

П. В. МЕЛЕНТЬЕВ

**НЕСКОЛЬКО НОВЫХ
МЕТОДОВ И ПРИЕМОВ
ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

ОНТИ • НКТП • СССР

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛЕНИНГРАД — 1937 — МОСКВА

П. В. МЕЛЕНТЬЕВ

Депозитарий

НЕСКОЛЬКО НОВЫХ МЕТОДОВ И ПРИЕМОВ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

71404345

ОНТИ НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД • 1937 • МОСКВА

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Книга содержит разработанные автором приемы и методы приближенных вычислений.

Для алгебраических уравнений высоких степеней дано развитие метода Ньютона на случай комплексных корней; численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений введенной специальной функции приведено к схеме с удобными множителями для разностей; раскрытие определителя вексового уравнения дано непосредственное, без предварительных преобразований.

Метод конформного преобразования односвязных областей дан применительно к графическим задаваемым контурам.

Кроме этого даны палетки для упрощения приближенного интегрирования и гармонического анализа.

Книга рассчитана на студентов вузов, инженеров и научных работников.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Работа эта не является систематическим руководством по приближенным вычислениям. При наличии таких книг, как „Лекции о приближенных вычислениях“ акад. А. Н. Крылова и „Математическая обработка результатов наблюдений“ Э. Уиттекера и Г. Робинсона, писать новое руководство было бы нецелесообразно. Однако, за время моей работы в области приближенных вычислений мне удалось придумать и применить несколько новых методов и приемов вычислений. Их я и счел полезным изложить.

Таким образом, все нижеизложенное может быть рассматриваемо как некоторое дополнение к уже существующим методам. Полагая, что получение дополнительных сведений по интересующим вопросам может потребоваться лишь лицу, знакомому с основами приближенных вычислений, я в изложении основывался на том предположении, что читатель знаком с названными двумя классическими трудами.

Содержание этой книги состоит из шести глав: I. Решение численных уравнений. II. Решение вековых уравнений. III. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. IV. Приближенное конформное преобразование. V. Приближенное интегрирование. VI. Гармонический анализ.

Для решения уравнений высоких степеней развивается для области комплексного переменного метод Ньютона совместно с видоизмененным методом *regula falsi* и дополнительным приемом, уточняющим отдельные корни.

Как все методы, основанные на последовательных приближениях, и этот метод дает возможность вести большую часть вычислений с малой точностью, уточняя их лишь в последних циклах операций, создавая этим возможность быстрого и неустойчивого отыскания корней.

В отношении вековых уравнений дан алгоритм, раскрывающий определитель без необходимости упрощающих предварительных преобразований.

Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка введением функции z сведено к предельно упрощенной схеме, обладающей помимо простоты действий еще и большой точностью.

Приближенное конформное преобразование рассмотрено для односвязных областей не слишком сложного очертания: дан способ быстрого вычисления преобразующей функции — полинома с ограниченным числом членов.

Что касается последних глав — приближенного интегрирования и гармонического анализа, — то здесь лишь дано несколько упрощенных приемов вычисления, с применением прозрачных палеток и прибора „длинномер“.

Во всех графических примерах масштаб принят

единица $\equiv 1$ мм.

Все дано в таком оформлении, чтобы читатель, как сказано выше, знакомый с основными положениями теории вычисления, мог сразу практически применить все новые элементы расчета, нужные ему.

П. Мелентьев

РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. При решении уравнений высоких степеней в настоящее время применяют преимущественно три способа: Ньютона, *regula falsi* и Грегге-Энке; первые два способа применяются исключительно для вычисления вещественных корней, а способ Грегге-Энке также и для комплексных. Вспомним вкратце сущность этих способов.

Способ Ньютона состоит в том, что для уравнения

$$f(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_kx^k + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (1)$$

сперва, по нескольким точкам, приближенно, с точностью 2—3 знаков, строится кривая

$$y = f(x)$$

(черт. 1) и на-глаз определяется абсцисса x точки I , в которой $y \approx 0$. Затем, с большей точностью вычисляются значения

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f(x_1), \\ \eta_1 &= f'(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и за более точное значение корня уравнения принимается

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{\eta_1}, \quad (3)$$

Черт. 1.

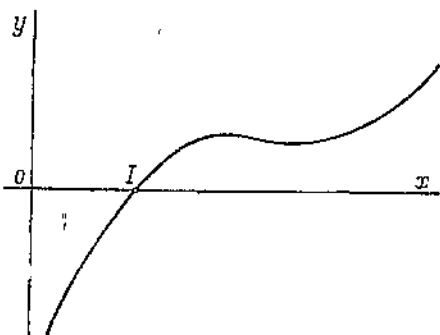
соответствующее (черт. 2) точке II — пересечения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке I с осью OX .

После этого еще более точно вычисляют

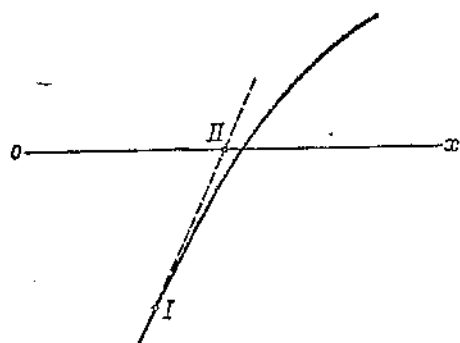
$$\left. \begin{aligned} y_2 &= f(x_2), \\ \eta_2 &= f'(x_2), \\ x_3 &= x_2 - \frac{y_2}{\eta_2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и т. д., пока не получают настолько малой разницы между значениями x_n и x_{n-1} , что ею становится возможно пренебречь.

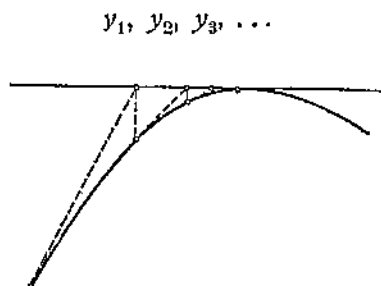
Если у кривой $y = f(x)$ имеется касание ею оси OX , соответствующее кратному корню уравнения (1), то сходимость ньютоновского процесса невелика, как видно из черт. 3, и чтобы добиться большой точности, нужно делать много приближений, но этот случай не играет роли, так как кратные корни могут быть найдены делением $f(x)$ на $f'(x)$. Более



существен случай, когда у кривой $y=f(x)$ вблизи OX имеется точка перегиба (черт. 4), так как тогда при плохом первом приближении ряд дальнейших приближений может оказаться расходящимся. Случай этот характеризуется знакопеременностью ряда значений



Черт. 2.

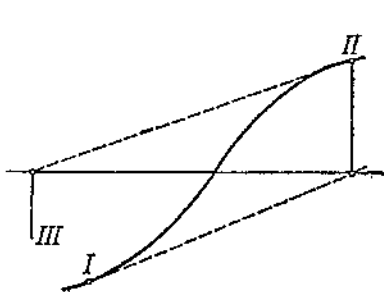


Черт. 3.

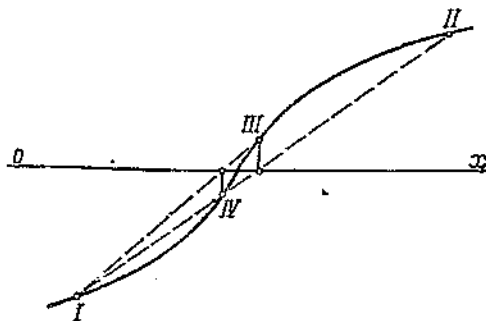
и для него предпочтительнее применять способ ложного положения (*regula falsi*), состоящий в том, что, получив y_1 и y_2 разных знаков, заменяют участок кривой $y=f(x)$ между точками $I(x_1, y_1)$ и $II(x_2, y_2)$ отрезком прямой (черт. 5), пересекающим ось OX на абсциссе

$$x_3 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}. \quad (5)$$

Затем вычисляют $y_3=f(x_3)$ и находят новое приближение по координатам наиболее близких друг к другу двух точек, лежащих по разные



Черт. 4.



Черт. 5.

стороны от оси OX ; в нашем примере такими точками являются I и III , так что

$$x_4 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{y_1 - y_3}.$$

Эти действия продолжают до достаточного сближения между собою двух последовательно полученных на кривой $y=f(x)$ точек.

Этими двумя способами легко можно вычислить все вещественные корни уравнения друг за другом. В способе Грегга-Энке имеется

противоположное стремление — привести уравнение (1) к такому виду, который бы дал возможность получить значения всех корней сразу. Для этого от уравнения (1), корни которого, предположим, равны

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

они могут быть и вещественны и комплексны) переходят к уравнению (6)

$$F(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_kx^k + \dots + b_1x + b_0 = 0, \quad (6)$$

корни которого

$$\alpha_1^{2m}, \alpha_2^{2m}, \dots, \alpha_n^{2m}.$$

сделается это следующим образом.

Как известно, уравнение

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_kx^k + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (7)$$

$$x^n - A_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-k}A_kx^k + \dots + (-1)^{n-1}A_1x + (-1)^nA_0 = 0 \quad (8)$$

имеют корни одинаковые по величине, но разных знаков, т. е. могут быть представлены в виде

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) = 0, \quad (7a)$$

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_k) \dots (x + \alpha_{n-1})(x + \alpha_n) = 0. \quad (8a)$$

Перемножив выражения (7a) и (8a), получим уравнение

$$(x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2) \dots (x^2 - \alpha_k^2) \dots (x^2 - \alpha_{n-1}^2)(x^2 - \alpha_n^2) = 0, \quad (9)$$

очевидно имеющее лишь члены четных степеней, т. е. вида

$$x^{2n} + B_{n-1}x^{2(n-1)} + \dots + (-1)^{n-k}B_kx^{2k} + \dots + (-1)^{n-1}B_1x^2 + (-1)^nB_0 = 0. \quad (10)$$

Взяв соответствующее уравнение

$$(x^2 + \alpha_1^2)(x^2 + \alpha_2^2) \dots (x^2 + \alpha_k^2) \dots (x^2 + \alpha_{n-1}^2)(x^2 + \alpha_n^2) = 0 \quad (11)$$

или, иначе,

$$x^{2n} + B_{n-1}x^{2(n-1)} + \dots + B_kx^{2k} + \dots + B_1x^2 + B_0 = 0 \quad (12)$$

и перемножив (10) и (12), получим уравнение

$$(x^4 - \alpha_1^4)(x^4 - \alpha_2^4) \dots (x^4 - \alpha_k^4) \dots (x^4 - \alpha_{n-1}^4)(x^4 - \alpha_n^4) = 0 \quad (13)$$

и т. д., пока не дойдем до некоторого уравнения

$$x^{2m} - \alpha_1^{2m})(x^{2m} - \alpha_2^{2m}) \dots (x^{2m} - \alpha_k^{2m}) \dots (x^{2m} - \alpha_{n-1}^{2m})(x^{2m} - \alpha_n^{2m}) = 0, \quad (14)$$

или, если обозначим

$$x^{2m} = u, \quad \alpha_k^{2m} = \beta_k,$$

то:

$$(u - \beta_1)(u - \beta_2) \dots (u - \beta_k) \dots (u - \beta_{n-1})(u - \beta_n) = 0, \quad (15)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_{n-1} &= \beta_1 \\ \frac{C_{n-2}}{C_{n-1}} &= 2r^{2m} \cos 2^m \varphi \\ \frac{C_{n-3}}{C_{n-2}} &= \frac{r^{2m}}{2 \cos 2^m \varphi} \\ \frac{C_{n-4}}{C_{n-3}} &= \beta_2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

отсюда легко получить

$$\left. \begin{aligned} (r^{2m})^2 = r^{2m+1} &= \frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}; \quad r^{2m} = \sqrt{\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}}; \\ \cos 2^m \varphi &= \frac{C_{n-2}}{2 \sqrt{C_{n-1} \cdot C_{n-3}}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Модуль r определяется непосредственно:

$$r = \sqrt[2^{m+1}]{\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}}, \quad (25)$$

аргумент же φ определять надо не из (24), а из основного ур-ния (1), зная, что в нем

$$-A_{n-1} = \alpha_1 + 2r \cos \varphi + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots, \quad (26)$$

что и дает значение φ .

Несколько более сложными приемами удастся определить модули и аргументы для большего числа пар комплексных корней.

Однако здесь получается следующее.

Как видно из (18), коэффициенты C окончательно получаемого ур-ния стремятся к

$$\left. \begin{aligned} C_{n-1} &\approx \alpha_1^{2^m}, \\ C_{n-2} &\approx \alpha_1^{2^m} \cdot \alpha_2^{2^m} \dots \text{ и т. д.}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

т. е. при увеличении m на единицу логарифмы коэффициентов удваиваются, что и показывает завершение цикла преобразований, а также служит некоторым контролем вычислений.

Когда же имеются комплексные корни, то, как видно из (22), множитель $\cos 2^m \varphi$ изменяется по совсем иному закону, меняет знак, и в этом случае даже при одной паре комплексных корней трудно сказать, не произошло ли в вычислении просто ошибки, спутавшей всю картину. Кроме того, способом Грэффе, в отличие от двух прежде рассмотренных, нужно все вычисления от самого начала вести с полным количеством знаков, так как неточность, допущенная вначале, нигде не исчезает.

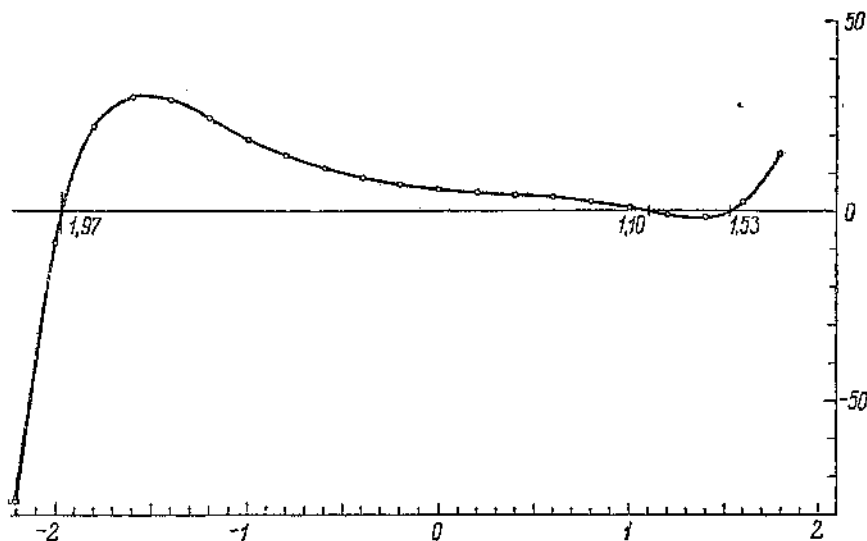
Самое же неприятное в способе Грэффе то, что в случае пар комплексных корней с близкими модулями или с модулями, близкими к модулям вещественных корней, необходимо для разделения корней делать до десяти преобразований, что при уравнении, например, 6-й степени представляет непосильный труд для вычислителя. При случайном

совпадении — равенстве модулей — способ Грегга может и вообще не привести к цели (хотя этот случай и редок, но все же возможен).

В практике автора часто встречались как раз такие сложные вопросы, заставлявшие искать решения уравнений на несколько ином пути, а именно, применять и для отыскания комплексных корней способы Ньютона и „ложного положения“, изменив, конечно, соответственно вычислительную схему.

§ 2. Итак, пусть нам дано ур-ние

$$f(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_kx^k + \dots + A_1x + A_0 = 0. \quad (28)$$



Черт. 6.

Сперва определим все вещественные корни ур-ния (28), для чего построим график функции

$$y = f(x). \quad (29)$$

При этом применим вычислительную схему вида, который пригодится нам и в дальнейшем при вычислении комплексных корней.

Напишем ур-ние кривой (29) так:

$$y = f(x) = [x + A_{n-1}]x + A_{n-2}x + \dots + A_kx + \dots + A_1x + A_0. \quad (30)$$

Здесь квадратной скобкой заменяются $(n-1)$ круглых. Совершенно очевидно, что значение y нужно вычислять только таким путем, а не почленно. Пусть, например, дано ур-ние (оно детально рассматривается акад. А. Н. Крыловым в его книге „Лекции о приближенных вычислениях“)

$$f(x) = x^7 - 2x^6 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0. \quad (31)$$

Строим график кривой (черт. 6)

$$y = [x + 0]x - 2x + 0x - 3x + 4x - 5x + 6 \quad (32)$$

по расчету, данному на табл. 1.

Таблица 1

(x)	$+0)$	$\cdot x$	$\cdot -2)$	$\cdot x$	$+0)$	$\cdot x$	$-3)$	$\cdot x$	$+4)$	$\cdot x$	$-5)$	$\cdot \bar{x}$	$+6=y$
-2,2	<i>id</i>	4,8	2,8	-6,2	<i>id</i>	13,6	10,6	-23,3	-19,3	42,5	37,5	-82,5	-76,5
-2,0		4,0	2,0	-4,0		8,0	5,0	-10,0	-6,0	12,0	7,0	-14,0	-8,0
-1,0		3,2	1,2	-2,2		4,0	1,0	-1,8	2,2	-4,0	-9,0	16,2	22,2
-1,4		2,0	0,0	0,0		0,0	-3,0	4,2	8,2	-11,5	-16,5	23,1	29,1
-1,2		1,4	-0,6	0,7		-0,8	-3,8	4,6	8,6	-10,3	-15,3	18,4	24,4
-1,0		1,0	-1,0	1,0		-1,0	-4,0	4,0	8,0	-8,0	-13,0	13,0	19,0
-0,8		0,6	-1,4	1,1		-0,9	-3,9	3,1	7,1	-5,7	-10,7	8,6	14,6
-0,6		0,4	-1,6	1,0		-0,6	-3,6	2,2	6,2	-3,7	-8,7	5,2	11,2
-0,4		0,2	-1,8	0,7		-0,3	-3,3	1,3	5,3	-2,1	-7,1	2,9	8,9
-0,2		0,0	-2,0	0,4		-0,1	-3,1	0,6	4,6	-0,9	-5,9	1,2	7,2
0													6,0
0,2		0,0	-2,0	-0,4		-0,1	-3,1	-0,6	3,4	0,7	-4,3	-0,9	5,1
0,4		0,2	-1,8	-0,7		-0,3	-3,3	-1,3	2,7	1,1	-3,9	-1,6	4,4
0,6		0,4	-1,6	-1,0		-0,6	-3,6	-2,2	1,8	1,1	-3,9	-2,3	3,7
0,8		0,6	-1,4	-1,1		-0,9	-3,9	-3,1	0,9	0,7	-4,3	-3,4	2,6
1,0		1,0	-1,0	-1,0		-1,0	-4,0	-4,0	0,0	0,0	-5,0	-5,0	1,0
1,2		1,4	-0,6	-0,7		-0,8	-3,8	-4,6	-0,6	-0,7	-5,7	-6,8	-0,8
1,4		2,0	0,0	0,0		0,0	-3,0	-4,2	-0,2	-0,3	-5,3	-7,4	-1,4
1,6		2,6	0,6	1,0		1,6	-1,4	-2,2	1,8	2,9	-2,1	-8,4	2,6
1,8		3,2	1,2	2,2		4,0	1,0	1,8	5,8	10,4	5,4	9,7	15,7

(x	+ 0)	- x	- 2)	- x	+ 0)	- x	- 3)
— 1,97		3,88090	1,88090	— 3,70537		7,29958	4,29958
— 1,96264		3,85196	1,85196	— 3,63473		7,13367	4,13367
— 1,96249		3,8513670	1,8513670	— 3,6332892		7,1302937	4,1302937
1,10		1,21	— 0,79	— 0,869		— 0,9559	— 3,9559
1,10802		1,2277083	— 0,7722917	— 0,8557146		— 0,9481489	— 3,9481489
1,1080164		1,2270003	— 0,7722997	— 0,8557208		— 0,9481527	— 3,9481527
1,53		2,3409	0,3409	0,52158		0,79801	— 2,20199
1,5381		2,3657516	0,3657516	0,5625625		0,8652774	— 2,1347226
1,537875		2,3650595	0,3650595	0,5614159		0,8633875	— 2,1366125
1,5378901		2,3651060	0,3651060	0,5614929		0,8635144	— 2,1364856

(x	- 7)	+ 0)	- x	- 10)	- x	+ 0)
— 1,97	— 13,8		27,2	17,2	— 33,0	
— 1,96264	— 13,7		26,9	16,9	— 33,1	
— 1,96249						
1,10	7,70		8,47	— 1,53	— 1,68	
1,10802	7,76		8,60	— 1,40	— 1,55	
1,1080164			•			
1,53	10,7		16,4	6,4	9,8	
1,5381	10,8		16,6	6,6	10,2	
1,537875						
1,5378901						

Таблица II

$\cdot x$	$+4)$	$\cdot x$	$-5)$	$\cdot x$	$+6=y$
8,47017	— 4,47017	8,80623	3,80623	— 7,49827	— 1,49827
8,11291	— 4,11291	8,07216	3,07216	— 6,02954	— 0,02954
8,1056601	— 4,1056601	8,0573169	3,0573169	— 5,9999538	0,0000462
4,35149	— 0,35149	— 0,38664	— 5,38664	— 5,92530	0,07470
4,3746279	— 0,3746279	— 0,4150952	— 5,4150952	— 6,0000338	— 0,0000338
4,3746179	— 0,3746179	— 0,4150828	— 5,4150828	— 6,0000005	— 0,0000005
3,36904	0,63096	0,96537	— 4,03463	— 6,17298	— 0,17298
3,2834168	0,7165832	1,1024776	— 3,8975224	— 5,9947792	0,0052208
3,2858429	0,7141571	1,0982844	— 3,9017156	— 6,0003509	— 0,0003509
3,2856801	0,7143199	1,0985456	— 3,9014544	— 6,0000083	— 0,0000083

Таблица III

$\cdot x$	$-9)$	$\cdot x$	$+8)$	$\cdot x$	$\cdot 5=\eta$
66,8	57,8	— 113,9	— 105,9	208,6	203,6
65,0	56,0	— 109,8	— 101,8	199,9	194,9
					194,9
— 1,85	— 10,85	— 11,93	— 3,93	— 4,32	— 9,32
— 1,72	— 10,72	— 11,88	— 3,88	— 4,30	— 9,30
					— 3,30
15,0	6,0	9,2	17,2	26,3	21,3
15,7	6,7	10,3	18,3	28,2	23,2
					23,2
					23,2

Таблица IV

x	y	η	$\varepsilon = -\frac{y}{\eta}$
-1,97	-1,49827	203,6	0,00736
-1,96264	-0,02954	194,9	0,00015
-1,96249	0,0000462	194,9	-0,0000002
1,10	0,07470	- 9,32	0,00802
1,10802	-0,0000338	- 9,30	-0,0000036
1,1080164	-0,0000005	- 9,30	0
1,53	-0,17298	21,3	0,00810
1,5381	0,0052208	23,2	-0,000225
1,537875	-0,0003509	23,2	0,0000151
1,5378901	-0,0000083	23,2	0,0000004
корни $x_1 = 1,9624902$ $x_2 = 1,1080164$ $x_3 = 1,5378905$			

Рассмотрим, почему мы ограничились для построений кривой $y = f(x)$ интервалом

$$-2,2 < x < 1,8.$$

Если взглянем в строку для $x = 1,8$, то увидим, что все стоящие на ней числа положительны, следовательно дальнейшее увеличение x не может создать в строке отрицательных величин и, очевидно, верхний предел корней здесь уже достигнут.

В строке для $x = -2,2$ мы видим знакопеременность — два положительных числа, два отрицательных и т. д. Для ур-ния

$$f_1(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0, \quad (33)$$

корни которого равны по величине, но противоположны по знаку корням ур-ния (31), мы, как легко видеть, имели бы для $x = -2,2$ ту же строку, но только с постоянным положительным знаком, что обозначало бы переход за верхний предел значения корней. Таким образом знакопеременность (через два числа) чисел строки служит признаком перехода нижней границы корней, так же как знакпостоянность — признаком перехода верхней границы. Это — чрезвычайно простое правило для определения границы корней.

Из черт. 6 мы на-глаз определяем значения трех вещественных корней ур-ния (31), а именно:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx -1,97, \\ x_2 &\approx -1,10, \\ x_3 &\approx -1,53, \end{aligned}$$

а затем, способом Ньютона уточняем их, составляя табл. II, III и IV значений $f(x)$ и $f'(x)$. Для $f'(x)$ имеем

$$\eta = f'(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5. \quad (34)$$

При этом y вычисляется с точностью все время возрастающей, а η примерно с одинаковой.

Отделив и вычислив три вещественные корни, данные в табл. IV, мы переходим к нахождению комплексных корней. При этом нас совершенно не должен беспокоить вопрос о том, не осталось ли еще неотделенных нами вещественных корней? Если, несмотря на то, что по виду кривой черт. 6 не приходится ожидать еще каких-либо двух вещественных корней, случайно такие корни оказались бы, то они в дальнейшем могут быть нами найдены как комплексные (с равною нулю мнимой частью).

§ 3. Ввиду того, что мы будем теперь оперировать в области комплексной переменной $z = x + iy$, запишем решаемое ур-ние таким образом

$$u = a + bi = f(z) = z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_k z^k + \dots + A_1 z + A_0 = 0. \quad (35)$$

Если применим и здесь формулу Ньютона, то, имея

$$u' = c + di = f'(z) = nz^{n-1} + (n-1)A_{n-1}z^{n-2} + \dots + 2A_2z + A_1 \quad (36)$$

и вычислив для некоторой точки $z_1 = x_1 + iy_1$ значения a_1, b_1, c_1, d_1 , перейдем к новому, более точному значению корня z_2 по формуле:

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} = z_1 - \frac{a_1 + b_1 i}{c_1 + d_1 i} = z_1 + \varepsilon_1, \quad (37)$$

где

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_1 + b_1 i}{c_1 + d_1 i} = -\frac{(a_1 + b_1 i)(c_1 - d_1 i)}{c_1^2 + d_1^2} = \frac{a_1 c_1 + b_1 d_1}{c_1^2 + d_1^2} + i \frac{b_1 c_1 - a_1 d_1}{c_1^2 + d_1^2}, \quad (38)$$

Разберем, что означает собою применение в данном случае формулы Ньютона.

Рассмотрим в прямоугольных координатах (x, y, R) поверхность $R = \Psi(x, y)$, задаваемую уравнением

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = |u|. \quad (39)$$

Представим z в виде $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; для ρ , стремящегося к бесконечности, мы можем в ур-нии (35) ограничиться первым членом, полагая

$$u \approx z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

Отсюда видно, что при $\rho \rightarrow \infty$

$$R \approx \rho^n,$$

т. е. поверхность $R = \Psi(x, y)$ приближается к параболоиду n -ой степени с вертикальной осью, совпадающей с осью OR .

Кроме того, эта поверхность имеет лишь положительные R , воронкообразными углублениями спускаясь к плоскости $R = 0$ в точках $z = x + iy$, являющихся корнями ур-ния (35).

На этой поверхности мы можем разбить два семейства кривых: линии уровня, на которых $R = \text{const}$, и ортогональные к ним линии градиента или наибольшего падения R .

Если бы мы знали, как идут линии градиента, то, начав от любой точки $z = x + iy$, мы могли бы, опускаясь по этой линии, подойти к точке, в которой $R = 0$, а следовательно $a = 0$ и $b = 0$, и таким образом найти один из корней ур-ния (35), — тот, к которому приведет нас линия градиента.

Но действительного вида линии градиента мы не знаем. Попытаемся лишь определить направление этой линии в точке $z = x + iy$.

Пусть в этой точке мы имеем

$$u(z) = a + bi, R(z) = \sqrt{a^2 + b^2}, u'(z) = c + di.$$

Если мы дадим z малое приращение

$$\varepsilon = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то в случае $\varphi = \varphi_0$, соответствующем направлению линии уровня, мы получим

$$R(z + \varepsilon) = R(z).$$

При достаточно малом r мы с любой точностью можем положить

$$\left. \begin{aligned} u(z + \varepsilon) &\approx u(z) + \varepsilon u'(z) = a + bi + r(\cos \varphi + i \sin \varphi)(c + di) = \\ &= a + r(c \cos \varphi_0 - d \sin \varphi_0) + i[b + r(c \sin \varphi_0 + d \cos \varphi_0)] \\ R(z + \varepsilon) &= \\ &= \sqrt{[a + r(c \cos \varphi_0 - d \sin \varphi_0)]^2 + [b + r(c \sin \varphi_0 + d \cos \varphi_0)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Но по условию

$$R(z + \varepsilon) = R(z),$$

откуда

$$2ar(c \cos \varphi_0 - d \sin \varphi_0) + 2br(c \sin \varphi_0 + d \cos \varphi_0) + \\ + r^2(c \cos \varphi_0 - d \sin \varphi_0)^2 + r^2(c \sin \varphi_0 + d \cos \varphi_0)^2 = 0. \quad (41)$$

Так как r сколь угодно мало, то пренебрежем членами второго порядка малости и получим в направлении линии уровня:

$$a(c \cos \varphi_0 - d \sin \varphi_0) + b(c \sin \varphi_0 + d \cos \varphi_0) = 0, \quad (42)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{ac + bd}{ad - bc}. \quad (43)$$

Для направления линии градиента имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{bc - ad}{ac + bd}. \quad (44)$$

Вернемся теперь к ф-ле (38); имея поправку

$$\varepsilon = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{-(c^2 + d^2)} = \alpha + \beta i, \quad (45)$$

получаем направление этой поправки:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{bc - ad}{ac + bd}. \quad (46)$$

Сравнивая (44) с (46), мы видим, что способ Ньютона ведет нас от приближения z_1 к $z_2 = z_1 + \varepsilon_1$ в направлении линии градиента.

Если мы из точки z пойдем по касательной к линии градиента, то она где-то пересечет плоскость $R = 0$; определить соответствующее

значение r можно, пользуясь формулой (40), но, подставив в нее φ вместо φ_0 , получим

$$R(z + \varepsilon) = \sqrt{[a + r(c \cos \varphi - d \sin \varphi)]^2 + [b + r(c \sin \varphi + d \cos \varphi)]^2} = 0. \quad (47)$$

Отсюда для определения r имеем два условия

$$r = - \frac{a}{\cos \varphi - d \sin \varphi} = - \frac{a}{-\cos \varphi (c - d \operatorname{tg} \varphi)}, \quad (48_1)$$

$$r = - \frac{b}{c \sin \varphi + d \cos \varphi} = - \frac{b}{-\cos \varphi (c \operatorname{tg} \varphi + d)}, \quad (48_2)$$

которые обязаны совпасть.

Проверим: имея

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bc - ad}{ac + bd},$$

получаем

$$\cos \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{ac + bd}{\sqrt{(bc - ad)^2 + (ac + bd)^2}}. \quad (49)$$

Отсюда из (48₁)

$$\begin{aligned} r &= - \frac{a}{\frac{ac + bd}{\sqrt{(bc - ad)^2 + (ac + bd)^2}} \left(c - d \frac{bc - ad}{ac + bd} \right)} = \\ &= - \frac{\sqrt{(bc - ad)^2 + (ac + bd)^2}}{c^2 - d^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

То же получается и из (48₂).

Для поправки ε по формуле Ньютона (38) получаем тот же модуль, что и выведенный в (50). Таким образом устанавливаем, что формула Ньютона от значения z_1 приводит нас к значению z_2 , получаемому, если по касательной к линии градиента идти вниз до пересечения с плоскостью $R=0$.

§ 4. В новой точке z_2 мы можем получить $R(z_2)$ либо меньший, чем $R(z_1)$, либо больший.

Если $R(z_2) < R(z_1)$, то мы можем продолжать приближения дальше, пока не дойдем до $R=0$; если же $R(z_2) > R(z_1)$, то это соответствует случаю, требующему при вычислении вещественных корней применения способа ложного положения.

Тогда (черт. 7) делаем графическое построение: наносим на плоскости XOY точки Z_1 , Z_2 и Z_3 (для Z_3 не надо вычислять ни u_3 , ни u_3'); от прямой KM , параллельной линии Z_1Z_2 , в произвольном масштабе откладываем над точками Z_1 и Z_2 соответствующие R и строим примерную картину сечения поверхности $R = \Psi(x, y)$ плоскостью, нормальной к чертежу, проходящей через точки Z_1 и Z_2 .

Прямая AR_1 есть касательная к линии градиента в точке Z_1 . Направление линии градиента здесь совпадает с направлением сечения Z_1Z_2 . В точке Z_2 направление сечения не совпадает с направлением линии градиента, поэтому проводим Z_3B перпендикулярно к Z_2Z_3 , переносим B в C и проводим прямую R_2C . Эта прямая дает сечение плоскости, касательной к поверхности $R = \Psi(x, y)$ в точке Z_2 , в нужном нам

направлении. После этого соединяем точки R_1 и R_2 главной кривой, касающейся у точек R_1 и R_2 прямых R_1A и R_2C . На этой кривой берем точку с наименьшим R и сносим ее на прямую Z_1Z_2 ; получаем новую точку Z_1 , значение R в которой должно быть меньше, чем в точках Z_1 и Z_2 , и вычисляем дальше.

Во всяком случае, даже и не производя этого построения, имея несколько точек $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, мы по направлениям в них линий градиента легко определим примерное положение искомой точки, дающей корень решаемого ур-ния. Мы можем быть уверены в том, что линия градиента приведет нас к результату, а не к такой точке, откуда мы не сможем уйти за неопределенностью направления линии градиента.

Действительно, для этой неопределенности требуется, чтобы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bc - ad}{ac + bd} = \frac{0}{0}. \quad (51)$$

Если при этом мы не находимся в точке, соответствующей корню, т. е. не имеем одновременно $a = b = 0$, то решение системы ур-ний

$$\left. \begin{aligned} bc - ad &= 0, \\ ac + bd &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

приводит нас к равенству

$$\frac{c}{d} = -\frac{d}{c}, \quad (53)$$

невозможному ни при каких значениях c и d ; следовательно, направление линии градиента всегда одно.

Необходимо отметить при этом интересный момент: если бы мы взяли z_1 где-либо на вещественной оси, т. е. $z_1 = x_1$, то на ней мы получили бы $u_1 = a_1$, $u'_1 = c_1$ и $b_1 = d_1 = 0$, а отсюда $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0$, т. е. все поправки вели бы нас по вещественной оси и мы как будто не могли бы с нее сойти. Однако, если изучить поведение $\operatorname{tg} \varphi$ в точке, где $f(x_m)$ имеет минимум, т. е. где и $c = 0$, то получим следующее:

В этой точке можем переписать (44) так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{bc - ad}{ac + bd} = \frac{d \left(b \frac{c}{d} - a \right)}{c \left(a + b \frac{d}{c} \right)} = -\frac{d}{c} = \frac{0}{a}. \quad (54)$$

Чтобы раскрыть неопределенность, рассмотрим значение u' в точке $z = x_m + i\delta$, где δ — весьма малая величина. Так как на оси OX и функция u'' также вещественна, то получаем, обозначив $u''(x_m) = m$,

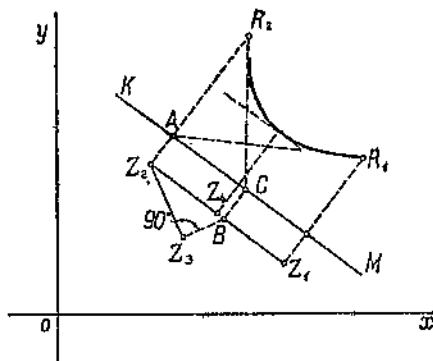
$$u'(x_m + i\delta) \approx u'(x_m) + i\delta u''(x_m) = c + i(d + \delta m) = i\delta m. \quad (55)$$

Аналогично получаем

$$u(x_m + i\delta) \approx u(x_m) + i\delta u'(x_m) = a + i(b + \delta c) = a, \quad (56)$$

и неопределенность (54) примет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-a\delta m}{0} = \pm \infty, \quad \text{т. е.} \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}.$$



Черт. 7.

Из этого мы видим, что, даже идя по оси OX , мы, дойдя до минимума $f(x)$, сворачиваем под прямым углом и идем дальше по линии градиента. Покажем, что при этом мы идем в направлении к $R=0$ и при $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ и при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. На прямой $z = x_m + iy$ вблизи от оси OX мы можем приближенно принять:

$$u(x_m + iy) \approx a + icy + \frac{(im)^2}{2} y^2 = a - \frac{m^2}{2} y^2. \quad (57)$$

Мы имеем дело с ур-нием четной степени, не имеющим вещественных корней, а следовательно a положительно и

$$R(x_m + iy) = a - \frac{m^2}{2} y^2 < a = R(x_m),$$

что и требовалось доказать.

Можно упомянуть еще о случае, когда на вещественной оси и $u' = 0$ и $u'' = 0 \dots$ до $u^{(k)} = 0$. Тогда вблизи от места минимума будем иметь

$$\begin{aligned} u(x_m + \varepsilon) &\approx u_m + \frac{1}{(k+1)!} \varepsilon^{k+1} u_m^{(k+1)} = \\ &= a + \frac{1}{(k+1)!} \rho^{k+1} [\cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi] u_m^{(k+1)}; \\ R(x_m + \varepsilon) &= \sqrt{\left[\left(a + \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \cos(k+1)\varphi \cdot u_m^{(k+1)} \right)^2 + \left[\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \sin(k+1)\varphi \cdot u_m^{(k+1)} \right]^2} \end{aligned}$$

Для аргумента φ приращения ε , получаемого из условия

$$(k+1)\varphi = \pi,$$

имеем при любом k — $R(x_m + \varepsilon) < R(x_m)$. Следовательно и здесь мы по линии градиента можем спуститься к $R=0$.

§ 5. Решим теперь вопрос, от какой точки начинать расчет. Имея ур-ние (33), мы знаем, что

$$A_0 = \rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_n^2 \quad (58)$$

равно произведению квадратов модулей всех пар корней, следовательно: если возьмем число $A_0^{\frac{1}{n}}$, то должны быть модули и больше и меньше его; так как аргументов корней мы не знаем даже и примерно, то возьмем начальную точку на мнимой оси, т. е. одинаково удаленную от пересечений окружности радиуса $A_0^{\frac{1}{n}}$ с вещественной осью. Итак, будем брать

$$z_1 \approx A_0^{\frac{1}{n}} i. \quad (59)$$

Вернемся к ур-нию (31). После исключения трех вещественных корней (которые у автора и у акад. А. Н. Крылова различаются на величины порядка точности вычислений, а именно:

	У автора	У акад. А. Н. Крылова
x_1	-1,9624902	-1,9624901
x_2	1,1080164	1,1080166
x_3	1,5378905	1,5378905

остается подлежащее решению уравнение:

$$f(z) = z^4 + 0,6834170z^3 + 1,9556169z^2 + 0,3765418z + 1,7942053 = 0. \quad (60)$$

Для вычисления перепишем $u = f(r)$ и $u' = f'(r)$:

$$\left. \begin{aligned} u &= [z + 0,6834170]z + 1,9556169z + 0,3765418z + 1,7942053, \\ u' &= [4z + 2,0503]z + 3,9112z + 0,3765. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Нам потребуется перемножить комплексные числа; это действие мы будем записывать так:

$$\left. \begin{array}{l} a + bi \\ c + di \\ \hline = (ac - bd) + i(bc + ad) \\ \hline = k + mi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ \hline + \frac{ac}{-bd} & + \frac{bc}{ad} \\ \hline k & m \end{array} \right.$$

Вначале мы возьмем только один знак за запятой; когда же подойдем достаточно близко к корню, тогда увеличим точность до 2, 3 знаков и т. д.

Вычисления даны в табл. V, VI и VII; в табл. V дано вычисление u , в VI — u' и в VII — $z = -\frac{u}{u'}$. Табл. V и VI не требуют пояснений, на табл. VII несколько остановимся.

Во избежание ошибки от перемножения не тех чисел, которые следует множить, в заголовке столбцов показано, какие числа берутся для данного перемножения и какой знак нужно брать при произведении.

Графики обозначают:

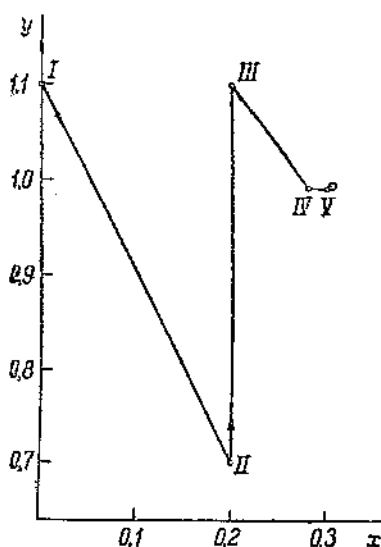
$$\begin{array}{l} + \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} = +ac; \quad + \begin{array}{|c|} \hline \cdot \diagup \\ \hline \end{array} = +bc \\ + \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} = +bd; \quad - \begin{array}{|c|} \hline \cdot \diagdown \\ \hline \end{array} = -ad \\ \hline \Sigma = ac + bd; \quad \Sigma = bc - ad \end{array}$$

В графе ε стоят величины:

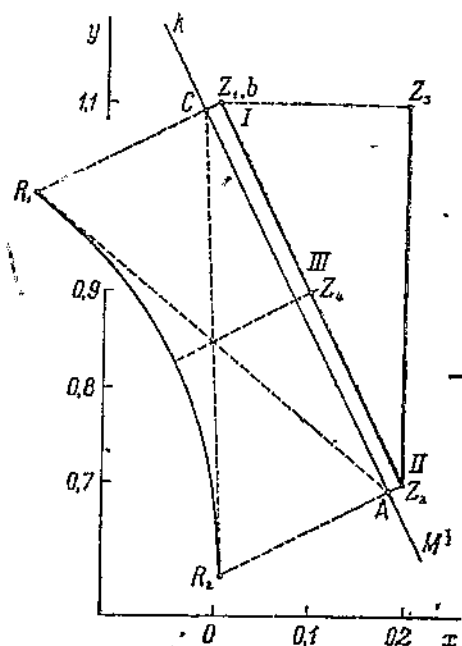
$$\frac{ac + bd}{-(c^2 + d^2)} \text{ — вещественная часть, и}$$

$$\frac{bc - ad}{-(c^2 + d^2)} \text{ — мнимая часть.}$$

Первые три приближения были взяты с минимальной возможной точностью; так как ε_3 оказалось значительно меньше, чем ε_1 и ε_2 , что указывало на начало приближения к искомой точке, то добавлен второй знак за запятой; малое значение $u = 0,07 - 0,05 i$ пока-



Черт. 8.



Черт. 9.

зывает, что можно было бы идти даже и с тремя знаками за запятой, поэтому следующее приближение дано уже с четырьмя знаками за запятой, и лишь последнее — со всеми семью знаками.

Получились корни

$$z_{1,2} = 0,3046065 \pm 0,9919148i$$

по акад. А. Н. Крылову

$$z_{1,2} = 0,3046066 \pm 0,9919148i,$$

соответствующие ур-нию: $z^2 - 0,60921302z + 1,0766801 = 0$.

Отделение их дает остальные корни из ур-ния

$$z^2 + 1,2926300z + 1,6664238 = 0.$$

Черт. 8 показывает ход приближений. Мы могли бы, сделав первые две операции и видя, что $R_1 \approx R_2$, прибегнуть и к графическому построению из боязни получить в дальнейшем такое же отсутствие стремления R к нулю.

	z		$+0,6834170) z$		$+1,9556169) z$	
I	0	1,1	0,7	1,1	0,8	0,8
	0,7		0	1,1	0	1,1
			0	0	0	0
II	0,2	0,7	-1,2	0,8	-0,9	0,9
	0,7		2,0		0,4	
			0,9	0,7	1,7	0,7
III	0,2	1,1	0,2	0,1	0,3	0,1
	0,7		-0,5	0,6	-0,5	1,2
			2,0		0,4	
IV	0,28	0,99	0,9	1,1	1,0	1,2
	0,68		0,2	1,1	0,2	1,1
			0,2	0,2	0,2	0,2
V	0,3000	0,9900	-1,2	1,0	-1,3	1,1
	0,6834		2,0		0,4	
			0,96	0,99	1,25	1,23
VI	0,3046000	0,9919000	0,28	0,99	0,28	0,99
	0,6834170		0,27	0,28	0,35	0,35
			-0,98	0,95	-1,22	1,24
			1,96		0,38	
			0,9834	0,9900	1,2705	1,2705
			0,3000	0,9900	0,3000	0,9900
			0,2950	0,2970	0,3812	0,3812
			-0,9801	0,9736	-1,2579	-1,2578
			1,9556		0,3765	
			0,9880170	0,9919000	1,2727013	1,2821467
			0,3046000	0,9919000	0,3046000	0,9919000
			0,3009500	0,3021327	0,3876648	0,3905419
			0,9838656	0,9800140	-1,2717613	1,2623923
			1,9556169		0,3765418	
	0,3046065	0,9919148				

Таблица V

$+0,3765418) z$		$+1,7942053 = u$		R
-0,5 0	0,9 1,1	0,8	-0,6	1,0
0	0			
-1,0 1,8	-0,6			
0,2 0,2	1,3 0,7		0,4	
0	0,3	0,9		1,0
-0,9 1,8	0,1			
-0,7 0,2	1,3 1,1		-0,5	
-0,1 -1,4 1,8	0,3 -0,8			
-0,49 0,28	1,59 0,99	0,07	-0,05	0,09
-0,14 -1,58 1,79	0,44 -0,49			
-0,5002 0,3000	1,6390 0,9900			
-0,1501 -1,6226 1,7942	0,4917 -0,4952			
-0,5075547 0,3046000	1,6529344 0,9919000	0,0000585	-0,0035	0,02
-0,1546012 -1,6395456 1,7942053	-0,5034838 -0,5034435		0,0000403	

Таблица VI

	$z \cdot 4$		$+ 2.0503) z$		$+ 3.9112) z$		$+ 0.3765 \Rightarrow u'$	
I	0	1,1	2,1	4,4	-0,9	2,3	-2,1	-1,0
			0	1,1	0	1,1		
II	0	4,4	0	0	0	0	-0,9	2,3
			-4,8	2,3	-2,5	-1,0		
	0,2	0,7	3,9		0,4			
			2,9	2,8	2,5	2,6		
III	0,8	2,8	0,2	0,7	0,2	0,7	-1,2	0,5
			0,6	0,6	0,5	0,5		
	2,1	1,1	-2,0	2,0	-1,8	1,8		
			3,9		0,4			
	0,2	4,4	2,9	4,4	-0,3	4,1		
			0,2	1,1	0,2	1,1		
IV	0,8	4,4	0,6	0,9	-0,1	0,8	-3,58	2,06
			-4,8	3,2	-4,5	-0,3		
	2,1	0,99	3,9		0,4			
			3,17	3,96	0,88	4,25		
	0,28	3,96	0,28	0,99	0,28	0,99		
			0,89	1,11	0,25	1,19		
V	1,12	0,99	-3,92	3,14	-4,21	0,87	-3,70	2,28
			3,91		0,38			
	2,05	0,99	3,25	3,96	0,97	4,41		
			0,30	0,99	0,30	0,99		
	0,30	3,96	0,98	1,19	0,29	1,32		
			-3,92	3,22	-4,37	0,96		
VI	2,05	0,992	3,91		0,98		-3,745	2,323
			3,270	3,068	0,973	4,454		
	0,305	3,968	0,305	0,992	0,305	0,992		
			0,998	1,210	0,297	1,358		
	1,220	0,992	-3,936	3,244	-4,418	0,965		
			3,911		0,376			

Таблица VII

	$\frac{u}{u'}$	$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & & : \\ + & & : \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & & : \\ - & & : \end{matrix}$	$\begin{matrix} \diagup & & \diagdown \\ + & & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} c^2 \\ d^2 \\ -(c^2 + d^2) \end{matrix}$	$\begin{matrix} e \\ 0 \end{matrix}$	ρ
I	0,8	-0,6	-1,7	1,3	$\diagup$	4,4	0,2	0,15
	-2,1	-1,0	0,6	0,8	$\diagdown$	1,0		
II	0,9	0,4	-1,1	-0,4	$\diagup$	-5,4	0	0,4
	-0,9	2,3	-0,8	-2,1	$\diagdown$	0,8		
III	0,3	-0,5	0,9	2,1	$\diagup$	5,3	0,08	0,14
	-4,2	0,5	0,1	-0,2	$\diagdown$	-6,1		
IV	0,07	-0,05	-1,3	0,2	$\diagup$	17,6	0,020	0,02
	-3,58	2,06	-0,2	1,9	$\diagdown$	0,2		
V	0,0215	-0,0035	-0,25	0,18	$\diagup$	-17,8	0,0046	0,005
	-3,70	2,28	-0,10	-0,14	$\diagdown$	12,8		
VI	0,0000585	0,0000403	-0,35	0,04	$\diagup$	4,2	0,0000065	0,000016
	-3,745	2,323	-0,0795	0,0130	$\diagdown$	-17,0		
			-0,0080	-0,0489	$\diagup$	13,7		
			-0,0875	-0,0359	$\diagdown$	5,2		
			-0,0002190	-0,0001510	$\diagup$	-18,9		
			0,0000936	-0,0001359	$\diagdown$	14,02		
			-0,0001254	-0,0002869	$\diagup$	5,40		
					$\diagdown$	-19,42		

Построение это показано на черт. 9. Оно приводит нас к точке $z = 0,1 + 0,9i$, от которой и поведем третье приближение. В этой точке вычисление дает $R = 0,7$, т. е. меньше, чем R_1 и R_2 , что и требовалось нам.

