

3 р. 60 к. Пер. 50 к. НТ1

Р. КУРАНТ

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

193

A

Депозитарий

Р. КУРАНТ

ИНВЕНТАРЬ
АВГ. 1964.
СТАН. 1517
К-93

18434

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

★

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

★

Перевод с немецкого
Ю. РАБИНОВИЧА И Б. ЛИВШИЦА

ПРОВЕРЕНО
2.8.1962 г.

С предисловием
проф. М. Я. ВЫГОДСКОГО

★

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

БИБЛИОТЕКА
Белорусского Политехн. ин-та
И. Н. ТИТУЛА
Инз. № 15213

Допущено Наркомпросом РСФСР
в качестве руководства для физматов
и в качестве учебного пособия
для вузов и педагогов

1\477536



1 9 3 1

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА
БИБЛИОТЕКА

ВНУТРЕННИЙ
КНИЖНЫЙ
АРХИВ
1936
СТАЛИН

30.1 1940

VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL UND INTEGRALRECHNUNG

VON
R. COURANT

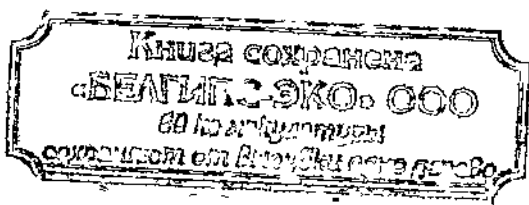
★

ERSTER BAND

FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN

★

Проверено 1940 г.



ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

На тусклом фоне формально схоластических тенденций, которыми проникнуто большинство наших оригинальных и переводных руководств по математическому анализу, появляющаяся в русском переводе книга Р. Куранта ярко выделяется своей оригинальностью, живостью изложения и свежестью мысли. Автор умеет увлечь читателя острой постановкой проблемы и ввести его в понимание тонких вопросов анализа, избавляя вместе с тем от опасности заблудиться в лесу деталей, куда так легко углубиться, но откуда так трудно выбраться.

Эта книга даст богатый материал для каждого работника высшей школы, желающего найти выход из тенет традиций, в значительной мере еще давящих преподавание математики в наших вузах и втузах.

Сейчас, когда овладение техникой является боевой задачей поставленной пролетариатом СССР и его партией, эти традиции косного формализма, отрывающие математическую теорию от ее естественно-научных и технических истоков, являются величайшей помехой в деле подготовки кадров строителей социализма.

Эти традиции должны быть изжиты. Для их преодоления мы мобилизуем все наши творческие силы. Но мы полностью должны использовать и все те достижения, которые имеет педагогическая мысль капиталистических стран.

В книге Куранта нам есть чему поучиться, и самое ценное в ней то, что автор стремится дать целостную картину научной дисциплины, не отрывая ее от приложений; напротив, именно связь с приложениями придает теоретическому материалу, здесь изложенному, убедительность и привлекательность.

Однако книга Куранта не может быть для нас образцом построения курса анализа. Основная причина этого в том, что книга Куранта несет на себе отпечаток идеалистических философских влияний.

Правда, Курант хочет остаться независимым от влияния противоречивых философских воззрений (стр. 3), но эта беспартийность так же иллюзорна в вопросах науки, как и в вопросах политики.

Объявив, что математика „к счастью не нуждается ни в каком предварительном теоретико-познавательном исследовании более глубокой сущности понятия числа“, Курант вынужден „рассматривать число . . . как нечто, непосредственно данное“. Отсюда с необходимостью вытекает, что и правила действия над числами надо считать „данными“. Раз так, то, конечно, отпадает всякая необходимость познать содержание математической операции. Вопрос „решен“ очень просто, но решен ли он?

Конечно, пока речь идет о числах и действиях над ними, до тех пор сравнительно легко можно уклониться от „проклятых“ вопросов философского характера: эти вещи столь привычны, что читатель мирится, когда ему говорят, что они „даны“.

Но когда речь заходит об основных понятиях и операциях исчисления бесконечно-малых, дело меняется решительным образом. Их нельзя считать „данними“, если не хотеть впасть в формализм. И, если Курант избегает формализма, то это потому, что он поступает вопреки самому себе и, произнося заклятия против философии, сам философствует. Так, например, он посвящает страничку своего курса вопросу об отношении математики к действительности. Эта страница и ряд других мест, разбросанных в книге, очень ее оживляют.

Но философия Куранта оказывается на самом деле далеко не беспартийной. Курант считает, что центральным пунктом в вопросе о естественно-научной ценности основных операций анализа является их простота и удобство (стр. 92). Это знакомый мотив махистской философии.

Итак, мы должны констатировать, что книга Куранта при всех ее неоспоримых достоинствах далеко не безупречна с точки зрения методологической. И, разумеется, методологические установки автора проявляются не только в обобщающих высказываниях его, но и в построении самого курса.

Основные понятия анализа, например производную, Курант берет в их готовом, застывшем виде, а не в их развитии. Подобно авторам других курсов анализа, он запрещает смотреть на производную, как на частное двух действительно существующих бесконечно-малых величин (стр. 86).

Дифференциалы Курант считает сначала (там же) голыми символами, которыми можно оперировать, „как будто они были бы просто арифметическими величинами“, а затем (стр. 91) дает формальное определение дифференциала, из которого, впрочем, непосредственно не делает никакого употребления.

Я не могу здесь вдаваться в критику этого, на мой взгляд, одностороннего и педагогически неправильного подхода к основным понятиям

анализа. В этом и нет необходимости, так как я неоднократно высказывал свои взгляды по этому вопросу¹⁾.

Необходимо, отметить, что книга Куранта не совсем чужда историзма, и в этом ее огромная ценность. Так, в связи с формулой Тэйлора, Курант рассматривает интерполяционную формулу Ньютона, для которой формула Тэйлора является предельным случаем. Правда, задача интерполяции рассматривается в „дополнениях“, а не предшествует выводу формулы Тэйлора, как это было исторически и как, на мой взгляд, следовало бы поступить и из педагогических соображений, но тем не менее и это уже является значительным шагом вперед по сравнению с обычным изложением.

К сказанному мне хотелось бы еще добавить, что автор книги, несомненно, переоценивает степень ее легкости, когда пишет в предисловии, что „она предназначена для всякого, кто хочет на основе нормального курса средней школы серьезно заняться математикой и ее приложениями, будь он студентом университета или высшей технической школы, учителем или инженером“. Несомненно, эта книга для первого чтения трудна; несмотря на живой ее язык, она требует от читателя значительных навыков в математическом мышлении.

Но каждый, кто приобрел уже основные сведения по анализу в том примерно объеме, который соответствует программам наших вузов, прочтет эту книгу с пользой и интересом.

Проф. М. Я. Выгодский.

¹⁾ „О принципах преподавания анализа бесконечно-малых во вузе“, „Естествознание и марксизм, № 2—3 за 1930 г., стр. 128—141. См. также рецензию на книгу Гренвиля-Лузина, там же стр. 171—176. Обе статьи напечатаны в сборнике „На борьбу за материалистическую диалектику в математике“, ГНТИ—1931 г.

Попытку систематического изложения основных понятий анализа я сделал в книге „Основания исчисления бесконечно-малых“, ГНТИ—1931 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В математической литературе немало хороших курсов дифференциального и интегрального исчисления. Однако начинающему трудно найти книгу, которая открывала бы перед ним прямой путь к живой сущности науки и дала ему возможность сознательно и свободно ориентироваться в приложениях. Начинаящий с одной стороны хочет избежать бессодержательности и утомляющего многословия, с другой стороны он не выносит той педантичной манеры изложения, которая не делает никакого различия между существенным и несущественным и которая в силу своей систематичности и аксиоматичности застилает непроницаемой завесой собственно движущие силы науки и ее существенное содержание.

Конечно гораздо легче видеть и чувствовать недостатки, чем их устранить. Я очень далек от мысли, что могу дать начинающему идеальный учебник. Однако я полагаю, что издание моих лекций не является излишним; они значительно отличаются от обычных учебников расположением и выбором материала, тенденцией и пожалуй также формой изложения.

Больше всего обратит на себя внимание то, что я порываю с отжившей традицией разделять дифференциальное и интегральное исчисление. Это разделение, необоснованное ни дидактически, ни по существу и являющееся результатом исторических случайностей, мешает выяснению основного пункта, именно связи между определенным интегралом, неопределенным интегралом и производной. В устном лекционном преподавании по примеру Феликса Клейна и других все больше и больше пробивает себе путь совместное изложение. Здесь делается попытка дать такое изложение и в литературе. В первом томе излагается дифференциальное и интегральное исчисление для функции от одной переменной; второй том, менее объемистый, будет посвящен функциям от многих переменных и будет содержать некоторые другие дополнения.

Я стремлюсь дать читателю ясное представление о тесной связи между анализом и приложениями и, сохраняя полную математическую

строгость и точность, отвести подобающее место интуиции как основному источнику математических истин. Безусловно, изложение науки как замкнутой системы вытекающих друг из друга положений безотносительно к их происхождению и цели имеет эстетическую привлекательность и соответствует глубокой философской потребности нашего познания. Но в качестве исключительной основной установки или в качестве дидактического принципа по отношению к начинающему точка зрения абстрактно логической замкнутой в себе науки представляет большую опасность. Заниматься математическим анализом, повернувшись спиной к приложениям и к интуиции, это значит безнадежно обрекать науку на сухость и бесплодность. Мне кажется очень важной задачей предохранить начинающего от высокомерного, слишком уж удобного пуризма; и этой цели в значительной мере должна служить эта книга.

Она предназначена для всякого, кто хочет на основе нормального курса средней школы серьезно заняться математикой и ее приложениями, будь он студентом университета или высшей технической школы, учителем или инженером. Эта книга не избавляет читателя от самостоятельного продумывания, но ведет его без промедлений и излишних окольных путей к интересным и плодотворным областям и пытается облегчить понимание тем, что не ограничивается только последовательным изложением доказательств, но и освещает общую связь и мотивы в целом.

Для молодого читателя, доверяющегося руководству этой книги, заметим следующее. Я избегаю того, чтобы забаррикадировать доступ к конкретным фактам дифференциального и интегрального исчисления рассмотрением основных понятий; необходимость таких рассмотрений начинают вполне понимать лишь позднее. Поэтому эти рассмотрения выделены в виде дополнений к отдельным главам, и начинающий, которому в первую очередь надо быстро проработать материал или которого интересуют приложения, может спокойно отложить чтение этих частей до тех пор, пока у него не явится потребность в этом. Впрочем дополнения содержат также дополнительный материал, выделенный для того, чтобы сократить и облегчить изложение в отдельных главах. Дополнения изложены сравнительно сжато. Вообще читатель заметит, что подробное изложение в начале переходит в конце тома в более сжатое. Не следует бояться отдельных затруднений, которые быть может встретятся читателю в двух последних главах. Такие пробелы в понимании обычно позже само собой исчезают, если только их не слишком много.

Я не могу не воспользоваться этим поводом для того, чтобы вспомнить с благодарностью имя Феликса Клейна, моего великого предшественника по кафедре. То, что я здесь пытаюсь выполнить, вполне совпадает с направлением его устремлений. Я обязан также сознательно

и бессознательно воспринятыми идейными влияниями моему другу Отто Тёплицу, который продумал затронутые здесь дидактические вопросы так глубоко, как едва ли кто-нибудь другой.

Написать и издать эту книгу на основе обработки лекций в такое короткое время не было бы возможным для меня, загруженного другой работой, если бы я не имел счастья работать среди молодых и отзывчивых коллег. Всем им, активно и критически мне помогавшим, выражаю сердечную и дружескую благодарность.

Р. Курант

Геттинген,
июль 1927.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр:</i>
Предварительные замечания	Е
<i>Первая глава.</i>	
Предварительные сведения.	
§ 1. Понятие числа	3
Система действительных чисел — 3. Системы счисления — 6.	
§ 2. Понятие функции	7
Примеры — 7. Определение понятия функции — 8. Графическое изображение. Однозначность и многозначность. Непрерывность — 9. Обратные функции — 13.	
§ 3. Обзор элементарных функций	14
Рациональные функции — 14. Алгебраические функции — 15. Тригонометрические функции — 16. Показательная функция и логарифмы — 17.	
§ 4. Функции целочисленной переменной	18
§ 5. Понятие предела последовательности чисел	20
Примеры	
Простейшие примеры — 20 — 25. Геометрическая иллюстрация пределов a^n и $\sqrt[n]{p}$ — 26. Геометрический ряд — 27. $a_n = \sqrt[n]{n}$ — 28. $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ — 28. $a_n = \frac{n}{2^n}$ — 29.	
§ 6. Более подробное исследование понятия предела	29
Общие положения — 29. Действия над пределами — 33. Число e — 35. Число π как предел — 36. Арифметически-геометрическое среднее — 37.	
§ 7. Понятие предела непрерывной переменной	39
§ 8. Понятие непрерывности	41
Определения — 41. Точки разрыва — 42. Теоремы о непрерывных функциях — 45.	
<i>Дополнение к первой главе.</i>	
Предварительные замечания	46
§ 1. Принцип предельных точек и его применения	48
Принцип предельных точек — 48. Пределы числовых последовательностей. Доказательство признака сходимости Коши — 49. Верхняя и нижняя грани, верхняя и нижняя точки накопления числового множества — 52.	
§ 2. Теоремы о непрерывных функциях	53
Наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций — 53. Равномерность непрерывности — 54. Теорема о промежуточном значении — 57. Обращение непрерывной монотонной функции — 58. Дальнейшие теоремы о непрерывных функциях — 58.	

	<i>Стр.</i>
§ 3. Замечания относительно элементарных функций	59
§ 4. Полярные координаты	60
§ 5. Некоторые замечания относительно комплексных чисел	61

Вторая глава.

Основные понятия интегрального и дифференциального исчисления.

§ 1. Определенный интеграл	64
Интеграл как площадь — 65. Аналитическое определение интеграла — 66. Дополнения, обозначения и основные правила, относящиеся к определенному интегралу — 67.	
§ 2. Примеры	69
Первый и второй примеры — 70. Интегрирование x^a при любом целом положительном значении a — 71. Интегрирование x^a при любом рациональном значении a — 73. Интегрирование $\sin x$ и $\cos x$ — 74.	
§ 3. Производная	75
Производная и касательная к кривой — 75. Производная как скорость — 79. Примеры — 80. Некоторые основные правила дифференцирования — 82. Дифференцируемость и непрерывность функций — 83. Производные высших порядков и их значение — 84. Производные и отношения приращений. Обозначения Лейбница — 85. Теорема о среднем значении — 88. Приближенное представление произвольных функций с помощью линейных. Дифференциалы — 90. Замечания относительно применения наших понятий в естествознании — 92.	
§ 4. Неопределенный интеграл, первообразная функция и основные теоремы дифференциального и интегрального исчисления	93
Интеграл как функция верхнего предела — 93. Производная неопределенного интеграла — 94. Первообразная функция; общее определение неопределенного интеграла — 96. Применение первообразной функции к нахождению определенных интегралов — 99. Примеры — 101.	
§ 5. Простейшие методы графического интегрирования	102
§ 6. Дальнейшие замечания о связи между интегралом и производной	104
Распределение массы и плотность; общее количество и удельное количество — 104. Точка зрения приложений — 106.	
§ 7. Оценка интегралов и теорема о среднем значении в интегральном исчислении	108
Теорема о среднем значении в интегральном исчислении — 108. Применения. Интегрирование x^a при любом иррациональном значении a — 110.	

Дополнение ко второй главе.

§ 1. Доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции	112
§ 2. Связь между теоремами о среднем значении в дифференциальном исчислении и в интегральном исчислении	115

Третья глава.

Дифференциальное и интегральное исчисление в применении к элементарным функциям.

Стр.

- § 1. Простейшие правила дифференцирования и их применение 117
Правила дифференцирования — 117. Дифференцирование рациональных функций — 120. Дифференцирование тригонометрических функций — 121.
- § 2. Соответствующие формулы интегрирования 121
Общие правила интегрирования — 121. Интегрирование простейших функций — 122.
- § 3. Обратная функция и ее производная 123
Общая формула дифференцирования — 123. Функции обратные степенным и тригонометрическим функциям — 126. Соответствующие формулы интегрирования — 130.
- § 4. Дифференцирование сложной функции 131
Правило дифференцирования сложной функции — 131. Примеры и приложения — 133. Еще раз об интегрировании и дифференцировании x^a при иррациональном значении a — 134.
- § 5. Наибольшие и наименьшие значения 136
Общие предварительные замечания относительно геометрического значения производных — 136. Наибольшие и наименьшие значения — 137. Примеры — 140.
- § 6. Логарифмическая и показательная функции 144
Определение логарифма. Формула дифференцирования — 144. Теорема сложения — 146. Монотонный характер логарифмической функции и совокупность ее значений — 147. Функция обратная логарифмической (показательная функция) — 148. Общая показательная функция a^x и общая степенная функция x^a — 150. Представление показательной и логарифмической функции в виде пределов — 151. Заключительные замечания — 153.
- § 7. Некоторые применения показательной функции 153
Дифференциальное уравнение, характеризующее показательную функцию — 154. Непрерывное начисление процентов. Радиоактивный распад — 154. Охлаждение или нагревание тела в окружающей среде — 156. Зависимость атмосферного давления от высоты над поверхностью земли — 157. Ход химических реакций — 158. Замыкание и размыкание электрического тока — 159.
- § 8. Гиперболические функции 159
Аналитическое определение — 159. Теоремы сложения и формулы дифференцирования — 161. Обратные функции — 162. Дальнейшие аналогии — 163.
- § 9. Порядок роста функций 165
Понятие о порядке роста. Простейшие случаи — 165. Порядок роста показательной и логарифмической функции — 166. Общие замечания — 168. Порядок роста функции в окрестности любой точки — 169. Порядок исчезания функции — 169.

Дополнения к третьей главе.

	Стр.
§ 1. Рассмотрение некоторых специальных функций . . .	170

Функция $y = e^{-\frac{1}{x^2}} - 170$. Функция $y = e^{-\frac{1}{x}} - 171$. Функция $y = \operatorname{th} \frac{1}{x} - 171$. Функция $y = x \operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - 172$. Функция $y = x \sin \frac{1}{x}$, $y(0) = 0 - 173$.

§ 2. Замечания относительно дифференцируемости функций	173
§ 3. Различные частные вопросы	175
Доказательство формулы бинোма Ньютона — 175. Последовательное дифференцирование — 175. Дальнейшие примеры применения правила дифференцирования сложной функции. Обобщенная теорема о среднем значении — 176.	

Четвертая глава.

Дальнейшее построение интегрального исчисления.

§ 1. Таблица элементарных интегралов	178
§ 2. Метод подстановки	179
Формула подстановки — 180. Другое доказательство формулы подстановки — 183. Примеры. Формулы интегрирования — 184.	
§ 3. Дальнейшие примеры на метод подстановки	185
§ 4. Интегрирование по частям	189
Общие соображения — 189. Примеры — 190. Рекуррентные формулы — 191. Формула Валлиса — 193.	
§ 5. Интегрирование рациональных функций	195
Основные типы — 195. Интегрирование основных типов — 197. Разложение рациональных дробей на простейшие — 198. Пример. Химические реакции — 200. Дальнейшие примеры разложения на элементарные дроби. (Метод неопределенных коэффициентов.) — 203.	
§ 6. Интегрирование некоторых других классов функций	202
Предварительные замечания относительно рационального выражения тригонометрических и гиперболических функций — 202. Интегрирование $R(\cos x, \sin x)$ — 204. Интегрирование $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ — 205. Интегрирование $R(x, \sqrt{1-x^2})$ — 205. Интегрирование $R(x, \sqrt{x^2-1})$ — 205. Интегрирование $R(x, \sqrt{1+x^2})$ — 205. Интегрирование $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$ — 206. Дальнейшие примеры приведения к интегралам от рациональных функций — 207. Замечания по поводу примеров — 207.	
§ 7. Замечания относительно функций, не интегрирующихся с помощью элементарных функций	208
Определение функций с помощью интегралов. Эллиптические интегралы — 208. Замечания по существу относительно дифференцирования и интегрирования — 211.	

Стр.

§ 8. Обобщение понятия интеграла. Несобственные интегралы	212
Функция с конечными разрывами — 212. Функции, принимающие бесконечно большие значения — 212. Бесконечный промежуток интегрирования — 215.	

*Пятая глава.**Применения.*

§ 1. Изображение кривых	220
Изображение в параметрической форме — 220. Производные от координат для кривой, заданной в параметрическом виде — 223. Переход к новым системам координат при параметрическом изображении — 225. Замечания общего характера — 226.	
§ 2. Применение к теории плоских кривых	227
Площади в прямоугольных координатах — 227. Площадь в полярных координатах — 233. Длина кривой — 234. Кривизна кривой — 238. Центр тяжести и статический момент кривой — 241. Поверхность и объем вращения — 242. Момент инерции — 243.	
§ 3. Примеры	244
Обыкновенная циклоида — 244. Цепная линия — 245. Эллипс и лемниската — 246.	
§ 4. Простейшие задачи механики	
Основные допущения механики — 247. Свободное падение. Трение — 248. Простейшее упругое колебание — 251. Общий случай движения по заданной кривой — 252.	
§ 5. Дальнейшие применения. Падение материальной точки по кривой	254
Общие соображения — 254. Исследование движения — 256. Обыкновенный маятник — 257. Циклоидальный маятник — 258.	
§ 6. Работа и энергия	260
Общие замечания — 260. Первый пример. Притяжение масс — 262. Второй пример. Растягивание пружины — 262. Третий пример. Заряжение конденсатора — 263.	

Дополнение к пятой главе.

Свойства эволюты	263

Шестая глава.

Формула Тэйлора и приближенное выражение функций с помощью целых рациональных функций.

§ 1. Логарифм и арктангенс	268
Логарифм — 268. Арктангенс — 271.	
§ 2. Формула Тэйлора	272
Формула Тэйлора для целых рациональных функций — 272. Формула Тэйлора для любой функции — 273. Оценка остаточного члена — 275.	
§ 3. Применения. Разложение элементарных функций	275
Показательная функция — 277. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ — 279. Биномиальный ряд — 280.	

	<i>Стр.</i>
§ 4. Применения к геометрии	281
Соприкосновение кривых — 282. Круг кривизны как соприкасающийся круг — 283. Применение к теории наибольших и наименьших значений — 284.	

Дополнения к шестой главе.

§ 1. Пример функции, не разлагающейся в ряд Тэйлора	285
§ 2. Доказательство иррациональности числа e	285
§ 3. Нули и бесконечности функций. Неопределенные выражения	286
§ 4. Задача интерполирования и связь ее с формулой Тэйлора	289
Постановка задачи и предварительные замечания — 289. Построение решения. Подъемы функции. Формула интерполирования Ньютона — 291. Связь между подъемами и производными. Оценка остаточного члена — 294. Формула интерполирования Лагранжа — 297.	

Седьмая глава.

О методах приближенного вычисления.

Предварительные замечания	299
§ 1. Приближенное интегрирование	299
Правила прямоугольников — 300. Формула трапеций и формула касательных — 300. Формула Симпсона — 301. Примеры — 302. Оценка погрешности — 303.	
§ 2. Применения теоремы о среднем значении и формулы Тэйлора	305
Исчисление ошибок — 305. Вычисление π — 307. Вычисление логарифмов — 308.	
§ 3. Приближенное решение уравнений	309
Метод Ньютона — 310. Regula falsi — 311. Пример — 312.	

Дополнения к седьмой главе.

Формула Стирлинга	312

Восьмая глава.

Бесконечные ряды и другие предельные процессы.

Предварительные замечания	316
§ 1. Понятия сходимости и расходимости	317
Основные понятия — 317. Абсолютная и условная сходимость — 319. Об изменении порядка членов в ряду — 323. Действия над бесконечными рядами — 326.	
§ 2. Исследование сходимости и расходимости ряда	326
Принцип сравнения рядов — 327. Сравнение с геометрическим рядом — 327. Сравнение с интегралом — 330.	
§ 3. Пределы последовательностей функций и ряды функций от одной переменной	333
Предельные переходы для функций и для кривых — 333.	

	<i>Стр.</i>
§ 4. Равномерная и неравномерная сходимость	335.
Общие соображения и примеры — 335. Критерий равномерной сходимости — 340. Непрерывность равномерно сходящихся рядов непрерывных функций — 341. Интегрирование равномерно сходящихся рядов — 342. Дифференцирование бесконечных рядов — 344.	
§ 5. Степенные ряды	346
Сходимость степенного ряда — 346. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов — 348. Действия над степенными рядами — 350. Теорема об однозначности разложения функции в степенной ряд — 351.	
§ 6. Разложение заданных функций в степенные ряды	
Метод неопределенных коэффициентов. Примеры	352
Показательная функция — 352. Биномиальный ряд — 353. Ряд для $\arcsin x$ — 355. Разложение в степенной ряд $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x$ — 355. Пример умножения рядов — 355. Пример почленного интегрирования ряда. Эллиптический интеграл — 356.	
§ 7. Степенные ряды с комплексными членами	357
Введение комплексных членов в степенные ряды — 357. Краткие указания из области общей теории функций — 359.	

Дополнения к восьмой главе.

§ 1. Умножение и деление рядов	360
Умножение абсолютно сходящихся рядов — 360. Умножение и деление степенных рядов — 361.	
§ 2. Предельные переходы, связанные с показательной функцией	362
Равномерность предельного перехода — 362. Замечание по поводу интегрирования и дифференцирования показательной функции — 364.	
Доказательство формулы $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ — 364.	
§ 3. Бесконечные ряды и несобственные интегралы	366
§ 4. Бесконечные произведения	367
§ 5. Дальнейшие примеры бесконечных рядов	370
Различные разложения в ряд — 370. Ряды, в которых встречаются Бернуллиевы числа — 373.	

Девятая глава.

Ряды Фурье.

§ 1. Периодические функции	375
Общие замечания — 375. Сложение простых колебаний. Вышние гармонические. Биения — 377.	
§ 2. Применение комплексных чисел	381
Общие замечания — 381. Применение в теории переменного тока — 382. Комплексное представление наложения простых колебаний — 384.	
§ 3. Тригонометрическое интерполирование	384
Решение задачи об интерполировании — 384. Предельный переход к ряду Фурье — 389.	

	<i>Стр.</i>
§ 4. Примеры разложения в ряд Фурье	391
Предварительные замечания — 391. Разложение функций — 395.	
$\psi(x)=x$ и $\varphi(x)=x^2$ — 392. Разложение функции $x \cos x$ — 393.	
$f(x)= x $ — 394. Пример. $f(x)= \sin x $ — 395. Разложение функции	
$f(x)=\cos px$. Разложение котангенса на элементарные дроби. Разло-	
жение синуса в бесконечное произведение — 396. Дальнейшие при-	
меры — 397.	
§ 5. Строгое обоснование разложения в ряд Фурье	398
Функции с равномерно сходящимся рядом Фурье — 398. Доказа-	
тельство разложимости — 402. Обобщение теоремы о разложимости	
в ряд Фурье на более широкий класс функций — 406.	
§ 6. Аппроксимирование в среднем с помощью тригоно-	
метрических многочленов	410

Дополнения к девятой главе.

Примеры тригонометрического интерполирования	413
Предварительные замечания — 413. Примеры — 415.	

Десятая глава.

Дифференциальные уравнения простейших колебаний.

§ 1. Проблемы колебаний в механике и физике	420
Простейшие механические колебаний — 420. Электрические коле-	
бания — 422.	
§ 2. Решение однородного уравнения. Свободные ко-	
лебания	423
Формальное решение — 423. Физическая интерпретация реше-	
ния — 426. Выбор решения, соответствующего заданным начальным	
условиям. Однозначность решения — 427.	
§ 3. Неоднородное уравнение. Вынужденные коле-	
бания	428
Общие замечания — 428. Решение неоднородного уравнения — 430.	
Кривая резонанса — 432. Более подробное изучение хода колеба-	
ний — 434. Замечания относительно устройства регистрирующих при-	
боров — 435.	
Заключительное замечание	438
Предметный указатель	439

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

Впервые вступая в соприкосновение с так называемой высшей математикой, начинающий не может не испытывать чувства известного разрыва между школьной математикой и математикой в том виде, в каком она преподается в высшей школе. Помимо тех исторических условий, которые придали преподаванию в высшей школе столь отличный от средней школы характер, самое существо высшей математики внутренне оправдывает это чувство. Высшая или, лучше, новая математика, развивавшаяся на протяжении последних трех столетий, по всему своему духу коренным образом отличается от элементарной математики, до самого последнего времени безраздельно господствовавшей в средней школе, и содержание которой во многом почти непосредственно заимствовано у классической математики греков.

Для элементарной математики является характерной ее тесная связь с геометрией. Даже там, где элементарная математика выходит за пределы геометрии и вступает в область арифметики, геометрия почти всегда продолжает оставаться основой.

Второй характерной чертой старой математики мы должны считать господствующую в ней тенденцию направлять внимание на единичные математические объекты. Вещи, которые мы теперь объединили бы как частные случаи общего явления, в элементарной математике часто остаются изолированными друг от друга и не ставятся во взаимную связь. Тесная связь с геометрической интуицией и предпочтительный интерес в конкретному придают старой математике своеобразную привлекательность. Тем не менее произошел решительный сдвиг вперед, когда в начале нового времени в математике распространились совершенно противоположные тенденции. И именно эти новые тенденции послужили импульсом к новому великому развитию, сменившему то состояние известного застоя, в котором математика, несмотря на некоторые достижения в отдельных частных вопросах, находилась на протяжении многих столетий средневековья.

