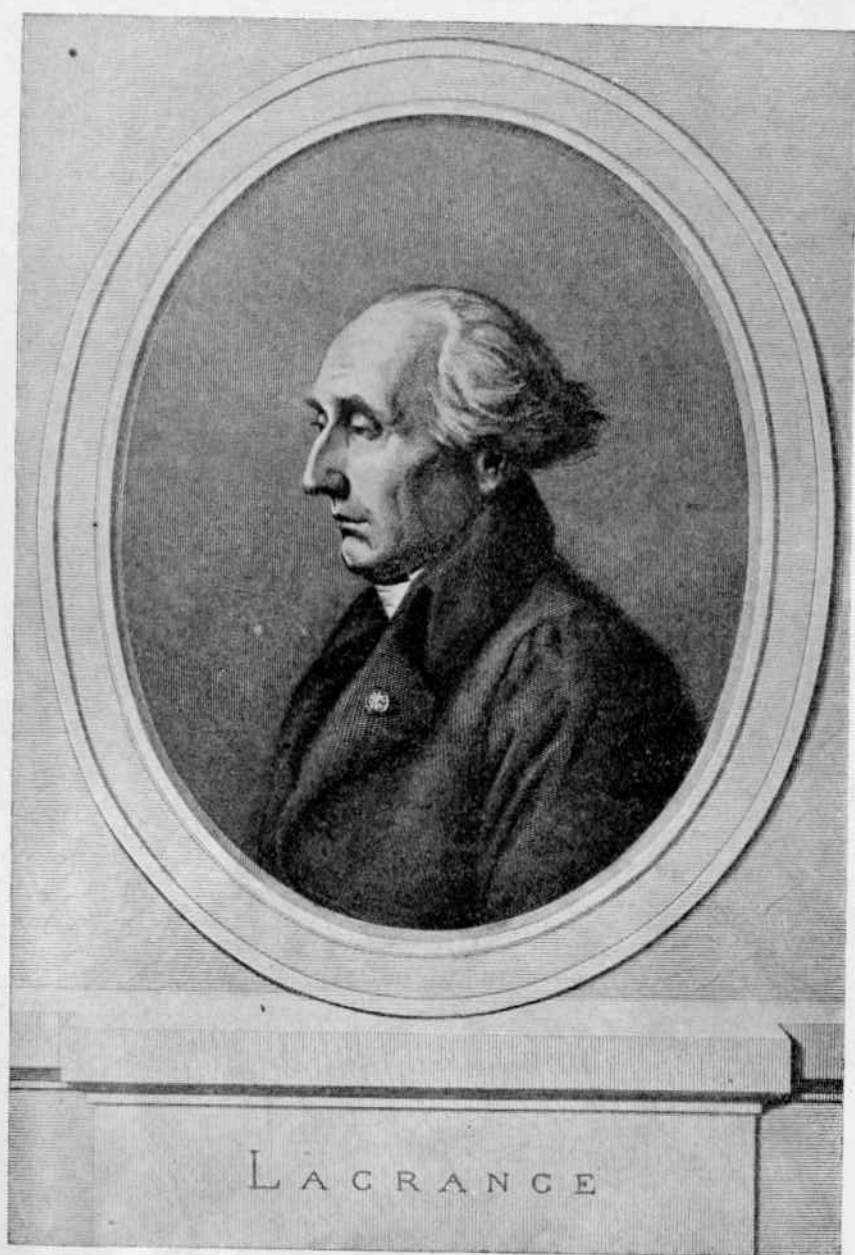


ЛАТРАНЖЕ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ГОИТИ НКТП СССР. 1938



КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Ф И З И К А
М Е Х А Н И К А
М А Т Е М А Т И К А
А С Т Р О Н О М И Я

MECHANIQUE ANALITIQUE;

*Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris,
de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*



A PARIS,

Chez LA VÉUVE DESAINT, Libraire,
rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Л 14

Депозитарий

1956 г.

ЛАГРАНЖ

Пров. 1965

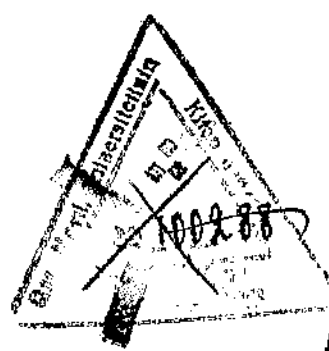
АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
В. С. ГОХМАН

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ПРИМЕЧАНИЯМИ
Л. Г. ЛОЙЦАНСКОГО И А. Н. ЛУРЬЕ

1/392342



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТН СССР
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

ПРОВЕРЕНО
1966 г.

НИКОЛАЕВИЧ

Т 13-5-4
ТКК № 19

Проведено
1949 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ ЛАГРАНЖА КЪ ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ [1*].

Существует уже много трактатов о механике, но план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постарался этого достигнуть, не оставит желать чего-либо лучшего.

Кроме того, эта работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и осветит с единой точки зрения различные принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их связь и взаимную зависимость и даст возможность судить об их правильности и сфере их применения.

Я делю эту работу на две части: на *статику*, или теорию равновесия, и на *динамику*, или теорию движения; в каждой из этих частей я отдельно рассматриваю твердые и жидкие тела.

В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения**).

Таков план, который я попытался осуществить в первом издании настоящего трактата, опубликованного в 1788 году. Настоящее издание представляет собою со многих точек зрения новую работу, выполненную по тому же, но только расширенному, плану. Здесь уделено больше внимания изложению принципов и общих формул и отведено больше места приложениям, в которых содержится разрешение основных проблем, относящихся к области механики.

Мы сохранили обычные обозначения дифференциального исчисления, так как они соответствуют системе бесконечно малых величин, принятой в настоящем трактате. Если дух этой системы хорошо усвоен и если в точности ее результатов убедился с помощью геометрического метода первых и последних отношений, или с помощью аналитического метода производных функций, то бесконечно малые величины можно применять в качестве надежного и удобного средства для сокращения и упрощения доказательств.

*) Цифрами в квадратных скобках отмечены примечания редакторов русского перевода, помещенные в конце тома. *Прим. ред.*

**) Это начало предисловия Лагранжа ко второму изданию целиком воспроизводит его предисловие к первому изданию, которое мы здесь не приводим. *Прим. ред.*

Аналогичным образом доказательства ученых сокращаются с помощью метода неделимых.

Укажем теперь главнейшие дополнения, которыми настоящее издание отличается от предшествующего.

Первый отдел первой части содержит в себе более полный анализ трех принципов статики с новыми замечаниями о природе и связи этих принципов; он заканчивается прямым доказательством принципа виртуальных скоростей, совершенно независимым от других двух принципов.

Во втором отделе дано более строгое доказательство положения, что принцип виртуальных скоростей для любого члена сил, находящихся в равновесии, может быть выведен из того случая, когда имеется только две силы; благодаря этому данный принцип может быть прямо сведен к принципу рычага; уравнения, вытекающие из этого принципа, даны в более общем виде и указаны условия, необходимые для того, чтобы какая-либо система сил была эквивалентна другой системе сил и была в состоянии ее заменить.

В третьем отделе мы выводим более прямым путем формулы мгновенных вращательных движений и сложения этих движений, а отсюда выводим теорию моментов и их сложения; мы излагаем здесь мало известное свойство центра тяжести и даем новое доказательство максимумов и минимумов, имеющих место при состоянии равновесия.

Четвертый отдел содержит в себе более общие и более простые формулы для решения задач, связанных с методом вариаций; путем сопоставления этих формул с формулами равновесия тел изменяющейся формы мы показываем, что задачи, касающиеся равновесия, относятся к разряду задач, известных под названием *общих изопериметрических* задач, и решаем их тем же самым путем.

Пятый отдел излагает некоторые новые проблемы и содержит в себе важные замечания по поводу некоторых решений, приведенных уже в первом издании.

В шестом отделе мы прибавили некоторые детали, касающиеся исторического анализа принципов гидростатики.

В седьмом отделе мы придали больше строгости и общности численному вариаций молекул жидкости и сильно упростили анализ членов, относящихся к границам массы жидкости; из этих членов мы вывели теорию действия жидкостей на твердые тела, ими покрываемые, или на стенки сосудов, в которых они заключены, а отсюда получили прямое доказательство теоремы, что при равновесии твердого тела с жидкостью, силы, действующие на твердое тело, являются теми же, как если бы жидкость образовала лишь единую массу с твердым телом. В этом же отделе, равно как и в следующем, где трактуется вопрос о равновесии упругих жидкостей, мы прибавили несколько случаев применения общих формул равновесия жидкостей.

Вторая часть настоящей работы, содержащая в себе динамику, получила большее количество добавлений.

В первом отделе мы дали более полный, а в некоторых частях более точный исторический анализ принципов динамики.

Второй отдел содержит в себе очень важное добавление, в котором указывается, в каких случаях общие формулы динамики, а следовательно, и уравнения, получающиеся отсюда для движения системы тел, не зависят от положения осей координат в пространстве; отсюда получается возможность путем введения трех новых произвольных постоянных обобщить решение, в котором некоторые постоянные были положены равными нулю.

В третьем отделе уделено больше внимания свойствам, относящимся к движению центра тяжести и к площадям, описанным системой тел; мы прибавили здесь теорию главных осей или равномерного вращения, выводимую из рассмотрения мгновенных вращательных движений с помощью анализа, отличного от того, какой применялся до сих пор; далее, мы доказываем некоторые новые теоремы касательно вращения твердого тела или системы тел — для случая, когда это вращение происходит вследствие первоначального толчка.

Четвертый отдел остался почти в том же виде, как и в первом издании.

Но пятый отдел является совершенно новым; он содержит в себе теорию вариации произвольных постоянных, которая послужила темой для трех мемуаров, напечатанных в *Mémoires de la première Classe de l'Institut* за 1808 г.; однако здесь эта теория изложена более просто и в виде общего приближенного метода решения всех механических задач — для случаев, когда имеются возмущающие силы, величина которых незначительна по сравнению с главными силами.

Отметим здесь, что для того чтобы этой теории приписать всю ту область, которую она способна охватить, функция V , зависящая от главных сил, может быть только целой функцией одних независимых переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, а также времени t , но что функция, обозначенная через Ω и зависящая от возмущающих сил, не должна обязательно иметь тот же характер. Какова бы ни была природа этих сил, достаточно только, если для каждого тела m системы их разложить по направлению координат x, y, z на три силы X, Y, Z , стремящиеся увеличить эти координаты, представить эти координаты в виде функций независимых переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$; тогда вместо частных дифференциалов $\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}, \dots$ можно под-

ставить соответствующие суммы

$$S m \left(X \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y \frac{\partial y}{\partial \xi} + Z \frac{\partial z}{\partial \xi} \right), \quad S m \left(X \frac{\partial x}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y}{\partial \psi} + Z \frac{\partial z}{\partial \psi} \right), \dots$$

и, следовательно, вместо $\Delta \Omega$ — величину

$$S m (X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z),$$

где Δ обозначает вариацию по отношению к произвольным постоянным, так что $\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}$ можно заменить выражением

$$S m \left(X \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right);$$

равным образом можно заменить другие частные дифференциалы Ω . Этим путем можно достичь того, что настоящий метод станет применимым и к возмущающим силам, выраженным при посредстве любых переменных.

Наконец, в шестом отделе, являющемся последним в этом томе и соответствующем первому параграфу пятой главы предшествующего издания, прибавлены различные замечания и в особенности разрешение некоторых проблем о малых колеблющихся тел; он заканчивается теорией колеблющихся струн, которую я дал в первом томе *Mémoires de Turin* и которую я здесь изложил более просто и приняв во внимание возражения, выдвинутые против этой теории Даламбером (d'Alembert) в первом томе его *Opuscules*.

ЛАТРАНЖЕ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

О РАЗЛИЧНЫХ ПРИНЦИПАХ СТАТИКИ.

Статика—это наука о равновесии сил. Под *силой* мы понимаем, вообще говоря, любую причину, которая сообщает или стремится сообщить движение телам, к которым мы представляем себе ее приложенной; поэтому силу следует оценивать по величине движения, которое она вызывает или стремится вызвать. В состоянии равновесия сила не производит реального действия; она вызывает лишь простое стремление к движению; но ее следует всегда измерять по тому эффекту, какой она вызвала бы, если бы она действовала при отсутствии каких-либо препятствий. Если принять в качестве единицы какую-либо силу или же ее действие, то выражение для любой другой силы представит собою не что иное, как отношение, т. е. математическую величину, которая может быть выражена с помощью чисел или линий; с этой именно точки зрения и следует в механике рассматривать силы.

Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые борются и взаимно сводят на-нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение. Эти законы основаны на общих принципах, которые можно свести к трем: принципу рычага, принципу сложения сил и принципу виртуальных скоростей.

1. Архимед, единственный из древних, оставивший нам теорию равновесия в двух своих книгах *de Aequiponderantibus*, или *de Planotum aequilibriis*, является автором принципа рычага. Последний, как его знают все механики, заключается в следующем. Если прямолинейный рычаг нагружать с обеих сторон от точки опоры какими-либо двумя грузами таким образом, чтобы расстояния этих грузов от точки опоры были обратно пропорциональны самим грузам, то рычаг останется в равновесии, а нагрузка на точку его опоры будет равна сумме обоих грузов. Для случая, когда грузы равны и находятся на равном расстоянии от точки опоры, Архимед принимает этот принцип в качестве очевидной аксиомы механики или, по меньшей мере, в качестве опытного закона. К этому простому и первичному случаю он сводит случай, когда на рычаге помещены неравные грузы; последние, если они соизмеримы между собою, он представляет себе разделенными на большое число равных частей, эти части каждого груза он отделяет друг от друга и помещает их на соответствующих плечах того же рычага на равных друг от друга расстояниях, так что рычаг оказывается нагруженным большим числом малых равных между собою грузов, расположенных на равных расстояниях от точки опоры. Далее, он обосновывает правильность этой же теоремы для несоизмеримых грузов, доказы-

вая посредством метода исчерпывания, что между этими грузами не может быть равновесия, если они не находятся между собою в отношении обратном их расстояниям от точки опоры.

Некоторые новые авторы, как Стевин (Stevin) в своей Статике и Галилей (Galilei) в своих *Диалогах* [2] о движении, упростили доказательство Архимеда, приняв, что грузы, помещенные на рычаге, имеют форму параллелепипедов, подвешенных горизонтально в средней своей точке; при этом ширина и высота обоих параллелепипедов равны, но длины их вдвое больше соответствующих противоположных плеч. Тогда оба параллелепипеда находятся между собой в обратном отношении к своим плечам и в то же время они располагаются друг по отношению к другу своими концами таким образом, что составляют единое целое, середина которого в точности совпадает с точкой опоры рычага. Архимед уже раньше воспользовался подобным методом для определения центра тяжести фигуры, составленной из двух параболических поверхностей, а именно — в первом предложении второй книги о равновесии плоскостей.

Другие авторы, наоборот, полагали, что нашли ошибку в доказательстве Архимеда и видоизменили его различным образом с тем, чтобы придать ему большую строгость; следует, однако, признать, что, нарушив простоту этого доказательства, они почти ничего не выиграли с точки зрения точности.

Тем не менее из числа авторов, пытавшихся дополнить доказательство равновесия рычага, данное Архимедом, следует особо отметить Гюйгенса (Huyghens), который по этому поводу написал небольшую работу под заглавием *Demonstratio aequilibrii bilancis* *), напечатанную в 1693 г. в собрании старых *Mémoires de l'Académie de Sciences*.

По мнению Гюйгенса Архимед молча допускает, что когда несколько равных грузов помещено на горизонтальном рычаге на равных друг от друга расстояниях, то они стремятся вывести рычаг из горизонтального состояния с одинаковой силой — независимо от того, находятся ли они все по одну сторону от точки опоры, или же один из них находится на одной стороне, а другие на другой стороне от точки опоры.

Для того чтобы избежать этого ненадежного допущения, он распределяет равные части соизмеримых грузов не так, как это сделал Архимед, т. е. на одном и том же рычаге по обе стороны от точек, в которых грузы должны были бы висеть целиком, а размещает их точно таким же образом на двух других горизонтальных рычагах, которые расположены в конечных точках рассматриваемого рычага перпендикулярно к последнему, образуя с ним букву Т. Таким путем получается горизонтальная плоскость, нагруженная известным числом равных грузов, которая очевидно находится в равновесии по отношению к линии первого рычага, так как грузы распределены одинаково и симметрично по обе стороны от этой линии. Но Гюйгенс далее доказывает, что эта плоскость находится в равновесии и по отношению к прямой линии, наклонной к линии рычага и пересекающей последнюю в точке, разделяющей основной рычаг на части, обратно пропорциональные грузам, которыми он согласно предположению нагружен, — так как ясно, что при этих условиях малые грузы располагаются на равных расстояниях по обе стороны от той же прямой линии. Отсюда Гюйгенс приходит к выводу, что плоскость, а следовательно, и рассматриваемый рычаг должны быть в равновесии в той же точке.

* Эта работа Гюйгенса входит в состав его „Сочинений“, опубликованных с Гравезандом (s'Gravesande) в 1724 г. (в Лисоне), т. 1, стр. 282. *Прим. Бертрама.*

Это доказательство остроумно, но оно не дает полностью того, чего действительно нехватает в доказательстве Архимеда.

2. Что прямой горизонтальный рычаг, концы которого нагружены равными грузами и точка опоры которого находится посередине, остается в равновесии, это само по себе очевидно, так как нельзя усмотреть основания, в силу которого один груз перетянул бы другой. Не так однако обстоит дело с допущением, что нагрузка на точку опоры равна сумме обоих грузов. Повидимому, все механики рассматривали это допущение как результат повседневного наблюдения, которое учит нас, что тяжесть тела зависит только от его массы, но ни в какой мере не зависит от его формы*). Тем не менее эту истину можно вывести из первой, если подобно Гюйгенсу рассмотреть равновесие плоскости по отношению к прямой линии.

Для этой цели следует только представить себе плоский треугольник, который на обоих концах своего основания нагружен двумя равными грузами и в вершине своей нагружен двойным грузом. Эта плоскость будет очевидно в равновесии, если она будет опираться на прямую линию или на неподвижную ось, проходящую через середины обеих сторон треугольника; ибо каждую из этих двух сторон можно рассматривать в качестве рычага, который на обоих своих концах нагружен равными грузами и имеет точку опоры на оси, проходящей через его середину. Но это равновесие можно истолковать и иначе, а именно, рассматривая самое основание треугольника как рычаг, концы которого нагружены двумя равными грузами, и представляя себе поперечный рычаг, соединяющий вершину треугольника с серединой основания, так что образуется фигура Т-образного вида; один конец поперечного рычага нагружен двойным грузом, расположенным в вершине треугольника, между тем как второй конец служит точкой опоры для рычага, образуемого основанием. Совершенно очевидно, что этот последний рычаг будет находиться в равновесии на поперечном рычаге, который поддерживает его посередине и, следовательно, что поперечный рычаг будет в равновесии на оси, на которой треугольник находится в равновесии. Но так как ось проходит через середину обеих сторон треугольника, то она обязательно пройдет и через середину прямой линии, проведенной из вершины треугольника к середине его основания; таким образом поперечный рычаг будет иметь свою точку опоры в средней своей точке и, следовательно, будет одинаково нагружен на обоих концах. Таким образом нагрузка, которую несет точка опоры рычага, образующего основание треугольника и нагруженного на обоих своих концах равными грузами, будет равна двойному грузу, находящемуся в вершине треугольника и, следовательно, будет равна сумме обоих этих грузов.

Если бы вместо треугольника рассмотреть трапецию, нагруженную в четырех своих вершинах четырьмя равными грузами, то тем же путем можно было бы установить, что два рычага неравной длины, образующие параллельные стороны трапеции, действуют на свои точки опоры с равными силами.

3. Если это положение однажды обосновано, то ясно, что подобно тому, как это сделал Архимед, можно вместо одного груза, находящегося в равновесии на рычаге, подвесить два равных вполтину меньших груза, если только их поместить на соответствующем плече и на равных расстояниях по обе стороны от той точки, в которой должен был быть помещен

*) Мне думается, что впервые это положение пытался доказать Даламбер, однако доказательство, приведенное им в *Mémoires de l'Académie de Sciences* за 1769 г., не вполне удовлетворительно. Доказательство, данное позднее Фурье в V-ом выпуске *Journal de l'École Polytechnique*, является очень строгим и чрезвычайно остроумным, но оно не выведено им из природы рычага. *Прим. Лагранжа*

груз. Ведь действие этого груза равно действию рычага, подвешенного в средней своей точке и нагруженного на обоих концах двумя равными грузами, каждый из которых равен половине данного груза; и ясно, что нет никаких препятствий к тому, чтобы последний рычаг настолько приблизить к первому, чтобы он составил его часть. Или, что, пожалуй, будет еще строже, можно считать, что этот последний рычаг поддерживается в равновесии силой, приложенной к его середине и действующей снизу вверх, причем эта сила равна тому самому весу, обе половины которого мы себе представляем помещенными в конечных точках рычага. Если этот рычаг, находящийся в равновесии, поместить на первом рычаге, который согласно нашему допущению находится в равновесии в своей точке опоры, то общее равновесие сохранится; если же второй рычаг поместить на первом таким образом, чтобы середина второго рычага совпала с концом плеча первого, то можно будет считать, что сила, поддерживающая второй рычаг, приложена к самому грузу, которым нагружено плечо первого рычага, а так как этот груз будет поддерживаться упомянутой силой, то он уже не будет оказывать какого-либо действия на первый рычаг, и его место займут два равных груза половинного размера, которые будут находиться по обе стороны от данного груза на удлинненном плече первого рычага. Доказанная таким путем суперпозиция равновесий является в механике столь же плодотворным принципом, каким в геометрии является суперпозиция фигур.

4. Таким образом можно считать, что равновесие прямолинейного горизонтального рычага, нагруженного двумя грузами, величины которых обратно пропорциональны их расстояниям от точки опоры, — является строго доказанной истиной. На основе принципа суперпозиции легко, далее, распространить этот вывод на любой коленчатый рычаг, точка опоры которого находится в вершине угла и на плечи которого действуют в противоположных направлениях силы, перпендикулярные к плечам. В самом деле, прежде всего ясно, что коленчатый равноплечий рычаг, который может вращаться около своей вершины, будет поддерживаться в состоянии равновесия двумя равными силами, приложенными к концам плеч и направленными перпендикулярно к последним и, следовательно, стремящимися вращать их в противоположные стороны. Пусть теперь имеется прямолинейный неравноплечий рычаг, одно плечо которого равно плечу коленчатого равноплечного рычага и нагружено тяжестью, эквивалентной каждой из равных сил, приложенных к плечам коленчатого рычага; другое плечо этого рычага имеет любую длину и в конечной точке его помещен такой груз, что рычаг находится в равновесии. Представим себе, что этот рычаг наложен на равноплечий коленчатый рычаг таким образом, что точка опоры прямолинейного рычага совпадает с вершиной коленчатого рычага и первое плечо первого совпадает с каким-нибудь плечом второго, причем обе силы, приложенные к совпавшим теперь конечным точкам обоих рычагов, имеют противоположное направление. Тогда обе эти силы друг друга взаимно уничтожат и соответствующие плечи обоих рычагов, на которые эти силы действуют, потеряют всякое значение. А так как в результате суперпозиции общее равновесие не нарушится, то оставшийся налицо неравноплечий коленчатый рычаг, в конечных точках которого приложены перпендикулярно направленные силы, величины которых обратно пропорциональны длинам плеч, будет находиться в равновесии, — подобно тому, как это имеет место при прямолинейном рычаге.

Но силу мы можем себе представить приложенной в любой точке по ее направлению. Поэтому две силы, приложенные к каким-либо точкам

плоскости, закрепленной в одной точке, и имеющие любое направление в этой плоскости, находятся в равновесии, если величины этих сил обратно пропорциональны перпендикулярам, опущенным из неподвижной точки плоскости на направления этих сил, ибо можно считать, что эти перпендикуляры составляют коленчатый рычаг, точкой опоры которого является неподвижная точка плоскости. Это положение называют *принципом моментов*, причем под моментом понимают произведение силы на плечо рычага, на которое она действует.

Этот общий принцип достаточен для решения всех задач статики. Он был установлен уже при первых шагах, какие были сделаны после Архимеда в теории простых машин, благодаря исследованию ворота, как об этом можно судить по работе Гвидо Убальдо (Ubaldo) *Mechanicorum Liber*, появившейся в 1577 г. в Пезаро; однако названный автор не сумел применить его ни к наклонной плоскости, ни к другим машинам, которые могут быть выведены из последней, как, например, клин и винт, для которых Убальдо дает очень неточную теорию.

5. Отношение силы, удерживающей груз на наклонной плоскости, к тяжести этого груза давно уже составляло проблему, которой были заняты ковы механики. Стевин решил ее первым, но его решение основано на косвенном рассуждении, причем последнее не связано с теорией рычага.

Стевин рассматривает твердое тело в форме треугольника, стоящего на своем горизонтальном основании, так что обе его стороны образуют две наклонные плоскости, и допускает, что на обеих сторонах этого треугольника лежит венок, составленный из некоторого числа равных грузов, связанных между собою на равных расстояниях нитью в сплошной ряд или, лучше сказать, цепь, имеющая одинаковую толщину на всем своем протяжении; при этом наверху на сторонах треугольника эта цепь прилегает вплотную к этим сторонам, нижняя же часть цепи висит свободно под основанием треугольника, как если бы она была прикреплена к обоим концам этого основания.

Стевин рассуждает следующим образом. Если бы даже предположить, что цепь может свободно скользить по треугольнику, она все-таки должна оставаться в покое; ведь если бы она сама собою начала скользить в каком-нибудь направлении, то она должна была бы и дальше все время продолжать это скольжение, так как причина движения оставалась бы все время неизменной, ибо в силу однородности частей цепи, последняя все время висела бы одинаковым образом на треугольнике, в результате чего получилось бы постоянное движение, что, однако, представляется абсурдным.

Таким образом между всеми частями цепи необходимо должно быть равновесие. Но относительно части цепи, расположенной под основанием треугольника, можно считать, что она уже сама по себе находится в равновесии. Следовательно, действие всех грузов, расположенных на одной стороне треугольника, должно уравниваться действием грузов, расположенных на другой его стороне; но сумма первых относится к сумме вторых, как длина первой стороны к длине второй. Стало быть, для того чтобы поддержать груз или несколько грузов на наклонной плоскости, требуется всегда одна и та же сила, когда общая сумма грузов пропорциональна длине плоскости, если только высота последней остается неизменной; но в том случае, когда плоскость вертикальна, сила равна тяжести груза; отсюда следует, что у всякой наклонной плоскости сила относится к тяжести груза, как высота плоскости относится к ее длине.

Я изложил это доказательство Стевина, так как оно очень остроумно и вообще мало известно. Далее Стевин выводит из этой теории условие

равновесия между тремя силами, приложенными в одной и той же точке, и находит, что это равновесие имеет место в том случае, когда силы параллельны и пропорциональны трем сторонам какого-либо прямолинейного треугольника. (См. *Eléments de statique* и *Additions à la statique* Стевина в *Opera mathematica*, напечатанных в Лейдене в 1605 г., а также в *Oeuvres* Стевина, переведенных на французский язык и напечатанных в 1634 г. Эльзевирами.) Следует, однако, отметить, что хотя эта основная теорема статики обычно приписывается Стевину, она была им доказана лишь для того случая, когда направления двух из этих сил образуют между собою прямой угол.

Стевин правильно отмечает, что груз, лежащий на наклонной плоскости и поддерживаемый силой, направленной параллельно плоскости, находится в таком же состоянии, как если бы он поддерживался двумя нитями, из которых одна перпендикулярна, а другая параллельна плоскости, и с помощью своей теории наклонной плоскости находит, что отношение веса груза к силе, параллельной плоскости, равно отношению гипотенузы к основанию прямоугольного треугольника, построенного на плоскости посредством двух прямых линий, из которых одна идет вертикально, а другая проведена перпендикулярно к плоскости. Стевин ограничивается, далее, тем, что распространяет эту пропорцию на тот случай, когда нить, удерживающая груз на наклонной плоскости, составляет с последней косой угол; для этого он строит аналогичный треугольник с помощью тех же линий, одной вертикальной и другой — перпендикулярной к плоскости, и откладывает основание по направлению нити; однако для того чтобы обосновать правильность подобного построения, он должен был бы доказать, что та же самая пропорция имеет место при равновесии груза, удерживаемого на наклонной плоскости силой, направленной косо к этой плоскости, что, однако, не может быть выведено из рассмотрения стевинской воображаемой цепи.

6. В *Механике* Галилея, которая в 1634 г. была впервые опубликована на французском языке Мерсенном (Mersenne), равновесие на наклонной плоскости сведено к равновесию коленчатого рычага с двумя равными плечами, из которых одно следует себе представить направленным перпендикулярно к плоскости и нагруженным тяжестью, положенной на плоскость, другое же направлено горизонтально и нагружено тяжестью, эквивалентной той силе, какая необходима для удержания груза на плоскости. Равновесие этого коленчатого рычага сводится затем к равновесию горизонтального рычага; для этой цели груз, положенный на наклонное плечо, Галилей рассматривает таким образом, как если бы он был помещен на горизонтальном плече, образующем прямолинейный рычаг с горизонтальным плечом коленчатого рычага. Таким путем он устанавливает, что отношение тяжести к силе, поддерживающей ее на наклонной плоскости, обратно отношению обоих плеч прямого рычага, причем легко доказать, что эти плечи относятся друг к другу, как высота плоскости относится к ее длине.

Можно сказать, что здесь мы имеем первое прямое доказательство, которое было дано для равновесия на наклонной плоскости. Галилей позднее воспользовался им для того, чтобы строго доказать, что тяжелые тела, падающие с одной и той же высоты по плоскостям различного наклона, в конце пути приобретают одну и ту же скорость; в первой части своих *Диалогов* он ограничился лишь тем, что высказал предположение о существовании подобного равенства.

Галилею было бы легко решить и тот случай, когда сила, удерживающая груз, направлена косо к наклонной плоскости; однако этот новый

шаг был сделан только спустя некоторое время Робервалем (Roberval) в его *Traité de Mécanique*, напечатанном в 1636 г. в *Harmonie universelle* Мерсенна.

7. Роберваль тоже рассматривает груз, положенный на наклонную плоскость, как если бы он был укреплен на плече рычага, расположенного перпендикулярно к плоскости, и силу, с которой поддерживают груз, он считает как бы действующей на то же плечо, но только в заданном направлении; таким образом он получает одноплечий рычаг, один конец которого неподвижно закреплен, а другой находится под действием двух сил, тяжести груза и поддерживающей силы. Он подставляет затем вместо этого рычага коленчатый рычаг, оба плеча которого идут перпендикулярно к направлениям соответствующих сил, имеющий в качестве точки опоры ту же неподвижную точку, и допускает, что обе силы приложены к плечам этого рычага с сохранением их действительного направления; указанным путем он получает для равновесия условие, заключающееся в том, что тяжесть груза относится к силе обратно отношению обоих плеч коленчатого рычага, другими словами, — обратно отношению перпендикуляров, опущенных из неподвижной точки на направления тяжести и силы.

Отсюда Роберваль выводит равновесие груза, поддерживаемого двумя нитями, образующими между собою локсой угол; для этой цели он заменяет рычаг, перпендикулярный к плоскости, нитью, укрепленной в точке опоры рычага, а силу заменяет другой нитью, идущей по направлению этой силы. С помощью различных построений и несколько усложненных аналогий он приходит к следующему заключению: если из какой-либо точки на вертикальной линии, проходящей через груз, провести линию, параллельную одной из нитей, до пересечения ее со второй нитью, то стороны, полученного таким образом треугольника, будут пропорциональны грузам и силам, действующим по направлениям этих самых сторон; как видим, это и есть теорема, предложенная Стевином.

Я счел необходимым упомянуть об этом доказательстве Роберваля не только потому, что оно является первым строгим доказательством, какое было дано для теоремы Стевина, но и потому, что оно было предано забвению в ставшем ныне редким *Traité d'Harmonie*, куда обращаться с поисками никому не приходит в голову. Впрочем, я вошел в рассмотрение изложенной детали, касающейся теории рычага, лишь с целью доставить удовольствие тем лицам, которые любят следить за течением мысли в науках, проследживать пути, по которым шли изобретатели, и устанавливать более короткие пути, по которым они могли бы пойти.

8. Труды по статике, появившиеся после работы Роберваля до эпохи открытия закона сложения сил, не прибавили ничего в этой части механики; в этих работах мы встречаем лишь хорошо известные свойства рычага и наклонной плоскости и их применение к другим простым машинам; среди них встречаются работы, содержащие в себе недостаточно точные теории, как, например, работа Ламп (Lami) о равновесии твердых тел, в которой дано неверное отношение веса к силе, поддерживающей его на наклонной плоскости. Я не говорю здесь также о Декарте (Descartes), Торричелли (Torricelli) и Валисе (Wallis), так как они приняты для равновесия принципа, находящийся в связи с принципом виртуальных скоростей, но доказательства этого принципа не дали.

9. Вторым основным принципом статике является принцип сложения сил. Он основан на следующем предположении: если на тело*) одновременно в различных направлениях действуют две силы, то эти силы экви-

*) Слово „тело“ обозначает здесь материальную точку.

валентны одной силе, способной сообщить телу то же самое движение, которое сообщили бы ему, действуя порознь, обе данные силы. Но когда тело должно одновременно двигаться равномерно по двум различным направлениям, то оно необходимо проходит диагональ параллелограмма, стороны которого оно прошло бы отдельно в результате каждого из обоих этих движений. Отсюда заключают, что две любые силы, действующие вместе на одно и то же тело, эквивалентны одной силе, представленной по своей величине и направлению диагональю параллелограмма, стороны которого изображают величины и направления обеих заданных сил. В этом и заключается принцип, который называется *принципом сложения сил*.

Одного этого принципа *) достаточно для того, чтобы определить законы равновесия во всех случаях; ибо если указанным путем все время последовательно складывать по двое все силы, мы должны прийти к единой силе, действие которой должно быть эквивалентно действию всех сил; следовательно, в случае равновесия эта сила должна равняться нулю, если в системе не имеется неподвижной точки; если же подобная точка имеется, то направление этой единой силы должно проходить через неподвижную точку. С этим можно встретиться во всех книгах по статике и в частности в *Nouvelle Mécanique Varignon* (Varignon), где теория машин выводится единственно из только что упомянутого принципа.

Совершенно очевидно, что теорема Стевина о равновесии трех сил, параллельных и пропорциональных трем сторонам любого треугольника, является непосредственным и необходимым следствием принципа сложения сил или, больше того, она представляет собою не что иное, как тот же принцип, но выраженный лишь в иной форме. Однако последний обладает тем преимуществом, что он основан на простых и естественных понятиях, между тем как теорема Стевина основана лишь на соображениях косвенного характера.

10. Как видно из некоторых мест „Механических проблем“ Аристотеля, сложение движений было уже известно древним. Его применяли главным образом геометры для описания кривых, например, Архимед — для спирали, Нипкомед — для конхойды и т. д. Среди ученых нового времени Роберваль вывел из него остроумный метод проведения касательных к кривым, которые можно описать с помощью двух движений, закон которых известен. Однако Галилей является первым, применившим в механике исследование сложного движения для определения кривой, описываемой тяжелым телом под действием силы тяжести и сил бросания [3].

Во втором предложении четвертого дня своих Диалогов Галилей доказывает, что тело, движущееся с двумя равномерными скоростями, из которых одна направлена горизонтально, а другая вертикально, должно иметь скорость, представленную гипотенузой треугольника, стороны которого выражают эти две скорости; но, повидимому, Галилей в то же время не уяснил себе всей важности этой теоремы для теории равновесия; в самом деле, в третьем диалоге, в котором речь идет о движении тяжелых тел по наклонной плоскости, он вместо того, чтобы применить принцип сложения движений к непосредственному определению относительной тяжести тела, находящегося на наклонной плоскости [4], производит это определение, исходя, наоборот, из теории равновесия на наклонных плоскостях, — на

*) Это место страдает некоторой неточностью: так как две силы, не лежащие в одной и той же плоскости, не имеют равнодействующей, то замечание Лагранжа не может быть применено, вообще говоря, даже в случае твердой системы.

Прим. Вертрака.

основе соображений, изложенных им раньше в его работе *Della Scienza meccanica*, в которой он наклонную плоскость свел к рычагу.

Далее, теория сложных движений встречается в работах Декарта, Роберваля, Мерсенна, Валлиса и т. д.; однако до 1687 года, когда появились *Математические начала Ньютона* и *Projet de la Nouvelle Mécanique* Вариньона, еще никто не думал о том, чтобы при сложении движений поставить на место движений силы, способные их вызвать, и определить сложную силу, являющуюся результирующей двух заданных сил, аналогично тому, как определяют движение, составленное из двух заданных прямолинейных и равномерных движений.

Во втором дополнении к третьему закону движения Ньютон в немногих словах показывает, каким образом законы равновесия могут быть легко выведены из сложения и разложения сил, если диагональ параллелограмма принять в качестве силы, составленной из двух сил, выражаемых его сторонами; однако более детально этот вопрос был исследован в работе Вариньона *Nouvelle Mécanique*, которая появилась в свет в 1725 году, после смерти ее автора; она содержит в себе полную теорию равновесия сил в различных машинах, выведенную только из рассмотрения сложения и разложения сил.

11. Принцип сложения сил дает сразу условия равновесия трех сил, действующих на одну точку, между тем как из равновесия рычага их можно было вывести только с помощью ряда рассуждений. Но с другой стороны, когда с помощью этого принципа желают определить равновесие между двумя параллельными силами, приложенными к концам прямолинейного рычага, приходится прибегнуть к косвенным рассуждениям, подставляя вместо прямолинейного рычага коленчатый, как это сделали Ньютон и Даламбер, либо прибавляя две посторонние силы, которые взаимно друг друга уничтожают, но которые, будучи сложены с заданными силами, приводят к тому, что их направления сходятся, либо, наконец, допуская, что направления сил, будучи продолжены, встречаются на бесконечно большом расстоянии, и доказывая, что результирующая сила должна пройти через точку опоры. Этим методом воспользовался Вариньон в своей *Mécanique*. Таким образом, хотя, строго говоря, оба принципа, рычага и сложения сил, всегда приводит к одним и тем же результатам, интересно отметить, что наиболее простой случай для одного из этих принципов становится наиболее сложным для другого.

12. Можно однако установить непосредственную связь между обоими этими принципами, пользуясь теоремой, данной Вариньоном в его *Nouvelle Mécanique* (Section 1, Lemme XVI), которая заключается в следующем: если из какой-либо точки, лежащей в плоскости параллелограмма, опустить перпендикуляры на диагональ и на обе стороны, заключающие эту диагональ, то произведение диагонали на ее перпендикуляр равно сумме произведений обеих сторон на соответствующие им перпендикуляры, если точка лежит вне параллелограмма, и равно разности этих произведений, если она лежит внутри параллелограмма. Вариньон, пользуясь очень простым построением, показывает, что если построить треугольники, имеющие своими основаниями диагональ и обе стороны, а общей своей вершиной заданную точку, то треугольник, построенный на диагонали, в первом случае равен сумме, а во втором случае — разности обоих треугольников, построенных на сторонах. Здесь мы имеем пред собою явную теорему геометрии, независимо от ее применения в механике.

Эта теорема осталась бы в силе и доказательство ее осталось бы тем же, если бы мы на продолжении диагонали и сторон выбрали в любых местах отрезки, равные этим линиям; принимая во внимание, что каждую

силу можно себе представить приложенной в любой точке по ее направлению, мы таким образом можем прийти к общему выводу, что две силы, представленные по своей величине и направлению двумя прямыми линиями, лежащими в одной плоскости, имеют результирующую силу, представленную по своей величине и направлению прямой линией, которая лежит в той же плоскости и которая, будучи продолжена, проходит через точку пересечения обеих прямых. Эта линия обладает той особенностью, что если в данной плоскости взять любую точку и из нее опустить перпендикуляры на эти три линии, продолжив их в случае надобности, — то произведение результирующей силы на ее перпендикуляр равно сумме или разности соответствующих произведений составляющих сил на их перпендикуляры, в зависимости от того, взята ли точка, из которой опущено три перпендикуляра, вне или внутри прямых линий, изображающих составляющие силы.

Если допустить, что избранная точка лежит на направлении результирующей, то эта сила не входит в уравнение и тогда имеет место равенство между обоими произведениями составляющих сил на их перпендикуляры; это случай любого прямолинейного и коленчатого рычага, в котором точка опоры является именно той точкой, о которой здесь идет речь, так как в данном случае действие результирующей силы уничтожается сопротивлением опоры.

Упомянутая теорема, предложенная Вариньоном, является основой почти всех современных учений о статике, где на ней строится общий принцип, известный под именем *принципа моментов*. Большое преимущество его заключается в том, что сложение и разложение сил сводятся к действиям сложения и вычитания; благодаря этому, как бы велико ни было число складываемых сил, легко определяется их результирующая, которая в случае равновесия должна быть равна нулю.

13. Я отнес период открытия Вариньона ко времени опубликования его *Projet*, хотя в предисловии, помещенном в начале его *Nouvelle Mécanique*, он указывает, что за два года до того он поместил в *Histoire de la République de Lettres* статью о полиспасте, в которой он воспользовался сложными движениями для определения всего того, что относится к этой машине; я должен однако отметить, что это указание неверно. Статья о полиспасте, о которой идет речь, находится только в *Nouvelles de la République de Lettres* за май 1687 г. под заглавием: *Nouvelle démonstration générale de l'usage de poulies à moufle*. Автор рассматривает здесь равновесие груза, укрепленного на веревке, переброшенной через блок, обе части которой непараллельны. Здесь он совершенно не применяет принципа сложения сил и даже не упоминает о нем, а пользуется уже известными теоремами о грузах, укрепленных на веревках, и ссылается на работы по статике Парди (Pardis) и Дешаля (Deschales). Во втором доказательстве он сводит эту задачу к проблеме рычага, рассматривая прямую линию, соединяющую обе точки, где веревка оставляет блок, в качестве рычага, который нагружен тяжестью, подвешенной на блоке, и концы которого натягиваются обеими частями веревки, поддерживающей блок.

Для того чтобы не упустить чего-либо, относящегося к истории открытия сложения сил, я должен здесь вкратце упомянуть о маленькой работе, которую в 1687 г. опубликовал Ламп под заглавием: *Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments des mécaniques* (Новый способ доказательства основных теорем элементов механики). Автор отмечает, что когда тело испытывает на себе действие двух сил, заставляющих его двигаться по двум различным направлениям, оно необходимо идет по среднему направлению, так что, в случае, если бы путь по этому напра-

влению оказался для него закрытым, оно осталось бы в покое, и обе силы уравновесили бы друг друга. Среднее же направление он определяет путем сложения двух движений, которые приобрело бы тело в первое мгновение под влиянием каждой из обеих сил, если бы последние действовали отдельно одна от другой, и таким образом получает диагональ параллелограмма, стороны которого составляют пути, которые были бы пройдены в течение одного и того же времени под действием обеих сил и которые, следовательно, пропорциональны этим силам. Отсюда он тотчас же выводит теорему, что обе силы относятся друг к другу обратно отношению синусов углов, которые их направления образуют со средним направлением, по которому двигалось бы тело, если бы оно не было задержано какими-либо препятствиями; эту теорему он применяет к наклонной плоскости и к рычагу, на концы которого действуют силы тяги, направления которых образуют между собою некоторый угол; однако для того случая, когда направления этих сил параллельны, он пользуется ненадежными и малоубедительными соображениями.

Совпадение принципа, примененного Ламии, с принципом Вариньона дало основание автору *Histoire des Ouvrages des Savants* (апрель 1688 г.) высказать предположение, что, повидимому, первый из них обязан открытием своего принципа второму. Ламия оправдывался против этого обвинения в письме, которое было опубликовано в *Journal de Savants* от 13 сентября 1688 г. и на которое издатель *Histoire* ответил в декабре того же года; однако этот спор, в котором Вариньон не принял участия, не имел дальнейшего продолжения и работа Ламии, как видно, была предана забвению.

Однако простота принципа сложения сил и легкость его применения ко всем проблемам равновесия имели своим результатом то, что все механики приняли его тотчас же после его открытия; можно сказать, что он служит основой почти для всех работ по статике, какие появились с тех пор.

14. Нельзя однако не признать, что один лишь принцип рычага имеет преимущество, заключающееся в том, что он основан на природе самого равновесия, рассматриваемого как состояние, независимое от движения. Сверх того, имеется существенное различие в том, каким образом на основе этих принципов измеряются силы, между которыми имеется равновесие. Если бы не удалось связать этих принципов по тем результатам, к которым они приводят, можно было бы с полным основанием усомниться, допустимо ли заменять основной принцип рычага таким принципом, который получается в результате чуждых ему рассуждений о сложных движениях.

Действительно, при равновесии рычага силы представляют собою тяжести, или же могут быть приняты в качестве таковых, и сила признается вдвое или втрое большей только в том смысле, что она образуется путем соединения двух или трех равных сил, из которых любая действует совершенно так же, как другая. Но стремление к движению мы представляем себе одинаковым у каждой силы, какова бы ни была ее интенсивность; между тем в принципе сложения сил, значение сил определяют по величине той скорости, которую они сообщали бы телу, будучи к нему приложены, если бы каждой из них была предоставлена возможность действовать отдельно. Вероятно, именно это различие в способе введения понятия силы и удерживало в течение долгого времени механиков от применения известных законов сложения движений к теории равновесия, простейшим случаем которого является равновесие тяжелых тел.

15. Позднее пытались сделать принцип сложения сил независимым от рассмотрения движения и обосновать его исключительно на очевидных

самих по себе истиннах. Впервые Даниил Бернулли *) (D. Bernoulli) в *Комментариях Петербургской Академии*, том 1-й, дал очень остроумное, но странное и сложное доказательство параллелограмма сил, которое затем было несколько упрощено Даламбером в первом томе его *Opuscules*.

Это доказательство основано на следующих двух положениях: 1) если две силы действуют на одну и ту же точку по различным направлениям, то они имеют своей результирующей единую силу, которая делит на две равные части угол, образуемый направлениями этих сил, когда эти силы между собою равны, и равна их сумме, когда упомянутый угол равен нулю, или же их разности, когда этот угол равен двум прямым; 2) равные кратные тех же сил, или же силы, пропорциональные заданным силам, имеют своей результирующей силу, кратную их результирующей, или пропорциональную этой результирующей, — если углы, образуемые силами, в обоих случаях одни и те же.

Это второе положение очевидно, если силы рассматривать как величины, которые могут быть складываемы и вычитаемы.

Что касается первого положения, то его доказывают, рассматривая движение, которое тело должно получить под действием двух сил, не находящихся в равновесии, и которое, будучи по необходимости единым, может быть приписано одной силе, действующей на тело по направлению его движения. Таким образом можно сказать, что это положение не вполне свободно от рассмотрения движения.

Что касается направления результирующей в случае равенства обеих сил, то ясно, что не существует никаких оснований для того, чтобы она была сильнее наклонена к одной из этих сил, чем к другой; следовательно, она должна делить угол, образуемый их направлениями, на две равные части.

Позднее основы этого доказательства перенесли в Анализ и придали ему различные, более или менее простые формы, рассматривая результирующую в качестве функции слагаемых сил и угла, образуемого их направлениями. (См. второй том *Mélanges de la Société de Turin, Mémoires de l'Académie des Sciences* за 1769 г., шестой том *Opuscules* Даламбера и т. д.). Следует однако признать, что, отделяя таким образом принцип сложения сил от принципа сложения движений, его лишают основных преимуществ, очевидности и простоты, и превращают его только в вывод из геометрических или аналитических построений.

16. Перехожу, наконец, к третьему принципу, принципу виртуальных скоростей. Под *виртуальной скоростью* следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения [6]; и принцип, о котором идет речь, заключается в том, что силы находятся в равновесии, когда они относятся друг к другу обратно отношению их виртуальных скоростей, измеренных по направлению этих сил.

Уже при поверхностном рассмотрении условий равновесия на рычаге и на других машинах легко установить тот закон, что груз и сила всегда находятся между собою в отношении обратном отношению пространств, проходимых ими в течение одного и того же времени. Тем не менее древние, повидимому, не знали этого закона. Гвидо Убальди является, вероятно, первым, заметившим этот закон на рычаге и на движущихся блоках или полиснахтах. Галлеи установил его затем на наклонных плоскостях и на

*) Это же доказательство было воспроизведено и упрощено Эме (Aimé) (*Journal de Mathématiques de Liouville*, 1^{re} série, t. 1^{er}, p. 335). . *Прим. Вермана.*

связанных с ними машинах и смотрел на него как на общее свойство равновесия машин (см. его Трактат по механике и схолию ко второму предложению третьего диалога в Болонском издании 1655 г.).

Галилей понимает под *моментом* тяжести или силы, приложенной к машине, — усилие, действие, энергию, *импульс* (*impetus*) этой силы, приводящий машину в движение, так что между двумя силами существует равновесие, если их моменты для приведения машины в движение в противоположных направлениях между собою равны; он доказывает, что момент всегда пропорционален силе, помноженной на виртуальную скорость, зависящую от того, как действует сила.

Подобное же понятие момента было принято Валлисом в его *Механике*, опубликованной в 1669 г. Этот автор кладет в основание статике принцип равенства моментов и из него выводит теорию равновесия главнейших машин.

В настоящее время под *моментом* понимают только произведение силы на расстояние ее направления от какой-либо точки, или от линии, или от плоскости, то есть — на плечо, на которое она действует; но мне представляется, что понятие *момента*, данное Галилеем и Валлисом, является более естественным и более общим, и я не вижу оснований, в силу которых его оставили и заменили другим, выражающим значение момента только в определенных случаях, как, например, при рычаге и т. п.

Декарт аналогичным образом свел всю свою статику к одному принципу, который по существу дела совпадает с принципом Галилея, но только выражен в менее¹ общем виде. Этот принцип заключается в следующем: для поднятия тяжести на определенную высоту требуется не больше и не меньше той силы, какая нужна для того, чтобы большую тяжесть поднять на высоту, во столько же раз меньшую, или же меньшую тяжесть поднять на высоту, во столько же раз большую (см. письмо 73 первого тома, опубликованного в 1657 г., и Трактат по механике, напечатанный в посмертных его сочинениях). Отсюда следует, что между двумя грузами существует равновесие, когда они распределены таким образом, что вертикальные пути, которые они могли бы одновременно пройти, находятся в обратном отношении к величинам этих грузов. Однако при применении этого принципа к различным машинам следует принимать во внимание лишь пути, проходимые в первое мгновение движения, которые пропорциональны виртуальным скоростям; в противном случае мы не получим действительных законов равновесия.

Но будем ли мы рассматривать принцип виртуальных скоростей в качестве общего свойства равновесия, как это делал Галилей, или же вместе с Декартом и Валлисом примем его в качестве действительной причины равновесия, следует во всяком случае признать, что он обладает всей той простотой, какой можно ожидать от основного принципа; дальше мы узнаем, в какой мере этот принцип заслуживает внимания благодаря своей общности.

Торричелли, знаменитый ученик Галилея, является автором другого принципа, который тоже связан с принципом виртуальных скоростей. Этот принцип заключается в том, что если два груза связаны друг с другом и находятся в таком положении, что их центр тяжести не может опуститься ниже, то они в этом положении находятся в равновесии. Торричелли применил этот принцип только к наклонной плоскости, но легко убедиться, что он сохраняет свою силу и для других машин. (См. его работу *De motu gravium naturaliter descendendum*, появившуюся в свет в 1664 г.)

Принципу Торричелли обязан своим происхождением другой принцип, которым воспользовались для разрешения с большой легкостью различных

вопросов статики. Этот принцип заключается в следующем: в системе тяжелых тел, находящихся в равновесии, центр тяжести занимает наиболее низкое положение, какое только возможно. Действительно, из теории о максимумах и минимумах известно, что центр тяжести занимает наиболее низкое положение, когда дифференциал его снижения равен нулю, или, что то же самое, когда при бесконечно малом изменении положения системы этот центр не поднимается и не опускается.

17. Принцип виртуальных скоростей может быть сформулирован в очень общем виде следующим образом:

Если какая-либо система произвольно большого числа тел, или точек, на каждое из которых действуют любые силы, находится в равновесии, и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, — будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными [6].

Насколько мне известно, Иоганн Бернулли первый понял указанную большую общность принципа виртуальных скоростей и его полезность при разрешении вопросов статики. Это видно из его письма 1717 г. на имя Вариньона, которое последний поместил в начале девятого отдела своей *Nouvelle Mécanique*, — отдела, целиком посвященного проводимому на различных приложениях обоснованию правильности и применимости данного принципа.

Этот же принцип дал повод для появления другого принципа, предложенного Мопертюи (Maupertuis) в 1740 г. в *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, под названием *закона покоя*, который позднее был развит и обобщен Эйлером (Euler) в *Mémoires de l'Académie de Berlin* за 1751 г. Наконец, этот же принцип послужил основанием для принципа, изложенного Куртвироном (Courtyron) в *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, за 1748 и 1749 гг.

И вообще, мне кажется, можно сказать наперед, что все общие принципы, которые еще могли бы быть открыты в учении о равновесии, представляли бы собою не что иное, как тот же самый принцип виртуальных скоростей, рассматриваемый с иной точки зрения и отличающийся от принципа виртуальных скоростей лишь по своей формулировке.

Однако сам по себе этот принцип является не только очень простым и очень общим; он обладает еще и тем драгоценным и единственным преимуществом перед другими принципами, что он может быть выражен в общей формуле, охватывающей все проблемы, которые могут быть поставлены по вопросу о равновесии тел. Мы дадим эту формулу в полном ее объеме; мы даже попытаемся представить ее в еще более общем виде, в каком ее до сих пор никто не представлял и стараемся дать новые применения этой формулы.

18. Что касается природы принципа виртуальных скоростей, то следует признать, что этот принцип сам по себе не является настолько очевидным, чтобы его можно было выдвинуть в качестве начального принципа; но его можно рассматривать как общее выражение законов равновесия, выведенных из двух принципов, которые были нами изложены выше. Точно так же при обоснованиях, которые приводили для этого принципа, его всегда, прямо или косвенно, ставили в связь с указанными принципами. Но в статике существует еще и другой общий принцип, независимый

от принципов рычага и сложения сил, хотя механики обычно и относят его к ним, — который представляется нам естественным основанием для принципа виртуальных скоростей; его можно назвать *принципом блоков* [7].

Если несколько блоков соединено на одном и том же стержне, то совокупность этих блоков называют *полиспастом*, а сочетание двух полиспастов, одного неподвижного и другого подвижного, охваченных одной и той же веревкой, один конец которой закреплен неподвижно, а другой находится под действием силы, образует машину, в которой сила относится к тяжести груза, висящей на подвижном полиспасте, как единица относится к числу витков, которые веревка делает около этого полиспаста; при этом предполагается, что все витки параллельны и отблекаются от трения и жесткости веревки. Ясно, что так как веревка по всей своей длине одинаково натянута, то груз поддерживается столькими силами, равными силе, натягивающей веревку, сколько имеется витков, обвивающих подвижной полиспаст, так как эти витки параллельны и их можно было бы даже рассматривать как единое целое, если представить себе, что диаметр блоков бесконечно мал.

Если увеличить число неподвижных и подвижных полиспастов и охватить их все одной и той же веревкой, пользуясь при этом различными неподвижными блоками для изменения направления веревки, то та же сила, приложенная к подвижному концу веревки, будет в состоянии поддерживать столько груза, сколько имеется подвижных полиспастов, и каждый из этих грузов будет относиться к данной силе, как число витков полиспаста относится к единице.

Для большей простоты заменим упомянутую выше силу грузом и через неподвижный блок перебросим последний виток веревки, поддерживающей тот груз, который мы принимаем в качестве единицы; вообразим себе дальше, что различные подвижные полиспасты, вместо того, чтобы поддерживать грузы, прикреплены к телам, рассматриваемым в качестве точек, и размещены таким образом, что они образуют любую заданную систему. Таким образом один и тот же груз при посредстве веревки, охватывающей все полиспасты, будет вызывать различные силы, действующие на различные точки системы, причем каждая из этих сил будет действовать по направлению веревок, обвивающих полиспаст, прикрепленный к соответствующей точке, и величина ее будет относиться к тяжести груза, как число витков к единице. Таким образом эти силы будут представлены соответственным числом витков, действующих совместно, чтобы своим натяжением вызвать эти силы.

Ясно, что для сохранения равновесия этой системы, подверженной действию различных сил, необходимо, чтобы при любом бесконечно малом смещении точек системы груз не опускался *). В самом деле, груз всегда стремится упасть, поэтому если существует такое смещение системы, которое позволяет ему упасть, он необходимо сам снизится и вызовет в системе это смещение.

Обозначим через α , β , γ , ... бесконечно малые отрезки пути, которые под влиянием этого смещения прошли бы различные точки системы по направлению действующих на них сил, и через P , Q , R , ... соответствую-

*) Против этого утверждения Лагранжа основательно выдвигали пример весомой точки, находящейся в равновесии на наиболее высоко расположенной вершине кривой линии; очевидно, что бесконечно малое смещение должно было бы заставить ее упасть, однако это смещение неосуществимо. Первое строгое доказательство принципа виртуальных скоростей принадлежит Фурье (Journal de l'Ecole Polytechnique, tome II, an VII). В том же выпуске этого журнала помещено и доказательство, приведенное здесь выше Лагранжем.

Прим. Бертрама.

щие числа витков полиспагов, приложенных к этим точкам и вызывающих эти силы. Ясно, что отрезки α , β , γ , ... будут в то же время теми расстояниями, на которые сблизились бы при этом подвижные полиспаги с соответствующими им неподвижными, и что эти сближения привели бы к уменьшению длины охватывающей их веревки на отрезки $P\alpha$, $Q\beta$, $R\gamma$, ... Но так как вся длина веревки должна оставаться неизменной, то груз снизится на расстояние $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots$. Таким образом для того, чтобы между силами, величины которых выражаются числами P , Q , R , ..., существовало равновесие, должно иметь место равенство

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots = 0;$$

такое аналитическое выражение общего принципа виртуальных скоростей.

19. Можно было бы подумать, что в том случае, если бы величины $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots$ вместо того, чтобы быть равной нулю, оказались отрицательной, то этого условия было бы достаточно для создания равновесия, так как невозможно, чтобы груз сам собою поднялся. Следует однако иметь в виду, что какова бы ни была связь между точками заданной системы, вытекающие из нее отношения между бесконечно малыми величинами α , β , γ , ... могут быть выражены только с помощью дифференциальных уравнений, т. е. с помощью линейных уравнений между этими величинами. Таким образом среди них необходимо будет существовать одна или несколько величин, которые останутся неопределенными и которым можно будет приписать любое большее или меньшее значение; поэтому значения всех этих величин всегда будут такими, что они могут одновременно изменить свой знак. Отсюда следует, что если при определенном смещении системы значение величины $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots$ отрицательно, то оно станет положительным, если величины α , β , γ , ... взять с обратным знаком; таким образом и противоположное смещение, которое тоже одинаково возможно, привело бы к падению груза и к нарушению равновесия.

20. Обратно, можно доказать, что если для всех возможных бесконечно малых смещений системы имеет место уравнение

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots = 0,$$

то система необходимо должна быть в равновесии. В самом деле, так как при этих смещениях груз остается неподвижным, то действующие на систему силы остаются в своем прежнем состоянии и не существует уже никаких оснований в пользу того, чтобы они скорее вызвали одно или другое из двух смещений, при которых величины α , β , γ , ... имеют противоположные знаки. Таков случай весов, находящихся в равновесии, так как нет никаких оснований для того, чтобы они скорее наклонились на одну сторону, чем на другую.

Принцип виртуальных скоростей, доказанный, таким образом, для случая соизмеримых сил, остается в силе и для случая любых несоизмеримых сил, ибо известно, что всякий закон, который может быть доказан для соизмеримых величин, равным образом, путем *приведения к абсурду*, может быть доказан и для случая, когда эти величины несоизмеримы.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ОБЩАЯ ФОРМУЛА СТАТИКИ ДЛЯ РАВНОВЕСИЯ ЛЮБОЙ СИСТЕМЫ СИЛ И МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ ЭТОЙ ФОРМУЛЫ.

1. Общий закон равновесия машины заключается в том, что силы относятся друг к другу обратно отношению скоростей точек, к которым они приложены, причем скорости должны измеряться по направлению этих сил.

В этом законе заключается положение, которое обычно называют *принципом виртуальных скоростей*. Как мы показали в предыдущем отделе, этот принцип уже давно известен в качестве основного принципа равновесия, в силу чего его можно рассматривать как некую аксиому механики.

Для того чтобы выразить этот принцип в виде формулы, допустим, что силы $P, Q, R, \dots$, действующие по определенным направлениям, взаимно друг друга уравнивают. Представим себе, что из точек, к которым приложены силы, отложены отрезки [8], равные $p, q, r, \dots$ и расположенные по направлению этих сил; обозначим вообще через $dp, dq, dr, \dots$ вариации или дифференциалы этих отрезков, поскольку они могут получиться в результате какого-либо бесконечно малого изменения положения различных тел или точек системы.

Ясно, что эти дифференциалы выразят величины путей, которые будут пройдены в одно и то же мгновение силами $P, Q, R, \dots$, по своим собственным направлениям, если допустить, что эти силы стремятся удлинить соответственно отрезки $p, q, r, \dots$. Таким образом дифференциалы $dp, dq, dr, \dots$ будут пропорциональны виртуальным скоростям сил $P, Q, R, \dots$ и, следовательно, могут быть для простоты подставлены вместо этих скоростей.

Установив это, рассмотрим сначала только две силы P и Q , находящиеся в равновесии. Согласно закону равновесия двух сил величины P и Q должны быть обратно пропорциональны дифференциалам dp, dq ; но легко понять, что равновесия между двумя силами не будет, если только они не будут расположены таким образом, что когда одна из них движется по собственному своему направлению, другая сила вынуждена двигаться в сторону, противоположную своему собственному направлению; отсюда следует, что дифференциалы dp и dq должны иметь противоположные знаки; поэтому, если допустить, что обе силы P и Q положительны, то для равновесия получается

$$\frac{P}{Q} = - \frac{dq}{dp} \quad \text{или} \quad P dp + Q dq = 0;$$

такова общая формула равновесия двух сил.

Рассмотрим теперь равновесие трех сил P, Q, R , виртуальные скорости которых представлены дифференциалами dp, dq, dr . Положим $Q = Q' + Q''$ и примем, что допустимо, часть Q' силы Q такой*), что

$$P dp + Q' dq = 0;$$

таким образом сила P будет находиться в равновесии с силой Q' , и для полного равновесия необходимо, чтобы другая часть Q'' той же силы Q находилась в равновесии с третьей силой R , что дает нам уравнение

$$Q'' dq + R dr = 0;$$

если это уравнение связать с предыдущим, то в силу равенства $Q' + Q'' = Q$ получается следующее уравнение

$$P dp + Q dq + R dr = 0.$$

Если имеется еще четвертая сила S , виртуальная скорость которой представлена дифференциалом ds , то можно положить

$$Q = Q' + Q'' \quad \text{и} \quad P dp + Q' dq = 0,$$

а также

$$R = R' + R'' \quad \text{и} \quad Q'' dq + R' dr = 0.$$

Таким образом часть Q' силы Q будет находиться в равновесии с силой P ; часть R' силы R будет в равновесии с другой частью Q'' силы Q , и для того чтобы шло место полное равновесие между силами P, Q, R, S , оставшаяся часть R'' силы R должна находиться в равновесии с последней силой S ; таким образом должно быть

$$R'' dr + S ds = 0.$$

Если все эти три уравнения соединить в одно, то получается

$$P dp + Q dq + R dr + S ds = 0.$$

И так далее, как бы ни было велико число сил, находящихся в равновесии.

2. Итак, вообще для равновесия любого числа сил $P, Q, R, \dots$, направленных по линиям $p, q, r, \dots$ и приложенных к любой системе тел или точек, расположенных любым образом, мы имеем уравнение следующего вида:

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = 0.$$

Это — общая формула статики для равновесия любой системы сил.

Мы назовем каждый член этой формулы, например $P dp$, *моментом* силы P , и примем слово *момент* в том смысле, какой ему придал Галилей, т. е. как произведение силы на ее виртуальную скорость; тогда приведенная

*) Это рассуждение является вполне точным только в том случае, когда рассматривают определенное смещение системы. Если же подобное ограничение не сделано, то $\frac{dp}{dq}$ может принять любые возможные значения, и уравнение $P dp + Q' dq = 0$ не может быть удовлетворено каким-либо определенным значением Q' . Следовательно, для того чтобы дополнить доказательство Лагранжа, его следует применять последовательно ко всем возможным положениям системы, вводя каждый раз новые связи, которые помешали бы осуществлению других смещений. Впрочем, это обстоятельство отметил и сам Лагранж (Отд. II, пункт 18).

выше общая формула статки гласит: *сумма моментов всех сил равна нулю*.

При применении этой формулы вся трудность сводится к тому, чтобы определить значения дифференциалов dp , dq , dr ,... в соответствии с природой заданной системы.

Рассмотрим теперь систему в двух различных, но бесконечно близких, положениях и станем искать наиболее общие выражения для интересующих нас дифференциалов, введя в них столько неопределенных величин, сколько имеется произвольных элементов при изменении положения системы. Полученные таким образом выражения мы подставим в заданное уравнение; это уравнение должно иметь силу независимо от всех неопределенных величин, для того чтобы равновесие системы вообще существовало и, кроме того, во всех направлениях. Приравняем тогда нулю отдельно сумму членов, в которые входят одни и те же неопределенные величины, и таким путем получим столько отдельных уравнений, сколько имеется этих неопределенных величин; однако нетрудно убедиться, что их число всегда будет равно числу неизвестных в положении системы. Таким образом с помощью этого метода мы получим столько уравнений, сколько их требуется для определения состояния равновесия системы.

Этим именно методом и пользовались все авторы, применявшие до сих пор принцип виртуальных скоростей для разрешения проблем статки; однако этот метод применения указанного принципа зачастую требует геометрических построений и рассуждений, благодаря которым решения становятся столь же длинными, как если бы их искали с помощью обыкновенных принципов статки; в этом, быть может, и заключается причина, препятствовавшая применению этого принципа во всех тех случаях, когда казалось бы он должен был бы быть применен благодаря своей простоте и общности.

3. Задачей настоящей работы является сведение механики к чисто аналитическим операциям, и формула, которую мы выше нашли, чрезвычайно приспособлена для выполнения этой задачи. Все дело сводится только к тому, чтобы выразить аналитически и в наиболее общем виде значения отрезков p , q , r ,..., взятых, по направлению сил P , Q , R ,..., и тогда путем простого дифференцирования получаются значения виртуальных скоростей dp , dq , dr ,...

Следует при этом только отметить, что в дифференциальном исчислении во всех тех случаях, когда несколько величин одновременно изменяются, допускают, что все они в течение одного и того же времени увеличиваются на величину своего дифференциала, и если согласно природе вопроса некоторые из них должны убывать в то время, как другие возрастают, то дифференциалам убывающих величин приписывают знак минус.

Дифференциалы dp , dq , dr ,..., представляющие виртуальные скорости сил P , Q , R ,..., следует, таким образом, считать положительными или отрицательными, в зависимости от того, стремятся ли силы увеличить или уменьшить отрезки p , q , r ,..., определяющие их направления. Но так как общая формула равновесия не изменяется при изменении знаков всех ее членов, можно с одинаковым основанием принять в качестве положительных дифференциалы тех отрезков, которые увеличиваются или же уменьшаются, и в качестве отрицательных дифференциалы тех отрезков, которые изменяются в противоположном смысле. Таким образом, если считать силы положительными величинами, то их моменты $P dp$, $Q dq$,... будут положительными или отрицательными в зависимости от того, будут ли виртуальные скорости dp , dq ,... положительными или отрицательными; а если мы

пожелаем заставить силы действовать в противоположном направлении, нам придется только приписать знак *минус* тем величинам, которые представляют эти силы, или же изменить знак их *моментов*.

Отсюда вытекает основное свойство равновесия, заключающееся в том, что любая система сил, находящихся в равновесии, продолжает оставаться в этом состоянии, когда каждая из этих сил изменяет направление своего действия на противоположное, — если только строение этой системы не претерпевает какого-либо изменения вследствие изменения направления всех сил.

4. Каковы бы ни были силы, действующие на заданную систему тел или точек, всегда можно считать, что они как бы стремятся к некоторым точкам, расположенным на линиях, по которым они направлены.

Назовем эти точки *центрами сил*; можно принять за отрезки $p, q, r, \dots$ соответствующие расстояния этих центров от тех точек системы, в которых приложены силы $P, Q, R, \dots$. В этом случае ясно, что данные силы стремятся уменьшить отрезки $p, q, r, \dots$; следовательно, их дифференциалам следует сообщить знак *минус*, но если изменить все знаки, то общая формула сохранит свой вид

$$P \, dp + Q \, dq + R \, dr + \dots = 0.$$

Но центры сил могут находиться как вне системы, так и внутри самой системы, составляя часть ее; по этому признаку различают силы *внешние* и *внутренние*.

В первом случае ясно, что дифференциалы $dp, dq, dr, \dots$ выражают полные вариации отрезков $p, q, r, \dots$, обязанные своим происхождением изменению положения системы; они являются, следовательно, полными дифференциалами величин $p, q, r, \dots$, если рассматривать в качестве переменных все величины, относящиеся к положению системы, и в качестве постоянных — величины, относящиеся к положению различных центров сил.

Во втором случае некоторые из тел системы сами будут центрами сил, действующих на другие тела системы, а в силу равенства действия и противодействия эти последние в свою очередь будут одновременно центрами сил, действующих на первые.

Рассмотрим два тела*), действующих друг на друга с некоторой силой P , причем эта сила может происходить вследствие притяжения или отталкивания этих тел, либо вследствие наличия пружины, находящейся между ними, либо, наконец, может происходить от какой-нибудь другой причины. Пусть p — расстояние между этими двумя телами, dp' — вариация этого расстояния, поскольку она зависит от изменения положения одного из тел; ясно, что по отношению к этому телу $P \, dp'$ будет моментом силы P . Точно так же, если через dp'' обозначить вариацию того же расстояния p , происходящую вследствие изменения положения другого тела, то по отношению к этому второму телу мы будем иметь момент $P \, dp''$ той же силы P . Следовательно, весь момент, обязанный своим существованием этой силе, может быть выражен через $P(dp' + dp'')$. Но ясно, что $dp' + dp''$ представляет собою полный дифференциал p , который мы обозначаем через dp , так как расстояние p может изменяться только вследствие смещения обоих этих тел; таким образом, рассматриваемый момент выразится просто через $P \, dp$. Этот вывод можно распространить на любое количество тел [9].

*) Слово „тело“ обозначает здесь, как и раньше, материальную точку.

Прим. Вертмана.

5. Отсюда следует, что для получения суммы *моментов* всех сил заданной системы, будь то силы внешние или внутренние, следует рассмотреть в отдельности каждую из сил, действующих на различные тела или точки системы, и взять сумму произведений этих различных сил, помноженных каждая на дифференциал соответствующего расстояния между обеими точками каждой силы, а именно, между точкой, на которую эта сила действует, и точкой, к которой она стремится. В этих дифференциалах следует рассматривать в качестве переменных все величины, зависящие от положения системы, и в качестве постоянных — величины, относящиеся к внешним точкам или центрам, т. е. эти последние точки следует рассматривать как постоянные, когда положение системы подвергается изменению.

Указанная сумма, будучи приравнена нулю, даст общую формулу статик.

6. Для того чтобы аналитическому выражению этой формулы сообщить всю ту общность, на которую оно способно, отнесем положение всех тел или точек заданной системы, а также положение центров, — к прямоугольным координатам, параллельным трем неподвижным осям в пространстве.

Мы будем вообще обозначать через x, y, z координаты тех точек, к которым приложены силы, и в дальнейшем будем их для отличия снабжать одним или несколькими штрихами, соответственно различным точкам системы.

Аналогично через a, b, c мы будем обозначать координаты центров сил.

Ясно, что расстояния $p, q, r, \dots$ между точками приложения сил и их центрами выразятся вообще с помощью формулы $V(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, в которой a, b, c являются постоянными величинами, или по крайней мере должны рассматриваться при изменениях x, y, z как постоянные величины в том случае, когда они относятся к точкам, лежащим вне системы, т. е. когда силы являются внешними. Однако в том случае, когда силы являются внутренними и они исходят от некоторых тел самой системы, эти величины a, b, c переходят в x'', y'', z'' и, следовательно, становятся переменными.

Если таким образом имеются выражения конечных величин $p, q, r, \dots$ в известных функциях координат различных тел системы, остается их только обычным образом продифференцировать, рассматривая эти координаты как единственно изменяющиеся величины, и тогда получаются искомые значения дифференциалов $dp, dq, dr, \dots$, входящих в общую формулу равновесия.

7. Хотя можно всегда считать, что силы $P, Q, R, \dots$ стремятся к заданным центрам, но рассмотрение этих центров выходит за пределы задачи, в которой в качестве заданных обычно рассматриваются лишь величина и направление каждой силы. Обратимся к более общим методам разыскания дифференциалов $dp, dq, dr, \dots$.

Прежде всего, если предположить, — а это всегда допустимо, — что сила P стремится к неподвижному центру, то мы имеем

$$p = V(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2;$$

если это выражение продифференцировать, не считая a, b, c переменными, поскольку сила P является внешней, то

$$dp = \frac{x-a}{p} dx + \frac{y-b}{p} dy + \frac{z-c}{p} dz.$$

Но легко видеть, что $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ представляют собою косинусы углов, образуемых линией p с линиями $x-a$, $y-b$, $z-c$. Если вообще через α , β , γ обозначить углы, образуемые направлением силы P с осями x , y , z , или с прямыми, параллельными этим осям, то

$$\frac{x-a}{p} = \cos \alpha, \quad \frac{y-b}{p} = \cos \beta, \quad \frac{z-c}{p} = \cos \gamma;$$

следовательно,

$$dp = \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz.$$

Аналогичным образом могут быть выражены и другие дифференциалы dq , dr , ...

Но если та же сила P будет внутренней силой и будет действовать на две точки, имеющие координаты x , y , z и x' , y' , z' , стремясь их сблизить или удалить друг от друга, то в выражении для p мы имеем $a=x'$, $b=y'$, $c=z'$, и, следовательно,

$$dp = \cos \alpha (dx - dx') + \cos \beta (dy - dy') + \cos \gamma (dz - dz').$$

Заметим, прежде всего, относительно углов α , β , γ , что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

это очевидно из приведенных выше формул. Во-вторых, если обозначить через ϵ угол, образуемый проекцией линии p на плоскость x и y с осью x , то

$$\frac{x-a}{\pi} = \cos \epsilon, \quad \frac{y-b}{\pi} = \sin \epsilon,$$

где обозначено $\pi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$; а подставив вместо $x-a$, $y-b$ их значения $p \cos \alpha$, $p \cos \beta$, мы получим

$$\pi = p \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = p \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = p \sin \gamma;$$

таким образом

$$\frac{x-a}{p} = \sin \gamma \cos \epsilon, \quad \frac{y-b}{p} = \sin \gamma \sin \epsilon,$$

и, следовательно,

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \epsilon, \quad \cos \beta = \sin \gamma \sin \epsilon.$$

8. Далее, я принимаю во внимание, что поскольку dp представляет собою малый путь, который тело или точка приложения силы P может пройти по направлению этой силы, то если положить $dp=0$, эта точка сможет двигаться только по направлениям, перпендикулярным к направлению самой силы. Таким образом $dp=0$ представляет собою дифференциальное уравнение поверхности, по отношению к которой сила направлена перпендикулярно.

Эта поверхность будет сферой, если величины a , b , c постоянны, но она может быть какой угодно иной поверхностью, если допустить, что эти величины являются переменными.

Представим себе теперь вообще, что сила P действует перпендикулярно к поверхности, выраженной уравнением

$$A dx + B dy + C dz = 0.$$

Для того чтобы это уравнение совпало с уравнением

$$(x-a) dx + (y-b) dy + (z-c) dz = 0,$$

вытекающим из допущения, что $dp=0$, остается только положить

$$\frac{A}{C} = \frac{x-a}{z-c}, \quad \frac{B}{C} = \frac{y-b}{z-c},$$

что дает

$$x-a = \frac{A}{C} (z-c), \quad y-b = \frac{B}{C} (z-c);$$

подставив эти значения в выражение для dp , будем иметь

$$dp = \frac{A dx + B dy + C dz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким образом, если имеется дифференциальное уравнение поверхности, к которой сила P направлена перпендикулярно, можно получить и выражение для ее виртуальной скорости dp .

Можно положить

$$A dx + B dy + C dz = du,$$

где u — некоторая функция x, y, z ; но известно, что дифференциальное уравнение первого порядка с тремя переменными выражает поверхность только в том случае, если оно может быть проинтегрировано или приведено к интегрируемому виду с помощью множителя. Тогда с помощью алгоритма частных дифференциалов можно написать

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial u}{\partial z},$$

и выражение для dp принимает следующий вид:

$$dp = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

Таким образом момент силы P , перпендикулярной к поверхности, заданной уравнением $du=0$, будет равен

$$\frac{P du}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

Тем же путем могут быть определены и значения других дифференциалов $dq, dr, \dots$, а именно, с помощью дифференциальных уравнений поверхностей, по отношению к которым силы $Q, R, \dots$ направлены перпендикулярно.

9. Но можно обойтись и без рассмотрения поверхности, к которой сила направлена перпендикулярно; так как любую величину можно выразить с помощью линии, то p можно рассматривать как некоторую функцию координат, а P как силу, стремящуюся изменить значение p . Тогда $P dp$ тоже будет виртуальным моментом силы P ; точно так же $Q dq, R dr, \dots$ будут моментами сил $Q, R, \dots$, если их рассматривать таким образом, как если бы они стремились изменить значения величин $q, r, \dots$, о которых мы предполагаем, что они являются некоторыми функциями тех же координат.

Этот метод рассмотрения моментов придает общей формуле равновесия гораздо более широкий смысл, благодаря чему она становится пригодной для значительно большего числа приложений *).

10. Если значения дифференциалов $dp, dq, dr, \dots$ в качестве функций дифференциалов координат различных тел системы известны, то остается только подставить их в общую формулу

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = 0,$$

и затем удовлетворить этому уравнению независимо от дифференциалов, которые оно содержит.

Таким образом, если рассматриваемая система является совершенно свободной, так что совершенно не существует каких-либо заданных отношений между координатами различных тел и, следовательно, между их дифференциалами, следует удовлетворить приведенному выше уравнению независимо от дифференциалов, и для этого приравнять отдельно нулю суммы всех членов, которые умножаются на каждый из этих дифференциалов. Это даст столько уравнений, сколько имеется переменных координат и, следовательно, сколько их необходимо для определения всех этих переменных и для выяснения с их помощью положения всей системы в состоянии равновесия.

Но если природа системы такова, что тела при своих движениях подчинены особым условиям, следует сначала эти условия выразить с помощью аналитических уравнений, которые мы назовем *условными уравнениями*, — что всегда легко выполнить. Так, например, если некоторые из тел вынуждены двигаться по заданным линиям или поверхностям, то мы имеем в качестве уравнений для координат этих тел эти заданные уравнения линий или поверхностей; если бы два тела были связаны друг с другом таким образом, что они постоянно должны находиться друг от друга на одном и том же расстоянии h , то, очевидно, мы имели бы уравнение

$$h^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2.$$

Когда условные уравнения найдены, следует с их помощью в выражениях для $dp, dq, dr, \dots$ исключить столько дифференциалов, сколько это возможно, так что оставшиеся налицо дифференциалы будут уже совершенно независимы друг от друга и будут выражать лишь то, что имеется произвольного при изменении положения системы. А так как общая формула равновесия должна сохранить свою силу независимо от того, каковы бы ни были эти изменения, следует отдельно приравнять нулю суммы всех членов, в состав которых входит каждый из неопределенных дифференциалов; тогда отсюда получится столько отдельных уравнений, сколько имеется таких дифференциалов; эти уравнения, будучи затем соединены с заданными условными уравнениями, будут содержать в себе все условия, необходимые для определения состояния равновесия системы, так как легко понять, что

*) Если настоящий пункт 9 сопоставить с пунктами 6 и 28 (отдела IV), то мы придем к следующему их толкованию. Когда силы имеют в качестве суммы своих виртуальных моментов произведение вида $P dp$, где p — некоторая функция координат, то говорят, что система рассматриваемых сил эквивалентна некоторой силе P , стремящейся изменить величину функции p . Эта формулировка представляется совершенно условной. В данном случае слову *сила* придается смысл, совершенно отклоняющийся от обычного. Впрочем, эта формулировка не была принята геометрами.

общее число всех этих уравнений будет всегда равно числу различных переменных, являющихся координатами всех тел системы, и, следовательно, что их будет всегда достаточно для определения каждой из этих переменных.

11. Впрочем, если до сих пор мы все время определяли положение тел с помощью прямоугольных координат, то мы это делали потому, что этот способ имеет известное преимущество простоты и легкости в вычислениях, но это не значит, что при применении изложенного выше метода нельзя пользоваться другими координатами; ясно, что при изложенном методе нас ничто не заставляет отдавать предпочтение прямоугольным координатам перед любыми линиями или величинами, определяющими положение тел. Так, вместо двух координат x, y можно было бы, если бы обстоятельства этого потребовали, воспользоваться радиусом-вектором $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и углом φ , тангенс которого равен $\frac{y}{x}$, что дало бы нам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi;$$

третья координата z могла бы при этом сохранить свой прежний вид. Но можно было бы также ввести радиус-вектор $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ с двумя углами φ и ψ , так что

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{y}{x}, \\ \tan \psi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

откуда получается

$$x = \rho \cos \psi \cos \varphi, \quad y = \rho \cos \psi \sin \varphi, \quad z = \rho \sin \psi;$$

точно так же можно воспользоваться другими какими-либо углами или линиями.

Отметим еще, что так как при излагаемом нами методе рассматриваются лишь дифференциалы dx, dy, dz , начало координат может быть избрано в любом месте: этим можно воспользоваться, чтобы упростить выражения для этих дифференциалов.

Если вместо x и y подставить $\rho \cos \varphi$ и $\rho \sin \varphi$, то мы вообще получим

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi; \end{aligned}$$

но если положить $\varphi = 0$, а это значит, что величину угла φ мы будем отсчитывать от радиуса ρ , то мы получим более простые выражения $dx = d\rho$ и $dy = \rho d\varphi$. Точно так же мы можем поступить в других аналогичных случаях.

12. Вообще, какова бы ни была система сил, равновесие которой определяется, и каким бы образом ни были связаны друг с другом точки приложения этих сил, всегда можно свести переменные, определяющие положения этих точек в пространстве, к небольшому числу независимых переменных; для этого следует с помощью условных уравнений, заданных природой системы, исключить столько переменных, сколько имеется условий, т. е. выразить все переменные, которых имеется по три на каждую точку, при помощи небольшого числа их, или при помощи других переменных, которые, не будучи уже подчинены каким-либо условиям, остаются

независимыми и неопределенными. Таким образом равновесие должно иметь место по отношению к каждому из этих независимых переменных *), так как последние дают место такому же числу различных изменений в положении системы.

13. В самом деле, если обозначить через $\xi, \psi, \varphi, \dots$ эти независимые переменные и рассматривать $p, q, r, \dots$ как функции этих переменных, то получится

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial p}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi + \dots, \\ dq &= \frac{\partial q}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial q}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial q}{\partial \varphi} d\varphi + \dots, \\ dr &= \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial r}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

и условие равновесия $P dp + Q dq + R dr + \dots = 0$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left(P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + R \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots \right) d\xi + \\ &+ \left(P \frac{\partial p}{\partial \psi} + Q \frac{\partial q}{\partial \psi} + R \frac{\partial r}{\partial \psi} + \dots \right) d\psi + \\ &+ \left(P \frac{\partial p}{\partial \varphi} + Q \frac{\partial q}{\partial \varphi} + R \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \dots \right) d\varphi + \dots = 0. \end{aligned}$$

Так как значения $d\xi, d\psi, d\varphi, \dots$ должны оставаться неопределенными, то должны существовать отдельно следующие уравнения:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + R \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \psi} + Q \frac{\partial q}{\partial \psi} + R \frac{\partial r}{\partial \psi} + \dots &= 0, \\ P \frac{\partial p}{\partial \varphi} + Q \frac{\partial q}{\partial \varphi} + R \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \dots &= 0. \\ &\dots \end{aligned}$$

Число этих уравнений будет равно числу переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и, следовательно, их будет достаточно для определения всех этих переменных.

Каждое из этих уравнений, как видим, представляет собою частный случай равновесия, при котором виртуальные скорости подчинены определенным соотношениям: из соединения же всех этих частных случаев равновесия создается условие общего равновесия системы.

Можно также отметить, что собственно к этим частным и определенным случаям применимо в полном объеме рассуждение первого параграфа настоящего отдела, и так как в случае двух сил их равновесие всегда можно свести к равновесию прямолинейного рычага, плечи которого находятся между собою в отношении виртуальных скоростей, можно этим путем общий принцип виртуальных скоростей поставить в зависимость только от принципа рычага.

*) То-есть необходимо, чтобы коэффициенты вариаций каждого из этих переменных были короче равны нулю. Прим. Бертрапа.

14. Если величина $P dp + Q dq + R dr + \dots$ не будет равна нулю по отношению ко всем независимым переменным, то силы $P, Q, R, \dots$ не будут находиться в равновесии, и тела, находясь под действием сил, приобретут движения, определяемые как этими силами, так и взаимодействиями тел [10].

Предположим, что на тела той же системы действуют другие силы $P', Q', R', \dots$, направленные по линиям $p', q', r', \dots$, и сообщают им те же самые движения; тогда эти силы будут эквивалентны первым и смогут во всех случаях быть поставлены на их место, так как согласно допущению их действие совершенно одинаково. А если эти же силы $P', Q', R', \dots$, сохраняя свою величину, изменят свои направления и примут направления, противоположные прежним, то ясно, что они тем же телам точно также сообщат движения равные, но противоположно направленные. Следовательно, если в этом новом состоянии они будут действовать на тела той же самой системы — одновременно с силами $P, Q, R, \dots$, то тела будут оставаться в покое, так как движения, сообщаемые им в одном направлении, будут уничтожаться равными и противоположно направленными движениями. Таким образом между всеми этими силами будет существовать равновесие, что дает нам уравнение (пункт 2)

$$P dp + Q dq + R dr + \dots - P' dp' - Q' dq' - R' dr' - \dots = 0;$$

откуда следует

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \dots$$

Таково условие, необходимое для того, чтобы силы $P', Q', R', \dots$, действующие по линиям $p', q', r', \dots$, были эквивалентны силам $P, Q, R, \dots$, действующим по линиям $p, q, r, \dots$. А так как две системы сил могут быть совершенно эквивалентными*) только единственным образом, поскольку движение тела всегда бывает единым и определенным, то отсюда следует, что если две системы сил $P, Q, R, \dots$ и $P', Q', R', \dots$ таковы, что, во всех случаях и по отношению ко всем независимым переменным существует уравнение

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \dots,$$

то эти две системы эквивалентны и во всех случаях могут быть подставлены одна вместо другой.

15. Отсюда следует важная теорема статик, согласно которой две системы сил эквивалентны и могут быть заменены одна другой в одной и той же системе тел, связанных между собою каким угодно образом, если суммы моментов сил в обеих системах всегда между собою равны; и обратно, если сумма моментов сил одной системы всегда равна сумме моментов сил другой системы, то эти две системы сил эквивалентны и могут быть подставлены одна вместо другой в одной и той же системе тел.

Если допустить, что линии $p, q, r, \dots$ зависят от линий $\xi, \psi, \varphi, \dots$, то формула

$$P dp + Q dq + R dr + \dots$$

преобразуется, как в пункте 13, в следующую:

$$E d\xi + F d\psi + \Phi d\varphi + \dots,$$

*) То-есть две системы, эквивалентные в том смысле, что они создают равновесие с одной и той же третьей системой; поэтому одному признаку могут быть рассматриваемы как совершенно эквивалентные системы. *Прим. Бертрама.*

в которой

$$\Xi = P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + R \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots,$$

$$\Psi = P \frac{\partial p}{\partial \psi} + Q \frac{\partial q}{\partial \psi} + R \frac{\partial r}{\partial \psi} + \dots,$$

$$\Phi = P \frac{\partial p}{\partial \varphi} + Q \frac{\partial q}{\partial \varphi} + R \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Таким образом мы имеем

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = \Xi d\xi + \Psi d\psi + \Phi d\varphi + \dots$$

Итак, система сил $P, Q, R, \dots$, направленных по линиям $p, q, r, \dots$, эквивалентна системе $\Xi, \Psi, \Phi, \dots$, действующих по направлению линий $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и, значит, может быть заменена последней в одной и той же системе тел, подверженных действию этих сил *).

*) Для того чтобы это было так, необходимо выполнение следующего условия: линии $\xi, \psi, \varphi, \dots$ должны быть таковы, чтобы их дифференциалы $d\xi, d\psi, d\varphi, \dots$ выражали виртуальные скорости точек приложения сил $\Xi, \Psi, \Phi, \dots$, т. е. чтобы каждый из них представлял собою прямоугольную проекцию смещения точки на направление силы. См. по поводу этого заметку Пуансо (Poinso), напечатанную в Журнале Лиувилля (1^{re} serie, t. XI, стр. 241), которую мы помещаем в конце настоящего тома.

Прим. Бертрана.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, ВЫВЕДЕННЫЕ ИЗ ПРЕДЫДУЩЕЙ ФОРМУЛЫ.

1. Рассмотрим теперь систему или какое-нибудь соединение тел или точек, которые, находясь под действием каких-либо сил, поддерживают друг друга в равновесии. Если бы в какое-либо мгновение действие этих сил перестало уничтожаться, то система начала бы двигаться; каково бы ни было движение системы, его всегда можно себе представить составленным: 1) из поступательного движения, общего для всех тел, 2) из вращательного движения вокруг какой-либо точки и 3) из относительных движений тел, с помощью которых они изменяют свое положение друг относительно друга и свои взаимные расстояния. Таким образом для равновесия необходимо, чтобы тела не могли получить ни одного из этих различных движений. Но ясно, что относительные движения зависят от того, каковы образом тела расположены друг относительно друга, следовательно, условия, необходимые для пресечения этих движений, должны быть особыми для каждой системы. Поступательные же и вращательные движения могут не зависеть от формы системы и могут протекать без изменения расположения и взаимной связи тел.

Поэтому рассмотрение этих двух видов движения должно привести к нахождению общих условий или свойств равновесия. Этим мы теперь и займемся.

§ I. Свойства равновесия свободной системы по отношению к поступательному движению.

2. Пусть дано некоторое количество тел, рассматриваемых в качестве точек и расположенных или связанных между собою каким угодно образом, и пусть они находятся под действием сил $P, P', P'', \dots$, расположенных по линиям $p, p', p'', \dots$. Для равновесия этих тел мы имеем (см. предыдущий отдел) общую формулу

$$P dp + P' dp' + P'' dp'' + \dots = 0.$$

Если отнести к прямоугольной системе координат различные точки, находящиеся под действием сил $P, P', \dots$, равно как и центры этих сил, — подобно тому как это было сделано в пункте 6 предыдущего отдела, то мы получим в случае внешних сил

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, \\ p' &= \sqrt{(x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2}. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Но если тела, соответствующие, например, координатам x, y, z и $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, действуют друг на друга взаимно с некоторой силой, которую мы обозначим через $\bar{P}$, то для взаимного их расстояния, которое мы назовем $\bar{r}$, мы будем иметь

$$\bar{r} = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2}$$

и, следовательно, в общей формуле следует прибавить еще член $\bar{P} d\bar{r}$, получающийся от внутренней силы $\bar{P}$. Точно так же следует поступать и дальше, если на эти же тела действует несколько сил.

3. Положим, что вполне допустимо,

$$\begin{aligned} x' &= x + \xi, & y' &= y + \eta, & z' &= z + \zeta, \\ x'' &= x + \xi', & y'' &= y + \eta', & z'' &= z + \zeta', \\ &\dots\dots\dots & & & & \\ \bar{x} &= x + \bar{\xi}, & \bar{y} &= y + \bar{\eta}, & \bar{z} &= z + \bar{\zeta}. \\ &\dots\dots\dots & & & & \end{aligned}$$

и допустим, что эти значения координат подставлены в предыдущую формулу.

Так как x, y, z являются абсолютными координатами тела, находящегося под действием силы P , то ясно, что $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \dots$ являются ничем иным, как относительными координатами других тел по отношению к данному, принятому в качестве их общего начала координат; в таком случае взаимное положение тел зависит исключительно от последних координат и несколько не зависит от первых. Следовательно, если мы предположим, что система совершенно свободна, т. е. что тела просто связаны между собою какими-либо образом, но не задерживаются какими-либо неподвижными опорами, или внешними препятствиями, то легко понять, что условия, вытекающие из природы системы, могут заключать только величины $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \dots$, но ни в коем случае — величины x, y, z , дифференциалы которых остаются, следовательно, независимыми и неопределенными.

Поэтому после того, как указанные выше подстановки произведены, следует отдельно приравнять нулю каждый из членов, в состав которых входят dx, dy, dz , что даст следующие три уравнения (п. 2):

$$P \frac{\partial p}{\partial x} + P' \frac{\partial p'}{\partial x} + P'' \frac{\partial p''}{\partial x} + \dots + \bar{P} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \dots = 0,$$

$$P \frac{\partial p}{\partial y} + P' \frac{\partial p'}{\partial y} + P'' \frac{\partial p''}{\partial y} + \dots + \bar{P} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \dots = 0,$$

$$P \frac{\partial p}{\partial z} + P' \frac{\partial p'}{\partial z} + P'' \frac{\partial p''}{\partial z} + \dots + \bar{P} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \dots = 0.$$

Прежде всего очевидно, что переменные x, y, z не входят в выражение для $\bar{p}$; поэтому мы имеем

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0, \dots$$

вследствие этого отпадают члены, содержащие в себе внутренние силы $\bar{P}, \dots$.

Далее, мы видим, что значения

$$\frac{\partial p'}{\partial x}, \frac{\partial p'}{\partial y}, \frac{\partial p'}{\partial z}, \frac{\partial p''}{\partial x}, \frac{\partial p''}{\partial y}, \frac{\partial p''}{\partial z}, \dots$$

тождественны со значениями

$$\frac{\partial p'}{\partial x'}, \frac{\partial p'}{\partial y'}, \frac{\partial p'}{\partial z'}, \frac{\partial p''}{\partial x''}, \frac{\partial p''}{\partial y''}, \frac{\partial p''}{\partial z''}, \dots$$

Если обозначить через α, β, γ углы, образуемые линией p с теми же осями, то в силу указанного выше (п. 7 предыдущего отдела) имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos \alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \cos \beta, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \cos \gamma,$$

а также

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = \cos \alpha', \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} = \cos \beta', \quad \frac{\partial p'}{\partial z'} = \cos \gamma', \dots$$

Вследствие этого приведенные выше уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots &= 0, \\ P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \dots &= 0, \\ P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения должны необходимо иметь место в случае равновесия свободной системы. Таковы уравнения, необходимые для того, чтобы воспрепятствовать поступательному движению.

4. Если силы $P, P', P'', \dots$ взаимно параллельны, то

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \dots, \quad \beta = \beta' = \beta'' = \dots, \quad \gamma = \gamma' = \gamma'' = \dots,$$

и три указанных выше уравнения сводятся к одному следующему

$$P + P' + P'' + \dots = 0,$$

которое показывает, что сумма параллельных сил должна быть равна нулю.

Вообще легко понять, что если P выражает полное действие силы P по ее собственному направлению, то $P \cos \alpha$ выражает ее относительное действие, измеренное по направлению оси x , образующей с направлением силы P угол α ; точно также $P \cos \beta$ и $P \cos \gamma$ представляют собою относительные действия той же силы, измеренные по направлению осей y и z ; сказанное относится и к другим силам $P', P'', \dots$.

Отсюда вытекает следующая теорема статики: *при равновесии свободной системы, сумма сил, измеренных по направлению трех взаимно перпендикулярных осей, должна быть равна нулю по отношению к каждой из этих осей.*

§ II. Свойства равновесия по отношению к вращательному движению.

5. Возьмем теперь — что вполне допустимо — вместо координат $x, y, x', y', x'', y'', \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots$ соответствующие радиусы-векторы $p, p', p'', \dots, \bar{p}, \dots$ и углы $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \bar{\varphi}, \dots$, образуемые этими радиусами с осью x ; тогда, как мы знаем,

$$x = p \cos \varphi, \quad y = p \sin \varphi,$$

Так как центры сил $P, P', \dots$ можно избрать где угодно по направлению этих сил, то можно допустить, что эти силы выражены линиями $p, p', \dots$, которые являются прямолинейными расстояниями их точек приложения от соответствующих центров. Указанным путем мы получим более просто

$$N = Rp \sin(\varphi - A) + R'p' \sin(\varphi' - A') + \dots$$

В этой формуле радиусы R и p , исходящие из начала координат и образующие между собою угол $\varphi - A$, составляют стороны треугольника, имеющего своим основанием проекцию отрезка p на плоскость xu ; следовательно, величина $Rp \sin(\varphi - A)$ выражает удвоенную площадь этого треугольника; то же самое можно сказать и о других аналогичных величинах.

Но так как мы обозначили (п. 3) через $\gamma, \gamma', \dots$ углы, образуемые направлениями сил $P, P', \dots$ с осью z , или с линиями, параллельными этой оси, то ясно, что дополнительные к ним углы будут представлять собою наклонения линий $p, p', \dots$ к плоскости xu ; следовательно, $p \sin \gamma, p' \sin \gamma', \dots$ будут проекциями этих линий. Если из начала координат опустить на эти проекции перпендикуляры, которые мы назовем $\Pi, \Pi', \dots$, то получится

$$Rp \sin(\varphi - A) = \Pi p \sin \gamma, \quad R'p' \sin(\varphi' - A') = \Pi' p' \sin \gamma', \dots,$$

и величина N будет приведена к следующему виду:

$$N = \Pi P \sin \gamma + \Pi' P' \sin \gamma' + \Pi'' P'' \sin \gamma'' + \dots,$$

если вместо $p, p', p'', \dots$ снова подставить $P, P', P'', \dots$.

6. Уравнение $N = 0$ даст, таким образом, следующую теорему:

При равновесии системы, обладающей свободой вращения около оси и состоящей из тел, действующий друг на друга каким угодно образом и одновременно находящийся под действием внешних сил, сумма этих сил, измеренных параллельно плоскости, перпендикулярной к оси, и умноженных каждая соответственно на перпендикуляр, опущенный из оси на направление силы, спроектированной на ту же плоскость, должна равняться нулю, — если силам, стремящимся вращать систему в противоположных направлениях, присвоить противоположные знаки.

Обычно эту теорему излагают проще, а именно: для того чтобы имело место равновесие около какой-либо оси, моменты сил по отношению к этой оси должны взаимно уничтожаться.

В настоящее время в механике под моментом силы по отношению к какой-либо линии понимают произведение этой силы, измеренной параллельно плоскости, перпендикулярной к этой линии, и умноженной на плечо рычага, где под плечом подразумевают перпендикуляр, опущенный из этой же линии на направление силы, отнесенной к той же плоскости. В самом деле, действие силы, стремящейся вращать систему около оси, зависит только от этого момента, так как если эту силу разложить на две, из которых одна будет параллельна оси, а другая будет лежать в плоскости перпендикулярной к оси, то очевидно, только последняя будет в состоянии вызывать вращение. Поэтому мы данному моменту присвоим особое название *момента относительно оси вращения*.

7. Коэффициент N члена $N d\varphi$ (п. 5), как мы видим, выражает сумму моментов всех сил системы относительно оси мгновенного вращения $d\varphi$. Точно так же для того, чтобы найти сумму моментов относительно любой оси, следует только преобразовать общую формулу

$$P dp + P' dp' + P'' dp'' + \dots,$$

представляющую сумму *виртуальных моментов* всех сил, — введя в качестве одного из независимых переменных угол вращения около заданной оси. Тогда коэффициентом дифференциала этого угла будет сумма всех моментов относительно этой оси; настоящий прием может оказаться полезным во многих случаях.

8. Если система может вращаться в любом направлении вокруг точки, принятой нами в качестве начала координат, следует одновременно рассмотреть мгновенные вращения около трех осей x , y и z , и тогда мы получим по отношению к каждой из осей уравнение, выражающее свойство моментов, аналогичное тому, какое мы только что нашли. Однако представляется небесполезным ту же задачу разрешить с помощью более простого и более общего анализа.

Для этой цели пусть, как в пункте 5,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x' = r' \cos \varphi', \quad y' = r' \sin \varphi', \dots;$$

если углы $\varphi, \varphi', \dots$ варьировать на один и тот же дифференциал $d\varphi$, то получится

$$dx = -y d\varphi, \quad dy = x d\varphi, \quad dx' = -y' d\varphi, \quad dy' = x' d\varphi, \dots$$

Таковы вариации $x, y, x', y', \dots$, получающиеся в результате элементарного вращения $d\varphi$ системы около оси z .

Точно так же получаются и вариации $y, z, y', z', \dots$, вызываемые элементарным вращением $d\psi$ около оси x ; для этого следует в приведенных выше формулах вместо $x, y, x', y', \dots$ взять $y, z, y', z', \dots$ и вместо $d\varphi$ взять $d\psi$, в результате чего получится

$$dy = -z d\psi, \quad dz = y d\psi, \quad dy' = -z' d\psi, \quad dz' = y' d\psi, \dots$$

Если в последних формулах вместо $y, z, y', z', \dots$ взять соответственно $z, x, z', x', \dots$ и вместо $d\psi$ взять $d\omega$, получатся вариации, происходящие вследствие элементарного вращения $d\omega$ около оси y , которые составят

$$dz = -x d\omega, \quad dx = z d\omega, \quad dz' = -x' d\omega, \quad dx' = z' d\omega, \dots$$

Если допустить, что все три вращения происходят одновременно *), то полные вариации координат $x, y, z, x', y', z', \dots$ будут согласно принципам дифференциального исчисления, равны суммам частных вариаций, вызванных каждым из этих вращений, так что мы получим следующие полные выражения:

$$\begin{aligned} dx &= z d\omega - y d\varphi, & dy &= x d\varphi - z d\psi, & dz &= y d\psi - x d\omega, \\ dx' &= z' d\omega - y' d\varphi, & dy' &= x' d\varphi - z' d\psi, & dz' &= y' d\psi - x' d\omega, \\ &\dots & & & & \end{aligned}$$

Если эти значения подставить в общую формулу равновесия (н. 2), мы получим члены, обязанные своим происхождением только вращениям $d\psi, d\omega, d\varphi$ около трех осей x, y и z . Если система может свободно вра-

*) В действительности эти три вращения не могут происходить одновременно, а лишь последовательно. Тем не менее это несколько не мешает тому, чтобы в анализе рассматривать их как происходящие одновременно; дело в том, что каждое из них, изменяя бесконечно мало положение тела, лишь бесконечно мало влияет на смещения, вызываемые другими вращениями, и видоизменяет движения, обязанные своим происхождением другим вращениям, лишь на величину, бесконечно малую по сравнению со своим собственным значением. *Прим. Бертриана.*

паться во всех направлениях около точки, являющейся началом координат, то указанные выше члены должны поровню равняться нулю.

Но путем дифференцирования мы получим

$$\begin{aligned} dp &= \frac{(x-a) dx + (y-b) dy + (z-c) dz}{p}, \\ dp' &= \frac{(x'-a') dx' + (y'-b') dy' + (z'-c') dz'}{p'}, \\ &\dots \dots \dots \\ d\bar{p} &= \frac{(x-\bar{a})(dx-\bar{d}x) + (y-\bar{b})(dy-\bar{d}y) + (z-\bar{c})(dz-\bar{d}z)}{\bar{p}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Таким образом с помощью указанных выше подстановок мы будем иметь

$$\begin{aligned} d\bar{p} &= \frac{(ay-bx) d\varphi + (bz-cy) d\psi + (cx-az) d\omega}{p}, \\ d\bar{p}' &= \frac{(a'y'-b'x') d\varphi + (b'z'-c'y') d\psi + (c'\omega'-a'z') d\omega}{p'}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подставив вместо $\bar{d}x$, $\bar{d}y$, $\bar{d}z$, ... аналогичные выражения $\bar{z}d\omega - \bar{y}d\varphi$, $\bar{x}d\varphi - \bar{z}d\psi$, $\bar{y}d\psi - \bar{x}d\omega$, ... мы найдем, что $\bar{d}p=0$, $\bar{d}p'=0$, ... Отсюда можно тотчас же сделать вывод, что в результате этих подстановок члены того же уравнения $\bar{P}\bar{d}p$, $\bar{P}'\bar{d}p'$, ..., обрванные своим происхождением внутренним силам, исчезнут.

Но мы получим $\bar{d}p=0$ и в том случае, если положим $a=0$, $b=0$, $c=0$, т. е. если центр сил P будет лежать в начале координат; в этом случае действие данной силы тоже уничтожается.

9. Итак, отвлекаясь от внутренних сил, если таковые имеются, а также от всякой силы, направленной к центру координат, мы получим вообще для всех сил P , P' , ..., направленных по линиям p , p' , ..., следующее уравнение

$$L d\psi + M d\omega + N d\varphi = 0,$$

где принято

$$\begin{aligned} L &= \frac{P(bz-cy)}{p} + \frac{P'(b'z'-c'y')}{p'} + \dots, \\ M &= \frac{P(cx-az)}{p} + \frac{P'(c'x'-a'z')}{p'} + \dots, \\ N &= \frac{P(ay-bx)}{p} + \frac{P'(a'y'-b'x')}{p'} + \dots, \end{aligned}$$

и тогда для всякой системы, способной свободно вращаться в любом направлении вокруг начала координат, мы получим следующие три уравнения:

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0,$$

которые соответствуют уравнениям пункта 5, отнесенным к трем осям координат.

В самом деле, если выразить координаты центров сил a , b , c , a' , ... через углы α , β , γ , α' , ..., образуемые направлениями этих сил с тремя

осей координат, и последовательно положить, как в п. 7 предыдущего отдела,

$$a = x - p \cos \alpha, \quad b = y - p \cos \beta, \quad c = z - p \cos \gamma,$$

и аналогично для других подобных величин, — то мы получим

$$L = P(y \cos \gamma - z \cos \beta) + P'(y' \cos \gamma' - z' \cos \beta') + \dots,$$

$$M = P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) + P'(z' \cos \alpha' - x' \cos \gamma') + \dots,$$

$$N = P(x \cos \beta - y \cos \alpha) + P'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') + \dots$$

А так как $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$ представляют собою значения силы P , измеренные по направлениям трех осей x , y , z , можно тотчас же увидеть, что $xP \cos \beta - yP \cos \alpha$, ... является моментом по отношению к оси z , причем член $yP \cos \alpha$ имеет отрицательный знак, так как сила $P \cos \alpha$ стремится вращать систему по направлению, противоположному силе $P \cos \beta$. Точно также $zP \cos \alpha - xP \cos \gamma$, ... является моментом относительно оси y и $yP \cos \gamma - zP \cos \beta$, ... моментом относительно оси x . Подобные же значения имеют и остальные аналогичные выражения. Таким образом приведенные три уравнения $L=0$, $M=0$, $N=0$ выражают, что сумма этих моментов относительно каждой из трех осей равна нулю.

Мы видим также, что коэффициенты L , M , N мгновенных вращений $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ представляют собою не что иное, как суммы моментов относительно осей мгновенных вращений $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ (п. 7).

10. Можно было бы, пожалуй, усомниться в том, что вращения около трех осей координат достаточно для того, чтобы выразить все малые движения, каков система точек может выполнить вокруг неподвижной точки без того, чтобы взаимное расположение этих точек изменилось. Для того чтобы устранить это сомнение, исследуем все эти движения более прямым путем.

Через данную точку, служащую началом координат x , y , z , и через другую точку системы представим себе проведенной прямую линию, а через эту линию и какую-либо третью точку системы — плоскость; отнесем к этой линии и к этой плоскости все прочие точки системы с помощью новых прямоугольных координат x' , y' , z' , имеющих то же начало, что и первые координаты x , y , z . Совершенно ясно, что эти новые координаты зависят только от взаимного расположения точек системы и, следовательно, что они остаются неизменными, когда система меняет свое положение в пространстве, и что в этом случае изменяются только первые координаты.

Известная теория преобразования координат дает прежде всего следующие соотношения между тремя первыми и тремя последними координатами

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',$$

$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'.$$

Девять коэффициентов α , β , γ , α' , ... зависят только от взаимного расположения осей обеих систем координат и должны быть таковы, чтобы координаты x , y , z относились к тем же самым точкам, к которым относятся и координаты x' , y' , z' , и, следовательно, чтобы выражения

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{и} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2$$

были тождественны; отсюда получается шесть условных уравнений

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' &= 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом из числа 9 величины $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ три величины остаются неопределенными.

В том случае, когда оси x', y', z' совпадают с осями x, y, z , мы имеем

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'$$

и, следовательно,

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 1.$$

Если приведенные выше формулы продифференцировать и затем произвести соответствующие подстановки, можно получить результат некоторого бесконечно малого смещения системы в пространстве около заданной точки.

Продифференцировав выражения x, y, z , на основе допущения, что x', y', z' — величины постоянные, и подставив после дифференцирования вместо этих величин x, y, z , мы получим

$$\begin{aligned}dx &= x d\alpha + y d\beta + z d\gamma, \\ dy &= x d\alpha' + y d\beta' + z d\gamma', \\ dz &= x d\alpha'' + y d\beta'' + z d\gamma''.\end{aligned}$$

Но приведенные выше шесть условных уравнений, после дифференцирования и после подстановки найденных только что значений $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \dots$, дадут

$$\begin{aligned}d\alpha &= 0, & d\beta + d\alpha' &= 0, \\ d\beta' &= 0, & d\gamma + d\alpha'' &= 0, \\ d\gamma'' &= 0, & d\gamma' + d\beta'' &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$d\alpha' = -d\beta, \quad d\alpha'' = -d\gamma, \quad d\beta'' = -d\gamma'.$$

Если эти значения подставить в выражения для dx, dy, dz , мы получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}dx &= -y d\alpha' + z dy, \\ dy &= x d\alpha' - z d\beta'', \\ dz &= -x d\gamma + y d\beta'',\end{aligned}$$

которые совпадают с выражениями, приведенными в пункте 8, если положить $d\alpha' = d\varphi, d\gamma = d\omega, d\beta'' = d\psi$.

Итак, приведенные формулы для вариаций x, y, z обладают всей той общностью, какая требуется по условиям задачи, и три уравнения $L = 0, M = 0, N = 0$, получающиеся в результате исчезновения в общей формуле равновесия членов, относящихся к $d\psi, d\omega, d\varphi$, — являются, таким образом, единственно необходимыми для удержания системы в равновесии около заданной точки, — если отвлечься от всего того, что связано с взаимным расположением точек. Следовательно, если это взаимное расположение

точек остается неизменным, то равновесие системы зависит только от приведенных выше трех уравнений.

Даламбер в своих *Recherches sur la précession des équinoxes* первый открыл законы равновесия нескольких сил, приложенных к неизменяющейся системе точек. Он пришел к ним очень сложным путем, пользуясь сложением и разложением сил. Позднее эти законы были доказаны другими авторами более простыми путями, однако наши формулы обладают тем преимуществом, что они непосредственно приводят к этим законам.

§ III. О сложении вращательных движений вокруг различных осей и о моментах относительно этих осей.

11. Если в системе взять точку, у которой координаты x, y, z пропорциональны $d\psi, d\omega, d\varphi$, то соответствующие дифференциалы dx, dy, dz будут равны нулю, как в этом можно убедиться с помощью формул пункта 8. Эта точка, равно как и все точки, обладающие этим свойством, останется неподвижной в течение того мгновения, когда система опишет три угла $d\psi, d\omega, d\varphi$, вращаясь одновременно вокруг осей x, y, z . Легко видеть, что все эти точки будут лежать на прямой линии, проходящей через начало координат*), и составляющей с осями x, y, z такие углы λ, μ, ν , что

$$\cos \lambda = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{d\omega}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}.$$

Эта прямая будет представлять собою *мгновенную ось* сложного вращения. Если воспользоваться углами λ, μ, ν , введя для сокращения

$$d\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2},$$

то мы получим

$$d\psi = d\theta \cos \lambda, \quad d\omega = d\theta \cos \mu, \quad d\varphi = d\theta \cos \nu,$$

*) Сопоставляя эти выводы с теми, которые были получены в предыдущем параграфе, мы видим, что любое бесконечно малое движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, может быть рассматриваемо как вращение вокруг осн. Эта прекрасная теорема обязана своим открытием Эйлеру, который обосновал ее с помощью очень простого геометрического доказательства. Эйлер исследовал этот вопрос и аналитическим путем. (См. *Mémoires de l'Académie de Berlin* за 1750 г.). Двадцать пять лет спустя он снова вернулся к этой теореме в *Comptes rendus de Saint-Petersbourg* за 1775 г. и, изложив геометрическое доказательство, относящееся к случаю конечных движений, признал, что аналитическое доказательство требует столь пространных исчислений, что он вынужден от него отказаться. Его мемуар заканчивается следующими словами: „Конечно, никто не захотел бы взять на себя этой удивительной работы... поэтому указанное замечательное свойство может дать геометрам прекрасный случай испытать свои силы, проработав над этим свойством, которое вполне поддается объяснению“ (стр. 207). В *Journal de Lionville* (1^{re} sér., t. V, p. 406) Олинд Родригес (Rodrigues), воспользовавшись чрезвычайно изящным способом, дал то доказательство, которого желал Эйлер.

и общие выражения dx , dy , $d\epsilon$ (п. 8) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} dx &= (x \cos \mu - y \cos \nu) d\theta, \\ dy &= (x \cos \nu - z \cos \lambda) d\theta, \\ d\epsilon &= (y \cos \lambda - x \cos \mu) d\theta. \end{aligned}$$

Так как квадрат малого участка пути, проходимого любой точкой, равен $dx^2 + dy^2 + d\epsilon^2$, он может быть выражен через

$$\begin{aligned} [(x \cos \mu - y \cos \nu)^2 + (x \cos \nu - z \cos \lambda)^2 + (y \cos \lambda - x \cos \mu)^2] d\theta^2 = \\ = [x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu)^2] d\theta^2, \end{aligned}$$

ибо $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$.