§ 6. Возьмем еще пример.

Акад. А. Н. Крыловым было любезно сообщено мне уравнение, решение которого дало Леверрье возможность найти Нептуна.

Уравнение это:

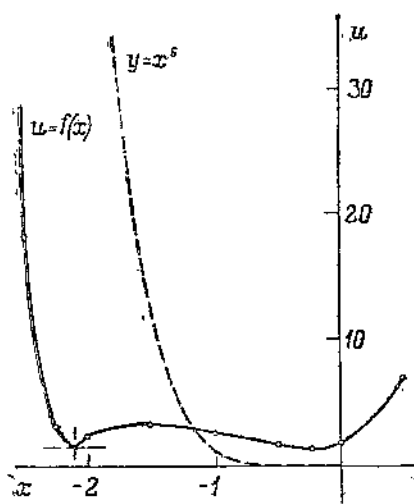
$$3447z^6 + 14560z^5 + 22430z^4 + 25857z^3 + 29193z^2 + 11596z + 5602 = 0.$$

Разделив на коэффициент при z^6 , получим:

$$f(z) = z^6 + 4,2240z^5 + 6,5071z^4 + 7,5013z^3 + 8,4691z^2 + 3,3641z + 1,6252 = 0. \quad (62)$$

Запишем его так, как нам нужно для вычисления.

$$\left. \begin{aligned} u &= [z + 4,2240]z + 6,5071]z + 7,5013]z + 8,4691]z + \\ &\quad + 3,3641]z + 1,6252 = 0, \\ u' &= [6z + 21,12]z + 26,03]z + 22,50]z + 16,94]z + 3,36. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$



Черт. 10.

Сперва по вычислениям табл. VIII строим график кривой $u = f(x)$, показывающий, что ни одного вещественного корня уравнения (62) не имеет. При этом для большей достоверности в сомнительных местах добавлены точки для u при $x = -0,25$ и $x = -2,25$. График кривой $u = f(x)$ дан на черт. 10. На этом же чертеже показано и сечение предельного параболоида, дающее

$$u = x^6.$$

Резкое снижение ординат кривой $u = f(x)$ указывает на наличие в поверхности $R = \Psi(x, y)$ вблизи вещественной оси около $x = -2,1$ воронки, ведущей к комплексному корню.

Согласно (57) мы можем определить в первом приближении местонахождение корня по формуле

$$u(x_m + iy) = u(x_m) - \frac{1}{2} u''(x_m) y^2 = 0, \quad (64)$$

откуда искомое

$$y = \pm \sqrt{\frac{2u(x_m)}{u''(x_m)}}.$$

Таблица VIII

x	+42)	$\cdot x$	+6,5)	$\cdot x$	+7,5)	$\cdot x$	+8,5)	$\cdot x$	+3,4)	$\cdot x$	+1,6 = u
-4,5	-0,3	1,3	7,8	-35,1	-27,6	124,2	132,7	-597	-594	2673	2675
-4	0,2	-0,8	5,7	-22,8	-15,3	61,2	69,7	-279	-276	1101	1106
-3,5	9,7	-2,5	1,0	-14,0	-6,5	22,7	31,2	-109	-106	371	373
-3	1,2	-3,6	2,9	-8,7	-1,2	3,6	12,1	-36	-33	99	101
-2,5	1,7	-4,2	2,3	-5,7	-1,8	4,5	4,0	-10,0	-6,6	16,5	18,1
-2	2,2	-4,4	2,1	-4,2	3,3	-6,6	1,9	-3,8	-0,4	0,8	2,4
-1,5	2,7	-4,0	2,5	-3,8	3,7	-5,5	3,0	4,5	-1,1	1,6	3,2
-1	3,2	-3,2	3,3	-3,3	4,2	-1,2	4,3	-1,3	-0,9	0,9	2,5
-0,5	3,7	-1,8	4,5	-2,2	5,3	-2,6	5,9	-3,0	0,4	-0,2	1,4
0											1,6
0,5	4,7	2,3	8,8	4,4	11,9	6,0	14,5	7,2	10,6	5,3	6,9
-0,25	4,0	-1,0	5,5	-1,4	6,1	-1,5	7,0	-1,7	1,7	-0,4	1,2
-2,25	2,0	-4,5	2,0	-4,5	3,0	-6,7	1,8	-4,0	-0,6	1,3	3,0

	z		$+ 4,2240) z$		$+ 6,5071) z$		$+ 7,5013) z$	
I	—2,10 4,22	0,30	2,12	0,30	1,97	0,01	3,36	0,58
			—2,1	0,3	—2,1	0,3	—2,1	0,3
			—4,45	—0,63	—4,14	—0,02	—7,06	—1,22
			—0,09	0,64	0	0,60	—0,17	1,01
II	—2,030 4,224	0,300	6,51	7,50			8,47	
			2,194	0,300	1,969	0,049	3,489	0,481
			—2,03	0,3	—2,03	0,3	—2,03	0,3
			—4,448	—0,609	—3,997	—0,100	—7,083	—0,976
			—0,090	0,658	—0,015	0,581	—0,144	1,047
			6,507	7,501			8,469	

	$z - 6$		$+ 21,12) z$		$+ 26,03) z$	
I	2,1	0,3	8,5	1,8	7,7	—1,3
			—2,1	0,3	—2,1	0,3
			—17,8	—3,8	—16,2	2,7
			—0,5	2,5	0,4	2,3
II	—2,03	0,30	26,0	22,5		
			8,9	1,8	7,5	—0,9
			—2,03	0,3	—2,03	0,3
			—18,0	—3,6	—15,2	1,8
	—12,2	1,8	—0,5	2,7	0,3	2,2
	21,1		26,0	22,5		

Таблица IX

$+ 8,4691) z$		$+ 3,3641) z$		$+ 1,6252 = u$		R
1,24	-0,21	0,82	0,81	- 0,33	-1,45	1,5
-2,1	0,3	-2,1	0,3			
-2,60	0,44	-1,72	-1,70			
0,06	0,37	-0,24	0,25			
3,36		1,63				
1,242	0,071	0,822	0,229	-0,113	- 0,218	0,25
-2,03	0,3	-2,03	0,3			
-3,571	-0,144	-1,569	-0,465			
-0,021	0,373	-0,069	0,247			
3,364		1,625				

Таблица X

$+ 22,50) z$		$+ 16,94) z$		$+ 3,36 = u'$	
6,7	5,0	1,3	8,5	3,3	18,2
-2,1	0,3	-2,1	0,3		
-14,1	-10,5	-2,7	17,8		
-1,5	2,0	2,6	0,4		
16,9		3,4			
7,6	4,0	0,3	-5,8	4,5	11,9
-2,03	0,3	-2,03	0,3		
-15,4	-8,1	-0,6	11,8		
-1,2	2,3	1,7	0,1		
16,9		-3,4			

Таблица XI

	$\frac{n}{u'}$	$\begin{matrix} a & b \\ \cdot & \cdot \\ c & d \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & \vdots \\ & \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & \nearrow \\ & \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} e^2 \\ d^2 \\ -(e^2 + d^2) \end{matrix}$	ϵ	ρ	
I	-0,33	-1,45	-1,09	-4,79	10,9	0,07	0	0,08
	3,3	18,2	-26,39	6,01	331,2			
			-27,48	1,22	-342,1			
II	-0,113	-0,218	-0,51	-0,98	20,2	0,019	-0,002	0,02
	4,5	11,9	-2,59	1,34	141,6			
			-3,10	0,36	-161,8			

Имея

$$u'' = [30z + 84]z + 78)z + 45)z + 17, \quad (65)$$

для $x_m = -2,1$ получаем

$$u \approx 2,83, \quad u'' \approx 72,$$

откуда

$$y \approx \pm 0,28 \approx \pm 0,3.$$

Таким образом для первого приближения мы примем:

$$z_1 = -2,1 + 0,3i;$$

(Совершенно безразлично, брать ли $z_1 = x_1 + iy_1$ или $z_1 = x_1 - iy_1$, так как поверхность $R = \Psi(x, y) = |u|$ для функции u переменной z , имеющей вид полинома с вещественными коэффициентами, симметрична относительно оси OX).

Вычисления даны в табл. IX, X и XI, — сделаны всего лишь два приближения, приводящие нас, примерно, к корням

$$z = -2,01 \pm 0,30i,$$

соответствующим уравнению

$$z^2 + 4,02z + 4,13 = 0. \quad (66)$$

Если бы в (66) коэффициенты были точны, то (62) делилось бы на него без остатка, а в частном получился бы полином $(n-2)$ -ой, т. е. в данном случае 4-й степени, служащий для определения остальных корней, т. е. мы имели бы

$$\frac{f(z)}{z^2 + Pz + Q} = \varphi(z) = z^{n-2} + B_{n-3}z^{n-3} + \dots + B_1z + B_0 = 0. \quad (67)$$

В действительности мы имеем не $z^2 + Pz + Q$, а $z^2 + P_1z + Q_1$, где P_1 и Q_1 неравны P и Q , но отличаются от них на малые величины.

Пусть

$$P = P_1 + p, \quad Q = Q_1 + q.$$

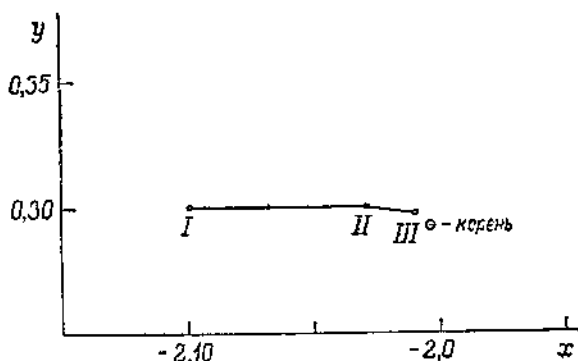
Деля $f(z)$ на $z^2 + (P_1 + p)z + (Q_1 + q)$ и пренебрегая в вычислениях величинами второго порядка малости, мы получим в двух членах остатка

при z^1 и при z^0 линейные комбинации p и q . Приравняв члены остатка нулю, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, определяющую p и q .

Производим деление (см. табл. XII). Находим $p \approx -0,020$; $q \approx -0,024$. Так как величины второго порядка малости выражаются в нескольких единицах последней из значащих цифр, делаем еще одно приближение, деля $f(z)$ на

$$z^2 + (4,01 + p)z + (4,106 + q),$$

как показано на табл. XIII.



Черт. 11.

В итоге получаем первую пару корней из уравнения:

$$z^2 + 4,0101z + 4,1057 = 0,$$

т. е.

$$z = -2,0050 \pm 0,2925i.$$

С точки зрения расхода труда — уточнение этим путем предпочтительнее непосредственного вычисления до конца по Ньютону, так как оно не только дает корни с меньшим количеством вычислений, но и одновременно дает уравнение, служащее для определения остальных $(n-2)$ корней; в нашем случае имеем:

$$z^4 + 0,2139z^3 + 1,5437z^2 + 0,4328z + 0,3958 = 0. \quad (68)$$

Необходимо лишь иметь в виду, что пользоваться этим приемом можно лишь при малых значениях искомым поправок p и q , так как иначе не гарантирована сходимости ряда приближений. В нашем примере на основании отрезков I—II и II—III (Черт. 11, мы вправе полагать, что последующие поправки будут незначительны. Подобный график всегда следует вычерчивать, так как при всей своей простоте он придает наглядность всем результатам.

Для нахождения корней уравнения (68) мы можем, как говорили, идти от начальной точки

$$z_1 = i \sqrt[4]{0,3958} \approx 0,8i.$$

z^6	z^5			z^4			z^3			z^2		
		p	q		p	q		p	q		p	q
1	4,2240			6,5071			7,5013			8,4691		
-1	-4,0200	-1		-4,1300		-1						
	0,2040	-1		2,3771		-1						
	-0,2040	1		-0,8201	-0,2		-0,8425		-0,2			
					4,0			4,1				
				1,5570	3,8	-1	6,6588	4,1	-0,2			
				-1,5570	-3,8	1	-6,2591	-1,6		-6,4304		-1,6
								-15,3	4,0		-15,7	4,0
							0,3997	-12,8	3,8	2,0387	-15,7	2,5
							-0,3997	12,8	-3,8	-1,6068	-0,4	
										51,4	-15,7	
										0,4319	35,3	-12,8
										-0,4319	-35,3	12,8
I												
$- 89,4p + 35,3q = 0,0228$												
I'												
$- 146,0p + 52,5q = 0,1585$												
$p \approx$												
$q \approx$												

Таблица XII

z^1			z^0			$z^3 + (4,02 + p)z + (4,13 - q)$
	p	q		p	q	
3,3641			1,6252			z^4
						$+ (0,2040 - p)z^3$
						$+ (1,5570 + 3,8p - q)z^2$
						$+ (0,3997 - 12,8p + 3,8q)z$
1,6507		-0,4				
	52,9	-15,7				
0,7184	52,9	-16,1				$+ (0,4319 + 35,3p - 12,8q)$
1,7362	-0,4		-1,7837		-0,4	
	-141,9	51,4		-146,0	52,9	
0,0228	-89,4	35,3	-0,1585	-146,0	52,5	
0,010						
0,024						

z^0	z^3			z^1			z^2			z^3			z^2		
		p	q		p	q		p	q		p	q		p	q
1	4,2240			6,5071			7,5018			8,4691					
-1	-4,0100	-1		-4,1060		-1									
	0,2140	-1		2,4011		-1									
	-0,2140	1		-0,8581	-0,2		-0,8787		-0,2						
					4,0			4,1							
				1,5430	3,8	-1	6,6226	4,1	-0,2						
				-1,5430	-3,8	1	-6,1874	-1,5		-6,3356					
								-15,3	4,0				-15,6		
							0,4352	-12,7	3,8	2,1335	-15,6				
							-0,4352	12,7	-3,8	-1,7452	-0,4				
													50,9		
													0,3883	34,9	
													-0,3883	-34,9	
$- 88,2p + 34,9q = - 0,0201$ $- 143,3p + 51,8q = - 0,0309$										$p \approx 0,00009$ $q \approx - 0,00034$					

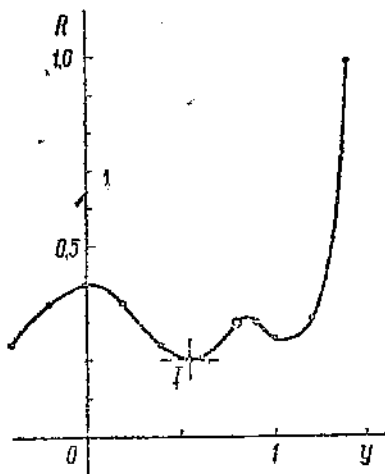
Таблица XIII

z^1			z^0			$z^2 + (4,01 + p)z + (4,06 + q)$
	p	q		p	q	
3,3641			1,6252			z^4
						$+ (0,2140 - p)z^3$ (0,2139)
						$+ (1,5430 + 3,8p - q)z^2$ (1,5437)
1,7869		- 0,4				$+ (0,1352 - 12,7p + 3,8q)z$ (0,4328)
	52,2	-15,6				
1,5772	52,2	-16,0				$+ (0,3883 + 34,9p - 12,7q)$
1,5571	-0,4		-1,5943		-0,4	(0,3958)
	-140,0	50,9		-143,3	52,2	
0,0201	- 88,2	34,9	0,0309	-143,3	51,8	

Таблица XIV

y	(y^2)	$-1,54$	$\cdot y^2$	$+0,40 = a$	$(-0,21y^2$	$+0,43)$	$y=b$	R
0				0,40			0	0,40
0,2	0,04	-1,50	-0,06	0,34	-0,01	0,42	0,08	0,35
0,4	0,16	-1,38	-0,22	0,18	-0,03	0,40	0,16	0,24
0,6	0,36	-1,18	-0,42	-0,02	-0,08	0,35	0,21	0,21
0,8	0,64	-0,90	-0,58	-0,18	-0,13	0,30	0,24	0,30
1,0	1,00	-0,54	-0,54	-0,14	-0,21	0,22	0,22	0,26
1,2	1,44	-0,10	-0,12	0,28	-0,30	0,13	0,16	0,37
1,4	1,96	0,42	0,59	0,99	-0,41	0,02	0,03	0,99
1,6	2,56	1,02	1,63	2,03	-0,54	-0,11	-0,18	2,04
1,8	3,24	1,70	3,06	3,46	-0,68	-0,25	-0,45	3,49
2,8	4,50	2,46	4,92	5,32	-0,84	-0,41	-0,82	5,39
0,9	0,81	-0,73	-0,59	-0,19	-0,17	0,26	0,23	0,30

Но можно поступить и иначе: для $z=iy$ нетрудно найти значения $u''=a+bi$ и по ним построить график кривой $R(y)$, являющейся сечением плоскостью ROY поверхности $R=\Psi(x, y)$. Мы имеем:



Черт. 12.

$$\begin{aligned}
 a &= y^4 - 1,54y^2 + 0,40 = \\
 &= (y^2 - 1,54)y^2 + 0,40, \\
 b &= -0,21y^3 + 0,43y = \\
 &= (-0,21y^2 + 0,43)y.
 \end{aligned}$$

Вычисление R дано в табл. XIV, а график кривой $R(y)$ дан на черт. 12. Из графика видно, что низшая точка поверхности $R=\Psi(x, y)$ на мнимой оси лежит при $y=0,55$. Отсюда и следует начинать вычисление. В нашем примере это не играет особенной роли, в случае же, когда модули корней разнятся очень сильно от среднего, такое построение экономит много труда.

Начинаем решение ур-ния (68), представляя u и u' в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= [z + 0,2139]z + 1,5437]z + 0,4328]z + 0,3958, \\
 u' &= [4 \cdot z + 0,6417]z + 3,0874]z + 0,4328.
 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Вычисления даны в табл. XV, XVI и XVII. После двух циклов, показывающих быстрое приближение к корню, производим отделение с уточнением, беря делителем получаемый из корней

$$z = 0,1865 \pm 0,5205i$$

трехцен

$$z^2 + 0,373z + 0,305.$$

Таблица XV

	z	$+0,2139) z$		$+1,5437) z$		$+0,4328) z$		$+0,3958 = u$	R
I	0	0,21	0,55	1,24	0,12	0,36	0,68	0,03	0,20
	0,21	0	0,55	0	0,55	0	0,55		
		0	0	0	0	0	0		
II		-0,30	0,12	-0,07	0,68	-0,37	0,20		
		1,54		0,43		0,40			
		0,034	0,530	1,257	-0,077	0,248	0,680	-0,009	0,013
	0,214	-0,18	0,53	-0,18	0,53	-0,18	0,53		
		-0,006	-0,095	-0,226	0,014	-0,045	-0,122		
		-0,281	0,018	0,041	0,666	-0,360	0,131		
		1,544		0,433		0,396			

Таблица XVI

	$z \cdot 4$		$+0,6417)z$		$+3,0874)z$		$+0,4328 = u'$	
I	0	0,55	0,64 0	2,20 0,55	1,98 0	0,35 0,55	0,24	1,09
	0	2,20	0	0	0	0		
	0,64		-1,21	0,35	-0,19	1,09		
	-0,18	0,53	3,09		0,43			
II			-0,08	2,12	1,98	-0,42	0,29	1,13
			-0,18	0,53	-0,18	0,53		
			0,01	-0,38	-0,36	0,08		
	-0,72	2,12	-1,12	-0,04	0,22	1,05		
III	0,64		3,09		0,43			

Таблица XVII

	$\frac{u}{u'}$	$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & \vdots \\ & \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & \diagdown \\ & \diagup \end{matrix}$	$\begin{matrix} c^2 \\ d^2 \\ -(c^2 + d^2) \end{matrix}$	c	d	p
I	0,03	0,20	0,01	0,05	0,06			
			0,22	-0,03	1,19			
	0,24	1,09	0,23	0,02	-1,25	-0,18	-0,02	0,18
II	-0,009	0,009	-0,0026	0,0026	0,08			
			0,0102	0,0102	1,28			
	0,29	1,13	0,0076	0,0128	-1,36	-0,0065	-0,0095	0,011

Вычисление дано в табл. XVIII. Оно приводит сразу же к результату, так как p и q весьма малы.

Итак, имеем:

$$z^6 + 4,2240z^5 + 6,5071z^4 + 7,5013z^3 + 8,4691z^2 + 3,3641z + 1,6232 = \\ = (z^2 + 4,0101z + 4,1057)(z^2 - 0,1569z + 1,2966)(z^2 + 0,3708z + 0,3053).$$

Решим еще одно уравнение, интересное тем, что оно является образчиком уравнения, не решаемого способом Грэффе.

$$u = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

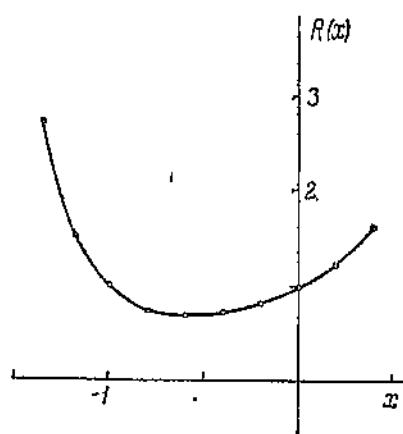
Рассчитаем и построим графики $R(x)$ и $R(y)$ (см. табл. XIX и XX и черт. 13 и 14). Они не обнаруживают наличия резких минимумов $R(x)$ и $R(y)$, поэтому мы можем начать от $z_1 = i$. Вычисления даны

Таблица XIX

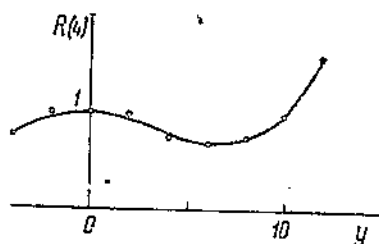
x	$+1)$	$-x$	$+1)$	$-x$	$+1)$	$-x$	$+1 = R(x)$
-1,4	-0,4	0,6	1,6	-2,2	-1,2	1,7	2,7
-1,2	-0,2	0,2	1,2	-1,4	-0,4	0,5	1,5
-1,0	0	0	1,0	-1,0	0	0	1,0
-0,8	0,2	-0,2	0,8	-0,6	0,4	-0,3	0,7
-0,6	0,4	-0,2	0,8	-0,5	0,5	-0,3	0,7
-0,4	0,6	-0,2	0,8	-0,3	0,7	-0,3	0,7
-0,2	0,8	-0,2	0,8	-0,2	0,8	-0,2	0,8
0							1,0
0,2	1,2	0,2	1,2	0,2	1,2	0,2	1,2
0,4	1,4	0,6	1,6	0,6	1,6	0,6	1,6

в табл. XXI, XXII и XXIII. Взято три приближения, после чего произведено по полученным значениям

$$z = 0,305 \pm 0,945i$$



Черт. 13.



Черт. 14.

отделение трехчлена (см. табл. XXIV и XXV)

$$z^2 + (-0,610 + p)z + (0,986 + q),$$

дающее в результате

$$\begin{aligned} & z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \\ & = (z^2 - 0,61804z + 1,00000)(z^2 + 1,61804z + 1,00000). \end{aligned}$$

Таблица XX

y	y^2	$-1)$	y^2	$+1 = a$	$-y^2$	$+1)$	$y = b$	$R(y)$
0				1,0			0	1,0
0,2	0,04	-1,0	0	1,0	-0	1,0	0,2	1,0
0,4	0,16	-0,8	-0,3	0,7	-0,2	0,8	0,3	0,75
0,6	0,36	-0,6	-0,4	0,6	-0,4	0,6	0,4	0,7
0,8	0,64	-0,4	-0,3	0,7	-0,6	0,4	0,3	0,75
1,0	1,00	0	0	1,0	-1,0	0,0	0,0	1,0
1,2	1,44	0,4	0,5	1,5	-1,4	-0,4	-0,5	1,6

Таблица XXI

	z		$+1)z$		$+1)z$		$-1)z$		$+1=u$		
I	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
	1	0	0	1	0	1	0	1			
II			0	0	0	0	0	0			
			-1	1	-1	0	0	0			
			1		1		1				
	0,25	0,75	1,25	0,75	0,75	1,15	0,35	0,85	0,45	0,45	0,65
	1,00		0,25	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75			
III			0,30	0,20	0,20	0,30	0,10	0,20			
			-0,55	0,95	-0,85	0,55	-0,65	0,25			
			1,00		1,00		1,00				
	0,25	1,00	1,25	1,00	0,31	1,50	-0,42	0,68	0,22	-0,25	0,8
	1,00		0,25	1	0,25	1	0,25	1			
			0,31	0,25	0,08	0,37	-0,10	0,17			
			-1,00	1,25	-1,50	0,31	-0,68	0,42			
			1,00		1,00		1,00				

Таблица XXII

	$z-4$		$+3)z$		$+2)z$		$+1=u'$	
I	0	1	3 0	4 1	-2 0	3 1	-2	-2
	0 3	4	0 -4 2	0 3	0 -3 1	0 -2		
II	0,25	0,75	4,00 0,25	3,00 0,75	0,75 0,25	3,75 0,75	-1,60	1,50
	1,00 3,00	3,00	1,00 -2,25 2,00	0,75 3,00	0,20 -2,80 1,00	0,95 0,55		
III	0,25	1,00	4,00 0,25	4,00 1	-1,00 0,25	5,00 1	-4,25	0,25
	1,00 3,00	4,00	1,00 -4,00 2,00	1,00 4,00	-0,25 -5,00 1,00	1,25 -1,00		

Таблица XXIII

	$\frac{u}{u'}$	$\begin{matrix} a & b \\ \cdot & \cdot \\ c & d \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot \end{matrix}$	$\begin{matrix} c^2 \\ d^2 \\ -(c^2 + d^2) \end{matrix}$	ε	ρ	
I	1	0	-2 0	0 2	4 4	0,25	-0,25	0,35
	-2	-2	-2 0	2 0	-8 0			
II	0,45	0,45	-0,70 0,65	-0,70 -0,65	2,55 2,25	0	0,25	0,25
	-1,60	1,50	-0,05 -0,93	-1,35 1,06	-4,80 18,1			
III	0,22	-0,25	-0,06 -0,99	-0,06 1,00	0,1 -18,2	0,055	-0,055	0,08
	-4,25	0,25						

ОПЕЧАТКА

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
43	гр. 14 табл. XXIV	$z^2 - (-0,610 + p)z + (0,986 + q)$	$z^2 + (-0,610 - p)z + (0,986 + q)$

Зак. 1637. П. В. Мелентьев.

Таблица XXV

z^4	z^3		z^2		z^1		z^0		$z^3 + (-0,61820 + p)z + (1,00010 + q)$
	p	q	p	q	p	q	p	q	
1			1		1		1		z^3
-1	0,61820	-1	-1,00010	-1					$+ (1,61820 - p)z$ (1,61804)
	1,61820	-1	-0,00010	-1					$+ (1,00027 - 2,24p - q)$ (1,00000)
	-1,61820	1	1,00037	-1,62	-1,61836	-1,62	-1,00037	-1,00	
				-0,62		1,00		2,24	
			1,00027	-2,24	-0,61836	1,00	-1,00037	1,00	
			-1,00027	2,24	0,61837	-1,00			
						-1,38	-0,62		
					0,00001	-1,38	-0,00037	0	
					$p = 0,000165$				
					$q = -0,000102$				
					$2,24p - 2,24q = -0,00001$				
					$2,24p = 0,00037$				

§ 7. Мы рассмотрели несколько примеров, на которых применили различные приемы решения; повторим их конспективно:

Дано уравнение

$$u = f(z) = z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_k z^k + \dots + A_1 z + A_0 = 0. \quad (70)$$

Сперва определяем все вещественные корни, для чего по схеме (30) вычисляем и строим по точкам график кривой $u = f(x)$; первые приближения находим на глаз, а затем уточняем по Ньютону или по способу ложного положения. Затем рассматриваем уравнение, содержащее лишь остающиеся комплексные корни.

Первое приближение берем либо из $z_1 = A_0^{\frac{1}{n}}$, либо рассматривая графики $R(x)$ и $R(y)$ сечения поверхности $R = \Psi(x, y) = |u|$ плоскостями $y=0$ и $x=0$, и в случае наличия на них резких минимумов беря за начало на оси OY ординату минимума — $z_1 = y_m i$, при минимуме же на оси OX — начиная от точки

$$z_1 = x_m + i \sqrt{\frac{2u(x_m)}{u''(x_m)}}.$$

Вычисления ведутся, как показано в табл. V, VI и VII; когда поправки становятся настолько малыми, что квадрат их — порядка единиц последнего знака вычисленных величин, то отделяют корни, как показано в табл. XII и XIII. Таким образом отделяют пару корней за парой.

Самое существенное условие при таком последовательном отделении корней — это брать сначала минимальное количество значущих цифр, пока значения u , приближаясь к нулю, не потребуют уточнения. Практически уже при наличии 2—3 точных знаков корня можно переходить к делению на трехчлен

$$z^3 + (P + p)z + (Q + q),$$

так как, требуя весьма мало труда, по сравнению с каждой операцией по способу Ньютона, оно значительно быстрее приводит к цели.

Как совершенно очевидно, случаев невозможности решения уравнения (70) у нас быть не может, так как, идя по линии градиента поверхности $R(x, y)$, мы всегда придем к одному из корней уравнения вследствие стремления всех линий градиента к точкам, в которых $R=0$.

РЕШЕНИЕ ВЕКОВЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 8. При определении частоты малых колебаний материальных систем приходится решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. При отсутствии сил, поташающих колебания, система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} q_1'' &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1k}q_k; \\ q_2'' &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2k}q_k; \\ &\vdots \\ q_k'' &= a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + \dots + a_{kk}q_k. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При отыскивании частного решения системы (1) вида

$$q_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad q_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \dots \quad q_k = C_k e^{\lambda_k t}, \quad (2)$$

от системы (1) переходят к системе (3):

$$\left. \begin{aligned} C_1(a_{11}-\lambda^2) + C_2a_{12} + \dots + C_k a_{1k} &= 0; \\ C_1a_{21} + C_2(a_{22}-\lambda^2) + \dots + C_k a_{2k} &= 0; \\ . &. \\ C_1a_{k1} + C_2a_{k2} + \dots + C_k(a_{kk}-\lambda^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы было:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} (a_{11} - x) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & (a_{22} - x) & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - x) & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & (a_{kk} - x) \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

the $x = \lambda^2$.

Уравнение $\Delta(x) = 0$ названо вековым, так как оно встречается при вычислении "вековых" неравенств в движении планет.

Раскрытие определителя (4) приводит к уравнению k -ой степени относительно x , решаемому обычным путем. Но это раскрытие определителя является весьма трудоемкой операцией, упростить которую весьма желательно.

Ввиду того, что изложение применяющихся для этого методов очень длительно, отсылаю интересующихся к работе акад. А. Н. Крылова,¹

¹ Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем (изд. Академии наук СССР, Ленинград, 1932).

где описаны методы Лагранжа, Лапласа, Леверрье, Якоби и самого А. Н. Крылова. По этой работе и изложено начало данной главы.

§ 9. Здесь я приведу лишь более простой метод решения векового ур-ния, основанный на том, что составлением линейных комбинаций из различных строк определителя можно понижать его порядок таким образом, что все элементы, кроме элементов правого столбца, будут либо числами, либо двучленами первой степени относительно x , в крайнем же правом столбце будут стоять полиномы степени не выше $(k+1-s)$, где s — пониженный порядок определителя.

Предварительно условимся об упрощенной записи. Пусть дан определитель k -го порядка, каждый элемент которого, соответствующий m -ой строке и n -му столбцу, является полиномом s -ой степени относительно x :

$$P_{m,n} = a_{m,n} + b_{m,n}x + c_{m,n}x^2 + \dots + t_{m,n}x^s, \quad (5)$$

Будем условно записывать в данном месте не весь полином, а лишь показатель степени s . Таким образом, видя условную запись

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \quad (6)$$

(здесь индекс s напоминает о символичности записи, а индекс k о порядке определителя), мы полагаем стоящим в месте, соответствующем например второй строке и первому столбцу, полином

$$a_{2,1} + b_{2,1}x + c_{2,1}x^2 + d_{2,1}x^3 \text{ и т. п.} \quad (7)$$

Представляя таким образом определитель (4), мы получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} k \\ s \end{matrix} = 0. \quad (8)$$

Как известно, от замены строки определителя линейной комбинацией из нескольких его строк величина определителя не меняется.

Первые из комбинаций составим так, чтобы для всех элементов первого столбца (кроме последнего места) получить нули, которые мы будем обозначать не знаком 0, уже использованным символически, а буквой N (от латинского — nihil). Для этого, обозначая m -ую строку условно буквой $[m]$ в прямых скобках (или соответствующей цифрой), заменим строки комбинациями. При этом строку преобразуемого опре-

Это приводит к определителю вида (13)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{k-1}^s = 0. \quad (13)$$

Преобразования (9) и (12) составляют полный цикл, понижающий порядок определителя на единицу и приводящий определитель к виду, допускающему дальнейшее понижение порядка.

Дальнейшие преобразования повторяют эти же операции, т. е. в определителе (13) строки:

$$\left. \begin{aligned} 1\text{-ю} \text{ заменим комбинацией } [1] - \left(\frac{a_{1,1}}{a'_{k-1,1}} + \frac{b_{1,1}}{a'_{k-1,1}} \right) [k-1] &= [1'], \\ 2\text{-ю} \text{ " " } [2] - \frac{a_{2,1}}{a'_{k-1,1}} [k-1] &= [2'] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и т. д., после чего приходим к определителю (15)

$$\begin{vmatrix} N & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ N & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ N & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ N & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{k-1}^s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{k-2}^s = 0. \quad (15)$$

Производя над (15) преобразования (12), приводим его к виду

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{vmatrix}_{k-2}^s = 0 \quad (16)$$

и т. д.

В конечном итоге мы приходим к

$$\begin{vmatrix} 1 & (k-1) \\ 0 & (k-1) \end{vmatrix}_2^s = 0 \quad (17)$$

№	Множитель		x		x	
1		— 11,811654	— 1	0,287865	— 1	0,058717
2		1,870086		— 5,509882		0,008814
3		0,269851		0,006235		— 17,596207
4		4,308033		0,049099		0,229328
1		— 11,811654	— 1	0,287865		0,058717
4	2,7417743	11,811654		0,134618		0,628766
	0,2821245 x		1		0,0113971	
5			—	0,422483	0,0113971	0,687477
2		1,870086		— 5,509882	— 1	0,008814
4	— 0,4340928	— 1,870086		— 0,021314		— 0,099549
6				— 5,531196	— 1	— 0,090736
3		0,269851		0,006235		— 17,596207
4	— 0,06263903	— 0,269851		— 0,003076		— 0,014363
7				0,003159		— 17,610577
5				0,422483	0,0113971	0,687477
6	0,0113971			— 0,063040	— 0,0113971	— 0,001059
8				0,359443		0,686443
8				0,359443		0,686443
7	0,0532322			0,000168		— 0,937449
9				0,359611		— 0,251008
5				0,422483	0,0113971	0,687477
9	— 1,174833			— 0,422483		0,294833
	— 0,0316929 x				— 0,0113971	
10						0,982336
8				0,359443		0,686443
9	— 0,9995328			— 0,359443		0,250833
11						0,937333
10						0,982336
11	— 1,149442					— 1,077442
12						— 0,095099
10						0,982336
12	— 10,33614					— 0,982336
	— 0,643792 x					
13						
	211,1406					
						Автор
						Левенко
						А. И. Кры
						Л. О.

Таблица XXVI

x		x	x^2	x^3	x^4
— 1	5,711900 0,422908 1,397369 — 12,970687	— 1			
0,0532322	5,711900 — 35,562696	— 2,741774	— 0,2321245		
0,0532322	— 29,850796	— 3,010814 — 5,752588	— 0,2321245		
	0,422908 5,630482 6,053390	0,4340928 0,4340928			
— 1	1,397369				
— 1	0,812471 2,209840	0,06263903 0,06263903			
0,0532322	— 29,850796	— 5,752588	— 0,2321245		
0,0532322	0,068991 — 29,781805	0,004947 — 5,747641	— 0,2321245		
0,0532322	— 29,781805	— 5,747641	— 0,2321245		
0,0532322	0,117635 — 29,664170	0,003334 — 5,744307	— 0,2321245		
0,0532322	— 29,850796	— 5,752588	— 0,2321245		
0,0079551	34,850446	6,748601	0,2727075		
0,0611873	4,999650	0,940144 1,936157	0,1820637 0,2226367	0,00735670 0,00735670	
0,0532322	— 29,781805	— 5,747641	— 0,2321245		
0,0532322	29,650311 — 0,131494	5,741623 — 0,006018	0,2320160 — 0,0001085		
0,0611873	4,999650	1,936157	0,2226367	0,00735670	
0,0611873	0,151145 5,150795	0,006857 1,943014	0,0001236 0,2227603	0,00735670	
0,0611873	4,999650	1,936157	0,2226367	0,00735670	
0,0611873	53,23934	20,08326	2,302482	0,07603988	
		3,316041	1,250897	0,1434113	0,00473618
	58,23899	25,33546	3,776016	0,2268079	0,00473618
	12296,62	5849,344	797,2703	47,88836	1,000000
Δ	0,66	0,113	0,0086	0,00007	
Δ	12,296555	5849,457	797,2789	47,888430	1,0000000
	0,45	0,543	0,0389	0,00003	
	12297	5350,0	797,24	47,8884	1,0000

и к

$$\begin{vmatrix} N & k \\ 0 & (k-1) \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}_s = 0, \quad (18)$$

т. е. получаем уравнение k -ой степени относительно x :

$$a + bx + cx^2 + \dots + tx^k = 0, \quad (19)$$

решение которого и дает нам все значения x .Приведем последовательности преобразуемых определителей для $k=3, 4, 5$, т. е. для наиболее интересных практически случаев $k=3$.

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} N & 1 & 2 \\ N & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_s; \\ & \begin{vmatrix} N & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}_s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

 $k=4$.

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} N & 1 & 1 & 2 \\ N & 1 & 1 & 1 \\ N & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_s; \\ & \begin{vmatrix} N & 1 & 3 \\ N & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} N & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}_s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

 $k=5$.

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} N & 1 & 1 & 1 & 2 \\ N & 1 & 1 & 1 & 1 \\ N & 0 & 1 & 1 & 1 \\ N & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_s; \\ & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} N & 1 & 1 & 3 \\ N & 1 & 1 & 2 \\ N & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}_s; \\ & \begin{vmatrix} N & 1 & 4 \\ N & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}_s; \begin{vmatrix} N & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}_s = \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix}_s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Такой ход преобразований сводит вычислительную работу по раскрытию определителя к минимуму.

В табл. XXVI дан пример решения векового уравнения 4-го порядка. В первом столбце указаны номера строк, соединяемых в комбинации. Во втором — множители, на которые множатся элементы данной строки. В результате получаем уравнение

$$x^4 + 47,88836 x^3 + 797,2703 x^2 + 5349,344 x + 12296,62 = 0. \quad (23)$$

Это же уравнение решено было А. Н. Крыловым и Леверрье. Сравнение, данное внизу таблицы, показывает, что в пределах точности вычислений результаты вполне совпадают (числа в основных строках 1—4 даны с количеством знаков от 5 до 8; следовательно, при сравнении вряд ли стоит идти дальше 6 знаков).

§ 10. Рассмотрим для общности и тот мало вероятный, но все же возможный случай, когда получение линейной комбинации невозможно из-за того, что величина элемента, стоящего в знаменателе, равна нулю. Пусть при этом определитель k -го порядка уже доведен до порядка $(k-r+1)$ -го и приведен к виду (13):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r \end{vmatrix}_{k-r+1} = 0. \quad (24)$$

Пусть нулю равен элемент $((k-r+1), 1)$; тогда достаточно поменять местами столбцы первый и второй, получив

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \\ 0 & N & 0 & 0 & \dots & 0 & r \end{vmatrix}_{k-r+1} = 0, \quad (25)$$

и вторую строку заменить комбинацией из первой и второй строк

$$[2'] = [1] - \frac{b_{11}}{b_{21}} [2].$$

Это приводит нас к тому же виду [13], но избавляет от нуля.

Если нулю равен один из коэффициентов $b_{h, h-1}$, тогда в (12) соответствующая строка $[h']$ просто берется равной $[h]$. Так же элементарно решаются и прочие могущие возникнуть вопросы — случаи нескольких нулей, стоящих подряд, и т. д.

Таблица XXVII

№	Множи- тель		x		x		x	x^2	x^3
1		2	-1	1		1			
2		1		2	-1	1			
3		1		1		2	-1		
1		2	-1	1		1	2		
3	-2	-2		-2		-4			
4	x		1		1	-3	2	-1	
5				-1	1		4	-1	
2		1		2	-1	1			
3	-1	-1		-1		-2	1		
5				1	-1	-1	1		
4				-1	1	-3	4	-1	
5	1			1	-1	-1	1		
6						-4	5	-1	

Самое главное здесь то, что для случая кратных корней ур-ния (19), методика вычислений остается неизменной, так что не может произойти той неприятности, что расчет к самому концу приведет к тождеству

$$0=0$$

и его придется начинать сначала иным путем.

Возьмем пример, разработанный в той же книге акад. А. Н. Крылова (26):

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

(см. табл. XXVII). Строки 4 и 5 дают определитель:

$$\begin{vmatrix} (-1+x) & (-3+4x-x^2) \\ (1-x) & (-1+x) \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

приводящий к строке 6-й

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

с корнями ур-ния, равными $+1$ и $+4$.

При этом, как видно из (27), выпал третий корень, определяемый множителем $(1-x)$, т. е. также равный $+1$.

2-й цикл преобразования определителя (36):

$$\left. \begin{array}{ll} [k, 1-2, 2] \text{ — создавая строку} & [1'], \\ [1', 2-3, 2] \text{ — } & [2'], \\ [2', 3-4, 2] \text{ — } & [3'], \\ \dots & \dots \\ [m', m+1-m+2, 2] \text{ — } & [(m+1)'], \\ \dots & \dots \\ [(k-3)', k-2-k-1, 2] \text{ — } & [(k-2)'], \\ [(k-2)', k-1-1, 1] \text{ — } & [(k-1)'], \\ [(k-1)', k-2, 1] \text{ — } & [k']. \end{array} \right\} \quad (37)$$

После этих преобразований получаем:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{array} \right| \quad (38)$$

$k \qquad \qquad \qquad s$

Дальнейшие преобразования последовательно дают

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 \end{array} \right| \quad (39)$$

$k \qquad \qquad \qquad s$

и т. д., все время сужая треугольную зону полиномов 2-й степени (2) и расширяя зону численных величин (0), пока не придем к окончательному виду (34). Определитель (34) развивается путем преобразований (9) и (12), давая в итоге уравнение 2-й степени относительно λ .

В табл. XXVIII дан пример вычислений для случая сил, погашающих колебания, при определителе 4-го порядка, дающем окончательное уравнение 8-й степени.