Основной тенденцией всей математики нового времени является замена изолированных частных исследований все более и более общими систематическими методами. При этом, быть может, не всегда уделяется должное внимание индивидуальным особенностям отдельного частного случая, но зато эти систематические методы благодаря своей общ-

ности таят в себе множество новых результатов. С другой стороны, число, — аналитическая точка зрения начинает играть в математике все более и более самостоятельную роль и в конце концов полностью подчиняет себе геометрию. Эти новые тенденции в математике особенно ярко проявились в создании новых математических дисциплин, подготовленных рядом предшествовавших попыток, а именно: аналитической геометрии, обязанной своим развитием главным образом Фермату и Декарту, и дифференциального и интегрального исчисления, основоположниками которых обыкновенно считают Лейбница и Ньютона.

Современное развитие математики может быть сопоставлено с рядом других явлений истории нового времени, например с постоянным вытеснением ремесленного способа производства фабричной промышленностью. Как бы то ни было, за 300 лет своего существования новая математика получила могучее развитие и приобрела громадное значение как для чистой науки, так и для разнообразнейших технических и естественно-научных применений. Основные понятия новой математики и прежде всего понятие функции постепенно получили всеобщее распространение и проникли наконец и в среднюю школу.

В этом курсе я хочу, не опираясь на полученные в средней школе предварительные сведения из высшей математики, изложить важнейшие факты дифференциального и интегрального исчисления. Настоящий курс должен, с одной стороны, открыть путь к дальнейшему изучению высших математических дисциплин и углублению основ и, с другой стороны, вооружить умением пользоваться дифференциальным и интегральным исчислениями в разнообразных областях их применения.

При этом я хочу указать на одну опасность, кроющуюся в упомянутом выше разрыве между школьной и высшей математикой. Элементарная точка зрения школьной математики направляет внимание на частности и приводит к потере общей перспективы в смысле умения подмечать общие зависимости и применять систематические методы. Но, с другой стороны, „высшая точка зрения“ общих методов кроет в себе противоположную опасность разрыва с миром конкретного. Погрузившись в мир общих понятий, часто теряют способность видеть и понимать конкретное и оказываются беспомощными перед лицом простейших конкретных задач. Вы должны собственными силами позаботиться о том, чтобы избежать опасности с той и с другой стороны, Только продумывая на каждом отдельном примере снова все детали и вполне уясняя себе этим путем общую мысль, вы сможете этого достигнуть, и в этом заключается основная задача каждого стремящегося изучить науку.

ГЛАВА I.

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ.

Два понятия, если не считать понятия числа, лежат в основе дифференциального и интегрального исчисления и вместе с тем в основе всего высшего анализа: понятие функции и понятие предела. Хотя эти понятия встречались иногда уже в классической древности, но только в современной математике они приняли характерную для них форму и приобрели фундаментальное значение.

В настоящей вводной главе мы попытаемся наиболее простым и наглядным образом уяснить себе эти понятия.

§ 1. Понятие числа.

Вопрос о том, что, собственно говоря, представляют собой числа, — этот вопрос касается больше философа, чем математика, и является предметом многочисленных философских исследований. Математика должна однако оставаться независимой от влияния противоречивых философских воззрений; к счастью, она не нуждается ни в каком предварительном теоретико-познавательном исследовании более глубокой сущности понятия числа.

Мы будем поэтому рассматривать числа и прежде всего целые положительные или натуральные числа 1, 2, 3 ... как нечто, непосредственно данное; точно так же и правила, по которым можно производить действия над этими числами, мы будем считать данными и напомним только кратко, каким образом оказалось необходимым расширить понятие целых положительных или натуральных чисел.

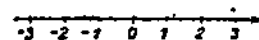
1. Система действительных чисел. В области натуральных чисел основные операции сложения и умножения всегда неограниченно выполнимы, т. е. сумма и произведение двух натуральных чисел являются всегда также натуральными числами. Но обращения этих операций, т. е. вычитание и деление уже не всегда выполнимы в области натуральных чисел, и это обстоятельство принудило творческую силу математики создать число 0, отрицательные числа и наконец положительные и отрицательные дроби. Совокупность всех этих чисел принято называть рациональными числами, так как все они получаются из единицы путем применения „рациональных арифметических действий“: сложения, умножения, вычитания и деления.

Числа принято наглядно изображать посредством точек прямой линии, „числовой прямой“, принимая на этой прямой некоторую произвольную точку за точку 0, а другую — за точку 1; расстояние между этими двумя точками служит тогда масштабом, при помощи которого каждому положительному или отрицательному рациональному числу приводится в соответствие определенное место на числовой прямой, причем например положительные числа помещаются справа от нуля, а отрицательные — слева (черт. 1).

Если понимать, как обычно, под абсолютным значением $|a|$ числа a само значение a , если $a \geq 0$ ¹⁾, и значение $-a$, если $a < 0$, то $|a|$ просто означает расстояние соответствующей точки от начальной точки.

Геометрическое истолкование рациональных чисел при помощи точек числовой прямой приводит нас к установлению важного свойства совокупности рациональных чисел, формулируемого так: „множество рациональных чисел является всюду плотным“. Это означает, что между двумя сколь-угодно близкими друг к другу рациональными числами имеются еще другие рациональные числа или что в каждом

сколь-угодно малом интервале числовой прямой еще содержатся рациональные числа; выражаясь геометрически, можно сказать, что любой сколь-угодно малый отрезок числовой прямой содержит внутри себя



Черт. 1.

рациональные точки. Это свойство плотности множества рациональных чисел становится сразу очевидным, если заметить, что числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2},$

$\frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}$ становятся все меньше и меньше и при возрастании n все

более приближаются к нулю. Если разделить числовую прямую, начиная с точки 0, на равные отрезки длины $\frac{1}{2^n}$, то концы этих отрезков $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n},$

$\frac{3}{2^n}, \dots$ представляют собой рациональные числа вида $\frac{m}{2^n}$; при этом мы

можем располагать числом n по произволу. Если на числовой прямой задан какой-нибудь определенный интервал, то как бы мал он ни был, мы можем всегда сделать вышеуказанное подразделение числовой прямой настолько мелким, чтобы внутри заданного интервала наверное попали точки этого подразделения. Для этого достаточно число n выбрать настолько большим, чтобы $\frac{1}{2^n}$ было меньше длины заданного интервала.

Однако несмотря на это свойство плотности, множества рациональных чисел недостаточно, чтобы представить все точки числовой прямой

¹⁾ $a \geq b$ означает: число a либо больше, либо равно b .

числами. Уже грекам было известно, что если принять длину какого-нибудь отрезка за единицу, то существуют отрезки, длина которых не выражается рациональным числом, так называемые несоизмеримые с единицей длины отрезки. Так например гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными единице, несоизмерима с единицей, т. е. ее длина не выражается рациональным числом. В самом деле, квадрат этой длины l должен по теореме Пифагора равняться 2; поэтому, если бы l равнялось рациональному числу $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа, то $p^2 = 2q^2$. При этом мы можем предположить, что p и q не имеют общего делителя, так как дробь $\frac{p}{q}$ можно предварительно на такой сократить. Из уравнения $p^2 = 2q^2$ следует, что p^2 — четное число; поэтому p также должно быть четным; пусть например $p = 2p'$. Вставив это выражение, мы получим:

$$4p'^2 = 2q^2 \quad \text{или} \quad q^2 = 2q'^2;$$

а потому q^2 и значит q само также должно быть четным, что противоречит нашему предположению о том, что p и q не имеют никакого общего делителя и в частности не могут оба одновременно содержать множителем 2. Итак наше предположение, что гипотенуза выражается дробью $\frac{p}{q}$, оказалось противоречивым и значит неверным.

Приведенное нами только что рассуждение — характерный пример „косвенного доказательства“¹⁾ — показывает, что символу $\sqrt{2}$ не может соответствовать какое-либо рациональное число.

Этот пример показывает, что если мы хотим каждой точке прямой привести в соответствие некоторое число, то мы вынуждены ввести кроме рациональных еще другие „иррациональные“ числа. И мы действительно будем строго придерживаться этого требования, чтобы точкам прямой линии после выбора определенной единицы длины взаимно-однозначным образом соответствовали определенные числа. Эту систему рациональных и иррациональных чисел, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с отрезками прямой, называют системой действительных чисел. Вышеприведенное подразделение числовой прямой на интервалы длины $\frac{1}{2^n}$ показывает, что каждое иррациональное число может быть с любой точностью приближенно выражено посредством рациональных чисел, т. е. мы можем всегда найти рациональное число r , расстояние которого от a было бы меньше любой желательной для нас грани, на-

¹⁾ Доказательство „от противного“.

пример меньше чем 0,01 или 0,001. Точно так же можно, разумеется, всякое иррациональное число заключить в сколь-угодно малый интервал, границы которого выражаются рациональными числами.

Мы предполагаем известным тот основной факт, что над действительными числами можно производить все действия согласно обычным формальным законам арифметических действий. При этом нельзя не упомянуть, что введение иррациональных чисел и обоснование справедливости для них законов арифметических действий может и должно служить предметом более подробного исследования. Развитие современной математики вплоть до второй половины XIX столетия происходило совершенно беспрепятственно без помощи такого подробного исследования, поэтому совершенно естественно не открывать или, скорее, не закрывать себе путь к высшему анализу в собственном смысле слова предварительным аксиоматическим исследованием понятия числа. Однако я советую по достижении известной степени математического развития изучить одно из многочисленных хороших изложений этих вопросов¹⁾.

Что касается самих законов действий, то я хочу только напомнить простейшие правила действий над неравенствами, которые играют во всем анализе значительно более важную роль, чем в элементарной математике.

Всегда имеют место следующие неравенства:

$$|a + b| \leq |a| + |b|; \quad |a - b| \geq |a| - |b|.$$

Далее неравенства всегда можно складывать и умножать на положительные множители; при умножении на отрицательное число знак неравенства меняется на обратный.

Наконец из $a > b > 0$ и $0 < a' < b'$ следует новое неравенство:

$$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}.$$

2. Системы счисления. Для производства действий над числовыми величинами в десятичной системе счисления числа обычно записываются так:

$$a = \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots,$$

a_0 здесь означает число единиц, a_1 — число десятков, a_2 — число соте a_{-1} — число десятых и т. д. Это означает не что иное как представление числа a в следующей форме:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \dots,$$

¹⁾ Например К. К о р р: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 2-е изд., Берлин 1924, главным образом глава I.

причем $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{-1}, a_{-2}, \dots$ суть цифры последовательности 0, 1, 2, ..., 9.

Уже в средней школе нам стал известен тот простой результат, что рациональное число выражается с помощью чистой или смешанной периодической десятичной дроби (в частности обрывающейся), тогда как бесконечная десятичная дробь без периода всегда изображает иррациональное число.

Десятичный способ нумерации является в известном смысле случайным; вместо основного числа 10 мы можем положить в основу системы нумерации любое число в качестве основного. Для чисто теоретических целей часто бывает полезным выражать числа в так называемой двоичной системе, т. е. в системе с основным числом 2. В такой системе каждое целое положительное число a изображалось бы в форме:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots,$$

причем цифры $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ могут каждый раз равняться только либо 0, либо 1. Число 9 например записывается в двоичной системе так:

$$1001 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0.$$

Как видите, в двоичной системе числа имеют сравнительно длинные выражения. В какой бы однако системе нумерации мы ни записывали бы числа, всегда можно выразить в этой системе любое рациональное или иррациональное число, притом однозначно.

§ 2. Понятие функции.

Выяснением понятия функции и его значения мы обязаны новейшему времени. Принципиальной формулировке этого понятия мы предположим несколько поясняющих примеров.

1. Примеры. а) Если в некотором сосуде заключен идеальный газ, находящийся под давлением поршня, то между давлением p и объемом v существует зависимость:

$$v \cdot p = C,$$

где C — некоторая постоянная. Этот так называемый закон Бойля ничего не утверждает относительно величин v и p самих по себе и означает только следующее. Если p имеет определенную величину, которая в известных пределах может быть выбрана совершенно произвольно, то я могу на основании этого закона вычислить v и наоборот:

$$v = \frac{C}{p}, \quad p = \frac{C}{v}$$

(при этом мы предполагаем температуру неизменной). Ввиду этого говорят, что v является функцией величины p , или соответственно p является функцией величины v .

б) Если металлический стержень, имеющий при температуре 0° длину l_0 , нагреть до температуры ϑ° , то при простейших допущениях длина стержня l выражается законом:

$$l = l_0(1 + \beta\vartheta),$$

где „коэффициент линейного расширения“ β является постоянной величиной. Мы говорим опять: l является функцией ϑ .

2. Определение понятия функции. Чтобы дать общее определение математического понятия функции, возьмем какой-нибудь определенный интервал нашей числовой скалы, например интервал между числами a и b , и рассмотрим совокупность всех чисел x , принадлежащих этому интервалу, т. е. удовлетворяющих условию:

$$a \leq x \leq b.$$

Если мы можем выбирать величину x совершенно произвольно в пределах этого интервала, то мы называем x переменной величиной в данном интервале (непрерывной переменной).

Если теперь каждому значению x этого интервала на основании какого-нибудь правила приводится в соответствие определенное значение y , то мы говорим: y является функцией от x и пишем символически

$$y = f(x), \text{ или } y = F(x), \text{ или } y = g(x),$$

или как-нибудь аналогично: x в этом случае называют независимой y — зависимой величиной или переменной; или же x — аргументом функции y .

Здесь же следует заметить, что в целом ряде рассуждений не безразлично, причисляют ли к интервалу от a до b его концы, — как мы это сделали выше, или нет; в последнем случае мы должны были бы ограничить величину x условием

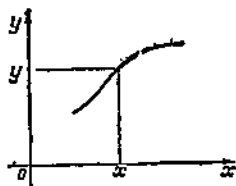
$$a < x < b.$$

Когда отсутствие соответствующего указания сможет привести к недоразумениям, мы будем в первом случае называть интервал замкнутым, во втором — (двусторонне) открытым. Если к интервалу причисляется только один из его концов, но не другой, например $a < x \leq b$, то мы интервал называем полу- или односторонне открытым. Наконец можно себе представить наши интервалы простирающимися в одну или в обе стороны до бесконечности. В этом случае говорят, что непрерывная переменная x пробегает бесконечный интервал, и записывают символически:

$$a < x < \infty, \text{ или } -\infty < x < b, \text{ или } -\infty < x < \infty.$$

В общем определении понятия заданной в некотором интервале функции ничего не говорится о характере того правила, согласно которому зависимая переменная получается из независимой переменной. И действительно, в понятии функции, взятом в такой общности, остается еще известный элемент неопределенности и шаткости. Для всех своих применений это понятие функции нуждается в далеко идущем ограничении в том смысле, что к закону зависимости должны быть предъявлены более точные требования.

3. Графическое изображение. Однозначность и многозначность. Непрерывность. К такому разумному ограничению, лишь при выполнении которого общее понятие функции оказывается действительно применимым, приводит нас связь с геометрией. Основная мысль аналитической геометрии ведь заключается в том, чтобы аналитически характеризовать геометрически заданную кривую, рассматривая одну из обеих прямоугольных координат, например y как функцию $y=f(x)$ от другой координаты x ; например парабола выражается функцией $y=x^2$, круг радиуса 1 с центром в начале координат — функцией $y=\sqrt{1-x^2}$. В первом примере мы можем себе представить функцию определенной в бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$; во втором же оказывается необходимым ограничиться интервалом $-1 \leq x \leq 1$, так как вне этого интервала функция (в области действительных чисел) теряет свой смысл.



Черт. 2.

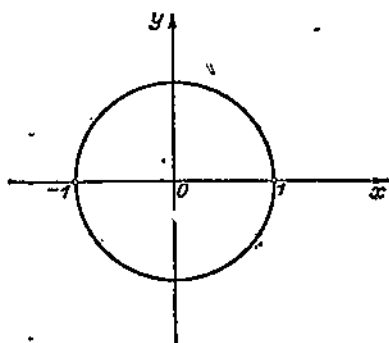
Обратно, если мы будем исходить не от геометрически заданной кривой, но, наоборот, будем рассматривать функцию $y=f(x)$ как первично заданную, то мы можем заданную функциональную зависимость величины y от величины x изобразить графически, пользуясь для этого прямоугольной системой координат (черт. 2).

Проведя в конце каждой абсциссы x соответствующую ординату $y=f(x)$, мы получим в качестве геометрического образа функции кривую. Ограничение, которое мы налагаем на понятие функции, заключается в том, чтобы этот геометрический образ представлял собой доступную наглядному представлению кривую. Мы должны будем тогда исключить из рассмотрения например функцию, определенную так: для каждого рационального значения x пусть $y=1$; для иррационального же x пусть $y=0$. Очевидно, что значение этой функции бесконечно часто совершает прыжки от 0 к 1 и обратно, как бы мал ни был интервал, пробегаемый переменной x .

В связи с графическим изображением функций при помощи кривых я хотел бы отметить один пункт, часто причиняющий начинающему известные трудности.

Закон, который переменной x приводит в соответствие функцию y , должен однозначным образом устанавливать это соответствие, если только совершенно определенно не сказано или же из общей связи не вытекает прямо противоположное; примеры однозначного соответствия представляют функции $y = x^2$ или $y = \sin x$. Если хотят подчеркнуть это требование однозначности, то говорят об „однозначно-определенной“ или „однозначной“ функции. Однако может случиться, что закон соответствия задается первоначально в форме, кроющей в себе известную многозначность; например $y = \sqrt{x}$ или $y = \sqrt{1-x^2}$, где вследствие двузначности квадратного корня остается открытым выбор между двумя знаками. Если оставить эту двузначность в определении функции, то функцию называют „многозначной“, в данном случае — двузначной.

Но во многих случаях будет более удобным, если эта многозначность будет устранена. Для этого достаточно выделить при помощи добавочного особого условия одну из различных возможностей, например в нашем случае при помощи условия $y \geq 0$. В подобных случаях говорят об „однозначной ветви“ многозначной функции; другая однозначная ветвь определяется в нашем примере условием $y \leq 0$.



Черт. 3.

Каждая такая ветвь функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является тогда в интервале $-1 \leq x \leq 1$ однозначной функцией от x .

В дальнейшем мы будем всегда подразумевать под словом „функция“, если только не будет сделано специальной оговорки, подобную однозначную ветвь.

Если функция на всем протяжении своего изменения однозначно определена, то изображающая ее кривая пересекается всякой прямой, параллельной y -оси только в одной точке. Если же функция много-

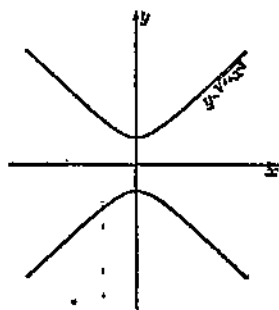
значна, как например $y = \sqrt{1-x^2}$, то подобные параллели могут иметь с кривой несколько точек пересечения, и одна точка пересечения будет соответствовать одной ветви функции, другая — другой ветви. Части кривой, принадлежащие различным однозначным ветвям функции, могут быть при этом связанными одна с другой, образуя вместе полный пробег одной геометрически единым образом определяемой кривой, как например для круга $y = \sqrt{1-x^2}$ (ср. черт. 3); но может также случиться, что различные ветви пробегаются совершенно раздельно одна от другой, как например для гиперболы $y = \sqrt{1-x^2}$ (ср. черт. 4).

Привожу еще несколько примеров графического изображения функций.

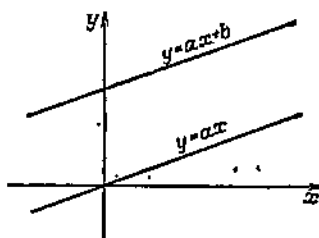
а) $y = ax,$

y пропорционален x . Графическим изображением (ср. черт. 5) является прямая, проходящая через начало координат системы x, y .

б) $y = ax + b,$



Черт. 4.



Черт. 5.

y — „линейная функция“ от x . Графиком служит прямая, проходящая через точки $x=0, y=b$ и $x=\frac{-b}{a}, y=0$.

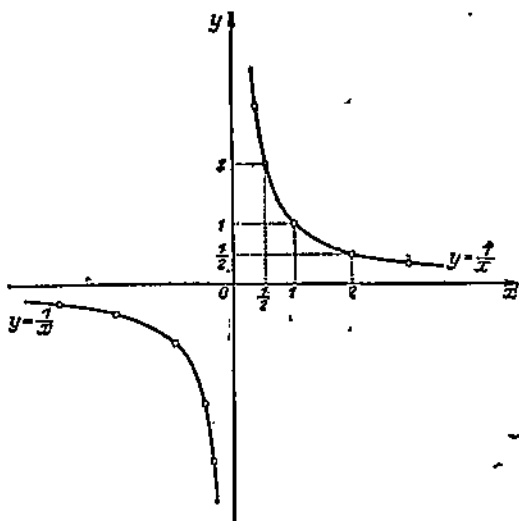
в) $y = \frac{a}{x},$

y обратно пропорционален x . В частности при $a=1$, т. е.

если $y = \frac{1}{x}$, то например при $x=1, y=1$, при $x=\frac{1}{2},$

$y=2$, при $x=2, y=\frac{1}{2}$.

Графиком служит (ср. черт. 6) кривая, симметричная относительно биссектрис углов между осями координат — равностоянная гиперболы. Эта последняя функция очевидно не определена для значения $x=0$, так как деление на нуль не имеет смысла. Значение $x=0$, являющееся исключительным значением для этой функции, в окрестности которого функция принимает сколь угодно большие положительные или



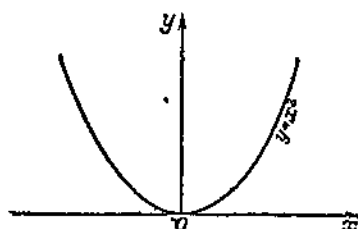
Черт. 6.

отрицательные значения, является простейшим примером точки бесконечности функции, на чем мы потом (ср. § 8, п^о2) остановимся подробнее.

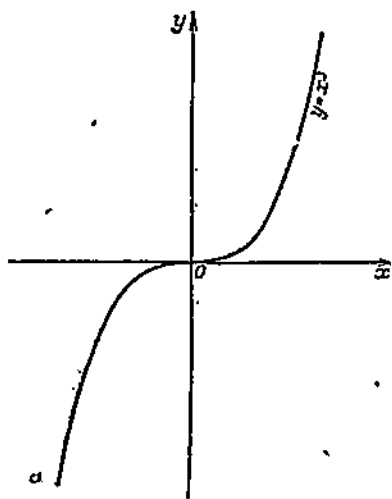
б) $y = x^2$.

Эта функция, как известно, изображается параболой (черт. 7).

Точно так же функция $y = x^3$ наглядно изображается при помощи так называемой кубической параболы (черт. 8).

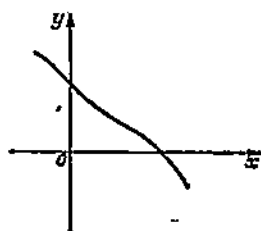
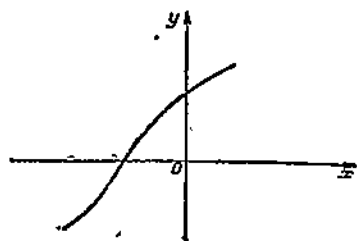


Черт. 7.



Черт. 8.

Только что рассмотренные функции и их графические изображения обладают одним свойством, которое для исследования всякой функции играет громадную роль, а именно свойством непрерывности. Это понятие нами будет впоследствии (ср. § 8) проанализировано более подробно; здесь я могу ограничиться наглядным пояснением сущности этого свойства, выражающегося в том, что при небольшом изменении x



Черт. 9.

значение y также подвергается лишь небольшому изменению и не делает внезапных скачков, т. е. изображающая функцию кривая на всем своем протяжении нигде не разрывается.

Функцию, имеющую для всех значений x в некотором интервале одно и то же значение $y = a$, называют константой (постоянной) a ; она изображается горизонтальной прямой линией. Функция $y = f(x)$, обладающая тем свойством, что в некотором интервале большему значению x

всегда соответствует большее значение y , называется монотонно возрастающей в этом интервале функцией; если же большему значению x всегда соответствует меньшее значение y , то функция называется монотонно убывающей в этом интервале. Наглядно подобные монотонные функции изображаются кривыми, которые в соответствующем интервале либо постоянно поднимаются, либо постоянно опускаются (черт. 9).

Если кривая, выражаемая уравнением $y=f(x)$, симметрична относительно оси y -ов, т. е. если значению $x=-a$ соответствует то же значение функции, что и значению $x=a$, или если $f(-x)=f(x)$, то функция называется четной. Например $y=x^2$ (черт. 7). Если же, напротив, кривая симметрична относительно начала координат, т. е. если

$$f(-x)=-f(x),$$

то функция называется нечетной. Например $y=x$ или $y=x^3$ (черт. 8), или $y=\frac{1}{x}$.

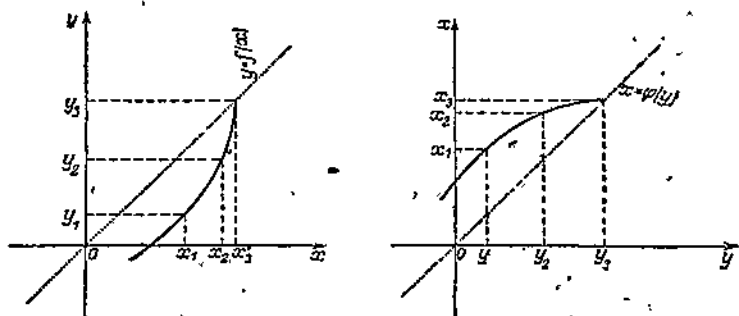
4. Обратные функции. Мы уже имели возможность заметить на наших первых примерах в п^о 1, что можно двояко рассматривать формальную зависимость между двумя величинами, имея такое же право первую величину рассматривать как функцию второй величины, как и вторую рассматривать как функцию первой.

Например, если $y=ax+b$ (причем предполагается что $a \neq 0$), то x как функция от y выражается уравнением $x=\frac{y-b}{a}$. Точно так же выраженная уравнением $y=x^2$ функциональная зависимость между y и x может быть также выражена уравнением $x=\sqrt{y}$. Аналогичным образом мы можем для любой функции $y=f(x)$ пытаться рассматривать и x как функцию от y , или, как мы скажем, заменить функцию $y=f(x)$ «обратной функцией» $x=\varphi(y)$. Геометрически это означает следующее: можно рассматривать графическое изображение любой функции $y=f(x)$, перегнув таковое вокруг биссектрисы угла между положительной x -осью и положительной y -осью¹⁾ (ср. черт. 10). Тогда сразу x изображается графически как функция от y и получается графическое изображение обратной функции $x=\varphi(y)$.

Уже это геометрическое рассуждение сразу показывает, что однозначная обратимость функции $y=f(x)$ связана с известными усло-

¹⁾ Вместо этого перегибания мы могли бы сперва повернуть систему координат вместе с кривой $y=f(x)$ на 90° вокруг начала и затем изменить на обратное направление оси y .

виями. Если соответствующая функции кривая пересекается прямой $y=c$, параллельными x -оси в нескольких точках, то значению $y=c$ соответствует больше чем одно значение x и функция в этом интервале не будет однозначно обратимой. Во избежание этого мы предполагаем, что функция $y=f(x)$ в рассматриваемом интервале непрерывна и монотонна. Тогда, как показывает черт. 10, каждому значению y соответствует в рассматриваемом интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ действительно только одно



Черт. 10.

значение x . И мы заключаем из того же чертежа, что всякая монотонная и непрерывная в некотором интервале функция всегда в этом интервале обратима при помощи однозначно определенной непрерывной же функции.

§ 3. Обзор элементарных функций.

1. Рациональные функции. Мы переходим теперь к краткому обзору элементарных функций, знакомых из средней школы. Простейшие классы функций получаются путем повторного применения элементарных арифметических действий: сложения, умножения и вычитания. Применяя эти действия к независимой переменной x и к каким-нибудь рациональным или иррациональным числам, мы получаем в качестве результата целые рациональные функции или полиномы (многочлены):

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Целые рациональные функции в силу простоты своего строения являются, так сказать, основными функциями всего анализа.

Образуя далее частное двух таких функций, т. е. выражение вида

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m},$$

мы приходим к общим или дробным рациональным функциям, которые определены всюду, где знаменатель отличен от нуля.

Простейшей целой рациональной функцией является (целая) линейная функция

$$y = ax + b.$$

Она изображается прямой линией. Всякая квадратичная функция вида

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

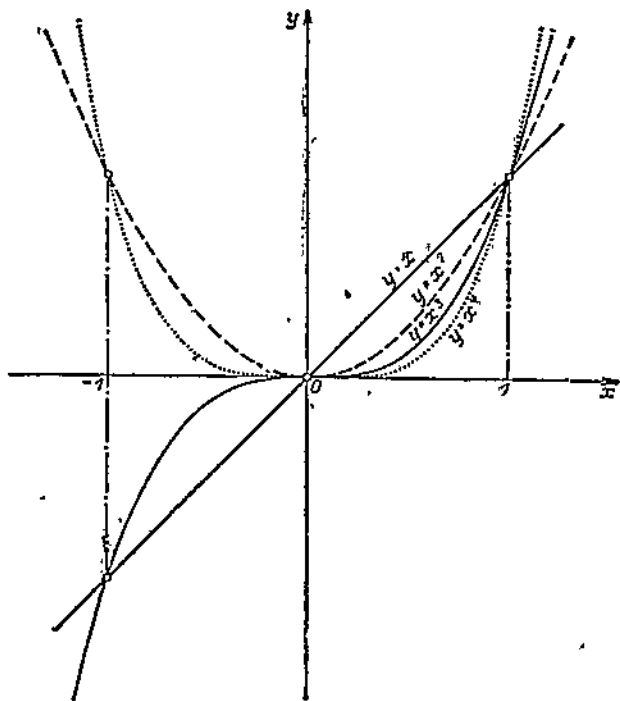
изображается параболой. Кривые, изображающие целую рациональную функцию третьей степени:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

называются иногда параболой третьего порядка и т. д.

В качестве наглядных примеров мы приводим на черт. 11 графические изображения функции $y = x^n$ для показателей $n = 1, 2, 3, 4$.