Но легко доказать, что $x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0$ является уравнением плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой линии, составляющей с осями x , y , z углы λ , μ , ν ; следовательно, малый участок пути, описанный любой точкой этой плоскости, равен $d\theta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а так как мгновенная ось вращения перпендикулярна к той же плоскости, то отсюда следует, что $d\theta$ является углом вращения вокруг этой оси, составленного из трех частных вращений $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ вокруг трех осей координат.

12. Отсюда следует, что любые мгновенные вращения $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ вокруг трех осей, пересекающиеся в одной и той же точке под прямыми углами, складываются в единое вращение $d\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}$ вокруг оси, проходящей через ту же точку пересечения и образующую с упомянутыми осями углы λ , μ , ν , величины которых определяются следующими формулами:

$\cos \lambda = \frac{d\psi}{d\theta}$, $\cos \mu = \frac{d\omega}{d\theta}$, $\cos \nu = \frac{d\varphi}{d\theta}$. И, обратно, отсюда следует, что

любое заданное вращение $d\theta$ вокруг оси может быть разложено на три частных вращения, выражающихся через $\cos \lambda d\theta$, $\cos \mu d\theta$, $\cos \nu d\theta$ — вокруг трех осей, взаимно пересекающихся под прямыми углами в некоторой точке данной оси и образующих с этой осью углы λ , μ , ν . Это дает очень простое средство для сложения и разложения мгновенных движений или скоростей вращательных движений.

В самом деле, если взять три других взаимноперпендикулярных оси, образующих с осью вращения $d\psi$ углы λ' , λ'' , λ''' , с осью вращения $d\omega$ углы μ' , μ'' , μ''' и с осью вращения $d\varphi$ углы ν' , ν'' , ν''' , то вращение $d\psi$ может быть разложено на три вращения $\cos \lambda' d\psi$, $\cos \lambda'' d\psi$, $\cos \lambda''' d\psi$, точно также вращение $d\omega$ может быть разложено на три вращения $\cos \mu' d\omega$, $\cos \mu'' d\omega$, $\cos \mu''' d\omega$, и вращение $d\varphi$ — на три вращения $\cos \nu' d\varphi$, $\cos \nu'' d\varphi$, $\cos \nu''' d\varphi$, причем во всех случаях разложение происходит по одним и тем же трем осям. Таким образом, если сложить все вращения, происходящие вокруг одной и той же оси, и обозначить через $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ полные вращения вокруг трех новых осей, то получится

$$\begin{aligned} d\theta' &= \cos \lambda' d\psi + \cos \mu' d\omega + \cos \nu' d\varphi, \\ d\theta'' &= \cos \lambda'' d\psi + \cos \mu'' d\omega + \cos \nu'' d\varphi, \\ d\theta''' &= \cos \lambda''' d\psi + \cos \mu''' d\omega + \cos \nu''' d\varphi. \end{aligned}$$

13. Итак, вращения $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ были указанным выше путем сведены к трем вращениям $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ вокруг трех других прямоугольных осей; следовательно, эти последние при их сложении должны дать то же вра-

щении $d\theta$, какое получается при сложении вращений $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$. Таким образом мы имеем (п. 11)

$$d\theta^2 = d\theta'^2 + d\theta''^2 + d\theta'''^2 = d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2;$$

а так как последнее равенство должно представлять собою тождество, то отсюда вытекает, что мы имеем следующие соотношения:

$$\cos^2 \lambda' + \cos^2 \lambda'' + \cos^2 \lambda''' = 1,$$

$$\cos^2 \mu' + \cos^2 \mu'' + \cos^2 \mu''' = 1,$$

$$\cos^2 \nu' + \cos^2 \nu'' + \cos^2 \nu''' = 1,$$

$$\cos \lambda' \cos \mu' + \cos \lambda'' \cos \mu'' + \cos \lambda''' \cos \mu''' = 0,$$

$$\cos \lambda' \cos \nu' + \cos \lambda'' \cos \nu'' + \cos \lambda''' \cos \nu''' = 0,$$

$$\cos \mu' \cos \nu' + \cos \mu'' \cos \nu'' + \cos \mu''' \cos \nu''' = 0,$$

к которым можно прийти и геометрическим путем.

С помощью этих соотношений можно также получить и значения $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, выраженные через $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$. Для этого следует значения $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ последовательно помножить на $\cos \lambda'$, $\cos \lambda''$, $\cos \lambda'''$; $\cos \mu'$, $\cos \mu''$, $\cos \mu'''$, и затем сложить. Тогда получится

$$d\psi = \cos \lambda' d\theta' + \cos \lambda'' d\theta'' + \cos \lambda''' d\theta''',$$

$$d\omega = \cos \mu' d\theta' + \cos \mu'' d\theta'' + \cos \mu''' d\theta''',$$

$$d\varphi = \cos \nu' d\theta' + \cos \nu'' d\theta'' + \cos \nu''' d\theta'''.$$

14. Далее, если назвать $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$, $\bar{\omega}'''$ углы, образуемые осью сложного движения $d\theta$ с осями трех частных вращений $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, то аналогично пункту 11 получается

$$d\theta' = \cos \bar{\omega}' d\theta, \quad d\theta'' = \cos \bar{\omega}'' d\theta, \quad d\theta''' = \cos \bar{\omega}''' d\theta,$$

и если в приведенных выше (п. 12) выражениях для $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ вместо $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ подставить их выражения через $d\theta$, указанные в пункте 11, а именно $\cos \lambda' d\theta$, $\cos \mu' d\theta$, $\cos \nu' d\theta$, то сравнение этих различных выражений для $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ даст нам, по разделении на $d\theta$, следующие новые соотношения:

$$\cos \bar{\omega}' = \cos \lambda \cos \lambda' + \cos \mu \cos \mu' + \cos \nu \cos \nu',$$

$$\cos \bar{\omega}'' = \cos \lambda \cos \lambda'' + \cos \mu \cos \mu'' + \cos \nu \cos \nu'',$$

$$\cos \bar{\omega}''' = \cos \lambda \cos \lambda''' + \cos \mu \cos \mu''' + \cos \nu \cos \nu''',$$

которые тоже могут быть выведены с помощью геометрии.

15. Отсюда видно, что сложение и разложение вращательных движений совершенно аналогично сложению и разложению прямолинейных движений.

В самом деле, если на трех осях вращения $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ отложить от точки их пересечения три линии, пропорциональные соответственно $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, и на этих трех линиях построить прямоугольный параллелепипед, то легко видеть, что диагональ этого параллелепипеда будет осью сложного вращения $d\theta$ и в то же время по своей длине она будет пропорциональна этому вращению $d\theta$. Отсюда, а также из того обстоятельства, что вращения вокруг одной и той же оси складываются или вычитаются друг из друга в зависимости от того, происходит ли они в одном и том же направлении,

или же в противоположных направлениях, — следует вообще сделать тот вывод, что сложение и разложение вращательных движений происходит совершенно таким же образом, и согласно тем же законам, что и сложение и разложение прямолинейных движений: для этого следует лишь вращательные движения заменить прямолинейными движениями, направленными по осям вращения.

16. Далее, если в формуле пункта 9 $L d\psi + M d\omega + N d\varphi$, содержащей члены общего выражения $P dp + P' dp' + P'' dp'' + \dots$, обязанные своим происхождением вращениям $d\psi, d\omega, d\varphi$, подставить вместо $d\psi, d\omega, d\varphi$ выражения, найденные в пункте 13, то она перейдет в

$$\begin{aligned} & (L \cos \lambda' + M \cos \mu' + N \cos \nu') d\theta' + \\ & + (L \cos \lambda'' + M \cos \mu'' + N \cos \nu'') d\theta'' + \\ & + (L \cos \lambda''' + M \cos \mu''' + N \cos \nu''') d\theta'''. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно пункту 7 коэффициенты элементарных углов $d\theta', d\theta'', d\theta'''$ будут выражать суммы моментов относительно осей вращения $d\theta', d\theta'', d\theta'''$. Таким образом моменты, равные L, M, N и относящиеся к трем прямоугольным осям, дадут моменты

$$\begin{aligned} & L \cos \lambda' + M \cos \mu' + N \cos \nu', \\ & L \cos \lambda'' + M \cos \mu'' + N \cos \nu'', \\ & L \cos \lambda''' + M \cos \mu''' + N \cos \nu''' \end{aligned}$$

относительно трех других прямоугольных осей, образующих с первыми осями соответственно углы $\lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu''; \lambda''', \mu''', \nu'''$.

Геометрическое доказательство этой теоремы можно найти в VII томе *Nova Acta Петербургской Академии* *).

17. Если допустить, что вращения $d\psi, d\omega, d\varphi$ пропорциональны L, M, N , и положить $H = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, то согласно пункту 11 мы имеем $L = H \cos \lambda, M = H \cos \mu, N = H \cos \nu$ и три найденные нами выше момента сводятся, с помощью соотношений пункта 14, к следующему простому виду: $H \cos \bar{\omega}', H \cos \bar{\omega}'', H \cos \bar{\omega}'''$.

Но $\bar{\omega}', \bar{\omega}'', \bar{\omega}'''$ — это углы, образуемые осями вращений $d\theta', d\theta'', d\theta'''$ с осью сложного движения вращения $d\theta$. Поэтому, если мы совместим ось вращения $d\theta'$ с осью вращения $d\theta$, мы получим, что $\bar{\omega}' = 0$, а $\bar{\omega}''$ и $\bar{\omega}'''$ составляют каждая по прямому углу; следовательно, момент относительно этой оси будет равен просто H , а два других момента относительно осей, перпендикулярных к первой, будут равны нулю.

Отсюда следует, что моменты, равные L, M, N и относящиеся к трем прямоугольным осям, складываются в единый момент H , равный $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, и относящийся к оси, которая составляет с упомянутыми выше осями углы λ, μ, ν , для которых $\cos \lambda = \frac{L}{H}, \cos \mu = \frac{M}{H}, \cos \nu = \frac{N}{H}$.

Таковы известные теоремы, касающиеся сложения моментов; ясно, что это сложение происходит согласно тем же правилам, что и сложение прямолинейных движений. Его можно было бы вывести непосредственно из сло-

*) Это доказательство принадлежит Эйлеру.

Прим. Бертрана

жения мгновенных вращений, подставив моменты вместо вызываемых ими вращений, подобно тому, как Вариньон подставил силы вместо прямолинейных движений *).

§ IV. Свойства равновесия по отношению к центру тяжести.

18. Если допустить, что в формулах пункта 9 все силы P, P', P'' действуют по параллельным друг другу направлениям, то получается

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \dots, \quad \beta = \beta' = \beta'' = \dots, \quad \gamma = \gamma' = \gamma'' = \dots;$$

следовательно, если для краткости положить

$$X = Px + P'x' + P''x'' + \dots,$$

$$Y = Py + P'y' + P''y'' + \dots,$$

$$Z = Pz + P'z' + P''z'' + \dots,$$

то величины L, M, N принимают следующий вид:

$$L = Y \cos \gamma - Z \cos \beta,$$

$$M = Z \cos \alpha - X \cos \gamma,$$

$$N = X \cos \beta - Y \cos \alpha,$$

и уравнения равновесия сводятся к следующим:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

причем третье из них является здесь следствием первых двух. Но так как мы имеем сверх того (отдел II, пункт 7) уравнение

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

мы получаем возможность определить с помощью этих уравнений углы α, β, γ ; мы находим

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Итак, если дано положение тел по отношению к трем осям, то для того, чтобы вращательное движение системы было совершенно уничтожено, необходимо, чтобы система по отношению к направлению сил заняла такое положение, при котором это направление образовало бы с упомянутыми осями углы α, β, γ , величина которых была определена выше.

19. Если бы величины X, Y, Z оказались равными нулю, то углы α, β, γ остались бы неопределенными и положение системы по отношению к направлению сил могло бы быть совершенно произвольным; отсюда получается следующая теорема: *Если сумма произведения параллельных сил*

*) Эта аналогия недопустима. Сила, действующая на твердое тело, способное двигаться вокруг заданной оси, вызывает вращение, пропорциональное ее моменту; но для двух различных осей играют роль моменты инерции, поэтому нельзя подставлять моменты вместо вызываемых ими вращений. (См. по этому вопросу работу Пуансо, Mémoires de l'Institut, t. VII, p. 564.)

Прим. Вермана.

на их расстояния от трех взаимно перпендикулярных плоскостей равна нулю по отношению к каждой из этих плоскостей, то действие этих сил, стремящееся заставить систему вращаться вокруг общей точки пересечения упомянутых плоскостей, уничтожается.

Известно, что сила тяжести действует по вертикали и что она пропорциональна массе. Следовательно, если в системе весовых тел найти такую точку, чтобы сумма масс, умноженных на их расстояния от плоскости, проходящую через эту точку, была равна нулю по отношению к трем взаимно перпендикулярным плоскостям, то эта точка будет обладать тем свойством, что сила тяжести не будет в состоянии вызвать в системе какого-либо вращательного движения вокруг этой точки. Эта точка, которая называется *центром тяжести*, имеет очень широкое применение во всей механике.

Для определения этой точки следует лишь найти ее расстояния от трех заданных взаимно перпендикулярных плоскостей. Но так как сумма произведений масс на их расстояния от плоскости, проходящей через центр тяжести, равна нулю, то сумма произведений тех же масс на их расстояния от другой плоскости, параллельной первой, необходимо будет равна произведению суммы всех масс на расстояние центра тяжести от той же плоскости; таким образом это последнее расстояние можно получить, если сумму произведений масс на соответствующие их расстояния разделить на сумму этих масс; отсюда получаются известные формулы для центров тяжести линий, поверхностей и тел.

20. Есть, однако, одно менее известное свойство центра тяжести, которое может оказаться полезным в некоторых случаях, так как оно не связано с чуждым проблеме рассмотренным плоскостей, и которое может послужить для определения центра тяжести, исходя непосредственно из взаимного расположения тел. Вот в чем это свойство состоит.

Пусть A есть сумма произведений масс, взятых по двое и затем умноженных на квадрат их взаимного расстояния, деленная на квадрат суммы этих масс.

Пусть B — сумма произведений отдельных масс на квадрат их расстояний от какой-либо заданной точки, деленная на сумму этих масс.

Тогда $\sqrt{B-A}$ выразит расстояние центра тяжести всех масс от заданной точки. Так как величина A не зависит от выбора этой точки, то, определив значения B по отношению к трем различным точкам, избранным по усмотрению в пределах системы или же вне ее, получим расстояния центра тяжести от этих трех точек и, следовательно, положение его относительно этих точек. Если бы все тела лежали в одной и той же плоскости, было бы достаточно рассмотреть две точки, а если бы они лежали на некоторой заданной прямой, было бы достаточно одной точки.

Если эти точки избрать в самих телах системы, то положение ее центра тяжести будет задано исключительно массами и их взаимными расстояниями. В этом заключается главнейшее преимущество этого способа определения центра тяжести.

Для доказательства сказанного, я возвращаюсь к выражениям X, Y, Z пункта 18 и, введя еще три произвольных величины f, g, h , составляю три нижеследующих тождественных равенства, которые легко проверить:

$$\begin{aligned} & [X - (P + P' + P'' + \dots)f]^2 = \\ & = (P + P' + P'' + \dots)[P(x-f)^2 + P'(x'-f)^2 + P''(x''-f)^2 + \dots] - \\ & - PP'(x-x')^2 - PP''(x-x'')^2 - P'P''(x'-x'')^2 - \dots, \end{aligned}$$

равновесия между силами $P, Q, R, \dots$, которые направлены по линиям $p, q, r, \dots$, приводящим к центрам этих сил (отд. II, п. 4).

Можно допустить*), что эти силы выражены таким образом, что величина $P dp + Q dq + R dr + \dots$ является полным дифференциалом некоторой функции от $p, q, r, \dots$; обозначим последнюю через Π , так что мы имеем

$$d\Pi = P dp + Q dq + R dr + \dots$$

Тогда для случая равновесия мы имеем уравнение $d\Pi = 0$, которое показывает, что система должна занимать такое положение, чтобы функция Π была, вообще говоря, максимумом или минимумом [11].

Я употребил выражение „вообще говоря“, так как известно, что равенство нулю дифференциала не всегда указывает на наличие максимума или минимума, — как это хорошо известно из теории кривых.

Указанное выше допущение вообще имеет место, когда силы P, Q, R действительно направлены либо к неподвижным внешним точкам, либо к телам самой системы и при этом пропорциональны каким-либо функциям расстояний; в природе наблюдается именно этот случай.

Итак, при указанном допущении о характере сил система будет в равновесии, когда функция Π будет максимумом или минимумом; в этом заключается принцип, предложенный Мопертюи (Maupertuis) под названием *закона покоя*.

В системе тяжелых тел, находящейся в равновесии, силы $P, Q, R, \dots$, вызываемые тяжестью, как известно, пропорциональны массам тел и, следовательно, постоянны, а линии $p, q, r, \dots$ сходятся в центре земли. Поэтому в данном случае мы имеем

$$\Pi = Pp + Qq + Rr + \dots;$$

так как линии $p, q, r, \dots$ можно признать параллельными, то величина

$$\frac{\Pi}{P + Q + R + \dots}$$

выразит расстояние центра тяжести всей системы от центра земли; следовательно, это расстояние будет минимумом или максимумом, когда система будет находиться в равновесии. Так, например, оно является минимумом в случае цепной линии и максимумом — в случае большого числа шариков, поддерживающих друг друга, когда они расположены в виде свода. Этот принцип известен уже с давних пор.

22. Если теперь мы рассмотрим ту же систему в движении и если через $u', u'', u''', \dots$ обозначим скорости, а через $m', m'', m''', \dots$ соответствующие массы различных тел, входящих в состав системы, то принцип, столь хорошо известный под названием *принципа сохранения живой сил*, прямое и общее доказательство которого будет нами представлено во второй части настоящей работы, — даст нам следующее уравнение:

$$m'u'^2 + m''u''^2 + m'''u'''^2 + \dots = \text{const} - 2\Pi.$$

Так как в состоянии равновесия величина Π бывает минимумом или максимумом, то отсюда следует, что величина $m'u'^2 + m''u''^2 + m'''u'''^2 + \dots$, представляющая собою живую силу всей системы, будет одновременно максимумом или минимумом. Отсюда получается следующий второй принцип

*) Лагранж не хотел утверждать, что это всегда так бывает. Он лишь предупреждает, что излагаемые ниже выводы относятся к тому случаю, когда это имеет место. *Прим. Бертрана.*

статики: из всех положений, последовательно занимаемых системой, то положение, при котором она обладает наибольшей или наименьшей живой силой, является одновременно тем положением, в которое ее следовало бы сначала поместить, чтобы она осталась в равновесии. (См. Mémoires de l'Académie des Sciences за 1748 и 1749 гг.*).

23. Мы видели, что функция Π бывает минимумом или максимумом, когда положение системы таково, что она находится в равновесии. Докажем теперь, что когда эта функция является минимумом, то в этом случае имеет место устойчивое равновесие в том смысле, что если сначала система находилась в состоянии равновесия, а затем была немного из него выведена, то она сама собою стремится вернуться к этому состоянию, совершая около него бесконечно малые колебания, — и что, наоборот, в том случае, когда та же функция является максимумом, имеет место неустойчивое равновесие, так что система, будучи однажды выведена из этого состояния, может совершать колебания, которые не будут уже очень малыми и которые могут все более и более отклонить систему от ее первоначального состояния [12].

Для того чтобы доказать это положение в общем виде, я принимаю во внимание то обстоятельство, что каков бы ни был вид системы, ее положение, т. е. положение различных тел, из которых она составлена, всегда определяется с помощью известного числа переменных, и что величина Π будет заданной функцией этих же переменных. Предположим, что при положении равновесия упомянутые переменные равны $a, b, c, \dots$, а при положении очень близком к положению равновесия они равны $a+x, b+y, c+z, \dots$, где $x, y, z, \dots$ очень малые величины. Если эти последние значения подставить в функцию Π и разложить ее в ряд по степеням очень малых величин $x, y, z, \dots$, то функция Π **) получит следующий вид:

$$\Pi = A + Bx + Cy + Dz + \dots + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + \\ + Kxz + Lyz + Mz^2 + \dots,$$

где величины $A, B, C, \dots$ заданы в виде функций $a, b, c, \dots$. Но в состоянии равновесия $d\Pi$ должно равняться нулю, каким бы образом мы ни варьировали положение системы; следовательно, дифференциал Π должен вообще равняться нулю, когда $x, y, z, \dots$ равны нулю. Таким образом

$$B=0, \quad C=0, \quad D=0, \quad \dots$$

Итак, для любого состояния, очень близкого к состоянию равновесия, получается следующее выражение для Π :

$$\Pi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \dots;$$

поскольку переменные $x, y, z, \dots$ очень малы, в приведенном выражении достаточно принимать во внимание лишь вторые степени этих переменных.

* Этот принцип был высказан, без достаточного, однако, обоснования, малоизвестным геометром де-Куртвиэром (de Courtivron). В первом издании „Аналитической механики“ Лагранж упомянул его имя; во втором же издании он его не назвал, ограничившись указанием даты мемуара. *Прим. Бертрама.*

**) Лежён-Дирихле (Lejeune-Dirichlet) упростили это доказательство и придал ему большую строгость (См. Journal de Crelle, т. 32 и Journal de Liouville, 1^{re} Sér., т. XII, стр. 474.) *Прим. Бертрама.*

24. Теперь ясно, что для того чтобы величина Π была минимумом в то время, когда $x, y, z, \dots$ равны нулю, необходимо, чтобы функция

$$Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \dots,$$

которую я назову X , была неизменно положительной, независимо от того, каковы значения переменных $x, y, z, \dots$.

Но эта функция может быть приведена к следующему виду:

$$X = f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \dots,$$

если положить

$$f = F,$$

$$\xi = x + \frac{Gy}{2f} + \frac{Kz}{2f} + \dots,$$

$$g = H - \frac{G^2}{4f},$$

$$\eta = y + \left(L - \frac{GK}{2f}\right) \frac{z}{2g} + \dots,$$

$$h = M - \frac{K^2}{4f} - \frac{L^2}{4g},$$

$$\zeta = z + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Следовательно, для того чтобы упомянутая функция была положительной, необходимо, чтобы коэффициенты $f, g, h, \dots$ были положительны; в то же время ясно, что если эти коэффициенты положительны, то X необходимо будет положительно, так как величины $\xi, \eta, \zeta, \dots$ вещественны, если таковы же и переменные $x, y, z, \dots$.

Если же, наоборот, величина Π должна быть максимумом в то время, как $x, y, z, \dots$ равны нулю, функция X должна быть постоянно отрицательной и, следовательно, коэффициенты $f, g, h, \dots$ должны иметь отрицательные значения. И, наоборот, если эти коэффициенты отрицательны, то отсюда следует, что значение X необходимо будет отрицательным.

25. Итак, если принимать во внимание лишь вторые степени очень малых величин x, y, z , мы будем иметь

$$\Pi = A + f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \dots$$

и уравнение сохранения живых сил (п. 22) примет следующий вид:

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \dots = \text{const} - 2A - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \dots$$

Но в состоянии равновесия мы согласно допущению имеем

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \dots,$$

а следовательно, также (п. 19)

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \dots$$

Поэтому, если мы предположим, что выводим систему из этого состояния, сообщив телам $M', M'', M''', \dots$ очень малые скорости $V', V'', V''', \dots$, то необходимо должно быть $u' = V', u'' = V'', u''' = V''', \dots$, когда $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0, \dots$. Таким образом мы получим

$$M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \dots = \text{const} - 2A;$$

это уравнение послужит для определения произвольной постоянной.

Итак, приведенное выше уравнение примет следующий вид:

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \dots = \\ = M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \dots - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \dots,$$

на основании которого легко сделать следующие два заключения:

1) В том случае, когда Π минимум, и, следовательно, когда коэффициенты $f, g, h, \dots$ все положительны, величина

$$2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \dots,$$

имеющая всегда положительное значение, необходимо должна быть меньше, или во всяком случае не может быть больше заданной величины $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \dots$, которая сама по себе очень мала; следовательно, если эту величину назвать T , то для каждой из переменных $\xi, \eta, \zeta, \dots$ будут существовать следующие пределы:

$$\pm \sqrt{\frac{T}{2f}}, \quad \pm \sqrt{\frac{T}{2g}}, \quad \pm \sqrt{\frac{T}{2h}}, \quad \dots,$$

между которыми они необходимо будут заключаться. Отсюда следует, что в данном случае система будет в состоянии лишь очень мало отклоняться от своего положения равновесия и сможет выполнять лишь очень малые колебания с ограниченным размахом.

2) В том случае, когда Π максимум, и, следовательно, когда коэффициенты $f, g, h, \dots$ все отрицательны, величина

$$-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \dots,$$

имеющая всегда положительное значение, может возрастать до бесконечности и, следовательно, система может все больше отклоняться от своего положения равновесия. По крайней мере приведенное уравнение позволяет убедиться в том, что в данном случае ничто не препятствует постоянному увеличению переменных $\xi, \eta, \zeta, \dots$; однако отсюда еще не следует, что они действительно должны увеличиваться; это последнее положение мы докажем в шестом разделе Динамики [13].

Если бы все коэффициенты $f, g, h, \dots$ оказались равными нулю, то как это нам известно из теории максимумов и минимумов, для существования максимума или минимума требуется, чтобы члены третьего измерения были равны нулю, а члены четвертого измерения были все время положительными или отрицательными [14]. Пользуясь этим приемом и можно судить об устойчивости равновесия, получающегося благодаря обращению в нуль членов первого порядка, если одновременно с ними исчезают и члены второго порядка.

26. Впрочем, изложенные выше свойства максимумов и минимумов, проявляющиеся при равновесии системы любых сил, являются только непосредственным следствием доказательства, данного нами в конце первого отдела для принципа виртуальных скоростей.

В самом деле, пусть p — расстояние между двумя первыми ползпастами, из которых одна неподвижна, а другой может перемещаться; они соединяются друг с другом с помощью P витков веревки, создающих силу, пропорциональную P , которую можно выразить просто через P , если груз, действующий на веревку, принять за единицу; пусть, далее, q — расстояние между двумя ползпастами, создающими силу Q , r — расстояние между ползпастами, создающими силу $R, \dots$. Ясно, что Pp будет длиной участка веревки, охватывающего оба первых ползпаста; аналогично $Qq, Rr, \dots$

представляют собою соответствующие длины частей веревки, охватывающих другие полнеласты, так что общая длина веревки, охватывающей все неподвижные и подвижные полнеласты, составит $Pp + Qq + Rr + \dots$.

К этой длине прибавим еще и длину различных частей веревки, которые находятся между неподвижными поворотными блоками, необходимыми для изменения направления веревки; эту длину мы обозначим через a . Прибавим сюда еще ту часть веревки, которая находится между последним поворотным блоком и грузом, подвешенным на конце веревки; ее мы обозначим через u ; наконец, пусть l — общая длина веревки, один конец которой закреплен в некоторой неподвижной точке пространства, а другой висит на себе груз. Очевидно, что мы имеем равенство

$$l = Pp + Qq + Rr + \dots + a + u,$$

откуда следует

$$u = l - a - Pp - Qq - Rr - \dots$$

Но если предположить, что силы $P, Q, R, \dots$ являются постоянными, т. е. независимыми от $p, q, r, \dots$, — а это всегда допустимо при равновесии, где мы рассматриваем лишь бесконечно малые смещения, — то легко видеть*), что величина $Pp + Qq + Rr + \dots$ будет той самой, которую мы выше в пункте 21 обозначили через Π ; таким образом мы будем иметь вообще

$$u = l - a - \Pi,$$

где l и a — постоянные величины.

27. Теперь ясно, что так как груз стремится спуститься как можно ниже, равновесие может наступить вообще только тогда, когда значение u , выражающее снижение груза, отсчитываемое от неподвижного блока, будет максимумом, и, следовательно, когда значение Π будет минимумом; в то же время ясно, что в данном случае равновесие будет *устойчивым*, так как любое незначительное изменение системы может вызвать лишь поднятие груза, который, однако, будет стремиться снова снизиться и вернуть систему в состояние равновесия.

Но мы видели, что для равновесия достаточно наличия условия $d\Pi = 0$ и, следовательно, $du = 0$. Это условие имеется также и в том случае, когда значение u представляет собою минимум, т. е. когда груз вместо того, чтобы занимать самое низкое положение, занимает, наоборот, самое высокое. Легко видеть, что в данном случае небольшое изменение в положении системы сможет вызвать лишь снижение груза, который после этого не будет стремиться вновь подняться, а будет стремиться еще более снизиться и тем самым все более и более удалять систему от ее первоначального положения равновесия. Отсюда следует, что это равновесие совершенно не будет обладать устойчивостью: однажды нарушенное, оно не будет стремиться к своему восстановлению.

*) Подобная замена переменных сил постоянными может, наоборот, совершенно изменить природу функции Π . Так, например, если рассмотреть притяжение, обратно пропорциональное расстоянию и равное $\frac{\mu}{p}$, то мы будем иметь

$$\int P dp = \int \frac{\mu}{p} dp = \mu \log p;$$

если же P заменить постоянной величиной, то после интегрирования мы будем иметь Pp , что сильно отличается от полученного выше результата. Можно лишь утверждать, что при тех значениях переменных, которые соответствуют состоянию равновесия, обе функции, хотя и сильно между собою различающиеся, имеют одинаковые вариации.

Прим. Бертраиа.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

БОЛЕЕ ПРОСТОЙ И БОЛЕЕ ОБЩИЙ МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ РАВНОВЕСИЯ, ДАННОЙ В ОТДЕЛЕ ВТОРОМ.

1. Писавшие до сих пор о принципе виртуальных скоростей были больше заняты подтверждением правильности этого принципа путем сопоставления результатов, полученных при его помощи, с результатами, полученными с помощью обычных положений статики, — чем выявляли ту пользу, какую можно из него извлечь для непосредственного разрешения задач этой науки. Мы предложили себе осуществить эту последнюю цель со-всей той общностью, какая ей доступна, и вывести из упомянутого принципа аналитические формулы, которые содержат в себе разрешение всех проблем о равновесии тел, — почти так же, как формулы для подкасательных, для радиусов кривизны и т. д. содержат в себе определение этих линий для всех кривых.

Метод, изложенный во втором разделе, может быть применен во всех случаях и, как мы видели, требует лишь выполнения чисто аналитических операций; но так как непосредственное исключение переменных или их дифференциалов с помощью условных уравнений может привести к очень сложным вычислениям, мы представим тот же метод в более простом виде, сведя с помощью некоторого приема все случаи к случаю совершенно свободной системы.

§ I. Метод множителей.

2. Пусть

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \dots$$

различные условные уравнения, вытекающие из природы системы, причем величины $L, M, N, \dots$ представляют собою конечные функции переменных $x, y, z, x', y', z', \dots$; дифференцируя эти выражения, мы получим

$$dL=0, \quad dM=0, \quad dN=0, \dots;$$

последние дают ту связь, которая должна существовать между дифференциалами тех же переменных. Вообще с помощью уравнений

$$dL=0, \quad dM=0, \quad dN=0, \dots$$

мы будем выражать условные уравнения между этими дифференциалами — независимо от того, будут ли эти уравнения сами по себе полными дифференциалами или же нет — при условии, что дифференциалы будут только линейными.

Но так как эти уравнения должны служить лишь для исключения в общей формуле равновесия равного количества дифференциалов, после

чего каждый из коэффициентов оставшихся дифференциалов должен быть приравнен нулю, то нетрудно, пользуясь теорией исключения линейных уравнений, доказать, что тот же результат может быть получен, если в упомянутой формуле просто прибавить различные условные уравнения

$$dL=0, \quad dM=0, \quad dN=0, \dots,$$

умножив каждое из них на неопределенный коэффициент; если затем приравнять нулю сумму всех членов, которые умножаются на один и тот же дифференциал, то это даст нам столько частных уравнений, сколько имеется дифференциалов; из этих последних уравнений можно будет под конец исключить неопределенные коэффициенты, на которые были умножены условные уравнения.

3. Отсюда, таким образом, вытекает следующее крайне простое правило определения условий равновесия любой заданной системы.

Берут сумму *моментов* всех сил, которые должны находиться в равновесии (отд. II, п. 5) и прибавляют к ним различные дифференциалы функций, которые согласно условиям задачи должны равняться нулю, умножив предварительно каждый из этих дифференциалов на неопределенный коэффициент. Полученную сумму приравнивают нулю и таким образом получают дифференциальное уравнение, которое рассматривают как обычное уравнение для *максимумов* и *минимумов* и из которого затем получают столько частных конечных уравнений, сколько имеется переменных величин. Если затем эти уравнения путем исключения освободить от неопределенных коэффициентов, то они дадут все условия, необходимые для равновесия.

Таким образом рассматриваемое дифференциальное уравнение будет иметь следующий вид:

$$P dp + Q dq + R dr + \dots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \dots = 0,$$

где $\lambda, \mu, \nu, \dots$ представляют собою неопределенные величины; в дальнейшем мы будем его называть *общим уравнением равновесия*.

Это уравнение даст для каждой координаты, например, для координаты x , любого из тел системы уравнение следующего вида:

$$P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} + R \frac{\partial r}{\partial x} + \dots + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial x} + \nu \frac{\partial N}{\partial x} + \dots = 0;$$

таким образом число этих уравнений будет равно числу всех координат тел. Эти уравнения мы будем называть *частными уравнениями равновесия*.

4. Вся трудность заключается теперь в том, чтобы из последних уравнений исключить неопределенные величины $\lambda, \mu, \nu, \dots$. Правда, этой цели всегда можно добиться с помощью известных приемов, но представляется целесообразным в каждом отдельном случае избирать те приемы, которые могут привести к наиболее простым результатам. Окончательные уравнения будут содержать в себе все условия, необходимые для предложенной задачи равновесия, а так как число этих уравнений будет равно числу всех координат тел системы за вычетом из него числа неопределенных величин $\lambda, \mu, \nu, \dots$, которые подлежали исключению, и так как сверх того число этих неопределенных величин как раз равно числу конечных условных уравнений $L=0, M=0, N=0, \dots$, то отсюда следует, что вышеупомянутые уравнения совместно с этими последними всегда дадут такое количество уравнений, которое будет равно числу координат всех тел системы; следовательно, их будет достаточно для определения этих координат и для выяснения положения, какое должно занять каждое тело, чтобы находиться в равновесии.

5. Отмечу теперь, что члены λdL , μdM , ... общего уравнения равновесия тоже можно рассматривать как величины, выражающие моменты различных сил, приложенных к той же системе.

В самом деле, принимая во внимание, что dL является дифференциальной функцией переменных $x', y', z', x'', y'', \dots$, служащих координатами различных тел системы, можно считать, что она составлена из различных частей, которые я обозначу через $dL', dL'', \dots$, так что

$$dL = dL' + dL'' + \dots,$$

где dL' содержит в себе члены, в которые входят dx', dy', dz' ; dL'' содержит в себе члены, в которые входят dx'', dy'', dz'' , и т. д.

Таким образом член λdL общего уравнения составлен из членов $\lambda dL'$, $\lambda dL'', \dots$. Но если член $\lambda dL'$ представить в следующем виде:

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial z'}\right)^2} \times \frac{dL'}{\sqrt{\left(\frac{\partial L'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial z'}\right)^2}},$$

и принять во внимание сказанное в пункте 8 отд. II, то станет ясно, что эта величина может выражать момент силы

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L'}{\partial z'}\right)^2},$$

приложенной к телу, координаты которого равны x', y', z' , и направленной перпендикулярно к поверхности, уравнение которой $dL' = 0$, если только в последнем x', y', z' рассматривать как переменные величины. Точно также член $\lambda dL''$ может выразить момент силы

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L''}{\partial x''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L''}{\partial y''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L''}{\partial z''}\right)^2},$$

приложенной к телу, имеющему своими координатами x'', y'', z'' , и направленной перпендикулярно к поверхности, уравнение которой $dL'' = 0$, если только в последнем выражении x'', y'', z'' рассматривать как переменные величины, и так далее.

Следовательно, вообще член λdL будет эквивалентен действию различных сил, выраженных с помощью

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)^2}, \quad \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z''}\right)^2}, \dots$$

и приложенных соответственно к телам, имеющим координаты $x', y', z', x'', y'', z'', \dots$, причем эти силы направлены перпендикулярно к различным поверхностям, выраженным с помощью уравнения $dL = 0$, если в последнем принять в качестве переменных сначала x', y', z' , затем x'', y'', z'' и т. д.

6. Вообще член λdL можно рассматривать как момент некоторой силы*) λ , стремящейся вызвать изменение значения функции L , а так как $dL = dL' + dL'' + \dots$, то член λdL выражает моменты нескольких сил, равных λ и стремящихся вызвать изменение функции L , если принять во внимание отдельно изменчивость различных координат $x', y', z', x'', y'', z'', \dots$. То же самое относится и к членам $\mu dM, \nu dN, \dots$ (отд. II, п. 9).

*) См. по этому поводу примечание к пункту 9 отд. II (стр. 34). *Прим. Бертрама.*

Так как в общем уравнении равновесия (п. 3) предполагается, что силы $P, Q, R, \dots$ направлены к центрам, в которых заканчиваются линии $p, q, r, \dots$ и таким образом стремятся укоротить эти линии, то следует считать, что и силы $\lambda, \mu, \dots$ стремятся уменьшить значения функций $L, M, \dots$.

7. Отсюда следует, что каждое условное уравнение эквивалентно одной или нескольким силам, приложенным к системе по заданным направлениям, или вообще стремящимся вызвать изменение значений заданных функций *); таким образом состояние равновесия системы остается одним и тем же, будем ли мы принимать в расчет эти силы, или же мы будем рассматривать условные уравнения.

И, обратно, эти силы могут занять место условных уравнений, вытекающих из природы заданной системы; таким образом, применяя эти силы, можно рассматривать тела как совершенно свободные и не подчиненные каким бы то ни было связям. Отсюда ясен метафизический смысл того, почему введение в общее уравнение равновесия членов $\lambda dL + \mu dM + \dots$ приводит к возможности в последующем трактовать это уравнение так, как будто бы все тела системы были совершенно свободны; в этом и заключается идея метода, предлагаемого в настоящем отделе.

Собственно говоря, рассматриваемые силы учитывают те сопротивления, которые могут испытывать тела вследствие взаимной их связи или же вследствие наличия препятствий, которые в силу природы системы могут противодействовать их движению; больше того, эти силы представляют собою не что иное, как самые силы этих сопротивлений, которые должны быть равны и направлены прямо противоположно силам давления, разнваемым телами. Как видим, наш метод дает средство для определения этих сил и сопротивлений; в этом заключается одно из немаловажных преимуществ данного метода.

8. В тех случаях, когда силы $P, Q, R, \dots$ не находятся в равновесии и их хотят заменить эквивалентными силами, направления которых даны, следует к сумме моментов сил $P, Q, R, \dots$ прибавить моменты, вытекающие из условных уравнений $L=0, M=0, \dots$, и тогда получится сумма моментов сил, эквивалентных силам $P, Q, R, \dots$ по действию, оказываемому телами друг на друга в силу тех же условных уравнений.

Если применить таким образом все условные уравнения, получающиеся из природы рассматриваемой системы, то можно координаты каждого тела системы рассматривать как величины независимые; для каждой из этих координат, например, для координаты x , получается величина следующего вида:

$$P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} + R \frac{\partial r}{\partial x} + \dots + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial x} + \nu \frac{\partial N}{\partial x} + \dots,$$

которая выражает результирующую силу по направлению линии x ; в случае равновесия эта величина, как мы видели в пункте 3**), должна равняться нулю.

*) Это важное положение обладает такой же общностью, как и принцип виртуальных скоростей, а для применения оно зачастую бывает даже более удобным. Лагранж вывел его путем анализа своей формулы равновесия, однако позднее Пуансо дал прямое доказательство этого положения, основанное на элементарных принципах статики (См. Journal de l'École Polytechnique, XIII Cahier, т. VI).

Прим. Бертрана.

**) Эта сумма, нечисленная по отношению к тем точкам, в которых должна быть приложена одна из результирующих, должна дать составляющие этой результирующей. Для других точек ее следует приравнять нулю. Надо отметить, что эта задача может оказаться невозможной или неопределенной. Прим. Бертрана.

§ II. Применение того же метода к формуле равновесия сплошных тел, все точки которых находятся под действием каких-либо сил.

9. До сих пор мы рассматривали тела как точки и видели, как определяются законы равновесия этих точек, в каком бы числе последние ни были взяты и какие бы силы на них ни действовали. Но так как тело любого объема и любой формы представляет собою не что иное, как совокупность бесчисленного множества материальных частей или точек, то ясно, что путем применения наложенных выше принципов можно определить и законы равновесия тел любой формы.

В самом деле, обычный прием разрешения механических задач, касающихся тел с конечной массой, заключается в том, что сначала рассматривают лишь некоторое определенное количество точек, расположенных друг от друга на конечных расстояниях, и определяют законы их равновесия или их движения; затем это исследование распространяют на неопределенное количество точек; наконец, делают допущение, что число точек становится бесконечно большим и что одновременно расстояния между точками становятся бесконечно малыми, и в формулах, найденных для конечного числа точек, производят преобразования и изменения, которых требует переход от конечного к бесконечному.

Этот прием, как видим, аналогичен тем геометрическим и аналитическим методам, которые предшествовали исчислению бесконечно малых; и если это последнее исчисление имеет преимущество, заключающееся в том, что оно в поразительной степени облегчает и упрощает разрешение задач, касающихся кривых, то оно обязано своим преимуществом только тому обстоятельству, что рассматривает линии в том виде, как они существуют, не испытывая необходимости в том, чтобы сначала рассматривать их как многоугольники, а затем уже как кривые линии. Примерно такое же преимущество создается у нас, если мы будем трактовать интересующие нас проблемы механики, пользуясь прямыми путями, и если мы будем непосредственно рассматривать тела конечной массы, как соединения бесконечно большого числа точек или частиц, из которых каждая находится под действием заданных сил. Нет ничего легче, чем видоизменить и упростить для подобного исследования тот общий метод, который был нами изложен выше.

10. Необходимо, однако, отметить, что при применении этого метода к телам конечной массы, все точки которых находятся под действием каких-либо сил, естественным образом получается два вида дифференциалов, которые следует различать. Одни дифференциалы относятся к различным точкам, из которых образуется тело; другие совершенно не зависят от взаимного положения этих точек, они выражают только те бесконечно малые отрезки пространства, которые каждая точка может пройти, если допустить, что положение тела бесконечно мало изменяется. До сих пор мы рассматривали только дифференциалы последнего вида и мы их обозначали обычным символом d , но так как теперь нам придется иметь дело одновременно с двумя видами дифференциалов, и, следовательно, необходимо будет ввести еще один новый символ, то представляется целесообразным старый символ применять для обозначения дифференциалов первого вида, которые аналогичны дифференциалам, рассматриваемым обычно в геометрии, а дифференциалы второго вида, которые пренебрежимо малы для рассматриваемого нами материала, обозначать с помощью символа δ , применяемого в вариационном исчислении, с которым нынешнее наше исчисление находится в тесной и необходимой связи.

В силу изложенного соображения мы назовем *вариациями* те дифференциалы, которые будут снабжены символом δ , и сохраним название *дифференциалов* для тех величин, которые будут обозначаться с помощью символа d . Впрочем, те же самые формулы, какие дают обыкновенные дифференциалы, дадут и вариации, если только вместо символа d поставим символ δ .

11. Отмечу еще, что данную массу мы не будем рассматривать как собрание бесконечно большого числа точек, расположенных рядом; следуя духу исключения бесконечно малых, представляется более целесообразным рассматривать ее как составленную из бесконечно малых элементов, обладающих теми же измерениями, как и вся масса; таким образом для того, чтобы получить силы, действующие на каждый из этих элементов, следует помножить на эти элементы силы $P, Q, R, \dots$, которые согласно предположению приложены к каждой точке этих элементов и которые мы будем рассматривать как силы ускоряющие, аналогичные силам, получающимся вследствие действия тяжести.

Итак, если мы назовем всю массу тела m , а массу одного из его элементов dm , то мы получим выражения $P dm, Q dm, R dm, \dots$ для сил, действующих на элемент dm по направлению линий $p, q, r, \dots$. Умножив эти силы на соответствующие вариации $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$, мы получим их моменты, сумма которых для каждого элемента dm выразится с помощью формулы

$$(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) dm;$$

для того чтобы получить сумму моментов всех сил системы, придется только эту формулу проинтегрировать по всей заданной массе.

Эти полные интегралы, т. е. интегралы, относящиеся к объему всей массы, мы будем обозначать с помощью символа S , сохраняя обычный символ $\int$ для обозначения частных или неопределенных интегралов.

12. Итак, для суммы моментов всех сил системы мы имеем интегральную формулу

$$S(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) dm;$$

и эта величина должна быть вообще равна нулю при состоянии равновесия системы.

Так как в зависимости от природы системы между различными вариациями $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$, относящимися к отдельным точкам массы, обязательно существуют определенные заданные отношения, то вариации следует свести к известному числу независимых и неопределенных вариаций; а если затем члены, умножающиеся на эти последние вариации, приравнять нулю, то мы получим частные уравнения равновесия. Но так как этот процесс исключения может оказаться неисчерпываемым, то представляется целесообразным его избежать, пользуясь методом множителей, изложенным нами в предыдущем параграфе.

13. Для применения этого метода к рассматриваемому нами случаю, допустим, что

$$L = 0, \quad M = 0, \dots$$

представляют собою условные уравнения, которые в соответствии с природою задачи должны иметь место по отношению к каждой точке массы. Эти уравнения мы назовем *неопределенными условными уравнениями*.

Величины $L, M, \dots$ будут здесь представлять собою конечные функции координат x, y, z , соответствующих каждой точке заданной массы, а также их дифференциалов любого порядка.

Если эти уравнения продифференцировать согласно определению символа δ , мы получим следующие уравнения

$$\delta L = 0, \quad \delta M = 0, \dots$$

Умножив величины $\delta L, \delta M, \dots$ на неопределенные величины $\lambda, \mu, \dots$, возьмем полный интеграл, который, следовательно, будет представлен формулой

$$S(\lambda \delta L + \mu \delta M + \dots),$$

прибавив этот интеграл к интегралу, выведенному в предыдущем пункте, мы получим общее уравнение равновесия.

Отметим, что нет необходимости в том, чтобы $\delta L, \delta M, \dots$ были полными вариациями функций $x, y, z, dx, dy, \dots$; достаточно, чтобы $\delta L = 0, \delta M = 0, \dots$ были неопределенными условными уравнениями между вариациями $x, y, z, dx, dy, \dots$ (пункт 2).

Следует, однако, иметь в виду, что помимо сил, действующих вообще на все точки массы, могут существовать и такие силы, которые действуют лишь на некоторые определенные точки этой массы; обычно такими точками являются точки, находящиеся на границах рассматриваемой массы, т. е. точки, соответствующие началу и концу интеграла, обозначенного нами символом S .

Точно так же для этих точек могут существовать особые условные уравнения, которые мы назовем *определенными* условными уравнениями. Для того чтобы отличить их от тех уравнений, которые имеют силу вообще для всего объема массы, мы их выразим с помощью

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \dots$$

или еще лучше, через

$$\delta A = 0, \quad \delta B = 0, \quad \delta C = 0, \dots *).$$

Далее, мы будем отмечать с помощью одного, двух, трех и т. д. штрихов все величины, относящиеся к определенным точкам массы и в частности с помощью одного штриха мы будем отмечать те величины, которые относятся к началу интеграла, обозначенного через S , с помощью двух штрихов — величины, относящиеся к концу этого интеграла, с помощью трех или большего числа штрихов — величины, относящиеся к любым промежуточным точкам.

Таким образом к интегралу

$$S(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) dm$$

следует прибавить величину

$$P' \delta p' + Q' \delta q' + R' \delta r' + \dots + P'' \delta p'' + Q'' \delta q'' + R'' \delta r'' + \dots,$$

а к интегралу

$$S(\lambda \delta L + \mu \delta M + \dots)$$

величину

$$\alpha \delta A + \beta \delta B + \gamma \delta C + \dots$$

*) Анализ Лагранжа представляется явно неполным; повидимому, знаменитый автор имел в виду только такие тела, элементы которых могут быть расположены в линейном порядке. Так, например, в случае системы трех измерений могут быть даны условия, относящиеся к каждому элементу поверхности, ограничивающей систему, или же любой иной поверхности, расположенной внутри системы; могут также существовать другие условия, относящиеся ко всем точкам некоторых линий, а не только к определенным изолированным точкам, взятым на поверхности или внутри тела.

В результате этого общее уравнение равновесия получит следующий вид:

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots)dm + S(\lambda\delta L + \mu\delta M + \dots) + P'\delta p' + \\ + Q'\delta q' + R'\delta r' + \dots + P''\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + \dots + \alpha\delta A + \\ + \beta\delta B + \gamma\delta C + \dots = 0.$$

14. Так как функции $L, M, \dots$ могут содержать не только конечные переменные x, y, z , но еще и их дифференциалы, то вариации $\delta L, \delta M, \dots$ дадут члены, умноженные на $\delta x, \delta y, \delta z, \delta dx, \delta dy, \dots$, а указанное только что уравнение, если в нем подставить значения $\delta p, \delta q, \delta r, \dots, \delta L, \delta M, \dots$, выраженные через $\delta x, \delta y, \delta z, \delta dx, \delta dy, \delta dz, \dots$, а также значения $\delta p', \delta p'', \dots, \delta q', \delta q'', \dots, \delta A, \delta B, \dots$, выраженные через $\delta x', \delta x'', \delta y', \delta y'', \dots, \delta dx', \delta dx'', \dots$, выведенные из особых условий каждой задачи, — всегда будут иметь вид, аналогичный тем уравнениям, которые вариационное исчисление дает для определения максимумов и минимумов неопределенных интегралов. Следовательно, по отношению к ним останется только применить известные правила этого исчисления.

Итак, следует иметь в виду, что символы d и δ обозначают два различных, совершенно независимых друг от друга, вида дифференциалов, поэтому в том случае, когда эти символы встречаются вместе, должно быть совершенно безразлично, в каком порядке они стоят: ведь если мы допустим, что какая-либо величина варьируется двумя различными способами, то мы всегда получим один и тот же результат, в каком бы порядке эти вариации ни происходили. Таким образом δdx представляет собою то же самое, что $d\delta x$, и аналогично δd^2x — то же, что $d^2\delta x$, и так далее. Следовательно, мы всегда по желанию можем изменить порядок этих символов, не изменяя значения дифференциалов; для нашей задачи представляется уместным ставить символ d перед δ с тем, чтобы данное уравнение содержало только вариации координат и дифференциалы этих же вариаций.

То же самое следует сказать и об отношении знаков интегрирования $\int$ или S к символу варьирования δ . Символы $\delta \int$ или δS можно, следовательно, всегда заменить символами $\int \delta$ или $S\delta$.

В этом заключается первый основной принцип вариационного исчисления.

15. Дифференциалы $d\delta x, d\delta y, d\delta z, d^2\delta x, \dots$, находящиеся под знаком S , могут быть исключены с помощью операции, известной под названием интегрирования по частям, так как вообще

$$\int \Omega d\delta x = \Omega \delta x - \int \delta x d\Omega, \quad \int \Omega d^2\delta x = \Omega d\delta x - d\Omega \delta x + \int \delta x d^2\Omega,$$

и так далее; при этом следует иметь в виду, что величины, стоящие вне знака $\int$, относятся, конечно, к верхним пределам интеграла; для того чтобы эти интегралы сделать полными, следует обязательно вычесть те значения этих же величин, стоящих вне знака интегрирования, которые соответствуют нижним пределам интегрирования, что очевидно следует из теории интегрирования.

Итак, если мы будем отмечать одним штрихом величины, относящиеся к началу полных интегралов, обозначенных через S , и двумя штрихами —

величины, относящиеся к началу этих интегралов, мы получим следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} \int \Omega d \delta x &= \Omega'' \delta x' - \Omega' \delta x'' - \int \delta x d \Omega, \\ \int \Omega d^2 \delta x &= \Omega'' d \delta x' - d \Omega' \delta x'' - \Omega' d \delta x' + d \Omega' \delta x' + \int \delta x d^2 \Omega, \\ &\dots \end{aligned}$$

которые послужат для того, чтобы освободиться от всех дифференциалов вариаций, которые могут находиться под знаком $\int$. Это преобразование составляет второй основной принцип *вариационного исчисления*.

16. Итак, указанным путем общее уравнение равновесия будет приведено к следующему виду:

$$\int (\Xi \delta x + \Sigma \delta y + \Psi \delta z) + \Lambda = 0,$$

где Ξ , Σ , Ψ являются функциями от x , y , z и их дифференциалов, а Λ содержит в себе члены, в состав которых входят вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta x''$, $\delta y''$, ... и их дифференциалы.

Для того чтобы это уравнение оставалось в силе независимо от вариаций различных координат, необходимо: 1) чтобы величины Ξ , Σ , Ψ были равны нулю по всему объему, на который распространяется интеграл $\int$, т. е. в любой точке рассматриваемой массы и 2) чтобы каждый член величины Λ тоже был равен нулю.

Неопределенные уравнения

$$\Xi = 0, \quad \Sigma = 0, \quad \Psi = 0,$$

вообще говоря, дадут условия, которые должны существовать между переменными x , y , z , но для этой цели следует исключить неопределенные переменные λ , μ , ..., которых будет столько же, сколько будет неопределенных условных уравнений (п. 13)

$$L = 0, \quad M = 0, \dots$$

Отметим, однако, что число этих уравнений не должно быть больше трех; так как они являются неопределенными уравнениями между тремя переменными x , y , z и их дифференциалами, то ясно, что если бы их было больше трех, то у нас было бы больше уравнений, чем переменных величин; в таком случае четвертое уравнение было бы необходимым следствием первых трех уравнений. Совершенно то же можно сказать и о других избыточных уравнениях. Итак, нам никогда не придется исключать больше, чем три неопределенных величины λ , μ , ν , так что мы всегда будем иметь возможность найти значения этих неопределенных величин в функциях x , y , z . Однако уравнения, которые будут исчезать благодаря этим исключениям, будут замещаться самими условными уравнениями, и таким образом мы всегда получим возможность определить те значения x , y , z , какие должны иметь место, когда вся система находится в равновесии.

Правда, условные уравнения $L = 0$, $M = 0$, ... могут содержать еще и другие переменные u , v , ... и их дифференциалы, которые должны быть исключены с помощью других уравнений, например,

$$U = 0, \quad V = 0, \dots;$$

с этими новыми условными уравнениями можно будет поступить совершенно так же, как с уравнениями, вытекающими из природы задачи. А именно,

нам следует лишь, взяв неопределенные коэффициенты $\sigma, \nu, \dots$, к членам

$$\lambda \delta L + \mu \delta M + \dots,$$

находящимся под знаком интегрирования в общем уравнении пункта 13, прибавить члены

$$\sigma \delta U + \nu \delta V + \dots,$$

и после того, как мы уничтожим все дифференциалы вариаций $\delta x, \delta y, \delta z, \delta u, \delta v, \dots$, окончательное уравнение пункта 13 будет содержать в себе под знаком интеграла члены, в состав которых будут входить вариации $\delta \lambda, \delta \mu, \dots$ и которые, следовательно, должны будут поровну равняться нулю. Таким образом мы получим столько новых уравнений, сколько у нас будет неопределенных величин $\sigma, \nu, \dots$, подлежащих исключению с их помощью. После этого мы исключим новые переменные $u, v, \dots$ с помощью заданных уравнений $U=0, V=0, \dots$. Этот метод будет всегда полезен, когда в функциях $L, M, \dots$ будут находиться интегральные величины; в самом деле, если вместо последних ввести новые неопределенные величины, можно этим путем добиться исчезновения всех знаков интегрирования и тем сильно облегчить расчет.

17. Что касается других уравнений, получающихся из различных членов величины Δ , находящейся вне знака суммы, то они будут представлять собою частные уравнения, которые должны иметь силу по отношению к определенным точкам массы и которые будут служить главным образом для определения произвольных постоянных, могущих содержаться в выражениях x, y, z , выведенных из предыдущих уравнений. Для того чтобы использовать эти уравнения, в них следует поставить найденные уже значения $\lambda, \mu, \dots$, затем исключить неопределенные величины $\alpha, \beta, \dots$ и присоединить к ним условные уравнения $A=0, B=0, \dots$, которые послужат для замещения уравнений, исчезнувших в процессе описанного выше исключения.

18. Члены $P \delta p, Q \delta q, \dots$, обязанные своим происхождением ускоряющим силам $P, Q, \dots$, не требуют никакого приведения, поскольку эти силы действуют по линиям $p, q, \dots$, ибо величины $p, q, \dots$ являются только функциями конечных переменных x, y, z . Иначе обстоит дело в том случае, когда пользуются силами, действие которых сводится к тому, что они заставляют варьировать заданную функцию (отд. II, п. 9); в этом случае, если данная функция содержит дифференциалы, следует для этих членов выполнить те же приведения, что и для членов $\lambda \delta L, \dots$; при этом всегда получается окончательное уравнение того же вида. Этот случай имеет место при рассмотрении упругих тел как твердых, так и жидких.

§ III. Аналогии между рассматриваемыми проблемами и проблемами максимума и минимума.

19. Вариационное исчисление не только находит одинаковое применение в проблемах равновесия сплошных тел и в проблемах о *максимумах и минимумах* интегральных выражений, но оно дает возможность установить между этими двумя видами проблем замечательную аналогию, которую ниже мы и изложим.

Мы начнем с того, что дадим общую формулу для вариации любой дифференциальной функции многих переменных.

Известно, что в функциях нескольких переменных и их дифференциалов порядка выше первого всегда можно один из первых дифференциалов принять

в качестве постоянной величины, что упрощает функцию, несколько не уменьшая ее общности; но тогда при дифференцировании в смысле символа δ следует рассматривать в качестве постоянной и ту переменную, дифференциал которой был принят в качестве постоянной; если же желают сообщить вариации всем переменным, следует восстановить изменчивость дифференциала, который был принят в качестве постоянной.

20. Пусть U — функция от $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$, где dx принят в качестве постоянной величины. Если положить, как в теории функций,

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \frac{dy''}{dx} = y''', \dots,$$

то величина U станет функцией от $x, y, x', y', \dots$, и вариация δU , если применить обозначение частных дифференциалов, будет иметь следующий вид:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial U}{\partial y''} \delta y'' + \dots$$

Теперь, если все величины подвергнуть вариации, получится

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{\delta dx}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - y' \frac{\delta dx}{dx} = \frac{\delta(dy + y' \delta x)}{dx} + y'' \delta x,$$

$$\delta y'' = \frac{\delta(\delta y' - y'' \delta x)}{dx} + y''' \delta x = \frac{\delta^2(dy - y' \delta x)}{dx^2} + y''' \delta x,$$

$$\delta y''' = \frac{\delta^3(dy - y' \delta x)}{dx^3} + y^{IV} \delta x,$$

.

Если эти величины подставить и для сокращения письма положить

$$\delta y - y' \delta x = \delta u$$

и, следовательно,

$$\delta y = \delta u + y' \delta x,$$

то мы получим

$$\begin{aligned} \delta U = & \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \frac{\partial U}{\partial y''} y''' + \dots \right) \delta x + \\ & + \frac{\partial U}{\partial y} \delta u + \frac{\partial U}{\partial y'} \frac{\delta u}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y''} \frac{\delta^2 u}{dx^2} + \dots \end{aligned}$$

Но если мы продифференцируем величину U в смысле символа d и подставим $y' dx$ вместо dy и $y'' dx$ вместо dy' , мы будем иметь

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \frac{\partial U}{\partial y''} y''' + \dots \right) dx,$$

откуда следует

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \dots = \frac{dU}{dx}.$$

И далее

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta u + \frac{\partial U}{\partial y'} \frac{\delta u}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y''} \frac{\delta^2 u}{dx^2} + \dots$$

Если величина U содержит еще другую переменную z и ее дифференциалы $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots$, то, положив $\frac{dz}{dx} = z', \frac{d^2z}{dx^2} = z'', \dots$ и постуная

совершенно так же, как и выше, мы получим следующие члены:

$$\frac{\partial U}{\partial z} \delta v + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{d \delta v}{dz} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{d^2 \delta v}{dz^2} + \dots,$$

где

$$\delta v = \delta z - z' \delta x;$$

эти члены мы прибавим к приведенному выше значению δU , и так далее.

21. Если интегральная функция $\int U dx$ должна стать максимумом или минимумом, то согласно правилам вариационного исчисления следует положить

$$\delta \int U dx = \int \delta (U dx) = \int (\delta U dx + U \delta dx) = 0.$$

Если сюда подставить значение δU , заменить δdx через $d \delta x$, и путем интегрирования по частям избавиться от дифференциалов δx , δu , δv , то под знаком интеграла останутся только члены вида

$$(\Xi \delta x + \Upsilon \delta u + \Psi \delta v) dx,$$

в которых

$$\Xi = dU - dU = 0,$$

$$\Upsilon = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U}{\partial y''} - \dots,$$

$$\Psi = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial z'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U}{\partial z''} - \dots$$

Эти члены должны равняться нулю, каковы бы ни были вариации δx , δy , δz ; но если вместо δu и δv снова подставить их значения $\delta y - y' \delta x$, $\delta z - z' \delta x$, то в силу равенства $\Xi = 0$ рассматриваемые члены примут следующий вид:

$$[\Upsilon \delta y + \Psi \delta z - (\Upsilon y' + \Psi z') \delta x] dx,$$

откуда получается только два уравнения

$$\Upsilon = 0, \quad \Psi = 0;$$

третье же уравнение, зависящее от вариации δx , содержится в этих двух уравнениях.

Отсюда мы видим, что можно избавиться от необходимости сообщать вариацию и переменной x , дифференциал которой в функции U был принят в качестве постоянного, так как уравнения, необходимые для разрешения заданной задачи, вытекают уже из вариаций других переменных. Это обстоятельство было уже отмечено при возникновении вариационного исчисления и оно является необходимым следствием этого исчисления.

Но может оказаться полезным рассмотреть одновременно все вариации по отношению к пределам интеграла, так как из каждой вариации могут вытечь особые условия для точек, соответствующих этим пределам, — как это было показано нами в последней лекции по исчислению функций.

22. Интегральная функция, максимум или минимум которой определяется, может содержать в себе и другие интегралы; какова бы, однако, она ни была, ее всегда можно преобразовать таким образом, чтобы она содержала только конечные переменные и их дифференциалы и зависела только от одного или нескольких условных уравнений между теми же

переменными, которым всегда можно удовлетворить с помощью метода множителей.

Предположим, например, что U является функцией от x, y, z и их дифференциалов и что в то же время переменная z зависит от условного уравнения $L=0$. Продифференцировав это уравнение в смысле символа δ , мы получим $\delta L=0$. Теперь нам остается только помножить это уравнение на неопределенный коэффициент λ , или для однородности — поскольку L является конечной функцией — на λdx , прибавить интегральное уравнение $\int \lambda \delta L x = 0$ к уравнению максимума или минимума $\delta \int U dx = 0$ и затем рассматривать вариации $\delta x, \delta y, \delta z$ как независимые. Но если L рассматривать как функцию $x, y, y', y'', \dots, z, z', z'', \dots$, то

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial L}{\partial z'} \delta z' + \dots$$

Если подобные же подстановки мы сделаем для $\delta y', \delta z', \delta y'', \dots$, то мы получим

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \delta u + \frac{\partial L}{\partial z} \delta v + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{d \delta u}{dx} + \frac{\partial L}{\partial z'} \frac{d \delta v}{dx} + \dots;$$

члены, стоящие под знаком интеграла, имеющие источником своего происхождения уравнение

$$\int (\delta U dx + \lambda \delta L dx) = 0,$$

примут следующий вид:

$$(\Xi \delta x + \Upsilon \delta u + \Psi \delta v) dx,$$

где

$$\Xi = \lambda \delta L,$$

$$\Upsilon = \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial U}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y''} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \dots \right] dx,$$

$$\Psi = \left[\frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial U}{\partial z'} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z''} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z''} \right) - \dots \right] dx.$$

Но из условного уравнения $L=0$ следует $\delta L=0$, что дает нам $\Xi=0$. Точно так же, если мы приравняем нулю коэффициенты трех вариаций $\delta x, \delta y, \delta z$, мы получим только два уравнения

$$\Upsilon = 0, \quad \Psi = 0,$$

из которых одно послужит для исключения неопределенной величины λ ; таким образом для разрешения данной задачи остается только одно уравнение относительно x, y, z , которое следует скомбинировать с заданным уравнением $L=0$.

23. Так как для случая, когда dx принят в качестве постоянной величины

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \quad z'' = \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots,$$

мы видим, что достаточно в функциях $U, L, \dots$ варьировать переменные $y, z, \dots$ и их дифференциалы; тогда, применяя вместе с символом δ обозначение частных дифференциалов, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \delta U = & \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial dy} d \delta y + \frac{\partial U}{\partial d^2 y} d^2 \delta y + \dots + \\ & + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z + \frac{\partial U}{\partial dz} d \delta z + \frac{\partial U}{\partial d^2 z} d^2 \delta z + \dots \end{aligned}$$

Так как масса dm каждой частицы системы не должна варьироваться в то время, когда варьируется положение системы, следует *) допустить, что $\delta dm = 0$, и, следовательно, что $\delta L = \delta dm$ [15].

Когда система лишена, мы имеем вообще $dm = U dx$, где U — функция, аналогичная указанной в пункте 20; таким образом мы будем иметь

$$\delta L = \delta U dx + U \delta x$$

и формула $\int \lambda \delta L$ даст под знаком интеграла следующие члены

$$(\Xi \delta x + \Upsilon \delta u + \Psi \delta v) dx,$$

в которых (п. 22)

$$\Xi = \lambda \frac{dU}{dx} - \frac{d}{dx} (\lambda U),$$

$$\Upsilon = \lambda \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial y''} \right) - \dots,$$

$$\Psi = \lambda \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial z'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial z''} \right) - \dots$$

26. Итак, если никаких других условий не существует, то уравнение, получающееся от членов, находящихся под знаком $\int$, имеет следующий вид:

$$\delta \Pi dm + (\Xi \delta x + \Upsilon \delta u + \Psi \delta v) dx = 0;$$

это уравнение должно выполняться отдельно для каждого из переменных δx , δy , δz .

Но так как Π является функцией от x , y , z , мы имеем

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \delta z;$$

а так как

$$\delta u = \delta y - \frac{dy}{dx} \delta x, \quad \delta v = \delta z - \frac{dz}{dx} \delta x,$$

то предыдущее уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dm + \Xi dx - \Upsilon dy - \Psi dz \right) \delta x + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} dm + \Upsilon dx \right) \delta y + \\ + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} dm + \Psi dx \right) \delta z = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаются три уравнения:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dm + \Xi dx - \Upsilon dy - \Psi dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} dm + \Upsilon dx = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} dm + \Psi dx = 0.$$

Таким образом здесь мы имеем столько же уравнений, сколько существует неизвестных; в этом заключается различие между этого рода задачами механики и задачами на *максимумы и минимумы*.

*) Другими словами, первое условие относительно любой точки системы заключается в том, что масса каждой частицы остается при всех возможных смещениях неизменной.

27. Далее я прежде всего считаю необходимым отметить, что при исключении неопределенной величины λ приведенные три уравнения сведутся к двум, и хотя вообще условные уравнения всегда замещают собою уравнения, выпадающие вследствие исключения неопределенных величин, однако введенное здесь условие $\delta dm = 0$, т. е. условие постоянства dm , не может нам дать особого управления для решения задачи, так как согласно духу дифференциального исчисления мы всегда можем какой-либо элемент избрать в качестве постоянного; ведь, собственно говоря, в данном случае объектом исчисления являются взаимные отношения между дифференциалами, а не сами по себе отдельные дифференциалы. Таким образом эти три уравнения сведутся к двум, и, как в задачах на *максимумы и минимумы*, они послужат только для определения природы кривой.

28. Отмечу, далее, что рассматриваемые здесь проблемы статик можно также свести к простым проблемам о *максимумах и минимумах*.

В самом деле, если сложить все три найденных выше уравнения, помножив предварительно первое из них на dx , второе на dy , и третье на dz , то в силу

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = d\Pi,$$

мы получим уравнение

$$d\Pi dm + E dx^2 = 0.$$

Но мы имеем

$$E dx = \lambda dU - d\lambda U = -U d\lambda,$$

и так как $dm = U dx$, то, разделив на dm , мы получим $d\Pi - d\lambda = 0$, откуда следует

$$\lambda = \Pi + a,$$

где a — произвольная постоянная.

Так как $\delta L = \delta dm$, то член $\lambda \delta L$ в уравнении пункта 25 примет следующий вид:

$$\Pi \delta dm + a \delta dm,$$

а так как $\delta \Pi dm + \Pi \delta dm = \delta (\Pi dm)$, то это уравнение напишется следующим образом:

$$\S \delta (\Pi dm) + a \S \delta dm = 0,$$

т. е.

$$\delta \S \Pi dm + a \delta \S dm = 0;$$

это уравнение необходимо должно иметь место для того, чтобы интегральное выражение $\S \Pi dm$ стало максимумом или минимумом среди всех тех значений, при которых выражение $\S dm$ будет иметь одно и то же значение.

Указанным путем можно, как и в вопросах о *максимумах и минимумах*, одну из переменных рассматривать как величину постоянную по отношению к вариациям δ , благодаря чему анализ упрощается. Однако общий метод обладает тем преимуществом, что он дает значение коэффициента λ , выражающего *) согласно теории, изложенной в предыдущем отделе, ту силу, с какою элемент dm противостоит действию сил $P, Q, R, \dots$, приложенных к системе.

*) См. по этому поводу пункт 6 отд. IV и примечание к пункту 9 отд. II (стр. 34). Прим. Бертрана.

29. Мы допустили для простоты, что имеется только одно условное выражение; но если бы сверх того существовало уравнение $M=0$, где M — функция $x, y, z, y', y'', \dots, z', z'', \dots$, следовало бы под знаком интеграла в уравнении равновесия к члену $\lambda \delta L$ прибавить еще выражение $\mu \delta M$ или лучше для однородности $\mu \delta M dx$; вследствие этого к значениям E, Y, Ψ пункта 25 прибавились бы соответствующие величины

$$\mu \frac{\partial M}{\partial x},$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{\partial M}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\mu \frac{\partial M}{\partial y''} \right) - \dots,$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{\partial M}{\partial z'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\mu \frac{\partial M}{\partial z''} \right) - \dots$$

Таким образом мы получим три уравнения того же вида, что и в пункте 26, которые в результате исключения λ и μ сведутся к одному; но если к последнему присоединить условное уравнение $M=0$, то получится, как и раньше, два уравнения для трех переменных x, y, z .

Эти три уравнения дают, как и в пункте 28, уравнение

$$d\Pi dm + E dx^2 = 0.$$

Здесь мы имеем

$$E dx = -U d\lambda + \mu dM;$$

но уравнение $M=0$ дает $dM=0$; таким образом, как и в упомянутой выше статье, мы имеем просто

$$E dx = -U d\lambda;$$

отсюда мы получаем

$$\delta S \Pi dm + a \delta dm = 0.$$

30. Таким образом проблема равновесия системы частиц dm , находящихся под действием сил $P, Q, R, \dots$, направленных по линиям $p, q, r, \dots$ и обладающих тем свойством, что

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = d\Pi$$

сводится просто к задаче превращения интегрального выражения $S \Pi dm$ в максимум или минимум, причем сверх того должны быть приняты во внимание особые условия системы; как видим, благодаря этому все проблемы равновесия попадают в группу проблем о *максимумах и минимумах*, известную под названием *изопериметрических проблем*.

В случае цепи, если допустить, что ординаты y направлены вертикально, мы имеем $\Pi = gy$, где g — постоянная сила тяжести. Таким образом в данном случае выражение $S y dm$ должно быть максимумом или минимумом среди всех тех, для которых значение $S dm$ остается неизменным;

но $\frac{S y dm}{S dm}$ представляет собою расстояние центра тяжести от горизонтальной плоскости; следовательно, поскольку вся масса по предположению дана, это расстояние должно быть наибольшим или наименьшим, что, впрочем, было известно и раньше.

31. До сих пор мы рассматривали только функции таких переменных, которые мы считали независимыми друг от друга; но если рассматривать x как функцию y и z и если существует функция U , зависящая от x, y, z и от частных дифференциалов z по x и y , то может возникнуть вопрос.

об определении вариации δU — с тем, чтобы принять в расчет и одновременные вариации x, y, z .

Пусть для простоты

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'',$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z''''', \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z_{xyx}'', \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z_{xyy}''', \dots$$

Величина U будет тогда функцией $x, y, z, z', z'', z''', z_{xy}', z_{yy}'', \dots$, и мы будем иметь

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z + \frac{\partial U}{\partial z'} \delta z' + \frac{\partial U}{\partial z''} \delta z'' + \frac{\partial U}{\partial z'''} \delta z''' + \frac{\partial U}{\partial z_{xy}'} \delta z_{xy}' + \dots,$$

всю трудность сведется тогда к тому, чтобы найти значения вариаций $\delta z', \delta z'', \delta z'''$, если в частных дифференциалах подвергнуть одновременному варьированию элементы dx и dy .

Для упрощения расчета мы можем допустить, что вариация δx является функцией x , независимой от y , а вариация δy является функцией y , независимой от x . В дальнейшем мы увидим, что это допущение обладает всей той общностью, какой только можно пожелать *).

*) Здесь имеется одно положение, которое требует некоторых пояснений. При переходе с одной поверхности на другую, бесконечно близко к ней расположенную, можно наверняка добиться такого соответствия, чтобы в каждой точке первой поверхности δx и δy имели такие значения, какие нам желательно. Таким образом, если речь идет об исследовании проблемы максимума или минимума, здесь не возникает никаких неудобств — даже для условий на границах, в чем легко убедиться, если принять, что δx зависит только от x и δy только от y . Однако дальше (отд. V, п. 44) Лагранж применяет формулы пунктов 32—34, выведенные на основе указанного допущения, — к случаю, когда δx и δy выражают любое виртуальное смещение и, следовательно, являются совершенно произвольными функциями x и y . Поэтому представляется необходимым прояснить это несочетание, исходя из предположения, что δx и δy являются любыми вариациями.

Положив

$$\delta z - z' \delta x - z'' \delta y = u, \quad (1)$$

мы имеем

$$du = d \delta z - z' d \delta x - z'' d \delta y - dz' \delta x - dz'' \delta y \quad (2)$$

Напишем уравнение в полных дифференциалах

$$dz = z' dx + z'' dy$$

и продифференцируем его в смысле d . Тогда мы будем иметь

$$d dz = z' d dx + z'' d dy + dz' dx + dz'' dy. \quad (3)$$

Сложим уравнения (2) и (3) и заметим, что порядок символов d и δ можно переставить, благодаря чему исчезнут члены $dz' \delta x$ и $dz'' \delta y$. Мы получим

$$du = dz' dx + dz'' dy - dz' \delta x - dz'' \delta y. \quad (4)$$

В этом уравнении dx и dy могут принять любые возможные значения. Допустим сначала, что

$$dy = 0;$$

тогда мы имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad dz' = z'' dx, \quad dz'' = z_{xy}' dx,$$

и, следовательно, уравнение (4) даст нам следующую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = dz' - z'' \delta x - z_{xy}' \delta y, \quad (5)$$

которая даст возможность определить dz' . Точно так же, положив $dx = 0$, мы найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = dz'' - z_{xy}' \delta x - z_{yy}'' \delta y. \quad (6)$$

32. Исходя из этого допущения, мы путем дифференцирования получаем

$$\delta z' = \delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \delta x}{\partial x}.$$

Ясно, что

$$\frac{\partial \delta z}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \delta x}{\partial x} = \frac{\partial \delta x}{\partial x};$$

таким образом мы имеем

$$\delta z' = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - z' \frac{\partial \delta x}{\partial x} = \frac{\partial (\delta z - z' \delta x)}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x} \delta x,$$

или

$$\delta z' = \frac{\partial (\delta z - z' \delta x - z_1' \delta y)}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z_1'}{\partial x} \delta y.$$

Точно так же мы имеем

$$\delta z_1' = \frac{\partial (\delta z - z' \delta x - z_1' \delta y)}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial y} \delta x + \frac{\partial z_1'}{\partial y} \delta y,$$

в силу того, что

$$\frac{\partial \delta x}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0.$$

Здесь мы имеем перед собою первые две формулы Лагранжа. Так как они применяются к произвольной функции, в ней можно поставить z' вместо z . Тогда значение u выразится через

$$\delta z' - z'' \delta x - z_1'' \delta y,$$

и формулы (5) и (6) нам дадут

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\delta z' - z'' \delta x - z_1'' \delta y) &= \delta z'' - z''' \delta x - z_1'' \delta y, \\ \frac{\partial}{\partial y} (\delta z' - z'' \delta x - z_1'' \delta y) &= \delta z_1'' - z_1''' \delta x - z_{11}'' \delta y. \end{aligned}$$

Для упрощения приведенных формул можно еще воспользоваться уравнениями (5) и (6); тогда мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \delta z'' - z''' \delta x - z_1'' \delta y, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \delta z_1'' - z_1''' \delta x - z_{11}'' \delta y. \end{aligned}$$

К этим отношениям можно очевидно прибавить еще в следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta z_{11}'' - z_{11}''' \delta x - z_{111}'' \delta y;$$

последнее дополнит собою группу уравнений, выведенных Лагранжем на основе принятого им особого допущения и с помощью дифференцирований, которые представляются правильными, но которые, быть может, были им недостаточно подробно объяснены.

Утверждение Лагранжа „в дальнейшем мы увидим, что это допущение обладает всей той общностью, какой только можно пожелать“, относится, повидимому, к другой части исчисления, изложенной в пункте 34 и касающейся вопроса о вариации элемента поверхности $dx \, dy$. Действительно, в том случае, когда δx зависит только от одной переменной x , а δy — от одной переменной y , вариация прямоугольника вычисляется очень легко: в данном случае упомянутый прямоугольник преобразуется в другой прямоугольник со сторонами $dx + \delta dx$ и $dy + \delta dy$ и, следовательно, его вариация получается непосредственно и составляет

$$\delta x \, \delta y + \delta y \, \delta x = dx \, dy \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \right).$$

Исчисление становится более сложным в том случае, когда δx и δy зависят одновременно от обоих переменных x и y . Но это исчисление произведено полностью для случая трех переменных в пунктах 12, 13 и 14 отдела VII, к которым Лагранж несомненно и собрался отослать читателей. *Прим. Дарбу.*

Дальше мы имеем

$$\delta z'' = \delta \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \delta z'}{\partial x} - \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial \delta x}{\partial x}.$$

Подставив сюда значение $\delta z'$, получаем

$$\delta z'' = \frac{\partial^2 (\delta z - z' \delta x - z_f \delta y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z_f}{\partial x^2} \delta y;$$

точно так же мы имеем

$$\delta z_f' = \delta \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial \delta z'}{\partial y} - \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial y}.$$

Если и здесь подставить значение $\delta z'$, мы в силу равенства $\frac{\partial z_f}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial y}$, получим

$$\delta z_f' = \frac{\partial^2 (\delta z - z' \delta x - z_f \delta y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z_f}{\partial x \partial y} \delta y.$$

Аналогично мы находим

$$\delta z_{ff} = \frac{\partial^2 (\delta z - z' \delta x - z_f \delta y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} \delta x + \frac{\partial^2 z_f}{\partial y^2} \delta y$$

и так далее.

33. Итак, если мы положим для сокращения письма

$$\delta z - \frac{\partial z}{\partial x} \delta x - \frac{\partial z}{\partial y} \delta y = \delta u,$$

и примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z'}{\partial y}, & \frac{\partial z'}{\partial y} &= \frac{\partial z_f}{\partial x}, & \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} &= \frac{\partial z''}{\partial x}, & \frac{\partial^2 z_f}{\partial x^2} &= \frac{\partial z''}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial z_f'}{\partial x}, & \frac{\partial^2 z_f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial z_f'}{\partial y}, & \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} &= \frac{\partial z_{ff}}{\partial x}, \dots, \end{aligned}$$

то мы получим более просто

$$\begin{aligned} \delta z' &= \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z_f}{\partial y} \delta y, \\ \delta z_f &= \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial z_f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z_f}{\partial y} \delta y, \\ \delta z'' &= \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial z''}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z''}{\partial y} \delta y, \\ \delta z_f' &= \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z_f'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z_f'}{\partial y} \delta y, \\ \delta z_{ff} &= \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial z_{ff}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z_{ff}}{\partial y} \delta y, \\ &\dots \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в вариацию δU , введя при этом вместо δz выражение

$$\delta u + \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$$

и расположив члены по δx , δy , δu , мы получим

$$\begin{aligned} \delta U &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_f} \frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{\partial z''}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_f'} \frac{\partial z_f'}{\partial x} + \dots \right) \delta x + \\ &+ \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z_f} \frac{\partial z_f}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{\partial z''}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z_f'} \frac{\partial z_f'}{\partial y} + \dots \right) \delta y + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial z} \delta u + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_f} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial z_f'} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + \dots \end{aligned}$$

Обозначим через $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ частные дифференциалы U по отношению к x и y , рассматривая при этом z как функцию этих переменных. Ясно, что тогда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{\partial z''}{\partial x} + \dots,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{\partial z''}{\partial y} + \dots$$

Таким образом полная вариация U сведется к следующему простому виду:

$$\begin{aligned} \delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \\ + \frac{\partial U}{\partial z'''} \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial z'''} \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial z'''} \frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2} + \dots \end{aligned}$$

34. Если необходимо получить максимум или минимум двойного интеграла $\iint U dx dy$, должно быть выполнено следующее условие:

$$\delta \iint U dx dy = \iint \delta(U dx dy) = 0.$$

Но если произвести вариацию всех величин, то

$$\delta(U dx dy) = \delta U dx dy + U \delta(dx dy).$$

Здесь следует иметь в виду, что так как $dx dy$ представляет собою прямоугольник, являющийся элементом плоскости xy , он сохраняет свою форму прямоугольника и после варьирования координат x и y на δx и δy , если только остаться при принятом допущении, что δx совершенно не зависит от y и δy от x . Таким образом вариация $dx dy$ даст просто $dy \delta dx + dx \delta dy$; но так как

$$\delta dx = d\delta x = \frac{d\delta x}{dx} dx, \quad \delta dy = d\delta y = \frac{d\delta y}{dy} dy,$$

поскольку δx и δy рассматриваются соответственно как функции x и y , мы имеем

$$\delta(U dx dy) = \left(\delta U + U \frac{d\delta x}{dx} + U \frac{d\delta y}{dy}\right) dx dy.$$

Если подставить значения δU и путем интегрирования по частям освободиться от дифференциалов вариации δx , δy , δz , то под двойным знаком $\iint$ останутся следующие члены:

$$(\Xi \delta x + \Upsilon \delta y + \Psi \delta z) dx dy,$$

в которых

$$\Xi = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Upsilon = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\Psi = \frac{\partial U}{\partial z} - \left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 U''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 U''}{\partial y^2}\right) - \dots,$$

при этом для сокращения положено

$$\begin{aligned} U' = \frac{\partial U}{\partial z'}, \quad U'' = \frac{\partial U}{\partial z''}, \\ U''' = \frac{\partial U}{\partial z'''}, \quad U'''' = \frac{\partial U}{\partial z''''}, \quad U'''' = \frac{\partial U}{\partial z''''}, \dots \end{aligned}$$

и принято, что частные дифференциалы, заключенные в скобки, выражают полные значения этих дифференциалов — в предположении, что z при дифференцировании рассматривается как функция x и y .

35. Так как $\delta u = \delta z - \frac{\partial z}{\partial x} \delta x - \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$, то выражение под знаком двойного интеграла даст просто следующее уравнение:

$$\Psi \left(\delta z - \frac{\partial z}{\partial x} \delta x - \frac{\partial z}{\partial y} \delta y \right) = 0,$$

откуда, если отдельно приравнять нулю коэффициенты при вариациях δz , δx , δy , получится только одно уравнение $\Psi = 0$, как если бы мы варьировали только одну переменную z .

Итак, мы видим, что в задачах на *максимумы и минимумы*, касающихся двойных интегралов, в которых одна из трех переменных является функцией двух остальных, получается, строго говоря, только одно уравнение, которое может быть получено непосредственно, а именно путем варьирования по δ только той переменной, которую мы признали функцией двух других переменных*). Это уравнение представляет собою уравнение поверхности, удовлетворяющей данной задаче. Таким именно образом и было найдено уравнение в частных дифференциалах минимальной поверхности, причем было положено $U = \sqrt{1 + (z')^2 + (z'')^2}$; из доказанного нами выше следует, что это уравнение полностью удовлетворяет условиям задачи, какие бы вариации мы ни сообщали трем координатам поверхности.

36. Полученные нами выше формулы вариаций могут быть применены к равновесию системы частиц dm , расположенных на поверхности и находящихся под действием каких угодно сил.

Если принять во внимание только неизменность dm , то мы сначала, как и в пункте 25, получим общее уравнение равновесия

$$SS (\delta \Pi dm + \lambda \delta dm) = 0.$$

Для значения dm мы будем здесь иметь выражение вида $U dx dy$, поэтому (п. 34)

$$\delta dm = \left(\delta U + U \frac{\partial \delta x}{\partial x} + U \frac{\partial \delta y}{\partial y} \right) dx dy.$$

Если это выражение, а также выражение для δU , приведенное в пункте 33, подставить в интегральную формулу $SS \lambda \delta dm$ и путем интегрирования по частям освободиться от дифференциалов вариаций δx , δy , δu , то под двойным знаком интеграла останутся лишь следующие члены:

$$(\Sigma \delta x + \Gamma \delta y + \Psi \delta u) dx dy,$$

где

$$\Sigma = \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \lambda U}{\partial x} \right) = -U \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right),$$

$$\Gamma = \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \lambda U}{\partial y} \right) = -U \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right),$$

$$\Psi = \frac{\partial U}{\partial z} - \left(\frac{\partial U'}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} \right) - \dots,$$

*) А priori ясно, что достаточно варьировать z ; ведь каковы бы ни были две бесконечно близкие поверхности, всегда можно перейти с одной на другую, давая z некоторое приращение, которое находится в надлежащей зависимости от двух других координат x и y . Может оказаться более или менее удобным допустить, что последние имеют в соответствующих точках одинаковое значение, или же различные значения, но ясно, что вполне допустимо делать как одно, так и другое предположение.

Прим. Бертраиа.

для $U', U'', U''', \dots$ здесь сохранены значения, указанные в пункте 34.

Если к этому выражению прибавить еще члены, получающиеся от интеграла $\iint \delta \Pi \, dm$, т. е. если подставить значения $\delta \Pi$ и dm

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \delta z \right) U \, dx \, dy$$

и вместо $\delta \Pi$ подставить его значение $\delta z - \frac{\partial z}{\partial x} \delta x - \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$ (п. 33), — то общее уравнение равновесия под знаком двойного интеграла будет содержать следующие члены, расположенные по вариациям δx , δy , δz

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right] U - \Psi \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \\ & + \left[\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \right] U - \Psi \frac{\partial z}{\partial y} \delta y + \\ & + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} U + \Psi \right) \delta z \end{aligned} \right\} dx \, dy;$$

отсюда получаются следующие три уравнения:

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right] U - \Psi \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \right] U - \Psi \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} U + \Psi = 0.$$

Последнее уравнение дает $\Psi = -U \frac{\partial \Pi}{\partial z}$; если это значение подставить в остальные два уравнения, то после разделения на U получается

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $\lambda = \Pi + \text{функция } y$; второе дает $\lambda = \Pi + \text{функция } x$; отсюда следует

$$\lambda = \Pi + a,$$

где a — постоянная величина. Если эту величину подставить в общее уравнение равновесия, то последнее примет следующий вид:

$$\iint [\delta (\Pi \, dm) + a \delta \, dm] = 0,$$

или

$$\delta \iint \Pi \, dm + a \delta \iint dm = 0.$$

Это — уравнение максимума или минимума двойного интеграла $\iint \Pi \, dm$ среди всех тех значений его, при которых значение величины $\iint dm$ остается неизменным.

Таким образом данная проблема механики *) сводится к простой задаче на *максимумы и минимумы*, разрешение которой зависит только от вариации одной переменной z , являющейся согласно допущению функцией x и y (п. 35).

Эту теорию можно распространить и на формулы тройных интегралов и отсюда получить аналогичные выводы.

*) Лагранж не дает полного определения той поверхностной системы частиц, к которой он применяет свой анализ. Если бы речь шла о гибкой и нерастяжимой поверхности, то остались бы неизменными не только элементы поверхности, но и линейные элементы. Лагранж не принимает во внимание неизменяемости линейных элементов, вследствие чего полученные им уравнения не могут дать полного разрешения данной задачи. Этот вопрос был в последнее время снова рассмотрен Лекорню (Lecornu) в *мемуаре Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (Journal de l'École Polytechnique, XLVIII Cahier) и Бельтрами (Beltrami) См. *мемуар Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 4-e série, t. III), в котором Бельтрами разрешил этот вопрос, пользуясь как раз принципом виртуальных скоростей.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

РАЗРЕШЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПРОБЛЕМ СТАТИКИ.

Теперь мы покажем применение наших методов на различных задачах о равновесии тел; по единообразию и быстроте разрешения этих задач можно будет судить о том, насколько эти методы совершеннее тех, какими до сих пор пользовались в статике.

ГЛАВА I.

О РАВНОВЕСИИ НЕСКОЛЬКИХ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ТОЧКЕ, О СЛОЖЕНИИ И РАЗЛОЖЕНИИ СИЛ.

1. Допустим, что требуется найти законы равновесия какого угодно количества сил $P, Q, R, \dots$, которые все приложены к одной и той же точке и направлены к заданным точкам.

Назовем $p, q, r, \dots$ прямолинейные расстояния от общей точки приложения этих сил до соответствующих точек, к которым эти силы направлены; тогда для суммы моментов этих сил мы получим выражение

$$P dp + Q dq + R dr + \dots,$$

которое при состоянии равновесия должно равняться нулю.

Пусть x, y, z — три прямоугольных координаты точки, к которой приложены все силы; и пусть a, b, c — прямоугольные координаты точки, к которой направлена сила P ; f, g, h — координаты точки, к которой направлена сила Q ; l, m, n — координаты точки, к которой направлена сила R , и так далее для других точек, — причем все эти координаты отнесены к одним и тем же неподвижным в пространстве осям. В таком случае мы, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, \\ q &= \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2}, \\ r &= \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и величина $P dp + Q dq + R dr + \dots$ преобразуется в следующую:

$$X dx + Y dy + Z dz,$$

где

$$\begin{aligned} X &= \frac{x-a}{p} P + \frac{x-f}{q} Q + \frac{x-l}{r} R + \dots, \\ Y &= \frac{y-b}{p} P + \frac{y-g}{q} Q + \frac{y-m}{r} R + \dots, \\ Z &= \frac{z-c}{p} P + \frac{z-h}{q} Q + \frac{z-n}{r} R + \dots \end{aligned}$$

Небесполезно отметить, что в последних выражениях величины $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ равны косинусам углов, образуемых линией p , т. е. направлением силы P , с осями x , y и z ; точно также $\frac{x-f}{q}$, $\frac{y-g}{q}$, $\frac{z-h}{q}$ представляют собою косинусы углов, образуемых направлением силы Q с теми же осями, и так далее (отд. II, п. 7).

§ 1. О равновесии тела или точки, находящейся под действием нескольких сил.

2. На основе сделанных выше предположений допустим сначала, что тело или точка, к которой приложены силы $P, Q, R, \dots$, совершенно свободна; в таком случае между координатами x, y, z не существует какого бы то ни было условного уравнения, и величина $Xdx + Ydy + Zdz$ должна равняться нулю независимо от значений dx, dy, dz (отд. II, п. 10). Отсюда тотчас же получается три частных уравнения

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0.$$

Эти уравнения содержат в себе законы равновесия любого количества сил, сходящихся в одной и той же точке.

3. Если в выражениях для X, Y, Z положить $P=p, Q=q, R=r, \dots$, что вполне допустимо, так как безразлично, к каким точкам по нашему предположению силы направлены, если только эти точки лежат на направлениях сил, — то получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x-a+x-f+x-l+\dots &= 0, \\ y-b+y-g+y-m+\dots &= 0, \\ z-c+z-h+z-n+\dots &= 0, \end{aligned}$$

отсюда, если допустить, что вообще число сил $P, Q, R, \dots$, равно μ , следует

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+f+l+\dots}{\mu}, \\ y &= \frac{b+g+m+\dots}{\mu}, \\ z &= \frac{c+h+n+\dots}{\mu}. \end{aligned}$$

Эти выражения для x, y, z показывают, что точка, к которой силы приложены, находится в центре тяжести точек, к которым эти силы направлены.

Отсюда вытекает теорема Лейбница, заключающаяся в следующем: если произвольное количество сил находится в равновесии в какой-либо точке и если из этой точки провести прямые линии, представляющие как величину, так и направление каждой силы, то эта точка является центром тяжести всех тех точек, в которых эти линии заканчиваются.

Таким образом, если имеется только четыре силы и если представить себе пирамиду, четыре угла которой находятся в концах прямых линий, изображающих силы, то между этими четырьмя силами равновесие будет существовать только в том случае, если точка, на которую они действуют, будет центром тяжести пирамиды; в самом деле, из геометрии известно, что центр тяжести каждой пирамиды совпадает с центром тяжести четырех равных по своей массе тел, помещенных в четырех углах пирамиды. Последняя теорема обязана своим происхождением Робервалю.

4. Предположим, теперь, что тело или точка, на которую действуют силы $P, Q, R, \dots$, не является совершенно свободной, но вынуждена двигаться по заданной поверхности или линии; в таком случае будет существовать одно или два условных уравнения между координатами x, y, z , которые будут представлять собою не что иное, как самые уравнения указанной поверхности или линии.

Пусть $L=0$ является уравнением поверхности, по которой тело может только скользить; прибавим к сумме моментов сил $Xdx + Ydy + Zdz$ член λdL (отд. IV, п. 3) и тогда получится общее уравнение равновесия

$$Xdx + Ydy + Zdz + \lambda dL = 0,$$

где λ будет величиной неопределенной.

Но так как L является известной функцией x, y, z , то путем дифференцирования мы получим

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz.$$

Подставив это выражение в общее уравнение и приравняв затем отдельно нулю суммы всех членов, являющихся множителями при каждом из дифференциалов dx, dy, dz , получим три следующих частных уравнения равновесия:

$$X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

из которых после исключения λ получаются следующие два уравнения:

$$Y \frac{\partial L}{\partial x} - X \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad Z \frac{\partial L}{\partial x} - X \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

содержащие в себе искомые условия равновесия тела, вынужденного оставаться на заданной поверхности.

5. Если мы применим здесь теорию, изложенную в пункте 5 отдела IV, то мы приходим к выводу, что поверхность должна оказывать телу сопротивление, равное

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2}$$

и направленное перпендикулярно к поверхности, имеющей своим уравнением $dL=0$, т. е. перпендикулярно к той самой поверхности, на которой тело вынуждено оставаться; а так как

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial x} = -X, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial y} = -Y, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial z} = -Z,$$

то отсюда следует, что давление тела на поверхность (давление, которое должно быть равно и направлено прямо противоположно сопротивлению поверхности) выражается через $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ и направлено перпендикулярно к той же поверхности. К этому условию только и сводятся два уравнения, найденные выше для равновесия тела, в чем легко убедиться, пользуясь методом сложения сил.

6. Впрочем, в случае единственного тела, находящегося под действием заданных сил, условия равновесия могут быть определены еще проще, а именно, если непосредственно в уравнение

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

подставить вместо дифференциала dz его значение

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy}{\frac{\partial L}{\partial z}},$$

выведенное из дифференциального уравнения заданной поверхности, по которой тело может скользить, и приравнять нулю коэффициенты дифференциалов dx и dy , остающихся неопределенными; все это следует из общего метода, изложенного в пункте 10 отдела II.

Таким образом мы сразу получаем два уравнения

$$X - Z \frac{\frac{\partial L}{\partial x}}{\frac{\partial L}{\partial z}} = 0, \quad Y - Z \frac{\frac{\partial L}{\partial y}}{\frac{\partial L}{\partial z}} = 0,$$

совпадающие с уравнениями, найденными нами выше.

Аналогично, если тело подчинено тому условию, что оно должно двигаться по заданной линии, определяемой с помощью двух дифференциальных уравнений $dy = p dx$, $dz = q dx$, то лишь останется подставить эти значения dy и dz в уравнение $X dx + Y dy + Z dz = 0$; после сокращения на dx мы получаем уравнение

$$X + Yp + Zq = 0,$$

которое и представляет собою уравнение равновесия.

Однако во всех случаях, когда рассматривается несколько тел, находящихся в равновесии, изложенный в предыдущем отделе метод неопределенных коэффициентов всегда имеет преимущество, как с точки зрения легкости, так и с точки зрения простоты и однородности исчисления.

§ II. О сложении и разложении сил.

7. Тождественное равенство

$$P dr + Q dq + R dr + \dots = X dx + Y dy + Z dz,$$

установленное в пункте 1, показывает, что система сил $P, Q, R, \dots$, направленных по линиям $p, q, r, \dots$, эквивалентна системе трех сил X, Y, Z , направленных по линиям x, y, z (отд. II, п. 15). Таким образом величины X, Y, Z дают значения сил $P, Q, R, \dots$, разложенных по трем прямоугольным координатам x, y, z и стремящихся укоротить эти координаты, подобно силам $P, Q, R, \dots$, которые согласно допущению стремятся укоротить линии $p, q, r, \dots$.

8. Вообще, если какие-либо силы $P, Q, R, \dots$, направленные по линиям $p, q, r, \dots$, действуют на одну и ту же точку, можно все эти силы всегда свести к трем другим, направленным по линиям ξ, ψ, φ , — при условии, что эти три линии не лежат в одной и той же плоскости. Ввиду того что трех линий, расположенных в различных плоскостях, достаточно для определения положения любой точки в пространстве, значений линий $p, q, r, \dots$ можно всегда выразить в качестве функций трех величин ξ, ψ, φ ; согласно теореме пункта 15 отдела II, силы $P, Q, R, \dots$ будут тогда

эквивалентны*) трем силам E , Ψ , Φ , значения которых выражаются с помощью нижеследующих формул:

$$E = P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + R \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots,$$

$$\Psi = P \frac{\partial p}{\partial \psi} + Q \frac{\partial q}{\partial \psi} + R \frac{\partial r}{\partial \psi} + \dots,$$

$$\Phi = P \frac{\partial p}{\partial \varphi} + Q \frac{\partial q}{\partial \varphi} + R \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \dots$$

и направленных по линиям ξ , ψ , φ или же только по элементам $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, если некоторые из этих линий являются кривыми.

Эти формулы оказываются весьма полезными во многих случаях; особенно, если речь идет о разыскании результата действия бесчисленного множества сил на одну точку, как, например, притяжения точки телом произвольного вида.

9. Пусть m — масса тела, каждый из элементов которого dm рассматривается нами как центр силы P , которая пропорциональна dm и некоторой функции $f(p)$ расстояния p . Если положить $\int f(p) dp = F(p)$, то элемент dm даст в выражении E член $\frac{\partial F(p)}{\partial \xi} dm$, интеграл которого по всей массе m будет результатом притяжения этой массы. Так как это интегрирование является независимым от дифференцирования по ξ , можно указанному интегралу дать и такой вид: $\frac{\partial}{\partial \xi} \int F(p) dm$, так что, положив

$$\int F(p) dm = \Sigma,$$

мы будем иметь

$$E = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi}, \quad \Psi = \frac{\partial \Sigma}{\partial \psi}, \quad \Phi = \frac{\partial \Sigma}{\partial \varphi};$$

далее придется только подставить в функции $F(p)$ вместо p его значение, выраженное в функции координат, определяющих положение в пространстве каждой отдельной частицы dm , и координаты ξ , ψ , φ притягиваемой точки, и затем отдельно произвести интегрирование по отношению к первым и дифференцирование по отношению ко вторым.

В том случае, который дает нам природа, мы имеем $f(p) = \frac{1}{p^2}$; следовательно, $F(p) = -\frac{1}{p}$, а значит $\Sigma = -\int \frac{dm}{p}$.

Пусть a , b , c — координаты любой частицы dm тела; допустив, что плотность этой частицы выражается некоторой функцией Γ координат a , b , c , мы будем иметь

$$dm = \Gamma da db dc;$$

следовательно,

$$\Sigma = -\int \frac{\Gamma da db dc}{p}.$$

Если x , y , z — координаты притягиваемой точки, то (п. 1)

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

*) Мы уже выше отметили, что эта теорема подлежит ограничению. Это же замечание применимо и к выводам, которые здесь делаются из этой теоремы. См. статью Пуансо в конце настоящего тома.

следовательно,

$$\Sigma = -S \frac{\Gamma da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

10. Наиболее простым является тот случай, когда притягивающее тело представляет собою шар. В этом случае, если мы положим $\Gamma = 1$ и поместим центр шара в начале координат x, y, z притягиваемой точки, мы получим

$$\Sigma = -\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

здесь m — масса сферы, которая, как известно, равна $\frac{4\pi a^3}{3}$, где a — радиус шара и π отношение окружности к диаметру.

Если бы плотность Γ внутри шара была переменной, то, рассматривая ее как функцию a , мы имели бы $m = S \Gamma a \frac{4\pi a^2}{3}$.

Можно определить значение Σ еще и в том случае, когда притягивающее тело представляет собою эллиптический сфероид, поверхность которого выражается с помощью формулы

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1,$$

где A, B, C представляют собою полуоси трех главных сечений и a, b, c — прямоугольные координаты точек поверхности, отложенные на осях и имеющие своим началом общую точку пересечения осей, являющуюся центром сфероиды. Однако общее выражение величины Σ зависит от довольно сложного интеграла, с помощью которого невозможно получить Σ в виде функции x, y, z .

Но если допустить, что сфероид мало отличается от сферы, или же что расстояние притягиваемой точки от центра сфероиды очень велико по сравнению с его осями, можно общее значение Σ выразить с помощью сходящегося ряда, свободного от всякого интегрирования. Лаплас в своей *Théorie des attractions des sphéroides**) дал очень красивую формулу, с помощью которой можно последовательно составить все члены ряда; эта формула в то же время показывает, что значение $\frac{\Sigma}{m}$, где m — масса сфероиды, зависит исключительно от $B^2 - A^2$ и $C^2 - A^2$, которые представляют собою квадраты эксцентриситетов двух сечений, проходящих через одну и ту же полуось A .

Я установил, что основываясь на этом выводе, а также пользуясь теоремой, данной мною в *Mémoires de Berlin* за 1792—93**), можно упомянутый ряд получить сразу, а именно, разложив корень

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2by - 2cz + b^2 + c^2}}$$

по степеням b и c и сохранив только члены, содержащие четные степени b и c , преобразовать каждый из них, например $H b^{2m} c^{2n}$, в

$$\frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)] [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] H(B^2 - A^2)^m (C^2 - A^2)^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2m+2n+3)} m,$$

где m — масса сфероиды, которая выражается с помощью $\frac{4\pi}{3} ABC$.

*) См. *Mécanique céleste*, t. II, Livre III, Chap. I et II.

Прим. Бертрана

**) См. *Oeuvres de Lagrange*, t. V., p. 645.

Итак, для того чтобы сразу получить ряд, расположенный по степеням y и z , возьмем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и затем сначала разложим корень $(r^2 - 2by - 2cz + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням y и z ; если мы при этом ограничимся только четными степенями, то мы получим

$$\frac{1}{(r^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2} \frac{b^2 y^2 + c^2 z^2}{(r^2 + b^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5 \cdot 7}{8} \frac{b^4 y^4 + 6b^2 c^2 y^2 z^2 + c^4 z^4}{(r^2 + b^2 + c^2)^{\frac{9}{2}}} + \dots$$

Затем разложим корень $(r^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням b^2 и c^2 и преобразуем эти степени в степени $B^2 - A^2$ и $C^2 - A^2$ с помощью приведенной выше формулы. Если для упрощения положить

$$B^2 - A^2 = e^2, \quad C^2 - A^2 = i^2,$$

где e и i — эксцентриситеты двух эллипсов, образованных сечениями, проходящими через полуоси A , B и A , C , то для Σ получится ряд следующего вида:

$$-m(R + Ty^2 + Vz^2 + Xy^4 + Yy^2z^2 + Zz^4 + \dots),$$

в котором

$$R = \frac{1}{r} - \frac{e^2 + i^2}{2 \cdot 5r^3} + \frac{9(e^4 + i^4) + 6e^2 i^2}{8 \cdot 5 \cdot 7r^5} + \dots,$$

$$T = \frac{3e^2}{2 \cdot 5r^5} - \frac{9e^4 + 3e^2 i^2}{4 \cdot 7r^7} + \dots,$$

$$V = \frac{3i^2}{2 \cdot 5r^5} - \frac{9i^4 + 3e^2 i^2}{4 \cdot 7r^7} + \dots,$$

$$X = \frac{3e^4}{8r^7} + \dots, \quad Y = \frac{6e^2 i^2}{8r^7} + \dots, \quad Z = \frac{3i^4}{8r^7} + \dots, \dots$$

Мы довели здесь приближение только до четвертого измерения e и i , но его легко вести как угодно далеко.

Если бы сфероид был составлен из эллиптических слоев различной плотности, то варьируя в выражении Σ величины A , B , C , а следовательно, также e и i , мы получили бы Σ в качестве значения Σ для этого сфероида.

После того, как значение Σ , таким образом, выражено в функции прямоугольных координат x , y , z притягиваемой точки, мы непосредственно путем дифференцирования получаем силы $\frac{\partial \Sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial \Sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial \Sigma}{\partial z}$ по осям координат, обязанные своим происхождением полному притяжению сфероида.

Если вместо координат x , y и z взять радиус-вектор r и два угла μ и ν — такими, что

$$x = r \cos \mu,$$

$$y = r \sin \mu \sin \nu,$$

$$z = r \sin \mu \cos \nu,$$

то мы с помощью приведенных ниже трех частных дифференциалов получим притяжение сфероида, во-первых, по направлению радиуса r , соединяющего притягиваемую точку с центром сфероида, во-вторых, перпендикулярно

к этому радиусу в плоскости, проходящей через полюс A и, в-третьих, перпендикулярно к тому же радиусу в плоскости, параллельной той, которая проходит через полюсы B и C . Дифференциалы эти следующие: $\frac{\partial \Sigma}{\partial r}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu}$, $\frac{1}{r \sin \mu} \frac{\partial \Sigma}{\partial \nu}$. Эти формулы особенно полезны в теории фигуры земли.

ГЛАВА II.

О РАВНОВЕСИИ НЕСКОЛЬКИХ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ ТЕЛ, РАССМАТРИВАЕМЫХ В КАЧЕСТВЕ ТОЧЕК СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЮ НИТИМИ ИЛИ СТЕРЖНЯМИ.

11. Мы выше видели (п. 7), каким образом силы, действующие на каждое отдельное тело, каковы бы они ни были, всегда можно свести к трем силам X , Y , Z , направленным по трем прямоугольным координатам x , y , z самого тела и стремящимся укоротить эти координаты.

Здесь, а также в дальнейшем, мы для простоты допустим, что все внешние силы, действующие на одну и ту же точку, сведены к трем силам X , Y , Z . Таким образом сумма моментов этих сил выразится вообще с помощью следующей формулы:

$$X dx + Y dy + Z dz;$$

следовательно, общая сумма моментов всех сил системы выразится с помощью суммы стольких аналогичных выражений, сколько имеется движущихся тел или точек; при этом мы будем отмечать одним, двумя, тремя, ... штрихами величины, относящиеся к различным телам, которые мы будем называть первым, вторым, третьим, ...

Указанным путем мы получим для суммы моментов сил, действующих на три или на большее число тел, следующую величину:

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' + X''' dx''' + \\ + Y''' dy''' + Z''' dz''' + \dots$$

Остается еще найти условные уравнения

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \dots$$

вытекающие из природы задачи.

Если имеются L , M , N , ... или же только их дифференциалы в функциях x' , y' , z' , x'' , ... то, взяв какие-либо неопределенные коэффициенты λ , μ , ν , ... следует к приведенной выше величине прибавить члены

$$\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \dots$$

и затем отдельно приравнять нулю члены, в состав которых входит каждый из дифференциалов dx' , dy' , dz' , dx'' , ... (отд. IV, п. 5).

§ I. О равновесии трех или большего количества тел, укрепленных на нерастяжимой нити или же на нити растяжимой и способной сокращаться.

12. Рассмотрим прежде всего три тела, укрепленных неподвижно на нерастяжимой нити. Тогда условия задачи заключаются в том, что расстояние между первым телом и вторым, а также расстояние между вторым

телом и третьим, остаются неизменными, так как эти расстояния представляют собою длины соответствующих частей нити, заключенных между телами.

Назовем первое из этих расстояний f и второе g ; тогда мы в качестве условных уравнений имеем

$$df = 0, \quad dg = 0;$$

следовательно,

$$dL = df, \quad dM = dg,$$

и общее уравнение равновесия рассматриваемых трех тел будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg = 0. \end{aligned}$$

Но легко видеть, что

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}, \\ g &= \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, путем дифференцирования, мы получим

$$\begin{aligned} df &= \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f}, \\ dg &= \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g}, \end{aligned}$$

подставляя эти значения, получим девять следующих уравнений, которые и представляют собою условия равновесия нити

$$\begin{aligned} X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} &= 0, \\ Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} &= 0, \\ Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} &= 0; \\ X'' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \mu \frac{x''' - x''}{g} &= 0, \\ Y'' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \mu \frac{y''' - y''}{g} &= 0, \\ Z'' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \mu \frac{z''' - z''}{g} &= 0; \\ X''' + \mu \frac{x''' - x''}{g} &= 0, \\ Y''' + \mu \frac{y''' - y''}{g} &= 0, \\ Z''' + \mu \frac{z''' - z''}{g} &= 0; \end{aligned}$$

остается еще исключить из этих уравнений две неизвестных величины λ и μ . Это может быть выполнено различными путями, которые в результате и дадут для равновесия трех тел, укрепленных на нити, различные или же различно выраженные уравнения. Мы изберем тот метод, который представится наиболее простым.

Мы видим, прежде всего, что если первые три уравнения соответственно прибавить к следующим трем, а затем к последним трем уравнениям, то получатся следующие три уравнения, свободные от неизвестных λ и μ :

$$X' + X'' + X''' = 0,$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0,$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0.$$

Эти уравнения показывают, что суммы всех сил, параллельных каждой из трех осей координат, должны быть равны нулю; они представляют собою случай общих уравнений, найденных в отделе III, § I.

Остается еще найти другие четыре уравнения; для этой цели, отвлекаясь от первых трех уравнений, я прибавляю средние три уравнения соответственно к трем последним и получаю нижеследующие уравнения, в которые уже не входит μ :

$$X'' + X''' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0,$$

$$Y'' + Y''' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0,$$

$$Z'' + Z''' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0,$$

и которые по исключении λ дают два следующих уравнения:

$$Y'' + Y''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (X'' + X''') = 0,$$

$$Z'' + Z''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''') = 0.$$

Наконец, рассмотрев отдельно три последних уравнения, содержащих в себе только μ , и исключив эту величину, мы получаем следующие два уравнения:

$$Y''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} X''' = 0,$$

$$Z''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} X''' = 0.$$

Приведенные семь уравнений*) содержат в себе условия, необходимые для равновесия трех тел; а если их прибавить к уравнениям, выражающим условие, что f и g представляют собою определенные заданные величины, то мы получим достаточное число уравнений для определения положения в пространстве каждого из тел.

13. Если бы нить, которую мы все еще представляем себе нерастяжимой, была нагружена четырьмя телами, которые находились бы под действием соответствующих сил $X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', X''', \dots$, направленных по трем осям прямоугольных координат, то с помощью аналогич-

*) Нетрудно заметить, что эти семь уравнений являются в известной мере очевидными а priori и что их можно было бы написать, не прибегая к принципу виртуальных скоростей. Но Лагранж не ставит себе целью трактовать каждый отдельный вопрос наиболее простым путем; он желает лишь показать, каким образом можно сделать ненужным специальное рассмотрение каждого отдельного случая и свести статику к простому механизму чиселения. Впрочем, Лагранж никогда не утверждал и не собирался утверждать, что именно таким путем следует подходить к изучению механики.

ных приемов, которые мне представляется излишним повторять, мы получили бы девять следующих уравнений для равновесия этих четырех тел:

$$\begin{aligned} X' + X'' + X''' + X^{IV} &= 0, \\ Y' + Y'' + Y''' + Y^{IV} &= 0, \\ Z' + Z'' + Z''' + Z^{IV} &= 0, \\ Y'' + Y''' + Y^{IV} - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (X'' + X''' + X^{IV}) &= 0, \\ Z'' + Z''' + Z^{IV} - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''' + X^{IV}) &= 0, \\ Y''' + Y^{IV} - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} (X''' + X^{IV}) &= 0, \\ Z''' + Z^{IV} - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} (X''' + X^{IV}) &= 0, \\ Y^{IV} - \frac{y^{IV} - y'''}{x^{IV} - x'''} X^{IV} &= 0, \\ Z^{IV} - \frac{z^{IV} - z'''}{x^{IV} - x'''} X^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

Теперь легко распространить указанное решение на какое угодно число тел и даже на случай цепной линии; однако этот последний случай мы рассмотрим особо, пользуясь при этом методом, изложенным в § II предыдущего отдела.

14. Можно было бы получить решение, более простое в некоторых отношениях, если бы с самого начала ввести в рассмотрение неизменяемость расстояний $f, g, \dots$

Так, если ограничиться случаем трех тел и назвать ψ, ψ' углы, образуемые линиями f и g с плоскостью x, y , и φ, φ' — углы, образуемые проекциями этих линий на ту же плоскость с осью x , то мы будем иметь

$$\begin{aligned} x'' - x' &= f \cos \varphi \cos \psi, & y'' - y' &= f \sin \varphi \cos \psi, & z'' - z' &= f \sin \psi, \\ x''' - x'' &= g \cos \varphi' \cos \psi', & y''' - y'' &= g \sin \varphi' \cos \psi', & z''' - z'' &= g \sin \psi'. \end{aligned}$$

Подставив значения $x'', y'', z'', x''', y''', z'''$, выведенные из этих уравнений, в общую формулу равновесия трех тел

$$\begin{aligned} X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' = 0 \end{aligned}$$

и варьируя величины $x', y', z', \varphi, \varphi', \psi, \psi'$, вариации которых остаются неопределенными, и также, приравняв отдельно нулю величины, умножающиеся на каждую из этих вариаций, мы получим семь уравнений

$$\begin{aligned} X' + X'' + X''' &= 0, & Y' + Y'' + Y''' &= 0, & Z' + Z'' + Z''' &= 0, \\ (X'' + X''') \sin \varphi - (Y'' + Y''') \cos \varphi &= 0, \\ X''' \sin \varphi' - Y''' \cos \varphi' &= 0, \\ (X'' + X''') \cos \varphi \sin \psi + (Y'' + Y''') \sin \varphi \sin \psi - (Z'' + Z''') \cos \psi &= 0, \\ X''' \cos \varphi' \sin \psi' + Y''' \sin \varphi' \sin \psi' - Z''' \cos \psi' &= 0, \end{aligned}$$

из которых первые пять прямо совпадают с теми уравнениями, которые были найдены в пункте 12 путем исключения неопределенных величин λ и

р, а последние два уравнения легко сводятся к упомянутым выше, если с помощью четвертого и пятого уравнения исключить y'' и y''' .