(Ввиду того, что пример будет искусственный и вычисления даны лишь для иллюстрации хода их, на точность не обращалось внимания,

№	Множи- тель		1	2		1	2		1
1 2 3 4		10 3 5 8	-2 1 -3 2	-1	5 8 4 5	1 -1 1 -2	-1	8 1 5 2	2 -1 1 1
1 4	0,5	10	-2 4	-1 1	5	1 2,5	-1	8	2 1
5 2	-1	10 -3	2 -1		5 -8	3,5 1	-1 1	8 -1	3 1
6 3	0,5	7 2,5	1 -1,5		-3 2	4,5 0,5		7 2,5	4 0,5
7 4	0,25	9,5 2	-0,5 0,5		-1 1,25	5 -0,5		9,5 0,5	4,5 0,25
8		11,5			0,25	4,5		10,0	4,75
5 8	0,2222	10	2 2,556		5	3,5 0,056	-1 1	8	3 2,222
9 6	-3,112	10 -21,784	4,556 -3,112		5 9,336	3,556 -14,004		8 21,784	5,322 -12,448
10 7	2,888	-11,784 27,436	1,444 -1,444		14,336 -2,888	-10,448 14,440		-13,784 27,436	-7,226 12,906
11 8	-0,8871	15,652 -10,202			11,448 -0,222	3,992 -3,992		13,652 -8,671	5,770 -4,214
12		5,450			11,226			4,781	1,556
9 12		10	4,556 -5,450		5	3,556 -11,226		8	5,222 -4,781
13 10	0,6191	10 -7,295	-0,894 0,894		5 8,875	-7,670 -6,468		8 -8,534	0,441 -4,474
14 11	3,542	2,705 55,439			13,875 40,549	-14,138 14,138		-0,534 48,355	-4,033 20,457
15 12	-10,542	58,144 -57,454			54,424 -118,34			47,821 -50,401	16,404 -16,404
16		0,690			63,92			-2,580	
13 16	-14,492 -1,296	10 -10,000	-0,694 0,894		5 -526,33	-7,670 82,840		8 37,389	0,441 -3,334
17					-921,33	75,170		45,369	-2,903
14 16	-3,920	2,705 -2,765			13,875 -250,566	-14,138		-0,534 10,114	-4,033
18					-236,69	-14,138		9,580	-4,033
5 16	-84,267	58,144 -58,144			54,424 -5 398,3			47,821 217,409	16,404

Таблица XXVIII

2		1	2	3	4	5	6	7	8
1	6 12 9 7	— 1 — 3 — 4 — 1	— 1						
0,5	6	— 1 3,5	— 0,5	— 0,5					
0,5	6 — 12	2,5 3	— 0,5	— 0,5					
0,5 0,5	— 6 4,5	5,5 — 2	— 0,5	— 0,5					
	— 1,5 1,75	3,5 — 0,25	— 0,5 — 0,25	— 0,5					
	0,25	3,25	— 0,75	— 0,5					
0,5 1,056	6	2,5 0,056	— 0,5 0,722	— 0,5 — 0,167	— 0,111				
1,556 1,556	6 18,572	2,556 — 17,116	0,222 1,556	— 0,667 1,556	— 0,111				
	24,572 — 4,332	— 14,550 10,108	1,778 — 1,444	0,889 — 1,444	— 0,111				
	20,340 — 0,222	— 4,452 — 2,853	0,334 0,665	— 0,555 0,444	— 0,111				
	21,118	— 7,335	0,999	— 0,111	— 0,111				
1,556 1,556	6 1	2,556 — 21,118	0,222 7,335	— 0,667 — 0,999	— 0,111 0,111	0,111			
	6 15,274	— 18,562 — 9,014	7,557 1,101	— 1,666 0,550	0 — 0,069	0,111			
	21,274 75,586	— 27,576 — 15,789	8,658 1,183	— 1,116 — 1,966	— 0,069 — 0,893	0,111			
	96,860 — 222,63	— 43,345 77,326	9,341 — 10,332	— 3,082 1,170	— 0,462 1,170	0,111			
	125,77	23,981	— 0,691	— 1,912	0,708	0,111			
	6 — 1 822,6	— 18,562 — 492,45 162,99	7,557 10,014 44,039	— 1,666 27,709 0,896	0 — 10,250 — 2,478	0,111 — 1,609 0,918	0,144		
	— 1 816,6	— 348,02	61,610	25,147	— 12,738	— 0,691	0,144		
	21,274 — 493,00	— 27,576 — 133,21	8,658 2,709	— 1,116 7,495	— 0,069 — 2,775	0,111 — 0,436			
	— 471,73	— 160,78	11,367	6,379	— 2,844	— 0,324			
	96,860 — 10 598	— 43,345 — 2 863,5	9,841 58,228	— 3,082 161,12	— 0,462 — 59,661	0,111 — 9,354			

№	Множи- тель		1	2		1	2		1
19					- 5 331,9			265,23	16,404
17 18	5,317				- 921,33 - 1 258,5	75,170 75,170		45,389 50,937	- 2,903 - 21,443
20 19	1,4841				- 2 179,8 - 7 913,1			96,326 393,63	- 24,346 24,346
21					-10 093			489,96	
17 21	- 0,09128 0,007448				- 921,33 921,33	75,170 - 75,170		45,389 - 44,723	- 2,903 3,649
22								0,666	0,746
20 21	- 0,2160				- 2 179,8 2 179,8			96,326 - 105,83	- 24,346
23 22	32,63							- 9,50 21,73	- 24,346 24,346
24								12,23	
22 24	- 0,05446 - 0,06100							0,666 - 0,666	0,746 - 0,746
25									

т. е. в действительности члены 0-й, 5-й, 6-й, 7-й и 8-й степени λ следовало бы вычислять значительно точнее).

Если бы мы решали эту задачу преобразованием определителя из k -го порядка в $2k$ -й, то вычисление 7 миноров 7-го порядка доставило бы нам во много раз больше вычислений, не считая даже первоначальных преобразований.

§ 12. Необходимо отметить еще одну особенность изложенного метода. В цитированной работе акад. А. Н. Крылова метод последнего состоит в том, что преобразованием системы дифференциальных уравнений получают вместо определителя (4) определитель вида:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} (a_{11} - x) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ (a_{21} - x^2) & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ (a_{31} - x^3) & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{k1} - x^k) & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

При этом А. Н. Крылов замечает, что очевидно определитель (4) можно привести к виду (40) и непосредственными алгебраическими преобразованиями, но неизвестно, как это сделать. Наш метод дает эту возможность.

Продолжение табл. XXVIII

	1	2	3	4	5	6	7	8
- 10 501	- 2 906,8	68,069	158,04	- 60,123	- 9,243			
- 1 816,6 - 2 508,2	- 348,02 - 854,88	61,610 60,438	25,147 33,917	- 12,738 - 15,122	- 0,691 - 1,723	0,144		
- 4 324,8 - 15 585	- 1 202,9 - 4 314,0	122,05 101,02	59,064 234,55	- 27,860 - 89,229	- 2,414 - 13,718	0,144		
- 19 910	- 5 516,9	223,07	293,61	- 117,09	- 16,132	0,144		
- 1 816,61 1 817,4	- 348,02 503,58 - 148,29	61,610 - 20,362 - 41,090	25,147 - 26,801 1,661	- 12,738 10,688 2,167	- 0,691 1,473 - 0,872	0,144 0,013 - 0,120		
0,8	7,27	0,158	0,077	0,137	- 0,090	0,011	0,001	
- 4 324,8 4 300,6	- 1 202,9 1 191,7	122,05 - 48,18	59,064 - 63,420	- 27,860 25,291	- 2,414 3,485	0,144 - 0,031		
- 24,2 26	- 11,2 2,37	73,87 5,16	- 4,356 0,23	2,569 4,47	1,071 - 2,94	0,113 0,36	0,03	
2	2,26	79,13	- 4,13	1,90	- 1,87	0,47	0,03	
0,8 - 0,1	7,27 - 12,31 - 0,13	0,158 - 4,309 - 13,78	0,007 0,224 - 4,927	0,137 - 0,193 2,519	- 0,090 0,101 - 0,116	0,011 - 0,025 0,114	0,001 - 0,001 - 0,029	- 0,002
0,7	- 5,17	- 17,93	- 4,60	2,55	- 0,105	0,100	- 0,029	- 0,002

Имея определитель (8), мы можем привести его, сперва взяв комбинации строк:

$$\left. \begin{aligned}
 [k, 1-1, 1] &= [1'], \\
 [1', 2-2, 1] &= [2'], \\
 [2', 3-3, 1] &= [3'], \\
 &\dots \\
 [(m-1)', m-m, 1] &= [m'], \\
 [(k-2)', k-1-k-1, 1] &= [(k-1)'],
 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

к виду:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{vmatrix} \quad (42)$$

k

s

уменьшать треугольную зону полиномов первой степени, в итоге приходим к определителю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (k-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{k \\ s}} = 0.$$

Сделав теперь последний цикл преобразований:

$$[1'] = [k, 1-k, 1] + [k-1, 1-k, 2] + \dots + [3, 1-k, k-2] + \\ + [2, 1-k, k-1]$$

$$[2'] = [k, 2-k, 1] + [k-1, 2-k, 2] + \dots + [4, 2-k, k-3] + \\ + [3, 2-k, k-2], \text{ и т. д.,}$$

получаем определитель (40), закончив этим интересующее нас преобразование.

Например для определителя 4-го порядка преобразования будут иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_s$$

последний из определителей приводим окончательно к нужному виду

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 13. Большинство из применяемых в настоящее время методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений основано на использовании нескольких разностей от вычисляемой производной.

Все они могут быть получены из интерполяционной формулы Ньютона, которая для обозначений, соответствующих схеме I:

t	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	x_0	y_0				
1	$x_0 + h$	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
2	$x_0 + 2h$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
3	$x_0 + 3h$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
4	$x_0 + 4h$	y_4	Δy_3			

имеет вид:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \quad (1)$$

Для наших дальнейших целей эти обозначения неудобны, поэтому мы будем полагать не

$$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m,$$

а

$$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_m - \Delta^{k-1} y_{m-1}.$$

При этом разности с одинаковым индексом при y расположатся не по косой, наклонной вниз строке, а по косой, наклонной вверх, согласно схеме II:

	t	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
II	-4	$x_0 - 4h$	y_{-4}				
	-3	$x_0 - 3h$	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$		
	-2	$x_0 - 2h$	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	
	-1	$x_0 - h$	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
	0	x_0	y_0	Δy_0			

При этих обозначениях формула Ньютона примет вид (2)

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \quad (2)$$

и при положительном t будет служить уже не для интерполяции, а для экстраполяции, что для нас особенно важно.

Пусть уравнение, которое нам нужно численно интегрировать, есть

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

или, обозначая

$$hy' = \eta, \quad \eta = hf(x, y) = \varphi(x, y). \quad (4)$$

Составим схему III, причем для упрощения записи вместо $\Delta^k \eta_m$ будем писать просто Δ_m^k :

	t	x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
III	-4	$x_0 - 4h$	y_{-4}		η_{-4}				
	-3	$x_0 - 3h$	y_{-3}	Δy_{-3}	η_{-3}	Δ_{-3}	Δ_{-3}^2	Δ_{-3}^3	
	-2	$x_0 - 2h$	y_{-2}	Δy_{-2}	η_{-2}	Δ_{-2}	Δ_{-2}^2	Δ_{-2}^3	
	-1	$x_0 - h$	y_{-1}	Δy_{-1}	η_{-1}	Δ_{-1}	Δ_{-1}^2	Δ_{-1}^3	Δ_{-1}^4
	0	x_0	y_0	Δy_0	η_0	Δ_0	Δ_0^2	Δ_0^3	
	1	$x_0 + h$	y_1	Δy_1					

Для того чтобы получить приращение y за интервал от $x = x_0$ до $x = x_1 = x_0 + h$, мы должны вычислить интеграл

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} y' dx = \int_{\frac{x_0}{h}}^{\frac{x_1}{h}} hy' d \frac{x}{h} = \int_0^1 \eta dt \quad (5)$$

(так как $t = \frac{x - x_0}{h}$).

Применяя формулу Ньютона, получим

$$\Delta y_1 = \int_0^1 \left[\eta_0 + \frac{t}{1!} \Delta_0 + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta_0^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta_0^3 + \dots \right] dt, \quad (6)$$

что, после почленного интегрирования с раскрытием малых скобок, дает

$$\Delta y_1 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta_0 + \frac{5}{12} \Delta_0^2 + \frac{3}{8} \Delta_0^3 + \frac{251}{720} \Delta_0^4 + \frac{95}{288} \Delta_0^5 + \frac{19087}{60480} \Delta_0^6 + \\ + \frac{5257}{17280} \Delta_0^7 + \frac{1070017}{3628800} \Delta_0^8 + \frac{2082753}{7257600} \Delta_0^9 + \dots \quad (7)$$

— ряд, служащий основой метода Адамса.

Теперь рассмотрим схему IV:

	t	x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
IV	-2	x_{-2}	y_{-2}		η_{-2}		Δ^2_{-1}		
	-1	x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	η_{-1}	Δ_{-1}	Δ^2_0	Δ^3_0	Δ^4_1
	0	x_0	y_0	Δy_0	η_0	Δ_0	Δ^2_1	Δ^3_1	
	1	x_1	y_1	Δy_1	η_1	Δ_1			

Выразим Δy_1 не через $\eta_0, \Delta_0, \Delta_0^2, \dots$, а через $\eta_1, \Delta_1, \Delta_1^2, \dots$.
Имея

$$\Delta_0^k = \Delta_1^k - \Delta_1^{k+1},$$

получим

$$\Delta y_1 = (\eta_1 - \Delta_1) + \frac{1}{2} (\Delta_1 - \Delta_1^2) + \frac{5}{12} (\Delta_1^2 - \Delta_1^3) + \dots = \\ = \eta_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{12} \Delta_1^2 - \frac{1}{24} \Delta_1^3 - \frac{19}{720} \Delta_1^4 - \frac{3}{160} \Delta_1^5 - \frac{863}{60480} \Delta_1^6 - \\ - \frac{275}{24192} \Delta_1^7 - \frac{33953}{3628800} \Delta_1^8 - \frac{57281}{7257600} \Delta_1^9 - \dots \quad (8)$$

— ряд Лапласа.

Аналогичными преобразованиями ряда Адамса мы можем подойти к схеме V:

	t	x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
V	-1	x_{-1}	y_{-1}		η_{-1}		Δ^2_0		Δ^4_1
	0	x_0	y_0	Δy_0	η_0	Δ_0	Δ^2_1	Δ^3_1	Δ^4_2
	1	x_1	y_1	Δy_1	η_1	Δ_1	Δ^2_2	Δ^3_2	Δ^4_3

и к ф-ле (9):

$$\Delta y_1 = \eta_1 - \frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{12} \Delta_2^2 + \frac{1}{24} \Delta_2^3 + \frac{11}{720} \Delta_3^4 - \frac{11}{1440} \Delta_3^5 - \\ - \frac{191}{60480} \Delta_4^6 + \frac{191}{120960} \Delta_4^7 + \frac{2497}{3628800} \Delta_5^8 - \frac{2497}{7257600} \Delta_5^9 + \dots \quad (9)$$

Введем дополнительное обозначение

$$\frac{1}{2}(\Delta_m^{2k} + \Delta_{m+1}^{2k}) = \Delta_{m, m+1}^{2k},$$

мы можем перейти к схеме VI:

t	x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
VI	-1	x_{-1}	y_{-1}		η_{-1}		Δ^3_0	Δ^4_1
			Δy_0	$\eta_{1,0}$	Δ_0	$\Delta^2_{0,1}$	Δ^3_1	$\Delta^4_{1,2}$
	0	x_0	y_0		η_0		Δ^3_1	Δ^4_2
			Δy_1	$\eta_{0,1}$	Δ_1	$\Delta^2_{1,2}$	Δ^3_2	$\Delta^4_{2,3}$
	1	x_1	y_1		η_1		Δ^3_2	Δ^4_3

и к ф-ле (10):

$$\Delta y_1 = \eta_{0,1} - \frac{1}{12} \Delta^3_{1,2} + \frac{11}{720} \Delta^4_{2,3} - \frac{191}{60480} \Delta^5_{3,4} + \\ + \frac{2497}{3628800} \Delta^6_{4,5} - \dots, \quad (10)$$

являющейся основой метода Коуэлла.

Из формул Адамса, Лапласа и Коуэлла практически удобно пользоваться лишь первой, так как для применения формул Лапласа и Коуэлла нужно знать значения $\eta_1, \eta_2, \dots$, которых мы иметь при вычислении, доведенном до $t=0$, не можем. Таким образом ф-лы (8) и (10) благодаря более быстрой сходимости рядов, чем у Адамса, являются хорошим контролем вычислений, сделанных по Адамсу, но самостоятельного применения в нашем вопросе иметь не должны.

Формула Адамса обладает лишь одним неудобством: нужно все время умножать значение разностей на $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}$ и т. д.; ввиду сложности этого действия, его нельзя делать в уме, а поэтому расчет становится медленным и кроме того влечет к ошибкам.

§ 14. Рассмотрим более простую вычислительную схему на базе схемы IV.

Обозначим $\Delta y_m + \Delta y_{m+1} = \Delta_{m, m+1} y$.

Мы имеем из ф-лы (8)

$$\Delta y_0 = \eta_0 - \frac{1}{2} \Delta_0 - \frac{1}{12} \Delta_0^2 - \frac{1}{24} \Delta_0^3 - \frac{19}{720} \Delta_0^4 - \dots,$$

а из ф-лы (7)

$$\Delta y_1 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta_0 + \frac{5}{12} \Delta_0^2 + \frac{3}{8} \Delta_0^3 + \frac{251}{720} \Delta_0^4 + \dots$$

Суммируя, получим:

$$\Delta y_0 + \Delta y_1 = y_1 - y_{-1} = \Delta_{0,1} y = 2\eta_0 + \frac{1}{3} \Delta_0^2 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 + \frac{29}{90} \Delta_0^4 + \\ + \frac{28}{90} \Delta_0^5 + \frac{18229}{63480} \Delta_0^6 + \frac{35424}{120960} \Delta_0^7 + \frac{1036364}{3628800} \Delta_0^8 + \\ + \frac{2025472}{7257600} \Delta_0^9 + \dots \quad (11)$$

Если ограничиться четырьмя разностями (больше никогда не приходится применять) и пренебречь ошибкой в $\frac{1}{90} \Delta_0^4$, то получится исключительно простая рабочая ф-ла (12)

$$\Delta_{0,1} y = 2\eta_0 + \frac{1}{3} (\Delta_0^2 + \Delta_0^3 + \Delta_0^4). \quad (12)$$

Чтобы избежать умножения на 2, нужно вычислить сразу не hy' , а $2hy'$ и разности именно этой функции. Тогда, обозначая

$$\eta = 2hy',$$

мы будем иметь рабочую ф-лу (13)

$$\Delta_{0,1} y = \eta_0 + \frac{1}{6} (\Delta_0^2 + \Delta_0^3 + \Delta_0^4). \quad (13)$$

При этом вычислительная схема будет иметь вид VII:

	t	x	y	Δy	$\eta = 2hy'$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$	Σ	$\frac{1}{6} \Sigma = \Sigma'$
VII	-1	x_{-1}	y_{-1}		η_{-1}		Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4		
	0	x_0	y_0	$\Delta_{0,1} y$	η_0	Δ_0				Σ_0	Σ'_0
	1	x_1									

Здесь добавлены столбцы Σ и Σ' , где

$$\Sigma = \Delta_0^2 + \Delta_0^3 + \Delta_0^4,$$

$$\Sigma' = \frac{1}{6} \Sigma,$$

откуда

$$\Delta_{0,1} y = \eta_0 + \Sigma'_0,$$

после чего получают

$$y_1 = y_{-1} + \Delta_{0,1} y.$$

Для проверки и здесь можно пользоваться разностями, идущими по горизонтали, причем ряд получается исключительно быстро сходящимся:

$$\Delta_{0,1} y = \eta_0 + \frac{1}{6} \Delta_1^2 - \frac{1}{180} \Delta_2^4 + \frac{1}{1512} \Delta_3^6 - \frac{23}{226800} \Delta_4^8 + \dots \quad (14)$$

В нем можно пренебречь, вследствие их малости, всеми членами после второго, оставив

$$\Delta_{0,1}y = \eta_0 + \frac{1}{6} \Delta_1^2.$$

Таким образом точная проверка будет даваться следующей же строкой расчета.

Для быстрой сверки удобно пользоваться схемой VIII:

VIII

t	x	y	Δy	$\eta = 2hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^{(3)}\eta$	$\Delta^{(3)}\eta$	$\Delta^{(4)}\eta$	Σ
-1	x_{-1}	y_{-1}								
0	x_0	y_0	$\Delta_{0,1}y$	η_0	Δ_0	Δ_0^2	$\Delta_0^{(2)}$	$\Delta_0^{(2)}$	$\Delta_0^{(4)}$	Σ_0
1	x_1									

Здесь

$$\Delta_0^{(2)} = \frac{1}{6} \Delta_0^2,$$

$$*\Delta_0^{(3)} = \Delta(\Delta_0^{(2)}) = \frac{1}{6} \Delta_0^3,$$

$$\Delta_0^{(4)} = \Delta(\Delta_0^{(3)}) = \frac{1}{6} \Delta_0^4,$$

$$\Sigma_0 = \Delta_0^{(2)} + \Delta_0^{(3)} + \Delta_0^{(4)} = \frac{1}{6} (\Delta_0^2 + \Delta_0^3 + \Delta_0^4),$$

$$\Delta_{0,1}y = \eta_0 + \Sigma_0,$$

а после получения следующей строки проверка производится по формуле

$$\Delta_{0,1}y = \eta_0 + \Delta_1^{(2)},$$

причем невязка сразу видна из сравнения величин Σ_0 и $\Delta_1^{(2)}$.

Начало расчета получается, как и обычно при работе по способу Адамса, либо рядом последовательных приближений, либо из разложения в ряд.

Рассмотрим обычный пример

$$y' = y;$$

$$\text{при } x=0, y=1$$

(т. е. $y = e^x$).

Взяв интервал $h=0,1$, получим

$$\eta = 0,2 y.$$

Имея в начале вычисления для любого k

$$y^{(k)} = 1,$$

вычисляем значения y при $x = -0,1, -0,2, -0,3$ и $0,4$, после чего получаем из соответствующих η нужные нам для начала расчета разности и идем дальше. В результате получаем расчет, данный в табл. XXIX.

Для большей точности расчет сделан до полуединицы последнего знака, обозначаемой точкой, стоящей справа сверху у последней цифры. Точное решение дает

$$y = 7,38905$$

$$(\text{при } x=2).$$

Итак, на 20 интервалах от округлений накопилась погрешность в 4 единицы последнего знака. Из них 2 единицы — по причине недоучета пятых разностей, а 2 единицы — только собственно от округлений при вычислении η и при делении на 6.

Сравнение $\Delta^{(2)}$ с Σ показывает, что невязки нигде не превышали единицы последнего знака, так что не стоило и переправлять. Сумма невязок дает $+2'$ единицы последнего знака, т. е. если бы мы их учли, то учли бы ту часть ошибки, которая произошла от недоучета пятых разностей. Однако потребная на эту работа не окупилась бы получаемым ничтожным уточнением.

§ 15. Возьмем еще пример из книги акад. А. Н. Крылова „Лекции о приближенных вычислениях“.

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

при чем при $x=0$, $y=0$.

Составим таблицу значений y для $0 \leq x \leq 1$. Начинать численное интегрирование мы можем не от $x=0$, так как тут высшие производные, начиная от y'' , бесконечны, а лишь, примерно, от $x=0,1$, вычислив спорные значения y по ряду, приводимому А. Н. Крыловым:

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{1715}x^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (15)$$

Получим для начала расчета величины

$x=0,100$	$y=0,03090$
0,125	0,04410
0,150	0,05904
0,175	0,07560
0,200	0,09367,

для которых вычислим значения

$$\eta = 2hy' = \frac{1}{20}(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

получим разности η , и пойдем дальше.

Дойдя до $x=0,3$ (см. табл. XXX), мы видим, что нами не используются не только четвертые, но даже и третьи разности, и, следовательно, интервал можно увеличить, перейдя от $h=0,025$ к $h=0,05$, беря заново

$$\eta = \frac{1}{10}(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

По новым значениям η для $x=0,1$; 0,15; 0,2; 0,25 и 0,3 получаем новые разности и идем дальше.

Ввиду того, что Σ , стоящая при $x=0,3$, оказалась отличной от полученного в следующей строке расчета значения $\Delta^{(2)}$, то соответствующие Δy и y переправлены (прежние, менее точные, значения заключены в скобки). Все остальные невязки настолько малы, что не требуют переправки.

Ввиду того, что окончательный результат интегрирования при x близком к 1 расходится с приведенным у акад. А. Н. Крылова, был произведен еще один расчет (табл. XXXI) с более точным вычислением η и удвоением интервала не при $x=0,3$, а при $x=0,4$,

x	y	Δy	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$\eta=2hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta(2)$	$\Delta(3)$	$\Delta(4)$	Σ
0,100	,03090		,3162	,1758	,2460						
0,125	,4410		,3536	,2100	,02818		— 24"	— 4			
0,150	,5904		,3873	,2430	,03151		— 18"	— 3	1		
0,175	,07560		,4183	,2750	,03466		— 15	— 2	0		
0,200	,09367	,03764	,4472	,3061	,03766		— 12	— 2	0		— 2
0,225	,11324	,04052	,4743	,3365	,04054		— 9	— 1	0		— 1
0,250	,13419	,04331	,5000	,3663	,04332		— 10	— 1	0		— 1
0,275	,15655	,04598	,5244	,3956	,04600						— 1
0,300	,18018		,5477	,4245							
0,100					,04920						
0,150					,06303		— 153	— 25	9	— 4	
0,200					,07533		— 99	— 16	4		
0,250	,13419				,08664		— 73	— 12	3	— 1	— 12
0,300	,18018	,09713			,09722		— 55	— 9	2	— 1	— 1
0,350	,23132	(,09710)			,10725		— 43	— 7	1		— 6
0,400	,28735	,10717	,5916	,4809	,11685		— 37	— 6	1		— 6
0,450	,34811	,11679	,6324	,5360	,12608		— 30	— 5	0		— 4
0,500	,41337	,12602	,6708	,5900	,13500		— 26	— 4	0		— 4
0,550	,48308	,13496	,7071	,6429	,14366		— 23	— 4	0		— 3
0,600	,55700	,14362	,7416	,6950	,15209		— 20	— 3	0		— 3
0,650	,63514	,15206	,7746	,7463	,16032		— 18	— 3	0		— 2
0,700	,71729	,16029	,8062	,7969	,16836		— 16	— 2	0		— 2
0,750	,80347	,16833	,8366	,8469	,17624		— 15	— 2	0		— 2
0,800	,89351	,17622	,8660	,8963	,18397		— 13	— 2			— 2
0,850	,98742	,18394	,8944	,9452	,19156		— 12	— 2			— 1
0,900	1,08506	,19155	,9219	,9937	,19903		— 11	— 2			— 2
0,950	1,18643	,19901	,9487	1,0416	,20639						— 2
1,000	1,29143	,20637	,9747	1,0892							

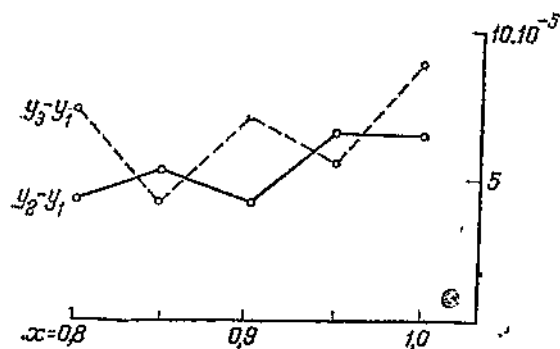
Таблица XXXI

x	y	Δy	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$\eta=2hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	Σ
0,100	,03090		,31623	,17578	,02460						
0,125	,04410		,35355	,21000	,02818	358					
0,150	,05904		,38730	,24298	,03151	833	— 24'	— 4	1	— 0'	
0,175	,07560		,41833	,27495	,03466	315	— 18'	— 3	0'		
0,200	,09367	,03764	,44721	,30606	,03766	300	— 15	— 2'	0'		— 2'
0,225	,11324	,04052	,47434	,33651	,04054	287	— 12'	— 2'	0'		— 1'
0,250	,13419	,04330	,50000	,36633	,04331	277	— 10	— 1'			— 1
0,275	,15654	,04599	,52440	,39566	,04600	269	— 8'	— 1'			— 1'
0,300	,18018	,04859	,54772	,42448	,04861	260	— 8'	— 1'	0'		— 1'
0,325	,20514	,05114	,57009	,45293	,05115	254	— 6'	— 1			— 0'
0,350	,23133	,05362	,59161	,48097	,05363	248	— 6	— 1			— 1
0,375	,25876	,05604	,61237	,50868	,05605	242					— 1
0,400	,28737		,63246	,53607							
0,20					,07532						
0,25					,08663	1131	— 72'	— 12	3		
0,30					,09722	1058	— 54'	— 9	1'	— 1'	
0,35	,23133				,10726	1004	— 44'	— 7'	1'		
0,40	,28737	,11678			,11685	959	— 36'	— 6	1'	— 0'	— 7'
0,45	,34811	,12604	,67082	,59001	,12608	923	— 30'	— 5	1	— 0'	— 4''
0,50	,41341	,13496	,70711	,64298	,13501	892	— 27	— 4'	0'		— 4'
0,55	,48307	,14362	,74162	,69504	,14366	865	— 23	— 4	0'		— 4'
0,60	,55703	,15205	,77460	,74634	,15209	842	— 19'	— 3'	0'		— 3'
0,65	,63513	,16029	,80623	,79696	,16032	823	— 19	— 3	0'		— 3
0,70	,71732	,16833	,83666	,84695	,16836	804	— 16	— 2'	0'		— 2'
0,75	,80346	,17622	,86603	,89636	,17624	788	— 15	— 2'			— 2
0,80	,89354	,18394	,89443	,94527	,18397	773	— 13'	— 2	0'		— 2'
0,85	,98741	,19155	,92195	,99368	,19156	759	— 12'	— 2			— 1'
0,90	1,08509	,19901	,94868	1,04167	,19903	747	— 11'	— 2			— 2
0,95	1,18642	,20637	,97468	1,08922	,20639	735					— 2'
1,00	1,29146		1,00000								

благодаря чему переправлять нигде не пришлось. Результаты получились в пределах точности вычислений те же самые.

x	У акад. А. Н. Крылова	У автора	
		I расчет	II расчет
	y_1	y_2	y_3
0,8	0,89347	0,89351	0,89354
0,85	0,98737	0,98742	0,98741
0,9	1,08502	1,08506	1,08509
0,95	1,18637	1,18643	1,08642
1,0	1,29137	1,29143	1,29146

Графическое изображение невязок $(y_2 - y_1)$ и $(y_3 - y_1)$ показывает (см. черт. 15), что оба расчета автора идут примерно вместе (при этом характерен ход невязок для данной вычислительной схемы — с повторением через строку расчета), отличаясь от расчета, приведенного у А. Н. Крылова, примерно на 5—6 единиц последнего знака.



Черт. 15.

Если принять во внимание, что у А. Н. Крылова дан расчет с более мелкими интервалами, число которых было 44 (у автора — 22 и 24), то полученное расхождение можно объяснить накопившимися за 44 строки погрешностями от округлений при умножении по схеме Адамса на $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{12}$.

Кроме того, надо принять во внимание, что в численном интегрировании последний знак всегда почти является запасным и полученная невязка не играет никакой роли.

§ 16. Теперь перейдем к такой схеме, которая позволяет получить каждое следующее значение из значения, непосредственно предшествующего ему (а не из второго до него).

Рассмотрим схему IX.

IX

x	y	Δy	η	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$	$\Delta^4 z$
x_{-2}	y_{-2}		η_{-2}					
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	η_{-1}	z_{-2}	δ_{-2}	δ_{-1}^2	δ_{-1}^3	
x_0	y_0	Δy_0	η_0	z_{-1}	δ_{-1}	δ_0^2	δ_0^3	δ_0^4
		Δy_1		z_0	δ_0			

Обозначая по прежнему

$$\eta = 2\hbar y',$$

введем функцию z такую, что

$$z_{-1} + z_0 = \eta_0. \quad (16)$$

Зависимость (16) аналогична зависимости (11)

$$\Delta y_0 \vdash \Delta y_1 \equiv \Delta_{0,1} y;$$

следовательно, Δu_i выражается через z_0 , и разности z_0 так же как $\Delta_{0,1} u$ выражаются через η_0 и разности η_0 :

$$\Delta^k \mathcal{Z} \equiv \delta^k.$$

т. е., обозначая

$$\Delta y_1 = z_0 + \frac{1}{6} \delta_0^2 + \frac{1}{6} \delta_0^3 + \frac{29}{180} \delta_0^4 + \dots$$

или, округленно:

$$\Delta y_1 = z_0 + \Sigma_0, \quad (17)$$

где

$$\Sigma_0 = \frac{1}{6}(\delta_0^2 + \delta_0^3 + \delta_0^4).$$

Когда ряд значений y доведен до y_0 , соответствующего значения аргумента $x = x_0$, то дальнейший ход расчета таков: вычисляется η_0 , затем $z_0 = \eta_0 - z_{-1}$, составляются разности z_0 , вычисляется по ф-ле (17) Δy , и т. д.

Для того чтобы иметь возможность начать расчет, имея лишь x_0 , y_0 , η_0 и разности η_0 , но не имея z_{-1} , нужно выразить z_0 через η_0 и разности η_0 .

Пусть

$$z_0 = a_0 \eta_0 + a_1 \Delta \eta_0 + a_2 \Delta^2 \eta_0 + \dots + a_k \Delta^k \eta_0 + \dots, \quad (18)$$

ТОҒДЭ

$$\Delta z_0 = a_0 \Delta \eta_0 + a_1 \Delta^2 \eta_0 + a_2 \Delta^3 \eta_0 + \dots + a_k \Delta^{k+1} \eta_0 + \dots, \quad (19)$$

HO

$$\eta_0 \Rightarrow z_0 \vdash z_{-1} = z_0 \vdash (z_0 - \Delta z_0) = 2z_0 - \Delta z_0 = \quad (20)$$

$$= 2a_0\eta_0 \vdash (2a_1 - a_0)\Delta\eta_0 \vdash (2a_2 - a_1)\Delta^2\eta_0 \vdash \dots \vdash (2a_k - a_{k-1})\Delta^k\eta_0 \vdash \dots$$

отсюда имеем, во-первых,

$$2a_0 = 1, \quad a_0 = \frac{1}{2},$$

а кроме того, для любого k

$$2a_k - a_{k-1} = 0, \quad a_k = \frac{1}{2} a_{k-1},$$

ТАК ЧТО

$$z_0 = \frac{1}{2}\eta_0 + \frac{1}{4}\Delta\eta_0 + \frac{1}{8}\Delta^2\eta_0 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}\Delta^k\eta_0 + \dots \quad (21)$$

или, иначе,

$$z_0 = (hy_0') + \frac{1}{2} \Delta (hy_0') + \frac{1}{4} \Delta^2 (hy_0') + \dots + \frac{1}{2k} \Delta^k (hy_0') + \dots \quad (22)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_0 &= \Delta(hy_0') + \frac{1}{2} \Delta^2(hy_0') + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \Delta^k(hy_0') + \dots \\ \Delta^m z_0 &= \Delta^m(hy_0') + \frac{1}{2} \Delta^{m+1}(hy_0') + \dots + \frac{1}{2^{k-m}} \Delta^k(hy_0') + \dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Зная, что

$$\Delta(hy_0') = h^2 y_0'' - \frac{1}{2!} h^3 y_0''' + \frac{1}{3!} h^4 y_0^{IV} + \dots +$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{(k-1)!} h^k y_0^{(k)} + \dots$$

$$\Delta^2(hy_0') = \dots \quad \text{и т. д.,}$$

мы можем выразить z_0 и его разности через производные $y_0', y_0'' \dots$ и т. д., получив:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= hy_0' + \frac{1}{2} h^2 y_0'' - \frac{1}{24} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{240} h^6 y_0^{VI} + \dots \\ \delta_0 = \Delta z_0 &= h^2 y_0'' - \frac{1}{12} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{120} h^6 y_0^{VI} + \dots \\ \delta_0^2 = \Delta^2 z_0 &= h^3 y_0''' - \frac{1}{2} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{12} h^6 y_0^{VI} + \dots \\ \delta_0^3 = \Delta^3 z_0 &= h^4 y_0^{IV} - h^5 y_0^V + \frac{1}{2} h^6 y_0^{VI} + \dots \\ \delta_0^4 = \Delta^4 z_0 &= h^5 y_0^V - \frac{3}{2} h^6 y_0^{VI} + \dots \\ \delta_0^5 = \Delta^5 z_0 &= h^6 y_0^{VI} + \dots \end{aligned} \right\} (24)$$

Имея ур-ние $y' = f(x, y)$ с начальным условием: при $x = x_0$ $y = y_0$, повторным дифференцированием можно найти $y_0'', y_0''' \dots$ и т. д., вычислять $z_0, \delta_0, \delta_0^2 \dots$ и т. д. и продолжать расчет по ф-ле (17).

§ 17. Для примера возьмем то же ур-ние

$$y' = y; \quad \text{при } x = 0 \quad y = 1.$$

Имеем при любом h

$$y^{(k)} = y, \quad y_0^{(k)} = 1.$$

Отсюда при $h = 0,1$ получим:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0,100000 + 0,005000 - 0,000004 = 0,104996 \approx 0,10499' \\ \delta_0 = \Delta z_0 &= 0,010000 - 0,000008 = 0,009991' \approx 0,00999 \\ \delta_0^2 = \Delta^2 z_0 &= 0,001000 - 0,000050 + 0,000001 = 0,000951 \approx 0,00095 \\ \delta_0^3 = \Delta^3 z_0 &= 0,000100 - 0,000010 + 0,000000 = 0,000090 \approx 0,00009 \\ \delta_0^4 = \Delta^4 z_0 &= 0,000010 - 0,000001 = 0,000008' \approx 0,00001 \end{aligned}$$

Ведем расчет, как показано на табл. XXXII. Этот расчет еще более точен, чем в табл. XXIX.

Проведем расчет и для ур-ния

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \left(= x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right).$$

Продифференцируем:

$$y'' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + 1 \right).$$

Таблица XXXII

x	y	Δy	$\eta = 2hy'$	z	δ	δ^2	$\delta(2)$	$\delta(3)$	$\delta(4)$	Σ
0,0	1,00000		,20000		999	95'	16	1'	0	
0,1	1,10517	,10517	,22103'	,10499'	1104'	105'	17'	1'	0'	17'
0,2	1,22140	,11623	,24428	,11604	1220	115'	19'	2		19
0,3	1,34986	,12846	,26997	,12824	1349	129	21'	2		2
0,4	1,49182'	,14196	,29836'	,14173	1490'	141'	23'	2'	0'	23'
0,5	1,64871'	,15689	,32974'	,15663'	1647'	157	26	3	0'	25'
0,6	1,82211'	,17340	,36442'	,17311	1820'	173	29	3		29
0,7	2,01375'	,19164	,40275	,19131'	2012	191'	32	3'	0'	32'
0,8	2,22554	,21178'	,44511	,21143'	2224	212	35'	3'		35
0,9	2,45961	,23407	,49192	,23367	2457	233	39	4	0'	39'
1,0	2,71828	,25867	,54365'	,25824'	2716'	259'	43	4'	0'	42'
1,1	3,00416'	,28588'	,60083'	,28541	3001'	285	47'	5	0'	47'
1,2	3,32011'	,31595	,66402'	,31542'	3317'	316	52'	5'	0'	52'
1,3	3,66929'	,34918	,73386	,34860	3666	348'	58	6'	1	58
1,4	4,05519	,38590	,81104	,38526	4052	386	64	6		64
1,5	4,48169'	,42650	,89634	,42578	4478	426	71	7'	1	72
1,6	4,95303	,47183'	,99060'	,47056	4948'	470'	78'	8'	1	77'
1,7	5,47394'	,52091'	1,09479	,52004'	5470	521'	87	8'		87
1,8	6,04965'	,57571	1,20993	,57474'	6044	574	95'	10'	2	96'
1,9	6,68588	,63622'	1,33717'	,63518'	6680'	636'	106			104
2,0	7,38905	70317'		70199						118'

Дальнейшее дифференцирование, как мы видим, привело бы нас к слишком сложным выражениям, трудным для вычисления. Поэтому мы перейдем к z , составив сперва по значениям η для $x=0,100; 0,125; \dots; 0,200$ разности. Возьмем их из табл. XXX:

x	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
0,100	,02460	358			
0,125	,02818	333'	— 24'	6	
0,150	,03151'	315	— 18'	3'	— 2'
0,175	,03466'	300	— 15		
0,200	,03766'				

Отсюда согласно (21)

$$z_{0,200} = 0,01883_2 + 75 - 1_9 + 0_2 = 0,01956'$$

$$\delta_{0,200} = 150 - 3_7 + 0_4 - 0_1 = 146'$$

$$\delta_{0,200}^2 = -7_5 + 0_9 - 0_3 = -7.$$

$$\delta_{0,200}^3 = 1_8 - 0_6 = 1.$$

Переходим к вычислению (см. табл. XXXIII). Дойдя до $x=0,4$ для перехода к удвоенному интервалу опять составляем таблицу разностей η и вычисляем новые значения z и Δz

x	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
0,20	,07532'	1131			
0,25	,08663'	1058'	— 72'	18	
0,30	,09722	1004	— 54'	10	— 8
0,35	,10726	959'	— 44'		
0,40	,11683'				

$$z_{0,4} = 0,05842_8 + 239_9 - 5_6 + 0_6 - 0_2 = 0,06077'$$

$$\delta_{0,4} = 479_7 - 11_1 + 1_2 - 0_5 = 469'$$

$$\delta_{0,4}^2 = -22_2 + 2_5 - 1 = -20'$$

$$\delta_{0,4}^3 = 5_0 - 2_0 = 3.$$

$$\delta_{0,4}^4 = -4.$$

Таблица XXXIII

x	y	Δy	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	η	z	δ	δ^2	$\delta^{(2)}$	$\delta^{(3)}$	$\delta^{(4)}$	Σ
0,100			/									
0,125												
0,150												
0,175										0		
0,200	,09367				,08766		146	— 7	— 1			
0,225	,11322	1955'	,47434	33651	,04054	1956'	141	— 5	— 1			— 1
0,250	,13419	2096'	,50000	,36633	,04332	2097'	137	— 4	— 0'			— 1
0,275	,15653	2234'	,52440	,39566	,04600	2234'	131	— 6	— 1			— 0'
0,300	,18017	2364'	,54772	,42418	,04861	2363'	130	— 1	0			— 1
0,325	,20513	2495'	,57009	45293	05115	2495'	124	— 6	— 1			0
0,350	,23131'	2618'	,59161	48097	05363	2619'	124	0	0			— 1
0,375	25875	2743'	,61237	50868	05605	2743'	118	— 6	— 1			0
0,400	28935'	2860'	,63246	53607		2861'						— 1
										— 0'		
0,40	28735'	6074			11685'		469'	— 20'	— 3'	0'		
0,45	34809'	6529'	67082	59001	12608'	6077'	453'	— 16	— 2'	1		— 3'
0,50	41339	6967	70711	64296	13500'	6531	438'	— 15	— 2'	0'		— 1'
0,55	48306	7395'	74162	69504	14366'	6969'	427'	— 11	— 2	0'		— 2'
0,60	55701'	77460	74633	15209'		7397	415'	— 12	— 2	0'		— 1'
0,65	63512	80623	79695	16032		7812'	407	— 8'	— 1'	0'		— 2
0,70	71730'	83666	84694	16836		8219'	397	— 10	— 1'	0'		— 1
0,75	80345'	86603	89635	17624		8616'	391	— 6	— 1	0'		— 1'
0,80	89352'	9007	89443	94526	18397	9007'	383	— 8	— 1'			— 0'
0,85	98741'	9389	92195	99368	19156'	9390'	376	— 7	— 1			— 1'
0,90	1,08506'	9765	94868	1,04165	19903'	9766	371'	— 4	— 1			— 1
0,95	1,18643'	10136'	97468	1,08922	20639	10137'	364	— 7'	— 1			— 1
1,00	1,29143'	10500'				10501'						— 1

Проделанные нами вычисления имеют один недостаток: вычисляя Δy , мы за много интервалов можем получить существенное влияние погрешностей от округления, поэтому лучше вести расчет, включая в него и суммы.

§ 18. Для вычислительной схемы VII, введя функцию S —сумму, разности которой

$$\Delta S = \eta = 2hy',$$

мы получим схему X:

	x	y	$y_0 + y_1$	S	η	$\Delta\eta$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	Σ
X	x_{-1}	y_{-1}			η_{-1}				$\Delta_0^{(3)}$	
	x_0	y_0	$y_{-1} + y_0$	S_{-1}	η_0	Δ_0	$\Delta_0^{(1)}$	$\Delta_0^{(2)}$		
	x_1		$y_0 + y_1$	S_0						Σ_0

при рабочей формуле:

$$y_0 + y_1 = S_0 + \Sigma_0,$$

где

$$\Sigma_0 = \Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)} + \Delta_0^{(3)} = \frac{1}{6} (\Delta_0 + \Delta_0^2 + \Delta_0^3),$$

откуда

$$y_1 = (y_0 + y_1) - y_0.$$

Для начала вычисления, имея y_0 , y_1 и Σ_0 , значения S_0 получают из формулы:

$$S_0 = y_0 + y_1 - \Sigma_0.$$

В табл. XXXIV приведен отрывок расчета по схеме X. Ввиду наличия вычитания, схема эта не слишком удобна, и ей следует предпочесть схему XI, получаемую на основе схемы IX:

	x	y	$\eta = 2hy'$	S	z	δ	$\delta^{(1)}$	$\delta^{(2)}$	$\delta^{(3)}$	Σ
XI	x_{-1}	y_{-1}	η_{-1}						$\delta_0^{(3)}$	
	x_0	y_0	η_0	S_{-1}	z_{-1}	δ_0	$\delta_0^{(1)}$	$\delta_0^{(2)}$		
	x_1			S_0	z_0					Σ_0

где непосредственно

$$y_1 = S_0 + \Sigma_0. \quad (25)$$

ОПЕЧАТКА

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
80	гр. 8 нижней таблицы	δ ³	δ ¹

Зак. 1637. П. В. Мелепьев.

