующую зависимость:

$$\begin{aligned} -E' &= E = E_1 + E_2 + E_3 = \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial W_1}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial W_1}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W_2}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial W_2}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W_3}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial W_3}{\partial q}, \end{aligned} \quad (497)$$

где E — внутренняя реакция системы, другими словами, обратная э. д. с.

При дальнейшем рассмотрении уравнений (496) и (497) силу F_1 так как она является чисто механической, рассматривать не будем. Что касается других сил (в том числе э. д. с.), то, не останавливаясь на подробном анализе ¹, укажем только, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_2}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial W_1}{\partial \dot{t}} = \frac{\partial W_1}{\partial q} = \frac{\partial W_2}{\partial q} = \frac{\partial W_3}{\partial q} = 0,$$

так как дифференцируемые выражения не содержат тех переменных, по которым берутся в данном случае производные.

Рассматривая систему в покое, получим также

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} = 0.$$

Экспериментальные исследования показали, что силы ²

$$F_3 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial W_3}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_3}{\partial x}$$

и

$$E_3 = \frac{d}{dt} \frac{\partial W_3}{\partial \dot{t}}$$

настолько малы, что ими можно пренебречь.

Таким образом получим две силы, подлежащие рассмотрению:

$$F_2 = -\frac{\partial W_2}{\partial x} \quad (498)$$

и

$$E_2 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial W_2}{\partial \dot{t}}. \quad (499)$$

Рассмотрим сначала выражение для обратной (индуцируемой) э. д. с. E . Согласно уравнению (494)

$$W_2 = \frac{1}{2} \zeta_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \zeta_2 i_2^2 + \dots + \zeta_{12} i_1 i_2 + \zeta_{13} i_1 i_3 + \dots \quad (494)$$

Заменяя в выражении (494) коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{12}, \zeta_{13}$ общепринятыми символами $L_1, L_2, \dots; M_{12}, M_{13}, \dots$, так как эти коэффициенты по существу являются коэффициентами самоиндукции и взаимной индукции, последнюю зависимость перепишем в следующем виде:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \dots + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + \dots \quad (500)$$

Для одного проводящего контура уравнение (500) примет следующий вид:

$$W_2 = \frac{1}{2} L i^2. \quad (501)$$

¹ Миткевич, Физические основы электротехники.

² $\frac{\partial W_3}{\partial x} = 0$ при состоянии покоя системы.

Таким образом индуцируемая обратная э. д. с. самоиндукции будет:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial Li^2}{\partial i} = -\frac{dLi}{dt}. \quad (502)$$

На основании опытов Фарадея известно, что э. д. с. индуцируется в контуре только при изменении магнитного потока, связанного с контуром, и по величине равна скорости убывания магнитного потока. Поэтому, обозначив магнитный поток через Φ , можно написать:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (503)$$

т. е. из уравнений (502) и (503) имеем:

$$\frac{dLi}{dt} = \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$Li = \Phi. \quad (504)$$

Постоянная интегрирования в данном случае равна нулю, так как $\Phi = 0$ при $i = 0$.

Таким образом, получим:

$$L = \frac{\Phi}{i}. \quad (505)$$

Для двух контуров на основании уравнения (500) получим следующее выражение для электрокинетической энергии:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

В таком случае на основании уравнения (499) индуцируемая во второй цепи э. д. с. будет:

$$E = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{2} L_2 i_2^2}{\partial i_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial M i_1 i_2}{\partial i_2}. \quad (506)$$

Последнее выражение по аналогии с изложенным выше можно переписать так:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dL_2 i_2}{dt} + \frac{dM_{12} i_1}{dt} \quad (507)$$

или

$$\Phi = L_2 i_2 + M_{12} i_1. \quad (508)$$

Второй член правой части уравнения (508) представляет собой часть магнитного потока, зависящего от тока в первом контуре, сцепленного со вторым, и от коэффициента взаимоиנדукции M_{12} . Обозначив эту часть магнитного потока через Φ_M , можно написать:

$$\Phi_M = M_{12} i_1,$$

откуда

$$M_{12} = \frac{\Phi_M}{i_1}. \quad (509)$$

Рассмотрим теперь уравнение (498) для электромагнитной силы. Так как на основании уравнения (500) для двух контуров имеем:

$$W_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2,$$

то

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\partial L_1 i_1^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_2 i_2^2}{\partial x} - \frac{\partial M_{12} i_1 i_2}{\partial x}. \quad (510)$$

Для неизменных жестких контуров, для которых коэффициенты L и L_2 являются постоянными, получим:

$$F = -\frac{\partial M_{12} i_1 i_2}{\partial x},$$

или на основании уравнения (509)

$$F = -\frac{\partial \Phi_{M12}}{\partial x}, \quad (511)$$

Напряжение H магнитного поля в центре электродинамического соленоида с радиусом r_1 , длиной $2l'_1$ и количеством витков n_1 на единицу длины (см. Хвольсон), выражается следующей зависимостью:

$$H = 4\pi n_1 i_1 \frac{l'_1}{\sqrt{r_1^2 + l'^2_1}}.$$

Поэтому при условии

$$r_1 \gg l'_1$$

получим:

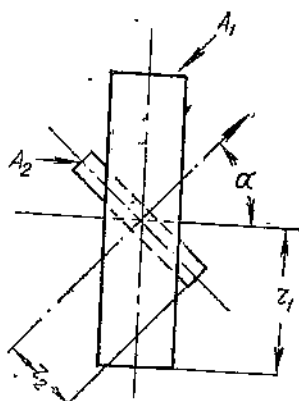
$$H \approx 4\pi n_1 i_1 \frac{l'_1}{r_1}. \quad (512)$$

Делаем допущение, что в центральной части такого соленоида (фиг. 72) A_1 (неподвижной рамки), в которой расположен подвижной соленоид A_2 (подвижная рамка) с радиусом r_2 , длиной $2l'_2$ и количеством витков n_2 на единицу длины и под углом α к соленоиду A_2 , поток остается постоянным. Тогда можно на основании уравнения (512) считать, что магнитный поток Φ' первого соленоида A_1 , питаемого от стороннего источника тока, пересекающий площадь сечения πr_2^2 второго соленоида A_2 , будет:

$$\Phi' = 4\pi^2 n_1 i_1 \frac{l'_1}{r_1} r_2^2 \cos \alpha. \quad (513)$$

Полное число сцеплений потока первого соленоида со вторым будет:

$$\Phi_M = 4\pi^2 n_1 i_1 \frac{l'_1}{r_1} n_2 2l'_2 r_2^2 \cos \alpha. \quad (514)$$



Фиг. 72. Схема, поясняющая взаимодействие магнитных полей подвижной и неподвижной рамок электродинамического прибора.