Но если с помощью указанного приема мы быстрее приходим к окончательным уравнениям, то это объясняется тем, что мы прибегаем к предварительному преобразованию переменных, которое включает в себе условные уравнения; при непосредственном же применении уравнений с неопределенными коэффициентами, как в пункте 12, решение задачи сводится к чистой технике расчета. Сверх того, как мы сейчас увидим, благодаря этим коэффициентам мы в данном случае получаем значение сил, которые должны выдержать стержни f и g вследствие сопротивления, оказываемого ими растяжению.

15. Если бы мы пожелали, чтобы первое тело было закреплено неподвижно, тогда дифференциалы dx' , dy' , dz' были бы равны нулю и члены, связанные с этими дифференциалами, само собою исчезли бы в общем уравнении равновесия. Тогда первые три уравнения пункта 12, а именно:

$$X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0, \quad Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0, \quad Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0,$$

уже не имели бы места; вследствие этого и уравнения

$$X' + X'' + X''' = 0, \quad Y' + Y'' + Y''' = 0, \quad Z' + Z'' + Z''' = 0,$$

отпали бы, но все остальные уравнения остались бы без изменения. Как видим, этот случай имеет место, когда нить неподвижно закреплена в одном из своих концов.

Если бы нить была закреплена в обоих своих концах, тогда мы имели бы не только $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$, но сверх того и $dx'' = 0$, $dy'' = 0$, $dz'' = 0$; члены, связанные с этими шестью дифференциалами в общем уравнении равновесия, исчезли бы, а следовательно, отпали бы и шесть связанных с ними частных уравнений.

Вообще же, если бы оба конца нити не были вполне свободны, но были бы прикреплены к двум точкам, движущимся согласно определенному заданному закону, то этот закон, выраженный аналитически, дал бы одно или несколько уравнений между дифференциалами dx' , dy' , dz' , относящимися к первому телу, и дифференциалами dx'' , dy'' , dz'' , относящимися ко второму телу. Эти уравнения, помноженные каждое соответственно на новый неопределенный коэффициент, следовало бы прибавить к найденному выше общему уравнению равновесия; или же можно было бы подставить в это общее уравнение значение одного или нескольких из этих дифференциалов, полученные из упомянутых уравнений, и затем приравнять нулю коэффициенты каждого из оставшихся дифференциалов, как это было сделано выше (п. 14). Так как здесь не возникает никаких трудностей, то мы на этом больше останавливаться не будем.

16. Для того чтобы определить силы, получающиеся вследствие реакции нити на различные тела, следует только воспользоваться методом указанным для этого в предыдущем отделе (п. 5).

Примем в соображение, что в настоящем случае мы имеем

$$dL = df = \frac{(x'' - x') (dx'' - dx') + (y'' - y') (dy'' - dy') + (z'' - z') (dz'' - dz')}{f},$$

$$dM = dg = \frac{(x''' - x'') (dx''' - dx'') + (y''' - y'') (dy''' - dy'') + (z''' - z'') (dz''' - dz'')}{g},$$

.

Следовательно:

1) По отношению к первому телу, координаты которого равны x' , y' , z' , мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = -\frac{x'' - x'}{f}, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = -\frac{y'' - y'}{f}, \quad \frac{\partial L}{\partial z'} = -\frac{z'' - z'}{f};$$

поэтому

$$\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}}{f} = 1.$$

Таким образом первое тело благодаря действию остальных приобретает силу, равную λ , направление которой перпендикулярно к поверхности, представленной уравнением $dL = df = 0$, если просто варьировать x' , y' , z' ; но легко видеть, что эта поверхность представляет собою не что иное, как сферу, радиус которой равен f и центр которой имеет своими координатами x'' , y'' , z'' ; таким образом сила λ будет направлена по этому самому радиусу, т. е. по направлению нити, соединяющей первое и второе тело.

2) То же самое мы имеем по отношению ко второму телу, координаты которого равны x'' , y'' , z'' .

$$\frac{\partial L}{\partial x''} = \frac{x'' - x'}{f}, \quad \frac{\partial L}{\partial y''} = \frac{y'' - y'}{f}, \quad \frac{\partial L}{\partial z''} = \frac{z'' - z'}{f};$$

поэтому

$$\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z''}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}}{f} = 1;$$

отсюда следует, что и второе тело получит силу λ , направленную перпендикулярно к поверхности, уравнение которой $dL = df = 0$, если варьировать x'' , y'' , z'' ; эта поверхность опять-таки представляет собою сферу, радиус которой равен f , но центр имеет своими координатами x' , y' , z' , т. е. координаты первого тела; таким образом сила λ , действующая на второе тело, будет тоже направлена по нити f , соединяющей это тело с первым.

3) Далее, по отношению ко второму телу, мы имеем еще

$$\frac{\partial M}{\partial x''} = -\frac{x''' - x''}{g}, \quad \frac{\partial M}{\partial y''} = -\frac{y''' - y''}{g}, \quad \frac{\partial M}{\partial z''} = -\frac{z''' - z''}{g},$$

следовательно,

$$\sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x''}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y''}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial z''}\right)^2} = 1.$$

Таким образом второе тело будет испытывать еще давление со стороны силы, равной μ , направление которой будет перпендикулярно к поверхности, выраженной уравнением $dg = 0$, если варьировать x'' , y'' , z'' ; эта поверхность будет представлять собою не что иное, как сферу, радиусом которой является g ; отсюда следует, что сила μ будет направлена по этому радиусу, т. е. по линии, соединяющей второе тело с третьим.

Такие же рассуждения можно применить по отношению к другим телам и прийти к аналогичным выводам.

17. Ясно, что сила λ , вызванная в первом теле по направлению нити, соединяющей это тело со следующим, а также сила, равная λ , но противоположно направленная, — действующая на второе тело по направлению той же нити, не могут быть ни чем иным, как силами, полученными в результате реакции нити на оба эти тела, т. е. напряжения, испытываемого частью нити, содержащейся между первым телом и вторым, так что

коэффициент λ выражает величину этого натяжения. Точно также коэффициент μ выражает напряжение части нити, содержащейся между вторым телом и третьим, и так далее.

Впрочем, при разрешении настоящей задачи мы молча допускали, что каждая часть нити не только нерастяжима, но и неспособна сокращаться, так что она сохраняет повсюду одну и ту же длину; следовательно, силы $\lambda, \mu, \dots$ выражают напряжения только тогда, когда они положительны и стремятся сблизить тела; но если бы они оказались отрицательными и стремились удалить тела друг от друга, то они скорее выражали бы те сопротивления, которые нить должна оказывать телам благодаря своей жесткости или неспримаемости.

18. Для того чтобы подтвердить доказанное нами выше и одновременно показать новое применение нашего метода, предположим, что нить, на которой укреплены тела, упруга по направлению своей длины и способна удлиняться и укорачиваться, и допустим, что $F, G, \dots$ представляют собою силы сокращения соответствующих частей $f, g, \dots$ нити, содержащихся между первым телом и вторым, между вторым телом и третьим, и так далее.

На основании сказанного в пункте 9*) отдела II ясно, что силы $F, G, \dots$ дадут моменты $F df + G dg + \dots$.

Следовательно, эти моменты следует прибавить к тем, которые получаются вследствие действия внешних сил и выражающиеся, как мы видели выше (п. 11), следующей формулой:

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' + X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + \dots,$$

после чего мы будем иметь общую сумму моментов системы. Поскольку сверх того не имеется никаких особых условий, которым должно быть подчинено расположение тел, мы получим общее уравнение равновесия, приравняв просто рассматриваемую сумму нулю; следовательно, мы будем иметь

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' + X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + \dots + F df + G dg + \dots = 0.$$

Подставив сюда найденные выше (п. 12) значения $df, dg, \dots$ и приравняв нулю суммы членов, связанных с каждым из дифференциалов $dx', dy', \dots$, мы получим следующие уравнения для равновесия нити в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} X' - F \frac{x'' - x'}{f} &= 0, & X'' + F \frac{x'' - x'}{f} - G \frac{x''' - x''}{g} &= 0, \\ Y' - F \frac{y'' - y'}{f} &= 0, & Y'' + F \frac{y'' - y'}{f} - G \frac{y''' - y''}{g} &= 0, \\ Z' - F \frac{z'' - z'}{f} &= 0, & Z'' + F \frac{z'' - z'}{f} - G \frac{z''' - z''}{g} &= 0, \\ X''' + G \frac{x''' - x''}{g} &= 0, \\ Y''' + G \frac{y''' - y''}{g} &= 0, \\ Z''' + G \frac{z''' - z''}{g} &= 0; \end{aligned}$$

*) Для исчисления этих моментов было бы лучше отослать читателя к пункту 4 отдела II; там можно найти доказательство указанного здесь результата. Что же касается пункта 9, то мы уже отметили, что он предполагает применение видоизмененной терминологии, что связано с известными неудобствами. *Прим. Бертрапа.*

эти уравнения аналогичны тем, которые были получены в п. 12 для случая нерастяжимой нити, если положить $\lambda = F$, $\mu = G, \dots$.

Отсюда ясно, что величины $F, G, \dots$), выражающие в настоящем случае силы в нитях, о которых мы предположили, что они упруги, являются теми же величинами, которые мы нашли выше (п. 16) для сил тех же нитей — в предположении, что они нерастяжимы.

19. Вернемся еще к случаю нерастяжимой нити, нагруженной тремя телами, но в то же время предположим, что среднее тело может перемещаться вдоль нити; в этом случае условие задачи будет заключаться в том, что сумма расстояний между первым телом и вторым и между вторым телом и третьим — остается неизменной; следовательно, если мы эти расстояния попрежнему назовем f и g , мы будем иметь $f + g = \text{const}$ и, следовательно, $df + dg = 0$.

Умножим дифференциальную величину $df + dg$ на неопределенный коэффициент λ и прибавим его к сумме моментов различных сил, которые согласно допущению действуют на тела; это даст нам следующее общее уравнение равновесия:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + \\ + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda(df + dg) = 0;$$

откуда (подставив значения df и dg и приравняв нулю сумму членов, в состав которых входит один и тот же дифференциал $dx', dy', \dots$), мы получим следующие уравнения равновесия нити:

$$\begin{aligned} X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} &= 0, \\ Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} &= 0, \\ Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} &= 0, \\ X'' + \lambda \left(\frac{x'' - x'}{f} - \frac{x''' - x''}{g} \right) &= 0, \\ Y'' + \lambda \left(\frac{y'' - y'}{f} - \frac{y''' - y''}{g} \right) &= 0, \\ Z'' + \lambda \left(\frac{z'' - z'}{f} - \frac{z''' - z''}{g} \right) &= 0, \\ X''' + \lambda \frac{x''' - x''}{g} &= 0, \\ Y''' + \lambda \frac{y''' - y''}{g} &= 0, \\ Z''' + \lambda \frac{z''' - z''}{g} &= 0, \end{aligned}$$

из которых придется лишь исключить неизвестную величину λ .

Отсюда ясно, как следует поступать в том случае, когда имеется большее количество тел, из которых одни закреплены неподвижно на нити, а другие могут свободно перемещаться по ней.

*) А priori ясно, что это должно быть так, и если Лагранж не отмечает этого обстоятельства, то это объясняется соображением, указанным выше (п. 12). В самом деле, понятно, что если равновесие однажды установилось и нить приняла известную длину, которая уже больше не изменяется, то безразлично, была ли эта длина подчинена условию, что она должна оставаться неизменной, или же нет.

§ II. О равновесии трех или большего числа тел, укрепленных на гибком и жестком стержне.

20. Предположим теперь, что три тела соединены между собою с помощью гибкого стержня таким образом, что они все время должны сохранять неизменными свои взаимные расстояния; в этом случае должны иметь место не только равенства $df=0$ и $dg=0$, но и дифференциал расстояния между первым телом и третьим, который мы обозначим через h , тоже должен быть равен нулю; следовательно, если взять три неопределенных коэффициента λ , μ , ν , то получится следующее общее уравнение равновесия:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh = 0.$$

Значения df и dg были уже даны выше; что касается значения dh , то ясно, что

$$h = \sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2}$$

и, следовательно,

$$dh = \frac{(x''' - x')(dx''' - dx') + (y''' - y')(dy''' - dy') + (z''' - z')(dz''' - dz')}{h}.$$

Произведя эти подстановки и приравняв нулю суммы членов, в состав которых входят каждый из дифференциалов dx' , dy' , ..., мы получим следующие девять частных уравнений:

$$X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \nu \frac{x''' - x'}{h} = 0,$$

$$Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \nu \frac{y''' - y'}{h} = 0,$$

$$Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \nu \frac{z''' - z'}{h} = 0,$$

$$X'' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0,$$

$$Y'' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \mu \frac{y''' - y''}{g} = 0,$$

$$Z'' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \mu \frac{z''' - z''}{g} = 0,$$

$$X''' + \mu \frac{x''' - x''}{g} + \nu \frac{x''' - x'}{h} = 0,$$

$$Y''' + \mu \frac{y''' - y''}{g} + \nu \frac{y''' - y'}{h} = 0,$$

$$Z''' + \mu \frac{z''' - z''}{g} + \nu \frac{z''' - z'}{h} = 0,$$

из которых следует исключить три неизвестных неопределенных величины λ , μ , ν , в результате чего для условий равновесия останется только шесть уравнений.

21. Прежде всего из самого вида этих уравнений явствует, что если три первых уравнения сложить соответственно со следующими тремя уравнениями и затем с последними тремя, то мы тотчас же получим нижеприведенные три уравнения, свободные от λ , μ , ν ,

$$X' + X'' + X''' = 0,$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0,$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0.$$

Ничего нет легче, чем найти еще три других уравнения для исключения λ , μ , ν ; однако для того, чтобы этого достигнуть наиболее простым и наиболее общим способом, я из уравнений предыдущего пункта сначала вывожу следующие девять преобразованных уравнений:

$$\begin{aligned} X'y' - Y'y' - \lambda \frac{y'x'' - x'y''}{f} - \nu \frac{y'x''' - x'y'''}{h} &= 0, \\ X'z' - Z'x' - \lambda \frac{z'x'' - x'z''}{f} - \nu \frac{z'x''' - x'z'''}{h} &= 0, \\ Y'z' - Z'y' - \lambda \frac{z'y'' - y'z''}{f} - \nu \frac{z'y''' - y'z'''}{h} &= 0, \\ X''y'' - Y''x'' + \lambda \frac{y'x'' - x'y''}{f} - \mu \frac{y''x''' - x''y'''}{g} &= 0, \\ X''z'' - Z''x'' + \lambda \frac{z'x'' - x'z''}{f} - \mu \frac{z''x''' - x''z'''}{g} &= 0, \\ Y''z'' - Z''y'' + \lambda \frac{z'y'' - y'z''}{f} - \mu \frac{z''y''' - y''z'''}{h} &= 0, \\ X'''y''' - Y'''x''' + \mu \frac{y''x''' - x''y'''}{g} + \nu \frac{y'x''' - x'y'''}{h} &= 0, \\ X'''z''' - Z'''x''' + \mu \frac{z''x''' - x''z'''}{g} + \nu \frac{z'x''' - x'z'''}{h} &= 0, \\ Y'''z''' - Z'''y''' + \mu \frac{z'y''' - y''z'''}{g} + \nu \frac{z'y''' - y'z'''}{h} &= 0. \end{aligned}$$

Последние, как видим, аналогичны первоначальным уравнениям и совершенно так же путем простого сложения дают следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' &= 0, \\ X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' &= 0, \\ Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' &= 0. \end{aligned}$$

Три найденных выше уравнения показывают, что сумма сил, параллельных каждой из трех осей координат, должна равняться нулю, а три найденные только что уравнения содержат в себе известный закон моментов (если под моментом понимать произведение силы на соответствующее ей плечо рычага), согласно которому сумма моментов всех сил, под влиянием которых тело стремится вращаться вокруг каждой из трех осей, должна равняться нулю. Таким образом приведенные шесть уравнений представляют собою лишь частные случаи общих уравнений, данных в отделе III, § I и II.

22. Если бы первое тело было неподвижно, то дифференциалы dx' , dy' , dz' были бы нулями и первые из девяти уравнений пункта 20 отпали бы; следовательно, в этом случае у нас осталось бы только шесть уравнений, которые по исключении трех неизвестных величин λ , μ , ν свелись бы к трем.

Для того чтобы получить эти три уравнения, можно воспользоваться тем же приемом, какой был применен для нахождения трех последних уравнений в предыдущем пункте; для этого следует повести дело таким образом, чтобы преобразованные уравнения уже не содержали в себе неопределенных величин λ и ν , которые входят в первые три уравнения и

от которых мы теперь должны отвлечься; а этого можно достигнуть с помощью следующих преобразованных уравнений:

$$\begin{aligned} X''(y''-y')-Y''(x''-x')-\mu \frac{(y''-y')(x'''-x'')-(x''-x')(y'''-y'')}{g} &= 0, \\ X''(z''-z')-Z''(x''-x')-\mu \frac{(z''-z')(x'''-x'')-(x''-x')(z'''-z'')}{g} &= 0, \\ Y''(z''-z')-Z''(y''-y')-\mu \frac{(z''-z')(y'''-y'')-(y''-y')(z'''-z'')}{g} &= 0, \\ X'''(y'''-y'')-Y'''(x'''-x'')+\mu \frac{(y'''-y'')(x''''-x''')-(x'''-x'')(y''''-y''')}{g} &= 0, \\ X'''(z'''-z'')-Z'''(x'''-x'')+\mu \frac{(z'''-z'')(x''''-x''')-(x'''-x'')(z''''-z''')}{g} &= 0, \\ Y'''(z'''-z'')-Z'''(y'''-y'')+\mu \frac{(z'''-z'')(y''''-y''')-(y'''-y'')(z''''-z''')}{g} &= 0; \end{aligned}$$

если мы теперь сложим соответственно три первых уравнения с тремя последними, то тотчас же получим нижеследующие три уравнения:

$$\begin{aligned} X''(y''-y')-Y''(x''-x')+X'''(y'''-y'')-Y'''(x'''-x'') &= 0, \\ X''(z''-z')-Z''(x''-x')+X'''(z'''-z'')-Z'''(x'''-x'') &= 0, \\ Y''(z''-z')-Z''(y''-y')+Y'''(z'''-z'')-Z'''(y'''-y'') &= 0, \end{aligned}$$

которые всегда будут иметь место независимо от состояния первого тела, так как они не связаны с уравнениями, относящимися к этому телу. Эти уравнения, как видим, содержат в себе тот же принцип моментов, но только по отношению к осям, проходящим через первое тело.

23. Предположим, что имеется еще и четвертое тело, укрепленное на таком же негибком стержне; пусть его прямоугольные координаты будут x^{IV} , y^{IV} , z^{IV} и силы, параллельные этим координатам, X^{IV} , Y^{IV} , Z^{IV} .

В таком случае к сумме моментов сил следует прибавить величину

$$X^{IV}dx^{IV} + Y^{IV}dy^{IV} + Z^{IV}dz^{IV}.$$

Далее, так как расстояния между всеми телами должны оставаться неизменными, то по условиям задачи мы имеем не только $df=0$, $dg=0$, $dh=0$, как это было в предыдущем случае, но и $dl=0$, $dm=0$, $dn=0$, если через l , m , n назвать расстояния четвертого тела от первых трех. Таким образом в данном случае общее уравнение равновесия будет таково:

$$\begin{aligned} X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + \\ + Z'''dz''' + X^{IV}dx^{IV} + Y^{IV}dy^{IV} + Z^{IV}dz^{IV} + \lambda df + \mu dg + \nu dh + \omega dl + \\ + \rho dm + \sigma dn = 0. \end{aligned}$$

Значения df , dg , dh здесь те же, что и раньше; что касается значений dl , dm , dn , то ясно, что

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x^{IV}-x')^2 + (y^{IV}-y')^2 + (z^{IV}-z')^2}, \\ m &= \sqrt{(x^{IV}-x'')^2 + (y^{IV}-y'')^2 + (z^{IV}-z'')^2}, \\ n &= \sqrt{(x^{IV}-x''')^2 + (y^{IV}-y''')^2 + (z^{IV}-z''')^2}, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$\begin{aligned} dl &= \frac{(x^{IV} - x')(dx^{IV} - dx') + (y^{IV} - y')(dy^{IV} - dy') + (z^{IV} - z')(dz^{IV} - dz')}{l}, \\ dm &= \frac{(x^{IV} - x'')(dx^{IV} - dx'') + (y^{IV} - y'')(dy^{IV} - dy'') + (z^{IV} - z'')(dz^{IV} - dz'')}{m}, \\ dn &= \frac{(x^{IV} - x''')(dx^{IV} - dx''') + (y^{IV} - y''')(dy^{IV} - dy''') + (z^{IV} - z''')(dz^{IV} - dz''')}{n}. \end{aligned}$$

Произведя эти подстановки и приравняв нулю суммы всех членов, в состав которых входит каждый из дифференциалов dx' , dy' , ..., мы получим двенадцать частных уравнений, из которых первые девять будут тождественны с уравнениями пункта 20, если к их первым членам соответственно прибавить следующие величины:

$$\begin{aligned} -\omega \frac{x^{IV} - x'}{l}, & \quad -\omega \frac{y^{IV} - y'}{l}, & \quad -\omega \frac{z^{IV} - z'}{l}, \\ -\rho \frac{x^{IV} - x''}{m}, & \quad -\rho \frac{y^{IV} - y''}{m}, & \quad -\rho \frac{z^{IV} - z''}{m}, \\ -\sigma \frac{x^{IV} - x'''}{n}, & \quad -\sigma \frac{y^{IV} - y'''}{n}, & \quad -\sigma \frac{z^{IV} - z'''}{n}, \end{aligned}$$

последние же три уравнения будут следующие:

$$\begin{aligned} X^{IV} + \omega \frac{x^{IV} - x'}{l} + \rho \frac{x^{IV} - x''}{m} + \sigma \frac{x^{IV} - x'''}{n} &= 0, \\ Y^{IV} + \omega \frac{y^{IV} - y'}{l} + \rho \frac{y^{IV} - y''}{m} + \sigma \frac{y^{IV} - y'''}{n} &= 0, \\ Z^{IV} + \omega \frac{z^{IV} - z'}{l} + \rho \frac{z^{IV} - z''}{m} + \sigma \frac{z^{IV} - z'''}{n} &= 0. \end{aligned}$$

24. Так как мы здесь имеем всего двенадцать уравнений и шесть неопределенных величин λ , μ , ν , ω , ρ , σ , которые подлежат исключению, то для условий равновесия у нас останется только шесть уравнений, как это было раньше в случае трех тел. Пользуясь методом, аналогичным изложенному в пункте 21, мы найдем следующие шесть уравнений, аналогичные уравнениям, приведенным в упомянутом пункте:

$$\begin{aligned} X' + X'' + X''' + X^{IV} &= 0, \\ Y' + Y'' + Y''' + Y^{IV} &= 0, \\ Z' + Z'' + Z''' + Z^{IV} &= 0, \\ X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + X^{IV}y^{IV} - Y^{IV}x^{IV} &= 0, \\ X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' + X^{IV}z^{IV} - Z^{IV}x^{IV} &= 0, \\ Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' + Y^{IV}z^{IV} - Z^{IV}y^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

Три последних уравнения можно заменить тремя нижеприведенными уравнениями, которые можно получить, пользуясь приемом, указанным в пункте 22; эти уравнения, не будучи связаны с уравнениями, относящимися к первому телу, имеют то преимущество, что они всегда сохраняют свою силу — независимо от состояния указанного тела

$$\begin{aligned} X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') + \frac{X'''}{X^{IV}}(y''' - y'') - \frac{Y'''}{Y^{IV}}(x''' - x'') + \\ + \frac{X^{IV}}{X^{IV}}(y^{IV} - y''') - \frac{Y^{IV}}{Y^{IV}}(x^{IV} - x''') &= 0, \\ X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') + \frac{X'''}{X^{IV}}(z''' - z'') - \frac{Z'''}{Z^{IV}}(x''' - x'') + \\ + \frac{X^{IV}}{X^{IV}}(z^{IV} - z''') - \frac{Z^{IV}}{Z^{IV}}(x^{IV} - x''') &= 0, \\ Y''(z'' - z') - Z''(y'' - y') + \frac{Y'''}{Y^{IV}}(z''' - z'') - \frac{Z'''}{Z^{IV}}(y''' - y'') + \\ + \frac{Y^{IV}}{Y^{IV}}(z^{IV} - z''') - \frac{Z^{IV}}{Z^{IV}}(y^{IV} - y''') &= 0. \end{aligned}$$

25. Отсюда уже видно, как следует поступать для того, чтобы определить условия равновесия любого числа тел, укрепленных на негибком стержне или рычаге. Вообще ясно, для того, чтобы взаимное положение тел оставалось неизменным, достаточно, чтобы взаимные расстояния между первыми тремя телами оставались постоянными и чтобы расстояния каждого из остальных тел от первых трех тоже оставались неизменными, — так как положение любой точки всегда определяется расстоянием этой точки от трех заданных точек. Следовательно, по отношению к каждому новому телу, которое прибавляется на рычаге, надо применить те же самые рассуждения и те же самые операции, какие были применены в п. 23 по отношению к четвертому телу; каждое из них даст три новых частных уравнения с тремя новыми неопределенными величинами, подлежащими исключению; таким образом окончательные уравнения всегда будут представлены в таком же количестве, как и в случае трех тел, и они будут иметь тот же самый вид, как и те уравнения, которые мы нашли в предыдущем пункте.

Впрочем, ясно, что эти уравнения содержатся в тех уравнениях, которые были найдены нами в общем случае в п. 3 и 9 отд. III для равновесия любой свободной системы тел. В самом деле, так как вследствие негибкости стержня расстояния между телами не могут изменяться, то отсюда следует, что равновесие будет иметь место, если будут уничтожены поступательные и вращательные движения; следовательно, исходя уже из одних этих соображений, можно было бы предыдущую задачу разрешить на основании формул, приведенных в указанных выше пунктах; нам, однако, показалось в данном случае небесполезным дать непосредственное решение, основанное на частных условиях задачи.

§ III. О равновесии трех или большего числа тел, укрепленных на упругом стержне.

26. Рассмотрим снова случай трех тел, соединенных между собою стержнем, и предположим сверх того, что в точке, где находится второе тело, стержень обладает упругостью — в том смысле, что расстояния от упомянутой точки до первой и последней остаются неизменными, но угол, образуемый линиями соединения среднего тела с двумя другими телами, может изменяться и что действие этой упругости заключается в увеличении указанного угла, а следовательно, в уменьшении внешнего угла, образуемого одной из сторон и продолжением другой.

Назовем E силу упругости*) и ϵ внешний угол, который эта сила стремится уменьшить; момент этой силы выразится через $E de$ (отд. II, п. 9), так что сумма моментов всех сил системы составит

$$X'dx' + Y'dy' + Z'ds' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''ds'' + \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''ds''' + E de.$$

*) Слово *сила* отклоняется здесь от своего обычного значения. Лагранж считает очевидным, что если совокупность сил, вызванных упругостью, имеет сумму моментов равную нулю, когда угол ϵ является неизменным, то эта сумма может вообще считаться пропорциональной de ; он выражает ее тогда через $E de$, где E представляет собою силу только в том случае, если принять условие, указанное в пункте 9 отд. II. См. примечание к этому пункту (стр. 34). *Прим. Бертрама.*

Но условия задачи здесь те же самые, что и в п. 12, т. е. $df = 0$ и $dg = 0$, поэтому мы имеем следующее общее уравнение равновесия:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + Ede + \lambda df + \mu dg = 0.$$

Здесь остается только подставить значения de , df , dg . Значения df и dg остаются теми же, что и в упомянутом выше пункте.

Для определения значения de заметим, что если обозначить через h прямолинейное расстояние между первым телом и третьим, то в треугольнике, имеющем своими сторонами f , g , h , угол, противолежащий стороне h , составит $180^\circ - e$; следовательно, на основании известной теоремы мы имеем

$$-\cos e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg},$$

откуда путем дифференцирования можно получить значение de ; но так как согласно условиям задачи мы имеем

$$df = 0 \quad \text{и} \quad dg = 0,$$

то достаточно варьировать e и h , в результате чего получится

$$de = -\frac{h dh}{fg \sin e}.$$

Если это значение подставить в предыдущее уравнение, то легко убедиться, что оно получит тот же вид, что и общее уравнение равновесия в случае, рассмотренном в пункте 20, если только в последнем положить

$$\nu = -\frac{Eh}{fg \sin e}.$$

Таким образом и частные уравнения будут в обоих случаях одинаковы — с тем единственным отличием, что, в уравнениях упомянутого пункта величина ν является неопределенной и, следовательно, подлежит исключению, между тем как в рассматриваемом здесь случае эта величина представляется вполне известной*) и исключению подлежат лишь две неопределенных величины λ и μ ; таким образом в последнем случае остается налицо одним окончательным уравнением больше, чем в упомянутом выше случае, т. е. семь окончательных уравнений вместо шести. Но так как, независимо от того, является ли величина ν известной или нет, ничто нам не мешает исключить ее вместе с другими величинами λ и μ , то ясно, что в настоящем случае мы имеем те же самые уравнения, какие были найдены нами в пунктах 21 и 22; а для того, чтобы получить седьмое уравнение, нам достаточно будет исключить λ из первых трех уравнений, или же μ из последних трех, входящих в состав девяти частных уравнений пункта 20, — и затем вместо ν подставить его значение

$$-\frac{Eh}{fg \sin e}.$$

27. Впрочем, если бы мы в значении de не пожелали принять df и dg равными нулю, то мы имели бы выражение следующего вида:

$$de = -\frac{h dh}{fg \sin e} + A df + B dg,$$

*) Для того чтобы ν можно было рассматривать как известную величину, необходимо, чтобы E и e были тоже известными величинами; однако в действительности этого нет: E является неизвестной функцией e и не поддается прямому определению.

где A и B являются функциями $f, g, h, \sin e$. В этом случае три члена $E de + \lambda df + \mu dg$ общего уравнения приняли бы следующий вид:

$$-\frac{Eh}{fg \sin e} dh + (EA + \lambda) df + (EB + \mu) dg.$$

Но так как λ и μ являются двумя неизвестными величинами, то ясно, что вместо них можно подставить $\lambda = EA$, $\mu = EB$, в результате чего приведенная величина получает следующий вид:

$$-\frac{Eh}{fg \sin e} dh + \lambda df + \mu dg,$$

как если бы f и g в выражении для de были постоянными величинами.

Если бы с помощью упругих стержней было связано друг с другом большее количество тел, то уравнения, необходимые для равновесия этих тел, можно было бы найти, пользуясь тем же способом. И вообще наш метод дает всегда с одинаковой легкостью условия равновесия системы тел, связанных между собою любым образом и находящихся под действием каких угодно внешних сил. Расчет ведется, как мы видим, всегда единообразным способом, что следует признать одним из главнейших преимуществ этого метода.

ГЛАВА III.

О РАВНОВЕСИИ НИТИ, ВСЕ ТОЧКИ КОТОРОЙ НАХОДЯТСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАКИХ-ЛИБО СИЛ, И КОТОРАЯ РАССМАТРИВАЕТСЯ КАК ГИБКАЯ ИЛИ НЕГИБКАЯ, ИЛИ УПРУГАЯ, И В ТО ЖЕ ВРЕМЯ — РАСТЯЖИМАЯ ИЛИ НЕРАСТЯЖИМАЯ.

28. Здесь представляется уместным применить тот метод, который мы изложили в § II отдела IV.

Для большей простоты мы будем всегда предполагать, что все внешние силы, действующие на каждую точку нити, сведены к трем силам X, Y, Z , направленным по прямоугольным координатам x, y, z этой точки. Следовательно, если мы назовем dm элемент этой нити, который пропорционален элементу ds кривой линии, умноженному на толщину нити, то для суммы моментов всех указанных сил по отношению ко всей длине нити мы получим следующую интегральную формулу (отд. IV, п. 12):

$$S(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm;$$

а так как величина $X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$ представляет собою не что иное, как величину $P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$ (п. 1), преобразованную для того случая, когда силы $P, Q, R, \dots$ таковы, что эта величина поддается интегрированию, то, назвав Π ее интегралом, мы получим, как в пункте 25 отдела IV,

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \delta \Pi,$$

и сумма моментов выражится через $S \delta \Pi dm$.

§ I. О равновесии гибкой и нерастяжимой нити.

29. Рассмотрим сначала случай совершенно гибкой и нерастяжимой нити. Так как элемент ds кривой, образуемой нитью, выражается через

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

то ввиду условия нерастяжимости нити необходимо, чтобы ds было постоянной величиной и, следовательно, чтобы по отношению к каждому элементу нити имело место следующее неопределенное условное уравнение: $\delta ds = 0$. Поэтому, если мы δds умножим на неопределенную величину λ и возьмем полный интеграл, то мы получим $\int \lambda \delta ds$; если у нас сверх того никаких условных уравнений не имеется, то мы получим общее уравнение равновесия, если приравняем нулю сумму двух интегралов $\int \delta \Pi dm$ и $\int \lambda \delta ds$.

Но так как $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, то путем дифференцирования в смысле δ мы получим

$$\delta ds = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds};$$

следовательно,

$$\int \lambda \delta ds = \int \lambda \frac{dx}{ds} \delta dx + \int \lambda \frac{dy}{ds} \delta dy + \int \lambda \frac{dz}{ds} \delta dz;$$

переименовав δd на $d\delta$ и проинтегрировав по частям — с тем, чтобы избавиться от символа d перед δ , на основе правил, изложенных в пункте 15 отдела IV, мы получим следующие преобразованные уравнения:

$$\int \lambda \frac{dx}{ds} \delta dx = \lambda'' \frac{dx''}{ds''} \delta x'' - \lambda' \frac{dx'}{ds'} \delta x' - \int d \lambda \frac{dx}{ds} \delta x,$$

$$\int \lambda \frac{dy}{ds} \delta dy = \lambda'' \frac{dy''}{ds''} \delta y'' - \lambda' \frac{dy'}{ds'} \delta y' - \int d \lambda \frac{dy}{ds} \delta y,$$

$$\int \lambda \frac{dz}{ds} \delta dz = \lambda'' \frac{dz''}{ds''} \delta z'' - \lambda' \frac{dz'}{ds'} \delta z' - \int d \lambda \frac{dz}{ds} \delta z.$$

Таким образом общее уравнение равновесия приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int \left[\left(X dm - d \lambda \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \left(Y dm - d \lambda \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \left(Z dm - d \lambda \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] + \\ & + \lambda'' \frac{dx''}{ds''} \delta x'' + \lambda'' \frac{dy''}{ds''} \delta y'' + \lambda'' \frac{dz''}{ds''} \delta z'' - \lambda' \frac{dx'}{ds'} \delta x' - \lambda' \frac{dy'}{ds'} \delta y' - \lambda' \frac{dz'}{ds'} \delta z' = 0. \end{aligned}$$

30. Сначала положим равными нулю (отд. IV, п. 16) коэффициенты при δx , δy , δz под знаком интеграла и получим следующие три частных и неопределенных уравнения:

$$X dm - d \lambda \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$Y dm - d \lambda \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$Z dm - d \lambda \frac{dz}{ds} = 0;$$

по исключении неопределенной величины λ у нас останется два уравнения, которые послужат для определения кривой, образуемой нитью.

Это исключение очень легко осуществить: для этого достаточно только проинтегрировать приведенные уравнения, что даст нам следующие уравнения:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = A + \int X dm,$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = B + \int Y dm,$$

$$\lambda \frac{dz}{ds} = C + \int Z dm,$$

где A , B и C — произвольные постоянные; далее, после исключения λ получится

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \int Y dm}{A + \int X dm},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C + \int Z dm}{A + \int X dm};$$

эти уравнения совпадают с известными формулами цепной линии.

Если бы захотели прямо прийти к чисто дифференциальным уравнениям, не содержащим в себе знака $\int$, то можно было бы найденные уравнения привести к следующему виду:

$$X dm - \lambda d \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d\lambda = 0,$$

$$Y dm - \lambda d \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} d\lambda = 0,$$

$$Z dm - \lambda d \frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds} d\lambda = 0,$$

откуда, после исключения $d\lambda$ мы получим сначала следующие два уравнения:

$$\frac{X(dy - Y dx)}{ds} dm = \lambda \left(\frac{dy}{ds} d \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d \frac{dy}{ds} \right),$$

$$\frac{X dz - Z dx}{ds} dm = \lambda \left(\frac{dz}{ds} d \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d \frac{dz}{ds} \right).$$

Затем, если те же уравнения помножить соответственно на $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ и затем сложить, то в силу соотношения

$$\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} d \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 0$$

мы получим уравнение

$$\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) dm = d\lambda;$$

в это последнее уравнение остается только подставить последовательно значения λ , выведенные из двух предыдущих уравнений.

31. Так как величина λds может представлять собою момент некоторой силы λ , стремящейся уменьшить длину элемента ds (отд. IV, п. 6), то член λds общего уравнения равновесия нити (п. 29) выразит сумму моментов всех сил λ , которые мы можем себе представить действующими на все элементы нити. В самом деле, благодаря своей нерастяжимости каждый элемент противостоит действию внешних сил и это сопротивление обычно рассматривают как активную силу, которую называют *натяжением*. Таким образом λ представляет собою натяжение нити.

32. Что касается условий нерастяжимости нити, которая выражается неизменностью каждого элемента кривой ds , то ее нельзя ввести в уравнение с целью исключения неопределенной величины λ , как это можно сделать в том случае, когда нить образует собою многоугольник, — так как согласно природе дифференциального исчисления абсолютное значение элементов кривой и вообще всех бесконечно малых элементов остается неопре-

деленным; однако по тем же основаниям нет нужды в том, чтобы число уравнений было равно числу переменных; для определения линии, будь то простая линия, или линия двойной кривизны, достаточно иметь уравнений на единицу меньше, чем переменных. Таким образом решение, найденное нами с помощью нашего метода, является с точки зрения дифференциальных уравнений полным и требует лишь последующего интегрирования, которое уже зависит от выражений для сил X , Y , Z .

33. Рассмотрим теперь те члены общего уравнения п. 29, которые находятся вне знака $\int$, и допустим сначала, что нить совершенно свободна. В таком случае вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ и $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, соответствующие двум крайним точкам нити, будут совершенно неопределенными и произвольными; следовательно, каждый член, в состав которого входят эти вариации, должен сам по себе быть равным нулю. Таким образом мы должны иметь $\lambda' = 0$ и $\lambda'' = 0$, т. е. значения λ в начале и в конце нити должны быть равны нулю. Эти условия можно удовлетворить при посредстве постоянных величин. Первые три интегральные уравнения п. 30 дают для первой точки нити, где величины, выраженные знаком $\int$, равны нулю,

$$\lambda' \frac{dx'}{ds'} = A, \quad \lambda' \frac{dy'}{ds'} = B, \quad \lambda' \frac{dz'}{ds'} = C,$$

а для последней точки, где знак $\int$ превращается в S ,

$$\lambda'' \frac{dx''}{ds''} = A + S X dm, \quad \lambda'' \frac{dy''}{ds''} = B + S Y dm, \quad \lambda'' \frac{dz''}{ds''} = C + S Z dm;$$

поэтому в рассматриваемом случае мы имеем

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

и

$$S X dm = 0, \quad S Y dm = 0, \quad S Z dm = 0.$$

Эти три уравнения, как видим, соответствуют уравнениям пункта 12 настоящего отдела.

34. Предположим, во-вторых, что нить закреплена на одном из своих концов или на обоих концах. Если нить закреплена на своем первом конце, то вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ равны нулю, поэтому достаточно приравнять нулю коэффициенты вариаций $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, т. е. положить $\lambda'' = 0$.

По тем же основаниям, если второй конец неподвижен, достаточно положить $\lambda' = 0$. Если же оба конца одновременно закреплены, то в данном случае не приходится выполнять никаких особых условий, так как все вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ равны нулю.

35. Предположим, в-третьих, что концы нити прикреплены к кривым линиям или поверхностям, по которым они могут свободно скользить. Пусть, например, будут

$$dz' = a'dx' + b'dy', \quad dz'' = a''dx'' + b''dy''$$

дифференциальные уравнения поверхностей, на которых закреплены первая и последняя точки нити. Тогда, меняя символ d на δ , мы получим

$$\delta z' = a'\delta x' + b'\delta y', \quad \delta z'' = a''\delta x'' + b''\delta y'';$$

эти значения следует подставить в рассматриваемые члены и затем приравнять нулю коэффициенты вариаций $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$.

Вообще, ту часть формулы, которая стоит вне знака интеграла в общем уравнении равновесия, можно трактовать таким образом, как если бы она существовала отдельно и как если бы она представляла собою уравнение равновесия двух отдельных тел, укрепленных на концах нити.

36. Предположим, например, что нить прикреплена обоими своими концами к концам рычага, который может двигаться около некоторой неподвижной точки. Пусть a, b, c будут три прямоугольных координаты, определяющих в пространстве положение этой неподвижной точки, т. е. точки опоры рычага; пусть, дальше, f представляет собою расстояние между точкой опоры и тем концом рычага, к которому прикреплен первый конец нити; g — расстояние между той же точкой опоры и другим концом рычага, к которому прикреплен второй конец нити; h — расстояние между обоими концами рычага, а следовательно, и между обоими концами нити; ясно, что эти шесть величин a, b, c, f, g, h даны самой природой задачи; вместе с тем легко видеть, что если x', y', z' представляют собою координаты начала кривой, образуемой нитью, и x'', y'', z'' координаты конца той же самой кривой, то мы имеем

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(a-x')^2 + (b-y')^2 + (c-z')^2}, \\ g &= \sqrt{(a-x'')^2 + (b-y'')^2 + (c-z'')^2}, \\ h &= \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2}. \end{aligned}$$

А так как величины f, g, h — постоянные, то при дифференцировании этих трех определенных условных уравнений в смысле δ мы получим

$$\begin{aligned} (a-x') \delta x' + (b-y') \delta y' + (c-z') \delta z' &= 0, \\ (a-x'') \delta x'' + (b-y'') \delta y'' + (c-z'') \delta z'' &= 0, \\ (x''-x') (\delta x'' - \delta x') + (y''-y') (\delta y'' - \delta y') + (z''-z') (\delta z'' - \delta z') &= 0. \end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений следует помножить на неопределенный коэффициент и затем все эти уравнения прибавить к общему уравнению равновесия. Таким образом, если взять α, β, γ в качестве упомянутых трех коэффициентов и приравнять нулю коэффициенты шести вариаций $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x'', \delta y'', \delta z''$, то мы получим точно такое же количество частных определенных уравнений, а именно

$$\begin{aligned} \alpha(a-x') - \gamma(x''-x') - \lambda' \frac{dx'}{ds'} &= 0, \\ \alpha(b-y') - \gamma(y''-y') - \lambda' \frac{dy'}{ds'} &= 0, \\ \alpha(c-z') - \gamma(z''-z') - \lambda' \frac{dz'}{ds'} &= 0, \\ \beta(a-x'') + \gamma(x''-x') + \lambda'' \frac{dx''}{ds''} &= 0, \\ \beta(b-y'') + \gamma(y''-y') + \lambda'' \frac{dy''}{ds''} &= 0, \\ \beta(c-z'') + \gamma(z''-z') + \lambda'' \frac{dz''}{ds''} &= 0. \end{aligned}$$

Путем исключения α, β, γ приведенные шесть уравнений сведутся к трем.

Если затем эти три уравнения соединить с приведенными выше тремя условными уравнениями, то мы получим возможность определить положение обоих концов нити.

Из изложенного ясно, как следует вести расчет в других подобных случаях.

37. Наконец, если помимо сил, действующих на каждую точку нити, имеются еще особые силы, приложенные к обоим концам нити и выраженные через X', Y', Z' для первого конца нити и через X'', Y'', Z'' для второго конца, то эти силы дадут моменты

$$X' \delta x' + Y' \delta y' + Z' \delta z' + X'' \delta x'' + Y'' \delta y'' + Z'' \delta z'';$$

эту величину следует прибавить к первому члену общего уравнения равновесия, т. е. к той части его, которая находится вне знака интеграла; вследствие этого упомянутая часть примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(X'' + \lambda'' \frac{dx''}{ds''} \right) \delta x'' + \left(Y'' + \lambda'' \frac{dy''}{ds''} \right) \delta y'' + \left(Z'' + \lambda'' \frac{dz''}{ds''} \right) \delta z'' + \\ & + \left(X' + \lambda' \frac{dx'}{ds'} \right) \delta x' + \left(Y' - \lambda' \frac{dy'}{ds'} \right) \delta y' + \left(Z' - \lambda' \frac{dz'}{ds'} \right) \delta z'; \end{aligned}$$

с этой частью следует поступать в различных случаях таким же образом, как это было показано в предыдущих пунктах.

38. Предположим теперь, что нить, все точки которой находятся под действием одних и тех же сил X, Y, Z и концы которой сверх того находятся под действием сил $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$, — должна лежать на заданной кривой поверхности, уравнение которой

$$dz = p dx + q dy$$

и что требуется определить фигуру и положение этой нити на указанной поверхности, когда нить находится в равновесии.

Эта задача, которую, вероятно, было бы трудно *) решить с помощью обычных законов механики, решается очень легко с помощью нашего метода и наших формул. В самом деле, из заданного уравнения поверхности, меняя символ d на δ , мы получаем

$$\delta z = p \delta x + q \delta y;$$

таким образом остается только это значение дифференциала δz подставить в члены, стоящие под знаком интеграла общего уравнения равновесия нити (п. 29) и затем приравнять нулю отдельно величины, в состав которых входят вариации δx и δy . Указанным путем мы получим два следующих неопределенных уравнения:

$$X dm - d \frac{\lambda dx}{ds} + p Z dm - d \left(\frac{\lambda dz}{ds} \right) = 0,$$

$$Y dm - d \frac{\lambda dy}{ds} + q Z dm - d \left(\frac{\lambda dz}{ds} \right) = 0,$$

которые, будучи соединены с уравнением $dz = p dx + q dy$ поверхности и затем путем исключения освобождены от неопределенной величины λ , послужат для определения формы кривой равновесия нити.

*) Непонятно, почему Лагранж считал, что эту задачу трудно разрешить непосредственно. Те уравнения, к которым он приходит, просто указывают, что оба натяжения на краях элемента, будучи соединены с силами, воздействующими на этот элемент, дают результирующую, направленную нормально к поверхности. Это условие представляется ясным a priori. *Прим. Вермана.*

39. Далее, так как мы допустили, что нить всей своей длиной лежит на указанной поверхности, то мы и для обеих крайних ее точек имеем

$$\delta z' = p' \delta x' + q' \delta y' \quad \text{и} \quad \delta z'' = p'' \delta x'' + q'' \delta y''.$$

Внесем еще эти значения в члены, стоящие вне знака интеграла в общем уравнении, или, еще лучше, в формулу, приведенную в пункте 37, в которой приняты во внимание и силы $X', Y', Z', \dots$; затем приравняем нулю отдельно величины, в состав которых входит каждая из четырех оставшихся вариаций $\delta x', \delta y', \delta x'', \delta y''$; тогда мы получим четыре следующих новых определенных уравнения:

$$X' - \lambda' \frac{dx'}{ds'} + p' \left(Z' - \lambda' \frac{dz'}{ds'} \right) = 0,$$

$$Y' - \lambda' \frac{dy'}{ds'} + q' \left(Z' - \lambda' \frac{dz'}{ds'} \right) = 0,$$

$$X'' + \lambda'' \frac{dx''}{ds''} + p'' \left(Z'' + \lambda'' \frac{dz''}{ds''} \right) = 0,$$

$$Y'' + \lambda'' \frac{dy''}{ds''} + q'' \left(Z'' + \lambda'' \frac{dz''}{ds''} \right) = 0,$$

которым следует удовлетворить при посредстве постоянных.

40. Однако вместо того, чтобы, как мы это выше сделали, подставить значение δz , выраженное через δx и δy с помощью уравнения $\delta z = p \delta x + q \delta y = 0$ — можно было бы рассматривать это последнее уравнение как новое неопределенное условное уравнение; тогда следовало бы это уравнение помножить на другой неопределенный коэффициент μ , взять от него полный интеграл и прибавить к общему уравнению равновесия (п. 29). В результате этого часть уравнения, находящаяся под знаком интеграла, получила бы следующий вид:

$$S \left[\left(X dm - d \frac{\lambda dx}{ds} - \mu p \right) \delta x + \left(Y dm - d \frac{\lambda dy}{ds} - \mu q \right) \delta y + \left(Z dm - d \frac{\lambda dz}{ds} + \mu \right) \delta z \right];$$

и мы тотчас же получили бы три следующих неопределенных уравнения:

$$X dm - d \frac{\lambda dx}{ds} - \mu p = 0,$$

$$Y dm - d \frac{\lambda dy}{ds} - \mu q = 0,$$

$$Z dm - d \frac{\lambda dz}{ds} + \mu = 0,$$

которые, после исключения μ , дали бы те же самые уравнения, какие мы уже нашли раньше (п. 38). Однако последние уравнения имеют известное преимущество, так как они одновременно дают возможность, на основе теории, изложенной в пункте 5 отдела IV, определить давление, оказываемое каждым элементом нити на поверхность.

В самом деле, из указанной теории легко вывести, что члены

$$\mu (\delta z - p \delta x - q \delta y),$$

получающиеся из условного уравнения

$$\delta z - p \delta x - q \delta y = 0,$$

могут выражать действие силы, равной $\mu \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ и приложенной

к каждому элементу ds нити по направлению, перпендикулярному к поверхности, уравнение которой

$$\delta x - p \delta x - q \delta y = 0, \text{ или } dz - p dx - q dy = 0,$$

т. е. к поверхности, на которой лежит нить. Эта поверхность благодаря своему сопротивлению развивает силу $\mu \sqrt{1+p^2+q^2}$, которая, следовательно, равна и направлена противоположно давлению, оказываемому на нее нитью (отд. IV, п. 7); таким образом давление каждой точки нити равно $\mu \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{ds}$,

или, если подставить значения μ , μp , μq , полученные из приведенных выше уравнений,

$$\sqrt{\left(X - m - d \frac{\lambda dx}{ds}\right)^2 + \left(Y dm - d \frac{\lambda dy}{ds}\right)^2 + \left(Z dm - d \frac{\lambda dz}{ds}\right)^2} ds.$$

Те же самые рассуждения следует затем применить к той части общего уравнения, которая находится вне знака $\oint$, что приведет к аналогичным выводам.

41. Если нить, лежащая на заданной поверхности, находится только под действием сил, приложенных к ее концам, то $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ и, значит, $d\lambda=0$ (пункт 30); таким образом в данном случае λ равна постоянной величине. Следовательно, натяжение нити повсюду одно и то же (п. 31), что совпадает с тем, что нам было известно уже и раньше. В этом случае общая формула равновесия нити сведется к

$$\lambda \oint ds + \oint \mu (\delta x - p \delta x - q \delta y) = 0;$$

первый член этого уравнения равен также $\lambda \oint ds$ или $\lambda \delta s$. Таким образом приведенное уравнение выражает, что длина кривой, образуемой нитью на поверхности, заданной уравнением $dz - p dx - q dy = 0$, должна быть максимумом или минимумом; давление, оказываемое нитью на каждую точку этой поверхности, будет тогда равно

$$\lambda \frac{\sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}}{ds}.$$

Но известно, что $\sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}$ представляет собою выражение угла смежности кривой, величина которого равна $\frac{ds}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны. Таким образом, указанное выше давление равно $\frac{\lambda}{\rho}$, т. е. оно обратно пропорционально радиусу кривизны.

§ II. О равновесии гибкой и вместе с тем поддающейся растяжению и сокращению нити или поверхности.

42. До сих пор мы предполагали, что нить перастяжима; теперь же рассмотрим ее в предположении, что она подобно пружине способна растягиваться и сокращаться, и пусть F' будет та сила, с которой каждый элемент кривой, образуемой нитью, стремится сократиться; тогда, аналогично тому, как это было в пункте 18 (поставив ds вместо f и переименовав символ d на δ), мы получим момент этой силы $F' \delta ds$ и в качестве суммы моментов

всех сил сокращения, действующих по всей длине нити, выражение $\int F \delta ds$. Этот интеграл $\int F \delta ds$ следует в данном случае прибавить к интегралу

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm,$$

выражающему сумму моментов всех внешних сил, действующих на нить (п. 28); приравняв всю сумму нулю, мы получим общее уравнение равновесия упругой нити.

Легко видеть, что это уравнение будет иметь такой же вид, как уравнение, приведенное в пункте 29 для случая нерастяжимой нити, и что при замене F на λ эти уравнения станут тождественными. Таким образом для рассматриваемого теперь случая мы имеем те же частные уравнения равновесия нити, какие были найдены нами в пункте 30; в последних следует лишь подставить F вместо λ . Если же величину F исключить — подобно тому, как мы исключали величину λ , — то для кривой, образуемой растяжимой нитью, мы получим два уравнения, которые будут совершенно тождественны с уравнениями, имеющими силу для нерастяжимой нити.

43. Что касается величины F , выражающей упругость или силу сокращения каждого элемента ds , то представляется естественным выразить ее с помощью функции растяжения, испытываемого этим элементом под действием сил X, Y, Z . Таким образом, если допустить, что ds — это первоначальная длина ds , можно на F смотреть как на заданную функцию $\frac{ds}{ds}$; но так как согласно природе дифференциального исчисления абсолютное значение элемента ds остается неопределенным, то и значение F тоже остается неопределенным и может быть установлено только с помощью одного из трех уравнений равновесия нити. Таким образом, хотя в настоящем случае наш анализ как будто дает одно лишнее уравнение, однако в действительности он дает только те уравнения, которые необходимы для определения кривой, образуемой нитью, а также сопротивления каждого из ее элементов.

Так как величина λ решения, приведенного в пункте 30, в точности соответствует величине F , выражающей фактическую силу, с которой каждый элемент нити натягивается под действием внешних сил, то отсюда следует, что и величину λ можно рассматривать как выражающую натяжение нерастяжимой нити. Последнее мы уже установили *a priori* в пункте 31.

44. Применим теперь те же принципы к определению равновесия поверхности, все элементы dm которой способны растягиваться и сокращаться. Элемент поверхности, координаты которого равны x, y, z , — если z рассматривается как функция x и y , — выражается с помощью формулы

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Поэтому, если обозначить через F *) силу упругости, с которой этот

*) Приведенный способ исчисления совокупности сил, развиваемых упругостью в одной точке, представляется недостаточно обоснованным. Это верно, что здесь, равно как и раньше в ряде случаев, Лагранж употребляет слово *сила* в таком смысле, который отклоняется от обычного; однако нигде не следует, чтобы сумма моментов сил, действующих на один элемент, была пропорциональна сокращению элемента. Мы можем даже прибавить, что это утверждение неточно. Пуассон отметил это обстоятельство в *Mémoires de l'Institut* за 1812 г.; впрочем, предложенное им решение тоже не обладает достаточной общностью: оно предполагает, что силы натяжения прямоугольного элемента направлены перпендикулярно к сторонам этого элемента, а это в общем случае не имеет места. *Прим. Бертрана.*

элемент стремится сокращаться, то сумма моментов всех этих сил выражается с помощью двойного интеграла

$$\iint F \delta \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \right].$$

Если этот интеграл прибавить к двойному интегралу [16]

$$\iint (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm,$$

в котором dm является элементом поверхности, то мы получим сумму моментов всех сил, которая при равновесии должна равняться нулю.

Положив, как в пункте 31 отдела IV,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'', \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + z'^2 + z''^2} = U,$$

мы получим

$$dm = U dx dy \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z'} = \frac{z'}{U}, \quad \frac{\partial U}{\partial z''} = \frac{z''}{U};$$

следовательно (п. 33, 34 отд. IV),

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{1}{U} \left(z' \frac{\partial u}{\partial x} + z'' \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \delta (U dx dy) &= \left[\delta U + U \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Если эти значения подставить в двойной интеграл $\iint F \delta (U dx dy)$ и путем интегрирования по частям избавиться от частных дифференциалов вариаций, обозначенных через δ , то мы получим

$$\begin{aligned} S \left(U \delta y + \frac{z'}{U} \delta u \right) F dx + S \left(U x + \frac{z''}{U} \delta u \right) F dy + \iint \left[\left(F \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial F U}{\partial x} \right) \delta x + \right. \\ \left. + \left(F \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial F U}{\partial y} \right) \delta y - V \delta u \right] dx dy, \end{aligned}$$

где

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \frac{F z'}{U} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{F z''}{U} \quad \text{и} \quad \delta u = \delta z - z' \delta x - z'' \delta y \quad (\text{см. указ. пункты}).$$

Простые интегралы по x и y относятся к границам; в случае, если мы допустим, что края поверхности закреплены неподвижно, эти интегралы сами собою исчезают, так как при этих условиях вариации δx , δy , δz во всех точках контура поверхности равны нулю.

Если члены, стоящие под двойным знаком $\iint$, сложить с членами двойного интеграла $\iint (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) U dx dy$ и отдельно приравнять нулю коэффициенты вариаций δx , δy , δz , то мы получим следующие три уравнения *):

$$\begin{aligned} XU + F \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U F}{\partial x} + V z' &= 0, \\ YU + F \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U F}{\partial y} + V z'' &= 0, \\ ZU - V &= 0. \end{aligned}$$

*) Здесь следует отметить, что заключения Лагранжа оказались бы несостоятельными, если бы допустить, что δz является функцией одной только переменной x , а δy — функцией одной только переменной y , как можно было бы попытаться

Первые два уравнения дадут значение силы F , которую следует подставить в выражение V третьего уравнения, так что при окончательном анализе мы получим только одно уравнение в частных дифференциалах для определения поверхности равновесия.

Хотя мы и должны предположить, что сила F является известной функцией элемента dm поверхности в ее состоянии сжатия или расширения, она в действительности не становится от этого менее неопределенной, так как абсолютный размер элемента поверхности не может быть введен в расчет; таким образом значение F может быть определено только с помощью самих условий равновесия: здесь мы имеем дело со случаем, аналогичным случаю, рассмотренному в п. 43.

45. Для того чтобы исключить величину F , подставим в два первых уравнения значение V , выведенное из последнего; тогда эти уравнения примут следующий вид:

$$U \left(X + Z \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial UF}{\partial x} = 0,$$

$$U \left(X + Z \frac{\partial z}{\partial y} \right) + F \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial UF}{\partial y} = 0.$$

Пусть, как в пункте 28,

$$X dx + Y dy + Z dz = d\Pi;$$

тогда, поскольку z считается функцией x и y , мы имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = X + Z \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = Y + Z \frac{\partial z}{\partial y},$$

и приведенные два уравнения, по разделении их на U , преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

из чего получается просто следующее:

$$d\Pi = dF, \quad \text{откуда} \quad F = \Pi + \alpha.$$

Этот вывод совпадает с выводом пункта 36 отдела IV. Далее, если Π рассматривать как функцию x , y , z , то третье уравнение даст

$$U \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \frac{Fz'}{U}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{Fz'}{U}}{\partial y} = 0;$$

это и есть уравнение поверхности.

сделать, вспоминая о предпосылках, на которых основаны (отд. IV, п. 33, 34) формулы, примененные здесь Лагранжем. Действительно, для того чтобы интеграл

$$\iint (A \delta x + B \delta y + C \delta z) dx dy$$

был равен нулю на основе этих предпосылок, уже необязательно, чтобы в каждой точке было $A = B = C = 0$, но достаточно, чтобы было $\oint A dy = 0$ для всех значений x , $\oint B dx = 0$ для всех значений y и $C = 0$ для всех значений x и y . Сопоставьте это замечание с примечанием, относящимся к пункту 31 отд. IV. *Прим. Дарбу.*

Если поверхность очень мало отличается от плоскости, так что ордината z очень мала, тогда, отбросив бесконечно малые величины второго порядка, мы получим

$$U=1; \text{ но } F=\Pi+a,$$

где a — постоянная величина; следовательно, уравнение поверхности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial (\Pi + a)}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial (\Pi + a)}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Если предположить, что имеется только сила тяжести g , действующая по направлению координаты z , стремясь ее увеличить, то мы получим $\Pi = -gz$; следовательно, отбрасывая вторые измерения z , мы будем иметь

$$a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = -g.$$

Это уравнение вообще интегрируемо, но только с помощью мнимых функций, благодаря которым это решение становится мало пригодным для применения [17].

§ III. О равновесии упругой нити или пластины.

46. Обратимся снова к случаю нерастяжимой нити, но вместо того, чтобы принять ее совершенно гибкой, как мы это делали до сих пор, допустим, что она упруга — в том смысле, что в каждой точке ее имеется сила, назову ее E , которая противодействует изгибанию нити и которая, следовательно, стремится уменьшить угол смежности *). Если мы этот угол назовем e , то как и в пункте 26 (подставив только δ вместо d) мы получим для момента каждой силы E выражение $E\delta e$; следовательно, $\sum E\delta e$ будет суммой моментов всех сил упругости, действующих на всю длину нити, которую надо будет прибавить к первому члену общего уравнения равновесия, выведенного для случая нерастяжимой и совершенно гибкой нити (п. 29).

Вся трудность задачи заключается в том, чтобы придать интегралу $\sum E\delta e$ подходящий вид; для этого следует начать с определения значения e . Выше мы нашли (п. 26)

$$-\cos e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg},$$

откуда следует

$$\sin^2 e = \frac{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2g^2}.$$

Для того чтобы эти формулы применить к рассматриваемому случаю, достаточно заметить, что координаты $x', y', s', x'', y'', s'', x''', y''', s'''$, с помощью которых мы выразили величины f, g, h (п. 12 и 20), здесь превращаются

*) Принятое Лагранжем выражение для подсчета суммы моментов сил упругости неприменимо по отношению к кривым двойной кривизны. Это отметил Бине (Binet) в X томе Journal de l'Ecole Polytechnique. См. также мемуар Пуассона, входящий в III том Correspondance sur l'Ecole Polytechnique. Эти геометры правильно отмечают, что в выражение суммы моментов следует ввести член, пропорциональный вариации угла между двумя последовательными соприкасающимися плоскостями. (См. статью в конце настоящего тома.) Прим. Вермана.

в $x, y, z; x + dx, y + dy, z + dz; x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z$; так что мы имеем

$$f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

$$\begin{aligned} g^2 &= (dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2 = \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 = \\ &= ds^2 + 2ds d^2s + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2 = \\ &= 4ds^2 + 4ds d^2s + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2. \end{aligned}$$

Таким образом

$$f^2 + g^2 - h^2 = -2ds^2 - 2ds d^2s$$

и

$$\begin{aligned} 4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2 &= 4ds^4 + 8ds^3d^2s + 4ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - \\ &- 4(ds^2 + ds d^2s)^2 = 4ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]. \end{aligned}$$

Если отбросить бесконечно малые третьего порядка, то мы получим

$$\sin^2 e = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}{ds^2}.$$

Так как это значение $\sin^2 e$ представляет собою бесконечно малую величину второго порядка, то отсюда следует, что $\sin e$, а следовательно, и угол e , является бесконечно малой первого порядка, так что

$$e = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}{ds};$$

эта формула представляет собою выражение угла смежности любой кривой двойной кривизны: она находится в соответствии с выражением, приведенным в пункте 41.

47. Продифференцируем теперь e в смысле δ для того, чтобы получить значение δe . Так как благодаря условию нерастяжимости нити мы имеем уже $\delta ds = 0$ (п. 29), а следовательно, и $\delta \delta ds = \delta d^2s = 0$, то при настоящем дифференцировании можно ds и d^2s рассматривать как постоянные величины. Таким образом мы получим

$$\delta e = \frac{d^2x \delta d^2x + d^2y \delta d^2y + d^2z \delta d^2z}{ds \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Подставив это значение в $\mathbf{S} E \delta e$ и положив для краткости

$$I = \frac{E}{ds \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

мы будем иметь

$$\mathbf{S} E \delta e = \mathbf{S} I d^2x \delta d^2x + \mathbf{S} I d^2y \delta d^2y + \mathbf{S} I d^2z \delta d^2z.$$

Если с этими выражениями поступить по правилам, наложенным в п. 15 отд. IV, переименовав сначала символ δd на $d\delta$ и затем проинтегрировав

по частям с тем, чтобы добиться исчезновения символа d перед δ , мы получим следующие преобразованные выражения

$$\begin{aligned} S I d^2 x \delta d^2 x = & + I'' d^2 x'' d \delta x'' - d(I'' d^2 x'') \delta x'' - \\ & - I' d^2 x' d \delta x' + d(I' d^2 x') \delta x' + S d^2(I d^2 x) \delta x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S I d^2 y \delta d^2 y = & + I'' d^2 y'' d \delta y'' - d(I'' d^2 y'') \delta y'' - \\ & - I' d^2 y' d \delta y' + d(I' d^2 y') \delta y' + S d^2(I d^2 y) \delta y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S I d^2 z \delta d^2 z = & + I'' d^2 z'' d \delta z'' - d(I'' d^2 z'') \delta z'' - \\ & - I' d^2 z' d \delta z' + d(I' d^2 z') \delta z' + S d^2(I d^2 z) \delta z. \end{aligned}$$

Эти различные члены прибавим к членам, образующим первую часть общего уравнения равновесия, указанного в п. 29, и тогда мы получим уравнение равновесия нерастяжимой и упругой нити.

48. Прежде всего приравняем нулю коэффициенты вариаций δx , δy , δz , находящихся под знаком интеграла S , и получим три следующих неопределенных уравнения

$$X dm - d \frac{\lambda dx}{ds} + d^2(I d^2 x) = 0,$$

$$Y dm - d \frac{\lambda dy}{ds} + d^2(I d^2 y) = 0,$$

$$Z dm - d \frac{\lambda dz}{ds} + d^2(I d^2 z) = 0,$$

из которых следует исключить неопределенную величину λ , в результате чего они сведутся к двум уравнениям, которых будет достаточно для определения кривой, образуемой нитью.

Первое интегрирование дает

$$\lambda \frac{dx}{ds} - d(I d^2 x) = A + \int X dm,$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} - d(I d^2 y) = B + \int Y dm,$$

$$\lambda \frac{dz}{ds} - d(I d^2 z) = C + \int Z dm,$$

где A , B , C — произвольные постоянные; исключив λ , мы получим

$$dx d(I d^2 y) - dy d(I d^2 x) = (A + \int X dm) dy - (B + \int Y dm) dx,$$

$$dx d(I d^2 z) - dz d(I d^2 x) = (A + \int X dm) dz - (C + \int Z dm) dx,$$

$$dy d(I d^2 z) - dz d(I d^2 y) = (B + \int Y dm) dz - (C + \int Z dm) dy,$$

последнее из этих уравнений содержится уже в первых двух. Эти уравнения могут быть снова проинтегрированы, после чего получится

$$I(dx d^2 y - dy d^2 x) = F + \int (A + \int X dm) dy - \int (B + \int Y dm) dx,$$

$$I(dx d^2 z - dz d^2 x) = G + \int (A + \int X dm) dz - \int (C + \int Z dm) dx,$$

$$I(dy d^2 z - dz d^2 y) = H + \int (B + \int Y dm) dz - \int (C + \int Z dm) dy,$$

где F , G , H — новые постоянные величины.

Но выше (п. 47) мы положили

$$I = \frac{E}{ds \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}};$$

квадрат знаменателя этого выражения равен

$$\begin{aligned} ds^2 [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - ds^3 (d^2s)^2 = \\ = (dx^2 + dy^2 + dz^2) [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx d^2x + dy d^2y + \\ + dz d^2z)^2 = (dx d^2y - dy d^2x)^2 + (dx d^2z - dz d^2x)^2 + (dy d^2z - dz d^2y)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если мы сложим вместе квадраты трех приведенных выше уравнений, то мы получим следующее уравнение, в состав которого уже не входят дифференциалы.

$$\begin{aligned} E^2 = [F + \int (A + \int X dm) dy - \int (B + \int Y dm) dx]^2 + \\ + [G + \int (A + \int X dm) dz - \int (C + \int Z dm) dx]^2 + \\ + [H + \int (B + \int Y dm) dz - \int (C + \int Z dm) dx]^2; \end{aligned}$$

а если два из числа тех же уравнений разделить одно на другое, то мы получим следующее уравнение, в которое уже не входит упругость

$$\frac{dx d^2z - dz d^2x}{dx d^2y - dy d^2x} = \frac{G + \int (A + \int X dm) dz - \int (C + \int Z dm) dx}{F + \int (A + \int X dm) dy - \int (B + \int Y dm) dx}.$$

Эти два уравнения и дают возможность наиболее просто определить упругую кривую, принимая при этом во внимание двойную кривизну.

49. Обычно принимают, что упругая сила, противодействующая изгибанию, обратно пропорциональна радиусу кривизны. Следовательно, если этот радиус назвать ρ , мы будем иметь $E = \frac{K}{\rho}$, где K — постоянный коэффициент.

Но, как известно, $\rho = \frac{ds}{e}$; следовательно, $E = \frac{Ke}{ds}$, и величина I , которую мы положили равной $\frac{E}{e ds^2}$ (п. 47), переходит в $\frac{K}{ds^2}$; таким образом она становится постоянной величиной, если мы предположим, а это вполне допустимо, что ds является величиной постоянной.

Таким образом первые три уравнения (п. 48) получают следующий вид:

$$X_3 dm - d \frac{\lambda dx}{ds} + K \frac{d^4x}{ds^3} = 0,$$

$$Y dm - d \frac{\lambda dy}{ds} + K \frac{d^4y}{ds^3} = 0,$$

$$Z_4 dm - d \frac{\lambda dz}{ds} + K \frac{d^4z}{ds^3} = 0.$$

Если все эти три уравнения сложить вместе, помножив предварительно первое на $\frac{dx}{ds}$, второе на $\frac{dy}{ds}$ и третье на $\frac{dz}{ds}$, то в силу соотношения

$$\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} d \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} \right) = 0,$$

мы получим следующее уравнение

$$(X dx + Y dy + Z dz) \frac{dm}{ds} + K \frac{dx d^4x + dy d^4y + dz d^4z}{ds^4} = d\lambda.$$

Пусть Γ — толщина нити; тогда $dm = \Gamma ds$. Если приведенное выше уравнение проинтегрировать, допустив, что ds постоянная величина, то оно даст

$$\lambda = \int \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) + \\ + K \left[\frac{dx \, d^2x + dy \, d^2y + dz \, d^2z}{ds^4} - \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}{2ds^4} \right].$$

Это значение λ выражает натяжение упругой пластинки, т. е. сопротивление, оказываемое ею силе, стремящейся ее удлинить аналогично тому, как это было в п. 31.

50. Наиболее простым и обычным является тот случай, когда силы X , Y , Z , которые согласно допущению действуют на все точки упругой пластинки, равны нулю и когда кривизна пластинки получается исключительно в результате действия сил, приложенных к обоим ее концам. В этом случае интегральные формулы, приведенные в п. 48, при замене Γ его значением $\frac{K}{ds^3}$, дают

$$K \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{ds^3} = F + Ay - Bx,$$

$$K \frac{dx \, d^2z - dz \, d^2x}{ds^3} = G + Az - Cx,$$

$$K \frac{dy \, d^2z - dz \, d^2y}{ds^3} = H + Bz - Cy;$$

однако дальнейшее интегрирование этих уравнений, как общее правило, быть может, и неосуществимо *).

Если искривление пластинки производится лишь в одной плоскости, то, приняв эту плоскость в качестве плоскости x и y и положив $dy = ds \sin \varphi$ и $dx = ds \cos \varphi$, мы можем привести первое уравнение, которое в этом случае является единственно необходимым, к следующему виду:

$$\frac{d\varphi}{ds} = F + A \int \sin \varphi \, ds - B \int \cos \varphi \, ds,$$

это уравнение после дифференцирования дает

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = A \sin \varphi - B \cos \varphi;$$

если последнее умножить на $d\varphi$ и проинтегрировать, то мы получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi^2}{ds^2} = A \cos \varphi + B \sin \varphi + D.$$

Откуда

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{2D + 2A \cos \varphi + 2B \sin \varphi}}$$

и, следовательно,

$$dx = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{2D + 2A \cos \varphi + 2B \sin \varphi}};$$

*) Это интегрирование было выполнено Вьез, который последовал даже уравнения более общего вида; к последним он пришел, восполнив в общей сумме моментов сил упругости член, пропорциональный вариации угла между двумя последовательными соприкасающимися плоскостями (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1844, 1^{re} Semestre, p. 1115). Прим. Бертрана.

а так как из первого уравнения мы имеем $F + Ay - Bx = \frac{d\varphi}{ds}$, то получается

$$y = \frac{Bx - F}{A} = \frac{1}{A} \sqrt{2D + 2A \cos \varphi + 2B \sin \varphi}.$$

Таким образом теперь все сводится к тому, чтобы проинтегрировать значения ds и dx . Однако эти интегрирования связаны с определенным длинны конических сечений. Повидимому, с решением общей проблемы упругой кривой мы до сих пор дальше не продвинулись.

51. Рассмотрим теперь члены общего уравнения, стоящие вне знака S . Члены эти следующие:

$$\begin{aligned} & \left[\lambda'' \frac{dx''}{ds''} - d(I'' d^2 x'') \right] \delta x'' + I'' d^2 x'' d \delta x'' + \\ & + \left[\lambda'' \frac{dy''}{ds''} - d(I'' d^2 y'') \right] \delta y'' + I'' d^2 y'' d \delta y'' + \\ & + \left[\lambda'' \frac{dz''}{ds''} - d(I'' d^2 z'') \right] \delta z'' + I'' d^2 z'' d \delta z'' - \\ & - \left[\lambda' \frac{dx'}{ds'} - d(I' d^2 x') \right] \delta x' + I' d^2 x' d \delta x' - \\ & - \left[\lambda' \frac{dy'}{ds'} - d(I' d^2 y') \right] \delta y' + I' d^2 y' d \delta y' - \\ & - \left[\lambda' \frac{dz'}{ds'} - d(I' d^2 z') \right] \delta z' + I' d^2 z' d \delta z'; \end{aligned}$$

исчезновения этих членов следует добиться независимо от значений $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d \delta x''$, ...

Следовательно: 1) если нить совершенно свободна, то коэффициенты 12 величин $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d \delta x''$, $d \delta y''$, $d \delta z''$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d \delta x'$, $d \delta y'$, $d \delta z'$ должны порознь равняться нулю.

Но из первых интегральных формул п. 48 видно, что если интегрирование начать с первой точки нити, то коэффициенты при $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ принимают значения A , B , C , а коэффициенты при $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ получают следующий вид $A + \int X dm$, $B + \int Y dm$, $C + \int Z dm$. Таким образом в рассматриваемом случае мы должны иметь

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

$$\text{и} \quad \int X dm = 0, \quad \int Y dm = 0, \quad \int Z dm = 0.$$

Далее, мы должны также иметь

$$\begin{aligned} I'' d^2 x'' &= 0, \quad I'' d^2 y'' = 0, \quad I'' d^2 z'' = 0 \\ I' d^2 x' &= 0, \quad I' d^2 y' = 0, \quad I' d^2 z' = 0; \end{aligned}$$

последнее должно иметь место для того, чтобы добиться исчезновения членов, связанных с $d \delta x''$, $d \delta y''$, ...; отсюда ясно, что вторые интегральные уравнения того же пункта дадут

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0,$$

$$\text{и} \quad S(dy \int X dm - dx \int Y dm) = 0, \quad S(dz \int X dm - dx \int Z dm) = 0,$$

$$S(dz \int Y dm - dy \int Z dm) = 0.$$

2) Если первый конец нити закреплен неподвижно, то

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta z' = 0;$$

следовательно, A, B, C уже не будут равны нулю; но условие, что коэффициенты $\delta x'', \delta y'', \delta z''$ должны равняться нулю, дает

$$A = -\int X dm, \quad B = -\int Y dm, \quad C = -\int Z dm;$$

а если сверх того дано и положение касательной в этом первом конце нити, то мы также имеем

$$d\delta x' = 0, \quad d\delta y' = 0, \quad d\delta z' = 0;$$

следовательно, F, G, H уже не будут нулями; однако условие, что коэффициенты $d\delta x'', d\delta y'', d\delta z''$ должны равняться нулю, приводит нас к следующим соотношениям

$$F = \int (B + \int Y dm) dx - (A + \int X dm) dy,$$

$$G = \int (C + \int Z dm) dx - (A + \int X dm) dz,$$

$$H = \int (C + \int Z dm) dy - (B + \int Y dm) dz.$$

Совершенно таким же образом следует учитывать состояние второго конца нити.

3) Если бы помимо сил, действующих на все точки нити, существовали еще особые силы $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$, приложенные к одному и к другому концам нити, то к приведенным выше членам следовало бы только прибавить следующие

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'',$$

а если бы сверх того имелись еще и другие условия, касающиеся концов нити, то и дальше следовало бы всегда поступать точно таким же образом и согласно тем же принципам.

52. Если бы мы пожелали, чтобы нить была упруга в двух отношениях, как в смысле растяжимости, так и в смысле гибкости, то нам следовало бы в общем уравнении вместо члена $\int \lambda d\delta s$ иметь член $\int F d\delta s$, т. е. просто вместо λ поставить F , понимая под F силу упругости, противодействующую растяжению нити (п. 42). Однако в этом случае следует; сверх того в выражении для δe рассматривать ds как величину переменную следовательно, к значению δe , приведенному в п. 47, надо еще прибавить два следующих члена

$$-\frac{e\delta ds}{ds} - \frac{d^2s\delta d^2s}{e ds^2}.$$

Тогда к значению $\int E \delta e$, указанному в том же пункте, прибавится

$$-\int \frac{Ee}{ds} \delta ds - \int \frac{E d^2s}{e ds^2} \delta d^2s.$$

Но последний член сначала приводится к следующему виду:

$$-\frac{E'' d^2s''}{e'' ds''^2} d\delta s'' + \frac{E' d^2s'}{e' ds'^2} d\delta s' + \int d\frac{E d^2s}{e ds^2} \delta ds;$$

таким образом к значению $\int E \delta s$ следует прибавить приведенные ниже члены

$$-\frac{E'' d^2 s''}{e'' d s''^2} d \delta s'' + \frac{E' d^2 s'}{e' d s'^2} d \delta s' + S \left(d \frac{E d^2 s}{e d s^2} - \frac{E e}{d s} \right) \delta d s.$$

Последний член этого выражения аналогичен члену $\int F \delta d s$ и поэтому может быть так же преобразован; что касается двух других членов, то в них следует только вместо $d \delta s$ подставить его значение $\frac{dx d \delta x + dy d \delta y + dz d \delta z}{ds}$, сгладив все буквы одним или двумя штрихами.

Отсюда легко заключить, что для решения настоящей задачи мы имеем те же формулы, что и для случая, когда мы допускаем, что упругая нить нерастяжима. В этих формулах следует лишь вместо λ поставить $F + d \frac{E d^2 s}{e d s^2} - \frac{E e}{d s}$ и к членам, стоящим вне знака $\int$, прибавить два члена $\frac{E' d^2 s'}{e' d s'^2} d \delta s' - \frac{E'' d^2 s''}{e'' d s''^2} d \delta s''$.

Так как в уравнении кривой величина λ должна быть исключена, то отсюда следует, что уравнение упругой пластинки будет одно и то же, независимо от того, примем ли мы, что она растяжима или же нет. Но натяжение нити, выражающееся с помощью λ или с помощью F , когда нить неупруга (п. 43), увеличится благодаря упругости на величину $d \frac{E p d^2 s}{d s^3} - \frac{E}{p}$, так как $e = \frac{ds}{p}$ (п. 49).

§ IV. О равновесии жесткой нити заданной формы.

53. Займемся теперь случаем нерастяжимой и негибкой нити; здесь мы будем иметь для суммы моментов сил ту же самую интегральную формулу, что и для случая, упомянутого в п. 28, т. е. $\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm$. Далее, условие нерастяжимости нити даст, как и в указанном выше пункте, $\delta ds = 0$; в силу неизгибаемости $\delta e = 0$, так как угол смежности должен остаться постоянным. Однако как мы сейчас увидим этих двух условий еще недостаточно в том случае, когда кривая имеет двойную кривизну.

Для того чтобы разрешить этот вопрос наиболее просто и наиболее прямым путем, я отмечу, что здесь все сводится к тому, что различные точки кривой, образуемой нитью, постоянно сохраняют между собою одни и те же взаимные расстояния. Поэтому, если рассмотреть большое количество расположенных друг за другом точек, координаты которых соответственно равны

$$x, y, z, \quad x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz, \quad x + 2dx + d^2x, \\ y + 2dy + d^2y, \quad z + 2dz + d^2z, \quad \dots,$$

то ясно, что квадраты расстояний между первой из этих точек и следующими выразятся с помощью величин

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2, \\ (3dx + 3d^2x + d^3x)^2 + (3dy + 3d^2y + d^3y)^2 + (3dz + 3d^2z + d^3z)^2, \quad \dots$$

Для краткости положим

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha, \\ (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 = \beta, \\ (d^3x)^2 + (d^3y)^2 + (d^3z)^2 = \gamma, \\ \dots \dots \dots ;$$

если приведенные величины развернуть, то они примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & \alpha, \\ & 4\alpha + 2d\alpha + \beta, \\ & 9\alpha + 9d\alpha + 9\beta + 3(d^2\alpha - 2\beta) + 3d\beta + \gamma, \\ & \dots \end{aligned}$$

Таким образом вариации этих величин должны равняться нулю на всем протяжении кривой, что дает следующие неопределенные уравнения

$$\begin{aligned} & \delta\alpha = 0, \\ & 4\delta\alpha + 2\delta d\alpha + \delta\beta = 0, \\ & 9\delta\alpha + 9\delta d\alpha + 3\delta\beta + 3\delta d^2\alpha + 3\delta d\beta + \delta\gamma = 0, \\ & \dots \end{aligned}$$

Но если $\delta\alpha$ равно нулю, то и $\delta d\alpha = \delta d\alpha = 0$; следовательно, $\delta\beta = 0$. Отсюда получается $d^2\delta\alpha = \delta d^2\alpha = 0$, $\delta d\beta = \delta d\beta = 0$; следовательно, $\delta\gamma = 0$ и т. д.

Таким образом условные уравнения для нерастяжимости и негибкости нити сведутся к следующим $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, т. е. если продифференцировать и вместо δd поставить $d\delta$, то мы получим

$$\begin{aligned} & dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z = 0, \\ & d^2x d^2\delta x + d^2y d^2\delta y + d^2z d^2\delta z = 0, \\ & d^3x d^3\delta x + d^3y d^3\delta y + d^3z d^3\delta z = 0, \\ & \dots \end{aligned}$$

Ясно, что для определения трех вариаций δx , δy , δz достаточно трех из этих уравнений; отсюда прежде всего можно заключить, что если мы удовлетворим первым трем уравнениям, то и все прочие уравнения, которых можно привести бесчисленное количество, будут тоже удовлетворены. В этом, как мы увидим ниже (п. 60)*), можно убедиться и путем расчета.

*) Приведенные уравнения выражают, что α , β , γ во время смещения кривой сохраняют одно и то же значение. Это условие эквивалентно следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \\ & \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \varphi(s), \\ & \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2 = \psi(s); \end{aligned}$$

первое из этих уравнений очевидно; второе выражает, что кривизна рассматриваемой линии является определенной функцией дуги s ; наконец, третье уравнение, в сочетании с двумя другими, выражает, что вторая кривизна является определенной функцией s . Если написать условные уравнения в указанном выше виде, отличающиеся от лагранжеского только введенными нами делителями ds^2 , ds^4 , ds^6 , то подсчеты остаются совершенно теми же, но только множители, обозначенные дальше через λ , μ , ν , будут конечными, между тем как согласно обозначению Лагранжа следует допустить, что они представляют собою бесконечно малые величины различных порядков. Было, однако, отмечено, что это последнее обстоятельство представляет собою отрицательную сторону способа выражения Лагранжа. В самом деле, если воспользоваться приемом, столь часто применявшимся Лагранжем, то множители λ , μ , ν выразят те силы, которые стремятся изменить функции α , β , γ ; в таком случае должно показаться странным, что эти силы бесконечно малы, и в особенности, что достаточно чисто алгебраического преобразования для того, чтобы они приняли конечные значения. Однако эта особенность станет понятной, если мы примем во внимание, что обычно коэффициентам λ , μ , ν не присваивают названия сил, принятого для них только в обычной фигуральной речи Лагранжа. Мы несколько раз указывали, что этого выражения не следует принимать в буквальном смысле (см. примечание к п. 9 отд. II, стр. 34).

Прим. Бертрана.

54. Итак, с помощью нашего метода получается следующее общее уравнение равновесия:

$$0 = +S(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm + \\ + S \lambda (dx d \delta x + dy d \delta y + dz d \delta z) + \\ + S \mu (d^2 x d^2 \delta x + d^2 y d^2 \delta y + d^2 z d^2 \delta z) + \\ + S \nu (d^3 x d^3 \delta x + d^3 y d^3 \delta y + d^3 z d^3 \delta z),$$

которое с помощью указанных выше преобразований приводится к такому виду:

$$0 = +S[X dm - d(\lambda dx) + d^2(\mu d^2 x) - d^3(\nu d^3 x)] \delta x + \\ + S[Y dm - d(\lambda dy) + d^2(\mu d^2 y) - d^3(\nu d^3 y)] \delta y + \\ + S[Z dm - d(\lambda dz) + d^2(\mu d^2 z) - d^3(\nu d^3 z)] \delta z + \\ + [\lambda'' dx'' - d(\mu'' d^2 x'') + d^2(\nu'' d^3 x'')] \delta x'' + \\ + [\mu'' d^2 x'' - d(\nu'' d^3 x'')] d \delta x'' + \nu'' d^3 x'' d^2 \delta x'' + \\ + [\lambda'' dy'' - d(\mu'' d^2 y'') + d^2(\nu'' d^3 y'')] \delta y'' + \\ + [\mu'' d^2 y'' - d(\nu'' d^3 y'')] d \delta y'' + \nu'' d^3 y'' d^2 \delta y'' + \\ + [\lambda'' dz'' - d(\mu'' d^2 z'') + d^2(\nu'' d^3 z'')] \delta z'' + \\ + [\mu'' d^2 z'' - d(\nu'' d^3 z'')] d \delta z'' + \nu'' d^3 z'' d^2 \delta z'' - \\ - [\lambda' dx' - d(\mu d^2 x') + d^2(\nu d^3 x')] \delta x' - \\ - [\mu d^2 x' - d(\nu d^3 x')] d \delta x' - \nu d^3 x' d^2 \delta x' - \\ - [\lambda' dy' - d(\mu d^2 y') + d^2(\nu d^3 y')] \delta y' - \\ - [\mu d^2 y' - d(\nu d^3 y')] d \delta y' - \nu d^3 y' d^2 \delta y' - \\ - [\lambda' dz' - d(\mu d^2 z') + d^2(\nu d^3 z')] \delta z' - \\ - [\mu d^2 z' - d(\nu d^3 z')] d \delta z' - \nu d^3 z' d^2 \delta z'.$$

55. Приравняв сначала нулю коэффициенты вариаций δx , δy , δz под знаком S , мы получим три следующих неопределенных уравнения

$$X dm - d(\lambda dx) + d^2(\mu d^2 x) - d^3(\nu d^3 x) = 0, \\ Y dm - d(\lambda dy) + d^2(\mu d^2 y) - d^3(\nu d^3 y) = 0, \\ Z dm - d(\lambda dz) + d^2(\mu d^2 z) - d^3(\nu d^3 z) = 0,$$

которые содержат в себе три неопределенных переменных величины λ , μ , ν и служат только для определения этих величин. Таким образом здесь нет неопределенных уравнений между различными силами X , Y , Z , которые согласно допущению приложены ко всем точкам стержня и, следовательно, условия равновесия будут зависеть только от членов, находящихся вне знака S . Но так как эти члены содержат в себе неизвестные величины λ , μ , ν , следует начать с определения этих неизвестных.

Для этого следует приведенные выше уравнения проинтегрировать, что легко сделать, и тогда мы получим три следующих уравнения:

$$\int X dm - \lambda dx + d(\mu d^2 x) - d^2(\nu d^3 x) = A, \\ \int Y dm - \lambda dy + d(\mu d^2 y) - d^2(\nu d^3 y) = B, \\ \int Z dm - \lambda dz + d(\mu d^2 z) - d^2(\nu d^3 z) = C,$$

где A , B , C — три произвольных постоянных.

Таковы уравнения, единственно необходимые для равновесия; ясно, что они соответствуют уравнениям, найденным в пункте 24.

58. Если бы стержень в своей первой точке был закреплен таким образом, что неподвижной оставалась бы не только первая точка, но и касательная к этой точке, тогда мы имели бы не только $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$, но и

$$\delta dx' = \delta \delta x' = 0, \quad \delta dy' = \delta \delta y' = 0, \quad \delta dz' = \delta \delta z' = 0;$$

следовательно, все члены, в состав которых входят эти величины, сами собою исчезли бы, и нам оставалось бы лишь добиться исчезновения членов, в состав которых входят вариации $d^2 \delta x'$, $d^2 \delta y'$, $d^2 \delta z'$ и $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d \delta x''$, $d \delta y''$, ...

Таким образом в данном случае мы имели бы только нижеследующие условия

$$\nu' = 0, \quad \lambda'' = 0, \quad \mu'' = 0, \quad \nu'' = 0, \quad d\mu'' = 0, \quad d\nu'' = 0, \quad d^2\nu'' = 0;$$

следовательно, и здесь постоянные A , B , C будут иметь значения

$$A = \int X dm, \quad B = \int Y dm, \quad C = \int Z dm,$$

далее, если три последних интеграла пункта 55 применить к последней точке стержня, то они дадут

$$F = \int (Yx - Xy) dm, \quad G = \int (Zx - Xz) dm, \quad H = \int (Zy - Yz) dm.$$

А если те же уравнения применить к первой точке, то мы будем иметь

$$\mu' (dy' d^2 x' - dx' d^2 y') - d\nu' (dy' d^3 x' - dx' d^3 y) = Ay' - Bx' + F,$$

$$\mu' (dz' d^2 x' - dx' d^2 z') - d\nu' (dz' d^3 x' - dx' d^3 z) = Az' - Cx' + G,$$

$$\mu' (dz' d^2 y' - dy' d^2 z') - d\nu' (dz' d^3 y' - dy' d^3 z) = Bz' - Cy' + H,$$

откуда, по исключении μ' и $d\nu'$, получится следующее уравнение:

$$A(y' dz' - z' dy') + B(z' dx' - x' dz') + C(x' dy' - y' dx') + F dz' - G dy' + H dx' = 0.$$

Таково уравнение, необходимое для того, чтобы предотвратить вращение стержня вокруг его первой касательной, которая согласно допущению остается неподвижной; легко видеть, что в том случае, когда стержень образует прямую линию, первый член этого уравнения превращается в нуль.

59. Как на недостаток нашего метода можно было бы указать на странность приведенного выше решения, которое действительно длиннее решения, данного для гибкой нити; между тем, при пользовании обычными методами, последняя задача представляется гораздо более трудной, чем задача о равновесии жесткого стержня, находящегося под действием любых сил; происходит это от того, что при разрешении задачи о гибкой нити приходится определять путем сложения сил форму кривой, какую нить должна принять для того, чтобы находиться в равновесии; в случае же стержня эта кривая наперед дается, и для равновесия требуется лишь, чтобы моменты сил обратились в нуль. Но когда мы ставим себе целью при разрешении всех проблем пользоваться единообразным приемом и переходить от одной проблемы к другой последовательно, по мере прибавления новых условий, то ясно, что случай негибкой нити менее прост, чем

случай гибкой нити, так как негибкость, будучи выражена аналитически, сводится к постоянству взаимных расстояний между точками нити. И если в настоящем случае, когда кривая наперед дается, она уже не является результатом расчета, как в случае гибкой нити, то это представляет собой такое обстоятельство, которое должно быть отмечено анализом и которое действительно отмечается тем, что в трех неопределенных уравнениях относительно λ , μ , ν , указанных в п. 55, остаются три неопределенных величины x , y , z , так что эти уравнения могут быть применены к любой заданной кривой. Таким образом на указанные уравнения не следует смотреть как на некоторое бесполезное излишество; сверх того, они служат для определения трех неизвестных λ , μ , ν , от которых зависят условия равновесия и которые одновременно выражают *) собою силы, противодействующие тому, чтобы значения трех функций α , β , γ изменялись под действием сил, приложенных к нити.

Конечно, три неопределенных величины λ , μ , ν должны быть заменены тремя условными уравнениями, выражающими тот факт, что дифференциальные функции α , β , γ следует рассматривать как величины наперед заданные. Но так как в силу природы дифференциального исчисления абсолютное значение дифференциалов остается неопределенным и задано может быть только их отношение, то эти уравнения могут быть эквивалентными лишь двум уравнениям, содержащим в себе отношения трех величин α , β , γ ; этих двух уравнений достаточно для определения кривой.

Действительно, из выведенного выше (п. 46) ясно, что угол смежности, образованный двумя последовательными элементами кривой, выражается

с помощью $\frac{\sqrt{4\alpha\beta - d\alpha^2}}{2\alpha}$, где α , β , γ сохраняют значения, указанные в пункте 53;

таким образом радиус кривизны выражается через $\frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\alpha\beta - d\alpha^2}}$. Следова-

тельно, так как этот радиус предполагается заданным, то и форма кривой, если она простой кривизны, дана; если же это кривая двойной кривизны, то нетрудно доказать, что вторая кривизна, обязанная своим прохождением углу смежности, образуемому двумя плоскостями, проходящими через два соседних элемента кривой, зависит от отношения трех величин α , β , γ **). Таким образом рассматриваемые три условия, относящиеся к кривой, сводятся к тому, что эта кривая должна быть наперед задана, как это и предполагается по условиям задачи ***).

Анализ этой задачи можно было бы распространить и на случай поверхности или твердого тела, все точки которых находятся под действием любых сил; но мы покажем как его можно упростить, исходя из тех же условных уравнений и определив наперед с их помощью вид вариаций координат.

*) См. примечание к пункту 53 (стр. 124).

**) Вторая кривизна зависит также и от $d\beta$.

***) Наложенные выводы показывают, что две кривые совместимы, если в обеих кривых радиусы первой и второй кривизны выражаются одними и теми же функциями дуги. Следовательно, если в обеих кривых радиусы постоянны и соответственно равны между собою, то эти кривые идентичны; а так как всегда можно определить винтовую линию, имеющую наперед заданные радиусы кривизны, то всякая кривая, у которой радиусы кривизны постоянны, представляет собою винтовую линию. Многие геометры дали изящное доказательство этой теоремы. См. две статьи, одну — Пуизе (Puiseux) и вторую Серре (Serret) в Journal de Mathématiques de Liouville, 1^{re} série, t. VII, p. 65 и t. XVI, p. 193.

Прим. Бертрана.

Прим. Бертрана.

Прим. Бертрана.

О РАВНОВЕСИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА КОНЕЧНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЛЮБОЙ ФОРМЫ, ВСЕ ТОЧКИ КОТОРОГО НАХОДЯТСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛЮБЫХ СИЛ.

60. Так как условие твердости тела заключается в том, что все точки его постоянно занимают в нем одни и те же положения и сохраняют неизменными взаимные свои расстояния, то между вариациями δx , δy , δz мы имеем те же условные уравнения, какие были найдены в пункте 53; ведь ясно, что если мы представим себе внутри этого тела какую-либо кривую, то достаточно, чтобы все точки этой кривой сохраняли неизменными взаимные свои расстояния, как бы тело ни двигалось; таким образом с помощью указанных уравнений можно непосредственно определить значения интересующих нас вариаций.

С этой целью я обращаю внимание на то обстоятельство, что если мы перейдем к дифференциалам второго порядка, то всегда можно один из дифференциалов первого порядка принять в качестве постоянной величины; допустим поэтому, что δx — постоянное число; тогда, следовательно, $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, ...; благодаря этому второе и третье уравнения примут следующий вид:

$$d^2y d^2\delta y + d^2z d^2\delta z = 0 \quad \text{и} \quad d^3y d^3\delta y + d^3z d^3\delta z = 0.$$

Первое из этих уравнений дает сначала $d^2\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y} d^2\delta z$, а затем после дифференцирования

$$d^3\delta y = \frac{d^2z}{d^2y} d^3\delta z - \left[\frac{d^3z}{d^2y} - \frac{d^2z d^2y}{(d^2y)^2} \right] d^2\delta z.$$

Если это выражение подставить во второе уравнение, то оно будет делиться на $d^3z - \frac{d^3y d^2z}{d^2y}$, после чего получится

$$d^3\delta z - \frac{d^3y}{d^2y} d^3\delta z = 0;$$

откуда путем интегрирования получается

$$d^3\delta z = \delta L d^2y,$$

где δL — постоянная величина. Имея значение $d^2\delta z$, мы получим

$$d^2\delta y = -\delta L d^2z.$$

Если мы снова проинтегрируем и дополнительно введем постоянные $-\delta M dx$, $\delta N dx$, то мы будем иметь

$$d\delta z = \delta L dy - \delta M dx, \quad d\delta y = -\delta L dz + \delta N dx,$$

а эти величины, будучи подставлены в первое условное уравнение, т. е. в

$$dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z = 0,$$

приведут его к следующему виду:

$$d\delta x = -\delta N dy + \delta M dz.$$

Наконец, после третьего интегрирования и после введения трех новых постоянных δl , δm , δn мы получим

$$\delta x = \delta l - y \delta N + z \delta M,$$

$$\delta y = \delta m + x \delta N - z \delta L,$$

$$\delta z = \delta n - x \delta M + y \delta L.$$

Легко убедиться в том, что эти выражения удовлетворяют не только первым трем условным уравнениям, указанным в пункте 53, но и всем другим, каких можно было бы найти бесчисленное множество; все эти уравнения заключаются в следующем общем выражении

$$d^m x d^n \delta x + d^m y d^n \delta y + d^m z d^n \delta z = 0.$$

Таковы, следовательно, значения δx , δy , δz для любой системы точек связанных между собою таким образом, что они постоянно сохраняют одни и те же взаимные расстояния; поэтому указанные значения служат не только для случая любой подвижной кривой неизменной формы, но и для случая твердого тела, имеющего какую угодно форму.

Эйлер впервые нашел эти простые и изящные формы — для того, чтобы выразить вариации координат всех точек твердого тела, движущегося в пространстве. Он пришел к ним на основании соображений, выведенных из дифференциального исчисления, но отличных от тех, которыми мы воспользовались, и как мне кажется, менее строгих *). См. в томе Берлинской академии за 1760 г. мемуар: *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*.

61. Так как приведенные выше значения δx , δy , δz уже удовлетворяют условным уравнениям задачи, то ясно, что остается только подставить их в формулу

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm$$

и добиться того, чтобы оно было равно нулю независимо от единственно оставшихся неизвестными величин δl , δm , δn , δL , δM , δN .

Но эти величины являются общими для всех точек тела, поэтому при подстановке их следует вывести за знак S ; тогда, следовательно, мы получим следующее общее уравнение равновесия для твердого тела любой формы

$$\begin{aligned} \delta l S X dm + \delta m S Y dm + \delta n S Z dm + \delta N S(Yx - Xy) dm + \\ + \delta M S(Xz - Zx) dm + \delta L S(Zy - Yz) dm = 0, \end{aligned}$$

откуда выводятся особые уравнения равновесия в соответствии с различными условиями задачи.

62. Прежде всего, если мы допустим, что тело совершенно свободно, то все шесть вариаций δl , δm , δn , δL , δM , δN будут неопределенными, и тогда следует отдельно приравнять нулю величины, на которые эти вариации умножаются; это даст нам уже известные шесть уравнений

$$S X dm = 0, \quad S Y dm = 0, \quad S Z dm = 0,$$

$$S(Yx - Xy) dm = 0, \quad S(Xz - Zx) dm = 0, \quad S(Zy - Yz) dm = 0.$$

Во-вторых, если тело имеет одну неподвижную точку, вокруг которой оно может свободно вращаться во всех направлениях, то, назвав a , b , c координаты x , y , z этой точки, мы должны иметь

$$\delta a = 0, \quad \delta b = 0, \quad \delta c = 0.$$

*) Доказательство Эйлера действительно является менее прямым, чем доказательство Лагранжа; но мне не удалось установить точки зрения, исходя из которой Эйлер можно было бы обвинить в недостаточной строгости его доказательства.
Прим. Бертриана.

Следовательно,

$$\delta l - b \delta N + c \delta M = 0, \quad \delta m - c \delta L + a \delta N = 0, \quad \delta n - a \delta M + b \delta L = 0;$$

откуда получается

$$\delta l = b \delta N - c \delta M, \quad \delta m = c \delta L - a \delta N, \quad \delta n = a \delta M - b \delta L.$$

Подставим эти значения в общее уравнение предыдущего пункта и, подведя под знак $\mathcal{S}$ величины a , b , c , являющиеся постоянными по отношению к различным точкам тела, мы получим следующее преобразованное уравнение

$$\begin{aligned} & + \delta N \mathcal{S} [Y(x-a) - X(y-b)] dm + \\ & + \delta M \mathcal{S} [X(z-c) - Z(x-a)] dm + \\ & + \delta L \mathcal{S} [Z(y-b) - Y(z-c)] dm = 0, \end{aligned}$$

из которого можно получить три уравнения, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{S} [Y(x-a) - X(y-b)] dm &= 0, \\ \mathcal{S} [X(z-c) - Z(x-a)] dm &= 0, \\ \mathcal{S} [Z(y-b) - Y(z-c)] dm &= 0. \end{aligned}$$

В-третьих, если тело имеет две неподвижных точки и f , g , h представляют собой координаты x , y , z второй точки, то мы будем иметь

$$\delta l = g \delta N - h \delta M, \quad \delta m = h \delta L - f \delta N, \quad \delta n = f \delta M - g \delta L;$$

сравнив эти значения δl , δm , δn с приведенными выше, мы, следовательно, получим

$$\begin{aligned} (g-b) \delta N - (h-c) \delta M &= 0, & (f-a) \delta N - (h-c) \delta L &= 0, \\ (f-a) \delta M - (g-b) \delta L &= 0. \end{aligned}$$

Первые два из этих уравнений дадут

$$\delta L = \frac{f-a}{h-c} \delta N, \quad \delta M = \frac{g-b}{h-c} \delta N;$$

так как эти значения удовлетворяют и третьему уравнению, то отсюда следует, что вариация δN остается неопределенной.

Если произвести эти подстановки в найденное выше преобразованное уравнение, то мы получим

$$\delta N \left\{ \begin{aligned} & + (h-c) \mathcal{S} [Y(x-a) - X(y-b)] dm \\ & + (g-b) \mathcal{S} [X(z-c) - Z(x-a)] dm \\ & + (f-a) \mathcal{S} [Z(y-b) - Y(z-c)] dm \end{aligned} \right\} = 0;$$

таким образом условия равновесия будут заключаться в следующем единственном уравнении:

$$\begin{aligned} & + (h-c) \mathcal{S} [Y(x-a) - X(y-b)] dm + \\ & + (g-b) \mathcal{S} [X(z-c) - Z(x-a)] dm + \\ & + (f-a) \mathcal{S} [Z(y-b) - Y(z-c)] dm = 0. \end{aligned}$$

63. Приведенные различные уравнения соответствуют тем уравнениям, которые мы дали раньше в отделе III для равновесия изолированной

системы точек неизменяющейся формы; мы могли бы условия этого равновесия непосредственно применить к условиям равновесия твердого тела любой формы, все точки которого находятся под действием заданных сил. Но мы сочли небесполезным, в целях демонстрации плодотворности нашего метода, рассмотреть эту задачу особо и совершенно не пользуясь решенными уже раньше задачами.

Впрочем, если две точки тела, о которых мы предположили, что они неподвижны, в действительности двигались по заданным линиям или поверхностям, или же были связаны друг с другом каким угодно образом, то мы тогда имели бы еще одно или несколько дифференциальных уравнений между вариациями координат a, b, c, f, g, h , соответствующих этим точкам; подставив вместо этих вариаций их выражения через $\delta l, \delta m, \delta n, \delta L, \delta M, \delta N$, на основе общих формул пункта 60, мы получили бы столько уравнений между этими последними вариациями, сколько нужно для того, чтобы с их помощью определять некоторые из этих вариаций при посредстве остальных; подставив затем эти значения в общее уравнение и приравняв нулю каждый из коэффициентов оставшихся вариаций, мы получили бы все уравнения, необходимые для равновесия.

Ход подсчета, как видим, остается все время одним и тем же. Это именно и следует признавать одним из главнейших преимуществ данного метода.

64. Найденные выше (п. 60) выражения для вариаций $\delta x, \delta y, \delta z$ позволяют видеть, что эти вариации представляют собою не что иное, как результат поступательных и вращательных движений, которые мы особо рассмотрели в отделе III.

Действительно, ясно, что члены $\delta l, \delta m, \delta n$, являющиеся общими для всех точек тела, представляют собою малые пути, пробегаемые телом по направлениям координат x, y, z при наличии какого-либо поступательного движения; из формул пункта 8 того же отдела можно также увидеть, что члены $z \delta M - y \delta N, x \delta N - z \delta L, y \delta L - x \delta M$ представляют собою малые пути, проходимые по тем же направлениям каждой точкой тела вследствие вращательных движений $\delta L, \delta M, \delta N$ вокруг трех осей x, y, z ; эти величины $\delta L, \delta M, \delta N$ соответствуют величинам $d\phi, d\omega, d\varphi$ упомянутого выше пункта. Таким образом приведенные выше выражения можно было бы получить и непосредственно, исходя только из рассмотрения этих движений, что, правда, было бы проще, но представляло бы собою менее прямой путь. Изложенный же выше анализ приводит естественно к этим выражениям и этим доказывает более прямым путем и в более общем виде, чем это было сделано в пункте 10 отдела III, что когда различные точки системы постоянно сохраняют неизменным свое взаимное положение, система в любое мгновение может иметь только поступательное движение в пространстве и вращательное движение вокруг трех взаимно перпендикулярных осей [18].

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ.

О ПРИНЦИПАХ ГИДРОСТАТИКИ.

Хотя мы не знаем внутреннего строения жидкостей, тем не менее мы не можем сомневаться в том, что частицы, из которых они состоят, материальны и что поэтому законы равновесия применимы к жидкостям в такой же мере, как и к твердым телам. Действительно, основное свойство жидкостей, и притом — единственное, отличающее их от твердых тел, заключается в том, что все части их подчиняются малейшей силе и могут перемещаться друг относительно друга со всей возможной легкостью, независимо от того, какая связь и взаимодействие существуют между этими частями. Так как это свойство может быть легко выражено с помощью математического исчисления, то отсюда следует, что законы равновесия жидкостей не требуют особой теории и представляют собой лишь частный случай общей теории статики. С этой именно точки зрения мы и будем их рассматривать; но мы полагаем, что нам следует начать с изложения различных принципов, которые применялись до сих пор в этой части статики, которую обычно называют *гидростатикой*, с тем, чтобы дополнить тот анализ принципов статики, который мы дали в первом разделе.

1. Первым принципам равновесия жидкостей мы обязаны еще Архимеду. Его трактат *De insidentibus humido* в греческом оригинале до нас не дошел; существовал только латинский перевод, довольно дефектный, составленный Тартальей (*Tartalea*), пока Коммандин (*Commendin*) не занялся его восстановлением и пояснил его примечаниями; благодаря стараниям этого сведущего комментатора указанный перевод появился в 1565 году под названием *De iis quae vehuntur in aqua*.

Это произведение, которое можно рассматривать как одно из наиболее ценных наследий древности, состоит из двух книг. В первой из них Архимед излагает следующие два принципа, которые он рассматривает как опытные начала и на которых он основывает всю свою теорию: 1) природа жидкостей такова, что менее сжатые части их выталкиваются более сжатыми и каждая часть жидкости всегда сжимается весом соответствующего ей вертикального столба; 2) все, что выталкивается жидкостью вверх, всегда выталкивается по вертикальному направлению, проходящему через центр тяжести.

Из первого принципа Архимед прежде всего выводит, что поверхность жидкости, все части которой согласно предположению тяготеют к центру земли, должны иметь сферическую форму для того, чтобы жидкость находилась в равновесии. Далее, он доказывает, что тело, имеющее такой же вес, как равный ему объем жидкости, должно полностью погрузиться в жидкость; ибо если представить себе две равных пирамиды рассматриваемой

жидкости, которая согласно допущению находится в равновесии по отношению к центру земли, то та пирамида, в которую тело только частично погружилось, производила бы большее давление на центр земли или вообще на любую сферическую поверхность, которую мы представили бы себе проведенной около центра. Аналогичным образом он доказывает, что тела, вес которых меньше веса равного объема жидкости, могут погружаться в эту жидкость лишь настолько, что погруженная часть их займет объем жидкости, имеющей вес, равный весу всего тела. Отсюда он выводит две теоремы гидростатики, а именно: 1) тела более легкие, чем равный им объем жидкости, будучи погружены в эту жидкость, выталкиваются вверх с силой, равной превышению веса вытесненной жидкости над весом погруженного тела, и 2) тела более тяжелые, чем жидкость, терпят в последней часть своего веса, равную весу вытесненной жидкости.

Далее Архимед пользуется своим вторым принципом для того, чтобы установить законы равновесия тел, плавающих на жидкости. Он доказывает, что каждое сечение шара, более легкое, чем равный ему объем жидкости, на которой он плавает, обязательно должно расположиться таким образом, что основание его будет горизонтально; его доказательство заключается в следующем: он указывает, что если бы основание оказалось наклонным, то вес всего тела, который мы можем себе представить сосредоточенным в его центре тяжести, и вертикальное давление жидкости, которое мы тоже можем себе представить сконцентрированным в центре тяжести погруженной части тела, стремились бы всегда повернуть тело до тех пор, пока его основание не заняло бы горизонтального положения.

Таковы вопросы, рассматриваемые в первой книге Архимеда. Во второй книге Архимед, на основе тех же принципов, дает законы равновесия различных тел, получающихся от вращения конических сечений и погруженных в жидкости, обладающие большим весом, чем эти тела; он рассматривает случаи, когда эти конусы могут оставаться в наклонном положении, случаи, когда они должны сохранять свое отвесное положение, а также случаи, когда они должны опрокинуться или же выпрямиться. Эта книга является одним из прекраснейших памятников гения Архимеда, она содержит в себе теорию устойчивости плавающих тел, к которой современные ученые прибавили лишь очень немного.

2. Хотя после всего того, что было установлено. Архимедом, уже не представляло особого труда определить давление жидкости на дно или на стенки сосуда, в котором эта жидкость содержится, тем не менее только Стевин впервые предпринял эти исследования и открыл гидростатический парадокс, заключающийся в том, что жидкость может производить давление, гораздо большее собственного ее веса. Гидростатическая теория изложена Стевином в третьем томе его *Hypomnemata mathematica*, переведенной Снеллиусом (Snellius) с голландского языка и изданной в Лейдене в 1608 году. Доказав, что твердое тело любой формы, имеющее вес, равный весу воды, будет в последней находиться в равновесии в любом положении, так как оно будет всегда занимать одинаковое место и будет весить столько же, сколько оно весило бы, если бы оно было составлено из воды, — Стевин представляет себе наполненный водою прямоугольный сосуд и легко доказывает, что дно этого сосуда должно поддерживать всю тяжесть воды, наполняющей сосуд. После этого Стевин допускает, что в этот сосуд погружили любой формы твердое тело, имеющее вес, равный весу воды; тогда ясно, что давление останется неизменным. Следовательно, если твердому телу придать такую форму, что останется только канал жидкости любой формы, то давление этого канала на основание сосуда останется

тем же и, следовательно, оно будет равно весу вертикального столба воды, опирающегося на то же основание. Далее Стевин указывает, что если допустить, что упомянутое твердое тело неподвижно закреплено на своем месте, то это не может вызвать какого-либо изменения действия воды на основание сосуда; таким образом давление на дно сосуда всегда равно весу того же столба воды независимо от того, какова форма сосуда.

После этого Стевин переходит к определению давления жидкости на вертикальные или наклонные стенки сосуда. Он делит поверхность стенок с помощью горизонтальных линий на ряд мелких частей и показывает, что каждая подобная часть находится под давлением, большим того, какое испытывала бы эта часть, если бы она лежала горизонтально на высоте своего верхнего края, но в то же время меньшим того, какое она испытывала бы, если бы лежала горизонтально на высоте своего нижнего края. Отсюда, уменьшая величину этих частей и увеличивая их число до бесконечности, Стевин по способу пределов доказывает, что давление на плоскую наклонную стенку равно весу столба, имеющего своим основанием эту стенку, а высотой — половину высоты сосуда.

Далее он определяет давление на любую часть наклонной плоской стенки и устанавливает, что оно равно весу столба воды, который образовался бы, если бы в каждой точке этой части были восстановлены перпендикуляры, равные глубине погружения этих точек под поверхность воды. После того как эта теорема доказана для плоских поверхностей, расположенных каким угодно образом, ее легко распространить и на кривые поверхности, и на основании этого прийти к общему выводу, что давление, производимое весомой жидкостью на любую поверхность, измеряется весом столба этой жидкости, имеющего своим основанием эту поверхность (в случае необходимости ее можно превратить в плоскость), высота же этого столба для различных точек основания неодинакова: в каждой точке основания она равна расстоянию этой точки от поверхности жидкости или, что по существу то же, это давление измеряется всем столбом жидкости, имеющим своим основанием поверхность, испытывающую на себе давление, а высотой — вертикальное расстояние центра тяжести той же поверхности от верхнего уровня жидкости*).

3. Как видим, приведенные выше теории равновесия и давления жидкостей совершенно не связаны с общими принципами статики, они основаны лишь на опытных положениях, выведенных из наблюдений над особыми свойствами жидкостей. Этот метод обоснования законов гидростатики, заключающийся в том, что из некоторых законов, полученных экспериментальным путем, затем выводят все прочие законы, был воспринят большинством новейших авторов, благодаря чему гидростатика является дисциплиной, совершенно отличной и независимой от статики.