Таблица XXXIV

x	y	$y_0 + y_1$	S	$\eta = 2hy'$	$\Delta\eta$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	Σ
0	1,00000			20000	1903	317	30	2'	
	1,10517	2,10517	2,10167	22103	2103	350	33	3'	349
	8,22141	2,32658	2,32271	24428	2325	387	37	4	387
	1,34987	2,57128	2,56699	26997	2569	428	40	4'	429
	1,49181	2,84168	2,83696	29836	2839	473	45		471
	1,64874	3,14055	3,13532						522

Для начала вычисления, мы имеем:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0 = z_0 + \frac{1}{6}(\delta_0^2 + \delta_0^3 + \delta_0^4),$$

$$y_1 = S_0 + \frac{1}{6}(\delta_0^1 + \delta_0^2 + \delta_0^3),$$

откуда

$$S_0 = y_0 + z_0 - \frac{1}{6}\delta_0. \quad (26)$$

В табл. XXIV приведен расчет по схеме XI для ур-ния

$$y' = y.$$

Вычислять можно двояко: получив η_0 , можно взять

$$z_0 = \eta_0 - z_{-1},$$

затем надстроить

$$S_0 = S_{-1} + z_0 \quad (27)$$

и т. д. ..., но можно воспользоваться и зависимостью

$$S_0 = S_{-2} + \eta_0. \quad (28)$$

получающейся непосредственно из (27):

$$S_0 = S_{-1} + z_0 = (S_{-2} + z_{-1}) + z_0 = S_{-2} + \eta_0.$$

Если идти этим путем, то схему XI целесообразно несколько изменить, представив в виде XII:

	x	y	$\eta = 2hy'$	S	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^{(3)} S$	$\Delta^{(3)} S$	$\Delta^{(4)} S$	Σ
XII	x_0	y_0	η_0			$\Delta^2 S_0$	$\Delta_0^{(2)}$	$\Delta_0^{(3)}$	$\Delta_0^{(4)}$	
	x_1			S_0	ΔS_0					Σ_0

Таблица XXXV

x	y	$\eta = 2hy'$	S	z	δ	$\delta^{(1)}$	$\delta^{(2)}$	$\delta^{(3)}$	Σ
0,0	1,00000	20000			999	166	16	1	
0,1	1,10517	22103	1,10333	10499	1104	184	17	1	184
0,2	1,22140	24428	1,21937	11604	1220	203	19	2	203
0,3	1,34986	26997	1,34761	12824	1349	225	21	2	225
0,4	1,49182	29836	1,48934	14173	1490	248	23	2	248
0,5	1,64871	32974	1,64597	15663	1647	274	26	3	274
0,6	1,82211	36442	1,81908	17311	1820	303	29	3	303
0,7	2,01375	40275	2,01040	19131	2012	335	32	3	335
0,8	2,22554	44511	2,22183	21143	2224	370	35	4	370
0,9	2,45959	49192	2,45551	23367	2457	409	39	4	408
1,0	2,71828	54365	2,71375	25824	2716	452	43	4	452
1,1	3,00416	60083	2,99916	28541	3001	500	47	5	499
1,2	3,32011	66402	3,31459	31542	3317	553	53	5	552
1,3	3,66930	73386	3,66319	34860	3666	611	58	6	611
1,4	4,05519	81104	4,04845	38526	4052	675	64	6	674
1,5	4,48169	89634	4,47423	42578	4478	746	71	7	746
1,6	4,95303	99060	4,94479	47056	4948	824	78	9	824
1,7	5,47393	1,09479	5,46483	52004	5470	911	87	9	909
1,8	6,04965	1,20993	6,03958	57474	6044	1007	96	10	1007
1,9	6,68589	1,33717	6,67476	63518	6680	1113	106		1112
2,0	7,38905		7,37675	70199					1229

При этом для начала вычисляются:

$$\left. \begin{aligned}
 S_0 &= y_0 + h y_0' + \frac{1}{3} h^2 y_0'' - \frac{1}{36} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{360} h^6 y_0^{VI} + \dots \\
 \Delta S_0 &= h y_0' + \frac{1}{2} h^2 y_0'' - \frac{1}{24} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{240} h^6 y_0^{VI} + \dots \\
 \Delta^2 S_0 &= h^2 y_0'' - \frac{1}{12} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{120} h^6 y_0^{VI} + \dots \\
 \Delta_0^{(2)} &= \frac{1}{6} \Delta^2 S_0 \\
 \Delta_0^{(3)} &= \frac{1}{6} \Delta^3 S_0 = \frac{1}{6} h^3 y_0''' - \frac{1}{12} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{72} h^5 y_0^V \\
 \Delta_0^{(4)} &= \frac{1}{6} \Delta^4 S_0 = \frac{1}{6} h^4 y_0^{IV} - \frac{1}{6} h^5 y_0^V + \frac{1}{12} h^6 y_0^{VI} + \dots \\
 S_{-1} &= S_0 - \Delta S_0.
 \end{aligned} \right\} (28)$$

На всякий случай можно вычислить и величины:

$$\begin{aligned}
 \Delta_0^{(5)} &= \frac{1}{6} \Delta^5 S_0 = \frac{1}{6} h^5 y_0^V - \frac{1}{4} h^6 y_0^{VI} + \dots \\
 \Delta_0^{(6)} &= \frac{1}{6} \Delta^6 S_0 = \frac{1}{6} h^6 y_0^{VI} + \dots,
 \end{aligned}$$

чтобы убедиться в их малости и возможности отбрасывания их в расчете.

Расчет ведется по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 S_n &= S_{n-2} + \eta_n, \\
 \Sigma_n &= \Delta_n^{(2)} + \Delta_n^{(3)} + \Delta_n^{(4)}, \\
 y_{n+1} &= S_n + \Sigma_n
 \end{aligned} \right\} (30)$$

с проверкой по формуле

$$y_{n+1} = S_n + \Delta_n^{(2)}.$$

Насколько можно судить по практическому использованию схемы XII, она является наиболее простой и наиболее точной из разностных схем численного интегрирования ур-ний 1-го порядка.

§ 19. Применим ее для интегрирования ур-ния Riccati

$$y' = 4 - x^2 - y^2$$

с начальными условиями: $x_0 = -2,0$, $y_0 = 0,5$, в пределах

$$-2,0 \leq x \leq -1,0.$$

Ур-ние это рассматривается проф. В. П. Ветчинкиным в его книге ¹.

¹ Ветчинкин В. П., Методы приближенного и численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (Изд. Военно-воздушной академии РККА, Москва, 1932).

x	y	x^2	y^2	η	S	ΔS
— 2,0	0,50000	4,00000	,25000	— 2500	49823	— 719
— 1,95	0,49269	3,80250	,24273	— 452	49104	266
— 1,9	0,49522	3,61000	,24528	1447	49370	1180
— 1,85	0,50693	3,42250	,25698	3205	50551	2024
— 1,8	0,52704	3,24000	,27777	4822	52575	2798
— 1,75	0,55491	3,06250	,30792	6296	55373	3493
— 1,7	0,58975	2,89000	,34780	7622	58871	4124
— 1,65	0,63088	2,72250	,39801	8795	62995	4671
— 1,6	0,67744	2,56000	,45892	9811	67666	5140
— 1,55	0,72871	2,40250	,53102	10665	72806	5526
— 1,5	0,78382	2,25000	,61437	11356	78331	5831
— 1,45	0,84200	2,10250	,70897	11885	84163	6051
— 1,4	0,90240	1,96000	,81433	12256	90217	6202
— 1,35	0,96431	1,82250	,92989	12476	96419	6276
— 1,3	1,02692	1,69000	1,05457	12554	1,02693	6281
— 1,35	1,08964	1,56250	1,18732	12502	1,08974	6221
— 1,2	1,15174	1,44000	1,32651	12335	1,15195	6114
— 1,15	1,21283	1,32250	1,47096	12065	1,21309	5955
— 1,1	1,27224	1,21000	1,61861	11714	1,27260	5760
— 1,05	1,32987	1,10250	1,76855	11389	1,33023	5541
— 1	1,38503				1,38550	

Таблица XXXVI

$\Delta^2 S$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	Σ	Невязка $\Delta_1^{(2)} - \Sigma_0$	Точное значение y	y по расчету проф. В. П. Ветчинкина
			2				
1062	177	— 14	1				
985'	164	— 13	1'	165	— 1		
914	152'	— 11'		152	0'	0,49523	0,495229
844	140'	— 12		142'	— 2		
773'	129	— 11'		128'	0'	0,52704'	0,527041
700	116	— 12'		117'	— 1		
626	104'	— 12		104	0'	0,58976	0,589757
547	91	— 13'		92'	— 1'		
469	78	— 13		77'	0'	0,67744'	0,677442
385	64'	— 13'		65	— 0'		
306	51	— 13'		51	0	0,78382'	0,783827
222'	37	— 14		37'	— 0'		
148	24'	— 12'		23	1'	0,90241'	0,902415
71'	12'	— 12'		12	0		
7'	1	— 11		— 0'	1'	1,02694	1,026947
60	— 10	— 11		— 10	0		
107	— 18	— 8		— 21	3	1,15177	1,151768
163'	— 27	— 9		— 26	— 1		
188	— 31	— 4'		— 36	4	1,27229	1,272292
235'	— 39	— 7'		— 36	— 3		
				— 46'			

Для начала выводим высшие производные:

$$\begin{aligned} y' &= 4 - x^2 - y^2, \\ y'' &= -2x - 2yy', \\ y''' &= -2 - 2y'^2 - 2yy'', \\ y^{IV} &= -6y'y'' - 2yy''', \\ y^V &= -6y''^2 - 8y'y''' - 2yy^{IV}, \\ y^{VI} &= -20y''y''' - 10y'y^{IV} - 2yy^V, \end{aligned}$$

Это при интервале $h=0,05$ даст нам:

$$\begin{aligned} hy_0' &= -0,01250_0 \\ h^2y_0'' &= + 1062_5 \\ h^3y_0''' &= - 79_7 \\ h^4y_0^{IV} &= + 8_0 \\ h^5y_0^V &= - 4_2 \\ h^6y_0^{VI} &= + 1_1 \end{aligned}$$

после чего получаем:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0,50000 - 1250 + 354_2 - 0_2 = 0,49104, \\ \Delta S_0 &= -1250 + 531_2 - 0_3 = -719, \\ S_1 &= 0,49823, \\ \Delta^2 S_0 &= 1062_5 - 0_7 = 1062, \\ \Delta_0^{(2)} &= = 177, \\ \Delta_0^{(3)} &= -13_3 - 0_7 = -14, \\ \Delta_0^{(4)} &= 1_3 + 0_7 + 0_7 = 2, \\ \Delta_0^{(5)} &= -0_7 - 0_3 = -1, \\ \Delta_0^{(6)} &= 0_2 = 0. \end{aligned}$$

Итак, имеем все данные для начала расчета по формуле

$$\eta = 2hy' = 0,1(4 - x^2 - y^2):$$

Расчет приведен в табл. XXXVI.

Для сравнения справа даны значения y , исправленные добавлением разности $(\Delta_1^{(2)} - \Sigma_0)$, и значения y из названной выше работы, где расчет сделан по методу проф. В. П. Ветчинкина (не разностному) с интервалами $h=0,1$, но с 4 вычислениями y' на каждый интервал. Все числа сходятся.

§ 20. Для многих уравнений схему XII можно улучшить, увеличив точность вычисления следующим образом.

Имеем

$$2hy' = \varphi(x, y).$$

Если для некоторого значения $x = x_n$ мы будем иметь не вполне точное значение $y = y_n$, а с некоторой погрешностью $y = y_n - \varepsilon_n$, то можно вследствие малости ε_n считать, что вычисленное на основании x_n и $y_n - \varepsilon_n$ значение $2hy'_n$ будет равно не точному значению $2hy' = 2hy'_n$, а

$$2hy' = 2hy'_n - \varepsilon_n \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2hy'_n - \gamma_n, \quad (31)$$

где

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (32)$$

Этим можно воспользоваться для вычисления с большими интервалами h таким путем: сперва по формуле

$$y_{n+1} = S_n + \Sigma_n$$

высчитывается приближенное значение y_{n+1} , — обозначим его $\tilde{y}_{n+1}$, и получается приближенное значение η_{n+1}

$$\tilde{\eta}_{n+1} = \varphi(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}).$$

Затем получают

$$\tilde{S}_{n+1} = S_{n+1} + \tilde{\eta}_{n+1},$$

$$\tilde{\Delta S}_{n+1} = \tilde{S}_{n+1} - S_n,$$

$$\tilde{\Delta^2 S}_{n+1} = \tilde{\Delta S}_{n+1} - \Delta S_n,$$

$$\tilde{\Delta}_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{6} \tilde{\Delta^2 S}_{n+1}.$$

Вычисляют невязку

$$\varepsilon_{n+1} = \tilde{\Delta}_{n+1}^{(2)} - \Sigma_n$$

и поправку

$$\gamma_{n+1} = \Sigma_{n+1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{n+1}.$$

Затем получают более точное значение $\eta_{n+1} = \tilde{\eta}_{n+1} + \gamma_{n+1}$, вычисляют по нему значения S_{n+1} , ΔS_{n+1} , $\Delta^2 S_{n+1}$, $\Delta_{n+1}^{(2)}$ и за точное значение y_{n+1} принимают

$$y_{n+1} = S_n + \Delta_{n+1}^{(2)}.$$

После этого расчет продолжается тем же путем, что и обычно.

Если получить $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ затруднительно, то можно обойтись повторным вычислением η_{n+1} , принимая за точное значение y_{n+1} сумму

$$y_{n+1} = S_n + \tilde{\Delta}_{n+1}^{(2)}.$$

Это значение y_{n+1} будет отличаться от действительного — $S_n + \Delta_{n+1}^{(2)}$ — на столь малую величину, что погрешность не отразится на вычислениях η_{n+1} .

Однако в большинстве случаев пересчет η_{n+1} , сделанный на основании учета $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, проще, чем двукратное вычисление.

Для примера дан расчет (см. табл. XXXVII) для ур-ния

$$y' = 4 - x^2 - y^2$$

для интервала $h = 0,1$, соответствующего рабочим формулам:

$$1) \eta = 0,2 (4 - x^2 - y^2),$$

$$2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -0,4y.$$

x	y	x^2	y^2	η	S	ΔS
— 2,0	0,50000	4,00000	,25000	— 5000	49293"	
— 1,9	49550" 0,49522"	3,61000	,24552	2889" 2895"		— 380
— 1,8	52721" 0,52704"	3,24000	,27795	9641 9644"	52183 52189	3269" 3275"
— 1,7	58948 0,58975"	2,89000	,34791	15242 15244	58554" 58558	6065" 6369
— 1,6	67748 0,67745	2,56000	,45898	19620" 19621"	67431 67483	8873 8875
— 1,5	78378" 0,78383	2,25000	,61432	22713" 22712	78178" 78179"	10745" 10746"
— 1,4	90237 0,90242	1,96000	,81427	24514" 24512"	90146" 90145	11967 11965"
— 1,3	1,02634" 1,02694"	1,69000	1,05441	25112 25108	1,02694 1,02692	12549 12547
— 1,2	1,15173 1,15177	1,44000	1,32648	24670" 24668"	1,15257; 1,15253	12565" 12561
— 1,1	1,27222 1,27229"	1,21000	1,61854	23429 23425	1,27362" 1,27360"	12105" 12103"
— 1,0	1,36515" 1,38510"	1,00000	1,91864	21627 21630	1,38682 1,38678	11321" 11317"
					1,46987" 1,48990"	10309" 10312"

Табл. XXV I

$\Delta \alpha$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	Σ	ε	$\frac{\partial \varphi}{\partial y}$	γ
4240	706'	— 118'	49				
			21				
3649'	608	— 97'		637	— 31	— 0,20	1
3655'	609		4				6
	515	— 93'		532'	— 17'	— 0,21	3'
3090	515'		— 4'				
3093'							
	417'	— 8		426	— 9'	— 0,23	2
2504			— 7'				
2506	312	— 105'		315	— 3	— 0,27	1
	312		— 3				
1870'	203'	— 108'		199	4'	— 0,32	— 1'
1871'	203'		2				
	97	— 106'		92	5	— 0,36	— 2
1220'	97		12				
1219		— 94'		— 7'	10	— 0,41	— 4
	3		16				
583'	2			— 80	4	— 0,46	— 2
581'		— 78'	23'				
	— 76			— 138'	8	— 0,51	— 4
455'	— 76	— 55'		— 162'	— 5'	— 0,55	3
457'							
	— 130'						
	— 131						
782							
786							
	— 168						
— 1008	— 167'						
— 1005							

Табл. XXXVIII

$h y^4$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
— 2500	3948					
1448	3374	— 574	0			
4822	2800	— 574	— 37	— 37	41	
7622	2189	— 611	— 33	4	29	— 12
9811	1545	— 644	0	33	10	— 19
11356	900	— 645	43	43	— 2	— 12
12256	298	— 602	84	41	— 8	— 6
12554	— 220	— 518	116	32	— 23	— 15
12334	— 621	— 401	125	9		
11712	— 897	— 276				
10815						

при начальных значениях:

$$S_1 = 0,49293,$$

$$S_0 = 0,48913,$$

$$\Delta S_0 = -380,$$

$$\Delta^2 S_0 = 4240,$$

$$\Delta_0^{(2)} = 706,$$

$$\Delta_0^{(3)} = -118,$$

$$\Delta_0^{(4)} = 49.$$

В этом расчете все числа, соответствующие первым приближениям, даны более мелким шрифтом, чем окончательные. Для удобства вычисления строка $\Delta^{(2)}$ несколько приподнята относительно строки $\Delta^2 S$.

Если сравним полученные y с данными в табл. XXXVI, то убедимся в точности их до полуединицы последнего знака; при этом для данного уравнения взятый интервал громаден, что можно видеть из табл. XXXVIII, в которой приведены разности Δ , Δ^2 , Δ^3 , ... — такие, какими нужно было бы пользоваться при работе по методу Адамса. Дано 6 рядов разностей, и все же их не хватает; между тем практически способ Адамса неприменим для более чем трех учитываемых разностей.

§ 21. Все сказанное выше применимо и для интегрирования уравнений второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Вычисления располагаются, как показано в схеме XIII:

XIII

x	y	η	S	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^{(3)}$	ξ	γ	$\Delta \gamma$	$\Delta^2 \gamma$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	Σ
x_{-1}	y_{-1}	η_{-1}	S_{-2}					γ_{-2}					$\Delta_0^{(4)}$	
x_0	y_0	η_0	S_{-1}	ΔS_0	$\Delta^2 S_0$	$\Delta_0^{(2)}$	ξ_0	γ_{-1}		$\Delta^2 \gamma_0$	$\Delta_0^{(2)}$	$\Delta_0^{(3)}$		
x_1		η_1	S_0	ΔS_1	$\Delta^2 S_1$	$\Delta_1^{(2)}$		γ_0	$\Delta \gamma_0$					Σ_0
			S_1											

Вычисляется

$$\xi = 4h^2 y'' = 4h^2 f(x, y, y') = \Psi(x, y, y').$$

Начальные значения суммы γ и ее разностей получаются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= 2hy_0' + 2h^2 y_0'' + \frac{2}{3} h^3 y_0''' - \frac{1}{18} h^5 y_0^{(5)} + \frac{1}{180} h^7 y_0^{(7)} + \dots \\ \gamma_0 &= 2h^2 y_0'' + h^3 y_0''' - \frac{1}{12} h^5 y_0^{(5)} + \frac{1}{120} h^7 y_0^{(7)} + \dots \\ \gamma_0 &= 2h^3 y_0''' - \frac{1}{6} h^5 y_0^{(5)} + \frac{1}{60} h^7 y_0^{(7)} + \dots \\ \gamma_1 &= \frac{1}{6} \Delta^2 \gamma_0 \\ \gamma_1 &= \frac{1}{3} h^4 y_0^{(4)} - \frac{1}{6} h^5 y_0^{(5)} + \frac{1}{36} h^6 y_0^{(6)} + \dots \\ \gamma_1 &= \frac{1}{3} h^5 y_0^{(5)} - \frac{1}{3} h^6 y_0^{(6)} + \frac{1}{6} h^7 y_0^{(7)} + \dots \\ \gamma_{-1} &= \gamma_0 - \Delta \gamma_0 \\ \gamma_1 &= \frac{1}{3} h^6 y_0^{(6)} - \frac{1}{2} h^7 y_0^{(7)} + \dots \\ \gamma_1 &= \frac{1}{3} h^7 y_0^{(7)} + \dots \end{aligned} \right\} (33)$$

Начальные значения суммы S и ее разностей получаются по ф-лам (29).

Ход расчета:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_{-2} + \xi_0, \\ \Sigma_0 &= (\Delta^{(2)} + \Delta^{(3)} + \Delta^{(4)}) \gamma_0, \\ \eta_1 &= \gamma_0 + \Sigma_0, \\ S_1 &= S_{-1} + \eta_1, \\ y_1 &= S_0 + \Delta_{S_1}^{(2)}. \end{aligned} \right\} (34)$$

Для примера возьмем уравнение

$$y'' = \frac{1}{2} (y - y') \quad (35)$$

с начальными условиями: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 1$.

x	y	η	S	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^{(2)}$	ξ
0	1,000000	200000	,998334	104996			40000
0,1	1,105170	221033	1,103330	116037	11041	1840	44207
0,2	1,221402	244280	1,219368	128243	12205	2034	48856
0,3	1,349858	269970	1,347611	141727	13484	2247	53994
0,4	1,491823	298365	1,489338	156637	14910	2485	59678
0,5	1,648721	329744	1,645976	173106	16469	2745	65949
0,6	1,822117	364422	1,819082	191316	18209	3035	72885
0,7	2,013751	402751	2,010398	211435	20119	3353	80550
0,8	2,225539	445106	2,221833	233671	22236	3706	89021
0,9	2,459601	491921	2,455505	258249	24578	4096	98384
1	2,718280	543655	2,713754	285405	27156	4526	
			2,999160				

Таблица XXXIX

$\Delta\gamma$	$\Delta^2\gamma$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$	Σ	$\frac{y}{50}$	$\frac{\eta}{10}$	$y = e^x$
				3				
99667		1998	333	31				
20999				3				
	20999		35					
20666		2209	368	3	367	22103	22103	1,105171
23208				38				
43874		2440	406	4	406	24428	24428	1,221403
25648				43				
69522		2698	449	4	448	26997	26997	1,349858
28346				47				
97868		2981	497	4	497	29836	29836	1,491824
31327				52				
29195		3295	549	6	549	32974	32974	1,648721
34622				58				
63817		3641	607	5	605	36442	36442	1,822119
38263				63				
02080		4024	670	7	671	40275	40275	2,013752
42287				71				
44367		4447	741	7	739	44511	44510	2,225541
46734				78				
91101		4915	819		819	49192	49192	2,459603
51649								
42751					904			2,718282

Для начала расчета находим высшие производные; имеем

$$y^{(n+1)} + \frac{1}{2}(y^{(n)} + y^{(n-1)}),$$

т. е. вначале при любом n

$$y_0^{(n)} = 1.$$

При $h = 0,1$ имеем

$$\begin{aligned} h y_0' &= 0,100000, \\ h^2 y_0'' &= 10000, \\ h^3 y_0''' &= 1000 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отсюда, в начале расчета:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0,200000 + 20000 + 6667 - 0_6' = 0,220666, \\ \Delta \gamma_0 &= 20000 + 1000 - 0_8' = 20999, \\ \Delta^2 \gamma_0 &= 2000 - 1_7 = 1998', \\ \Delta_0^{(2)} &= = 333, \\ \Delta_0^{(3)} &= 33_3 - 1_7 = 31', \\ \Delta_0^{(4)} &= 3_3 - 0_3 = 3, \\ \gamma_{-1} &= 199\,667, \\ S_0 &= 1,000000 + 100\,000 + 3333_3 - 2_8 = 1103330', \\ \Delta S_0 &= 100000 + 5000 - 4_2 = 104996. \end{aligned}$$

Дальнейших разностей S_0 вычислять не нужно.

$$S_{-1} = 998\,334'.$$

Расчет ведется по формуле:

$$4h^2 y'' = 4h^2 \cdot \frac{1}{2} \left(y + \frac{2hy'}{2h} \right),$$

т. е.

$$\xi = \frac{y}{50} + \frac{\eta}{10},$$

и дан в табл. XXXIX.

В той же таблице справа даны точные значения $y = e^x$. Как видим, расхождение ни в одной точке не превышает $1\frac{1}{2}$ единиц последнего знака, что для уравнений второго порядка является весьма большой точностью.

§ 22. В сущности говоря, интегрирование уравнений второго порядка нашим способом сводится к интегрированию системы двух уравнений первого порядка. Для уравнений вида

$$y'' = f(x, y),$$

где y'' не зависит от y' , наиболее простым является общеизвестный метод Штермера.

Рассмотрим в нескольких словах причину этого.

При численном интегрировании влияние разностей производной получается наиболее быстро затухающим, если рассматривают разности, стоящие на одном уровне с вычисляемой величиной.

Ряд Адамса наименее удовлетворяет этому условию, поэтому у него большие коэффициенты при разностях. Ряд Лапласа ближе подходит к горизонтالي, на которой стоит вычисляемое значение Δy , и поэтому у него коэффициенты убывают быстрее. Наилучшим образом отвечает этому условию ряд Коуэлла, имеющий поэтому наименьшие коэффициенты.

Однако ряд Коуэлла с первого же члена нуждается в участии еще неизвестных значений η , а поэтому пригоден лишь для проверки.

Введением схемы IX мы подвигаем строку учитываемых разностей на пол-интервала ближе к вычисляемому Δy . Это дает нам улучшение по сравнению с методом Лапласа. Пользуясь же для проверки рядом

$$\Delta y_1 = z_0 + \frac{1}{6} \delta_1^2 - \frac{1}{180} \delta_2^4 + \frac{1}{1512} \delta_3^6 - \frac{23}{226800} \delta_4^8 + \dots,$$

мы оперируем исключительно с членами, стоящими на уровне Δy_1 , а не со средними величинами, получаемыми, как у Коуэлла, через посредство членов, стоящих выше и ниже данного уровня. Поэтому и сходимость у нас больше. Кроме того, для перепроверки нам достаточно двух первых членов, получаемых на следующем же интервале. Это дает возможность вычислять так, как показано в табл. XXXVII.

При методѣ Коуэлла нам для проверки по двум членам нужно было бы пройти вперед на два интервала.

Для уравнений второго порядка в методе Штермера мы имеем схему XIV:

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	ξ	$\Delta \xi$	$\Delta^2 \xi$	$\Delta^3 \xi$	$\Delta^4 \xi$
XIV									
	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$			$\Delta^2 \xi_0$	$\Delta^3 \xi_0$	$\Delta^4 \xi_0$
				$\Delta^2 y_1$	ξ_0	$\Delta \xi_0$	$\Delta^2 \xi_1$		$\Delta^4 \xi_2$

(где $\xi = h^2 y''$), дающую на основе двойного интегрирования формулы Ньютона ряд:

$$\Delta^2 y_1 = \xi_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 \xi_0 + \frac{1}{12} \Delta^3 \xi_0 + \frac{19}{240} \Delta^4 \xi_0 + \frac{18}{240} \Delta^5 \xi_0 + \dots,$$

соответствующий ряду

$$\Delta^2 y_1 = \xi_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 \xi_1 - \frac{1}{240} \Delta^4 \xi_2 + \frac{31}{60480} \Delta^6 \xi_3,$$

называемому рядом Коуэлла.

Здесь, как мы видим, учитываемые разности стоят на уровне $\Delta^2 y_1$, и следовательно никаких преобразований, улучшающих расчет, вводить невозможно.

В нашей работе мы ограничились рассмотрением уравнений, допускающих дифференцирование для получения начальных разностей. Ограничение это несущественно, так как прочие уравнения берутся обычно графическими методами, которых мы не рассматриваем.

ПРИБЛИЖЕННОЕ КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

§ 23. Во многих вопросах инженерного дела (исследование условий обтекания контура, распределение напряжений в сечении и т. д.) приходится встречаться с необходимостью конформно отобразить область (D) внутри или вне окружности (S) единичного радиуса на области (D') внутри или вне некоторого заданного замкнутого, гладкого или кусочно-гладкого контура (S'). Нахождение преобразующей функции, однако, является делом чрезвычайно трудоемким и иногда даже просто заставляет решать вопрос иначе, например, опытным путем. Излагаемый здесь метод дает быстрое решение для тех случаев, когда преобразующей функцией может быть взят алгебраический полином с не слишком большим числом членов, что, в сущности, позволяет решать большинство технических задач, с вполне достаточной при этом степенью точности. Рассмотрим сперва преобразование внутренних областей, а затем уже полученные выводы распространим и на внешние области. Начнем с несимметричных контуров (S').

Пусть окружность (S) единичного радиуса аналитической функцией

$$\zeta = \sum_{k=0}^n x_k z^{1+k}$$

где $x_k = a_k + b_k i$ преобразовывается в кривую (S') так, что область (D) внутри окружности конформно преобразовывается в область (D') внутри кривой (S'). При этом точка O — начало координат области (D) — переходит в точку O' — начало координат области (D'), а точка A пересечения окружности S с осью OX переходит в точку A' пересечения кривой S' с осью $O'X'$.

Рассмотрим несколько свойств такого преобразования (черт. 16).

1. Точка P на окружности S , имеющая на ней аргумент φ , перейдет в точку P' на кривой S' . Координаты точки P' будут

$$\zeta = \sum_{k=0}^n [a_k \cos(1+k)\varphi - b_k \sin(1+k)\varphi + i(b_k \cos(1+k)\varphi + a_k \sin(1+k)\varphi)].$$

2. Если проведем луч $O'B'$ под углом φ к оси $O'X'$, то получим отрезки $P'B' = \eta$ и $O'B' = \xi$, являющиеся координатами точки P' относительно осей, повернутых на угол φ от $X'O'Y'$. Это дает:

$$\xi + i\eta = \frac{\zeta}{z} = \sum_{k=0}^n [a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi + i(b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi)].$$

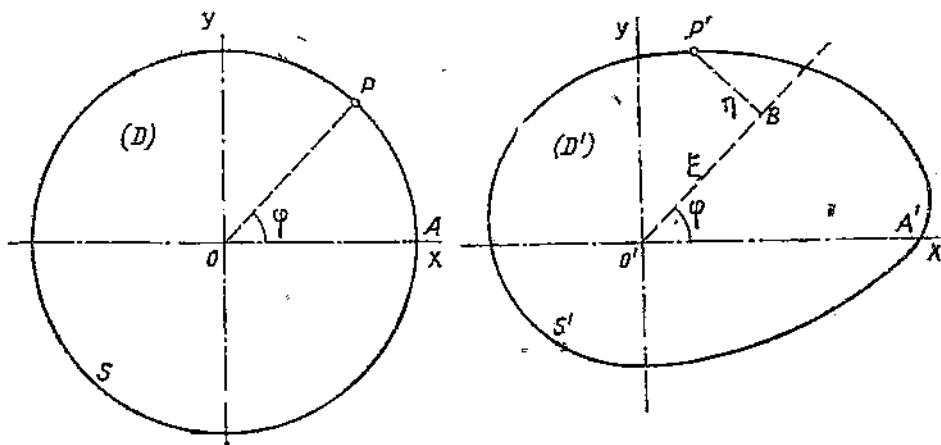
На использовании функций ξ и η и будет построено все дальнейшее изложение.

3. Предположим, что в ряде

$$\zeta = x_0 z + x_1 z^2 + \dots + x_n z^{1+n}$$

для достижения желаемой точности достаточно взять лишь несколько членов, приняв:

$$\zeta = x_0 z + x_1 z^2 + \dots + x_{\frac{m}{2}-1} z^{\frac{m}{2}} + x_{\frac{m}{2}} z^{1+\frac{m}{2}}.$$



Черт. 16.

Проведем (черт. 17) лучи I, II, III, ..., (m), делящие полный угол на m частей. Мы получим для ξ — m уравнений

$$\xi_1 = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin \frac{2\pi}{m} k \right),$$

$$\xi_2 = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \cos 2 \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin 2 \frac{2\pi}{m} k \right),$$

.....

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \cos n \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin n \frac{2\pi}{m} k \right),$$

.....

$$\xi_m = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} (a_k \cos 2\pi k - b_k \sin 2\pi k).$$

Соответственно для η получим

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(b_k \cos n \frac{2\pi}{m} k + a_k \sin n \frac{2\pi}{m} k \right),$$

причем из условия соответствия точек A и A' имеем $\eta_m = 0$.

Уравнение связи между разными ξ , a и b мы можем преобразовать, приведя их к виду

$$1 \leq k \leq \frac{m}{2} - 1, \quad a_k = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m \xi_n \cos n \frac{2\pi}{m} k, \quad b_k = -\frac{2}{m} \sum_{n=1}^m \xi_n \sin n \frac{2\pi}{m} k,$$

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \xi_n, \quad b_0 = -\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} b_k,$$

$$a_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (-1)^n \xi_n.$$

Правильность преобразования легко проверить. Выразив ξ через a и b , для a_r (где $1 \leq r \leq \frac{m}{2} - 1$) получим:

$$a_2 = \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m \left[\cos n \frac{2\pi}{m} r \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \cos n \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin n \frac{2\pi}{m} k \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left[a_k \left(\sum_{n=1}^m \cos n \frac{2\pi}{m} r \cdot \cos n \frac{2\pi}{m} k \right) - \right.$$

$$\left. - b_k \left(\sum_{n=1}^m \cos n \frac{2\pi}{m} r \cdot \sin n \frac{2\pi}{m} k \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left[\frac{a_k}{4} \sum_{n=1}^m \left(e^{i \frac{2\pi}{m} n(k+r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} n(k-r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} n(-k+r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} n(-k-r)} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{b_k}{4i} \sum_{n=1}^m \left(e^{i \frac{2\pi}{m} n(k+r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} n(k-r)} - e^{i \frac{2\pi}{m} n(-k+r)} - e^{i \frac{2\pi}{m} n(-k-r)} \right) \right].$$

Это выражение можем упростить, так как:

$$\sum_{n=1}^m e^{cn} = e^c \frac{e^{cm} - 1}{e^c - 1};$$

получим:

$$a_2 = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left[a_k \left(e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} \frac{e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} - 1}{e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} - 1} + id_{(k-r)} + id_{(-k-r)} + id_{(-k-r)} \right) - \right. \\ \left. - \frac{b_k}{i} \left(e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} \frac{e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} - 1}{e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} - 1} + id_{(k-r)} - id_{(-k-r)} - id_{(-k-r)} \right) \right].$$

Если $k \neq r$, то знаменатели членов, стоящих в скобках (), в нуль не обращаются, числители же $e^{\frac{i2\pi}{m}(k+r)} - 1$ все равны нулю. Если $k = r$, то два средних члена становятся неопределенными; после раскрытия неопределенности из условия

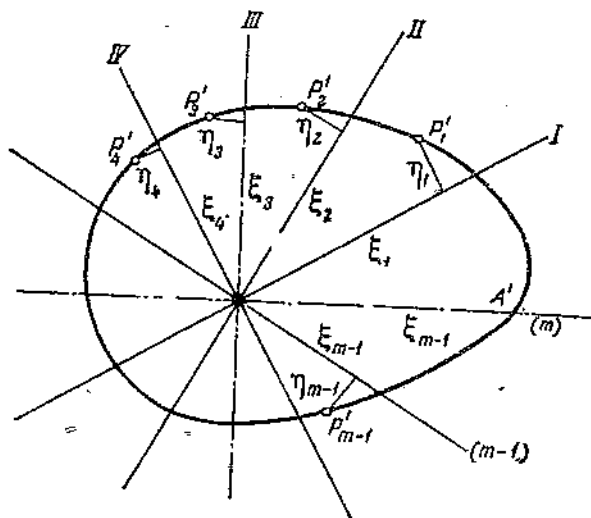
$$\sum_{n=1}^m e^{i\theta} = m, \text{ мы видим,}$$

что при b_2 множители взаимно погашаются, а при a_2 получается в сумме множитель $2m$, приводящий к тождеству.

Аналогичным путем убедимся в правильности выводов для b_k , a_0 и $a_{\frac{n}{2}}$.

Из условия $\eta_m = 0$ ($= b_0 = b_1 + \dots + b_{\frac{m}{2}-1}$) получаем

$$b_0 = - \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} b_k,$$



Черт. 17.

что касается до $b_{\frac{m}{2}}$, то через ξ его выразить нельзя, так как он входит во все выражения для ξ со множителем 0.

Ограничимся же полученными $(m+1)$ уравнениями для a_k при $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$ и для b_k при $0 \leq k \leq \frac{m}{2} - 1$.

Из рассмотренного мы видим, что если бы мы знали значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ на лучах I, II, ..., (m), то простым вычислением могли бы получить параметры a_k и b_k преобразующей функции.

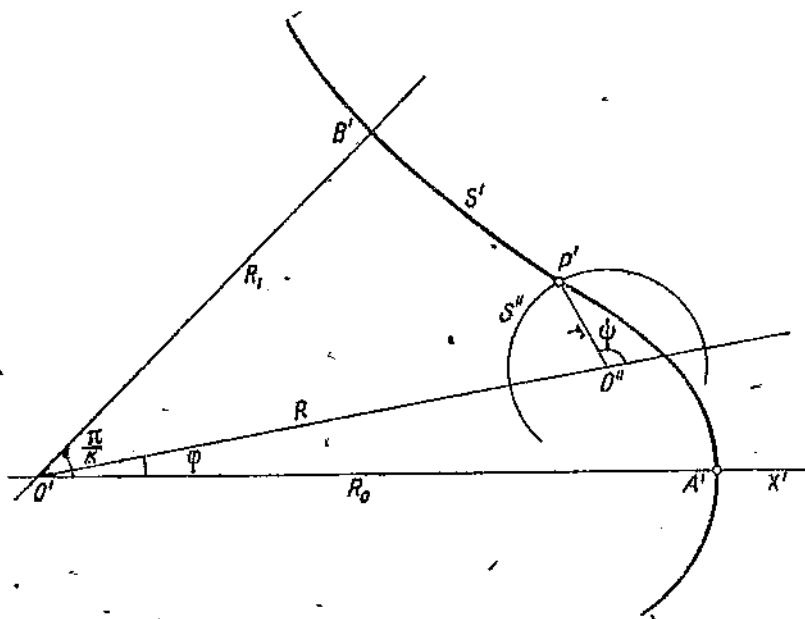
То же самое было бы, если бы знали положение на кривой S' точек $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$, так как, опустив из точки P'_n перпендикуляр на луч (n), мы имели бы значение ξ_n .

Но вся трудность задачи в том и заключается, что мы не знаем значений ξ_n и должны каким-то путем к ним подойти. Мы будем поступать таким образом: найдя графическим приемом (сущность которого мы сейчас рассмотрим) положение точек $P'_1, P'_2, \dots$ в первом приближении, мы вычислим, опустив перпендикуляры на лучи I—(m),

значения ξ также в первом приближении. По этим ξ получим все a и b ; по a и b вычислим η и затем, также особым приемом, получим новые значения ξ , но уже более точные. Повторяя цикл этих операций несколько раз, все более их уточняя, мы получим, наконец, достаточно точное решение.

§ 24. Графический прием, дающий положение точек P' в первом приближении, основан на учете свойств ряда:

$$\zeta = A(z + Bz^{1+p} + BCz^{1+2p} + \dots + BC^{n-1}z^{1+np} + \dots),$$



Черт. 18.

где A , B и C — вещественные, а p — целое; при этом $|C| < 1$. В этом ряде все члены, кроме первого, образуют геометрическую прогрессию; просуммировав их, получим:

$$\zeta = Az \frac{1 + (B - C)z^p}{1 + (-C)z^p}.$$

Для простоты записи обозначим

$$A = a; \quad B - C = b; \quad -C = c,$$

получим:

$$\zeta = az \frac{1 + bz^p}{1 + cz^p}.$$

Взятая нами функция дает преобразование окружности в кривую S' с p осями симметрии; при этом наличие трех параметров a , b и c делает этот класс кривых довольно обширным.

Функция эта имеет ту особенность, что для любой точки P окружности S , отображение ее — точку P' на кривой S' можно найти простым графическим построением (черт. 18).

Возьмем на кривой S' (относительно которой мы знаем, что конформное преобразование области при окружности S в область при кривой S' достигается функцией рассматриваемого нами вида) участок между двумя осями симметрии, расположив его так, чтобы одна из осей совпадала с осью $O'X'$, а другая лежала в области положительных значений угла. Допустим также, что расстояние от O' до кривой по оси $O'X'$ больше, чем по второй оси симметрии. Пусть расстояния эти будут $O'A' = R_0$ и $O'B' = R_1$. Возьмем на окружности S точку P с аргументом φ . Для отыскания ее отображения на S' — точки P' — сделаем следующее построение. Проведем из O' луч под углом φ к оси $O'X'$, отложим на нем отрезок $Q'O'' = R = \frac{R_0 + R_1}{2}$ и из точки O'' , как из центра, некоторым радиусом r опишем окружность S'' . Если взять подходящее значение r , то можно заставить окружность S'' пересечь кривую S' в точке P' .

Каков же должен быть радиус r ?

Для вывода обратимся к зависимости $\frac{\xi}{z} = \xi + i\eta$.

С одной стороны, мы будем иметь

$$\frac{\xi}{z} = a \frac{1 + bz^p}{1 + cz^p} = a \frac{1 + b \cos p\varphi + ib \sin p\varphi}{1 + c \cos p\varphi + ic \sin p\varphi}.$$

Обозначим для сокращения $p\varphi = \theta$; избавимся от комплексного знаменателя:

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{z} &= a \frac{(1 + b \cos \theta + ib \sin \theta)(1 + c \cos \theta - ic \sin \theta)}{(1 + c \cos \theta)^2 + c^2 \sin^2 \theta} = \\ &= a \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2} + ia \frac{b \sin \theta - c \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{\xi}{z} = \xi + i\eta = R + r \cos \psi + ir \sin \psi.$$

Выразим R через a , b и c . Имеем

$$R_0 = a \frac{1+b}{1+c}; \quad R_1 = a \frac{1-b}{1-c},$$

отсюда

$$R = \frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{a}{2} \left[\frac{(1+b)(1-c) + (1-b)(1+c)}{1-c^2} \right] = a \frac{1-bc}{1-c^2}.$$

Заодно выведем еще одну величину, которая пригодится нам впоследствии:

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{a}{2} \left[\frac{(1+b)(1-c) - (1-b)(1+c)}{1-c^2} \right] = a \frac{b-c}{1-c^2}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \xi &= a \frac{1-bc}{1-c^2} + r \cos \psi = a \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2}, \\ \eta &= r \sin \psi = a \frac{b \sin \theta - c \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned}$$

Для краткости обозначим $\frac{r}{a} = r_1$; тогда:

$$\begin{aligned} r_1 \cos \psi &= \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2} - \frac{1 - bc}{1 - c^2} = \\ &= \frac{(1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc)(1 - c^2) - (1 - bc)(1 + 2c \cos \theta + c^2)}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} = \\ &= \frac{b \cos \theta - c \cos \theta + 2bc - 2c^2 + bc^2 \cos \theta - c^3 \cos \theta}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} = \\ &= \frac{(b - c)(\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta)}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)}; \\ r_1 \sin \psi &= \frac{(b - c) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2} = \frac{(b - c)(1 - c^2) \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)}; \\ r_1^2 &= (r_1 \cos \psi)^2 + (r_1 \sin \psi)^2 = \\ &= \left[\frac{b - c}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} \right]^2 [(\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta)^2 + (1 - c^2)^2 (1 - \cos^2 \theta)] = \\ &= \left[\frac{b - c}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} \right]^2 (c^4 + 4c^3 \cos \theta + 2c^2 + 4c^2 \cos^2 \theta + \\ &\quad + 4c \cos \theta + 1) = \left(\frac{b - c}{1 - c^2} \right)^2; \end{aligned}$$

отсюда

$$r = ar_1 = \pm \frac{b - c}{1 - c^2} = \pm \frac{R_0 - R_1}{2}.$$

Итак, мы пришли к следующему выводу: окружность S'' нужно описывать радиусом, равным полуразности расстояний R_0 и R_1 от начала координат до кривой на соседних осях симметрии кривой S' .

§ 25. Рассмотрим некоторые свойства этого преобразования. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{(b - c) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2} = \frac{(b - c) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2} = \pm \frac{(1 - c^2) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}; \\ \cos \psi &= \frac{(b - c)(\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta)}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} = \pm \frac{\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned}$$

При $\varphi = \varphi_m = \frac{\pi}{2\rho}$ имеем $\theta = \theta_m = \frac{\pi}{2}$; $\cos \theta_m = 0$; $\sin \theta_m = 1$; отсюда

$$\sin \psi_m = \pm \frac{1 - c^2}{1 + c^2}; \quad \cos \psi_m = \pm \frac{2c}{1 + c^2}.$$

Для выбора знака $+$ или $-$ возьмем $\theta = \psi = 0$; тогда $\cos \psi = \pm 1$. Из черт. 19 видно, что $\cos \psi = +1$, так как мы расположили на оси $O'X'$ наиболее удаленную от O' точку кривой S' ; если бы мы поступили наоборот, то получили бы знак минус.