Приняв

$$2l' = l,$$

получим:

$$\Phi_M = 2\pi^2 n_1 i_1 \frac{l_1}{r_1} n_2 l_2 r_2^2 \cos \alpha. \quad (515)$$

В данном случае за обобщенную геометрическую координату принимаем угол поворота подвижного соленоида α , поэтому по аналогии с уравнением (511) в конечном результате получим следующее выражение для электромагнитного момента, получающегося в результате взаимодействия двух таких соленоидов:

$$M = -2\pi^2 n_1 i_1 \frac{l_1}{r_1} n_2 i_2 l_2 r_2^2 \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \alpha}$$

или

$$M = 2\pi^2 n_1 i_1 \frac{l_1}{r_1} n_2 i_2 l_2 r_2^2 \sin \alpha. \quad (516)$$

Выражая момент M в граммах и силы токов i_1 и i_2 в амперах, получим (см. стр. 34):

$$M = \frac{2\pi^2}{981} n_1 \frac{l_1}{10} \frac{l_1}{r_1} \frac{r_2}{10} n_2 l_2 r_2^2 \sin \alpha. \quad (10)$$

Для магнитоэлектрических приборов (фиг. 73), у которых напряжение магнитного поля в зазорах между полюсными наконечниками и сердечником равно H и высота и ширина подвижного соленоида которых будут a и b , полный поток сцепления с контуром подвижного соленоида получим следующий:

$$\Phi_M = H a b n_2 l_2 \cos \alpha. \quad (517)$$

По аналогии с изложенным выше получим (см. стр. 33):

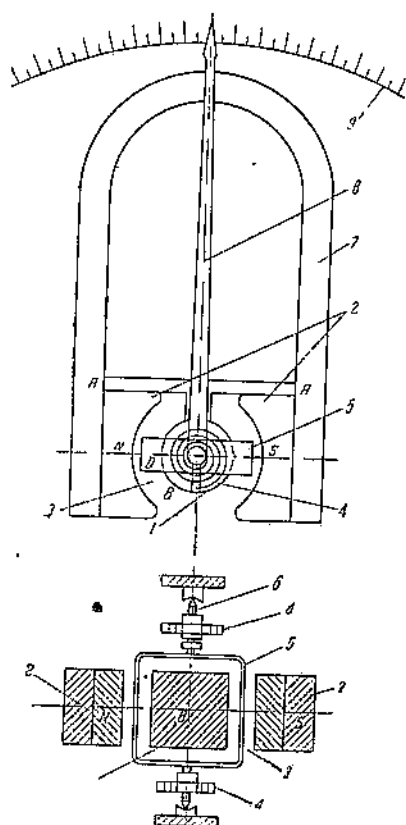
$$M = \frac{H}{981} \frac{l_2}{10} a b n_2 l_2 \sin \alpha. \quad (9)$$

Магнитоэлектрический амперметр, построенный на принципе, использующем зависимость, выражаемую уравнением (9), состоит из следующих основных элементов (фиг. 73).

В магнитном поле, которое создается между полюсными наконечниками подковообразного постоянного магнита, имеется очень легкая подвижная рамка, расположенная на оси.

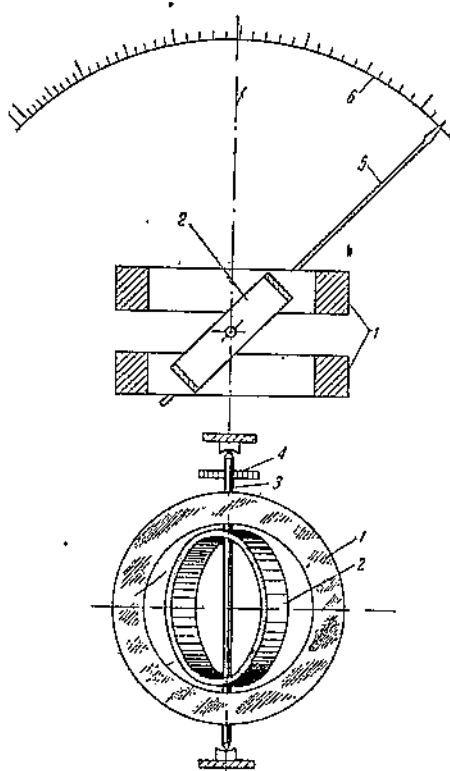
Подвижная рамка представляет собой металлическую тонкостенную рамочку (каркас) из диамагнитного материала (обыкновенно алюминия), укрепленную на оси. На нее намотан проводник, по которому проходит электрический ток, подлежащий измерению. Эта рамочка удерживается в определенном положении двумя спиральными пружинками (волосками), которые одновременно служат и для подвода тока к проводнику, намотанному на рамке. На оси рамки устанавливается стрелка. Для уменьшения воздушного зазора внутри рамки помещается сердечник, крепящийся к основанию прибора.

Устройство электродинамических приборов, использующих зависимость, выражаемую уравнением (10), следующее (73а).



Фиг. 73. Схема магнитоэлектрического прибора.

1—сердечник, 2—полюсные наконечники, 3—воздушный зазор, 4—волосок, 5—подвижная рамка, 6—ось, 7—постоянный магнит, 8—стрелка, 9—шкала.



Фиг. 73а. Схема электродинамического прибора.

1—неподвижная рамка (соленоид), 2—подвижная рамка, 3—ось, 4—волосок, 5—стрелка, 6—шкала.

Внутри двух соленоидов или двух неподвижных рамок помещается на оси подвижная рамка. Постоянный магнит, который применен в магнитоэлектрическом приборе, заменен здесь двумя (в некоторых случаях одной) неподвижными рамками, через обмотку которых пропускается переменный ток. Основное магнитное поле, в котором вращается подвижная рамка, создается, таким образом, не постоянным магнитом, а неподвижной рамкой, другими словами, тем же током, что и в подвижной рамке.

В случаях амперметра и вольтметра подвижная рамка шунтирует неподвижную.

Если выполнен ряд определенных условий, то направление основного магнитного поля (создаваемого неподвижной рамкой) меняется одновременно с изменением направления магнитного поля подвижной рамки, и такой прибор может работать как при постоянном, так и при переменном токе.

Приложение 6

Подбор параметров передаточного механизма с переменным передаточным отношением для высотмера

Как мы видели (см. стр. 105), среднее передаточное отношение передаточного механизма $k_{\text{зад}}$ для высотмера с коробками с постоянной упругостью в целях получения равномерной шкалы по высотам должно удовлетворять следующему условию:

$$k_{\text{зад}} = \frac{19412,2 y_0 F_0 (2,88081 - \lg B_H)}{A (B_0 - B_H) [1 + 0,219062 (2,88081 - \lg B_H)]}. \quad (52a)$$

В общем случае для непостоянной упругости уравнение для среднего передаточного отношения, удовлетворяющего тому же условию, можно написать так:

$$k_{\text{зад}} = \frac{y_0 H}{l_0 - l_H} \quad (518)$$

(обозначения те же, что и на стр. 100), где l_H берется прямо по экспериментальной характеристике анероидной коробки или упругой системы высотмера с анероидной коробкой (при пружинных анероидных коробках).