Тем не менее представлялось естественным попытаться связать между собою эти две дисциплины и подчинить их одному и тому же принципу. Однако ясно, что из числа различных принципов, которые могут быть использованы в качестве базы для статики и которые мы вкратце изложили в первом разделе, только один принцип виртуальных скоростей может быть естественно применен к равновесию жидкостей. И действительно, автор этого принципа — Гамиль — воспользовался им для обоснования главных теорем статики и гидростатики.

*) По отношению к давлению на кривые поверхности это положение неверно. Автор по недосмотру не отметил здесь этого обстоятельства. *Прим. Вермана...*

В своей *Discurso intorno alle cose, che stanno in sù l'acqua*, ò che in quella si muovono он выводит непосредственно из этого принципа равновесие воды в сифоне, доказывая, что если допустить наличие разных высот жидкости в обоих коленах, то жидкость не будет снижаться в одном колене и подниматься в другом без того, чтобы моменты в снижающейся и поднимающейся частях жидкости были между собою равны. Аналогичным способом Галилей обосновывает равновесие жидкостей с погруженными в них твердыми телами. Следует, конечно, признать, что его доказательства недостаточно строги и хотя их пытались дополнить в примечаниях, приложенных к флорентинскому изданию 1728 г., можно сказать, что они остаются еще многого желать. Декарт и Паскаль (Pascal) тоже применили в гидростатике принцип виртуальных скоростей; последний особенно широко пользовался этот принцип в своем *Traité de l'équilibre des liqueurs*, где он применил его для доказательства основного свойства жидкостей, заключающегося в том, что любое давление, приложенное к какой-либо точке их поверхности, передается равномерно всем другим точкам.

4. Однако указанные применения принципа виртуальных скоростей были еще слишком гипотетичными и, если можно так выразиться, слишком робкими (*laches*), чтобы послужить основой для разработки строгой теории равновесия жидкостей. Но с того времени указанный принцип был оставлен большинством авторов, писавших о вопросах гидростатики, и особенно теми из них, которые поставили себе целью расширить пределы этой отрасли знания и найти законы равновесия разнородных жидкостей, все части которых находятся под действием каких-либо сил; эти исследования особенно важны потому, что они находятся в связи с знаменитой проблемой о форме земли.

Гюйгенс *) принял в своем исследовании в качестве принципа равновесия положение о перпендикулярности тяжести к поверхности. Ньютон **) исходил из принципа равенства весов центральных столбов. Буге ***) (Bouguer) позднее отметил, что приведенные два принципа зачастую не приводят к одному и тому же результату, и на основании этого пришел к выводу, что для равновесия жидкой массы необходимо, чтобы оба принципа осуществлялись одновременно и согласованно приводили к той же самой форме поверхности жидкости. Однако Клеро (Clairaut) ****) дальше показал, что могут быть и такие случаи, когда указанная согласованность существует, а равновесия все-таки нет. Маклорен (Maclaurin) *****) обобщил принцип Ньютона и выдвинул положение, согласно которому у жидкой массы, находящейся в равновесии, каждая частица должна сжиматься одинаково всеми перпендикулярными столбами жидкости, опирающимися на эту частицу и заканчивающимися на поверхности. Клеро еще больше обобщил этот принцип, показав, что равновесие жидкой массы требует, чтобы силы, приложенные ко всем частям жидкости, заключенным в любой трубке, заканчивающейся на поверхности или же замкнутой, взаимно уничтожались. Наконец, он впервые вывел из этого принципа истинные основные законы равновесия жидкой массы, все части которой находятся под действием каких-либо сил, и нашел уравнения в частных дифференциалах, с помощью которых можно выразить эти законы. Это открытие придало гидростатике совершенно иной вид и превратило ее в новую науку.

*) См. *Dissertatio de causa gravitatis, additamentum; Opera posthuma*, t. II, p. 116.

**) *Principia*, Lib. III, propos. 19.

***) *Mémoires de l'Académie de Sciences*, 1734.

*****) *Théorie de la figure de la Terre*, p. 28, 2 Ed., Paris 1808.

*****) *Traité de fluxions*, t. II, p. 110. Paris 1749.

5. Принцип Клеро является естественным следствием принципа равенства давления по всем направлениям, и из последнего можно непосредственно вывести те уравнения, которые получаются из принципа равновесия жидких трубок. В самом деле, если давление рассматривать как силу, которая действует на каждую частицу и которая может быть выражена с помощью функции координат, определяющих место частицы в жидкости, то разность сил давлений, испытываемых частицей с двух противоположных и параллельных сторон, дает силу, которая стремится двигать частицу перпендикулярно к этим сторонам и которая должна быть уничтожена ускоряющими силами, приложенными к этой частице. Таким образом, если все эти силы отнести к трем взаимно перпендикулярным координатам и представить себе, что жидкая масса разделена на маленькие прямоугольные параллелепипеды, имеющие своими сторонами элементы этих координат, то мы тотчас же получим три уравнения в частных дифференциалах между давлением и заданными ускоряющими силами; эти уравнения и служат для определения самого давления, а также отношения, которое должно существовать между этими силами. Этот простой способ нахождения общих законов гидростатики ведет свое начало от Эйлера (*Mémoires de Berlin* за 1755); в настоящее время этот способ принят почти во всех руководствах по этой отрасли науки.

6. Принцип равенства давления по всем направлениям является, таким образом, до настоящего времени основой равновесия жидкостей, и следует признать, что этот принцип заключает в себе наиболее простое и наиболее общее свойство, установленное опытом в жидкостях, находящихся в состоянии равновесия. Однако является ли знание этого свойства совершенно необходимым при исследовании законов равновесия жидкостей? Нельзя ли эти законы вывести непосредственно из самой природы жидкостей, рассматривая последние как собрания молекул, сильно разобщенных, независимых друг от друга и способных совершенно свободно двигаться во всех направлениях? Это я и попытаюсь сделать в следующем отделе, пользуясь при этом только принципом равновесия, который я до сих пор применял лишь по отношению к твердым телам; эта часть моей работы даст не только одно из наиболее прекрасных применений упомянутого принципа, но и послужит для упрощения в некоторых отношениях самой теории гидростатики.

Известно, что жидкости вообще распадаются на два вида: на жидкости несжимаемые, части которых могут изменять свою форму, но не изменяют своего объема, и на жидкости сжимаемые или упругие, части которых способны изменять одновременно как свою форму, так и свой объем и которые всегда стремятся расширяться с известной силой, которую обычно принимают пропорциональной некоторой функции плотности.

Вода, ртуть и т. д. принадлежат к первому виду; воздух, пары кипящей воды и т. д. принадлежат ко второму виду.

Мы рассмотрим сначала равновесие несжимаемых жидкостей, а затем равновесие жидкостей, сжимаемых и упругих.

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ.

О РАВНОВЕСИИ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ.

1. Пусть имеется масса жидкости m , все точки которой находятся под действием тяжести или каких-либо сил $P, Q, R, \dots$, направленных по линиям $p, q, r, \dots$; тогда для суммы моментов всех этих сил, если воспользоваться обозначениями пункта 12 отдела IV, мы получим следующую интегральную формулу

$$\int (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) dm,$$

которая вообще должна равняться нулю, чтобы жидкость могла находиться в равновесии.

§ I. О равновесии жидкости в очень узкой трубке.

2. Допустим сначала, что жидкость заключена в бесконечно тонком канале или трубке заданной формы, и вообразим себе, что жидкость разделена на бесконечно малые слои или части, высота которых пусть будет ds , а поперечное сечение ω ; тогда можно положить $dm = \omega ds$, так как сечение трубки ω согласно допущению бесконечно мало, а ds представляет собою элемент кривой, образуемой трубкой. Теперь представим себе, что жидкость получает небольшое движение и бесконечно мало изменяет свое положение в трубке, причем ds представляет собою небольшое пространство, проходимое по трубке слоем или частицей dm ; тогда ясно, что ωds выразит количество жидкости, которое одновременно пройдет через каждое из сечений ω трубки. Но в силу несжимаемости жидкости это количество должно быть повсюду одинаковым; следовательно, если положить $\omega ds = \alpha$, то α будет постоянной по всей длине трубки. Таким образом мы будем иметь $\omega = \frac{\alpha}{ds}$, а следовательно, $dm = \frac{\alpha ds}{ds}$; стало быть формула, выражающая сумму моментов сил, если постоянную α вынести за знак интеграла, получит следующий вид

$$\alpha \int (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) \frac{ds}{ds}.$$

Так как $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$ являются вариациями линий $p, q, r, \dots$, вызванными вариацией ds , то ясно, что эти вариации должны находиться между собою в таких же отношениях, как дифференциалы $dp, dq, dr, \dots$, ибо форма трубки наперед задана; поэтому мы будем иметь

$$\frac{\delta p}{ds} = \frac{dp}{ds}, \quad \frac{\delta q}{ds} = \frac{dq}{ds}, \quad \frac{\delta r}{ds} = \frac{dr}{ds}, \dots,$$

благодаря этому приведенная выше формула получит следующий вид:

$$\alpha S(P dp + Q dq + R dr + \dots),$$

где дифференциалы $dp, dq, dr, \dots$ относятся к кривой линии трубки, а знак S указывает на то, что интеграл берется по всему протяжению трубки.

Следовательно, если приведенную величину приравнять нулю, то у нас получится уравнение

$$S(P dp + Q dq + R dr + \dots) = 0,$$

которое содержит в себе общий закон равновесия жидкости, заключенной в трубку любой формы.

3. Пусть помимо сил $P, Q, R, \dots$, действующих на каждую точку жидкости, на одном из концов трубки имеется еще и внешняя сила Π' , действующая на поверхность жидкости при посредстве поршня и перпендикулярно к боковым стенкам сосуда; тогда обозначим через $\delta s'$ малый путь, проходимый тем слоем жидкости, который согласно допущению сжат силой Π' , в то время как другие слои проходят отличные от него пути δs ; в таком случае к сумме моментов сил $P, Q, R, \dots$ следует прибавить момент силы Π' , который выразится через $\Pi' \delta s'$. Но если мы назовем ω' сечение трубки в том месте, где действует сила Π' , то $\omega' \delta s'$ выразит количество жидкости, проходящей через сечение ω' , в то время как через любое другое сечение ω проходит количество жидкости $\omega \delta s$.

Но несжимаемость жидкости требует, чтобы эти количества были повсюду одинаковы; следовательно, аналогично тому, как мы приняли $\omega \delta s = \alpha$, мы будем также иметь $\omega' \delta s' = \alpha$, откуда вытекает $\delta s' = \frac{\alpha}{\omega'}$. Таким образом общая сумма моментов сил, действующих на жидкость, выразится с помощью следующей формулы:

$$\alpha \left[\frac{\Pi'}{\omega'} + S(P dp + Q dq + R dr + \dots) \right],$$

и уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + S(P dp + Q dq + R dr + \dots) = 0.$$

4. Ясно, что в состоянии равновесия сила Π' должна быть уравновешена давлением на поршень, поперечное сечение которого равно ω' , откуда следует, что это давление будет равно $-\Pi'$ и, значит, будет равно

$$\omega' S(P dp + Q dq + R dr + \dots).$$

Таким образом вообще давление жидкости на каждую точку поршня выразится с помощью интегральной формулы

$$S(P dp + Q dq + R dr + \dots),$$

причем этот интеграл должен быть взят по всей длине трубки. Давление останется тем же, если вместо подвижного поршня мы представим себе неподвижное дно, закрывающее трубку с одной стороны.

5. Если на другом конце трубки имеется другая сила Π'' , которая тоже действует при посредстве поршня, то, обозначив через ω'' поперечное

сечение канала в этом месте, мы аналогично прежнему получим для равновесия жидкости следующее уравнение:

$$\frac{P'}{\omega'} + \frac{P''}{\omega''} + S(P dp + Q dq + R dr + \dots) = 0.$$

6. Следовательно, в том случае, когда жидкость подвергается сжатию только со стороны двух внешних сил P' и P'' , приложенных к поверхностям ω' и ω'' , для равновесия требуется, чтобы $\frac{P'}{\omega'} + \frac{P''}{\omega''} = 0$; отсюда ясно, что силы P' и P'' должны иметь противоположные направления и в то же время должны быть обратно пропорциональны поверхностям ω' и ω'' , на которые они действуют; это последнее положение принимают обычно в качестве опытного принципа или, по меньшей мере, в качестве следствия, вытекающего из принципа равенства давления по всем направлениям, в котором, по мнению большинства авторов по гидростатике, и заключается природа жидкостей.

7. Знание законов равновесия жидкости, заключенной в очень узкую трубку любой формы, может привести к познанию законов равновесия любой массы жидкости, заключенной в какой-либо сосуд или же не заключенной в него.

В самом деле, если жидкая масса находится в равновесии и мы представим себе какой-нибудь пересекающий ее канал, то ясно, что жидкость, содержащаяся в этом канале, будет находиться в равновесии и сама по себе, т. е. независимо от остальной жидкости. Следовательно, для равновесия этого канала, если отвлечься от внешних сил, мы будем иметь (п. 2)

$$S(P dp + Q dq + R dr + \dots) = 0.$$

Так как форма канала должна быть неопределенной, то приведенное уравнение должно быть независимым от этой формы; отсюда можно тотчас же прийти к выводу, как это сделал Клеро в своей *Théorie de la figure de la Terre*, что величина $P dp + Q dq + R dr + \dots$ должна быть полным дифференциалом. Но к этому заключению можно прийти и с помощью анализа, причем одновременно можно установить отношения, какие должны существовать между величинами $P, Q, R, \dots$. С этой целью достаточно только варьировать интеграл

$$S(P dp + Q dq + R dr + \dots)$$

по методу вариаций и положить эту вариацию равной нулю.

8. Обозначим вообще через Ψ значение интеграла

$$S(P dp + Q dq + R dr + \dots),$$

взятого по всей длине канала; тогда необходимо, чтобы

$$\delta\Psi = 0.$$

Но путем дифференцирования мы получим

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \delta S(P dp + Q dq + R dr + \dots) = S \delta(P dp + Q dq + R dr + \dots) = \\ &= S(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots + \delta P dp + \delta Q dq + \delta R dr + \dots). \end{aligned}$$

Поставив $\delta\delta$ вместо δd и освободившись затем путем интегрирования от частей от двойного символа $\delta\delta$, мы получим

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots + S(\delta P dp - dP \delta p + \delta Q dq - dQ \delta q + \\ &+ \delta R dr - dR \delta r + \dots); \end{aligned}$$

здесь члены, стоящие вне знака S , относятся к пределам интеграла, выраженного с помощью этого знака, и, следовательно, соответствуют концам канала; таким образом, если мы предположим, что эти концы неподвижны, то соответствующие им вариации δp , δq , δr , ... будут равны нулю и рассматриваемые члены сами собою исчезнут.

Далее, так как величины P , Q , R , ... выражающие силы, являются функциями p , q , r , ... , или же всегда могут быть рассматриваемы как их функции, то ясно, что та часть δW , которая имеет перед собою знак S , не поддается дальнейшему преобразованию; следовательно, для того чтобы вообще имело место $\delta W = 0$, необходимо, чтобы упомянутая часть сама по себе равнялась нулю и, значит, чтобы для каждой точки жидкости имело место тождество

$$\delta P \delta p - dP \delta p + \delta Q \delta q - dQ \delta q + \delta R \delta r - dR \delta r + \dots = 0.$$

Если выражения сил P , Q , R , ... рассматривать как некоторые функции p , q , r , ... , то согласно общепринятому обозначению мы будем иметь

$$dP = \frac{\partial P}{\partial p} dp + \frac{\partial P}{\partial q} dq + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \dots,$$

а также

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial p} \delta p + \frac{\partial P}{\partial q} \delta q + \frac{\partial P}{\partial r} \delta r + \dots;$$

аналогичные выражения мы будем иметь и для других дифференциалов. Если эти выражения подставить в приведенное выше уравнение и расположить члены в определенном порядке, то оно примет следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 = & + \left(\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} \right) (\delta q dp - dq \delta p) + \\ & + \left(\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial p} \right) (\delta r dp - dr \delta p) + \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial q} \right) (\delta r dq - dr \delta q) + \\ & + \dots \dots \dots ; \end{aligned}$$

это уравнение должно быть в силе независимо от дифференциалов dp , dq , dr , ... ; δp , δq , δr , ...

Следовательно, если между переменными p , q , r , ... не существует никаких заданных отношений, следует положить в отдельности

$$\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial q} = 0, \dots$$

Приведенные уравнения представляют собою известные условные уравнения для интегрируемости выражения

$$P dp + Q dq + R dr + \dots$$

9. Когда линии p , q , r , ... , как в рассматриваемом случае, относятся к одной и той же точке пространства, они могут зависеть только от трех координат этой точки, а силы P , Q , R , ... могут быть всегда сведены к трем силам, действующим по направлениям координат (отд. V, п. 7)..

Таким образом, если p, q, r принять в качестве этих координат, будь то координаты прямоугольные или какие-либо иные *), а $P, Q, R, \dots$ принять в качестве сил, действующих на каждую частицу жидкости по направлению тех же координат, то величины P, Q, R , рассматриваемые как функции p, q, r должны удовлетворять следующим трем уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial q} = 0.$$

Таковы условия, необходимые для того чтобы масса жидкости могла находиться в равновесии, когда на все ее точки действуют силы P, Q, R .

Впрочем, до сих пор мы отвлекались от плотности жидкости, или точнее, мы считали ее постоянной и равной единице; однако, если бы мы пожелали допустить, что плотность является переменной, то, обозначив через Γ плотность какой-либо частицы dm , мы имели бы (п. 2) $dm = \Gamma \omega ds$, и величины $P, Q, R, \dots$ следовало бы помножить на Γ . Таким образом для равновесия жидкостей с переменной плотностью мы получили бы те же законы, что и для жидкостей с постоянной плотностью, причем нам пришлось бы только помножить различные силы на плотность той точки, на которую они действуют, т. е. нам пришлось бы вместо $P, Q, R, \dots$ написать $\Gamma P, \Gamma Q, \Gamma R, \dots$.

§ II. Вывод общих законов равновесия несжимаемых жидкостей из свойств частиц, их составляющих.

10. Выведем теперь законы равновесия несжимаемых жидкостей непосредственно из нашей общей формулы, рассматривая этот вид жидкостей, как составленный из большого количества частиц, способных перемещаться во всех направлениях, причем эти частицы могут изменять свою форму, но не изменять своего объема.

Предположим для простоты, что все силы, действующие на частицы жидкости, сведены к трем силам, выражающимся через X, Y, Z и направленным по осям x, y, z прямоугольной системы координат, т. е. стремящимся укоротить эти координаты. В главе I отдела V мы дали общие формулы этого преобразования.

Если мы обозначим через dm массу любой частицы, то для суммы моментов сил X, Y, Z мы будем иметь интегральную формулу

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm;$$

объем частицы может быть выражен через $dx dy dz$, а так как Γ выражает плотность, то ясно, что мы будем иметь

$$dm = \Gamma dx dy dz;$$

следовательно, знак интегрирования $\int$ будет одновременно относиться к трем переменным x, y, z .

Сверх того, следует принять во внимание условное уравнение, вытекающее из несжимаемости жидкости. Если допустить, что это уравнение выражается через $L = 0$, то его следует продифференцировать в смысле δ ,

*) Это утверждение не вполне верно. Если силы P, Q, R обозначают составляющие, параллельные трем координатным осям координат, а p, q, r — координаты относительно тех же осей, то сумма виртуальных моментов не равна $P \delta p + Q \delta q + R \delta r$ и приведенные выше соображения не могут быть применены к этому случаю.

помножить на неопределенный коэффициент λ и проинтегрировать, в результате чего получится выражение $\int \lambda \delta L$, которое и должно быть прибавлено к приведенному выше выражению.

Если при этом не имеется ни внешних сил, которые действовали бы на поверхность жидкости, ни особых условий для этой поверхности, то в качестве общего уравнения равновесия мы получим просто (отд. IV, п. 13)

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm + \int \lambda \delta L = 0.$$

Интегралы здесь следует брать по всей массе жидкости.

11. Условие несжимаемости заключается в том, что объем каждой частицы остается неизменным; следовательно, если мы этот объем выразим через $dx dy dz$, то в качестве условного уравнения мы получим $dx dy dz = \text{const}$. Таким образом мы будем иметь

$$L = dx dy dz - \text{const}, \quad \delta L = \delta(dx dy dz).$$

Можно было бы подумать, что для получения вариации $\delta(dx dy dz)$ достаточно просто продифференцировать $dx dy dz$ в смысле δ ; в действительности, однако, здесь следует остановиться на одном соображении, без которого исчисление оказалось бы недостаточно строгим. Величина $dx dy dz$ выражает объем частицы лишь в том случае, когда мы допускаем, что эта частица имеет форму прямоугольного параллелепипеда, стороны которого параллельны осям x, y, z . Такое допущение, конечно, вполне приемлемо, так как мы можем себе представить, что жидкость разделена на бесконечно малые элементы любой формы. Таким образом $\delta(dx dy dz)$ должно выразить ту вариацию, которую испытывает этот объем, когда частица бесконечно мало изменяет свое положение и координаты ее x, y, z превращаются в $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$; ясно, что если при этом изменение частица сохраняет форму прямоугольного параллелепипеда, то мы будем иметь

$$\delta(dx dy dz) = dy dz \delta dx + dx dz \delta dy + dx dy \delta dz.$$

Согласно принципам вариационного исчисления можно вместо $\delta dx, \delta dy, \delta dz$ взять $d \delta x, d \delta y, d \delta z$, но следует иметь в виду, что вариации $\delta x, \delta y, \delta z$ можно рассматривать как неопределенные и бесконечно малые функции x, y, z для того, чтобы $d \delta x$ выразило вариацию стороны dx прямоугольной частицы $dx dy dz$; но эта сторона образуется вследствие увеличения координаты x на dx , в то время как другие две координаты y и z не изменяются, поэтому при дифференцировании δx следует считать переменной только x . Таким образом согласно обозначению, принятому для частных дифференциалов, в данном случае следует вместо простого выражения $d \delta x$ писать $\frac{\partial \delta x}{\partial x} dx$; но тем же соображениям вместо $d \delta y$ и $d \delta z$ следует писать $\frac{\partial \delta y}{\partial y} dy$ и $\frac{\partial \delta z}{\partial z} dz$. Таким образом, если исходить из допущения, что после вариации частица $dx dy dz$ сохраняет свою прямоугольную форму, то мы будем иметь

$$\delta(dx dy dz) = dx dy dz \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right).$$

То же самое выражение мы получили бы еще и в том случае, если бы мы допустили, что после вариации частица $dx dy dz$ превращается в параллелепипед, углы которого бесконечно мало отличаются от прямого угла.

В самом деле, из геометрии известно, что если a, b, c представляют собою три стороны параллелепипеда, образующие телесный угол, а α, β, γ — три угла, образуемые этими сторонами, то объем параллелепипеда выражается следующей формулой

$$abc \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}.$$

Но при варьировании стороны переходят в

$$dx \left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right), \quad dy \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right), \quad dz \left(1 + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right),$$

а косинусы углов α, β, γ становятся бесконечно малыми; следовательно, если вместо a, b, c подставить эти выражения и пренебречь бесконечно малыми величинами порядка выше первого, то для вариации $dx dy dz$ получится то же самое выражение, какое мы нашли выше.

Хотя упомянутое допущение является законным, мы все-таки не приемлем его без доказательства, дабы наши формулы не оставляли ничего желать с точки зрения точности. Поэтому мы определим вариацию $dx dy dz$, пользуясь строгим методом, принимая одновременно во внимание изменение положения и длины каждой из сторон прямоугольного параллелепипеда; при этом мы сделаем лишь одно допущение, являющееся для бесконечно малых величин вполне правильным, а именно, что упомянутые стороны останутся прямолинейными.

12. Для упрощения этого исследования мы начнем с того, что рассмотрим лишь одну из сторон параллелепипеда, например, сторону $dx dy$, четыре угла которой соответствуют следующим четырем системам координат:

$$x, y, z, \quad (1)$$

$$x + dx, y, z, \quad (2)$$

$$x, y + dy, z, \quad (3)$$

$$x + dx, y + dy, z. \quad (4)$$

Предположим, что координаты x, y, z первой системы перейдут в $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ и будем смотреть на вариации $\delta x, \delta y, \delta z$ как на бесконечно малые функции x, y, z ; постепенно увеличивая x, y на их дифференциалы dx, dy , мы определим, во что будут одновременно превращаться координаты трех других систем. Указанным путем, отмечая различные системы теми же цифрами, мы получим

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z, \quad (1)$$

$$x + dx + \delta x + \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx, \quad y + dy + \delta y + \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx, \quad z + \delta z + \frac{\partial \delta z}{\partial x} dx, \quad (2)$$

$$x + \delta x + \frac{\partial \delta x}{\partial y} dy, \quad y + dy + \delta y + \frac{\partial \delta y}{\partial y} dy, \quad z + \delta z + \frac{\partial \delta z}{\partial y} dy, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x + dx + \delta x + \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta x}{\partial y} dy, \\ y + dy + \delta y + \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta y}{\partial y} dy, \\ z + \delta z + \frac{\partial \delta z}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta z}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как эти системы координат соответствуют четырем углам нового четырехугольника, в который превратился прямоугольник $dx dy$, то ясно,

что стороны этого четырехугольника мы можем получить, извлекиши квадратный корень из суммы квадратов разностей координат вершин двух углов, прилежащих к соответствующей стороне. Отмечаю лишь, соединяющую вершинами каких-нибудь двух углов, путем соединения двух чисел, соответствующих этим углам, мы таким образом получим

$$(1,2) = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)^2},$$

$$(1,3) = dy \sqrt{\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y}\right)^2},$$

$$(3,4) = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)^2},$$

$$(2,4) = dy \sqrt{\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y}\right)^2};$$

отсюда видно, что противоположные стороны (1,2), (3,4) между собою равны, точно так же равны между собою стороны (1,3), (2,4); таким образом рассматриваемый четырехугольник представляет собою параллелограм, соприкасающиеся стороны которого (1,2), (1,3), если под знаком корня пренебречь бесконечно малыми величинами второго порядка по сравнению с такими же величинами первого порядка, равны

$$(1,2) = dx \left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right), \quad (1,3) = dy \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right).$$

13. Что касается угла, заключенного между этими двумя сторонами, то его можно определить с помощью диагонали (2,3), которая может быть тоже получена путем извлечения квадратного корня из суммы квадратов разностей координат, соответствующих системам (2) и (3); указанным путем мы получим

$$(2,3) = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx - \frac{\partial \delta y}{\partial y} dy\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial \delta y}{\partial y} dy - \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} dx - \frac{\partial \delta z}{\partial y} dy\right)^2}.$$

Если искомый угол назовем α , то треугольник, образованный тремя сторонами (1,2), (1,3), (2,3), дает

$$\cos \alpha = \frac{(1,2)^2 + (1,3)^2 - (2,3)^2}{2(1,2) \times (1,3)}.$$

Подставив в это выражение найденные выше значения (1,2), (1,3), (2,3), перечеркнув те члены, которые взаимно уничтожаются, и отбросив бесконечно малые величины второго и более высоких порядков, мы получим

$$\cos \alpha = \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x};$$

отсюда ясно, что угол α отличается от прямого угла лишь на бесконечно малую величину, так как косинус его бесконечно мал.

14. Если мы тот же анализ применим к двум другим сторонам $dx \, dz$, $dy \, dz$ прямоугольного параллелепипеда $dx \, dy \, dz$, то мы найдем, что и эти стороны тоже превращаются в параллелограммы; таким образом и три

других противоположных им стороны тоже превращаются в параллелограммы, как это легко доказать с помощью геометрии. Следовательно, новое тело будет представлять собою параллелепипед, стороны которого, сходящиеся в одном телесном угле, составляют

$$dx \left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right), \quad dy \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right), \quad dz \left(1 + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right);$$

если назвать α , β , γ углы, заключающиеся между этими сторонами, то мы будем иметь

$$\cos \alpha = \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x},$$

$$\cos \beta = \frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x},$$

$$\cos \gamma = \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y};$$

на этом основании можно прийти к заключению, что с помощью данной нами выше (п. 11) формулы вариация прямоугольного параллелепипеда $dx \, dy \, dz$ выражается вполне строго.

15. Отсюда также видно, что если бы вариации δx , δy , δz были только соответственно функциями переменных x , y , z , то мы имели бы в точности

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = 0.$$

Таким образом прямоугольный параллелепипед $dx \, dy \, dz$ и после вариации сохранил бы свою прямоугольную форму. Но так как изменение формы параллелепипеда только бесконечно мало и несколько не влияет на значение его объема, то отсюда следует, что, несколько не уменьшая общности выводов, можно допустить, что вариации δx , δy , δz являются просто функциями соответственно x , y и z , как мы это сделали в пункте 31 отдела IV [10].

16. Имея таким образом правильно численное значение $\delta(dx \, dy \, dz)$, мы можем его применить для δL , и тогда мы получим

$$\delta L = dx \, dy \, dz \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right).$$

Подставим теперь это значение в общее уравнение пункта 10 и одновременно заменим dm его значением $\Gamma dx \, dy \, dz$, тогда мы получим уравнение

$$S \left[\Gamma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \lambda \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) \right] dx \, dy \, dz = 0.$$

Здесь остается только освободиться от двойного символа $\delta \delta$, пользуясь тем методом, который был изложен в § II отдела IV.

17. Рассмотрим сначала величину

$$S \lambda \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx \, dy \, dz,$$

где знак S обозначает тройной интеграл по x , y , z ; так как дифференциал δx относится только к вариации x , то ясно, что для того, чтобы освободиться от него, достаточно только учесть интегрирование по x ; поэтому мы сначала дадим указанной величине следующий вид:

$$S \, dy \, dz \, S \lambda \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx,$$

а затем преобразуем простой интеграл

$$S \lambda \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx \text{ в } \lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x' - S \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x dx,$$

здесь величины, обозначенные одним штрихом, относятся к началу интегрирования, а обозначенные двумя штрихами — к точке, в которой интегрирование заканчивается, в соответствии со способом обозначения, принятым в указанном выше месте. Таким образом рассматриваемая величина преобразуется в следующую:

$$S dy dz (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') - S dy dz S \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x dx,$$

или, что то же, в

$$S (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz - S \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x dx dy dz.$$

Таким же образом и по тем же основаниям величины

$$S \lambda \frac{\partial \delta y}{\partial y} dx dy dz \quad \text{и} \quad S \lambda \frac{\partial \delta z}{\partial z} dx dy dz$$

преобразуются в следующие

$$S (\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz - S \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta y dx dy dz$$

и

$$S (\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy - S \frac{\partial \lambda}{\partial z} \delta z dx dy dz.$$

После подстановки этих величин мы получим следующее общее уравнение для равновесия жидкой массы

$$\begin{aligned} S \left[\left(\Gamma X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta x + \left(\Gamma Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \delta y + \left(\Gamma Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \delta z \right] dx dy dz + \\ + S (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz + S (\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz + \\ + S (\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy = 0; \end{aligned}$$

здесь остается только приравнять отдельно нулю коэффициенты неопределенных вариаций δx , δy , δz (отд. IV, п. 16) [29].

18. Итак, прежде всего мы получим следующие три уравнения

$$\Gamma X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad \Gamma Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \quad \Gamma Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0,$$

которые должны иметь место во всех точках жидкой массы.

Далее, если жидкость со всех сторон свободна, то вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, относящиеся к точкам поверхности жидкости, тоже будут неопределенными и, следовательно, надо будет еще приравнять отдельно нулю их коэффициенты, что даст $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$, т. е. вообще $\lambda = 0$ для всех точек поверхности жидкости; это уравнение послужит для определения формы этой поверхности.

То же самое будет, если жидкость заключена в сосуд, — для той части ее поверхности, где сосуд открыт; что же касается той части жидкости, которая прилегает к стенкам сосуда, то между вариациями $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ должны существовать некоторые отношения, обуславливаемые формой этих стенок, так как жидкость может перемещаться только вдоль

стенок; дальше мы докажем, что какова бы ни была форма стенок, члены, содержащие в себе рассматриваемые величины вариации, сами по себе всегда будут равны нулю, так что никаких условий относительно этой части поверхности жидкости существовать не будет.

19. Три уравнения, установленные нами для условий равновесия жидкости, дают

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \Gamma X, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \Gamma Y, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \Gamma Z;$$

а так как

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz,$$

то мы будем иметь

$$d\lambda = \Gamma (X dx + Y dy + Z dz);$$

следовательно, величина

$$\Gamma (X dx + Y dy + Z dz)$$

должна быть полным дифференциалом по x , y , z ; в одном этом условии содержатся законы равновесия жидкостей.

Если из тех же уравнений исключить величину λ , то мы получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \Gamma X}{\partial y} = \frac{\partial \Gamma Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Gamma X}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Gamma Y}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma Z}{\partial y},$$

находящиеся в полном соответствии с уравнениями пункта 9.

Таким образом приведенные условия необходимы для того, чтобы жидкая масса могла быть в равновесии, находясь под действием сил X , Y , Z . Если они осуществляются благодаря природе этих сил, то создается полная уверенность, что равновесие возможно, и тогда остается только найти ту форму, какую должна принять жидкая масса, чтобы находиться в равновесии, т. е. уравнение наружной поверхности жидкости.

В предыдущем пункте мы уже видели, что в каждой точке этой поверхности мы должны иметь $\lambda = 0$. Но так как $d\lambda = \Gamma (X dx + Y dy + Z dz)$, то путем интегрирования мы получим

$$\lambda = \int \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) + \text{const};$$

следовательно, уравнение внешней поверхности будет

$$\int \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) = K,$$

где K — произвольная постоянная; это уравнение будет всегда состоять из конечных членов, так как согласно допущению величина $\Gamma (X dx + Y dy + Z dz)$ является полным дифференциалом.

20. Величина $X dx + Y dy + Z dz$ всегда сама собою является полным дифференциалом, если силы X , Y , Z являются результатом одного или нескольких притяжений, пропорциональных какому-либо функциям расстояний от центров, так как согласно пункту I отдела V

$$X dx + Y dy + Z dz = P dr + Q dq + R dr + \dots$$

Обозначив эту величину через $d\Pi$, мы получим $d\lambda = \Gamma d\Pi$; следовательно, для того чтобы $d\lambda$ было полным дифференциалом, требуется, чтобы Γ была функцией Π . Отсюда вытекает, что и $\lambda = \int \Gamma d\Pi$ должна быть функцией Π .

Таким образом в данном случае, соответствующем условиям, создаваемым самой природой, мы имеем для формы поверхности уравнение

$$\text{функция } \Pi = K,$$

т. е. Π равно постоянной величине; это уравнение тождественно с тем, какое имело бы место, если бы плотность жидкости была постоянной. Далее, так как Π на поверхности является постоянной величиной, а Γ является функцией Π , то отсюда следует, что во всех точках внешней поверхности жидкой массы, находящейся в равновесии, плотность Γ должна быть одна и та же.

Внутри жидкости плотность может варьироваться каким угодно образом, оставаясь, однако, все время функцией Π ; следовательно, она должна быть постоянной повсюду, где значение Π постоянно. Таким образом $\Pi = h$ является общим уравнением слоя равной плотности, если h — постоянная величина. Путем дифференцирования мы, таким образом, получаем в качестве общего уравнения для этих поверхностей

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{или} \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Легко видеть, что это уравнение представляет собою уравнение поверхностей, к которым равнодействующая сил X , Y , Z направлена перпендикулярно и которые Клеро называет *поверхностями уровня*. Отсюда следует, что в каждом слое, образованном двумя бесконечно близкими поверхностями уровня, плотность должна быть повсюду одинаковой.

Этот закон должен был бы иметь место на земле и на планетах, если допустить, что первоначально эти тела были жидкими и при отвердении сохранили ту форму, которую они приняли под влиянием взаимного притяжения своих частей в сочетании с центробежной силой.

21. Что касается величины λ , значение которой мы выше определили, то будет уместно отметить, что член $\sum \lambda \delta L$ общего уравнения пункта 10 выражает сумму моментов тех сил λ , которые стремятся уменьшить значение функции L (отд. IV, п. 7). Так как $\delta L = \delta(dx dy dz)$ (п. 11), можно, следовательно, сказать, что сила λ *) стремится сжать каждую частицу жидкости $dx dy dz$; таким образом эта сила представляет собою не что иное, как давление, испытываемое равномерно со всех сторон частицей жидкости, которому она противодействует благодаря своей несжимаемости.

Таким образом вообще для давления на каждую точку жидкой массы мы имеем выражение

$$\Sigma \Gamma (P dx + Q dy + R dz),$$

а так как для равновесия жидкости необходимо, чтобы величина, стоящая под знаком интеграла, была интегрируема, то отсюда следует, что давление может быть всегда выражено с помощью конечной функции координат той частицы, которая испытывает это давление. Таково основное положение теории жидкости, данное Эйлером **).

22. Для того чтобы показать применение уравнения $\Pi = \text{const}$, найденного нами для поверхности жидкой массы в состоянии равновесия

*) Это заключение правильно, хотя доказательство его не вполне удовлетворительно. Мы уже неоднократно отмечали, что λ нельзя рассматривать как силу, если только не условиться о распространительном толковании обычного значения слова *сила*.

Прим. Бертраиа.

**) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1755.

Прим. Бертраиа.

(п. 20), рассмотрим случай равновесия океана в предположении, что последний покрывает всю землю, которую мы представим себе в виде твердого тела эллиптической формы, мало отличающегося от шара; при этом мы предположим, что каждая частица океана притягивается одновременно всеми частицами земли и океана и в то же время находится под действием центробежной силы, возникающей вследствие равномерного вращения земли вокруг ее оси.

В данном случае представляется возможным применить те формулы, которые были даны нами в пункте 10 отдела V. Мы обозначили через Σ значение функции Π для случая, когда силы являются результатом притяжения всех частиц тела заданной формы, и дали выражение Σ для того случая, когда притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния и когда притягивающее тело представляет собою эллиптический сфероид, мало отличающийся от сферы. Если сохранить обозначения, примененные в указанном пункте, и ограничиться только членами, содержащими в себе вторые степени эксцентриситетов e и i , то мы получим

$$\Sigma = -m \left(\frac{1}{r} - \frac{e^2 + i^2}{2.5 r^3} + 3 \frac{e^2 y^2 + i^2 z^2}{2.5 r^5} \right),$$

где x, y, z — прямоугольные координаты притягиваемой точки, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — есть расстояние от этой точки до центра сфероида, а m — масса сфероида, равная $\frac{4\pi}{3} ABC$, где A, B, C — полуоси сфероида.

Если через Γ обозначим плотность сфероида, который мы примем однородным, то приведенное выражение Σ надо будет помножить на Γ ; если же мы допустим, что данный сфероид содержит в себе в качестве ядра другой сфероид, имеющий иную плотность, чем первый, то к приведенной выше величине надо будет только прибавить значение Σ для этого нового сфероида, помноженное на разность плотностей. Таким образом, отмечая штрихом величины, относящиеся к внутреннему сфероиду, и допуская, что его плотность равна $\Gamma + \Gamma'$, мы для общего значения Σ получим

$$\Sigma = - \frac{\Gamma m + \Gamma' m'}{r} + \frac{\Gamma m(e^2 + i^2) + \Gamma' m'(e'^2 + i'^2)}{2.5 r^3} - \\ - 3 \frac{\Gamma m e^2 + \Gamma' m' e'^2}{2.5 r^5} y^2 - 3 \frac{\Gamma m i^2 + \Gamma' m' i'^2}{2.5 r^5} z^2.$$

23. Допустим, что точка, притягиваемая сфероидом, одновременно находится под действием трех сил, выраженных через fx, gy и hz , которые направлены по координатам x, y, z и стремятся последние удлиннить тогда $-fx dx, -gy dy$ и $-hz dz$ представят моменты этих сил, а к величине Σ придется прибавить члены $-\frac{fx^2}{2} - \frac{gy^2}{2} - \frac{hz^2}{2}$, и тогда мы будем иметь значение Π , получающееся в результате действия всех сил, приложенных к одной и той же точке. Таким образом уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$\Sigma - \frac{fx^2 + gy^2 + hz^2}{2} = \text{const.}$$

24. Для того чтобы эти формулы применить к рассматриваемой дуге, допустим теперь, что внешним сфероидом является океан, плотность которого равна Γ , а внутренним ядром — земля, имеющая плотность $\Gamma + \Gamma'$;

притягиваемую точку поместим на поверхности океана, заставив координаты указанной точки x, y, z совпасть с координатами a, b, c внешней поверхности сфероида. В таком случае для равновесия этой поверхности должно существовать уравнение

$$\frac{\Gamma m + \Gamma' m'}{r} - \frac{\Gamma m (e^2 + i^2) + \Gamma' m' (e'^2 + i'^2)}{2 \cdot 5 r^3} + \frac{f x^2}{2} + \\ + \left(3 \frac{\Gamma m e^2 + \Gamma' m' e'^2}{2 \cdot 5 r^5} + \frac{g}{2} \right) y^2 + \left(3 \frac{\Gamma m i^2 + \Gamma' m' i'^2}{2 \cdot 5 r^5} + \frac{h}{2} \right) z^2 = \text{const.}$$

Это уравнение, в котором $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, дает форму упомянутой поверхности; но формулы, данные нами в пункте 10 отдела V, предполагают, что эта поверхность выражена с помощью уравнения

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

где x, y, z поставлены вместо a, b, c ; следовательно, последние два уравнения должны совпасть.

Определим из последнего уравнения значение r , выраженное через y и z ; для этого в формулу $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ подставим вместо x^2 его значение $A^2 - \frac{A^2 y^2}{B^2} - \frac{A^2 z^2}{C^2}$; подставив еще вместо B^2 и C^2 значения $A^2 + e^2$, $A^2 + i^2$ (см. упомянутый выше пункт), мы получим

$$r^2 = A^2 + \frac{e^2 y^2}{A^2 + e^2} + \frac{i^2 z^2}{A^2 + i^2},$$

откуда, отбросив степени e и i выше e^2 и i^2 , которых мы здесь не будем принимать во внимание, мы получим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A} - \frac{e^2 y^2 + i^2 z^2}{2 A^5}.$$

Подставим теперь это значение $\frac{1}{r}$, а также значение x^2 , в первое уравнение и отбросим члены, в состав которых входят $e^4, i^4, e^2 i^2, \dots$; тогда мы получим

$$\frac{\Gamma m + \Gamma' m'}{A} - \frac{\Gamma m (e^2 + i^2) + \Gamma' m' (e'^2 + i'^2)}{2 \cdot 5 A^3} + \frac{f A^2}{2} + \\ + \left[3 \frac{\Gamma m e^2 + \Gamma' m' e'^2}{2 \cdot 5 A^5} + \frac{g}{2} - \frac{f A^2}{2 B^2} - \frac{(\Gamma m + \Gamma' m') e^2}{2 A^5} \right] y^2 + \\ + \left[3 \frac{\Gamma m i^2 + \Gamma' m' i'^2}{2 \cdot 5 A^5} + \frac{h}{2} - \frac{f A^2}{2 C^2} - \frac{(\Gamma m + \Gamma' m') i^2}{2 A^5} \right] z^2 = \text{const.}$$

Для того чтобы это уравнение тождественно удовлетворялось, необходимо, чтобы коэффициенты переменных y^2 и z^2 были нулями, что даст нам два следующих уравнения:

$$\frac{3 \Gamma' m' e'^2}{2 \cdot 5 A^5} - \frac{(2 \Gamma m + 5 \Gamma' m') e^2}{2 \cdot 5 A^5} + \frac{g}{2} - \frac{f A^2}{2 B^2} = 0, \\ \frac{3 \Gamma' m' i'^2}{2 \cdot 5 A^5} - \frac{(2 \Gamma m + 5 \Gamma' m') i^2}{2 \cdot 5 A^5} + \frac{h}{2} - \frac{f A^2}{2 C^2} = 0.$$

Эти уравнения послужат для определения эксцентриситетов e и i эллиптической поверхности океана.

25. Как известно, центробежная сила пропорциональна расстоянию рассматриваемой точки от оси вращения и квадрату угловой скорости вращения. Следовательно, если в качестве оси вращения взять ось $2A$, которая является и осью координат x , и через f обозначить центробежную силу на расстоянии A от оси, то для центробежной силы в какой-либо точке сфероида мы получим выражение $\frac{fu}{A}$, где $u = \sqrt{y^2 + z^2}$. Эта сила, направленная по линии u и стремящаяся ее удлинить, дает момент $-\frac{fu du}{A}$, интеграл которого $-\frac{fu^2}{2A}$, или иначе $-\frac{f(y^2 + z^2)}{2A}$, должен быть прибавлен к величине Σ , если мы желаем принять во внимание и центробежную силу. Таким образом, положив в приведенных выше двух уравнениях $f=0$, $g=\frac{f}{A}$, $h=\frac{f}{A}$, мы получим условие равновесия океана в результате взаимного притяжения всех частиц океана и земли и действия центробежной силы, называемой вращением земли.

Так как обе постоянные g и h между собою равны, то приведенные уравнения показывают, что в случае равенства эксцентриситетов e' и i' земли мы получим и равенство двух эксцентриситетов поверхности океана. Следовательно, если земля представляет собою сфероид вращения, то и океан имеет ту же форму, и два рассматриваемых уравнения дадут значения двух эксцентриситетов e и i , которые будут отличны от эксцентриситетов e' и i' земли.

26. Впрочем, приведенное выше решение представляется точным только до величин e^2 , i^2 , e'^2 , i'^2 . Если бы при определении величин Σ и r мы пожелали принять во внимание и члены, содержащие более высокие степени указанных величин, то уравнения

$$\Sigma - \frac{f(y^2 + z^2)}{2A} = \text{const}$$

вообще уже нельзя было бы удовлетворить для поверхности равновесия; отсюда следует заключить, что, строго говоря, эта поверхность не имеет формы эллиптического сфероида.

Я утверждаю вообще, что в случае однородного сфероида, не имеющего внутреннего ядра с иной плотностью, притяжения, действующие на какую-либо точку поверхности, будучи разложены по трем осям координат x , y , z , выражаются точно с помощью формул

$$mLx, \quad mMy, \quad mNz,$$

где L , M , N — функции A , B , C , данные определенными интегралами; отсюда для Σ получается следующее точное выражение

$$\Sigma = \frac{m}{2} (Lx^2 + My^2 + Nz^2).$$

Так как уравнение равновесия $\Sigma - \frac{f(y^2 + z^2)}{2A} = \text{const}$ имеет такой же вид, как и уравнение сфероида $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$, то с помощью произвольной постоянной их можно сделать тождественными при следующих двух условиях

$$\frac{mM - f}{mL} = \frac{A^2}{B^2}, \quad \frac{mN - f}{mL} = \frac{A^2}{C^2};$$

из последующих уравнений следует, что $B = C$, так как величина M является такой же функцией *) от B, C , как N от C, B ; таким образом эти уравнения сводятся к единственному уравнению, которое служит для определения отношения A к B .

Этот случай является до настоящего времени единственным, для которого было найдено строгое решение, обязанное своим открытием Макло-рену. Таким образом вопрос о форме земли, рассматриваемый с физической точки зрения, строго разрешен только при наличии предположки, что земля представляет собою жидкий и однородный сфероид. В последнем случае оба найденных выше (п. 24) приближенных уравнения, если положить

$$\Gamma = 1, \quad \Gamma' = 0, \quad g = h = \frac{f}{A} \quad \text{и} \quad e = i,$$

дают следующее уравнение

$$\frac{2me^2}{5A^4} - f = 0.$$

Сравним центробежную силу с силой тяжести, принятой за единицу; так как последняя с точностью до величины e^2 равна $\frac{m}{A^2}$, то остается только положить $\frac{m}{A^2} = 1$, и мы получим

$$\frac{2e^2}{5A^2} = f = 2 \frac{B^2 - A^2}{5A^2};$$

откуда следует

$$\frac{B}{A} = \sqrt{1 + \frac{5f}{2}}.$$

Но $f = \frac{1}{288}$, следовательно, приблизительно $\frac{B}{A} = \frac{281}{280}$, как это уже известно с давнего времени.

§ III. О равновесии свободной жидкой массы с твердым телом, которое она покрывает.

27. Частные условия равновесия жидкости, в которую погружено твердое тело или которая окружает твердое тело, если все точки жидкости и твердого тела находятся под действием каких-либо сил, зависят от тех членов общего уравнения (п. 17), которые относятся к пределам и которые содержат только двойные интегралы.

Эти члены дают следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & S \lambda'' (\delta x'' dy dz + \delta y'' dx dz + \delta z'' dx dy) - \\ & - S \lambda' (\delta x' dy dz + \delta y' dx dz + \delta z' dx dy) = 0, \end{aligned}$$

которое должно удовлетворяться во всех тех точках, где жидкость соприкасается с твердым телом.

28. Рассмотрим сначала случай жидкой массы, внешняя поверхность которой свободна и которая окружает твердое неподвижное ядро любой формы.

*) При более детальном исследовании этих уравнений выясняется, что они допускают иное решение и что им может удовлетворить эллипсоид с тремя неравными осями. Это обстоятельство было отмечено Якоби (Jacobi); данный вопрос был разработан Лиувиллем (Liouville) (Journal de l'École Polytechnique, t. XIII). См. примечание в конце настоящего тома.

Примем начало координат в какой-нибудь точке внутри ядра; пусть величины, отмеченные одним штрихом, относятся к поверхности ядра, а отмеченные двумя штрихами — к внешней поверхности жидкости. Таким образом прежде всего для всех точек последней поверхности мы будем иметь уравнение $\lambda'' = 0$, которое, как мы уже видели выше (п. 19), дает для формы этой поверхности следующее уравнение

$$\oint \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) = K.$$

Таким образом остается только удовлетворить уравнению

$$\oint \lambda' (\delta x' dy dz + \delta y' dx dz + \delta z' dx dy) = 0,$$

все члены которого относятся к поверхности ядра.

29. Так как интегрирование этих членов распространяется на координаты, дифференциалы которых входят в выражение элементов поверхности $dx dy$, $dx dz$, $dy dz$, то следует начать с того, чтобы эти элементы привести к одному и тому же виду; этого можно достигнуть, отнеся их к элементу той поверхности, которой они соответствуют.

Обозначим через ds^2 элемент поверхности, соответствующий элементу $dx dy$, и назовем γ' угол, образуемый касательной плоскостью с той же плоскостью xy ; в силу известного свойства плоскостей мы будем иметь $dx dy = ds^2 \cos \gamma'$; поэтому интеграл $\oint \lambda' \delta z' dx dy$ перейдет в $\oint \lambda' \cos \gamma' \delta z ds^2$, причем последний интеграл должен быть распространен на все точки поверхности жидкости.

Точно так же, если ds^2 представляет собою элемент поверхности, соответствующий элементу $dx dz$ плоскости xz , и если мы назовем β' угол, образуемый касательной плоскостью с той же плоскостью xz , то мы получим $dx dz = ds^2 \cos \beta'$, и интеграл $\oint \lambda' \delta y' dx dz$ превратится в $\oint \lambda' \cos \beta' \delta y ds^2$, который тоже должен быть распространен на всю поверхность жидкости.

30. Обращая теперь внимание на то обстоятельство, что, хотя два элемента поверхности ds^2 и ds'^2 могут быть неравными между собою, тем не менее — ввиду того, что оба интеграла, в состав которых входят эти элементы, относятся к одной и той же поверхности, — нам ничто не мешает применить в обоих интегралах один и тот же элемент, ибо в силу природы дифференциального исчисления абсолютное значение элементов является произвольным и совершенно не влияет на значение интеграла. Таким образом мы можем интеграл $\oint \lambda' \cos \beta' \delta y ds^2$ заменить интегралом $\oint \lambda' \cos \beta' \delta y ds'^2$.

По тем же соображениям интеграл $\oint \lambda' \delta x' dy dz$ может быть представлен в виде $\oint \lambda' \cos \alpha' \delta x ds'^2$, если через α' назвать угол, образуемый касательной плоскостью с плоскостью xy .

Сверх того, ясно, что элементы dx , dy , dz всегда можно взять такими, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$dx dy = \cos \gamma' ds^2, \quad dx dz = \cos \beta' ds^2, \quad dy dz = \cos \alpha' ds^2,$$

которые дают

$$dx = ds \sqrt{\frac{\cos \beta' \cos \gamma'}{\cos \alpha'}},$$

$$dy = ds \sqrt{\frac{\cos \alpha' \cos \gamma'}{\cos \beta'}},$$

$$dz = ds \sqrt{\frac{\cos \alpha' \cos \beta'}{\cos \gamma'}}.$$

Благодаря указанным преобразованиям уравнение, относящееся к границам, в конце концов примет следующий вид:

$$S \lambda' (\cos \alpha' \delta x' + \cos \beta' \delta y' + \cos \gamma' \delta z') ds^2 = 0;$$

этот интеграл должен быть взят по всей поверхности соприкосновения жидкости с ядром.

31. Допустим, что форма рассматриваемой поверхности выражается с помощью дифференциального уравнения

$$A dx' + B dy' + C dz' = 0.$$

Если назвать α' , β' , γ' углы, образуемые касательной плоскостью с плоскостями xy , xz и yz , то на основании теории поверхностей мы получим

$$\cos \alpha' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \beta' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Поэтому уравнение поверхности, приведенное в предыдущем пункте, примет следующий вид:

$$S \left[\lambda' \frac{A \delta x' + B \delta y' + C \delta z'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right] ds^2 = 0.$$

Так как эта поверхность дается наперед как по своей форме, так и по положению, то между вариациями $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ координат частиц, прилежащих к этой поверхности, должно существовать отношение, зависящее от уравнения этой поверхности. Мы допустили, что это уравнение имеет следующий вид:

$$A dx' + B dy' + C dz' = 0,$$

поэтому мы обязательно будем также иметь

$$A \delta x' + B \delta y' + C \delta z' = 0;$$

этим удовлетворится уравнение на границах, приведенное в предыдущем пункте, без получения отсюда какого-либо нового уравнения.

32. Пусть p' — линия, перпендикулярная к поверхности в точке, которой соответствуют вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, причем эта линия заканчивается в некоторой неподвижной точке. Так как α' — это угол, образуемый касательной плоскостью с плоскостью yz , то он будет также углом, образуемым перпендикуляром p' в этой плоскости с осью x , которая перпендикулярна к плоскости yz . Точно так же β' будет угол, образуемый указанным выше перпендикуляром с осью y , и γ' — угол между тем же перпендикуляром и осью z . Поэтому, каковы бы ни были вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, мы на основании пункта 7 отдела II, заменив знак d знаком δ , получим

$$\delta p' = \cos \alpha' \delta x' + \cos \beta' \delta y' + \cos \gamma' \delta z',$$

и уравнение пункта 30, относящееся к поверхности жидкости, может быть приведено к следующему виду:

$$S \lambda' \delta p' ds^2 = 0.$$

Легко видеть, что каждый элемент $\lambda' ds^2 dp'$ этого интеграла выражает момент силы $\lambda' ds^2$, приложенной в элементу ds^2 поверхности и направленной по перпендикуляру p' к этой поверхности; таким образом интеграл $\int \lambda' dp' ds^2$ представляет собою сумму моментов всех сил λ' , приложенных к каждой точке поверхности и действующих по направлению, перпендикулярному к этой поверхности.

Эта сила, равная λ' , очевидно, представляет собою давление, которое жидкость производит на поверхность ядра и которое уничтожается сопротивлением этого ядра. Но вообще все члены уравнения для границ, относящиеся к поверхности жидкости, могут быть представлены в виде $\int \lambda dp' ds^2$, независимо от того, свободна ли эта поверхность или нет, причем ясно, что во всех тех точках, где поверхность свободна, давление λ должно равняться нулю. Последний вывод мы получили уже раньше иным путем (п. 18).

33. Если бы ядро, покрытое жидкостью, обладало подвижностью, то вариации δx , δy , δz следовало бы увеличить на те вариации, которые связаны с изменением положения ядра.

Для того чтобы отличить одни вариации от других, мы будем обозначать через δx , δy , δz те вариации, которые происходят только вследствие смещения частиц жидкости по отношению к ядру, который мы принимаем неподвижным, а через $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$ — те вариации, которые связаны со смещением ядра. Последние выражаются с помощью следующих формул, данных нами в пункте 60 отдела V,

$$\delta \xi = \delta l + x \delta M - y \delta N, \quad \delta \eta = \delta m - x \delta L + y \delta N, \quad \delta \zeta = \delta n + y \delta L - x \delta M.$$

Таким образом в общем уравнении пункта 17 следует вместо δx , δy , δz подставить $\delta x + \delta \xi$, $\delta y + \delta \eta$, $\delta z + \delta \zeta$, а затем приравнять нулю все члены, в состав которых войдут вариации δx , δy , δz , а также и те члены, в состав которых войдут новые вариации δl , δm , δn , δL , δM , δN ; эти последние вариации можно вывести из под знака $\int$, так как они одинаковы для всех частиц жидкости.

Мы видим прежде всего, что введение вариаций $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$ не вызывает никакого изменения в уравнениях, которые должны иметь место для всех точек жидкости и которые получаются из членов, стоящих под знаком тройного интеграла; в самом деле, если приравнять нулю входящие в состав этих членов коэффициенты вариации δx , δy , δz , то одновременно исчезнут и вариации $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$. Отсюда следует, что общие законы равновесия, содержащиеся в формулах пункта 19, не зависят как от состояния, так и от формы ядра.

34. Остается еще рассмотреть уравнение на границах, которое мы в пункте 30 привели к следующему виду:

$$\int \lambda' (\cos \alpha \delta x' + \cos \beta \delta y' + \cos \gamma \delta z') ds^2 = 0.$$

Если в последнее вместо $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ подставить значения $\delta x' + \delta \xi'$, $\delta y' + \delta \eta'$, $\delta z' + \delta \zeta'$, снабженные одним штрихом для того, чтобы указать, что они относятся к поверхности жидкости, соприкасающейся с ядром, то оно примет следующий вид:

$$\int \lambda' (\cos \alpha \delta x' + \cos \beta \delta y' + \cos \gamma \delta z') ds^2 + \\ + \int \lambda' (\cos \alpha \delta \xi' + \cos \beta \delta \eta' + \cos \gamma \delta \zeta') ds^2 = 0.$$

Та часть этого уравнения, которая содержит в себе вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, сама по себе равна нулю, как это было показано в пункте 31. Следова-

тельно, и другая часть левой стороны уравнения тоже должна равняться нулю. Подставим в нее значения $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$ и затем приравняем нулю отдельно величины, умножающиеся на δl , δm , δn , δL , δM , δN ; тогда мы получим следующие шесть уравнений:

$$\begin{aligned} S \lambda' \cos \alpha \, ds^2 &= 0, \quad S \lambda' \cos \beta \, ds^2 = 0, \quad S \lambda' \cos \gamma \, ds^2 = 0, \\ S \lambda' (y' \cos \gamma - z' \cos \beta) \, ds^2 &= 0, \\ S \lambda' (z' \cos \alpha - x' \cos \gamma) \, ds^2 &= 0, \quad - \\ S \lambda' (x' \cos \beta - y' \cos \alpha) \, ds^2 &= 0. \end{aligned}$$

Таковы уравнения, необходимые для полного равновесия жидкости и твердого тела.

Эти уравнения соответствуют уравнениям пункта 62 отдела V, если в последних вместо dm подставить ds^2 и вместо X , Y , Z подставить $\lambda' \cos \alpha$, $\lambda' \cos \beta$, $\lambda' \cos \gamma$. Действительно, если λ' представляет собою силу давления, действующую на поверхность ядра перпендикулярно к последнему, то $\lambda' \cos \alpha$, $\lambda' \cos \beta$, $\lambda' \cos \gamma$ представляют собою силы, вызываемые силой λ' по направлениям координат x , y , z ; следовательно, для равновесия твердого тела требуется, чтобы на каждую точку его поверхности действовали как раз эти силы.

35. Однако в том случае, когда жидкость поддерживается каким-либо твердым телом заданной формы и оба они находятся под действием любых сил, решение данной задачи получается проще, если обратиться непосредственно к основному уравнению пункта 16 и прямо в него подставить вместо δx , δy , δz их полные значения

$$\delta x + \delta\xi, \quad \delta y + \delta\eta, \quad \delta z + \delta\zeta \quad (\text{п. 33}).$$

Вариации δx , δy , δz , будучи независимыми от других вариаций δl , δm , ..., приведут к уравнению, аналогичному уравнению пункта 17, и для равновесия жидкости дадут те же результаты, какие были получены для случая, когда твердое тело было принято неподвижным.

Что касается других вариаций $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, то прежде всего легко показать, что они несколько не повлияют на значения частных дифференциалов $\frac{\delta \delta x}{\delta x}$, $\frac{\delta \delta y}{\delta y}$, $\frac{\delta \delta z}{\delta z}$, так как вариации δl , δm , δn , δL , δM , δN мы представляем себе независимыми от x , y , z .

Таким образом достаточно в формулу

$$S (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \Gamma \, dx \, dy \, dz$$

подставить $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ вместо δx , δy , δz и приравнять нулю отдельно величины, умножающиеся на каждую из шести вариаций δl , δm , δn , δL , δM , δN , выведя их предварительно из под знака S . Легко видеть, что таким путем мы получим те же самые уравнения, какие нами были найдены в отделе V (глава IV) для равновесия твердого тела, каждая частица которого dm — здесь она выражена через $\Gamma \, dx \, dy \, dz$ — находится под действием каких-либо сил X , Y , Z ; таким образом для равновесия жидкости, находящейся над подвижным твердым ядром, мы получаем такие же уравнения, какие мы имели бы, если бы жидкость превратилась в твердое тело.

36. Из приведенных выше двух методов рассмотрения вариаций следует, что давление жидкости на поверхность ядра эквивалентно действию

всех сил, приложенных к каждой частице жидкости, если предположить, что жидкость рассматривается как твердое тело и что ядро увеличилось на всю массу отвердевшей жидкости.

Ввиду важности этой теоремы статистики мы считаем необходимым показать более прямой путь, каким она может быть выведена из наших формул.

Вся задача сводится к тому, чтобы доказать, что уравнение

$$S(X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta)\Gamma dx dy dz = 0$$

дает те же результаты, что и уравнение для границ

$$S\lambda'(\delta\xi'dy dz + \delta\eta'dx dz + \delta\zeta'dx dy) = 0.$$

Согласно условиям равновесия жидкости мы имеем

$$\Gamma X = \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \quad \Gamma Y = \frac{\partial\lambda}{\partial y}, \quad \Gamma Z = \frac{\partial\lambda}{\partial z};$$

а так как значения $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ (п. 33) независимы соответственно от x , y , z , мы также имеем

$$\Gamma X \delta\xi = \frac{\partial\lambda}{\partial x} \delta\xi, \quad \Gamma Y \delta\eta = \frac{\partial\lambda}{\partial y} \delta\eta, \quad \Gamma Z \delta\zeta = \frac{\partial\lambda}{\partial z} \delta\zeta.$$

Следовательно, первое уравнение превратится в

$$S\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} \delta\xi + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \delta\eta + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \delta\zeta\right) dx dy dz = 0.$$

Первый член под знаком интеграла может быть проинтегрирован по x , второй по y и третий по z ; следовательно, если выполнить эти частные интегрирования, то аналогично пункту 17 мы отсюда получим уравнение для границ

$$S\lambda''(\delta\xi''dy dz + \delta\eta''dx dz + \delta\zeta''dx dy) - S\lambda'(\delta\xi'dy dz + \delta\eta'dx dz + \delta\zeta'dx dy) = 0.$$

Но мы имеем (п. 23) $\lambda'' = 0$, так как согласно допущению внешняя поверхность жидкости свободна; таким образом остается только уравнение

$$S\lambda'(\delta\xi'dy dz + \delta\eta'dx dz + \delta\zeta'dx dy) = 0.$$

Итак, оба указанных выше уравнения приводят к одному и тому же результату.

37. По отношению к вариациям, зависящим от смещения ядра, жидкость, покрывающую это ядро, можно рассматривать таким образом, как если бы она составляла единую твердую массу с ядром; поэтому в том случае, когда все точки ядра тоже находятся под действием каких-либо сил, остается только учесть эти силы подобно силам, действующим на частицы жидкости, и применить к равновесию массы, составленной из жидкости и твердого тела, как если бы она образовала единое сплошное твердое тело, те решения, которые были даны в главе IV отдела V.

§ IV. О равновесии несжимаемых жидкостей, содержащихся в сосудах.

38. Общее уравнение для границ, указанное в пункте 27, должно выполняться для всех точек стенок сосуда, в котором содержится жидкость.

Представим это уравнение в следующем виде:

$$S(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x') dy dz + S(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y') dx dz + S(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z') dx dy = 0.$$

и рассмотрим сначала член $S(\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy$; здесь $\delta z''$ и $\delta z'$ представляют собою вариации координаты z , которая принадлежит двум точкам поверхности жидкости, соответствующим одинаковым координатам x и y .

Ясно, что вариации $\delta z''$ стремятся заставить частицы поверхности уйти из жидкой массы, а вариации $\delta z'$, если и те и другие считать положительными, стремятся заставить частицы с противоположной поверхности войти в жидкую массу; следовательно, если вариацию второго вида снабдить знаком минус, то вариации $\delta z''$ и $-\delta z'$ будут одинаково стремиться удалить частицы поверхности из жидкой массы; в таком случае двойной интеграл

$$S(\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy$$

выразит сумму всех величин $\lambda \delta z dx dy$, которые соответствуют всем точкам поверхности жидкости, в которых согласно допущению вариации δz обладают одной и той же тенденцией к выходу из массы жидкости наружу. При наличии этого условия мы можем приведенному выше интегралу дать следующий более простой вид: $S \lambda \delta z dx dy$.

Аналогичным путем и на тех же условиях мы можем два других двойных интеграла

$$S(\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz \quad \text{и} \quad S(\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz$$

привести к следующему виду: $S \lambda \delta y dx dz$, $S \lambda \delta x dy dz$.

Итак, рассматриваемое уравнение на границах может быть представлено в таком виде

$$S \lambda \delta z dx dy + S \lambda \delta y dx dz + S \lambda \delta x dy dx,$$

которое, на основании анализа пункта 33, может быть приведено к следующему:

$$S \lambda (\cos \alpha \cdot \delta x + \cos \beta \cdot \delta y + \cos \gamma \cdot \delta z) ds^2 = 0;$$

в этом уравнении α , β , γ представляют собою углы, которые образует с тремя плоскостями yz , xz и xy касательная плоскость к поверхности, проведенная в точке, соответствующей координатам x , y , z . Интегрирование этого уравнения распространяется на всю поверхность жидкости, а все вариации δx , δy , δz следует считать направленными из внутренних частей жидкой массы наружу.

39. В тех точках, где поверхность свободна, вариации δx , δy , δz остаются неопределенными; поэтому уравнение может быть удовлетворено только при том условии, если мы положим $\lambda = 0$, откуда мы получим форму упомянутой поверхности, как мы это видели в пункте 18.

Во всех других точках поверхности, где жидкость соприкасается со стенками сосуда, мы, отмечая одним штрихом величины, относящиеся к этим точкам поверхности, получим для стенок сосуда те же уравнения, какие мы получили раньше (п. 30) для поверхности ядра, покрытого жидкостью. Следовательно, и все те выводы, какие были сделаны из этого уравнения, начиная с упомянутого выше пункта и до конца предшествующего параграфа, могут быть применены к стенкам сосуда, в котором содержится жидкость, независимо от того, какова его форма, неподвижен ли он или же он поддерживается в равновесии давлением жидкости и влиянием внешних сил, действующих на него в каких угодно направлениях.

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ.

О РАВНОВЕСИИ СЖИМАЕМЫХ И УПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ.

1. Пусть, как и в пункте 10 предыдущего отдела, X , Y , Z — силы, действующие на каждую точку жидкой массы, отнесенные к осям координат x , y , z и стремящиеся уменьшить эти координаты; тогда прежде всего

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm$$

будет суммой моментов этих сил.

У упругих жидкостей существует еще одна внутренняя сила, которую называют *упругостью*, или *силой напряжения*, и которая стремится их расширить или увеличить их объем. Итак, пусть ϵ — упругость какой-нибудь частицы dm ; согласно пункту 9 отдела II, у этой силы, стремящейся увеличить объем $dx dy dz$ упомянутой частицы, будет, или можно себе представить существующей, в качестве момента величина $-\epsilon \delta (dx dy dz)$. Выражение момента этой силы я снабжаю здесь знаком минус, так как в данном случае сила стремится увеличить переменную величину $dx dy dz$, в то время как силы X , Y , Z стремятся уменьшить переменные x , y , z . Следовательно, сумма моментов, получающихся вследствие упругости всей жидкой массы, выражается через $-\int \epsilon \delta (dx dy dz)$.

Таким образом общая сумма моментов сил, действующих на жидкость, составит

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm - \int \epsilon \delta (dx dy dz);$$

так как здесь не имеется никаких частных условий, которые должны были бы быть выполнены, то общее уравнение равновесия получится, если мы эту сумму просто приравняем нулю.

2. Итак, для равновесия упругих жидкостей получается уравнение такого же вида, какое мы нашли в предыдущем отделе (п. 10) для равновесия несжимаемых жидкостей, так как в последнем (п. 11)

$$\delta L = \delta (dx dy dz),$$

благодаря чему член $\int \lambda \delta L$, получающийся из условия несжимаемости, совершенно аналогичен члену $\int \epsilon \delta (dx dy dz)$, получающемуся из момента упругих сил.

Отсюда следует, что формулы, выведенные для равновесия несжимаемых жидкостей, непосредственно и без всяких ограничений могут быть применены и к равновесию упругих жидкостей, если только коэффициент λ просто заменить коэффициентом $-\epsilon$, т. е. если допустить, что величина λ , обозна-

чающая давление у несжимаемых жидкостей, будучи взята с отрицательным знаком, выражает и силу упругости каждого элемента упругой жидкости.

3. Упругость ε зависит от плотности и температуры каждой частицы жидкости и ее следует рассматривать как известную функцию обеих этих величин; но плотность каждой отдельной частицы неизвестна, так как она зависит от отношения массы dm частицы к ее объему $dx dy dz$, и дифференциальное исчисление не в состоянии определить этого отношения, зависящего от числа элементарных частиц, заключенных в дифференциальном элементе $dx dy dz$ жидкой массы.

Поэтому значение упругости можно установить лишь *a posteriori* — с помощью тех сил, которые поддерживают жидкость в равновесии; следовательно, значение ε следует определить тем же путем, каким было определено в пункте 19 предыдущего отдела значение λ .

4. Поставив — вместо λ , мы на основании упомянутого пункта получим уравнения

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \Gamma X = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \Gamma Y = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \Gamma Z = 0,$$

которые дают

$$d\varepsilon + \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = -\int \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) + \text{const.}$$

Таким образом величина $\Gamma (X dx + Y dy + Z dz)$ должна быть полным дифференциалом для равновесия жидкостей как упругих, так и несжимаемых.

Отсюда можно, как и в п. 20 предыдущего отдела, сделать вывод, что если величина $X dx + Y dy + Z dz$ является сама по себе полным дифференциалом, то плотность Γ должна быть одинаковой на каждой поверхности уровня.

5. Если через θ обозначить температуру, существующую в каждом месте жидкости, то для воздуха обычно принимают, что ε пропорционально $\Gamma \theta$; если отвлечься от других причин, как, например, пара, электричества, которые могут повлиять на его упругость.

Подставим в уравнение

$$d\varepsilon + \Gamma (X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

вместо Γ его значение $\frac{\varepsilon}{m\theta}$; тогда оно примет следующий вид:

$$m \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{X dx + Y dy + Z dz}{\theta} = 0.$$

Так как теплота вызывается местными причинами, то величина θ является заданной функцией x, y, z ; следовательно, для того чтобы могло существовать приведенное выше уравнение, необходимо, чтобы величина

$$\frac{X dx + Y dy + Z dz}{\theta}$$

была полным дифференциалом.

6. Поэтому в естественных условиях, где

$$X dx + Y dy + Z dz = d\Pi$$

(отд. 7, п. 20), θ должно быть функцией Π ; следовательно, если дифференциал $d\Pi = 0$, то и дифференциал $d\theta = 0$; отсюда следует, что на каждой

поверхности уровня, к которой силы тяжести направлены перпендикулярно, теплота должна быть повсюду постоянной, в противном случае атмосфера не могла бы находиться в состоянии равновесия. Следовательно, для того чтобы воздух мог оставаться в покое, необходимо, чтобы на всей поверхности земли температура была одинаковой и чтобы при подъеме в атмосфере она изменялась только при переходе от одной поверхности уровня до другой.

7. Что касается уравнения для границ поверхности жидкости, то если к нему применить преобразование пункта 32 предыдущего отдела, то оно примет следующий вид:

$$\sum \epsilon \delta p ds^2 = 0;$$

в этом виде оно становится само собою очевидным, так как на поверхности приходится рассматривать только силу упругости ϵ , действующую по линии p , перпендикулярно к этой поверхности; в том случае, когда жидкость находится в сосуде, вариации δp равны нулю, и приведенное уравнение само собою выполняется; если же часть поверхности свободна, упругость ϵ должна равняться нулю; в противном случае жидкость, которую ничто не сдерживало бы, должна была бы рассеяться.

8. В атмосфере упругость ϵ пропорциональна барометрической высоте, которую мы обозначим через h . Пусть Z — сила тяжести. Выберем ординату z перпендикулярно к поверхности земли и направим ее снизу вверх; тогда уравнение, приведенное в пункте 5, примет следующий вид;

$$m \frac{dh}{h} + \frac{Z dz}{g} = 0;$$

после интегрирования это уравнение, если барометрическую высоту принять равной H , когда $z = 0$, дает

$$m \log \frac{H}{h} = \int \frac{Z dz}{g},$$

причем предполагается, что интеграл начинается в той точке, где $z = 0$.

Отсюда мы видим, что логарифм отношения барометрических высот, строго говоря, имеет величину, пропорциональную значению интеграла $\int \frac{Z dz}{g}$, взятого между высотами соответствующих двух станций наблюдения; кроме того, отсюда видно, что для определения разности высот этих станций следует допустить, что известен закон, связывающий температуру θ с высотой z .

9. Как известно, тяжесть убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра земли. Следовательно, если мы примем r в качестве радиуса земли и предположим, что z представляет собою взятую по вертикали высоту станции над поверхностью земли, то мы получим

$$Z = \frac{g}{\left(1 + \frac{z}{r}\right)^2},$$

где g — сила тяжести на поверхности земли; отсюда следует

$$Z dz = g \frac{dz}{\left(1 + \frac{z}{r}\right)^2} = g dx,$$

если положить $x = \frac{z}{1 + \frac{z}{r}}$, так что получится

$$m \log \frac{H}{h} = g \int \frac{dx}{v};$$

теперь вся трудность сводится к тому, чтобы получить θ в функции x .

10. Если допустить, что θ постоянна и если для краткости принять $\frac{m\theta}{g} = K$, то мы получим

$$x = K \log \frac{H}{h} = K (\log H - \log h),$$

откуда с помощью формулы $z = \frac{x}{1 - \frac{x}{r}}$ мы определим значение z .

Если мы пренебрежем членом $\frac{x}{r}$, который для не очень больших высот z всегда представляет собою незначительную величину, то мы получим просто $z = x$; это дает нам обычное правило измерения высот с помощью барометра.

Коэффициент K должен быть определен путем наблюдения. Делюк (Deluc) установил, что для постоянной температуры $16^{\circ},75$ по термометру Реомюра этот коэффициент равен 10 000, если расчет производить с помощью обыкновенных логарифмов, а высоту измерять в туазах. Для других температур он увеличивал или уменьшал указанный коэффициент на одну 215-ю его часть на каждый градус выше или ниже $16^{\circ},75$, а для температур, изменяющихся от одной станции до другой, он брал просто среднюю арифметическую между температурами этих станций. Позднее приведенное выше правило было улучшено на основании более точных данных и на основании новых поправок, внесенных в коэффициент K .

11. Впрочем, когда в качестве одинаковой температуры берут среднюю арифметическую между крайними температурами воздушной колонны, то при этом предполагают, что температура убывает в арифметической прогрессии. Для того чтобы посмотреть, что дает такое предположение, примем $\theta = \Theta (1 - nx)$, или, для простоты расчета, лучше $\theta = \Theta (1 - nx)$, где Θ — температура для того случая, когда $x = 0$. Если это значение подставить в формулу $\frac{dx}{\theta}$, проинтегрировать и затем вместо n подставить его значение, выведенное из предыдущего уравнения, то мы получим

$$\int \frac{dx}{\theta} = x \cdot \frac{\log \Theta - \log \theta}{\Theta - \theta} = \frac{x}{k} \left(1 - \frac{T+t}{2k} + \frac{T+Tt+t^2}{3k^2} - \dots \right);$$

здесь принято, что $\Theta = k + T$, $\theta = k + t$ и k представляет собою некоторую постоянную температуру, а T , t являются показаниями термометра выше этой температуры.

При указанных условиях, если положить $\frac{mk}{g} = K$ и ограничиться приближением только до вторых степеней T и t , формула пункта 9 даст

$$x = K \left[1 + \frac{T+t}{2k} - \frac{(T-t)^2}{12k^2} \right] \log \frac{H}{h}.$$

Первые два члена этой формулы соответствуют правилу Делюка, третий же член почти всегда является неощутимым.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ. ДИНАМИКА.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

О РАЗЛИЧНЫХ ПРИНЦИПАХ ДИНАМИКИ.

Динамика — это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о перемещенных движениях, которые они должны вызывать. Эта наука целиком обязана своим развитием новейшим ученым, а Галилей является тем лицом, которое заложило первые ее основы. До него силы, действующие на тела, рассматривали только в состоянии равновесия, и хотя ускоренное падение твердых тел и криволинейное движение брошенных тел не могли приписать какой-либо иной причине, кроме постоянного действия тяжести, тем не менее никому до Галилея не удалось определить законов этих повседневных явлений — несмотря на то, что причина их столь проста. Галилей первый сделал этот важный шаг и этим открыл новый и необозримый путь для прогресса механики. Его открытие было изложено и развито в работе, озаглавленной: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, появившейся впервые в Лейдене в 1638 г.*). Однако эта работа не доставила Галилею у современников столько славы, сколько открытия, произведенные им на небе; тем не менее в настоящее время она составляет наиболее надежную и существенную часть славы этого великого человека.

Открытие спутников Юпитера, фаз Венеры, солнечных пятен и т. д. потребовали лишь наличия телескопа и известного трудолюбия, но нужен был необыкновенный гений, чтобы открыть законы природы в таких явлениях, которые всегда пребывали перед глазами, но объяснение которых тем не менее всегда ускользало от пылканций философов.

Гюйгенс (Huyghens), которого сама судьба как будто предназначила для усовершенствования и дополнения большинства открытий Галилея, прибавил к теории ускоренного движения весомых тел теорию движения маятника и теорию центробежных сил**) и таким образом подготовил

*) Имеется русский перевод: Галилео Галилей, Сочинения, том I, ГТТИ, М. — Л. 1934 г.

**) Галилей определенно имел представление о центробежной силе: в одном из своих диалогов он ясно говорит, что вращение земли должно было бы вызвать в телах появление видимой вертикальной скорости, направленной снизу вверх, если бы их не удерживала сила тяжести. Но Галилей впадает в ошибку, когда к этому прибавляет, что силы тяжести, какой бы малой она нам ни представлялась, всегда достаточно для того, чтобы воспрепятствовать подобному движению. Мне кажется, однако, что несмотря на эту грубую ошибку, указанное место Диалогов содержит в себе первую мысль о великом открытии Гюйгенса. См. *Dialogo sopra le due massimi sistemi del mondo...* стр. 185 и след. (флорентийское издание 1710 г.).

Прим. ред.

Прим. Бертрама.

почву для великого открытия всемирного тяготения. В руках Ньютона механика превратилась в новую науку; его *Principia mathematica*, появившиеся впервые в 1687 г., и представили эпоху этого превращения.

Наконец, открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям; после этого исследование сил и вызываемых ими движений явилось главным предметом их работ.

Я поставил себе здесь целью предоставить в распоряжение математиков новое средство для облегчения подобного рода исследований; однако будет бесполезно сначала изложить те принципы, которые лежат в основании динамики, и показать последовательное развитие тех идей, которые больше всего способствовали расширению и усовершенствованию этой отрасли знания.

1. Теория неравномерных движений и ускоряющих сил, вызывающих эти движения, основана на следующих общих законах: каждое движение, сообщенное телу, является по своей природе равномерным и прямолинейным; различные движения, сообщенные одновременно или последовательно одному и тому же телу, складываются таким образом, что в каждое данное мгновение тело находится в той самой точке пространства, в которой оно должно было бы очутиться в результате сочетания этих движений, если бы каждое из них действительно существовало отдельно в теле. В этих-то двух законах и содержатся известные принципы силы инерции и сложного движения [21]. Галилей первый открыл оба эти принципа и вывел из них законы движения брошенных тел, складывая наклонное движение, являющееся результатом сообщенного телу импульса, с падением по отвесу, вызываемым действием силы тяжести.

Что касается законов ускоренного движения тяжелых тел, то они естественно выводятся из рассмотрения постоянного и равномерного действия тяжести, под влиянием которой тела в равные мгновения получают равные степени скорости по одному и тому же направлению; поэтому вся скорость, приобретенная телом к концу какого-либо промежутка времени, должна быть пропорциональна этому промежутку. Отсюда ясно, что указанное постоянное отношение скоростей ко времени со своей стороны должно быть пропорционально величине силы, развиваемой тяжестью для приведения тела в движение. Вследствие этого при движении по наклонным плоскостям это отношение не должно быть пропорционально абсолютной силе тяжести, как при движении по вертикали, но должно быть пропорционально относительной силе, которая зависит от наклона плоскости и определяется по законам статики; это дает нам легкий способ сопоставления движений тел, спускающихся по плоскостям различного наклона.

Однако Галилей, повидимому, не этим путем открыл законы падения тяжелых тел. Он, наоборот, начал с того, что установил понятие о равномерно ускоренном движении, при котором скорости возрастают пропорционально временам: отсюда он геометрическим путем вывел основные свойства этого вида движения и в особенности закон нарастания пути пропорционально квадрату времени; затем он с помощью опыта убедился, что этот закон действительно имеет место при движении тел, падающих по вертикали или по плоскостям любого наклона. Однако для того чтобы получить возможность сравнить движений по плоскостям с различным наклоном, он был вынужден предварительно допустить не обоснованное положение, что скорости, приобретенные после падения с разных вертикальных высот, всегда между собою равны; и лишь незадолго до смерти и после издания своих *Диалогов* он нашел доказательство этого положения

путем рассмотрения относительного действия тяжести на наклонных плоскостях; это доказательство было затем включено в последующие издания упомянутой работы Галилея.

2. Таким образом постоянное отношение, которое при равномерно ускоренных движениях должно существовать между скоростями и временами или между путями и квадратами времен, может быть принято в качестве меры ускоряющей силы, действующей непрерывно на тело; действительно, эта сила может быть измерена только до тому действию, которое она вызывает в теле и которое проявляется в вызванных скоростях или в путях, пройденных за заданные промежутки времени.

Итак, для подобной оценки сил достаточно рассмотреть движение, вызванное в течение любого конечного или бесконечно малого времени, если только мы силу принимаем постоянной в течение этого времени. Какими бы ни были движение тела и закон его ускорения, но согласно природе дифференциального исчисления, мы можем признать постоянным действие каждой ускоряющей силы в течение бесконечно малого времени; таким образом всегда можно определить величину силы, действующей на тело в любое мгновение, если вызванную в это мгновение скорость сравнить с продолжительностью этого мгновения или же если путь, пройденный телом в течение этого мгновения под влиянием силы, сравнить с квадратом продолжительности этого мгновения; при этом нет нужды в том, чтобы указанный путь фактически был пройден телом: достаточно, чтобы можно было себе представить, что он был пройден при некотором сложном движении, ибо согласно второму из приведенных выше принципов движения действие силы в обоих случаях одинаково.

Указанным выше путем Гюйгенс открыл, что центробежные силы тел, приводимых в движение по окружностям с постоянными скоростями, относятся между собою, как квадраты скоростей, деленные на радиусы кругов; этим же путем он получил возможность сравнить центробежные силы с силой тяжести на поверхности земли, как об этом можно судить по оставленным им доказательствам своих теорем о центробежных силах, опубликованным в 1673 г. в конце трактата *Horologium oscillatorium*.

Гюйгенс сочетал указанную теорию центробежных сил с теорией разверток, автором которой тоже был он; эта последняя теория сводит каждую бесконечно малую часть любой кривой к круговым дугам, что легко дает возможность распространить теорию центробежных сил на все кривые линии. Однако только Ньютону привелось сделать этот новый шаг и дополнить учение о неравномерных движениях и об ускоряющих силах, способных вызывать подобные движения. В настоящее время это учение сводится лишь к нескольким очень простым дифференциальным формулам; однако сам Ньютон постоянно пользовался геометрическим методом, упрощенным благодаря рассмотрению первых и последних отношений; если же в отдельных случаях он и прибегал к аналитическому исчислению, то он пользовался при этом только методом рядов, который следует отличать от дифференциального метода, хотя, правда, оба эти метода могут быть легко сближены и сведены к одному и тому же принципу.

Математики, трактовавшие теорию ускоряющих сил после Ньютона, почти все ограничивались тем, что обобщали данные им теоремы и переводили их в дифференциальную форму. Отсюда берут свое начало различные формулы для центральных сил, которые встречаются в многочисленных работах по механике, — формулы, которым, однако, почти не дают дальнейшего применения, так как их можно использовать только для такого рода кривых, которые мы можем себе представить описанными под влия-

нием единственной силы, стремящейся к некоторому центру, и так как в настоящее время существуют общие формулы для определения движений, вызванных любыми силами.

3. Если допустить, что движение тела и силы, вызывающие это движение, разложены по трем взаимно перпендикулярным направлениям, можно отдельно рассмотреть движения и силы по отношению к каждому из этих трех направлений. Ибо в силу взаимной перпендикулярности этих направлений ясно, что каждое из этих частичных движений может быть рассматриваемо как независимое от других двух движений и что каждое из них может претерпеть изменение только со стороны той силы, которая действует по направлению этого движения; отсюда можно заключить, что каждое из этих трех движений в отдельности должно следовать законам прямолинейных движений, ускоренных или замедленных под влиянием заданных сил. Но при прямолинейном движении действие ускоряющей силы состоит только в том, что она изменяет скорость тела; поэтому данная сила должна измеряться отношением между приращением или убылью скорости в течение некоторого мгновения и продолжительностью этого мгновения, т. е. дифференциалом скорости, разделенным на дифференциал времени; а так как сама скорость при неравномерных движениях измеряется дифференциалом пути, разделенным на дифференциал времени, то отсюда следует, что рассматриваемая сила измеряется вторым дифференциалом пути, разделенным на квадрат первого дифференциала времени, который при этом рассматривается как постоянная величина. Таким образом второй дифференциал пути, который тело проходит или согласно нашему представлению может пройти по каждому из трех взаимно перпендикулярных направлений, разделенный на квадрат постоянного дифференциала времени, выразит ускоряющую силу, действующую на тело в этом именно направлении, и, следовательно, будет равен действительной силе, которая согласно нашему допущению действует в данном направлении. В этом и заключается столь хорошо известный принцип ускоряющих сил.

Нет необходимости в том, чтобы три направления, к которым относят мгновенное движение тела, были совершенно неподвижными; достаточно, чтобы они оставались таковыми в течение рассматриваемого мгновения. Таким образом при движениях по кривой линии можно каждое мгновение избирать эти направления, причем одно из них по касательной, а другие два по линиям, перпендикулярным к кривой. Тогда ускоряющая сила, действующая по касательной и носящая название *тангенциальной силы*, будет полностью использована для изменения абсолютной скорости тела и будет выражена с помощью элемента этой скорости, разделенного на элемент времени.

Нормальные же силы изменяют только направление движения и зависят от кривизны линии, описываемой телом. Если нормальные силы свести к одной, то направление этой сложной силы будет лежать в плоскости кривизны и самая сила будет выражена квадратом скорости, разделенным на радиус кривизны, ибо каждое мгновение тело можно рассматривать как бы движущимся по соответствующему кругу кривизны.

Этим путем были найдены известные формулы для сил тангенциальных и нормальных, которыми пользуются уже с давних пор для разрешения проблем движения тел, находящихся под действием заданных сил. Появившаяся в 1736 г. „Механика“ Эйлера, которую следует признать первой большой работой, где к учению о движении был применен анализ, вся еще построена на этих формулах; однако после этого их почти оставили, так как был найден более простой способ выражения действия ускоряющих сил на движение тела.

Последний заключается в том, что движение тела и действующие на него силы относят к некоторым неподвижным в пространстве направлениям. Если для определения места тела в пространстве приписать три прямоугольных координаты, имеющих указанные направления, то, очевидно, изменения этих координат выразят путь, пройденный телом по направлениям этих координат; следовательно, их вторые дифференциалы, разделенные на квадрат постоянного дифференциала времени, выразят ускоряющие силы, которые должны действовать по направлениям этих координат. Таким образом, если эти выражения приравнять выражениям сил, заданных условиями задачи, мы получим три аналогичных уравнения, которые и послужат для определения всех обстоятельств рассматриваемого движения. Этот прием составления уравнения движения тела, находящегося под действием каких-либо сил, путем сведения этого движения к прямолинейным движениям, следует благодаря его простоте предпочесть всем другим приемам; поэтому он должен был бы возникнуть раньше других, однако в действительности, повидимому, только Мэклорен (MacLaurin) впервые применил его в своем *Traité de fluxions*, появившемся в свет на английском языке в 1742 г. В настоящее время он является общепринятым.

4. Итак, с помощью изложенных выше принципов можно определить законы движения свободного тела, находящегося под действием любых сил, если только мы будем рассматривать это тело как точку.

Эти принципы можно применить и к последованию движения нескольких тел, взаимно притягивающих друг друга согласно некоторому закону, являющемуся известной функцией расстояний между рассматриваемыми телами; наконец, нетрудно распространить их и на движения в сопротивляющихся средах, а также на такие движения, которые происходят по заданным кривым поверхностям, ибо сопротивление среды представляет собою не что иное, как силу, действующую в направлении, противоположном той силе, которая поддерживает движение, а когда тело вынуждено двигаться по заданной поверхности, то необходимо существует сила, перпендикулярная к поверхности, удерживающая его на ней; неизвестное значение этой силы может быть определено на основании условий, вытекающих из природы самой поверхности.

Однако в том случае, когда исследуют движения многих тел, действующих друг на друга с помощью удара или давления, будь то непосредственно, как при обычном ударе, или же при посредстве нитей или негибких рычагов, к которым они прикреплены, или же вообще каким-либо иным образом, то этого рода задача принадлежит к проблемам более высокого порядка, которая не может быть разрешена с помощью приведенных выше положений. Дело в том, что в этом случае силы, действующие на тело, неизвестны и их следует определить на основании действия, которое тела должны проявить по отношению друг к другу в соответствии с их взаимным положением. Таким образом здесь необходимо привлечь на помощь еще одно положение, которое служит для определения силы тел, находящихся в движении, в соответствии с их массой и скоростью.

5. Это положение заключается в следующем: для того чтобы данной массе сообщить определенную скорость в каком-либо направлении — будет ли эта масса находиться в покое или в движении — требуется сила, значение *)

*) Под значением силы здесь следует понимать произведение силы на время ее действия, или более обще, — интеграл произведения элемента времени на интенсивность силы. Слово *сила* взято Лагранжем в том же смысле, в каком его применил Декарт, когда он писал Мерсенну (Merseune): „Я говорил о силе, служащей для

которой пропорционально произведению массы на скорость и направление которой одинаково с направлением этой скорости. Это произведение массы какого-либо тела на его скорость обычно называют *количеством движения данного тела*, так как оно действительно представляет собою сумму движений всех материальных частей тела. Таким образом силы измеряются количеством движения, которые они способны вызвать, и, наоборот, количество движения тела представляет собою меру силы, какую тело способно проявить по отношению к какому-либо препятствию и которую называют *ударом* (percussion). Отсюда следует, что если два неупругих тела в прямо противоположных направлениях сталкиваются с равными количествами движения, то их силы должны взаимно друг друга уравновесить и уничтожить; следовательно, в данном случае, тела должны остановиться и затем пребывать в покое. Если же удар происходит при посредстве рычага, то для уничтожения движения тел необходимо, чтобы их силы следовали известному закону равновесия рычага.

Повидимому, Декарт первый осознал изложенный нами выше принцип, но применяя его к удару тел, он допустил ошибку, полагая, что всегда должно сохраняться одно и то же количество абсолютного движения*).

Собственно говоря, первым лицом, имевшим ясное представление об этом принципе и успешно применившим его для открытия законов передачи движения твердых или упругих тел, является Валлис (Wallis), как об этом можно судить по Transactions philosophical за 1669 г. и по третьей части его трактата De motu, изданного в 1671 г. Подобно тому, как произведение массы на скорость выражает конечную силу тела, находящегося в движении, так произведение массы на ускоряющую силу, которая, как мы видели, определяется отношением элемента скорости к элементу времени, выражает элементарную или возникающую силу, и если ее рассматривать как меру того усилия, которое тело может проявить благодаря своей элементарной скорости, которую оно получило или стремится получить, то это дает то, что называют *давлением*; если же ее рассматривать как меру силы, необходимой для того, чтобы сообщить эту скорость, то в этом случае она представляет собою то, что называют *движущей силой*. Итак, силы давления или движущие силы уничтожаются или же находятся в равновесии, если они равны друг другу и направлены прямо противоположно или же если, будучи приложены к какой-нибудь машине, они следуют законам равновесия этой машины [22].

6. Если тела связаны друг с другом таким образом, что они не могут свободно следовать полученным ими импульсам или приложенным к ним ускоряющим силам, то эти тела необходимо развивают друг относительно друга непрерывные давления, изменяющие их движения и затрудняющие тем самым определение этих движений.

поднятия груза и имеющей два измерения, а не о силе, служащей для поддержания любой точки, имеющей только одно измерение* (издание Cousin, t. VI, p. 329). Понятно, какую путаницу должно было вызвать это двойное обозначение слова *сила* (force). К счастью, математики отвергли эту терминологию: в настоящее время под силой (force) понимают только напряжение (effort), которое может быть выражено в килограммах.

Прим. Бертрана.

*) Ни в одном из многочисленных сочинений Декарта мы не находим ясного и понятного изложения этого принципа. Что же касается применений, то допущенные им ошибки гораздо серьезнее той, которую отметил здесь Лагранж. В числе других ошибочных положений он утверждает, что одно тело, ударившись о другое, не в состоянии сообщить ему движения, если оно не обладает массой, большей его массы; во всех других случаях ударяющееся тело отразится, а тело, получающее удар, останется без движения. (Издание Cousin, t. IX, p. 195).

Прим. Бертрана.

Первой и наиболее простой задачей этого рода, какой занимались геометры, была задача о центре колебания. Эта задача получила большую известность в начале последнего столетия и даже в середине предыдущего, благодаря усилиям и попыткам, сделанным крупнейшими геометрами для разрешения этой задачи. Так как этим попыткам главным образом обязан огромный прогресс, сделанный с того времени динамикой, я считаю необходимым дать здесь краткий исторический очерк этих попыток для того, чтобы показать, по каким ступеням поднималась эта отрасль знания до того совершенства, какого, повидимому, она достигла в последнее время.

Первые следы исследований о центре колебания мы находим в письмах Декарта. Из них видно, что Мерсенн предложил математикам определить размер, какой должно иметь тело любой формы для того, чтобы, будучи подвешено в одной точке, оно совершало свои колебания в такое же время, в какое их совершает путь заданной длины, нагруженная в одном конце единственным грузом. Декарт отмечает, что эта задача находится в некоторой связи с задачей о центре тяжести; совершенно так же, как у тяжелого свободно падающего тела имеется центр тяжести, вокруг которого силы тяжести всех частей этого тела находятся в равновесии, так что этот центр падает таким же образом, как если бы самого тела не было. Или оно было бы сосредоточено в этом центре, — так и у тяжелых тел, вращающихся вокруг неподвижной оси, должен существовать центр, который он называет *центром качания* (*centre d'agitation*); вокруг этой точки силы *качания* всех частей тела взаимно друг друга уравновешивают, так что этот центр, будучи свободен от действия указанных сил, может приводиться в движение таким образом, как если бы остальные части этого тела были откинута или сконцентрированы в этом самом центре. Следовательно, все тела, у которых упомянутый центр одинаково удален от оси вращения, должны совершать свои колебания в одинаковое время.

На основе изложенного определения центра колебания Декарт дает общий метод нахождения этого центра в телах любой формы. Последний заключается в отыскании центра тяжести качающих сил всех частей тела, причем эти силы измеряются произведением масс на скорости, которые в данном случае пропорциональны расстояниям от оси вращения, и делается допущение, что части тела проектируются на плоскость, проходящую через его центр тяжести и через ось вращения, так что они сохраняют свои расстояния от этой оси.

Это решение Декарта стало предметом полемики между ним и Робервалем. Последний утверждал, что указанное решение имеет силу только в том случае, если все части тела фактически лежат или могут быть рассматриваемы как лежащие в плоскости, проходящей через ось вращения; во всех же других случаях следует рассматривать только движения, происходящие перпендикулярно к плоскости, проведенной через ось вращения и через центр тяжести тела, причем каждую частицу следует отнести к той точке, в которой указанная плоскость пересекается направлением движения этой частицы, — направлением, которое всегда перпендикулярно к плоскости, проходящей через данную частицу и через ось вращения. Легко, однако, доказать, что моменты сил по отношению к оси вращения, измеренные этим способом, всегда равны моментам сил, измеренным по методу Декарта*).

*) Это замечание доказывает, что возражение Роберваля не было обоснованным. Но совершенно не было основания утверждать, что правило Декарта неверно в том случае, когда речь идет не о плоской фигуре, вращающейся вокруг оси,

С большим основанием Роберваль утверждал, что Декарт нашел не что иное, как центр удара (percussion), вокруг которого удары (chocs) или моменты ударов (percussion) равны, и что для нахождения действительного центра колебания тяжелого маятника следует также принимать во внимание действие тяжести, под влиянием которой маятник движется. Однако подобного рода исследование было не под силу механике того времени*); математики продолжали молча допускать, что центр удара тождествен с центром колебания и Гюйгенс был первым, который рассматривал этот последний центр в его действительном значении; он также полагал, что эту проблему следует считать совершенно новой**) и, не будучи в состоянии разрешить ее с помощью известных законов движения, придумал новый, но косвенный принцип, который затем получил широкую известность под названием принципа сохранения живых сил.

7. Нить, рассматриваемая как негибкая линия, лишенная тяжести и массы и закрепленная в одном конце к неподвижной точке, а в другом нагруженная небольшим грузом, который можно себе представить сведенным в точку образует то, что называют *простым маятником*; закон колебаний этого маятника зависит исключительно от его длины, т. е. от расстояния между грузом и точкой подвеса. Но если на этой нити, на различных расстояниях от точки ее подвеса, укрепить еще одну или несколько грузов, то мы тогда получим сложный маятник, движение которого должно дать в известном смысле нечто среднее между движениями различных простых маятников, какие получились бы, если бы каждый из указанных грузов был подвешен на отдельной нити. В самом деле, с одной стороны, сила тяжести стремится заставить все грузы падать одинаково в одно и то же время, а с другой стороны, негибкость нити заставляет их именно в это самое время описывать неравные дуги, пропорциональные их расстояниям от точки подвеса; таким образом между этими грузами должен иметь место некоторый вид компенсации и распределения их движений, так что грузы, находящиеся ближе всего к точке подвеса, ускоряют колебания более далеких, а последние, наоборот, замедляют колебания первых. Таким образом на нити должна существовать такого рода точка, что если в ней укрепить тело, то движение последнего не будет ни ускоряться ни замедляться остальными грузами, и движение будет совершенно таким же, как если бы только одно это тело было подвешено на нити. Эта точка и будет истинным центром колебания сложного маятника; подобный центр должен находиться

расположенной в плоскости этой фигуры. Следует даже прибавить, что Роберваль указал, не приводя, однако, доказательства, точное положение центра колебания кругового сектора, вращающегося вокруг перпендикуляра к его плоскости, проведенного через центр сектора. См. замечания Роберваля по поводу письма Декарта (Oeuvres de Descartes, t. IX, p. 521, надание Cousin).

*) Известно, что центр колебаний не отличается от центра удара. Из опыта Награжда должно как будто следовать, что правило Декарта верно, хотя оно недостаточно точно обосновано. Однако легко убедиться в том, что это не так и что это правило ведет к неверным результатам во всех тех случаях, когда маятник не приводится к плоской фигуре, вращающейся вокруг оси, расположенной в его плоскости.

**) Гюйгенс в начале четвертой части своего трактата, наоборот, вспоминает, что задача о центре колебания была когда-то предложена ему, а также и другим математикам Мерсенном, но в то время Гюйгенс был еще почти ребенком и не мог найти удовлетворительного решения. Говоря о Декарте, он прибавляет: „Выдающиеся люди, как Картезий, Фабрий (Fabrius) и другие, надеявшиеся разрешить эту проблему, совершенно не справились с ней, если не считать немногих более легких вопросов, для которых, однако, как мне кажется, они не дали какого-либо удовлетворительного доказательства“. (Oeuvres d'Huygens, t. I, p. 118; издание s'Gravesande, Lyon 1724).

Прим. Бертрама.

и в каждом твердом теле, колеблющемся около горизонтальной оси, какую бы форму это тело ни имело.

Гюйгенс увидел, что этот центр не может быть определен строго математически, если неизвестен закон, согласно которому различные грузы сложного маятника взаимно изменяют те движения, которые сила тяжести стремится им сообщить в каждое мгновение; однако вместо того чтобы вывести этот закон из основных положений механики, он ограничился применением косвенного положения, которое заключается в следующем: если несколько грузов, прикрепленных каким угодно образом к маятнику, падают исключительно под действием тяжести и если представить себе, что в некоторый момент они освобождены и отделены друг от друга, то каждый из них под влиянием полученной им при падении скорости сможет подняться на такую высоту, что общий центр их тяжести достигнет той же самой высоты, с какой он перед этим упал. Правда, Гюйгенс не установил этого положения непосредственно, а вывел его из двух гипотез, которые по его мнению следовало допустить в качестве постулатов механики. Одна из этих гипотез заключается в том, что центр тяжести системы тяжелых тел никогда не может подняться на высоту, большую той, с которой он упал, как бы мы ни изменяли взаимное расположение тел, ибо в противном случае стало бы возможным непрерывное движение; вторая гипотеза заключается в том, что сложный маятник всегда сам собою способен подняться на такую же высоту, с какой он свободно упал. Впрочем, Гюйгенс отмечает, что это же положение имеет место при движении тяжелых тел, связанных между собою каким угодно образом, а также при движении жидких тел.

Трудно угадать, что собственно навело Гюйгенса на мысль об указанном положении, но можно подозревать, что он был приведен к нему теоремой, доказанной Галилеем для падения тяжелых тел: падают ли они по вертикали или же по наклонным плоскостям, они всегда приобретают такие скорости, которые в состоянии их поднять на ту же высоту, с которой они упали. Эта теорема, будучи обобщена и применена к центру тяжести системы тяжелых тел, и дает упомянутый принцип Гюйгенса.

Но как бы там ни было, из этого положения получается уравнение между вертикальной высотой, с которой центр тяжести системы падал в течение некоторого времени, и различными вертикальными высотами, на которые входящие в систему тела могут подняться с достигнутыми ими скоростями и которые согласно теоремам Галилея относятся между собою, как квадраты этих скоростей. Но у маятника, колеблющегося вокруг горизонтальной оси, скорости различных точек пропорциональны их расстояниям от оси; следовательно, уравнение можно свести только к двум неизвестным величинам, из которых одна представляет собою расстояние, на какое за определенное время спускается центр тяжести маятника, другая же величина представляет собою высоту, на которую может подняться заданная точка под влиянием скорости, приобретенной благодаря падению. В центре колебания обе эти высоты должны быть равны, так как свободные тела всегда в состоянии подняться на ту же высоту, с которой они упали. Уравнение и показывает, что это равенство может иметь место только в точке, лежащей на линии, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр тяжести маятника; эта точка удалена от упомянутой оси на такую величину, которая получается, если сумму произведений всех масс, составляющих маятник, на квадраты их расстояний от оси разделить на сумму этих масс, помноженных на расстояние центра тяжести маятника от той же оси. Эта величина и выразит длину простого маятника, движение которого будет одинаково с движением сложного маятника.

Гюйгенс изложил приведенную выше теорию в своей работе *Horologium oscillatorium*, где он привел также большое количество остроумных применений этой теории. Последняя не оставляла бы желать ничего лучшего, если бы она не была основана на сомнительном положении; оставалось еще доказать правильность этого положения, чтобы сделать теорию недосягаемой для каких бы то ни было возражений.

Против теории Гюйгенса были высказаны в 1681 г. в *Journal des Savants de Paris* некоторые слабые возражения, на которые Гюйгенс дал поверхностный и мало удовлетворительный ответ. Но эта полемика привлекла к себе внимание Якова Бернулли (Jacob Bernoulli) и побудила его более углубленно исследовать теорию Гюйгенса и свести ее к основным положениям динамики. Бернулли рассматривает сначала два равных груза, подвешенных на прямой неогibaющей линии и указывает, что скорость, какую первый груз, т. е. груз, расположенный ближе к точке подвеса, приобретает, двигаясь по определенной дуге, должна быть меньше той скорости, какую он приобрел бы, если бы он свободно описал эту дугу, и что в то же время скорость, которую приобретет второй груз, должна быть больше той скорости, какую он приобрел бы, если бы он свободно описывал эту дугу. Таким образом скорость, теряемая первым грузом, передается второму, а так как эта передача происходит при помощи рычага, способного двигаться около неподвижной точки, то она должна следовать закону равновесия сил, приложенных к этому рычагу, так что потеря первого груза в скорости относится к выигрышу второго обратно отношению соответствующих плеч рычага, т. е. расстояний от точки подвеса. Отсюда, а также из того обстоятельства, что фактические скорости обоих грузов должны быть прямо пропорциональны указанным расстояниям, можно легко определить эти скорости, а следовательно, и движение маятника.

8. Таков был первый шаг, который был сделан по пути к прямому разрешению этой знаменитой задачи. Мысль о том, чтобы отнести к рычагу те силы, которые получаются из приобретенных или потерянных грузами скоростей, является очень тонкой и дает ключ к правильной теории; но Яков Бернулли допустил ошибку, рассматривал скорости, приобретенные в течение некоторого конечного времени; было бы правильнее рассматривать элементарные скорости, достигнутые в течение одного мгновения, и сравнить их с теми скоростями, которые стремятся сообщить силы тяжести в течение того же самого мгновения. Это и сделал позднее Лопиталь (L'Hôpital) в работе, опубликованной в *Journal de Rotterdam* за 1690 г. Он представляет себе два каких-либо груза, подвешенных на неогibaющей нити, образующей сложный маятник, и устанавливает равновесие между количествами движения, потерянными и приобретенными этими грузами в некоторое мгновение, т. е. между разностями количеств движения, фактически полученными этими грузами в указанное мгновение, и теми количествами, которые им стремится сообщить сила тяжести. Этим путем он определяет отношение мгновенного ускорения каждого груза к ускорению, которое ему стремится сообщить одна лишь сила тяжести, и находит центр колебания, определяя ту точку маятника, для которой оба эти ускорения равны. Затем он распространяет свою теорию на большее количество грузов, при этом, однако, первые грузы он всякий раз рассматривает как бы соединенными в их центре колебания; однако этот прием не является уже достаточно прямым и не может быть принят без доказательства*).

*) Можно даже прибавить, что этот метод приводит к неточным результатам.
Прим. Бертрапа.

Изложенный выше анализ побудил Якова Бернулли вернуться к этому вопросу, в результате чего он и дал первое прямое и строгое решение задачи о центрах колебания, решение, которое заслуживает тем большего внимания математиков, что оно содержит в себе верно известное принципа динамики, ставшего столь плодотворным в руках Даламбера.

Бернулли рассматривает движения, сообщаемые в падение мгновенной силой тяжести телам, из которых состоит маятник; так как эти тела вследствие существующей между ними связи не могут выполнять указанных движений, он представляет себе движение, которое они должны принять, как бы составленным из тех, которые им сообщаются и из других движений, которые к ним прибавляются или вычитаются и которые должны друг друга уравновесить, в результате чего маятник должен сохранить равновесие. Таким образом данная задача сводится к основам статики и не требует ничего кроме помощи анализа. Этим путем Яков Бернулли вывел общие формулы для центров колебания тел любой формы, показал их соответствие с положением Гюйгенса и доказал тождественность центров колебания с центрами удара. Это решение было дано Бернулли в основных чертах в 1691 г. в Лейпцигских *Acta eruditiorum*; однако в полном виде оно было изложено только в 1703 г. в *Mémoires de l'Académie de Sciences de Paris*.

9. Для того чтобы не упустить ничего относящегося к истории задачи о центре колебания, я должен указать еще на одно ее решение, которое было дано позднее Исааком Бернулли в тех же мемуарах и которое почти одновременно с ним было опубликовано Тейлором (Taylor) в его работе *Methodus incrementorum*, что дало повод к оживленной полемике между этими двумя математиками. Как ни остроумна была идея, на которой было основано это новое решение, — она заключается в том, что сложный маятник приводится сразу к простому путем замены различных грузов другими грузами, сосредоточенными в одной и той же точке, причем их фиктивные массы и тяжести подобраны таким образом, что их угловые ускорения и моменты по отношению к оси вращения остаются соответственно равными прежним, а общая тяжесть объединенных грузов равна их истинной тяжести, — тем не менее следует признать, что эта идея не была ни столь естественной, ни столь ясной, как идея о равновесии между приобретенными и потерянными количествами движения.

В вышедшей в 1716 г. *Phoronomia* Эрмана (Herman) мы находим еще один метод разрешения той же задачи, основанный на другом принципе, который заключается в следующем: движущие силы, под влиянием которых должны находиться грузы, образующие маятник, чтобы иметь возможность двигаться совместно, эквивалентны тем силам, которые получаются под действием тяжести; таким образом первые, если направить их в противоположную сторону, должны находиться в равновесии с последними [23].

Последний принцип по существу представляет собою не что иное, как принцип Якова Бернулли, но только представленный в менее простом виде: пользуясь принципами статики, нетрудно вывести один из них из другого. Позднее Эйлер его обобщил и применил для определения колебаний гибких тел; соответствующая работа его была напечатана в 1740 г. в VII томе старых *Commentaires de Pétersbourg*.

Было бы слишком долго излагать другие проблемы динамики, при разрешении которых геометры упражняли свое остроумие, после проблемы о центре колебания и до того времени, когда разрешение подобных проблем было сведено к твердо установленным правилам. Указанные задачи, которые ставил себе Бернулли, Клеро, Эйлер, можно найти рассеянными в первых томах *Mémoires de Pétersbourg* и *Mémoires de Berlin*, в *Mémoires de*

Paris (за годы 1736 и 1742), в сочинениях Иоганна Бернулли и в *Opusculis* Эйлера. Эти задачи ставили себе целью определить движения многих тел, тяжелых или лишенных тяжести, сталкивающихся или притягивающих друг друга с помощью нитей или неслышаемых рычагов, к которым они неподвижно прикреплены или вдоль которых они могут свободно скользить и которые, после сообщения им каких-либо импульсов, предоставляются затем самим себе или, принуждаются двигаться по заданным кривым линиям или поверхностям.

При разрешении этих задач почти всегда пользовались принципом Гюйгенса; но так как этот принцип дает только одно уравнение, то другие уравнения старались получить путем рассмотрения неизвестных сил, с которыми согласно допущению тела должны сталкиваться или притягиваться и которые принимали в качестве упругих сил, действующих одинаково в противоположных направлениях. При применении этих сил можно было уже совершенно не принимать во внимание взаимной связи между телами и представлялось возможным использовать законы движения свободных тел; далее, условия, которые в соответствии с природой задачи должны были иметь место между движениями различных тел, служили для определения неизвестных сил, которые вводились в исчисление. Однако при разрешении всякой задачи требовалось всегда применение особой ловкости для определения всех сил, которые в данном случае должны быть приняты во внимание. Это и придавало указанным задачам большую привлекательность и побуждало математиков к соревнованию.

10. Появившийся в 1743 г. трактат Даламбера *Traité de Dynamique* положил конец всем упомянутым вызовам ученых; в нем предложен прямой и общий метод, с помощью которого можно разрешить, или во всяком случае выразить в виде уравнений, все проблемы механики, какие только можно себе представить. Этот метод приводит все законы движения тел к законам их равновесия и таким образом сводит динамику к статике. Мы уже выше отметили, что принцип, примененный Яковом Бернулли при определении центра колебания, обладал тем преимуществом, что он поставил это определение в зависимость от условий равновесия рычага; однако только Даламбер подошел к этому принципу с более общей точки зрения и придал ему всю ту простоту и плодотворность, на которые только он был способен.

Если нескольким телам сообщить движения, которые они вынуждены изменить вследствие наличия взаимодействия между ними, то ясно, что эти движения можно рассматривать, как составленные из тех движений, которые тела фактически получают, и из других движений, которые уничтожаются; отсюда следует, что эти последние должны быть такими, что если бы тела находились исключительно под их действием, то они бы взаимно друг друга уравновесили.

Таков принцип, который был изложен Даламбером в его *Traité de Dynamique* и который он счастливо применил при разрешении многих проблем и в особенности при разрешении задачи о предварении равнодействий [24]. Правда, этот принцип не дает непосредственно уравнений, необходимых для разрешения проблем динамики, но он показывает, каким образом эти уравнения могут быть выведены из условий равновесия. Таким образом, если этот принцип сочетать с обычными принципами равновесия рычага или сложения сил, всегда можно найти уравнения каждой проблемы; однако трудность определения тех сил, которые должны уничтожиться, равно как и законов равновесия этих сил, делает частую применение этого принципа тяжелым и утомительным, а решение, которое при этом получается, почти всегда сложнее тех решений, какие могут быть

получены путем применения менее простых и менее прямых принципов, как в этом можно убедиться из второй части *Traité de Dynamique* Даламбера *).

11. Если бы мы пожелали избежать тех разложений движений, которых требует указанный выше принцип, то необходимо было бы только наперед установить равновесие между силами и вызванными ими движениями, которые, однако, следовало бы взять направленными противоположно. В самом деле, если мы представим себе, что каждому телу мы сообщаем в противоположном направлении то движение, которое оно должно получить, то ясно, что система будет приведена в положение покоя; следовательно, эти последние движения должны уничтожить те движения, которые тела получили бы и которые они выполняли бы при отсутствии взаимодействия между ними; таким образом должно существовать равновесие между всеми этими движениями или между силами, которые способны их вызвать.