Итак, имеем

$$\sin \psi_m = \frac{1 - c^2}{1 + c^2}, \quad \cos \psi_m = \frac{2c}{1 + c^2}.$$

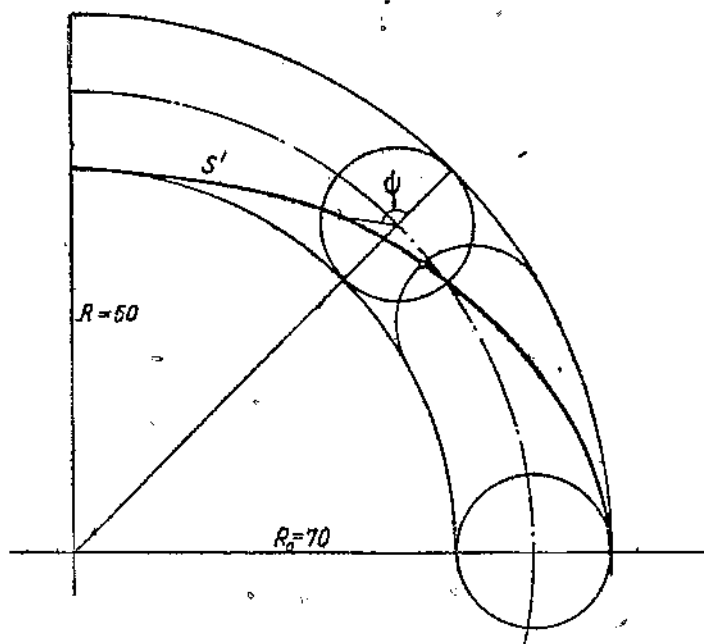
Так как $|c| < 1$, то $\sin \psi_m$ всегда будет положителен; это указывает, что из двух точек пересечения кривой S' с окружностью S'' нужно брать ту, которая ближе к началу координат (или, что то же самое,

ту, которая направлена в сторону уменьшения расстояния от кривой S' до начала координат). Решая относительно c , получим

$$c = \frac{1 - \sin \psi_m}{\cos \psi_m}.$$

Далее, имеем

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{1+c}{1-c},$$



Черт. 19.

откуда

$$b = \frac{\frac{1+c}{1-c} - \frac{R_1}{R_0}}{\frac{1+c}{1-c} + \frac{R_1}{R_0}},$$

и, наконец,

$$a = R_0 \frac{1+c}{1+b}.$$

Итак, по значениям R_0 , R_1 , $\sin \psi_m$ и $\cos \psi_m$ мы можем определить параметры кривой S' .

Для примера возьмем кривую S' черт. 19. Имеем две оси симметрии, $p = 2$, $\varphi_m = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Проводим окружности радиусами R_0 , R_1 , R и r ; с кривой снимаем

$$\sin \psi_m \approx 0,82; \quad \cos \psi_m \approx -0,57;$$

вычисляем

$$c \approx \frac{1-0,82}{-0,57} \approx -0,320;$$

Имея $R_0 = 70$ и $R_1 = 50$, получаем

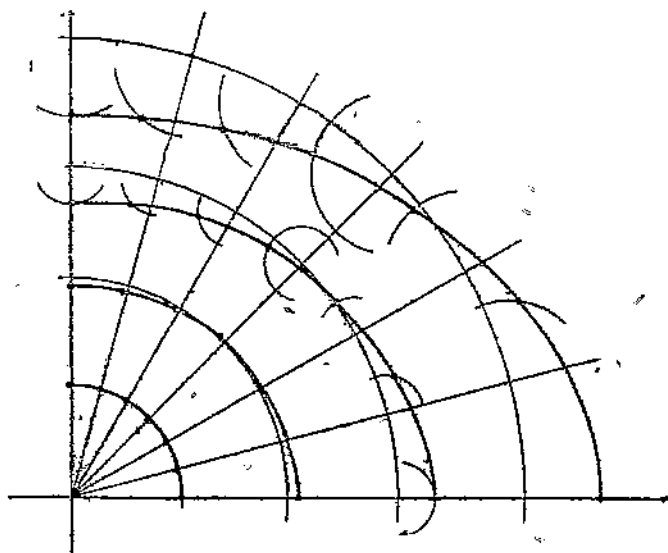
$$\frac{R_1}{R_0} = 0,714; \quad \frac{1+c}{1-c} = 0,516; \quad b = \frac{0,516 - 0,714}{0,516 + 0,714} \approx -0,161;$$

$$a = 70 \frac{1 - 0,320}{1 - 0,161} \approx 56,6.$$

Итак, получаем преобразующую функцию

$$\zeta = 56,6z \frac{1 - 0,161z^2}{1 - 0,320z^2}.$$

Проверим наш вывод для значения $\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$.



Черт. 26.

Из ур-ния имеем

$$\zeta = 56,6 (0,866 + 0,5i) \frac{1 - 0,161 (0,500 + 0,866i)}{1 - 0,320 (0,500 + 0,866i)} = 46,0 + 38,0i.$$

Ту же точку дает нам и построение (обведена кружком).

Этим же построением можно получить и отображения точек, лежащих внутри области.

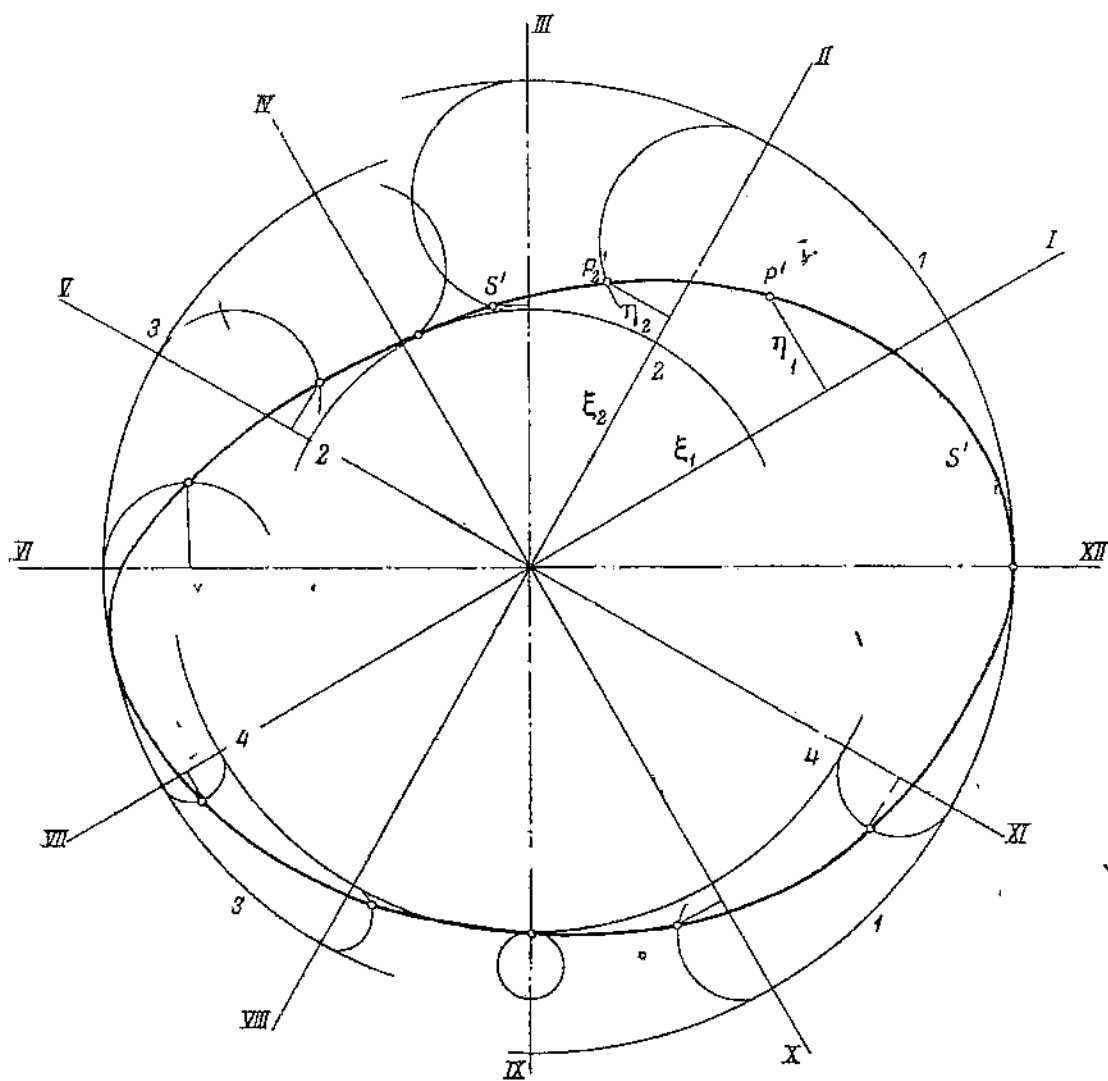
Для окружности радиуса не единица, а ρ ($\rho < 1$) мы получим

$$\zeta = a\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{1 + b\rho^2 (\cos p\varphi + i \sin p\varphi)}{1 + c\rho^2 (\cos p\varphi + i \sin p\varphi)},$$

и все правила нашего построения останутся в силе, но только будем иметь

$$R_\rho = a\rho \frac{1 - \rho^{2p}bc}{1 - \rho^{2p}c^2}; \quad \sin \psi_{m,\rho} = \frac{1 - \rho^{2p}c^2}{1 + \rho^{2p}c^2};$$

$$r_\rho = a\rho^{1+p} \frac{b-c}{1 - \rho^{2p}c^2}; \quad \cos \psi_{m,\rho} = \frac{2\rho^{2p}c}{1 + \rho^{2p}c^2},$$



причем по прежнему

$$R_{0,p} = R_p + r_p; \quad R_{1,p} = R_p - r_p.$$

Строим кривую S_p' , в которую переходит окружность радиуса p , по значениям $R_{0,p}$, $R_{1,p}$, $\sin \psi_{m,p}$; при этом облегчает построение то обстоятельство, что на осях симметрии кривая нормальна к ним. Засекаем кривую S_p' окружностью S_p'' радиуса r_p . Таким образом для разных значений p и φ получаем поле точек; через эти точки и проводим кривые, в которые преобразовались радиусы к окружности.

Для кривой черт. 19 возьмем значения

$$p = 0,75; 0,5; 0,25;$$

$$\varphi = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ.$$

Имея $a = 56,6$; $b = -0,161$; $c = -0,320$ и $p = 2$, получим:

$$R_p = 56,6p \frac{1 - 0,051p^4}{1 - 0,102p^4};$$

$$r_p = 56,6p^3 \frac{0,159}{1 - 0,102p^4} = \frac{9,0p^3}{1 - 0,102p^4};$$

$$\sin \psi_{m,p} = \frac{1 - 0,102p^4}{1 + 0,102p^4};$$

$$\cos \psi_{m,p} = \frac{-0,640p^2}{1 + 0,102p^4}.$$

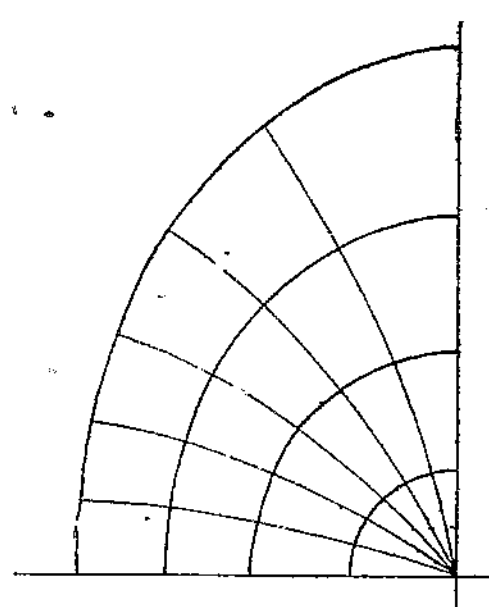
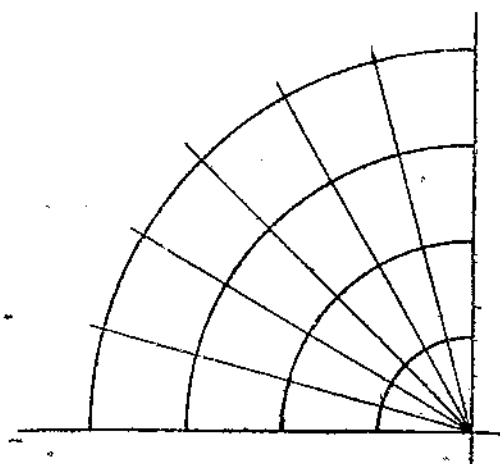
Составим табличку

$p = 0,75$	$R_p = 43,2$	$r_p = 3,9$
0,50	28,5	1,1
0,25	14,2	0,2

$\cos \psi_{m,p} = -0,35$	$\psi_{m,p} = 110,5^\circ$
-0,16	99,2°
-0,04	92,

Производим построение (черт. 20).

Соединяя полученные точки, получаем черт. 21, дающий сравнение расположения линий у областей при окружности и при кривой. Уже для $p = 0,5$ влияние r весьма мало, а для $p = 0,25$ оно совсем неощутимо.

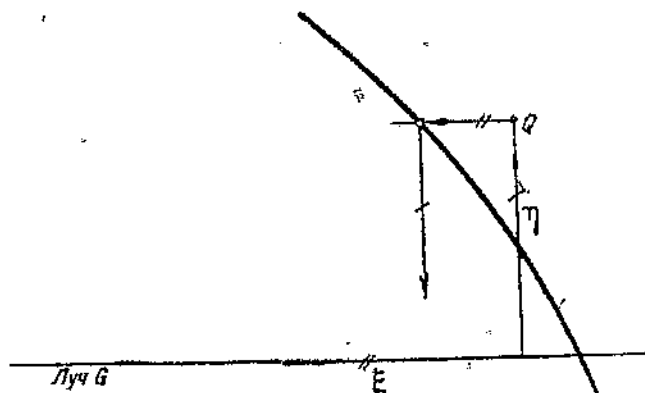


Черт. 21.

§ 26. Мы рассмотрели применение графического преобразования в случае, когда оно давало точное решение.

Теперь применим это построение для того, чтобы получить в общем случае первое приближение расположения точек P' .

Возьмем для примера кривую S' черт. 22. Рассмотрим на ней участки между соседними максимумом и минимумом расстояния от начала координат. Считая каждый участок независимым друг от друга, мы можем построить для него окружности радиусов R_0, R_1, R, r и получить расположение точек P' . Так, мы можем рассмотреть участки между окружностями 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1. Опустив из полученных точек перпендикуляры на лучи $I-(m)$ (на нашем примере взято $m=12$), будем называть эти лучи — „ф-лучами“, мы получим m значений ξ . Так как в действительности все участки кривой S' связаны между собою,



Черт. 23.

то полученные значения ξ будут не точными, а дадут лишь первое приближение, которое мы будем уточнять.

По формулам для a_k и b_k вычислим эти параметры по имеющимся ξ_n ; по a_k и b_k вычислим η_n . Они не совпадут с имеющимися η ; отложим полученные η_n от концов отрезков ξ_n (черт. 23); концы отрезков η_n не придутся на кривую, а будут где-то вне ее, определяя собою некоторые точки Q_n .

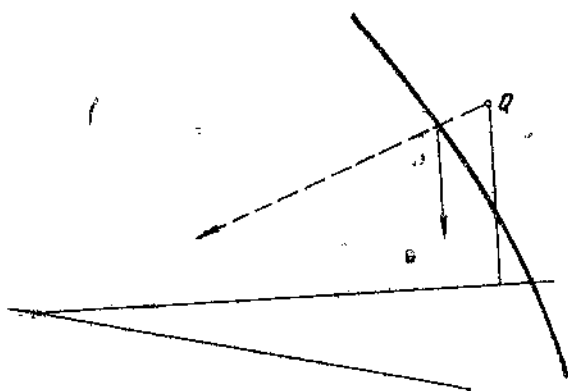
Точки Q_n надо как-то снести на кривую S' . Можно предложить три способа сноса их:

1. Перенести точку Q_n на кривую S' параллельно лучу φ_m , т. е. не меняя значения η_n (черт. 23).
2. Перенести ее лучом, направленным к началу координат (см. черт. 24).
3. Перенести ее лучом, нормальным к кривой S' (см. черт. 25).

Во всех трех случаях из полученной на кривой S' точки опускается перпендикуляр на луч φ , определяющий новое значение ξ_n .

Первый прием, когда мы от одних значений η переходим к другим, соответствует методу итерации. Второй прием основан на том, что при всех $\xi=0$ и все η также равны нулю; следовательно, если при одном сочетании ошибок в значениях ξ мы получаем точку Q , а при другом точку O' — начало координат, то точное решение задачи нахождения

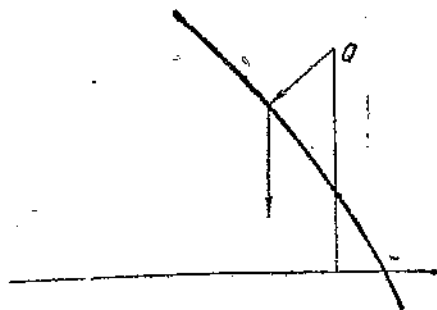
точки P' можно искать в пересечении кривой S' и какой-то кривой, проходящей через точки O' и Q . По способу *regula falsi* в таких случаях проводится прямая, что мы и делаем. Перенос точки третьего приема дает правильное решение в том случае, если и кривая S' и геоме-



Черт. 24.

трическое место точек Q — концентрические окружности; в других же случаях он также не вполне точен.

Трудно а priori сказать, какой прием из трех эффективнее в смысле получения большей скорости сближения последовательных результатов. Наиболее прост, конечно, первый, в особенности, если применять прозрачную палетку (черт. 26), которую движут по лучу φ до пересечения шкалы η с кривой S' в соответствующем отсчете. При этом даже не нужно проводить линий η , а достаточно прочесть на палетке же отсчет ξ . Это сильно упрощает расчет, потому мы и будем пользоваться именно этим приемом до тех пор, пока накопление опытного материала не укажет преимущества второго или третьего способов переноса точек Q на кривую S' .



Черт. 25.

Итак, расчет, после получения первого приближения графическим путем, будет заключаться в последовательных циклах вычисления значений ξ , a , b , η ; от η графически переходим к новым ξ и т. д.

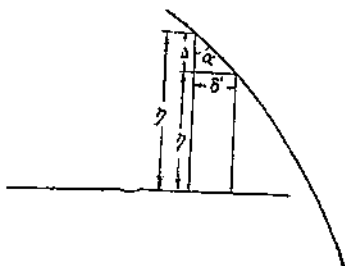
Пусть в некотором приближении мы для ξ вместо точных значений получили приближенные значения $\xi + \delta$. Ошибки δ вызовут наличие ошибок и в вычисляемых η , которые получатся равными $\eta + \Delta$. Это в свою очередь вызовет в новом цикле вычислений ошибки в ξ , равные, примерно, $\delta' \approx \Delta \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между направлениями кривой в точке P' и отрезка η или, что то же, угол между нормалью к кривой и лучом φ (на черт. 27 угол α отрицателен).

Чем быстрее будут убывать величины δ , δ' , δ'' и т. д., тем меньше циклов потребуется для получения достаточно точного решения.

§ 27. Выясним, как отражаются погрешности δ на Δ , причем для простоты вывода рассмотрим влияние одной погрешности δ_n на некоторое Δ_r , а потом рассмотрим уже общее влияние всех погрешностей δ .

Из формулы для η имеем

$$\begin{aligned} \eta_r &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \sin \frac{2\pi}{m} rk + b_k \cos \frac{2\pi}{m} rk \right) = \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(a_k \sin \frac{2\pi}{m} rk + b_k \cos \frac{2\pi}{m} rk \right). \end{aligned}$$



Черт. 27.

Имея $b_0 = -\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} b_k$ и пренебрегая коэффициентом $b_{\frac{m}{2}}$, перепишем

$$\begin{aligned} \eta_r &= \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \left[a_k \sin \frac{2\pi}{m} rk + b_k \left(\cos \frac{2\pi}{m} rk - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \left[\sum_{n=1}^m \xi_n \cos \frac{2\pi}{m} nk \cdot \sin \frac{2\pi}{m} rk - \sum_{n=1}^m \xi_n \sin \frac{2\pi}{m} nk \left(\cos \frac{2\pi}{m} rk - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Переходя от самих величин ξ и η к их погрешностям δ и Δ и учитывая пока влияние лишь одной погрешности δ_n , получим

$$\begin{aligned} \Delta_{r,n} &= \frac{2}{m} \delta_n \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \left(\sin \frac{2\pi}{m} rk \cdot \cos \frac{2\pi}{m} nk - \cos \frac{2\pi}{m} rk \cdot \sin \frac{2\pi}{m} nk - \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{2\pi}{m} nk \right) = \frac{2}{m} \delta_n \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \left(\sin \frac{2\pi}{m} k(r-n) + \sin \frac{2\pi}{m} nk \right). \end{aligned}$$

Мы можем заменять $\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}$ на $\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}$, так как прибавляемые члены равны нулю; тогда, переходя к показательным функциям, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{r,n} &= \frac{\delta_n}{im} \sum_{k=0}^n \left(e^{i \frac{2\pi}{m} k (r-n)} - e^{-i \frac{2\pi}{m} k (r-n)} + e^{i \frac{2\pi}{m} nk} - e^{-i \frac{2\pi}{m} nk} \right) = \\ &= \frac{\delta_n}{im} \left(\frac{e^{i \frac{2\pi}{m} (r-n)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m} (r-n)} - 1} - \frac{e^{-i \frac{2\pi}{m} (r-n)} - 1}{e^{-i \frac{2\pi}{m} (r-n)} - 1} + \frac{e^{i \frac{2\pi}{m} n} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m} n} - 1} - \frac{e^{-i \frac{2\pi}{m} n} - 1}{e^{-i \frac{2\pi}{m} n} - 1} \right) = \\ &= \frac{\delta_n}{im} \left\{ [(-1)^{r-n} - 1] \left[\frac{1}{e^{i \frac{2\pi}{m} (r-n)} - 1} - \frac{1}{e^{-i \frac{2\pi}{m} (r-n)} - 1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + [(-1)^n - 1] \left[\frac{1}{e^{i \frac{2\pi}{m} n} - 1} - \frac{1}{e^{-i \frac{2\pi}{m} n} - 1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Применив преобразование

$$\frac{1}{e^{i2\varphi} - 1} - \frac{1}{e^{-i2\varphi} - 1} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi},$$

получим -

$$\Delta_{r,n} = \frac{\delta_n}{m} \left[\frac{1 - (-1)^{r-n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} (r-n)} + \frac{1 - (-1)^n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} n} \right].$$

Числители членов, стоящих в скобках, принимают значения 0 и 2, следовательно, при достаточно большом m можем без особой ошибки принять их в среднем за 1; тогда

$$\Delta_{r,n} \approx \frac{\delta_n}{m} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} (r-n)} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} n} \right).$$

Проанализируем это выражение. Мы видим, что малая погрешность δ_n может вызвать большую погрешность $\Delta_{r,n}$ в двух случаях:

- 1) когда n мало, и угл $\frac{\pi}{m} n$ близок к нулю;
- 2) когда n близко к r , и близок к нулю угол $\frac{\pi}{m} (r-n)$.

Но это несущественно; в самом деле, возьмем погрешности δ_n и δ_{-n} в точках, близких к нулю и расположенных симметрично по разные стороны от него.

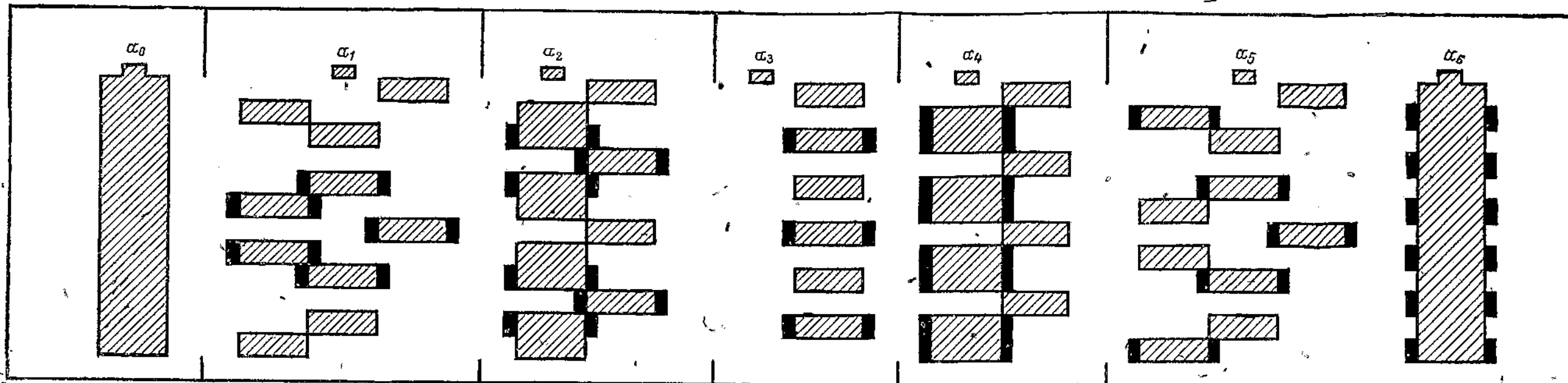
Пусть

$$\delta_{-n} = \delta_n + \varepsilon.$$

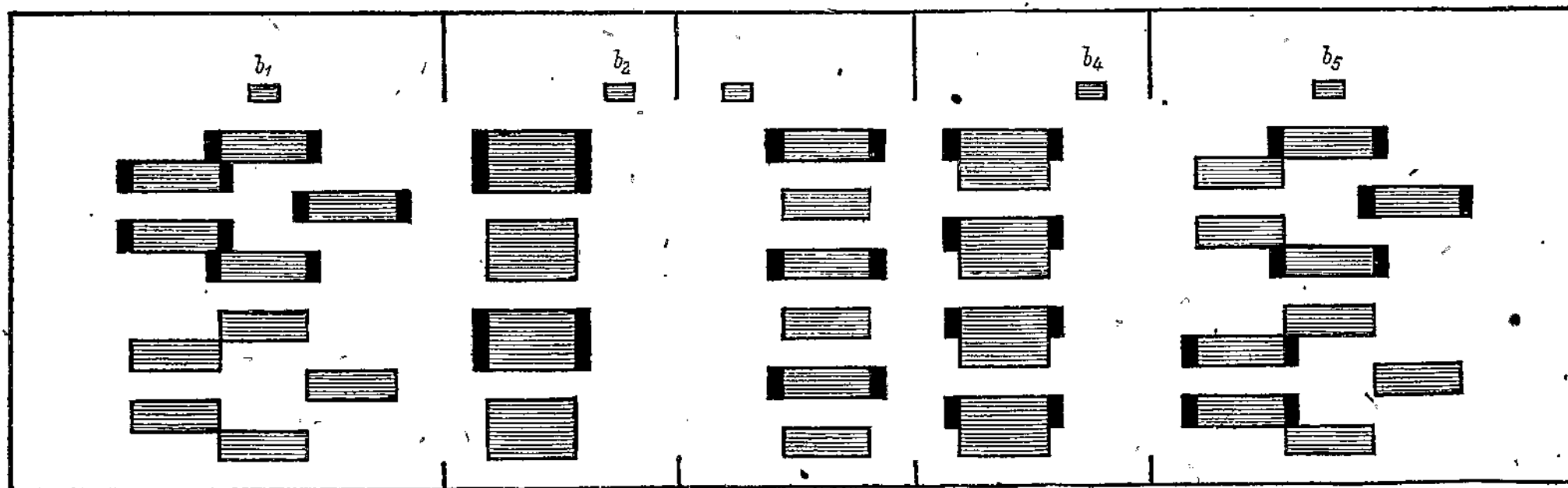
Пренебрегая первым членом $\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} (r-n)}$, получим

$$\Delta_{r,n} + \Delta_{r,-n} \approx \frac{1}{m} \left[\frac{\delta_n}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} n} + \frac{\delta_n + \varepsilon}{\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{m} n \right)} \right] = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} n}.$$

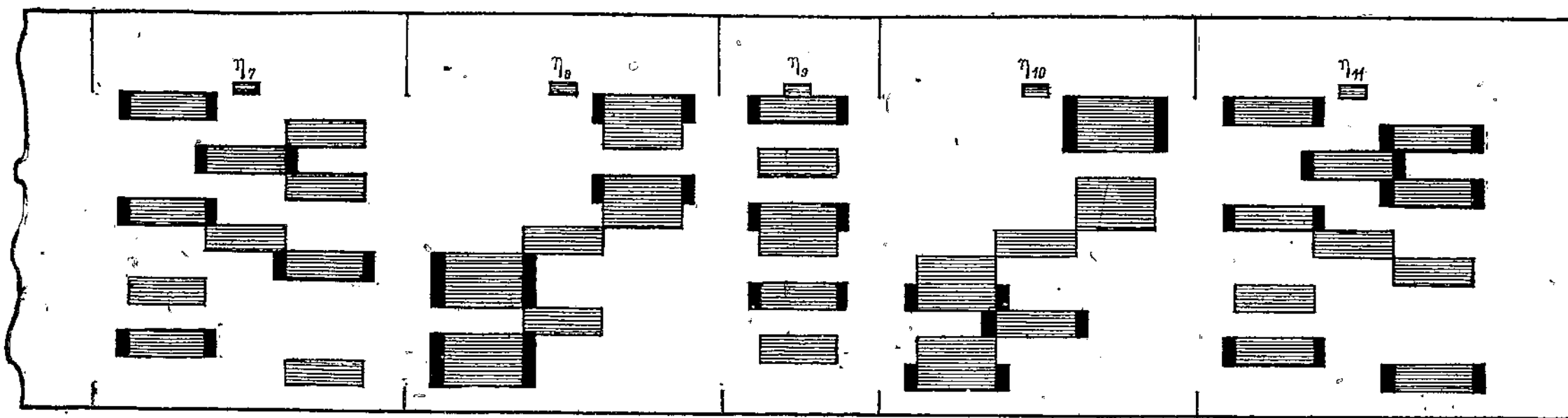
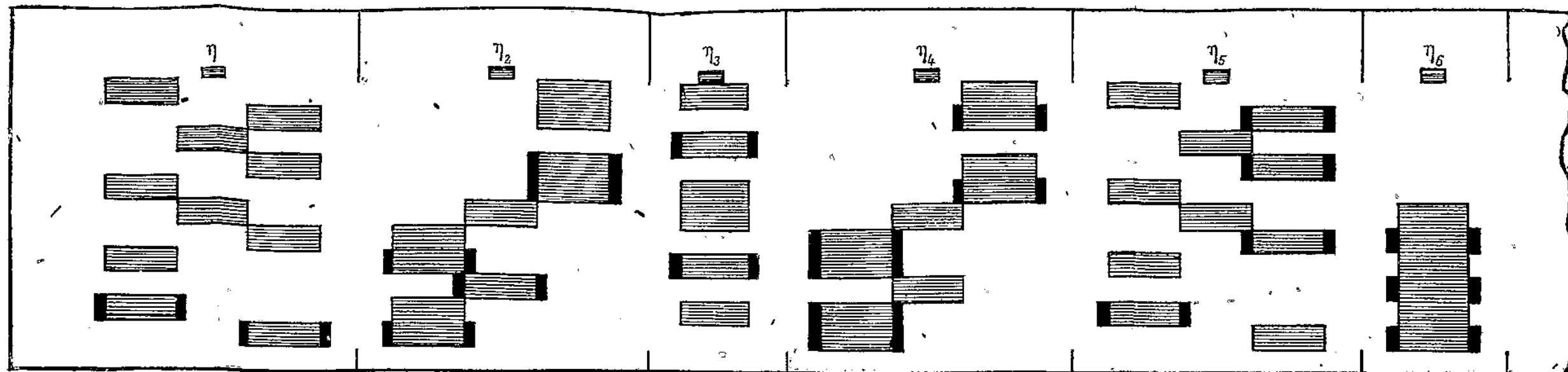
Как видим, погрешности δ_n и δ_{-n} погашают друг друга в смысле влияния на $\Delta_{r,n}$, и остающаяся часть их, у которой с приближением n к нулю стремятся к нулю и числитель и знаменатель, расчету не вредит.

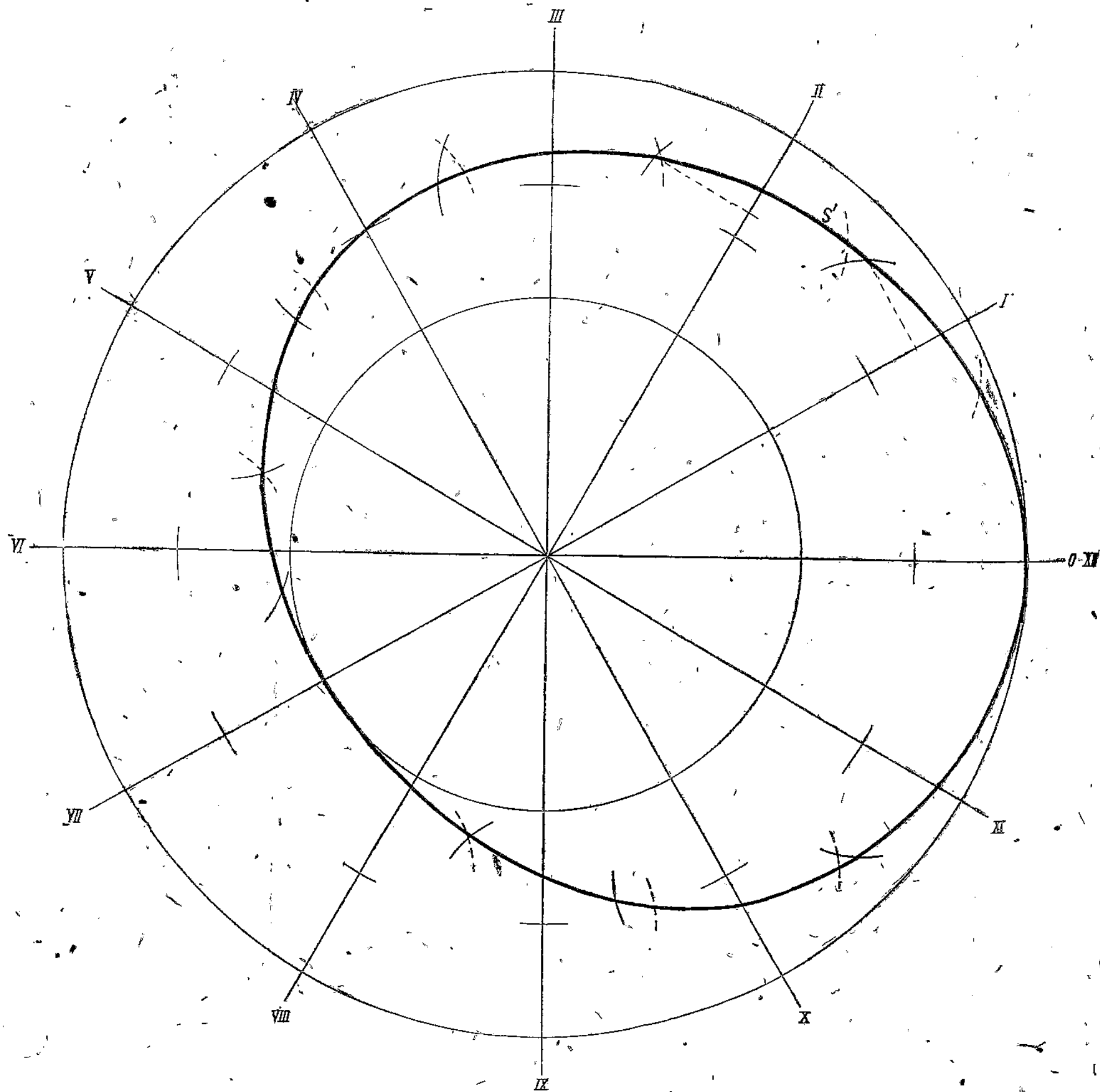


Черт. 28.



Черт. 29.





$\Delta_{r,1}$ $= \frac{\delta_n}{im}$

	1,732	1	2	1,732	1	2
1	—	115,5	231	—	115,5	231
2	181	104,5	209	180	104	208
3	167	96,5	193	167	96,5	193
4	—	88	176	—	88	176
5	132,5	76,5	153	132,5	76,5	153
Пример 4	115	66,5	133	115	66,5	133
5	—	62	124	—	62	124
получи 3	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
5	108	62,5	125	108	62,5	125
5	—	68	136	—	68	136
3	143	82,5	165	143	82,5	165
Числит 4	176,5	102	204	177,5	102,5	205
довате						
принят 2	986		82,2	986		82,2
4	767,5	484,5	283	767,5	484,5	283
2	689,5	630	59,5	689,5	630	59,5
2	509	482	27	509	482	27
Проана 2	667	652,5	14,5	667	652,5	14,5
может 2,9	631,5	620,5	11	631,5	620,5	11
1) 3,4	495,5	490,5	5	495,5	490,5	5
2)						
Но 4	550,5	646,5	-96	551	646	-95
в 2	567	562,5	4,5	568	561,5	6,5
ые ст 1	503	478	2,5	504	477	2,7
Пу 6	506,5	563	3,5	567,5	562	5,5
Пренеб 2	599	598	1	599,5	597,5	2
3			5,1			4,5

 Δ_r

Как в
яния
к нулю

Аналогично, увидим для значений $n = r + \sigma$ и $n = r - \sigma$, где σ — малое число, что влияние на Δ_r величин $\delta_{r+\sigma}$ и $\delta_{r-\sigma}$ также взаимно погашается.

Таким образом в смысле быстроты сходимости главную роль играет $\lg \alpha$: чем меньше α во всех точках, тем быстрее мы получим точный результат. Но полученное выражение зависимости погрешностей в η от погрешностей в ξ имеет другое важное значение — оно указывает, что если полученная преобразующая функция отображает окружность на кривую, весьма близкую к заданной, то малые отклонения от контура S' по нормали к нему влекут за собою малые же и тангенциальные отклонения, а следовательно, не будет значительной и погрешности в определении координат точек внутри области D' . К этому мы еще вернемся, теперь же перейдем к технической стороне вычислений.

Совершенно очевидно, что без систематизации вычислительных операций расчет будет длителен и кроме того недостоверен, так как возможны будут различные ошибки.

§ 28. Рассмотрим образец систематизированного расчета для случая $m = 12$.

Сперва нужно изготовить себе палетки с вырезанными в них окнами (черт. 28, 29 и 30), а затем бланки для вычислений (черт. 32). На бланке верхняя часть служит для вычисления по ξ параметров a и b , а нижняя — для вычисления по a и b значений η .

Возьмем для примера кривую, изображенную на черт. 31. Сперва графическим построением получают первые значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{12}$ и записывают их в бланк умноженными на 1, 1,732 ($= \sqrt{3}$) и на 2. Операции эти делаются на логарифмической линейке, с точностью до 0,5 мм (при точных расчетах можно довести точность до 0,1 мм, здесь же достаточно и этой), и соответствуют умножению на $2 \cos 60^\circ$, 30° и 0° — углов, встречающихся в расчете, а также и на $\sin$ этих углов. Затем накладывают на бланк палетку для a_0 (черт. 28), суммируют все числа, стоящие в прорези, получают Σ для a_0 и записывают ее (982,5). Черный прямоугольник служит для ориентировки накладываний. Σ , деленная на 12, дает a'_0 (с точностью до 0,1 мм). Затем накладывают палетку для a_1 , суммируют все числа, стоящие в незачерненных окошках, получают $\Sigma +$, а в зачерненных получают $\Sigma -$; $(\Sigma +) - (\Sigma -) = D$,

а $\frac{D}{12}$ равно a_1 . Механизм здесь ясен: $a_1 = \frac{2}{12} \sum_{n=0}^{11} \xi_n \cos(30n)^\circ$; на 2 $\cos$

мы умножаем, подбираем отдельно произведения положительные ($\Sigma +$) и отрицательные ($\Sigma -$) и складываем; получаем D , а затем делим на 12.

Точно так же поступаем со всеми a и b ; затем вписываем полученные значения a и b в нижнюю часть и умножаем их на 0,5 и 0,866, т. е. опять-таки на $\sin$ и $\cos$ нужных углов.

Накладывая палетки η , получаем $(\Sigma +)$ и $(\Sigma -)$; их разность D дает η .

Получив η графически, определяем новые значения ξ и т. д.

Судить о приближении вычислений к результату можно лучше всего по сумме абсолютных значений разностей между ξ двух соседних приближений. Так, в нашем примере эта сумма равна сперва

$$(115,5 - 115,5) + (101,5 - 104,5) + (94,5 - 97,5) \dots = 12,5.$$

Затем она равна последовательно 8,5; 5,5; 3; 1; получив такое ничтожное изменение значений ξ , мы прекращаем подсчет, получив преобразующую функцию

$$\zeta \approx (82,2 + 4,5i)z + (23,6 - 7,9i)z^2 + (5,0 + 0,5i)z^3 + (2,2 + 2,2i)z^4 + (1,2 + 0,5i)z^5 + (0,9 + 0,2i)z^6 + 0,4z^7 \quad (\text{в м.м.}).$$

При сравнении этой функции с предыдущим приближением, мы видим, что все коэффициенты почти тождественны за исключением b_0 , но b_0 дает сумму всех прочих b , и чтобы получить и его точнее, нужно вести весь расчет с большей точностью, измеряя η до 0,1 м.м.

§ 29. Рассмотрев пример § 28, мы можем перейти к решению задачи для внешних областей, т. е. для функции вида

$$\zeta = \sum_{k=0}^n \gamma_k z^{1-k}.$$

Тогда получим

$$\xi = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

$$\eta = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (b_k \cos k\varphi - a_k \sin k\varphi).$$

Из этих выражений мы видим, что

- 1) зависимость a от ξ не меняется;
- 2) b получаются с иным знаком;
- 3) при получении η , a берутся со знаком минус и больше ничего не меняется.

Для первого приближения можно также воспользоваться графическим построением, поскольку мы рассматривали его для любого целого p и оно может быть и отрицательным, т. е. функция станет

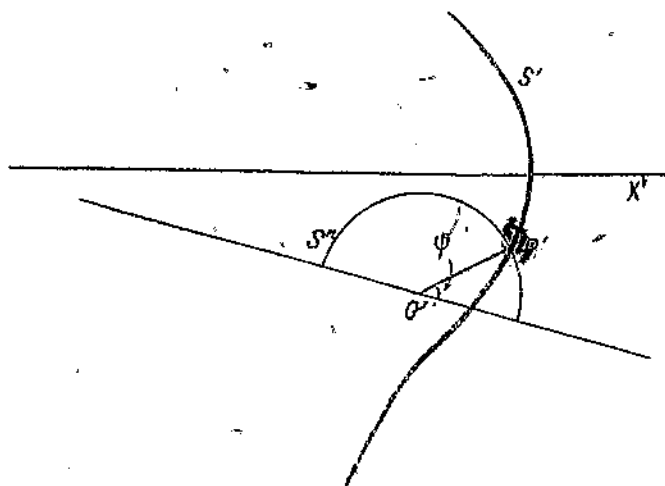
$$\zeta = az \frac{1 + bz^{-p}}{1 + cz^{-p}}.$$

При этом только нужно будет брать другую точку пересечения окружности S'' с кривой S' , а именно — более удаленную от начала координат. Произойдет это оттого, что при $z = \cos \varphi - i \sin \varphi$ лучи φ будут идти в обратную сторону, а при положительном $\sin \varphi$ черт. 33, сравнить его с черт. 18 в нашем случае) придется взять вторую точку пересечения.

В основном расчете, вместо того чтобы менять нумерацию лучей φ (I вместо XI и т. д.), мы изменили формулы. Удобнее менять в расчете знак, чем нумерацию.

Для случая отображения внешних областей при кривой черт. 31 сделан расчет — черт. 34. Как и говорилось, для b берется не $\frac{D}{12}$, а $-\frac{D}{12}$; и при получении η записываются не a , а $-a$.

В этом случае сходимость получилась исключительная, уже первое же графическое построение дает результат с вполне достаточной точностью. Произошло это оттого, что в точках P' нормаль к кривой была всюду почти параллельна лучу φ , и $\delta' = \Delta \operatorname{tg} \alpha$ было почти нулевое.



Черт. 33.

§ 30. Теперь рассмотрим случай применения функций ξ и η для кривых с p осями симметрии, когда преобразующая функция имеет вид

$$z = \sum_{k=0}^n a_k z^{1+kp}$$

и обуславливаемые несимметричностью контура S' параметры b отсутствуют. Имеем тогда

$$\xi = \sum_{k=0}^n a_k \cos k p \varphi,$$

$$\eta = \pm \sum_{k=0}^n a_k \sin k p \varphi.$$

Здесь знак $+$ ставится при отображении внутренних областей, $-$ — при отображении внешних.

Возьмем угол между соседними осями симметрии, равный $\frac{\pi}{p}$, и разделим его на m частей, равных $\frac{\pi}{pm}$; мы получим

$$\xi_n = \sum_{k=0}^n a_k \cos \frac{\pi}{pm} nkp = \sum_{k=0}^n a_k \cos \frac{\pi}{m} nk,$$

$$\eta_n = \pm \sum_{k=0}^n a_k \sin \frac{\pi}{pm} nkp = \pm \sum_{k=0}^n a_k \sin \frac{\pi}{m} nk,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{2m} [\xi_0 + \xi_m] + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \xi_n; \quad a_m = \frac{1}{2m} [\xi_0 + (-1)^m \xi_m] + \\ + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} (-1)^n \xi_n; \\ 1 \leq k \leq m-1, \quad a_k = \frac{1}{m} [\xi_0 + (-1)^k \xi_m] + \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \xi_n \cos \frac{\pi}{m} nk.$$

Как видим, p отражается лишь на расположении лучей φ , расчет же для любого числа осей симметрии не меняется. Точно так же и при оперировании с внешними или внутренними областями вся разница расчета заключается в знаке $+$ или $-$ при записи в бланк величин a для вычисления η . Для случая $m=6$ палетки даны на черт. 35 и 36, а бланк — на черт. 38. Заполнен он расчетом для внутренней области эллипса с полуосями 100 и 150 мм (черт. 37). Полученная преобразующая функция

$$\zeta = 115,8z + 20,6z^3 + 6,8z^5 + 3,2z^7 + 1,7z^9 + 1,2z^{11} + 0,7z^{13}.$$

Степени идут через две, так как у эллипса 2 оси симметрии. Еще один пример дан для внешней области квадрата со стороной в 200 мм; осей симметрии — 4 (черт. 39 и бланк 40). Преобразующая функция

$$\zeta = 118,1z - 19,8z^3 + 2,2z^7 - 0,7z^{11} + 0,5z^{15} - 0,2z^{19}.$$

И, наконец, последний пример — контур ватерливии [отображение внешних областей (черт. 41 и бланк 42)].