Очевидно, что для четных значений n функция $y = x^n$ удовлетворяет уравнению $f(-x) = f(x)$ и является следовательно четной функцией, тогда как для нечетного n эта функция удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$, т. е. она — нечетная. Простейшим примером дробной рациональной функции является уже рассмотренная раньше функция $y = \frac{1}{x}$, изображение которой дается равнобочной гиперболой. Другой пример: функция $y = \frac{1}{x^2}$ (черт. 12).



Черт. 11.

2. Алгебраические функции. Мы выходим за пределы области рациональных функций, как только мы ставим себе задачу образовать их обратные функции; например для степени $y = x^n$ эта задача решается

введением корня n -й степени $\sqrt[n]{y} = x$ или, переставив обозначения зависимой и независимой переменных, функцией

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

В качестве функций более общего вида мы можем рассматривать

$$y = \sqrt[n]{R(x)},$$

где $R(x)$ означает произвольную рациональную функцию. К дальнейшим функциям этого типа мы приходим, применяя к одной или нескольким подобным специальным функциям рациональные арифметические действия.

Таким путем например получаются функции

$$y = \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x^2 + 1},$$

или

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1};$$

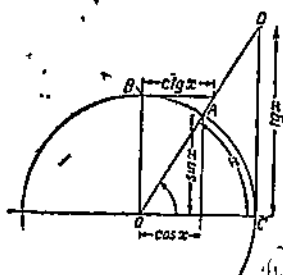
функции этого рода являются специальными „алгебраическими функциями“. Разумеется, для этих функций следует каждый раз установить, какой знак нужно выбрать из различных возможных знаков корней, входящих в выражения этих функций.

3. Тригонометрические функции. В то время как рациональные и только что рассмотренные алгебраические функции определяются непосредственно при помощи элементарных арифметических действий и их обращений, источником остальных, так называемых трансцендентных функций ¹⁾ является в первую очередь геометрия. Мы займемся здесь элементарными трансцендентными функциями, а именно: тригонометрическими функциями, показательной функцией и логарифмом.

В высшем анализе в основу измерения углов кладется не градусная мера — в градусах, минутах и секундах, а радиальная мера. Для этой цели представляют себе вершину подлежащего измерению угла помещенной в центре круга с радиусом, равным единице, и измеряют величину угла длиной дуги, вырезаемой углом на окружности. Угол в 180° имеет поэтому радиальную меру π , угол в 90° — радиальную

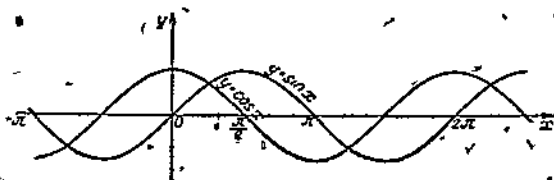
¹⁾ Слово „трансцендентные“ не означает чего-либо таинственного или трудного; оно лишь указывает на тот факт, что эти функции уже не могут быть определены при помощи элементарных арифметических действий: „quod algebrae vires transcendit“ (то, что превышает силы алгебры).

меру $\frac{\pi}{2}$, угол в 45° — радиальную меру $\frac{\pi}{4}$, полный угол в 360° — радиальную меру 2π . Обратно, угол, радиальная мера которого равна единице (радиан), выражается в градусах числом $\frac{180^\circ}{\pi}$ или приблизительно $57^\circ 17' 45''$.



Черт. 13.

В дальнейшем мы будем всегда, когда будем говорить об угле x , понимать под этим углом, радиальная мера которого равна x .

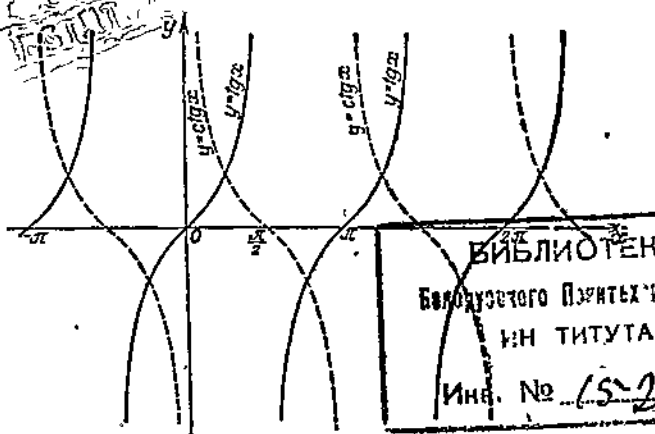


Черт. 14.

После этих предварительных замечаний напомним еще кратко смысл тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, ссылаясь на черт. 13, на котором угол x отсчитывается от неподвижной стороны OC , причем положительным вращением считается указанное на чертеже вращение против часовой стрелки.

Прямоугольные координаты точки A дают просто функции $\cos x$ и $\sin x$. Графические изображения функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ читатель найдет на черт. 14 и 15.

4. Показательная функция и логарифм. Наряду с тригонометрическими функциями в качестве дальнейших



Черт. 15.

элементарных трансцендентных функций рассматриваем показательную функцию с основанием a :

$$y = a^x$$

и ее обратную функцию, логарифм при основании a :

$$x = \log_a y.$$

В школе обычно проходят мимо тех специфических трудностей, которые кроются в определении этих функций, да и мы также немного отложим более подробное исследование этих функций до того момента, когда мы уже будем располагать более тонкими вспомогательными средствами (ср. главу III, § 6). Но уже теперь мы можем сказать, какой смысл мы должны придавать этим функциям.

Если $x = \frac{p}{q}$ есть рациональное число (p и $q \neq 0$ — целые числа), — причем a предполагается положительным, — то мы определяем a^x как

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}},$$

где корень берется положительным. Так как рациональные значения x расположены всюду плотно, то является естественным приписать функции a^x для иррациональных значений x значение, непрерывно примыкающее к ее уже построенным вышеуказанным способом значениям. Этим самым мы дополняем эти последние значения до непрерывной функции, определенной для всех, в том числе и иррациональных значений x , которую мы и называем „показательной функцией“. Таким образом под a^x мы понимаем ту непрерывную функцию, которая для рациональных значений x определена вышеуказанным образом. Примем пока на веру, что это определение является безупречным и что функция a^x этим способом действительно однозначно определена, сохраняя за собой обязательство восполнить этот пробел и строго обосновать наше утверждение¹⁾.

Функцию $x = \log_a y$ можно определить при $y \geq 0$ как обратную функцию показательной функции $y = a^x$.

§ 4. Функции целочисленной переменной.

До сих пор мы рассматривали независимую переменную как величину, непрерывно пробегающую все значения в некотором интервале. Однако в очень многих случаях в математике встречаются величины, зависящие только от целого числа, номера n , которое может принимать все значения 1, 2, 3... Мы тогда называем эти величины функциями целочисленной переменной или теоретико-числовыми функциями n , или же функциями индекса (указателя), рассматривая целочисленную независимую переменную — как номер или индекс (указатель). Мы лучше всего поймем смысл этого понятия, рассмотрев несколько примеров.

¹⁾ Ср. стр. 59.

1. Сумма n первых целых чисел

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

является функцией n . Точно так же сумма квадратов первых n целых чисел

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

тоже является функцией n ¹⁾.

2. Другими простыми теоретико-числовыми функциями являются выражения

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

или биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

при постоянном k .

3. Всякое целое положительное число, не являющееся простым числом, имеет известное число делителей, отличных от него и единицы, тогда как простые числа делятся только на 1 и на самих себя. Это число делителей данного числа n может рассматриваться как некоторая функция $T(n)$ от n . Для первых чисел натурального ряда эта теоретико-числовая функция задается следующей таблицей:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(n) =$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

4. Значительно более сложной теоретико-числовой функцией является число $A(n)$ простых чисел, меньших заданного числа n . Подробное

¹⁾ Между прочим, эта последняя сумма может быть при помощи следующего приема легко выражена через n посредством простого рационального выражения. Мы исходим из формулы

$$(v+1)^3 - v^3 = 3v^2 + 3v + 1.$$

Написав это равенство для значений $v=0, 1, 2 \dots n$ и сложив почленно, получаем

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1,$$

откуда, вставляя значение S_1 , получаем:

$$3S_2 = (n+1) \left\{ (n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n \right\} = (n+1) \left(n^2 + \frac{1}{2}n \right)$$

и следовательно

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

исследование этой функции является одной из интереснейших и привлекательнейших проблем высшей теории чисел. Я ограничусь здесь только тем, что приведу основной результат этих исследований, заключающийся в том, что для больших значений n функция $A(n)$ приближенно выражается функцией

$$\frac{n}{\log n}, ^1).$$

где под $\log n$ подразумевается логарифм при „натуральном основании“ e , определение которого будет нами дано позже (ср. главу III, § 6).

§ 5. Понятие предела последовательности чисел.

Примеры.

Последовательностью чисел называется совокупность бесконечно-большого числа следующих друг за другом чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

заданных при помощи какого-нибудь закона, определяющего a_n как функцию целочисленной переменной n . Разберем сначала несколько примеров.

1. $a_n = \frac{1}{n}$. Рассмотрим последовательность чисел:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots, a_n = \frac{1}{n}, \dots$$

Все числа этой последовательности отличны от нуля, однако чем больший индекс (указатель) n мы берем, тем меньше число a_n отличается от нуля. Если мы поэтому окружим нуль каким-угодно интервалом, то как бы мал этот интервал ни был, все числа a_n рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого n , попадают в этот интервал. Мы выражаем это свойство данной последовательности, говоря, что числа a_n при возрастании n стремятся к нулю или имеют своим пределом (limit) нуль или же что последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ сходится к пределу нуль.

При помощи совершенно аналогичного приема можно представить в виде рациональных функций от n теоретико-числовые функции:

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

$$S_1(n) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1.$$

$$\dots \dots \dots$$

¹⁾ Т. е. частное от деления числа $A(n)$ на число $\frac{n}{\log n}$ при достаточно больших значениях n сколь-угодно мало отличается от единицы.

Наглядно это означает, что если изображать числа точками числовой прямой, то точки $\frac{1}{n}$ при возрастании n все плотнее и плотнее накапливаются у предельной точки нуль.

Совершенно таким же образом ведут себя числа последовательности:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{-1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{-1}{4}, \dots, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \dots$$

Здесь также числа a_n при возрастании n стремятся к нулю; разница заключается только в том, что эти числа попеременно то больше, то меньше своего предела, или, что они, как говорят, колеблются вокруг своего предела то в одну, то в другую сторону. Символически сходимость последовательности чисел к нулю выражается равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

или иногда обозначается сокращенно так:

$$a_n \rightarrow 0.$$

Буквы $\lim$ являются сокращением слова *limes* (предел).

2. $a_{2m} = \frac{1}{m}$; $a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$. В предыдущих примерах абсолютная величина разности между a_n и его пределом при возрастании n постоянно убывала. Что это условие необязательно, показывает пример последовательности чисел:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{6}, a_6 = \frac{1}{3}, a_7 = \frac{1}{8} \dots,$$

т. е. такой последовательности, в которой для четного $n = 2m$ число

$$a_n = a_{2m} = \frac{1}{m},$$

а для нечетного $n = 2m - 1$ число

$$a_n = a_{2m-1} = \frac{1}{2m}.$$

Эта последовательность также имеет определенный предел, а именно нуль, т. е., начиная с некоторого n , все числа a_n попадают внутрь любого, сколь угодно малого интервала, окружающего нуль, но при этом уже не выполняется вышеупомянутое условие, что всякое число последовательности ближе к пределу нуль, чем предшествующее ему число.

3. $a_n = \frac{n}{n+1}$. Рассмотрим последовательность чисел:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3} \dots a_n = \frac{n}{n+1} \dots$$

где целочисленный индекс n пробегает все значения 1, 2, 3... Представив a_n в виде

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

мы непосредственно убеждаемся в том, что при возрастании n число a_n все более приближается к пределу 1 в том смысле, что, начиная с известного индекса N все числа a_n , индекс n которых превосходит N , попадают внутрь любого, наперед заданного сколь-угодно малого интервала, окружающего число 1.

То же самое имеет место например для последовательности

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}.$$

Эта последовательность при возрастании n также имеет определенный предел, а именно число 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1;$$

в этом можно убедиться например так: напомним

$$a_n = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} = 1 - r_n$$

и нам достаточно будет показать, что при возрастании n числа r_n стремятся к нулю. В самом деле, при значениях n больших числа 2 имеют место неравенства $n+2 < 2n$ и $n^2+n+1 > n^2$, откуда

$$0 < r_n < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \quad (n > 2),$$

и отсюда непосредственно следует, что этот остаток r_n при возрастании n стремится к нулю. Наше рассуждение дает нам вместе с тем возможность оценить, насколько число a_n может в самом неблагоприятном случае отклониться от своего предела 1; это отклонение наверное не может быть больше чем $\frac{2}{n}$.

Только что рассмотренный пример перехода к пределу указывает нам на следующий сам по себе почти очевидный факт: если a_n представлено в виде дроби, то при больших значениях n высшие члены числителя и знаменателя играют преобладающую роль, и величина дроби зависит главным образом от них.

4. $a_n = \sqrt[n]{p}$. Пусть p некоторое положительное число. Рассмотрим, последовательность чисел:

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

где

$$a_n = \sqrt[n]{p}.$$

Мы утверждаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

Чтобы это доказать, проще всего опереться на следующее вспомогательное предложение, которое само по себе оказывается полезным также и для других целей.

Если h есть некоторое положительное число, то

$$(1+h)^n > 1 + nh, \quad (n > 1). \quad (1)$$

Доказательство этого вспомогательного предложения непосредственно следует из разложения бинома Ньютона

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 + \dots,$$

так как все члены правой части этого равенства положительны¹⁾. Из бинома Ньютона вытекает впрочем еще одно полезное вспомогательное неравенство для положительного h :

$$(1+h)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} h^2,$$

из которого при $n \geq 3$ следует

$$(1+h)^n > \frac{n^2}{4} h^2 \quad (2)$$

(ибо тогда $n-1$ больше чем $\frac{n}{2}$).

¹⁾ Если бы мы не захотели предположить известным бином Ньютона, то мы могли бы вышеприведенное неравенство доказать так: допустим, что неравенство

$$(1+h)^m > 1 + mh$$

уже доказано для некоторого значения m ; умножим тогда правую и левую части этого неравенства на $1+h$; получаем

$$(1+h)^{m+1} > (1+mh)(1+h) = 1 + (m+1)h + mh^2.$$

Отбрасывая справа положительную величину mh^2 , мы получаем наше неравенство для показателя $m+1$; так как это неравенство справедливо для значения показателя $m=2$, то оно, стало быть, сохраняя свою справедливость и для показателя $m=3$, а потому и для показателя $m=4$ и т. д., следовательно оно справедливо для любого значения показателя.

Мы рассмотрим отдельно два случая: когда $p > 1$ и когда $p < 1$ (если $p = 1$, то $\sqrt[n]{p}$ для всех значений n сам равняется единице, и наше утверждение является тривиальным).

Допустим сначала, что $p > 1$; тогда и $\sqrt[n]{p} > 1$; положим

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n,$$

где h_n — положительная величина, зависящая от n . Ввиду вышеприведенного неравенства (1) мы получаем

$$p = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n,$$

откуда непосредственно следует, что

$$0 < h_n < \frac{p-1}{n}.$$

Мы убеждаемся следовательно, что при возрастании n величина h_n стремится к нулю, что и доказывает сходимость величин a_n к пределу 1. Вместе с тем получается оценка степени приближения к пределу 1 при соответственном выборе n ; именно отклонение числа a_n от 1 на верное не превосходит $\frac{p-1}{n}$.

Если $p < 1$, то и $\sqrt[n]{p}$ тоже меньше единицы, а потому мы можем положить

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1 + h_n},$$

где h_n — положительное число. Тогда мы получаем, принимая опять во внимание наше неравенство (1),

$$p = \frac{1}{(1 + h_n)^n} < \frac{1}{1 + nh_n}.$$

(Уменьшая знаменатель, мы дробь увеличиваем.)

Отсюда следует

$$1 + nh_n < \frac{1}{p}$$

и

$$h_n < \frac{\frac{1}{p} - 1}{n},$$

так что опять получается, что при возрастании n величина h_n стремится к нулю, и наше утверждение доказано полностью.

5. $a_n = a^n$. Рассмотрим теперь последовательность чисел $a_n = a^n$, где a — постоянная, а n пробегает ряд положительных чисел.

Если a — положительное число, меньшее единицы, то мы можем положить $a = \frac{1}{1+h}$ с положительным h , и мы получаем, снова пользуясь неравенством (1),

$$a^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}.$$

Так как h зависит здесь только от a , т. е. остается постоянным при изменении n , то и $\frac{1}{h}$ остается неизменным, и мы заключаем из этого неравенства, что при возрастании n величина a^n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad (0 < a < 1)$$

Это соотношение остается справедливым и для отрицательного a , если только a больше чем -1 . Мы убеждаемся в этом сразу, так как во всяком случае при $|a| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$. Если $a = 1$, то очевидно

a^n всегда равно 1, и мы поэтому должны в качестве предела a^n рассматривать число 1. Если $a > 1$, то мы полагаем $a = 1+h$ с положительным h и мы непосредственно заключаем из нашего неравенства, что при возрастании n величина a^n не стремится ни к какому определенному пределу, но неограниченно растет. Мы выражаем этот факт, говоря, что при возрастании n величина a^n стремится к бесконечности или обращается в бесконечность; символически мы пишем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \quad (a > 1).$$

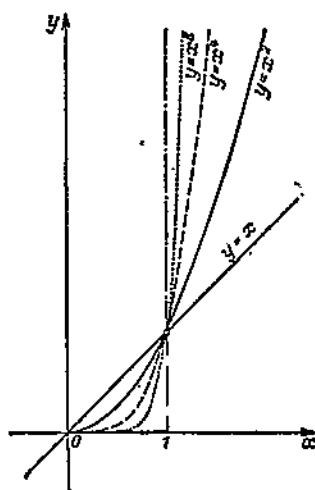
При этом мы должны однако подчеркнуть, что символ ∞ ни в коем случае не может быть рассматриваем как число, над которым можно производить действия так же, как и над другими числами; равенства или утверждения, выражающие, что какая-нибудь величина обращается в бесконечность, никогда не носят характера равенств между двумя определенными числами. Тем не менее такой способ выражения и символ ∞ являются чрезвычайно удобными, как мы еще не раз увидим в дальнейшем.

Если $a = -1$, то a^n не стремится ни к какому определенному пределу, но когда n пробегает ряд 1, 2, 3, ..., величина a^n делает постоянно прыжки от -1 к $+1$ и обратно. Точно так же если $a < -1$, то хотя и абсолютная величина a^n неограниченно растет, но при этом a^n само делается попеременно то положительным, то отрицательным.

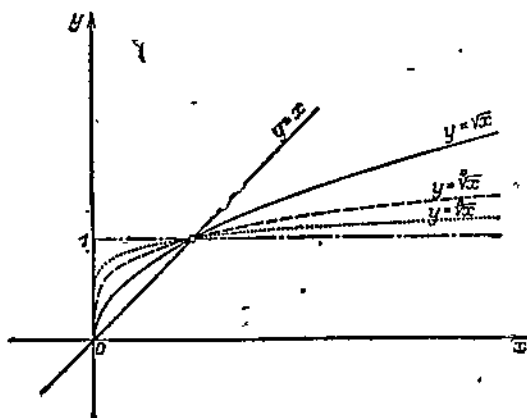
6. Геометрическая интерпретация пределов a^n и $\sqrt[n]{p}$. Рассмотрим кривые $y=x^n$ и соответственно кривые

$$y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$$

и ограничимся при этом удобства ради неотрицательными значениями x . Тогда черт. 16 и 17 наглядно изображают соответственные переходы к пределу. Как видно из чертежа, кривые $y=x^n$ в интервале от нуля до единицы с возрастанием n приближаются все больше и больше



Черт. 16.



Черт. 17.

к оси x , тогда как вне этого интервала они поднимаются все круче и круче и идут в направлении, все более и более параллельном оси y .

Однако все эти кривые проходят через точку с координатами $x=1$, $y=1$ и через начало координат. У кривых же

$$y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$$

значение функции y для всех положительных значений x приближается все больше и больше к единице, так что кривые приближаются все больше и больше к прямой, параллельной оси x , отстоящей от этой последней на расстоянии, равном единице; с другой стороны, все эти кривые должны проходить через начало координат.

Следовательно эти кривые имеют своим предельным положением логаню линию, состоящую из отрезка оси y между ординатами $y=0$ и $y=1$, с одной стороны, и прямой $y=1$, параллельной оси x , — с другой.

Между обоими чертежами существует впрочем теснейшая связь в соответствии с тем, что функции $y = \sqrt[n]{x}$ являются как раз обратными функциями n -х степеней. Из этого мы можем заключить, что обе фигуры переходят друг в друга перегибанием вокруг прямой $y = x$.

7. Геометрическая прогрессия. Уже со средней школы вам более или менее знаком переход к пределу, связанный с вычислением суммы геометрической прогрессии (геометрического ряда):

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = S_n$$

(где число q называется знаменателем прогрессии).

Эта сумма при $q \neq 1$, как известно, может быть выражена следующей формулой:

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

в чем легко убедиться, умножая написанную выше сумму S_n на q и вычитая получающееся этим путем равенство из первоначального.

Возникает вопрос, во что превращается эта сумма, когда n неограниченно возрастает. Ответ гласит: если q заключено между -1 и $+1$, исключая границы, то сумма S_n имеет вполне определенный предел S , а именно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{1 - q}.$$

Чтобы в этом убедиться, напомним числа S_n в форме

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Но мы показали уже раньше, что при условии $|q| < 1$ величина q^n , а следовательно и $\frac{q^n}{1 - q}$ с возрастанием n стремится к нулю, откуда непосредственно следует, что при выполнении этого условия число S_n при возрастании n имеет пределом $\frac{1}{1 - q}$.

Переход к пределу

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n \rightarrow \frac{1}{1 - q}$$

выражают обычно следующим образом.

Геометрический ряд может быть при $|q| < 1$ продолжен до бесконечности, и суммой этого бесконечного геометрического ряда является выражение $\frac{1}{1 - q}$.

Суммы S_n конечного геометрического ряда называют частичными (или конечными) суммами бесконечного геометрического ряда $1 + q + q^2 + \dots$

Частичные суммы $S_1, S_2, S_3, \dots$ образуют последовательность чисел, которую следует строго отличать от ряда

$$1 + q + q^2 + \dots$$

Тот факт, что конечные суммы S_n геометрической прогрессии при возрастании n сходятся к числу

$$S = \frac{1}{1-q},$$

можно выразить также и следующим образом: бесконечный ряд $1 + q + q^2 + \dots$ сходится при $|q| < 1$ к сумме

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

8. $a_n = \sqrt[n]{n}$. Мы хотим доказать, что последовательность чисел

$$a_1 = 1, a_2 = \sqrt[2]{2}, a_3 = \sqrt[3]{3} \dots a_n = \sqrt[n]{n}$$

при возрастании n стремится к единице:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Неравенство (1), которым мы пользовались на стр. 23, для рассматриваемого теперь случая уже является недостаточным, и нам приходится применить неравенство (2), стр. 23, предполагая при этом заранее, что $n \geq 3$. Во всяком случае мы можем положить

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,$$

где h_n означает некоторое зависящее от n положительное число; тогда мы получаем, на основании неравенства (2),

$$n = (1 + h_n)^n > \frac{n^2}{4} h_n^2 (n \geq 3),$$

откуда

$$h_n^2 < 4 \cdot \frac{n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

Следовательно

$$0 < h_n < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

а потому при возрастании n величина h_n стремится к нулю, что и доказывает наше утверждение.

9. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Я утверждаю, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно подлежащее исследованию выражение представить так:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Отсюда мы сразу видим, что это выражение при возрастании n стремится к нулю.

10. $a_n = \frac{n}{2^n}$. Я утверждаю, что при возрастании n последовательность чисел

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

имеет своим пределом нуль

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Для доказательства мы должны только обратить внимание на то, что при $n \geq 3$ согласно оценке

$$2^n = (1+1)^n > \frac{1}{4} n^2,$$

откуда

$$a_n = \frac{n}{2^n} < \frac{4}{n};$$

следовательно наша последовательность имеет пределом нуль.

§ 6. Более подробное исследование понятия предела.

1. Общие положения. Обобщая рассмотренные в предыдущем параграфе примеры, мы приходим к следующему общему определению понятия предела:

Если задана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

и если существует такое число g , что в любом сколь угодно малом интервале, окружающем g , содержатся почти все числа a_n , за исключением, быть может, некоторого, но в всяком случае конечного числа их, то мы говорим, что число g является пределом последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

или что последовательность $a_1, a_2, \dots$ сходится к пределу g ¹⁾. При этом необходимо подчеркнуть, что в это общее определение входит также и тот тривиальный случай, когда все числа a_n между собой равны и следовательно совпадают со своим пределом g .

Во всех предыдущих примерах дело обстоит так, что пределом рассматриваемой последовательности являлось уже известное нам число. Однако, если бы введение понятия предела не дало бы нам ничего другого, кроме возможности приближенно вычислять с какой-угодно точностью некоторые известные нам числа при помощи последовательности других известных нам чисел, то мы извлекли бы из этого понятия не очень большую пользу. Понятие предела оказалось одним из плодотворнейших понятий анализа, главным образом потому, что мы можем в качестве пределов известных нам чисел получать числа еще нам неизвестные и которые другим путем не могут быть непосредственно выражены.

Весь высший анализ представляет собой сплошную цепь примеров, подтверждающих этот факт, который на протяжении настоящего курса будет выступать все с большей и большей ясностью. В качестве первого примера можно привести представление иррациональных чисел в виде пределов рациональных чисел. С другими примерами мы познакомимся уже в настоящем параграфе. Прежде чем к этому перейти, мы предположим несколько замечаний общего характера.

Каким путем можно наперед убедиться в том, что заданная последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

стремится к некоторому определенному пределу g , если при этом мы не имеем возможности задать заранее само значение этого предела g ? Ответом на этот вопрос служит критерий сходимости Коши (Cauchy), гласящий так:

Пусть в последовательности чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

выражение $|a_n - a_m|$ становится меньше любого сколь угодно малого числа ε , как только оба числа n и m становятся достаточно большими, например больше некоторого, вообще говоря, зависящего от ε числа $N = N(\varepsilon)$. Тогда из этого условия вытекает существование предела

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

¹⁾ Вместо выражения „за исключением конечного числа“ мы могли бы так же сказать: „начиная с некоторого значения индекса n “.

Значение этого признака сходимости Коши заключается в том, что, пользуясь им, мы можем говорить о пределе некоторой последовательности, основываясь исключительно на рассмотрении данной последовательности чисел самой по себе, не будучи вынужденными определить заранее предел последовательности каким-нибудь другим путем.

То, что, обратно, из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ вытекает соотношение $|a_n - a_m| \rightarrow 0$, следует непосредственно из определения понятия предела, ибо, если последовательность чисел $a_1, a_2, a_3 \dots$ стремится к пределу g , то при достаточно больших значениях n и m

$$|g - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|g - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|a_n - a_m| = |(g - a_m) - (g - a_n)| \leq |g - a_m| + |g - a_n| < \varepsilon,$$

и это неравенство, в котором ε может быть взято сколь угодно малым, выражает высказанное нами предложение.

Устанавливаемый признаком Коши факт становится чрезвычайно простым и почти непосредственно очевидным, если представить себе числа изображенными точками числовой прямой. Признак Коши тогда сводится к следующему предложению.

Последовательность сходится, если, начиная с некоторого N , числа этой последовательности могут изменяться только в очень небольшом промежутке, который может быть сделан сколь угодно малым, если выбрать N достаточно большим. Строгий вывод признака Коши будет нами дан в дополнениях к настоящей главе, §§ 1 и 2; пока мы ограничимся этим наглядным рассуждением.

Вопрос о сходимости заданной последовательности к некоторому пределу решается особенно просто, если последовательность является так называемой монотонной последовательностью, т. е. такой, в которой каждое число последовательности либо всегда больше предшествующего (монотонно возрастающая последовательность), либо всегда меньше предшествующего (монотонно убывающая последовательность). В этом случае имеет место следующее положение:

Всякая монотонно возрастающая последовательность, в которой все числа ограничены сверху, т. е. меньше некоторой постоянной верхней грани M , имеет определенный предел; точно так же и всякая монотонно

убывающая последовательность, в которой все числа не могут опуститься ниже некоторой постоянной нижней грани m , сходится к определенному пределу.

Эти два предложения мы также будем пока считать наглядно очевидными и дадим их строгое доказательство лишь в дополнениях к настоящей главе.

Сходящаяся монотонно возрастающая последовательность может, разумеется, иметь пределом только число, превосходящее все числа последовательности, а монотонно убывающие последовательности могут сходиться только к числам, меньшим любого числа последовательности.

Так например числа $\frac{1}{n}$ образуют монотонно убывающую последовательность с пределом 0, а числа $1 - \frac{1}{n}$ — монотонно возрастающую последовательность с пределом 1.

В некоторых случаях удобно заменить требование монотонного возрастания последовательности более слабым требованием, чтобы члены последовательности во всяком случае не убывали, т. е., другими словами, допустить возможность равенства между двумя последовательными членами последовательности. В этом случае говорят о монотонной неубывающей последовательности или же о монотонно возрастающей последовательности в слабом смысле. Наше предложение о существовании предела сохраняет свою справедливость и для подобных последовательностей, равно как и для монотонных невозрастающих последовательностей или последовательностей монотонно убывающих в слабом смысле.