Этот способ сведения законов динамики к законам статики в действительности является менее прямым, чем способ, вытекающий из принципа Даламбера, но зато он приводит к большей простоте при его применении; он представляет собою возврат к методу Эрмана и Эйлера, который применил его при разрешении многих проблем механики. В некоторых курсах механики его можно встретить под названием *принципа Даламбера*.

12. В первой части настоящей работы мы свели всю статику к единой общей формуле, дающей законы равновесия любой системы тел, находящихся под действием каких угодно сил. Таким образом можно и всю динамику свести к одной общей формуле; в самом деле, для того чтобы применить формулу равновесия системы тел к ее движению, достаточно ввести силы, которые получаются вследствие изменений движения каждого тела и которые должны быть уничтожены. Развитие этой формулы, если при этом принять во внимание условия, зависящие от природы системы, даст все уравнения, необходимые для определения движения каждого тела; после этого останется только эти уравнения проинтегрировать, что является уже задачей анализа.

13. Одно из преимуществ, которое получается при использовании этой формулы, заключается в том, что последние непосредственно приводят к общим уравнениям, в которых содержатся принципы или теоремы, известные под названием принципов *сохранения живых сил*, *сохранения движения центра тяжести*, *сохранения моментов вращения*, или *принципа площадей*, и *принципа наименьшего действия*. Однако все эти принципы следует рассматривать скорее как общие выводы из законов динамики, чем как первоначальные принципы этой науки, но так как зачастую при разрешении задач их все-таки принимают в качестве основных положений, то мы считаем необходимым здесь остановиться на них и указать, в чем они заключаются и каким авторам они обязаны своим происхождением, дабы не допустить существенного пробела в настоящем предварительном изложении принципов динамики.

14. Первый из приведенных четырех принципов, а именно принцип сохранения живых сил, был открыт Гюйгенсом, однако в форме, несколько отличной от той, какую ему придают в настоящее время; об этом мы уже упоминали выше в связи с проблемой определения центров колебания. Это положение, поскольку оно было применено для разрешения указанной задачи, сводится к равенству между снижением и повышением центра

*) Эти решения еще больше усложняются благодаря тому обстоятельству, что автор, как он сам об этом предупреждает (§ 94), систематически избегает принимать dt , или элементы времени, в качестве постоянных величин. *Прим. Лагранжа.*

тяжести множества тяжелых тел, которые падают, будучи соединены вместе, и затем поднимаются отдельно, причем каждое из них поднимается вверх с той скоростью, какую оно приобрело при падении. Но согласно известным свойствам центра тяжести путь, пройденный центром в каком-либо направлении, выражается отношением суммы произведений массы каждого тела на путь, пройденный им в том же направлении, — к сумме этих масс. С другой стороны, согласно теоремам Галилея вертикальный путь, пройденный тяжелым телом, пропорционален квадрату скорости, которую тело приобрело при свободном падении и с которой оно может снова подняться на ту же высоту. Таким образом принцип Гюйгенса сводится к тому, что при движении тяжелых тел сумма произведений масс на квадраты скоростей в любое мгновение имеет одно и то же значение независимо от того, движутся ли тела, будучи каким-либо образом связаны друг с другом, или же они свободно пробегают те же вертикальные пути. Это отметил в нескольких словах и сам Гюйгенс в маленькой работе, касающейся методов Якова Вернулли и Лопитали, примененных ими для определения центров колебания.

До сих пор этот принцип рассматривался только в качестве простой теоремы механики; однако после того как Иоани Вернулли принял предложенное Лейбницем различие между мертвыми силами, или силами давления, не вызывающими реального движения, и живыми силами, при которых имеет место движение, а также его предложение измерять последнего рода силы произведением масс на квадраты скоростей, — в рассматриваемом принципе стали видеть следствие теории живых сил и общего закона природы, согласно которому сумма живых сил нескольких тел остается неизменной, в то время как эти тела действуют друг на друга с помощью простых сил давления, и равной той живой силе, которая получается в результате действия активных сил, приводящих тела в движение. Поэтому он дал указанному принципу название принципа *сохранения живых сил* и успешно применил его при разрешении некоторых задач, которые до тех пор еще не были решены и которые представлялось трудным довести до конца с помощью прямых методов.

Впоследствии Давид Вернулли расширил этот принцип и вывел из него законы движения жидких тел, заключенных в сосуды; до него эта проблема всегда исследовалась довольно поверхностно и произвольно. Наконец, в *Mémoires de Berlin* за 1748 г. он обобщил этот принцип, показав, как его можно применить к движению тел, находящихся под действием произвольных сил взаимного притяжения, или тяготеющих к неподвижным центрам под влиянием сил, пропорциональных любым функциям расстояний.

Принцип живых сил обладает тем большим преимуществом, что он непосредственно дает конечное уравнение между скоростями тел и переменными величинами, определяющими их положение в пространстве; таким образом в том случае, когда согласно природе задачи все эти переменные могут быть сведены к одной переменной, этого одного уравнения оказывается достаточно для полного разрешения задачи; такой именно случай мы имеем в проблеме о центрах колебания. При этом вообще принцип сохранения живых сил всегда дает первый интеграл различных дифференциальных уравнений каждой задачи, что во многих случаях представляет большую выгоду.

15. Второго принципа был выдвинут Ньютоном, который в начале своих *Principia* доказывает, что состояние покоя или движения центра тяжести нескольких тел несколько не изменяется вследствие взаимного действия этих тел, в чем бы последнее ни заключалось; таким образом центр

тяжести тел, действующих друг на друга каким угодно образом, будь то при посредстве нитей или рычага, или в силу законов притяжения, если только не имеется какого-либо внешнего действия или препятствия, всегда остается в покое или же движется равномерно и прямолинейно.

Позднее Даламбер сильно расширил этот принцип, показав, что когда тела находятся под действием постоянных ускоряющих сил, причем все они направлены по параллельным линиям, или по линиям, сходящимся в одной точке, и действуют пропорционально расстоянию, то центр тяжести должен описывать ту же кривую, как если бы тела были свободны; можно еще добавить, что движение этой точки вообще остается таким же, как если бы все силы тел, каковы бы они ни были, были приложены к этой точке с сохранением за каждой силой ее направления.

Ясно, что этот принцип служит для определения движения центра тяжести независимо от соответствующих движений тел и что он таким образом всегда может дать три конечных уравнения между координатами тел и временем, которые будут интегралами дифференциальных уравнений задачи*).

16. Третий принцип имеет гораздо меньшую давность, чем первые два; повидимому, он был открыт одновременно, но в различных видах, Эйлером, Даниилом Бернулли и Дарси (d'Arcy). Согласно формулировке первых двух этот принцип заключается в том, что при движении нескольких тел вокруг неподвижного центра сумма произведений массы каждого тела на его скорость вращения вокруг центра и на расстояние его от того же центра является всегда независимой от взаимного действия, которое тела могут производить друг на друга, и должна всегда оставаться неизменной, если не имеется какого-либо внешнего действия или препятствия. Даниил Бернулли изложил этот принцип в первом томе *Mémoires de l'Académie de Berlin*, вышедшем в 1746 г., а Эйлер опубликовал его в том же году в первом томе своих *Opusculs*. Оба они пришли к этому принципу при разрешении одной и той же задачи, а именно при определении движения нескольких тел, заключенных в трубу заданной формы, могущей вращаться только вокруг одной точки, или вокруг неподвижного центра.

Принцип Дарси в том виде, как он его изложил в мемуаре, представленном Парижской Академии наук в 1752 г., заключается в том, что сумма произведений массы каждого тела на площадь, описываемую его радиусом-вектором вокруг неподвижной точки, причем для всех тел эта площадь берется в одной и той же плоскости проекции, всегда пропорциональна времени. Как видим, этот принцип представляет собой обобщение прекрасной теоремы Ньютона о площадях, описанных под действием известных центробежных сил. Однако для того, чтобы установить аналогию или, еще больше, тождественность этого принципа с принципом Эйлера и Даниила Бернулли, следует только принять во внимание, что скорость вращения выражается с помощью элемента дуги круга, разделенной на элемент времени, и что первый из этих элементов, умноженный на расстояние от центра, дает площадь, описанную вокруг этого центра; отсюда видно, что этот последний принцип представляет собой не что иное, как дифференциальное выражение принципа Дарси.

Позднее Дарси представил свой принцип в форме более приближающейся к изложенному выше принципу; он заключается в том, что сумма

* Следует, однако, ввести ограничение, заключающееся в том, что силы, действующие на эти тела, не зависят от их неизвестного положения. *Прим. Бертрама.*

произведений масс на скорости и на перпендикуляры, опущенные из центра на направления движения тел, есть величина постоянная.

С этой точки зрения он создал отсюда даже некоторый вид метафизического принципа, который он назвал *сохранением действия*, с тем, чтобы противопоставить его или, даже больше, заменить им принцип *наименьшего количества действия*, как если бы неопределенные и произвольные наименования составляли сущность законов природы и с помощью какого-то скрытого свойства были способны простые выводы из известных законов механики возвести до степени конечных причин.

Как бы то ни было, но рассматриваемый принцип имеет место вообще для каждой системы тел, действующих друг на друга каким угодно образом, например, при помощи нитей, несгибаемых линий, законов притяжения и т. д. и находящихся под действием некоторых сил, направленных к неподвижному центру, независимо от того, будет ли система совершенно свободна или же она будет вынуждена двигаться вокруг того же центра. Сумма произведений масс на площади, описанные вокруг этого центра и спроектированные на какую-либо плоскость, всегда пропорциональна времени; таким образом, если мы отнесем эти площади к трем взаимно перпендикулярным плоскостям, то мы получим три дифференциальных уравнения первого порядка между временем и координатами кривых линий, описанных телами; в этих уравнениях собственно и заключается природа изложенного выше принципа.

17. Перехожу, наконец, к четвертому принципу, который я называю принципом *наименьшего действия* — по аналогии с тем, который был дан под этим же названием Мопертюи и который затем приобрел известность благодаря работам многих знаменитых авторов. Этот принцип с аналитической точки зрения заключается в том, что при движении тел, действующих друг на друга, сумма произведений масс на скорости и на пройденные пути представляет собою минимум. Мопертюи выводит отсюда законы отражения и преломления света, равно как и законы удара тел; эти выводы помещены в двух мемуарах, из которых первый был опубликован в *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* за 1744 г., а второй спустя два года в *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*.

Однако указанные применения носят слишком специальный характер, чтобы на них можно было построить доказательство общего принципа; кроме того, они несколько неопределенны и произвольны, что придает некоторую ненадежность и выводам, которые можно было бы сделать на основании их о точности самого принципа. Поэтому мне кажется, было бы неправильно указанный принцип, изложенный в таком виде, ставить в один ряд с теми принципами, которые были указаны выше. Существует, однако, и другой способ его применения, более общий и более точный, который один только и заслуживает внимания математиков. Первую идею этого принципа дал Эйлер в своем трактате *De Isoperimetricis*, напечатанном в Лозанне в 1744 г.; он показал, что при траекториях, описанных под действием центральных сил, интеграл скорости, умноженный на элемент кривой, всегда является максимумом или минимумом.

Указанное свойство, найденное Эйлером при движении изолированных тел, которое представлялось присутствующим только этим телам, я, пользуясь принципом сохранения живых сил, распространил на движение любой системы тел, действующих друг на друга каким угодно образом; отсюда вытекает новый общий принцип, согласно которому сумма произведений масс на интегралы скоростей, умноженных на элементы пройденных путей, является всегда максимумом или минимумом.

Таков тот принцип, которому, хотя и не вполне точно, я даю здесь название принципа *наименьшего действия* и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод из законов механики. Во втором томе *Mémoires de Turin* *) можно увидеть применение, которое я дал ему для разрешения многих трудных проблем механики. Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, как и общий, метод разрешения проблем, касающихся движения тел. Однако этот метод представляет собою не что иное, как следствие метода, составляющего предмет второй части настоящей работы и обладающего в то же время тем преимуществом, что он выводится из первых принципов механики.

*) Oeuvres de Lagrange, t. I, p. 365.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДИНАМИКИ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАКИХ-ЛИБО СИЛ.

1. Когда силы, действующие на систему тел, распределены соответственно законам, изложенным в первой части настоящего сочинения, то эти силы взаимно уничтожаются и система остается в равновесии. Но если равновесия не существует, то тела необходимо должны двигаться, следуя полностью или частично влиянию действующих на них сил. Определение движений, вызываемых заданными силами, и составляет предмет настоящей второй части „Аналитической механики“.

Мы будем рассматривать главным образом силы ускоряющие и замедляющие, действие которых, подобно действию силы тяжести, непрерывно и которые стремятся каждое мгновение сообщить бесконечно малую и одинаковую для всех частиц материи скорость.

В том случае, когда эти силы действуют свободно и равномерно, они necessarily вызывают скорости, которые возрастают пропорционально времени; сообщенные таким образом за заданное время скорости можно рассматривать, как наиболее простое действие этого рода сил, которое, следовательно, является наиболее подходящим для измерения. Простые действия этих сил следует в механике признать известными и все искусство этой науки заключается только в том, чтобы из них вывести сложные эффекты, которые должны получиться в результате соединенного и модифицированного действия этих сил.

2. Итак, допустим, что для каждой ускоряющей силы известна скорость, какую она способна сообщить в течение определенного промежутка времени, который мы примем в качестве единицы времени, движущемуся телу, действуя на него все время одинаковым образом, и будем измерять *ускоряющую силу* именно при помощи этой самой скорости; последняя же в свою очередь должна измеряться тем пространством, которое движущееся тело прошло бы в течение такого же времени, если бы оно продолжало двигаться равномерно; на основании теорем Галилея известно, что это последнее пространство всегда вдвое больше пространства, фактически пройденного телом под постоянным действием ускоряющей силы.

Вообще какую-нибудь известную ускоряющую силу можно принять в качестве единицы и к ней относить все прочие силы. Тогда в качестве единицы пространства следует принять удвоенную величину того пространства, которое под влиянием той же равномерно действующей силы тело пройдет в течение промежутка времени, принятого в качестве единицы времени, а скорость, получаемая за то же время под постоянным действием той же силы, будет в этом случае единицей скоростей.

Так, например, если в качестве единицы ускоряющих сил принять силу тяжести на широте Парижа и время измерять в секундах, то тогда следует 30,196 парижских футов принять в качестве единицы пройденных пространств, так как 15,098 — это высота, с какой на этой широте падает в одну секунду тело, предоставленное самому себе; в этом случае единицей скоростей будет та скорость, которую падающее тело приобретает, пройдя указанную высоту.

3. Установив эти предварительные определения, рассмотрим систему тел, расположенных совершенно произвольным образом и находящихся под действием каких угодно ускоряющих сил.

Пусть m — масса любого из этих тел, которое мы будем рассматривать в качестве точки; для простоты отнесем абсолютное положение этого тела к концу любого промежутка времени t к трем прямоугольным координатам x , y , z . Эти координаты мы будем предполагать всегда параллельными трем осям, неподвижным в пространстве, и пересекающимися под прямыми углами в одной точке, называемой *началом координат*; тогда, следовательно, эти координаты выразят прямолинейные расстояния тела от трех плоскостей, проходящих через эти же оси.

В силу взаимной перпендикулярности указанных плоскостей координаты x , y , z выражают те расстояния, на которые тело при своем движении отделилось от этих плоскостей, следовательно,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

выразят те скорости, которые рассматриваемое тело имеет в некоторое мгновение, чтобы удалиться от каждой из этих плоскостей и двигаться в сторону возрастающих координат; если бы тело затем было предоставлено самому себе, то согласно основным принципам теории движения эти скорости остались бы в последующие мгновения постоянными.

Однако, вследствие существования между телами связи и поддействием влияющих на них ускоряющих сил, эти скорости в течение мгновения dt получают приращения

$$d \frac{dx}{dt}, \quad d \frac{dy}{dt}, \quad d \frac{dz}{dt},$$

которые надлежит определить. Эти приращения можно рассматривать как новые скорости, сообщенные каждому телу, и если их разделить на dt , мы будем иметь меру ускоряющих сил, необходимых для того, чтобы вызвать эти приращения; в самом деле, как бы ни было изменчиво действие какой-либо силы согласно природе дифференциального исчисления мы можем ее всегда принять в качестве постоянной в течение бесконечно малого времени; тогда скорость, сообщенная этой силой, пропорциональна произведению силы на время; следовательно, сама сила будет выражена с помощью отношения скорости ко времени.

Если элемент времени dt принять в качестве постоянной величины, то рассматриваемые ускоряющие силы выразятся чрез

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

а если эти силы помножить на массу m тела, на которое они действуют, то

$$m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2}$$

выразят силы, примененные непосредственно для того, чтобы в течение времени dt двигать тело m параллельно осям координат x, y, z . Таким образом каждое тело m системы можно рассматривать как находящееся под действием подобных сил; следовательно, все эти силы должны быть эквивалентны тем силам, под влиянием которых согласно допущению находится система и действие которых видоизменяется вследствие природы самой системы; поэтому согласно теореме, приведенной в первой части (отд. II, п. 15), сумма моментов первых всегда должна быть равна сумме моментов вторых.

4. В дальнейшем мы будем применять обычный знак δ для обозначения дифференциалов по времени, а вариации, выражающие виртуальные скорости, мы будем обозначать знаком δ , как мы это уже делали и раньше при разрешении некоторых вопросов в первой части настоящего сочинения. Тогда мы будем иметь

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} \delta y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} \delta z$$

для моментов сил

$$m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2},$$

действующих по направлению координат x, y, z и стремящихся увеличить эти координаты; сумма их моментов может быть, таким образом, выражена с помощью формулы

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right),$$

если допустить, что знак интегрирования $\sum$ распространяется на все тела системы.

5. Пусть теперь $P, Q, R, \dots$ представляют собою заданные ускоряющие силы, действующие на каждое тело системы по направлению соответствующих центров, к которым согласно допущению направлены эти силы, и пусть $p, q, r, \dots$ прямолинейные расстояния каждого из этих тел от тех же центров. Тогда дифференциалы $\delta p, \delta q, \delta r, \dots$ представят вариации линий $p, q, r, \dots$, проходящие вследствие вариаций $\delta x, \delta y, \delta z$ координат x, y, z тела m . Но так как эти силы $P, Q, R, \dots$ согласно нашему предположению стремятся уменьшить эти линии, то их виртуальные скорости должны быть выражены через $-\delta p, -\delta q, -\delta r, \dots$ (часть I, отд. II, п. 3); следовательно, моменты сил $mP, mQ, mR, \dots$ выразятся через $-mP \delta p, -mQ \delta q, -mR \delta r, \dots$, а сумма моментов всех этих сил составит

$$-\sum m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots).$$

Следовательно, если эту сумму приравнять к сумме, приведенной в предыдущем пункте, мы получим

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = -\sum m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots)$$

или, перенеся правую часть влево,

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) + \sum m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) = 0.$$

Такова общая формула динамики для движения любой системы тел.

6. Ясно, что эта формула отличается от общей формулы статики, приведенной в первой части (отд. II), только членами, обязанными своим про-

порожденным силам $m \frac{d^2x}{dt^2}$, $m \frac{d^2y}{dt^2}$, $m \frac{d^2z}{dt^2}$, вызывающим ускорение тела по направлению возрастающих координат x , y , z . В самом деле, в предыдущем отделе (п. 11) мы видели, что эти силы, взятые в противоположном направлении, т. е. таким образом, как если бы они стремились укоротить линии x , y , z , должны уравновесить действующие силы P , Q , R , ..., которые согласно предположению должны стремиться укоротить линии p , q , r , ... Таким образом следует только в *моментах* последних сил прибавить *моменты* сил $m \frac{d^2x}{dt^2}$, $m \frac{d^2y}{dt^2}$, $m \frac{d^2z}{dt^2}$ для каждого из тел m , чтобы от условий равновесия тотчас же перейти к свойствам движения (ч. I, отд. II, п. 4).

7. Таким образом те же самые правила, какие были даны нами в первой части (отд. II) для вывода общей формулы статик, могут быть применены и к общей формуле динамики. При этом следует лишь иметь в виду:

1) что дифференциалы, которые мы там для выражения вариаций обозначали через d , дальше будут всегда обозначаться через δ ;

2) что знак d будет всегда относиться ко времени t , равно как и соответствующий символ $\int$ для интегрирования, за исключением частных дифференциалов, где безразлично, какой символ взят;

3) что для выражения элементов кривой, или поверхности, или вообще системы, состоящей из бесконечного числа частиц, будет всегда применяться знак D , соответствующий символу интегрирования S . Следовательно, если формулы, выведенные нами для равновесия в первой части (отд. V, гл. III и IV), мы захотим распространить и на движение, то следует повсюду знак d заменить знаком D , и тогда мы будем иметь выражение для суммы моментов всех сил.

8. Если движение происходит в сопротивляющейся среде, то сопротивление среды можно рассматривать как силу, которая действует в направлении, противоположном направлению движения тела, и которую, следовательно, можно считать направленной к некоторой точке на касательной линии.

Допустим, что сопротивление равно R . Для того чтобы получить момент этой силы $-R \delta r$, следует только принять во внимание, что вообще

$$r = \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2},$$

где l , m , n представляют собою координаты центра силы R ; поэтому

$$\delta r = \frac{x-l}{r} \delta x + \frac{y-m}{r} \delta y + \frac{z-n}{r} \delta z.$$

Изберем центр силы R на касательной к кривой, описываемой телом, и очень близко от последнего; для этой цели положим

$$x-l = dx, \quad y-m = dy, \quad z-n = dz;$$

если ds принять в качестве элемента кривой, то это даст

$$\frac{x-l}{r} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{y-m}{r} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{z-n}{r} = \frac{dz}{ds},$$

и, следовательно,

$$\delta r = \frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z.$$

Если сопротивляющаяся среда находится в движении, то это движение следует сложить с движением тела, для того, чтобы получить направление силы сопротивления. Назовем $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ малые пути, проходимые средой параллельно осям координат x , y , z , в то время как тело описывает путь ds ; тогда следует только эти величины вычесть из dx , dy , dz , чтобы получить относительные движения. Так как

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

то, если мы положим

$$d\sigma = \sqrt{(dx - d\alpha)^2 + (dy - d\beta)^2 + (dz - d\gamma)^2},$$

мы в этом случае получим

$$\delta r = \frac{dx - d\alpha}{d\sigma} \delta x + \frac{dy - d\beta}{d\sigma} \delta y + \frac{dz - d\gamma}{d\sigma} \delta z.$$

Что касается сопротивления R , то оно обычно является функцией скорости $\frac{ds}{dt}$; но в том случае, когда среда находится в движении, оно будет функцией относительной скорости $\frac{d\sigma}{dt}$.

Указанным путем можно применить наши общие формулы к движениям, происходящим в сопротивляющихся средах, не имея надобности при этом прибегать к какому-либо особому рассмотрению вопроса об этих видах движений.

9. Важно отметить, что выражение

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z,$$

которым общая формула динамики отличается от общей формулы статики (п. 5), не зависит от положения координат x , y , z .

В самом деле, предположим, что вместо этих координат мы подставим другие прямоугольные координаты x' , y' , z' , имеющие то же начало, но отнесенные к другим осям. Согласно формулам преобразования координат, приведенным в первой части (отд. III, п. 10), мы имеем

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',$$

$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'.$$

Если мы продифференцируем эти выражения, рассматривая при этом все коэффициенты α , β , γ , α' , ... как постоянные и новые координаты x' , y' , z' как единственные переменные, то мы получим

$$d^2x = \alpha d^2x' + \beta d^2y' + \gamma d^2z',$$

$$d^2y = \alpha' d^2x' + \beta' d^2y' + \gamma' d^2z',$$

$$d^2z = \alpha'' d^2x' + \beta'' d^2y' + \gamma'' d^2z'.$$

Точно так же мы будем иметь

$$\delta x = \alpha \delta x' + \beta \delta y' + \gamma \delta z',$$

$$\delta y = \alpha' \delta x' + \beta' \delta y' + \gamma' \delta z',$$

$$\delta z = \alpha'' \delta x' + \beta'' \delta y' + \gamma'' \delta z'.$$

Подставив эти значения и приняв во внимание условные уравнения между коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$, приведенные в упомянутом выше пункте, мы получим

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = d^2x' \delta x' + d^2y' \delta y' + d^2z' \delta z'.$$

Если произвести такие же подстановки в выражениях для прямолинейных расстояний между различными телами системы, представляемых с помощью $p, q, \dots$, то легко видеть, что величины $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ исчезнут и что преобразованные выражения сохранят тот же вид. В самом деле мы имеем

$$p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

где x, y, z являются координатами тела m , а x', y', z' — координаты другого тела m , отнесенные к тем же осям. Благодаря изменению осей, первые из этих координат превращаются в x', y', z' , а если мы через x'', y'', z'' обозначим новые значения последних, то мы будем также иметь

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',$$

$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'.$$

Произведя подстановку и приняв во внимание те же условные уравнения, мы получим

$$p = \sqrt{(x' - x')^2 + (y' - y')^2 + (z' - z')^2};$$

подобные же выражения получатся для аналогичных величин $q, r, \dots$.

10. Отсюда следует, что если система находится только под действием внутренних сил $P, Q, \dots$, пропорциональных каким-либо функциям расстояний $p, q, \dots$ между телами, если только условия системы зависят лишь от взаимного расположения тел, так что условные уравнения связывают между собою только различные линии $p, q, \dots$, то общая формула динамики (п. 5) имеет для преобразованных координат x', y', z' тот же вид, что и для первоначальных координат x, y, z . После того как путем интегрирования различных уравнений, выведенных из этой формулы, мы нашли значения координат x, y, z каждого тела m , выраженные в качестве функций времени, можно эти координаты x, y, z преобразовать в какие-либо другие x', y', z' , пользуясь следующими уравнениями:

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',$$

$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',$$

в которых девять коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ содержат три неизвестных величины, так как между ними существует шесть условных уравнений.

Если значения x', y', z' содержат в себе все произвольные постоянные, необходимые для дополнения различных интегралов, то три упомянутых неизвестных величины сольются с этими произвольными постоянными; но они могут возместить собою недостающие величины, отсутствие которых делает решение неполным. Таким образом с помощью этих трех новых произвольных величин, которые могут быть введены в конце исчисления, мы получаем возможность положить равными нулю, или равными какин-

либо определенным величинам, такое же количество произвольных постоянных, что зачастую приводит к облегчению и упрощению расчета.

11. Хотя действия импульса и удара можно всегда исчислить подобно действиям ускоряющих сил, тем не менее в тех случаях, когда определяется только общая величина сообщенной скорости, можно прибавиться от рассмотрения последовательных приращений, и импульсивные силы можно признать просто эквивалентными сообщенным движениям.

Итак, пусть $P, Q, R, \dots$ будут импульсивные силы, приложенные к какому-либо телу m системы, направленные по линиям $p, q, r, \dots$; предположим, что скорость, сообщенная этому телу, разложена на три скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ по направлениям координат x, y, z ; тогда, как в пункте 5, заменив ускоряющие силы $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ скоростями $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, мы получим общее уравнение

$$\sum m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) + \sum (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots) = 0.$$

Это уравнение даст столько частных уравнений, сколько останется независимых вариаций, после того, как все вариации, обобщающиеся внаком δ , мы сведем, в соответствии с условиями системы, к минимальному возможному их числу.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ, ВЫВЕДЕННЫЕ ИЗ ПРЕДЫДУЩЕЙ ФОРМУЛЫ.

1. Рассмотрим систему тел, расположенных друг по отношению к другу и взаимно связанных какими угодно образом, но при этом предположим, что не существует никаких неподвижных точек или препятствий, которые стесняли бы их движения; тогда ясно, что в этом случае условия системы могут зависеть только от взаимного расположения тел; следовательно, условные уравнения не могут одерживать в себе каких-либо иных функций координат, кроме выражений взаимных расстояний между телами. Это соображение дает для движения системы общие уравнения, не зависящие от природы системы, аналогичные тем, какие были найдены нами в первой части (отд. III, § I) для равновесия.

§ I. Свойства, касающиеся центра тяжести.

2. Пусть x', y', z' координаты какого-либо определенного тела системы, в то время как x, y, z представляют собой вообще координаты какого-либо иного тела. Положим, что всегда допустимо,

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta.$$

Ясно, что величины x', y', z' не войдут в выражения для взаимных расстояний между телами и что эти расстояния будут зависеть только от различных величин ξ, η, ζ , которые собственно и выражают координаты различных тел по отношению к телу, имеющему своими координатами x', y', z' ; следовательно, условные уравнения системы будут иметь место только между переменными ξ, η, ζ и совершенно не будут содержать в себе x', y', z' .

Таким образом, если в общей формуле динамики (отд. II, п. 6) все вариации свести к $\delta x, \delta y, \delta z$ и затем вместо $\delta x, \delta y, \delta z$ подставить их значения $\delta x' + \delta \xi, \delta y' + \delta \eta, \delta z' + \delta \zeta$, то вариации $\delta x', \delta y', \delta z'$ будут независимыми от всех остальных и сами по себе будут произвольными; поэтому надо будет приравнять нулю отдельно совокупность всех членов, в состав которых входит каждая из этих вариаций, в результате чего мы получим три общих уравнения, не зависящих от особой структуры системы.

Внутренние силы, с помощью которых тела могли бы действовать друг на друга и которые мы, совершенно так же как в первой части (отд. III, п. 2), обозначим через $\bar{P}, \bar{Q}, \dots$, совсем не войдут в эти уравнения, так как вследствие независимости взаимных расстояний $\bar{p}, \bar{q}, \dots$ от x', y', z'

вариации $\delta\bar{p}$, $\delta\bar{q}$, ..., относящиеся к этим переменным, будут равны нулю.

Что касается внешних сил P , Q , R , ..., то если их свести к трем силам X , Y , Z , направленным по осям координат x , y , z и стремящимся укоротить эти координаты, то согласно формулам, приведенным в первой части (отд. V, гл. D), мы имеем

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

и общая формула принимает следующий вид:

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\delta x + Sm\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\delta y + Sm\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right)\delta z = 0;$$

если принять во внимание только вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, которые не зависят от всех остальных, то это уравнение дает

$$\delta x' Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) + \delta y' Sm\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) + \delta z' Sm\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) = 0;$$

откуда тотчас же вытекают следующие три уравнения:

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) = 0,$$

$$Sm\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) = 0,$$

$$Sm\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) = 0,$$

которые всегда будут иметь место при движении любой системы тел, если эта система совершенно свободна.

3. Предположим теперь, что тело, которому соответствуют координаты x' , y' , z' , расположено в центре тяжести всей системы. Согласно известным свойствам этого центра (часть I, отд. III, § IV) мы будем иметь уравнения

$$Sm\xi = 0, \quad Sm\eta = 0, \quad Sm\zeta = 0,$$

которые, будучи продифференцированы по t , дадут нижеследующие уравнения:

$$Sm\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad Sm\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad Sm\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$Sm\frac{d^2x'}{dt^2} = Sm\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} Sm,$$

так как x' , имеющий одинаковое значение для всех тел, не зависит от знака S ; аналогично мы будем иметь

$$Sm\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} Sm, \quad Sm\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2} Sm.$$

Таким образом три уравнения предыдущего пункта получают следующий более простой вид:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} Sm + SmX = 0,$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} Sm + SmY = 0,$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} Sm + SmZ = 0.$$

Приведенные уравнения послужат для определения движения центра тяжести всех тел независимо от особого движения каждого из этих тел; а так как значения $\sum mX$, $\sum mY$, $\sum mZ$ совершенно не содержат в себе внутренних сил системы, то движение центра тяжести не будет совершенно зависеть от взаимного действия, которое тела могут оказывать друг на друга, а будет зависеть лишь от ускоряющих сил, действующих на каждое тело. В этом заключается общий принцип *сохранения движения центра тяжести*.

Этот принцип остается в силе и в том случае, когда тела при своих движениях взаимно сталкиваются; в самом деле, какова бы ни была природа этих тел, можно всегда представить себе, что их действия при ударе протекло при посредстве расположенной между ними пружины, которая после своего сжатия стремится или не стремится вернуться к своему первоначальному состоянию, в зависимости от того, являются ли тела упругими или же нет. Таким образом действие удара будет представлено как результат действия сил, имеющих ту же природу, что и те силы, которые мы выше обозначали через P , Q , ... и которые в общей формуле (п. 2) исчезают.

4. Вообще ясно, что уравнения движения центра тяжести тождественны с уравнениями движения одного тела, которое находится под одновременным действием всех ускоряющих сил, влияющих на различные тела системы. В самом деле, если предположить, что все тела соединены в одной точке, которой соответствуют координаты x' , y' , z' , то тогда в общей формуле мы имеем

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z';$$

приравняв нулю все члены, в состав которых входит каждая из трех вариаций $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, мы получим те же уравнения, какие были выведены нами выше.

Отсюда следует общая теорема:

Движение центра тяжести системы свободных тел, расположенных друг по отношению к другу совершенно произвольным образом, всегда таково, как если бы все тела были сосредоточены в одной этой точке и если бы в то же время каждое из них находилось под действием тех же ускоряющих сил, под влиянием которых оно находится в своем действительном положении.

5. Эта теорема остается в силе и в том случае, когда тела, образующие свободную систему, получают только какие-либо импульсы; в самом деле, если в уравнении пункта 11 предыдущего отдела подставить $\delta x' + \delta \xi$, $\delta y' + \delta \eta$, $\delta z' + \delta \zeta$ вместо δx , δy , δz и силы P , Q , R , ... свести к силам X , Y , Z , можно, как в пункте 2, доказать, что вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ должны остаться произвольными, что даст нам три уравнения

$$S(m\ddot{x} + X) = 0, \quad S(m\ddot{y} + Y) = 0, \quad S(m\ddot{z} + Z) = 0.$$

Но если координаты x' , y' , z' отнести к центру тяжести системы, то в силу свойств этого центра мы имеем

$$x' \sum m = \sum mx, \quad y' \sum m = \sum my, \quad z' \sum m = \sum mz.$$

Дифференцируя по t и положив

$$\begin{aligned} dx &= \dot{x} dt, & dy &= \dot{y} dt, & dz &= \dot{z} dt, \\ dx' &= \dot{x}' dt, & dy' &= \dot{y}' dt, & dz' &= \dot{z}' dt, \end{aligned}$$

мы получим

$$\dot{x}'Sm = Sm\dot{x}', \quad \dot{y}'Sm = Sm\dot{y}', \quad \dot{z}'Sm = Sm\dot{z}'$$

и, следовательно,

$$\dot{x}'Sm + SX = 0, \quad \dot{y}'Sm + SY = 0, \quad \dot{z}'Sm + SZ = 0.$$

Отсюда видно, что скорости $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$, сообщенные центру тяжести, совершенно таковы, как если бы все тела, будучи соединены в этом центре, одновременно получили импульсы X , Y , Z .

6. Общая формула (п. 2) после подстановки $\delta x' + \delta \xi$, $\delta y' + \delta \eta$, $\delta z' + \delta \zeta$ вместо δx , δy , δz и после сведения к нулю всех членов, содержащих в себе $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, примет следующий вид:

$$Sm \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta \xi + \frac{d^2y}{dt^2} \delta \eta + \frac{d^2z}{dt^2} \delta \zeta + X \delta \xi + Y \delta \eta + Z \delta \zeta \right) = 0.$$

Если в дифференциалы d^2x , d^2y , d^2z подставить $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$ вместо x , y , z и вывести за знак S дифференциалы d^2x' , d^2y' , d^2z' , то членами, содержащими в себе эти дифференциалы, будут следующие:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} Sm \delta \xi + \frac{d^2y'}{dt^2} Sm \delta \eta + \frac{d^2z'}{dt^2} Sm \delta \zeta.$$

Но если координаты x' , y' , z' отнести к центру тяжести, то мы будем иметь (п. 3)

$$Sm\xi = 0, \quad Sm\eta = 0, \quad Sm\zeta = 0.$$

Следовательно, после дифференцирования в смысле символа δ , мы получим

$$Sm \delta \xi = 0, \quad Sm \delta \eta = 0, \quad Sm \delta \zeta = 0,$$

в результате чего рассматриваемые члены исчезают.

Таким образом общая формула сводится к

$$Sm \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} \delta \xi + \frac{d^2\eta}{dt^2} \delta \eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2} \delta \zeta + X \delta \xi + Y \delta \eta + Z \delta \zeta \right) = 0;$$

последнее выражение совершенно аналогично первой формуле, — с тем лишь отличием, что координаты x , y , z , имеющие неподвижное начало в пространстве, заменяются ξ , η , ζ , начало которых находится в центре тяжести.

Отсюда*) можно сделать заключение, что вообще в свободной системе мы имеем по отношению к центру тяжести те же уравнения и те же свойства, что и по отношению к некоторой неподвижной точке вне системы.

*) Это заключение носит слишком абсолютный характер. Действительно, дифференциальное уравнение, связывающее ξ , η , ζ имеет совершенно тот же вид, что и уравнение между x , y , z , но силы X , Y , Z не выражаются одинаково по отношению к указанным двум системам переменных. Так, например, если мы представим себе две точки, взаимно притягивающие друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, то по отношению к подвижным осям, проходящим через центр тяжести, эти точки будут описывать эллипсы; по отношению же к неподвижным осям их траектории будут гораздо более сложными. *Прим. Бертриана.*

§ II. Свойства площадей.

7. Рассмотрим теперь движение системы вокруг какой-либо неподвижной точки и допустим, что она может совершенно свободно вращаться вокруг этой точки в любом направлении. Если отвлечься от взаимных движений тел системы друг по отношению к другу, то в соответствии с тем, что было установлено в первой части (отд. III, п. 8), движение вокруг каждой из трех осей x , y , z даст следующие выражения вариаций для δx , δy , δz :

$$\delta x = z \delta \omega - y \delta \varphi, \quad \delta y = x \delta \varphi - z \delta \psi, \quad \delta z = y \delta \psi - x \delta \omega,$$

где $\delta \varphi$, $\delta \omega$, $\delta \psi$ представляют собою элементарные вращения вокруг трех осей z , y , x и могут оставаться произвольными.

Эти выражения являются общими для вариаций координат всех тел системы; их следует лишь подставить в формулу пункта 5 предыдущего отдела, предварительно сведя все вариации к δx , δy , δz , и затем отдельно приравнять нулю все величины, в состав которых входят три неопределенных величины $\delta \varphi$, $\delta \omega$, $\delta \psi$.

Тогда, как и в названном выше пункте первой части, мы прежде всего найдем, что вариация $\delta \bar{r}$ станет равной нулю и что таким образом члены, обязанные своим происхождением внутренним силам $\bar{P}$ системы, не содержащие в себе вариаций $\delta \varphi$, $\delta \omega$, $\delta \psi$, ничего не прибавят к рассматриваемому уравнению. Кроме того, как мы видели в том же пункте, мы найдем, что когда сила P направлена к началу координат, вариация δr равна нулю, и таким образом указанная сила совершенно не входит в эти уравнения.

Следовательно, если просто сделать указанные подстановки для δx , δy , δz , заменив, как и раньше (п. 2), силы P , Q , R ,... силами X , Y , Z , то мы получим для вариаций $\delta \varphi$, $\delta \omega$, $\delta \psi$ следующее уравнение

$$S m \left\{ \begin{aligned} & \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} + Yx - Xy \right) \delta \varphi + \\ & + \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} + Xz - Zx \right) \delta \omega + \\ & + \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} + Zy - Yz \right) \delta \psi \end{aligned} \right\} = 0;$$

а так как вариации $\delta \varphi$, $\delta \psi$, $\delta \omega$ являются общими для всех тел системы, то они не входят в выражение, стоящее под знаком S ; таким образом мы получим три следующих уравнения по отношению к каждой из этих вариаций

$$\begin{aligned} S m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} + xY - yX \right) &= 0, \\ S m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} + zX - xZ \right) &= 0, \\ S m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} + yZ - zY \right) &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют место одновременно, если система может свободно вращаться вокруг каждой из трех осей, т. е. во всех тех случаях, когда система расположена таким образом, что она может свободно вращаться в любом направлении вокруг неподвижной точки, являющейся началом координат.

Следует отметить, что эти уравнения имеют всегда место независимо от взаимодействия между телами, в каком бы виде оно ни осуществлялось, хотя бы даже в виде взаимного столкновения тел системы, как мы это видели в пункте 3, и по тем же основаниям; сверх того они независимы от сил, направленных к неподвижной точке, в которой находится начало координат.

8. Для того чтобы составить себе более ясное представление об этих уравнениях, заметим:

1) что величины

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}$$

являются дифференциалами следующих величин

$$x \, dy - y \, dx, \quad z \, dx - x \, dz, \quad y \, dz - z \, dy,$$

выражающих удвоенное значение элементарных секторов, описываемых телом m в плоскостях xy , xz и yz , т. е. в плоскостях, перпендикулярных к осям z , y и x . В самом деле, если в выражении $x \, dy - y \, dx$ вместо x и y подставить их значения $\rho \cos \varphi$, $\rho \sin \varphi$, мы получим $\rho^2 d\varphi$, представляющее удвоенное значение площади, заключенной между радиусом-вектором ρ и следующим радиусом, составляющим с ним угол $d\varphi$;

2) что величины X , Y , Z представляют собою силы, действующие на каждое тело m вдоль координат x , y , z по направлению к их началу и являющиеся результирующими всех сил P , Q , R , ..., действующих на эти тела в любых направлениях, и что, таким образом, величины

$$yX - xY, \quad xZ - zX, \quad zY - yZ$$

представляют собою моменты сил, стремящихся вращать тела вокруг каждой из трех осей координат z , y , x , — если слово *момент* принять в его обычном смысле произведения силы на перпендикуляр, опущенный на его направление.

9. Если система не находится под действием каких бы то ни было внешних сил или же если она находится только под действием сил, направленных к точке, принятой нами в качестве начала координат, то приведенные выше три уравнения принимают следующий вид:

$$S m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0,$$

$$S m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0,$$

$$S m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0;$$

если их проинтегрировать по переменной t и ввести три произвольных постоянных A , B , C , то мы получим

$$S m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C,$$

$$S m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = B,$$

$$S m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = A.$$

Последние три уравнения, очевидно, содержат в себе *принцип площадей*, о которых мы упоминали в первом разделе.

10. Кратко следует отметить, что эти уравнения принадлежат к тому роду уравнений, которые были указаны в пункте 10 предыдущего отдела, так что путем изменения осей координат можно ввести три новых произвольных постоянных.

Пусть x', y', z' — новые координаты, тогда мы будем также иметь

$$S m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = C',$$

$$S m \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) = B',$$

$$S m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) = A',$$

где величины A', B', C' будут тоже произвольными постоянными, но отличными от A, B, C .

Подставим теперь в выражение $x dy - y dx$ значения x, y через x', y', z' , приведенные в упомянутом пункте того же отдела; тогда мы будем иметь

$$x dy - y dx = +(\alpha\beta' - \beta\alpha')(x' dy' - y' dx') + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(z' dx' - x' dz') + +(\beta\gamma' - \gamma\beta')(y' dz' - z' dy').$$

Точно так же мы получим

$$z dx - x dz = +(\beta\alpha'' - \alpha\beta'')(x' dy' - y' dx') + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')(z' dx' - x' dz') + +(\gamma\beta'' - \beta\gamma'')(y' dz' - z' dy'),$$

$$y dz - z dy = +(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(x' dy' - y' dx') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(z' dx' - x' dz') + +(\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'')(y' dz' - z' dy').$$

Если все члены этих уравнений снабдить знаком S , предварительно умножив их на m и разделив на dt , и затем вместо интегралов, обозначенных знаком S , подставить соответствующие им значения A, B, C, A', B', C' , то мы получим

$$\begin{aligned} C &= (\alpha\beta' - \beta\alpha') C' + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma') B' + (\beta\gamma' - \gamma\beta') A', \\ B &= (\beta\alpha'' - \alpha\beta'') C' + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') B' + (\gamma\beta'' - \beta\gamma'') A', \\ A &= (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') C' + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') B' + (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'') A'. \end{aligned}$$

Эти формулы можно свести к более простому выражению, если принять во внимание существование тождества

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')^2 + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 = \\ &= (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2) - (\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')^2; \end{aligned}$$

на основании условных уравнений первой части (отд. III, п. 10) последняя величина сводится к единице. Сверх того мы имеем следующие тождества

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + \alpha'(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + \alpha''(\alpha\beta' - \beta\alpha') &= 0, \\ \beta(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + \beta'(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + \beta''(\alpha\beta' - \beta\alpha') &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если эти тождества сравнить с тремя условными уравнениями

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,$$

то легко прийти к заключению, что

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \gamma, \quad \beta\alpha'' - \alpha\beta'' = \gamma', \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = \gamma''.$$

Величины $\gamma, \gamma', \gamma''$ могли бы иметь и знак $-$, но так как при совпадении осей x', y', z' с осями x, y, z мы должны иметь (ч. I, отд. III, п. 11)

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = 0,$$

$$\alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 1,$$

то это условие может иметь место только в том случае, если мы примем γ'' , а следовательно, и γ' и γ положительными.

Тем же путем мы найдем

$$\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' = \beta, \quad \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'' = \beta', \quad \gamma\alpha' - \alpha\gamma' = \beta'',$$

$$\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'' = \alpha, \quad \gamma\beta'' - \beta\gamma'' = \alpha', \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = \alpha'';$$

так что мы будем иметь

$$A = \alpha A' + \beta B' + \gamma C',$$

$$B = \alpha' A' + \beta' B' + \gamma' C',$$

$$C = \alpha'' A' + \beta'' B' + \gamma'' C';$$

откуда с помощью условных уравнений пункта 10 (ч. I, отд. III) получается

$$A' = A\alpha + B\alpha' + C\alpha'',$$

$$B' = A\beta + B\beta' + C\beta'',$$

$$C' = A\gamma + B\gamma' + C\gamma'',$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2.$$

Из последнего уравнения следует, что вообще

$$\begin{aligned} & \left[S m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right]^2 + \left[S m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \right]^2 + \left[S m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right]^2 = \\ & = \left[S m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) \right]^2 + \left[S m \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) \right]^2 + \left[S m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) \right]^2, \end{aligned}$$

откуда можно сделать вывод, что функция

$$\left[S m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right]^2 + \left[S m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \right]^2 + \left[S m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right]^2$$

имеет всегда значение, независимое от плоскости проекции и от положения в пространстве осей координат x, y, z , — при условии, если эти координаты взаимно перпендикулярны.

11. Найденные выше выражения для A, B, C через A', B', C' аналогичным выражениям для x, y, z через x', y', z' , приведенным в пункте 9 предыдущего отдела. Следовательно, если положить

$$x' = A', \quad y' = B', \quad z' = C',$$

то мы будем иметь

$$A = x, \quad B = y, \quad C = z;$$

и обратно, $x = A, y = B, z = C$ дает $A' = x', B' = y', C' = z'$. Это значит, что A, B, C и A', B', C' представляют собою две системы координат, соответствующие одной и той же точке, причем первая из них отнесена к осям x, y, z , а вторая к осям x', y', z' .

Отсюда тотчас же становится ясно, что можно сделать

$$A' = 0, \quad B' = 0,$$

если ось C' или z' провести через точку, которой соответствуют координаты A, B, C , и что тогда координата будет иметь наибольшее свое значение, равное $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. В этом случае

$$A = \gamma C', \quad B = \gamma' C', \quad C = \gamma'' C',$$

и легко доказать, что коэффициенты $\gamma, \gamma', \gamma''$ представляют собою не что иное, как косинусы углов, образуемых линией C' с осями A, B, C .

Таким образом решение уравнений

$$Sm \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = C',$$

$$Sm \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) = 0,$$

$$Sm \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) = 0$$

даст решение следующих уравнений

$$Sm \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \gamma'' C',$$

$$Sm \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \gamma' C',$$

$$Sm \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \gamma C',$$

где $\gamma, \gamma', \gamma''$ — три постоянных величины, связанные между собою соотношением

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

так что две из них являются произвольными.

Плоскость, перпендикулярная к оси C' , когда C' является максимумом, представляет собою именно ту плоскость, которую Лаплас называет *неизменной плоскостью*; он же первый доказал ее существование и положение.

Положение этой плоскости легко определять с помощью уравнений

$$A = \gamma C', \quad B = \gamma' C', \quad C = \gamma'' C';$$

в самом деле, так как величины γ , γ' , γ'' представляют собою косинусы углов, которые ось C' , или z' , перпендикулярная к неизменной плоскости, образует с осями x , y , z системы, то назвав эти углы l , m , n , мы в силу $C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ будем иметь

$$\cos l = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos m = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos n = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

12. Если система свободна, т. е. если в системе не имеется никакой точки, которая должна оставаться неподвижной, можно начало координат x , y , z , которое согласно допущению должно быть неподвижным, избрать в каком угодно месте; следовательно, те свойства площадей и моментов, которые были нами выше доказаны, будут иметь место по отношению к любой неподвижной точке, произвольно взятой в пространстве.

Но согласно тому, что было нами доказано в пункте 6, эти же свойства остаются в силе и по отношению к центру тяжести всей системы независимо от того, будет ли этот центр неподвижен или нет. В самом деле, если в трех уравнениях пункта 7 вместо x , y , z подставить величины $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$, отнеся, как в пункте 3, координаты x' , y' , z' к центру тяжести системы, и если принять во внимание три уравнения этого последнего пункта, то мы получим следующие преобразованные уравнения

$$Sm \left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi Y - \eta X \right) = 0,$$

$$Sm \left(\zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \zeta X - \xi Z \right) = 0,$$

$$Sm \left(\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta Z - \zeta Y \right) = 0;$$

как видим, эти уравнения подобны уравнениям пункта 7: все их различие заключается в том, что вместо координат x , y , z , отнесенных к неподвижной точке, мы имеем координаты ξ , η , ζ , начало которых лежит в центре тяжести системы.

Таким образом в том случае, когда ускоряющие силы равны нулю, мы имеем интегралы

$$Sm \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) = C,$$

$$Sm \left(\zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} \right) = B,$$

$$Sm \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right) = A,$$

по поводу которых можно сделать замечания, аналогичные тем, какие были нами сделаны относительно уравнений пункта 7.

13. В том случае, когда одно из тел системы удерживается в неподвижном состоянии каким-либо препятствием, мы, поместив начало координат в этом теле, будем иметь перед собою случай, указанный в п. 7. Если же мы допустим, что два тела системы неподвижны, то линию, проходящую через эти два тела, следует рассматривать как ось, вокруг которой система может свободно вращаться; приняв эту ось в качестве оси координат z , мы на основании того же пункта получим просто

$$\delta x = -y \delta \varphi, \quad \delta y = x \delta \varphi,$$

где $\delta\varphi$ — элементарное вращение вокруг указанной оси, которое должно оставаться неопределенным. Таким образом мы будем иметь только одно уравнение относительно упомянутой вариации $\delta\varphi$, а именно

$$S m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} + xY - yX \right) = 0;$$

а так как момент $xY - yX$ внешних сил по отношению к оси вращения равен нулю, то путем интегрирования, как в пункте 9, мы получим

$$S m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C.$$

Это уравнение выражает принцип площадей по отношению к плоскости xy , перпендикулярной к оси вращения, на которую должны проектироваться площади, описываемые телами.

Если бы мы допустили, что три тела системы остаются неподвижными, то положение каждого из остальных тел в пространстве определялось бы его расстояниями от указанных трех тел; в этом случае уже не существовало бы никаких вариаций, независимых от природы системы и от взаимного расположения тел, из которых можно было бы вывести общие уравнения для движения любой системы.

§ III. Свойства, касающиеся вращений, вызванных импульсами.

14. В том случае, когда система, способная свободно вращаться во всех направлениях вокруг неподвижной точки, получает какие-либо импульсы, можно в уравнении пункта 11 предыдущего отдела тоже воспользоваться выражениями для δx , δy , δz пункта 7, предварительно сведя импульсивные силы P , Q , R , ... к силам X , Y , Z ; приравняв затем нулю отдельные члены, которые умножаются на $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$, мы получим три уравнения:

$$S [m(\dot{x}y - y\dot{x}) + xY - yX] = 0,$$

$$S [m(\dot{z}x - x\dot{z}) + zX - xZ] = 0,$$

$$S [m(\dot{y}z - z\dot{y}) + yZ - zY] = 0$$

для первого мгновения движения, вызванного импульсами X , Y , Z .

В совершенно свободных системах можно неподвижную точку брать где угодно в пространстве, и приведенные выше уравнения будут всегда оставаться в силе по отношению к этой точке.

15. В подобных системах можно вращения тоже отнести к трем осям, проходящим через центр тяжести; в самом деле, если, как в пункте 5, положить

$$\delta x = \delta x' + \delta \xi, \quad \delta y = \delta y' + \delta \eta, \quad \delta z = \delta z' + \delta \zeta,$$

то вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ сначала дадут три уравнения для движения центра тяжести, найденные в том же пункте.

Тогда останется еще уравнение

$$S [(m\dot{x} + X) \delta \xi + (m\dot{y} + Y) \delta \eta + (m\dot{z} + Z) \delta \zeta] = 0.$$

Но если вращения $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ отнести к осям координат ξ , η , ζ и учесть только эти вращения, то, как в пункте 7, мы будем иметь

$$\delta \xi = \zeta \delta \omega - \eta \delta \varphi, \quad \delta \eta = \xi \delta \varphi - \zeta \delta \psi, \quad \delta \zeta = \eta \delta \psi - \xi \delta \omega,$$

и три неопределенных вариации $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ дадут следующие три уравнения

$$S[m(\dot{\xi}\dot{y} - \eta\dot{x}) + \xi Y - \eta X] = 0,$$

$$S[m(\zeta\dot{x} - \xi\dot{z}) + \zeta X - \xi Z] = 0,$$

$$S[m(\eta\dot{z} - \zeta\dot{y}) + \eta Z - \zeta Y] = 0.$$

Но $\dot{x} = \dot{x}' + \dot{\xi}$, $\dot{y} = \dot{y}' + \dot{\eta}$, $\dot{z} = \dot{z}' + \dot{\zeta}$; следовательно, если подставить эти значения, вывести из под знака S величины $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$, относящиеся исключительно к центру тяжести, и принять во внимание, что в силу свойств центра тяжести мы имеем

$$S m \xi = 0, \quad S m \eta = 0, \quad S m \zeta = 0,$$

то приведенные три уравнения примут следующий вид:

$$S[m(\dot{\xi}\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \xi Y - \eta X] = 0,$$

$$S[m(\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta}) + \zeta X - \xi Z] = 0,$$

$$S[m(\eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta}) + \eta Z - \zeta Y] = 0;$$

последние уравнения совершенно аналогичны уравнениям предыдущего пункта; в них координаты ξ , η , ζ имеют свое начало в центре тяжести, а скорости $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ тоже отнесены к этому центру.

Таким образом в том случае, когда система свободна, уравнения, относящиеся к какой-либо неподвижной точке, сохраняют силу и по отношению к центру тяжести этой системы.

16. Уравнения, найденные нами выше для действия импульсов в первое мгновение, сохраняют свою силу и для последующих мгновений — при условии, что никаких ускоряющих сил не существует, — если члены, зависящие от импульсов X , Y , Z , рассматривать как постоянные. В самом деле, так как $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ представляют собою скорости, параллельные осям x , y , z , то мы имеем

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dz = \dot{z} dt,$$

и уравнения пункта 9 переходят в следующие

$$S m (x\dot{y} - y\dot{x}) = C,$$

$$S m (z\dot{x} - x\dot{z}) = B,$$

$$S m (y\dot{z} - z\dot{y}) = A,$$

которые, будучи сопоставлены с уравнениями пункта 14, дают

$$C = S(yX - xY), \quad B = S(xZ - zX), \quad A = S(zY - yZ).$$

Таким образом мы получаем значения A , B , C , выраженные в первоначальных импульсах, сообщенных каждому телу; легко видеть, что эти значения представляют собою не что иное, как суммы моментов этих импульсов по отношению к осям x , y и z .

Сказанное имеет силу и для уравнений, относящихся к центру тяжести, как в этом можно убедиться, сравнив уравнения пункта 12 с уравнениями пункта 15.

17. Если рассматривать только вращательные движения по отношению к трем осям координат x, y, z и обозначить через $\dot{\psi}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$ скорости этих вращений, то вариации $\delta x, \delta y, \delta z$ будут пропорциональны скоростям $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, а вариации $\delta\psi, \delta\omega, \delta\varphi$ будут одновременно пропорциональны скоростям $\dot{\psi}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$; в этом случае формулы пункта 7 дадут

$$\dot{x} = z\dot{\omega} - y\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = x\dot{\varphi} - z\dot{\psi}, \quad \dot{z} = y\dot{\psi} - x\dot{\omega}.$$

Эти значения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ являются только частями, зависящими от трех вращений; для того чтобы получить полные значения истинных скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, следует еще прибавить те части их, которые зависят от изменения взаимного положения тел системы и которые не зависят от вращений.

Но если система неизменяема, что бывает в случае всякого твердого тела любой формы, эти части скоростей равны нулю и значения $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ сводятся просто к тем, которые мы дали выше. Следовательно, эти значения можно подставить в приведенные выше уравнения; выведя из под знака $\sum$ величины $\dot{\psi}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$ и подставив элемент Dm вместо m (отд. II, п. 7), мы для твердого тела любой формы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} \sum (x^2 + y^2) Dm - \dot{\psi} \sum xz Dm - \dot{\omega} \sum yz Dm &= C, \\ \omega \sum (x^2 + z^2) Dm - \dot{\psi} \sum xy Dm - \dot{\varphi} \sum yz Dm &= B, \\ \dot{\varphi} \sum (y^2 + z^2) Dm - \dot{\omega} \sum xy Dm - \dot{\psi} \sum xz Dm &= A. \end{aligned}$$

С помощью этих уравнений можно определить начальные скорости вращения $\dot{\psi}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$, вызванные импульсами X, Y, Z , приложенными к любым точкам тела, моменты которых по отношению к осям x, y, z равны A, B, C .

Так как скорости вращения пропорциональны бесконечно малым углам, описанным одновременно соответствующими вращениями, то отсюда следует, как мы это уже доказали в первой части (отд. III, п. 11), что три скорости $\dot{\psi}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$ складываются в единую скорость $\dot{\theta}$, величина которой составляет

$$\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\omega}^2 + \dot{\varphi}^2},$$

с этой скоростью тело фактически вращается вокруг мгновенной оси, образуя с осями x, y, z углы λ, μ, ν , величины которых равны

$$\cos \lambda = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\theta}}, \quad \cos \mu = \frac{\dot{\omega}}{\dot{\theta}}, \quad \cos \nu = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}}.$$

Таким образом приведенные выше три уравнения дают положение оси, вокруг которой тело вращается в первое мгновение, и скорость вращения вокруг этой оси. Эту ось называют *мгновенной осью вращения*.

18. В следующие мгновения тело в силу своей инерции будет продолжать вращаться, и найденные выше три уравнения будут еще сохра-

пять свою силу, если мы будем рассматривать в качестве постоянных члены, содержащие в себе силы импульса X, Y, Z , как мы это видели в пункте 16; однако величины $S(x^2 + y^2) Dm$, $Sxy Dm$, ... станут уже переменными в связи с изменением во время вращения координат x, y, z .

Но из этих уравнений вытекает интересное следствие, заключающееся в том, что в любое мгновение тело имеет такое же вращательное движение, какое оно получило бы в это мгновение благодаря импульсу тех же самых сил, которые первоначально привели его в движение, если бы эти силы были приложены к нему таким образом, что они образовали бы те же моменты вокруг осей x, y, z .

Так как эти уравнения представляют собою не что иное, как общие уравнения пункта 16 для любой системы тел в применении к твердому телу любой формы, то отсюда следует, что если система, получившая первоначальные импульсы, затем под непрерывным взаимным действием тел превратится в неизменяемую или твердую систему, то те же уравнения будут еще оставаться в силе. Следовательно, твердое тело будет в любое мгновение иметь то же самое вращательное движение, какое оно получило бы под действием первоначальных импульсов, если бы последние были приложены к нему непосредственно и притом таким образом, что они образовали бы те же самые моменты.

Следовательно, и жидкая масса, которая первоначально была приведена в движение какими-либо силами, будучи затем предоставлена самой себе и превратившись, вследствие взаимного притяжения своих частей, в твердое тело, будет в любое мгновение иметь те же самые вращательные движения, какие ей сообщили бы первоначальные силы, если бы они совершенно таким же образом действовали на твердое тело.

19. Три уравнения пункта 17 дают значения моментов A, B, C всех первоначальных сил, если известны мгновенное положение тела и три его вращательные скорости $\dot{\phi}, \dot{\omega}, \dot{\psi}$ по отношению к неподвижным осям x, y, z , или результирующая скорость $\dot{\theta}$ вокруг мгновенной оси вместе с углами λ, μ, ν , образуемыми этой осью с неподвижными осями x, y, z ; и обратно, если нам известны эти моменты, мы можем из них вывести значение скоростей вращения.

Из этих уравнений также видно, что упомянутые моменты равны нулю, когда скорости равны нулю; но если мы допустим, что моменты равны нулю, то отсюда еще не следует, что скорости вращения должны быть нулями. В самом деле, если мы положим

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

то получим три линейных уравнения между $\dot{\phi}, \dot{\omega}, \dot{\psi}$ и тогда следует доказать, что эти три уравнения не могут существовать совместно, если не допустить, что

$$\dot{\phi} = 0, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \dot{\psi} = 0.$$

Исключив два из этих неизвестных, мы получим одно уравнение, которое для значения третьего неизвестного даст нуль или любое число, но при условии

$$\begin{aligned} S(x^2 + y^2) Dm \times S(x^2 + z^2) Dm \times S(y^2 + z^2) Dm = &+ S(x^2 + y^2) Dm \times \\ &\times (Sxy Dm)^2 + S(x^2 + z^2) Dm \times (Sxz Dm)^2 + S(y^2 + z^2) Dm \times \\ &\times (Syz Dm)^2 + 2 Sxy Dm \times Sxz Dm \times Syz Dm, \end{aligned}$$

и тогда следует доказать, что это условие невозможно выполнить, что, однако, представляется очень трудным *). Но дальше (п. 31) мы докажем, что в том случае, когда моменты равны нулю, всякое вращение исчезает.

Отсюда мы можем прежде всего заключить, что система изолпрованных точек или какая-либо жидкая масса ни в коем случае не может образовывать твердого тела, имеющего вращательное движение, если только первоначальные импульсы не были по крайней мере такими, что благодаря им мог возникнуть момент относительно осей, вокруг которой тело фактически вращается.

20. С помощью преобразований, описанных в пункте 10, можно три уравнения пункта 17 превратить в подобные же уравнения, в которых величины x, y, z, A, B, C будут замещены аналогичными величинами x', y', z', A', B', C' .

Обозначим через $\dot{\psi}', \dot{\omega}', \dot{\phi}'$ скорости вращения по отношению к новым осям x', y', z' ; тогда мы также будем иметь

$$dx' = \dot{x}' dt = (z' \dot{\omega}' - y' \dot{\phi}') dt,$$

$$dy' = \dot{y}' dt = (x' \dot{\phi}' - z' \dot{\psi}') dt,$$

$$dz' = \dot{z}' dt = (y' \dot{\psi}' - x' \dot{\omega}') dt;$$

с помощью этих подстановок три первых уравнения пункта 10, если вместо m поставить Dm , перейдут в следующие:

$$\dot{\phi}' S(x'^2 + y'^2) Dm - \dot{\psi}' S x' z' Dm - \dot{\omega}' S y' z' Dm = C',$$

$$\dot{\omega}' S(z'^2 + x'^2) Dm - \dot{\psi}' S x' y' Dm - \dot{\phi}' S y' z' Dm = B',$$

$$\dot{\psi}' S(y'^2 + z'^2) Dm - \dot{\omega}' S x' y' Dm - \dot{\phi}' S x' z' Dm = A',$$

в которых согласно тому же пункту мы будем иметь

$$A' = A\alpha + B\alpha' + C\alpha'',$$

$$B' = A\beta + B\beta' + C\beta'',$$

$$C' = A\gamma + B\gamma' + C\gamma''.$$

Эти уравнения обладают тем преимуществом, что положение осей вращения является здесь совершенно произвольным, так как оно зависит только от величин $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$, а так как они представляют собою линейные уравнения, то ничто не мешает дать этим осям от одного мгновения до другого различное положение и набрать их таким образом, чтобы они заняли определенное положение внутри тела и, следовательно, двигались бы вместе с последним в пространстве. Тогда величины

$$S(x'^2 + y'^2) Dm, S x' y' Dm, \dots$$

станут постоянными, но зато величины A', B', C' будут переменными —

*) В конце настоящего тома помещено доказательство указанной теоремы, далеко не представляющее тех трудностей, какие, по видимому, ему был склонен приписать Лагранж. Бине (Binet) уже давно опубликовал это доказательство в Bulletin de la Société philomathique. «Прим. Бертрама»

в силу изменчивости величин $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$. В дальнейшем мы укажем прямые способы, с помощью которых можно получить эти уравнения, которые оказываются очень полезными при разрешении проблемы вращения тел.

21. Мы видели в пункте 16, что постоянные величины A, B, C выражают суммы моментов первоначальных импульсов, сообщенных телам относительно осей x, y, z . Но легко доказать, что величины $\alpha, \alpha', \alpha''$ представляют собою косинусы углов, образуемых осью x' с осями x, y, z , что величины β, β', β'' представляют собою косинусы углов, образуемых осью y' с теми же осями x, y, z , и что величины $\gamma, \gamma', \gamma''$ представляют собою косинусы углов, образуемых осью z' с теми же осями. Следовательно, согласно доказанному в первой части о сложении моментов (отд. III, п. 16) три величины A', B', C' являются моментами тех же импульсов относительно осей x', y', z' , т. е. относительно осей вращения, неподвижно закрепленных в теле и движущихся в пространстве. Таким образом по отношению к этим осям можно применить те же заключения, к каким мы пришли в пункте 19.

§ IV. Свойства неподвижных осей вращения свободного тела любой формы.

22. Мы сохраним для особой главы полное решение общей проблемы о вращении твердого тела любой формы; здесь мы последуем лишь тот случай, когда мгновенная ось вращения остается неподвижной в пространстве или по крайней мере остается всегда параллельной самой себе в то время, как тело движется поступательно, так как этот случай может быть легко разрешен с помощью формул предыдущего параграфа и так как он дает возможность установить важные свойства тех осей, которые называют *главными* или *естественными осями вращения*.

Вернемся к основным уравнениям пункта 17; положим для краткости письма

$$\begin{aligned} l &= \sum x^2 Dm, & f &= \sum yz Dm, \\ m &= \sum y^2 Dm, & g &= \sum xz Dm, \\ n &= \sum z^2 Dm, & h &= \sum xy Dm \end{aligned}$$

и подставим вместо $\dot{\psi}, \dot{\omega}, \dot{\phi}$ соответствующие им значения $\dot{\theta} \cos \lambda, \dot{\theta} \cos \mu, \dot{\theta} \cos \nu$, где $\dot{\theta}$ представляет собою скорость вращения вокруг мгновенной оси, образующей с осями x, y, z углы λ, μ, ν . Эти уравнения после деления на $\dot{\theta}$ перейдут тогда в следующие

$$\begin{aligned} (m+n) \cos \lambda - h \cos \mu - g \cos \nu &= \frac{A}{\dot{\theta}}, \\ (l+n) \cos \mu - h \cos \lambda - f \cos \nu &= \frac{B}{\dot{\theta}}, \\ (l+m) \cos \nu - g \cos \lambda - f \cos \mu &= \frac{C}{\dot{\theta}}. \end{aligned}$$

23. Шесть величин l, m, n, f, g, h являются переменными; продифференцировав их, подставив вместо dx, dy, dz выражения $\dot{x} dt, \dot{y} dt, \dot{z} dt$ и

затем вместо $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ их значения (см. упомянутый пункт), мы получим

$$\begin{aligned} dl &= 2(g \cos \mu - h \cos \nu) \dot{\theta} dt, \\ dm &= 2(h \cos \nu - f \cos \lambda) \dot{\theta} dt, \\ dn &= 2(f \cos \lambda - g \cos \mu) \dot{\theta} dt, \\ df &= [(m - n) \cos \lambda + g \cos \nu - h \cos \mu] \dot{\theta} dt, \\ dg &= [(n - l) \cos \mu + h \cos \lambda - f \cos \nu] \dot{\theta} dt, \\ dh &= [(l - m) \cos \nu + f \cos \mu - g \cos \lambda] \dot{\theta} dt. \end{aligned}$$

Эти шесть уравнений совместно с тремя уравнениями, приведенными в предыдущем пункте, содержат в себе общее решение; однако мы здесь рассмотрим только тот случай, когда углы λ , μ , ν остаются неизменными, и тогда вопрос сведется к тому, чтобы выяснить, при каких условиях указанные величины могут быть постоянными.

24. Для этой цели следует лишь три первых уравнения продифференцировать на основе указанного допущения и затем подставить значения дифференциалов dl , dm , ...; тогда после деления на $\dot{\theta} dt$ мы получим следующие три уравнения

$$\begin{aligned} f(\cos^2 \nu - \cos^2 \mu) - g \cos \lambda \cos \mu + h \cos \lambda \cos \nu + \\ + (m - n) \cos \mu \cos \nu &= -\frac{A \dot{\theta}}{\dot{\theta}^3} \frac{d\dot{\theta}}{dt}, \\ f \cos \lambda \cos \mu + g(\cos^2 \lambda - \cos^2 \nu) - h \cos \mu \cos \nu + \\ + (n - l) \cos \lambda \cos \nu &= -\frac{B}{\dot{\theta}^3} \frac{d\dot{\theta}}{dt}, \\ -f \cos \lambda \cos \nu + g \cos \mu \cos \nu + h(\cos^2 \mu - \cos^2 \lambda) + \\ + (l - m) \cos \lambda \cos \mu &= -\frac{C}{\dot{\theta}^3} \frac{d\dot{\theta}}{dt}. \end{aligned}$$

Если эти три уравнения сложить, помножив предварительно первое из них на $\cos \lambda$, второе на $\cos \mu$ и третье на $\cos \nu$, то мы получим уравнение

$$\frac{A \cos \lambda + B \cos \mu + C \cos \nu}{\dot{\theta}^3} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0,$$

которое дает

$$d\dot{\theta} = 0, \text{ или } A \cos \lambda + B \cos \mu + C \cos \nu = 0.$$

Ниже (п. 38) мы увидим, что величина

$$A\dot{\psi} + B\dot{\omega} + C\dot{\varphi},$$

представляющая собою то же, что

$$(A \cos \lambda + B \cos \mu + C \cos \nu) \dot{\theta},$$

выражает живую силу тела, которая никогда не может быть равной нулю, если тело находится в движении.

Таким образом следует вообще допустить, что $\dot{\theta} = 0$ и, следовательно, что скорость вращения $\dot{\theta}$ является постоянной величиной. При этих условиях приведенные выше три уравнения сводятся к двум, дающим отношения $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$; а так как мы имеем

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

то указанных отношений достаточно для определения трех косинусов.

25. Положим

$$s = \frac{\cos \mu}{\cos \lambda}, \quad u = \frac{\cos \nu}{\cos \lambda};$$

тогда приведенные выше три уравнения, если принять во внимание, что $\dot{\theta} = 0$, преобразуются к следующему виду:

$$f(u^2 - s^2) - gs + hu + (m - n)su = 0,$$

$$g(1 - u^2) - hsu + fs + (n - l)u = 0,$$

$$h(s^2 - 1) + gsu - fu + (l - m)s = 0.$$

Последнее из этих уравнений дает

$$u = \frac{h(s^2 - 1) + (l - m)s}{f - gs}.$$

Если это значение подставить в первое уравнение или во второе, или, еще лучше, в сумму обоих этих уравнений, предварительно помножив одно из них на g , а другое на f , — с целью исключения члена, содержащего u^2 , — то мы получим

$$\begin{aligned} & [gh(m - n) + f(g^2 - h^2)]s^3 + \\ & + [g(l - m)(m - n) + fh(n - 2l + m) + g(g^2 + h^2 - 2f^2)]s^2 + \\ & + [f(l - m)(m - n) + gh(n - 2m + l) + f(f^2 + h^2 - 2g^2)]s + \\ & + fh(l - n) + g(f^2 - h^2) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение, будучи третьей степени, necessarily имеет один вещественный корень; таким образом мы обязательно будем иметь одно значение s и соответствующее ему значение u , с помощью которых можно будет определить положение постоянной оси равномерного вращения. Но так как это определение зависит от величин l , m , n , f , g , h , имеющих со временем t , следует еще доказать, что изменчивость указанных величин совершенно не влияет на значение двух величин s и u .

26. Для того чтобы это осуществить, назовем P , Q , R первые члены трех уравнений пункта 22; тогда первые члены уравнения пункта 24 примут вид $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dR}{dt}$, причем предполагается, что вместо dl , dm , ... поставлены их значения. Но легко видеть, что после проведения указанных подстановок мы получим

$$dP = (R \cos \mu - Q \cos \nu) \dot{\theta} dt,$$

$$dQ = (P \cos \nu - R \cos \lambda) \dot{\theta} dt,$$

$$dR = (Q \cos \lambda - P \cos \mu) \dot{\theta} dt.$$

Из этих уравнений, в которых λ , μ , ν и θ — постоянные величины, легко видеть, что если значения $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dR}{dt}$ равны нулю, когда t равно нулю или какой-нибудь заданной величине, то и значения $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{d^2Q}{dt^2}$, $\frac{d^2R}{dt^2}$, а также $\frac{d^3P}{dt^3}$, $\frac{d^3Q}{dt^3}$, $\frac{d^3R}{dt^3}$ и так далее до бесконечности тоже равны нулю для того же значения t .

Но на основании теоремы Тейлора мы знаем, что когда t переходит в $t + t'$, то значение функции $\frac{dP}{dt}$ одновременно переходит в

$$\frac{dP}{dt} + \frac{d^2P}{dt^2} t' + \frac{1}{2} \frac{d^3P}{dt^3} t'^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^4P}{dt^4} t'^3 + \dots$$

Следовательно, если $\frac{dP}{dt} = 0$, когда $t' = 0$, то мы всегда имеем $\frac{dP}{dt} = 0$, каково бы ни было значение t' . То же самое относится и к значениям $\frac{dQ}{dt}$ и $\frac{dR}{dt}$.

Отсюда следует, что если уравнения пункта 25, являющиеся только преобразованными уравнениями $\frac{dP}{dt} = 0$, $\frac{dQ}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$, имеют силу в какое-либо мгновение, то они сохраняют силу и для любого времени t , — если только допустить, что s и u — постоянные величины. Следовательно, значения указанных величин будут независимы от изменчивости величин l , m , n , f , g , h . Таким образом достаточно будет определить значения этих последних величин для любого положения тела по отношению к неподвижным осям x , y , z , чтобы получить значения величин s и u , определяющих положение оси вращения, которая должна оставаться неподвижной в пространстве, или, во всяком случае, всегда параллельной самой себе, когда тело находится в поступательном движении.

А так как эта ось в силу своей природы в течение некоторого мгновения неподвижна внутри тела, поскольку последнее согласно допущению должно вращаться около этой оси, то отсюда следует, что она должна всегда оставаться неподвижной; ведь ясно, что если бы в следующее мгновение она изменила свое положение в теле, то она необходимо изменила бы и свое положение в пространстве, что, однако, противоречит принятому допущению.

27. После того как определено положение этой оси в пространстве, ничто не мешает нам допустить, что она совпадает с осью x , положение которой произвольно.

Можно, таким образом, допустить, что λ равняется нулю, и, следовательно, что $\cos \lambda = 1$, что даст нам

$$s = 0, \quad u = 0.$$

Отсюда с помощью уравнений пункта 25 мы находим

$$g = 0, \quad h = 0.$$

Таким образом рассматриваемая ось обладает тем свойством, что если ее принять в качестве оси x , то значения обоих интегралов $\int xy \, Dm$, $\int xz \, Dm$ (п. 22) становятся равными нулю.

Допустим теперь, что в наших формулах

$$g = 0, \quad h = 0,$$

и обозначим через f' , V , m' , n' то, что в данном случае получается на величинах f , l , m , n . Это допущение прежде всего дает

$$s = 0, \quad u = 0,$$

т. е. приведенный выше случай. Далее, для s и u оно дает бесконечные значения, а следовательно,

$$\cos \lambda = 0, \quad \lambda = 90^\circ;$$

это значение соответствует остальным двум корням уравнения третьей степени относительно s и, следовательно, соответствует положению двух других осей. Но первое из уравнений относительно s и u (п. 25), если g и h равны нулю, переходит в

$$f'(u^2 - s^2) + (m' - n')su = 0,$$

а если вместо s и u подставить их значения, то мы получим

$$f'(\cos^2 \nu + \cos^2 \mu) + (m' - n')\cos \mu \cos \nu = 0;$$

если в выражении

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$$

мы положим $\cos \lambda = 0$, то мы будем иметь

$$\cos \nu = \sqrt{1 - \cos^2 \mu} = \sin \mu,$$

и приведенное выше уравнение сведется к следующему

$$\operatorname{tang} 2\mu = \frac{2f'}{m' - n'},$$

дающему для угла μ два значения, из которых одно больше другого на 90° .

Итак, если ось z мы выбрали на первой оси вращения, то две других оси равномерного вращения будут лежать в плоскости yz и образуют с осью y углы μ и $\mu + 90^\circ$. Таким образом три оси вращения будут, подобно осям координат, между собою взаимно перпендикулярны. Следовательно, эти последние две оси можно будет тоже принять в качестве осей y и z ; тогда мы будем иметь $\mu = 0$ и стало быть $f' = 0$; поэтому и значение интеграла $\sum yz Dm$ тоже будет равно нулю.

28. Итак, у каждого твердого тела, какова бы ни была его форма и структура, существуют по отношению к любой точке этого тела три взаимно перпендикулярных оси, пересекающиеся в этой точке, вокруг которых тело может вращаться свободно и равномерно; эти три оси определяются с помощью следующих условий

$$\sum xy Dm = 0, \quad \sum xz Dm = 0, \quad \sum yz Dm = 0,$$

при этом предполагается, что указанные оси приняты в качестве осей координат x , y , z .

Если эти оси проходят через центр тяжести тела, то согласно Эйлеру, которому мы обязаны их открытием, их называют *главными осями*; их называют также *естественными осями вращения* или вообще *главными осями*, независимо от того, проходят ли они через центр тяжести или нет.

29. Если положить

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0,$$

что имеет место по отношению к трем главным осям, то с помощью уравнений пункта 23 мы также получим

$$\frac{dl}{dt} = 0, \quad \frac{dm}{dt} = 0, \quad \frac{dn}{dt} = 0,$$

откуда ясно, что в данном случае величины l , m , n имеют наибольшие или наименьшие значения. Для того чтобы получить возможность решить, имеем ли мы здесь дело с максимумами или минимумами, следует лишь определить значения $\frac{d^2 l}{dt^2}$, $\frac{d^2 m}{dt^2}$, $\frac{d^2 n}{dt^2}$; в силу постоянства θ мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l}{dt^2} &= 2 [(n-l) \cos^2 \mu - (l-m) \cos^2 \nu] \dot{\theta}^2, \\ \frac{d^2 m}{dt^2} &= 2 [(l-m) \cos^2 \nu - (m-n) \cos^2 \lambda] \dot{\theta}^2, \\ \frac{d^2 n}{dt^2} &= 2 [(m-n) \cos^2 \lambda - (n-l) \cos^2 \mu] \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если $l > m$, $m > n$, то значение $\frac{d^2 l}{dt^2}$ всегда будет отрицательным, значение $\frac{d^2 n}{dt^2}$ всегда будет положительным, а значение $\frac{d^2 m}{dt^2}$ может быть положительным или отрицательным; таким образом l всегда будет максимумом, n — минимумом, а m не будет ни тем, ни другим. Кроме того, мы видим, что $\frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{d^2 m}{dt^2}$ будет всегда иметь отрицательное значение, а $\frac{d^2 m}{dt^2} + \frac{d^2 n}{dt^2}$ будет всегда иметь положительное значение; таким образом величина $l + m$ будет всегда максимумом, а $m + n$ — минимумом.

Величины $l + m$, $l + n$, $m + n$, выражающие суммы произведений каждой частицы тела на квадрат ее расстояния от трех осей x , y , z , называются, по Эйлеру, *моментами инерции* тела по отношению к этим осям; они являются для вращательного движения тем же, чем для поступательного движения являются простые массы, так как именно на эти моменты следует делить моменты сил импульса, чтобы получить скорости вращения вокруг тех же осей.

Путем рассмотрения наибольших и наименьших моментов инерции Эйлер и нашел главные оси; в настоящее время их обычно определяют с помощью трех условий

$$\sum xy Dm = 0, \quad \sum xz Dm = 0, \quad \sum yz Dm = 0.$$

30. Так как на основании анализа, изложенного в пункте 27, мы вполне уверены, что уравнение относительно s (п. 25) имеет три вещественных корня, то их всегда можно легко найти, если упомянутое уравнение, отбросивши второй его член, сравнить с известным уравнением

$$x^3 - 3r^2 x - 2r^3 \cos \varphi = 0,$$

имеющим следующие три корня

$$2r \cos \frac{\varphi}{3}, \quad -2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right), \quad -2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right).$$

Таким образом мы получим три значения s , которые мы обозначим через s , s' , s'' , и соответствующие значения u , u' , u'' . Если, далее, мы обозначим через λ , λ' , λ'' углы, образуемые тремя главными осями с осью x , через

μ, μ', μ'' углы, образуемые лини с осью y , и через ν, ν', ν'' углы, образуемые лини с осью z , то на основании п. 24 и 25, мы получим

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+s^2+u^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{s}{\sqrt{1+s^2+u^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{u}{\sqrt{1+s^2+u^2}},$$

аналогичные выражения мы также получим, если снабдим буквы λ, μ, ν, s, u одним или двумя штрихами. Таким образом определение трех главных осей может быть с помощью этих формул легко осуществлено для всякого твердого тела любой формы, однородного или неоднородного, если только нам известно значение величин f, g, h, l, m, n относительно неподвижных осей x, y, z для какого-нибудь заданного положения тела.

Если приведенные значения $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ подставить в три уравнения пункта 22, то мы получим значения моментов A, B, C , необходимых для приведения во вращение с постоянной заданной скоростью $\dot{\theta}$ тела вокруг неподвижной в пространстве оси, положение которой задано теми же углами λ, μ, ν и которая одновременно будет одной из главных осей тела, если для s и u взять один из трех корней уравнения относительно s [25].

31. Так как указанные оси всегда взаимно перпендикулярны, то в формулах пункта 20 их можно взять в качестве осей x', y', z' . В силу природы указанных осей мы, таким образом, будем иметь

$$\sum x'y' Dm = 0, \quad \sum x'z' Dm = 0, \quad \sum y'z' Dm = 0;$$

а если положить

$$V' = \sum x'^2 Dm, \quad m' = \sum y'^2 Dm, \quad n' = \sum z'^2 Dm,$$

то три уравнения упомянутого выше пункта получают следующий простой вид:

$$(m' + n') \dot{\phi}' = A',$$

$$(V' + m') \dot{\omega}' = B',$$

$$(V' + n') \dot{\phi}' = C';$$

из этих уравнений мы тотчас же получаем скорости вращения $\dot{\phi}', \dot{\omega}', \dot{\phi}'$ вокруг трех главных осей.

Здесь будет как раз уместно доказать предложение, упомянутое нами в пункте 19. В самом деле, если положить

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

то мы будем также иметь (п. 20)

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

следовательно, приведенные выше уравнения дадут

$$\dot{\phi}' = 0, \quad \dot{\omega}' = 0, \quad \dot{\phi}' = 0,$$

так как для тела трех измерений величины l, m, n никогда не могут быть равны нулю. Отсюда мы должны сделать вывод, что если первоначальные моменты равны нулю, то никакое вращательное движение невозможно.

Если из трех моментов A', B', C' какие-либо два, например, B' и C' равны нулю, что бывает в том случае, когда импульс происходит в плоскости $y'z'$, то две скорости вращения $\dot{\omega}, \dot{\varphi}$ тоже равны нулю, и тело движется вокруг главной оси x' со скоростью $\dot{\psi}$. Но согласно формуле пункта 20 мы имеем

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

в силу основных уравнений между величинами $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$; следовательно, если мы положим

$$B' = 0, \quad C' = 0,$$

то мы будем иметь

$$A' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

таким образом A' будет величиной постоянной; поэтому согласно первому уравнению скорость $\dot{\psi}$ тоже будет постоянной.

32. Что касается значений l', m', n' , то их легко вывести из значений l, m, n, f, g, h , так как в силу условных уравнений (часть I, отд. III, п. 10) выражения для x, y, z через ω', y', z' обратно дадут

$$x' = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,$$

$$y' = \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$

$$z' = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z.$$

Но если оси x', y', z' взять в качестве главных осей, то на основании пункта 21 легко видеть, что величины $\alpha, \alpha', \alpha''$ будут тождественны с $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$, что точно так же β, β', β'' будут тождественны с $\cos \lambda', \cos \mu', \cos \nu'$ и $\gamma, \gamma', \gamma''$ с $\cos \lambda'', \cos \mu'', \cos \nu''$.

Если подставить приведенные выше значения этих косинусов (п. 20), то мы получим

$$x' = \frac{x + sy + uz}{\sqrt{1 + s^2 + u^2}},$$

$$y' = \frac{x + s'y + u'z}{\sqrt{1 + s'^2 + u'^2}},$$

$$z' = \frac{x + s''y + u''z}{\sqrt{1 + s''^2 + u''^2}}.$$

Возведем эти выражения во вторую степень и проинтегрируем, предварительно помножив их на Dm ; тогда мы получим

$$l' = \frac{l + s^2 m + u^2 n + 2sh + 2ug + 2suf}{1 + s^2 + u^2},$$

$$m' = \frac{l + s'^2 m + u'^2 n + 2s'h + 2u'g + 2s'u'f}{1 + s'^2 + u'^2},$$

$$n' = \frac{l + s''^2 m + u''^2 n + 2s''h + 2u''g + 2s''u''f}{1 + s''^2 + u''^2}.$$

Определение главных осей различных тел можно найти в большинстве курсов механики; у тел, имеющих симметричную форму, осью фигуры всегда является одна из главных осей; две другие можно затем найти с помощью формулы пункта 27.

§ V. Свойства, связанные с живой силой.

33. Вообще говоря, как бы ни были расположены или связаны друг с другом различные тела, образующие систему, если только это распределение не зависит от времени, т. е. если условные уравнения между координатами различных тел совершенно не содержат переменной t , ясно, что в общей формуле динамики всегда можно приравнять вариации δx , δy , δz дифференциалам dx , dy , dz , выражающим пути, фактически пройденные телом за мгновение dt , в то время как вариации δx , δy , δz должны выражать некоторые пути, которые могли бы быть пройдены телами за то же мгновение, если принять во внимание взаимное расположение этих тел.

Подобное допущение является частным и может, следовательно, дать только одно уравнение; по так как оно не зависит от формы системы, то оно обладает тем преимуществом, что оно дает общее уравнение для движения любой системы.

Следовательно, если в общую формулу пункта 5 (предыд. отд.) вместо вариаций δx , δy , δz подставить дифференциалы dx , dy , dz , а стало быть и вместо вариаций δp , δq , δr , ..., зависящих от δx , δy , δz , ..., подставить дифференциалы dp , dq , dr , ..., то мы получим следующее общее уравнение, имеющее силу для любой системы тел:

$$S m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz + P dp + Q dq + R dr + \dots \right) = 0.$$

34. В том случае, когда величина

$$P dp + Q dq + R dr + \dots$$

поддается интегрированию, что имеет место, когда силы P , Q , R , ... направлены к неподвижным центрам или к телам той же системы, и являются функциями расстояний p , q , r , ..., мы можем, положивши

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = d\Pi,$$

привести указанное выше уравнение к следующему виду:

$$S m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz + d\Pi \right) = 0;$$

последнее уравнение после интегрирования дает

$$S m \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) + \Pi \right] = H,$$

где H обозначает произвольную постоянную, равную по своей величине первому члену уравнения в заданное мгновение.

Последнее уравнение содержит в себе принцип, известный под названием принципа сохранения живых сил. В самом деле, так как $dx^2 + dy^2 + dz^2$ представляют собою квадрат пути, проходимого телом в течение мгновения dt , то

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}$$

будет квадратом его скорости, а

$$m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)$$

его живой силой. Следовательно,

$$\sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)$$

представит сумму живых сил всех тел или живую силу всей системы; из рассматриваемого уравнения видно, что эта живая сила равна величине

$$2H - 2 \sum \Pi m,$$

зависящей просто от ускоряющих сил, действующих на тела, и несколько не зависящей от их взаимных связей; таким образом живая сила системы в любое мгновение равна той живой силе, которой обладали бы тела, если бы, находясь под действием тех же сил, каждое из них двигалось свободно по описанной им линии. Поэтому указанное свойство движения и получило название *сохранения живых сил*.

35. Приведенный принцип имеет место и в том случае, если движение тел отнести к их центру тяжести; в самом деле, если, как раньше (п. 3), обозначить через x' , y' , z' три координаты центра тяжести и положить

$$x = x' + \xi, \quad y = y' + \eta, \quad z = z' + \zeta,$$

то координаты ξ , η , ζ будут иметь свое начало в центре тяжести. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{dy'^2}{dt^2} + \frac{dz'^2}{dt^2} \right) \sum m + \\ &+ \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} \right) + \frac{dx'}{dt} \sum m \frac{d\xi}{dt} + \frac{dy'}{dt} \sum m \frac{d\eta}{dt} + \frac{dz'}{dt} \sum m \frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned}$$

В силу природы центра тяжести мы имеем (см. упомянутый пункт)

$$\sum m \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \sum m \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \sum m \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Следовательно, если мы приведенное уравнение продифференцируем и вычтем из уравнения, указанного в пункте 33, то мы получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} dx' + \frac{d^2 y'}{dt^2} dy' + \frac{d^2 z'}{dt^2} dz' \right) \sum m + \sum m \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} d\xi + \frac{d^2 \eta}{dt^2} d\eta + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} d\zeta \right) + \\ + \sum m (P dp + Q dq + R dr + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Вместо

$$P dp + Q dq + R dr + \dots$$

подставим эквивалентную величину

$$X dx + Y dy + Z dz$$

и вместо dx , dy , dz подставим значения $dx' + d\xi$, $dy' + d\eta$, $dz' + d\zeta$; тогда, в силу дифференциальных уравнений пункта 3, последнее уравнение примет следующий вид:

$$\sum m \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} d\xi + \frac{d^2 \eta}{dt^2} d\eta + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} d\zeta \right) + \sum m (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta) = 0,$$

аналогичный уравнению пункта 33; однако здесь величина

$$X dx + Y dy + Z dz$$

будет поддаваться интегрированию *только* в том случае, когда силы будут действовать по направлению тел самой системы и будут пропорциональны функциям расстояний. В этом случае мы будем иметь

$$\frac{1}{2} S m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = H,$$

уравнение, содержащее в себе *сохранение живых сил* относительно центра тяжести [26].

36. Впрочем, условия для принципа *живых сил* не аналогичны условиям для принципов *центра тяжести* и *площадей*; последние имеют место независимо от тех действий, которые тела системы могут проявить друг по отношению к другу, даже в том случае, когда тела взаимно сталкиваются, — так как все внутренние силы исчезают из уравнений, выражающих оба эти принципа.

Уравнение сохранения живых сил содержит в себе все члены, обязанные своим происхождением как внешним, так и внутренним силам: оно не зависит только от действия тел, вызванного их взаимной связью. Этот принцип имеет место и при движении неупругих жидкостей, если последние образуют сплошную массу и между их частями не происходит никаких столкновений. В том случае, когда величина *живых сил* после столкновения упругих тел имеет то же значение, что и до столкновения, считают, что и тела после столкновения вернулись в то состояние, в каком они были до удара; таким образом члены $\int P dr$ выражения II, которые проис-

ходят от сил P , обязанных своим происхождением упругости тела, и значение которых бывает максимальным, когда сжатие достигает наивысшей степени, — ватем во время возвращения к первоначальному состоянию равномерно убывают и к концу столкновения становятся равными нулю. Только при этом допущении сохранение живых сил может иметь место и при столкновении упругих тел.

Во всех прочих случаях, когда происходят внезапные изменения в скоростях некоторых тел системы, общая сумма живой силы уменьшается на величину тех живых сил, которые могли вызвать эти изменения; указанная величина может быть всегда измерена суммой масс, умноженных на квадраты скоростей, которые были этими массами потеряны или могли считаться потерянными при внезапных изменениях реальных скоростей тел. Такова теорема, найденная *Карно* (Carnot) для удара твердых тел.

37. В уравнении пункта 11 предыдущего отдела можно тоже допустить, что вариации δx , δy , δz пропорциональны скоростям $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, полученным телом благодаря импульсу. В таком случае мы будем иметь уравнение

$$S [m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}] = 0,$$

в котором часть $S m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ выражает *живую силу* всей системы.

Если это уравнение соединить с тремя уравнениями пункта 14, то мы получим свойство *максимумов и минимумов* по отношению к линии, вокруг которой система вращается в первое мгновение, когда она получила

какой-либо импульс; эту линию можно также назвать *мгновенной осью вращения*.

Если мы обозначим через α , β , γ те части скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, которые зависят от изменения взаимного расположения тел системы *) и если мы их прибавим к тем скоростям, которые получаются в результате вращений (п. 17), то мы получим полные значения $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, которые выразятся следующим образом

$$\dot{x} = \dot{x}_0 - y\dot{\phi} + \alpha, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 - x\dot{\phi} + \beta, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 - x\dot{\omega} + \gamma.$$

Предположим теперь, что мы продифференцировали эти значения, рассматривая при этом в качестве переменных только $\dot{\phi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\phi}$, и что эти дифференциалы обозначили с помощью символа δ^{**} ; тогда мы получим

$$\delta\dot{x} = \delta\dot{x}_0 - y\delta\dot{\phi}, \quad \delta\dot{y} = \delta\dot{y}_0 - x\delta\dot{\phi}, \quad \delta\dot{z} = \delta\dot{z}_0 - x\delta\dot{\omega}.$$

Если три уравнения пункта 14 помножить соответственно на $\delta\dot{\phi}$, $\delta\dot{\omega}$, $\delta\dot{\phi}$ и сложить вместе, а затем подвести под знак интеграла $\int$ дифференциалы

*) Указанные величины α , β и γ не являются достаточно определенными. Действительно, каково бы ни было смещение системы, изменяющейся по своему виду, его всегда можно рассматривать как результирующее некоторого произвольного движения, сообщенного отвердевшей системе, и затем второго движения, вызывающего изменение взаимного расположения рассматриваемых точек. Неопределенность величин α , β и γ делает настоящий пункт 37 крайне неясным. Я должен сознаться, что не был в состоянии понять ход мыслей Лагранжа и не мог вложить какой-либо точный смысл в теорему, которой заканчивается этот параграф. Поэтому приведенные ниже примечания относятся только к случаю твердой системы.

Прим. Бертрона.

Вполне присоединяясь к приведенным выше замечаниям, мы предлагаем следующее толкование вывода, полученного Лагранжем: если в формулах, дающих значения $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, мы будем рассматривать α , β , γ как заданные функции x , y , z , а $\dot{\phi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\phi}$ — как произвольные переменные, то это приведет к рассмотрению всех движений системы, при которых деформация в конце бесконечно малого промежутка времени останется одной и той же; ибо, если, например, определить произвольную расстояния двух точек системы по времени, то можно легко установить, что эта производная совершенно не зависит от произвольных величин $\dot{\phi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\phi}$ и, следовательно, сохраняет одну и ту же величину, когда эти произвольные величины принимают любые возможные значения. Стало быть теорема Лагранжа может быть выражена следующим образом.

Если движение, получаемое системой под действием заданных импульсов, сравнить со всеми движениями, при которых деформация в конце бесконечно малого промежутка времени оставалась бы неизменной, то живая сила, приобретенная системой при естественном движении, будет всегда максимумом или минимумом.

Сверх того из доказательств, данного Бертрона в дальнейшем примечании, следует, что эта живая сила всегда будет максимумом.

Предложение Лагранжа содержится, впрочем, как частный случай в весьма общей теореме, которой мы обязаны Штурму (Sturm); изложение этой теоремы можно найти в статье, помещенной в Comptes rendus de l'Académie des Sciences, том XIII, стр. 1045, а доказательство — в посмертном мемуаре Штурма, опубликованном Пуэ (Poulet) (См. Sturm, Leçons de Mécanique, t. II).

Прим. Дарбу.

**) Указанные вариации, выраженные символом δ , относятся к изменениям, испытываемым скоростями вследствие введения новых связей, причем движущие силы остаются неизменными. Так, например, в случае твердого тела вариации δ могут возникнуть вследствие введения в систему неподвижной оси. *Прим. Бертрона.*

$\delta\dot{\varphi}$, $\delta\dot{\omega}$, $\delta\dot{\psi}$, являющиеся общими для всех тел, то путем подстановки приведенных выше значений мы получим

$$S[m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) + X\delta\dot{x} + Y\delta\dot{y} + Z\delta\dot{z}] = 0.$$

Но найденное нами выше уравнение живой силы, будучи продифференцировано в смысле символа δ^*), дает

$$S[2m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) + X\delta\dot{x} + Y\delta\dot{y} + Z\delta\dot{z}] = 0.^*$$

Таким образом путем сравнения последних двух уравнений мы получаем

$$S m (\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) = 0$$

и, следовательно,

$$\delta S m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0;$$

из последнего видно, что живая сила, приобретенная системой в результате импульса, является всегда максимумом или минимумом **) по отношению к вращениям вокруг трех осей; а так как эти три вращения складываются в единое вращение вокруг мгновенной оси, то отсюда следует, что положение этой оси таково, что живая сила всей системы по отношению к этой же оси является наименьшей или наибольшей.

Эйлер доказал указанное свойство мгновенной оси вращения для твердых тел любой формы; из приведенного выше анализа видно, что оно является общим свойством для всякой системы тел, как связанных между собою, так и не связанных, — когда эти тела получают какие-нибудь импульсы.

38. Когда система представляет собою твердое тело, способное свободно вращаться вокруг точки и не находящееся под действием какой-либо ускоряющей силы, то из сочетания *уравнения живых сил* с уравнением *площадей* можно вывести отношение, достойное быть отмеченным благодаря своей простоте, которое, насколько я знаю, до сих пор еще не было отмечено, — а именно, отношение между скоростями вращения $\dot{\varphi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\psi}$

*) Если допустить, что вариации, обозначенные через δ , являются конечными, то путем дифференцирования уравнения живых сил мы получим

$$S\{2m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) + m[(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2] + X\delta\dot{x} + Y\delta\dot{y} + Z\delta\dot{z}\} = 0,$$

а если продолжить это рассуждение, приняв во внимание новые члены, введенные благодаря указанному допущению, то мы найдем

$$\delta S m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = - S m [(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2].$$

Отсюда видно, что приращение живых сил является отрицательным и равно сумме живых сил, связанных со скоростями, потерянными различными точками.

Прим. Бертрана.

**) Из предшествующего примечания следует, что она всегда бывает максимумом. Это было впервые установлено Делонэ (Delaunay), который доказал его совершенно иным путем (Journal de Liouville, 1-re Serie, t. V, p. 255).

Прим. Бертрана.

вокруг трех неподвижных осей координат x, y, z . В этом случае мы имеем просто (п. 17)

$$dx = \dot{x} dt = (z\dot{\omega} - y\dot{\varphi}) dt,$$

$$dy = \dot{y} dt = (x\dot{\varphi} - z\dot{\psi}) dt,$$

$$dz = \dot{z} dt = (y\dot{\psi} - x\dot{\omega}) dt.$$

Если три последних уравнения пункта 9 сложить, помножив их соответственно на $\dot{\varphi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\psi}$, подвести эти величины под знак $\sum$ и подставить $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ вместо их значений, то мы получим

$$\sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = A\dot{\varphi} + B\dot{\omega} + C\dot{\psi};$$

но уравнение п. 34 при $\Pi = 0$ дает

$$\frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = H.$$

Таким образом мы имеем

$$A\dot{\varphi} + B\dot{\omega} + C\dot{\psi} = 2H,$$

где A, B, C являются моментами первоначальных импульсов, а H представляет собою произвольную постоянную, которая необходимо должна быть положительной.

Если в этом уравнении вместо A, B, C подставить выражения пункта 11

$$\gamma C', \quad \gamma' C', \quad \gamma'' C'$$

или $C' \cos l$, $C' \cos m$, $C' \cos n$, а вместо $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ значения пункта 17

$$\dot{\theta} \cos \lambda, \quad \dot{\theta} \cos \mu, \quad \dot{\theta} \cos \nu,$$

то мы получим

$$\dot{\theta} (\cos l \cos \lambda + \cos m \cos \mu + \cos n \cos \nu) = \frac{2H}{C'}.$$

В этой формуле l, m, n представляют собою углы, образуемые осью, перпендикулярной к неизменной плоскости, с неподвижными осями x, y, z , а λ, μ, ν представляют собою углы, образуемые с теми же осями мгновенной осью сложного вращения, скорость которого равна $\dot{\theta}$. Таким образом, если мы обозначим через σ угол, образуемый мгновенной осью вращения с осью, перпендикулярной к неизменной плоскости, то с помощью известной формулы мы получим

$$\cos \sigma = \cos l \cos \lambda + \cos m \cos \mu + \cos n \cos \nu$$

и, следовательно, $\dot{\theta} \cos \sigma = \frac{2H}{C'}$, где величина $\frac{2H}{C'}$ является постоянной, зависящей от начального состояния; отсюда получается независимое от формы тела отношение между фактической скоростью вращения в каждое мгновение и положением оси вращения по отношению к неизменной плоскости.

Впрочем, если плоскость xu выбрать таким образом, чтобы она прошла через центр тела и через прямую, по направлению которой произошел импульс, то постоянные величины A и B будут равны нулю (п. 16) и найденное выше общее уравнение сведется к следующему

$$C\dot{\phi} = 2H;$$

из последнего видно, что скорость вращения по отношению к оси z , т. е. параллельно плоскости импульса, остается всегда неизменной.

§ VI. Свойства, касающиеся наименьшего действия.

39. Рассмотрим теперь четвертый принцип, а именно принцип *наименьшего действия*.

Если мы обозначим через u скорость каждого тела m системы, то мы будем иметь

$$u^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

и уравнение живых сил (п. 34) примет следующий вид:

$$S m \left(\frac{u^2}{2} + \Pi \right) = H;$$

если последнее выражение продифференцировать в смысле символа δ , то оно даст

$$S m (u \delta u + \delta \Pi) = 0.$$

Но так как Π является функцией $p, q, r, \dots$, то мы имеем

$$\delta \Pi = P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$$

Таким образом

$$S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) = -S m u \delta u.$$

Это уравнение всегда будет иметь место, если

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$$

представляет собою интегрируемую величину и если связь между телами не зависит от времени; оно перестает быть верным, когда одно из приведенных условий не выполнено.

Если указанное выше выражение теперь подставить в общую формулу динамики (п. 5 отд. II), то последний примет следующий вид:

$$S m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z - u \delta u \right) = 0.$$

Но

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z) - dx' d\delta x - dy' d\delta y - dz' d\delta z.$$

Так как символы d и δ выражают совершенно независимые друг от друга дифференциалы или вариации, то величины $d\delta x, d\delta y, d\delta z$ должны представлять собою то же самое, что и $\delta dx, \delta dy, \delta dz$. Сверх того ясно, что

$$dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz = \frac{1}{2} \delta (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Таким образом мы имеем

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z) - \frac{1}{2} \delta(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Пусть s представляет собою пространство или дугу, описанную телом m за время t ; тогда мы имеем

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad dt = \frac{ds}{u}.$$

Следовательно,

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z) - ds \delta ds$$

и отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z = \frac{d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z)}{dt^2} - u^2 \frac{\delta ds}{ds}.$$

В силу этого рассматриваемая общая формула примет следующий вид:

$$\mathcal{S} m \left[\frac{d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z)}{dt^2} - u^2 \frac{\delta ds}{ds} - u \delta u \right] = 0,$$

или, если все члены помножить на постоянный элемент $dt = \frac{ds}{u}$ и принять во внимание, что $u \delta ds + ds \delta u = \delta(u ds)$,

$$\mathcal{S} m \left[\frac{d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z)}{dt} - \delta(u ds) \right] = 0.$$

Так как знак интеграла $\mathcal{S}$ не связан со знаками дифференциалов d и δ , можно последние поставить впереди первого, в результате чего приведенное уравнение примет следующий вид:

$$d \mathcal{S} m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) - \delta \mathcal{S} m u ds = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение по отношению к знаку дифференциала d и обозначим это интегрирование с помощью обычного знака интеграла $\int$; тогда мы получим

$$\mathcal{S} m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) - \int \delta \mathcal{S} m u ds = \text{const.}$$

Но знак $\int$ в выражении

$$\int \delta \mathcal{S} m u ds$$

может относиться только к переменным u и s и не находится ни в какой связи со знаками $\mathcal{S}$ и δ ; поэтому ясно, что указанное выражение тождественно со следующим

$$\delta \mathcal{S} m \int u ds;$$

если предположим, что в тех точках, где начинается интегрирование $\int u ds$, мы имеем

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

то произвольная постоянная должна равняться нулю, так как в этих точках левая часть уравнения должна обратиться в нуль.

Таким образом в этих случаях мы будем иметь

$$\delta S m \int u ds = S m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right).$$

Следовательно, если сверх того мы предположим, что вариации δx , δy , δz должны равняться нулю и в тех точках, где интегрирование $\int u ds$ кончается, то мы получим просто

$$\delta S m \int u ds = 0,$$

т. е. вариация величины $S m \int u ds$ будет равна нулю; таким образом эта последняя величина будет максимумом или минимумом.

Итак, отсюда вытекает следующая общая теорема.

При движении любой системы тел, находящихся под действием взаимных сил притяжения, или сил, направленных к неподвижному центру и пропорциональных какому-либо функциям расстояний, кривые, описываемые различными телами, а равно их скорости необходимо таковы, что сумма произведений отдельных масс на интеграл скорости, умноженной на элемент кривой, является максимумом или минимумом — при условии, что первые и последние точки каждой кривой рассматриваются как наперед заданные, так что вариации координат соответствующих этим точкам, равны нулю.

Такова теорема, которую под названием принципа наименьшего действия мы упомянули в конце первого отдела*).

40. Однако приведенная теорема не только содержит в себе интересное свойство движения тел, но может также послужить для определения этого движения. В самом деле, так как выражение $S m \int u ds$ должно быть максимумом или минимумом, остается только, пользуясь методом вариаций, вывести условия, при которых она может принять указанные выше значения; если применить общее уравнение сохранения живых сил, то мы всегда найдем все уравнения, необходимые для определения движения каждого тела. Действительно, для существования максимума или минимума необходимо, чтобы вариация была равна нулю; следовательно, мы будем иметь

$$\delta S m \int u ds = 0;$$

отсюда, проделав приведенные выше операции в обратном порядке, мы найдем ту общую формулу, из которой мы исходили.

*) Интеграл $S m \int u ds$ оказывается максимумом или минимумом, если его сравнить с аналогичными интегралами, относящимися ко всякому другому движению системы, которое было бы вызвано теми же силами и при котором, несмотря на введение новых связей, допускающих существование принципа живых сил, начальные и конечные положения оставались бы одними и теми же. Возможно, что это заключение, которое с очевидностью следует из доказательства, в тексте выражено недостаточно ясно.

Прим. Бертрама.

По поводу этого принципа можно посмотреть статью О. Родригеса, напечатанную в *Comptes rendus de l'Ecole Polytechnique*, t. III, p. 159 и *Vorlesungen über Dynamik* Якоби.

Прим. Дарбу.

(Есть русский перевод: Якоби, Лекции по динамике, ОНТИ, М.—Л. 1936. — Прим. ред.)

Для того чтобы сделать этот метод более ясным, мы изложим его здесь в нескольких словах. Условие максимума или минимума вообще дает

$$\delta S m \int u ds = 0;$$

если знак дифференциала δ ввести под знак S и $\int$ (что согласно природе этих различных знаков, очевидно, допустимо), то мы получим уравнение

$$S m \int \delta(u ds) = 0,$$

или, дифференцируя в смысле символа δ ,

$$S m \int (ds \delta u + u \delta ds) = 0.$$

Я рассматриваю сначала часть

$$S m \int ds \delta u;$$

если вместо ds подставить его значение $u dt$, то она перейдет в

$$S m \int u \delta u dt,$$

или, если изменить порядок знаков S и $\int$, которые совершенно независимы друг от друга, то она примет следующий вид:

$$\int dt S m u \delta u.$$

Но общее уравнение принципа живых сил дает (п. 34)

$$S m u^2 = 2H - 2 S m \Pi,$$

где $d\Pi$ равен

$$P dp + Q dq + R dr + \dots;$$

поэтому, если приведенное выражение продифференцировать в смысле символа δ , то мы получим

$$S m u \delta u = - S m \delta H = - S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots),$$

ибо так как согласно допущению Π является алгебраической функцией $p, q, r, \dots$, то дифференциал $\delta\Pi$ представляет собою то же самое, что и $d\Pi$, с заменой только символа d символом δ . Таким образом величина

$$S m \int ds \delta u$$

будет приведена к следующему виду:

$$- \int dt S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots).$$

Затем я рассматриваю вторую часть

$$S m \int u \delta ds$$

и подставляю в ней вместо ds его величину, выраженную с помощью прямоугольных координат или с помощью каких-либо других переменных

величин. Если мы пользуемся прямоугольными координатами x, y, z , то

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

следовательно, дифференцируя в смысле символа δ ; мы получим

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz,$$

или, переставив знаки d и δ и написав $d\delta$ вместо δd , что всегда допустимо, в силу независимости этих символов,

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z;$$

таким образом, подставив это значение и написав dt вместо $\frac{ds}{u}$, мы получим

$$\int u \delta ds = \int \left(\frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z \right).$$

Так как здесь под знаком интеграла $\int$ находятся дифференциалы вариаций $\delta x, \delta y, \delta z$, то следует добиться их исчезновения, пользуясь известной операцией интегрирования по частям согласно правилам вариационного исчисления. Таким образом величина $\int \frac{dx}{dt} d\delta x$ преобразуется в другую ей эквивалентную

$$\frac{dx}{dt} \delta x - \int \delta x d \frac{dx}{dt};$$

если предположить, что обе крайние точки кривой заданы, так что координаты, соответствующие началу и концу интеграла не варьируют, то мы будем иметь просто

$$\int \frac{dx}{dt} d\delta x = - \int \delta x d \frac{dx}{dt}.$$

Аналогично мы найдем

$$\int \frac{dy}{dt} d\delta y = - \int \delta y d \frac{dy}{dt},$$

а также

$$\int \frac{dz}{dt} d\delta z = - \int \delta z d \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом мы получим следующее преобразованное выражение

$$\int u \delta ds = - \int \left(\delta x d \frac{dx}{dt} + \delta y d \frac{dy}{dt} + \delta z d \frac{dz}{dt} \right).$$

Следовательно, величина

$$\mathcal{S} m \int u \delta ds,$$

если переставить знаки $\mathcal{S}$ и $\int$, а dt принять в качестве постоянной величины, примет следующий вид:

$$- \int dt \mathcal{S} m \left(\delta x d \frac{dx}{dt} + \delta y d \frac{dy}{dt} + \delta z d \frac{dz}{dt} \right).$$

Таким образом мы получим следующее уравнение максимума или минимума

$$\int dt \, S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots + \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z) = 0,$$

которое, вообще говоря, должно иметь силу для всех возможных вариаций; поэтому величина, стоящая под знаком $\int$, должна в любое мгновение быть равной нулю; таким образом мы получим неопределенное уравнение

$$S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots + \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z) = 0,$$

которое представляет собою не что иное, как общую формулу динамики (отд. II, п. 5) и которое, следовательно, подобно ей, даст все уравнения, необходимые для разрешения настоящей задачи.

41. Вместо координат x, y, z можно также воспользоваться любыми другими неопределенными величинами и тогда все сведется к тому, чтобы элемент дуги ds выразить в качестве функций этих неопределенных величин. Так, например, если взять радиус, или прямолинейное расстояние от начала координат, которое мы назовем ρ , и два угла, из которых один ψ пусть обозначает угол, образуемый упомянутым радиусом с плоскостью xy , а другой φ — угол, образуемый проекцией того же радиуса на указанную плоскость с осью x , то мы будем иметь

$$z = \rho \sin \psi, \quad y = \rho \cos \psi \sin \varphi, \quad x = \rho \cos \psi \cos \varphi,$$

а отсюда мы получим

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi^2);$$

это выражение можно было бы вывести и непосредственно, пользуясь геометрическим методом. Продифференцировав в смысле δ и написав $d\delta$ вместо δd , мы будем иметь

$$\begin{aligned} ds \, d\delta s &= d\rho \, d\delta \rho + \rho (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi^2) \delta \rho + \\ &+ \rho^2 (d\psi \, d\delta \psi - \sin \psi \cos \psi d\varphi^2 \delta \psi + \cos^2 \psi d\varphi \, d\delta \varphi), \end{aligned}$$

откуда, разделив на $dt = \frac{ds}{u}$ и проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} \int u \delta ds &= \int dt \left[\frac{d\rho}{dt} \frac{d\delta \rho}{dt} + \rho \left(\frac{d\psi^2}{dt^2} + \cos^2 \psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) \delta \rho \right] + \\ &+ \int dt \left(\rho^2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d\delta \psi}{dt} - \rho^2 \sin \psi \cos \psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} \delta \psi + \rho^2 \cos^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\delta \varphi}{dt} \right). \end{aligned}$$

Двойной символ $d\delta$ под знаком $\int$ можно заставить исчезнуть путем интегрирования по частям. Сначала отбросим члены, содержащие вариации вне знака $\int$, так как эти вариации, которые в данном случае должны относиться к пределам интеграла, становятся равными нулю благодаря принятому допущению, что начальные и конечные точки кривых, описывае-

мых телами, наперед заданы и являются неизменными. В результате мы получим следующее преобразованное выражение

$$\int u \delta s = - \int du \delta s = - \int dt \left\{ \left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \frac{d\psi^2}{dt^2} - \rho \cos^2 \psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) \delta \rho + \right. \\ \left. + \left[\rho^2 \sin \psi \cos \psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d \left(\rho^2 \frac{d\psi}{dt} \right)}{dt} \right] \delta \psi + \frac{d \left(\cos^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} \delta \varphi \right\}.$$

Таким образом уравнение максимума или минимума примет следующий вид:

$$\int dt S m \left\{ P \delta \rho + Q \delta q + R \delta r + \dots + \left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \frac{d\psi^2}{dt^2} - \rho \cos^2 \psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) \delta \rho + \right. \\ \left. + \left[\rho^2 \sin \psi \cos \psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d \left(\rho^2 \frac{d\psi}{dt} \right)}{dt} \right] \delta \psi + \frac{d \left(\cos^2 \psi \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} \delta \varphi \right\} = 0.$$

Если приравнять нулю величину, стоящую под знаком $\int$, мы получим неопределенное уравнение, аналогичное уравнению, приведенному в предыдущей статье, которое, однако, вместо вариаций δx , δy , δz будет содержать вариации $\delta \rho$, $\delta \varphi$, $\delta \psi$; отсюда можно вывести уравнения, необходимые для решения заданной задачи, если сначала все вариации свести к возможно меньшему их числу и затем отдельно приравнять нулю все члены, в состав которых входит каждая из оставшихся вариаций.