С другой стороны, действительное среднее передаточное отношение k передаточного механизма (см. стр. 113), определяемое кинематикой данного механизма и которое обозначим k_d , для механизма на фиг. 24 выражается следующей зависимостью:

$$k_d = \frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} [\sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0)]. \quad (70)$$

Совершенно очевидно, что для получения равномерной шкалы необходимо, чтобы

$$k_d = k_{\text{зад}}.$$

Подсчитав три значения $k_{\text{зад}_1}$, $k_{\text{зад}_2}$, $k_{\text{зад}_3}$, соответствующие трем значениям высот H_1 , H_2 и H_3 , или, что то же самое, трем значениям давлений B_{H_1} , B_{H_2} и B_{H_3} , можно составить следующие уравнения:

$$k_{d_2} - k_{d_1} = \frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \cos \theta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_0) \right] = k_{\text{зад}_2} - k_{\text{зад}_1}; \quad (519)$$

$$k_{d_3} - k_{d_2} = \frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} \cos \theta \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_3 + \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_0) \right] = k_{\text{зад}_3} - k_{\text{зад}_2}. \quad (520)$$

Разделив уравнение (520) на уравнение (519), получим:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_0)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_0)} = \frac{k_{\text{зад}_3} - k_{\text{зад}_2}}{k_{\text{зад}_2} - k_{\text{зад}_1}} =$$

$$= D_1 = \frac{\lg \frac{B_0}{B_{H_2}}}{\lg \frac{B_0}{B_{H_3}}} \cdot \frac{(B_0 - B_{H_2}) \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}\right)}{(B_0 - B_{H_3}) \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_3}}\right)} \cdot \frac{\lg \frac{B_0}{B_{H_2}}}{\lg \frac{B_0}{B_{H_1}}} \cdot \frac{(B_0 - B_{H_2}) \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}\right)}{(B_0 - B_{H_1}) \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}\right)} \quad (521)$$

С другой стороны (см. стр. 113), имеем следующую зависимость:

$$x = \frac{r_0}{L} r_1 (\sin \alpha - \sin \alpha_0). \quad (522)$$

Определив значения x_1 , x_2 и x_3 , соответствующие тем же значениям H_1 , H_2 и H_3 (или B_{H_1} , B_{H_2} и B_{H_3}), из тарировочной кривой анероидной коробки или при постоянной упругости из зависимости

$$x = \frac{A}{F_0} (B_0 - B_H),$$

получим:

$$\frac{\sin \alpha_3 - \sin \alpha_2}{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1} = \frac{B_{H_2} - B_{H_3}}{B_{H_1} - B_{H_2}} = D_2. \quad (523)$$

Если построить в некотором масштабе синусоиду и на том же графике, сохранив масштаб для ординат тем же, но взяв вдвое меньший масштаб для углов α , построить кривую тангенсов. (фиг. 74), то по такому графику достаточно просто найти при $\alpha_0 = 0$ три таких ординаты и при $\alpha_0 \neq 0$ шесть ординат, для которых будут удовлетворены условия:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_0)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_0)} = D_1; \quad (521)$$

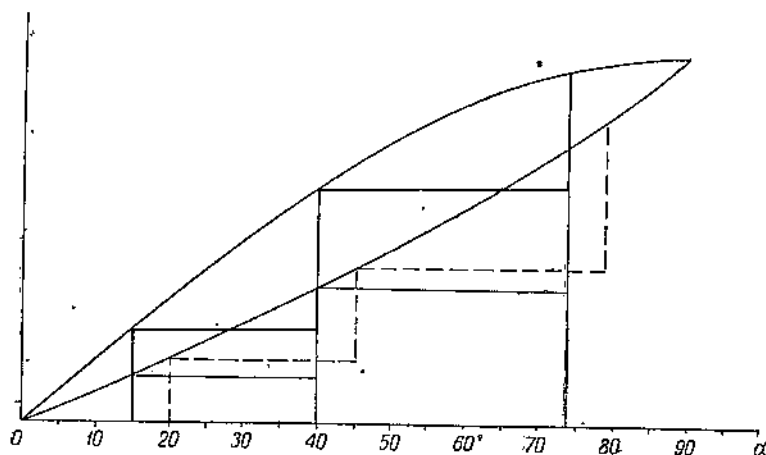
$$\frac{\sin \alpha_3 - \sin \alpha_2}{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1} = D_2. \quad (523)$$

Например для анероидной системы с постоянной упругостью, взяв $H_1 = 2000$, $H_2 = 6000$ и $H_3 = 10000$, получим $D_1 \approx 1,564$ и $D_2 \approx 0,843$.

На фиг. 74 этому условию приближенно удовлетворяют для $\alpha_0 = 0$ ординаты, соответствующие $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 40^\circ$ и $\alpha_3 = 74^\circ$.

Если бы мы искали решение для $\alpha_0 \neq 0$, то ординаты кривой тангенсов, удовлетворяющие приведенному условию, должны были бы быть сдвинуты по отношению к ординатам синусов вправо на угол $\frac{1}{2}\alpha_0$; это по шкале, нанесенной на графике (синусоидной шкале), соответ-

стствует углу α_0 . Таким образом для $\alpha_0 = 5^\circ$ условию уравнения (523) должны были бы удовлетворять ординаты тангенсной кривой, нанесенной на фиг. 74 пунктиром.



Фиг. 74. График подбора параметров передаточного механизма, выравнивающего шкалу высотомера.

Найдя значение углов α_1 , α_2 и α_3 , а также при $\alpha_0 \neq 0$ значение α_0 , из уравнения:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_{\text{зад}_2}}{k_{\text{зад}_2} - k_{\text{зад}_1}} \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_0) - \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0) \right] - \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_3 - \alpha_0), \quad (524)$$

находим значение θ и из уравнения:

$$\frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2} = \frac{k_{\text{зад}_1}}{\sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_0)}, \quad (525)$$

находим значение передаточного отношения $\frac{L}{r_0} \frac{R_1}{r_1} \frac{R_2}{r_2}$.

Отдельные величины L , r_0 , R_1 , r_1 , R_2 и r_2 подбираются из конструктивных соображений, но с таким расчетом, чтобы в совокупности они удовлетворяли уравнению (525).

Приложение 7

Подбор остаточного давления p_0 и начального объема коробки (расстояния h между мембранами при $l = 0$) для получения наилучшей температурной компенсации беспружинных anerоидных коробок с переменной упругостью (см. стр. 125)

Как следует из уравнения (95), температурная погрешность беспружинной anerоидной коробки с переменной упругостью равна нулю в том случае, если

$$p_0 \frac{h}{h - k_2 l} = \frac{B_H \beta T_0}{1 + \beta T_0}. \quad (95)$$

Взяв отношение полученной зависимости для двух значений B_{H_1} и B_{H_2} , соответствующих прогибам анероидной коробки l_1 и l_2 , получим:

$$\frac{h - k_2 l_1}{h - k_2 l_2} = \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}}, \quad (526)$$

откуда

$$h = k_2 l_1 \frac{\left(1 - \frac{l_2}{l_1} \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}}\right)}{\left(1 - \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}}\right)}. \quad (527)$$

Воспользовавшись уравнением (81) и зависимостью

$$y = k_1 l,$$

где k_1 является постоянным передаточного отношения передаточного механизма, получим:

$$l = \frac{y_0}{k_1} \frac{19412,2 \lg \frac{B_0}{B_H}}{1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}}. \quad (528)$$

Подставив значение l в выражение для h , после соответствующего преобразования будем иметь:

$$h = y_0 \frac{k_2}{k_1} \frac{19412,2 \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}}{1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}} \left[\frac{1 - \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}} \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}\right) \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}}{1 - \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}} \left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}\right) \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}} \right]. \quad (529)$$

Выполнив коробку с расстоянием h между мембранами [удовлетворяющим уравнению (529)] при $l = 0$ (либо поместив в коробке соответствующий вкладыш), мы получим температурную компенсацию для двух точек, соответствующих B_{H_1} и B_{H_2} .