Полезно обратить внимание на то, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной, т. е. для всякой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, имеющей пределом ξ , существует независимое от n положительное число M , такое, что для всех чисел a_n последовательности имеет место неравенство

$$|a_n| < M.$$

Это предложение очень просто вытекает из наших определений: в самом деле, несомненно существует такой индекс N , что при $n > N$ всегда

$$|a_n - \xi| < 1.$$

Пусть A означает наибольшее из чисел

$$|a_1 - \xi|, |a_2 - \xi|, \dots, |a_N - \xi|.$$

Тогда мы можем положить

$$M = |\xi| + A + 1.$$

Действительно согласно определению числа A безусловно имеет место неравенство

$$|a_n - \xi| < A + 1$$

при $n = 1, 2, 3 \dots N$, тогда как при $n > N$

$$|a_n - \xi| < 1 \leq A + 1.$$

Несходящаяся последовательность называется расходящейся. Если числа a_n с возрастанием n неограниченно растут в положительном направлении, то мы говорим, что последовательность расходится и стремится к $+\infty$, и пишем, как мы уж раньше писали, $\lim a_n = \infty$. Соответственно мы пишем $\lim a_n = -\infty$, если при возрастании n числа $-a_n$ неограниченно растут в положительном направлении. Однако расходимость последовательности может иметь и другой характер, как например для последовательности

$$a_1 = -1, a_2 = +1, a_3 = -1, a_4 = +1 \dots,$$

члены которой постоянно делают скачки от одного из двух данных значений к другому.

2. Действия над пределами. Наконец сделаем еще одно замечание относительно действий над пределами. Из понятия предела вытекает почти непосредственно, что элементарные арифметические действия сложения, умножения, вычитания и деления производятся над пределами согласно следующим правилам.

Если $a_1, a_2, \dots$ есть последовательность с пределом a , а $b_1, b_2, \dots$ — последовательность с пределом b , то для последовательности чисел

$$c_n = a_n + b_n$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + b.$$

Для последовательности чисел $c_n = a_n b_n$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = ab.$$

Если предел b отличен от нуля, то для последовательности

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{a}{b}.$$

Иными словами, рациональные арифметические действия переместительны относительно операции перехода к пределу, т. е. мы прихо-

дим к тому же самому результату, совершаем ли мы сначала переход к пределу и затем производим рациональные действия или поступаем наоборот.

Для вывода этих простых правил действий достаточно рассмотреть одно из них в качестве примера, по образцу которого читатель легко сможет сам себе уяснить остальные случаи. Рассмотрим например умножение пределов. Соотношения $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ означают следующее: если мы задаем любую сколь угодно малую величину ϵ , то достаточно взять n больше, чем N , где $N = N(\epsilon)$ некоторое зависящее от ϵ достаточно большое число, чтобы безусловно имели место неравенства $|a - a_n| < \epsilon$, а также $|b - b_n| < \epsilon$. Напишем тождество:

$$ab - a_n b_n = b(a - a_n) + a_n(b - b_n).$$

Так как обязательно должна существовать такая независящая от n положительная грань M , что $|a_n| < M$, то получаем:

$$|ab - a_n b_n| < |b| |a - a_n| + |a_n| |b - b_n| < (|b| + M)\epsilon.$$

Так как величина $(|b| + M)\epsilon$ стремится вместе с ϵ к нулю, т. е. становится сколь угодно малой, если только ϵ само выбрано достаточно малым, то отсюда следует, что при достаточно большом n числа $a_n b_n = c_n$ и $ab = c$ действительно сколь угодно мало отличаются друг от друга; но в этом как раз и заключается содержащееся в равенстве $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ утверждение.

На основании этих правил можно очень просто вычислить пределы многих выражений, например

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1,$$

так как мы можем во втором выражении перейти к пределу в числителе и в знаменателе в отдельности.

Еще одно простое и само собой разумеющееся правило заслуживает особой формулировки.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и если $a_n > b_n$ для любого n , то безусловно имеет место неравенство $a \geq b$. Однако мы ни в коем случае не должны думать, что всегда будет иметь место неравенство $a > b$, в чем например мы можем убедиться, рассматривая обе последовательности

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{2n},$$

для которых

$$a = b = 0.$$

Мы рассмотрим теперь несколько новых важных примеров, с тем чтобы на них подробнее разъяснить вышеназложенный общий принцип.

3. Число e . В качестве первого примера построения путем предельного перехода нового, предварительно не данного числа, мы рассмотрим сумму

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Я утверждаю, что это число S_n при возрастании n стремится к определенному пределу.

Чтобы доказать существование этого предела, заметим, что числа S_n при возрастании n монотонно возрастают. С другой стороны, для любого n имеет место неравенство

$$S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Следовательно числа S_n имеют верхнюю грань 3 и образуют, стало быть, ограниченную сверху и монотонно возрастающую последовательность, которая поэтому сходится к определенному пределу. Мы обозначаем этот предел через e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Я утверждаю далее, что к этому числу e , определенному посредством только что рассмотренного перехода к пределу, сходится также последовательность чисел

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Тождественность этих двух пределов доказывается следующим очень простым и вместе с тем поучительным способом — характерным примером оперирования с пределами.

Согласно биному Ньютона, который я здесь хочу предполагать известным,

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что, во-первых, $T_n < S_n$, а, во-вторых, T_n образуют монотонно-возрастающую последовательность¹⁾, откуда следует существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$. Чтобы доказать равенство $T = e$, заметим, что во всяком случае

$$T_m > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$$

для значений $m > n$. Не изменяя n , представим себе m неограниченно растущим; тогда левая часть неравенства имеет пределом T , а правая — как раз число S_n , откуда получаем

$$T \geq S_n.$$

Таким образом мы имеем

$$T \geq S_n \geq T_n.$$

Теперь мы начинаем изменять n , когда T_n стремится к T ; поэтому из только что написанного двойного неравенства следует сразу

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e,$$

в чем и состоит доказываемое нами предложение. Впрочем позже (глава III, § 6) мы будем приведены к этому же числу e еще с других точек зрения.

4. Число π как предел. Уже со средней школы читателю знаком тот по существу восходящий к классической древности процесс предельного перехода (принадлежащий Архимеду), при помощи которого определяется число π . Геометрическим значением числа π является площадь круга радиуса 1. Наше убеждение в существовании этого числа π основывается следовательно на том наглядно очевидном положении, что эта площадь может быть измерена при помощи некоторого (рационального или иррационального) числа, которое мы тогда просто обозначаем через π . Однако этим определением мы выигрываем очень мало, если мы хотим действительно вычислить это число с известной точностью. Чтобы произвести подобное вычисление, мы не можем поступить иначе, как представить это число посредством некоторого предельного процесса

¹⁾ В самом деле, T_{n+1} получается из T_n заменой множителей $1 - \frac{1}{n}$ $1 - \frac{2}{n}$, ..., большими множителями $1 - \frac{1}{n+1}$, $1 - \frac{2}{n+1}$, ... и прибавлением нового положительного последнего члена.

именно рассматривая его как предел последовательности хорошо известных и легко вычислимых чисел.

Уже Архимед в своем методе исчерпывания вступил на этот путь, исчерпывая все более и более круг при помощи правильных многоугольников с возрастающим числом сторон, все теснее и теснее прилегающих к окружности. Если обозначить через f_m площадь правильного вписанного в круг m -угольника, то площадь $2m$ -угольника выражается через f_m при помощи известной из элементарной математики формулы:

$$f_{2m} = \frac{m}{2} \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{2f_m}{m}\right)^2}}.$$

Заставляя m пробегать не ряд всех чисел, но только ряд степеней числа 2, $m = 2^n$, т. е. составив как раз тот ряд правильных многоугольников, вершины которых мы получаем путем последовательного деления пополам окружности, мы получим площадь круга в качестве предела

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2^n}$$

Это представление числа π в виде предела действительно дает средство для приближенного вычисления этого числа; мы можем в самом деле отправляясь от значения $f_4 = 2$, последовательно вычислять все большее и большее число членов этой последовательности, сходящейся к пределу π .

Все это — вещи более или менее уже известные читателю. Я хочу однако уже здесь указать на то, что этот способ вычисления площадей путем исчерпывания данной площади при помощи других, легко вычисляемых площадей, ограниченных ломаными линиями, лежит в основе понятия интеграла, которое нами будет изложено в следующей главе.

5. Арифметически-геометрическое среднее. Пусть α и β — два положительных числа, причем $\beta \leq \alpha$. Среднее арифметическое этих чисел всегда больше или равно их среднему геометрическому, т. е. всегда имеет место неравенство

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta},$$

причем знак равенства можно поставить только тогда, когда $\alpha = \beta$. Доказательством этого утверждения служит замечание, что

$$\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$$

в качестве квадрата не может быть отрицательным и обращается в нуль только при $\alpha = \beta$.

Положим $\alpha = a_0$, $\beta = b_0$, где $a_0 > b_0 > 0$, и снова образуем среднее арифметическое

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

и среднее геометрическое

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0}.$$

Очевидно $b_0 < b_1 < a_1 < a_0$. образуем опять как среднее арифметическое, так и среднее геометрическое чисел a_1 и b_1 :

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

так что

$$b_0 < b_1 < b_2 < a_2 < a_1 < a_0,$$

и затем снова

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},$$

и т. д.

Мы сразу убеждаемся в том, что последовательность a_n удовлетворяет неравенствам:

$$a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > b_0,$$

а последовательность b_n — неравенствам:

$$b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots < a_0.$$

Следовательно a_n образуют монотонно убывающую, а b_n — монотонно возрастающую последовательность. Так как, с другой стороны, все эти числа заключены между границами b_0 и a_0 , то согласно нашим вышеизложенным рассуждениям пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

существуют.

Но легко убедиться в том, что A должно равняться B .

Действительно,

$$\begin{aligned} A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1}) = \\ &= \frac{A}{2} + \frac{B}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$A = B.$$

Этот общий предел обеих последовательностей называется арифметически-геометрическим средним чисел a_0 и b_0 .

§ 7. Понятие предела непрерывной переменной.

Мы рассматривали до сих пор пределы последовательностей чисел, т. е. функций a_n целочисленной переменной n .

Однако часто понятие предела возникает также и в связи с понятием непрерывной переменной x и функции $f(x)$ при постановке следующего вопроса.

Представим себе функцию изображенной посредством кривой и точку с абсциссой x , перемещающейся по кривой так, что абсцисса приближается все более и более к некоторому определенному числу ξ , — при этом движущаяся точка может также колебаться то в одну, то в другую сторону. Тогда может случиться, что и значение функции $f(x)$ стремится к определенному пределу. Чтобы точно формулировать подобный предельный переход, мы его следующим образом приводим к вычислению пределов числовых последовательностей. Если x есть непрерывно изменяющаяся величина и ξ некоторое определенное число, то мы говорим, что x стремится к ξ , или, символически обозначая, $x \rightarrow \xi$, если x пробегает последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, которые все отличны от ξ и для которых имеет место соотношение $x_n \rightarrow \xi$. При этом совершенно безразлично, стремится ли последовательность x_n к ξ монотонно справа или монотонно слева или же она колеблется вокруг числа ξ . Пусть $f(x)$ — некоторая функция непрерывной переменной x . Мы говорим, что при $x \rightarrow \xi$ значение функции $f(x)$ стремится к пределу g или, символически обозначая

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = g,$$

если выполнено следующее условие. Для каждой из наших последовательностей $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ должен существовать предел последовательности чисел $f(x_n)$ и этот предел g должен быть независимым от специального выбора последовательности x_n ¹⁾.

1) Это второе требование впрочем является следствием первого, т. е. если для каждой последовательности чисел x_n , для которой $x_n \rightarrow \xi$, существует предел $g = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x_n)$, то этот предел один и тот же для всех этих последовательностей. Пусть в самом деле x'_n — вторая последовательность, для которой $x'_n \rightarrow \xi$ и $\lim f(x'_n) = g'$, тогда и последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots,$$

также стремится к ξ , а потому, согласно предположению, существует предел g'' последовательности

$$f(x_1), f(x'_1), \dots, f(x_n), f(x'_n) \dots$$

Так как для достаточно больших значений n этот предел должен сколь угодно мало отличаться как от $f(x_n)$, так и от $f(x'_n)$, то он должен совпадать как с g , так и с g' , откуда следует, что $g = g'$, что и требовалось доказать.

Другой равносильной этому формулировкой является следующая.

Если окружить точку g произвольным сколь угодно малым интервалом, то все значения функции $f(x)$ попадают внутрь этого интервала, если только точка x , отличная от ξ , находится достаточно близко от ξ , т. е. если x лежит внутри некоторого интервала, окружающего точку ξ . При этом длина этого последнего интервала может еще зависеть от заданного интервала, окружающего точку g , и, вообще говоря, становится тем меньше, чем меньше этот последний.

Поясним это абстрактное определение на нескольких простых примерах.

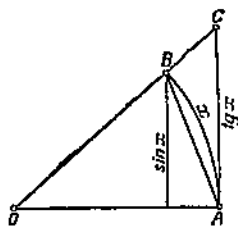
Рассмотрим сначала функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Мы утверждаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Мы не можем доказать этого, переходя к пределу в числителе и в знаменателе в отдельности, так как при $x=0$ числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль, а символ $\frac{0}{0}$ сам по себе не имеет никакого смысла. Мы поступаем поэтому для вывода выше-написанного предельного равенства следующим образом.



Черт. 18.

Из черт. 18 мы получаем путем сравнения площадей треугольников OAB и OAC с площадью сектора OAB неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

откуда следует

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Таким образом дробь $\frac{\sin x}{x}$ заключается между границами 1 и $\cos x$. При $x \rightarrow 0$ функция $\cos x$, как известно, стремится к единице, откуда непосредственно следует, что дробь $\frac{\sin x}{x}$ должна отличаться от 1 сколь угодно мало, если только x достаточно близко к нулю; в этом именно и заключается содержание того предельного равенства, которое мы доказываем.

Из доказанного равенства следует соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

а также другое:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Последнее получается проще всего, если мы напишем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \sin x. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow 0$ первый множитель правой части стремится к единице, второй — к $\frac{1}{2}$, а третий — к нулю, следовательно произведение стремится к нулю согласно нашему утверждению.

В заключение этого рассмотрения предельных переходов для непрерывной переменной заметим, что мы можем, разумеется, рассматривать и такие предельные переходы, при которых непрерывная переменная x неограниченно возрастает. Так например само собою понятным является смысл следующей записи:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Это соотношение означает, что выражение слева сколь угодно мало отличается от единицы, если x выбрано достаточно большим.

§ 8. Понятие непрерывности.

1. Определения. Понятие непрерывности нами уже было разъяснено на отдельных примерах в § 2. Теперь мы имеем возможность дать вполне точное определение этого понятия, опираясь при этом на понятие предела.

Геометрическим изображением непрерывной в некотором интервале функции являлась для нас построенная над этим интервалом кривая, состоящая из целого, нигде не прерывающегося куска; мы сказали также, что изменение функции y должно оставаться сколь угодно малым, если только изменение независимой переменной x ограничивается достаточно малым интервалом. Это свойство обыкновенно формулируется следующим, несколько громоздким, но зато более точным образом. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке ξ , если она обладает следующим свойством: значение функции $f(\xi)$ в точке ξ может быть с какой угодно

точностью ε приближенно выражено через любое другое значение функции $f(x)$, если только x находится достаточно близко от точки ξ ; т. е., обозначая через ε любое сколь угодно малое положительное число, мы можем определить такое соответствующее ε число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех точек x , для которых $|x - \xi| < \delta$, имеет место такое неравенство

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Иными словами, требование непрерывности заключается в том, что в точке ξ должно иметь место предельное равенство

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Значение функции в точке ξ может быть рассматриваемо как предел значений функции в точках любой последовательности чисел, стремящихся к пределу ξ .

Очень важно обратить внимание на то, что наше требование является двойным: во-первых, требуется существование предела $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ и, во-вторых, совпадение этого предела с определенным в точке ξ значением функции $f(\xi)$.

Определив таким путем непрерывность функции в одной точке, мы говорим далее, что функция $f(x)$ называется непрерывной в некотором интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

2. Точки разрыва. Мы лучше уясним себе смысл понятия непрерывности, сопоставляя его с противоположным ему понятием — понятием прерывности. Простейший случай прерывности (или разрыва непрерывности) имеет место в тех точках, в которых функция делает скачок, т. е. в которых значения функции стремятся к определенным, но различным пределам, смотря по тому, приближаемся ли мы к месту скачка справа или слева. Каково при этом значение функции в самом месте скачка и определена ли вообще рассматриваемая функция в этом месте, не играет при этом роли. (Такие точки называются точками разрыва 1-го рода.) Так например функция, определенная равенствами:

$$f(x) = 0 \quad \text{при } x^2 > 1,$$

$$f(x) = 1 \quad \text{при } x^2 < 1$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{при } x^2 = 1$$

имеет точки разрыва при $\xi = 1$ и $\xi = -1$.

Правое и левое предельные значения этой функции при приближении к каждой из точек разрыва отличаются друг от друга на единицу (при-

чем сами значения функции не совпадают ни с одним из этих пределов, но равняются их среднему арифметическому).

Заметим, между прочим, что, пользуясь понятием предела, можно выразить эту функцию формулой:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

В самом деле, при $x^2 < 1$, т. е. если x лежит в интервале

$$-1 < x < 1,$$

x^{2n} стремится к пределу 0, и функ-

ция $f(x)$ имеет поэтому здесь

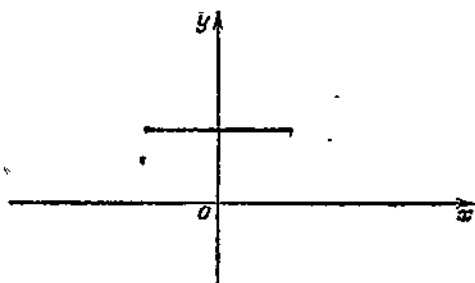
значение 1. Если же $x^2 > 1$, то x^{2n} неограниченно растет, и наша функция имеет значение 0.

Наконец при $x^2 = 1$, т. е. при $x = +1$ и $x = -1$, значение функции равняется $\frac{1}{2}$ (ср. черт. 19).

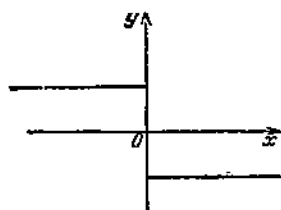
Другие скачкообразно прерывающиеся кривые показаны на черт. 20а и 20б и изображают функции прерывные в соответствующих точках.

Но кроме точек разрыва 1-го рода, в которых существуют как предельное значение функции справа, так и ее предельное значение слева, могут быть и такого рода точки разрыва, в которых эти требования не выполняются. Важнейшими точками разрыва такого рода являются точки бесконечности. В этих точках, как например при $\xi = 0$ для функции $\frac{1}{x}$ или для функции $\frac{1}{x^2}$, значение функции совсем не определено и при $x \rightarrow \xi$ абсолютное значение $|f(x)|$ неограниченно растет. У функции $\frac{1}{x}$ значения функции неограниченно

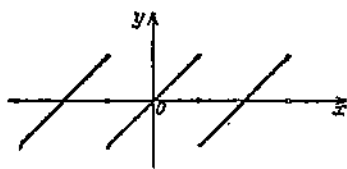
растут в положительном или отрицательном направлении, смотря по тому, приближается ли x к нулю справа или слева. Напротив, функция $y = \frac{1}{x^2}$ имеет при $x = 0$ такую точку бесконечности, в которой значение функции с обеих сторон становится положительно-бесконечным (ср. черт. 6 на стр. 11 и черт. 12 на стр. 16).



Черт. 19.



Черт. 20а.



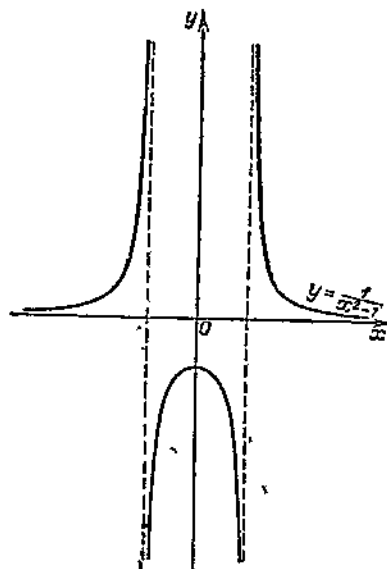
Черт. 20б.

Функция $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, изображенная на черт. 21, имеет две точки бесконечности: при $x = +1$ и при $x = -1$.

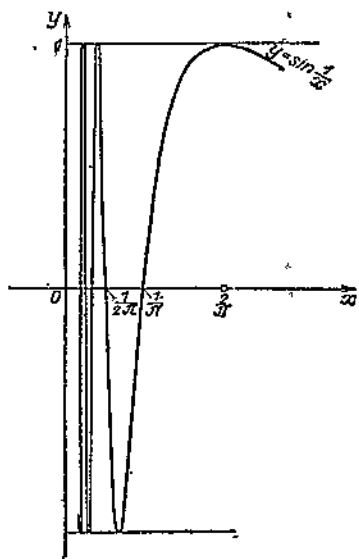
Наконец приведем пример еще одного типа прерывности, при котором не существует предельного значения функции справа или слева. Рассмотрим функцию

$$y = \sin \frac{1}{x}.$$

Эта функция принимает все значения между -1 и $+1$, когда число $\frac{1}{x}$



Черт. 21.



Черт. 22.

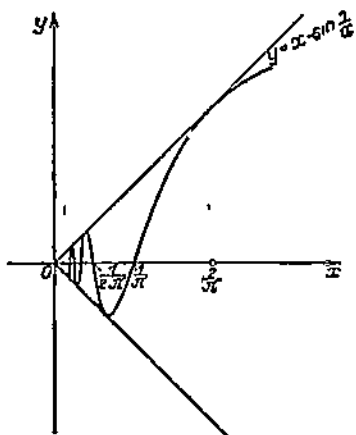
пробегает значения от $(2n - \frac{1}{2})\pi$ до $(2n + \frac{1}{2})\pi$, каково бы ни было целое число n . В точках $x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ функция имеет значение 1, а в точках $x = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ функция имеет значение -1 . Из этого видно, что по мере приближения к точке $x = 0$ функция все быстрее и быстрее колеблется между значениями -1 и $+1$, так что в окрестности точки $x = 0$ имеют место бесчисленные подобные колебания функции (ср. черт. 22). В самой же точке $x = 0$ функция совершенно не определена.

Интересно отметить, что, наоборот, функция $y = x \sin \frac{1}{x}$, изображение которой здесь приводится (черт. 23), в точке $x = 0$ остается

непрерывной, если приписать этой функции при $x=0$ значение нуль. Эта непрерывность достигается благодаря тому, что множитель x при приближении к нулю приводит к затуханию колебания синуса.

Однако эта функция $y = x \sin \frac{1}{x}$ вблизи точки $x=0$ уже не обладает свойством только конечное число раз попеременно сменять монотонное возрастание на монотонное убывание, напротив того, эта функция совершает бесчисленные колебания то в одну, то в другую сторону, хотя амплитуды этих колебаний при приближении к нулю становятся сколь угодно малыми. Этот пример показывает, что одно только свойство непрерывности еще оставляет целый ряд различных своеобразных возможностей, чуждых наивному наглядному представлению.

При всем том я хочу указать на одно обстоятельство, которое необходимо иметь в виду, если хотят впасть в понятия точное содержание. Может случиться, что какая-нибудь функция первоначально заданная законом соответствия не определена в какой-нибудь определенной точке, как например обе последние рассмотренные нами функции при $x=0$. В последнем примере мы смогли так дополнить заданную функцию добавочным определением ее значения в этой исключительной точке (а именно требованием, чтобы $y=0$ при $x=0$), что после этого дополнения функция оказалась непрерывной также и в этой точке. Чтобы подобное дополнение было возможным, достаточно, чтобы предельные значения функции справа и слева существовали и равнялись бы друг другу; положив тогда значение функции в этой точке равным соответствующему предельному значению, мы обеспечим непрерывность функции в этой точке. В предшествующем же примере



Черт. 23.

$y = \sin \frac{1}{x}$ это невозможно.

3. Теоремы о непрерывных функциях. В заключение приведем еще следующие важные общие положения, доказательство которых после сделанных нами на стр. 33 замечаний о действиях над пределами является очевидным:

Сумма и произведение двух непрерывных функций будут также непрерывные функции; частное двух непрерывных функций непрерывно всюду, где знаменатель отличен от нуля.

В частности из этого сразу вытекает непрерывность всех целых рациональных функций, а также всех дробных рациональных функций повсюду, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль. То, что и прочие элементарные функции, как например тригонометрические, также непрерывны, будет само собой вытекать из наших последующих рассуждений (ср. стр. 59 и стр. 83).

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ ПЕРВОЙ.

Предварительные замечания.

В греческой математике был последовательно проведен принцип логически связанного доказательства всех предложений путем сведения их к возможно меньшему числу не подлежащих более доказательству аксиом. Эта аксиоматическая форма изложения, являвшаяся в то же время пробным камнем для законченности исследования, была в новое время принята за образец и в других отраслях науки. Такие люди, как Декарт и Спинноза, старались придать своим исследованиям в области философии большую силу убедительности, облекая их в аксиоматическую или, как тогда говорили, „геометрическую“ форму.

В ином положении однако находилась новая математика, начавшая развиваться почти одновременно с новой философией. Математики нового времени очень скоро отказались во многих случаях от этого принципа аксиоматического охватывания всего материала, столь строго проводившегося в математике древности. Наглядная очевидность применительно к каждому частному случаю в отдельности стала главным орудием доказательства; даже у крупнейших исследователей этой эпохи встречается в известном смысле инстинктивное и не всегда свободное от некоторой примеси мистики оперирование с новыми понятиями (и в первую очередь со злополучным понятием „бесконечно малой величины“). Своего рода слепая вера во всемогущество новых методов исчисления толкнула исследователей идти в своих изысканиях такими путями, какими они никогда не смогли бы пойти, если бы подчинялись требованиям полной строгости. И неудивительно, что только их верный, гениальный инстинкт смог предохранить их от грубых ошибок.

И однако было большим счастьем для всего развития математики то, что обстоятельства сложились именно так и что противоположное, критическое направление в математике появилось только в XVIII столетии. Это течение, которое в XIX столетии постепенно завоевало господствующее положение в науке, взяло верх только в той стадии развития математики, когда оно уже не могло препятствовать этому развитию, но, наоборот, обосновывало достигнутые уже результаты и способствовало

получению новых. Но потребность в подобной критической разработке и обосновании достигнутого постепенно усилилась в такой степени, что полное удовлетворение этой потребности должно по праву считаться одним из крупнейших успехов математики XIX столетия.

Специально в отношении интегрального и дифференциального исчисления здесь следует в первую очередь назвать имя Коши. Безупречной и ясной формулировкой основных понятий Коши довел до конца начатое уже в XVIII столетии дело изложения высшего анализа в легко понятной форме, освобожденной от всех неясностей бесконечно малого, и достиг при этом законченности, ставшей во многих отношениях образцовой.

Задача, которую еще оставалось разрешить, заключалась в том, чтобы заменить при обосновании положений и методов наглядные рассуждения чисто аналитическими, опирающимися исключительно на понятие числа и на различные возможные операции над числами, или, как мы теперь сказали бы, задача арифметизации анализа. Действительно ссылки на геометрическую интуицию в доказательствах анализа не внушают доверия критически вышколенному уму. Даже не затрагивая вопроса о точности или неточности нашей интуиции вообще или о существовании „чистого наглядного представления а priori“, в смысле Канта, легко убедиться, что рассмотрение, основанное на непосредственной интуиции, содержит в себе слишком много неопределенного и уже в силу этого не должно иметь места в строгих доказательствах анализа. На протяжении настоящего курса мы ознакомимся с большим числом подтверждающих эту истину примеров. Но уже здесь я хотел бы указать например на то, как трудно наглядно представить себе понятие непрерывной кривой. Непрерывная кривая ни в коем случае не должна обязательно иметь в каждой точке определенное направление; напротив того, оказалось, что существуют кривые, которые ни в одной точке не имеют направления; точно так же существуют непрерывные кривые, для которых понятие кривизны нигде не имеет смысла, а также кривые, которым невозможно приписать какую-нибудь определенную длину.

Все эти факты должны показать и начинающему, насколько обоснованной является потребность в арифметизации анализа ¹⁾.

¹⁾ По существу необходимо иметь в виду, что строгие математические понятия представляют собой далеко идущую идеализацию тех представлений, к которым нас приводит наша интуиция. Поэтому вопросы полного обоснования математики не могут решаться путем ссылки на нашу интуицию. Значительная ясность в этих проблемах, касающихся основ математики, была достигнута лишь путем постепенного развития, идущего вплоть до наших дней и еще не достигшего окончательного завершения.

Тем не менее мы не должны забывать, что на протяжении столетий развитие математики происходило блестящим и в высшей степени успешным образом и без удовлетворения этой потребности в критическом обосновании. Несмотря на все нарекания, интуиция все же всегда является важнейшим движущим импульсом для математического творчества и только она перебрасывает мост от теории к практическим применениям.

Я перехожу теперь к тому, чтобы, опираясь на идеи Больцано и Вейерштрасса, изложить те рассуждения, которыми строго обосновываются и дополняются рассмотренные нами в первой главе теоремы, сформулированные там только путем ссылки на интуицию. В конце будут кроме того даны еще некоторые другие, с этим не связанные дополнения к главе первой.

§ 1. Принцип предельных точек и его применения.

1. Принцип предельных точек. В основу строгого обоснования анализа обыкновенно кладут принцип предельных точек Вейерштрасса, принцип, содержание которого является с точки зрения наивной интуиции самоочевидным, но который, кратко формулируя факт, встречающийся в анализе на каждом шагу, представляет большие удобства для постоянного его употребления наподобие мелкой разменной монеты в повседневном обиходе. Он гласит:

Если на конечном интервале задано бесконечное множество чисел, то эти числа имеют по крайней мере одну точку накопления ξ , т. е. существует по крайней мере одно число ξ такое, что любой сколь угодно малый интервал, окружающий точку ξ , еще содержит внутри себя бесконечно много заданных чисел.