Если воспользоваться другими неопределенными величинами, то мы получим иные формулы, но можно быть уверенным, что в каждом отдельном случае всегда можно получить наиболее простые формулы, вытекающие из природы этих неопределенных величин. См. том II *Mémoires de l'Académie de Turin*, где этот метод был применен для разрешения различных вопросов механики^{*)}.

42. Впрочем, так как $\delta s = u dt$, то величина

$$S m \int u \delta s,$$

которая представляет собою максимум или минимум, может быть приведена к следующему виду $S m \int u^2 dt$ или $\int dt S m u^2$, где $S m u^2$ выражает живую силу всей системы в любое мгновение. Таким образом рассматриваемый принцип сводится собственно к тому, что сумма живых сил всех тел от момента, когда они выходят из заданных точек, до того момента, когда они приходят в другие заданные точки, является максимумом или минимумом. Следовательно, его можно было бы с большим основанием назвать *принципом наибольшей или наименьшей живой силы*; эта формулировка имела бы то преимущество, что она была бы общей как для движения, так и для равновесия; в самом деле, в отд. III первой части (п. 22) мы видели, что при прохождении положения равновесия живая сила системы всегда бывает наибольшей или наименьшей.

^{*)} См. также интересную статью О. Родригеса в *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, t. III, p. 159. *Прим. Бертрана.*

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВСЕХ ПРОБЛЕМ ДИНАМИКИ.

1. Достаточно развернуть ту формулу, к которой мы свели во втором отделе всю теорию динамики, чтобы получить все уравнения, необходимые для решения любой задачи в данной отрасли знания, в чем бы она ни заключалась; по это применение формулы, представляющее собою чисто вычислительную операцию, может быть в некоторых отношениях еще упрощено с помощью тех приемов, которые мы применим в настоящем отделе.

Так как все дело сводится к тому, чтобы свести различные переменные, входящие в состав указанной формулы, к возможно меньшему числу, пользуясь условными уравнениями, заданными природой каждой задачи, то одна из главнейших операций заключается в том, чтобы вместо заданных переменных подставить функции других переменных. Эта цель может быть всегда легко достигнута с помощью обычных методов; но по отношению к рассматриваемой формуле существует особый прием выполнения этой операции, имеющий то преимущество, что он всегда непосредственно приводит к более простым преобразованиям.

2. Упомянутая формула состоит из двух частей, которые должны быть рассмотрены отдельно.

Первая часть содержит в себе члены

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right),$$

которые происходят исключительно только от сил, являющихся следствием инерции тел.

Вторая часть состоит из членов

$$\sum m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots),$$

обязанных своим происхождением ускоряющим силам $P, Q, R, \dots$, которые согласно допущению действуют на каждое тело по направлению линий $p, q, r, \dots$ и которые стремятся сократить эти линии. Сумма этих двух величин, будучи приравнена нулю, и дает общую формулу динамики (отд. II, п. 5).

3. Рассмотрим сначала величину

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z;$$

ясно, что если к ней прибавить нижеследующую величину

$$dx d \delta x + dy d \delta y + dz d \delta z,$$

то эту сумму можно будет проинтегрировать, и мы получим в качестве интеграла

$$dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z.$$

Отсюда следует, что мы имеем

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z) - dx d\delta x - dy d\delta y - dz d\delta z.$$

Но так как согласно известным принципам двойной знак $d\delta$ эквивалентен знаку δd , то величина $dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z$ может быть приведена к следующему виду:

$$dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz,$$

т. е. к $\frac{1}{2} \delta (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Таким образом мы получим следующее преобразование

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = d(dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z) - \frac{1}{2} \delta (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

из которого видно, что для вычисления интересующей нас величины

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z$$

достаточно вычислить ниже следующие две величины, содержащие только первые дифференциалы

$$dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

и затем одну из них продифференцировать в смысле символа d , а другую в смысле символа δ .

4. Итак, предположим, что речь идет о том, чтобы вместо переменных x, y, z подставить заданные функции других переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$; продифференцировав эти функции, мы получим выражения следующего вида:

$$dx = A d\xi + B d\psi + C d\varphi + \dots,$$

$$dy = A' d\xi + B' d\psi + C' d\varphi + \dots,$$

$$dz = A'' d\xi + B'' d\psi + C'' d\varphi + \dots,$$

в которых $A, A', A'', B, B', \dots$ будут известными функциями тех же переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$; аналогичным образом будут выражены значения $\delta x, \delta y, \delta z$ с заменой лишь символа d символом δ .

Если произвести указанные подстановки в выражении $dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z$, то оно примет следующий вид:

$$F d\xi \delta \xi + G (d\xi \delta \psi + d\psi \delta \xi) + H d\psi \delta \psi + I (d\xi \delta \varphi + d\varphi \delta \xi) + \dots,$$

где $F, G, H, I, \dots$ будут конечными функциями $\xi, \psi, \varphi, \dots$.

Следовательно, если заменить символ δ символом d , то мы получим также значение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

которое будет равно

$$F d\xi^2 + 2G d\xi d\psi + H d\psi^2 + 2I d\xi d\varphi + \dots$$

Если первую из этих двух величин продифференцировать в смысле символа d , то мы получим дифференциал

$$d(F d\xi) \delta \xi + F d\xi \delta \xi + d(G d\xi) \delta \psi + d(G d\psi) d\xi + G d\xi d\delta \psi + G d\psi d\delta \xi + \\ + d(H d\psi) \delta \psi + H d\psi d\delta \psi + \dots;$$

если затем вторую величину продифференцировать в смысле символа δ , то получим

$$\delta I' d\xi^2 + 2I' d\xi \delta d\xi + 2\delta G d\xi d\psi + 2G d\psi \delta d\xi + 2G d\xi \delta d\psi + \delta H d\psi^2 + \\ + 2H d\psi \delta d\psi + \dots$$

Если половину последнего дифференциала вычесть из первого и принять при этом во внимание, что $d\delta$ и δd представляют собою одно и то же, то найдем

$$d(I' d\xi) \delta\xi - \frac{1}{2} \delta I' d\xi^2 + d(G d\xi) \delta\psi + d(G d\psi) \delta\xi - \delta G d\xi d\psi + \\ + d(H d\psi) \delta\psi - \frac{1}{2} \delta H d\psi^2 + \dots$$

в качестве преобразованного значения величины

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z.$$

По ясно, что это значение может быть выведено непосредственно из последнего дифференциала, если все члены последнего разделить на 2, поменять знаки тех членов, которые совершенно не содержат двойного символа δd , а в других членах опустить знак d после δ для того, чтобы применить его к величинам, которые умножаются на двойные дифференциалы, снабженные символом δd . Таким образом член $\delta I' d\xi^2$ даст $-\frac{1}{2} \delta I' d\xi^2$, член $2I' d\xi \delta d\xi$ даст $d(I' d\xi) \delta\xi$ член $2\delta G d\xi d\psi$ даст $-\delta G d\xi d\psi$ член $2G d\psi \delta d\xi$ даст $d(G d\psi) \delta\xi$, и т. д.

5. Из сказанного следует, что если мы обозначим через Φ функцию $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и $d\xi, d\psi, d\varphi, \dots$, в которую преобразуется величина

$$\frac{1}{2} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

если подставить значения x, y, z в функции $\xi, \psi, \varphi, \dots$, то мы вообще получим следующее преобразованное выражение:

$$d^2x \delta x + d^2y \delta y + d^2z \delta z = \\ = + \left(-\frac{\delta\Phi}{\delta\xi} + d\frac{\delta\Phi}{\delta d\xi} \right) \delta\xi + \left(-\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} + d\frac{\delta\Phi}{\delta d\psi} \right) \delta\psi + \left(-\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi} + d\frac{\delta\Phi}{\delta d\varphi} \right) \delta\varphi + \dots,$$

если, как это обычно принято, обозначить через $\frac{\delta\Phi}{\delta\xi}$ коэффициент $\delta\xi$ в дифференциале $\delta\Phi$, через $\frac{\delta\Phi}{\delta d\xi}$ коэффициент $\delta d\xi$ в том же дифференциале и т. д.

6. То, что мы нашли выше, пользуясь искусственным приемом, могло бы быть выведено более просто и более обще с помощью принципов вариационного метода.

В самом деле, пусть Φ является какой-либо функцией $x, y, z, \dots, dx, dy, dz, \dots, d^2x, d^2y, d^2z, \dots$, которая после подстановки значений $x, y, z, \dots$, выраженных через $\xi, \psi, \varphi, \dots$, становится функцией $\xi, \psi, \varphi, \dots$,

$$\begin{aligned}
Z' = & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial d\xi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 \xi} + \dots \right) \delta \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 \xi} d \delta \xi + \dots + \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial d\psi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 \psi} + \dots \right) \delta \psi + \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 \psi} d \delta \psi + \dots + \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial d\varphi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 \varphi} + \dots \right) \delta \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 \varphi} d \delta \varphi + \dots + \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Таким образом, продифференцировав еще раз и произведя перестановку, мы получим следующее уравнение:

$$A \delta x + B \delta y + C \delta z + \dots - A' \delta \xi - B' \delta \psi - C' \delta \varphi - \dots = dZ' - dZ,$$

которое должно тождественно удовлетворяться и должно иметь силу, каковы бы ни были вариации или дифференциалы, обозначенные с помощью буквы δ .

Так как вторая часть приведенного уравнения представляет собою полный дифференциал по отношению к символу d , то, значит, и первая часть его тоже должна быть полным дифференциалом по отношению к тому же символу и независимо от символа δ ; но это невозможно, так как члены первой части содержат просто вариации δx , δy , δz , ..., $\delta \xi$, $\delta \psi$, $\delta \varphi$, ... и совершенно не содержат дифференциалов этих вариаций.

Отсюда следует, что для возможности существования указанного уравнения необходимо, чтобы обе части были порознь равны нулю, что даст нам два следующих тождественных равенства:

$$A \delta x + B \delta y + C \delta z + \dots = A' \delta \xi + B' \delta \psi + C' \delta \varphi + \dots, \quad dZ = dZ',$$

которые могут оказаться полезными в различных случаях.

Пусть, например,

$$\Phi = \frac{1}{2} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

тогда мы имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial dx} = dx, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial d^2 x} = 0, \dots$$

и совершенно так же для остальных подобных величин; следовательно,

$$A = -d^2 x, \quad B = -d^2 y, \quad C = -d^2 z.$$

Далее, так как Φ содержит в себе только дифференциалы первого порядка, то мы имеем просто

$$A' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d\xi},$$

$$B' = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d\psi},$$

$$C' = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d\varphi},$$

...

Таким образом мы получаем тождественное равенство

$$-d^2 x \delta x - d^2 y \delta y - d^2 z \delta z =$$

$$= + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d\xi} \right) \delta \xi + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d\psi} \right) \delta \psi + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - d \frac{\partial \Phi}{\partial d\varphi} \right) \delta \varphi + \dots,$$

которое совпадает с равенством, приведенным в пункте 5.

7 Отсюда следует, что для получения значения величины

$$Sm \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right)$$

в функции $\xi, \psi, \varphi, \dots$, достаточно найти значение величины

$$\frac{1}{2} Sm \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)$$

в функции $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и их дифференциалов; ибо если эту функцию назвать T , то мы тотчас же получим преобразованное выражение

$$\left(d \frac{\delta T}{\delta \xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} \right) \delta \xi + \left(d \frac{\delta T}{\delta \psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} \right) \delta \psi + \left(d \frac{\delta T}{\delta \varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} \right) \delta \varphi + \dots$$

Это выражение будет всегда иметь силу, если даже среди новых переменных будет находиться время t , при условии только, что мы будем его рассматривать как постоянную величину, т. е. что мы будем принимать $\delta t = 0$.

Далее легко видеть, что подобное же преобразование будет иметь место и в том случае, когда вариации $\delta \xi, \delta \psi, \delta \varphi, \dots$ не будут полными дифференциалами, если только они выражают неопределенные величины и вариация δT имеет следующий вид:

$$\delta T = \frac{\delta T}{\delta \xi} \delta \xi + \frac{\delta T}{\delta \psi} d \delta \xi + \frac{\delta T}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta T}{\delta \psi} d \delta \psi + \dots,$$

каковы бы ни были вообще коэффициенты $\frac{\delta T}{\delta \xi}, \frac{\delta T}{\delta \psi}, \frac{\delta T}{\delta \psi}, \dots$

8. Наконец, следует отметить, что если выражение T содержит в себе член dA , являющийся полным дифференциалом функции A , в которую одна из переменных, например ξ , входит только в конечном виде, то этот член не внесет ничего в приведенное выше преобразованное выражение по отношению к указанной переменной. В самом деле, если положить

$$T = dA = \frac{\partial A}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial A}{\partial \psi} d\psi + \dots,$$

то мы получим $\frac{\delta T}{\delta \xi} = \frac{\partial A}{\partial \xi}$,

$$\frac{\delta T}{\delta \xi} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial A}{\partial \psi} d\psi + \dots = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} d\xi + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \psi} d\psi + \dots$$

Следовательно, $d \frac{\delta T}{\delta \xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}$, представляющее собою коэффициент $\delta \xi$, примет следующее значение:

$$d \frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0.$$

Отсюда, далее, следует, что если выражение для T содержит в себе член вида $B dA$, где A является функцией $\xi, \psi, \dots$, без $d\xi$, а B — какой-либо функцией без ξ , то этот член по отношению к вариации ξ дает просто член $\frac{\partial A}{\partial \xi} dB$.

В самом деле, если написать член $B dA$ в виде $d(BA) - A dB$, то прежде всего можно убедиться, что член $d(BA)$ не дает ничего по отношению к вариации ξ , так как AB содержит в себе ξ , но не содержит $d\xi$;

далее, так как dB не содержит в себе ни ξ ни $d\xi$, а A содержит в себе ξ , но не содержит $d\xi$, то ясно, что если положить $T = -A dB$, мы получим

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial A}{\partial \dot{\xi}} dB,$$

так что коэффициент $\delta \xi$ сведется к $\frac{\partial A}{\partial \dot{\xi}} dB$.

9. Что касается величины $P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$, то ее всегда легко свести к функции $\xi, \psi, \varphi, \dots$, так как при этом дело сводится лишь к тому, чтобы преобразовать отдельно выражения для расстояний $p, q, r, \dots$ и сил $P, Q, R, \dots$. Но это преобразование становится еще более легким, когда силы таковы, что сумма моментов, т. е. величина

$$P dp + Q dq + R dr + \dots$$

поддается интегрированию, что, как мы уже отметили, всегда имеет место в природе.

Действительно, если, как в н. 34 отдела III, положить

$$\delta \Pi = P dp + Q dq + R dr + \dots,$$

то мы получим Π , выраженное в виде конечной функции $p, q, r, \dots$; следовательно, мы будем также иметь

$$\delta \Pi = P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$$

Умножив на m и взяв сумму для всех тел системы, мы получим

$$\sum m(P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots) = \sum m \delta \Pi = \delta \sum m \Pi,$$

пбо знак $\sum$ не зависит от знака δ .

Таким образом достаточно определить значение величины $\sum m \Pi$ в функции $\xi, \psi, \varphi, \dots$, а это требует лишь подстановки значений $x, y, z, \dots$, через $\xi, \psi, \varphi, \dots$, в выражения для $p, q, r, \dots$ (п. 1 отд. II часть I); если это значение $\sum m \Pi$ обозначить через V , то мы тотчас же получим

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial V}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi + \dots$$

10. Указанным путем общая формула динамики (п. 2) преобразуется к следующему виду:

$$\Xi \delta \xi + \Psi \delta \psi + \Phi \delta \varphi + \dots = 0,$$

где мы будем иметь

$$\Xi = d \frac{\partial T}{\partial d \xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi},$$

$$\Psi = d \frac{\partial T}{\partial d \psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi},$$

$$\Phi = d \frac{\partial T}{\partial d \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\dots \dots \dots$$

если положить

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right), \quad V = \sum m \Pi$$

и

$$d \Pi = P dp + Q dq + R dr + \dots$$

Если два тела m и m' системы, рассматриваемые в качестве точек, расстояние между которыми равно r , взаимно притягиваются с ускоряющей силой P , являющейся функцией r , то легко видеть, что момент этой силы выразится через $mm'Pdr$; тогда к значению V следует прибавить величину $mm' \int P dr$. Совершенно так же надо поступить, если в системе имеются еще другие силы взаимного притяжения.

Вобщем, если в системе имеются какие-либо силы $F, G, \dots$, стремящиеся уменьшить значение величины $f, g, \dots$, то $Fdf, Gdg, \dots$ будут служить моментами этих сил (п. 9 отд. II часть I); в соответствии с этим, рассматривая F в качестве функции f , G — в качестве функции g и т. д., следует к значению V прибавить столько членов вида $\int F df, \int G dg, \dots$, сколько имеется подобных сил.

А если при выборе новых переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$ принять во внимание условные уравнения, вытекающие из природы рассматриваемой системы, и выбрать эти переменные таким образом, чтобы они были совершенно независимы друг от друга и, следовательно, чтобы их вариации $\delta\xi, \delta\psi, \delta\varphi, \dots$ оставались совершенно неопределенными, то мы тотчас же получим частные уравнения [27]

$$E=0, \quad \Psi=0, \quad \Phi=0, \dots,$$

которые и служат для определения движения системы; ибо число этих уравнений в точности равно числу переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, от которых зависит положение системы в любое мгновение.

11. Но хотя разрешение задачи можно всегда довести до указанной стадии, так как все дело сводится к тому, чтобы, пользуясь условными уравнениями, исключить столько переменных, сколько позволяют эти уравнения, и затем для $\xi, \psi, \varphi, \dots$ взять оставшиеся переменные, тем не менее могут встретиться такие случаи, когда этот путь может оказаться слишком затруднительным и когда во избежание излишнего осложнения расчета может оказаться целесообразным сохранение большего числа переменных. В этих случаях условные уравнения, которые остались еще неудовлетворенными, должны быть использованы для исключения в общей формуле некоторых из вариаций $\delta\xi, \delta\psi, \dots$; однако вместо действительного исключения можно применить и метод множителей, изложенный в I части (отд. IV).

Пусть

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \dots$$

рассматриваемые уравнения, сведенные к функциям $\xi, \psi, \varphi, \dots$, так что $L, M, N, \dots$ представляют собою заданные функции этих переменных. Прибавим к левой части общей формулы (предыдущий пункт) величину

$$\lambda \delta L + \mu \delta M + \nu \delta N + \dots,$$

в которой $\lambda, \mu, \nu, \dots$ являются неопределенными коэффициентами; тогда мы можем рассматривать вариации $\delta\xi, \delta\psi, \delta\varphi, \dots$ как величины независимые и произвольные.

Указанным путем мы получим общее уравнение

$$E \delta \xi + \Psi \delta \psi + \Phi \delta \varphi + \dots + \lambda \delta L + \mu \delta M + \nu \delta N + \dots = 0,$$

которое должно иметь силу независимо от вариаций $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, ... и потому даст нижеследующие частные уравнения движения системы:

$$\Xi + \lambda \frac{\partial L}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial M}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial N}{\partial \xi} + \dots = 0,$$

$$\Psi + \lambda \frac{\partial L}{\partial \psi} + \mu \frac{\partial M}{\partial \psi} + \nu \frac{\partial N}{\partial \psi} + \dots = 0,$$

$$\Phi + \lambda \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial M}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial N}{\partial \varphi} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Из этих уравнений следует затем исключить неизвестные λ , μ , ν , ... благодаря чему количество уравнений уменьшится на такое же число; но если сюда присоединить условные уравнения, которые необходимо должны иметь место, то у нас всегда будет столько же уравнений, сколько имеется переменных.

12. Так как эти уравнения могут иметь различные более или менее простые формы и, в частности, более или менее удобные для интегрирования, является безразличным, в каком виде они представлены с самого начала; пожалуй, одно из главных преимуществ нашего метода заключается в том, что он всегда дает уравнения каждой задачи в наиболее простой форме по отношению к примененным при этом переменным и дает нам возможность наперед судить о том, таковы ли переменные, пользование которыми может нам максимально облегчить интегрирование. Мы изложим здесь несколько общих положений, касающихся данного вопроса, применение которых мы увидим в дальнейшем при разрешении различных задач.

Из тех же формул, которые мы дали выше, ясно, что дифференциальные члены уравнений движения любой системы тем превосходят только от величины T , выражающей сумму всех величин $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)$ по отношению к различным телам; при этом каждая переменная конечная величина, например ξ , входящая в выражение T , дает член $-\frac{\partial T}{\partial \xi}$, а каждая дифференциальная переменная, например $d\xi$, дает член $d \frac{\partial T}{\partial d\xi}$. Отсюда

прежде всего видно, что рассматриваемые члены не могут содержать в себе иных функций переменных, кроме тех, которые входят в состав выражения T ; следовательно, при применении синусов или косинусов углов, что представляется естественным при разрешении многих задач, может случиться, что эти синусы или косинусы исчезнут из функции T ; тогда последняя будет содержать в себе только дифференциалы углов и рассматриваемые члены тоже будут содержать только эти же дифференциалы. Таким образом, применяя указанного вида подстановки, можно всегда выиграть с точки зрения простоты уравнений задачи.

Так, например, если вместо двух координат x , y применить радиус-вектор r , проведенный из начала тех же координат и образующий с осью x угол φ , то мы будем иметь

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

а после дифференцирования

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi,$$

следовательно,

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2;$$

это выражение является очень простым, оно не содержит в себе ни синуса, ни косинуса φ , а лишь дифференциал его $d\varphi$. Тем же путем выражение $dx^2 + dy^2 + dz^2$ может быть заменено выражением $r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2$.

Вместо r и z можно было бы еще подставить новый радиус-вектор ρ и угол ψ , образуемый этим радиусом с r , являющимся проекцией ρ ; это дало бы

$$r = \rho \cos \psi, \quad z = \rho \sin \psi,$$

а следовательно,

$$dr^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2;$$

таким образом величина $dx^2 + dy^2 + dz^2$ преобразовалась бы в следующую

$$\rho^2 (\cos^2 \psi d\varphi^2 + d\psi^2) + d\rho^2.$$

В данном случае ясно, что ρ будет радиусом, проведенным из начала координат в точку пространства, в которой находится тело m , ψ будет углом наклона этого радиуса к плоскости xy , а φ будет углом, образуемым проекцией этого радиуса на ту же плоскость с осью x ; тогда мы будем иметь, как в пункте 4, отдела II, части I,

$$x = \rho \cos \psi \cos \varphi, \quad y = \rho \cos \psi \sin \varphi, \quad z = \rho \sin \psi.$$

Наконец, по желанию можно было бы применить и другие подстановки, а в том случае, когда система составлена из многих тел, их можно было бы отнести непосредственно одни к другим, пользуясь относительными координатами; обстоятельства каждой задачи всегда сами укажут наиболее подходящие преобразования. Можно даже, найдя с помощью какой-либо подстановки одно или несколько уравнений задачи, вывести другие уравнения, пользуясь иными подстановками; это даст новое средство для различного выражения этих уравнений и для нахождения наиболее простых и наиболее легко поддающихся интегрированию уравнений.

13. Другие члены рассматриваемых уравнений зависят от ускоряющих сил, которые согласно допущению действуют на тела, и от условных уравнений, существующих между переменными по отношению к положению тел в пространстве.

В том случае, когда силы P , Q , R , ... направлены к неподвижным центрам или к телам самой системы и когда они пропорциональны каким-либо функциям расстояний, как это имеет место в природе, величина V , выражающая сумму

$$m \int (P dr + Q dq + R dr + \dots)$$

для всех тел m системы, будет алгебраической функцией расстояний и для каждой переменной ξ , из которых она составлена, даст конечный член вида $\frac{\partial V}{\partial \xi}$.

Аналогично условные уравнения $L=0$, $M=0$, ... дадут для той же переменной ξ члены $\frac{\partial L}{\partial \xi}$, $\frac{\partial M}{\partial \xi}$, ... и так далее. Таким образом надо будет только к значению V прибавить величины λL , μM , ..., рассматривая в дальнейшем величины λ , μ , ..., при дифференцированиях в смысле δ , как постоянные.

Следовательно, если некоторые из переменных, входящие в состав функции V , не входят в V , а также в L , M , ..., то уравнения, относящиеся к этим переменным, будут содержать в себе лишь дифференциальные

члены и интегрирование этих уравнений будет очень легко осуществить особенно, если в T эти переменные будут входить только в дифференциальной форме. Последнее будет иметь место, когда в случае тел, тяготеющих к центрам, мы в качестве координат возьмем расстояния от этих центров и углы, описанные вокруг последних [28].

14. Случай интегрирования, которое всегда осуществимо, когда силы являются функциями расстояний, а функции T , V , L , M , ... не содержат в себе конечной переменной t , это — случай, получающийся при применении принципа сохранения живых сил. Хотя мы уже показывали, каким образом этот принцип получается из нашей общей формулы динамики (отд. III, п. 34), тем не менее представляется не бесполезным показать, что частные уравнения, выведенные из этой формулы, всегда дают интегрируемое уравнение, которое является уравнением сохранения живых сил.

Упомянутые уравнения, рассматриваемые во всей их общности, имеют каждое следующий вид (п. 11):

$$d \frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial L}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial M}{\partial \xi} + \dots = 0;$$

если эти уравнения сложить, помножив предварительно на соответствующие дифференциалы $d\xi$, $d\psi$, ..., и если при этом приять во внимание, что согласно допущению величины V , L , M , ... являются алгебраическими функциями переменных ξ , ψ , ..., но не содержат в себе t , то ясно, что мы будем иметь уравнение

$$\left(d \frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(d \frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) d\psi + \dots + dV + \\ + \lambda dL + \mu dM + \dots = 0;$$

но так как согласно условным уравнениям $L=0$, $M=0$, ..., то мы будем иметь вообще $dL=0$, $dM=0$, ...; следовательно, предыдущее уравнение сведется к следующему:

$$\left(d \frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) d\xi + \dots + dV = 0.$$

Но мы имеем

$$d\xi d \frac{\partial T}{\partial d\xi} = d \left(\frac{\partial T}{\partial d\xi} d\xi \right) - \frac{\partial T}{\partial d\xi} d^2\xi,$$

а так как T является алгебраической функцией переменных ξ , ψ , ... и их дифференциалов $d\xi$, $d\psi$, ..., но не является функцией t , то мы будем иметь

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\xi} d^2\xi + \frac{\partial T}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d^2\psi + \dots;$$

таким образом данное уравнение примет следующий вид:

$$d \left(\frac{\partial T}{\partial d\xi} d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \dots \right) - dT + dV = 0.$$

Это уравнение очевидно интегрируемо; интегралом его является уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi} d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \dots - T + V = \text{const.}$$

Далее, так как

$$T = S \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right),$$

то ясно, что какие бы переменные ни были подставлены вместо x, y, z , получающаяся при этом функция будет обязательно однородной и двух измерений по отношению к дифференциалам этих переменных; следовательно, согласно известной теореме мы будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi} d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \dots = 2T.$$

Таким образом найденный интеграл будет просто

$$T + V = \text{const};$$

этот интеграл содержит в себе принцип сохранения живых сил (отд. III, п. 34).

Если бы величина V не была алгебраической функцией*), то мы не имели бы $\frac{\partial V}{\partial \xi} d\xi + \dots = dV$, а если бы величины $T, L, M, \dots$ содержали в себе переменную t , то их дифференциалы $dT, dL, dM, \dots$ содержали бы в себе и члены $\frac{\partial T}{\partial t} dt, \frac{\partial L}{\partial t} dt, \frac{\partial M}{\partial t} dt, \dots$; следовательно, те преобразования, которые привели уравнение к интегрируемому виду, уже не могли бы быть осуществлены, а потому и принцип живых сил уже не мог бы быть применен.

15. Хотя теорема об однородных функциях, о которой мы только что упомянули, была доказана в различных работах и, следовательно, ее можно считать известной, тем не менее изложенное ниже доказательство этой теоремы настолько просто, что я не считаю себя вправе ее опустить. Если F представляет собою однородную функцию различных переменных $x, y, \dots$ и имеет n -е измерение, то ясно, что если вместо $x, y, \dots$ подставить $ax, ay, \dots$, то эта функция необходимо примет вид $a^n F$, какова бы ни была величина a . Если положить $a = 1 + \alpha$ и рассматривать α как величину бесконечно малую, то бесконечно малое приращение F , вызванное бесконечно малыми приращениями $ax, ay, \dots$ величин $x, y, \dots$, будет равно $n\alpha F$. Но если $x, y, \dots$ изменять на величины $ax, ay, \dots$, то согласно общей формуле мы будем иметь для вариации F

$$\frac{\partial F}{\partial x} ax + \frac{\partial F}{\partial y} ay + \dots$$

Следовательно, если мы приравняем друг к другу приведенные два выражения для приращения F , то по разделении на α мы получим

$$nF = \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \dots$$

16. Интеграл, относящийся к сохранению живых сил, представляется очень полезным при разрешении задач механики, в особенности когда функция T содержит только дифференциал одной переменной, которая не входит в состав функции V ; в этом случае указанный интеграл служит для

*) Для того чтобы понять это место, следует вспомнить определение функции V . Было принято (п. 9), что $d\Pi = Pdq + Qdq + Rdr + \dots$ и затем дальше, что $V = \int m\Pi$. Для того чтобы V была, пользуясь выражением Лагранжа, алгебраической функцией, необходимо и достаточно, чтобы таковой была Π , т. е. чтобы $Pdq + Qdq + Rdr + \dots$ была полным дифференциалом; если этого нет, то функции Π не существует, равным образом не существует и V ; алгебраическая функция означает здесь просто функцию; этого выражения ни в коем случае не следует рассматривать как противоположность выражению неалгебраической функции. *Прим. Бертрана.*

определения этой переменной и для исключения ее из дифференциальных уравнений.

Что касается интегралов, относящихся к сохранению движения центра тяжести и к *принципу площадей*, которые, пользуясь общим методом, мы уже нашли в отделе III, то они сами собою получаются при разрешении каждой задачи при условии, что при выборе переменных мы стараемся отделить абсолютное движение системы от относительных движений тел друг по отношению к другу, как мы это сделали в упомянутом выше отделе.

Другие интегралы зависят от природы дифференциальных уравнений каждой задачи, и нет возможности дать общее правило для их нахождения. Есть, однако, один случай, имеющий весьма обширное применение, который всегда поддается полному решению в конечных выражениях; а именно — это тот случай, когда система совершает лишь очень малые колебания около своего положения равновесия. Ввиду важности этой задачи мы ей посвятим особый отдел.

17. Когда система, движение которой определяется, состоит из бесконечно большого числа частиц или элементов, совокупность которых образует конечную массу изменяемой формы, следует применить анализ, аналогичный тому, который мы изложили в § II отд. IV, части I; однако вместо символа d , помеченного нами (п. 11 и след.) для обозначения дифференциалов переменных по отношению к различным элементам системы, следует применить символ D , соответствующий знаку интегрирования $\int$, относящемуся ко всей системе, — с тем, чтобы иметь возможность сохранить другой символ δ для дифференциалов, относящихся ко времени, для которых мы его и предназначили в отд. II, части второй, п. 7.

Таким образом, если мы обозначим через m всю массу, а через Dm один из ее элементов, то в выражениях T и V п. 10 надо будет вместо m подставить Dm .

Если для каждого элемента тела существуют силы $F, G, \dots$, стремящиеся уменьшить величины $f, g, \dots$, функциями которых являются эти силы, следует к значению V прибавить выражения $\int F df, \int G dg, \dots$

Если имеются условные уравнения $L=0, M=0, \dots$, из которых каждое имеет силу для каждого элемента массы m , то в формулах п. 11 следует вместо $\lambda \delta L, \mu \delta M, \dots$ поставить $\sum \lambda \delta L, \sum \mu \delta M$.

Так как величины $f, g, \dots$, равно как $L, M, \dots$ могут содержать в себе дифференциалы переменных, обозначенные символом D , следует с помощью известной операции интегрирования по частям добиться исчезновения двойных символов $\delta D, \delta D^2, \dots$, так что под знаком $\sum$ останутся только простые вариации, обозначенные символом δ , а члены, стоящие вне знака $\sum$, будут относиться только к крайним значениям интегралов.

Наконец, следует еще принять во внимание силы и условные уравнения, относящиеся к определенным точкам массы m , и учесть их в общей формуле; но они дадут лишь такие члены, которые независимы от символа $\sum$.

Вариации, которые останутся под знаком $\sum$, если их коэффициенты положить равными нулю, дадут равное им количество неопределенных уравнений для движения каждого элемента системы, а вариации вне знака $\sum$ дадут определенные уравнения для известных точек системы.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ.

ОБЩИЙ ПРИВЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ. ОСНОВАННЫЙ НА ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ.

Общие уравнения, данные нами в предыдущем отделе, представляя собою уравнения второго порядка, требуют еще интегрирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа; поэтому приходится прибегать к приближениям, и наши формулы дают также наиболее подходящие средства для этой цели.

1. Всякое приближение предполагает точное решение какого-либо случая рассматриваемой задачи, при котором мы отбрасываем элементы или количества, принимаемые нами в качестве очень малых величин. Это решение образует первую степень приближения; затем его исправляют, учитывая постепенно отброшенные величины.

При задачах механики, которые можно разрешить только путем приближения, обычно первое решение находят, принимая во внимание только главные силы, действующие на тела; для того чтобы это решение распространить на другие силы, которые можно назвать *возмущающими*, проще всего сохранить форму первого решения, но рассматривать входящие в его состав произвольные постоянные как переменные величины; ибо если величины, которыми мы пренебрегли и которые мы теперь хотим учесть, очень малы, то новые переменные фактически будут почти постоянными и к ним можно будет применить обычные методы приближения. Таким образом вся трудность сводится к нахождению уравнений между этими переменными.

Известен общий метод варьирования произвольных постоянных интегралов дифференциальных уравнений с целью согласования этих интегралов с теми же уравнениями, но с прибавлением к ним определенных членов; однако та форма, которую мы в предыдущем отделе (п. 10) придали общим уравнениям динамики, имеет то преимущество, что она дает некоторое соотношение между вариациями произвольных постоянных, вводимых при интегрировании, которое особенно упрощает формулы этих вариаций в задачах, где они выражают действие возмущающих сил. Мы выведем сначала это соотношение; затем мы дадим наиболее простые уравнения для определения вариаций произвольных постоянных в интересующих нас проблемах.

§ I. Вывод общего соотношения между вариациями произвольных постоянных из уравнений, приведенных в предыдущем отделе.

2. Пусть имеется какая-либо система тел m , находящихся под действием ускоряющих сил $P, Q, R, \dots$, направленных к какому-либо неподвижному или подвижному центрам и пропорциональных какому-нибудь функциям их расстояний $p, q, r, \dots$ от этих центров.

Допустим, что, приняв во внимание условные уравнения системы, мы выразим координаты x, y, z , каждого из тел в виде функций других переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, которые совершенно независимы друг от друга и служат для определения положения системы в любое мгновение.

Для движения всей системы мы будем иметь уравнения п. 10 предыдущего отдела; легко видеть, что эти уравнения являются уравнениями второго порядка по отношению к переменным $\xi, \psi, \varphi, \dots$; таким образом полные значения этих переменных, которые будут найдены путем интегрирования и которые будут выражены в виде функций времени t , будут содержать в себе вдвое большее число произвольных постоянных, чем имеется переменных. Так как эти постоянные должны оставаться произвольными, то их можно произвольно варьировать; таким образом рассматриваемые уравнения можно будет дифференцировать по этим постоянным, которые согласно предположению содержатся в выражениях переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$.

3. Положим для большей простоты $d\xi = \xi' dt$, $d\psi = \psi' dt$, $d\varphi = \varphi' dt, \dots$; тогда величина T будет функцией $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и $\xi', \psi', \varphi', \dots$, и если силы направлены к неподвижным центрам или к телам самой системы, то величина V будет простой функцией $\xi, \psi, \varphi, \dots$. В этом случае, положив $Z = T - V$, мы будем иметь

$$\frac{\delta T}{\delta \xi} = \frac{1}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \xi'}, \quad \frac{\delta T}{\delta \psi} = \frac{1}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \psi'}, \quad \frac{\delta T}{\delta \varphi} = \frac{1}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \varphi'}, \dots;$$

символ δ здесь можно заменить символом ∂ , так как он служит только для выражения частных дифференциалов.

Таким образом дифференциальные уравнения движения системы (п. 10 предыдущего отдела), будучи помножены на dt , сведутся к следующему более простому виду:

$$\begin{aligned} d \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt &= 0, \\ d \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt &= 0, \\ d \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

4. Продифференцируем эти уравнения в смысле символа δ^*), который мы отнесем исключительно к вариациям произвольных постоянных, содержащихся в выражениях переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, функцией которых является Z ; так как символ d , находящийся в членах $d \frac{\partial Z}{\partial \xi'}, d \frac{\partial Z}{\partial \psi'}, \dots$ относится только к переменной t , выражающей время, можно согласно принципам вариационного исчисления двойной символ δd заменить символом $d\delta$; указанным путем мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} d\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt &= 0, \\ d\delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt &= 0, \\ d\delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

*) Здесь предполагается, что после интегрирования этих уравнений вместо переменных $\xi, \psi, \dots$ подставляют их общие выражения, полученные с помощью этого интегрирования. Тогда уравнения превращаются в тождества и их можно дифференцировать по различным буквам, входящим в их состав. *Прим. Бертрама.*

Точно так же, если для выражения других вариаций тех же произвольных постоянных мы применим символ Δ , то мы получим

$$d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt = 0,$$

$$d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt = 0,$$

$$d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

5. Если теперь первую группу уравнений умножить соответственно на $\Delta \xi$, $\Delta \psi$, $\Delta \varphi$, ... и из их суммы вычесть сумму второй группы уравнений, умноженных соответственно на $\delta \xi$, $\delta \psi$, $\delta \varphi$, ..., то мы получим

$$\begin{aligned} & \Delta \xi d\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta \psi d\delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta \varphi d\delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - \\ & - \delta \xi d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \delta \psi d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \delta \varphi d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - \\ & - \left(\Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \Delta \psi \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} + \Delta \varphi \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \dots \right) dt - \\ & - \left(\delta \xi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \delta \psi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \delta \varphi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Но $\Delta \xi d\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} = d \left(\Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} \right) - d\Delta \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'}$, при этом $d\Delta \xi = \Delta \xi' dt$, ибо $\xi' = \xi' dt$; следовательно,

$$\Delta \xi d\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} = d \left(\Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} \right) - \Delta \xi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} dt.$$

Подобным же образом мы будем иметь

$$\delta \xi d\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} = d \left(\delta \xi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} \right) - \delta \xi' \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} dt,$$

и такие же формулы для других величин.

С помощью указанных преобразований предыдущее уравнение будет приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned} & d \left\{ \begin{aligned} & \Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta \psi \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta \varphi \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - \\ & - \delta \xi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \delta \psi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \delta \varphi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \dots \end{aligned} \right\} - \\ & - \left\{ \begin{aligned} & \Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \Delta \psi \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} + \Delta \varphi \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \dots + \\ & + \Delta \xi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta \psi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta \varphi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots \end{aligned} \right\} dt + \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \delta \xi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \delta \psi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} + \delta \varphi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \dots + \\ & + \delta \xi' \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \delta \psi' \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \delta \varphi' \Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots \end{aligned} \right\} dt = 0, \end{aligned}$$

6. Если развернуть выражения $\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi}$, $\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'}$, ..., равно как аналогичные им выражения $\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi}$, $\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'}$, ..., рассматривая при этом Z как функцию ξ ,

$\psi, \varphi, \dots$ и $\xi', \psi', \varphi', \dots$, то легко видеть, что члены предыдущего уравнения, будучи умножены на dt , взаимно друг друга уничтожат. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} \delta \xi + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \psi} \delta \psi + \dots + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \xi'} \delta \xi' + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \psi'} \delta \psi' + \dots, \\ \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \psi} \delta \xi + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} \delta \psi + \dots + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi \partial \xi'} \delta \xi' + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi \partial \psi'} \delta \psi' + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \xi'} \delta \xi + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi \partial \xi'} \delta \psi + \dots + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi'^2} \delta \xi' + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi' \partial \psi'} \delta \psi' + \dots, \\ \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \psi'} \delta \xi + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi \partial \psi'} \delta \psi + \dots + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi' \partial \psi'} \delta \xi' + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi'^2} \delta \psi' + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Если члены расположить в порядке по отношению к частным дифференциалам Z , то мы получим следующее разложение

$$\begin{aligned} &\Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \Delta \psi \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} + \dots + \Delta \xi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta \psi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \dots = \\ &= + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} \Delta \xi \delta \xi + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \psi} (\Delta \xi \delta \psi + \Delta \psi \delta \xi) + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} \Delta \psi \delta \psi + \dots + \\ &+ \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \xi'} (\Delta \xi \delta \xi' + \Delta \xi' \delta \xi) + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \psi'} (\Delta \xi \delta \psi' + \Delta \psi' \delta \xi) + \dots + \\ &+ \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi \partial \xi'} (\Delta \psi \delta \xi' + \Delta \xi' \delta \psi) + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi \partial \psi'} (\Delta \psi \delta \psi' + \Delta \psi' \delta \psi) + \dots + \\ &+ \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi'^2} \Delta \xi' \delta \xi' + \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi' \partial \psi'} (\Delta \xi' \delta \psi' + \Delta \psi' \delta \xi') + \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi'^2} \Delta \psi' \delta \psi' + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Если символы δ и Δ переместить один на место другого, то мы получим разложения для аналогичного выражения

$$\delta \xi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \delta \psi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} + \dots + \delta \xi' \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \delta \psi' \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \dots$$

Мы видим, однако, что эта замена не вызывает никакого изменения в предыдущем разложении; отсюда следует, что приведенные два выражения тождественны; а так как они встречаются в указанном выше уравнении с противоположными знаками, то они должны взаимно уничтожиться.

7. Таким образом мы получаем просто уравнение

$$d \left\{ \begin{aligned} &\Delta \xi \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta \psi \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta \varphi \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - \\ &- \delta \xi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \delta \psi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \delta \varphi \Delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \dots \end{aligned} \right\} = 0,$$

в котором вместо Z можно поставить T , так как $Z = T - V$, а V не должно содержать в себе переменных $\xi', \psi', \varphi', \dots$ (н. 3).

Из приведенного уравнения видно, что величина

$$\Delta \xi \delta \frac{\partial T}{\partial \xi'} + \Delta \psi \delta \frac{\partial T}{\partial \psi'} + \Delta \varphi \delta \frac{\partial T}{\partial \varphi'} + \dots - \delta \xi \Delta \frac{\partial T}{\partial \xi'} - \delta \psi \Delta \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \delta \varphi \Delta \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \dots$$

необходимо всегда является постоянной по отношению ко времени t , к которому относятся дифференциалы, обозначенные с помощью символа d . Таким образом, если в эту величину подставить значения переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, выраженные в виде функций t и произвольных постоянных, выведенные из уравнений какой-либо задачи механики, то переменная t сама собою исчезнет, каковы бы ни были те вариации, которым подвергнуты эти постоянные в величинах, снабженных символами δ и Δ . Здесь мы имеем новое весьма замечательное свойство функции T , выражающей живую силу всей системы, которое может дать общий критерий для суждения о точности решения, найденного с помощью какого угодно метода. Но, как мы это покажем ниже, важнейшее применение эта формула находит для вариации произвольных постоянных в задачах механики.

§ II. Вывод простейших дифференциальных уравнений для определения вариаций произвольных постоянных, связанных своим происхождением возмущающим силам.

8. Теперь предположим, что после разрешения задачи, содержащейся в дифференциальных уравнениях п. 3, путем полного интегрирования этих уравнений, возникает вопрос о разрешении той же задачи, но с прибавлением новых сил, приложенных к той же системе, причем эти силы направлены к неподвижным центрам или же к центрам, движущимся каким угодно образом, и пропорциональны функциям расстояний от этих центров. Эти новые силы, которые можно рассматривать как силы, возмущающие движение системы, и которые имеют природу, подобную силам $P, Q, R, \dots$, от которых зависит функция V , прибавят к этой функции аналогичную функцию, которую мы обозначим через Ω . Таким образом надо будет подставить только $V + \Omega$ вместо V в уравнениях п. 10 (предыдущ. отдела), и, следовательно, $Z + \Omega$ вместо Z в соответствующих членах уравнений п. 3, содержащих частные дифференциалы Z по $\xi, \psi, \varphi, \dots$, — чтобы получить уравнения новой задачи, которые, таким образом, будут иметь следующий вид:

$$\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} dt,$$

$$\delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} dt,$$

$$\delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} dt,$$

$$\dots \dots \dots$$

9. Если допустить, что нам известны выражения переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$ через t и через произвольные постоянные в случае, когда правые части приведенных уравнений равны нулю, можно, сохраняя неизменными эти выражения, но заставляя варьировать их произвольные постоянные, добиться того, что они будут полностью удовлетворять этим уравнениям; приведенный нами ниже анализ и имеет своей целью дать простейшие формулы для определения этих постоянных, ставших переменными величинами.

Прежде всего отметим, что число этих постоянных вдвое больше числа переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, как мы это уже указали выше (п. 2), и, следовательно, вдвое больше числа уравнений, которые должны быть удовлетворены; поэтому мы можем их подчинить еще некоторому количеству произвольных условий, равному числу этих переменных.

Наиболее простыми и в то же время наиболее подходящими для этого являются условия, заключающиеся в том, что значения $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$; ... сохраняют тот же вид, как если бы постоянные величины совершенно не варьировали. При этих условиях не только пространства, проходимые телами, но и их скорости будут выражаться аналогичными формулами, как в том случае, когда произвольные постоянные остаются неизменными, что имеет место при отсутствии каких-либо возмущающих сил, так и в случае когда, они варьируют вследствие действия этих сил.

Сверх того указанные условия обладают еще тем преимуществом, что дифференциальные уравнения между новыми переменными они сводит к уравнениям первого порядка, в результате чего мы получаем вдвое большее число уравнений, но зато лишь первого порядка.

10. Если, как в п. 4, символ δ применить для обозначения дифференциалов, получающихся исключительно вследствие варьирования произвольных постоянных, а символ d относить только к дифференциалам, взятым по времени t , то условия, о которых мы только что говорили, выразятся с помощью уравнений

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\varphi = 0.$$

Следует отметить, что в этих уравнениях все произвольные постоянные должны одновременно рассматриваться как переменные, так что в дальнейшем символ δ будет указывать на совместную *) вариацию всех произвольных постоянных, — между тем как в формулах п. 4 и следующих тот же символ, равно как и другой символ Δ , означал вообще дифференциалы, относящиеся к вариации всех постоянных, или же только некоторых из них, произвольно взятых.

Итак, если варьировать все величины, то дифференциалы ξ , ψ , φ , ... будут просто $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, ..., или $\xi'dt$, $\psi'dt$, $\varphi'dt$, ..., как если бы варьировало только время t .

Таким образом функция Z в уравнениях п. 8 будет одной и той же независимо от того, будем ли мы произвольные постоянные считать переменными или нет; но если их рассматривать как переменные, то в дифференциалах $d \frac{\partial Z}{\partial \xi}$, $d \frac{\partial Z}{\partial \psi}$, $d \frac{\partial Z}{\partial \varphi}$, ... следует прибавить члены $\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi}$, $\delta \frac{\partial Z}{\partial \psi}$, $\delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi}$, ..., появляющиеся вследствие варьирования этих постоянных.

С другой стороны, согласно допущению функции t и постоянных, выражающие значения ξ , ψ , φ , ... тождественно удовлетворяют тем же самым уравнениям, но только в том случае, когда эти постоянные не варьируют, отсутствуют вторые члены, каковы бы в остальном ни были их значения; отсюда ясно, что члены

$$d \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt, \quad d \frac{\partial Z}{\partial \psi} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt, \quad d \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt, \dots$$

должны взаимно уничтожиться и, следовательно, их можно наперед опустить.

Таким образом для вариации произвольных постоянных мы будем иметь просто следующие уравнения:

$$\delta \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} dt, \quad \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} dt, \quad \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} dt, \dots;$$

*) То-есть вариацию функций, которые замещают эти постоянные и которые в каждой задаче являются вполне определенными, так что их значение является функцией времени, вариация которого не имеет совершенно ничего произвольного.
Прим. Бертрама.

последние следует скомбинировать с приведенными только что уравнениями $\delta\xi=0$, $\delta\psi=0$, $\delta\varphi=0$,...

Так как число этих уравнений вдвое превышает число переменных ξ , ψ , φ ,... и, следовательно, равно числу произвольных постоянных (п. 2), то их окажется достаточно для определения всех этих постоянных, ставших переменными.

11. Если найденные нами только что уравнения помножить соответственно на $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$,... и затем сложить, то мы получим

$$\Delta\xi\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \Delta\psi\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \Delta\varphi\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \dots = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\Delta\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\Delta\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \dots\right)dt.$$

Выражения $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$,... означают здесь, как и в п. 4, дифференциалы функций ξ , ψ , φ ,... в предположении, что только произвольные постоянные варьируют каким угодно образом, причем они могут варьировать все одновременно, или же могут изменяться только некоторые из них.

Если Ω рассматривать как функцию ξ , ψ , φ ,..., то, продифференцировав согласно символу Δ , мы получим

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\Delta\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\Delta\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \dots$$

Следовательно, мы будем иметь

$$\Delta\Omega dt = \Delta\xi\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \Delta\psi\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \Delta\varphi\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \dots$$

Вычтем из правой части этого уравнения величину

$$\delta\xi\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \delta\psi\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \delta\varphi\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \dots,$$

которая в силу условных уравнений $\delta\xi=0$, $\delta\psi=0$, $\delta\varphi=0$,... равна нулю, тогда мы получим следующее общее уравнение:

$$\begin{aligned}\Delta\Omega dt &= \Delta\xi\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \Delta\psi\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \Delta\varphi\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \dots - \\ &- \delta\xi\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} - \delta\psi\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} - \delta\varphi\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} - \dots = \\ &= \Delta\xi\delta\frac{\partial T}{\partial\xi'} + \Delta\psi\delta\frac{\partial T}{\partial\psi'} + \Delta\varphi\delta\frac{\partial T}{\partial\varphi'} + \dots - \\ &- \delta\xi\Delta\frac{\partial T}{\partial\xi'} - \delta\psi\Delta\frac{\partial T}{\partial\psi'} - \delta\varphi\Delta\frac{\partial T}{\partial\varphi'} - \dots,\end{aligned}$$

поставив T вместо Z , как мы это сделали в пункте 7.

Мы видим, что правая часть приведенного выше уравнения представляет собою ту самую функцию, относительно которой мы показывали, что она должна быть независимой от времени t (п. 7); отсюда следует, что если в ней подставить значения ξ , ψ , φ ,... в функциях времени и произвольных постоянных, можно t положить равным нулю или какому угодно числу.

12. Следовательно, если предположить, а это всегда допустимо, что эти функции, а равно и функции, выражающие значения $\frac{\partial T}{\partial\xi'}$, $\frac{\partial T}{\partial\psi'}$, $\frac{\partial T}{\partial\varphi'}$,...

разложены в ряды по восходящим степеням λ , так что

$$\xi = \alpha + \alpha' t + \alpha'' t^2 + \alpha''' t^3 + \dots,$$

$$\psi = \beta + \beta' t + \beta'' t^2 + \beta''' t^3 + \dots,$$

$$\varphi = \gamma + \gamma' t + \gamma'' t^2 + \gamma''' t^3 + \dots,$$

$$\frac{\partial F}{\partial E} = \lambda + \lambda' t + \lambda'' t^2 + \lambda''' t^3 + \dots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = \mu + \mu' t + \mu'' t^2 + \mu''' t^3 + \dots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega'} = v + v' t + v'' t^2 + v''' t^3 + \dots,$$

и если эти значения подставить в правую часть уравнения предыдущего пункта, то мы можем положить $t=0$, в результате чего они сведутся только к своим первым членам $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$

Таким образом указанное уравнение примет следующий вид:

$$\Delta Q \, dt = \Delta \alpha \, \delta \lambda + \Delta \beta \, \delta \mu + \Delta \gamma \, \delta \nu + \dots - \Delta \lambda \, \delta \alpha - \Delta \mu \, \delta \beta - \Delta \nu \, \delta \gamma - \dots$$

13. Величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ могут быть только функциями произвольных постоянных, вносимых двойным интегрированием в конечные выражения переменных $\xi, \phi, \varphi, \dots$, и их можно также принять в качестве этих самых постоянных величин.

Действительно, произвольными постоянными, придающими решению какой-либо задачи механики всю ту общность, какую она способна иметь, являются первоначальные значения переменных, а равно первоначальные значения $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \dots$, когда $t = 0$; таким образом

в принятых нами для $\xi, \psi, \varphi, \dots$ выражениях эти значения равны $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$. А так как T является заданной функцией $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и $\xi' = \frac{d\xi}{dt}, \psi' = \frac{d\psi}{dt}, \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \dots$, то ясно, что если положить $t=0$

в функциях $\frac{\partial T}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial T}{\partial \psi'}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$, ..., что их сведет к λ , μ , ν , ..., то эти постоянные λ , μ , ν , ... будут такими же функциями постоянных α , β , γ , ..., α' , β' , γ' , ..., какими являются функции $\frac{\partial T}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial T}{\partial \psi'}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$, ... по отношению к переменным ξ , ψ , φ , ..., ξ' , ψ' , φ' , ... Следовательно, вместо того чтобы в качестве произвольных постоянных брать непосредственно α , β , γ , ..., можно взять и зависящие от них λ , μ , ν , ... Таким образом мы будем иметь α , β , γ , ..., λ , μ , ν , ... в качестве произвольных постоянных в выражениях для ξ , ψ , φ , ...; причем, как мы видим, число этих постоянных ровно вдвое больше числа переменных ξ , ψ , φ , ...

В соответствии с изложенным дифференциал $\Delta\Omega$, в котором символ Δ должен быть отнесен только к произвольным постоянным, входящим

в состав Ω в связи со значениями $\xi, \psi, \varphi, \dots$, содержащими эти постоянные, — получит следующий вид:

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\Delta\beta + \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\Delta\gamma + \dots + \\ + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\Delta\nu + \dots$$

Если это выражение подставить в первый член уравнения предыдущего пункта и расположить члены в порядке в соответствии с дифференциалами, обозначенным символом Δ , то мы будем иметь

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt - \delta\lambda\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt - \delta\mu\right)\Delta\beta + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt - \delta\nu\right)\Delta\gamma + \dots + \\ + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \delta\alpha\right)\Delta\lambda + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt + \delta\beta\right)\Delta\mu + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt + \delta\gamma\right)\Delta\nu + \dots = 0.$$

Так как дифференциалам $\Delta\alpha, \Delta\beta, \dots$, обозначенным символом Δ , можно дать любое значение, то необходимо, чтобы уравнение оставалось в силе независимо от этих дифференциалов, что дает нам столько частных уравнений, сколько имеется постоянных, а именно

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt = \delta\lambda, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt = \delta\mu, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt = \delta\nu, \dots, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt = -\delta\alpha, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt = -\delta\beta, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt = -\delta\gamma, \dots$$

14. Дифференциалы, обозначенные символом δ , являются собственно дифференциалами произвольных постоянных, ставших переменными (п. 10); а так как эти дифференциалы могут быть теперь отнесены и ко времени t , то представляется допустимым и даже удобным заменить символ δ символом d ; тогда для определения новых переменных $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ мы будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}, \dots, \\ \frac{d\lambda}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \quad \frac{d\mu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \quad \frac{d\nu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}, \dots;$$

как видим, эти уравнения имеют очень простой вид и таким образом дают наиболее простое решение задачи о варьировании произвольных постоянных.

15. Так как функция Ω содержит в себе величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$, то и при частном дифференцировании этой функции указанные величины следует рассматривать как переменные; но так как согласно допущению значение Ω , зависящее от возмущающих сил, очень мало, то ясно, что и вариации этой величины будут очень малы, а потому в первом приближении их можно рассматривать в частных дифференциалах Ω в качестве постоянных и принимать во внимание их изменчивость лишь при дальнейших приближениях.

Обозначим через $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots$ постоянные части $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ и через $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \lambda', \mu', \nu', \dots$ их переменные части, которые, будучи одного порядка с величиной Ω , необходимо должны быть очень малыми, и пусть O — значение, принимаемое величиной Ω , когда $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ заменяются величинами $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots$.

Таким образом мы будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha &= a + \alpha', \quad \beta = b + \beta', \quad \gamma = c + \gamma', \dots, \\ \lambda &= l + \lambda', \quad \mu = m + \mu', \quad \nu = n + \nu', \dots, \end{aligned}$$

а путем разложения мы получим

$$\begin{aligned} \Omega &= O + \frac{\partial O}{\partial a} \alpha' + \frac{\partial O}{\partial b} \beta' + \frac{\partial O}{\partial c} \gamma' + \dots + \\ &+ \frac{\partial O}{\partial l} \lambda' + \frac{\partial O}{\partial m} \mu' + \frac{\partial O}{\partial n} \nu' + \dots + \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения предыдущего пункта дадут

$$\begin{aligned} d\alpha' &= - \frac{\partial \Omega}{\partial l} dt, \quad d\beta' = - \frac{\partial \Omega}{\partial m} dt, \quad d\gamma' = - \frac{\partial \Omega}{\partial n} dt, \dots, \\ d\lambda' &= + \frac{\partial \Omega}{\partial a} dt, \quad d\mu' = + \frac{\partial \Omega}{\partial b} dt, \quad d\nu' = + \frac{\partial \Omega}{\partial c} dt, \dots, \end{aligned}$$

так как очевидно, что частные дифференциалы по $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$ могут быть отнесены к аналогичным величинам $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots$.

Для первого приближения мы будем иметь $\Omega = O$, где O представляет собою функцию только t ; следовательно, путем интегрирования мы получим

$$\begin{aligned} \alpha' &= - \int \frac{\partial O}{\partial l} dt, \quad \beta' = - \int \frac{\partial O}{\partial m} dt, \quad \gamma' = - \int \frac{\partial O}{\partial n} dt, \dots, \\ \lambda' &= + \int \frac{\partial O}{\partial a} dt, \quad \mu' = + \int \frac{\partial O}{\partial b} dt, \quad \nu' = + \int \frac{\partial O}{\partial c} dt, \dots \end{aligned}$$

Подставив эти значения в выражения для Ω , мы получим для второго приближения

$$\begin{aligned} \Omega &= O + \frac{\partial O}{\partial l} \int \frac{\partial O}{\partial a} dt - \frac{\partial O}{\partial a} \int \frac{\partial O}{\partial l} dt + \frac{\partial O}{\partial m} \int \frac{\partial O}{\partial b} dt - \frac{\partial O}{\partial b} \int \frac{\partial O}{\partial m} dt + \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

и так далее.

16. Здесь следует сделать одно важное замечание. Если функция O содержит в себе время только под знаком синуса или косинуса, то ясно, что в первом приближении значение Ω будет содержать в себе только те же синус и косинус. Однако может возникнуть сомнение, не будет ли эта функция в дальнейших своих приближениях содержать в себе членов, в которых время t находится вне знаков синуса и косинуса и которые, непрерывно нарастая, увеличивают значение Ω до бесконечности и, таким образом, делают приближение неверным.

Для того чтобы устранить это сомнение, отметим, что подобные члены могут произойти лишь от постоянной части Ω , т. е. от части, которая совершенно не содержит в себе синуса и косинуса, заключающего в себе t .

Так, пусть A будет этой частью, которая является функцией произвольных постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$. Тогда и O будет содержать в себе подобную функцию $a, b, c, \dots, l, m, n, \dots$, которую мы тоже обозначим через A .

Подставив Δ вместо O в выражение Ω , приведенное в предыдущем пункте, мы получим во втором приближении ту часть Ω , которая обязана своим происхождением постоянной Δ ; эта часть составит

$$\Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial t} \frac{\partial \Delta}{\partial a} t - \frac{\partial \Delta}{\partial a} \frac{\partial \Delta}{\partial t} t + \frac{\partial \Delta}{\partial m} \frac{\partial \Delta}{\partial b} t - \frac{\partial \Delta}{\partial b} \frac{\partial \Delta}{\partial m} t + \\ + \dots$$

Как видим, здесь члены, содержащие в себе t , взаимно уничтожаются.

Таким образом мы уверены, что второе приближение не содержит в Ω какого-либо члена, который возрастал бы со временем t ; следовало бы однако еще посмотреть, не могут ли образоваться подобные члены при дальнейших приближениях.

Впрочем, тот же самый постоянный член Δ мог бы еще дать в Ω члены, умноженные на t , которые скомбинированы с непостоянными членами той же функции Ω ; но тогда это t , стоящее вне синуса или косинуса было бы одновременно умножено на синус или косинус углов, пропорциональных времени. То же самое имело бы место, если бы коэффициент t под знаком синуса или косинуса был функцией произвольных постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, так как в этом случае частные дифференцирования Ω по этим постоянным вывели бы t из-под знака синуса или косинуса. Можно, однако, отметить, что вообще, когда последовательные приближения приводят к появлению членов указанного вида, в которых синус или косинус оказывается умноженным на угол, стоящий под знаком синуса или косинуса, то этого рода члены почти всегда являются результатом разложения других синусов или косинусов и их можно избежать, интегрируя дифференциальные уравнения непосредственно между произвольными постоянными величинами, ставшими ныне переменными.

17. Хотя примененные нами произвольные постоянные являются такими величинами, которые представляются нам более естественными и которые приводят к более простым результатам, тем не менее зачастую бывает так, что различные интеграции вводят вместо них другие постоянные, которые, однако, могут быть лишь функциями первых.

Обозначим вообще через $a, b, c, \dots$, произвольные постоянные, которые должны войти в выражения переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, причем число этих постоянных должно быть вдвое больше числа переменных. Для того чтобы получить соотношения между этими новыми постоянными и первоначальными, достаточно положить $t=0$ в значениях функций $\xi, \psi, \varphi, \dots$, $\frac{\partial T}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial \psi}, \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \dots$ и полученные при этом результаты приравнять величинам $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$. Указанным путем мы получим такое количество уравнений между различными постоянными, что с их помощью, можно будет определять значения $a, b, c, \dots$ в функции $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$.

Итак, мы будем рассматривать эти функции как известные; дифференцирование нам тотчас же даст

$$da = + \frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial a}{\partial \gamma} d\gamma + \dots + \frac{\partial a}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial a}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial a}{\partial \nu} d\nu + \dots$$

Следовательно, подставив найденные только что (п. 14) значения $da, d\beta, \dots$ и разделив на dt , мы получим

$$\frac{da}{dt} = + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \mu} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} + \frac{\partial a}{\partial \nu} \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} + \dots - \\ - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} - \frac{\partial a}{\partial \gamma} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \dots$$

Аналогичные выражения будут получены нами для значений $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, ..., для которых достаточно в предыдущем уравнении вместо a поставить b , c , ...

18. Приведенные формулы содержат, однако, в себе еще частные дифференциалы Ω по постоянным α , β , γ , ..., и их следует заменить частными дифференциалами по a , b , c , ..., что легко выполняется с помощью известных операций.

Действительно, так как Ω рассматривается теперь как функция a , b , c , ... и так как эти последние величины сами по себе являются функциями α , β , γ , ..., λ , μ , ν , ..., то согласно алгоритму частных дифференциалов мы тотчас же получаем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \dots,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

и эти значения следует только подставить в выражения для $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, ... предыдущего пункта.

Если произвести указанные подстановки и расположить члены в порядке по отношению к частным дифференциалам Ω , то мы прежде всего увидим, что коэффициент $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$ в значении $\frac{da}{dt}$ равен нулю, что коэффициент $\frac{\partial \Omega}{\partial b}$

в значении $\frac{db}{dt}$ равен нулю и т. д.

Чтобы выразить $\frac{da}{dt}$ мы применим формулу $\frac{da}{dt} = (a, b) \frac{\partial \Omega}{\partial b} + (a, c) \frac{\partial \Omega}{\partial c} + \dots$; тогда мы получим

$$(a, b) = + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \mu} \frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial a}{\partial \nu} \frac{\partial b}{\partial \gamma} + \dots - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial b}{\partial \lambda} - \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial b}{\partial \mu} - \frac{\partial a}{\partial \gamma} \frac{\partial b}{\partial \nu} - \dots,$$

$$(a, c) = + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \mu} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{\partial a}{\partial \nu} \frac{\partial c}{\partial \gamma} + \dots - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial c}{\partial \lambda} - \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial c}{\partial \mu} - \frac{\partial a}{\partial \gamma} \frac{\partial c}{\partial \nu} - \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Для того чтобы получить значение $\frac{db}{dt}$, следует только в приведенных выше формулах поставить b на место a и a на место b , приняв при этом во внимание, что $(b, a) = -(a, b)$; таким образом мы получим

$$\frac{db}{dt} = -(a, b) \frac{\partial \Omega}{\partial a} + (b, c) \frac{\partial \Omega}{\partial c} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(b, c) = + \frac{\partial b}{\partial \lambda} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{\partial b}{\partial \mu} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{\partial b}{\partial \nu} \frac{\partial c}{\partial \gamma} + \dots -$$

$$- \frac{\partial b}{\partial \alpha} \frac{\partial c}{\partial \lambda} - \frac{\partial b}{\partial \beta} \frac{\partial c}{\partial \mu} - \frac{\partial b}{\partial \gamma} \frac{\partial c}{\partial \nu} - \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Вообще, если через k обозначить какую-либо из произвольных постоянных $a, b, c, \dots$ и принять во внимание, что значение символов, выраженных двумя скобками, равно нулю, когда обе буквы, стоящие в скобках, тождественны, и что оно изменяет свой знак, когда порядок букв изменяется, то мы получим следующие общие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= (k, a) \frac{\partial \Omega}{\partial a} + (k, b) \frac{\partial \Omega}{\partial b} + (k, c) \frac{\partial \Omega}{\partial c} + \dots, \\ (k, a) &= + \frac{\partial k}{\partial \lambda} \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial k}{\partial \mu} \frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial k}{\partial \nu} \frac{\partial a}{\partial \gamma} + \dots - \\ &\quad - \frac{\partial k}{\partial \alpha} \frac{\partial a}{\partial \lambda} - \frac{\partial k}{\partial \beta} \frac{\partial a}{\partial \mu} - \frac{\partial k}{\partial \gamma} \frac{\partial a}{\partial \nu} - \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

19. Приведенные выше формулы применяются главным образом в теории планет для подсчета действия их возмущений путем сведения этого действия к вариации произвольных постоянных, являющихся элементами первоначального движения. Они особенно полезны для определения тех вариаций, которые астрономы называют вековыми, так как они имеют очень длинные периоды и не зависят от тех изменений, которые происходят в первоначальных переменных величинах.

Уравнения п. 18 не содержат в себе никаких явных функций времени, кроме частных дифференциалов функции Ω ; поэтому, когда определяют ту часть A функции Ω , которая не зависит от времени t и содержит только произвольные постоянные $a, b, c, \dots$, путем разложения в ряды или каким-либо иным способом, то достаточно в этих уравнениях поставить A вместо Ω и тогда мы прямо получим уравнения между величинами $a, b, c, \dots$, которые стали переменными, и временем t ; эти уравнения послужат для определения их вековых вариаций, так как они совершенно свободны от всяких синусов и косинусов.

§ III. Доказательство важного свойства величины, выражающей живую силу в системе, находящейся под действием возмущающих сил.

20. Произвольные постоянные, вариации которых мы только что дали, зависят от природы каждой задачи и могут быть определены только в особых случаях. Существует, однако, одна постоянная, которая бывает представлена вообще во всех задачах, где V является только функцией $\xi, \psi, \varphi, \dots$; это — та постоянная, которую интегрирование должно прибавить к t ; в самом деле, так как дифференциальные уравнения в этом случае содержат только элемент dt , то ясно, что в конечных выражениях постоянных функций t всегда можно вместо t поставить t плюс некоторая произвольная постоянная.

Обозначим эту постоянную через K и отнесем к ней дифференциалы, обозначенные в общей формуле п. 11 символом Δ ; тогда мы будем иметь

$$\Delta \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial K} \Delta K,$$

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial K} \Delta K,$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial K} \Delta K,$$

$$\dots \dots \dots$$

Но так как $\xi, \psi, \varphi, \dots$ являются функциями $t + K$, то ясно, что мы будем иметь

$$\frac{\partial \xi}{\partial K} = \frac{d\xi}{dt} = \xi',$$

а также

$$\frac{\partial \psi}{\partial K} = \frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial K} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \dots$$

Следовательно,

$$\Delta \xi = \xi' \Delta K, \quad \Delta \psi = \psi' \Delta K, \quad \Delta \varphi = \varphi' \Delta K, \dots$$

По тем же основаниям мы будем иметь

$$\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} = \frac{d}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \xi'} \Delta K, \quad \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} = \frac{d}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \psi'} \Delta K, \dots$$

Но дифференциальные уравнения пункта 3 дают

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \xi'} = \frac{\partial Z}{\partial \xi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial Z}{\partial \psi'} = \frac{\partial Z}{\partial \psi}, \dots,$$

следовательно,

$$\Delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} = \frac{\partial Z}{\partial \xi} \Delta K, \quad \Delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} = \frac{\partial Z}{\partial \psi} \Delta K, \dots$$

Таким образом благодаря указанным подстановкам и после деления на ΔK общая формула пункта 11 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial K} dt = & \xi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \psi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \varphi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - \\ & - \frac{\partial Z}{\partial \xi} \delta \xi - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \delta \psi - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \delta \varphi - \dots \end{aligned}$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} & \xi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \psi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \varphi' \delta \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots = \\ = & \delta \left(\xi' \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \psi' \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \varphi' \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots \right) - \frac{\partial Z}{\partial \xi} \delta \xi' - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \delta \psi' - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \delta \varphi' - \dots, \end{aligned}$$

а так как Z по предположению должна быть функцией $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и $\xi', \psi', \varphi', \dots$, то мы будем иметь

$$\delta Z = \frac{\partial Z}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial Z}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \delta \varphi + \dots + \frac{\partial Z}{\partial \xi'} \delta \xi' + \frac{\partial Z}{\partial \psi'} \delta \psi' + \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} \delta \varphi' + \dots$$

Таким образом предыдущее уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K} dt = \delta \left(\xi' \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \psi' \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \varphi' \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - Z \right);$$

в этом уравнении второй член должен быть функцией произвольных постоянных и должен быть независим от t .

21. Если вместо Z мы поставим $T - V$ и вместо $\xi', \psi', \varphi', \dots \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \dots$ (п. 3), то легко видеть, что величина

$$\xi' \frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \psi' \frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \varphi' \frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \dots - Z$$

представляет собою совершенно то же, что и следующая величина:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial T}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial \varphi} d\varphi + \dots = T + V,$$

которая, как мы знаем, всегда равна постоянной величине и которая сводится к $T + V$ (отд. IV, п. 14), откуда вытекает уравнение $T + V = H$, выражающее принцип сохранения живой силы системы.

Следовательно, если принять H в качестве одной из произвольных постоянных, то для ее вариации, вызванной возмущающими силами, содержащимися в функции Ω , мы получим следующую весьма простую формулу:

$$dH = \frac{\partial \Omega}{\partial K} dt.$$

22. К этой формуле можно прийти и другим, более коротким, путем. В самом деле, если вернуться к уравнениям п. 8, сложить их, предварительно помножив соответственно на $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, ..., и проинтегрировать, применив при этом те же самые преобразования, которыми мы воспользовались в п. 14, предыдущего отдела, то мы прямо придем к уравнению

$$T + V = H + \int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} d\varphi + \dots \right).$$

В этом уравнении величина, стоящая под знаком интеграла, вообще говоря, не поддается интегрированию, так как функция Ω вследствие подвижности, которую можно предположить у центров возмущающих сил, будет помимо переменных ξ , ψ , φ , ... содержать в себе еще и другие переменные, не зависящие от первых.

В том случае когда никаких возмущающих сил не существует, мы имеем просто $T + V = H$. Ясно, что эту форму можно сохранить у интеграла, который мы только что нашли, если постоянную H превратить в переменную и положить

$$dH = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} d\varphi + \dots;$$

но очевидно величина

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} d\varphi + \dots$$

есть не что иное, как дифференциал Ω , если варьировать только величины ξ , ψ , φ , ..., которые зависят от первоначальных дифференциальных уравнений и которые согласно допущению известны в функции $t + K$, где K как и в п. 20 представляет собою постоянную величину, которая всегда может быть прибавлена к переменной t . А так как переменные ξ , ψ , φ , ... варьируют только со временем t , то легко видеть, что рассматриваемая величина представляет собою то же самое, что и $\frac{\partial \Omega}{\partial K} dt$; следовательно, как и выше, мы получаем уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial K}.$$

23. Это уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t},$$

при условии, что в частном дифференциале Ω мы будем варьировать величину t только постольку, поскольку она содержится в выраженных перемен-

ных $\xi, \psi, \varphi, \dots$. Из этой формулы следует, что если функция Ω содержит время t только под знаком синусов и косинусов, как это имеет место в теории планет, то выражение $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ будет содержать в себе только периодические члены, так как каждый постоянный член Ω при дифференцировании по t исчезает. Таким образом в первом приближении, когда произвольные постоянные, входящие в функцию Ω , мы рассматриваем как абсолютно постоянные, интеграл величины $\frac{\partial \Omega}{\partial t} dt$, т. е. значение H , не будет содержать в себе членов вида Nt , которые возрастали бы со временем t . Выше (п. 16) мы видели, что второе приближение не может создать в Ω члена, который не был бы периодическим; таким образом по отношению к величине H этот вывод будет иметь силу еще и при втором приближении.

24. Величина T выражает живую силу системы и равна $H - V$. Когда система не возмущается какими-либо возмущающими силами, H является постоянной величиной и живая сила зависит только от ускоряющих сил, содержащихся в выражении V , как мы это видели в п. 34 отд. III. Эта величина становится переменной, когда имеются возмущающие силы; следовательно, под действием этих сил живая сила тоже изменяется; однако из того, что мы только что доказали, ясно, что если выражение для возмущающих сил является периодическим, то эти изменения могут быть только периодическими по крайней мере в первых двух приближениях. Этот вывод имеет большое значение для нечисления возмущений.

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ.

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛЮБОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ.

Дифференциальные уравнения любой системы тел бывают всегда интегрируемы в том случае, когда тела лишь очень мало удаляются от своих положений равновесия; тогда можно определить законы колебаний всей системы. Общий анализ этого случая, имеющего очень широкое распространение, и разрешение некоторых относящихся сюда основных задач и составляют предмет настоящего отдела.

§ I. Общее решение проблемы о малых колебаниях системы тел около их точек равновесия.

1. Пусть a, b, c — значения прямоугольных координат x, y, z тела m системы, когда последняя находится в положении равновесия. Так как согласно допущению система при своем движении лишь очень мало удаляется от своего положения равновесия, мы имеем вообще

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma,$$

где переменные α, β, γ всегда очень малы; следовательно, в дифференциальных уравнениях движения достаточно принимать во внимание первое измерение этих величин. То же самое имеет силу и по отношению к другим аналогичным выражениям, которые мы будем отличать одним, двумя и т. д. штрихами для различных тел m', m'' и т. д. той же системы.

Рассмотрим сначала условные уравнения, которые должны иметь место в соответствии с природой системы и которые можно представить в виде $L=0, M=0, \dots$, где $L, M, \dots$ являются заданными алгебраическими функциями координат $x, y, z, x', y', \dots$. Так как положение равновесия есть одно из тех положений, которые система может занимать, то отсюда следует, что эти уравнения $L=0, M=0, \dots$ будут оставаться в силе, если допустить, что $x, y, z, x', \dots$ превратились в $a, b, c, a', \dots$; отсюда легко прийти к выводу, что эти уравнения не должны содержать в себе времени t .

Пусть $A, B, \dots$ величины, в которые превращаются $L, M, \dots$, когда $x, y, z, x', \dots$ превращаются в $a, b, c, a', \dots$; ясно, что если вместо $x, y, z, x', \dots$ подставить их значения $a + \alpha, b + \beta, c + \gamma, a' + \alpha', \dots$, то вследствие незначительности величин $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ мы будем иметь

$$L = A + \frac{\partial A}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial A}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial A}{\partial \gamma} \gamma + \frac{\partial A}{\partial \alpha'} \alpha' + \dots,$$

$$M = B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial B}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial B}{\partial \gamma} \gamma + \frac{\partial B}{\partial \alpha'} \alpha' + \dots,$$

и так далее.

Таким образом, во-первых, мы будем иметь

$$A=0, \quad B=0, \dots$$

по отношению к положению равновесия; во-вторых, мы будем иметь уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial a} \alpha + \frac{\partial A}{\partial b} \beta + \frac{\partial A}{\partial c} \gamma + \frac{\partial A}{\partial a'} \alpha' + \dots = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial a} \alpha + \frac{\partial B}{\partial b} \beta + \frac{\partial B}{\partial c} \gamma + \frac{\partial B}{\partial a'} \alpha' + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Эти уравнения дадут нам соотношения, которые должны существовать между переменными $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$

Если сначала пренебречь очень малыми величинами второго и высших порядков, то получаются линейные уравнения, пользуясь которыми можно значения некоторых из этих переменных определить с помощью других; затем с помощью этих первых значений можно найти более точные значения, приняв во внимание вторые, а по желанию и более высокие степени. Этим путем можно получить значения некоторых из переменных $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$, выраженных в виде разложений в ряд функций остальных переменных, а эти оставшиеся переменные будут тогда совершенно независимы друг от друга.

Таким образом в большинстве случаев, если принять во внимание условия задачи, можно уменьшить число координат непосредственной подстановкой вместо них целых рациональных функций других переменных, независимых друг от друга и очень малых, значение которых в состоянии равновесия равно нулю.

Итак, допустим вообще, что мы имеем

$$x = a + a_1 \xi + a_2 \psi + a_3 \varphi + \dots + a'_1 \xi^2 + \dots,$$

$$y = b + b_1 \xi + b_2 \psi + b_3 \varphi + \dots + b'_1 \xi^2 + \dots,$$

$$z = c + c_1 \xi + c_2 \psi + c_3 \varphi + \dots + c'_1 \xi^2 + \dots,$$

и совершенно также относительно других координат $x', y', \dots$; величины $a, b, c, a_1, b_1, \dots$ постоянные, а величины $\xi, \psi, \varphi, \dots$ переменные, очень малые и при равновесии равные нулю.

2. Теперь необходимо лишь произвести указанные подстановки в значениях T и V пункта 10 отд. IV. При этом достаточно принять во внимание только вторые степени, чтобы таким образом получить линейные дифференциальные уравнения. Прежде всего ясно, что значение T будет иметь следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} \left[(1) \frac{d\xi^2}{dt^2} + (2) \frac{d\psi^2}{dt^2} + (3) \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \dots \right] + \\ + (1,2) \frac{d\xi}{dt} \frac{d\psi}{dt} + (1,3) \frac{d\xi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + (2,3) \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \dots,$$

если для сокращения положить

$$(1) = \sum m (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

$$(2) = \sum m (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$(3) = \sum m (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2),$$

$$\dots \dots \dots;$$

$$(1,2) = \sum m (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2),$$

$$(1,3) = \sum m (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3),$$

$$(2,3) = \sum m (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3),$$

$$\dots \dots \dots$$

где знак $\sum$ означает интегрирования или суммирования, произведенные по отношению ко всем различным телам m системы и в то же время независимые от переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$, а равно от времени t .

Далее, если через F обозначить значение алгебраической функции Π , в которой вместо x, y, z поставлены a, b, c , то ясно, что общее значение Π выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} & F + (a_1 \xi + a_2 \psi + a_3 \varphi + \dots) \frac{\partial F}{\partial a} + \\ & + (b_1 \xi + b_2 \psi + b_3 \varphi + \dots) \frac{\partial F}{\partial b} + \\ & + (c_1 \xi + c_2 \psi + c_3 \varphi + \dots) \frac{\partial F}{\partial c} + \\ & + \frac{(a_1 \xi + a_2 \psi + a_3 \varphi + \dots)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + \\ & + (a_1 \xi + a_2 \psi + a_3 \varphi + \dots) (b_1 \xi + b_2 \psi + b_3 \varphi + \dots) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + \\ & + \frac{(b_1 \xi + b_2 \psi + b_3 \varphi + \dots)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

где достаточно принять во внимание только вторые степени переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$.

Если эту функцию умножить на m и проинтегрировать согласно символу $\sum$, то мы получим вообще

$$\begin{aligned} V = & H + H_1 \xi + H_2 \psi + H_3 \varphi + \dots + \frac{[1] \xi^2 + [2] \psi^2 + [3] \varphi^2 + \dots}{2} + \\ & + [1,2] \xi \psi + [1,3] \xi \varphi + [2,3] \psi \varphi + \dots; \\ H = & \sum m F, \end{aligned}$$

$$H_1 = \sum m \left(a_1 \frac{\partial F}{\partial a} + b_1 \frac{\partial F}{\partial b} + c_1 \frac{\partial F}{\partial c} \right),$$

$$H_2 = \sum m \left(a_2 \frac{\partial F}{\partial a} + b_2 \frac{\partial F}{\partial b} + c_2 \frac{\partial F}{\partial c} \right),$$

$$H_3 = \sum m \left(a_3 \frac{\partial F}{\partial a} + b_3 \frac{\partial F}{\partial b} + c_3 \frac{\partial F}{\partial c} \right),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[1] = \sum m \left\{ \begin{aligned} & a_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + b_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} + \\ & + 2a_1 b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + 2a_1 c_1 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial c} + 2b_1 c_1 \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} \end{aligned} \right\},$$

$$[2] = \sum m \left\{ \begin{aligned} & a_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + b_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} + \\ & + 2a_2 b_2 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + 2a_2 c_2 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial c} + 2b_2 c_2 \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} \end{aligned} \right\},$$

$$[3] = S m \left\{ \begin{aligned} & a_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + b_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} + \\ & + 2a_3 b_3 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + 2a_3 c_3 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial c} + 2b_3 c_3 \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} \end{aligned} \right\},$$

.....

$$[1,2] = S m \left\{ \begin{aligned} & a_1 a_2 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + b_1 b_2 \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + c_1 c_2 \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} + \\ & + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + (a_1 c_2 + a_2 c_1) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial c} + (b_1 c_2 + b_2 c_1) \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} \end{aligned} \right\},$$

$$[1,3] = S m \left\{ \begin{aligned} & a_1 a_3 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + b_1 b_3 \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + c_1 c_3 \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} + \\ & + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + (a_1 c_3 + a_3 c_1) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial c} + (b_1 c_3 + b_3 c_1) \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} \end{aligned} \right\},$$

$$[2,3] = S m \left\{ \begin{aligned} & a_2 a_3 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + b_2 b_3 \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} + c_2 c_3 \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} + \\ & + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} + (a_2 c_3 + a_3 c_2) \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial c} + (b_2 c_3 + b_3 c_2) \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial c} \end{aligned} \right\},$$

.....

3. Когда, таким образом значения T и V выражены в качестве функций $\xi, \psi, \varphi, \dots$, независимых друг от друга, уже не приходится больше удовлетворять какому-либо условному уравнению; а так как величина T содержит в себе только дифференциалы переменных, то для движения системы тотчас же получаются следующие уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,$$

.....

число которых, как видим, равно числу переменных.

Эти уравнения должны иметь силу и в состоянии равновесия, так как если система однажды находилась в равновесии, то она всегда сама собою остается в этом положении. Но в состоянии равновесия согласно условно мы всегда имеем $x = a, y = b, z = c; x' = a', \dots$; следовательно, $\xi = 0, \psi = 0, \varphi = 0, \dots$, равно как $\frac{d\xi}{dt} = 0, \frac{d\psi}{dt} = 0, \dots; \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \dots$. Поэтому члены $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}, \dots$ равны нулю, и члены $\frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{\partial V}{\partial \psi}, \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \dots$ превращаются в $H_1, H_2, H_3, \dots$. Следовательно, мы будем иметь

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \dots$$

Таковы условия, необходимые для того, чтобы $a, b, c, a', \dots$ являлись значениями $x, y, z, x', \dots$ в состоянии равновесия, как мы это предположили.

• В самом деле ясно, что

$$dV = S m (P dp + Q dq + R dr + \dots)$$

выражает сумму моментов всех сил $mP, mQ, mR, \dots$, которые приложены ко всем телам m системы и которые в состоянии равновесия должны взаимно друг друга уничтожить; поэтому согласно общей формуле, данной в отд. II

части I, необходимо, чтобы dV равнялось нулю по отношению к каждой из независимых переменных; следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \dots$$

будут условиями равновесия; а так как последние согласно допущению соответствуют $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi = 0, \dots$, то мы будем иметь

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \dots$$

Таким образом в выражении V первые измерения переменных ξ , ψ , $\varphi, \dots$ всегда исчезают.

Поэтому, если в общем уравнении подставить значения T и V и приравнять H_1 , H_2 , $H_3, \dots$ нулю, то мы получим следующие уравнения движения системы:

$$0 = (1) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + (1,2) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + (1,3) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \dots + [1] \xi + [1,2] \psi + [1,3] \varphi + \dots,$$

$$0 = (2) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + (1,2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + (2,3) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \dots + [2] \psi + [1,2] \xi + [2,3] \varphi + \dots,$$

$$0 = (3) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (1,3) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + (2,3) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \dots + [3] \varphi + [1,3] \xi + [2,3] \psi + \dots,$$

.....

Так как эти уравнения при линейной форме имеют постоянные коэффициенты, то с помощью известных методов они могут быть проинтегрированы совершенно точно и в общем виде.

4. Можно сначала допустить, что в этого рода уравнениях переменные находятся между собою в постоянных отношениях, так что мы имеем

$$\psi = f\xi, \quad \varphi = g\xi, \dots;$$

с помощью этих подстановок приведенные уравнения примут следующий вид:

$$[(1) + (1,2)f + (1,3)g + \dots] \frac{d^2 \xi}{dt^2} + ([1] + [1,2]f + [1,3]g + \dots) \xi = 0,$$

$$[(2)f + (1,2) + (2,3)g + \dots] \frac{d^2 \xi}{dt^2} + ([2]f + [1,2] + [2,3]g + \dots) \xi = 0,$$

$$[(3)g + (1,3) + (2,3)f + \dots] \frac{d^2 \xi}{dt^2} + ([3]g + [1,3] + [2,3]f + \dots) \xi = 0,$$

.....

из них получается $\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k\xi = 0$, если положить

$$k = \frac{[1] + [1,2]f + [1,3]g + \dots}{(1) + (1,2)f + (1,3)g + \dots} = \frac{[2]f + [1,2] + [2,3]g + \dots}{(2)f + (1,2) + (2,3)g + \dots} = \\ = \frac{[3]g + [1,3] + [2,3]f + \dots}{(3)g + (1,3) + (2,3)f + \dots}.$$

Как видим, число этих уравнений равно числу неизвестных $f, g, \dots, k$; следовательно, они полностью определяют эти неизвестные. Сохранив член k в качестве первого члена и умножая его на знаменатель второго члена, мы получаем линейное уравнение относительно $f, g, \dots$; если затем,

пользуясь одним из известных методов, исключить эти величины, то, как это легко увидеть из общих формул исключения, для k получится уравнение, степень которого равна числу уравнений, а следовательно, и числу рассматриваемых дифференциальных уравнений. Таким образом для k получится определенное число различных значений, соответствующее количеству дифференциальных уравнений, причем каждое из этих значений, будучи поставлено в выражения $f, g, \dots$, даст соответствующие значения этих величин.

Интегрирование уравнения $\frac{d^2\xi}{dt^2} + k = 0$ приводит к следующему результату:

$$\xi = E \sin(t\sqrt{k} + \epsilon),$$

где E, ϵ — произвольные постоянные; а поскольку мы допустили, что $\psi = f\xi, \varphi = g\xi, \dots$ мы получим также значения $\psi, \varphi, \dots$

Приведенное решение является, правда, только частным, но можно в то же время получить и второе, третье и т. д. решения — соразмерно числу значений k ; следовательно, если все эти решения соединить, мы получим общее решение, так как, с одной стороны, сумма частных значений $\xi, \psi, \varphi, \dots$ одинаково удовлетворяет дифференциальным уравнениям в силу их линейного вида, а с другой стороны, эта сумма будет содержать в себе вдвое большее число произвольных постоянных, чем имеется уравнений, и, следовательно, — как раз такое число этих постоянных, сколько их могут допускать общие интегралы.

Обозначим через $k', k'', k''', \dots$ различные значения k , т. е. корни уравнения относительно k , а через $f', g', \dots, f'', g'', \dots, f''', g''', \dots$ — соответствующие значения $f, g, \dots$ и возьмем равное количество произвольных постоянных $E', E'', E''', \dots$, а также произвольных углов $\epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \dots$; тогда мы получим следующие полные значения $\xi, \psi, \varphi, \dots$:

$$\xi = E' \sin(t\sqrt{k'} + \epsilon') + E'' \sin(t\sqrt{k''} + \epsilon'') + E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \epsilon''') + \dots,$$

$$\psi = f' E' \sin(t\sqrt{k'} + \epsilon') + f'' E'' \sin(t\sqrt{k''} + \epsilon'') +$$

$$+ f''' E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \epsilon''') + \dots,$$

$$\varphi = g' E' \sin(t\sqrt{k'} + \epsilon') + g'' E'' \sin(t\sqrt{k''} + \epsilon'') +$$

$$+ g''' E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \epsilon''') + \dots,$$

в которых произвольные величины $E', E'', E''', \dots; \epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \dots$ зависят от тех значений, какие $\xi, \psi, \varphi, \dots$ и $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \dots$ принимают, когда $t=0$, т. е. при начальном состоянии системы.

В самом деле, если в найденных выражениях для $\xi, \psi, \varphi, \dots$ положить $t=0$ и принять в качестве заданных значения $\xi, \psi, \varphi, \dots$, то мы получим линейные уравнения между неизвестными $E' \sin \epsilon', E'' \sin \epsilon'', \dots$, с помощью которых можно определить каждую из этих неизвестных величин. Точно так же, если в дифференциалах этих же выражений положить $t=0$ и опять принять в качестве заданных значения $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \dots$, то мы получим вторую систему линейных уравнений между $E' \cos \epsilon', E'' \cos \epsilon'', \dots$, которые послужат для их определения. Указанным путем можно легко получать

значения E' , E'' , ..., равно как $\operatorname{tg} \varepsilon'$, $\operatorname{tg} \varepsilon''$, ... и, наконец, значения самих углов ε' , ε'' , ...

Однако мы положим здесь более простой способ прямого определения этих неизвестных, при котором не приходится прибегать к весьма многочисленным операциям исключения.

5. Отметим прежде всего, что если сложить дифференциальные уравнения п. 3, умножив предварительно второе из них на f , третье на g и т. д. и положив для краткости

$$p = (1) + (1,2)f + (1,3)g + \dots,$$

$$P = [1] + [1,2]f + [1,3]g + \dots,$$

$$q = (2)f + (1,2) + (2,3)g + \dots,$$

$$Q = [2]f + [1,2] + [2,3]g + \dots,$$

$$r = (3)g + (1,3) + (2,3)f + \dots,$$

$$R = [3]g + [1,3] + [2,3]f + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

мы получим следующее уравнение:

$$P \frac{d^2 \xi}{dt^2} + q \frac{d^2 \psi}{dt^2} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \dots + P\xi + Q\psi + R\varphi + \dots = 0.$$

Но уравнения пункта 4 дают

$$P = kp, \quad Q = kq, \quad R = kr, \dots$$

Следовательно, предыдущее уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d^2(p\xi + q\psi + r\varphi + \dots)}{dt^2} + k(p\xi + q\psi + r\varphi + \dots) = 0,$$

интеграл которого равен

$$p\xi + q\psi + r\varphi + \dots = L \sin(t\sqrt{k} + \lambda),$$

где L и λ — две произвольных постоянных.

Приведенное уравнение должно иметь силу одинаково для всех различных значений k , которые вытекают из тех же условных уравнений и которые мы обозначим через k' , k'' , ... Следовательно, обозначив через p' , p'' , ..., q' , q'' , ... соответствующие значения p , q , ... и введя различные произвольные постоянные L' , L'' , ..., λ' , λ'' , ..., мы получим следующие уравнения:

$$p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \dots = L' \sin(t\sqrt{k'} + \lambda'),$$

$$p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \dots = L'' \sin(t\sqrt{k''} + \lambda''),$$

$$p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \dots = L''' \sin(t\sqrt{k'''} + \lambda'''),$$

$$\dots \dots \dots$$

Эти уравнения вместе с тем послужат для определения значений ξ , ψ , φ , ..., причем ясно, что эти значения должны совпасть с найденными выше (п. 4), так как и те и другие получаются из одних и тех же дифференциальных уравнений. Таким образом, если в приведенные уравнения подставить значения, найденные в указанном пункте, то они должны тождественно удовлетвориться.

Отсюда легко прийти к заключению, что для первого уравнения мы получим

$$\lambda' = \varepsilon', \quad L' = (p' + f'q' + g'r' + \dots)E',$$

и затем

$$p' + f''q' + g''r' + \dots = 0, \quad p' + f'''q' + g'''r' + \dots = 0, \dots;$$

аналогично для второго уравнения мы получим

$$\lambda'' = \varepsilon'', \quad L'' = (p'' + f''q'' + g''r'' + \dots)E'',$$

и затем

$$p'' + f'q'' + g'r'' + \dots = 0, \quad p'' + f'''q'' + g'''r'' + \dots = 0, \dots,$$

и так далее во всех остальных случаях.

Подставив в указанные выше уравнения вместо λ' , L' , λ'' , L'' , λ''' , L''' , ... найденные нами только что значения, мы получим следующие уравнения:

$$E' \sin(t\sqrt{k'} + \varepsilon') = \frac{p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \dots}{p' + q'f' + r'g' + \dots},$$

$$E'' \sin(t\sqrt{k''} + \varepsilon'') = \frac{p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \dots}{p'' + q''f'' + r''g'' + \dots},$$

$$E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \varepsilon''') = \frac{p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \dots}{p''' + q'''f''' + r'''g''' + \dots},$$

$$\dots \dots \dots$$

которые являются обратными по отношению к уравнениям пункта 4.

Определение произвольных величин E' , E'' , ..., ε' , ε'' , ... теперь уже не вызывает никаких трудностей; в самом деле:

1) если положить $t=0$, то первые члены приведенных выше уравнений превратятся в $E' \sin \varepsilon'$, $E'' \sin \varepsilon''$, ..., вторые же члены все известны, если допустить, что значения ξ , ψ , φ , ... в первое мгновение заданы;

2) если эти же уравнения продифференцировать и затем положить $t=0$, то первые члены будут равны

$$\sqrt{k'}E' \cos \varepsilon', \quad \sqrt{k''}E'' \cos \varepsilon'', \dots,$$

вторые же члены тоже будут все известны, если рассматривать в качестве заданных значения $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, ..., когда $t=0$. Следовательно, и так далее.

6. Таким образом разрешение задачи свелось только к определению величин k , f , g , h , ...; но, как мы видели в пункте 4, это определение зависит от решения уравнений

$$pk - P = 0, \quad qk - Q = 0, \quad rk - R = 0, \dots,$$

если для величин p , q , r , ..., P , Q , R , ... сохранить выражения, данные в пункте 5.

Но если через A обозначить значение, которое принимает величина T , когда вместо $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, ... поставлено e , f , g , ... и через B — значение той части величины V , в которой переменные ξ , ψ , φ , ... образуют функцию

второй степени, когда эти переменные точно так же заменены величинами $e, f, g, \dots$, то легко увидеть, в чем можно было бы убедиться и а priori, что мы получим

$$p = \frac{\partial A}{\partial e}, \quad q = \frac{\partial A}{\partial f}, \quad r = \frac{\partial A}{\partial g}, \dots,$$

$$P = \frac{\partial B}{\partial e}, \quad Q = \frac{\partial B}{\partial f}, \quad R = \frac{\partial B}{\partial g}, \dots,$$

если затем положить $e = 1$.

Следовательно, вообще, если положить $Ak - B = K$, то уравнения для определения неизвестных $k, f, g, \dots$ приобретут следующий вид:

$$\frac{\partial K}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial g} = 0, \dots,$$

если положить $e = 1$. Таким образом, так как величина K образуется непосредственно из величин T и V , можно искомыми уравнения найти прямо, не прибегая к выводу их из дифференциальных уравнений движения системы.

Теперь отмечу, что так как K представляет собою однородную функцию двух измерений $e, f, g, \dots$, мы в силу свойства этого рода функций, доказанного в пункте 15 отдела IV, имеем

$$2K = e \frac{\partial K}{\partial e} + f \frac{\partial K}{\partial f} + g \frac{\partial K}{\partial g} + \dots$$

Поэтому мы имеем также $K = 0$; следовательно, известные величины $f, g, h, \dots$ должны быть таковы, чтобы не только величина K была равна нулю, но чтобы и каждый из ее дифференциалов по отношению к этим неизвестным тоже был равен нулю; отсюда следует, что величина k , которую мы рассматривали в качестве функции этих неизвестных и которая зависит от уравнения $K = 0$, должна быть максимумом или минимумом.

Если положить сначала $e = 1$ и вместо $\frac{\partial K}{\partial e} = 0$ взять уравнение $K = 0$, то для определения неизвестных $f, g, h, \dots$ мы получим уравнения

$$K = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial g} = 0, \dots$$

Следовательно, если сначала определить значение f из уравнения $\frac{\partial K}{\partial f} = 0$ и подставить его в уравнение $K = 0$, то это уравнение перейдет в $K' = 0$; затем следует лишь положить $\frac{\partial K'}{\partial g} = 0$ и значение g , выведенное из этого последнего уравнения, тоже подставить в уравнение $K' = 0$; тогда, назвав полученное уравнение $K'' = 0$, мы снова положим $\frac{\partial K''}{\partial h} = 0$, и так далее. Указанным путем мы придем к окончательному уравнению, которое уже не будет содержать в себе неизвестных $f, g, h, \dots$, а лишь величину k и которое будет искомым уравнением относительно k , корни которого были выше обозначены через $k', k'', k''', \dots$.

Это уравнение можно представить и в общем виде, если принять во внимание, что так как величины $f, g, h, \dots$ образуют в значении K только совокупности двух измерений, то величина $2K \frac{\partial^2 K}{\partial f^2} - \frac{\partial K^2}{\partial f^2}$ необходимо будет свободна от f , а ее дифференциал относительно f будет иметь вид $2K \frac{\partial^2 K}{\partial f^2} df$ и, следовательно, будет равен нулю. Таким образом можно будет

положить $K' = 2K \frac{\partial^2 K}{\partial f^2} - \frac{\partial K^2}{\partial f^2}$, а так как оставшиеся в этой величине K' неизвестные $g, h, \dots$ будут тоже представлены только во втором измерении, то можно будет точно так же положить $K'' = 2K' \frac{\partial^2 K'}{\partial g^2} - \frac{\partial K'^2}{\partial g^2}$, и так далее.

Последняя из величин $K, K', K'', \dots$, будучи приравнена нулю, и даст искомое уравнение относительно k . Конечно, это уравнение может повыситься до более высокой степени, чем это необходимо, вследствие существования посторонних множителей, введенных в уравнения $K'' = 0, K''' = 0, \dots$; но если эти уравнения разложить и постараться постепенно освободиться от этих множителей и затем взять для значений $K'', K''', \dots$ только первые члены, упрощенные указанным путем, то окончательное уравнение само собою сведется к тому виду и степени, которые оно должно иметь.

Что касается значений $f, g, \dots$, то их можно затем определить с помощью уравнений $\frac{\partial K}{\partial f} = 0, \frac{\partial K'}{\partial g} = 0, \dots$, причем следует начать с последнего уравнения и затем путем последовательной подстановки найденных значений дойти до первого.

7. Так как приведенное выше решение основано на допущении, что переменные $\xi, \psi, \varphi, \dots$ представляют собою очень малые величины, то для того, чтобы это решение было законным, требуется, чтобы указанное допущение фактически осуществлялось; а это требует, чтобы все корни $k', k'', \dots$ были вещественными, положительными и неравными между собою с тем, чтобы время t , возрастающее до бесконечности, всегда находилось под знаком синуса или косинуса. Если бы некоторые из этих корней были отрицательными или мнимыми, то вместо соответствующих синусов или косинусов они ввели бы вещественные экспоненциальные величины, а если бы они были просто равны между собою, то они ввели бы алгебраические степени дуги; в этом можно убедиться с помощью известных методов: в первом случае введя вместо синуса или косинуса их мнимые экспоненциальные выражения, а во втором случае допустив, что равные корни отличаются друг от друга на бесконечно малые неопределенные величины; но так как изложение этих случаев не представляет интереса для рассматриваемого нами вопроса, мы на нем не будем останавливаться [29].

Если условия вещественности и неравенства коэффициентов при t выполнено, то ясно, что наибольшие значения $\xi, \varphi, \dots$ будут меньше суммы величин $E', E'', E''', \dots, f'E', f''E'', f'''E''', \dots$, если все эти величины взять с положительным знаком; следовательно, если эти различные суммы очень малы, то мы можем быть уверены, что и значения переменных тоже будут всегда очень малыми.

Но так как коэффициенты $E', E'', E''', \dots$ являются произвольными постоянными и зависят только от начального смещения системы, то возможно, что переменные $\xi, \psi, \dots$ будут очень малыми, хотя бы среди величин $\sqrt{k'}, \sqrt{k''}, \dots$ некоторые были мнимыми или равными между собою. В самом деле, для этого достаточно, чтобы соответствующие величины $E', E'', \dots$ были равны нулю, и тогда члены, возрастающие вместе со временем t , исчезнут. В этом случае решение, не будучи точным в общем смысле, будет однако правильным в частном случае, когда имеет место указанное выше условие [30].

8. Существуют методы, с помощью которых можно определить, имеет ли заданное уравнение, какой бы степени оно ни было, сплошь вещественные корни или же нет, и в случае их вещественности — судить об их знаке и о существовании между ними равных корней; но так как примене-

ние этих методов всегда несколько утомительно, мы сейчас изложим, несколько простых и общих признаков, с помощью которых в большом числе случаев можно судить о виде интересующих нас корней.

Если взять уравнения $K=0$ или $Ak-B=0$ (п. 6), то мы имеем $k = \frac{B}{A}$; но легко видеть, что величина A всегда необходимо имеет положительное значение, в то время как $f, g, \dots$ являются вещественными величинами, ибо функция T , из которой приведенная величина получается путем подстановки $1, f, g, \dots$ вместо $\frac{dz}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \dots$ (указанный выше пункт), составлена из суммы большого количества квадратов, умноженных на необходимо положительные коэффициенты. Следовательно, если и величина B всегда положительна, что имеет место в том случае, когда часть функции V , в которой переменные $\xi, \psi, \varphi, \dots$ образуют функцию второй степени, может быть приведена к тому же виду, что и функция T —ведь величина B тоже получается из указанной части V путем подстановки $1, f, g, \dots$ вместо $\xi, \psi, \varphi, \dots$,—то мы уверены, что значения k , т. е. корни уравнения относительно k , будут всегда положительными во всех тех случаях, когда они будут вещественными.

Обратно, если величина B всегда отрицательна, что бывает в том случае, когда она составлена из большого количества квадратов, умноженных на отрицательные коэффициенты, то вещественные корни k все будут отрицательными. В этом последнем случае решение не может быть удовлетворительным, так как тогда корни уравнения относительно k могут быть только мнимыми или же вещественными и отрицательными, и, следовательно, выражения для переменных $\xi, \psi, \dots$ необходимо будут содержать в себе время t вне знаков синуса и косинуса.

В первом случае, когда B положительно, мы видим только, что если корни вещественны, то они необходимо должны быть положительными; однако, пожалуй, было бы трудно доказать, что все они действительно должны быть вещественными; можно, однако, иным путем убедиться, что это должно быть именно так.

В самом деле, принцип сохранения живых сил, доказанный нами в § V отд. III, дает уравнение $T+V=\text{const}$ (п. 14 отд. IV), которое всегда имеет место, так как T и V являются функциями, не содержащими в себе t (п. 2). Но если обозначить через V' ту часть V , которая содержит в себе члены второй степени, то $V=H+V'$, так как $H_1=0, H_2=0, H_3=0, \dots$ (п. 3); тогда мы имеем

$$T+H+V'=\text{const}=(T)+H+(V'),$$

если обозначить через (T) и (V') значения T и V' в первое мгновение. Следовательно,

$$T+V'=(T)+(V').$$

Так как T по своему виду—всегда величина положительная, то если и V' положительно, мы необходимо имеем $V'>0$ и $V'<(T)+(V')$; таким образом значение V' , а следовательно, и значения переменных $\xi, \psi, \varphi, \dots$ будут всегда находиться в заданных пределах, которые зависят только от начального состояния. Отсюда ясно, что упомянутые переменные не могут содержать в себе времени t вне знаков синуса и косинуса, так как в подобном случае они могли бы возрасти до бесконечности. Но если значение B постоянно положительно, то и значение V' тоже положительно; следовательно, корни уравнения относительно k необходимо все будут веще-

ственными, положительными и неравными (п. 7) и стало, быть решенное будет всегда удовлетворительным.

В последнем случае состояние равновесия, из которого система была смещена, является устойчивым, так как система возвращается к нему или всегда стремится вернуться с помощью очень малых колебаний; во всяком случае система всегда может отклониться от него лишь на очень незначительную величину [31].

9. Совершенно таким же путем в конце отдела III статьи (п. 23 и след.) мы доказали, что когда функция Π является минимумом в состоянии равновесия, то это состояние является устойчивым; в самом деле, легко видеть, что функция, обозначенная в п. 21 упомянутого отдела через Π , представляет собою ту же самую функцию, которую мы здесь обозначили через V , так как и та и другая является интегралом суммы моментов сил, действующих на различные тела системы, — суммы, которая при равновесии должна равняться нулю. Но так как мы имеем $V = H + V'$, а V' содержит в себе переменные $\xi, \psi, \varphi, \dots$ только во второй степени, то отсюда следует, что V будет минимумом или максимумом в зависимости от того, будет ли значение V положительным или отрицательным, если этим переменным дать произвольные значения. Следовательно, равновесие необходимо будет устойчивым в том случае, когда V является минимумом (п. 8).

Если же, наоборот, V является максимумом, то так как величина V' всегда отрицательна, величина B тоже будет отрицательна, ибо если положить

$$\psi = f\xi, \quad \varphi = g\xi, \dots,$$

то значение V' будет равно $\xi^2 B$ (п. 6); а в силу того, что мы доказали в предыдущем пункте, выражения переменных необходимо будут содержать в себе члены, в которых i будет находиться вне знаков синуса и косинуса; следовательно, в этом случае равновесие не может быть устойчивым, так как система, будучи хоть сколько-нибудь смещена из него, будет все больше от него удаляться. Эта вторая часть теоремы, упомянутой в указанном месте статьи, не могла там быть доказана за отсутствием необходимых для этого положений; поэтому мы перенесли ее доказательство в динамику, и приведенное нами выше обоснование этой части теоремы является вполне исчерпывающим.

10. Впрочем, между двумя указанными состояниями абсолютной устойчивости, при которых система, будучи каким-нибудь образом хоть немного выведена из состояния равновесия, либо сама собою стремится вернуться к последнему, либо стремится от него все больше и больше удалиться, — могут существовать и состояния условной и относительной устойчивости, при которых восстановление равновесия зависит от начального смещения системы. Если некоторые из значений $\sqrt{k}$ являются мнимыми, то соответствующие члены в значениях переменных содержат в себе круговые дуги и равновесие, вообще говоря, не является устойчивым; но если коэффициенты этих членов оказываются равными нулю, что зависит от начального состояния системы, то круговые дуги исчезают и равновесие может быть еще признано устойчивым, по крайней мере по отношению к этому частному случаю [32].

11. Когда все значения $\sqrt{k}$ вещественны и неравны между собою, следовательно, когда равновесие является устойчивым, выражения всех переменных составлены из такого количества членов вида

$$E \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon),$$

сколько имеется переменных.

Но этот член представляет очень малые и изохронные колебания простого маятника, имеющего длину $\frac{g}{k}$, где g означает силу тяжести. Таким образом колебания различных тел системы можно считать как бы составленными из простых колебаний, аналогичных колебаниям маятников, длины которых равны $\frac{g}{k'}$, $\frac{g}{k''}$, $\frac{g}{k'''} \dots$

Но так как коэффициенты E' , $E'' \dots$ являются произвольными и зависят только от начального состояния системы, можно это состояние всегда предположить таким, что все коэффициенты, за исключением какого-нибудь одного, равны нулю; тогда все тела системы будут совершать простые колебания, аналогичные колебаниям одного и того же маятника; отсюда видно, что одна и та же система способна совершать столько различных простых колебаний, сколько она содержит в себе движущихся тел^{*)}. Таким образом, вообще говоря, любые колебания системы составятся только из всех простых колебаний, которые могут иметь место в силу природы системы.

Даниил Бернулли отметил это сложение простых и изохронных колебаний при движении колеблющейся струны, нагруженной множеством мелких грузов, он рассматривал его как общий закон всех малых взаимных движений, которые могут иметь место в любой системе тел. Единственного случая, подобного случаю колеблющихся струн, не было достаточно для того, чтобы установить этот общий закон; однако тот анализ, который мы только что дали, обосновывает этот закон вполне надежно и в общем виде; из него видно, что какими бы неправильными нам ни могли показаться малые колебания, наблюдаемые в природе, они всегда могут быть сведены к простым колебаниям, число которых равно числу колеблющихся в той же системе тел.

Изложенное является следствием, вытекающим из природы линейных уравнений, к которым сводятся движения тел, составляющих любую систему, когда эти движения очень малы.

12. Когда значения величины $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k''}$, $\sqrt{k'''} \dots$ несоизмеримы, то ясно, что и периоды этих колебаний тоже несоизмеримы и, следовательно, что система никогда не может вернуться к своему первоначальному положению.

Но если эти величины относятся между собою как рациональные числа и если их общая наибольшая мера равна μ , то легко видеть, что по истечении времени $\theta = \frac{2\pi}{\mu}$, где π соответствует углу в 180° , система всегда возвращается в одно и то же положение. Таким образом θ является периодом сложного колебания всей системы.

13. Данное нами только что решение требует, чтобы заданные координаты могли быть выражены с помощью функций, которые разлагаются в ряд по степеням очень малых переменных величин и которые в состоянии равновесия равны нулю, как мы это допустили в пункте 3.

Но, как мы видели, это возможно только тогда, когда условие уравнения, будучи разложено в ряд, содержат в себе первые степени переменных, рассматриваемых нами в качестве очень малых величин, так как прежде всего эти члены дают уравнения, разрешимые рационально, а затем,

^{*)} Число простых колебаний равно не числу движущихся тел, но числу независимых переменных. Впрочем, это отмечает и сам Лагранж в начале параграфа.

пользуясь методом рядов, можно получить все более и более точные рациональные решения.

Тем не менее, может случиться, что в одном или нескольких условных уравнениях отсутствуют члены первого измерения; это, например, может случиться, когда в уравнении $L=0$, значения координат для равновесия таковы, что они превращают в нуль не только L , но и каждый из первых его дифференциалов; в самом деле, тогда мы имеем

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial b} = 0, \dots,$$

и уравнение $L=0$ содержит в себе только вторые и более высокие степени $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ (п. 1). Следовательно, если в этом случае координаты выразить в функции независимых переменных, то эти функции уже не могут быть рациональными, и дифференциальные уравнения не будут ни линейными, ни даже рациональными. Таким образом допущение очень малых движений системы тогда уже не приведет к упрощению решения задачи или во всяком случае не даст возможности применить к ней тот общий метод, который мы изложили выше.

Для того чтобы разрешить такого рода задачи простейшим образом, следует сначала отвлечься от условных уравнений, в которых первые степени переменных уже не представлены, и этим путем прийти к тем выражениям для T и V , которые приведены в п. 2. К этому выражению V следует затем прибавить первые члены условных уравнений, которые еще не были приняты во внимание, причем каждое из них следует умножить на неопределенный коэффициент, который при дифференцировании в смысле § 2 следует рассматривать в качестве постоянной величины; тогда в этих членах, полученных из условных уравнений, достаточно будет принимать во внимание более высокие степени очень малых переменных. Отсюда можно будет обычным образом найти дифференциальные уравнения, после чего все дело сведется к исключению неопределенных коэффициентов.

Если бы условные уравнения оказались второй степени и если бы неопределенные коэффициенты можно было рассматривать как постоянные величины, то значение V сохранило бы еще тот же вид, какой оно имеет в общем решении; следовательно, его можно было бы применить и в этом случае; после этого следовало бы определять коэффициенты таким образом, чтобы были удовлетворены условные уравнения. Таким образом можно всегда начинать с того, чтобы сделать указанное выше допущение, а затем посмотреть, могут ли удовлетворить условным уравнениям те значения, которые при этом получаются для переменных; в случае положительного ответа на этот вопрос допущение будет законным и решение точным, в противном случае следует изыскать особые методы для интегрирования дифференциальных уравнений.

§ II. О колебаниях систем линейно расположенных тел.

14. Когда тела, образующие рассматриваемую систему, распределены друг по отношению к другу каким-либо однородным и регулярным образом, исследование можно упростить и можно прийти к общим и симметричным формулам, применяя обозначения и алгоритм конечных разностей. Мы приведем пример этого, рассмотрев случай, когда произвольное число тел, расположенных на прямой или кривой линии, колеблется под действием каких-либо сил и взаимодействий тел.

Пусть x, y, z — прямоугольные координаты одного какого-либо из тел системы, которое мы обозначим через Dm , причем мы применим прописную букву D для обозначения конечных разностей (п. 17 отд. IV). Мы имеем прежде всего

$$T = \frac{1}{2} S \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) Dm,$$

где символом S выражает сумму, относящуюся ко всей системе.