Остаточное давление p_0 получается из зависимости:

$$p_0 = \frac{\frac{B_{H_2}}{B_{H_1}} \left[1 - \frac{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}\right) \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}}{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}\right) \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}} \right] \beta T_0}{\left[1 - \frac{B_{H_2}}{B_{H_1}} \frac{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}\right) \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}}{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_{H_2}}\right) \lg \frac{B_0}{B_{H_1}}} \right] (1 + \beta T_0)}, \quad (530)$$

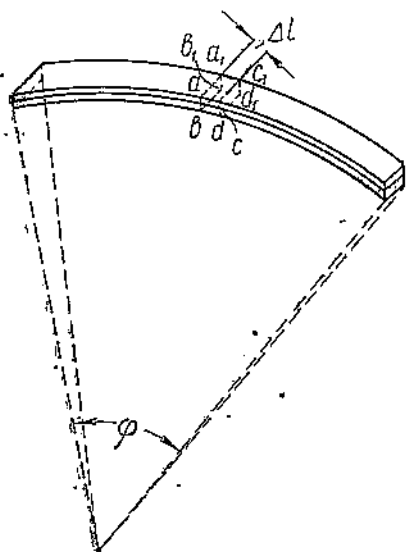
или из такой же зависимости для B_{H_2} и l_2 .

Получив значения h и p_0 , материал и гофрировку коробок подбираем таким образом, чтобы при этих условиях и при допустимых напряжениях в материале получить ход, удовлетворяющий условию:

$$l = \frac{y_0}{k_1} \frac{19412,2 \lg \frac{B_0}{B_H}}{\left(1 + 0,219062 \lg \frac{B_0}{B_H}\right)} \quad (528)$$

Приложение 8

Краткое изложение приближенного вывода уравнения (97) (см. стр. 126) для изгиба биметаллической пластинки под влиянием температурных изменений по инж. А. Тихменеву.



Фиг. 75. Схема, поясняющая работу биметаллической пластинки.

Предположим, биметаллическая пластинка (фиг. 75) под влиянием изменения температуры Δt загнута на угол φ .

Рассмотрим достаточно малый участок пластинки, ограниченной плоскостями aa_1 , bb_1 и cc_1 , dd_1 длиной Δl , соответствующей углу загиба $\Delta\varphi$. Условно этот участок изобразим на фиг. 76. Можно считать, что изгиб этого участка пластинки произошел под действием следующих факторов. Предположим, что температурное удлинение первой из спаянных пластинок должно было быть $\alpha_1 \Delta t \Delta l$, второй — $\alpha_2 \Delta t \Delta l$, где α_1 и α_2 — температурные коэффициенты удлинения пластинок. Вследствие того, что в месте спая обе пластинки должны иметь одинаковое удлинение, будем считать, что первая пластинка укоротилась на величину

$$OO_1 = \Delta_1 \Delta l$$

и загнута на угол φ , вторая пластинка удлинилась на величину

$$O_2O_3 = \Delta_2 \Delta l$$

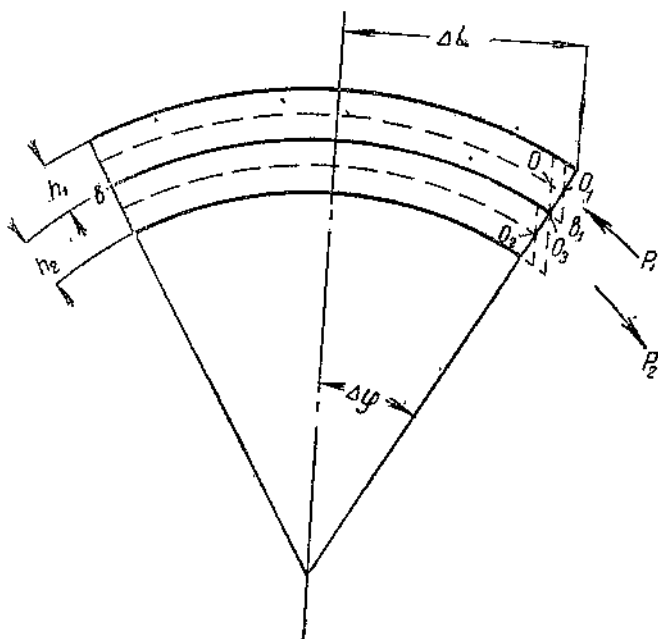
и также загнута на угол φ . Укорочение первой пластинки произошло вследствие действия на нее сжимающей силы P_1 , приложенной в точке O_1 , удлинение второй — вследствие действия на нее растягивающей силы P_2 , приложенной в точке O_3 . Совершенно очевидно, что:

$$P_1 = P_2 = P.$$

Далее предположим, что загиб пластинок произошел вследствие действия на них моментов M_1 и M_2 . В таком случае из условий равновесия можно написать:

$$P \frac{h_1 + h_2}{2} = M_1 + M_2, \quad (531)$$

где h_1 и h_2 — толщины пластинок.



Фиг. 76. Схема, поясняющая работу биметаллической пластинки.

Из сопротивления материалов известно, что

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta l} = \frac{M_1}{E_1 J_1} = \frac{M_2}{E_2 J_2},$$

где E_1 и E_2 , J_1 и J_2 — соответствующие модули Юнга и моменты инерции сечения пластинок. Следовательно,

$$M_1 = E_1 J_1 \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}$$

и

$$M_2 = E_2 J_2 \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}.$$

Подставляя в уравнение (531) значения моментов M_1 и M_2 , получим

$$P \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} (E_1 J_1 + E_2 J_2),$$

откуда

$$P \Delta l = 2 \Delta \varphi \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{h_1 + h_2}. \quad (532)$$

Далее можно написать:

$$\Delta_1 \Delta l = - \frac{P \Delta l}{b h_1 E_1}$$

и

$$\Delta_2 \Delta l = \frac{P \Delta l}{b h_2 E_2},$$

где b — ширина обеих пластинок,

$\frac{\Delta_1 \Delta l}{\Delta l}$ и $\frac{\Delta_2 \Delta l}{\Delta l}$ — относительные удлинения пластинок от действия силы P ,

h_1 и h_2 — их толщины.