Выражая это положение наглядно, можно сказать, что всякое бесконечное число точек конечного отрезка имеет по меньшей мере одну точку сгущения, в любой близости которой еще находится бесконечно много заданных точек.

Чтобы чисто арифметически доказать принцип предельных точек, допустим сначала, что заданный интервал есть интервал от 0 до 1. Разделим его на 10 равных частей точками $0,1; 0,2 \dots 0,9$. Тогда по крайней мере в одном из этих десяти частичных интервалов обязательно еще должно содержаться бесконечно много заданных чисел. Пусть этот частичный интервал или, если таких интервалов имеется несколько, то пусть один из них будет интервалом, прилегающим к числу 0, a_1 . Мы делим тогда этот интервал снова на 10 равных частей точками деления $0, a_11; 0, a_12; 0, a_13 \dots 0, a_19$ и заключаем снова, что по меньшей мере в одном из этих частичных интервалов должно обязательно содержаться

бесконечно много заданных чисел; пусть один такой частичный интервал примыкает к точке 0, $a_1 a_2$. Деля снова этот частичный интервал на 10 равных частей, повторяя наше умозаключение и продолжая таким же способом этот процесс дальше, мы получаем последовательность цифр $a_1, a_2, a_3, \dots$, из которых каждая лежит между 0 и 9. Рассмотрим теперь конечную или бесконечную десятичную дробь

$$\xi = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Мы непосредственно убеждаемся в том, что эта дробь является точкой накопления данного числового множества. В самом деле, если окружить точку ξ любым сколь угодно малым интервалом, то все выделенные выше интервалы, содержащие бесконечно много чисел данного числового множества, попадают внутрь данного интервала, как только наше десятичное подразделение становится достаточно мелким.

Если вместо интервала $0 \leq x \leq 1$ возьмем, скажем, интервал от a до $a+h$, то наше рассуждение существенно ни в чем не меняется. Искомая точка накопления выражается тогда просто числом вида

$$a + h \cdot 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

2. Пределы числовых последовательностей. Доказательство признака сходимости Коши. С достигнутой нами точки зрения понятие предела бесконечной числовой последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ получает новое освещение. Рассматривая сначала тот особенный случай, когда последовательность содержит бесконечно много равных между собой чисел, мы расширяем данное выше определение точки накопления и считаем бесконечно повторяющееся в последовательности число также точкой накопления.

Если последовательность содержит бесконечно много различных друг от друга чисел и если мы предположим, что все числа a_n этой последовательности „ограничены“, т. е. что существует некоторое число M такое, что

$$|a_n| < M$$

для любого значения индекса n , то числа нашей последовательности образуют бесконечное числовое множество, расположенное на конечном интервале, так как они все заключены между $-M$ и $+M$. Следовательно они должны иметь по меньшей мере одну точку накопления ξ . И если действительно существует только одна единственная точка накопления, то наша числовая последовательность очевидно сходится как раз к этой точке как к своему пределу

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

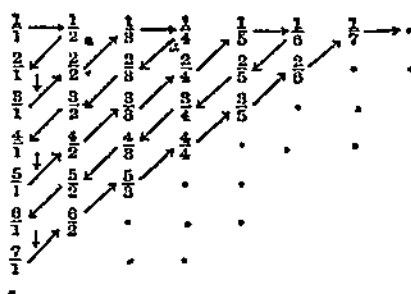
Если же, напротив, имеется несколько различных точек накопления, то наша числовая последовательность не имеет определенного предела. Итак, существование предела и единственность точки накопления у ограниченной числовой последовательности являются равнозначными понятиями.

Важно отдать себе отчет в том, что у произвольно заданной последовательности, вообще говоря, предела не существует. Так например последовательность, члены которой задаются условиями

$$a_{2n} = \frac{1}{n}, \quad a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

имеет две точки накопления 0 и 1.

Совокупность всех положительных рациональных чисел может быть



рассматриваема как числовая последовательность, причем однако совершенно нарушается расположение чисел по их величине. Подобное расположение множества рациональных чисел в виде последовательности проще всего получается, если расположить рациональные числа согласно приведенной рядом схеме, пробегая эту схему вдоль указанной стрелками

ломаной линии и выкидывая при этом встретившиеся уже раз (как например $\frac{2}{4}$) значения.

Очевидно система рациональных чисел имеет все рациональные и иррациональные числа точками накопления, представляя собой следовательно простой пример числовой последовательности с бесконечно большим числом точек накопления.

Пользуясь понятием сходимости, мы можем дать принципу предельных точек следующую замечательную и удобную для некоторых применений формулировку:

Из всякого ограниченного бесконечного числового множества можно выделить бесконечную подпоследовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$, сходящуюся к некоторому пределу ξ .

Для доказательства берем какую-нибудь точку накопления ξ заданного бесконечного числового множества и затем выбираем из чисел этого множества число a_1 , отстоящее от ξ меньше чем на $\frac{1}{10}$; выбираем даль-

ше в заданном множестве другое число a_2 , отстоящее от ξ ближе чем на $\frac{1}{100}$, третье число — a_3 , расстояние которого от ξ меньше $\frac{1}{1000}$, и т. д. Очевидно эта последовательность чисел действительно сходится к пределу ξ .

Вернемся к сходящимся числовым последовательностям, т. е. к ограниченным последовательностям с одной единственной точкой накопления. Сформулированный в главе I, § 6 признак сходимости Коши становится теперь почти самоочевидным. В самом деле, предположим, что $(a_m - a_n)$ становится сколь угодно малым, если только m и n достаточно велики. Тогда все числа a_n лежат в конечном интервале и имеют следовательно по меньшей мере одну точку накопления ξ . Если бы существовала еще одна точка накопления η , то она находилась бы на некотором расстоянии $|\xi - \eta| = \alpha > 0$ от точки ξ . В любой близости от ξ , скажем, на расстоянии меньшем чем $\frac{\alpha}{3}$, должно находиться бесчисленное множество чисел a_n , т. е. и такие значения a_n , для которых $n > N$, как бы велико ни было N . Точно так же и в любой близости точки накопления η и в частности на расстоянии от нее меньшем чем $\frac{\alpha}{3}$ должно находиться бесчисленное множество чисел a_m нашей последовательности, а следовательно и такие числа a_m , для которых $m > N$.

Но для этих значений a_n и a_m наверное имеет место неравенство $|a_m - a_n| > \frac{\alpha}{3}$, которое несовместно с предположением, что $|a_m - a_n|$ при достаточно большом N становится сколь угодно малым. Следовательно не существует двух различных точек накопления, и признак Коши доказан.

Столь же просто мы убеждаемся в том, что монотонно возрастающая и монотонно убывающая ограниченные числовые последовательности должны иметь предел. В самом деле, пусть в первом случае ξ будет точкой накопления, — а такая безусловно существует, — тогда ξ должно быть больше всех чисел последовательности. Ибо, если бы какое-нибудь число a_l последовательности было бы больше чем ξ , то и для всех следующих чисел a_n с индексом $n > l$ имело бы место неравенство $a_n > a_l > \xi$, откуда следовало бы, что все числа последовательности за исключением не больше чем $l - 1$ первых чисел лежат вне интервала ширины $|\xi - a_l|$ с левым концом в точке ξ . Но это противоречит предположению, что ξ является точкой накопления. Таким образом справа от ξ нет чисел последовательности и подавно нет точек накопления этой последней. Этим наше предложение доказано;

совершенно аналогичное рассуждение применимо, понятно, и к монотонно убывающей последовательности. Мы можем впрочем наше предложение о монотонных последовательностях дополнить так, как мы это сделали на стр. 32, допуская для подобных последовательностей промежуточный случай, т. е. случай равенства следующих друг за другом чисел последовательности. Мы говорим тогда о монотонной неубывающей или неубывающей последовательности. Теорема о существовании предела сохраняет свою справедливость и для таких последовательностей.

3. Верхняя и нижняя грани, верхняя и нижняя точки накопления числового множества. Если при построении, которое привело нас в п° 1 к точке накопления ξ , ограничить каждый раз выбор частичных интервалов условием брать всегда последний из частичных интервалов, содержащих бесконечно много точек заданного множества, то мы получим определенную точку накопления β , которая называется „верхней точкой накопления“ или „верхним пределом“ („*limes superior*“) числового множества и обозначается сокращенно через $\limsup$ или $\overline{\lim}$. Эта точка является крайней правой точкой накопления данного множества, т. е. хотя справа от β еще могут лежать бесконечно многие числа этого множества, но справа от $\beta - \varepsilon$, как бы мало ни было ε , уже нет больше бесчисленного множества этих чисел.

Если же в построении п° 1 выбирать каждый раз первый из частичных интервалов, содержащих бесконечно много точек множества, то мы приходим к точке накопления α , называемой „нижней точкой накопления“ или „нижним пределом“ („*limes inferior*“) числового множества (сокращенно $\liminf$ или $\underline{\lim}$), слева от которой нет больше точек накопления множества. Хотя и возможно, чтобы слева от α еще лежали бесконечно многие числа множества, но слева от $\alpha - \varepsilon$ уже это невозможно, как бы мало ни было число ε . Доказательство этих утверждений я могу предоставить самому читателю.

Верхняя точка накопления β , равно как и нижняя α , не должны обязательно принадлежать самому множеству. Так например для множества чисел $a_{2n} = \frac{1}{n}$; $a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{n}$ точка накопления $\alpha = 0$, а точка накопления $\beta = 1$, но значения 0 и 1 не содержатся сами в заданном множестве.

В этом примере справа от числа $\beta = 1$ нет ни одного числа множества. В этом случае говорят, что $\beta = 1$ является также верхней гранью множества, определяя следующим образом этот термин: „верхняя грань“. α называется верхней гранью числового множества, если это множество не содержит числа, превосходящего α , но для любого сколь угодно малого положительного ε существует по меньшей мере одно

число множества, превосходящее G — ε . Соответственным образом определяется нижняя грань g .

Верхняя грань может иногда, как мы видели, совпадать с верхней точкой накопления. Но уже пример множества $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) показывает, что это не всегда обязательно должно иметь место. Здесь $G=2$, а $\beta=1$.

Но очевидно всегда $G \geq \beta$, и легко убедиться в том, что если верхняя грань не совпадает с верхней точкой накопления, то она является „изолированной“ точкой этого множества. Точно так же нижняя грань $g \leq \alpha$, и если g и α не совпадают, то g должно быть изолированным числом множества.

§ 2. Теоремы о непрерывных функциях.

1. Наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций. Ограниченное бесконечное числовое множество должно всегда иметь верхнюю грань G и нижнюю грань g . Однако эти числа G и g , как мы видели, не должны обязательно принадлежать самому числовому множеству или, как говорят, числовое множество не должно обязательно иметь наибольшее или наименьшее значения. Так например последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ имеет нижнюю грань 0, но число 0 не принадлежит этому множеству, и поэтому множество не содержит в себе наименьшего числа.

Имея в виду эту возможность, мы поймем, что нижеследующая теорема о непрерывных функциях не является уже столь безусловно очевидной, какой она кажется с первого взгляда нашей наивной интуиции:

Всякая непрерывная в замкнутом интервале $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ принимает в этом интервале по меньшей мере один раз наибольшее и по меньшей мере один раз наименьшее значения, или, как говорят, она имеет наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство легко получается следующим образом. Совокупность значений непрерывной функции $f(x)$ в интервале $a \leq x \leq b$ представляет собой во всяком случае ограниченное числовое множество и имеет поэтому верхнюю грань G , так как в противном случае существовала бы последовательность чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, для которой значения функции $f(\xi_n)$ неограниченно возрастали бы. Эта последовательность должна была бы иметь точку накопления ξ^* . Но тогда в любой близости от ξ^* имелись бы еще числа ξ_n нашей последовательности, для которых $|f(\xi_n) - f(\xi^*)| > \frac{1}{n}$.

(и даже сколь угодно велико), т. е. функция была бы в точке ξ^* разрывной. Так как следовательно существует верхняя грань G , то должна существовать последовательность чисел интервала $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G.$$

Числа x_n должны на основании принципа предельных точек иметь точку накопления ξ , и мы можем выбрать из последовательности x_n подпоследовательность, сходящуюся к точке ξ . Обозначим ее опять через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi,$$

тогда и для ξ_n также конечно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = G.$$

С другой стороны, так как ξ принадлежит данному интервалу, то в силу предположенной непрерывности функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(\xi).$$

Следовательно $f(\xi) = G$. Итак функция $f(x)$ действительно принимает значение G в некоторой определенной точке ξ внутри или на краю интервала, в чем и заключается высказанное нами предложение.

Вполне аналогичное рассуждение справедливо, разумеется, и для наименьшего значения. Заметим, что теорема о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной функции не будет всегда справедлива, если мы не предположим вполне определенным образом, что заданный интервал является замкнутым, т. е. если мы не включим условия о непрерывности функции на концах интервала. Так например функция $y = \frac{1}{x}$ непре-

рывна в открытом интервале $0 < x < \infty$ и в то же время не имеет в этом интервале наибольшего значения, принимая, напротив того, вблизи значения $x = 0$ сколь угодно большие значения. Точно так же эта функция не имеет наименьшего значения, но становится при достаточно большом x сколь угодно малой, никогда не достигая наименьшего значения 0.

2. Равномерность непрерывности. Условие непрерывности функции $f(x)$ в замкнутом интервале $a \leq x \leq b$ еще оставляет, как мы уже видели раньше (ср. стр. 45) и в чем мы еще убедимся в дальнейшем, такой широкий простор для различных своеобразных особенностей, противоречащих обычной интуиции, что мы считаем нужным строго логически вывести из понятия непрерывности еще некоторые свойства непрерывных функций, которые с первого взгляда кажутся очевидными,

В данном нами определении понятия непрерывности содержится только утверждение, что из соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

следует соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi).$$

Мы можем выразить это также и следующим образом: если задана точка ξ , то любому сколь угодно малому пределу погрешности $\varepsilon > 0$ соответствует число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$, если только $|x - \xi| < \delta$, и при условии, что рассматриваемые числа x лежат в заданном интервале $a \leq x \leq b$. Так например для функции $y = cx$ мы получим сразу такой интервал δ , полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$; для функции $y = x^2$ мы можем построить такой интервал следующим образом: предположим например, что $a = 0$ и $b = 1$, и спросим, насколько близко от точки ξ следует взять точку x , чтобы имело место неравенство

$$|\xi^2 - x^2| < \varepsilon.$$

Для этой цели напомним:

$$|\xi^2 - x^2| = |x - \xi| \cdot |x + \xi| \leq |x - \xi| (1 + \xi).$$

Если поэтому $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + \xi}$, то наверное $|\xi^2 - x^2| < \varepsilon$. Мы видим на этом примере, что полученный предел погрешности δ зависит не только от ε , но еще и от того места ξ интервала, в котором мы исследуем непрерывность функции. Однако, если отказаться от того, чтобы выбирать δ наиболее благоприятным образом, то можно устранить эту зависимость δ от ξ , заменяя справа ξ через 1, от чего δ в интервале $0 \leq \xi \leq 1$ только уменьшается и становится равным $\frac{\varepsilon}{2}$.

Возникает вопрос, справедливо ли нечто подобное для любой непрерывной в замкнутом интервале функции, т. е. можно ли, отказавшись от наиболее благоприятного в каждом месте выбора δ , определить такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, которое зависело бы только от ε , но не зависело бы больше от ξ , так чтобы вышеприведенное неравенство

$$|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$$

имело бы место, если только $|x - \xi| < \delta$. Иными словами, это число δ одновременно определяется для всех точек ξ данного интервала или, как говорят, равномерно относительно ξ . Оказывается, что это действительно возможно в силу одного только общего определения непрерывности и без всяких добавочных специальных предположений. Это свой-

ство, на которое обратили внимание только в конце XIX столетия, называется теоремой о равномерной непрерывности непрерывных функций.

Доказательство этой теоремы ведётся следующим образом путем доказательства от противного. Мы исходим из несколько иной словесной формулировки нашего предположения, а именно: равномерная непрерывность заключается в том, что если два значения u и v , лежащие где-нибудь внутри интервала $a \leq x \leq b$, отличаются друг от друга меньше чем на некоторую величину δ , то разность $|f(u) - f(v)|$ становится сколь угодно малой, если только δ достаточно мало, независимо от того, где находятся точки u и v . В самом деле, если бы это было неверно, т. е. если бы это „колебание“ функции не было бы сколь угодно малым для всех пар значений u, v при любом сколь угодно малом δ , то существовали бы:

- 1) некоторое постоянное (хотя возможно и очень малое) положительное число α ,
- 2) последовательность чисел $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$, стремящихся к нулю, и
- 3) пары значений u_n, v_n в интервале (a, b) , соответствующие числам δ_n такие, что

$$|u_n - v_n| < \delta_n \quad \text{и} \quad |f(u_n) - f(v_n)| > \alpha.$$

На основании принципа предельных точек числа u_n должны иметь точку накопления ξ и следовательно числа v_n имеют также ξ точкой накопления. Если мы окружим ξ произвольным сколь угодно малым интервалом $|\xi - x| < \delta$, то в этот интервал попадет бесконечно много пар u_n, v_n . Поэтому „колебание“ функции $f(x)$ внутри любого такого интервала будет всегда больше постоянного числа α . Но это противоречит предположенной непрерывности функции $f(x)$ в точке ξ , ибо эта непрерывность требует, чтобы при достаточно большом n одновременно имели место неравенства

$$|f(\xi) - f(u_n)| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad |f(\xi) - f(v_n)| < \frac{\alpha}{2},$$

а следовательно и неравенство $|f(u_n) - f(v_n)| < \alpha$. Таким образом формулированное нами свойство равномерности доказано. В нашем доказательстве мы существенным образом опирались на то, что интервал являлся замкнутым¹⁾.

И действительно теорема о равномерности непрерывности для незамкнутых интервалов не всегда справедлива. Например функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $0 < x \leq 1$, но уже не равномерно непрерывна. В самом деле,

¹⁾ В противном случае точка накопления ξ могла бы и не принадлежать интервалу.

какую малую длину δ ($\delta < 1$) интервала мы ни возьмем, мы можем, выбрав этот интервал в достаточной близости от точки нуль, например взяв интервал $\frac{\delta}{2} \leq x \leq \frac{3\delta}{2}$, сделать колебание функции в этом интервале больше любого постоянного числа, например единицы. Неравномерность непрерывности обуславливается тем, что в замкнутом интервале $0 \leq x \leq 1$ данная функция имеет в начальной точке разрыв непрерывности. Точно так же, рассматривая вышеприведенную функцию $y = x^2$ не в каком-нибудь замкнутом конечном интервале, а во всем (открытом) интервале $-\infty < x < \infty$, мы убедимся, что в этом последнем рассматриваемая функция уже не является равномерно непрерывной.

3. Теорема о промежуточном значении. Целнейшей постоянно применяемой в анализе теоремой является следующая теорема. Если непрерывная в замкнутом интервале $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ отрицательна при $x = a$ и положительна при $x = b$ (или наоборот), то она принимает в интервале по крайней мере один раз значение нуль. Эта теорема, которая при переводе на геометрический язык утверждает тот геометрически очевидный факт, что если начальная точка дуги непрерывной кривой лежит под, а конечная — над осью x , то дуга должна где-нибудь в промежутке пересечь эту ось, доказывается и аналитически очень просто. Действительно в рассматриваемом интервале безусловно существует бесконечное множество точек, в которых $f(x) < 0$. Ведь в силу непрерывности функция наверное отрицательна в некотором частичном интервале, прилегающем к начальной точке данного интервала. Это множество точек x , где $f(x) < 0$ имеет верхнюю точку накопления ξ , которая должна лежать внутри интервала.

Так как в любой близости от ξ находятся точки x , в которых $f(x) < 0$, то в силу непрерывности во всяком случае $f(\xi) \leq 0$. Но $f(\xi)$ не может быть меньше нуля, так как тогда функция $f(x)$ была бы отрицательной в некоторой, достаточно малой окрестности точки ξ и в частности и для всех тех точек этой окрестности, в которых $x > \xi$; но это противоречит предположению, что ξ есть верхняя точка накопления тех значений x , в которых $f(x) < 0$. Следовательно $f(\xi) = 0$, и наше предложение доказано.

Мы можем нашу теорему несколько обобщить.

Предположим, что $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ и что μ есть некоторое значение, заключенное между α и β . Тогда непрерывная функция $f(x)$ принимает в интервале $a \leq x \leq b$ по меньшей мере один раз значение μ . В самом деле непрерывная функция $\varphi(x) = f(x) - \mu$ имеет на концах интервала противоположные знаки, а потому принимает внутри интервала значение 0.

4. Обращение непрерывной монотонной функции. Если непрерывная функция $y=f(x)$ монотонна в интервале $a \leq x \leq b$, то она принимает каждое промежуточное значение y один и только один раз. Поэтому, когда y пробегает замкнутый интервал между значениями $\alpha=f(a)$ и $\beta=f(b)$, то каждому значению y соответствует ровно одно значение x . Мы можем таким образом рассматривать в этом интервале x так же как однозначную функцию от y , т. е. мы можем однозначным образом обратить функцию $y=f(x)$. Эта обратная функция $x=\varphi(y)$ является подобно функции $f(x)$ непрерывной и монотонной функцией от y , когда y изменяется в интервале между α и β .

То, что обратная функция $x=\varphi(y)$ монотонна, является очевидным. Чтобы строго доказать ее непрерывность, заметим, что ввиду монотонности функции $f(x)$ разность $|f(x_2)-f(x_1)|=|y_2-y_1|>0$, если x_1 и x_2 — два различных числа нашего интервала. Поэтому если мы выберем некоторое положительное число h меньшее, чем $b-a$, и рассмотрим функцию $|f(x+h)-f(x)|$, непрерывную в замкнутом интервале $a \leq x \leq b-h$, то получим, что эта функция принимает в некоторой точке $x=\xi$ наименьшее значение $|f(\xi+h)-f(\xi)|=a(h)$, которое в силу только что сделанного нами замечания отлично от нуля¹⁾. Мы заключаем отсюда следующее: если x_1, x_2 — два числа данного интервала, для которых $|x_1-x_2| \geq h$, то $|f(x_1)-f(x_2)| \geq a(h)$. Но отсюда непосредственно получается непрерывность обратной функции. Ибо как только $|y_1-y_2|$ становится меньше положительного числа $a(h)$, то $|x_1-x_2| \leq h$; если поэтому задан предел погрешности ϵ , то достаточно выбрать δ равным $a(\epsilon)$, чтобы для всех y , для которых $|y_1-y| < \delta$, имело место также и неравенство $|\varphi(y_1)-\varphi(y)| < \epsilon$.

5. Дальнейшие теоремы о непрерывных функциях. Я предоставляю читателю доказательство следующей почти очевидной теоремы. Непрерывная функция от непрерывной функции также непрерывна, т. е. если $\varphi(x)$ непрерывна в интервале $a \leq x \leq b$, а значения этой функции заполняют интервал $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, и если далее $f(\varphi)$ есть непрерывная в этом последнем интервале функция от φ , то и $f[\varphi(x)]$ есть также непрерывная в интервале $a \leq x \leq b$ функция от x . (Теорема о непрерывности сложных непрерывных функций.) Далее, как уже было упомянуто на стр. 45, сумма, разность и произведение непрерывных функций снова непрерывны, а также частное двух непрерывных функций остается непрерывным, пока знаменатель отличен от нуля.

¹⁾ Впрочем при неограниченном убывании h число $a(h)$ в силу равномерной непрерывности $f(x)$ стремится к нулю.

§ 3. Замечания относительно элементарных функций.

В первой главе мы молча допустили, что элементарные функции непрерывны. Доказательство этого факта теперь является почти очевидным. Прежде всего функция $f(x) = x$ непрерывна, поэтому и $x^2 = x \cdot x$ непрерывна как произведение двух непрерывных функций; точно так же непрерывна и всякая целая степень от x , а потому и всякая целая рациональная функция как сумма непрерывных функций; вместе с тем и всякая дробная рациональная функция как частное двух непрерывных функций непрерывна во всяком интервале, в котором знаменатель не обращается в нуль.

Корень n -й степени из x является непрерывной и монотонной функцией как обратная функция функции x^n , ибо функция x^n очевидно монотонна и непрерывна при $x > 0$. Поэтому в силу теоремы о непрерывности сложных функций корень n -й степени из любой рациональной функции есть также непрерывная функция.

Непрерывность тригонометрических функций — факт, с которым читателю уже пришлось иметь дело в средней школе, — может быть теперь легко доказана при помощи введенных нами выше понятий; я не делаю однако этого здесь, так как в следующей главе, § 3, эта непрерывность получится сама собой как следствие дифференцируемости.

Мы должны только сделать несколько замечаний относительно определения и непрерывности показательной функции a^x , общей степенной функции x^a и логарифма. Мы предполагаем, как и в первой главе, § 3, что a — положительное число и, скажем, большее единицы, и понимаем под a^r , где $r = \frac{p}{q}$ означает положительное рациональное число (p и q —

целые числа), положительное значение этого выражения $a^r = a^{\frac{p}{q}}$. Если a — иррациональное число и если $r_1, r_2, \dots, r_m, \dots$ есть последовательность рациональных чисел, стремящихся к a , то мы утверждаем, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} a^{r_m}$, и мы считаем тогда степень a^a равной этому пределу.

Чтобы доказать существование этого предела, нам достаточно, согласно критерию сходимости Коши, показать, что разность $a^{r_n} - a^{r_m}$ становится сколь угодно малой, если только взять n и m достаточно большими. Пусть например $r_n > r_m$, т. е. $r_n - r_m = \delta > 0$.

Тогда $a^{r_n} - a^{r_m} = a^{r_m}(a^\delta - 1)$.

Так как a^{r_m} остается ограниченным, то нам остается только показать, что $a^\delta - 1$ становится сколь угодно малым при достаточно больших n и m . Но δ есть рациональное число, которое становится сколь угодно малым, когда n и m достаточно велики. Поэтому $\delta < \frac{1}{l}$, где l — целое

число, которое становится сколь-угодно большим при достаточно больших значениях m и n .

Но при $\delta < \frac{1}{l}$ и $a > 1$

$$1 < a^{\delta} < a^{\frac{1}{l}},$$

а так как $a^{\frac{1}{l}}$ при возрастании l стремится к единице (ср. стр. 23), то отсюда непосредственно следует наше предложение.

Я могу снова предоставить читателю доказать самому, что определенная таким образом и для иррациональных значений x функция a^x является всюду непрерывной и монотонной функцией от x . Для отрицательных значений x эта функция естественным образом определяется условием

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Когда x растет от $-\infty$ до $+\infty$, эта функция принимает тогда в монотонной последовательности все значения от 0 до $+\infty$. Поэтому она имеет непрерывную обратную функцию, которую мы называем логарифмом при основании a .

Совершенно аналогично можно доказать непрерывность общей степенной функции $y = x^a$ как функции от x , где a есть постоянное иррациональное число, а x — независимая переменная, пробегающая интервал $0 < x < \infty$.

Изложенное здесь вкратце „элементарно-математическое“ исследование показательной функции, логарифма и степени x^a , которое в большей своей части уже известно читателю из средней школы, будет нами в главе III, § 6 заменено другим, принципиально значительно более простым исследованием.

§ 4. Полярные координаты.

В главе I мы исходили из понятия функции и иллюстрировали его геометрически с помощью кривой. Однако полезно напомнить ¹⁾, что аналитическая геометрия идет противоположным путем, а именно исходит из геометрически заданной кривой и уже затем представляет эту кривую функцией, которая например выражает одну координату точки кривой через другую. Эта точка зрения естественно приводит к рассмотрению, кроме прямоугольных координат, — единственных, употреблявшихся нами до сих пор —, также и других систем координат, которые в каждом отдель-

¹⁾ Предполагаю это известным из курса средней школы.

²⁾ Ср. также стр. 9.

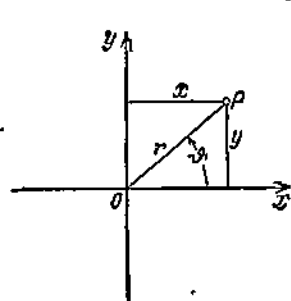
ном случае могут оказаться более подходящими для данной кривой, заданной геометрически.

Важнейшим примером таких систем координат являются полярные координаты, связанные с прямоугольными координатами x, y точки P посредством уравнений:

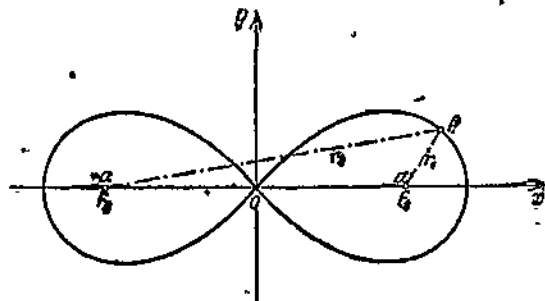
$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}$$

и геометрическое значение которых указано на черт. 24.

Рассмотрим например лемнискату; она определяется геометрически как геометрическое место всех точек P , для которых произведение рас-



Черт. 24



Черт. 25.

стояний r_1 и r_2 от неподвижных точек F_1 и F_2 с прямоугольными координатами $x = a, y = 0$, и $x = -a, y = 0$ равно постоянному числу a^2 (ср. черт. 25).

Так как $r_1^2 = (x - a)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$, то после простого преобразования получается в качестве уравнения лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Вводя полярные координаты, мы получаем

$$r^4 - 2a^2 r^2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = 0$$

или, сокращая множитель r^2 и применяя простую тригонометрическую формулу, имеем

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta.$$

Мы видим таким образом, что уравнение лемнискаты в полярных координатах имеет более простой вид, чем в прямоугольных координатах.

§ 5. Некоторые замечания относительно комплексных чисел.