Преобразующая функция

$$\zeta = 55,2z + 2,6z^3 + 43,2z^5 - 2,5z^7 + 1,3z^9$$

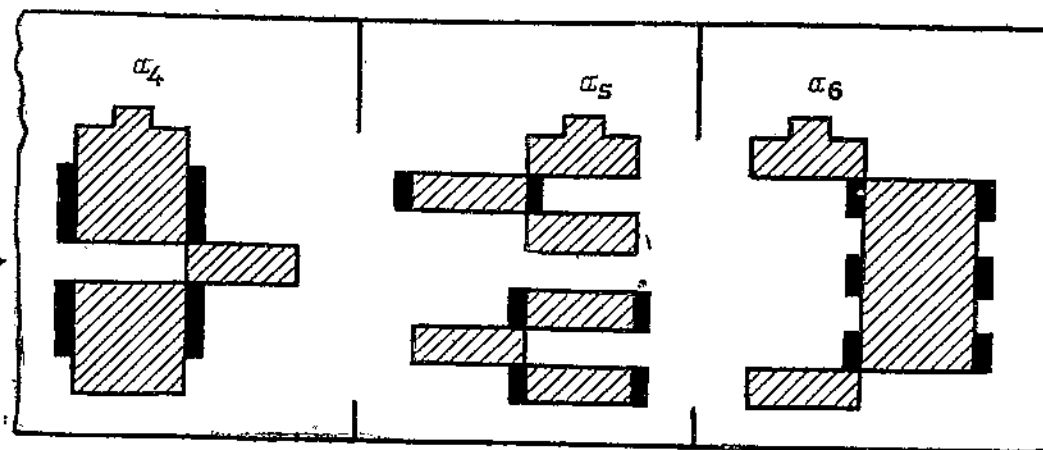
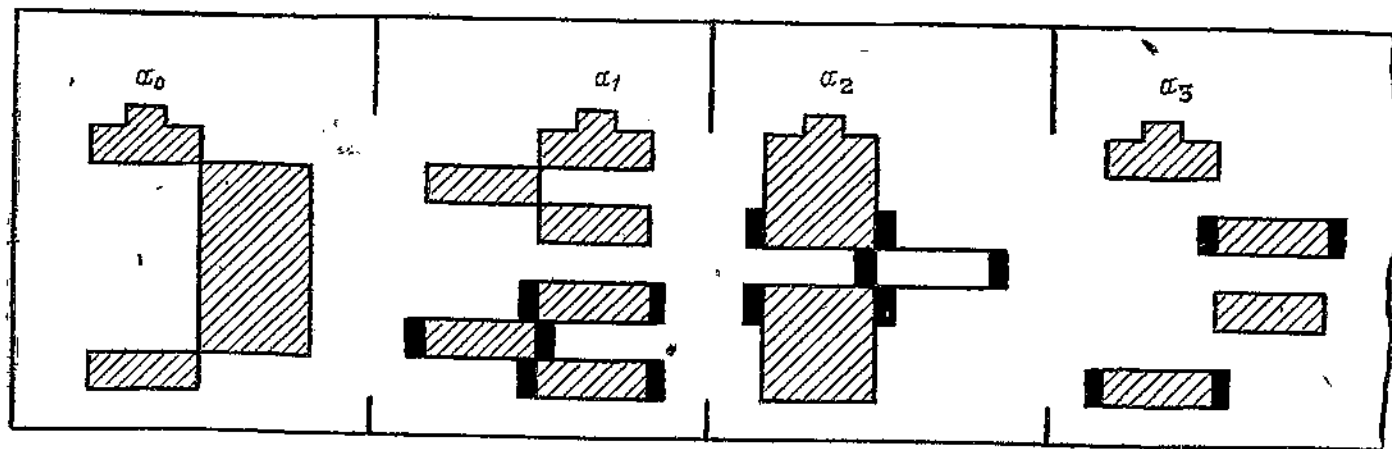
(последнего члена с z^9 можно не учитывать).

§ 31. Во всех этих примерах я нарочно не касался вопроса о том, отображает ли полученная функция окружность действительно на данную кривую S' или же на некоторую кривую S'' , имеющую с S' m общих точек, но в прочих точках не совпадающую с ней.

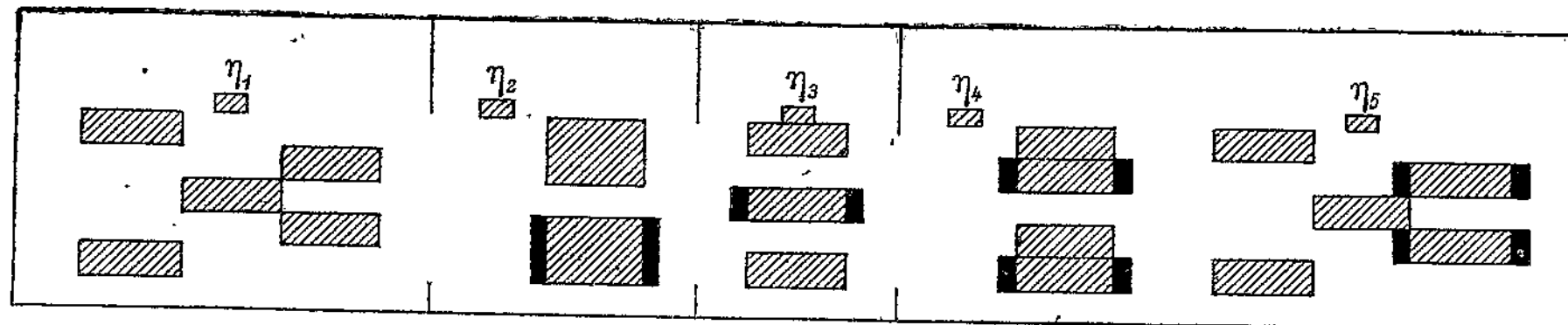
Проверку этого можно сделать, вычислив для точек окружности, лежащих между отображаемыми m точками, их новые координаты. Если ряд сходится в пределах вычисленных членов, то весьма вероятно, что дальнейшие члены не будут сколько-нибудь ощутительно заметны и вычисленные координаты дадут точки на кривой S' . Этот случай как раз встречается во всех рассмотренных примерах.

В том же случае, если последние из вычисленных a и b не равны практически нулю, то мы безусловно не получим точного отображения окружности на кривую S' . Но и это тоже нестрашно, так как, с одной стороны, таких случаев не столь уж и много, а кроме того, и здесь можно добиться уточнения — правда ценою значительной затраты времени.

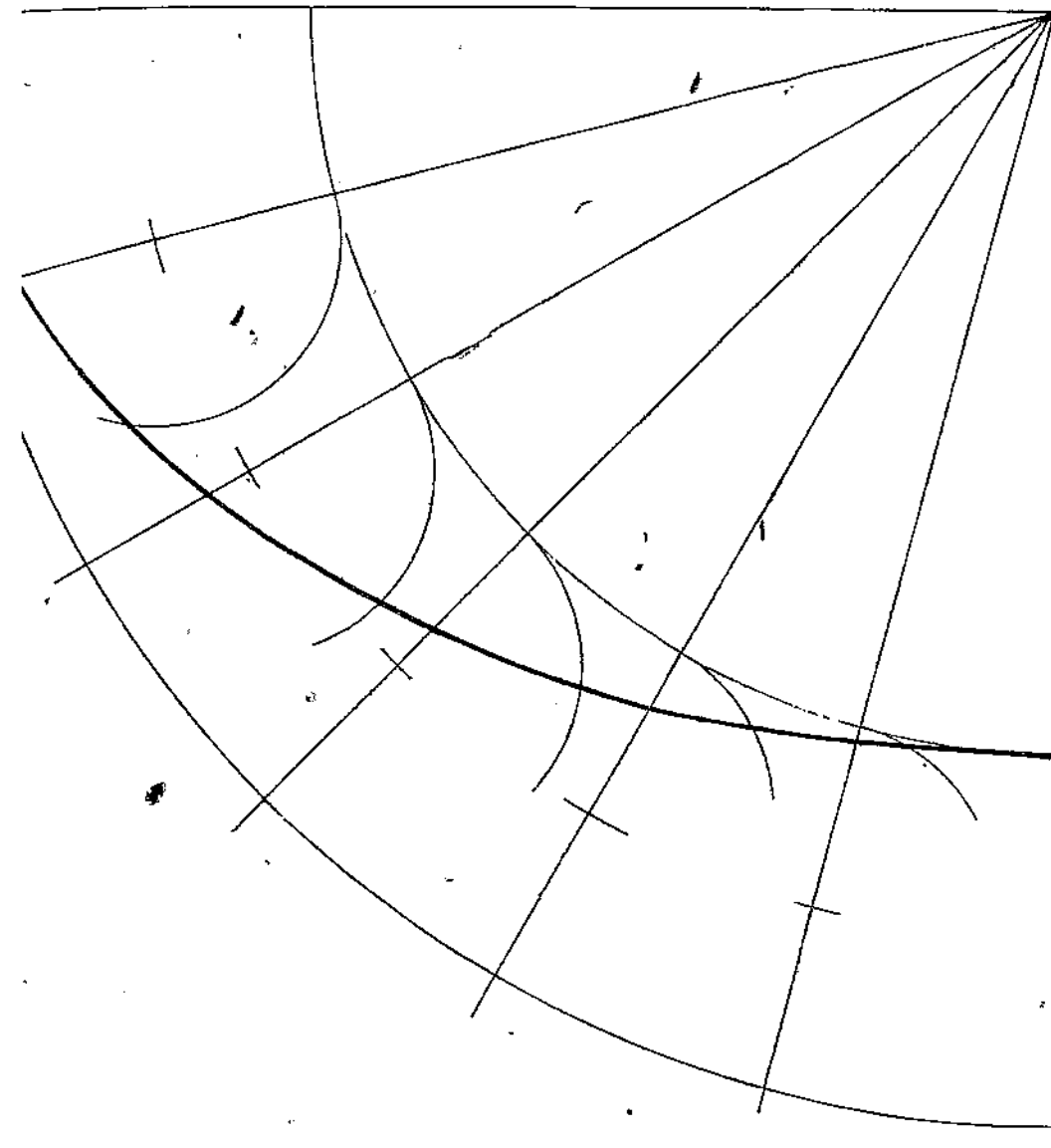
ξ_K		1,732	1	2	1,732	1	2
$K=0$ (=12)		—	115,5	231	—	115,5	231
1		190,5	110	220	190,5	110	220
2		174	100,5	201	174	100,5	201
3		—	95	190	—	96,0	192
4		154	89	178	155	89,5	179
5		138,5	80	160	138,5	80	160
6		—	68,5	137	—	68,5	137
7		106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
8		116	67	134	116	67	134
9		—	84	168	—	84	168
10		173	100	200	173	100	200
11		191	110,5	221	191	110,5	221
Σ		1081,5		90,1	1083		90,2
α_0	12	813	538	275	813	538,5	274,5
α_1		730	714,5	155	730	717	15
α_2		543	538	5	544	538	5
α_3	12	726	718,5	7,5	728	719	9
α_4		676,5	674,5	2	676,5	675	1,5
α_5		540,5	541	-0,5	541	542	-1
α_6				0			-0,1
Σ		629	708	79	629	711	82
b_1		656,5	597	-69,5	657,5	587	-70,5
b_2		534	548	14	536	548	12
b_3	12	619,5	624	4,5	619,5	625	5,5
b_4		668	669	1	669	671	2
b_5				-2,5			-2,6
b_6	$-\Sigma b = b_0$						
b_K		0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
$-\alpha_K$							
$K=1$		11,4	-22,9	-19,8			
2		—	-1,3	-1,1	—		
3		—	-0,4	—	—		
4		—	-0,6	-0,5	—		
5		-0,1	-0,2	-0,2	—		
$K=0$		—	-2,5	—	—		
1		3,3	6,6	5,7	—		
2		-2,9	-5,8	—	—		
3		—	1,2	—	—		
4		0,2	0,4	—	—		
5		0	0,1	0,1	—		
Σ		-13,2	0,3	-13,5			
η_1		-19,9	-2,4	-17,5			
η_2		-25,2	-6,2	-19,0			
η_3		-21,6	-0,7	-20,9			
η_4		-17,2	4,3	-21,5			
η_5		-17,9	7,9	-15,8			
η_6	$D =$	-6,9	-6,0	-0,9			
η_7		-2,6	-15,7	17,1			
η_8		-2,5	-28,9	26,4			
η_9		0,5	-22,6	22,9			
η_{10}		0,3	-13,2	13,5			
η_{11}							



Черт. 35.



Черт. 36.



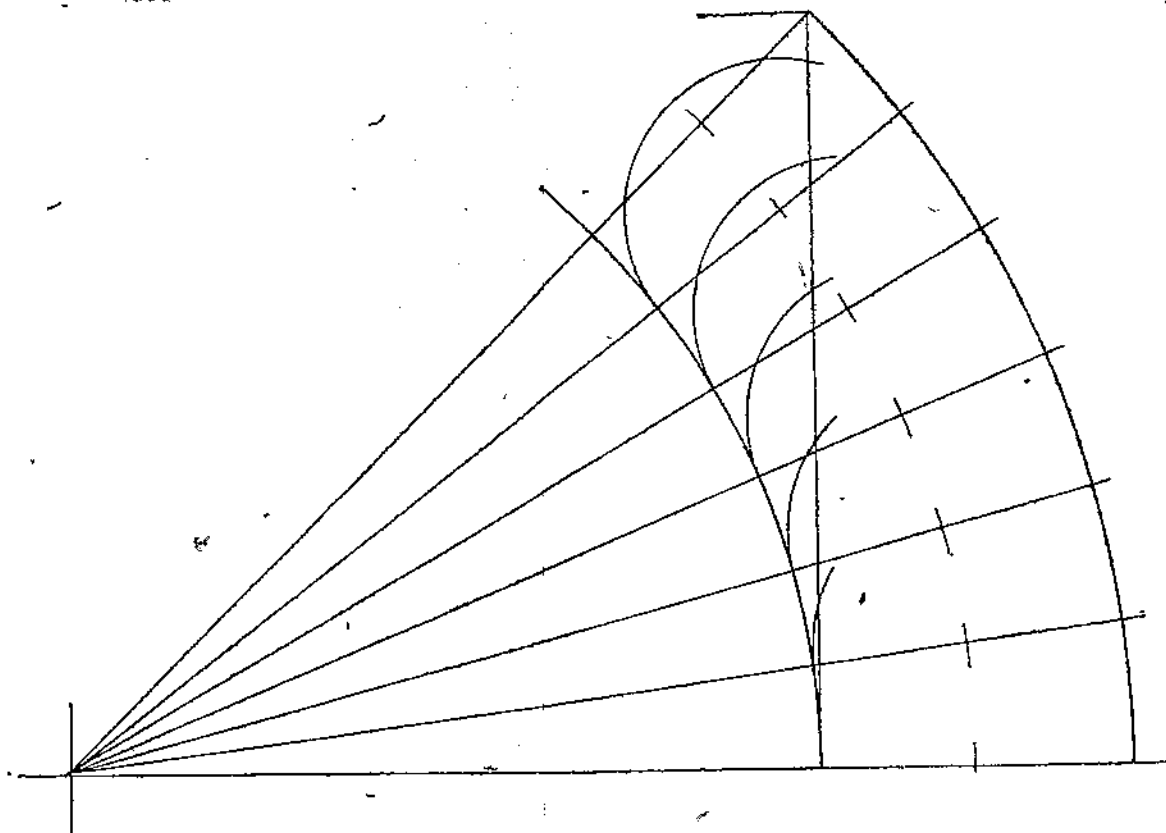
Черт. 37.

Г. Н. В. Мелентьев

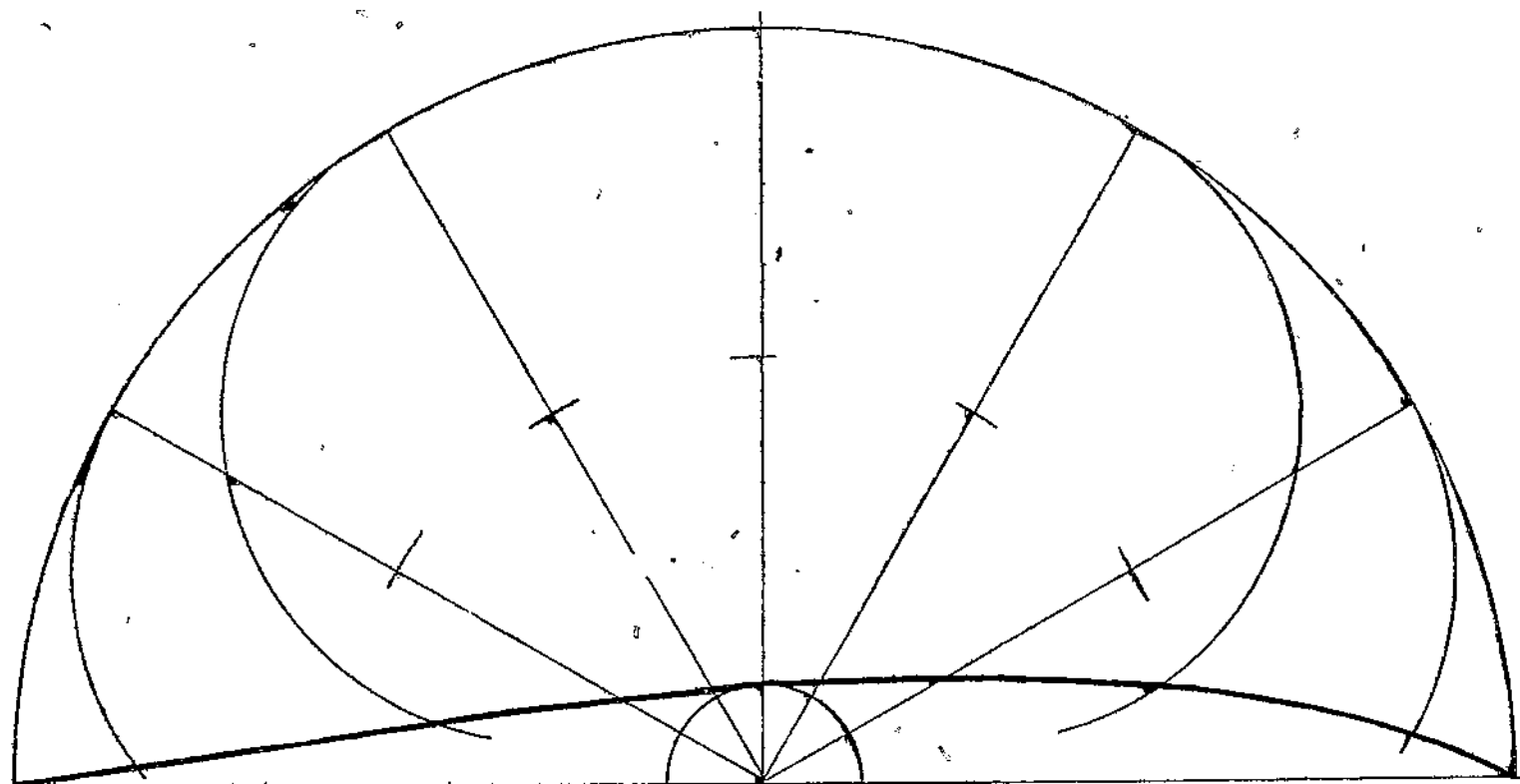
$\xi_K \quad \zeta_K$	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2
$K=0$	—	150	—	—	150	—	—	150	—	—	—	—
1	232	134	268	233	134,5	263	—	134,5	—	—	—	—
2	—	118,5	237	—	120	240	—	120	—	—	—	—
3	—	109,5	219	—	110	220	—	110	—	—	—	—
4	—	104	208	—	104,5	209	—	104,5	—	—	—	—
5	175	101	202	175	101	202	—	101	—	—	—	—
6	—	100	—	—	100	—	—	100	—	—	—	—
Σ	$\begin{matrix} 12 = \alpha_0 & 138,4 & & & 115,3 & 139,0 & & & 115,8 \\ \alpha_1 & 500,5 & 379 & 121,5 & 20,2 & 503 & 379,5 & 123,5 & 20,6 \\ \alpha_2 & 485 & 441,5 & 43,5 & 7,2 & 485,5 & 444,5 & 41,0 & 6,8 \\ \alpha_3 & 358 & 337 & 21 & 3,5 & 359 & 340 & 19 & 3,2 \\ \alpha_4 & 469 & 457,5 & 11,5 & 1,9 & 470 & 460 & 10 & 1,7 \\ \alpha_5 & 443,8 & 436 & 7,5 & 1,2 & 445 & 437,5 & 17,5 & 1,2 \\ 12 = \alpha_6 & 695 & 689 & 6 & 0,5 & 699 & 691 & 8 & 0,7 \end{matrix}$											
$\Sigma^+ \quad \Sigma^- \quad D$	$\begin{matrix} 6 = \\ \alpha_1 & 500,5 & 379 & 121,5 & 20,2 & 503 & 379,5 & 123,5 & 20,6 \\ \alpha_2 & 485 & 441,5 & 43,5 & 7,2 & 485,5 & 444,5 & 41,0 & 6,8 \\ \alpha_3 & 358 & 337 & 21 & 3,5 & 359 & 340 & 19 & 3,2 \\ \alpha_4 & 469 & 457,5 & 11,5 & 1,9 & 470 & 460 & 10 & 1,7 \\ \alpha_5 & 443,8 & 436 & 7,5 & 1,2 & 445 & 437,5 & 17,5 & 1,2 \\ \alpha_6 & 695 & 689 & 6 & 0,5 & 699 & 691 & 8 & 0,7 \end{matrix}$											
α_K	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
$K=1$	10,1	20,2	17,5	10,3	20,6	17,9	—	—	—	—	—	—
2	—	7,2	6,2	—	6,8	5,8	—	—	—	—	—	—
3	—	3,5	—	—	3,2	—	—	—	—	—	—	—
4	—	1,9	1,6	—	1,7	1,5	—	—	—	—	—	—
5	0,6	1,2	1,0	0,6	1,2	1,0	—	—	—	—	—	—
$\Sigma^+ \quad \Sigma^- \quad D$	$\begin{matrix} \eta_1 & & & 22,0 & & & 21,4 \\ \eta_2 & 23,7 & 2,6 & 21,1 & 23,7 & 2,5 & 21,2 \\ \eta_3 & 21,4 & 3,5 & 17,9 & 21,8 & 3,2 & 18,6 \\ \eta_4 & 19,1 & 7,2 & 11,9 & 19,4 & 6,8 & 12,6 \\ \eta_5 & 14,2 & 7,8 & 6,4 & 14,1 & 7,3 & 6,8 \end{matrix}$											

Черт. 38.

Зак. 1037. Г. Н. В. Мелентьев



ξ_K	1,732	1	2	1,732	1	2
$K=0$	—	100	—	—	100	—
1	136	78,5	157	135	78	156
2	—	37	74	—	37	74
3	—	13	26	—	13	26
4	—	29,5	59	—	29,5	59
5	127,5	73,5	147	127,5	73,5	147
6	—	100	—	—	100	—
Σ	α_0 663		53,2 662			55,2
	α_1 273	256,5 16,5	2,8 272	256,5 15,5		2,6
	α_2 352	92,5 250,5	43,2 351,5	92,5 259		43,2
Σ^+ Σ^- D	α_3 159	174 -15	-2,5 159	174 -15		-2,5
	α_4 226	218,5 7,5	1,2 226	218 8		1,3
	α_5 264,5	265,5 -1	-0,2 264,5	264,5 0		0
	α_6 333	330 3	0,2 333	329 4		0,3
$-\alpha_K$	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
$K=1$	-1,4	-2,8	-2,4			
2	—	-43,2	-37,4	—		—
3	—	2,5	—	—		—
4	—	-1,2	-1,0	—		—
5	0,1	0,2	0,2			
Σ^+ Σ^- D	η_1		37,2			
	η_2	-39,8 0,8	-39,0			
	η_3	-2,6 2,5	-5,1			
	η_4	-3,4 -37,2	33,8			
	η_5	1,2 -38,4	39,6			



ξ_K	1,732	1	2	1,732	1	2
$K \neq 0$						
1	176,5	100	—	—	100	204
2		102	204	176,5	102	215
3		108	216		107,5	233
4		116,5	233		116,5	252
5		126,5	253		126	272
6	235,5	136	272	235,5	136	—
		141,5			141,5	
Σ	$\begin{matrix} :12 = \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1419,5 \\ 324,5 \\ 479,5 \\ 353 \\ 474,5 \\ 443,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 118,3 \\ -19,8 \\ -2,0 \\ -0,7 \\ 0,3 \\ -0,2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1417,5 \\ 384 \\ 479,5 \\ 352 \\ 474,5 \\ 443 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 118,1 \\ -119 \\ 13 \\ -4,5 \\ 3 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 118,1 \\ -19,8 \\ 2,2 \\ -0,7 \\ 0,5 \\ -0,2 \end{matrix}$
$\Sigma + \Sigma - D$	$\begin{matrix} :12 = \alpha_6 \\ \alpha_6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 503,5 \\ 467,5 \\ 357,5 \\ 472,5 \\ 444,5 \\ 709 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -119 \\ -12 \\ -4,5 \\ 2 \\ -1 \\ 1,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 503 \\ 466,5 \\ 356,5 \\ 471,5 \\ 444 \\ 709,1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -119 \\ 13 \\ -4,5 \\ 3 \\ -1 \\ -0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 118,1 \\ -19,8 \\ 2,2 \\ -0,7 \\ 0,5 \\ -0,2 \end{matrix}$
$-\alpha_K$	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
$K=1$	9,9	19,8	17,1	—	—	—
2	—	-2,0	-1,7	—	—	—
3	—	0,7	—	—	—	—
4	—	-0,3	-0,3	—	—	—
5	0,1	0,2	0,2	—	—	—
$\Sigma + \Sigma - D$	$\begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 15,4 \\ 20,0 \\ 16,8 \\ 10,7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8,7 \\ 15,5 \\ 19,3 \\ 18,3 \\ 12,7 \end{matrix}$			

Черт. 42.

Расс
между
мерно,
функции
 $\eta_1 = a_2$

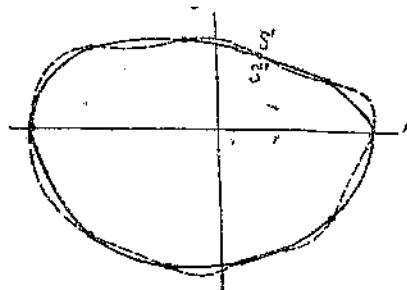
их не
возможно
ности
вой S'

по
пр
сть
(чер
мум

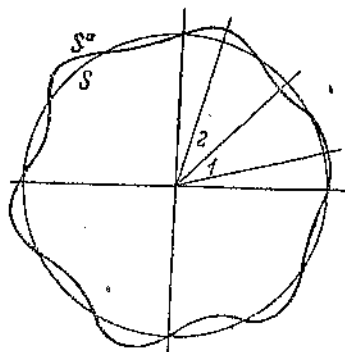
Предположим, что сделанные для промежуточных точек подсчеты показали, что мы превращаем окружность S не в кривую S' , а в кривую S^a , имеющую с S' m общих точек (черт. 43).

Тогда, построив так же по точкам кривые, являющиеся отображениями окружностей радиусом 0,90; 0,95; 1,05; 1,10, мы можем интерполятивно построить ту кривую S^a , которая данным полиномом $\zeta(z)$ преобразовывается в кривую S' . Кривая S^a будет иметь с окружностью S m общих точек с аргументами $\frac{2\pi}{m}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{m}$, $3 \cdot \frac{2\pi}{m}$, ..., 2π (черт. 44).

Область при кривой S^a можно разделить на m секторов, от минимума до максимума расстояния до начала координат, и рассматривать



Черт. 43.



Черт. 44.

их независимо друг от друга. Пусть для какого-либо сектора найдем полином, отображающий на него соответствующий сектор при окружности $S \rightarrow z_1 = f(z)$. Тогда соответствующая часть области при кривой S' будет получена по условию

$$\zeta = \sum x_k z_1^{1+k} = \sum x_k [f(z)]^{1+k}.$$

Рассмотрим, какую ошибку мы при этом допустим на границе между двумя соседними частями области при S^a . Пусть секторы, примерно, будут по центральному углу порядка $\frac{2\pi}{m}$; ограничимся для функции, отображающей на них секторы области при S , двучленом $z_1 = az + bz^{1+\frac{m}{2}}$ (случай внутренних областей; в случае же внешних $az + bz^{1-\frac{m}{2}}$ для общего суждения достаточно одного случая) для первого сектора и $a_1 z + b_1 z^{1+\frac{m}{2}}$ для второго. У стыка обоих секторов имеем

$$a + b = a_1 + b_1.$$

У противоположных границ секторов расстояния от кривой до начала координат не будут равны, но будут довольно близки, поэтому обозначим

$$a - b = (1 + \varepsilon)(a_1 - b_1),$$

где ε — малая величина; также малыми мы можем полагать и b и b_1 .

Для точки, лежащей на границе секторов в области при S на расстоянии ρ от начала координат, получим после преобразования, с одной стороны, расстояние от начала координат

$$a\rho + b\rho^{1+\frac{m}{2}},$$

а с другой,

$$a_1\rho + b_1\rho^{1+\frac{m}{2}};$$

невязка будет равна разности между этими величинами.

Выразим a_1 и b_1 через a и b . Имеем

$$a + b = a_1 + b_1,$$

$$a - b = (1 + \varepsilon)(a_1 - b_1) \approx a_1(1 + \varepsilon) - b_1$$

и складывая обе правые и левые части, получим

$$2a = a_1(2 + \varepsilon); \quad a_1 = a \frac{2}{2 + \varepsilon} \approx a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$b_1 = a + b - a_1 = b + a \frac{\varepsilon}{2}.$$

Невязка равна

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho(a - a_1) + \rho^{1+\frac{m}{2}}(b - b_1) = \rho a \frac{\varepsilon}{2} + \\ &+ \rho^{1+\frac{m}{2}} \left(-a \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{a\varepsilon}{2} \left(\rho - \rho^{1+\frac{m}{2}}\right). \end{aligned}$$

Максимум невязки будет при

$$1 - \left(1 + \frac{m}{2}\right) \rho^{\frac{m}{2}} = 0; \quad \rho = \sqrt[2]{\frac{1}{1 + \frac{m}{2}}},$$

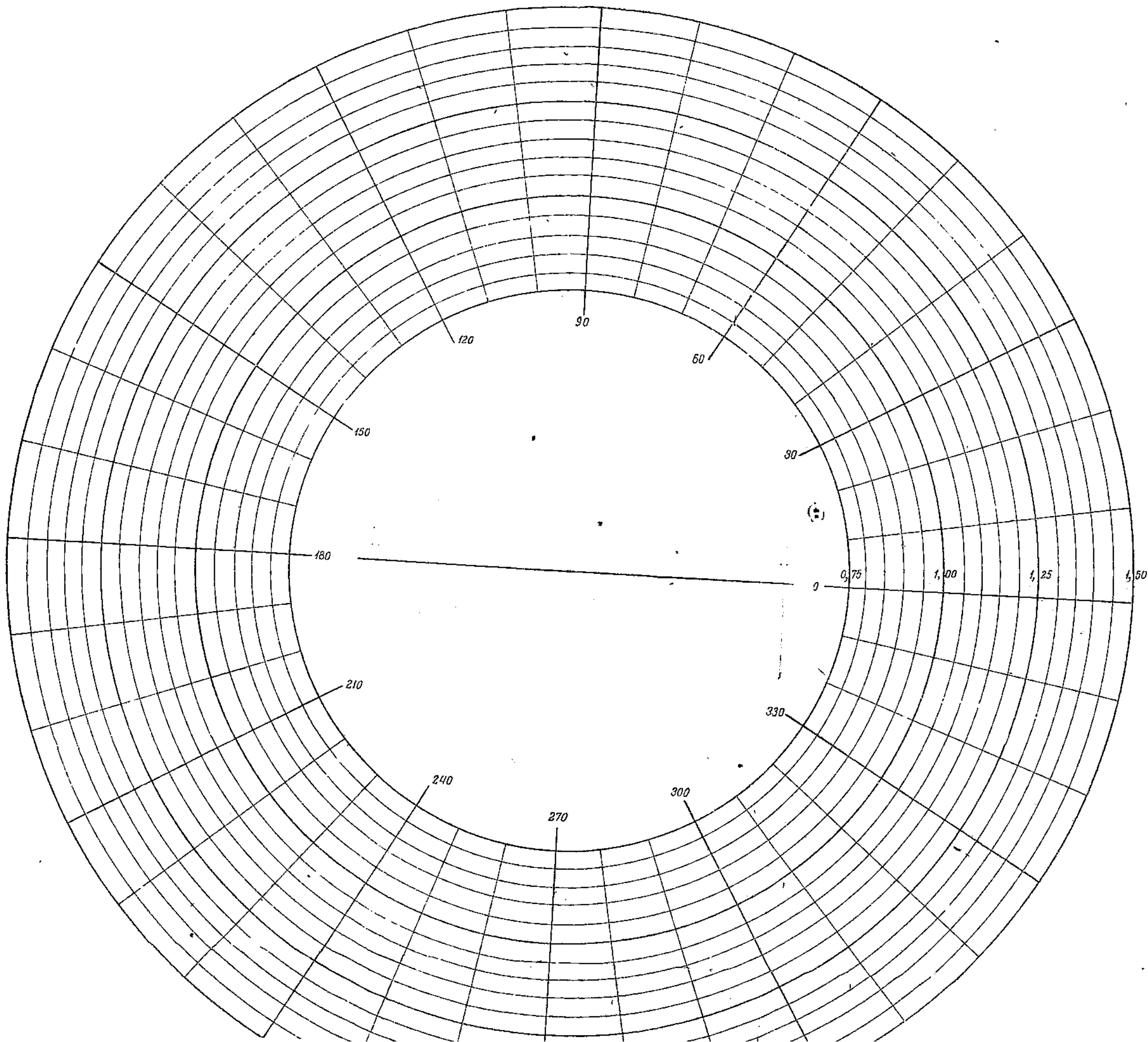
тогда

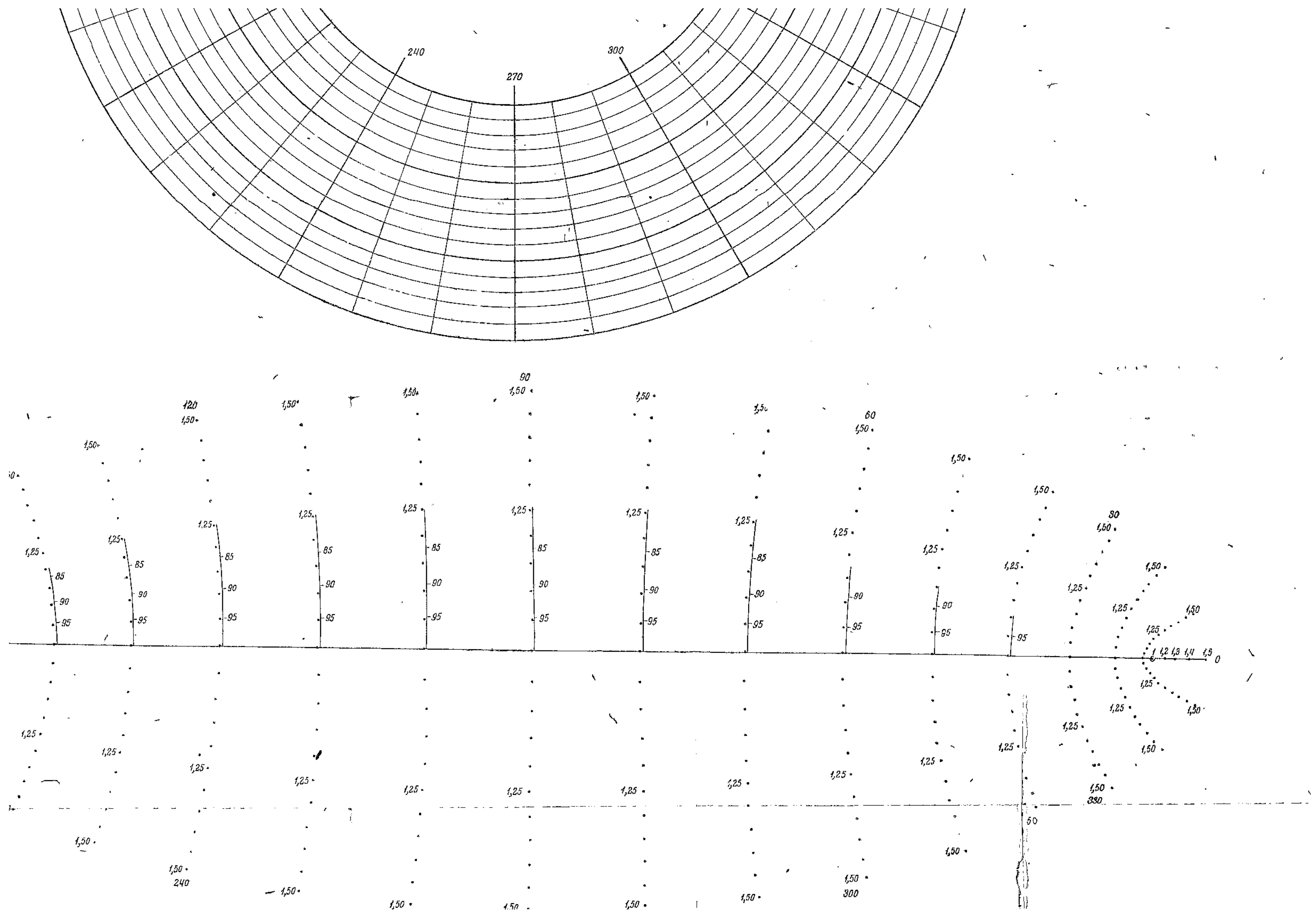
$$\Delta_{\max} = \frac{a\varepsilon}{2} \sqrt[2]{\frac{1}{1 + \frac{m}{2}}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{m}{2}}\right) = a\varepsilon \frac{m}{2(2+m) \sqrt[2]{1 + \frac{m}{2}}}.$$

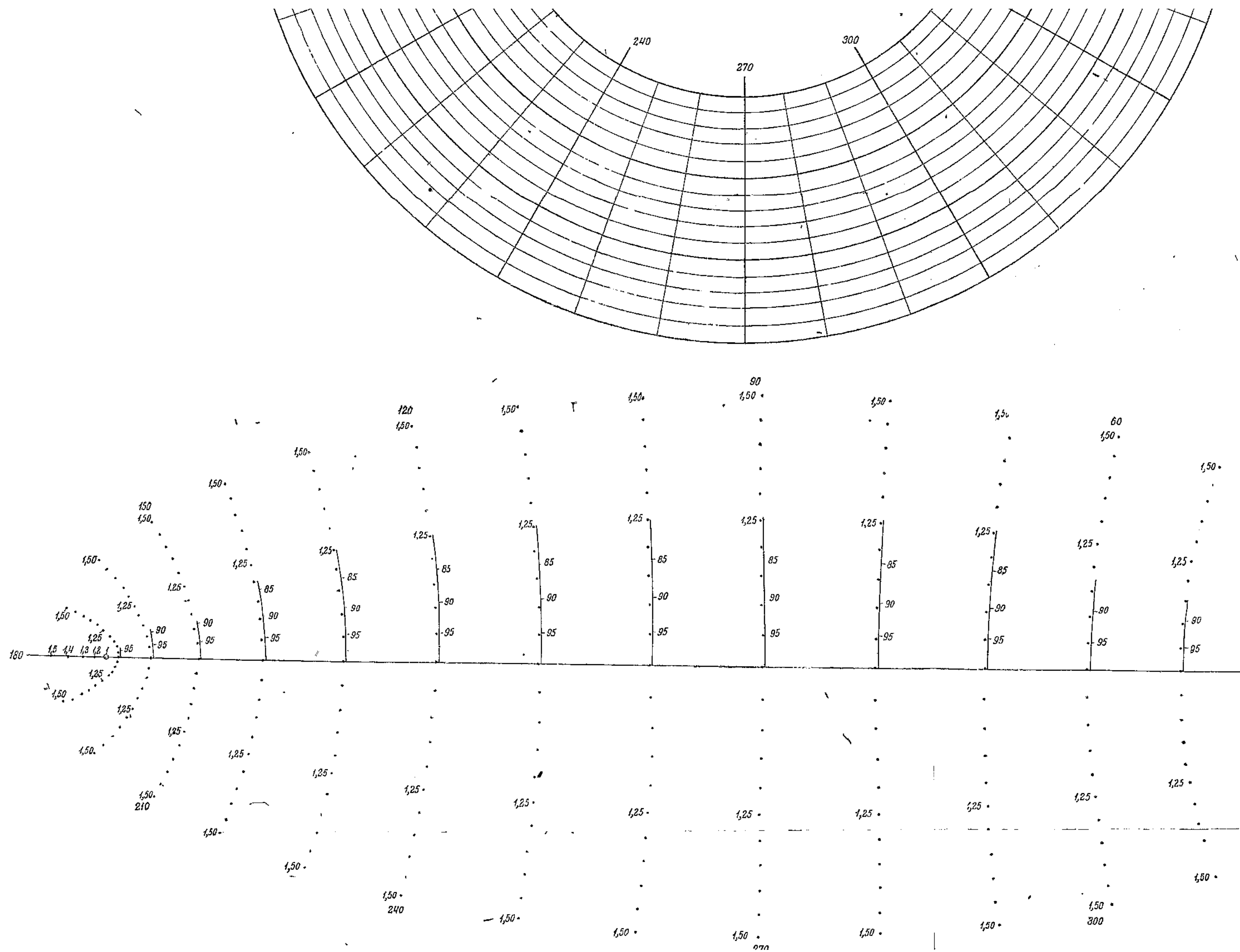
При $m = 12$, например, $\Delta_{\max} \approx 0,3a\varepsilon$.

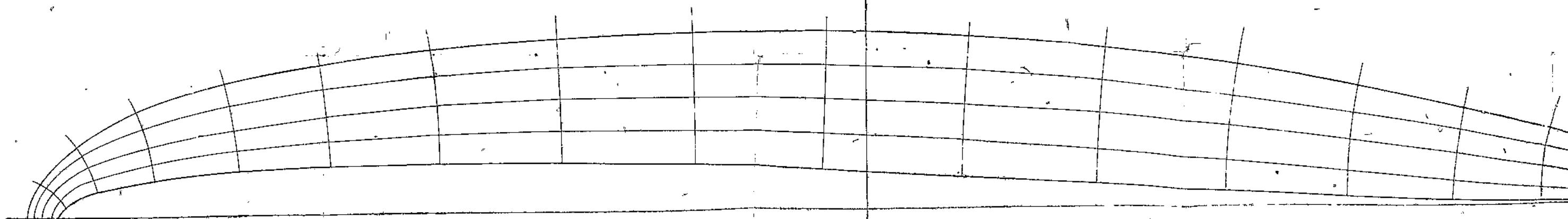
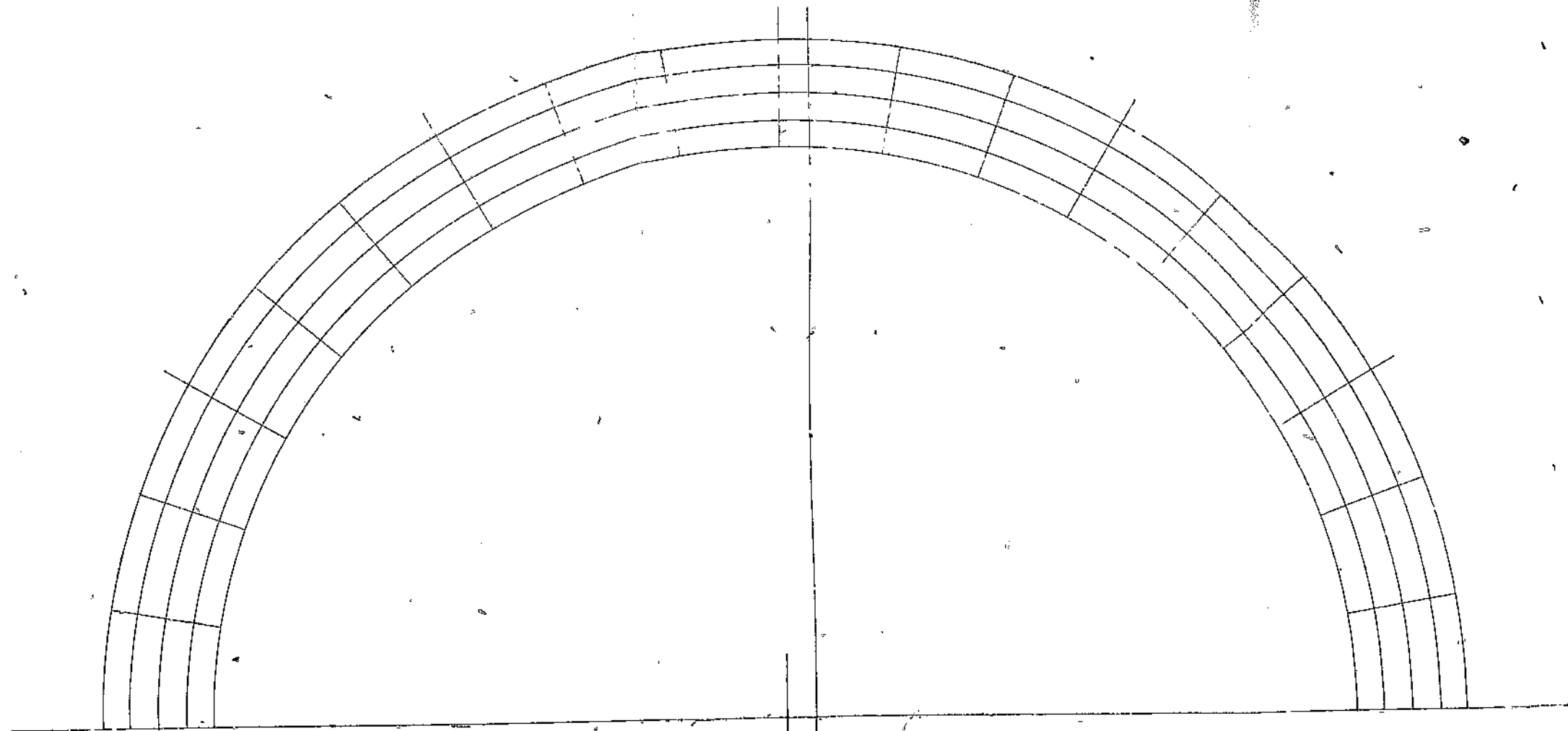
Итак, остающаяся после дополнительного уточнения невязка равна в максимуме при $m = 12$ примерно 0,15 $a\varepsilon$ от среднего положения точки. При требуемой точности, предположим в 0,005, имея $a \approx 1$, получим

$$\varepsilon_{\max} \approx 0,03,$$



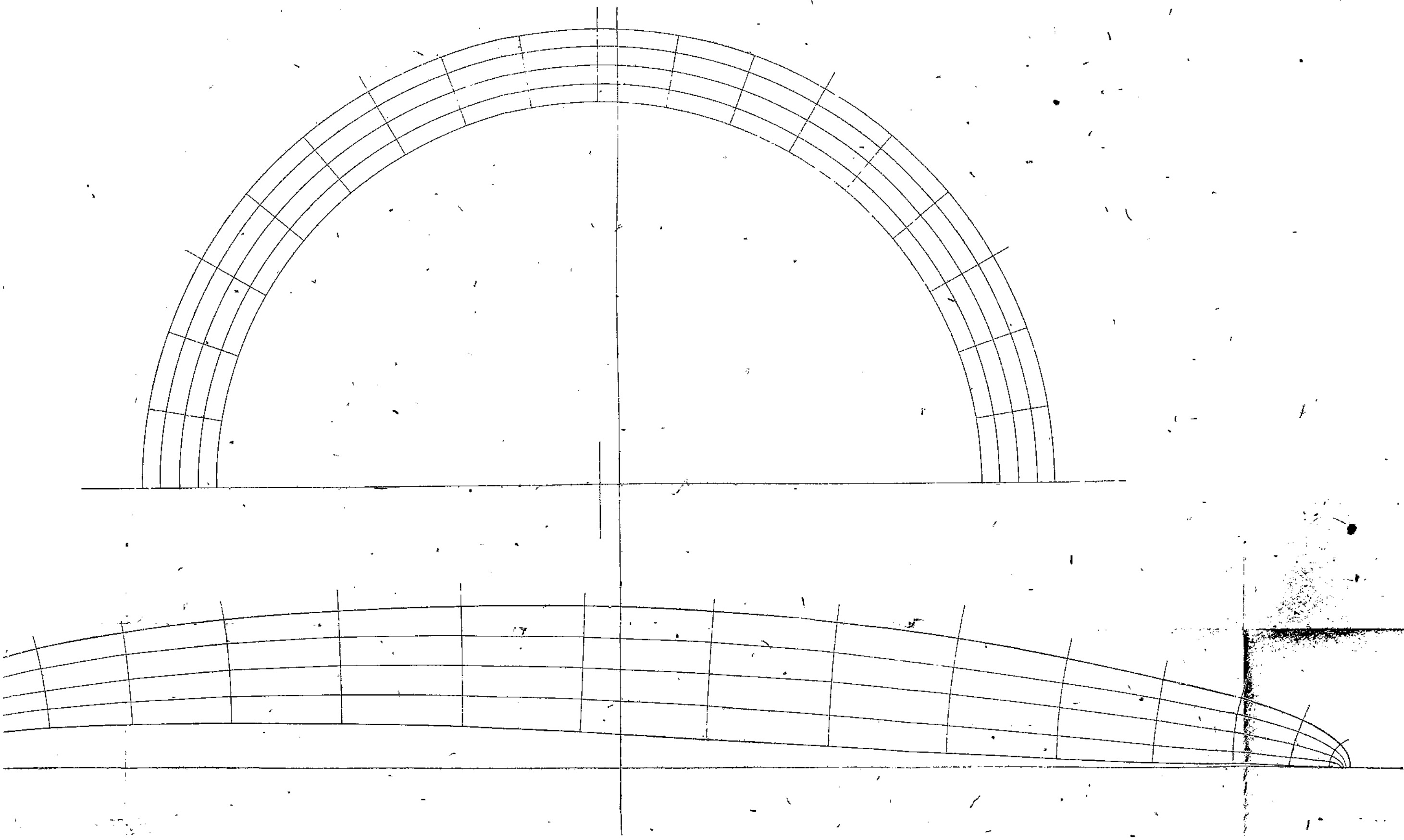






Лан. 1637, Н. В. Мелонтьев

Черт. 46.