Так как в месте спая удлинение пластинок очевидно одинаковое, то из чисто геометрических соображений (фиг. 76) можно, пренебрегая величинами высших порядков малости, приближенно считать:

$$\alpha_1 \Delta l \Delta l - \frac{P \Delta l}{b h_1 E_1} - \frac{h_1}{2} \Delta \varphi = \alpha_2 \Delta l \Delta l + \frac{P \Delta l}{b h_2 E_2} + \frac{h_2}{2} \Delta \varphi, \quad (533)$$

откуда

$$P \Delta l = \frac{b \left[\Delta l \Delta l (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{1}{2} \Delta \varphi (h_1 + h_2) \right]}{\frac{1}{h_1 E_1} + \frac{1}{h_2 E_2}}. \quad (534)$$

На основании уравнений (532) и (534) можно написать:

$$\Delta \varphi \left[\frac{2(E_1 J_1 + E_2 J_2)}{h_1 + h_2} + \frac{b(h_1 + h_2)}{2 \left(\frac{1}{h_1 E_1} + \frac{1}{h_2 E_2} \right)} \right] = \frac{\Delta l \Delta l b (\alpha_1 - \alpha_2)}{\frac{1}{h_1 E_1} + \frac{1}{h_2 E_2}} \quad (535)$$

или

$$\Delta \varphi \frac{4(E_1 J_1 + E_2 J_2)(h_1 E_1 + h_2 E_2) + (h_1 + h_2)^2 h_1 E_1 h_2 E_2 b}{2(h_1 + h_2)} = \Delta l \Delta l b (\alpha_1 - \alpha_2) h_1 E_1 h_2 E_2. \quad (536)$$

Так как

$$J_1 = \frac{b h_1^3}{12}$$

и

$$J_2 = \frac{b h_2^3}{12},$$

то получим:

$$\Delta \varphi \frac{(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)(E_1 h_1 + E_2 h_2) + 3(h_1 + h_2)^2 h_1 E_1 h_2 E_2}{6(h_1 + h_2)} = \Delta l \Delta l (\alpha_1 - \alpha_2) h_1 E_1 h_2 E_2. \quad (537)$$

Ввиду того что

$$\begin{aligned} (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)(E_1 h_1 + E_2 h_2) &= E_1^2 h_1^4 + E_2^2 h_2^4 + E_1 E_2 h_1^3 h_2 + \\ &+ E_1 E_2 h_1 h_2^3 - 2 E_1 E_2 h_1^2 h_2^2 + 2 E_1 E_2 h_1^2 h_2^2 = (E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2 + \\ &+ E_1 h_1 E_2 h_2 (h_1 + h_2)^2, \end{aligned}$$

уравнение (537) можно преобразовать так:

$$\Delta\varphi = \frac{(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2 + 4(h_1 + h_2)^2 E_1 h_1 E_2 h_2}{6(h_1 + h_2)} = \Delta t \Delta l (\alpha_1 - \alpha_2) E_1 h_1 E_2 h_2, \quad (538)$$

откуда

$$\Delta\varphi = \Delta l \frac{6 \Delta t (\alpha_1 - \alpha_2) (h_1 + h_2) E_1 h_1 E_2 h_2}{(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2 + 4(h_1 + h_2)^2 E_1 h_1 E_2 h_2}. \quad (539)$$

При

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$$

будем иметь:

$$\Delta\varphi = \Delta l \frac{3 \Delta t (\alpha_1 - \alpha_2)}{2(h_1 + h_2)}. \quad (540)$$

Обозначив через φ угол загиба пластинки, соответствующий ее длине l_0 , и приняв $\Delta t = t$, получим уравнение (97):

$$\varphi = \frac{3}{2} l_0 t \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}. \quad (97)$$

Приложение 9

Вывод уравнения движения (уравнение 410) подвижной системы акселерографа с помощью уравнений Лагранжа второго рода¹.

Уравнения движения системы в виде лагранжевых уравнений второго рода напомним в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial W}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_i} = Q_i(t) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \quad (541)$$

где y_i — обобщенные координаты системы,

$\dot{y}_i$ — обобщенные скорости,

W — кинетическая энергия всех звеньев механизма,

Π — потенциальная энергия успокоителя,

R — функция рассеяния энергии успокоителя,

Q_i — обобщенные силы, отнесенные соответственно к координатам y_i ; эти силы получим из выражения работ на возможных перемещениях системы.

За обобщенные координаты примем (фиг. 77):

$y_{i=1} = \xi$ — перемещение шарнира, к которому крепится тяга,

$y_{i=2} = \delta$ — перемещение центра тяжести O груза, равное нулю для положения, соответствующего равновесию системы при отсутствии сил.

Обозначим далее:

m_g — массу груза

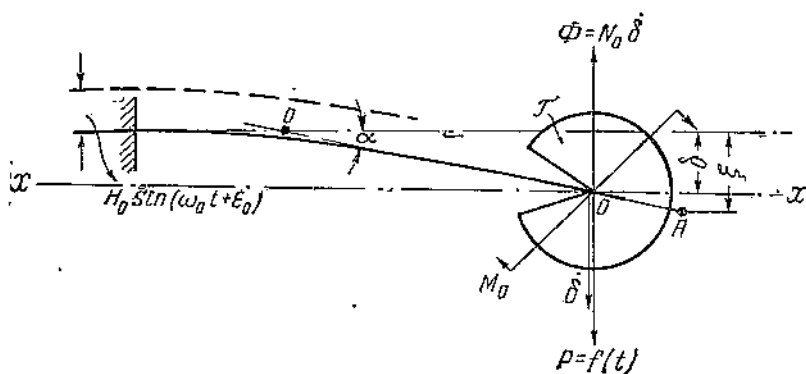
m_y — массу успокоителя,

m_p — массу пишущего рычага,

m_T — массу тяги,

¹ Взято из работы инж. Волосевича.

- m_{π} — массу пружины,
 ρ_c — радиус инерции пишущего рычага относительно его оси вращения,
 ρ_r — радиус инерции груза относительно кромки пружины, проходящей через центр тяжести груза,
 l — длину пружины,
 r_c — длину пишущего плеча пишущего рычага,
 r — длину кривошипа (ведущего плеча) пишущего рычага,
 r_0 — расстояние центра тяжести груза от шарнира,
 α — угол поворота конца пружины (фиг. 77),
 $\mu_{\pi} = \frac{33}{140} m_{\pi}$ — приведенную массу призматической пружины к ее концу,
 $\frac{\dot{\xi}}{r}$ — угловую скорость пишущего рычага.



Фиг. 77. Схема чувствительного элемента акселерографа.

В таком случае кинетическая энергия груза будет:

$$\frac{1}{2} m_r \dot{\delta}^2 + \frac{1}{2} m_r \rho_r^2 \dot{\alpha}^2. \quad (542)$$

Выразив координату α через координаты ξ и δ :

$$\xi = \delta + r_0 \sin \alpha \approx \delta + r_0 \alpha, \quad (543)$$

получим:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\xi}}{r_0} - \frac{\dot{\delta}}{r_0}. \quad (544)$$

На основании уравнений (544) и (542) выражение для кинетической энергии груза примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \left[m_r \frac{\rho_r^2}{r_0^2} \dot{\xi}^2 - 2 m_r \frac{\rho_r^2}{r_0^2} \dot{\xi} \dot{\delta} + \left(m + m_r \frac{\rho_r^2}{r_0^2} \right) \dot{\delta}^2 \right]. \quad (545)$$

Для кинетической энергии всех звеньев зависимость будет следующей:

$$W = \frac{1}{2} \left[\left(m_r \frac{\dot{\rho}_r^2}{r_0^2} + m_c \frac{\dot{\rho}_c^2}{r^2} + m_r \right) \dot{\xi}^2 - 2m_r \frac{\dot{\rho}_r^2}{r_0^2} \xi \dot{\xi} + \right. \\ \left. + \left(m_r + m_r \frac{\dot{\rho}_r^2}{r_0^2} + m_y + m_n \right) \dot{\delta}^2 \right] \quad (546)$$

или

$$W = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{\delta}^2 - 2a_{12} \dot{\xi} \dot{\delta} + a_{22} \dot{\xi}^2). \quad (547)$$

Потенциальную энергию пружины (прямоугольной рессоры) получим на основании следующих рассуждений. Обозначим (фиг. 77)

P — силу на конце пружины,

M_0 — момент на конце пружины,

Π — потенциальную энергию упругих сил пружины,

x — расстояние какого-либо сечения пружины от свободного конца пружины (места крепления груза),

M_x — изгибающий момент в этом сечении,

E — модуль Юнга для материала пружины,

J — момент инерции площади сечения пружины относительно нейтральной линии изгиба.