Наши исследования будут иметь своей основой исключительно область действительных чисел. Однако я хотел бы уже теперь, имея в виду приложения, о которых будет идти речь в главах VIII, IX и X, напомнить, что проблемы алгебры привели к еще более широкому обобщению по-

нения числа, а именно к введению комплексных чисел. Подобно тому как постепенное расширение области чисел от ряда натуральных чисел до совокупности всех действительных чисел было вызвано потребностью устранить случаи возможных исключений из общих математических законов и сделать выполнимыми во всех случаях без исключения известные операции, как например деление, вычитание, установления соответствия между числами и отрезками, подобно этому и к введению комплексных чисел вынудило требование, чтобы всякому квадратному уравнению и даже всякому алгебраическому уравнению можно было бы приписать известное решение. Если например хотят добиться, чтобы уравнение

$$x^2 + 1 = 0$$

имело корни, то приходится ввести новые символы $+i$ и $-i$ в качестве корней этого уравнения (и этим одновременно достигается, как доказывается в алгебре, разрешимость всех алгебраических уравнений)¹⁾.

Если a и b — обыкновенные действительные числа, то комплексное число $c = a + ib$ означает не что иное как пару чисел (a, b) , причем действия над подобными парами производятся просто по следующему правилу. Комплексные числа $a + ib$ (в состав которых входят в качестве частного случая при $b = 0$ также и действительные числа) складывают, умножают и делят, рассматривая символ i как неопределенную величину, но упрощая все выражения, содержащие i в степенях выше первой, пользуясь соотношением $i^2 = -1$, так что i остается только в первой степени и все выражение снова принимает вид $a + ib$.

Я считаю возможным предположить, что читатель уже имеет некоторое знакомство с этими комплексными числами. Тем не менее я хочу здесь обратить внимание на одно особенно важное соотношение, связанное с геометрическим и тригонометрическим способами изображения комплексных чисел. Если $c = x + iy$ есть некоторое комплексное число, то его изображают в прямоугольной системе координат точкой P с координатами x и y . Введем теперь вместо прямоугольных координат x и y полярные координаты r и ϑ (ср. черт. 24, стр. 61) посредством уравнений

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

причем мы берем $r \geq 0$, так что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ будет расстоянием точки P от начала координат, а ϑ — углом между положительной x -осью и лучом OP . Комплексное число c представляется тогда в форме

$$c = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

¹⁾ Тот факт, что всякое алгебраическое уравнение имеет действительные или комплексные корни, составляет содержание так называемой „основной теоремы“ алгебры.

Мы называем угол ϑ углом или амплитудой числа c , а величину r — абсолютным значением этого числа, которое обозначается также символом $|c|$.

„Сопряженно комплексному“ числу $\bar{c} = x - iy$ соответствует очевидно то же самое абсолютное значение r , но угол этого числа $\bar{c}$ равен $-\vartheta$.

$$\text{Поэтому } r^2 = |c|^2 = c\bar{c} = a^2 + b^2.$$

С помощью указанного тригонометрического представления умножение комплексных чисел принимает особенно простую форму. В самом деле,

$$\begin{aligned} c \cdot c' &= r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \cdot r'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta') = \\ &= rr'[(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta') + i(\cos \vartheta \sin \vartheta' + \sin \vartheta \cos \vartheta')], \end{aligned}$$

откуда, принимая во внимание известные законы сложения тригонометрических функций, получаем:

$$cc' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')],$$

т. е. при умножении комплексных чисел их абсолютные значения перемножаются, а углы складываются.

Любопытная формула

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta') = \cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')$$

обычно называется формулой Муавра; она, между прочим, непосредственно приводит к соотношению

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + i \sin n\vartheta,$$

которое например дает возможность решить уравнение $x^n = 1$ для целого положительного n и сразу написать все корни этого уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \dots \\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon^{n-1} = \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon^n = 1. \end{aligned}$$

Если далее разложить левую часть уравнения

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + i \sin n\vartheta$$

по формуле бинома Ньютона, то, отделяя действительную и мнимую части этого уравнения, мы получаем выражения для $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$ через степени и произведения степеней $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$.

ГЛАВА II.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Из понятий, связанных с предельным переходом в анализе, два играют особенно важную роль не только потому, что они то и дело встречаются в самых различных вопросах, но прежде всего ввиду того, что они находятся между собой в тесной взаимной связи. Эти два понятия — интеграл и производная — рассматривались на отдельных разрозненных примерах уже давно, частью еще в классической древности; но началом настоящего, систематического развития интегрального и дифференциального исчисления является лишь тот момент, когда заметили тесную взаимную связь между этими понятиями и, опираясь на это, положили их в основу совершенно новых методов исчисления. Этим мы обязаны в равной мере двум великим умам XVII столетия Ньютону и Лейбницу, которые, как в настоящее время установлено, сделали свои открытия независимо друг от друга. Хотя Ньютон в своих исследованиях, быть может, достиг большей ясности понятий, однако обозначения и методы вычисления Лейбница получили более широкое распространение. Еще и в настоящее время эти формальные стороны концепции Лейбница являются необходимым элементом теории.

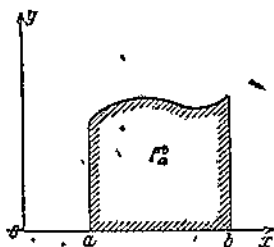
§ 1. Определенный интеграл.

В первую очередь мы рассмотрим понятие интеграла. Это понятие по существу и из исторических соображений следует выдвинуть на передний план в значительно большей мере, чем это обычно практикуется в силу действующей поныне педагогической традиции, покоящейся на случайных обстоятельствах. С понятием интеграла мы впервые встречаемся в задаче измерения площади плоской криволинейной фигуры. Более тонкое рассмотрение позволяет затем тотчас освободить понятие интеграла от наивного представления о площади и приводит к чисто аналитической формулировке, построенной на понятии о числе. Значение этого аналитического определения интеграла обнаруживается не только в том, что единственно оно дает нам полную логическую ясность, но и в возможности разнообразных приложений, далеко выходящих за пределы определения площади.

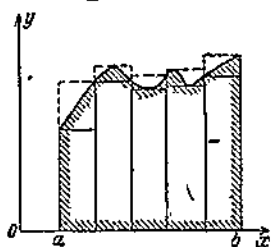
Начнем с наглядных рассмотрений.

1. Интеграл как площадь. Пусть на некотором интервале задана непрерывная положительная функция $f(x)$ и пусть $x=a$ и $x=b$ ($a < b$) два значения в этом интервале; представим себе эту функцию изображенной в виде кривой, и рассмотрим площадь, ограниченную этой кривой, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и, наконец, частью оси абсцисс между точками a и b (черт. 26).

То, что имеет определенный смысл говорить об этой площади, является допущением, которое внушается нам нашей интуицией и, которое мы здесь явно формулируем в качестве допущения. Мы называем эту площадь F_a^b определенным интегралом от функции $f(x)$, взятом в пределах a и b . Если мы попытаемся действительно выразить эту площадь именованным числом, то нам придется исходить из того, что хотя мы не умеем определять площади криволинейно ограниченных фигур, но зато умеем вычислять площади любых прямолинейных многоугольников, разбивая их на треугольники или прямоугольники. Точно провести такое разбиение для нашей площади в общем случае невозможно. Но весьма естественно рассматривать эту площадь как предел суммы площадей прямоугольников следующим образом. Делим отрезок оси абсцисс между точками a и b на n равных частей и восстанавливаем во всех точках деления ординаты



Черт. 26.



Черт. 27.

до пересечения с кривой; таким образом площадь разбивается на n полос. Площадь каждой из этих полос мы однако столь же мало в состоянии вычислить непосредственно с помощью функции $f(x)$, как и всю данную площадь; но если мы, как это видно на чертеже 27, найдем в каждом частичном интервале наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ и заменим соответствующую полосу сперва прямоугольником с высотой равной наименьшему значению функции, а затем прямоугольником с высотой равной наибольшему значению функции, то получим две ступенчатые фигуры: ступенчатая линия в одной вычерчена сплошной линией, в другой — пунктиром. Первая ступенчатая фигура очевидно имеет площадь, которая меньше искомой площади F_a^b , а другая — площадь большую, чем F_a^b . Обозначим обе эти площади, представляющие суммы площадей прямоугольников, полученные тем и другим путем, соответственно через F_n (нижняя сумма) и F_n^b (верхняя сумма), тогда и имеет место соотношение

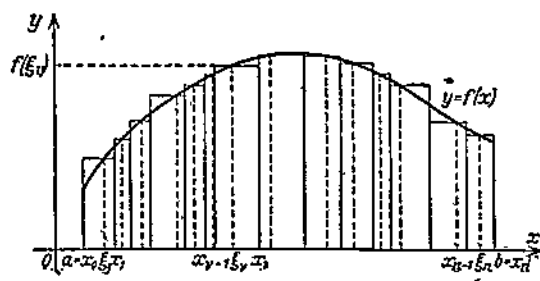
$$F_n \leq F_a^b \leq F_n^b$$

Если станем теперь делать все более и более мелкие подразделения, т. е. станем неограниченно увеличивать число n , то интуитивно ясно, что обе величины $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$ все больше сближаются и стремятся к общему пределу F_a^b . Мы можем таким образом рассматривать наш интеграл как предел

$$F_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{F}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F}_n.$$

Это наглядное рассмотрение показывает сразу и возможность обобщения. Нет никакой необходимости в том, чтобы частичные интервалы были одинаковой длины; они могут быть и различной длины, если только предположить, что с возрастанием n длина наибольшего из частичных интервалов стремится к нулю.

2. Аналитическое определение интеграла. Мы только что рассматривали определенный интеграл как заданное площадью до некоторой степени заранее известное число, которое мы лишь потом могли представить



Черт. 28.

в виде предела. Теперь же мы хотим поступить наоборот. Мы не станем теперь на ту точку зрения, что интуиция нам непосредственно дает возможность отнести указанным образом каждой непрерывной кривой некоторую площадь; наоборот, мы будем исходить из чисто аналитически образованных сумм,

вроде ранее определенных нижних и верхних сумм, и затем докажем, что эти суммы стремятся к определенному пределу. Этот предел мы будем рассматривать как определение интеграла или площади. При этом мы само собой придем к тем формальным обозначениям, которые со времени Лейбница вошли в употребление в интегральном исчислении.

Пусть $f(x)$ произвольная непрерывная функция в интервале $a \leq x \leq b$. Представим себе, что интервал длины $b - a$ разделен $n - 1$ точками деления $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ на n произвольных равных или неравных частичных интервалов и кроме того положим $x_0 = a$, $x_n = b$; в каждом частичном интервале мы выбираем совершенно произвольную точку, которая может лежать внутри или на границе интервала, в первом интервале точку ξ_1 , во втором интервале точку ξ_2 , ..., в n -м интервале точку ξ_n . Мы рассматриваем теперь вместо непрерывной функции $f(x)$ разрывную функцию (ступенчатую функцию), которая в первом интервале имеет постоянное значение $f(\xi_1)$, во втором постоянное значение $f(\xi_2)$, ..., в n -м интервале постоянное значение $f(\xi_n)$. Графическое изображение этой функции оп-

ределает, как указано на чертеже 28, ряд прямоугольников, сумма площадей которых дается выражением:

$$F_n = (x_1 - x_0) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n).$$

Сокращенно эту сумму записывают, пользуясь знаком суммирования Σ , в форме

$$F_n = \sum_{v=1}^n (x_v - x_{v-1}) f(\xi_v)$$

или наконец, если для дальнейшего сокращения введем обозначение

$$\Delta x_v = x_v - x_{v-1},$$

в виде

$$F_n = \sum_{v=1}^n f(\xi_v) \Delta x_v.$$

Символ Δ не является множителем, а обозначает разность (differentia). Наша основная теорема заключается в следующем: если число точек деления неограниченно возрастает и в то же время длина Δx наибольшего частичного интервала стремится к нулю, то предыдущая сумма стремится к пределу. Предел не зависит от выбора точек деления и промежуточных значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ в частичных интервалах

Этот предел мы называем определенным интегралом от функции $f(x)$ взятым в пределах a и b , и рассматриваем его, как уже было упомянуто, как определение площади ¹⁾.

Мы можем и мы должны доказать эту теорему о существовании интеграла от непрерывной функции чисто аналитически, не прибегая к интуиции. Однако я пока пропущу здесь это доказательство и приведу его в дополнениях в конце главы после того как вы, убедившись в плодотворности новых понятий, будете более заинтересованы в их точном обосновании. Пока удовлетворимся тем, что наглядные соображения из п^о 1 делают эту теорему чрезвычайно правдоподобной.

3. Дополнения, обозначения и основные правила, относящиеся к определенному интегралу. Только что данное определение интеграла как предела суммы побудило Лейбница обозначить интеграл следующим символом:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

¹⁾ Можно, конечно, понятие площади определить чисто геометрически и затем доказать эквивалентность геометрического определения с предыдущим определением площади как предела суммы. См. пятую главу, § 2, п^о 1.

Знак интеграла получился при этом от стилизации знака суммы, имевшего форму латинского S . Предельный переход от деления интервала на конечные разности Δx , к исчезающим разностям отмечен тем, что вместо символа Δ пишут символ d . Не следует, однако, рассматривать dx как „бесконечно малую величину“, а интеграл как „сумму бесконечного числа бесконечно малых слагаемых“; такое представление было бы совершенно лишено ясного смысла: то, что в нем есть правильного по существу, как раз точно выражается указанным выше предельным переходом.

В предыдущих чертежах мы предполагали, во-первых, что „подынтегральная“ функция $f(x)$ положительна во всем интервале и, во-вторых, что $b > a$. Но формула, определяющая интеграл как предел суммы совершенно не зависит от этих допущений. Если $f(x)$ имеет отрицательные значения во всем интервале или в части его, то в нашей сумме просто соответствующий множитель $f(\xi)$ имеет отрицательное значение. Мы, разумеется, припишем тогда соответствующей части плоскости, ограниченной кривой, отрицательную площадь, что впрочем вполне согласуется с правилом знаков, известным из аналитической геометрии. Вся площадь, ограниченная куском кривой, в общем случае состоит из положительных и отрицательных слагаемых соответственно числу частей кривой, лежащих над осью x -ов или под ней¹⁾.

Если мы откажемся также от допущения $a < b$ и примем $a > b$, то мы можем все же сохранить наше арифметическое определение интеграла; только разности Δx , когда мы пробегаем интервал от a к b , становятся отрицательными. Таким образом мы непосредственно приходим к соотношению, справедливому при любых значениях a и b :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Соответственно этому соотношению полагаем:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Подобным же образом из определения интеграла непосредственно получаем основное соотношение:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

¹⁾ Относительно площадей, ограниченных любыми замкнутыми кривыми, см. главу пятую, § 2.

если $a < b < c$ (ср. черт. 29). На основании предыдущих соотношений это равенство справедливо также и при любом положении трех точек a, b, c .

К простому и важному основному правилу относительно интеграла мы приходим, рассматривая функцию $cf(x)$, где c — постоянная. Из определения интеграла непосредственно получаем:

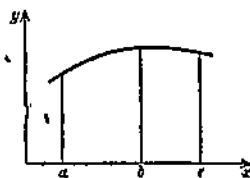
$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Далее приведем следующее правило интегрирования суммы: если,

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx.$$



Черт. 29.

Доказательство его также непосредственно вытекает из определения интеграла.

Наконец еще одно само по себе очевидное, но практически важное замечание относительно обозначения переменной интеграции. Мы писали наш интеграл в виде

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Для вычисления интеграла не имеет никакого значения, назовем ли мы абсциссу системы координат, т. е. независимую переменную, через x или как-нибудь по-иному. Поэтому совершенно безразлично, как назвать переменную интеграции, и мы можем вместо $\int_a^b f(x) dx$ писать также

$$\int_a^b f(t) dt \text{ или } \int_a^b f(u) du \text{ и т. д.}$$

§ 2. Примеры.

Мы можем во многих случаях действительно довести процесс предельного перехода, о котором идет речь в определении интеграла, до полного вычисления искомой площади. Разъясним это на ряде примеров, причем будем пользоваться то верхними, то нижними суммами¹⁾.

¹⁾ Предоставляю вам в качестве полезного упражнения самим убедиться на следующих примерах в том, что действительно при пользовании верхними и нижними суммами получается один и тот же предел.

1. Первый пример. Рассмотрим сперва функции $f(x) = x^n$, где n целое число ≥ 0 . При $n=0$, т. е. для $f(x)=1$, результат без всякого предельного перехода настолько очевиден, что его достаточно просто записать:

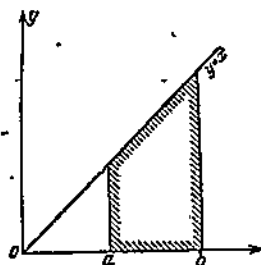
$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

И для функции $f(x)=x$ интегрирование геометрически тривиально. Интеграл функции $f(x)=x$:

$$\int_a^b x dx$$

представляет площадь трапеции, изображенной на черт. 30, и по формуле элементарной геометрии равен

$$(b-a) \frac{b+a}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$



Черт. 30

Покажем, что тот же результат получается и путем предельного перехода. При этом для нахождения предела мы можем ограничиться рассмотрением или верхних или нижних сумм. Делим интеграл от a до b на n равных частей точками деления:

$$a+h, a+2h, \dots, a+(n-1)h,$$

причем $h = \frac{b-a}{n}$. Тогда интеграл является пределом следующей нижней суммы:

$$\left. \begin{aligned} h\{a + (a+h) + (a+2h) + \dots + [a+(n-1)h]\} = \\ = h\{na + h + 2h + \dots + (n-1)h\} \end{aligned} \right\}.$$

Но

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2},$$

и наше выражение поэтому переходит в

$$nh \left\{ a + \frac{(n-1)h}{2} \right\} = (b-a) \left\{ a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right\}.$$

С возрастанием n правая сторона стремится очевидно к пределу:

$$(b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

2. Второй пример. Не так прост пример функции $f(x)=x^2$ или, геометрически говоря, определение площади, ограниченной отрезком

параболы, отрезком оси абсцисс и двумя ординатами. Вычислим например интеграл

$$\int_0^b x^2 dx;$$

делим (см. черт. 31) интервал $0 \leq x \leq b$ на n равных частей длины $h = \frac{b}{n}$, тогда искомая площадь является пределом следующего выражения (верхняя сумма)

$$h(h^2 + 2^2 h^2 + 3^2 h^2 + \dots + n^2 h^2) = h^3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \\ = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2),$$

но на стр. 19 мы видели, что

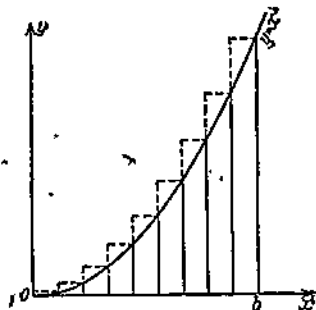
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подставляя это значение в предыдущую формулу, мы после очевидного преобразования получим:

$$\frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

При неограниченном возрастании n получаем таким образом в пределе $\frac{b^3}{3}$, и имеем искомую формулу интегрирования:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$



Черт. 31.

Отсюда на основании предыдущих соотношений сразу получается более общая формула:

$$\int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

3. Интегрирование x^a при любом целом положительном значении a . В качестве третьего примера рассмотрим интегрирование степени

$$y = f(x) = x^a,$$

где a — произвольное целое положительное число. Для вычисления интеграла

$$\int_a^b x^a dx$$

(причем предполагаем, что $0 < a < b$) было бы неудобно разбивать интервал на n равных частей¹⁾).

Переход к пределу очень прост, если произвести разбиение в „геометрической прогрессии“, т. е. следующим образом: полагаем $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q$ и делим интервал с помощью точек деления

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n = b.$$

Искомый интеграл является тогда пределом следующей суммы:

$$\begin{aligned} & a^\alpha (aq - a) + (aq)^\alpha (aq^2 - aq) + \\ & + (aq^2)^\alpha (aq^3 - aq^2) + \dots + (aq^{n-1})^\alpha (aq^n - aq^{n-1}) = \\ & = a^{\alpha+1} (q - 1) \{1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \dots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\} \end{aligned}$$

при неограниченном возрастании n .

В последних скобках стоит геометрическая прогрессия со знаменателем $q^{\alpha+1}$. Суммируя, получаем для всего выражения значение:

$$a^{\alpha+1} (q - 1) \frac{q^{n(\alpha+1)} - 1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Подставляя вместо q его значение $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, получаем, наконец, для нашей суммы выражение:

$$(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \frac{q - 1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Когда n неограниченно возрастает, первый множитель не меняется, а второй множитель, который на основании только что примененной формулы для суммы геометрической прогрессии мы можем представить в виде

$$\frac{1}{1 + q + q^2 + \dots + q^\alpha},$$

стремится к пределу $\frac{1}{\alpha + 1}$, так как при $n \rightarrow \infty$ $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ стремится к 1. Таким образом получаем наконец искомое, значение нашего интеграла:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

¹⁾ Мы должны были бы тогда вычисление интеграла свести к нахождению предела от $\frac{1}{n^{\alpha+1}} (1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$, что вы сами можете проверить, пользуясь замечаниями в подстрочном примечании на стр. 19.

Мы позже увидим (ср. гл. III), что можно совершенно избежать этого простого по идее, но несколько громоздкого вычисления, если охватить нашу проблему интегрирования с несколько более широкой в смысле метода точки зрения.

4. Интегрирование x^a при произвольном рациональном значении a . Не усложняя существенно рассуждения, можно полученный результат значительно обобщить. Пусть $a = \frac{r}{s}$ положительное рациональное число,

r и s —целые положительные числа; тогда в нашем только что приведенном вычислении интеграла ничего не меняется, за исключением нахождения предела выражения $\frac{q-1}{q^{a+1}-1}$ при $q \rightarrow 1$. Это выражение теперь

имеет вид: $\frac{q-1}{q^{\frac{r}{s}}-1}$. Полагаем $q^{\frac{1}{s}} = \tau$, тогда τ стремится к 1 вместе с q , и мы должны, следовательно, найти предел выражения $\frac{\tau^s-1}{\tau^{r+s}-1}$ при $\tau \rightarrow 1$. Если разделим числитель и знаменателя на $\tau-1$ и применим к каждому указанное выше алгебраическое преобразование, то искомый предел есть просто

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{\tau^{s-1} + \tau^{s-2} + \dots + 1}{\tau^{r+s-1} + \tau^{r+s-2} + \dots + 1}$$

и определяется непосредственно подстановкой $\tau=1$ в числитель и знаменатель, которые являются непрерывными функциями от τ , таким образом, получаем значение $\frac{s}{r+s} = \frac{1}{a+1}$, так что и для любого положительного рационального значения a имеем формулу интегрирования:

$$\int_a^b x^a dx = \frac{1}{a+1} (b^{a+1} - a^{a+1}).$$

Эта формула остается справедливой и для отрицательных рациональных значений a , если $a \neq -1$; когда $a = -1$, очевидно, теряет смысл примененная выше формула суммы геометрической прогрессии. Чтобы найти предел выражения $\frac{q-1}{q^{a+1}-1}$ при отрицательном значении $a = -\frac{r}{s}$, полагаем $q^{-\frac{1}{s}} = \tau$; тогда $q = \tau^{-s}$, а $q^{a+1} = q^{-\frac{r}{s}+1} = q^{-\frac{r-s}{s}} = \tau^{r-s}$, и, следовательно, мы должны теперь найти предел выражения:

$$\frac{\tau^{-s}-1}{\tau^{r-s}-1} = \frac{1-\tau^s}{1-\tau^{r-s}}.$$

Могу предоставить вам самим доказать, что этот предел опять-таки равен $\frac{1}{a+1}$. Итак, получаем вообще для любого положительного или отрицательного рационального значения a , за исключением $a = -1$, формулу:

$$\int_a^b x^a dx = \frac{1}{a+1} (b^{a+1} - a^{a+1}).$$

Впрочем вид правой части этой формулы ясно обнаруживает, что формула неприменима при $a = -1$, так как при этом значении числитель и знаменатель обращаются в нуль.

Естественно предположить, что область применения последней формулы распространяется и на иррациональные значения a . Действительно, мы в § 7 докажем это с помощью простого предельного перехода.

5. Интегрирование $\sin x$ и $\cos x$. В качестве последнего примера, который нам также придется решать с помощью специальной уловки, рассматриваем функцию $f(x) = \sin x$. Мы будем рассматривать интеграл

$$\int_a^b \sin x dx$$

как предел следующей суммы

$$S_h = h [\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin(a+nh)],$$

где $h = \frac{b-a}{n}$. Умножая выражение, стоящее в скобках, на $2 \sin \frac{h}{2}$ и принимая во внимание известную тригонометрическую формулу

$$2 \sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v),$$

получаем:

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left\{ \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{3}{2} h \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(a + \frac{3}{2} h \right) - \cos \left(a + \frac{5}{2} h \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(a + \frac{2n-1}{2} h \right) - \cos \left(a + \frac{2n+1}{2} h \right) \right\} = \\ &= \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left\{ \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{2n+1}{2} h \right) \right\}. \end{aligned}$$

Так как $a + nh = b$, то интеграл является пределом выражения

$$\frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left\{ \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) - \cos \left(b + \frac{h}{2} \right) \right\}$$

при $h \rightarrow 0$.

Но из первой главы мы знаем, что при неограниченном уменьшении h выражение $\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{h}{2}}$ стремится к 1, следовательно, искомый предел равняется $\cos a - \cos b$, и мы получаем формулу интегрирования:

$$\int_a^b \sin x \, dx = -(\cos b - \cos a).$$

Совершенно аналогично получается (в чем можете убедиться сами) формула:

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a.$$

Почти в каждом из рассмотренных примеров нам приходилось при решении прибегать к какому-либо особому соображению или специальной уловке. Существенным пунктом методов дифференциального и интегрального исчисления как раз является то, что вместо таких специальных уловок выступают соображения общего характера, обязательно приводящие к требуемым результатам. Чтобы прийти к этим методам, мы должны обратиться ко второму основному понятию анализа — к понятию производной.

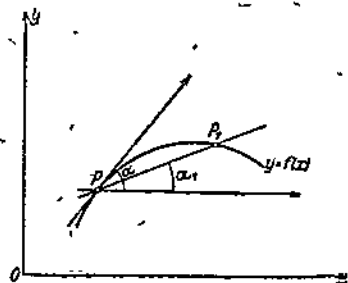
§ 3. Производная.

Понятие производной, подобно понятию интеграла, интуитивного происхождения. Источниками этого понятия являются, с одной стороны, задача о проведении касательной к данной кривой в некоторой точке, с другой стороны, задача, заключающаяся в точном определении скорости произвольного движения.

1. Производная и касательная к кривой.

Начну с задачи о касательной. Если P есть точка заданной кривой (черт. 32), то касательную в этой точке P мы охарактеризуем, руководствуясь непосредственно интуицией, следующим геометрическим предельным переходом.

Рассматриваем кроме точки P еще точку P_1 на кривой и проводим через эти две точки прямую PP_1 , секущую кривой. Когда точка P_1 стремится вдоль кривой к совпадению с точкой P , секущая стремится к некоторому предельному положению, которое не зависит от того, приближается ли точка P_1 к точке P справа или слева. Это предельное положение секущей и есть касательная, и положение, что предельное положение секущей действительно существует, равносильно допущению,



Черт. 32.

что кривая в точке P имеет определенную касательную или определенное направление. (Словом „допущение“ мы подчеркиваем, что в основе лежит предпосылка, которая даже у непрерывных кривых не всегда имеет место, — например, она не выполняется в угловых точках кривой).

Если кривая представляет собой график функции $y=f(x)$, то возникает задача выразить этот геометрический переход к пределу аналитически с помощью функции $f(x)$. Понимая под углом, — который образует положительное направление оси x -ов с прямой тот угол, на который нужно повернуть положительное направление оси x -ов в положительном смысле.¹⁾, пока эта ось в первый раз станет параллельной прямой g , мы обозначая угол секущей с положительным направлением оси x -ов через α_1 , а угол касательной с этим направлением через α (см. также черт. 33а и 33б на стр. 78), имеем очевидно, пользуясь само собой понятным обозначением:

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} \alpha_1 = \alpha.$$

Если $x, y=f(x)$ и $x_1, y_1=f(x_1)$ означают координаты точек P и P_1 , то непосредственно имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

и вместе с тем наш предельный переход изображается равенством

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Выражение

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. отношение приращения функции к приращению независимой переменной мы будем называть отношением разностей или отношением приращений функции $y=f(x)$; символом Δy мы обозначаем разность двух значений функции $y=f(x)$, а символом Δx — разность соответствующих значений независимой переменной x (Δ означает следовательно здесь как и в предыдущем параграфе не множителя, а сокращенное обозначение разности). Таким образом тангенс угла касательной (направления кривой) равен пределу отношения разностей нашей функции, когда x_1 стремится к x .

Этот предел мы называем производной функции $y=f(x)$ в точке x и обозначаем его, следуя Лагранжу, символом $y' = f'(x)$ или,

¹⁾ Т. е. в том направлении, в котором поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ переводит положительное направление оси x -ов в положительное направление оси y -ов.

следуя Лейбницу, символом $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x)}{dx}$ или $\frac{d}{dx} f(x)$. Обозначения Лейбница и их значение мы разберём подробнее в п^о 7; здесь я отмечу, что обозначением $f'(x)$ мы выразили, что производная в свою очередь является функцией от x , ввиду того что производную нужно найти для каждого значения x рассматриваемого интервала.