Функции V должна содержать в себе сумму $S \Pi Dm$, пропеходящую от ускоряющих сил $P, Q, R, \dots$, если допустить, что эти силы таковы, что мы имеем

$$\Pi = \int (P dp + Q dq + R dr + \dots).$$

Указанная функция должна содержать в себе и сумму $S \int \Phi dDs$, если допустить, что Φ представляет собою силу, с которой два соседних тела, находящихся на расстоянии Ds , взаимно притягиваются, и что сила является функцией того же расстояния Ds , так что $\int \Phi dDs$ является интегрируемой величиной, дифференциал которой в смысле δ равен $\Phi \delta Ds$. Указанная сила Φ , которую мы рассматриваем как функцию Ds , может таким образом варьировать от одного тела до другого и, следовательно, она будет также функцией числа или величины, выражающей место каждого тела в ряду всех тел и к которой относится знак суммирования S . В том случае, когда тела вместо взаимного притяжения взаимно отталкиваются, функцию Φ следует взять отрицательной.

Таким образом мы будем иметь

$$V = S \Pi Dm + S \int \Phi dDs$$

и, следовательно,

$$\delta V = S \delta \Pi Dm + S \Phi \delta Ds.$$

Следует отметить, что приведенное выражение δV остается в силе и в том случае, когда тела связаны между собою таким образом, что их взаимные расстояния остаются неизменными; в самом деле, в этом случае мы будем иметь условное уравнение $\delta Ds = 0$, которое даст в выражении δV член $S \lambda \delta Ds$ (умнож. выше пункт).

15. Если элемент Ds выразить с помощью конечных разностей x, y, z , то ясно, что мы будем иметь

$$Ds = \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2},$$

и, следовательно, дифференцируем в смысле δ ,

$$\delta Ds = \frac{Dx \delta Dx + Dy \delta Dy + Dz \delta Dz}{Ds}.$$

Если подставить это значение и для краткости ввести $\frac{\Phi}{Ds} = \Psi$ (функция Ds), то мы получим

$$\delta V = S \delta \Pi Dm + S \Psi (Dx \delta Dx + Dy \delta Dy + Dz \delta Dz).$$

Так как символы D и δ независимы друг от друга, можно δD заменить символом $D\delta$, и тогда мы получим

$$\delta V = S \delta \Pi Dm + S \Psi (Dx D\delta x + Dy D\delta y + Dz D\delta z).$$

Путем интегрирования по частям, примененного к конечным разностям, можно также добиться того, чтобы D перед δ исчезло.

16. Действительно, мы имеем вообще

$$Dxy = xDy + yDx + Dx Dy = (x + Dx)Dy + yDx = x,Dy + yDx,$$

если x , означает тот член, который следует за x в последовательном ряду членов $x, x + Dx, \dots$. Следовательно, если от разностей перейти к суммам, то мы получим

$$SyDx = xy - Sx,Dy.$$

Аналогичным путем мы найдем

$$SyD^2x = yDx - x,D^2y + Sx,,D^2y$$

и так далее, где $x, x,, x,,, \dots$ представляют собою члены, следующие друг за другом в том же ряду.

Для того чтобы выполнить эти суммирования, следует члены, стоящие вне знака S , отнести к последнему члену конечной суммы $SyDx$ и вычесть те же члены, относящиеся к первому члену. Если знаками нуль и i , помещенными внизу букв, обозначить члены, относящиеся к первой и последней точкам, то мы получим нижеследующие формулы полного суммирования:

$$SyDx = x_i y_i - x_0 y_0 - Sx,Dy,$$

$$SyD^2x = y_i Dx_i - x_{i+1} Dy_i - y_0 Dx_0 + x,Dy_0 + Sx,,Dy,$$

$$\dots \dots \dots$$

Поскольку символ S означает полные суммы заданного числа членов, ясно, что вместо членов $x,Dy, x,,Dy, \dots$ под знаком S можно взять предыдущие члены, которые мы обозначим через $xD,,y, xD,,,y, \dots$, указывая одним, двумя и т. д. поставленными слева штрихами членами $,,y, y,, y,,, \dots$, предшествующие y в бесконечном ряду $\dots, y,, y, y, y,, y,,, \dots$.

17. Исходя из изложенного выше, поставим в предыдущих формулах δx вместо x и ΨDx вместо y ; тогда мы получим следующие преобразования

$$S\Psi Dx D\delta x = (\Psi Dx \delta x)_i - (\Psi Dx \delta x)_0 - S\delta x D,(\Psi Dx)$$

и точно так же

$$S\Psi Dy D\delta y = (\Psi Dy \delta y)_i - (\Psi Dy \delta y)_0 - S\delta y D,(\Psi Dy),$$

$$S\Psi Dz D\delta z = (\Psi Dz \delta z)_i - (\Psi Dz \delta z)_0 - S\delta z D,(\Psi Dz);$$

соответствующие подстановки следует произвести в выражении для δV .

Если первое тело и последнее приняты неподвижными, то вариации $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$, и $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, относящиеся к обоим этим телам, равны нулю. Мы сначала примем это допущение, упрощающее формулы и, следовательно, тогда получим

$$\delta V = S\delta \Pi Dm - S\delta x D,(\Psi Dx) - S\delta y D,(\Psi Dy) - S\delta z D,(\Psi Dz).$$

Вообще же, так как вариации всегда должны стать равными нулю, то если первое тело или последнее, или же оба они неподвижны, следует значение Ψ в начале или в конце принять равным нулю. Таким образом

в силу $\Psi = \frac{\Phi}{Ds}$, следует выполнить условие $\Phi_0 = 0$ или $\Phi_i = 0$, если первое или последнее тело не остается неподвижным; а если бы оба тела двигались, то мы имели бы оба условия $\Phi_0 = 0$ и $\Phi_i = 0$.

18. После того как вариация δV была приведена к указанному простому виду, общие уравнения отд. IV (п. 10), отнесенные к переменным x, y, z каждого из тел системы, дают для этих переменных следующие три уравнения, в которых и снова ставлю Φ вместо ΨDs :

$$\frac{d^2x}{dt^2} Dm + \frac{\partial \Pi}{\partial x} Dm - D, \left(\frac{\Phi Dx}{Ds} \right) = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} Dm + \frac{\partial \Pi}{\partial y} Dm - D, \left(\frac{\Phi Dy}{Ds} \right) = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} Dm + \frac{\partial \Pi}{\partial z} Dm - D, \left(\frac{\Phi Dz}{Ds} \right) = 0.$$

Эти уравнения являются совершенно точными, каково бы ни было движение тел; однако в том случае, когда эти движения очень малы, указанные уравнения упрощаются и становятся линейными, как мы это видели выше (§ 17).

19. Предположим, что в состоянии равновесия системы координаты x, y, z принимают значения a, b, c и что при движении эти координаты равны $a + \xi, b + \eta, c + \zeta$, где величинами ξ, η, ζ очень малы. Функция Π превращается в $\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial a} \xi + \frac{\partial \Pi}{\partial b} \eta + \frac{\partial \Pi}{\partial c} \zeta$. Таким образом, если в дальнейшем Π рассматривать как функцию только a, b, c , то три частных дифференциала $\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z}$ могут быть выражены следующим образом:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} \eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} \zeta \right),$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} \xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b^2} \eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} \zeta \right),$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} \xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} \eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c^2} \zeta \right).$$

С помощью таких же подстановок $a + \xi, b + \eta, c + \zeta$ вместо x, y, z , разности Dx, Dy, Dz перейдут в

$$Da + D\xi, \quad Db + D\eta, \quad Dc + D\zeta.$$

Что касается величины Φ , которая согласно допущению является функцией Ds , то если положить для краткости

$$Df = \sqrt{Da^2 + Db^2 + Dc^2},$$

мы получим сначала

$$Ds = Df + \frac{Da}{Df} D\xi + \frac{Db}{Df} D\eta + \frac{Dc}{Df} D\zeta;$$

затем, если через F обозначить то значение, которое принимает функция Φ , когда Ds мы заменяем выражением Df , и положить $\frac{dF}{dDf} = \frac{F'}{Df}$, то с помощью разложения мы получим

$$\Phi = F + F' \left(\frac{Da}{Df} \frac{D\xi}{Df} + \frac{Db}{Df} \frac{D\eta}{Df} + \frac{Dc}{Df} \frac{D\zeta}{Df} \right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Phi}{Ds} = \frac{F}{Df} + \frac{F' - F}{Df} \left(\frac{Da}{Df} \frac{D\xi}{Df} + \frac{Db}{Df} \frac{D\eta}{Df} + \frac{Dc}{Df} \frac{D\zeta}{Df} \right).$$

20. Указанные подстановки произведем в трех найденных выше уравнениях; так как в состоянии равновесия переменные ξ , η , ζ согласно допущению равны нулю, то эти уравнения должны удовлетворяться при этом допущении; таким образом постоянные члены должны уничтожиться, в результате чего мы сначала получим три условных уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} Dm - D, \left(F \frac{Da}{Df} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b} Dm - D, \left(F \frac{Db}{Df} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c} Dm - D, \left(F \frac{Dc}{Df} \right) = 0.$$

Эти уравнения дают значения, которые должны иметь коэффициенты a , b , c в положении равновесия; легко видеть, что они представляют в общем виде те уравнения, которые мы нашли в отд. V части I для равновесия многих тел, соединенных между собою растяжимой или нерастяжимой нитью.

21. Затем, если для краткости положить

$$G = F - F',$$

$$a' = \frac{Da}{Df}, \quad b' = \frac{Db}{Df}, \quad c' = \frac{Dc}{Df},$$

мы получим три следующих уравнения между переменными ξ , η , ζ и ξ

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} Dm + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} \eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} \zeta \right) Dm - \\ - D, \left[F \frac{D\xi}{Df} - G a' \left(a' \frac{D\xi}{Df} + b' \frac{D\eta}{Df} + c' \frac{D\zeta}{Df} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} Dm + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} \xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b^2} \eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} \zeta \right) Dm - \\ - D, \left[F \frac{D\eta}{Df} - G b' \left(a' \frac{D\xi}{Df} + b' \frac{D\eta}{Df} + c' \frac{D\zeta}{Df} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} Dm + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} \xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} \eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c^2} \zeta \right) Dm - \\ - D, \left[F \frac{D\zeta}{Df} - G c' \left(a' \frac{D\xi}{Df} + b' \frac{D\eta}{Df} + c' \frac{D\zeta}{Df} \right) \right] = 0.$$

Таковы уравнения, служащие для определения колебаний системы, относительно которых мы допускаем что они очень малы; они относятся к тому виду уравнений, которые называют *уравнениями в конечных разностях и бесконечно малых*, и так как они имеют постоянные коэффициенты, то к ним можно применять общий метод, изложенный в предыдущем параграфе.

22. Уравнения пункта 20, содержащие в себе условия равновесия, после перехода от разностей к суммам дают

$$F \frac{Da}{Df} = S \frac{\partial \Pi}{\partial a} Dm + A,$$

$$F \frac{Db}{Df} = S \frac{\partial \Pi}{\partial b} Dm + B,$$

$$F \frac{Dc}{Df} = S \frac{\partial \Pi}{\partial c} Dm + C,$$

где A, B, C являются производными постоянными; из них тотчас же получается

$$F = \sqrt{\left(S \frac{\partial \Pi}{\partial a} Dm + A\right)^2 + \left(S \frac{\partial \Pi}{\partial b} Dm + B\right)^2 + \left(S \frac{\partial \Pi}{\partial c} Dm + C\right)^2}.$$

В том случае когда F является заданной функцией Df , что бывает, когда мы допускаем, что тела взаимно притягиваются или отталкиваются с силой Φ , являющейся функцией их взаимных расстояний Ds , приведенное значение F дает значение Df , которое должно иметь место в состоянии равновесия.

Но в том случае, когда расстояния Ds мы рассматриваем как заданные и неизменные, величина Φ , занимающая место множителя λ (п. 14), неизвестна и ее следует определить с помощью приведенной выше формулы; но в данном случае мы имеем

$$Ds = Df$$

и, следовательно (п. 19),

$$\frac{Da}{Df} D\xi + \frac{Db}{Df} D\eta + \frac{Dc}{Df} D\zeta = 0,$$

что упрощает уравнения предыдущего пункта.

23. Смысл метода, изложенного в п. 4, заключается в следующем: мы допускаем, что каждая переменная может быть выражена с помощью одной и той же функции t , помноженной на некоторую величину, различную для каждой переменной.

Если эту функцию обозначить через θ , то мы будем иметь

$$\xi = \theta X, \quad \eta = \theta Y, \quad \zeta = \theta Z;$$

подставив эти значения в уравнения п. 21, мы легко увидим, что для удовлетворения этих уравнений необходимо, чтобы переменная θ была определена с помощью уравнения следующего вида:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + k\theta = 0;$$

в самом деле, подставив вместо $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ его значение $-k\theta$ и разделив все члены на θ , мы получим три следующих уравнения в конечных разностях:

$$kX Dm = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} X + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} Y + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} Z \right) Dm -$$

$$- D, \left[F \frac{DX}{Df} - G a' \left(a' \frac{DX}{Df} + b' \frac{DY}{Df} + c' \frac{DZ}{Df} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
kY Dm &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} X + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b^2} Y + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} Z \right) Dm - \\
&\quad - D, \left[F \frac{DY}{Df} - Gb' \left(a' \frac{DX}{Df} + b' \frac{DY}{Df} + c' \frac{DZ}{Df} \right) \right], \\
kZ Dm &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} X + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} Y + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c^2} Z \right) Dm - \\
&\quad - D, \left[F \frac{DZ}{Df} - Gc' \left(a' \frac{DX}{Df} + b' \frac{DY}{Df} + c' \frac{DZ}{Df} \right) \right].
\end{aligned}$$

24. Уравнение относительно θ легко интегрируется; оно дает

$$\theta = E \sin (t \sqrt{k} + \epsilon),$$

где E и ϵ — две произвольные постоянные.

Что касается уравнений относительно X, Y, Z , то они, вообще говоря, поддаются интегрированию в конечных выражениях с помощью известных методов только тогда, когда входящие в их состав коэффициенты постоянны; но если разложить конечные разности, обозначенные символом D , то они принимают следующий вид (п. 16):

$$AX + BY + CZ + A'X + B'Y + C'Z + A''X + B''Y + C''Z = 0;$$

коэффициенты $A, B, C, A', B', \dots$ являются постоянными или переменными, но независимыми от t , а величина k входит только в значения A', B', C' и криво только в первой степени.

Если обозначить через $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ последовательные значения X , начиная с первого, соответствующего первому телу системы, и точно так же через $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ соответствующие им последовательные значения Y и Z и затем эти значения подставить в три уравнения, приведенные к указанному выше виду, то легко видеть, что первые три уравнения дадут значения X_2, Y_2, Z_2 в линейных функциях $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1$, три следующих дадут X_3, Y_3, Z_3 в линейных функциях $X_2, Y_2, Z_2, X_1, Y_1, Z_1$, которые путем подстановки значений X_2, Y_2, Z_2 тоже станут линейными функциями $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1$ и так далее.

Таким образом вообще значения $X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}$ будут иметь следующий вид:

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 + A'X_1 + B'Y_1 + C'Z_1,$$

причем путем нечисления легко убедиться, что величины A, B, C будут рациональными и целыми функциями k , степени $(n-2)$ и что величины A', B', C' будут аналогичными функциями $(n-1)$ -й степени.

Мы допустим (п. 17), что первое и последнее тела системы неподвижны; первое тело относится к индексу нуль; следовательно, если через n обозначить число всех движущихся тел, то последнее тело, которое должно быть неподвижным, относится к индексу $n-1$. Таким образом должно иметь место

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = 0, \quad X_{n+1} = 0, \quad Y_{n+1} = 0, \quad Z_{n+1} = 0,$$

что дает три линейных уравнения между X_1, Y_1, Z_1 следующего вида: $A'X_1 + B'Y_1 + C'Z_1 = 0$, в которых коэффициенты A', B', C' являются рациональными и целыми функциями k , имеющими n -е измерение.

Если исключить величины X_1, Y_1, Z_1 , то получается уравнение относительно k степени $3n$, что соответствует числу неизвестных X, Y, Z , и, следовательно, это уравнение будет иметь $3n$ корней.

Эти же уравнения дадут и отношения между тремя величинами X_1, Y_1, Z_1 , так что значение одной из этих величин можно будет взять произвольным. Так как эти отношения выражаются с помощью рациональных функций k , можно значения трех величин X_1, Y_1, Z_1 выразить с помощью рациональных и целых функций k и, таким образом, неизвестные X, Y, Z будут тоже, вообще говоря, выражены с помощью известных рациональных и целых функций k .

25. Обозначим через $k', k'', k''', \dots, k^{(3n)}$ различные корни уравнения относительно k , решение которого следует предположить известным, и аналогично обозначим через $X', X'', X''', \dots, Y', Y'', Y''', \dots, Z', Z'', Z''', \dots$ соответствующие значения величин X, Y, Z , которые получаются в результате подстановки вместо k этих различных корней.

Итак, в соответствии с тем, что мы нашли раньше (п. 23 и 24)

$$\xi = XE \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon), \quad \eta = YE \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon), \quad \zeta = ZE \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon).$$

Если последовательно подставить различные значения k и взять различные произвольные постоянные E и ε , мы получим столько же частных значений ξ, η, ζ , сумма которых в соответствии с природой линейных уравнений даст полные значения этих переменных.

Эти частные значения ξ, η, ζ аналогичны тем выражениям, которые представляют малые колебания маятника, имеющего длину $\frac{g}{k}$ (п. 11), при условии, что k является величиной вещественной и положительной; движение каждого тела состоит из такого количества подобных колебаний, сколько имеется различных значений k ; таким образом в том случае, когда все эти значения между собою несоизмеримы, невозможно, чтобы система когда-нибудь вернулась в свое первоначальное состояние, — по крайней мере, если значения ξ, η, ζ не могут быть сведены к частным значениям, соответствующим только одному из корней k . Если в этом последнем случае в приведенных выше формулах положить $t = 0$, то мы получим $XE \sin \varepsilon, YE \sin \varepsilon, ZE \sin \varepsilon$ в качестве значений ξ, η, ζ и $XE \cos \varepsilon,$

$YE \cos \varepsilon, ZE \cos \varepsilon$, в качестве значений $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$. Следовательно, для того чтобы этот случай мог иметь место, необходимо, чтобы начальные смещения ξ, η, ζ , равно как и начальные скорости $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ были пропорциональны X, Y, Z , причем существует столько путей для выполнения этих условий, сколько имеется различных значений k .

26. Если обозначить верхними штрихами различные произвольные постоянные, то мы получим

$$\xi = X'E' \sin(t\sqrt{k'} + \varepsilon') + X''E'' \sin(t\sqrt{k''} + \varepsilon'') + \\ + X'''E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \varepsilon''') + \dots,$$

$$\eta = Y'E' \sin(t\sqrt{k'} + \varepsilon') + Y''E'' \sin(t\sqrt{k''} + \varepsilon'') + \\ + Y'''E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \varepsilon''') + \dots,$$

$$\zeta = Z'E' \sin(t\sqrt{k'} + \varepsilon') + Z''E'' \sin(t\sqrt{k''} + \varepsilon'') + \\ + Z'''E''' \sin(t\sqrt{k'''} + \varepsilon''') + \dots,$$

в качестве полных значений переменных ξ , η , ζ , выражающих колебания каждого из тел заданной системы, каково бы ни было их начальное состояние.

Эти значения можно представить в более простом виде, применив знаменатель $\sum$ для выражения суммы значений, соответствующих различным значениям k ; таким образом мы будем иметь

$$\xi = \sum [XE \sin (t\sqrt{k} + \varepsilon)],$$

$$\eta = \sum [YE \sin (t\sqrt{k} + \varepsilon)],$$

$$\zeta = \sum [ZE \sin (t\sqrt{k} + \varepsilon)].$$

Частные выражения для переменных $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots$ для каждого из тел системы мы получим, подставив в приведенные выше выражения $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ вместо X, Y, Z , и приняв для E и ε различные произвольные постоянные $E_1, E_2, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, зависящие от начального состояния системы.

27. Для того чтобы эти постоянные определить наиболее простым путем, я снова обращаюсь к уравнениям п. 21 относительно ξ, η, ζ и складываю их, умножив предварительно первое из них на X , второе на Y и третье на Z ; затем я беру сумму всех этих уравнений, составленных указанным образом, распространив ее на все тела системы, и обозначая эту сумму символом $\sum$; если принять во внимание, что этот символ независим от символа d дифференциалов, относящихся к t , то мы получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta) Dm + \\ & + \sum \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} X + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} Y + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} Z \right) \xi Dm + \\ & + \sum \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} X + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b^2} Y + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} Z \right) \eta Dm + \\ & + \sum \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} X + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial b \partial c} Y + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial c^2} Z \right) \zeta Dm - \\ & - \sum XD, \left[F \frac{D\xi}{Df} - Ga' \left(a' \frac{D\xi}{Df} + b' \frac{D\eta}{Df} + c' \frac{D\zeta}{Df} \right) \right] - \\ & - \sum YD, \left[F \frac{D\eta}{Df} - Gb' \left(a' \frac{D\xi}{Df} + b' \frac{D\eta}{Df} + c' \frac{D\zeta}{Df} \right) \right] - \\ & - \sum ZD, \left[F \frac{D\zeta}{Df} - Gc' \left(a' \frac{D\xi}{Df} + b' \frac{D\eta}{Df} + c' \frac{D\zeta}{Df} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

В этом уравнении члены, содержащие в себе под знаком суммирования $\sum$ разности, обозначенные символом D , поддаются преобразованиям, аналогичным тем, какие имеют место при интегрировании по частям; тип этих преобразований был нами указан в п. 16. Для этого рассмотрим вообще какой-либо член вида $\sum XD, (V D\xi)$; с помощью указанных в приведенном пункте преобразований, если при этом мы примем во внимание,

что величины X и ξ в начале и в конце интегрирования, обозначенных символом D , равны нулю (п. 24), то получим

$$S X D, (V D \xi) = -S V D \xi D X = S \xi, D (V D X).$$

Но $S \xi, D (V D X)$ — это то же самое, что $S \xi D, (V D X)$, если вместо члена $\xi, D (V D X)$ взять предыдущий ему член.

Таким образом мы получим вообще

$$S X D, (V D \xi) = S \xi D, (V D X);$$

аналогичные выражения мы получим и для других подобных членов.

Таким образом предыдущее уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} S (X \xi + Y \eta + Z \zeta) D m + S [(X) \xi + (Y) \eta + (Z) \zeta] = 0.$$

Величины, обозначенные через (X) , (Y) , (Z) , будут содержать в себе те же члены, которые образуют вторые части уравнений п. 23; таким образом эти уравнения дадут

$$(X) = k X D m, \quad (Y) = k Y D m, \quad (Z) = k Z D m,$$

откуда следует, что приведенное выше уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} S (X \xi + Y \eta + Z \zeta) D m + k S (X \xi + Y \eta + Z \zeta) D m = 0.$$

Отсюда путем интегрирования мы тотчас же получаем

$$S (X \xi + Y \eta + Z \zeta) D m = L \sin (t \sqrt{k} + \lambda),$$

где L и λ — две произвольные постоянные.

28. Из природы самого исчисления легко видеть, что если в этом уравнении вместо k подставить один из корней уравнения относительно k , которые мы обозначили через k' , k'' , k''' , ... (п. 25), то мы должны получить результат, тождественный с выражениями для ξ , η , ζ п. 26; следовательно, если в предыдущее уравнение подставить эти самые значения, то оно должно стать абсолютно тождественным для всех значений k .

Таким образом мы получим тождественное равенство

$$S \left\{ \begin{aligned} &X \sum [X E \sin (t \sqrt{k} + \varepsilon)] + \\ &+ Y \sum [Y E \sin (t \sqrt{k} + \varepsilon)] + \\ &+ Z \sum [Z E \sin (t \sqrt{k} + \varepsilon)] \end{aligned} \right\} D m = L \sin (t \sqrt{k} + \lambda)$$

для каждого из значений k' , k'' , k''' , ... величин k ; а так как это тождество должно иметь место независимо от значения t , то нетрудно убедиться, что все члены левой и правой частей уравнения, содержащиеся в себе одну и ту же дугу $t \sqrt{k}$, должны быть тождественными; отсюда прежде всего необходимо следует, что $\lambda = \varepsilon$ для всех значений λ и ε .

Далее, если обратить внимание на значение знаков S и $\sum$, из которых первый, S , выражает сумму стоящих под знаком величин, относящихся ко всем телам системы, т. е. сумму величин, которые мы обозначили числами, поставленными в виде знаков у основания букв (п. 24), а второй, $\sum$, выражает сумму аналогичных величин, соответствующих всем корням k' , k'' , k''' , ..., $k^{(3n)}$, которые мы обозначили штрихами сверху (п. 25), то путем

сравнения членов, в состав которых входит один и тот же синус, мы получим уравнение

$$E S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm = L.$$

Таким образом мы вообще будем иметь

$$E \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon) = \frac{L \sin(t\sqrt{k} + \lambda)}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm}$$

и, следовательно, согласно пункту 27

$$E \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon) = \frac{S(X\dot{\xi} + Y\dot{\eta} + Z\dot{\zeta}) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm};$$

это — уравнение, которое имеет силу для всех значений k .

29. Пусть теперь, когда $t=0$,

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \zeta = \gamma, \quad \text{и} \quad \frac{d\xi}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \dot{\beta}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \dot{\gamma};$$

эти шесть величин заданы начальным состоянием системы; следовательно, если их ввести в предыдущее уравнение, а также в то уравнение, которое получается путем дифференцирования его по t , то, положив $t=0$, мы получим следующие значения произвольных постоянных:

$$E \sin \varepsilon = \frac{S(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm},$$

$$E \cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{S(X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} + Z\dot{\gamma}) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm}.$$

Следовательно, если эти значения подставить в выражении для ξ , η , ζ , приведенные в пункте 26, то мы, наконец, получим

$$\begin{aligned} \xi &= \sum \left(X \frac{S(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm} \cos t\sqrt{k} \right) + \\ &+ \sum \left(\frac{X}{\sqrt{k}} \frac{S(X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} + Z\dot{\gamma}) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm} \sin t\sqrt{k} \right), \\ \eta &= \sum \left(Y \frac{S(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm} \cos t\sqrt{k} \right) + \\ &+ \sum \left(\frac{Y}{\sqrt{k}} \frac{S(X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} + Z\dot{\gamma}) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm} \sin t\sqrt{k} \right), \\ \zeta &= \sum \left(Z \frac{S(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm} \cos t\sqrt{k} \right) + \\ &+ \sum \left(\frac{Z}{\sqrt{k}} \frac{S(X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} + Z\dot{\gamma}) Dm}{S(X^2 + Y^2 + Z^2) Dm} \sin t\sqrt{k} \right). \end{aligned}$$

Эти формулы, столь же замечательные по своей общности, как и по своей простоте, содержат в себе решения многих проблем, анализ которых с помощью других методов был бы очень труден. Мы применим их к двум задачам, которые уже были разрешены в различных работах, так как эти решения в большей или меньшей степени страдают с точки зрения полноты.

§ III. Применение выведенных выше формул к колебаниям натянутой струны, нагруженной несколькими телами, и к колебаниям нерастяжимой нити, нагруженной любым количеством грузов и закрепленной в обоих концах или только в одном из них.

30. Найденные нами выражения для переменных ξ , η , ζ сильно упрощаются, когда в дифференциальных уравнениях п. 21 рассматриваемые переменные отделены. Тогда и переменные X , Y , Z оказываются отделенными в уравнениях п. 23 и каждое из этих уравнений с помощью процесса, изложенного в п. 24, дает особое уравнение m -й степени относительно k . Если через k , k_1 , k_2 обозначить значения k , соответствующие величинам X , Y , Z , заданным этими тремя уравнениями, и если при этом сохранить обозначения предыдущей статьи, то выражения для ξ , η , ζ в данном случае сводятся к следующим:

$$\xi = \sum \left(X \frac{S X \alpha D m}{S X^2 D m} \cos t \sqrt{k} \right) + \sum \left(\frac{X}{\sqrt{k}} \frac{S X \dot{\alpha} D m}{S X^2 D m} \sin t \sqrt{k} \right),$$

$$\eta = \sum \left(Y \frac{S Y \beta D m}{S Y^2 D m} \cos t \sqrt{k_1} \right) + \sum \left(\frac{Y}{\sqrt{k_1}} \frac{S Y \dot{\beta} D m}{S Y^2 D m} \sin t \sqrt{k_1} \right),$$

$$\zeta = \sum \left(Z \frac{S Z \gamma D m}{S Z^2 D m} \cos t \sqrt{k_2} \right) + \sum \left(\frac{Z}{\sqrt{k_2}} \frac{S Z \dot{\gamma} D m}{S Z^2 D m} \sin t \sqrt{k_2} \right).$$

31. Этот случай имеет место прежде всего тогда, когда мы допускаем, что тела в состоянии равновесия расположены на прямой линии; в самом деле, если мы примем эту линию в качестве оси x , то координаты b и c будут равны нулю, точно так же будут равны нулю и их производные Db , Dc ; из условных уравнений п. 20 будет вытекать требование, чтобы $\frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0$, т. е. чтобы силы, перпендикулярные к оси, были равны нулю. Тогда мы будем также иметь $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b} = 0$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c} = 0$, и уравнения п. 21 в силу того, что $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = 0$ и $G = F - F'$, примут следующий вид:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} D m + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \xi D m - D, \left(F' \frac{D \xi}{D t} \right) = 0,$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} D m - D, \left(F' \frac{D \eta}{D t} \right) = 0,$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} D m - D, \left(F' \frac{D \zeta}{D t} \right) = 0.$$

Следовательно, уравнения пункта 23 перейдут в следующие:

$$\left(k - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\right) X Dm + D, \left(F' \frac{DX}{Df}\right) = 0,$$

$$kY Dm + D, \left(F' \frac{DY}{Df}\right) = 0,$$

$$kZ Dm + D, \left(F' \frac{DZ}{Df}\right) = 0;$$

так видим, в этих уравнениях переменные отделены друг от друга, так что каждую из них можно определить особо.

Неопределенная постоянная величина k может, следовательно, быть различной в этих трех уравнениях, и каждое из последних даст уравнение n -й степени для определения этой постоянной. Таким путем мы получим формулы предыдущего пункта.

32. Так как в рассматриваемом случае $Db = 0$, $Dc = 0$, то $Df = Da$ (п. 19) и уравнения равновесия (п. 22) дают

$$F' = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial a} Dm + A.$$

Но для того чтобы получить значение величины F' (п. 19), следует знать значение F' в функции Df или Da ; тогда путем дифференцирования можно вывести значение F' в функции F .

Так, например, если допустить $\Phi = K(Ds)^m$, то мы получим $F' = K(Df)^m$, а отсюда $F' = mK(Df)^{m-1} = mF$.

В том случае, когда мы отвлекаемся от какой бы то ни было посторонней силы, мы имеем $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$, откуда получается $F' = A$ и, следовательно, тогда F

является постоянной для всех тел. Но значение F' может изменяться от одного тела к другому, по крайней мере когда расстояние Da между двумя следующими друг за другом телами не является тоже одинаковым для всех тел. В последнем случае величины F и F' являются двумя постоянными, которые могут быть определены а posteriori без знания закона функции Φ .

Последний случай — это случай натянутой нити или струны, оба конца которой закреплены и которая нагружена любым количеством тел, расположенных на равных друг от друга расстояниях; тогда величина F выражает натяжение нити или груз, который может его вызвать; однако величину F' нельзя вывести из F , не зная закона упругости струны.

Эта проблема, которая известна под названием *проблемы колеблющихся струн*, заслуживает особого исследования, так как, с одной стороны, она поддается общему решению, а с другой стороны, она тесно связана со знаменитой проблемой колебаний звучащих струн.

33. Допустим, что все тела Dm , которыми нагружена нить, равны между собою и лишены веса и что промежутки Df или Da , отделяющие их друг от друга в состоянии равновесия, тоже равны.

Так как n представляет число движущихся тел, то ясно, что если через M обозначить всю массу или же сумму всех масс Dm , включая и последнюю, которую мы принимаем неподвижной, и через l — длину струны в состоянии равновесия, то мы будем иметь

$$Dm = \frac{M}{n+1} \quad \text{и} \quad Df = Da = \frac{l}{n+1},$$

и три уравнения п. 31 относительно X , Y , Z примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{IMk}{(n+1)^2 F'} X + D_1^2 X &= 0, \\ \frac{IMk}{(n+1)^2 F'} Y + D_1^2 Y &= 0, \\ \frac{IMk}{(n+1)^2 F'} Z + D_1^2 Z &= 0.\end{aligned}$$

Так как эти уравнения совершенно аналогичны друг другу, достаточно разрешить первое из них; поставив F' вместо F' , мы затем получим решение и для других двух уравнений.

34. Пусть r будет показателем или индексом порядка, занимаемого каким-либо членом X в ряду X -ов; мы будем вообще обозначать этот член через X_r , а предыдущий X будет X_{r-1} . Тогда первое уравнение примет следующий вид:

$$\frac{IMk}{(n+1)^2 F'} X_r + D^2 X_{r-1} = 0.$$

Для разрешения этого уравнения положим

$$X_r = H \sin(r\varphi + e),$$

где H и e — две произвольных постоянных; с помощью известных формул умножения углов мы получим

$$D^2 X_{r-1} = X_{r+1} - 2X_r + X_{r-1} = -4H \sin(r\varphi + e) \sin^2 \frac{\varphi}{2};$$

если эти значения подставить в предыдущее уравнение, то последнее после деления на X_r примет следующий вид;

$$\frac{IMk}{(n+1)^2 F'} - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0,$$

откуда получается

$$\sqrt{k} = 2(n+1) \sqrt{\frac{F'}{IM}} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Но нам следует (п. 24) выполнить два условия: $X_0 = 0$ и $X_{n+1} = 0$. Первое из них дает $e = 0$, второе $\sin(n+1)\varphi = 0$, откуда получается $(n+1)\varphi = r\pi$, где π — угол в 180° , а r — любое целое число. Таким образом мы имеем $\varphi = \frac{r\pi}{n+1}$; следовательно, если положить $H = 1$, что вполне допустимо, то мы получим вообще

$$X_r = \sin \frac{r\pi}{n+1}.$$

Такое же выражение мы получим для Y_r и Z_r , которые следует подставить вместо X , Y , Z в выражения ξ , η , ζ пункта 30.

Если то же значение φ подставить в найденное выше выражение для $\sqrt{k}$, то получается

$$\sqrt{k} = 2(n+1) \sqrt{\frac{F'}{IM}} \sin \frac{r\pi}{2(n+1)};$$

здесь можно вместо r поставить все целые числа от 0 до n , ибо $r = n+1$ дает для X , Y , Z значения, равные нулю, а при значениях, превышающих $n+1$, синусы получают те же значения, какие они имели для $\frac{r\pi}{2(n+1)}$.

Таким образом мы имеем столько значений k , сколько имеется движущихся тел; эти значения являются корнями уравнения относительно k .

Если вместо F' поставить F , получается значение корней k_1, k_2 двух других уравнений относительно k .

Пропишем эти подстановки в общих формулах п. 30, причем обратим внимание на то обстоятельство, что знак суммирования $\sum$ должен относиться только к показателям или индексам порядка r от $r=1$ до $r=n$ и что знак суммирования $\sum$ должен относиться к индексам p различных корней, от $p=1$ до $p=n$.

Что касается величины $\sum X^2 Dm = Dm \sum X^2$, то в силу $\varphi = \frac{r\pi}{n+1}$, мы будем иметь следующее суммирование:

$$\sum X^2 = \sin^2 \varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi + \dots + \sin^2 n\varphi = \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} (\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \dots + \cos 2n\varphi) = \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos 2n\varphi - \cos (n+1)\varphi}{2(1 - \cos 2\varphi)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{n+1}{2}.$$

Точно так же мы получим $\sum Y^2 = \sum Z^2 = \frac{n+1}{2}$.

35. Так как значения k между собою несоизмеримы, то струна никогда не сможет вернуться в своему первоначальному положению, если только выражения ξ, η, ζ не сводятся к единственному члену (п. 25). В последнем случае, подставив в формулах упомянутой статьи вместо X, Y, Z и k найденные нами только что выражения и положив для краткости

$$h' = \sqrt{\frac{F'}{lM}}, \quad h = \sqrt{\frac{F}{lM}},$$

мы получим следующие выражения, в которых я сохраняю угол φ вместо его значения $\frac{r\pi}{n+1}$,

$$\xi = E \sin r\varphi \sin \left(h't \sin \frac{\varphi}{2} + \varepsilon \right),$$

$$\eta = E \sin r\varphi \sin \left(ht \sin \frac{\varphi}{2} + \varepsilon \right);$$

$$\zeta = E \sin r\varphi \sin \left(ht \sin \frac{\varphi}{2} + \varepsilon \right);$$

но при этом требуется, чтобы первоначальные значения $\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, соответствующие $t=0$, были пропорциональны $\sin r\varphi$. Это — известное решение, при котором допускается, что тела совершают лишь простые и изохронные колебания.

36. Для того чтобы получить общие выражения, применимые к любому начальному состоянию, следует воспользоваться формулами п. 30, подставив в них найденные выше (п. 34) значения. Для большей ясности применим к переменным ξ, η, ζ показатель или индекс r , поставленный внизу возле этих букв, чтобы таким образом отметить порядок тел, к которым они относятся; что же касается величин $\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, и X, Y, Z , находящихся под знаком суммы $\sum$, то для них мы применим показатель s вместо r , так как первый из них относится только к знаку $\sum$, который показывает, что следует взять сумму всех членов, соответствующих значениям s , от 0 до n .

Таким образом мы получим следующую общую формулу:

$$\xi_r = \sum \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \left\{ \begin{aligned} & S \alpha_s \sin s\varphi \cos \left[2(n+1)h't \sin \frac{\varphi}{2} \right] + \\ & + S \dot{\alpha}_s \sin s\varphi \frac{\sin \left[2(n+1)h't \sin \frac{\varphi}{2} \right]}{2(n+1)h' \sin \frac{\varphi}{2}} \end{aligned} \right\},$$

а для того, чтобы получить выражения η_r , ζ_r , следует лишь вместо h' взять h , а α , $\dot{\alpha}$ заменить величинами β , $\dot{\beta}$, и γ , $\dot{\gamma}$.

Переменные ξ_r выражают продольные смещения тел по прямой линии или оси, проходящей через оба конца струны, а переменные η_r , ζ_r выражают их поперечные или боковые смещения по направлению, перпендикулярному к оси, — единственные смещения, которые до сих пор исследовали при решении проблемы о колеблющихся струнах.

Что касается знака $\sum$, то следует вспомнить, что он выражает сумму всех величин, стоящих под этим символом, соответствующих $r = 1, 2, 3, \dots, n$; отсюда видно, что смещения каждого тела как продольные, так и поперечные складываются, вообще говоря, из такого количества частных смещений, аналогичных смещениям различных маятников, длиной которых равны

$$\frac{g}{4(n+1)^2 h'^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{g}{4(n+1)^2 h^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

где g означает силу тяжести, — сколько имеется движущихся тел.

Для того чтобы значения h и h' были вещественными, величины F и F' должны быть положительными (п. 35); следовательно, согласно допущению п. 32 показатель m должен быть положительным. В том случае когда тела друг друга отталкивают, F' будет величиной отрицательной и тогда показатель m тоже должен быть отрицательным; сверх того, чтобы поперечные колебания η и ζ были равны нулю, мы должны иметь $\beta = 0$, $\dot{\beta} = 0$, $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$.

37. Здесь следует сделать важное замечание по поводу только что найденного нами общего выражения для ξ_r . Хотя мы и предполагали, что число n движущихся тел задано и что струна, длина которой тоже задана, закреплена в обоих своих концах, тем не менее расчет не ограничивается этими допущениями и рассматриваемое выражение дает значение ξ_r для всех тел, расположенных на той же прямой линии, порядок которых выражается любым целым числом r , положительным или отрицательным.

В самом деле, так как это число r входит только в $\sin r\varphi$, то ясно, что ему можно дать какие угодно значения, и в то же время, так как $\varphi = \frac{\pi}{n+1}$, этот синус не изменяет своего значения, если вместо n подставить $2\lambda(n+1) + r$, и становится только отрицательным, если вместо r подставить $2\lambda(n+1) - r$, где λ — любое целое число, положительное или отрицательное. Отсюда следует, что если соответственно характеру расчета допустить, что струна простирается бесконечно далеко в обе стороны и что она по всей своей длине нагружена равными телами, расположенными на равных друг от друга расстояниях, то эти тела будут двигаться таким образом, что мы всегда будем иметь

$$\xi_{2\lambda(n+1) \pm r} = \pm \xi_r.$$

Но легко видеть, что формула $2\lambda(n+1) \pm r$ может выразить все целые числа, если допустить, что r заключается между 0 и $n+1$; в самом деле, пусть имеется какое-нибудь целое число; если его делить на $2(n+1)$ до тех пор, пока остаток, положительный или отрицательный, окажется меньше $n+1$, а это всегда возможно, и если λ принять в качестве частного, а $\pm r$ в качестве остатка, то это число выразится через $2\lambda(n+1) \pm r$. Таким образом значение ξ , относящееся к любому телу, помещенному на той же линии, на любом расстоянии от начала оси l , всегда сведется к значению ξ для одного из тел, расположенных на этой оси.

Так как найденное нами соотношение между различными значениями ξ является общим, каково бы ни было число r , то если вместо r поставить $\lambda(n+1) + r$ и взять нижний знак, мы получим

$$\xi_{\lambda(n+1) - r} = -\xi_{\lambda(n+1) + r}.$$

Отсюда легко заключить, что если мы представим себе всю неограниченную длину струны, разделенной на части, равные длине l заданной струны, то значения ξ в каждой из этих частей на равных расстояниях от точек деления будут между собою равны, но будут иметь различные знаки в двух смежных частях. Следовательно, если значения ξ для всех тел, расположенных на оси l , представить с помощью ординат вершин многоугольника, построенного на этой оси, то достаточно будет только перемещать этот многоугольник попеременно и симметрично вверх и вниз вдоль оси, продолженной в обе стороны до бесконечности, так что стороны, прилегающие к точке раздела, будут иметь один и те же величины, но будут направлены противоположно и будут лежать на одной и той же прямой; таким образом для каждого мгновения мы получим значения ξ для всех тел, которые мы предполагаем распределенными на одной и той же прямой линии, продолженной до бесконечности, — с помощью ординат вершин этого многоугольника, составленного из бесконечно большого количества частей. В каждой точке раздела эти значения равны нулю, так что тела, расположенные в этих точках, сами по себе остаются неподвижными; таким образом самый расчет удовлетворяет условию, чтобы оба конца заданной струны остались неподвижными.

То, что было доказано нами для переменных ξ , в равной мере действительно и для производных $\frac{d\xi}{dt}$; в самом деле, если выражение для ξ , продифференцировать по t , то мы получим выражение для $\frac{d\xi}{dt}$, по отношению к которому можно применить те же самые рассуждения, какие были изложены выше.

Следовательно, и значения для α и $\dot{\alpha}$, выражающие значения ξ и $\frac{d\xi}{dt}$ в первое мгновение и являющиеся произвольными для всех тел, расположенных на оси l , могут быть выражены с помощью подобного же построения на протяжении струны неограниченной длины.

Так как выражения для двух других переменных η и ζ отличаются от выражения для ξ только начальными значениями β , $\dot{\beta}$, и γ , $\dot{\gamma}$, занимающими места α , $\dot{\alpha}$, то те же выводы имеют силу и по отношению к этим переменным.

38. Отсюда можно сделать общий вывод, что если натянутая струна произвольной длины, нагруженная равными телами, расположенными на равных друг от друга расстояниях, разделена на ряд равных частей, причем

каждая из них заключена между двумя телами, и если все тела, за исключением находящихся в точках раздела, одновременно привести в колебание таким образом, чтобы движения тел, находящихся на равных расстояниях по обе стороны от точек раздела, были равны, но противоположно направлены, то в этом случае тела, расположенные в точках раздела, будут сами собою оставаться неподвижными и каждая часть струны будет двигаться таким образом, как если бы она была изолирована и оба ее конца были закреплены совершенно неподвижно.

Отсюда следует, что натянутая струна длины l , закрепленная в обоих своих концах, нагруженная n телами и разделенная на v частей, где v является делителем $n + 1$, если начальное состояние таково, что тела, находящиеся в точках раздела, не испытывают никакого толчка, а тела, лежащие на равных расстояниях по одну и другую сторону от точки раздела, получают одинаковые, но противоположно направленные толчки, то струна будет колебаться таким образом, как если бы точки раздела были неподвижны и струна имела только длину $\frac{l}{v}$.

39. Отделение переменных в уравнениях относительно ξ , η , ζ может быть проведено и без допущения, что в состоянии равновесия тела расположены на прямой линии, а на основе допущения, что при движении их взаимные расстояния не изменяются. В п. 14 мы указали, что этот случай связан с теми же общими формулами, если только рассматривать величину Φ , а следовательно, и величину F , как неопределенные величины, а в п. 22 мы видели, что в этом случае мы имеем условное уравнение

$$\frac{Da}{Df} D\xi + \frac{Db}{Df} D\eta + \frac{Dc}{Df} D\zeta = 0,$$

в силу которого в общих уравнениях п. 21 все члены, умноженные на G , исчезают.

Если принять во внимание только тяжесть тела и допустить, что оси абсцисс x и a расположены вертикально и направлены снизу вверх, то $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ будет равно ускоряющей силе тяжести, которую мы обозначим через g , и, далее, $\frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0$; уравнения упомянутого пункта примут тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} Dm - D, \left(F \frac{D\xi}{Df} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} Dm - D, \left(F \frac{D\eta}{Df} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} Dm - D, \left(F \frac{D\zeta}{Df} \right) &= 0, \end{aligned}$$

при котором переменные разделены.

Значение F будет равно (п. 22)

$$F = \sqrt{(g S Dm + A)^2 + B^2 + C^2}.$$

Уравнения относительно X , Y , Z примут тогда следующий вид (п. 23):

$$\begin{aligned} kX Dm + D, \left(F \frac{DX}{Df} \right) &= 0, \\ kY Dm + D, \left(F \frac{DY}{Df} \right) &= 0, \\ kZ Dm + D, \left(F \frac{DZ}{Df} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Как видим, последние уравнения совершенно подобны друг другу, так что можно положить $X=Y=Z$, ибо произвольные постоянные, которыми эти величины могут отличаться друг от друга, определяются одними и теми же условиями и, следовательно, тоже равны между собою. Таким образом значения ξ , η , ζ , данные общими формулами п. 30, будут отличаться друг от друга только начальными значениями α , β , γ , $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, которые могут быть произвольными.

Следовательно, вся трудность сводится к нахождению общего выражения X ; однако это не может быть осуществлено с помощью известных методов.

Последний случай касается движения нерастяжимой нити, нагруженной множеством грузов и закрепленной неподвижно в обоих своих концах.

40. Когда нить закреплена только в одном из своих концов, в качестве которого мы примем верхний конец, то так как нижнее тело должно быть свободно, значение Φ или F на нижнем конце нити согласно п. 17 должно быть равно нулю. Если этот конец принять в качестве начала абсцисс, которые мы будем считать направленными снизу вверх, и если, начиная отсюда, образовать сумму $\sum Dm$, то в этом месте значение F будет равно нулю, так что и $A=0$, $B=0$, $C=0$. Таким образом мы будем иметь $F=g \sum Dm$.

Так как в рассматриваемом случае мы имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = g, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0,$$

то уравнения пункта 22 дадут

$$Da = Df, \quad Db = 0, \quad Dc = 0,$$

т. е. что координаты b , c постоянны; таким образом в состоянии равновесия нить образует прямую линию, параллельную вертикальной оси абсцисс a . Следовательно, можно положить и $b=0$, $c=0$, если в качестве оси a принять вертикальную линию, проходящую через точку подвеса нити.

Этот случай, представляющий собою случай очень малых колебаний нити, подвешенной в неподвижной точке и нагруженной любым количеством грузов, тоже поддается общему решению в том случае, когда грузы между собою равны и расположены на равных друг от друга расстояниях.

41. Если в последнем случае обозначить через n число тел, через M сумму их масс Dm и через l длину нити, то мы будем иметь

$$Dm = \frac{M}{n}, \quad Df = Da = \frac{l}{n};$$

а если сверх того обозначить через r число тел, начиная с нижнего конца и до тела, которому соответствуют переменные ξ , η , ζ , то мы будем иметь

$$\sum Dm = (r-1) Dm = \frac{(r-1) M}{n},$$

а отсюда мы получим

$$F = \frac{g(r-1) M}{n}.$$

Если уравнение п. 39 относительно X умножить на $\frac{l}{gM}$, поставить X_r вместо X и принять во внимание, что X превращается в X_{r-1} , а X , в X_{r+1} , то это уравнение примет следующий вид:

$$\frac{l}{gn} X_r + D[(r-1)DX_{r-1}] = 0;$$

следовательно, если произвести дифференцирования, указанные символом D , то согласно формуле пункта 16 мы будем иметь

$$\frac{hk}{gn} X_r + (X_{r+1} - X_r) + (r-1) (X_{r-1} - 2X_r + X_{r+1}) = 0.$$

Ввиду наличия переменного коэффициента r , настоящее уравнение нельзя трактовать аналогично тем уравнениям, которые дают обыкновенные рекуррентные соотношения, но из него можно последовательно вывести значения $X_2, X_3, \dots$.

Для этого ему нужно лишь придать следующий вид, где $h = \frac{hk}{gn}$:

$$X_{r+1} = \frac{2r-h-1}{r} X_r - \frac{r-1}{r} X_{r-1}.$$

Отсюда, давая r последовательно значения $r=1, 2, 3, \dots$, мы получим

$$X_2 = (1-h) X_1,$$

$$X_3 = \frac{3-h}{2} X_2 - \frac{1}{2} X_1 = \left(1 - 2h + \frac{h^2}{2}\right) X_1,$$

$$X_4 = \frac{5-h}{3} X_3 - \frac{2}{3} X_2 = \left(1 - 3h + \frac{3h^2}{2} - \frac{h^3}{2 \cdot 3}\right) X_1,$$

$$X_5 = \left(1 - 4h + \frac{6h^2}{2} - \frac{4h^3}{2 \cdot 3} + \frac{h^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right) X_1$$

и так далее; таким образом мы будем иметь вообще

$$X_{r+1} = \left[1 - rh + \frac{r(r-1)}{4} h^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{4 \cdot 9} h^3 + \dots\right] X_1^*).$$

Так как верхний конец нити должен оставаться неподвижным, можно допустить, что этот конец соответствует телу, порядок которого равен $n+1$; поэтому мы должны иметь $X_{n+1} = 0$, что дает следующее уравнение, если вместо h поставить его значение $\frac{hk}{gn}$,

$$1 - \frac{hk}{g} + \frac{(n-1)h^2 k^2}{4ng^2} - \frac{(n-1)(n-2)h^3 k^3}{4 \cdot 9 n^2 g^3} + \dots = 0.$$

Это уравнение будет n -й степени относительно h и, следовательно, даст n значений h , которые мы обозначим вообще через $h^{(p)}$.

42. Таким образом в формулах п. 30 следует лишь подставить вместо X, Y и Z приведенное выше выражение X_r и вместо h значение $h^{(p)}$ и затем выполнить суммирования, обозначенные символами Σ и $\sum$. Следует, однако, принять во внимание, что в рассматриваемом случае, когда мы допускаем $Db=0, Dc=0$ (п. 40), условное уравнение п. 39 дает $D\xi=0$ и что, следовательно, ξ имеет одно и то же значение для всех тел, которое, однако, может быть функцией t ; для начала движения мы имеем a и $\dot{a}$, равные постоянным величинам; но так как первое тело согласно допуще-

*) Общий член этого ряда имеет следующий вид:

$$(-1)^p \frac{r(r-1) \dots (r-p+1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots p^2} h^p X_1.$$

либо неподвижно, то начальные значения α и $\dot{\alpha}$ для этого тела равны нулю; стало быть, они будут равны нулю и для всех остальных тел. Следовательно, и общее выражение переменной ξ будет равно нулю. К такому выводу мы приходим, если, как мы это сделали выше, пренебречь вторыми и более высокими степенями переменных ξ, η, ζ , которые мы считаем очень малыми. В самом деле, в силу $Ds^2 = Dx^2 + Dy^2 + Dz^2$ и $Db = 0, Dc = 0$ уравнение $Ds = Df$ пункта 19 дает

$$Da^2 = (Da + D\xi)^2 + D\eta^2 + D\zeta^2,$$

откуда следует

$$D\xi = -\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da};$$

таким образом переменные ξ будут величинами второго порядка по отношению η и ζ .

Обозначим теперь через Φ_r следующую функцию r :

$$1 - (r-1) \frac{k^{(p)}}{gn} + \frac{(r-1)(r-2)}{4} \left(\frac{k^{(p)}}{gn} \right)^2 - \\ - \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{4 \cdot 9} \left(\frac{k^{(p)}}{gn} \right)^3 + \dots$$

и в общем выражении для переменной η п. 30 подставим, как мы это сделали в п. 36, η_r вместо η и в членах, стоящих вне знака $\mathcal{S}$, подставим Φ_r вместо Y , а в тех членах, которые стоят под знаком $\mathcal{S}$, мы поставим s вместо r и $\beta_s, \dot{\beta}_s$ вместо β и $\dot{\beta}$. Таким образом для любого тела, порядок которого при счете снизу вверх равен r , мы получим

$$\eta_r = \sum \left[\frac{\Phi_r \mathcal{S}(\alpha_s \Phi_s)}{\mathcal{S}(\Phi_s)^2} \cos t \sqrt{k^{(p)}} \right] + \sum \left[\frac{\Phi_r \mathcal{S}(\dot{\alpha}_s \Phi_s)}{\mathcal{S}(\Phi_s)^2 \sqrt{k^{(p)}}} \sin t \sqrt{k^{(p)}} \right],$$

где знак $\mathcal{S}$ выражает сумму членов, соответствующих $s = 1, 2, 3, \dots, n$, а знак $\sum$ представляет сумму членов, соответствующих $r = 1, 2, 3, \dots, n$, если допустить, что $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}, \dots, k^{(n)}$ являются корнями уравнения $\Phi_{n+1} = 0$ относительно $k^{(p)}$.

Совершенно такое же выражение мы получим для переменной ζ_r , если величины $\beta_s, \dot{\beta}_s$ мы просто заменим величинами $\gamma_s, \dot{\gamma}_s$.

Таким образом проблема бесконечно малых колебаний нити, нагруженной любым количеством равных грузов, полностью разрешена; остается только определить корни уравнения относительно $k^{(p)}$, что в общем случае представляется невозможным.

43. Впрочем, хотя мы и не в состоянии определить этих корней, тем не менее можно быть уверенным, что все они должны быть вещественными, положительными и неравными; в противном случае значения ξ, η, ζ содержали бы в себе члены, которые со временем возрастают, что невозможно, так как в силу самой природы задачи ясно, что колебания нити должны всегда иметь лишь небольшие размеры, если начальные значения ξ, η, ζ очень малы.

Обратное имело бы место, если бы мы предположили, что величина g , выражающая тяжесть, отрицательна, т. е. что она действует в противоположном направлении; действительно, это был бы случай, когда точка подвеса вертикальной нити помещена в нижнем ее конце; тогда нить, будучи

хоть немного выведена из своего вертикального положения, перевернулась бы. В самом деле, если в уравнении относительно k положить g отрицательным, то все члены уравнения становятся положительными, так что уравнение может иметь лишь корни мнимые или отрицательные вещественные.

Приведенные результаты можно получить и а priori с помощью принципов, изложенных в п. 8, что может послужить для доказательства правильности этих принципов. В самом деле, если принять во внимание условие нерастяжимости нити, из которого вытекает (см. предыд. пункт; суммирование начинается с нижнего тела)

$$\xi = \xi_1 - S \frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

то значение V составит просто $S \Pi Dm$, и тогда мы будем иметь

$$\Pi = gx = ga + g\xi.$$

Но так как верхнее тело, соответствующее порядковому числу $n+1$, согласно допущению закреплено неподвижно, то в данном месте значение ξ должно быть равно нулю; следовательно, мы будем иметь

$$\xi_1 = S \left(\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da} \right);$$

при этом предполагается, что стоящая в скобках сумма представляет собою полную сумму. Поэтому мы имеем

$$\xi = S' \frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

где знак S' означает суммы, взятые в обратном порядке, начиная с самого верхнего тела, и представляющие собою равенств между всей суммой и частными суммами, обозначенными через S , которые должны начинаться с нижнего тела, где находится начало абсцисс.

Таким образом мы получаем

$$V = g S a Dm + g S Dm S' \frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

откуда видно, что часть V , содержащая в себе вторые степени переменных η и ζ , которые теперь являются независимыми друг от друга, необходимо всегда положительна и что, следовательно, корни уравнения относительно k все вещественны, положительны и неравны между собою. Обратное получилось бы, если бы мы дали g отрицательное значение.

§ IV. О колебаниях звучащих струн, рассматриваемых в качестве натянутых струн, нагруженных бесконечно большим количеством малых грузов, расположенных бесконечно близко друг от друга; о непрерывности произвольных функций.

44. Общее решение, данное нами для проблемы колеблющихся струн, имеет силу, каково бы ни было число n движущихся тел и каково бы ни было начальное состояние этих тел; следовательно, его можно применить и в том случае, когда n становится бесконечно большим, а промежутки между телами становятся бесконечно малыми, так что длина струны остается при этом неизменной; тогда движение каждого тела будет выражено

с помощью бесконечного ряда членов, сумма которых будет эквивалентна некоторой конечной функции, отличной от той функции, с помощью которой выражается каждый из его членов. Таков случай звучащей струны равномерной толщины, причем обычно его разрешают непосредственно с помощью дифференциального исчисления; между тем для анализа представляется, пожалуй, интересным показать, каким образом его можно вывести из общего решения, в особенности, — принимая во внимание то обстоятельство, что идя этим путем, мы уверены в получении решения, применимого к любой фигуре, какую струна может иметь в начале своего движения.

45. Отметим сначала, что если n предположить бесконечно большим, то значение $\sqrt{k}$ (п. 34) будет равно $\sqrt{\frac{F'}{lM}} \rho\pi$, так как предельное значение $2(n+1) \sin \frac{\rho\pi}{2(n+1)}$ составляет $\rho\pi$; таким образом корни уравнения относительно k , которые все между собою несоизмеримы, когда число n движущихся тел конечно, станут соизмеримыми, когда n будет бесконечно большим; их общей мерой будет $\pi \sqrt{\frac{F'}{lM}}$ при продольных смещениях ξ и $\pi \sqrt{\frac{F'}{lM}}$ при поперечных η и ζ ; отсюда следует, что по истечении времени $2\sqrt{\frac{lM}{F}}$ струна всегда будет принимать свой первоначальный вид по отношению к оси, каково бы ни было ее начальное состояние.

Конечно, число ρ тоже может стать бесконечно большим, т. е. могут быть такие случаи, когда уже нельзя будет принимать

$$2(n+1) \sin \frac{\rho\pi}{2(n+1)} = \rho\pi;$$

но так как это может случиться только после бесконечно большого числа членов в бесконечных рядах, обозначенных символом $\sum$, то из известной теории этих рядов следует, что эти особые случаи не представляют собою исключения из общего вывода.

В этом, впрочем, можно убедиться и непосредственно; в самом деле, в том случае, когда n бесконечно велико, конечные дифференциалы, обозначенные через D , становятся бесконечно малыми; поэтому уравнение п. 33 относительно X , при замене D знаком d и при подстановке вместо $n+1$ его значения $\frac{l}{da}$, принимает следующий вид:

$$\frac{Mk}{lF'} X + \frac{d^2 X}{da^2} = 0;$$

это уравнение после интегрирования дает

$$X = H \sin \left(a \sqrt{\frac{Mk}{lF'}} + \varepsilon \right).$$

Если $a=0$ и $a=l$, то X должно равняться нулю, так как оба конца струны неподвижны; первое условие дает $\varepsilon=0$, а второе дает $l \sqrt{\frac{Mk}{lF'}} = \rho\pi$, откуда следует, как и раньше, $\sqrt{k} = \rho\pi \sqrt{\frac{F'}{lM}}$.

Таким образом для того, чтобы в данном случае струна всегда возвращалась в свое первоначальное состояние, нет необходимости допускать, что она совершает только простые колебания, аналогичные колебаниям маятника, как мы это делали в п. 35; действительно, каково бы ни было

ее первоначальное состояние, мы уверены, что ее колебания будут всегда сами по себе изохронными и в то же время синхронными с колебаниями простого маятника, длина которого равна $\frac{g}{b}$. Однако закон этих колебаний будет отличен от закона колебаний маятников и будет зависеть от начального состояния струны.

Для того чтобы установить этот закон, следует посмотреть, во что превращаются общие выражения ξ , η , ζ в случае бесконечно большого n ; этот вопрос мы сейчас и последуем.

46. Подставим в общей формуле п. 36 $\frac{\rho\pi}{n+1}$ вместо φ и $\frac{\rho\pi}{2(n+1)}$ вместо $\sin \frac{\varphi}{2}$, принимая n бесконечно большим; вместо индексов r и s , обозначающих порядковый номер тел, к которым относятся переменные ξ и α , применим, что значительно проще, части самой оси или абсциссы, соответствующие этим телам, обозначив через x абсциссу, относящуюся к ξ , и через a абсциссу, относящуюся к α и к $\dot{\alpha}$. Так как согласно допущению вся длина струны равна l , то мы будем иметь

$$\frac{r}{n+1} = \frac{x}{l}, \quad \frac{s}{n+1} = \frac{a}{l}, \quad n+1 = \frac{l}{Da},$$

и рассматриваемая формула даст следующее общее выражение для продольных смещений ξ :

$$\xi = 2 \sum \sin \frac{\rho\pi x}{l} \left[A^{(\rho)} \cos(\rho\pi h' t) + A^{(\rho)} \frac{\sin(\rho\pi h' t)}{\rho\pi h'} \right],$$

где

$$A^{(\rho)} = S \left(\sin \frac{\rho\pi a}{l} \frac{a Da}{l} \right),$$

$$A^{(\rho)} = S \left(\sin \frac{\rho\pi a}{l} \frac{\dot{a} Da}{l} \right).$$

Знак $\sum$ обозначает здесь бесконечный ряд членов, соответствующих значениям $\rho=1, 2, 3, \dots$, а знак S обозначает другие бесконечные ряды членов, соответствующих всем значениям $a, Da, 2Da, 3Da, \dots$, так как Da бесконечно мало.

Аналогичные выражения мы получим для поперечных смещений η и ζ , если вместо h' поставим h и вместо $\alpha, \dot{\alpha}$ поставим $\beta, \dot{\beta}$ и $\gamma, \dot{\gamma}$.

47. Даниил Бернулли, обобщая решение задачи о звучащих струнах, данное Тейлором (Taylor), пришел к формуле, которая подобна приведенной выше, но в которой коэффициенты $A^{(\rho)}$ равны нулю, а коэффициенты $A^{(\rho)}$ обозначают просто произвольные постоянные, зависящие от начального вида струны (Mémoires des Berlin 1753); он полагал, что с помощью различных членов его формулы можно объяснить гармонические тоны, которые струна издает одновременно со своим основным тоном. Наша формула, в которой эти коэффициенты выражены с помощью начальных значений $\alpha, \dot{\alpha}$, дает нам возможность дополнить это объяснение, которое после Бернулли было принято многими авторами.

В самом деле, легко видеть, что основной тон струны получается от первого или от двух первых членов ряда, соответствующих $\rho=1$, и что последовательные гармонические тона, т. е. октава, двудецима, двойная октава, ... получаются от следующих членов, соответствующих $\rho=2, 3, 4, 5, \dots$. Итак, для того чтобы основной тон доминировал над всеми

другими и чтобы одновременно были слышны только первые гармонические тона, следует допустить, что коэффициенты $A^{(1)}$, $\dot{A}^{(1)}$ значительно больше всех остальных, вместе взятых, и что дальнейшие коэффициенты

$$A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, \dots, \dot{A}^{(2)}, \dot{A}^{(3)}, \dot{A}^{(4)}, \dots$$

образуют очень сильно сходящиеся ряды. Однако из характера зависимости этих коэффициентов от начальных значений α и $\dot{\alpha}$ видно, что это допущение неприменимо, если начальное состояние струны рассматривать как произвольное; мы видим даже, что в большинстве случаев эти коэффициенты образуют расходящиеся ряды, что, однако, не мешает тому, чтобы струна совершала вихронные или одинаковой продолжительности колебания, — единственное условие, необходимое для образования тона.

48. Хотя формулы п. 46 дают точно движение струны по истечении любого времени t , тем не менее бесконечные ряды, входящие в эти формулы, не дают возможности составить себе ясное и наглядное представление об этом движении. Однако, если общую формулу рассмотреть с другой точки зрения, то из нее можно вывести простое однообразное построение для определения состояния струны в любой момент времени, каково бы ни было ее первоначальное состояние.

Вернемся к этой формуле и представим ее в следующем виде, что допустимо ввиду независимости знаков суммирования $\sum$ и $\sum$:

$$\xi_r = S \alpha_s \sum \left\{ \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi \cos \left[2(n+1) h't \sin \frac{\varphi}{2} \right] \right\} + \\ + S \dot{\alpha}_s \sum \left\{ \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi \frac{\sin \left[2(n+1) h't \sin \frac{\varphi}{2} \right]}{(n+1) h' \sin \frac{\varphi}{2}} \right\}.$$

Из этой формулы сначала выведем одно следствие, которое будет для нас очень полезно. Так как согласно допущению α представляет собою начальное значение ξ (п. 29), то если в приведенном выше выражении для ξ_r положить $t=0$, оно превратится в α_r , и, следовательно, у нас получится следующее тождественное равенство:

$$\alpha_r = S \alpha_s \sum \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi.$$

Ясно, что правая часть этого равенства не может свестись к α_r , если только мы не имеем вообще

$$\sum \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi = 0,$$

когда s отлично от r ; а когда $s=r$, мы имеем

$$\sum \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \sin r\varphi = 1,$$

где φ равно $\frac{n+1}{r\pi}$, а знак $\sum$ относится к последовательным значениям 1, 2, 3, ..., n величины r ; это дает нам ряд, образованный из произведений синусов углов, кратных $\frac{r\pi}{n+1}$ и $\frac{s\pi}{n+1}$, сумма которых в первом случае всегда должна быть равна нулю, а во втором $\frac{n+1}{2}$. Этот вывод может

быть получен непосредственно с помощью известных формул для суммирования этого вида рядов.

В приведенных формулах r и s являются согласно допущению любыми целыми числами, заключающимися между 0 и $n+1$. Но так как $\varphi = \frac{r\pi}{n+1}$, где p — тоже целое число, то если вместо r поставить $2\lambda(n+1) \pm r$, где λ — любое целое число, положительное или отрицательное, то мы будем иметь

$$\sin [2\lambda(n+1) \pm r] \varphi = \pm \sin r\varphi;$$

следовательно, мы получим вообще

$$\sum \left\{ \frac{2 \sin [2\lambda(n+1) \pm r] \varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\} = \pm 1 \quad \text{или} = 0,$$

в зависимости от того, равны ли между собою s и r или не равны.

Выражение $2\lambda(n+1) \pm r$ может представить все целые числа, положительные или отрицательные, — как мы это уже видели в п. 37; следовательно, если мы имеем какое-либо целое число N , мы можем положить $N = 2\lambda(n+1) \pm r$, откуда получится $r = \pm [N - 2\lambda(n+1)]$ и тогда мы получим вообще, каково бы ни было число N ,

$$\sum \frac{\sin N\varphi \sin s\varphi}{n+1} = \pm \frac{1}{2} \quad \text{или} = 0,$$

в зависимости от того, имеем ли мы равенство $s = \pm [N - 2\lambda(n+1)]$ или же нет, где s — целое число, заключающееся между 0 и $n+1$.

49. На основе изложенного и, принимая во внимание, что выражение для ξ_r состоит из двух частей, из которых первая содержит в себе начальные значения α переменной ξ , а вторая содержит в себе начальные значения $\dot{\alpha}$ дифференциалов $\frac{d\xi}{dt}$, мы рассмотрим отдельно каждую из этих частей, причем первую обозначим через ξ_r' , а вторую через ξ_r'' , так что мы будем иметь $\xi_r = \xi_r' + \xi_r''$.

Если допустить, что n — бесконечно велико, то угол $\varphi = \frac{r\pi}{n+1}$ станет бесконечно малым, и $\sin \frac{\varphi}{2}$ сведется к $\frac{\varphi}{2}$ (п. 46). Произведя соответствующие подстановки в выражении для ξ_r' , мы получим (п. 48)

$$\xi_r' = S \alpha_s \sum \frac{2}{n+1} \sin r\varphi \sin s\varphi \cos (n+1) h't\varphi;$$

а разложив произведение $\sin r\varphi \cos (n+1) h't\varphi$ в ряд,

$$\begin{aligned} \xi_r' = S \alpha_s \sum \left\{ \frac{\sin [r + (n+1) h't] \varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\} + \\ + S \alpha_s \sum \left\{ \frac{\sin [r - (n+1) h't] \varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Так как n должно быть бесконечно большим числом, то число $(n+1) h't$ мы всегда можем рассматривать как целое число, каково бы ни было число, выражающееся через $h't$.

Таким образом, если в последней формуле предыдущего пункта положить $N = r + (n + 1)h't$, то мы получим

$$S_{\alpha_s} \sum \left\{ \frac{\sin [r + (n + 1)h't] \varphi}{n + 1} \sin s\varphi \right\} = \pm \frac{1}{2} \alpha_s,$$

где

$$s = \pm [r + (n + 1)h't - 2\lambda(n + 1)];$$

и если положить $N = r - (n + 1)h't$, то мы получим аналогично

$$S_{\alpha_{s'}} \sum \left\{ \frac{\sin [r - (n + 1)h't] \varphi}{n + 1} \sin s'\varphi \right\} = \pm \frac{1}{2} \alpha_{s'},$$

где

$$s' = \pm [r - (n + 1)h't - 2\lambda'(n + 1)],$$

а λ и λ' являются любыми целыми числами или равны нулю.

Объединив два приведенных выше значения, мы таким образом получим просто

$$\xi_r = \frac{1}{2} (\pm \alpha_s \pm \alpha_{s'}),$$

где двойные знаки α_s и $\alpha_{s'}$ соответствуют знакам s и s' .

50. Вместо показателей или индексов r и s , указывающих порядковый номер тел, к которым относятся переменные ξ и α , представляется более удобным применить части самой струны, заключающиеся между первым неподвижным концом и этими телами.

Обозначим, как в п. 46, через x часть оси или абсциссу, соответствующую ξ , а через a — соответствующую α ; так как длина струны равна l , то мы имеем

$$\frac{r}{n + 1} = \frac{x}{l}, \quad \frac{s}{n + 1} = \frac{a}{l},$$

а также $\frac{s'}{n + 1} = \frac{a'}{l}$, что дает

$$r = \frac{(n + 1)x}{l}, \quad s = \frac{(n + 1)a}{l}, \quad s' = \frac{(n + 1)a'}{l};$$

следовательно, вместо $\xi_r, \alpha_s, \alpha_{s'}$ можно написать просто $\xi_x, \alpha_a, \alpha_{a'}$.

Подставив эти значения r, s, s' в формулы предыдущего пункта, помножив на l и разделив на $n + 1$, мы получим

$$\begin{aligned} a &= \pm (x + h't - 2\lambda l), \\ a' &= \pm (x - h't - 2\lambda' l), \\ \xi_x &= \frac{1}{2} (\pm \alpha_a \pm \alpha_{a'}), \end{aligned}$$

где двойные знаки α_a и $\alpha_{a'}$ соответствуют двойным знакам a и a' ; эти знаки, равно как и значения a и a' , следует определить таким образом, что эти значения были положительными и меньшими, чем l .

51. Обозначим через A и A' значения $\pm \alpha_a$ и $\pm \alpha_{a'}$, так что мы будем иметь вообще

$$\xi_x = \frac{A + A'}{2}.$$

Следовательно,

1) если $x + lh't$ лежит между 0 и l , надо принять $\alpha = x + lh't$ и $A = +\alpha_a$;

2) если $x + lh't$ лежит между l и $2l$, надо принять $\alpha = -(x + lh't - 2l)$ и $A = -\alpha_a$;

3) если $x + lh't$ лежит между $2l$ и $3l$, надо принять $\alpha = x + lh't - 2l$ и $A = +\alpha_a$ и так далее.

Точно так же

1) если $x - lh't$ лежит между l и 0, надо принять $\alpha' = x - lh't$ и $A' = \alpha_a$;

2) если $x - lh't$ лежит между 0 и $-l$, надо принять $\alpha' = -(x - lh't)$ и $A' = -\alpha_a$;

3) если $x - lh't$ лежит между $-l$ и $-2l$, надо принять $\alpha' = x - lh't + 2l$ и $A' = \alpha_a$ и так далее.

Как видим, эти различные случаи сводятся к определению абсциссы α и α' путем прибавления или вычитания из абсциссы x отрезка $lh't$, причем если полученное значение переступит через один или другой конец оси l , то отрезок следует отложить вперед или назад, как если бы на обоих концах происходило отражение от помещенных там препятствий, а соответствующую ординату α_a или α_a' следует взять положительной, когда число отражений четное, или отрицательной, когда это число нечетное.

52. Однако еще проще будет продолжить кривую величин α на той же оси l , продолженной в обе стороны, так что можно непосредственно получить ординаты α_a и α_a' , соответствующие абсциссам $x + lh't$ и $x - lh't$.

Для этой цели следует сначала построить на оси l многоугольник с бесконечно большим количеством сторон или кривую, ординаты которой для какой-либо абсциссы x составляют α_x и которая задана начальными значениями смещений ξ_x всех точек струны; эту кривую следует перемещать попеременно сверху и снизу той же самой оси, бесконечно продолженной в обе стороны, так что в результате получится непрерывная кривая, составленная из равных ветвей, которые расположены симметрично относительно оси и соединяются своими концами; на этой кривой ординаты точек, равно удаленных от одного и другого конца оси l , всегда равны по своей длине, но противоположны по направлению.

Если на этой кривой взять ординаты, соответствующие абсциссам $x + lh't$ и $x - lh't$, то мы получим значения A и A' , и значение переменной ξ'_x по истечению какого-либо времени t будет представлено с помощью формулы

$$\xi'_x = \frac{1}{2} (\alpha_{x+lh't} + \alpha_{x-lh't}).$$

Указанное продолжение кривой, выражающей значения α , можно было бы прямо вывести из того, что в общем виде было нами доказано в п. 37, — если допустить, что струна вместо того, чтобы быть ограниченной двумя неподвижными точками, простирается в обе стороны до бесконечности; тогда многоугольник, который мы мысленно представили себе в настоящем пункте, превратится в непрерывную кривую, которая, будучи приложена к первому мгновению движения, представит кривую значений величин α , продолженную до бесконечности.

53. Рассмотрим теперь вторую часть ξ_r'' , которую мы обозначили через ξ_r'' и которая представлена формулой (п. 46)

$$\xi_r'' = S \dot{\alpha}_s \sum \left\{ \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi \frac{\sin \left[2(n+1) h' t \sin \frac{\varphi}{2} \right]}{2(n+1) h' \sin \frac{\varphi}{2}} \right\}.$$

Здесь следует начать с того, чтобы освободиться от знаменателя $\sin \frac{\varphi}{2}$; тогда эта формула станет подобной формуле для ξ_r' и ее можно будет подвергнуть таким же преобразованиям.

Для этой цели я беру разность $D\xi_r''$, по так как показатель r входит только в $\sin r\varphi$, достаточно поставить символ D только перед этим синусом.

Согласно известным теоремам мы имеем

$$D \sin r\varphi = \sin(r+1)\varphi - \sin r\varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(r + \frac{1}{2} \right) \varphi.$$

Подставив это значение в выражение для $D\xi_r''$, мы получим

$$D\xi_r'' = \frac{1}{(n+1)h'} S \dot{\alpha}_s \sum \left\{ \frac{2 \cos \left(r + \frac{1}{2} \right) \varphi}{h+1} \sin s\varphi \sin \left[2(n+1) h' t \sin \frac{\varphi}{2} \right] \right\}.$$

Для случая бесконечно большого n , положив $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$ и разложив произведение $\cos \left(r + \frac{1}{2} \right) \varphi \sin(n+1) h' t \varphi$, мы получим

$$D\xi_r'' = + \frac{1}{(n+1)h'} S \dot{\alpha}_s \sum \frac{\sin \left[r + (n+1) h' t + \frac{1}{2} \right] \varphi}{n+1} \sin s\varphi - \\ - \frac{1}{(n+1)h'} S \dot{\alpha}_s \sum \frac{\sin \left[r - (n+1) h' t + \frac{1}{2} \right] \varphi}{n+1} \sin s\varphi.$$

Это выражение $D\xi_r''$ состоит из двух частей, аналогичных частям выражения для ξ_r' (п. 49); стало быть к ним можно применить те же рассуждения и придать им такой же вид.

Следовательно, если на оси l построим многоугольник с бесконечно большим числом сторон или кривую, ординаты которой для каждой абсциссы x равны $\dot{\alpha}_x$ и которая задана начальными скоростями $\dot{\alpha}$, и будем ее перемещать попеременно сверху и снизу от той же оси, неопределенно продолженной в обе стороны, то в результате этого мы получим непрерывную кривую, подобную кривой предыдущего пункта. Если затем поставить $\frac{l}{Dx}$ или $\frac{l}{Dx}$ вместо $n+1$ и пренебречь величиной $\frac{1}{2(n+1)}$, считая ее равной нулю по сравнению с x , то мы получим

$$D\xi_x'' = \frac{Dx}{2lh'} (\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}),$$

а отсюда, переходя от разностей к суммам

$$\xi_x'' = \frac{1}{2lh'} S (\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}) Dx.$$

54. Как видим, эти суммы или интегралы выражают площади кривых, координаты которых равны $\dot{a}$; счет этих площадей следует начинать только с точек, где $x=0$ или где абсциссы равны lh'/t и $-lh'/t$; однако удобнее начинать счет с общего начала абсцисс, каковым является внешний край отрезка l . Для этой цели следует из площади, начинающейся в указанной точке и соответствующей абсциссе $x + lh'/t$, вычесть площадь, соответствующую абсциссе lh'/t , с тем, чтобы оставшаяся площадь начиналась в точке $x=0$; что же касается площади, соответствующей абсциссе $x - lh'/t$, то к ней следует прибавить площадь, соответствующую $-lh'/t$, с тем, чтобы ее начало отнести к той же точке начала абсцисс.

Обозначим вообще через $\left(\int \dot{a} dx\right)_x$ всякую площадь, которая начинается в этом начале и которая соответствует какой-либо абсциссе x ; согласно тому, что мы сказали выше, мы имеем в выражении для ξ_x''

$$\begin{aligned} S \dot{a}_{x+lh'/t} Dx &= \left(\int \dot{a} dx\right)_{x+lh'/t} - \left(\int \dot{a} dx\right)_{lh'/t}, \\ S \dot{a}_{x-lh'/t} Dx &= \left(\int \dot{a} dx\right)_{x-lh'/t} + \left(\int \dot{a} dx\right)_{-lh'/t}. \end{aligned}$$

Подставим эти значения и заметим, что вообще

$$\left(\int \dot{a} dx\right)_{lh'/t} + \left(\int \dot{a} dx\right)_{-lh'/t} = 0,$$

так как согласно природе кривой величины $\dot{a}$ ординаты, соответствующие равным, но с противоположными знаками, абсциссам, тоже между собою равны и имеют противоположные знаки; так что мы всегда имеем $\dot{a}_{lh'/t} + \dot{a}_{-lh'/t} = 0$.

Таким образом мы получим просто (предыд. пункт)

$$\xi_x'' = \frac{1}{2lh'} \left[\left(\int \dot{a} dx\right)_{x+lh'/t} - \left(\int \dot{a} dx\right)_{x-lh'/t} \right].$$

55. Наконец, соединив значения ξ_x' и ξ_x'' , мы получим следующее общее выражение для ξ_x к концу любого времени t

$$\xi_x = \frac{1}{2} \left(\alpha_{x+lh'/t} + \alpha_{x-lh'/t} \right) + \frac{1}{2lh'} \left[\left(\int \dot{a} dx\right)_{x+lh'/t} - \left(\int \dot{a} dx\right)_{x-lh'/t} \right].$$

Аналогичные выражения получаются для переменных η_x , ζ_x , если только вместо h' поставить h и вместо α , $\dot{a}$ поставить β , $\dot{\beta}$, γ и $\dot{\gamma}$ и если допустить, что кривые, соответствующие начальным значениям β , $\dot{\beta}$ и γ , $\dot{\gamma}$, мы обозначали одинаковым образом.

Определив таким образом продольные смещения ξ_x и поперечные смещения η_x и ζ_x каждой точки струны, соответствующей вьзтой на оси абсциссе x , мы будем знать положение струны к концу любого времени t , истекшего с начала движения, а так как начальные значения α , β , γ , равно как $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, совершенно произвольны, то мы видим, что ничто не может ограничить этого решения, поскольку кривые, составленные по этим значениям, имеют постоянную кривизну и не образуют каких-либо конечных углов, в результате чего могли бы возникнуть скачки в выражениях для скоростей и для ускоряющих сил.

Мы приняли (п. 35) $h = \sqrt{\frac{F}{lM}}$, $h' = \sqrt{\frac{F'}{lM}}$, где l — длина струны и M — масса всех расположенных на ней грузов (п. 33); таким образом M будет массой или весом всей струны, которая согласно допущению имеет равномерную толщину; следовательно, если через P обозначим удельный вес струны, зависящий от ее плотности и толщины, то мы будем иметь $M = lP$; ятак, мы получим

$$h = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{F}{P}}, \quad h' = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{F'}{P}}.$$

Что касается величин F и F' , то мы видели, что они представляют собою две постоянные величины, из которых одна, F , выражает натяжение струны и, следовательно, пропорциональна натягивающему ее грузу, а другая, F' , зависит от закона этого натяжения в части, касающейся растяжения струны (п. 32).

56. Хотя природа кривых, представляющих значения α и α' , мало исследована, тем не менее легко видеть, что ординаты, удаленные друг от друга промежутком в $2l$, всегда между собою равны и имеют одинаковый знак и что площади, заканчивающиеся в этих ординатах, тоже между собою равны, так как вся площадь, соответствующая промежутку в $2l$, взятая в любом месте оси, продолженной до бесконечности, всегда равна нулю, ибо она составлена из двух частей, равных между собою, но имеющих противоположные знаки.

Отсюда следует, что значение ξ_x остается неизменным, если время t увеличить на $\frac{2}{h}$ или на любое кратное этой величины; следовательно, продольные смещения струны становятся одинаковыми к концу промежутка времени, равного $\frac{2}{h}$ или $2l \sqrt{\frac{P}{F}}$; это продолжительность продольных колебаний.

То же самое относится к значениям η_x и ξ_x , если вместо h' взять h , т. е. вместо F' взять F ; следовательно, продолжительность поперечных колебаний равна $2l \sqrt{\frac{P}{F}}$.

Все авторы, писавшие до сих пор по вопросу о колебаниях звучащих струн, последовали только поперечные колебания, причем для их продолжительности они нашли ту же самую формулу, какую мы дали выше.

Что касается продольных колебаний, то насколько я знаю только Хладни (Chladni) упомянул о них в своем интересном трактате по акустике, § 43; он указывает способ их получения на скрипичной струне и отмечает, что издаваемый ими тон отличается от тона, получаемого при поперечных колебаниях, откуда следует, что F' отлично от F ; таким образом при наличии весьма вероятной гипотезы, что упругая сила, с которой каждый элемент струны сопротивляется своему растяжению или укорочению, пропорциональна некоторой степени m этого элемента, т. е. что $\Phi = K(Ds)^m$ (п. 14), m должно быть отлично от единицы (п. 32), и если, как, повидимому, полагал Хладни, продольный тон всегда выше поперечного, мы должны иметь $F' > F$ и, следовательно, $m > 1$.

57. Мы видели (п. 36), что натянутая струна длины l , нагруженная n телами, может двигаться таким образом, как если бы она имела только длину $\frac{l}{\gamma}$, где γ является делителем $n + 1$. Когда n бесконечно большое число, γ может быть любым целым числом; таким образом звучащая струна

длины l может колебаться подобно струне, длина которой составляет $\frac{v}{f}$, т. е. некоторую аликвотную часть l ; продолжительность ее колебаний сводится тогда к $\frac{2l}{v} \sqrt{\frac{P}{F}}$ для продольных колебаний и к $\frac{2l}{v} \sqrt{\frac{P}{F}}$ для поперечных.

В самом деле, если начальные и произвольные значения α и α' таковы, что кривые или соответствующие места на оси l разделяют эту ось на две или на v равных частей и ветви, соответствующие этим частям, одинаковы, но расположены попеременно выше и ниже оси, так что на равных расстояниях по обе стороны от каждой из точек раздела ординаты равны и имеют противоположный знак, то эти кривые, будучи затем продолжены до бесконечности, будут согласно построению п. 49 иметь тот же вид, как если бы они получались из струны, длина которой составляет только $\frac{l}{v}$, а общее выражение ξ_x (п. 52) показывает, что значения ξ , соответствующие точкам раздела, всегда равны нулю; таким образом при продольных своих колебаниях струна сама собою разделяется на соответствующее число равных частей, которые колеблются таким образом, как если бы их концы были неподвижны.

То же самое относится и к поперечным колебаниям, представленными переменными η и ζ .

58. Так как тон, издаваемый звучащей струной, зависит только от продолжительности ее изохронных колебаний, которая для одной и той же натянутой струны пропорциональна ее длине, то отсюда следует, что струна, разделяясь сама собою на равные части, издает такие тона, которые относятся к главному тону, когда струна колеблется вся целиком, как дробь, выражающие эти части, относятся к единице. Следовательно, когда струна разделяется на 2, 3, 4, ... равные части, то эти тоны выражаются дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... и, значит, составляют октаву, дуодециму, двойную октаву и т. д. основного тона.

Эти тоны, которые струна сама собою может издавать, называют *гармоническими тонами*; известно, что их можно по желанию вызвать, если во время колебания струны слегка прикоснуться к ней в одной из точек раздела, которые называют *узлами колебаний*, — введя за Совером (Sauveur), который с помощью этих узлов впервые в *Mémoires de l'Académie des Sciences* за 1701 г. объяснил гармонические тоны монохорды и других инструментов. Валлис (Wallis) наблюдал их уже у струн, издававших тоны на октаву, дуодециму, двойную октаву и т. д. ниже той струны, которую заставляли звучать; звуча вместе с нею, они естественно разделялись на две, три, четыре, ... равных части, из которых каждая могла издавать тот же самый тон, какой издавала струна, которую заставляли звучать. (См. главу 107 его *Алгебры*.)

59. Теория и опыт находятся между собою в хорошем согласии по вопросу о получении гармонических тонов; но не так легко найти причину того явления, которое введя за Рамо (Rameau), положившего его в основание своей „Системы“, называют *резонансом звучащего тела* и которое заключается в соединении гармонических звуков с основным тоном у всякой струны, которую заставляют звучать произвольным образом.

Если эти гармонические звуки действительно падают на струну одновременно с ее основным звуком, то следует предположить, что струна одновременно совершает целые колебания и частичные и что ее действи-

тельные колебания состоят из этих различных колебаний, подобно тому, как всякое движение может быть составлено или может считаться составленным из многих других движений.

Раньше (п. 47) мы уже видели, что с помощью формулы Даниэля Бернулли невозможно достаточно ясно объяснить одновременное существование гармонических звуков; к этому можно добавить, что ряды, которые могли бы дать эти различные тоны, исчезают из формулы, когда мы допускаем, что число тел бесконечно велико и что при этом допущении, как мы это недавно доказали, для каждой точки струны получается закон простой и однообразной изохронности, непосредственно и просто зависящей от начального состояния.

Впрочем, если бы мы пожелали во что бы то ни стало объяснить многократный резонанс струн с помощью сложных колебаний, то нам пришлось бы, например, считать, что начальная фигура струны составила из различных наложенных друг на друга кривых, так что одна из них является осью для следующей, причем первая образует на всем протяжении струны только одну ветвь; вторая образует две ветви, равные и расположенные симметрично, разделяющие ось на две равные части; третья образует три равных ветви, разделяющих ось на три равных части, и так далее.

Колебания струны можно тогда считать составленными из целых колебаний по всей длине струны и из колебаний, соответствующих только половине струны, трети ее, четверти и т. д. Но так как подобное сложение кривых и колебаний является только гипотетическим, то те выводы, которые отсюда можно было бы сделать по вопросу об одновременном существовании гармонических тонов, были бы совершенно ненадежными.

60. Вернемся теперь к общей формуле, найденной в п. 55. Так как величины $\alpha_{x+lh't}$ и $\alpha_{x-lh't}$ являются координатами заданной кривой, соответствующими абсциссам $x+lh't$ и $x-lh't$, то их можно представить в одном и том же виде с помощью функций этих абсцисс. Если обозначим символом F неопределенную функцию, то мы будем иметь

$$\alpha_{x+lh't} = F(x+lh't), \quad \alpha_{x-lh't} = F(x-lh't).$$

Вместе с тем, если взять другую функцию, обозначенную символом f , то можно положить

$$\left(\int \dot{\alpha} dx \right)_{x+lh't} = f(x+lh't), \quad \left(\int \dot{\alpha} dx \right)_{x-lh't} = f(x-lh't).$$

Таким образом выражение для ξ_x (п. 55) может быть представлено в следующем виде:

$$\xi_x = \frac{F(x+lh't) + F(x-lh't)}{2} + \frac{f(x+lh't) - f(x-lh't)}{2lh'},$$

где функции, обозначенные символами F и f , являются произвольными, так как они зависят только от начального состояния струны.

Это выражение можно представить и в более простом виде, приняв во внимание, что $\frac{F(x+lh't)}{2} + \frac{f(x+lh't)}{2lh'}$ представляет собою собственно только одну функцию $x+lh't$, которую можно обозначить символом Φ , и что $\frac{F(x-lh't)}{2} - \frac{f(x-lh't)}{2lh'}$ тоже представляет собою только одну функцию $x-lh't$, однако отличную от предыдущей, которую можно обозначить другим символом Ψ .

Указанным образом общее выражение для ξ будет приведено к следующему виду:

$$\xi = \Phi(x + lh't) - \Psi(x - lh't).$$

61. К этому выражению можно прийти и непосредственно, пользуясь дифференциальным уравнением, определяющим переменную ξ (п. §1). Если положить $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$ и принять, как в п. §2, $F' = \text{const}$, а символ D конечных разностей заменить символом d бесконечно малых дифференциалов, то указанное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dm - F' d \left(\frac{\partial \xi}{\partial f} \right) = 0.$$

Если теперь положить $df = dx$, $dm = \frac{M}{l}$ и $h' = \sqrt{\frac{F'}{lM}}$, то это уравнение получит следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - l^2 h'^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0;$$

это — уравнение в частных дифференциалах второго порядка между тремя переменными ξ , x , t , полным интегралом которого является уравнение

$$\xi = \Phi(x + lh't) + \Psi(x - lh't),$$

где знаки Φ и Ψ , как и раньше, обозначают две произвольных функции.

Эти функции должны быть определены с помощью начального состояния струны и с помощью условий, что оба конца должны быть неподвижны. Если их разложить на две других функции, обозначенных символами F и f и притом таких, что $\Phi = \frac{F}{2} + \frac{f}{2lh'}$ и $\Psi = \frac{F}{2} - \frac{f}{2lh'}$, то мы получим

$$\xi = \frac{F(x + lh't) + F(x - lh't)}{2} + \frac{f(x + lh't) - f(x - lh't)}{2lh'},$$

как мы это вывели раньше из своего построения; первое условие, если положить $t = 0$, дает

$$\xi = F(x) = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'(x) = \dot{\alpha},$$

откуда следует

$$f(x) = \int \dot{\alpha} dx;$$

таким образом с помощью начальных значений α и $\dot{\alpha}$ мы тотчас же получаем значения функций $F(x)$ и $f(x)$ по всему протяжению l струны.

Условия неподвижности концов струны дают $\xi = 0$, когда $x = 0$ и когда $x = l$, каково бы ни было значение t . Если обе функции F и f отдельно подчинить указанным двум условиям, что вполне допустимо, то для первой из них мы получим

$$F(-lh't) = -F(lh't), \quad F(l + lh't) = -F(l - lh't)$$

и для второй

$$f(-lh't) = f(lh't), \quad f(l + lh't) = f(l - lh't),$$

что с помощью дифференцирования дает

$$-f'(-lh't) = f'(lh't), \quad f'(l + lh't) = -f'(l - lh't);$$

отсюда видно, что условия, которым должна удовлетворять функция f' , аналогичны условиям для функции I' .

Эти условия определяют значения функций $F(x)$, $f'(x)$ для абсцисс x отрицательных или превышающих l соответственно значениям этих функций для абсцисс, лежащих между 0 и l ; легко видеть, что отсюда получаются построения, данные в п. 52 и 53.

Если вместо продольных смещений ξ рассмотреть поперечные смещения η или ζ , то мы получим то же самое дифференциальное уравнение и, следовательно, тот же интеграл и те же построения, при этом придется лишь вместо h' взять h и вместо $\dot{\alpha}$, α взять $\dot{\beta}$, β или $\dot{\gamma}$, γ .

Эти построения аналогичны тем, какие были даны Эйлером для определения вида струны в любой момент времени, исходя из ее начального вида, отвлекаясь при этом от скоростей, сообщенных ей в начале движения. Следует, однако, отметить, что так как построение Эйлера основано только на функциях, представляющих интегралы уравнений в частных дифференциалах, то они не могут иметь более широкого значения, чем то, которое допускает природа функций, будь то алгебраические функции или трансцендентные. А так как дифференциальное уравнение для всех точек струны и для всех моментов ее движения остается одним и тем же, то выражаемое им отношение должно постоянно и равномерно сохраняться между переменными, какое бы протяжение мы ей ни дали; отсюда следует, что хотя произвольные функции сами по себе имеют неопределенный вид, тем не менее, когда этот вид на определенном промежутке задан начальным состоянием струны, то отсюда естественно можно сделать вывод, что эта форма должна оставаться одной и той же на всем протяжении функции и что ее нельзя изменять с целью подчинить условиям, связанным с принятой неподвижностью концов струны.

И Даламбер, которому мы обязаны нахождением этого интеграла в произвольных функциях, всегда утверждал, что вытекающее отсюда построение только тогда законно, когда начальная кривая имеет такой вид, что в силу своей природы она имеет попеременно равные и подобные ветви, которые все заключаются в одном и том же уравнении для того, чтобы та же функция могла представлять данную кривую со всеми ее ветвями, до бесконечности. Наоборот, Эйлер, принимая аналитическое решение Даламбера, полагал, что для образования непрерывной кривой достаточно перемещать начальную кривую попеременно вверх и вниз от оси до бесконечности, не заботясь о том, могут ли различные ветви быть связаны одним и тем же уравнением и подчинены закону непрерывности аналитических функций. См. *Mémoires de Berlin* за 1747 и 1748 гг. и т. I и IV *Opuscules* Даламбера.

62. Формулы, дающие движение натянутой струны, нагруженной неопределенным числом равных тел, не вызывают никаких затруднений, поскольку движение каждого тела определяется частным уравнением; ясно что, если эти же формулы можно применить к движению струны равномерной толщины, допуская, что число тел бесконечно велико, а их взаимные расстояния бесконечно малы, то закон, который отсюда получится для колебаний струны, будет совершенно независим от первоначального состояния; и если этот закон окажется тем же, какой получается из рассмотрения произвольных функций, то тем самым будет доказано, что эти функции могут быть любого вида, непрерывного или прерывного, лишь бы только они представляли начальное состояние струны. Этим именно путем я в первом томе *Mémoires de Turin* доказал правильность построения

Эйлера, которое до тех пор еще не было достаточно обосновано. Примененный мною там анализ, за исключением некоторых упрощений, которые я ввел с тех пор, совершенно подобен тому, какой я дал сейчас; я полагал, что его следует привести и в настоящей работе, так как он прямо приводит к строгому разрешению одного из наиболее интересных вопросов механики.

Общность произвольных функций и их независимость от закона непрерывности, доказанные для интеграла уравнения, относящегося к колебаниям звучащих струн, дает основание считать, что эти функции могут быть аналогичным образом применены при интегрировании других уравнений в частных дифференциалах; я сам во втором томе указанных *Mémoires* показал, каким образом многие из этих уравнений можно проинтегрировать, не последуя произвольных функций, и при этом прийти к тем же решениям, какие можно получить с помощью этих функций, изученных во всем их объеме.

В настоящее время принцип непрерывности функций является общепринятым для интегралов всех уравнений в частных дифференциалах, и построения, которые Монж (Monge) дал для большого количества этих уравнений, соединенные с теорией образования поверхностей с помощью произвольных функций, не оставляет больше никакой неясности в вопросе о применении прерывных функций в проблемах, зависящих от такого рода уравнений.

63. Заслуживает быть отмеченным, что формула

$$\xi = \Phi(x + kt) + \Psi(x - kt),$$

удовлетворяющая уравнению в частных дифференциалах

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

удовлетворяет и такому же уравнению в конечных разностях, которое может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} - k^2 \frac{D^2 \xi}{Dx^2} = 0,$$

если только допустить $Dx = k Dt$ и принять Dt постоянным. В самом деле если варьировать только x , то

$$D^2 \Phi(x + kt) = \Phi(x + Dx + kt) - 2\Phi(x + kt) + \Phi(x - Dx + kt),$$

а если варьировать только t , то

$$D^2 \Phi(x + kt) = \Phi(x + kt + kDt) - 2\Phi(x + kt) + \Phi(x + kt - kDt);$$

эти выражения становятся равными, если положить $Dx = k Dt$; то же самое можно получить для функции $\Psi(x - kt)$.

При бесконечно малых величинах условие $dx = k dt$ отпадает, и интеграл всегда существует; основание этого заключается в том, что в данном случае выражение $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, которое по виду представляет второй дифференциал ξ , разделенный на квадрат дифференциала t , является не чем иным, как символом, выражающим простую функцию t , выведенную из первоначальной функции ξ и отличную от этой функции, которая совершенно не зависит

от значения dt . То же самое верно и для выражения $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ по отношению к x ; в этом превращении функций фактически и заключается переход от конечных величин к бесконечно малым и самая сущность дифференциального почисления.

64. Я сделаю здесь еще одно замечание, которое может оказаться полезным во многих случаях. Я имею в виду новый метод интерполяции, вытекающий из формул п. 48.

Мы видели, что величина

$$\frac{2}{n+1} \sum \left[\sin \left(\frac{r\rho\pi}{n+1} \right) S \alpha_s \sin \left(\frac{s\rho\pi}{n+1} \right) \right]$$

становится равной α_r , когда $r=1, 2, 3, \dots, n$. Следовательно, если имеется ряд величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ число которых равно n , можно с помощью приведенной формулы выразить любой промежуточный член, порядок которого обозначен любым целым или дробным числом r , так как если последовательно принять $r=1, 2, 3, \dots, n$, то формула дает $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

Символ S обозначает сумму всех членов, соответствующих $s=1, 2, 3, \dots, n$, а символ $\sum$ — сумму всех членов, соответствующих $\rho=1, 2, 3, \dots, n$ причем π обозначает угол, соответствующий двум прямым.

Допустим, что задан только один член α_1 ; положим $n=1, s=1, \rho=1$, тогда мы получим для общего выражения α_r

$$\alpha_r = \alpha_1 \sin \frac{r\pi}{2}.$$

Пусть $n=2$ и пусть два заданных члена равны α_1, α_2 ; если положить $s=1, 2, \rho=1, 2$, то мы получим

$$\alpha_r = \frac{2}{3} \left(A' \sin \frac{r\pi}{3} + A'' \sin \frac{2r\pi}{3} \right),$$

где принято

$$A' = \alpha_1 \sin \frac{\pi}{3} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi}{3},$$

$$A'' = \alpha_1 \sin \frac{2\pi}{3} + \alpha_2 \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Пусть $n=3$ и пусть заданные члены равны $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; положим $s=1, 2, 3$ и $\rho=1, 2, 3$; тогда мы получим

$$\alpha_r = \frac{2}{4} \left(A' \sin \frac{r\pi}{4} + A'' \sin \frac{2r\pi}{4} + A''' \sin \frac{3r\pi}{4} \right),$$

где коэффициенты A', A'', A''' определяются следующими формулами:

$$A' = \alpha_1 \sin \frac{\pi}{4} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi}{4} + \alpha_3 \sin \frac{3\pi}{4},$$

$$A'' = \alpha_1 \sin \frac{2\pi}{4} + \alpha_2 \sin \frac{4\pi}{4} + \alpha_3 \sin \frac{6\pi}{4},$$

$$A''' = \alpha_1 \sin \frac{3\pi}{4} + \alpha_2 \sin \frac{6\pi}{4} + \alpha_3 \sin \frac{9\pi}{4},$$

и так далее.

При обычном методе интерполирования допускают, что через концы координат, представляющих заданные члены, мы проводим параболическую кривую вида

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

При изложенном выше методе вместо параболической кривой принимают кривую вида

$$y = A' \sin \frac{\pi x}{a} + A'' \sin \frac{2\pi x}{a} + A''' \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

Существует очень много случаев, когда последнее допущение можно предпочесть, как более соответствующее природе задачи.

ДОПОЛНЕНИЯ и ПРИМЕЧАНИЯ

I.

ПУАНСО (POINCARÉ).

ОБ ОСНОВНОМ ПОЛОЖЕНИИ „АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ“ ЛАГРАНЖА.

1. Известно, что Лагранж в своей знаменитой книге, озаглавленной им „Аналитическая механика“, поставил себе целью свести механику к общим формулам, выведенным из единственного принципа виртуальных скоростей, или, вернее, из дифференциальной формулы, выражающей этот принцип. Для придания своему труду большего совершенства автор при разрешении несомнудемых им проблем старается избегать применения каких бы то ни было чертежей или аргументов, основанных на геометрических или механических соображениях; все операции производятся у него путем исчисления и с помощью простых изменений координат; даже столь естественный и простой вопрос, как вопрос о сложении сил, приложенных в одной точке, мы видим представленным в чисто аналитическом виде.

„Если какие-либо силы $P, Q, R, \dots$, направленные по линиям $p, q, r, \dots$, действуют на одну и ту же точку, и мы захотели бы эти силы свести к трем другим силам Ξ, Π, Σ , направленным по линиям ξ, π, ς , то для этого, — говорит автор, — нам следует лишь рассмотреть равновесие сил $P, Q, R, \dots$, и Ξ, Ψ, Φ , приложенных к той же точке и направленных соответственно по линиям $p, q, r, \dots$ — ξ, π, ς , и в результате составить уравнение

$$P dp + Q dq + R dr + \dots - \Xi d\xi - \Psi d\pi - \Phi d\varsigma = 0,$$

которое должно оставаться верным, каким бы образом мы ни варьировали положение точки встречи всех сил. Но каковы бы ни были линии ξ, π, ς , ясно, что если только все они не лежат в одной и той же плоскости, их будет достаточно для определения положения этой точки, следовательно, линии $p, q, r, \dots$ можно всегда выразить с помощью функций ξ, π, ς , и приведенное выше уравнение должно иметь силу в отдельности для вариаций указанных трех величин; отсюда следует, что мы имеем

$$\Xi = P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + R \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots,$$

$$\Pi = P \frac{\partial p}{\partial \pi} + Q \frac{\partial q}{\partial \pi} + R \frac{\partial r}{\partial \pi} + \dots,$$

$$\Sigma = P \frac{\partial p}{\partial \varsigma} + Q \frac{\partial q}{\partial \varsigma} + R \frac{\partial r}{\partial \varsigma} + \dots^{**}.$$

Таковы формулы, данные Лагранжем для того, чтобы силы $P, Q, R, \dots$, приложенные к одной и той же точке и действующие по направлениям линий $p, q, r, \dots$, свести к трем другим силам Ξ, Π, Σ , направленным по трем любым заданным линиям ξ, π, ς ; эти выражения к тому же совершенно аналогичны тем, какие мы имеем для преобразования любой системы сил, действующих на различные точки, связанные между собою произвольным образом, — в другую эквивалентную систему сил Ξ, Π, Σ , приложенных к тем же точкам по другим направлениям $\xi, \pi, \varsigma, \dots$

*) Приведенные выше строки ваяты из первого издания, стр. 62; во втором издании, опубликованном Лагранжем (см. стр. 83 настоящей книги), они были автором несколько видоизменены, но замечания Пуансо применимы к новой редакции совершенно так же, как и к старой.

Прим. Бертрама.

2. По поводу приведенного положения Лагранжа следует сделать одно существенное замечание, которое, повидимому, ускользнуло от внимания автора „Аналитической механики“. Замечание это сводится к тому, что рассматриваемые формулы совершенно не подходят, как это можно было бы предположить, ко всем видам линий или координат $\xi, \pi, \sigma, \dots$, хотя эти линии и годятся для определения положений тел. Приведенные формулы хороши только в том случае, когда эти новые линии (подобно первым $p, q, r, \dots$) представляют собою расстояния рассматриваемых тел от каких-либо неподвижных центров или от каких-либо неподвижных плоскостей, как это имеет место в случае обычных координат x, y, z , обозначающих расстояние несмещаемой точки от трех неподвижных взаимно перпендикулярных плоскостей. Вообще, можно сказать, что для того, чтобы эти формулы были верными, требуется, чтобы природа линий $\xi, \pi, \sigma, \dots$ была такова, чтобы их дифференциалы $d\xi, d\pi, d\sigma, \dots$ выражали виртуальные скорости точки приложения сил $\Xi, \Pi, \Sigma, \dots$, т. е. чтобы любая из них, $d\xi$, была прямолинейной проекцией на направление силы Ξ бесконечно малого смещения, которое мы представляем себе сообщенным этой точке в пространстве; без этого условия все указанные аналитические преобразования, хотя бы с точки зрения чистого анализа они и были верными, окажутся неверными в области механики и приведут к неправильным выводам.

3. Предположим, например, что речь идет об одной единственной точке, подверженной действию сил $P, Q, R, \dots$, направленных по линиям или радиусам-векторам $p, q, r, \dots$, и что мы желаем эти силы свести к трем силам Ξ, Π, Σ , действующим по трем координатам ξ, π, σ , параллельным трем неподвижным осям, находящимся друг к другу под косыми углами; согласно теории автора можно было бы подумать, что для некоторых сил мы будем иметь

$$\Xi = P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + R \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots,$$

$$\Pi = P \frac{\partial p}{\partial \pi} + Q \frac{\partial q}{\partial \pi} + R \frac{\partial r}{\partial \pi} + \dots,$$

$$\Sigma = P \frac{\partial p}{\partial \sigma} + Q \frac{\partial q}{\partial \sigma} + R \frac{\partial r}{\partial \sigma} + \dots;$$

однако это неверно, так как можно доказать, что равнодействующая сил $P, Q, R, \dots$ не будет тождественна равнодействующей трех сил Ξ, Π, Σ , определяемых с помощью приведенных уравнений.

В самом деле, пусть $f(p, q, r, \dots)$ любая функция радиусов-векторов $p, q, r, \dots$; обозначим через $f'(p), f'(q), f'(r), \dots$ первые функции этой функции, взятые по отношению к линиям $p, q, r, \dots$. Я доказал^{*)}, что силы $P, Q, R, \dots$, пропорциональные этим первым функциям и направленные по соответствующим линиям $p, q, r, \dots$, имеют равнодействующую, перпендикулярную к кривой поверхности, заданной уравнением

$$f(p, q, r) = \text{const},$$

причем $p, q, r, \dots$ рассматриваются как переменные величины.

Представим себе теперь три наклонных оси, не расположенных в одной и той же плоскости, и пусть ξ, π, σ — три координаты точки приложения сил по отношению к этим осям; тогда линии $p, q, r, \dots$ можно всегда выразить с помощью координат ξ, π, σ ; если эти выражения внести в функцию $f(p, q, r, \dots)$ вместо $p, q, r, \dots$, то мы будем иметь

$$f(p, q, r, \dots) = \varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{const},$$

откуда, дифференцируя последовательно по ξ, π, σ , мы выведем

$$f'(p) \frac{\partial p}{\partial \xi} + f'(q) \frac{\partial q}{\partial \xi} + f'(r) \frac{\partial r}{\partial \xi} + \dots = \varphi'(\xi),$$

$$f'(p) \frac{\partial p}{\partial \pi} + f'(q) \frac{\partial q}{\partial \pi} + f'(r) \frac{\partial r}{\partial \pi} + \dots = \varphi'(\pi),$$

$$f'(p) \frac{\partial p}{\partial \sigma} + f'(q) \frac{\partial q}{\partial \sigma} + f'(r) \frac{\partial r}{\partial \sigma} + \dots = \varphi'(\sigma).$$

^{*)} См. Statique Пуансо и мемуар, озаглавленный Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes (Journal de l'Ecole Polytechnique, XIII cahier).

Следовательно, согласно формулам Лагранжа три силы Ξ , Π , Σ , к которым сводятся силы $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, будут выражены с помощью

$$\Xi = \varphi'(\xi), \quad \Pi = \varphi'(\pi), \quad \Sigma = \varphi'(\sigma).$$

Таким образом $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ должны представлять собою три силы, равнодействующая которых тождественна равнодействующей рассматриваемых сил $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$... и, следовательно, направлена перпендикулярно к поверхности, заданной уравнением

$$f(p, q, r, \dots) = \text{const.}$$

Но эта поверхность тождественна такой поверхности, которая была бы задана уравнением

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{const}$$

между косоугольными координатами ξ , π , σ . Следовательно, если рассмотреть поверхность, представленную уравнением

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{const}$$

между тремя координатами ξ , π , σ , относительно трех косоугольных осей, то можно было бы утверждать, что три силы, направленные по этим координатам и пропорциональные трем *первым* функциям $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$, дают равнодействующую, перпендикулярную к рассматриваемой поверхности, или находящаяся на этой поверхности в равновесии. Но это неверно, в чем можно убедиться непосредственно с помощью самого принципа виртуальных скоростей.

В самом деле, для равновесия точки, к которой приложены три силы $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$, требуется, чтобы сумма *виртуальных моментов* этих сил была равна нулю для каждого бесконечно малого смещения ds , какое мы пожелаем бы дать этой точке на поверхности. Следовательно, если мы обозначим через $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$ три прямоугольные проекции на три косоугольные оси ξ , π , σ , то для равновесия необходимо, чтобы всегда имело место равенство

$$\varphi'(\xi) \delta\xi + \varphi'(\pi) \delta\pi + \varphi'(\sigma) \delta\sigma = 0,$$

или же, так как ds представляет собою диагональ ромбоэдра, гранями которого являются дифференциалы $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, и так как три проекции ds на направлении этих граней выражаются с помощью следующих формул:

$$\delta\xi = d\xi + \lambda d\pi + \mu d\sigma,$$

$$\delta\pi = d\pi + \nu d\sigma + \lambda d\xi,$$

$$\delta\sigma = d\sigma + \mu d\xi + \nu d\pi$$

(где λ , μ , ν — косинусы углов $\widehat{\xi\pi}$, $\widehat{\xi\sigma}$, $\widehat{\pi\sigma}$, образуемых между собою осями координат), то, если вместо $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$ подставить их значения, для равновесия требуется, чтобы между дифференциалами $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ всегда имело место уравнение

$$\{\varphi'(\xi) + \lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)\} d\xi + \{\varphi'(\pi) + \nu\varphi'(\sigma) + \lambda\varphi'(\xi)\} d\pi + \{\varphi'(\sigma) + \mu\varphi'(\xi) + \nu\varphi'(\pi)\} d\sigma = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, так как движущаяся точка всегда остается на поверхности, одновременно должно существовать уравнение

$$\varphi'(\xi) d\xi + \varphi'(\pi) d\pi + \varphi'(\sigma) d\sigma = 0. \quad (2)$$

Но ясно, что уравнения (1) и (2) не могут одновременно существовать, если только коэффициенты $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ в одном из них не будут пропорциональны коэффициентам тех же неопределенных величин во втором уравнении и, следовательно, если только мы не будем иметь следующих двух уравнений

$$\varphi'(\xi) [\nu\varphi'(\sigma) + \lambda\varphi'(\xi)] - \varphi'(\pi) [\lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)] = 0,$$

$$\varphi'(\xi) [\nu\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\xi)] - \varphi'(\sigma) [\lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)] = 0;$$

а эти уравнения не могут иметь места в общем случае, т. е. независимо от переменных ξ , π , σ , и, следовательно, от положения точки на рассматриваемой поверхности.

Таким образом движущаяся точка с любыми координатами ξ , π , σ не может быть удержана в равновесии на поверхности тремя силами $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$;

значит, результирующая этих сил не направлена нормально к этой поверхности и, следовательно, она не тождественна равнодействующей заданных сил $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, ..., что и требовалось доказать.

4. Итак, формулы Лагранжа для преобразования сил при указанном допущении косоугольных координат ξ , π , σ неверны, и существует только один случай, когда ошибка может исчезнуть, а именно тот случай, когда координаты ξ , π , σ удовлетворяют приведенным выше двум уравнениям и одновременно удовлетворяют уравнению поверхности

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{const},$$

что, как видим, соответствует только определенной точке этой поверхности или известной определенной пропорции между тремя силами $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$. Однако даже в этом единственном случае, когда равнодействующая трех сил Ξ , Π , Σ имеет такое же направление, как равнодействующая рассматриваемых сил $f'(p)$, $f'(q)$, ..., мы найдем, что она имеет неодинаковую с ней величину; таким образом мы получаем вывод неверный и с этой стороны.

В том случае, когда все три косинуса λ , μ , ν равны нулю, приведенные выше два условия всегда сами по себе выполняются, и формулы Лагранжа оказываются всегда правильными. Таков случай координат ξ , π , σ , отнесенных к трем *оси* перпендикулярным осям. Действительно, для подобных координат дифференциалы $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ представляют собою выражения самих виртуальных скоростей движущейся точки, измеренных по направлению этих линий, и дифференциальное уравнение

$$\varphi'(\xi) d\xi + \varphi'(\pi) d\pi + \varphi'(\sigma) d\sigma = 0,$$

выведенное из уравнения поверхности, выражает равенство нулю суммы виртуальных моментов трех сил $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ и, следовательно, равновесие этих сил в точке, которая согласно допущению должна описывать эту поверхность.

Но при любом ином допущении, при котором все три величины λ , μ , ν не равны нулю, приведенные два условия не могут быть выполнены независимо от значений ξ , π , σ , и указанные формулы всегда оказываются неверными.