Будем считать, что работа внешней нагрузки целиком расходуется на сообщение потенциальной энергии пружине, пренебрегая в данном случае переходом работы в другие формы энергии:

$$P \delta \delta + M_0 \delta \alpha = d\Pi. \quad (548)$$

Для упругих деформаций тела при линейном законе Гука можно потенциальную энергию выразить как через обобщенные силы, так и через обобщенные координаты. Если считать, что Π выражено через δ и α , то

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \delta \delta + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (549)$$

Сравнивая равенство (548) с равенством (549), получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = P;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = M_0.$$

Если считать, что Π выражено через P и M_0 , то по теореме Кастильяно:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} = \delta;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = \alpha.$$

Применим из сопротивления материалов формулы:

$$M_x = P x + M_0;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ} dx.$$

Тогда получим выражение Π через обобщенные силы P и моменты M_0 :

$$\Pi = \frac{P^2 l^3}{6EJ} + \frac{PM_0 l^2}{2EJ} + \frac{M_0^2 l}{2EJ}. \quad (550)$$

По теореме Кастильяно

$$\delta = \frac{l^3}{3EJ} F + \frac{l^2}{2EJ} M_0 \quad (551)$$

$$\alpha = \frac{l^2}{2EJ} P + \frac{l}{EJ} M_0. \quad (552)$$

На основании уравнений (550), (551) и (543) получим:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\frac{12EJ}{l^3} \delta^2 - \frac{12EJ}{l^3} \delta \alpha + \frac{4EJ}{l} \alpha^2 \right). \quad (553)$$

Так как на основании уравнения (543)

$$\alpha = \frac{\xi}{r_0} - \frac{\delta}{r_0},$$

то окончательно имеем:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\frac{4EJ}{lr_0^2} \xi^2 - 2 \left(\frac{4EJ}{lr_0^2} + \frac{6EJ}{l^2 r_0} \right) \xi \delta + \left(\frac{12EJ}{l^3} + \frac{12EJ}{l^2 r_0} + \frac{4EJ}{lr_0^2} \right) \delta^2 \right] \quad (554)$$

ли

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} \delta^2 - 2c_{12} \delta \xi + c_{22} \xi^2). \quad (555)$$

Выражение для энергии рассеяния при наличии успокоения получим в следующем виде. При голономных стационарных связях при обобщенных силах сопротивления Φ_i , пропорциональных обобщенным скоростям $\dot{y}_i$, имеем:

$$\Phi_i = - \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_i}; \quad (556)$$

$$\frac{dR}{dt} = -2R, \quad (557)$$

где $\frac{dR}{dt}$ — изменение механической энергии, отнесенное ко времени.

Силу сопротивления среды (создающей успокоение системы) движению системы примем пропорциональной скорости $\dot{\delta}$ и направленной против нее¹

$$\Phi = -N_0 \dot{\delta}, \quad (558)$$

где N_0 — коэффициент пропорциональности; $N_0 > 0$.

Произведение силы на скорость дает изменение энергии, отнесенное ко времени:

$$\frac{dR}{dt} = \Phi \dot{\delta}. \quad (559)$$

¹ Мы останавливаемся на такой схеме успокоения, так как угловые собственные колебания системы обладают большой частотой, возможная же угловая амплитуда возмущающей силы предполагается достаточно малой величины и частоты

Таким образом на основании уравнений (557) — (559) для функции рассеяния получим следующую зависимость:

$$R = \frac{1}{2} N_0 \delta^2. \quad (560)$$

Для определения обобщенных сил Q_δ и Q_ξ примем, во-первых, некоторую $f(t)$, определяющую течение ускорения, подлежащего измерению и выраженного в долях ускорения силы тяжести, и, во-вторых, некоторую функцию $H_0 \sin(\omega_0 t + \varepsilon_0)$, выражающую перемещение прибора от вибрации¹ (фиг. 77), где ω_0 — частота вибрации и ε_0 — начальная фаза.

Для работы сил на возможных перемещениях можно написать следующую зависимость:

$$Q_\delta \delta \dot{\delta} + Q_\xi \delta \dot{\xi} \equiv (m_r + m_y + \mu_n) [gf(t) + H_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varepsilon_0)] \delta \dot{\delta}. \quad (561)$$

При этом считаем, что центр тяжести пишущего рычага при любом положении механизма находится в точке опоры пишущего рычага, т. е. на оси O (фиг. 61).

Сравнивая коэффициенты при вариациях координат, получим следующее выражение для обобщенных сил:

$$Q_\delta \equiv (m_r + m_y + \mu_n) [gf(t) + H_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varepsilon_0)] \equiv F(t); \quad (562)$$

$$Q_\xi = 0. \quad (563)$$

В дальнейшем будем считать:

$$m_r + m_y + \mu_n = m.$$

Перейдем к составлению дифференциальных уравнений движения системы.

Уравнения Лагранжа для нашей системы с двумя степенями свободы (уравнение 541) будут иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial W}{\partial \delta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \delta} + \frac{\partial R}{\partial \delta} = Q_\delta; \quad (564)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial \xi} = Q_\xi. \quad (565)$$

Подставив полученные значения для W , Π , R , Q_δ и Q_ξ из уравнений (547), (555), (560), (562) и (563) в уравнения (564) и (565), получим:

$$a_{11} \ddot{\delta} - a_{12} \ddot{\xi} + N_0 \dot{\delta} + c_{11} \dot{\delta} - c_{12} \dot{\xi} = F(t); \quad (566)$$

$$-a_{12} \ddot{\delta} + a_{22} \ddot{\xi} - c_{12} \dot{\delta} + c_{22} \dot{\xi} = 0. \quad (567)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только координата ξ , так как ее произведение на передаточное число передаточного механизма

¹ В данном случае мы пренебрегаем возможными угловыми вибрациями и рассматриваем ускорения, действующие только по координате δ .

дает отклонение пишущего конца рычага А (фиг. 60), т. е. уравнение кривой записанного графика. Координата δ интересовать нас не будет.