Напишем еще раз равенство, которое дает определение производной:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

причем последняя запись получается, если положить $x_1 = x + h$ ¹⁾. Производную нельзя получить прямо подстановкой $x_1 = x$ в числитель и знаменатель дроби, так как это привело бы к символу $\frac{0}{0}$, не имеющему никакого смысла. Наоборот, в каждом отдельном случае выполнение предельного перехода опирается на некоторые предварительные операции, например на преобразования дроби. Так, например, если $f(x) = x^2$,

$$\text{то } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = x_1 + x.$$

После этого преобразования в правой части стоит функция от x , имеющая смысл и при $x_1 = x$ и непрерывная в точке x , и мы можем теперь просто выполнить предельный переход $x_1 \rightarrow x$ заменой справа x_1 через x и сразу получаем:

$$f'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

Выполнение такого предельного, перехода или действительное нахождение производной, называется дифференцированием функции $f(x)$. Мы в дальнейшем увидим, как этот процесс дифференцирования действительно можно провести для всех важнейших функций.

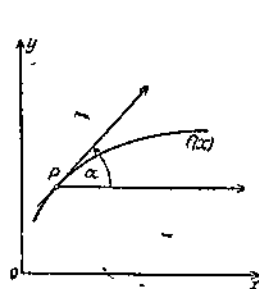
Большое значение имеет то, что задача дифференцирования заданной функции $f(x)$ имеет определенный смысл, независимо от геометрического представления касательной; совершенно так же как при определении интеграла мы освободились от первоначального геометрического наглядного

¹⁾ Иногда в литературе, особенно английской, встречается обозначение, введенное Коши, $Df(x)$ (*Dérivée* — производная).

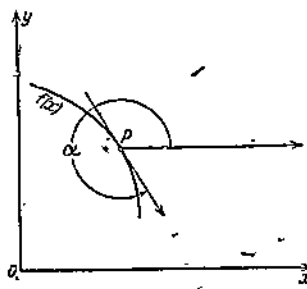
представления площади и, наоборот, обосновали понятие площади на определении интеграла, так мы теперь независимо от геометрического изображения функции $y=f(x)$ с помощью кривой определяем новую функцию $y'=f'(x)$ приведенным выше равенством, предполагая, что предел отношения существует или, как говорят, что функция дифференцируема. Мы впрочем будем, не оговаривая, подразумевать это допущение дифференцируемости всюду, где не сказано противоположное ¹⁾.

Следует заметить, что для дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x необходимо, чтобы предел $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$ существовал независимо от того, как h стремится к нулю, т. е. пробегает ли h только положительные или только отрицательные значения или значения того и другого знака.

Имея производную $f'(x)$, мы можем считать за направление касательной к кривой в точке (x, y) , то направление, которое образует с положительным направлением оси x -ов угол α , определяемый равенством $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Основывая геометрическое определение на аналитическом, а не наоборот, мы избегаем таким образом тех трудностей, которые возникают благодаря неопределенности геометрической интуиции. Наглядное представление производной с помощью касательной к кривой, является, конечно важным вспомогательным средством для понимания и в чисто аналитических рассуждениях. Так мы с самого начала фиксируем интуитивно очевидное положение: если $f'(x)$ имеет положительное значение



Черт. 33а.



Черт. 33б.

и если мы пробегаем кривую в направлении возрастающих x -ов, то касательная направлена вверх; следовательно кривая в этом месте поднимается в сторону возрастания x -ов (черт. 33а); если же

$f'(x)$ имеет отрицательное значение, то касательная направлена вниз и кривая опускается (черт. 33б). Аналитически этот

факт следует из замечания, что при положительном h предел $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ может иметь положительное значение; только если функция возрастает

¹⁾ Примеры, в которых эта предпосылка не выполнена, приведу позже (ср. п° 5).

в точке x , т. е. если разность $f(x+h) - f(x)$ имеет положительное значение, по крайней мере для достаточно малых значений h . [Аналогичное рассуждение применимо при отрицательном значении $f'(x)$].

2. Производная как скорость. Та же непосредственная интуиция, которая дает нам представление о направлении, а следовательно и о касательной к кривой, пробегаемой в определенном смысле, заставляет нас приписывать каждому движению некоторую скорость. Определение скорости приводит нас как раз к тому же предельному переходу, который мы назвали дифференцированием.

Рассмотрим, например, движение точки по прямой линии, на которой положение точки определяется координатой y , представляющей взятое с определенным знаком расстояние этой точки от неподвижной начальной точки. Движение задано, если известна величина $y = f(t)$ как функция времени t . Если $f(t)$ линейная функция $f(t) = ct + b$, то движение называется равномерным движением со скоростью c и для любых значений t и t_1 можно писать

$$c = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

Скорость является таким образом отношением приращения функции $ct + b$ к приращению независимой переменной t и это отношение совершенно не зависит в данном случае от того, какие моменты времени t и t_1 мы берем. Но что же следует понимать под скоростью движения в момент t , если движение неравномерно?

Чтобы дать определение, рассмотрим отношение $\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$, которое назовем средней скоростью за промежуток времени между моментом t_1 и t . Если теперь средняя скорость приближается к определенному пределу, когда момент t_1 все более и более приближается к моменту t , то этот предел мы примем за скорость в момент t . Другими словами: скорость в момент t определяется производной:

$$f'(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

Это новое применение понятия производной, которое само по себе не имеет ничего общего с задачей о касательной, показывает нам, что действительно целесообразно было дать определение предельного перехода, дифференцирования как аналитической операции независимо от геометрической интуиции.

Дифференцируемость характеризующей движение функции $y = f(t)$ является и в данном случае допущением, которое мы всегда будем, не

оговаривая специально, принимать и которое безусловно необходимо для того, чтобы понятие скорости имело смысл.

Простой пример связи между движением и скоростью представляет случай свободного падения тел в пустоте. Если будем исходить из установленного опытным путем закона падения, гласящего, что путь, пройденный свободно падающим телом за время t , пропорционален величине t^2 , т. е. что этот путь y выражается функцией вида:

$$y = f(t) = at^2,$$

где a — постоянное, то тотчас же получим, как в п° 1, для скорости выражение $f'(t) = 2at$, указывающее, что скорость при свободном падении возрастает пропорционально времени.

3. Примеры. Мы проведем теперь дифференцирование функций на ряде примеров. В качестве первого примера рассмотрим функции $y = f(x) = c$, где c — постоянная. Имеем $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$, следовательно и $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$, т. е. производная постоянной равна нулю.

Для линейной функции $y = cx + b$ имеем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch}{h} = c.$$

Далее дифференцируем функцию

$$y = f(x) = x^a,$$

причем сперва предположим, что a — целое положительное число.

Тогда

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^a - x^a}{x_1 - x}$$

и правая сторона согласно известной формуле элементарной алгебры (ср. также § 2, пример 3) равна $x_1^{a-1} + x_1^{a-2}x + \dots + x^{a-1}$. После этого преобразования мы можем вследствие непрерывности полученного выражения сразу выполнить предельный переход $x_1 \rightarrow x$, просто заменяя повсюду в этом выражении x_1 через x ; тогда каждое слагаемое будет равно x^{a-1} . Так как число слагаемых равно a , мы получим:

$$y' = f'(x) = \frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}.$$

К тому же результату мы приходим, если $\alpha = -\beta$ — целое отрицательное число; но при этом мы определенно предполагаем, что x отлично от нуля. Мы имеем

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\frac{1}{x_1^\beta} - \frac{1}{x^\beta}}{x_1 - x} = \frac{x^\beta - x_1^\beta}{x - x_1} \cdot \frac{1}{x^\beta x_1^\beta} = \frac{x^{\beta-1} + x^{\beta-2}x_1 + \dots + x_1^{\beta-1}}{x^\beta x_1^\beta}.$$

Теперь опять можем совершить предельный переход $x_1 \rightarrow x$ заменой x_1 через x . Тогда получаем совершенно таким же образом, как и раньше, выражение

$$y' = -\beta \frac{x^{\beta-1}}{x^{2\beta}} = -\beta x^{-\beta-1}.$$

Таким образом получаем и при целых отрицательных значениях $\alpha = -\beta$ для функции $y = x^\alpha$ производную

$$f'(x) = y' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Наконец докажем эту формулу для случая, когда x — положительное число, а α — произвольное рациональное число, например $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, которые будем считать положительными.

(Если бы одно из них, например p , было бы отрицательным, то в рассуждении не было бы существенных изменений.)

Теперь имеем

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{x_1 - x}.$$

Полагаем

$$x^{\frac{1}{q}} = \xi; \quad \text{а} \quad x_1^{\frac{1}{q}} = \xi_1,$$

тогда

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\xi_1^p - \xi^p}{\xi_1^q - \xi^q} = \frac{\xi_1^{p-1} + \xi_1^{p-2}\xi + \dots + \xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1} + \xi_1^{q-2}\xi + \dots + \xi^{q-1}}.$$

Выполнив это преобразование, мы можем опять непосредственно совершить предельный переход $x_1 \rightarrow x$ или, что то же, $\xi_1 \rightarrow \xi$, и получаем для предела выражение

$$y' = \frac{p \xi^{p-1}}{q \xi^{q-1}} = \frac{p}{q} \xi^{p-q} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1},$$

или наконец

$$f'(x) = y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

т. е. формально тот же результат, что и раньше. Предоставляю вам самим доказать, что та же формула имеет место и для отрицательных

рациональных значений α . Впрочем мы еще вернемся позже к дифференцированию степени при более систематическом изложении.

Наконец рассмотрим дифференцирование тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$. Пользуясь элементарной тригонометрической формулой, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.\end{aligned}$$

Но в главе I, § 7, мы видели, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0;$$

следовательно непосредственно получаем, что искомая производная

$$y' = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Подобным же образом находится производная функция $y = \cos x$. Именно

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$$

и предельный переход $h \rightarrow 0$ тотчас же дает производную

$$y' = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

4. Некоторые основные правила дифференцирования. Как для интеграла, так и для производной получаются непосредственно из определения некоторые простые основные правила.

Если $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, то $\varphi'(x) = f'(x) + g'(x)$. Если $\varphi(x) = cf(x)$ (c — постоянная), то $\varphi'(x) = cf'(x)$. В самом деле,

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\text{и} \quad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и наши утверждения получаются непосредственно путем перехода к пределу.

Согласно этим правилам например производная функция $\varphi(x) = f(x) + ax + b$, где a и b — постоянные, выразится равенством

$$\varphi'(x) = f'(x) + a.$$

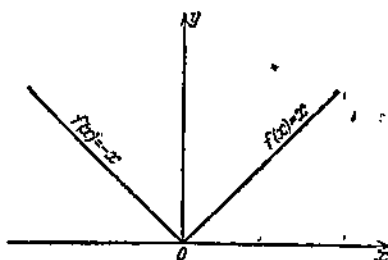
5. Дифференцируемость и непрерывность функций. Полезно заметить, что относительно функции, которую мы умеем дифференцировать, совсем не нужно отдельно доказывать, что она непрерывна. Непрерывность функции является следствием ее дифференцируемости.

В самом деле, если отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ стремится к пределу, когда h стремится к нулю, то непременно, числитель $f(x+h)-f(x)$ дроби должен стремиться к нулю одновременно с знаменателем h ; но в этом как раз и выражается непрерывность функции $f(x)$ в точке x .

Но нельзя ни в коем случае утверждать обратное, что непрерывная функция повсюду дифференцируема. Простейший пример, опровергающий такое утверждение, представляет функция $f(x)=|x|$, т. е. $f(x)=-x$ при значениях $x \leq 0$ и $f(x)=x$ для значения $x \geq 0$, изображенная на черт. 34.

Эта функция хотя и непрерывна в точке $x=0$, но не имеет в этой точке определенной производной. Предел отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ равен 1, если h стремится

к нулю, оставаясь положительным, и равен -1 , если h стремится к нулю, оставаясь отрицательным. Мы говорим, что наша функция имеет в точке $x=0$ различные правую и левую производные, причем мы вообще определяем правую и левую производные как предел, к которому стремится выражение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, когда h приближается к нулю, пробегая в первом случае только положительные значения, во втором случае — только отрицательные значения.



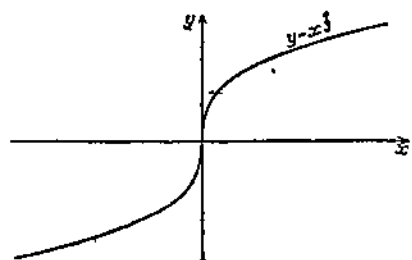
Черт. 34.

Дифференцируемость функции требует наряду с существованием правой и левой производных также равенства их. Если они между собой не равны, то геометрически это означает появление угловой точки на кривой.

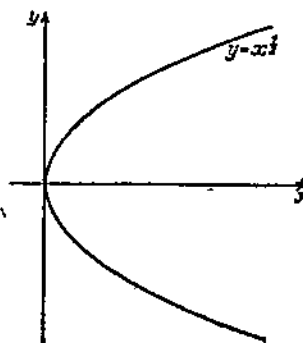
В качестве дальнейших примеров точек, в которых непрерывная функция недифференцируема, рассмотрим точки, в которых производная бесконечна, т. е. те точки, в которых не существует ни правой, ни левой производной, а отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$ неограниченно

возрастает. Например функция $y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ определена для всех значений x и непрерывна (между прочим, функция нечетная). Производная этой функции при $x \neq 0$ согласно п° 3 равна $y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$. В точке $x=0$

отношение $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}}$ и отсюда тотчас же следует, что при $h \rightarrow 0$ предела не существует и отношение стремится к ∞ . Функция имеет в этой точке, как для краткости говорят, бесконечную производную или производную, равную ∞ . Геометрически это означает, что касательная к кривой в этой точке перпендикулярна к оси x -ов, а кривая протекает гладко, т. е. без угловых точек (черт. 35).



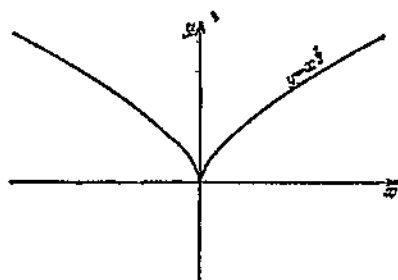
Черт. 35.



Черт. 36.

Точно так же функция $y=f(x)=\sqrt{x}$, определенная для значений $x \geq 0$ и непрерывная для этих значений, недифференцируема в точке $x=0$. В данном случае мы должны образовать только правую производную, так как функция y не определена для отрицательных значений x ; ввиду того что $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, правая производная бесконечна.

Следовательно кривая в начале координат касается оси y -ов (черт. 36).



Черт. 37.

Наконец функция $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ представляет пример, когда правая производная в точке $x=0$ равна $+\infty$, а левая равна $-\infty$, что непосредственно следует из соотношения

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}.$$

Сама же непрерывная кривая $y=x^{\frac{2}{3}}$, так называемая парабола Нейля, имеет в начале координат острое, перпендикулярное к оси x -ов (черт. 37).

6. Производные высших порядков и их значение. Производная $f'(x)$ в свою очередь является функцией от x , изображение которой называют дифференциальной кривой от данной кривой. Например ди-

дифференциальной кривой параболы $y = x^2$ является прямая, уравнение которой $y = 2x$, а дифференциальной кривой синусоиды $y = \sin x$ является косинусоида $y = \cos x$; таким же образом дифференциальной кривой для кривой $y = \cos x$ служит кривая $y = -\sin x$. (Последние кривые получаются друг из друга, как это видно из черт. 38, параллельным смещением в направлении оси x -ов.)

Естественно образовать далее дифференциальные кривые этих дифференциальных кривых, т. е. найти производную функции $f'(x) = \varphi(x)$.

Эту производную

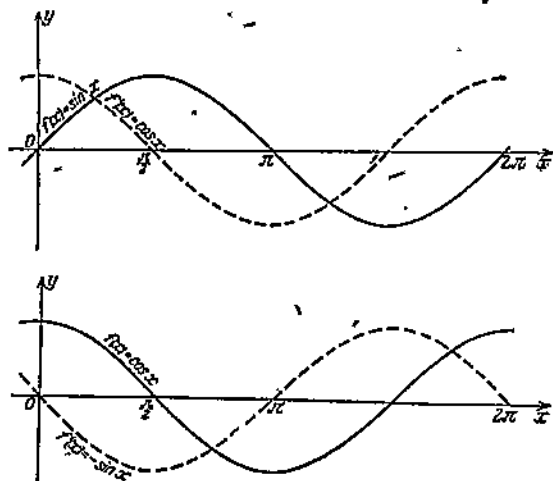
$$\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

если она существует, мы называем второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначаем ее через $f''(x)$. Подоб-

ным же образом мы можем попытаться образовать производную от $f''(x)$, так называемую производную третьего порядка (или третью производную) от $f(x)$, которую обозначим через $f'''(x)$. Для большинства функций, имеющих важное значение, нам ничто не мешает продолжать этот процесс произвольно далеко и мы определяем таким образом производную n -го порядка $f^{(n)}(x)$. В некоторых случаях целесообразно обозначать саму функцию $f(x)$ как производную нулевого порядка.

Если рассматривать независимую переменную x как время t и представить, как было указано выше, функцией $f(t)$ движение точки, то физическое значение производной второго порядка есть скорость изменения скорости $f'(t)$ или ускорение. Геометрическое значение производной второго порядка мы позже разберем подробно. Но уже здесь мы непосредственно замечаем следующее: если $f''(x)$ имеет положительное значение в точке x , то $f'(x)$ возрастает при возрастании x , если же $f''(x)$ имеет отрицательное значение, то $f'(x)$ убывает.

7. Производные и отношения приращений; обозначения Лейбница. Тот факт, что при предельном переходе, определяющем производную, разность Δx стремится к нулю, иногда выражают также словами: величина Δx становится бесконечно малой. Этой формулировкой хотя и отметить, что предельный переход рассматривается как процесс,



Черт. 38.

в продолжение которого величина Δx не равна нулю, но приближается неограниченно к нулю. Следуя Лейбницу, символически выражают предельный переход при нахождении производной тем, что символ Δ заменяют символом d . Таким образом этот символ Лейбница определяется равенством

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Со времени Лейбница производную (Ableitung), которая является пределом отношения разностей (Differenzenquotient), обозначают также на немецком языке термином Differentialquotient (отношение дифференциалов). Но если мы хотим ясно постигнуть сущность дифференциального исчисления, мы должны остерегаться того, чтобы смотреть на производную как на частное двух действительно существующих „бесконечно малых величин“. Дело обстоит так, что мы всегда должны сперва образовать отношение конечных приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где разность Δx не равна нулю. Затем следует представить себе, что путем преобразований этого отношения или каким-либо другим путем совершен переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что сперва совершаем какой-то предельный переход от Δx к бесконечно малой величине, которая все же отлична от нуля, т. е. переходим от Δx к dx и от Δy к dy и затем делим эти „бесконечно малые“ друг на друга. Такой взгляд на производную совершенно несовместим с требованием математической ясности понятий да и вообще не имеет смысла. Такой взгляд имеет, для много наивного человека нечто привлекательное, именно привлекает то таинственное, которое всегда связано со словом „бесконечность“, и в начале развития дифференциального исчисления и в частности у самого Лейбница такое мистически неясное понимание переплетается с вполне отчетливым представлением о предельном переходе. Правда, этот туман, который реял над основами новой науки, не мешал Лейбницу и его великим преемникам найти правильные пути.

Это однако не освобождает нас от обязанности избегать при обосновании дифференциального и интегрального исчислений всяких туманных представлений.

Причина того, что обозначение Лейбница не только имеет такую притягательную силу, но действительно чрезвычайно полезно и отличается большой гибкостью, заключается в том, что во многих вычислениях и формальных преобразованиях можно с символами dy и dx оперировать так, как будто они были бы просто арифметическими величинами, как обыкновенные числа. Многие вычисления существенно выигрывают при этом в смысле наглядности, хотя принципиально конечно их

всегда можно провести и без этой символики. Мы в дальнейшем найдем неоднократные подтверждения этого факта и докажем, что мы имеем право широко пользоваться этим обстоятельством, если только иметь в виду символический характер знаков dy и dx .

И для производных второго и высших порядков Лейбниц ввел обозначение очень наглядное (*von suggestiver Kraft*) и практически очень полезное. Именно, он рассматривает производную второго порядка как предел отношения разностей второго порядка. Рассмотрим наряду с аргументом x аргументы $x_1 = x + h$ и $x_2 = x + 2h$. Тогда мы под отношением разностей второго порядка понимаем отношение разностей первого порядка от отношения разностей первого порядка, т. е. выражение

$$\frac{1}{h} \left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y}{h} \right) = \frac{1}{h^2} (y_2 - 2y_1 + y),$$

где $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Обозначим еще $h = \Delta x$ и $y_2 - y_1 = \Delta y_1$, $y_1 - y = \Delta y$, тогда выражение, стоящее в скобках с правой стороны, равно $\Delta y_1 - \Delta y$, т. е. представляющее собой приращение приращения Δy , естественно назвать разностью второго порядка от y и символически записать так:

$$y_2 - 2y_1 + y = \Delta \Delta y = \Delta^2 y^1).$$

Наше выражение записывается теперь символически просто $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, причем в знаменателе действительно стоит квадрат Δx , а 2 в числителе символически означает двукратное повторение процесса образования разности. Эта запись²⁾ побудила Лейбница ввести для производных второго и высших порядков символическое обозначение

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

и т. д.

Это обозначение так же, как мы дальше увидим, оказывается формально очень полезным.

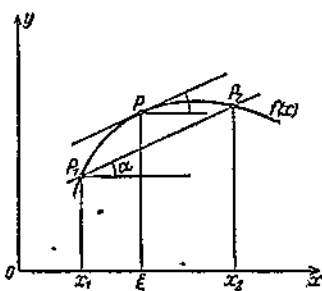
1) $\Delta \Delta = \Delta^2$ обозначает следовательно в данном случае не квадрат, а символизирует „разность от разности“ или „разность второго порядка“.

2) Замечу, что возможность представить производную второго порядка как предел выражения $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ требует доказательства. В самом деле, мы раньше дали другое определение второй производной, именно как производной от первой производной, т. е. как предел отношения приращения производной к приращению аргумента. Однако я могу пропустить здесь доказательство равносильности обоих определений при условии, что производная второго порядка непрерывна, тем более что оно само собой получится в шестой главе и не будет иметь для нас, между прочим, особенного значения.

8. Теорема о среднем значении. Между производной $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ и отношением конечных приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует простое соотношение, играющее во многих случаях важную роль; к этому соотношению, которое называется теоремой о среднем значении, мы приходим следующим образом. Рассматриваем отношение

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

причем относительно функции $f(x)$ предполагаем, что она имеет производную в каждой точке рассматриваемого интервала, т. е. что ее



Черт. 39.

графическое изображение имеет определенную касательную в каждой точке. На черт. 39 наше отношение представлено направлением секущей, а именно: тангенсом указанного на чертеже угла α . Представим себе, что мы переносим секущую параллельно самой себе, тогда по крайней мере один раз она займет такое положение, при котором коснется кривой в точке, абсцисса которой

лежит между x_1 и x_2 , а именно: во всяком случае в той точке дуги кривой, которая наиболее удалена от секущей. Таким образом существует такое промежуточное значение ξ , что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi).$$

Этот факт носит название теоремы о среднем значении в дифференциальном исчислении. Мы можем придать этому соотношению несколько иной вид, заметив, что число ξ можно представить в виде $\xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)$, где ϑ — некоторое число, лежащее между 0 и 1, которое, вообще говоря, точнее определить нельзя, да в этом (что особенно важно для применения теоремы о среднем значении) и нет надобности. Тогда точная формулировка теоремы о среднем значении гласит: если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ и дифференцируема по крайней мере в каждой точке незамкнутого интервала $x_1 < x < x_2$, то существует по крайней мере одно значение ϑ между 0 и 1

$$0 < \vartheta < 1,$$

такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f' [x_1 + \theta (x_2 - x_1)].$$

Заменяя x_1 через x и x_2 через $x + h$, можем представить теорему о среднем значении формулой

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi) = f'(x + \theta h),$$

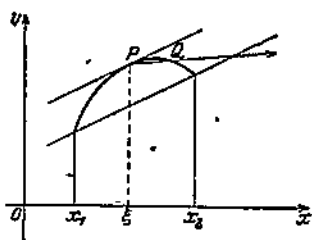
$$x < \xi < x + h.$$

Что непрерывность функции $f(x)$ на границах интервала непременно предполагается, между тем как существование производных на концах интервала необязательно, является на первый взгляд не имеющим существенного значения замечанием, однако оно окажется нам полезным в некоторых приложениях.

Если производная не существует хотя бы в одной внутренней точке интервала, то теорема о среднем значении может оказаться несправедливой, как видно из примера $f(x) = |x|$, приведенного на стр. 83.

Наше наглядное доказательство мы можем дополнить следующими соображениями.

Если кривая не совпадает со стягивающей ее хордой во всем интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ (в случае совпадения отношение разностей всегда равнялось бы производной), то на кривой обязательно должна лежать точка P , наиболее удаленная от этой хорды (черт. 40). В этой точке кривая согласно условию имеет определенную касательную, и эта касательная непременно должна быть параллельна хорде. В самом деле, касательная представляет предельное положение секущей, которое мы получаем, соединяя точку P с точкой Q на кривой и приближая точку Q неограниченно к точке P . Так как согласно допущению P удалена от хорды не менее чем Q , то продолжение отрезка PQ в направлении от P к Q должно всякий раз или встречать прямую, на которой лежит хорда, или быть ей параллельной; ввиду того что это имеет место, с какой бы стороны от P мы ни взяли точку Q , то это возможно лишь в том случае, если предельное положение секущей параллельно хорде, соединяющей точки $[x_1, f(x_1)]$ и $[x_2, f(x_2)]$. Число, которое мы раньше обозначили через ξ , есть просто абсцисса этой точки.



Черт. 40.

Обычно доказательство теоремы о среднем значении ведут в следующем порядке. Сперва доказывают теорему Ролля, которая представляет частный случай теоремы о среднем значении. „Если функция $\varphi(x)$

непрерывна в замкнутом интервале $x_1 \leq x \leq x_2$, если далее $\varphi(x_1) = 0$ и $\varphi(x_2) = 0$ и если наконец $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция внутри интервала, то непременно существует по крайней мере одна точка ξ внутри интервала, для которой $\varphi'(\xi) = 0$. В самом деле, внутри интервала должна быть по крайней мере одна точка ξ , для которой функция $\varphi(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение (см. гл. I, дополнения § 2) — допустим например, что ξ — такая точка и что значение $\varphi(\xi)$ не меньше всех остальных значений $\varphi(x)$ в рассматриваемом интервале, тогда при достаточно малом значении h непременно $\varphi(\xi) - \varphi(\xi + h) \geq 0$.

Если теперь в выражении $\frac{\varphi(\xi + h) - \varphi(\xi)}{h}$ число h будет стремиться к нулю, пробегая только через положительные значения, то, переходя к пределу, найдем, что $\varphi'(\xi) \leq 0$. Но если h будет стремиться к нулю, пробегая отрицательные значения, то $\frac{\varphi(\xi + h) - \varphi(\xi)}{h} \geq 0$ и предел следовательно не может быть отрицательным; поэтому $\varphi'(\xi) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорему Ролля применяем теперь к функции 1)

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)],$$

которая удовлетворяет очевидно условиям

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$$

и имеет форму

$$\varphi(x) = f(x) + ax + b$$

с постоянными коэффициентами $a = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ и b . Согласно п. 4 $\varphi'(x) = f'(x) + a$, и следовательно по теореме Ролля для некоторого промежуточного значения ξ имеем

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) + a,$$

что совпадает с теоремой о среднем значении.

9. Приближенное представление произвольных функций с помощью линейных. Дифференциалы. Равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

4) Эта функция представляет впрочем, как вы сами легко можете убедиться, расстояние точки, лежащей на кривой, от секущей с точностью до множителя, не зависящего от x .

являющееся определением производной, эквивалентно следующему:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \varepsilon h$$

или

$$f(x+\Delta x) = y + \Delta y = f(x) + \Delta x f'(x) + \varepsilon \Delta x,$$

где ε — величина, стремящаяся к нулю вместе с $h = \Delta x$. Представим себе значение x фиксированным, а Δx — переменным, тогда этими формулами приращение функции, т. е. величина Δy разбивается на два слагаемых: одно пропорциональное h слагаемое $hf'(x)$ („линейная“ часть) и второе слагаемое („погрешность“), которое тем меньше по отношению к h , чем меньше само приращение h . Итак, функция $f(x+h)$ при постоянном x тем точнее представляется в своей зависимости от h линейной частью $f(x) + hf'(x)$, чем меньшим интервалом вокруг точки x мы ограничиваемся. Этому приближенному представлению функции $f(x+h)$ с помощью указанной линейной функции от h геометрически соответствует замена кривой ее касательной в точке x . Мы вернемся еще к практическому применению этих соображений для выполнения приближенных вычислений позже в главе VII.

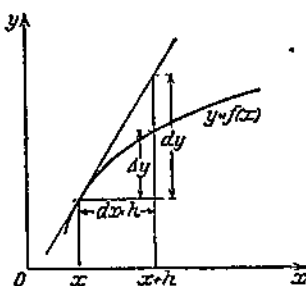
Здесь же я хочу лишь мимоходом заметить, что, исходя из этого приближенного представления приращения Δy с помощью линейного выражения $hf'(x)$, можно дать логически безупречное определение понятия „дифференциал“, как это впервые, следуя Лейбницу, сделал Коши.

Несмотря на то, что понятие дифференциала как бесконечно малой величины не имеет смысла и что столь же бессмысленно рассматривать производную как отношение двух таких величин, мы можем однако добиться такого толкования равенства $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, при котором выражение

$\frac{dy}{dx}$ можно было понимать не только символически, но действительно как частное двух величин dy и dx . Для этого даем сперва определение производной $f'(x)$ с помощью нашего предельного перехода, представляем себе далее x фиксированным, а приращение $h = \Delta x$ — переменным. Называем это приращение дифференциалом от x и пишем $h = dx$. Определяем наконец в качестве дифференциала функции y выражение $dy = y' dx = hf'(x)$, т. е. опять-таки число, которое не имеет ничего общего с бесконечно малыми величинами. Теперь производная $y' = f'(x)$ действительно является отношением дифференциалов dy и dx ; но теперь в этом утверждении нет ничего удивительного, это — простая тавтология, иное выражение определения терминов. Таким образом дифференциал dy есть линейная часть приращения Δy (черт. 41).