Черт. 46.

допустимую разницу между двумя соседними минимумами или максимумами, которую еще можно разверстать.

Но надо сказать, что все эти вычисления по уточнению настолько утомительны, что вряд ли стоит за них приниматься, а если контур S' столь сложен, что отобразить область при окружности S на его область с малым числом членов полинома трудно, то лучше искать возможности дополнительного преобразования, приводящего контур S' к более округлому виду, после чего сперва произвести отображение на область при этом округлом контуре, а затем с него на область при истинном контуре S' . Для этих целей преобразование должно быть обратимым, или же решать его приходится номографически.

§ 32. Например для многих контуров, связанных с аэро- и гидродинамикой, хорошо пользоваться переходом от переменной ζ к переменной z_1 , связанной с ζ уравнением

$$\zeta = z_1 + \frac{1}{z_1}.$$

Здесь от z_1 к ζ перейти просто, предварительное же преобразование контура, т. е. переход от ζ к z_1 совершается на специальном бинарном поле (черт. 45).

Построение этого поля основано на следующем. Пусть

$$z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

тогда

$$\begin{aligned} \zeta &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Для окружности $r = \text{const}$ получаем

$$\zeta = c_1 \cos \varphi + i c_2 \sin \varphi$$

(где $c_1 = r + \frac{1}{r}$, а $c_2 = r - \frac{1}{r}$) — ур-ние эллипса, т. е. окружности области переменной z_1 преобразуются в эллипсы области переменной ζ . Для радиальной прямой $\varphi = \text{const}$ получаем

$$\zeta = c_3 \left(r + \frac{1}{r}\right) + i c_4 \left(r - \frac{1}{r}\right)$$

(где $c_3 = \cos \varphi$, а $c_4 = \sin \varphi$). Это ур-ние дает семейство гипербол, в которое преобразуются радиальные прямые области переменной z_1 .

Эллипсы построены для r от 0,75 через 0,05 до 1,50, а гиперболы для φ от 0° через 10° до 360° . Вместо самых кривых даны лишь точки их пересечения, так как это менее затемняет чертеж.

Для преобразования данной области ее накладывают (начертив на прозрачной бумаге) на одну из областей черт. 45 и по точкам строят в криволинейных координатах второй части чертежа.

Например (черт. 46) окружность радиуса 1,05 с центром в точке $(-0,05; 0)$, будучи преобразована, дает профиль крыла Н. Е. Жуковского, а концентрические с нею окружности и ряд радиальных прямых дают ортогональное семейство кривых. Изображена лишь половина кривых с одной стороны оси симметрии.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

§ 33. Из задач приближенного интегрирования наиболее часто приходится встречаться с необходимостью вычислить интеграл вида

$$\int_a^b f(y) dx, \quad (1)$$

где в свою очередь $y = \varphi(x)$, причем значения y в интервале $a \leq x \leq b$ могут быть заданы аналитически или графически.

Частные случаи здесь:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } f(y) &= y, \\ \int_a^b y dx &= S. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

S — площадь, ограниченная кривою $y = \varphi(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (черт. 47).

$$\left. \begin{aligned} \text{II. } f(y) &= \frac{y^2}{2}, \\ \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx &= M_x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

M_x — статический момент площади S относительно оси OX .

$$\left. \begin{aligned} \text{III. } f(y) &= \frac{y^3}{3}, \\ \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx &= J_x. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

J_x — момент инерции площади S относительно оси OX .

Главным вопросом является, конечно, вычисление S . Ввиду того, что для вычисления площадей создано уже весьма много методов, мы не будем давать нового, а сравним лишь с точки зрения точности и простоты применения основные из этих методов и укажем простейшие пути вычисления.

Метод трапеций, методы Симпсона, Котса, Чебышева и Гаусса основаны на представлении ур-ния кривой $y = \varphi(x)$ в виде

2. Симпсона, при $n=3$, $x_1=a$, $x_2=\frac{a+b}{2}$, $x_3=b$

$$S = \frac{b-a}{6} (y_1 + 4y_2 + y_3).$$

3. Котса, при $n > 3$.

Формулы Котса приведены в „Лекциях о приближенных вычислениях“ акад. А. Н. Крылова, так же как и формулы всех прочих методов.

Если стремиться к равенству коэффициентов $C = \frac{b-a}{n}$, то n неизвестных значений абсцисс находятся из уравнения $(n-1)$ -ой степени, к которому приводится система (9). Это дает формулы Чебышева.

Если, наконец, решать всю систему, определяя из $2n$ уравнений n значений абсцисс и n коэффициентов, то получаются наиболее точные формулы Гаусса, дающие точное решение для кривых $y = \varphi(x)$, могущих быть представленными с помощью полинома степени не выше

$$m = 2n - 1.$$

Однако формулы Гаусса не совсем удобны для вычисления вследствие деления интервала $a \ll b$ на неравные части и учета многозначных (не выражаемых малым числом значущих цифр) коэффициентов.

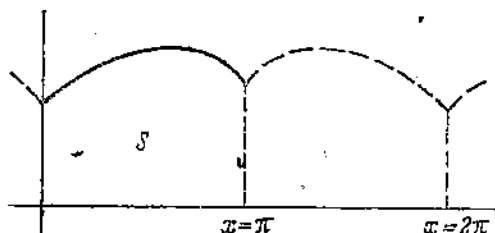
Рассмотрим поэтому такую формулу, которая могла бы заменить формулу Гаусса, давая одинаковую с ней степень точности, но при этом была бы более удобной для вычисления.

§ 34. Представим уравнение кривой $y = \varphi(x)$ в виде тригонометрического ряда. При этом для простоты записей рассмотрим частный случай, когда пределы интегрирования равны

$$a=0, \quad b=\pi;$$

т. е. когда вычисляется

$$S = \int_0^{\pi} y \, dx. \quad (10)$$



Черт. 48.

Предположим, что кривая $y = \varphi(x)$ периодична и кроме того имеет осью симметрии прямую $x = \pi$, т. е. идет как показано на черт. 48, мы можем разложить ее в ряд по косинусам, т. е. взять

$$y = \sum_{k=0}^m A_k \cos kx,$$

тогда

$$S = \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^m A_k \cos kx \, dx = A_0 \pi; \quad (11)$$

все прочие члены сокращаются.

При

$$k=1, 2, 3 \dots, (2n-1)$$

имеем

$$\sin \pi k = 0,$$

$$\cos \frac{\pi k}{n} + i \sin \frac{\pi k}{n} - 1 \neq 0,$$

следовательно,

$$\sum_{h=1}^n \cos kx_h \Big|_{k=1, 2, 3, \dots, (2n-1)} = 0,$$

и только при $k=2n$ имеем в правой части (18) неопределенность типа $\frac{0}{0}$, которую раскрываем по Лопиталю

$$\frac{i \sin 2\pi n}{\cos 2\pi + i \sin 2\pi - 1} = \frac{in \cos 2\pi n}{-\sin 2\pi + i \cos 2\pi} = n$$

и получаем правую часть, отличную от нуля.

Отсюда мы видим, что при тригонометрическом разложении $\varphi(x)$ самый простой способ вычисления эквивалентен подходу по методу Гаусса, и можно положить

$$S = \frac{\pi}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots + y_n). \quad (19)$$

где

$$y_n = \varphi(x_n) + \left[(2h-1) \frac{\pi}{2n} \right].$$

Однако при кривой черт. 48 вычисление по ф-ле (19) будет мало продуктивно, так как известно, что кривые, имеющие переломы, учитываются точно лишь бесконечным числом членов тригонометрического рода, а при конечном числе членов дают ощутительные невязки.

§ 35. Поэтому вместо вычисления площади S будем вычислять площадь S_1 , ограниченную не осью абсцисс, а дугой параболы 2-й степени (черт. 49), причем возьмем эту параболу такую, чтобы направление ее при $x=0$ и $x=\pi$ соответствовало направлению кривой $y=\varphi(x)$. Условий у нас всего два, следовательно, в параболу

$$y_n = k_0 + k_1 x + k_2 x^2$$

можем положить $k_0=0$, а k_1 и k_2 получим из условий наклона

$$y'_{0,n} = k_1 = \varphi'(0),$$

$$y'_{\pi,n} = k_1 + 2\pi k_2 = \varphi'(\pi).$$

откуда

$$k_2 = \frac{\varphi'(\pi) - \varphi'(0)}{2\pi}.$$

Итак, ур-ние параболы

$$y_n = \varphi'(0) \cdot x + \frac{\varphi'(\pi) - \varphi'(0)}{2\pi} \cdot x^2.$$

Площадь S_1 будет вычисляться по ф-ле (19) очень хорошо, так как

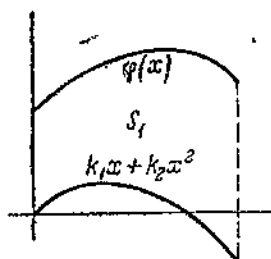
$$S_1 = \int_0^\pi [\varphi(x) - k_1 x - k_2 x^2] dx,$$

а кривая $y = \varphi(x) - k_1x - k_2x^2$ в ряд по косинусам разлагается весьма удобно, не имея переломов при $x=0$ и $x=\pi$, как видно из черт. 50.

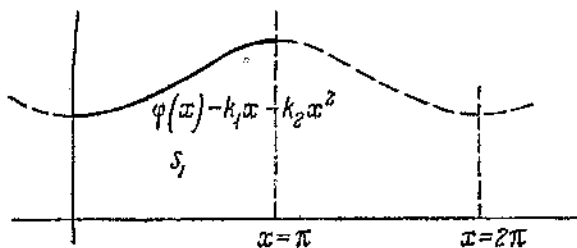
Итак

$$S = S_1 + \int_0^{\pi} (k_1x + k_2x^2) dx.$$

Так как строить параболу слишком сложно, то постараемся обойтись без нее; для этого сперва заменим $\int_0^{\pi} y_n dx$ через $\frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n y_n + \varepsilon$, где ε будет погрешность, возникающая от замены интеграла суммой.



Черт. 49.



Черт. 50.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n y_n &= \frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n \left\{ k_1 \frac{\pi}{2n} (2h-1) + k_2 \left[\frac{\pi}{2n} (2h-1) \right]^2 \right\} = \\ &= k_1 \cdot \frac{\pi^2}{2} + k_2 \cdot \frac{\pi^3}{12n^2} (4n^2 - 1). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\pi} y_n dx = \int_0^{\pi} (k_1x + k_2x^2) dx = k_1 \cdot \frac{\pi^2}{2} + k_2 \cdot \frac{\pi^3}{3},$$

отсюда

$$\varepsilon = \int_0^{\pi} y_n dx - \frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n y_n = \frac{\pi^3}{12n^2} k_2 = \frac{\pi^2}{24n^2} [\varphi'(\pi) - \varphi'(0)],$$

что дает

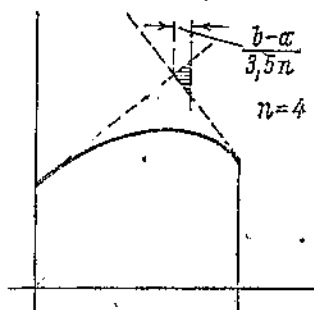
$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n (y - y_n)_h + \frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n y_n + \frac{\pi^2}{24n^2} [\varphi'(\pi) - \varphi'(0)] = \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{h=1}^n y_h + \frac{\pi^2}{24n^2} [\varphi'(\pi) - \varphi'(0)]. \end{aligned}$$

При переходе от интервала $0 \ll \pi$ к пределам a и b получим

$$S = \frac{b-a}{n} \sum_{h=1}^n y_h + \frac{(b-a)^2}{24n^2} [\varphi'(b) - \varphi'(a)]. \quad (20)$$

Мы могли бы аналогичным путем учесть и высшие производные φ'' , φ''' и т. д. и получили бы тогда вариант формулы Эйлера-Маклорена

$$S = \frac{b-a}{n} \sum_{h=1}^n y_h + \frac{(b-a)^2}{24n^2} [\varphi'(b) - \varphi'(a)] - \frac{7(b-a)^4}{5760n^4} [\varphi'''(b) - \varphi'''(a)] + \frac{31(b-a)^6}{157680n^6} [\varphi^{(5)}(b) - \varphi^{(5)}(a)] + \dots, \quad (21)$$



Черт. 51.

Имеем, примерно,

$$\frac{(b-a)^2}{24n^2} [\varphi'(b) - \varphi'(a)] \approx \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{3,5n} \right)^2 [\varphi'(b) - \varphi'(a)].$$

Продолжим, до пересечения их, касательные к кривой $y = \varphi(x)$, взятые на концах интервала (черт. 51); от точки пересечения отложим вправо отрезок, равный $\frac{b-a}{3,5n}$, и на этом расстоянии от нее проведем вертикальную прямую. Заштрихованный треугольник, как совершенно очевидно, будет так относиться по площади к общей площади S , как поправочный член ф-лы (20) к основному члену $\frac{\pi}{n} \sum y$.

§ 36. Приведем несколько примеров расчета для аналитически заданных $\varphi(x)$. Вычислим

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2},$$

взяв 5 ординат, по ф-ле (20) и по Гауссу.

По ф-ле (20) мы получим, при $n=5$:

$$b-a = \frac{3\pi}{2} \pi = 4,71239; \quad \frac{b-a}{n} = 0,942478$$

$$\frac{1}{24} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = 0,03701$$

φ_n	$\sin \varphi_n$	$\sin \varphi_n + 2$	y_n
27°	0,45399	2,45399	0,407500
81°	0,98769	2,98769	0,334707
135°	0,70711	2,70711	0,369398
189°	-0,15643	1,84357	0,542426
243°	-0,89101	1,10899	0,901721
$\sum y_n = 2,555752$			
$\frac{b-a}{n} \sum y_n = 2,40874$			

Находим производные:

$$y' = \left(\frac{1}{\sin \varphi + 2} \right)' = - \frac{\cos \varphi}{(\sin \varphi + 2)^2};$$

$$y_b' = 0; \quad y_a' = -\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{24} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 (y_b' - y_a') = 0,00925;$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2} \approx 2,40874 + 0,00925 = 2,41799.$$

По Гауссу будет иметь для $n=5$:

$\frac{\varphi_n}{b-a}$	φ_n	$\sin \varphi_n$	$\sin \varphi_n + 2$	y_n
0,046910	12°,6657 = 12°39'56"	0,21926	2,21926	0,450600
0,230765	62°,3066 = 62°18'24"	0,88544	2,88544	0,346567
0,500000	= 135°	0,70711	2,70711	0,369398
0,769235	= 207°41'36"	-0,46474	1,53526	0,651356
0,953090	= 257°20'04"	-0,97566	1,02434	0,976238

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2} = \frac{3\pi}{2} [0,118463(y_1 + y_5) + 0,239314(y_2 + y_4) + 0,284444y_3] = 2,41707$$

Истинное значение интеграла получим

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi = 2,41840.$$

Сравним полученные результаты:

точно	2,41840
ф-ла (20)	2,41799, погрешность 0,00041
по Гауссу	2,41707, " 0,00133

мы видим, что при большей простоте вычисления ф-ла (20) дает даже несколько более точный результат.

Вычислим

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2}$$

взяв те же $n=5$.

По ф-ле (20) $\frac{b-a}{n} = 1,256637$.

φ_n	$\sin \varphi_n$	$\sin \varphi_n + 2$	y_n
36°	0,58779	2,58779	0,386430
108°	0,95106	2,95106	0,338861
180°	0	2,00000	0,500000
252°	-0,95106	1,04894	0,954144
324°	-0,58779	1,41221	0,708109
$\sum y_n = 2,887544$			
$\frac{b-a}{n} \sum y_n = 3,62859 =$			
$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2}$			

Поправочного члена вычислять в данном случае не нужно, так как, рассматривая целый период подынтегральной функции, мы, очевидно, имеем на обеих границах одинаковые значения производных, и поправка равна нулю.

По Гауссу

$\frac{\varphi_n}{b-a}$	φ_n	$\sin \varphi_n$	$\sin \varphi_n + 2$	y_n
0,046910	16°8876 = 16°53'15"	0,29049	2,29049	0,436588
0,230765	83°0755 = 83°04'32"	0,99269	2,99269	0,334148
0,500000	180°	0	2,00000	0,500000
0,769235	276°55'28"	-0,99269	1,00731	0,992743
0,953090	343°06'45"	-0,22049	1,70951	0,584963
$1,021551 \cdot 0,118463 = 0,121016$ $-1,326891 \cdot 0,239314 = 0,317544$ $0,500000 \cdot 0,284444 = 0,142222$ $6,28319 \cdot 0,580782 = 3,64916 =$ $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2}$				

Точное значение

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi + 2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3,62760.$$

Сравним:

точно	3,62760
ф-ла (20)	3,62859, погрешность 0,00099
по Гауссу	3,64916, „ 0,02156.

Здесь особенно заметно превосходство ф-лы (20) перед расчетом по Гауссу, так как очевидно, что периодическая подинтегральная функция на целом периоде учтется лучше тригонометрическим рядом, чем степенным.

Обратно, при большой разнице между наклонами кривой $y(x)$ в начале и конце интегрирования, формула Гаусса станет точнее ф-лы (20). Однако применению формулы Гаусса есть предел. До настоящего времени рассмотрены случаи лишь для числа ординат n , не превышающего 8, тогда как при равноотдаленных ординатах, чем больше мы их возьмем, тем меньше будет влияние поправочного члена ф-лы (20) и тем, следовательно, проще будет расчет, так как при достаточном большом n можно будет ограничиться лишь суммой ординат.

§ 37. Практически отбрасывать поправочный член можно уже, начиная с $n=20$, в особенности при кривых, заданных графически, когда вычисления производятся с не слишком большой точностью.

Тогда вычисление удобно производить с помощью специальной палетки и сконструированного мною аналогичного кюрвиметру прибора длиномер. Прибор этот, изображенный на черт. 52, если его катать по чертежу, указывает отсчетами своих трех циферблатов прокатенную длину в см. Для измерения длины отрезка прямой надо приставить длиномер, держа его совершенно вертикально, острием индекса к началу отрезка, и, слегка нажимая, прокатить от себя до прикосновения острия индекса к концу отрезка. Колесо длиномера, двигаясь прямолинейно и параллельно острию, пройдет тот же путь, что и острие, т. е. отсчет циферблатов увеличится от начального на величину l — длину прокатенного отрезка.

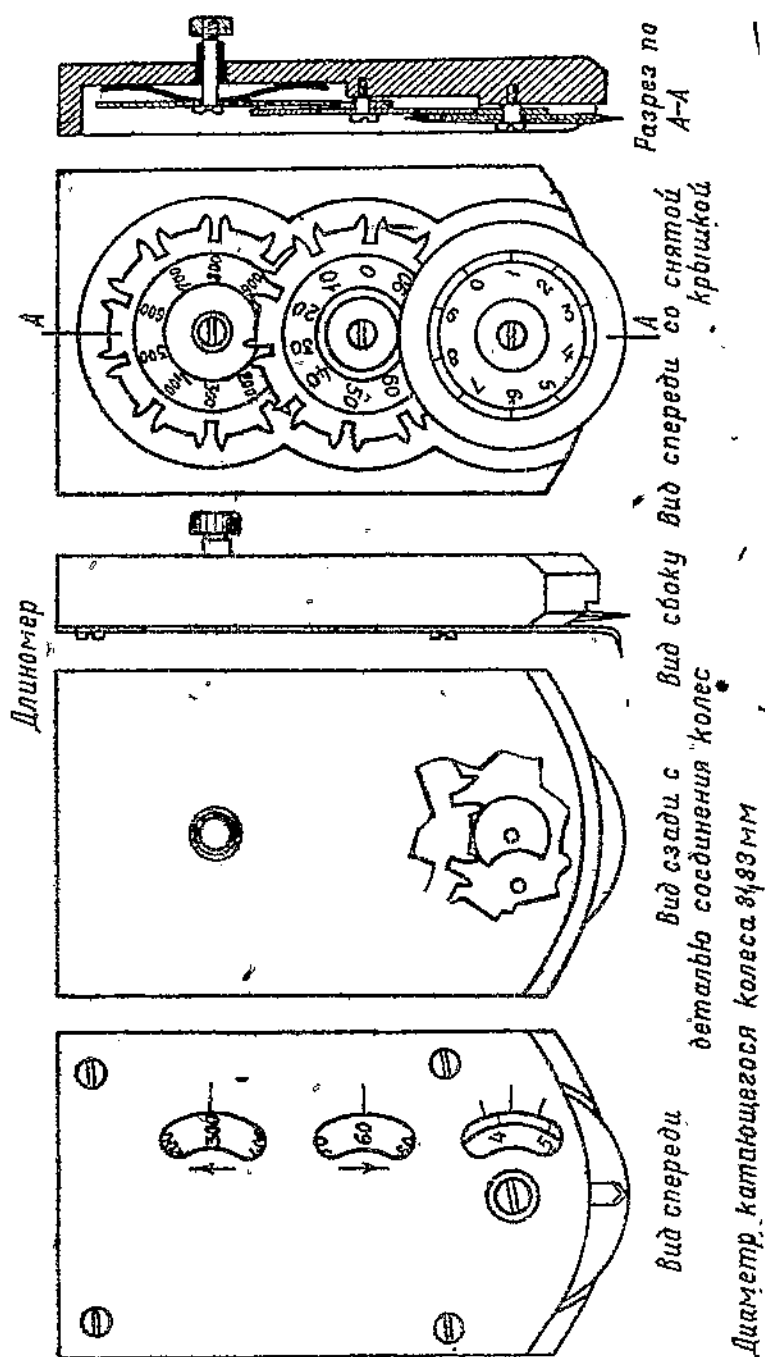
Палетка представляет собою прозрачный лист бумаги с нанесенной на нем системой параллельных линий, отстоящих друг от друга на $\frac{1}{2}$ см (черт. 53).

Для измерения площади S (черт. 54) поступают при работе с палеткой и длиномером следующим образом:

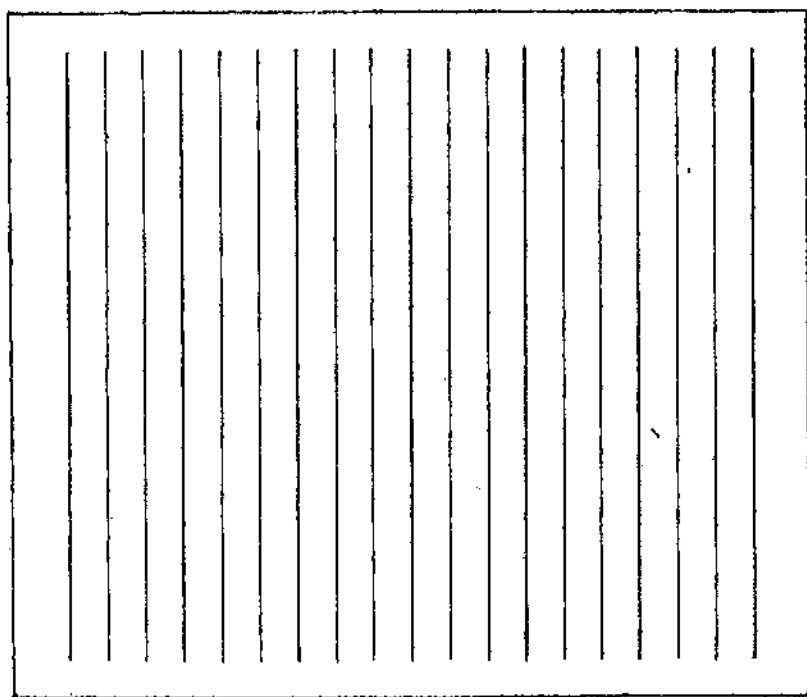
1. Отсчет длиномера ставят на нуль, для этого прокатывают его входную, пока не получат отсчета, равного целым сотням сантиметров, затем, потянув за головку верхней оси, выводят верхнее колесо из зацепления со средним, поворачивают его до нуля и отпускают головку.

2. Соединяют хордой концы кривой. Накладывают палетку так, чтобы концы хорды пришлись на серединах интервалов между делениями палетки.

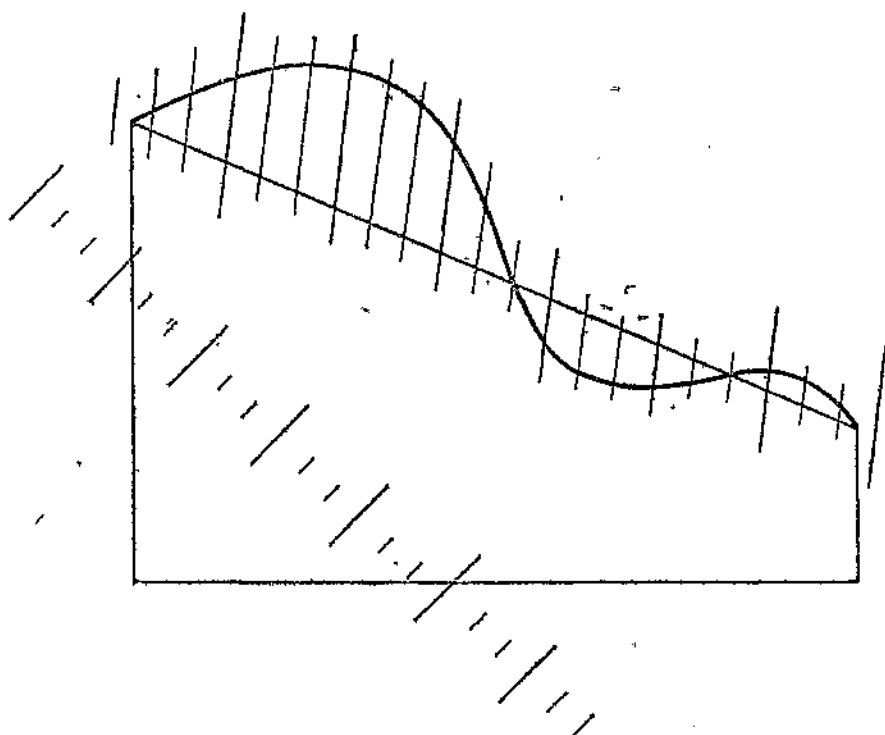
3. Прокатывают длиномером все отрезки линий палетки от хорды до кривой.



Черт. 52.



Черт. 53.



Черт. 54.

Пусть сумма длин прокатанных отрезков равна $\sum l$. Из ф-лы (20), отбрасывая поправочный член ее и имея $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$ (см), получаем площадь, ограниченную хордой и кривой

$$S = \frac{1}{2} \sum l$$

(при этом участки площади, лежащие от хорды по направлению к оси OX , являются отрицательными). Общая площадь S будет

$$S = \int_a^b y dx = \frac{1}{2} \sum l + (b-a) \frac{y_a + y_b}{2}.$$

Для проверки правильности сделанного вычисления можно наложить палетку иным образом, например так, как указано на том же черт. 54 — внизу, и найти новое значение $\sum l$.

Из линий палетки каждая третья дана более жирной для того, чтобы при прокатывании длиномера не сбиваться.

Для нашего чертежа имеем в обоих случаях расчета

$$\sum l_1 = 10,8 \text{ (см)}, \quad \sum l_2 = 11,2;$$

берем среднее — 11,0, получаем

$$S = 5,6 + 9,5 \frac{6,0 + 2,0}{2} = 43,5.$$

При отсутствии длиномера подсчет $\frac{1}{2} \sum l$ можно производить с помощью счетов, перестроив палетку черт. 53 в вид, данный на черт. 55.

Тут параллельно оси палетки проведены линии, соответствующие отсчетам $N = \frac{b-a}{n} y = \frac{1}{2} y$. Таким образом сумма отсчетов в пересечении основных линий палетки с кривою (при наложении палетки осью на хорду) дает

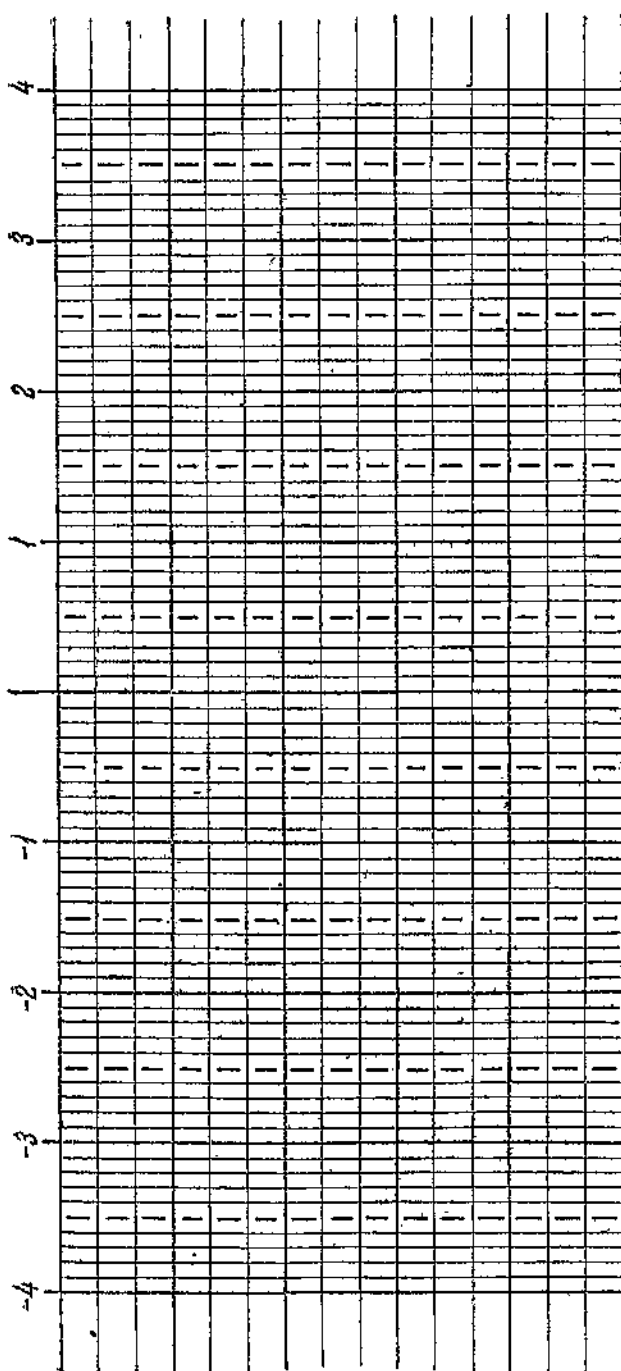
$$\sum N = \frac{1}{2} \sum y = \frac{1}{2} \sum l.$$

Если систему линий N строить по зависимости

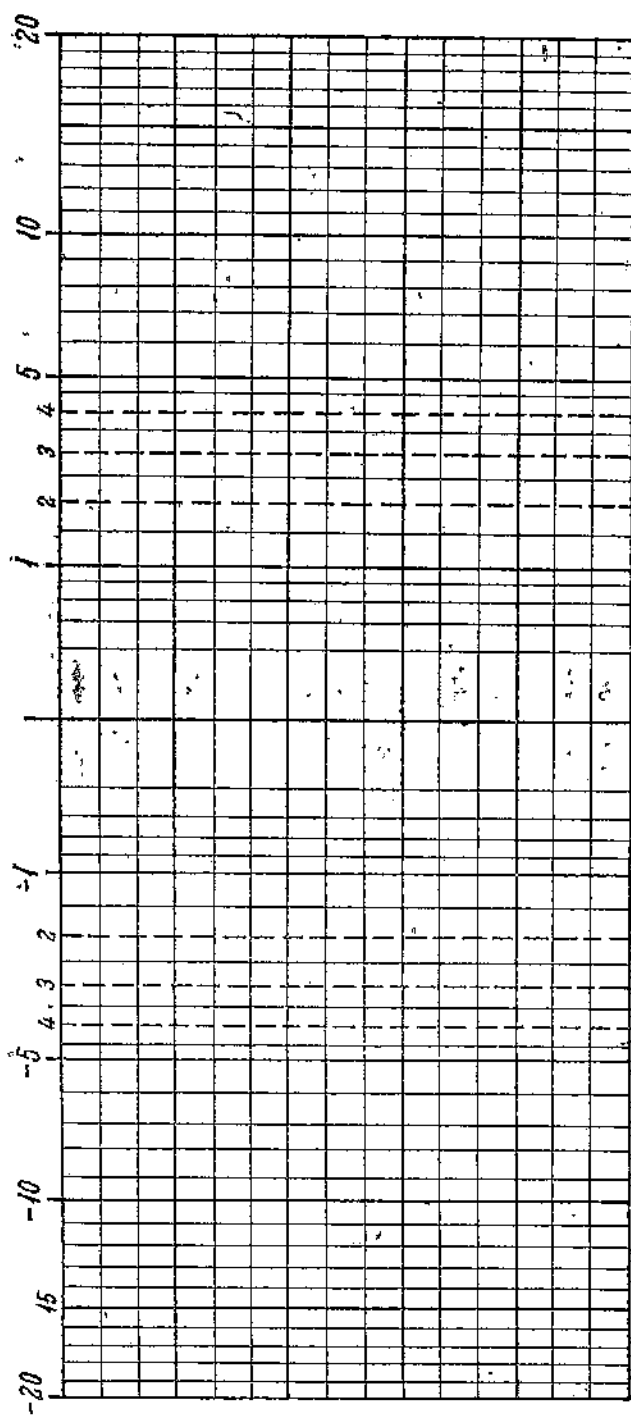
$$N = \frac{b-a}{n} f(y),$$

то $\sum N$ дает, при ориентировке палетки осью по оси OX , значение интеграла

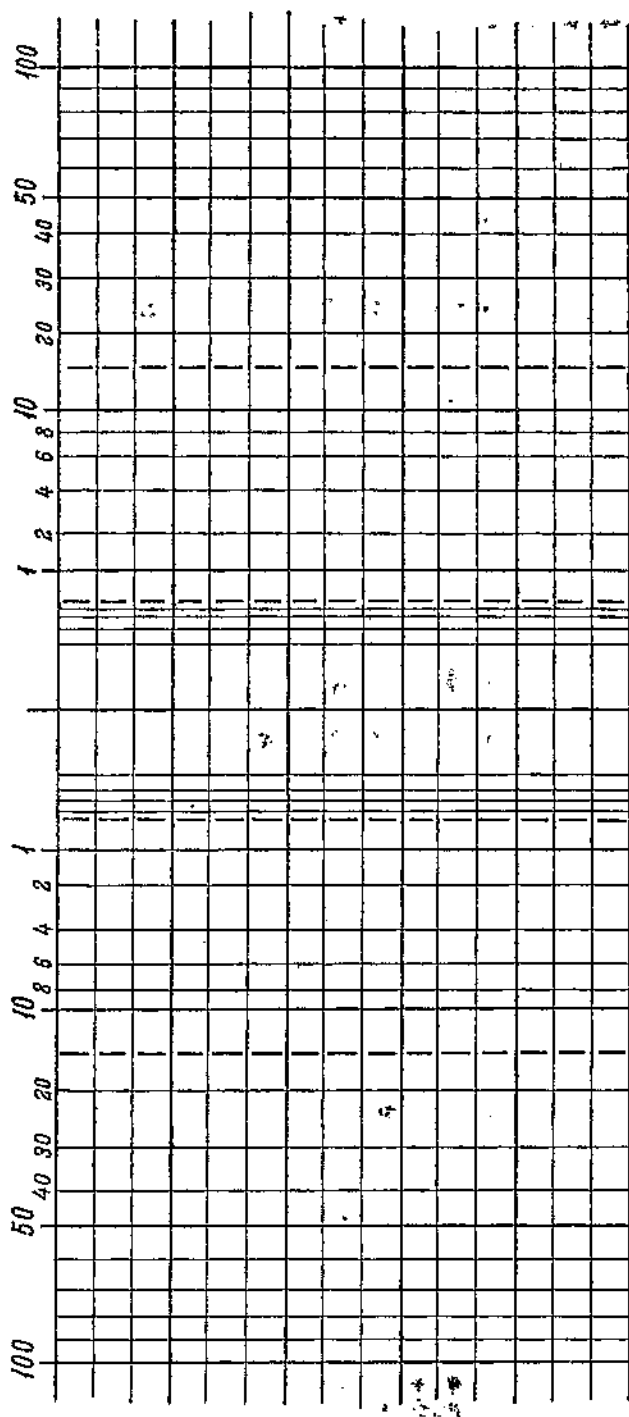
$$I = \int_a^b f(y) dx.$$



Черт. 55.



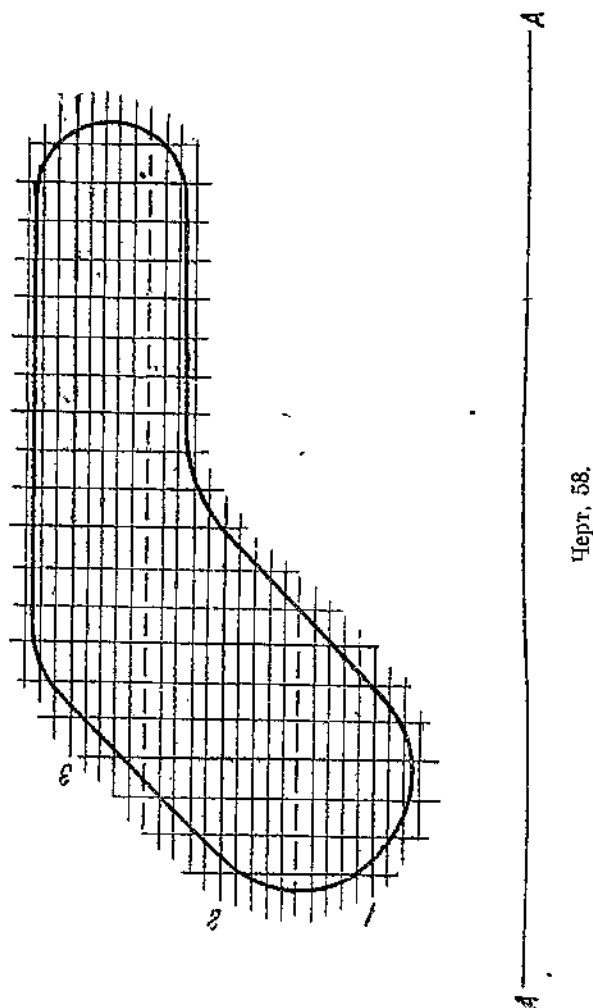
Черт. 56.



Черт. 57.

Так, для статических моментов палетку строим из условия

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{2},$$



что для проведения линий, помеченных значениями N , дает отстояние

от центра палетки

$$y = 2\sqrt{N}.$$

Для моментов инерции

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3},$$

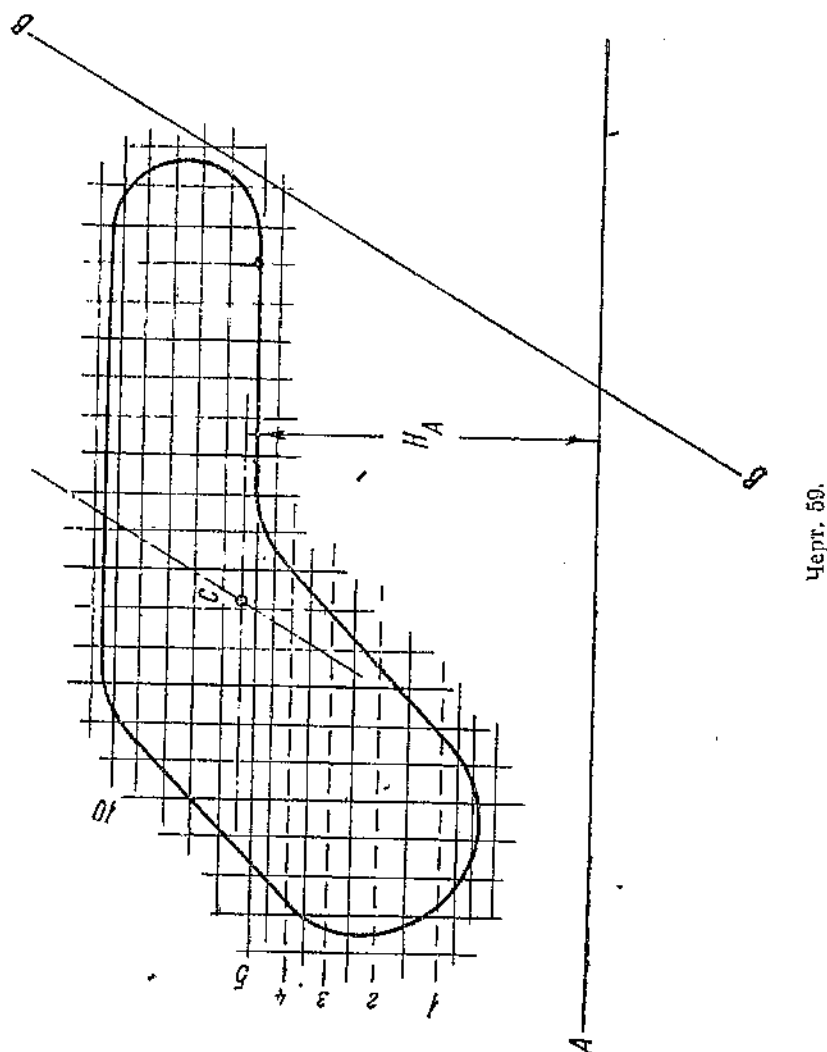
откуда

$$y = \sqrt[3]{6N}.$$

Палетки даны на черт. 56 и 57.