Поэтому сведем задачу к одному уравнению, содержащему только эту функцию, для чего продифференцируем каждое уравнение системы по t два раза и из полученных таким образом шести уравнений

исключим пять величин δ , $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$, $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$. Проведя дифференцирование, получим систему из шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{\delta} + N_0\dot{\delta} + c_{11}\delta &= F(t) + c_{12}\dot{\xi} + a_{12}\ddot{\xi}; \\ a_{11}\dot{\delta} + N_0\ddot{\delta} + c_{11}\dot{\delta} &= F'(t) + c_{12}\ddot{\xi} + a_{12}\ddot{\xi}; \\ a_{11}\ddot{\delta} + N_0\ddot{\delta} + c_{11}\ddot{\delta} &= F''(t) + c_{12}\ddot{\xi} + a_{12}\ddot{\xi}; \\ a_{12}\ddot{\delta} + c_{12}\delta &= c_{22}\dot{\xi} + a_{22}\ddot{\xi}; \\ a_{12}\dot{\delta} + c_{12}\dot{\delta} &= c_{22}\ddot{\xi} + a_{22}\ddot{\xi}; \\ a_{12}\ddot{\delta} + c_{12}\ddot{\delta} &= c_{22}\ddot{\xi} + a_{22}\ddot{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (568)$$

Условие совместности шести уравнений с пятью неизвестными δ , $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$, $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ будет:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11} & N_0 & c_{11} & F(t) + c_{12}\dot{\xi} + a_{12}\ddot{\xi} \\ 0 & a_{11} & N_0 & c_{11} & 0 & F'(t) + c_{12}\ddot{\xi} + a_{12}\ddot{\xi} \\ a_{11} & N_0 & c_{11} & 0 & 0 & F''(t) + c_{12}\ddot{\xi} + a_{12}\ddot{\xi} \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 & c_{12} & c_{22}\dot{\xi} + a_{22}\ddot{\xi} \\ 0 & a_{12} & 0 & c_{12} & 0 & c_{22}\ddot{\xi} + a_{22}\ddot{\xi} \\ a_{12} & 0 & c_{12} & 0 & 0 & c_{22}\ddot{\xi} + a_{22}\ddot{\xi} \end{vmatrix} = 0. \quad (569)$$

Раскрывая определитель и сокращая полученное выражение на постоянный множитель

$$-(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2 - a_{12}c_{12}N_0,$$

получим уравнение (410), приведенное на стр. 255:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\ddot{\xi} + a_{22}N_0\ddot{\xi} + (a_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{12} + a_{22}c_{11})\ddot{\xi} + c_{22}N_0\dot{\xi} + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)\dot{\xi} = a_{12}F''(t) + c_{12}F'(t). \quad (560)$$

В примере, рассмотренном нами выше (см. стр. 254), возмущающая функция была принята более простого вида:

$$F(t) = ma_1g \sin \omega t, \quad (411)$$

то, очевидно, никаких изменений в приведенный вывод не вносит.

Литература

1. Я. Безикович, Приближенные вычисления, ГТТИ, 1932 г.
2. Э. Уиттекер и Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933 г.
3. А. Виньерон, Обработка результатов физико-химических наблюдений ОНТИ, Госхимиздат, 1934 г.
4. Л. Ф. Лесохин, Единицы измерений, научно-технические термины и обозначения, Стандартгиз, 1936 г.
5. М. Ф. Маликов, Точные измерения, Стандартгиз, 1935 г.
6. Его же, Образцовые меры и образцовые измерительные приборы, Стандартгиз, 1935 г.
7. Его же, Современное положение вопроса об электрических единицах и эталонах, ВИС, Ленинград 1933 г.
8. Л. И. Слоним и А. К. Курицын, Контрольно-измерительные установки на нефтезаводах, ОНТИ, 1937 г.
9. Электрические и магнитные измерения, под ред. Е. Г. Шрамкова, ОНТИ, 1937 г.
10. Л. Н. Михайлов, К теории механических вибрографов для полетных исследований, Технические заметки ЦАГИ, № 148, 1937 г.
11. Л. В. Залужский, Введение метрической системы в СССР, Бюллетень главного управления мер и весов НКВД СССР, «Метрология и поверочное дело», № 3, июнь 1938 г.
12. Л. В. Залужский, К вопросам определения метра в длинах световых волн, сборник Академии наук СССР, 1938 г.
13. В. Ф. Миткевич, Физические основы электротехники, Кубуч, 1933 г.
14. А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков, Общая теория гироскопов, изд-во Академии наук СССР, Ленинград 1932 г.
15. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах, изд-во Академии наук СССР, Ленинград 1932 г.
16. «Electrical Measuring Instruments I r Commercial and Indicating Instruments» f. v. g. Dreysdal, ABE, DYC, M. I. E. E. and A. I. Jolley E. C., London 1924.
17. A. Gramberg, Technische Messungen bei Maschinenuntersuchungen und zur Betriebskontrolle, Berlin 1923.
18. О. Д. Хвольсон, Курс физики.
19. Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Теоретическая механика, ОНТИ, 1934 г.
20. F. Kohlrusch, Lehrbuch der praktischen Physik, Leipzig—Berlin 1923.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
1. Уточнение понятия об измерительном приборе	—
2. Значение измерительных приборов и измерительной техники в народном хозяйстве	6
3. Некоторые сведения из метрологии	8
Часть I	
Методические и инструментальные погрешности приборов	
Глава I. Исследование принципиальных уравнений и методические погрешности	21
1. Прямые и косвенные измерения	—
2. Основные случаи уравнений непосредственных косвенных измерений	23
3. Первый случай. В уравнение кроме постоянных входят только одна независимая и одна зависимая переменные	—
4. Второй случай. В уравнение входит кроме основной независимой переменной ряд добавочных независимых переменных	24
Различие между методическими и инструментальными погрешностями	27
Различное влияние добавочных независимых переменных	28
5. Третий случай. В уравнение входят кроме основной функции зависимой переменной добавочные функции зависимой переменной	29
Выравнивание шкал с помощью добавочных функций зависимой переменной	31
Отрицательное влияние добавочных функций зависимой переменной	32
6. Четвертый случай. Добавочные независимые переменные входят в уравнение в виде функций, связывающих их с параметрами прибора	34
Глава II. Основные элементы приборов	36
1. Три основных элемента измерительных приборов	—
2. Чувствительный элемент	—
Особые случаи чувствительных элементов	37
3. Передаточный механизм	39
Рычажный передаточный механизм	—
Особые виды рычажных передач	41
Зубчатые передачи	44
Оптическая передача	45
Влияние передаточного механизма на точность прибора	46
4. Шкала и стрелка	47
5. Успокоители	48
Глава III. Классификация приборов	52
1. Приборы стрелочные и бесстрелочные	—
2. Приборы с непосредственным отсчетом и приборы с наводкой	53
Приборы с непосредственным отсчетом	—