5. Пусть, например, мы имеем чрезвычайно простой случай точки, расположенной на окружности неподвижного круга. Если взять уравнение этого круга в прямоугольных координатах x и y , мы будем иметь

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{const},$$

откуда

$$f'(x) dx + f'(y) dy = 2x dx + 2y dy = 0;$$

в данном случае можно с полным основанием утверждать, что две силы X и Y , взятые по направлению координат в отношении *первых* функций $f'(x)$, $f'(y)$, дают равнодействующую, перпендикулярную к окружности круга, и удерживают точку их приложения в равновесии на этой окружности.

Но если вместо этих прямоугольных координат x , y взять две других ξ и π с тем же началом и, скажем, одну из них, ξ , взять по направлению x , а другую, π , под углом α к первой, что даст

$$x = \xi + \pi \cos \alpha, \quad y = \pi \sin \alpha,$$

то после подстановки мы получим

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \pi) = \pi^2 + \xi^2 + 2\xi\pi \cos \alpha = \text{const},$$

откуда

$$\varphi'(\xi) d\xi + \varphi'(\pi) d\pi = 2(\xi + \pi \cos \alpha) d\xi + 2(\pi + \xi \cos \alpha) d\pi = 0.$$

Но ясно, что две силы, пропорциональные $\varphi'(\xi)$ и $\varphi'(\pi)$, т. е. в данном случае пропорциональные $(\xi + \pi \cos \alpha)$ и $(\pi + \xi \cos \alpha)$, не дают равнодействующей, перпендикулярной к окружности рассматриваемого круга; в самом деле, для этого было бы необходимо, чтобы равнодействующая проходила через центр и, следовательно, чтобы две ее составляющие по направлениям ξ и π были пропорциональны просто ξ и π , а не $(\xi + \pi \cos \alpha)$ и $(\pi + \xi \cos \alpha)$.

Таким образом, хотя мы здесь имеем (если положить $\varphi'(\xi) = \Xi$, $\varphi'(\pi) = \Pi$) уравнения

$$\Xi = X \frac{\partial x}{\partial \xi} + Y \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \Pi = X \frac{\partial x}{\partial \pi} + Y \frac{\partial y}{\partial \pi},$$

нельзя утверждать, что две силы X и Y , направленные по прямоугольным осям x и y , могут быть сведены к двум силам Ξ и Π , направленным вдоль осей косоугольных координат ξ и π .

Для того чтобы имело место соотношение

$$\xi + \pi \cos \alpha : \pi + \xi \cos \alpha : \xi : \pi,$$

мы должны иметь $\cos \alpha = 0$, что представляет собою случай взаимно перпендикулярных координат ξ и π .

Или же мы должны иметь $\xi = \pi$, а это представляет только частный случай положения рассматриваемой точки M на окружности круга, уравнение которого

$$\varphi(\xi, \pi) = \text{const.}$$

Но даже в том единственном случае, когда равнодействующая двух сил Ξ и Π имеет одинаковое направление с равнодействующей двух сил X и Y , мы найдем, что эти две равнодействующие

$$\sqrt{\Xi^2 + 2\Xi\Pi\cos\alpha + \Pi^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{X^2 + Y^2}$$

имеют различные значения и что первая из них относится ко второй, как $1 + \cos \alpha$ относится к единице.

Таким образом, если $\cos \alpha$ не равен нулю или, что то же, если координаты ξ и π косоугольные, то рассматриваемые силы X и Y никогда не могут быть сведены к двум силам Ξ и Π , заданным формулами Лагранжа.

6. В приведенном выше анализе, для того чтобы представить силы $P, Q, R, \dots$, которые надо было свести к другим силам, я взял просто *первые* функции одной и той же произвольной функции $f(p, q, r, \dots)$ радиусов-векторов $p, q, r, \dots$, вдоль которых силы направлены; это только прием, с помощью которого можно тотчас же определить направление равнодействующей силы при посредстве направления *нормали* к поверхности кривой, которая получается, если взять уравнение

$$f(p, q, r, \dots) = \text{const.}$$

Но так как может возникнуть мысль, что подобное допущение представляет собою нечто, ограничивающее наше доказательство случаем определенных сил, будет уместно отметить, что оно годится для любых сил $P, Q, R, \dots$, заданных каким угодно образом. В самом деле, какова бы ни была избранная нами функция f , мы имеем возможность поместить центры сил где угодно по их направлениям $p, q, r, \dots$, и всегда можем избрать для этих линий также протяжения, которые дают

$$f'(p) = P, \quad f'(q) = Q, \quad f'(r) = R, \dots$$

Впрочем, если бы мы взяли силы любых размеров $A, B, C, \dots$, то очевидно их всегда можно рассматривать как *первые* функции линейной функции

$$Ap + Bq + Cr + \dots,$$

взятых по отношению к линиям $p, q, r, \dots$, по которым согласно условию силы направлены. Таким образом наше допущение всегда законно и наше доказательство обладает всей требуемой общностью.

7. Итак, мы видим, что в аналитической механике, основанной исключительно на принципе виртуальных скоростей, единственные координаты, которыми можно пользоваться, должны обладать тем свойством, что их дифференциалы представляют в этих координатах *прямолинейные* проекции малых отрезков, описываемых согласно предположению в пространстве точкой приложения сил. Это имеет место в случае координат $p, q, r, \dots, \omega, \varphi, \sigma$, о которых мы говорили выше, а также тех координат, которые состоят из радиуса-вектора p и двух углов или дуг круга φ, ψ , перпендикулярных к этому радиусу, и т. п. Но следует исключить все те координаты ξ, π, σ , которые не обладают указанным свойством. Таким образом будет неверно утверждать, что при данном аналитическом методе нас *ничто не заставляет отдавать предпочтение прямоугольным координатам перед иными линиями или величинами, определяющими положения тел, и т. д.* (см. п. 11, стр. 35); по этому поводу следует еще отметить, что принцип виртуальных скоростей не дает столь общего метода, как это можно было бы предположить.

Так, например, в том случае, когда большое количество сил $P, Q, R, S, \dots$ находятся в равновесии в одной точке, принцип виртуальных скоростей говорит просто, что силы, будучи спроектированы *нормально* на любую прямую, проходящую через эту точку, должны дать сумму, равную нулю. В самом деле, если мы назовем *ди* любую линию, указывающую смещение точки приложения сил в пространстве, то линии $dP, dQ, dR, \dots$ будут не чем иным, как *прямолинейными* проекциями *ди* на линии $p, q, r, \dots$, указывающими направления сил $P, Q, R, \dots$. Следовательно,

если мы назовем $i, i', i'', \dots$ углы наклона этих сил к линии du , то мы будем иметь

$$[dp = du \cos i, \quad dq = du \cos i', \quad dr = du \cos i'', \dots,$$

и уравнение виртуальных скоростей

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = 0,$$

после разделения всех членов на общий множитель du перейдет в

$$P \cos i + Q \cos i' + R \cos i'' + \dots = 0;$$

последнее уравнение показывает, что силы, спроектированные под прямым углом на любую ось, должны в случае равновесия дать сумму, равную нулю. Но принцип сложения сил говорит более общё, что если силы спроектировать на какую-либо ось с помощью линий, параллельных одной и той же плоскости, находящейся под любым углом наклона к этой оси, то сумма всех этих наклонных проекций должна быть равна нулю. Дело не в том, что второе положение нельзя легко обосновать с помощью первого, но выражение второго принципа очевидно носит более общий характер, чем выражение принципа *виртуальных скоростей*.

Точно так же можно отметить, что уравнения равновесия твердой системы доказаны в „Аналитической механике“ только по отношению к трем *взаимно перпендикулярным* осям; однако, как я показал в своей „Статике“, совершенно такие же уравнения получаются по отношению к любым трем *косугольным* осям. Таким образом и в этом примере принцип виртуальных скоростей не является столь общим, как *принцип сложения сил*. Он не является также и столь простым; в самом деле, если он приводит к трем первым уравнениям при применении прямоугольных координат x, y, z , то три последних уравнения он может дать только при замене этих координат другими координатами иного вида, причем их выбор представляется произвольным или кажется произведенным только для того, чтобы получить уравнения равновесия, которые наперед известны.

Впрочем, хотя Лагранж дает основание полагать, что при его методе можно применять координаты любого вида, если только они пригодны для определения положений тел, чрезвычайно интересно, что этот математик никогда не применял иных координат, кроме тех, которые фактически подходят к принципу виртуальных скоростей; по крайней мере я не знаю такого примера и полагаю, что его и нельзя найти в работах Лагранжа. В самом деле, если бы для разрешения какой-либо проблемы он попытался воспользоваться некоторыми координатами, недопустимыми при его методе, то весьма вероятно, что заметная ошибка в каком-либо полученном им выводе навела бы его на мысль об ошибочности его формул; тогда, конечно, он сам не замедлил бы сделать по этому поводу ясную оговорку, по крайней мере во втором издании своего прекрасного труда.

8. Как бы то ни было, все могло бы быть очень просто исправлено, и мне казалось целесообразным указать это раньше, чем закончить настоящую статью, так как причина ошибки сразу видна и сверх того ясно, что нужно сделать для того, чтобы ее избежать, не отказываясь от применения тех координат, которые дают повод для этой ошибки.

В самом деле, какова бы ни была природа тех координат, $\xi, \pi, \sigma, \dots$, в которые мы желаем преобразовать линии или радиусы-векторы $p, q, r, \dots$, известно, что всегда можно, по Лагранжу, взять следующее совершенно правильное уравнение

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = \Sigma [d\xi + \Pi d\pi + \Sigma d\sigma + \dots,$$

где $\Sigma, \Pi, \Sigma, \dots$ представляют собою величины, [выраженные с помощью уравнений пункта 1.

Но теперь я отмечу, что в левой части уравнения дифференциалы $dp, dq, dr, \dots$ обозначают виртуальные скорости точек приложения сил по направлениям линий $p, q, r, \dots$ и что, таким образом, каждый член $P dp$ представляет собою *виртуальный момент* силы P . Если в правой части уравнения дифференциалы $d\xi, d\pi, d\sigma, \dots$ обладают тем же свойством, т. е. если каждое $d\xi$ обозначает виртуальную скорость точки по направлению ξ , то каждый член $\Sigma d\xi$ тоже является виртуальным моментом силы, выраженной через Σ ; тогда из данного уравнения, содержащего в себе две суммы виртуальных моментов, которые всегда остаются равными между собою, можно с полным основанием сделать вывод, что система сил $\Sigma, \Pi, \Sigma, \dots$ способна замещать систему заданных сил $P, Q, R, \dots$.

Но если дифференциалы $d\xi, d\pi, d\sigma, \dots$ не обладают указанным свойством, то каждый член типа $\Sigma d\xi$ уже не является виртуальным моментом силы Σ и тогда согласно самому принципу виртуальных скоростей нельзя делать вывода, к кото-

тому мы пришли раньше, что совокупность сил $\Xi, \Pi, \Sigma, \dots$ эквивалентна совокупности заданных сил. Такова та своеобразная ошибка, в которую мы впали бы, если бы из правильного принципа и из верного уравнения мы сделали неверный вывод, не обратив внимания на то обстоятельство, что фактически данное уравнение представлено не в том виде, который соответствует выражению принципа. И одновременно в этом можно увидеть средство для избежания подобной ошибки, не изменяя координат $\xi, \pi, \sigma, \dots$, которые могли бы дать повод для этой ошибки.

В самом деле, если бы мы пожелали получать действительные силы $\Xi', \Pi', \Sigma', \dots$, которые, будучи направлены по координатам $\xi, \pi, \sigma, \dots$, способны заменить силы $P, Q, R, S, \dots$, то следовало бы начать с того, чтобы в уравнении вместо дифференциалов $d\xi, d\pi, d\sigma, \dots$ подставить их значения в функции самих виртуальных скоростей; эти значения, как в п. 3, я обозначу через $\delta\xi, \delta\pi, \delta\sigma, \dots$; далее следует объединить в виде одного члена все члены, в состав которых входит $\delta\xi$, точно так же в один член объединить все члены, в состав которых входит $\delta\pi, \dots$; тогда наше прежнее уравнение будет представлено в следующем новом виде

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots = \Xi' \delta\xi + \Pi' \delta\pi + \Sigma' \delta\sigma + \dots,$$

из которого уже можно будет сделать правильный вывод, что совокупность сил $\Xi', \Pi', \Sigma', \dots$ вполне эквивалентна совокупности сил $P, Q, R, \dots$, так как сумма виртуальных моментов тех и других всегда равна.

9. Если бы мы захотели это несомненное пронавести для случая координат ξ, π, σ , параллельных трем косугольным осям, то, сохраняя обозначения п. 3, мы получили бы следующее значение

$$\begin{aligned}\Xi' &= \frac{\Xi(1-\nu^2) + \Pi(\mu\nu - \lambda) + \Sigma(\lambda\nu - \mu)}{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - 2\lambda\mu\nu}, \\ \Pi' &= \frac{\Pi(1-\mu^2) + \Sigma(\lambda\mu - \nu) + \Xi(\mu\nu - \lambda)}{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - 2\lambda\mu\nu}, \\ \Sigma' &= \frac{\Sigma(1-\nu^2) + \Xi(\lambda\mu - \nu) + \Pi(\lambda\nu - \mu)}{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - 2\lambda\mu\nu};\end{aligned}$$

как видим, эти значения не тождественны значениям Ξ, Π, Σ и их можно свести к последним только в том случае, когда все три косинуса λ, μ, ν равны нулю, т. е. в том случае, когда все три оси взаимно перпендикулярны; этот случай поясняет и подтверждает наш прежний анализ.

10. Из тех же выражений мы также видим, что уравнения

$$\Xi' = 0, \quad \Pi' = 0, \quad \Sigma' = 0$$

влекут за собою следующие:

$$\Xi = 0, \quad \Pi = 0, \quad \Sigma = 0,$$

и наоборот. Следовательно, если мы ищем только условия равновесия между силами $P, Q, R, \dots$, то можно, не опасаясь впасть в ошибку, ограничиться принятием следующих трех уравнений:

$$0 = \Xi = P \frac{\partial p}{\partial \xi} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} + \dots,$$

$$0 = \Pi = P \frac{\partial p}{\partial \pi} + Q \frac{\partial q}{\partial \pi} + \dots,$$

$$0 = \Sigma = P \frac{\partial p}{\partial \sigma} + Q \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \dots.$$

Если же силы $P, Q, R, \dots$ не уравновешивают друг друга и их требуется свести к другим силам, направленным по ξ, π, σ , то в качестве эквивалентных сил необходимо взять не Ξ, Π, Σ , а обязательно значения Ξ', Π', Σ' .

То, что я сказал выше, может быть без труда применено к любой системе сил, действующих на различные точки, связанные между собою произвольным образом. Таким образом уравнения равновесия, данные Лагранжем (стр. 35 наст. изд., отд. II, п. 12 и след.) всегда хороши, но формулы, приведенные в конце п. 15 для равновесия двух систем сил, верны лишь в случае определенных координат.

Мы могли бы еще многое сказать по поводу указанного положения, но настоящее исследование уже слишком затянулось, а с другой стороны, если в этом встретится надобность, мы вернемся к этому вопросу при другом случае.

II.

ЛЕЖЕН-ДИРИХЛЕ (Lejeune-Dirichlet).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ.

Если система материальных точек находится под возмущающим действием сил притяжения или отталкивания, которые зависят только от расстояния и которые направлены к неподвижным центрам или которые происходят в результате взаимодействия между двумя массами, то действие и противодействие между собою равны; с другой стороны, если условные уравнения, связывающие координаты различных тел, не содержат в себе времени, то имеет место уравнение живых сил, а именно

$$\sum mv^2 = f(x, y, z, \alpha, \dots) + C.$$

Знак $\sum$ распространяется на все массы системы, причем каждая масса выражается через m , а ее скорость через v ; C — некоторая произвольная постоянная. Функция координат зависит только от природы сил и может быть выражена с помощью определенного числа независимых переменных $\lambda, \mu, \nu, \dots$, так что уравнение живых сил напишется следующим образом:

$$\sum mv^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \dots) + C.$$

Функция φ тесно связана с положениями равновесия системы, так как условие, выражающее, что для известных определенных значений $\lambda, \mu, \nu, \dots$ система находится в положении равновесия, совпадает с условием, выражающим, что для тех же самых значений дифференциал φ равен нулю. Таким образом вообще для каждого положения равновесия эта функция является максимумом или минимумом. Если в действительности имеет место максимум, то равновесие — устойчивое; это значит, что если точки системы бесконечно мало сместить из их положений равновесия и каждой из них сообщить необходимую начальную скорость, то в течение всего движения смещения различных точек системы по отношению к положению равновесия всегда будут находиться между некоторыми определенными и очень малыми пределами.

Эта теорема является одной из важнейших в механике. Она служит основой теории малых колебаний, приводящей к столь многим интересным применениям в области физики. Поэтому приходится удивляться, что до сих пор эта теорема не была обоснована достаточно строго и удовлетворительно.

Предположим, — а это можно сделать без ущерба для общности, — что положение равновесия системы, или максимум функции φ , соответствует значениям $\lambda = 0, \mu = 0, \dots$. Доказательство, данное Лагранжем („Аналитическая механика“, часть I, отд. III), заключается в следующем: разложение функции по степеням $\lambda, \mu, \nu, \dots$, начинающееся с членов второго порядка, сводится к этим членам; затем, на основании известного условия максимума, согласно которому члены второго порядка могут быть рассматриваемы как сумма отрицательных квадратов, для $\lambda, \mu, \nu, \dots$ устанавливаются известные пределы, которых эти величины не могут переступить. Этот вид доказательства, применяющийся еще и в других вопросах об устойчивости и особенно в физической астрономии, является недостаточно строгим. В самом деле, можно с полным основанием сомневаться в том, что величины, для которых мы имеем малые пределы, исходя из предположения, что эти величины всегда будут очень малы (ибо мы это делаем только в том случае, когда можем пренебречь членами высшего порядка), действительно всегда в течение любого промежутка времени будут оставаться в этих пределах и притом вообще — в малых пределах.

Изложенное нами выше доказательство было воспроизведено, насколько я знаю, без существенных изменений всеми авторами, занимающимися этим вопросом; а все то, что было прибавлено Пуассоном (Poisson, *Traité de Mécanique*, т. 2, стр. 492) для того, чтобы ввести в рассмотрение члены более высокого порядка, основывается на неприемлемом допущении, что *каждый* член второго порядка превосходит сумму всех членов высшего порядка.

Если даже дополнить рассуждения Лагранжа для случая, где они применяются и где максимум определяется при помощи членов второго порядка, рассматриваемая теорема не может быть доказана в полном своем объеме. Известно, что существование максимума совместимо с исчезновением членов второго порядка; вообще достаточно, чтобы первые члены, отличные от нуля, были четного порядка и чтобы сумма этих членов была всегда отрицательной. Формулы, относящиеся к этому последнему условию, до сих пор еще не были даны даже в том случае, когда речь идет о членах четвертого порядка. Поэтому сначала следовало бы найти эти формулы. Но это неизбежно ввело бы большое осложнение в доказательство теоремы механики, о которой сейчас идет речь. К счастью, положению об устойчивости равновесия можно доказать независимо от этих формул, пользуясь очень простым рассуждением, которое непосредственно связано с идеей максимума.

Помимо сделанного выше допущения, что положение равновесия соответствует значениям $\lambda = 0$, $\mu = 0, \dots$, мы предположим еще, что $\varphi(0, 0, 0, \dots) = 0$; такое предположение допустимо ввиду наличия произвольной постоянной. Определим постоянную, приняв во внимание заданное начальное состояние, для которого значения $\lambda, \mu, \nu, \dots$ мы обозначим через $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \dots$. Таким образом мы получим

$$\sum mv^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \dots) - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \dots) + \sum mv_0^2.$$

Так как согласно допущению при $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0, \dots$ $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \dots)$ является нулем и максимумом, то можно определить положительные величины $l, m, n, \dots$ достаточно малыми так, чтобы $\varphi(\lambda, \mu, \nu)$ была всегда отрицательной для всякой системы значений $\lambda, \mu, \nu, \dots$, если абсолютные значения переменных соответственно подчинены условию не выходить за пределы $l, m, n, \dots$, за исключением одного единственного случая, когда $\lambda, \mu, \nu, \dots$ все одновременно равны нулю. Этот случай исключается, если мы будем рассматривать лишь такие системы, в которых по крайней мере одна из переменных $\lambda, \mu, \nu, \dots$ будет по своему абсолютному значению равна своему пределу $l, m, n, \dots$. Предположим, что из всех отрицательных значений функции для подобных систем наименьшим по абсолютной величине значением явится $-p$; тогда можно легко доказать, что, если взять $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \dots$ численно меньшими, чем $l, m, n, \dots$, и если в то же время удовлетворить неравенству

$$-\varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \dots) + \sum mv_0^2 < p,$$

то каждая из переменных $\lambda, \mu, \nu, \dots$ останется в течение всего времени движения внутри пределов $l, m, n, \dots$. В самом деле, если бы имело место противоположное, то так как начальные значения $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \dots$ удовлетворяют поставленным нами условиям и в силу непрерывности переменных $\lambda, \mu, \nu, \dots$ прежде всего было бы необходимо, чтобы в определенное мгновение существовало равенство между одним или несколькими численными значениями $\lambda, \mu, \nu, \dots$ и соответствующими их пределами $l, m, n, \dots$, причем другие значения не должны выходить за свои пределы. В это мгновение абсолютное значение $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \dots)$ будет больше или по крайней мере равно p . Следовательно, второй член уравнения живых сил будет отрицательным ввиду наличия написанного выше равенства, относящегося к начальному состоянию; но это невозможно, так как $\sum mv_0^2$ всегда положительно.

Очевидно, отсюда также следует, что скорости v всегда заключаются между определенными пределами, так как мы всегда имеем

$$\sum mv^2 \leq \sum mv_0^2 - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \dots).$$

Очевидно также, что пределы для каждой скорости, равно как и пределы для каждой переменной $\lambda, \mu, \nu, \dots$ тоже могут быть сколь угодно малыми, так как и величины $l, m, n, \dots$ могут стать сколь угодно малыми.

III.

БЕРТРАН.

О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ НИТИ.

Данные Лагранжем формулы (стр. 116) предполагают, что силы упругости в каждой точке проявляются в плоскости, соприкасающейся с линией, находящейся в равновесии, причем они стремятся восстановить первоначальный радиус кривизны этой линии; однако подобное допущение далеко от того, чтобы предста-

вить эти явления, и Бине (Binet) указал, что к силе упругости, рассматриваемой Лагранжем, следует прибавить еще другую силу, эффект которой заключается в том, что она противодействует изменениям второй кривизны. Сложность формул, выражающих эту новую кривизну, не дает нам возможности при развитии выводов из указаний Бине сохранить обозначения и ход изложения, примененные Лагранжем. Мы ограничимся непосредственным составлением уравнения равновесия, следуя в данном случае методу, изложенному Пуассоном в статье, помещенной в *Congressionales sur l'Ecole Polytechnique* (т. III, стр. 356).

Рассмотрим пребывающую в равновесии упругую линию AMB , все точки которой находятся под действием заданных сил. Если мы допустим, что часть линии MB , заключенная между какой-либо точкой M и концом B , становится негибкой и неподвижной, а другая часть MA становится только негибкой, сохраняя в то же время свободу вращения вокруг точки M , то равновесие не будет нарушено, и, следовательно, сила упругости, развивающаяся в точке M , должна разрушить пару, которой в силу неподвижности точки M эквивалентны силы, действующие на часть MA кривой. Но мы допустим, что сила упругости может проанализировать две пары, одну, которую учел Лагранж, действующую в соприкасающейся плоскости и стремящуюся вернуть кривизну ее первоначальное значение, и другую, имеющую в качестве своей оси касательную к упругой кривой и стремящуюся уничтожить *кручение*, возвращая второй кривизне ее первоначальное значение. Назовем эти две пары θ и E . Сначала докажем, что θ остается постоянной, каковы бы ни были заданные силы и первоначальный вид кривой.

В самом деле, для того чтобы определить обе пары θ и E , следует силы, действующие на часть MA кривой, свести к одной силе R , проходящей через точку M , и к одной паре θ . Эта пара θ должна быть эквивалентна двум парам — θ и — E , имеющим соответственно в качестве осей касательную к рассматриваемой кривой и перпендикуляр к ее соприкасающейся плоскости. Если мы повторим то же самое разложение, подставив вместо точки M бесконечно близко к ней расположенную соседнюю точку M' , то сила R и пара θ изменятся, с одной стороны, вследствие изменения точки приложения силы, а с другой стороны, под влиянием новых сил, действующих на дугу MM' . Отметим сначала, что эти последние силы не могут иметь какого-либо влияния на значение пары θ , так как их точка приложения находится на бесконечно малом расстоянии второго порядка от касательной в точке M , являющейся осью пары. Таким образом достаточно принять во внимание изменение положения неподвижной точки, а это изменение очевидно приводит к тому, что к паре θ присоединяется вторая пара, образуемая силой R' и равной ей и противоположно направленной силой, приложенной в точке M' . Но сила R' , подобно силам, приложенным к дуге MM' , имеет точку приложения, расположенную на бесконечно малом расстоянии второго порядка от касательной в точке M' ; таким образом некая пара, осью которой является эта касательная, изменится только на величину такого же порядка. После этих замечаний можно выделить значение θ пары *кручения*, соответствующей точке M' , так как если бы пара θ не изменяла ни своей величины, ни направления, ее следует теперь лишь разложить на две других, из которых одна должна быть перпендикулярна к касательной в точке M' . Для определения этой составляющей пары, выражающей некий момент *кручения*, подставим вместо пары θ две пары — θ и — E , которые ей эквивалентны. Каждая из этих пар должна быть умножена на косинус угла, образуемого ее осью с осью пары θ' , которая представляет собою не что иное, как касательную к рассматриваемой кривой в точке M' . Оси пар θ и θ' образуют бесконечно малый угол, косинус которого равен единице, если, как это было сделано выше, пренебречь бесконечно малыми второго порядка; что касается оси пары — E , то угол, образуемый ею с касательной в точке M' , равен прямоуглому, если мы опять-таки пренебрежем бесконечно малыми второго порядка, так как соприкасающаяся плоскость в точке M параллельна касательной в точке M' ; следовательно, косинус этого угла может быть принят равным нулю; таким образом, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка, мы получим

$$\theta' = \theta,$$

откуда следует, что момент *кручения* строго постоянен по всей длине упругой кривой.

После приведенного замечания составим уравнения равновесия, написав, что силы, приложенные к некоторой части MA кривой, которую мы считаем жесткой, уничтожаются неподвижностью точки M и двумя парами — θ и — E , имеющими соответственно в качестве своих осей касательную к кривой и ось соприкасающейся плоскости; при этом θ — постоянная величина, а E пропорциональна раз-

ности между действительной кривизной в точке M и первоначальной кривизной в той же точке.

Рассмотрим, в частности, случай, когда кривая первоначально представляет собою прямую линию и к ней приложена единственная сила, действующая на конец ее A , причем конец B остается неподвижным. Если предположить, что мы закрепляем точку M , координаты которой x, y, z , то моменты заданных сил по отношению к этой точке будут иметь составляющие следующего вида:

$$cy - bz + a_1,$$

$$az - cx + b_1,$$

$$bx - ay + c_1,$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — постоянные, зависящие от направления силы и от положения ее точки приложения. Приравняв эти моменты парам упругости, разложенным перпендикулярно к тем же трем осям, мы получим уравнения

$$p \frac{dy \, d^2z - dz \, d^2y}{ds^3} = 0 \frac{dx}{ds} + cy - bz + a_1,$$

$$p \frac{dz \, d^2x - dx \, d^2z}{ds^3} = 0 \frac{dy}{ds} + az - cx + b_1,$$

$$p \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{ds^3} = 0 \frac{dz}{ds} + bx - ay + c_1,$$

отличающиеся от уравнений Лагранжа (стр. 120) только обозначением и введением членов, содержащих 0.

Получив эти уравнения, Лагранж прибавляет: *их интегрирование в общем случае быть может невозможно*. Мы покажем, наоборот, что оно всегда выполнимо, причем для этой цели воспользуемся методом, указанным Бляэ *) и немного спустим упрощенным Ванцелем (Wantzell).

Если в качестве оси x взять самое направление заданной силы, то, как легко видеть, приведенные формулы примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} p \frac{dy \, d^2z - dz \, d^2y}{ds^3} &= 0 \frac{dx}{ds} + gy, \\ p \frac{dz \, d^2x - dx \, d^2z}{ds^3} &= 0 \frac{dy}{ds} - gx, \\ p \frac{dx \, d^2y - dy \, d^2x}{ds^3} &= 0 \frac{dz}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где g — постоянная величина.

Последнее уравнение показывает, что если пренебречь 0, как это сделал Лагранж, то кривая необходимо окажется плоской. Помножив эти уравнения на dx, dy, dz и сложив их, мы получим

$$0 = 0 \, ds + g(y \, dx - x \, dy)^{**}); \quad (2)$$

сложив первые два уравнения, умножив их соответственно на x и y , мы получим также

$$p \frac{d^2z}{ds^3} (x \, dy - y \, dx) - p \frac{dz (x \, d^2y - y \, d^2x)}{ds^3} = 0 \frac{x \, dx + y \, dy}{ds}, \quad (3)$$

*) См. Comptes rendus de l'Académie des Sciences за 1844, стр. 1115 и 1197.

**) Можно отметить, что если бы в формуле (2) мы могли положить $x=0, y=0$, то мы получили бы $0=0$. Следовательно, для осуществления кручения необходимо, чтобы сила не была приложена прямо к той точке кривой, на которую она действует.

Прим. Бертрама.

или в силу приведенного выше, если принять z в качестве независимой переменной,

$$\frac{p}{g} \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad (4)$$

и после интегрирования

$$\frac{2p}{g} \cdot \frac{dz}{ds} = x^2 + y^2 - \frac{c}{g}. \quad (5)$$

Если вместо x и y подставить полярные координаты, положив

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan \omega,$$

то приведенные уравнения примут следующий вид:

$$r^2 d\omega = \frac{0}{g} ds, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{gr^2 - c}{2p};$$

откуда, положив $\frac{dz}{ds} = \cos \varphi$ и применив известную формулу

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + dz^2,$$

мы получим

$$ds = \frac{p \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{g \sin^2 \varphi (2p \cos \varphi + c) - 0^2}},$$

$$d\omega = \frac{0 p \sin \varphi d\varphi}{(2p \cos \varphi + c) \sqrt{g \sin^2 \varphi (2p \cos \varphi + c) - 0^2}};$$

далее мы будем иметь

$$dz = \int \cos \varphi ds,$$

$$x = r \cos \omega,$$

$$y = r \sin \omega,$$

$$r^2 = \frac{0}{g} \frac{ds}{d\omega};$$

таким образом x , y , z могут быть с помощью квадратур выражены в функции угла φ .

IV.

БЕРТРАН.

О ФИГУРЕ ЖИДКОЙ МАССЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ.

Обратимся к уравнениям

$$\frac{mM - f}{mL} = \frac{A^2}{B^2}, \quad (1)$$

$$\frac{mN - f}{mL} = \frac{A^2}{C^2}, \quad (2)$$

полученным Лагранжем на стр. 153; прежде всего мы замечаем, что приведенное им рассуждение не обосновывает вполне строго равенства осей B и C . В самом деле, так как M и N отличаются друг от друга только взаимной заменой букв B и C , то ясно, что допущение $B = C$ сводит эти два уравнения к одному, но

не представляется очевидным, что это допущение необходимо для того, чтобы приведенные уравнения могли существовать одновременно. И действительно, мы покажем, что существуют эллипсоидальные формы с неравными осями, для которых возможно равновесие.

Выражения, обозначенные Лагранжем через L , M , N , развернуты в Мёсчаніке céleste Лапласа и в настоящее время их можно найти в большей части курсов механики. Эти выражения — следующие *):

$$L = \frac{3\mu}{k^3} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{H},$$

$$M = \frac{3\mu}{k^3} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 + \lambda^2 x^2) H},$$

$$N = \frac{3\mu}{k^3} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 + \lambda'^2 x^2) H};$$

в этих формулах μ обозначает массу эллипсоида и положено

$$\frac{B^2 - A^2}{A^2} = \lambda^2, \quad \frac{C^2 - A^2}{A^2} = \lambda'^2,$$

$$H = \sqrt{(1 + \lambda^2 x^2)(1 + \lambda'^2 x^2)}.$$

Если из уравнений (1) и (2) исключить f , то мы получим соотношение

$$(M - N)(1 + \lambda^2)(1 + \lambda'^2) = L(\lambda^2 - \lambda'^2), \quad (3)$$

или согласно написанным выше выражениям для L , M и N

$$(\lambda^2 - \lambda'^2) \left[(1 + \lambda^2)(1 + \lambda'^2) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{H^3} - \int_0^1 \frac{x^4 dx}{H} \right] = 0. \quad (4)$$

Это равенство может быть удовлетворено двумя путями:

1. Если положить $\lambda' = \lambda$, что дает эллипсоид вращения и согласуется с указанием Маклорена (MacLaurin), приведенным Лагранжем.

2. Если положить

$$(1 + \lambda^2)(1 + \lambda'^2) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{H^3} = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{H}; \quad (5)$$

это уравнение дает λ в функции λ' и приводит к эллипсоиду с неравными осями, указанному Якоби (Jacobi).

Сверх того можно доказать, что для каждого значения λ уравнение (5) даст соответствующее значение λ' .

Действительно, представим это уравнение в следующем виде:

$$\int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)(1 - \lambda^2 \lambda'^2 x^2) dx}{H^3} = 0; \quad (6)$$

тогда ясно, что если λ приписать определенные значения, то первый член будет положительным, когда λ' равно нулю, и отрицательным, когда λ' очень велико; следо-

*) Laplace, Méchanique céleste, т. II, стр. 11.

вательно, он необходимо превратится в нуль при некотором положительном значении λ' .

Более подробно можно ознакомиться с этим вопросом в статье, помещенной Лхувилем в 14 томе *Journal de l'École Polytechnique* (XXIII cahier). Укажем еще статью, помещенную Лхувилем в IV томе его журнала, содержащую несколько интересных замечаний по поводу уравнения (6). Эта статья озаглавлена: *Observations sur un Mémoire de M. Yvonr*. Наконец, этот вопрос был исследован немецким математиком Мейером (Meyer) из Кенигсберга. Мейер поставил вопрос ^{*)}, много ли эллипсоидальные формы с тремя неравными осями могут дать равновесие при заданной скорости вращения, и пришел к выводу, что существует только одна подобная форма эллипсоида. Одновременно Мейер доказал, что заданной скорости вращения соответствуют, вообще говоря, две эллипсоидальные формы вращения; впрочем, с этим можно ознакомиться в *Mécanique céleste* Лапласа т. II, стр. 56.

V.

ВЕРТРАЦ.

ОБ УРАВНЕНИИ, КОТОРОЕ ЛАГРАНЖ ПРИЗНАЛ НЕВОЗМОЖНЫМ

На странице 203 (т. II, отд. III, н. 10) Лагранж пришел к заключению, что уравнение

$$\left. \begin{aligned} & S(x^2 + y^2) Dm \times S(x^2 + z^2) Dm \times S(y^2 + z^2) Dm = \\ & = S(x^2 + y^2) Dm \times (S xy Dm)^2 + S(x^2 + z^2) Dm \times (S xz Dm)^2 + \\ & + S(y^2 + z^2) Dm \times (S yz Dm)^2 + 2 S xy Dm \times S xz Dm + S yz Dm \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

следует признать невозможным, но он не остановился на доказательстве этой невозможности, так как быстрый просмотр этого уравнения привел Лагранжа к выводу, что эту невозможность трудно обосновать. Целью настоящей статьи является восполнение этого пробела, который, впрочем, послужил уже предметом исследования *Бина*. Положим

$$\begin{aligned} a &= S x^2 Dm, & b &= S y^2 Dm, & c &= S z^2 Dm, \\ d &= S xy Dm, & e &= S xz Dm, & f &= S yz Dm; \end{aligned}$$

следует доказать, что равенство

$$(a + b)(a + c)(b + c) = d^2(a + b) + e^2(a + c) + f^2(b + c) + 2def \quad (2)$$

ни в каком случае не может иметь места. С этой целью мы докажем, что если все члены перенести в левую часть уравнения, то результат будет существенно положительным.

После переноса членов мы получим на левой стороне

$$2abc + b^2c + ac^2 + bc^2 + ca^2 + ba^2 + ab^2 - (b + c)f^2 - (a + c)e^2 - (a + b)d^2 - 2def$$

что может быть написано и следующим образом:

$$2(abc - def) + (ab - d^2)(a + b) + (ac - e^2)(a + c) + (bc - f^2)(b + c). \quad (3)$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} ab - d^2 &= S x^2 Dm \times S y^2 Dm - (S xy Dm)^2, \\ ac - e^2 &= S x^2 Dm \times S z^2 Dm - (S xz Dm)^2, \\ bc - f^2 &= S y^2 Dm \times S z^2 Dm - (S yz Dm)^2, \end{aligned}$$

^{*)} Crel's Journal, т. XXIV.

причем очень легко увидеть, что все эти три разности положительны, далее из неравенств

$$\left. \begin{aligned} ab &> d^2, \\ ac &> e^2, \\ bc &> f^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

получается

$$a^2b^2c^2 > d^2e^2f^2,$$

и, следовательно,

$$abc > def;$$

теперь мы видим, что все члены выражения (3) существенно положительны и, следовательно, что указанное выражение никогда не может стать равным нулю.

Неравенства (4) мы приняли как очевидные. В самом деле, если допустить, что число точек системы имеет какое-либо конечное значение n , то первое из указанных неравенств, отличающееся от двух других лишь заменой букв, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \dots + m_nx_n^2)(m_1y_1^2 + m_2y_2^2 + \dots + m_ny_n^2) > \\ > (m_1x_1y_1 + \dots + m_nx_ny_n)^2, \end{aligned}$$

но оно может быть представлено и в таком виде

$$\sum \sum m_i m_{i'} (x_i y_{i'} - x_{i'} y_i)^2 > 0;$$

в этом виде оно становится совершенно очевидным. Единственный случай исключения мы будем иметь, когда все элементы суммы будут равны нулю. Но это условие может быть выполнено одновременно для всех трех неравенств (4) только в том случае, когда все точки системы лежат на одной и той же прямой линии, проходящей через начало координат.

VI.

ВЕРТРАН.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ И О ВИДЕ, КАКОЙ МОЖНО ПРИДАТЬ ИХ ИНТЕГРАЛАМ.

В IV разделе второй части Лагранж указал чрезвычайно интересный вид, какой получают уравнения динамики, если вместо координат различных точек подставлять любую систему переменных. В настоящей статье мы вернемся к составлению этих уравнений. Затем мы укажем чрезвычайно удачное преобразование, которому подверг их Гамильтон (Hamilton) и из которого можно вывести ряд свойств их интегралов, подходящих ко всем тем проблемам, при которых применяется преобразование Гамильтона.

I.

Пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ представляют собою $3n$ координат точек системы. $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \dots, \Pi_{3n-k} = 0$ представляют собою $3n-k$ уравнений связей, определяющих систему, причем $3n$ координат могут фигурировать в этих уравнениях любым образом вместе со временем t ; обозначим через $q_1, q_2, \dots, q_k$ k новых переменных, так что $3n$ координат $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ можно выразить в функции этих переменных и времени t . Формулы, выражающие координаты, конечно, таковы, что уравнения $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \dots, \Pi_{3n-k} = 0$ тождественно удовлетворяются, если вместо различных координат подставить их выражения в функции новых переменных.

Как известно, общий тип уравнений движения представляется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_{3n-k} \frac{\partial \Pi_{3n-k}}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_{3n-k} \frac{\partial \Pi_{3n-k}}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + \lambda_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_{3n-k} \frac{\partial \Pi_{3n-k}}{\partial z_i}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

буква i обозначает любое целое число, не превышающее n , m_i обозначает массу точки, координаты которой равны x_i, y_i, z_i , а X_i, Y_i, Z_i — составляющие силы, действующие на эту точку.

Умножим уравнения (1) соответственно на $\frac{\partial x_i}{\partial q_m}, \frac{\partial y_i}{\partial q_m}, \frac{\partial z_i}{\partial q_m}$ и прибавим их ко всем аналогичным уравнениям, которые получаются, если i приписать n значений, которые она может принять; тогда мы получим

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right); \quad (2)$$

множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{3n-k}$ при сложении исчезают ввиду наличия соотношения

$$\sum \left(\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\beta}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_\beta} \frac{\partial z_\beta}{\partial q_m} \right) = 0, \quad (3)$$

которое получается вследствие того, что функция Π_α (где α обозначает любой индекс, не превышающий $3n-k$) тождественно обращается в нуль при замещении $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n$ их значениями в функции $q_1, q_2, \dots, q_k$ и t .

Второй член уравнения (2) мы должны рассматривать, как известную функцию переменных $q_1, q_2, \dots, q_k$ и t , так как согласно условиям задачи величины $X_i, Y_i, Z_i, x_i, y_i, z_i$ даны в функции указанных $k+1$ переменных. Таким образом этот второй член не приходится преобразовывать и мы его обозначим буквой Q_m .

Для преобразования первого члена напишем его в следующем виде:

$$\sum m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \frac{dx_i'}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \frac{dy_i'}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \frac{dz_i'}{dt} \right), \quad (4)$$

обозначив через x_i', y_i', z_i' составляющие скорости точки, координаты которой равны x_i, y_i, z_i . Мы имеем тождественно

$$\begin{aligned} \sum m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m} \frac{dx_i'}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} \frac{dy_i'}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \frac{dz_i'}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \sum m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) - \\ &- \sum m_i \left(x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно допущению x_i, y_i, z_i даны в функции $q_1, q_2, \dots, q_k$ и t ; путем дифференцирования формул, выражающих эту функциональную зависимость, мы получим

$$\left. \begin{aligned} x_i' &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k', \\ y_i' &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} q_k', \\ z_i' &= \frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} q_k', \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

откуда можно заключить

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_m} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_m} = \frac{\partial y_i'}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_m} = \frac{\partial z_i'}{\partial q_m};$$

кроме того, мы имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial t} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_m} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_m} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_m} q_k',$$

что согласно значению x_i' , получающемуся с помощью уравнения (6), эквивалентно $\frac{\partial x_i'}{\partial q_m}$. Точно так же мы получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} = \frac{\partial y_i'}{\partial q_m}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} = \frac{\partial z_i'}{\partial q_m}.$$

Если принять во внимание эти соотношения и сверх того положить

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x y_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

то уравнение (4) примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m.$$

Поставив индексу m последовательно все значения $1, 2, \dots, k$, мы получим k уравнений указанного вида и таким образом составим k дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_2'} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k'} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k,$$

которые представляют собою в точности уравнения Лагранжа. В этих уравнениях неизвестными являются $q_1, q_2, \dots, q_k$ и их производные $q_1', q_2', \dots, q_k'$; $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ являются заданными функциями этих неизвестных; то же самое относится к T ; в самом деле, так как согласно допущению x_i, y_i, z_i заданы, то путем дифференцирования можно получить x_i', y_i', z_i' . Важно отметить, что согласно правилам дифференцирования x_i', y_i', z_i' будут линейными функциями $q_1', q_2', \dots, q_k'$ и, следовательно, T будет целой алгебраической функцией второго порядка всех этих различных производных. Если выражения x_i, y_i, z_i не содержат в себе явно буквы t , а это будет иметь место во всех тех случаях, когда связи будут независимы от времени, то, как легко видеть, x_i', y_i', z_i' будут однородными функциями первого порядка, а стало быть T будет однородной функцией второго порядка по отношению к переменным $q_1', q_2', \dots, q_k'$. Это замечание имеет очень большое значение.

II.

При изложенных ниже рассуждениях представим себе систему, связан которой не зависят от времени и которая находится под действием сил, составляющие которых являются частными производными одной и той же функции. Одним словом, допустим, что к задаче, которой мы займемся, применим принцип живых сил.

Возьмем вновь дифференциальные уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_2'} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k'} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

которые представляют собою уравнения второго порядка; их можно свести к уравнениям первого порядка, если $q_1', q_2', \dots, q_k'$ рассматривать как k новых неизвестных, определяемых уравнениями

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2', \dots, \quad \frac{dq_k}{dt} = q_k'; \quad (2)$$

указанным путем мы получим систему $2k$ уравнений первого порядка.

У Пуассона была мысль о преобразовании систем (1) и (2) путем подстановки вместо неизвестных $q_1', q_2', \dots, q_k'$ новых неизвестных $\frac{\partial T}{\partial q_1'}, \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_k'}$, которые являются их линейными функциями, но он полностью не развил своего преобразования, и Гамильтон первый дал очень простые уравнения, к которым нас могут привести эти новые переменные.

Положим

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial q_k'} = p_k.$$

Тогда уравнения (1) примут следующий вид:

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \dots, \quad \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k;$$

но подстановка переменных $p_1, p_2, \dots, p_k$ вместо $q_1', q_2', \dots, q_k'$ требует, чтобы были преобразованы и вторые члены этих уравнений. В самом деле, ясно, что если T выражено в функции $q_1, q_2, \dots, q_k, q_1', q_2', \dots, q_k'$, а затем в функции $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$, то в этих двух видах она не будет иметь одной и той же производной по q_m .

Так как T является однородной функцией второго порядка переменных $q_1', q_2', \dots, q_k'$, то мы имеем тождественно

$$2T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + \dots + q_k' \frac{\partial T}{\partial q_k'},$$

что можно написать в следующем виде:

$$T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + \dots + q_k' \frac{\partial T}{\partial q_k'} - T = q_1' p_1 + q_2' p_2 + \dots + q_k' p_k - T. \quad (3)$$

Возьмем вариации обеих частей, одновременно варьируя все переменные; тогда мы получим

$$\delta T + q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \dots + q_k' \delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (4)$$

(Во второй части опускаем члены $p_m \delta q_m'$ и $-\frac{\partial T}{\partial q_m'} \delta q_m'$, которые взаимно уничтожаются.)

Но рассматривая T как функцию $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$, мы из уравнения (4), очевидно, получим

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q_2', \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_k} = q_k', \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial T}{\partial q_k}. \quad (6)$$

Благодаря уравнениям (6) уравнения движения получают следующий вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = Q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = Q_2 - \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \quad \frac{dp_k}{dt} = Q_k - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (A)$$

а если к ним присоединить соотношения (5),

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{dq_2}{dt}, \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt}, \quad (B)$$

то мы получим $2k$ дифференциальных уравнений первого порядка между неизвестными $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$. Для того чтобы эти уравнения упростить, вспомним, что X_i, Y_i, Z_i , составляющие силы, действующей на точку x_i, y_i, z_i , являются

согласно допущению частными производными одной и той же функции U и, следовательно, мы имеем

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i};$$

поэтому, если принять во внимание определение функции Q_m ,

$$Q_m = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m},$$

мы придем к следующему выводу:

$$Q_m = \frac{\partial U}{\partial q_m}.$$

Если значения, получающиеся с помощью этой формулы, подставить в уравнения (A) вместо $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ и сверх того положить $U - T = H$, то эти уравнения примут следующий вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \dots, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad (C)$$

сверх того мы примем во внимание, что так как U не содержит в себе $p_1, p_2, \dots, p_k$, то мы имеем $\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial T}{\partial p_i}$, поэтому уравнения (B) могут быть написаны в следующем виде:

$$\frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \quad \frac{dq_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (D)$$

Системы (C) и (D) дают в наиболее простом виде уравнения проблемы механики, к которой применим принцип живых сил. Как видим, две проблемы подобного рода отличаются друг от друга только числом переменных и видом функции H .

III.

Хотя, вообще говоря, мы далеки от того, чтобы иметь возможность проинтегрировать уравнения (C) и (D) предыдущего параграфа, тем не менее их вид позволяет нам прийти к ряду очень важных теорем, которые применимы ко всем вопросам, представляемым этими уравнениями.

Мы начнем с вывода следующей теоремы, данной Гамильтоном.

Теорема. Все интегралы механической проблемы, к которой применим принцип живых сил, могут быть найдены, если приравнять постоянным величинам частные производные одной и той же функции, взятые по отношению к другим постоянным.

Возьмем дифференциальные уравнения механической проблемы, к которой применим принцип живых сил

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= + \frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= + \frac{\partial H}{\partial q_2}, & \dots, & \frac{dp_k}{dt} &= + \frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_1}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{dq_k}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположим, что после интегрирования этих уравнений $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$ нам станут известными в функции t и $2k$ произвольных постоянных. Если подставить эти значения в функцию H , то продифференцировав полученный результат по одной из постоянных α , мы получим

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha},$$

т. е. если принять во внимание уравнения (1), которые согласно допущению удовлетворяются

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= - \frac{dq_1}{dt} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} - \frac{dq_2}{dt} \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} - \dots - \frac{dq_k}{dt} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha} + \\ &+ \frac{dp_1}{dt} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{dp_2}{dt} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{dp_k}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha}; \end{aligned} \quad (2)$$

последнее можно представлять в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \dots + p_k \frac{dq_k}{dt} \right). \quad (2)$$

Но так как T — однородная функция 2-й степени по отношению к $q_1', q_2', \dots, q_k'$, то мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_k'} q_k' = 2T.$$

А это выражение тождественно тому выражению, производная которого по α фигурирует во второй части уравнения (2), так что это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right) - 2 \frac{\partial T}{\partial \alpha},$$

или же

$$\frac{\partial (H + 2T)}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right). \quad (4)$$

Если обе части этого уравнения проинтегрировать по t , то мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^t (H + 2T) dt = & + \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right)_t - \\ & - \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right)_0; \end{aligned} \quad (5)$$

индексы 0 и t , поставленные внизу возле скобок, указывают, что время следует принять равным нулю или t .

Интеграл $\int_0^t (H + 2T) dt$ является функцией t и $2k$ произвольных постоянных;

если мы его обозначим через S , то приведенное выше уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = & \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right)_t - \\ & - \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \dots + p_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right)_0; \end{aligned} \quad (6)$$

если последнее умножить на $d\alpha$ и затем сложить со всеми аналогичными уравнениями, которые получаются при последовательной замене постоянной α всеми постоянными, фигурирующими в интегралах данной проблемы, то мы получим

$$\delta S = p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \dots + p_k \delta q_k - (p_1)_0 (\delta q_1)_0 - (p_2)_0 (\delta q_2)_0 - \dots - (p_k)_0 (\delta q_k)_0, \quad (7)$$

где символом δ обозначена полная вариация функции различных постоянных, когда последние одновременно все варьируются.

Теперь отметим, что S , являющаяся функцией t и $2k$ произвольных постоянных, может быть выражена в функции t и $q_1, q_2, \dots, q_k, (q_1)_0, (q_2)_0, \dots, (q_k)_0$. В самом деле, мы допустим, что $q_1, q_2, \dots, q_k$ являются функциями t и $2k$ постоянных; если в k уравнениях, определяющих эти величины, положить $t = 0$, то мы получим k новых уравнений, в которых $(q_1)_0, (q_2)_0, \dots, (q_k)_0$ заменят собою $q_1, q_2, \dots, q_k$ и которые, будучи присоединены к предыдущим уравнениям, позволят выразить $2k$ постоянных в функции t и $q_1, q_2, \dots, q_k, (q_1)_0, (q_2)_0, \dots, (q_k)_0$.

Если допустить, что указанное исчисление произведено, то уравнение (7) даст вариацию S , когда все переменные, от которых зависит эта функция, за исключением лишь t , получают бесконечно малые приращения. На основании принципов дифференциального исчисления мы приходим к следующим уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial S}{\partial q_2} &= p_2, \dots, & \frac{\partial S}{\partial q_k} &= p_k, \\ \frac{\partial S}{\partial (q_1)_0} &= -(p_1)_0, & \frac{\partial S}{\partial (q_2)_0} &= -(p_2)_0, \dots, & \frac{\partial S}{\partial (q_k)_0} &= -(p_k)_0; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

так как эти уравнения имеют место между $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$ временем t и $2k$ постоянными $(p_1)_0, (p_2)_0, \dots, (p_k)_0, (q_1)_0, (q_2)_0, \dots, (q_k)_0$, то, очевидно, они являются полными интегралами проблемы. Можно заметить, что уравнения, входящие в состав второго ряда группы (8), образуют отдельную систему, в которой не фигурируют $p_1, p_2, \dots, p_k$ и которая, следовательно, позволяет вычислить неизвестные $q_1, q_2, \dots, q_k$ в функции времени и всех начальных значений $(q_1)_0, (q_2)_0, \dots, (q_k)_0, (p_1)_0, (p_2)_0, \dots, (p_k)_0$.

IV.

Если судить по тому, как в прошлом параграфе была введена функция S , можно было бы подумать, что для определения этой функции следовало бы предварительно разрешить рассматриваемую задачу. Но мы сейчас покажем, что эта функция удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, каждый полный интеграл которого может заменить эту функцию при образовании интегралов механической задачи.

Мы положили

$$S = \int_0^t (H + 2T) dt; \quad (1)$$

на основании параграфа II имеем

$$H = U - T,$$

следовательно,

$$S = \int_0^t (U + T) dt.$$

Продифференцируем обе части этого выражения по t , причем примем во внимание, что S содержит в себе t явно, а также $q_1, q_2, \dots, q_k$ зависящие от времени; тогда мы будем иметь

$$U + T = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial S}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial S}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}. \quad (2)$$

Но $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_k}{dt}$ являются линейными функциями $p_1, p_2, \dots, p_k$, т. е. (параграф III) $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$; таким образом благодаря подстановке этих значений уравнение (2) станет дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка по отношению к производным S . Для составления этого уравнения следует, как мы это указали, преобразовать сумму

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial S}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial S}{\partial q_k} q_k',$$

входящую в состав второй части, по результат этого исчисления, очевидно, остается тем же, если вместо этой суммы подставить выражение

$$p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots + p_k q_k',$$

отличающееся от нее лишь заменой $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$ величинами $p_1, p_2, \dots, p_k$ — заменой, эффект которой будет уничтожен благодаря обратной замене, которую придется сделать в конце исчисления. Но так как T — однородная функция второго порядка по отношению к $q_1', q_2', \dots, q_k'$, то мы имеем следующее тождество

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_k'} q_k' = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots + p_k q_k';$$

так что уравнение (2), которому удовлетворяет функция S , может быть символически написано следующим образом

$$U + T = \frac{\partial S}{\partial t} + 2T,$$

т. е.

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + (T). \quad (3)$$

Скобки, заключающие в себе T , указывают на то, что эта функция должна быть выражена в функции $p_1, p_2, \dots, p_k$ и что затем эти переменные должны быть заменены величинами

$$\frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial q_k}.$$

Уравнение (3) допускает бесчисленное множество решений, причем каждое из них содержит в себе k произвольных постоянных; Лагранж называет их *полными (completés) интегралами*. Одним из этих интегралов будет функция S , которую мы определили в предыдущем параграфе, но мы сейчас покажем, что всякий другой полный интеграл может ее заменить и дать решение расследуемой нами механической проблемы.

В самом деле, пусть

$$S = F(t, q_1, q_2, \dots, q_k, a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (4)$$

один из подобных интегралов, тождественно удовлетворяющий уравнению (3) и содержащий k произвольных постоянных; если положить

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = b_k, \quad (5)$$

то я утверждаю, что мы будем иметь полное решение предложенной задачи и что приведенные уравнения (5) дадут значения $q_1, q_2, \dots, q_k$ в функции t и $2k$ произвольных постоянных. Для того чтобы это доказать, напомним, что следующие дифференциальные уравнения являются уравнениями движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= + \frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= + \frac{\partial H}{\partial q_2}, & \dots, & \frac{dp_k}{dt} &= + \frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_1}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{dq_k}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_k}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где H обозначает разность $U - T$. Так как U не содержит в себе $p_1, p_2, \dots, p_k$, то мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = - \frac{\partial T}{\partial p_1},$$

так что второй ряд уравнений (6) может быть написан в следующем виде:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \quad \dots, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_k}. \quad (7)$$

Мы начнем с того, что покажем, что эти уравнения (7) могут быть выведены из системы уравнений (5).

Если уравнения (5) продифференцировать по t , то мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial a_1} q_1' + \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial a_1} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1} q_k' = 0, \quad (8)$$

к которому следует присоединить $k-1$ уравнений, получающихся путем замены в этом уравнении буквы a_1 буквами $a_2, a_3, \dots, a_k$. Полученная, таким образом, система k уравнений даст значения $q_1', q_2', \dots, q_k'$, вытекающие из соотношений (5).

А если продифференцировать по a_1 уравнение (3), которому S тождественно удовлетворяет, то мы получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_1} + \frac{\partial(T)}{\partial a_1} = 0; \quad (9)$$

$\frac{\partial(T)}{\partial a_1}$ обозначает здесь производную по a_1 выражения, в которое преобразуется T ,

когда $p_1, p_2, \dots, p_k$ в нем заменяются величинами $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$. Но на основании этого мы, очевидно, имеем

$$\frac{\partial(T)}{\partial a_1} = \frac{\partial T}{\partial p_1} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial a_1} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial a_1} + \dots + \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1}; \quad (10)$$

по второй части этого уравнения следует еще преобразовать $\frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial T}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial p_k}$,

заменяя в них $p_1, p_2, \dots, p_k$ величинами $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$. Для того чтобы отметить это преобразование, поместим эти величины в скобках. Тогда уравнение (9) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_1} + \left(\frac{\partial T}{\partial p_1} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial a_1} + \left(\frac{\partial T}{\partial p_2} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial a_1} + \dots + \left(\frac{\partial T}{\partial p_k} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1} = 0; \quad (11)$$

к этому уравнению можно присоединить еще $k-1$ аналогичных уравнений, которые могут быть образованы путем замены в нем a_1 величинами $a_2, a_3, \dots, a_k$. Но если полученную таким образом систему уравнений сравнить с уравнениями типа (8), то мы придем к выводу, что последнее удовлетворяется следующими значениями неизвестных $q_1', q_2', \dots, q_k'$:

$$q_1' = \left(\frac{\partial T}{\partial p_1} \right), \quad q_2' = \left(\frac{\partial T}{\partial p_2} \right), \dots, \quad q_k' = \left(\frac{\partial T}{\partial p_k} \right). \quad (12)$$

Но выше [параграф II, уравнение (5)] были выведены соотношения

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q_2', \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_k} = q_k',$$

так что предыдущие формулы могут быть написаны следующим образом

$$q_1' = (q_1'), \quad q_2' = (q_2'), \dots, \quad q_k' = (q_k'), \quad (13)$$

где $(q_1'), (q_2'), \dots, (q_k')$ обозначают величины, в которые превращаются $q_1', q_2', \dots, q_k'$ когда их выражают в функции $p_1, p_2, \dots, p_k$, а затем последние замещают с помощью $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$. Предположим теперь, что проведя указанное преобразование во вторых частях уравнений (12), мы одновременно с помощью тех же формул, которыми мы воспользовались, выразим первые части их в функции $p_1, p_2, \dots, p_k$; тогда мы составим систему уравнений, обе части которых будут отличаться друг от друга только заменой $p_1, p_2, \dots, p_k$ выражениями $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$ и из которых, следовательно, мы выведем

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}. \quad (14)$$

Если мы вернемся теперь к уравнениям (12), то их можно будет написать следующим образом

$$q_1' = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad q_2' = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \dots, \quad q_k' = \frac{\partial T}{\partial p_k}, \quad (15)$$

т. е., опустив скобки, назначение которых заключается только в том, чтобы указать подстановку $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$ вместо величин, равных им в силу уравнений (14). Формулы (15) образуют половину дифференциальных уравнений движения, которые, таким образом, удовлетворены. Нижеследующие уравнения, будучи присоединены к системе (15), представляют полные условия задачи

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \dots, \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (16)$$

Для того чтобы показать, что эти уравнения тоже удовлетворены, продифференцируем по t уравнения (14); полученные при этом результаты будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_k} q_k', \quad (17)$$

или, если $q_1', q_2', \dots, q_k'$ заменить их значениями $\frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial T}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial p_k}$,

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2} \frac{\partial T}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial T}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_k} \frac{\partial T}{\partial p_k}. \quad (18)$$

Продифференцируем теперь по q_1 уравнение

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + (T); \quad (19)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial (T)}{\partial q_1} = \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial p_1} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2} + \left(\frac{\partial T}{\partial p_2} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} + \dots + \left(\frac{\partial T}{\partial p_k} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_k}, \end{aligned} \quad (20)$$

или, заменив $\left(\frac{\partial T}{\partial p_1} \right)$, $\left(\frac{\partial T}{\partial p_2} \right)$, ... их значениями q_1' , q_2' , ..., q_k' .

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + q_1' \frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2} + q_2' \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} + \dots + q_k' \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_k}. \quad (21)$$

Сравнив уравнения (17) и (21), мы придем к следующему выводу:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \right).$$

Но в силу соотношений (14) мы можем опустить скобки, заключающие в себе $\frac{\partial T}{\partial q_1}$, и тогда, наконец, мы получим

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial (U - T)}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

Здесь мы имеем как раз то соотношение, которое мы хотели вывести; аналогичные выражения мы получим для $\frac{dp_2}{dt}$, ..., $\frac{dp_k}{dt}$ и, таким образом, докажем, что все уравнения движения удовлетворяются системой соотношений (5).

Мысль о замещении функции S Гамильтона каким-либо из интегралов уравнения, которому она удовлетворяет, принадлежит Якоби^{*)}. Он привел доказательство этого положения для случая системы без связей. После этого многие математики последовали тот же вопрос, но я полагаю, что приведенное выше доказательство является простейшим из всех, какие были даны до настоящего времени.

V.

Гамильтон называет функцию S , к которой относятся приведенные выше исчисления, *главной функцией* проблемы. Он рассматривает сверх того другую функцию, которую он называет *характеристической* и которую мы обозначим через V . Мы считаем своим долгом дать здесь определение этой функции V и изложить наиболее важное ее свойство. Гамильтон впервые дал именно эту функцию, и я полагаю, что при ознакомлении с ней легче всего будет понять те идеи, которыми он руководствовался.

Функция V представляет собою не что иное, как интеграл $\int_0^t dt \sum mv^2$, кото-

рый рассматривают в связи с принципом наименьшего действия, так что в процессе доказательства этого принципа можно, как мы это сейчас увидим, наиболее естественно путем прийти к прекрасному открытию Гамильтона.

Согласно обозначению, принятому в настоящей статье, мы имеем

$$V = \int_0^t 2T' dt = \int_0^t (p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots + p_n q_n') dt,$$

^{*)} Crell's Journal, т. XVII.

откуда следует

$$\delta V = + \int_0^t (p_1 \delta q_1' + p_2 \delta q_2' + \dots + p_n \delta q_n') dt + \\ + \int_0^t (q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \dots + q_n' \delta p_n) dt,$$

где символ δ относится к вариации всех постоянных величин, фигурирующих в выражениях $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$.

Интегрируя по частям члены первого интеграла и приняв во внимание, что $\delta q_1' = \frac{d\delta q_1}{dt}$, мы получим

$$\delta V = \int_0^t \left(-\delta q_1 \frac{dp_1}{dt} - \delta q_2 \frac{dp_2}{dt} - \dots - \delta q_n \frac{dp_n}{dt} + q_1' \delta p_1 + \right. \\ \left. + q_2' \delta p_2 + \dots + q_n' \delta p_n \right) dt + (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \dots + p_n \delta q_n);$$

индексы 0 и t , поставленные позади скобок, указывают, что здесь следует для времени принять последовательно значения 0 и t и затем взять разность двух полученных результатов. Но согласно дифференциальным уравнениям движения мы, очевидно, имеем

$$-\delta H = -\delta q_1 \frac{dp_1}{dt} - \delta q_2 \frac{dp_2}{dt} - \dots - \delta q_n \frac{dp_n}{dt} + q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \dots + q_n' \delta p_n;$$

а так как вследствие принципа живых сил δH — постоянная величина, то приведенное уравнение принимает следующий вид:

$$\delta V = -t \delta H + p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \dots + p_n \delta q_n - p_1^0 \delta q_1^0 - p_2^0 \delta q_2^0 - \dots - p_n^0 \delta q_n^0.$$

Следовательно, если рассматривать V как функцию $q_1, q_2, \dots, q_n, q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ и H , то мы будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \\ \frac{\partial V}{\partial q_1^0} = -p_1^0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2^0} = -p_2^0, \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n^0} = -p_n^0, \quad \frac{\partial V}{\partial H} = -t.$$

Эти уравнения можно рассматривать как полное решение поставленной проблемы, которая, следовательно, будет разрешена, если достичь определения характеристической функции V ; V , как и S , удовлетворяет частному дифференциальному уравнению, единственный полный интеграл которого достаточен для решения проблемы. Но для исследования этого уравнения мы отошлем читателя к мемуару Якоби, который подробно проанализировал случай свободной системы; что касается случая системы с любыми связями, то он не представит никаких затруднений для лиц, которые усвоили аналогичные предложения, изложенные выше применительно к функции S .

Мы не можем здесь указать какого-либо частного применения теории, послужившей предметом настоящей статьи. По этому поводу можно с пользой посмотреть многочисленные мемуары Лиувилля, напечатанные в XIV и XVI томах его журнала и в *Additions à la Connaissance des Temps* за 1850 г.

VII.

БЕРТРАН.

О ТЕОРЕМЕ ПУАССОНА.

Пуассон в одном из своих мемуаров изложил весьма общую теорему, на которой он основал новый метод выражения вариации произвольных постоянных. Хотя эта теорема сама по себе представлялась чрезвычайно интересной, Пуассон удовлетворялся применением ее для специальной проблемы, которую он себе

поставил, не отметив даже того обстоятельства, что ее можно применить и для других целей. Спустя больше чем тридцать лет после этого, уже в момент смерти Пуассона, внимание математиков снова было привлечено к этому вопросу знаменитым Якоби, который указал на теорему Пуассона, как на замечательное достижение, по его мнению, — наиболее важное во всей науке о движении. Впрочем, Якоби не подкрепил какими-либо выводами своего утверждения, относительно которого, быть может, мы найдем более подробные указания в его посмертных трудах. Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы изложить теорему Пуассона и указать ту пользу, которая может быть из нее извлечена для интегрирования дифференциальных уравнений механики.

I.

Рассмотрим какую-либо проблему механики, к которой применимо изложенное в предыдущей статье преобразование Гамильтона. Пусть имеются дифференциальные уравнения этой проблемы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \dots, & \frac{dp_k}{dt} &= +\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{dq_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если мы допустим, что нам известны два интеграла этой системы уравнений, причем каждый из них содержит в себе произвольную постоянную и разрешен относительно этой постоянной

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k, t), \quad (2)$$

$$\beta = \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k, t), \quad (3)$$

то теорема Пуассона сводится к тому, что выражение

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_1} \frac{\partial \beta}{\partial p_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_1} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} \frac{\partial \beta}{\partial p_2} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_2} \frac{\partial \beta}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial q_k} \frac{\partial \beta}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \frac{\partial \beta}{\partial q_k}, \quad (4)$$

которое он обозначает через (α, β) , сохраняет во время движения постоянное значение, так что если уравнение

$$(\alpha, \beta) = \text{const}$$

не является тождественным, то оно представляет собою интеграл рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

Для доказательства этого предложения составим производную выражения (α, β) и удостоверимся, что она равна нулю; мы имеем

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial p_i} + \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial q_i} - \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \right). \quad (5)$$

Но так как α и β являются интегралами системы (1), то $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\beta}{dt}$, если принять во внимание эти уравнения, тождественно равны нулю, и тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} + \sum \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= 0; \end{aligned}$$

если эти два уравнения предифференцировать по p_i и q_i , где i обозначает какой-либо индекс, то мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial p_i} + \sum \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial p_{i'}} \frac{\partial H}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{i'}} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{i'}} \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial q_{i'}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial q_{i'}} + \sum \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial q_{i'}} \frac{\partial H}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_{i'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{i'}} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{i'}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

и два других уравнения, отличающихся от приведенных лишь заменой буквы α буквой β .

Сверх того мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{i'}} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial p_{i'}} + \sum \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial p_{i'}} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{i'}} \frac{dq_i}{dt} = \\ &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial p_{i'}} + \sum \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial p_{i'}} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{i'}} \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial q_{i'}} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial q_{i'}} + \sum \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial q_{i'}} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{i'}} \frac{dq_i}{dt} = \\ &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial q_{i'}} + \sum \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial q_{i'}} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{i'}} \frac{\partial H}{\partial p_i};\end{aligned}$$

в силу этих соотношений уравнения (6) и (7) могут быть написаны в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{i'}} + \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial q_{i'}} + \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_{i'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{i'}} \right) = 0; \quad (9)$$

точно так же мы будем иметь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial p_{i'}} + \sum \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i'}} - \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial q_{i'}} + \sum \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_{i'}} - \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{i'}} = 0. \quad (11)$$

Если из уравнений (8), (9), (10) вывести значения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial q_{i'}}$$

для всех значений индекса i и вывести их в уравнение (5), правильность которого мы хотели доказать, то мы получим тождество, в чем можно очень просто убедиться, если принять во внимание, что после указанной подстановки все члены правой части уравнения содержат в качестве множителя вторую производную функции H ; если соединить все члены, соответствующие одной и той же производной, то мы увидим, что таких членов имеется четыре и что они попарно друг друга уничтожают. Отсюда мы получим

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0$$

и, следовательно, $(\alpha, \beta) = \text{const}$, что дает нам в точности теорему Пуассона.

Если (α, β) — функция переменных $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$, которые нельзя рассматривать как функции α и β , то это уравнение $(\alpha, \beta) = \text{const}$ будет третьим интегралом, который можно скомбинировать с двумя интегралами α и β таким образом, чтобы составить новое постоянное выражение, которое в некоторых случаях может послужить четвертым интегралом, и так далее. К сожалению, случаи, при которых этот процесс не приводит к новым интегралам, чрезвычайно многочисленны. Мы остановимся на некоторых частных, связанных с этим важным вопросом:

II.

Пусть

$$\alpha = \varphi_1, \beta = \varphi_2, \gamma = \varphi_3, \dots, \lambda = \varphi_{2k}$$

представляют собою интегралы какой-либо механической проблемы, причем $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2k}$ выражают функции неизвестных координат и времени t , сохраняющие одно и то же значение в течение всего времени движения. Очевидно, что любая функция величин $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2k}$ будет обладать тем же свойством, вследствие чего величину

$$A = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2k}) = F_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma, \lambda)$$

мы можем тоже рассматривать как некоторый интеграл дифференциальных уравнений движения.

Если мы рассмотрим второй интеграл

$$B = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2k}) = F_2(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma, \lambda),$$

где F_1 и F_2 обозначают две произвольных функции, то, пользуясь только правилами дифференцирования, мы легко удостоверимся, что если скомбинировать оба интеграла A и B , как это было указано в предыдущем параграфе, мы получим тождественно

$$(A, B) = +(\alpha, \beta) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \right) + (\alpha, \gamma) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \right) + \dots +$$

$$+ (\beta, \gamma) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \right) + \dots + (\gamma, \lambda) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \right).$$

Эта формула дает результат сочетания двух интегралов A и B в функции результатов, полученных путем комбинирования интегралов, от которых зависят величины A и B . Эта формула в дальнейшем нам очень пригодится.

III.

Когда нам известны два интеграла, которые мы для краткости обозначим через α и β по имени входящих в них постоянных, можно двумя различными путями добиться того, чтобы результат их сочетания не дал нового интеграла. В самом деле, это будет в том случае, когда выражение (α, β) тождественно постоянно или когда, не будучи тождественно постоянным, оно является такой функцией α и β , которая может быть получена путем сочетания этих двух интегралов. Важно последовать оба эти случая и определить, должны ли они часто встречаться. Докажем сначала теорему, которая позволяет связать эти два случая. Если $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ представляют собою два таких интеграла одной и той же задачи, что (α, β) является функцией α и β , то всегда существует некоторая функция α и β , которая, будучи приравнена постоянной γ , даст такой интеграл, что (α, γ) тождественно равно единице.

Действительно согласно формуле предыдущего параграфа мы имеем

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta) \frac{\partial \gamma}{\partial \beta};$$

следовательно, если (α, β) , как мы допустили, является функцией α и β , можно всегда определить γ с помощью условия

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \frac{1}{(\alpha, \beta)}$$

и сделать так, чтобы (α, γ) был равен единице.

IV.

После того как мы доказали, что оба случая, для которых теорема Пуассона дает иллюзорные результаты, тесно связанные друг с другом, мы в дальнейшем ограничимся исследованием интегралов, которые, будучи скомбинированы с заданным интегралом, сообщают выражению Пуассона тождественно постоянное значение.

Докажем следующую теорему.

Каков бы ни был заданный интеграл α , всегда можно дополнить решение задачи, прибавив к нему другие интегралы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k-1}$, которые, будучи скомбинированы с α , сообщают уравнению Пуассона тождественный вид, так что мы будем иметь

$$(\alpha, \beta_1) = 1, (\alpha, \beta_2) = 0, (\alpha, \beta_3) = 0, \dots, (\alpha, \beta_{2k-1}) = 0.$$

Отметим прежде всего, что каков бы ни был интеграл α , невозможно, чтобы не существовал по крайней мере еще один интеграл β такого рода, чтобы (α, β) была отлична от нуля.

В самом деле, если бы это было не так, то уравнение

$$\sum \frac{\partial \alpha}{\partial p_1} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} - \frac{\alpha}{\partial q_1} \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = 0,$$

в котором β рассматривается как неизвестная величина, допускало бы все решения уравнения

$$\sum \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = 0,$$

выражающего, что β является интегралом. Но так как оба эти уравнения линейные и содержат в себе одинаковое число независимых переменных, то они не могут иметь одного и того же общего интеграла, не будучи тождественными, а это, очевидно, требует того, чтобы α была функцией H , т. е. чтобы заданный интеграл был интегралом живых сил. Но даже в этом случае существует интеграл, который, будучи скомбинирован с α , дает в качестве результата единицу; это — тот интеграл, постоянная которого прибавлена ко времени. Таким образом наше утверждение доказано для всех случаев.

Во-вторых, докажем, что заданному интегралу α всегда соответствует по крайней мере один такой интеграл β , что

$$(\alpha, \beta) = 1.$$

В самом деле, пусть имеется такой интеграл γ , что (α, γ) отлична от нуля. Положим

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon,$$

$$(\alpha, \varepsilon) = \eta$$

и остановимся тогда, когда один из интегралов $\delta, \varepsilon, \eta$ будет тождественно постоянен или будет функцией предыдущих интегралов. Невозможно, чтобы один из этих случаев не наступил, так как число различных интегралов необходимо ограничено. Предположим, например, что мы имеем

$$\eta = F(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon),$$

где функция F может свестись к простой постоянной величине. Пусть $\bar{\omega}(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon)$ новый интеграл, который я обозначу через ζ , тогда мы имеем

$$(\alpha, \zeta) = \delta \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \gamma} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \delta} + \eta \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \varepsilon};$$

положив $(\alpha, \zeta) = 1$, мы получим дифференциальное уравнение, из которого выведем $\bar{\omega}$. Теперь мы можем дать доказательство теоремы, составляющей предмет настоящего параграфа.

Если дан некоторый интеграл α , можно всегда дополнить решение задачи с помощью таких интегралов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k-1}$, что

$$(\alpha, \beta_1) = 1, (\alpha, \beta_2) = 0, \dots, (\alpha, \beta_{2k-1}) = 0.$$

Выше было доказано существование такого интеграла β_1 , что $(\alpha, \beta_1) = 1$. Следовательно, остается доказать, что существует $2k-2$ интегралов, отличных от α и β_1 , которые, будучи скомбинированы с α , сообщают уравнению Пуассона вид $0=0$. Действительно, назовем μ число интегралов, удовлетворяющих этому условию, и обозначим их через $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{\mu+1}$. Если $\mu+1$ меньше $2k-2$, то существуют интегралы, не зависящие от упомянутых, как от α , так и от β_1 . Пусть $\beta_{\mu+2}$ — один из этих интегралов; положим

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = \beta_{\mu+3},$$

где $\beta_{\mu+3}$ согласно допущению будет отлично от нуля. Оно будет также отлично от единицы, так как в противном случае мы имели бы

$$(\alpha, \beta_{\mu+2} - \beta_1) = 0,$$

и тогда $\beta_{\mu+2} - \beta_1$ согласно нашему допущению было бы функцией $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\mu+1}$, так что $\beta_{\mu+2}$ не было бы новым интегралом.

Положим

$$(\alpha, \beta_{\mu+3}) = \beta_{\mu+4},$$

$$(\alpha, \beta_{\mu+4}) = \beta_{\mu+5},$$

и так далее, пока мы дойдем до интеграла, который тождественно постоянен или является функцией предыдущих интегралов. Пусть этот интеграл

$$\beta_{\mu+i} = F(\beta_{\mu+i-1}, \beta_{\mu+i-2}, \beta_{\mu+i-3}, \dots, \beta_1, \alpha)$$

и положим

$$\gamma = \bar{\omega}(\beta_{\mu+i-1}, \beta_{\mu+i-2}, \beta_{\mu+i-3}, \dots, \beta_1, \alpha),$$

тогда мы будем иметь

$$(\alpha, \gamma) = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta_{\mu+i-1}} F + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta_{\mu+i-2}} \beta_{\mu+i-1} + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \beta_1};$$

приравняв (α, γ) нулю, мы, очевидно, получим уравнение относительно $\bar{\omega}$, интеграл которого даст решения для функций $\beta_1, \beta_{\mu+2}, \beta_{\mu+3}, \dots, \beta_{\mu+i-1}$ и отдельно для функций $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{\mu+1}$; ибо если бы этого не было, то в противоположность сделанному допущению, существовало бы соотношение между интегралами, полученными до $\beta_{\mu+1}$. Следовательно, мы сделали невозможное допущение, ограничивши числом μ количество интегралов, которые, будучи скомбинированы с α , дают результат, тождественно равный нулю, и стало быть число μ не может быть отлично от $2k-2$.

Таким образом упомянутая выше теорема доказана.

V.

Согласно изложенному выше, если дан некоторый интеграл α , можно дополнить решение задачи с помощью интегралов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k-1}$, которые, будучи скомбинированы с α , все сообщают формуле Пуассона тождественный вид. Не следует, однако, думать, что в силу этого все интегралы задачи заключаются в одном и том же случае.

В самом деле, рассмотрим наиболее общий интеграл

$$\bar{\omega}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k-1}) = \eta;$$

тогда согласно формуле параграфа II мы имеем

$$(\alpha, \eta) = (\alpha, \beta_1) \frac{\partial \eta}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \eta}{\partial \beta_1},$$

и, следовательно, выражение (α, η) будет тождественно постоянным только в том случае, если $\frac{\partial \eta}{\partial \beta_1}$ само по себе не является постоянной величиной; но мы видим, что все интегралы, число которых бесконечно и которые получаются путем комбинирования $\alpha, \beta_2, \dots, \beta_{2k-1}$, дают результат, тождественно равный нулю, если их сочетать с α . Только те интегралы, которые содержат в себе β_1 , могут привести к нетождественным результатам. Согласно этому два интеграла α и β_1 связаны между собою совершенно особым образом, вследствие чего я предложу бы их

назвать сопряженными интегралами. Свойства этих сопряженных интегралов могли бы послужить темой для интересного исследования, которому здесь, однако, не может быть уделено место. По вопросу о приложениях, какие могла бы получить теорема Пуассона для интегрирования дифференциальных уравнений механики, я отослал читателя к межуару, опубликованному в XVII томе журнала Лиувилля, стр. 393.

VIII.

ДАРВУ.

О ВЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ТЕЛ.

В начале шестого отдела (стр. 254) Лагранж подвергает углубленному исследованию малые колебания, выполняемые различными телами системы, когда их лишь немного выводят из положения равновесия. Только применение замечательных результатов, которыми аналитическая механика обязана Лагранжу, позволяет успешно разрешить этот вопрос, один из наиболее важных и общих, какие только встречаются в теории движения. Но некоторые из выводов, приведенных Лагранжем, недостаточно обоснованы. Решение этой проблемы зависит от разрешения алгебраического уравнения, метод составления которого был указан Лагранжем; это уравнение никогда не имеет мнимых корней и, в противоположность утверждению знаменитого математика, может иметь и равные корни. Сейчас мы покажем это, пользуясь методом приведения квадратичных форм, обязанных своим открытием Кронекеру (Kronecker).

Рассмотрим две однородных квадратичных формы

$$\left. \begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots = \sum \sum a_{ik}x_ix_k, \\ \varphi &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots = \sum \sum b_{ik}x_ix_k, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

зависящих от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Формула

$$\lambda f - \varphi = \sum \sum (\lambda a_{ik} - b_{ik}) x_ix_k,$$

в которой λ обозначает постоянную, способную принимать всевозможные значения, определяет то, что мы вместе с Кронекером назовем *пучком квадратичных форм*. Алгебраическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} & \lambda a_{12} - b_{12} & \dots & \lambda a_{1n} - b_{1n} \\ \lambda a_{21} - b_{21} & \lambda a_{22} - b_{22} & \dots & \lambda a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} - b_{n1} & \lambda a_{n2} - b_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

как известно, определяет значения λ , для которых квадратичная форма $\lambda f - \varphi$ сводится к сумме, составленной по меньшей мере из n квадратов; это уравнение никогда тождественно не удовлетворяется, если, например, форма f имеет детерминант, отличный от нуля.

На основе изложенного мы начнем с обоснования следующей леммы.

Будем, как обычно, называть *определенной формой* всякую квадратичную функцию n переменных, которую можно свести к сумме n квадратов, имеющих один и тот же знак, и которая, следовательно, может стать равной нулю только в том случае, когда мы приедем нулевые значения всем переменным, от которых она зависит. Мы докажем, что если уравнение (2) имеет один мнимый корень, то квадратичная форма f или всякая иная форма пучка не может быть *определенной формой*.

В самом деле, пусть $\lambda_0 = \alpha + \beta i$ является этим мнимым корнем уравнения (2); квадратичная форма

$$(\alpha + \beta i)f - \varphi$$

будет представлять собою сумму, составленную не более чем из n квадратов. Следовательно, можно написать

$$(\alpha + \beta i)f - \varphi = (y_1 + iz_1)^2 + (y_2 + iz_2)^2 + \dots + (y_{n-p} + iz_{n-p})^2, \quad (3)$$

где y_i, z_k обозначают линейные вещественные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

Если приравнять вещественные и мнимые части, стоящие на обеих сторонах равенства, то мы получим

$$\beta f = 2y_1 z_1 + 2y_2 z_2 + \dots + 2y_{n-p} z_{n-p},$$

$$\alpha f - \varphi = y_1^2 - z_1^2 + y_2^2 - z_2^2 + \dots + y_{n-p}^2 - z_{n-p}^2,$$

и стало быть

$$\lambda f - \varphi = (\lambda - \alpha) f + \alpha f - \varphi = \sum \left(y_i^2 - z_i^2 + 2 \frac{\lambda - \alpha}{\beta} y_i z_i \right).$$

Этому уравнению можно, очевидно, придать следующий вид:

$$\lambda f - \varphi = \sum (y_i - m_i z_i) \left(y_i + \frac{1}{m_i} z_i \right),$$

где все постоянные величины m_i являются вещественными. Следовательно, функция $\lambda f - \varphi$ обратится в нуль, если для всех значений i мы положим

$$y_i - m_i z_i = 0. \quad (4)$$

Число полученных таким образом уравнений меньше n ; эти уравнения линейны по отношению к переменным $z_1, \dots, z_n$, сверх того все их коэффициенты вещественны. Следовательно, они могут быть удовлетворены вещественными значениями $z_1, z_2, \dots, z_n$, которые не все равны нулю. Таким образом форма $\lambda f - \varphi$, обращаясь в нуль при вещественных значениях независимых переменных, которые не все равны нулю, не может быть *определенной формой*, каково бы ни было вообще значение, приписываемое λ .

Если бы мы захотели обосновать этот вывод только для формы f , можно было бы приведенное выше рассуждение повторить, подставив в систему (4) уравнения $y_i = 0$.

Из указанного выше предложения непосредственно следует, что если *пучок квадратичных форм* содержит в себе одну *определенную форму*, то все корни уравнения относительно λ по отношению к этому пучку *обязательно вещественны*.

В частности, это имеет место в том случае, когда, как мы это примем в дальнейшем, f является *определенной формой*.

Пусть теперь k — корень, необходимый вещественный, уравнения (2). Квадратичная функция $kf - \varphi$ может быть приведена к следующему виду:

$$kf - \varphi = a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + \dots + a_p x_p'^2, \quad (5)$$

где $x_1', x_2', \dots, x_p'$ обозначают функции линейно независимые от $x_1, \dots, x_n$, а число p не превышает $n-1$.

В качестве новых независимых переменных можно принять $x_1', x_2', \dots, x_p'$ и их подставить вместо равного числа первоначальных переменных. Так, например, если из формул, выражающих $x_1', \dots, x_p'$, можно вывести значения $x_1, x_2, \dots, x_p$, то мы выберем в качестве новых независимых переменных

$$x_1', x_2', \dots, x_p', x_{p+1}, \dots, x_n.$$

Тогда мы получим

$$f = F(x_1', x_2', \dots, x_p') + B \left\{ \begin{matrix} x_1', x_2', \dots, x_p' \\ x_{p+1}, \dots, x_n \end{matrix} \right\} + \Phi(x_{p+1}, \dots, x_n), \quad (6)$$

где F обозначает часть, содержащую только переменные x_i' , B — часть, содержащую произведения переменных x_i' на переменные x_k , и Φ — часть, содержащую только переменные x_k . Для дальнейшего преобразования f мы воспользуемся следующим замечанием.

Пусть дана *определенная форма* n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; если положить равными нулю некоторое количество переменных, например, $x_{p+1}, \dots, x_n$, то останется *определенная форма* переменных $x_1, x_2, \dots, x_p$.

В самом деле, если бы эта форма не была *определенной*, то она превратилась бы в нуль для значений переменных $x_1, \dots, x_p$, которые не все были бы нулями; тогда одна из этих систем значений, взятая в комбинации с нулевыми значениями последующих переменных $x_{p+1}, \dots, x_n$, превратила бы в нуль первоначальную форму, которая, в противоположность допущению, не оказалась бы *определенной*.

Из приведенного замечания следует, что в выражении (6) для f части F и Φ являются определенными формами по отношению к переменным, от которых они зависят. Стало быть Φ можно свести к сумме квадратов

$$x_{p+1}^{\prime 2} + x_{p+2}^{\prime 2} + \dots + x_n^{\prime 2},$$

имеющих одинаковые знаки, например, положительные, если форма f положительна, причем $x_{p+1}^{\prime}, \dots, x_n^{\prime}$ обозначают функции, независимые от $x_{p+1}, \dots, x_n$, которые мы подставляем вместо этих последних переменных.

Затем часть B примет следующий вид:

$$2x_{p+1}^{\prime} P_{p+1} + 2x_{p+2}^{\prime} P_{p+2} + \dots + 2x_n^{\prime} P_n,$$

где $P, \dots, P_n$ являются линейными функциями $x_1^{\prime}, \dots, x_p^{\prime}$, и f может быть написана следующим образом:

$$f = (x_{p+1}^{\prime} + P_{p+1})^2 + \dots + (x_n^{\prime} + P_n)^2 + f_1(x_1^{\prime}, x_2^{\prime}, \dots, x_p^{\prime}).$$

Наконец, если мы введем новые переменные

$$x_{p+1}^{\prime\prime} = x_{p+1}^{\prime} + P_{p+1}, \dots, x_n^{\prime\prime} = x_n^{\prime} + P_n,$$

мы получим следующее окончательное выражение для f :

$$f = x_{p+1}^{\prime\prime 2} + \dots + x_n^{\prime\prime 2} + f_1(x_1^{\prime}, x_2^{\prime}, \dots, x_p^{\prime}); \quad (7)$$

согласно сделанному выше замечанию f_1 тоже будет определенной формой переменных, от которых она зависит.

Уравнение (5) дает нам возможность вычислить φ и мы получаем

$$\varphi = k(x_{p+1}^{\prime\prime 2} + \dots + x_n^{\prime\prime 2}) + \varphi_1(x_1^{\prime}, x_2^{\prime}, \dots, x_p^{\prime}), \quad (8)$$

где для краткости с помощью φ_1 обозначена квадратичная функция

$$kf_1(x_1^{\prime}, \dots, x_p^{\prime}) - a_1 x_1^{\prime 2} - \dots - a_p x_p^{\prime 2},$$

зависящая исключительно от переменных $x_1^{\prime}, \dots, x_p^{\prime}$.

Все допущения, сделанные в начале этой статьи, можно теперь применить к двум формам f_1 и φ_1 , аналогичным f и φ , но зависящим от меньшего количества переменных. Следовательно, к этим двум формам можно снова применить тот метод, которым мы воспользовались выше, и совершенно также продолжать до тех пор, пока мы не исчерпаем всех переменных. Окончательный результат, очевидно, сведется к следующему.

Две квадратичные формы f и φ можно всегда представить в следующем виде:

$$f = \sum_{i=1}^i y_i^2, \quad \varphi = \sum_{i=1}^i a_i y_i^2,$$

где величины y_i являются функциями линейными, вещественными и независимыми от первоначальных переменных, а постоянные величины a_i являются корнями уравнения (2), необходимо вещественными, но при этом равными или неравными.

Приведенное предположение играет основную роль в большом количестве применений. Рассмотрим, в частности, проблему бесконечно малых колебаний; метод, которым пользовался Лагранж, сводился к тому, что все переменные, от которых зависит положение системы, выражаются в функции новых переменных

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

которые независимы и в положении равновесия все равны нулю. Согласно этому, если предположить, что все тела находятся очень близко от своего положения равновесия и что сообщенные этим телам скорости тоже бесконечно малы, то все упо-

мянутые выше переменные будут очень малыми величинами и такими же будут их производные

$$\xi_1' = \frac{d\xi_1}{dt}, \dots, \xi_n' = \frac{d\xi_n}{dt}.$$

Вычислим половину живой силы T и функцию сил V , ограничившись членами меньшего измерения. Мы получим

$$T = f(\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n'),$$

где f обозначает квадратичную форму производных $\xi_1', \dots, \xi_n'$, которая в силу своей природы будет определенной формой.

Что касается функции сил, то если через V_0 обозначить ее значения в положении равновесия, то мы будем иметь

$$V = V_0 + \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

где φ обозначает квадратичную форму переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Применим метод Кронекера к двум функциям

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n);$$

с помощью той же линейной подстановки с постоянными коэффициентами мы сможем свести их к простым формам

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2,$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} a_i y_i^2.$$

Величины a_i будут корнями уравнения относительно λ по отношению к пучку $\lambda f - \varphi$; они все будут положительными, если в состоянии равновесия функция сил будет минимумом.

Если по отношению к переменным ξ_i, ξ_i' применить линейную подстановку, то они преобразуются подобным же образом; тогда мы необходимо получим

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} y_i'^2$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа (стр. 257) примут следующий вид:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + a_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Как мы показали выше, величины a_i , которые всегда действительны, могут быть, однако, и равными между собою. Тем не менее основной вывод, указанный Лагранжем, остается в силе: если в состоянии равновесия функция сил является минимумом, то постоянные величины a_i все положительны, и интегралы указанных выше дифференциальных уравнений никогда не содержат времени вне знаков синуса или косинуса.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРОВ РУССКОГО ПЕРЕВОДА.

[4] Жозеф-Луи Лагранж (Joseph-Louis Lagrange) родился в Турине 25 января 1736 года в семье военного казначея, разоренного постоянными финансовыми спекуляциями. Молодой Лагранж весьма легко отнесся к разорению семьи. Впоследствии он говорил: „Если бы я был богат, я вероятно не достиг бы моего положения в математике; а в какой другой деятельности я добился бы тех же успехов?“.

Семнадцатилетним юношей Лагранж увлекся математическими науками, главным образом под влиянием мемуара Галлея „О преимуществах аналитического метода“, а в восемнадцать лет уже получил самостоятельные результаты как в области дифференциального и интегрального исчисления, так и в области зарождавшегося тогда (Эйлер) вариационного исчисления. В 1754 году, т. е. девятнадцати лет от роду, Лагранж уже профессор артиллерийской школы в Турине; он объединяет своих слушателей и образует ученое общество, в дальнейшем превратившееся в знаменитую Туринскую академию. В печатном органе этого общества „*Actes de la société privée de Turin*“ Лагранж помещает свои первые работы по изопериметрии, вызвавшие восхищенные отзывы Эйлера; здесь же появляется исследование по применению принципа Даламбера к проблемам непрерывных сред (гидродинамика и акустика), впоследствии развитое в его „*Mécanique Analytique*“. Даламбер высоко оценил работы Лагранжа по равновесию жидких тел. В 1759 году, по представлению Эйлера, Лагранж был избран членом Берлинской академии наук.

Парижская академия объявила (в 1764 г.) конкурс на лучшее сочинение, содержащее объяснение явления либрации луны. Лагранж представил на конкурс свою работу, дающую исчерпывающее решение задачи, основанное на применении принципа Даламбера и начала виртуальных скоростей. Премия была присуждена Лагранжу. Даламбер по этому поводу писал ему: „Я читал столько же с удовольствием сколько и с пользой Ваше замечательное произведение о либрации луны, столь достойное премии, которую оно получило“. Результаты, полученные Лагранжем, позволили Академии поставить еще более сложную задачу создания теории спутников Юпитера. Лагранж (1766) вновь получает премию за значительное продвижение этой сложной задачи. Лишь 24 года спустя эта задача была полностью решена Лапласом.

В 1766 году Лагранж переехал в Париж, где был радостно встречен Даламбером, Клеро, Кондорсе и другими. В это время стало известно, что Эйлер оставил пост президента физико-математического класса Берлинской академии и переехал в С.-Петербург. Даламбер предложил кандидатуру Лагранжа, Эйлер горячо ее поддержал, и 6-го ноября 1766 года Лагранж переехал в Берлин, где и пробыл до 1787 г. Сборники Берлинской академии в этот период обогатились целым рядом блестящих работ Лагранжа как по математике, так и по общей и небесной механике. Именно к этому времени относятся его знаменитое решение задачи Кеплера (ряд Лагранжа), исследование по вопросу о вращении твердого тела вокруг неподвижного центра, решение задачи о притяжении эллиптического сфероида, создание основ теории возмущений и многие другие.

К этому же периоду относится и создание знаменитой „*Mécanique Analytique*“, перевод первого тома которой здесь дается. Исходя из основного принципа возможных скоростей, которому Лагранж дал новое доказательство, и пользуясь разработанными им же вариационными методами, Лагранж строит здесь впервые полную систему аналитической механики. В этом классическом труде сосредоточено такое количество фундаментальных идей и блестящих методов, до такой предельной ясности доведено изложение основных законов механики, что и до сих пор эта книга не потеряла своей свежести и может быть использована, как классический трактат по аналитической механике. Здесь впервые

появляется идея обобщенных координат; лагранжев метод рассмотрения жидкости, как материальной системы, характеризуемой большой подвижностью частиц, уничтожил различие между механикой жидкости и механикой твердого тела, так что общие принципы механики могли быть распространены на гидростатику и гидродинамику. Механика у Лагранжа стала общей наукой о движении материальных систем; Лагранж показал, что газ, жидкость, упругое тело в своих движениях подчиняются уравнениям, которые могут быть выведены из общих принципов.

Применение чисто аналитических методов (без единого чертежа) показало, что механика может получить значительное развитие при пользовании анализом и что некоторые ее отделы могут рассматриваться как подлинные ветви анализа. Элегантность и внутренняя гармоничность методов „Аналитической механики“ вполне оправдывает мнение В. Гамильтона, называвшего эту книгу „научной поэмой“ (a kind of scientific poem). Лагранж решил издать свою „Аналитическую механику“ на французском языке в Париже. Несмотря на ряд затруднений она в конце концов вышла в 1788 году. Третье издание этой книги вышло с примечаниями Ж. Веррана в 1853 году, а четвертое было дополнено примечаниями Г. Дарбу.

В 1786 году умер прусский король Фридрих Великий и „просвещенный абсолютизм“ сменился мрачным царствованием Фридриха-Вильгельма II. В связи с изменившимся отношением к ученым и Академии Лагранж решил вернуться во Францию, где он в течение предыдущих 15 лет числился иностранным членом Академии. Переезд во Францию произошёл в 1787 году. После революции Лагранж был назначен председателем комиссии по установлению новой (метрической) системы мер и весов и много сделал для введения этой системы. Учредительное собрание специальным декретом назначило ему пенсию. После издания декрета Конвента о высших из Франции лиц иностранного происхождения, Лагранж уже готовился принять новое прусское предложение, но Конвент для него сделал исключение и просил его остаться. Создание Нормальной школы (École Normale) и Политехнической школы (École Polytechnique) заставило Лагранжа оставить мысль об отъезде и обратиться к работе по развитию этих высших школ.

Пронесшие затем смолы власти не отразились на отношении к Лагранжу. До конца своих дней великий ученый пользовался большим авторитетом. Умер Лагранж в 1813 году. Останки его покоятся в Пантеоне.

Полное собрание сочинений Лагранжа издано в 14 томах в период с 1866 по 1892 год. Нет такой области математического анализа, геометрии, механики, которую Лагранж не двинул бы далеко вперед. Им почти целиком создана алгебраическая тригонометрия, результаты его исследований по теории чисел, по алгебре, дифференциальному и интегральному исчислению переполняют существующие монографии и курсы, и, наконец, его работами было фактически определено все дальнейшее развитие механики XIX века. Такие великие математики, как его современники Пуассон, Лаплас, а в дальнейшем Якоби и др., развивали методы Лагранжа. И в настоящее время, когда читаешь „Аналитическую механику“, то не можешь оторваться от мысли, что современные курсы механики (например, курс Аппеля) в большей своей части пересказывают и комментируют эту классическую работу.

На русский язык „Аналитическая механика“ Лагранжа переводится впервые. Перевод ее представляет большие трудности, и ответственность за этот перевод крайне велика. Переводчик и редакторы старались как можно точнее придергиваться оригинала и сохранять терминологию Лагранжа, хотя в настоящее время она уже значительно изменилась. Незначительные комментарии редакторов перевода стремятся облегчить нашему советскому читателю понимание наиболее сложных мест книги и дать некоторые дополнения к истерпяющим комментариям Веррана и Дарбу к последнему французскому изданию „Mécanique Analytique“, с которого сделан настоящий перевод на русский язык.

[2] (ж стр. 12). Имеется русский перевод: Галилео Галилей, Восходы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению; перевод под ред. А. И. Долгова, ГИИТ, Москва — Ленинград, 1934. Полагаемому здесь вопросу см. стр. 220.

[3] (ж стр. 18). Под силой бросания (force de projection) Лагранж, очевидно, подразумевает начальный импульс.

[4] (ж стр. 18). Под относительной тяжестью (la gravité relative) подразумевается составляющая сила веса вдоль наклонной плоскости.

[5] (ж стр. 22). Это определение, конечно, не является строгим. Под виртуальной скоростью или перемещением следует понимать скорости или перемещения, совместимые со связями. Лагранж подразумевает определение, понимая под виртуальным перемещением или скоростью одно из действительных перемещений или скоростей, а именно то, которое произойдет при нарушении условий равновесия,

[9] (к стр. 24). Интересно отметить, что ни здесь, ни в дальнейшем не применяется термин *работа*. Лагранж для произведенная силы на проекцию перемещения на направлении силы употребляет термин Галлея — *момент*. Термин *работа* появился в начале XIX века (в 1826) в сочинениях по прикладной механике (Poncelet, Prony, Dupin и др.).

Кулон говорил *количество действия*, Карно — *механическая мощность*, *динамический эффект* и пр. См. по этому поводу L. Zoratti, Les principes de la mécanique classique, Paris 1928.

[7] (к стр. 25). Весьма ясное изложение лагранжева доказательства принципа возможных перемещений дано в известной книге В. Л. Кирпичова, Боседы о механике, ГТТИ, 1933, стр. 15.

[8] (к стр. 27). Лагранж везде вместо термина *отрезок* употребляет термин *линия*.

[9] (к стр. 30). Особенность изложения Лагранжа состоит в том, что он, вводя классификацию сил на *внешние* и *внутренние*, при определении работ внутренних сил всегда в качестве элемента рассматривает сумму работ действия и противодействия, особо отмечая *взаимное* перемещение взаимодействующих точек.

[10] (к стр. 36). В этом пункте Лагранж, говоря о неуравновешенной системе тел, противопоставляет непосредственно приложенные силы (заданные по современной терминологии) и взаимодействия тел, т. е. повидному реакции идеальных связей. Последняя фраза Лагранжа должна быть, по нашему мнению, понятна в том смысле, что при нарушении равновесия система придет в движение, определяемое как действующими силами, так и связями, существующими в системе.

[11] (к стр. 56). Чтобы избежать недоразумений укажем, что Π является у Лагранжа потенциальной энергией (по современной терминологии), а не силовой функцией. То, что сумма «моментов» оказывается равной $d\Pi$, а не $-d\Pi$, объясняется тем, что по Лагранжу *dr* представляет уменьшение расстояния точки приложения силы до центра, куда сила направлена.

[12] (к стр. 56). Напомним читателю, что если первая часть теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия была впоследствии строго доказана Лежен-Дирихле, то вторая, заключающая утверждение о неустойчивости равновесия при максимуме потенциальной энергии Π , до сих пор во всей общности еще не доказана. См. П. Аппель, Фигуры равновесия вращающейся жидкости, ГТТИ, 1936, стр. 224.

[13] (к стр. 58). Недостатком доказательства Лагранжа является предположение о разложимости величины Π в ряд по степеням координат, что является, вообще говоря, существенным ограничением. Доказательство, данное Дирихле, не имеет этого недостатка.

[14] (к стр. 58). Указание Лагранжа на возможность обобщения его метода доказательства на случай равенства нулю всех вторых и третьих производных вызывает серьезное сомнение, так как сама возможность приведения формы 4-й степени к каноническому виду не исследована.

[15] (к стр. 74). Здесь уравнение сохранения массы dm при движении трактуется, как условное уравнение, что и позволяет Лагранжу писать в согласии с предыдущими обозначениями $\delta L = \delta dm$.

[16] (к стр. 114). Под F Лагранж здесь понимает силу упругости, отнесенную к единице длины кривой на поверхности. Если выбрать на данной поверхности элементарную площадку произвольной формы, то работа силы натяжения $F ds$ на перемещении ds будет равна $F ds ds$, т. е. $F ds^2$, где под ds понимается вариация элементарной площади; таким образом и получается формула в тексте.

[17] (к стр. 116). Это замечание Лагранжа объясняется тем, что интеграл последнего уравнения (равновесия мембраны) может быть выражен через функцию от комплексного переменного. В наше время метод комплексных переменных дал столь большое число решений прикладных задач, что примечание Лагранжа о „малой пригодности для применения“ этого метода покажется современному читателю ахронизмом.

[18] (к стр. 133). План построения статьи твердого тела (деформируемого и недеформируемого) в аналитической механике Лагранжа следующий: в отделе третьем Лагранж дает общее уравнение равновесия любой системы материальных точек, показывая, что необходимыми условиями равновесия являются условия равенства нулю сумм проекций сил и сумм моментов сил относительно координатных осей. Хотя это нигде не оговорено, но повидному в третьем отделе речь идет о свободной системе. В четвертом отделе Лагранж рассматривает системы, подчиненные связям (условным уравнениям), и вводит для решения задачи метод множителей, поясняя и ныне его имя. Таким путем он может уже подойти к связанным системам и, в частности, к вопросам равновесия упругих тел (пятый отдел). В этом порядке идей сложность задачи оказывается возрастающей вместе с числом налагаемых

связей, так что абсолютно твердое тело оказывается наиболее сложным случаем, рассмотрение которого отложено на самый конец отдела V. Интересно отметить, что рассмотрению твердого тела предпосылается случай равновесия жесткой пшты заданной формы (двойкой кривизны), т. е. линейного многообразия, подчиненного условиям нерастяжимости, неизгибаемости и незакручиваемости. Эти условия и служат условиями связи. Лагранж, прекрасно понимая, что здесь рассматривается весьма частный случай твердого тела, считает интересным рассмотреть эту задачу, чтобы показать плодотворность и единообразие своих методов.

[19] (к стр. 147). Интересно отметить, что здесь дана теория перемещений сплошной среды (формулы для относительных удлинений и сдвигов), обычно приписываемая Коши (см. например, Ляв, Математическая теория упругости, стр. 22, ОНТИ, 1936).

[20] (к стр. 148). По существу говоря, здесь выведена формула, называемая обычно формулой Гаусса-Остроградского.

[21] (к стр. 166). Следуя подлиннику, мы сохраняем здесь термин „принцип силы инерции“, хотя следовало бы по современной терминологии сказать просто „принцип инерции“.

[22] (к стр. 170). Понять это место текста чрезвычайно трудно. Неясность в определении силы имеет своим следствием то, что одна и та же величина называется разными терминами, сообразно тому, какая сторона явления рассматривается. Повидному, Лагранж хочет выразить следующую мысль: тело, имеющее некоторое количество движения, может сообщить другому телу импульс, называемый здесь давлением (*pression*); этот же импульс под видом „движущей силы“ (*force motrice*), по мнению Лагранжа, может сообщить покоящемуся телу ту скорость, с которой оно ударилось о второе тело.

[23] (к стр. 175). Прием изменения направления движущих сил на противоположное и утверждение, что эти силы должны находиться в равновесии с приложенными силами, составляет, как известно, содержание принципа Даламбера в том модернизированном виде, который придали ему в первой четверти XIX века творцы прикладной механики. Силы, равные по величине движущим силам и направленные в противоположную сторону, теперь носят название сил *инерции*.

[24] (к стр. 176). Интересно еще раз подчеркнуть, что в этой формулировке Даламбера, в отличие от современных формулировок, принцип не содержит термина *сила инерции*. В современных терминах идея принципа заключается в уравновешенности динамических реакций связей. Даже наоборот, Даламбер, несомненно знавший работы Якова Бернулли и Эрмака, не считает необходимым связывать формулировку столь общего принципа с частным приемом изменения направления движущих сил на противоположное.

[25] (к стр. 210). В настоящее время для равновесия главных осей инерции применяется метод определения осей симметрии эллипсоида инерции (Пуансо). Очевидно, что кубическое уравнение, применяемое Лагранжем в пункте 25, соответствует кубическому уравнению, применяемому при приведении квадратичной формы к каноническому виду.

[26] (к стр. 214). В формулировке теоремы живых сил в относительном движении по отношению к центру тяжести, приведенной Лагранжем, нужно иметь в виду, что работа (момент по терминологии Лагранжа) сил вычисляется на перемещениях, взятых относительно центра тяжести. Кстати отметим, что преобразование выражения живой силы, приведенное в начале этого пункта, известно в курсах механики под именем теоремы Кенига.

[27] (к стр. 232). Эти уравнения называются обычно у нас лагранжевыми уравнениями *второго рода*, тогда как уравнениями Лагранжа *первого рода* называются уравнения с неопределенными множителями. Пропехождение такого порядка наименования уравнений повидному объясняется тем, что уравнениями с неопределенными множителями Лагранж пользуется уже в статике.

[28] (к стр. 235). Такие координаты впоследствии получили наименование циклических (Гельмгольц).

[29] (к стр. 263). Лагранж не дает доказательства вещественности и положительности корней уравнения, определяющего квадраты частот. Доказательство вещественности их приведено в заключительной заметке Дарбу в конце настоящего тома. Что касается положительности корней, то она вытекает из известной теоремы Сильвестра, в предположении что обе квадратичные формы T и V — определенные и положительные. См. по этому поводу, например, Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1936, стр. 206 или Лойцянский Л. Г. и Лурье А. П., Теоретическая механика, ОНТИ, 1934 г., том III, стр. 490. Утверждение Лагранжа о том, что в случае равных корней уравнения частот интегралы уравнений движения будут содержать время вне тригонометрических функций, как известно, опровергнуто

в замечательном мемуаре Вейерштрасса 1858 г. (Gesammelte Werke, т. 1, стр. 233). См. по этому поводу книгу А. Н. Крылова О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах. [30] (к стр. 263). В этом абзаце рассуждение основывается на неверном предположении, что интегралы уравнений малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия могут содержать вековые члены. См. предыдущее примечание.

[31] (к стр. 265). Рассуждение этого абзаца ясно показывает, что Лагранж не сомневался в невозможности существования вековых членов в интервалах уравнений свободных колебаний, но не имел строгого доказательства этого положения.

[32] (к стр. 265). Повидимому, здесь имеются в виду неустойчивые системы, равновесие которых по отношению к части координат устойчиво, к другой части неустойчиво; например, тяжелое тело вблизи вершины седлообразной поверхности.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

Предисловие Лагранжа ко второму изданию	5

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ.

СТАТИКА.

Отдел первый. — О различных принципах статики	11

Отдел второй. — Общая формула статики для равновесия любой системы сил и метод применения этой формулы	27

Отдел третий. — Общие свойства равновесия системы тел, выведенные из предыдущей формулы	39

§ I. Свойства равновесия свободной системы по отношению к поступательному движению	—

§ II. Свойства равновесия по отношению к вращательному движению	41

§ III. О сложении вращательных движений вокруг различных осей и о моментах относительно этих осей	48

§ IV. Свойства равновесия по отношению к центру тяжести	52

§ V. Свойства равновесия, относящиеся к максимуму и минимуму	54

Отдел четвертый. — Более простой и более общий метод применения формулы равновесия, данной в отделе втором	60

§ I. Метод множителей	—

§ II. Применение того же метода к формуле равновесия сплошных тел, все точки которых находятся под действием каких-либо сил	64

§ III. Аналогия между рассматриваемыми проблемами и проблемами максимума и минимума	69

Отдел пятый. — Разрешение различных проблем статики	84

Гл. I. О равновесии нескольких сил, приложенных к одной и той же точке, о сложении и разложении сил	—

§ I. О равновесии тела или точки, находящейся под действием нескольких сил	85

§ II. О сложении и разложении сил	87

Гл. II. О равновесии нескольких сил, приложенных к системе тел, рассматриваемых в качестве точек и связанных между собою нитями или стержнями	—91

§ I. О равновесии трех или большего количества тел, укрепленных на нерастяжимой нити или же на нити, растяжимой и способной сокращаться	—

§ II. О равновесии трех или большего числа тел, укрепленных на негибком и жестком стержне	99

§ III. О равновесии трех или большего числа тел, укрепленных на упругом стержне	103

Гл. III. О равновесии нити, все точки которой находятся под действием каких-либо сил и которая рассматривается, как гибкая или негибкая, или упругая и в то же время — растяжимая или нерастяжимая	105
§ I. О равновесии гибкой и нерастяжимой нити	—
§ II. О равновесии гибкой и вместе с тем поддающейся растяжению и сокращению нити или поверхности	112
§ III. О равновесии упругой нити или пластины	116
§ IV. О равновесии жесткой нити заданной формы	123
Гл. IV. О равновесии твердого тела конечной величины и любой формы, все точки которого находятся под действием любых сил	130
Отдел шестой. — О принципах гидростатики	134
Отдел седьмой. — О равновесии несжимаемых жидкостей	139
§ I. О равновесии жидкости в очень узкой трубке	—
§ II. Вывод общих законов равновесия несжимаемых жидкостей на свойства частиц, их составляющих	143
§ III. О равновесии свободной жидкой массы с твердым телом, которое она покрывает	154
§ IV. О равновесии несжимаемых жидкостей, содержащихся в сосудах	159
Отдел восьмой. — О равновесии сжимаемых и упругих жидкостей	161

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

ДИНАМИКА.

Отдел первый. — О различных принципах динамики	165
Отдел второй. — Общая формула динамики для движения системы тел, находящихся под действием каких-либо сил	182
Отдел третий. — Общие свойства движения, выведенные из предыдущей формулы	189
§ I. Свойства, касающиеся центра тяжести	—
§ II. Свойства площадей	193
§ III. Свойства, касающиеся вращений, вызванных импульсами	199
§ IV. Свойства неподвижных осей вращения свободного тела любой формы	204
§ V. Свойства, связанные с живой силой	212
§ VI. Свойства, касающиеся наименьшего действия	218
Отдел четвертый. — Дифференциальные уравнения для решения всех проблем динамики	225
Отдел пятый. — Общий приближенный метод решения задач динамики, основанный на вариации произвольных постоянных	238
§ I. Вывод общего соотношения между вариациями произвольных постоянных из уравнений, приведенных в предыдущем разделе	—
§ II. Вывод простейших дифференциальных уравнений для определения вариаций произвольных постоянных, объясненных своим происхождением возмущающим силам	242
§ III. Доказательство важного свойства величины, выражающей живую силу в системе, находящейся под действием возмущающих сил	250
Отдел шестой. — О малых колебаниях любой системы тел	254
§ I. Общее решение проблемы о малых колебаниях системы тел около их точек равновесия	—
§ II. О колебаниях системы линейно расположенных тел	267
§ III. Применению выведенных выше формул к колебаниям натянутой струны, нагруженной несколькими телами, и к колебаниям	

	<i>Стр.</i>
нерастяжимой нити, нагруженной любым количеством грузов и закрепленной в обоих концах или только в одном из них . . .	278
§ IV. О колебаниях звучащих струн, рассматриваемых в качестве натянутых струн, нагруженных бесконечно большим количеством малых грузов, расположенных бесконечно близко друг от друга; о прерывности произвольных функций	288

ДОПОЛНЕНИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ.

I. Пуансо — Об основном положении „Аналитической механики“ Лагранжа	307
II. Лажен-Диризле — Об устойчивости равновесия	314
III. Бертраи — О равновесии упругой нити	315
IV. Бертраи — О фигуре жидкой массы, находящейся во вращательном движении	318
V. Бертраи — Об уравнении, которое Лагранж признал невозможным.	320
VI. Бертраи — О дифференциальных уравнениях механики и о виде, какой можно придать их интегралам	321
VII. Бертраи — О теореме Пуассона	331
VIII. Дарбу — О бесконечно малых колебаниях системы тел	337
Примечание редакторов русского перевода	341

Редакция Г. Ф. Рыбкина,

Оформление Е. Г. Шнак.

Сдано в производство 4/III 1938 г. Подписано к печати 3/IX 1938 г. Формат 72×105¹/₁₆ Печ. л. 319¹/₄.
 Уч.-изд. л. 28,2 л. Бум. л. 10¹/₈. Тираж 7 000. Тип. в. в 1 бум. л. 121300, Учетн. № 4590. Изд. № 97.
 Уполном. Главлита № Б — 40408. Бумага Камского бумкомбината. Заказ № 224.

2-я типография ГОНТИ им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Кр. Командиров, 39.