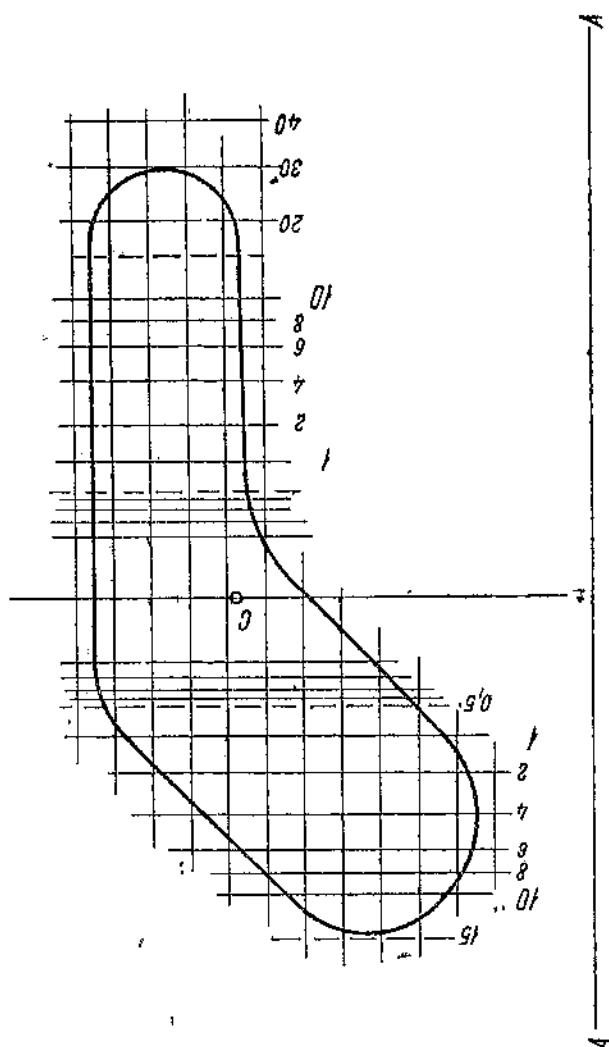
Разберем пример их применения.

Дан профиль поперечного сечения детали одной конструкции; определить площадь сечения, место нахождения центра тяжести и момент



инерции сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести под прямым углом к оси $A-A$ (черт. 58).

Сперва палеткой 55 определяем площадь сечения. Складываем все значения N , считая их по части контура, ближайшей к оси $A-A$, отрицательными.



Черт. 60.

Получаем

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1,9 \\ 2,15 \\ 2,4 \\ 2,65 \\ 2,9 \\ 3,1 \\ 3,25 \cdot 13 - \\ 3,10 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2,45 \\ 2,3 \\ 2,25 \cdot 7 \\ 2,2 \\ 2,05 \\ 1,75 \\ 1,5 \\ 1,3 \\ 1,0 \\ 0,85 \\ 0,75 \cdot 2 \\ 0,85 \\ 1,1 \end{array} \right\} = 25,85 \approx 25,8$$

(подсчет длиномером дал 25,75).

Для нахождения центра тяжести фигуры нужно вычислить ее статические моменты относительно двух осей (AA и BB) — M_A и M_B (черт. 59). Это даст расстояния центра тяжести от осей, равные

$$H_A = \frac{M_A}{S} \text{ и } H_B = \frac{M_B}{S}, \text{ т. е.}$$

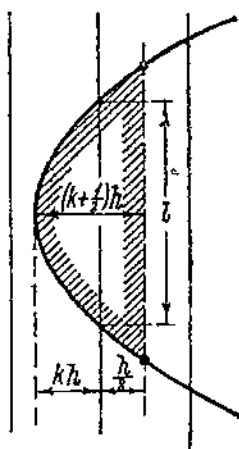
определит его положение. Оси AA и BB желательно давать по возможности под большим углом друг к другу.

Имеем (черт. 59) $M_A = 119,5 \text{ см}^3$, $M_B = 124,5 \text{ см}^3$; отсюда

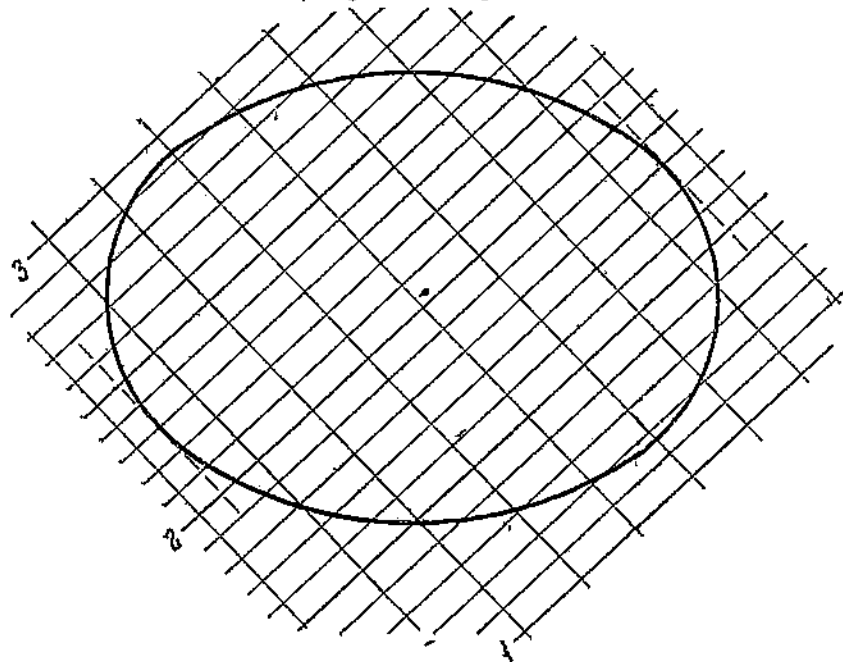
$$H_A = \frac{119,5}{25,8} = 4,64 \text{ см}; H_B = \frac{124,5}{25,8} = 4,83 \text{ см};$$

получаем точку C . Ориентировав по точке C в нужном направлении палетку черт. 57 (черт. 60), вычисляем $J = 185 \text{ см}^4$.

Здесь, так же как и при прочих палетках, часть отсчетов для участков контура, лежащих в непосредственной близости к оси палетки, берется с обратным знаком.



Черт. 61.



Черт. 62.

В практических расчетах палетка должна быть в несколько раз шире, а чертежи раза в два больше (линейно).

В тех случаях, когда, как например в только-что рассмотренном расчете, $\frac{dy}{dx}$ у пределов интегрирования стремится к бесконечности, для достижения достаточной точности нужно брать очень мелкие интервалы между ординатами. Постараемся избежать этого. Предположим, что у границ интегрирования очертания рассматриваемого контура могут быть заменены параболой (как например у черт. 58).

Рассмотрим, на какую часть интервала между линиями палетки должен выдаваться контур, чтобы расчет был по возможности точным.

Пусть контур выдается на k -ую долю интервала h (черт. 61). Если ур-ние параболы

$$y = Ax^{\frac{1}{2}},$$

то площадь, относящаяся к крайней линии палетки, будет равна

$$S = 2A \int_0^{(k+\frac{1}{2})h} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} A \left[(k + \frac{1}{2} h) \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Она должна равняться kh ; но

$$I = 2A (kh)^{\frac{1}{2}},$$

отсюда

$$\frac{4}{3} A \left(k + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}} = 2A k^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}},$$

т. е.

$$\frac{2}{3} \left(k + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = k^{\frac{1}{2}}.$$

Решая это ур-ние, получаем

$$k \approx 0,61 \approx 0,6.$$

Для примера вычислим площадь эллипса с осями 3 и 4 см. Располагая палетку, как показано на черт. 62 (черт. 62 дан в масштабе, удвоенном для наглядности), получаем

$$S = \begin{Bmatrix} 2,71 \\ 2,81 \\ 2,91 \\ 2,87 \\ 2,77 \\ 2,59 \\ 2,30 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1,39 \\ 1,22 \\ 1,18 \\ 1,22 \\ 1,31 \\ 1,48 \\ 1,77 \end{Bmatrix} = 9,45.$$

Точно будет

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot 3 \cdot 4 = 9,43.$$

§ 38. В настоящее время для решения многих технических задач требуется иметь возможность разложить заданную кривую в тригонометрический ряд с большим числом членов. При этом палетки Ломанна Ципперера и т. д., приспособленные для вычисления 12, 20 или 24 составляющих данной кривой, оказываются недостаточными. Например при анализе работы лопатки паровых турбин, в отношении амплитуд резонансных колебаний, приходится до более

стичне
овыми

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
138	13 сверху	$= \frac{4}{3} A \left[\left(k + \frac{1}{2} h \right) \right]^{\frac{5}{3}}$	$= \frac{4}{3} A \left[\left(k + \frac{1}{2} h \right) \right]^{\frac{5}{3}}$

первои

Зак, 1637. П. В. Мелентьев.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \cos x \, dx, \quad (2)$$

где

$$\eta = f(x) + f(-x) - f(\pi - x) - f(-\pi + x) = F(x), \quad (3)$$

Разделим интервал $0 < x < \frac{\pi}{2}$ на n частей, тогда

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\xi_1} \eta \cos x \, dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} id + \dots + \int_{\xi_{n-1}}^{\frac{\pi}{2}} id \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \eta \cos x \, dx. \quad (4)$$

Пусть в пределах каждого интервала мы можем заменить кривую $\eta = F(x)$ отрезком прямой $\eta = A_k + B_k x$ (не требует доказательства то, что при кривой, удовлетворяющей условиям Дирихле и следо-

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

§ 38. В настоящее время для решения многих технических задач требуется иметь возможность разложить заданную кривую в тригонометрический ряд с большим числом членов. При этом палетки Ломанна Ципперера и т. д., приспособленные для вычисления 12, 20 или 24 составляющих данной кривой, оказываются недостаточными. Например при анализе работы лопатки паровых турбин, в отношении амплитуд резонансных колебаний, приходится доходить до более чем сотых гармоник.

При большом числе рассматриваемых волн желательно (в отличие от применяемых обычно методов) все ординаты брать с одинаковыми коэффициентами во избежание ошибки.

Рассмотрим, как к этому подойти. Начнем с амплитуды a_1 первой косинусонды.

Как известно

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos x \, dx, \quad (1)$$

где

$$y = f(x).$$

Мы можем представить это в виде

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \cos x \, dx, \quad (2)$$

где

$$\eta = f(x) + f(-x) - f(\pi - x) - f(-\pi + x) = F(x). \quad (3)$$

Разделим интервал $0 < x < \frac{\pi}{2}$ на n частей, тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\xi_1} \eta \cos x \, dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} id + \dots + \int_{\xi_{n-1}}^{\frac{\pi}{2}} id \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \eta \cos x \, dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть в пределах каждого интервала мы можем заменить кривую $\eta = F(x)$ отрезком прямой $\eta = A_k + B_k x$ (не требует доказательства то, что при кривой, удовлетворяющей условиям Дирихле и следо-

вательно разлагающейся в тригонометрический ряд, взяв достаточно большое n , можно сделать погрешность от замены кривой рядом прямых сколь угодно малой; так как при увеличении числа отдельных площадей невязок в m раз каждая из площадей уменьшается в m^2 раз, следовательно сумма площадей стремится к нулю при достаточно большом n). Тогда мы получим для k -ой части интервала $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \eta \cos x \, dx &= \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (A_k + B_k x) \cos x \, dx = \\ &= A_k (\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1}) + B_k (\xi_k \sin \xi_k + \cos \xi_k - \xi_{k-1} \sin \xi_{k-1} - \cos \xi_{k-1}) = \\ &= (\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1}) \left[A_k + B_k \frac{\xi_k \sin \xi_k + \cos \xi_k - \xi_{k-1} \sin \xi_{k-1} - \cos \xi_{k-1}}{\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1}} \right] = \\ &= (\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1}) \cdot F(x_k), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\xi_{k-1} < x_k < \xi_k.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1}) F(x_k). \quad (6)$$

Примем все $(\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1})$ равными; тогда

$$\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1} = \frac{1}{n}$$

и

$$a_1 = \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^n F(x_k). \quad (7)$$

Для $n=8, 4, 2$ и 1 значения x_k и вычисление их даны в табл. XL.

Переходя от $F(x)$ к $f(x)$, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) + \\ &+ f(-x_k) - f(\pi - x_k) - f(-\pi - x_k)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы оценить погрешность, делаемую нами в результате замены кривой рядом отрезков прямых, рассмотрим черт. 63.

Вместо истинной кривой $F(x)$ мы учитываем пунктирную. Невязка при x близком к $\frac{\pi}{2}$ не играет роли, так как там η умножается на значение $\cos x$, близкое к нулю. В остальных участках мы можем заменить невязки близкими им по величине невязками между кривой $F(x)$ и точно-пунктирной линией, являющейся ломаной, соединяющей вершины ординат $F(x_k)$. Обозначим невязку в ординатах точно-

Черт. 63.

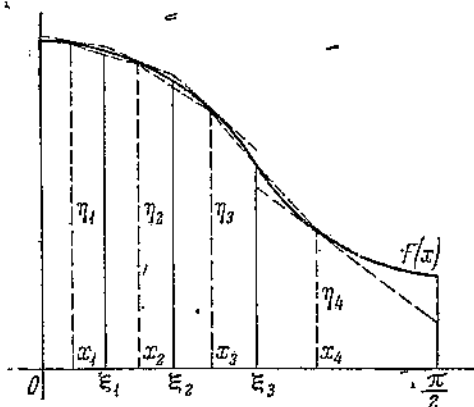


Таблица XI

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
				II × III	IV + V	VI — VI	VII: $\frac{1}{8}$
0	0	0,0	1,0000	0,0	1,0000	0,0077	0,0616
1	0,125	0,1253	0,9921	0,0156	1,0077	0,0237	0,1896
2	0,250	0,2527	0,9682	0,0632	1,0314	0,0400	0,3200
3	0,375	0,3843	0,9273	0,1441	1,0714	0,0564	0,4512
4	0,500	0,5236	0,8660	0,2618	1,1278	0,0747	0,5976
5	0,625	0,6751	0,7806	0,4219	1,2025	0,0950	0,7600
6	0,750	0,8480	0,6615	0,6360	1,2975	0,1189	0,9512
7	0,875	1,0655	0,4841	0,9323	1,4164	0,1544	1,2352
8	1,000	1,5708	0,0	1,5708	1,5708		

I	VI	VII	VIII	I	VI	VII	VIII
0	1,000	0,0314	0,1256	0	1,0000	0,1278	0,2556
1	1,0314	0,0964	0,3856	1	1,1278	0,4430	0,8860
2	1,1278	0,1697	0,6788	2	1,5708		
3	1,2975	0,2733	1,0932				
4	1,5708						
				I	VI	VII	VIII
				0	1,0000		
				1	1,5708	0,5708	0,5708

пунктирной ломаной и кривой $F(x)$ через $\varepsilon = \psi(x)$; тогда погрешность вычисления равна

$$\Delta a_1 \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \cos x \, dx.$$

Среднее значение ε между ординатами η_{k-1} и η_k равно, примерно (как для параболы), $\frac{2}{3}$ максимального. Отсюда

$$\Delta a_1 \approx \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\max} \cos x \, dx < \frac{1}{3} \varepsilon_{\max},$$

т. е. погрешность Δa_1 будет меньше одной трети максимального расстояния по вертикали между точно-пунктирной ломаной и кривой $F(x)$. Если строить точно-пунктирную ломаную не по кривой $F(x)$, а по кривой $f(x)$, то получим

$$\Delta a_1 < \frac{4}{3} \varepsilon_{\max} \approx \varepsilon_{\max},$$

т. е. ошибка, примерно, не превысит $\varepsilon_{\max}$.

При этом исключаются из рассмотрения невязки ε при x , равном $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$.

Переходя к практическим условиям вычисления, мы, имея кривую $y=f(x)$ для $-\pi < x < \pi$, не строим кривой $\eta=F(x)$, а суммируем по ф-ле (8),

Возьмем для примера кривую (черт. 64). Для вычисления a_1 при $n=4$ суммируем ординаты при

(I) $x = \pm 0,1256$	(x_1)	(II) $x = \pm 3,0160$	$(\pi - x_1)$
0,3856	(x_2)	2,7560	$(\pi - x_2)$
0,6788	(x_3)	2,4628	$(\pi - x_3)$
1,0932	(x_4)	2,0484	$(\pi - x_4)$

и получаем

$$a_1 = \frac{1}{4\pi} (\Sigma_I - \Sigma_{II}) \approx \frac{51,0 - 32,2}{12,56} \approx 1,50 \text{ (см)}.$$

Чтобы не проводить ординат, можно разбивку их сделать на краю полоски бумаги. При этом абсциссы ординат, берущихся со знаком $+$, можно выделить, разбив их вверх от горизонтальной линии и соединив второй горизонталью, тогда как абсциссы ординат, берущихся со знаком $-$, пойдут вниз от линии ничем не соединенные. Суммирование ординат лучше всего производить длиномером (описан в главе „Приближенное интегрирование“), при отсутствии его — с линейкой и счетами.

Как видно из черт. 64, уже при $n=4$, т. е. при 16 ординатах, погрешность от замены кривой $f(x)$ ломаной — исчезающе мала. При $n=8$, т. е. 32 ординатах, точность расчета для данной кривой будет выше точности самого аккуратного вычерчивания.

Для вычисления амплитуды синусоиды

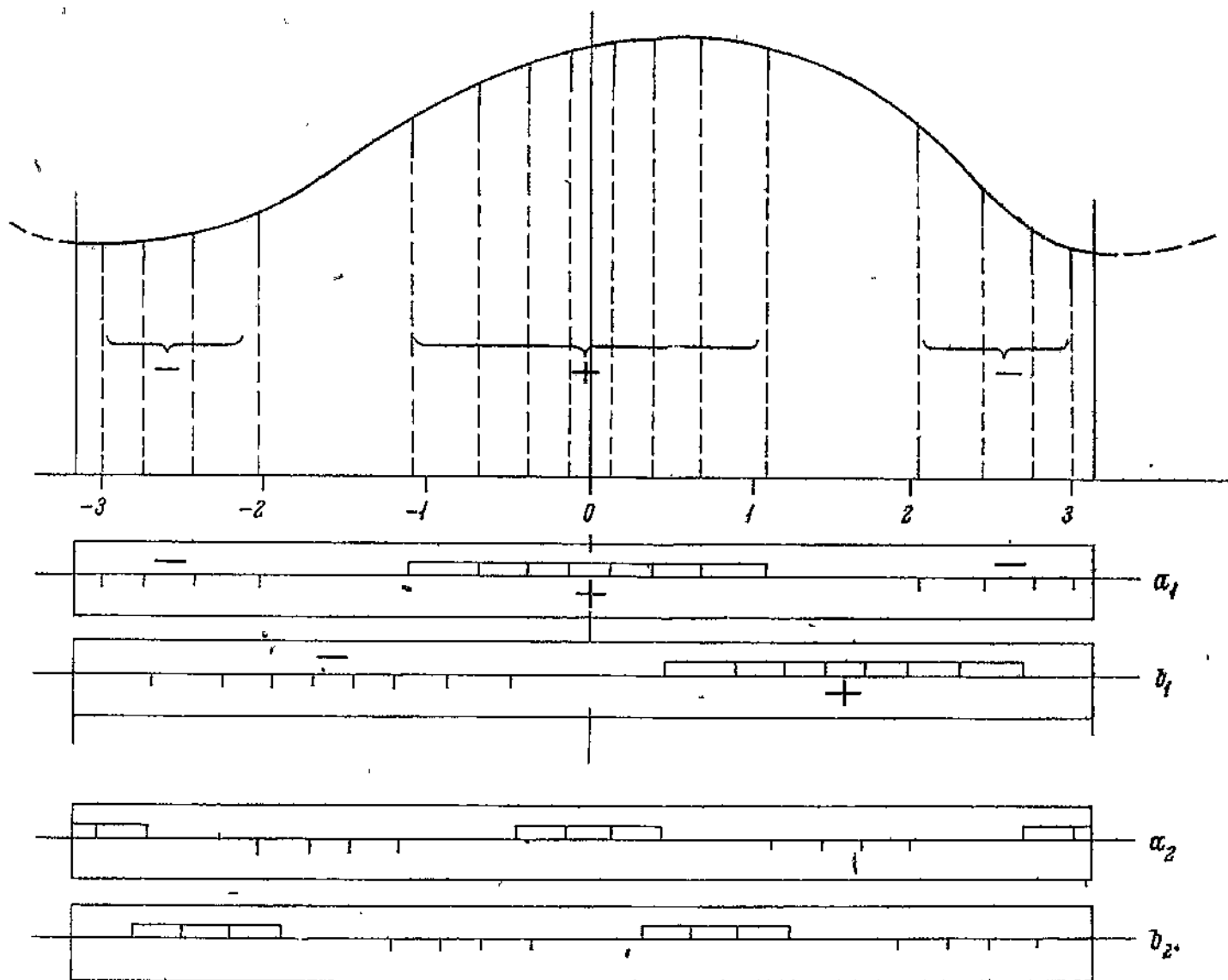
$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin x \, dx$$

достаточно переписать это выражение так:

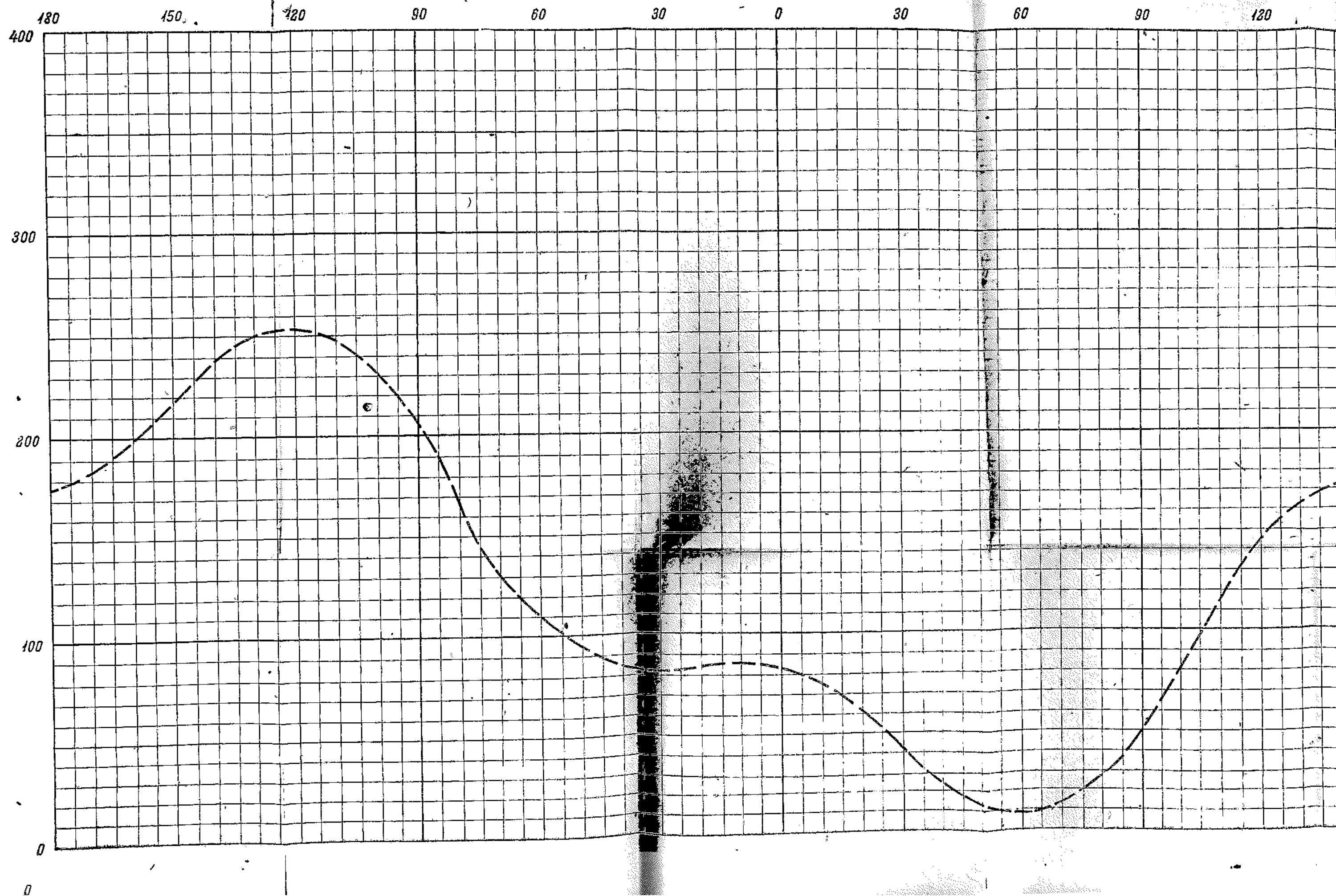
$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx.$$

Все абсциссы, рассматриваемые при вычислении a_1 , будучи передвинуты на $\frac{\pi}{2}$, дадут абсциссы, нужные для вычисления b_1 ; они даны на том же черт. 64, для которого получаем

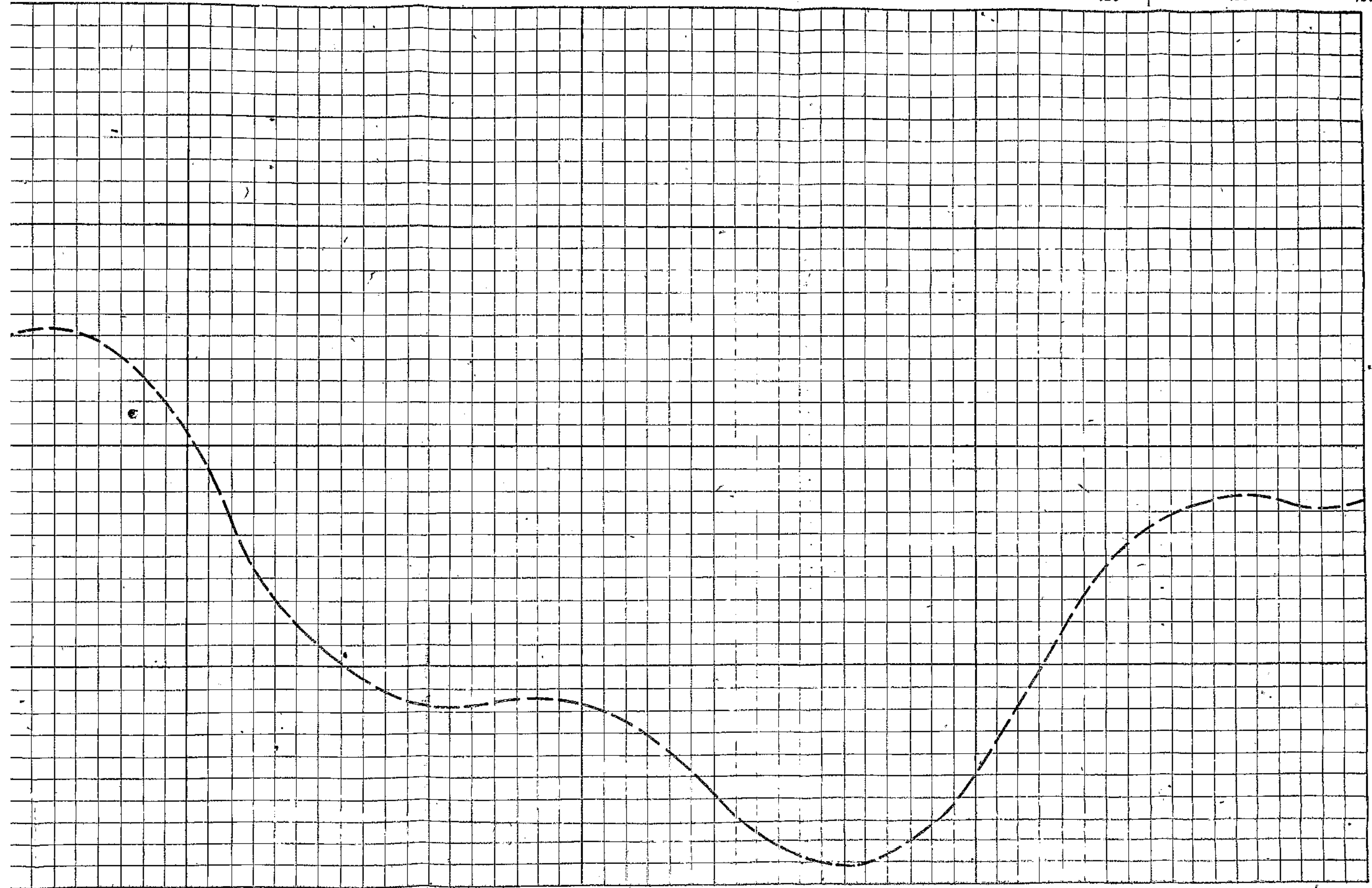
$$b_1 = \frac{1}{4\pi} (\Sigma_I - \Sigma_{II}) = \frac{46,5 - 38,1}{12,56} = 0,67 \text{ (см)}.$$

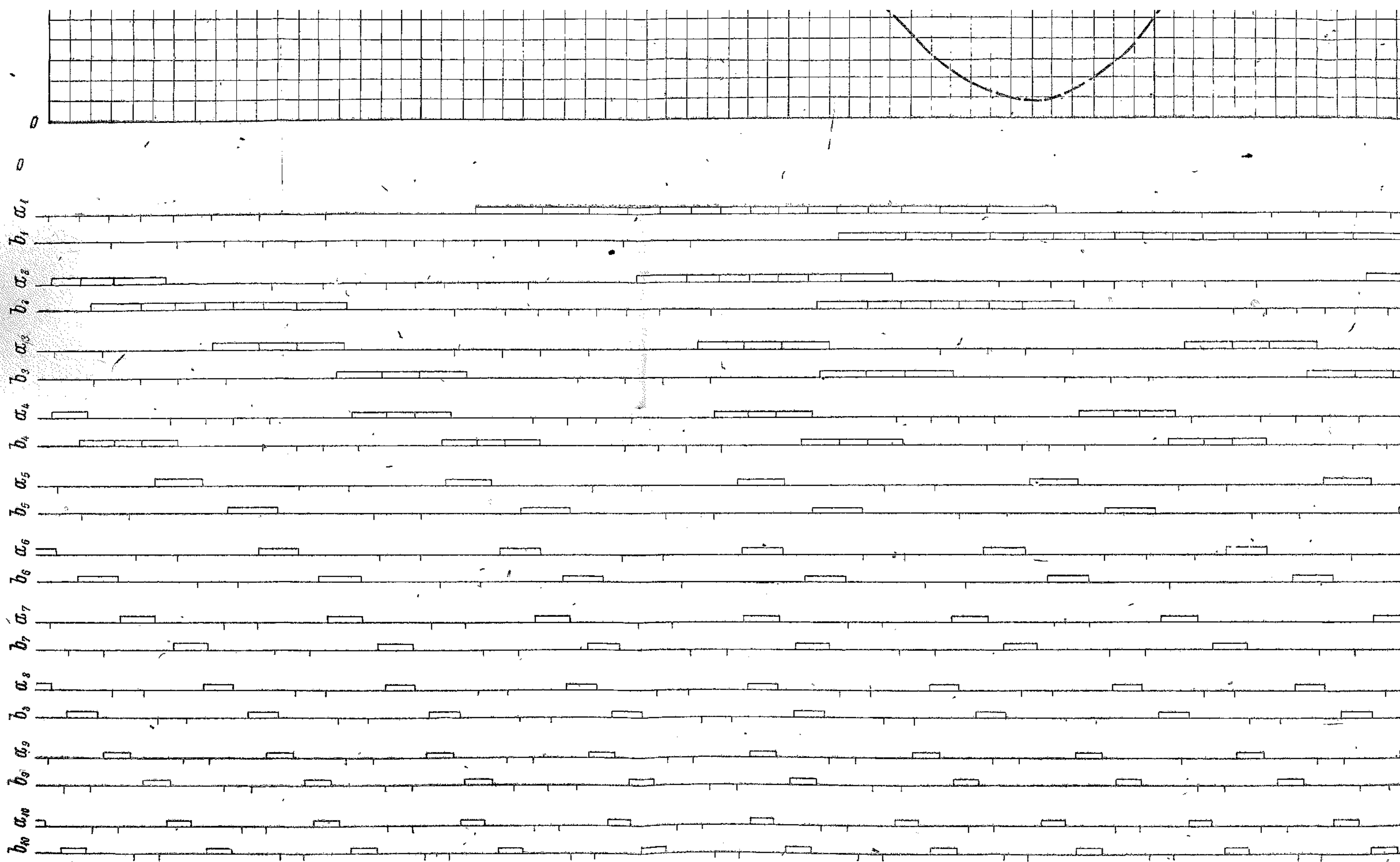


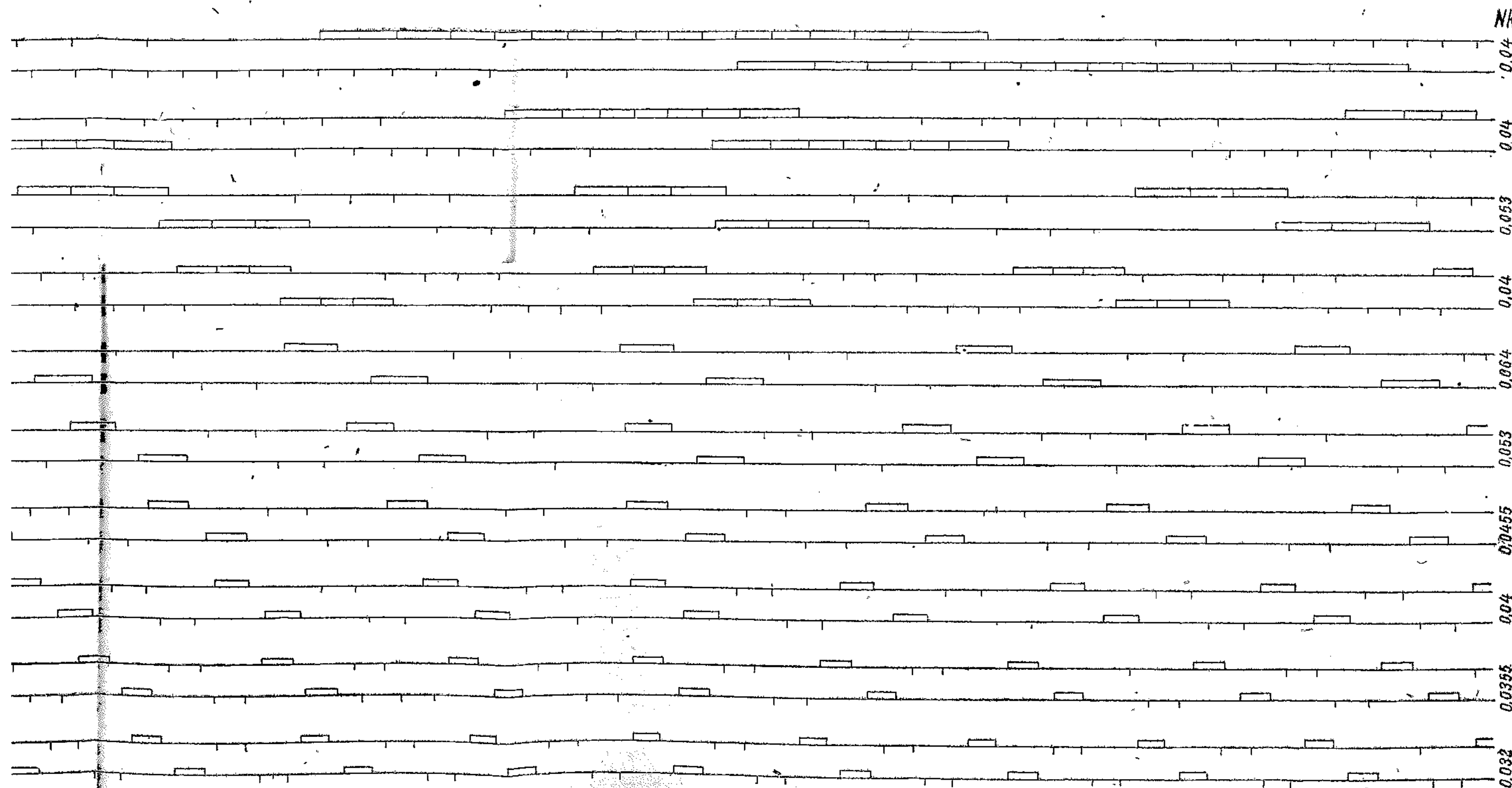
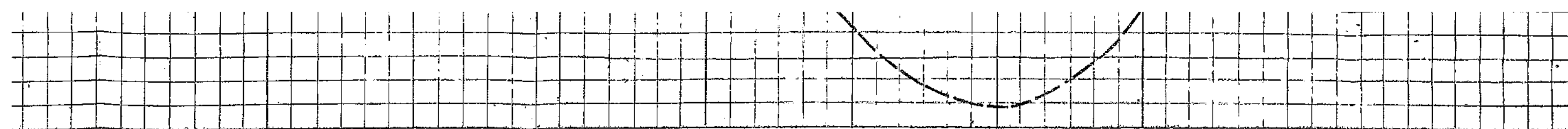
Черт. 64.



120 90 60 30 0 30 60 90 120 150 180







Чепр. 65.

Таблица XLI

k	$\begin{matrix} \Sigma_+ \\ \Sigma_- \\ \Sigma_+ - \Sigma_- \end{matrix}$	a_k	$\begin{matrix} \Sigma_+ \\ \Sigma_- \\ \Sigma_+ - \Sigma_- \end{matrix}$	b_k	a_k^2	b_k^2	$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_g}{b_g}$	φ_k°	φ_k^2
0	—	—	—	—	—	—	129	—	—	—
1	$\begin{matrix} 1075 \\ 3005 \\ -1930 \end{matrix}$	-77,2	$\begin{matrix} 1235 \\ 2810 \\ -1575 \end{matrix}$	-63,0	5960	3980	100	1,23	51	281
2	$\begin{matrix} 2040 \\ 2015 \\ 25 \end{matrix}$	1,0	$\begin{matrix} 2065 \\ 2010 \\ 55 \end{matrix}$	2,2	1	4,8	2	0,45	24	24
3	$\begin{matrix} 1835 \\ 1220 \\ 615 \end{matrix}$	32,6	$\begin{matrix} 1635 \\ 1425 \\ 210 \end{matrix}$	11,1	1065	123	34	2,95	71	71
4	$\begin{matrix} 2020 \\ 2055 \\ -35 \end{matrix}$	-1,4	$\begin{matrix} 2015 \\ 2055 \\ -40 \end{matrix}$	-1,6	2	2,6	2	0,87	41	221
5	$\begin{matrix} 1270 \\ 1275 \\ -5 \end{matrix}$	-0,3	$\begin{matrix} 1270 \\ 1285 \\ -15 \end{matrix}$	-1,0	0,1	1,0	1	0,3	16	196

Отсюда получаем амплитуду волны с периодом 2π

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1,64 \text{ (см)}$$

и фазу ее

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1,50}{0,67} \approx 2,24 \approx \operatorname{tg} 1,15,$$

что дает уравнение первой волны

$$y_1 = 2,24 \sin(x + 1,15) \quad [= r_1 \sin(x + \varphi_1)].$$

Для вычисления a_2 и b_2 мы можем воспользоваться уже сделанными выводами и рассмотреть две части нашей кривой — для $-\pi < x < 0$ и $0 < x < \pi$, в каждой из которых кривая дает свое значение a_2 и b_2 .

Пусть они будут a_2' и a_2'' и b_2' и b_2'' . Очевидно, что для всей кривой получим

$$a_2 = \frac{a_2' + a_2''}{2}, \quad b_2 = \frac{b_2' + b_2''}{2}.$$

На черт. 64 даны положения абсцисс для $n=2$, т. е. для 8 абсцисс на длину одной волны, или 16 абсцисс для рассматриваемого участка $-\pi < x < \pi$. Для получения a_2 нужно просуммировать все ординаты,

99. 1999

Таблица XLII'

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	
0°	0	0,01	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,11	0,13	0,15	0,17
10°	0,17	0,19	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,33	0,35
20°	0,35	0,37	0,39	0,41	0,43	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,57
30°	0,57	0,59	0,61	0,64	0,66	0,69	0,71	0,74	0,77	0,80	0,82
40°	0,82	0,85	0,88	0,92	0,95	0,98	1,02	1,05	1,09	1,13	1,17
50°	1,17	1,21	1,26	1,30	1,35	1,40	1,46	1,51	1,57	1,63	1,70
60°	1,70	1,75	1,84	1,90	2,06	2,10	2,20	2,30	2,40	2,5	2,7
70°	2,7	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,9	4,2	4,5	4,9	5,4
80°	5,4	6,0	6,7	7,6	9	10	13	16	23	38	115
90°	115	—	—	—	—	—	—	—	—	—	∞

берущиеся со знаком $+$, что даст Σ_+ , и все, берущиеся со знаком $-$, что даст Σ_- :

$$a_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{2} = \frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{4\pi} = -0,18;$$

аналогично, получив для b_2 свои Σ_+ и Σ_- , имеем

$$b_2 = \frac{\Sigma_+ - \Sigma_-}{4\pi} = 0,00.$$

Это дает нам вторую гармонику

$$y_2 = 0,18 \sin(2x + 1,57)$$

и т. д.

§ 39. Для удобства вычисления хорошо пользоваться черт. 65. На разграфленную часть его накладывается прозрачная бумага и на ней вычерчивается анализируемая кривая. Затем берется $(\Sigma_+ - \Sigma_-)$ и умножается на коэффициент N_k , приписанный при шкале разбивки абсцисс. Это дает соответствующее значение a_k или b_k .

Для примера возьмем кривую, анализ которой приведен во II томе курса высшей математики проф. В. И. Смирнова. В названном курсе она задана 20-ю значениями, через 18° каждое.

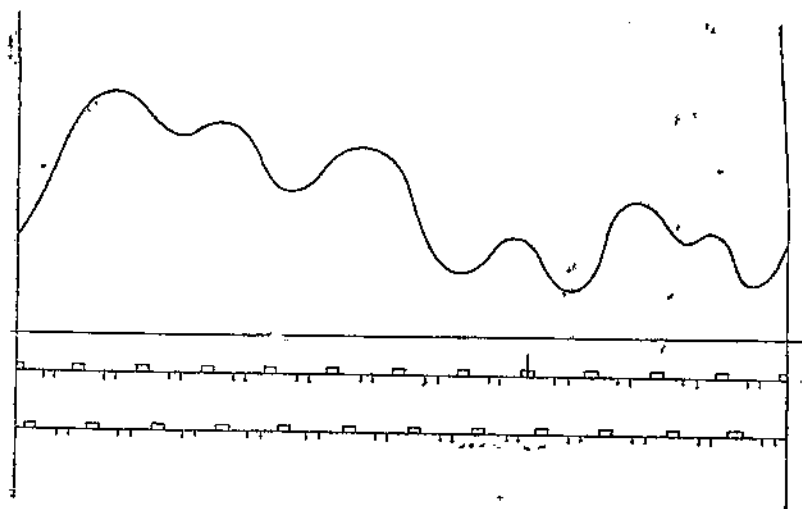
Значения эти:

(1) 175	(6) 205	(11) 82	(16) 50
196	135	64	110
230	100	29	158
253	82	10	174
(5) 245	(10) 85	(15) 15	(20) 173

Наносим кривую (на черт. 65 она дана пунктиром).

Сперва вычисляем a_0 , беря ординаты через 10° и деля сумму их на 36,

$$a_0 = \frac{\sum y}{36} = \frac{4361}{36} = 128,6 \approx 129.$$



Черт. 67.

Затем составляем табл. XLI, в которую записываем получаемые величины.

При этом воспользуемся для определения фазы φ_n приведенной у В. И. Смирнова табл. XLII и табл. XLIII.

Табл. XLII служит для вычисления вспомогательной величины ψ° из $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \psi$, после чего по табл. XLIII в зависимости от знаков перед $|a|$ и $|b|$ получается φ .

На черт. 65 мы можем получить первые десять значений a и десять значений b , для дальнейших же воспользуемся палеткой черт. 66. На палетке черт. 66 дана разбивка абсцисс на восьми периодах для a .

Пусть мы хотим найти a_{12} и b_{12} для кривой черт. 67. Проводим под чертежом две линии — одну для a_{12} , а другую для b_{12} . Пусть длина основного периода равна L (мм), на черт. 67 $L = 200$ (мм).

Таблица XLIII

a_k	b_k	φ_k
+	+	$\varphi_k = \psi_k$
+	—	$\varphi_k = 180^\circ - \psi_k$
—	—	$\varphi_k = 180^\circ + \psi_k$
—	+	$\varphi_k = 360^\circ - \psi_k$

Один период k -ой гармоники имеет длину $\frac{L}{k}$, а восемь периодов длину $l_k = \frac{8L}{k}$; в нашем примере $l_{12} = 133,3$ (мм). Отмечаем на линии для a_k расстояние от начала периода, равное l_k , и накладываем на эту линию палетку черт. 8 так, чтобы ее верхняя и нижняя грани были горизонтальны, а наклонные грани пересекли начало и конец отмеченного отрезка длины l_k . Накладываем точки пересечения линий палетки с линией a_k . Затем переносим палетку на конец основного периода, устанавливаем по проколам и накладываем остальные периоды k -ой гармоники. Для абсцисс, соответствующих проколам, суммируем ординаты. При этом положительными считаем ординаты для точки пересечения с линией a_k жирных линий палетки черт. 67 и отрицательными — тонких линий.

Получив $\sum_+$ и $\sum_-$, находим a_k

$$a_k = \frac{\sum_+ - \sum_-}{\pi k} \quad (\text{так как здесь } n=1).$$

Для получения b_k ориентируем палетку по линии b_k по тем же проколам, приставляя к началу основного периода пунктирную линию палетки; в остальном аналогично a_k получаем

$$b_k = \frac{\sum_+ - \sum_-}{\pi k}.$$

Для черт. 67 имеем

$$a_{12} = \frac{87,7 - 85,9}{12\pi} = 0,05 \text{ (см)},$$

$$b_{12} = \frac{85,8 - 87,0}{12\pi} = -0,03 \text{ (см)}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

	Стр.
<i>Глава I.</i> Решение численных уравнений (§§ 1—7)	5
<i>Глава II.</i> Решение вековых уравнений (§ 8—12)	46
<i>Глава III.</i> Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений (§ 13—22)	64
<i>Глава IV.</i> Приближенное конформное преобразование (§ 23—32)	96
<i>Глава V.</i> Приближенное интегрирование (§ 33—37)	118
<i>Глава VI.</i> Гармонический анализ (§ 38—39)	130

Отвественный редактор *Е. В. Пулькина*

Технический редактор *Е. А. Максимова*

Корректор *М. А. Воложенин*

Сдана в набор 8/II 1937 г.

Подписана к печати 10/IV 1937 г.

Формат 62 × 94

Изд. № 240

Бум. листов 4,64 ± 10 акл.

Тип. зн. в 1 бум. л. 213 248

Ленгорт № 2205

Тираж 4000 Уч.-авт. л. 13,60

Заказ № 1637

2-я типография ОНТИ им. Евгения Соколовой, Ленинград, пр. Красн. Командиров, 29