Нулевой метод измерения	54
Смешанный метод измерения	57
Приборы с наводкой	59
3. Приборы с визуальным отсчетом и самопишущие	60
4. Основные требования к записывающим механизмам	61
5. Дистанционные приборы	62
6. Статоскопы	64
7. Автоматы	65
Глава IV. Некоторые сведения из теории погрешностей	66
1. Значение исследования погрешностей при вычислениях и измерениях	—
2. Абсолютные и относительные погрешности	67
3. Предельные абсолютная и относительная погрешности	69
4. Систематические и случайные погрешности	71
5. Исследование погрешностей вычислений	—
6. Погрешности действий над алгебраическими, тригонометрическими и логарифмическими функциями	77
7. Исследование погрешностей измерений	86
Глава V. Инструментальные погрешности статических измерений	95
1. Статические и динамические измерения	—
2. Исследование факторов, являющихся причиной инструментальных погрешностей статических измерений	—
3. Составление уравнений с учетом всех факторов, влияющих на перемещение стрелок приборов	96
4. Среднее и истинное передаточные отношения передаточных механизмов с переменным передаточным отношением	104
5. Температурные погрешности	106
6. Компенсация температурных погрешностей	107
Температурная компенсация магнитоэлектрического вольтметра с большим балластным сопротивлением	—
Температурная компенсация магнитоэлектрического вольтметра с малым сопротивлением цепи рамки	108
Температурная компенсация в чувствительном элементе высотомера с постоянной упругостью чувствительного элемента	110
Кинематическая температурная компенсация высотомера с постоянной упругостью чувствительного элемента	112
Температурная погрешность высотомеров с чувствительным элементом с переменной упругостью	120
Температурная компенсация в чувствительном элементе высотомера с переменной упругостью чувствительного элемента	123
Изменение упругости анероидных коробок при температурной компенсации с помощью остаточного давления	125
Биметалл	126
7. Шкаловые погрешности	127
8. Погрешности трения	128
Погрешности трения в приборах без передаточного механизма	—
Зависимость между весом подвижной системы и моментом трения в электроизмерительных приборах	130
Коэффициент качества электроизмерительных приборов	132
Метод нахождения параметров прибора, обеспечивающих наибольшее снижение погрешностей трения	134
Погрешности трения в приборах с передаточным механизмом	140
Определение приведенных к чувствительному элементу сил или моментов трения	142
Влияние на трение волоска и определение момента волоска	146
Условия снижения погрешностей трения в приборах с передаточным механизмом	148
9. Погрешности от гистерезиса	149
10. Погрешности от действия внешних сил	151
11. Эффект Максвелла	—
12. Чувствительность прибора	152
13. Погрешности отсчета	153
Условия снижения погрешностей отсчета	154

14. Точность приборов	154
15. Классы приборов	155

Часть II

Основы теории колебаний в приложении к измерениям статическим, а также измерениям количественных факторов кратко временно протекающих и периодических явлений

Глава VI. Инерционные погрешности	156
1. Пять видов измерений	—
2. Инерционные погрешности	—
Глава VII. Свободные колебания подвижной системы приборов	157
1. Статические измерения	158
2. Свободные колебания системы при отсутствии кулоновского и жидкостного трения	—
3. Собственный период, собственная частота и амплитуда колебаний	159
4. Влияние кулоновского трения	161
5. Влияние жидкостного трения	163
6. Коэффициент успокоения. Докритическое и критическое успокоение	164
7. Влияние успокоения на период свободных колебаний и степень успокоения	165
8. Коэффициент затухания и его зависимость от степени успокоения	167
9. Влияние жидкостного трения на симметричность кривой колебаний	170
1. Поведение системы при критическом успокоении	171
2. Влияние кулоновского трения при критическом успокоении	172
3. Вынужденные колебания системы при статических измерениях	173
Глава VIII. Измерение количественных факторов кратко временно протекающих явлений	175
1. Вынужденные колебания системы при отсутствии жидкостного и кулоновского трения	177
2. Инерционные погрешности при отсутствии жидкостного и кулоновского трения	—
3. Вынужденные колебания системы при наличии жидкостного трения	179
4. Инерционные погрешности при наличии жидкостного трения	186
5. Влияние параметров k и b на инерционные погрешности и условия для наибольшего снижения этих погрешностей	188
6. Влияние на инерционные погрешности кулоновского трения при наличии жидкостного трения	190
7. Инерционные погрешности при отсутствии необходимости учета фактора времени	202
8. Условия для наибольшего снижения инерционных погрешностей при отсутствии необходимости учета времени	206
9. Зависимость между собственной частотой прибора, чувствительностью и погрешностями трения	208
10. Зависимость между собственной частотой прибора и восприимчивостью прибора к вибрациям	—
11. Влияние вибрации на приборы при отсутствии уравновешенных масс	209
12. Условия для наибольшего снижения восприимчивости прибора к вибрации	210
13. Влияние вибрации на приборы при наличии, кроме неуравновешенных, уравновешенных масс	211
14. Условие для появления эффекта Максвелла	214
15. Влияние уравновешенных масс на восприимчивость прибора к вибрации	215
16. Влияние кулоновского трения	—
17. Влияние неуравновешенности подвижной системы прибора на собственный период колебаний	216
18. Инерционные погрешности при замерах количественных факторов явлений, только нарастающих или только спадающих с постоянной или переменной скоростью	218
	220

19. Условия для максимального снижения инерционных погрешностей при замерах количественных факторов явлений, только нарастающих или только спадающих с постоянной или переменной скоростью	222
20. Влияние кулоновского трения	223
Глава IX. Измерение количественных факторов периодических явлений	226
1. Особенности измерений количественных факторов периодических явле- ний, однородных с кратковременно протекающими явлениями	227
2. Измерение параметров вибрации	—
3. Измерение перемещений, вызываемых вибрацией, с помощью высоко- частотных приборов	229
4. Измерение перемещений, вызываемых вибрацией, с помощью низкоча- стотных приборов	231
5. Влияние наличия в подвижной системе прибора наряду с неуравнове- шенными уравновешенных масс	235
6. Влияние жидкостного трения	236
7. Успокоение с помощью сопротивления, пропорционального первой сте- пени абсолютной скорости	242

Часть III

Некоторые данные о методике расчета приборов

Глава X. Расчет акселерографа	246
Вступ л е н и е	—
1. Примерные технические требования к прибору	—
2. Предварительный выбор принципиальной схемы	247
3. Составление полного уравнения с учетом всех факторов, вызывающих перемещение подвижной системы прибора	248
4. Исследование инерционных погрешностей	255
5. Вывод окончательных расчетных уравнений	262
6. Примерный подбор основных параметров прибора	268
Глава XI. Подбор наилучших параметров моста Уитстона для термо- метра сопротивления	271
1. Вывод основного уравнения	—
2. Вывод окончательных расчетных уравнений	275
П р и л о ж е н и я	284

Редактор В. В. Рясновский
Тех. редактор А. А. Базанова

Сдано в набор 27/II 1939. Под-
писано к печ. 5/VI 1939 г. Издат.
№ 71. Автор. дог. № 399. Инд.
А-70-5-2. Тир. 5.000. Кол. печ.
лист. 20. Учетно-авт. лист. 21,52.
Формат бум. 60 × 94. Уполн.
Главл. А-14483. Заказ № 406.

Типография Оборонгиза.
Киев, Крещатик, 42.

Замеченные опечатки

<i>Стр.</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>	<i>По чьей вине</i>
63	10 снизу	δ	1	тип.
63	9 "	I	5	"
143	1 "	$+\sin \alpha'_2] \alpha'_2$	$+\sin \alpha'_2] - \alpha'_2$	"
166	3 "	DYC	DSC	ред.
196	фиг. 53	$\frac{\omega}{k} = 0,2; b = 0,9$	$\frac{\omega}{k} = 0,2; b = 0,1$	тип.
197	11 сверху	$+ 2b \frac{\omega}{k})^2$	$+ (2b \frac{\omega}{k})^2$	"
212	фиг. 56а ось ординат	14	16	"
213	фиг. 56б ось ординат	16	14	"

Зап. № 406.