Мы вначале не будем пользоваться этими дифференциалами. Укажу однако для полноты, что можно также образовать дифференциалы второго и

высших порядков. Именно представим себе, что выбрано какое-то h и притом одно и то же для различных значений x , тогда $dy = hf'(x)$



Черт. 41.

будет функцией от x , для которой можно в свою очередь образовать дифференциал. Эту величину назовем дифференциалом второго порядка от y и обозначим символом $d^2y = d^2f(x)$. Она представляет линейную часть приращения $hf'(x+h) - hf'(x)$, т. е. $d^2y = h^2f''(x)$. Можем конечно продолжать в том же духе и приходим таким образом последовательно к дифференциалам третьего порядка, четвертого порядка и т. д., которые можно определить с помощью выражений $h^3f'''(x)$, $h^4f^{(IV)}(x)$ и т. д.

10. Замечания относительно применения наших понятий в естествознании. В приложениях математики к явлениям природы нам никогда не приходится иметь дело с вполне точно определенными величинами.

Равняется ли определенная длина точно метру — есть вопрос, который не может быть разрешен никаким экспериментом и потому не имеет физического смысла. Столь же мало смысла имеет с физической точки зрения говорить о том, что длина некоторого материального бруска рациональна или иррациональна; мы сможем выразить эту длину с любой степенью точности с помощью рациональных чисел, и при измерении нас главным образом интересует, можно ли при этом обойтись рациональными числами со сравнительно небольшими знаменателями или нет. Подобно тому как вопрос о рациональности или иррациональности в строгом смысле „точной математики“ (Präzisionsmathematik) не имеет физического смысла, так и предельные переходы в приложениях математики обычно представляют только математическую идеализацию. Значение такой идеализации для приложений заключается прежде всего в том, что благодаря ей все аналитические выражения становятся существенно проще и удобнее. Например гораздо проще и удобнее оперировать с понятием мгновенной скорости, которая является функцией только одного определенного момента времени, чем с понятием средней скорости между двумя различными моментами. Любое теоретическое изучение природы было бы при отсутствии математической идеализации обречено на безнадежное усложнение и должно было бы остановиться на самых начальных стадиях. Я однако не собираюсь вдаваться здесь в рассуждения об отношении математики к действительности; хочу только подчеркнуть по поводу наших новых понятий, что в приложениях всегда имеем право заменить производную отношением разностей и обратно, если только рассматриваемые разности настолько малы, чтобы гарантировать достаточную

точность приближения. Физик, биолог, техник или всякий другой, кому приходится практически иметь дело с этими понятиями, будет иметь тогда право в пределах требуемой точности отождествить производную с отношением разностей. При этом он будет иметь возможность тем точнее представить приращение $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ с помощью величины $hf'(x)$ (дифференциала dy), чем меньше приращение h независимой переменной (или, пользуясь обозначениями п^о 9, дифференциал $h = dx$). Пока он при этой замене остается в пределах точности, которые ему каждый раз отмечены в его задаче, он обыкновенно называет приращения $dx = h$ и $dy = hf'(x)$ бесконечно малыми величинами. Эти физические бесконечно малые величины имеют точный смысл. Это безусловно конечные отличные от нуля величины, выбранные только в рассматриваемом вопросе достаточно малыми, например меньше какой-нибудь части длины волны или меньше расстояния двух электронов в атоме и т. п., вообще меньше некоторой желательной степени точности.

§ 4. Неопределенный интеграл, первообразная функция и основные теоремы дифференциального и интегрального исчисления.

Как уже было упомянуто, основным пунктом дифференциального и интегрального исчисления является связь между задачей интегрирования и задачей дифференцирования. К установлению этой связи мы теперь и переходим.

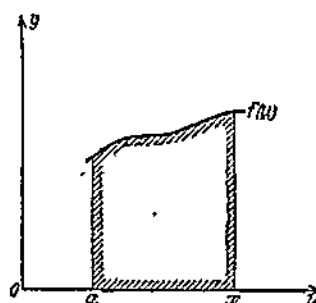
1. Интеграл как функция верхнего предела. Значение определенного интеграла функции $f(x)$ зависит от обоих пределов интеграции a и b . Интеграл является функцией как верхнего предела b , так и нижнего предела a . Чтобы ближе изучить эту зависимость, представим себе прежде всего, что нижний предел a есть определенное постоянное число; обозначим переменную интеграции не через x , а через u , что конечно совершенно безразлично (см. стр. 69), а верхний предел интеграции b обозначим через x , чтобы отметить, что мы хотим его рассматривать как переменную, и исследуем значение интеграла как функцию его верхнего предела. В силу этого полагаем

$$\int_a^x f(u) du = \Phi(x).$$

Эту функцию $\Phi(x)$ мы называем неопределенным интегралом, функцией $f(x)$.

Ясно, что функция $\Phi(x)$ не является единственным неопределенным интегралом от функции $f(x)$, так как за нижний предел интеграла вместо a можно взять произвольные другие значения, в связи с чем изме-

няется и значение интеграла. Геометрически неопределенный интеграл выражается для каждого значения x площадью (черт. 42), ограниченной кривой $y=f(u)$, ординатами $u=a$ и $u=x$ и отрезком оси u , причем знак площади устанавливается конечно по указанным выше (§ 1, п° 3) правилам.



Черт. 42.

Выбирая вместо нижнего предела a другое значение α , мы получаем неопределенный интеграл

$$\Psi(x) = \int_{\alpha}^x f(u) du.$$

Разность $\Phi(x) - \Psi(x)$ выражается очевидно интегралом

$$\int_{\alpha}^a f(u) du$$

и является следовательно постоянным числом, поскольку a и α — постоянны. Таким образом

$$\Psi(x) = \Phi(x) + \text{const},$$

т. е. различные неопределенные интегралы от одной и той же функции различаются между собой только аддитивной постоянной.

Можно было бы подобным же образом рассматривать интеграл как функцию нижнего предела, введя функцию

$$\varphi(x) = \int_x^b f(u) du,$$

где b — постоянное число. И здесь две функции с различными верхними пределами b и β различаются между собой только на аддитивную постоянную

$$\int_b^{\beta} f(u) du.$$

2. Производная неопределенного интеграла. Мы хотим теперь продифференцировать неопределенный интеграл $\Phi(x)$ по переменной x . Мы получаем в результате дифференцирования следующую теорему.

Неопределенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u) du$$

непрерывной функции $f(x)$ имеет всегда производную $\Phi'(x)$, а именно

$$\Phi'(x) = f(x),$$

т. е. дифференцирование неопределенного интеграла от заданной непрерывной функции дает опять ту же функцию.

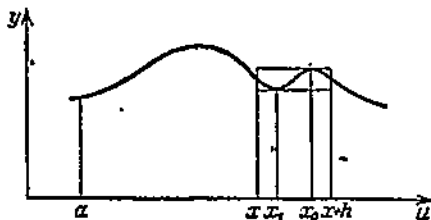
Этот факт образует основу всего дифференциального и интегрального исчисления. Доказательство теоремы получается чрезвычайно просто, если пользоваться геометрическим толкованием интеграла как площади. Образует

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}$$

и рассматриваем числитель

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(u) du = \int_a^x f(u) du - \int_a^{x+h} f(u) du = \int_x^{x+h} f(u) du$$

как площадь, заключенную между ординатами, соответствующими абсциссам x и $x+h$. Если в интервале между x и $x+h$ функция $f(x)$ принимает в точке x_0 наибольшее значение $f(x_0)$, а в точке x_1 — наименьшее значение $f(x_1)$ (черт. 43), то величина рассматриваемой площади заключается между числами $hf(x_0)$ и $hf(x_1)$, представляющими площади прямоугольников, основанием которых служит наш интервал, а высоты равны $f(x_0)$ и $f(x_1)$. Итак, в аналитической форме имеем:



Черт. 43.

$$f(x_0) \geq \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \geq f(x_1),$$

что можно получить и не прибегая к геометрическому истолкованию интеграла из определения его как предела суммы следующим образом¹⁾:

Пусть

$$\int_x^{x+h} f(u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{n-1} f(u_v) \Delta u_v,$$

где $u_0 = x$, $u_n = x+h$ представляют крайние точки деления интервала между x и $x+h$, а все разности $\Delta u_v = u_{v+1} - u_v$ с возрастанием n стремятся к нулю. Но $\frac{\Delta u_v}{h}$ непременно имеет положительное значение,

¹⁾ См. впрочем также соображения, изложенные на стр. 109.

каков бы ни был знак h , кроме того $f(x_0) \geq f(u_v) \geq f(x_1)$ и сумма величин Δu_v равна h , поэтому

$$f(x_0) \geq \frac{1}{h} \sum_{v=0}^{n-1} f(u_v) \Delta u_v \geq f(x_1).$$

Отсюда путем перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ получаем указанное соотношение для

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u) du = \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}.$$

Когда же h стремится к нулю, то $f(x_0)$ и $f(x_1)$ должны вследствие непрерывности функции стремиться к значению $f(x)$. Таким образом непосредственно получаем, что

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x);$$

это равенство как раз составляет содержание нашей теоремы.

Из доказанной таким образом дифференцируемости функции $\Phi(x)$ тотчас же на основании § 3, п° 5 следует: интеграл непрерывной функции $f(x)$ есть в свою очередь непрерывная функция верхнего предела.

Чтобы дополнить наш результат, заметим, что при рассмотрении определенного интеграла не как функции верхнего, а как функции $\varphi(x)$ его нижнего предела производная равна не $f(x)$, а $-f(x)$; т. е. если

$$\varphi(x) = \int_x^b f(u) du,$$

то

$$\varphi'(x) = -f(x).$$

Доказательство этого получаем сразу, заметив, что

$$\int_x^b f(u) du = - \int_b^x f(u) du.$$

3. Первообразная функция; общее определение неопределенного интеграла. Доказанная в предыдущем п° теорема обнаруживает, что неопределенный интеграл $\Phi(x)$ дает решение следующей задачи.

Дана функция $f(x)$. Найти такую функцию $F(x)$, чтобы

$$F'(x) = f(x).$$

Эта задача требует от нас обращения процесса дифференцирования. Это — одна из типичных задач об обращении, которые

встречаются в математике во многих местах и с которыми мы уже неоднократно в этом курсе знакомились как с плодотворным принципом математического творчества. (Так например первое расширение понятия о натуральном числе произошло под влиянием требования об обращении известных простых действий над числами. Образование обратных функций приводило нас и еще приведет в дальнейшем к функциям нового рода).

Такую функцию $F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$, мы называем первообразной функцией от функции $f(x)$; этим названием хотят отметить, что функция $f(x)$ получается из нее дифференцированием. Эта проблема об обращении дифференцирования или нахождения первообразной функции от $f(x)$ на первый взгляд имеет совершенно иной характер, чем проблема интегрирования. Однако же результат, полученный в п^о 2, гласит: неопределенный интеграл $\Phi(x)$ от функции $f(x)$ есть первообразная функция от $f(x)$.

Этим результатом однако задача о нахождении первообразной функции еще не вполне решена, ибо мы еще не знаем, получим ли мы этим путем все решения задачи. На вопрос о совокупности всех первообразных функций дает ответ следующая теорема (которую иногда также называют основной теоремой дифференциального и интегрального исчисления):

$$F_1(x) - F_2(x) = c,$$

т. е. разность двух различных первообразных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ от $f(x)$ — всегда постоянное число. Таким образом мы получаем из одной первообразной функции $F(x)$ все остальные в виде

$$F(x) + c$$

при соответствующем выборе постоянной c . Обратно, выражение $F_1(x) = F(x) + c$ представляет первообразную функцию от $f(x)$ при всяком значении постоянной c .

Что при любом выборе этой постоянной c функция $F(x) + c$ является первообразной функцией от $f(x)$ одновременно с $F(x)$ почти очевидно. В самом деле,

$$\frac{F(x+h) + c - [F(x) + c]}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

но предел правой части при $h \rightarrow 0$ по условию равен $f(x)$, следовательно и предел левой части этого равенства тоже равен $f(x)$, т. е.

$$\frac{d}{dx} [F(x) + c] = F'(x) = f(x).$$

Нам остается теперь только доказать, что разность двух произвольных первообразных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ является постоянной.

|| Для этого рассмотрим разность

$$F_2(x) - F_1(x) = G(x)$$

и образуем

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{F_2(x+h) - F_2(x)}{h} - \frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h} \right\}.$$

По условию обе дроби в правой части при убывании h имеют предел $f(x)$, т. е. для любого из рассматриваемых значений x производная $G'(x) = 0$. Но функция, производная которой повсюду равна нулю, должна изображаться кривой, касательная в любой точке которой параллельна оси x -ов, т. е. сама функция должна быть постоянной; таким образом $G(x) = c$, как мы и утверждали.

Это же можно доказать, не прибегая к геометрической интуиции, с помощью теоремы о среднем значении следующим образом: имеем

$$G(x_2) - G(x_1) = (x_2 - x_1) G'(\xi); \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Так как производная $G'(x)$ равна нулю при всяком из рассматриваемых значений аргумента, а следовательно и при любом промежуточном значении ξ , то сразу получаем $G(x_2) = G(x_1)$; но x_1 и x_2 — два произвольных значения x в рассматриваемом интервале, следовательно $G(x)$ сохраняет постоянное значение в этом интервале.

Итак, можно, принимая во внимание результат п° 2, утверждать: всякая первообразная функция $F(x)$ от $f(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = c + \Phi(x) = c + \int_a^x f(u) du,$$

где c и a — постоянные; обратно, наше выражение представляет при любом фиксированном значении a и произвольном значении c первообразную функцию от $f(x)$.

На первый взгляд кажется, что постоянную c можно опустить, потому что неопределенный интеграл уже изменяется на аддитивную постоянную при изменении нижнего предела интегрирования a .

Однако если отбросить c , во многих случаях получались бы действительно не все первообразные функции, как показывает пример функции $f(x) = 0$. В этом случае неопределенный интеграл в смысле п° 1 всегда равен нулю, каков бы ни был нижний предел a ; первообразной же функцией от $f(x) = 0$ является любая постоянная. Другой пример дает функция $f(x) = \sqrt{x}$; она определена только для положительных значе-

ний x , и мы ограничимся только положительными значениями корня (т. е. $f(x) > 0$).

Тогда

$$\Phi(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}},$$

и мы видим, что как бы мы ни выбирали нижний предел a , всегда неопределенный интеграл $\Phi(x)$ получается путем прибавления к $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ отрицательной постоянной $-\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$; между тем например $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 1$ также является первообразной функцией от $\sqrt{x}$. Поэтому в общем выражении первообразной функции нельзя обойтись без аддитивной постоянной. Найденная связь делает естественным некоторое расширение понятия неопределенного интеграла. Именно мы будем теперь называть неопределенным интегралом от $f(x)$ всякое выражение вида

$$c + \Phi(x) = c + \int_a^x f(u) du.$$

Иными словами, мы не будем теперь делать различия между неопределенным интегралом и первообразной функцией. Но для понимания общей связи безусловно необходимо ясно представить себе, что обращение дифференцирования и интегрирование сперва две совершенно различные вещи и что лишь установление связи между ними дает право употреблять вместо первообразной функции также термин „неопределенный интеграл“.

Принято символически обозначать неопределенный интеграл обозначением, которое само по себе не совсем ясно. Именно пишут

$$c + \int_a^x f(u) du = \int f(x) dx,$$

т. е. опускают верхний предел x и нижний предел a и аддитивную постоянную c и обозначают переменную интеграции через x , чего собственно следовало бы избегать, чтобы исключить возможность смешивания с верхним пределом x . Употребляя обозначение $\int f(x) dx$ для неопределенного интеграла, вы всегда должны помнить о связанной с этим неопределенности, именно о том, что этот символ обозначает только какой-то неопределенный интеграл.

4. Применение первообразной функции к вычислению определенных интегралов. Допустим, что нам известна первообразная функция

$$F(x) = \int f(x) dx$$

от $f(x)$, и мы хотим вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(u) du$.

Мы знаем, что неопределенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u) du$$

отличается от другой первообразной функции $F(x)$ только аддитивной постоянной.

Поэтому

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

и аддитивная постоянная c тотчас же определяется, если заметить, что неопределенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u) du$$

при $x=a$ должен равняться нулю. Следовательно

$$0 = \Phi(a) = F(a) + c,$$

отсюда

$$c = -F(a), \text{ а } \Phi(x) = F(x) - F(a);$$

в частности при $x=b$ имеем

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a).$$

Таким образом получаем важное правило: можно получить определенный интеграл от $f(x)$, взятый в пределах a и b , образуя с помощью какой-либо первообразной функции $F(x)$ разность $F(b) - F(a)$.

Только что выведенное правило можно, пользуясь соотношением $F'(x) = f(x)$, записать также следующим образом:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx} dx.$$

Эту формулу можно очень просто доказать прямо.

Если заменим в правой части производную $\frac{dF}{dx}$ отношением разностей $\frac{\Delta F}{\Delta x}$, символ dx — через Δx , а интеграл — суммой $\sum \frac{\Delta F(x_i)}{\Delta x_i} \Delta x_i$, то получаем как раз сумму разностей ΔF , и ясно, что эта сумма имеет значение $F(b) - F(a)$.

С другой стороны, по теореме о среднем значении $\frac{\Delta F}{\Delta x_i} = F'(\xi_i)$, где ξ_i есть некоторое промежуточное значение между x_i и x_{i+1} . Наша сумма следовательно равна $\sum \Delta x_i F'(\xi_i)$; последняя же сумма при неограниченном уменьшении частичных интервалов переходит согласно определению интеграла в $\int_a^b F'(x) dx$, что доказывает правильность нашей формулы.

При применении этого правила часто пользуются символическим обозначением для выражения разности $F(b) - F(a)$, а именно пишут

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

и вертикальной черточкой отмечают таким образом, что в стоящем спереди выражении надо подставить вместо x сперва b , затем a и наконец из первого числа отнять второе.

5. Примеры. Мы можем теперь проследить вышеизложенную зависимость между определенным интегралом, неопределенным интегралом и производной на ряде простых примеров. С помощью теоремы п° 2 мы можем из каждой из непосредственно доказанных в § 2 формул интегрирования получить формулу дифференцирования.

В § 2 мы получили для любых рациональных значений, отличных от -1 , и любых положительных значений a и b формулу

$$\int_a^b x^a dx = \frac{1}{a+1} (b^{a+1} - a^{a+1}),$$

которую мы запишем, обозначая переменную интеграции через u , а верхний предел через x , в виде

$$\int_a^x u^a du = \frac{1}{a+1} (x^{a+1} - a^{a+1}).$$

Отсюда по нашей основной теореме следует, что правая часть есть первообразная функция от подынтегральной функции, т. е. что формула

$$\frac{d}{dx} (x^{a+1}) = (a+1) x^a$$

справедлива при всех рациональных значениях a , кроме значения $a = -1$. Полученный результат вполне совпадает с результатом, полученным в § 3 путем непосредственного дифференцирования. Мы могли бы следовательно,

опираясь на основную теорему, сэкономить себе труд, затраченный на дифференцирование, после того как мы уже произвели интегрирование.

Далее из доказанной в § 2 формулы интегрирования

$$\int_a^x \cos u \, du = \sin x - \sin a$$

следует формула дифференцирования $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, что совпадает с результатом, полученным в § 3.

Но мы можем и наоборот каждую непосредственно доказанную формулу дифференцирования $F'(x) = f(x)$ рассматривать как соотношение между первообразной функцией $F(x)$ и производной функцией $f(x)$ и следовательно рассматривать ее как формулу неопределенного интегрирования и затем по правилу n° 4 получить определенный интеграл от $f(x)$. Как раз этим методом, как мы увидим в главе IV, очень часто пользуются. В частности мы можем исходить из результатов § 3 и получить из них с помощью основной теоремы формулы интегрирования § 2. Так например согласно § 3 $\frac{d}{dx} x^{a+1} = (a+1)x^a$. Следовательно $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ представляет первообразную функцию или неопределенный интеграл от x^a ; тем самым согласно n° 4 получается приведенная выше формула интегрирования

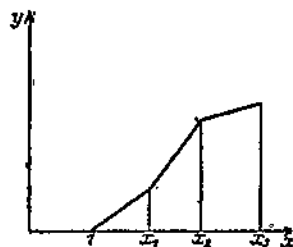
§ 5. Простейшие методы графического интегрирования.

Неопределенный интеграл или первообразная функция от $f(x)$ есть функция $y = F(x)$; эту функцию мы наглядно изображали в виде площади, но можно конечно представить ее графически как и всякую другую функцию в виде кривой. Из определения наших понятий непосредственно вытекает возможность простым способом приближенно построить эту кривую и составить себе таким образом наглядное представление об интегральной функции.

Прежде всего надо принять во внимание, что эта кривая определена не однозначно, а лишь с точностью до параллельного перемещения в направлении оси y -ов благодаря аддитивной произвольной постоянной. Можно таким образом потребовать еще от интегральной кривой, чтобы она проходила через определенную произвольно заданную точку, например, если $x=1$ принадлежит к интервалу, в котором определена функция $f(x)$, через точку с координатами $x=1$ и $y=0$. Тогда интегральная кривая вполне определена требованием, чтобы направление ее в каждой точке x давалось соответствующим значением функции $f(x)$. Чтобы дать приближенное построение кривой, удовлетворяющей этим условиям, пытаются построить вместо кривой, уравнение которой $y = F(x)$, поли-

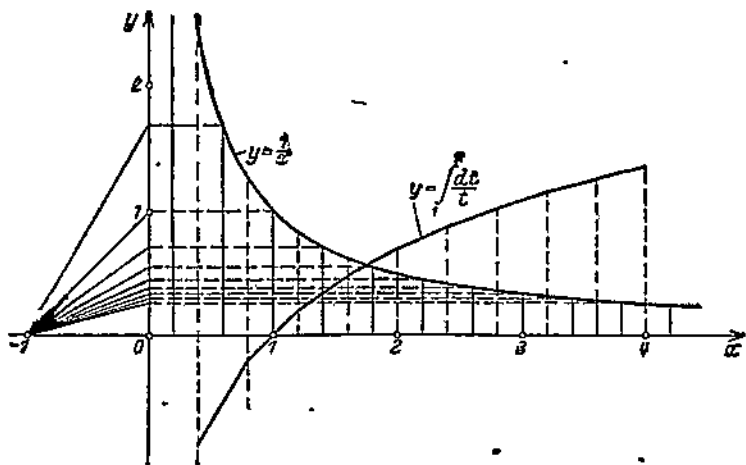
гональную линию, состоящую из прямолинейных отрезков, вершины которой лежат над заданными точками деления оси x -ов и стороны которой на соответствующем участке приближенно дают направление искомой кривой. С этой целью делят рассматриваемый интервал на оси x -ов с помощью точек $x=1, x_1, x_2, \dots$

на некоторое число частей, которые могут и не быть равны между собой, и проводят через точки деления прямые, параллельные оси y -ов. Далее проводят (черт. 44) через точку $(1,0)$ прямую с угловым коэффициентом, равным $f(1)$; в точке пересечения этой прямой с прямой $x=x_1$ проводят прямую с угловым коэффициентом $f(x_1)$ до пересечения с прямой $x=x_2$ и продолжают этот процесс. Для того чтобы



Черт. 44.

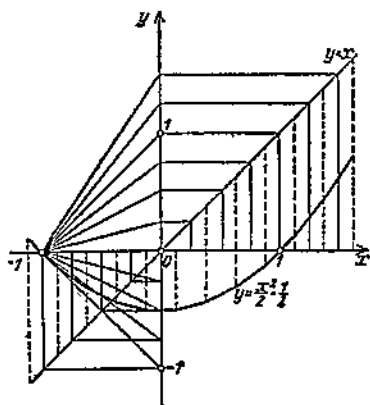
практически построить прямые с данным угловым коэффициентом, восстанавливают в каждой точке деления ординату кривой $y=f(x)$. Эту ординату проектируют на какую-нибудь прямую, параллельную оси ординат, например на самую ось y -ов. В последнем случае направление касательной к интегральной кривой получают, соединяя точку $x=0, y=f(x)$ с точ-



Черт. 45.

кой $x=-1, y=0$ (черт. 45 и 46). Переноса эти направлений параллельно самим себе, строят ломаную линию, вершины которой лежат над заданными точками деления и направления сторон которой каждый раз совпадают с направлениями интегральной кривой в начальных точках частичных интервалов. Если разбить интервал на достаточно мелкие части, то полученная ломаная будет сколь угодно точным приближением к интегральной кривой. Часто можно точность, еще несколько увеличить,

если брать каждый раз за направление стороны ломаной направление касательной в средней, а не в начальной точке соответствующего интервала¹⁾.



Черт. 46.

На черт. 46 указанное построение проведено для функции $f(x) = x$. Получаем таким образом с помощью графического интегрирования в качестве интегральной кривой параболу $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$. Далее, на черт. 45 вычерчена интегральная функция $F(x)$ от функции $f(x) = \frac{1}{x}$, функция, которую мы позже (см. главу III, § 6) еще подробно будем изучать — именно мы увидим, что это — логарифмическая функция. Наконец рекомендую вам проделать самостоятельно несколько примеров, скажем, графически проинтегрировать $\sin x$ и $\cos x$.

§ 6. Дальнейшие замечания о связи между интегралом и производной.

Прежде чем перейти к систематическому изучению найденных в § 4 зависимостей, я хочу осветить их еще с другой точки зрения, находящейся в самой тесной связи с наглядным представлением о плотности и с другими физическими понятиями.

1. Распределение массы и плотность; общее количество и удельное количество. Представим себе, что на прямой линии оси x -ов распределены какие-то массы, притом непрерывно, но не обязательно равномерно. Представим себе например воздушный столб данного поперечного сечения, вертикально стоящий над поверхностью земли; примем при этом за ось x -ов направленную вверх вертикальную прямую, а за начальную точку $x=0$ — точку на земной поверхности. Вся масса между двумя абсциссами $x=x_1$ и $x=x_2$ характеризуется с помощью так называемой

¹⁾ Замечу мимоходом, что графическая интеграция, т. е. графическое нахождение первообразной функции $F(x)$ к заданной в виде кривой функции $f(x)$, может быть выполнена и механическими аппаратами, так называемыми интеграфами, у которых один штифт перемещают вдоль заданной $y=f(x)$, а другой пишущий штифт автоматически вычерчивает одну из кривых $y=F(x)$, для которых $F'(x)=f(x)$. Неопределенность произвольной постоянной выражается в некоторой произвольности выбора первоначального положения аппарата.

Подробнее см. об этом например у A. Galle, *Mathematische Instrumente*, Leipzig 1912, IX отдел.

суммирующей функции $F(x)$ следующим образом. Исходят из точки $x=0$, начальной точки распределения масс по прямой, и под $F(x)$ понимают всю массу, лежащую между абсциссой 0 и абсциссой x . Приращение массы между абсциссами x_1 и x_2 выражается тогда просто разностью

$$F(x_2) - F(x_1),$$

причем этой разности приписывается знак, изменяющийся при перестановке x_1 и x_2 .

Среднее значение массы, приходящейся на единицу длины в интервале от x_1 до x_2 , равно

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Допустим, что функция $F(x)$ дифференцируема, тогда это значение при $x_2 \rightarrow x_1$ стремится к значению производной $F'(x_1) = f(x_1)$.

Эта последняя величина представляет как раз то, что обыкновенно называют удельной массой, или удельной плотностью, или просто плотностью нашего распределения масс в точке x_1 (она конечно, вообще говоря, изменяется с изменением места). Между плотностью $f(x)$ и суммирующей функцией $F(x)$ следовательно существует просто соотношение

$$F(x) = \int_0^x f(u) du; \quad f(x) = F'(x).$$

Суммирующая функция является первообразной функцией от плотности или, иными словами, масса есть интеграл плотности и обратно: плотность есть производная от суммирующей функции.

Совершенно аналогичные соотношения встречаются в физике неоднократно. Если мы например обозначим количество теплоты, которое нужно для повышения температуры определенной единицы некоторого вещества с температуры t_0 до температуры t , через $Q(t)$, то для повышения температуры с t_1 до t_2 потребуется количество теплоты, равное

$$Q(t_2) - Q(t_1).$$

Среднее количество тепла, затрачиваемое на повышение температуры на единицу, равно

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1};$$

если предположим опять-таки дифференцируемость функции $Q(t)$, то в пределе получим функцию

$$q(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{Q(t) - Q(t_1)}{t - t_1}.$$

которую назовем удельной теплоемкостью данного вещества. Эту удельную теплоемкость надо рассматривать, вообще говоря, как функцию от температуры.

И здесь между удельной теплоемкостью и общим количеством теплоты существует соотношение

$$\int_a^b q(t) dt = Q(b) - Q(a),$$

которое характеризует зависимость между интегралом и производной.

Совершенно аналогичные условия мы встречаем повсюду, где можно всему количеству противопоставить удельное количество, как например электрическому заряду — плотность электричества, силе, приложенной к поверхности, — плотность силы или давление в каждой точке и т. д.

В природе дело обыкновенно обстоит так, что нам заранее известны не удельные величины, т. е. плотность, а общее количество; первичными величинами являются таким образом интегралы (что выражается впрочем и в названии „первообразная функция“), и лишь предельный переход, именно дифференцирование, приводит нас к удельным величинам.

Замечу кстати, что при нашем подходе, когда мы массы рассматриваем как положительные по природе своей величины, суммирующая функция $F(x)$ непременно монотонно возрастает вместе с x и вследствие этого удельная величина — плотность положительна. Но конечно ничто не мешает нам ввести представление и об отрицательных массах (например отрицательное электричество); тогда наши суммирующие функции $F(x)$ не ограничиваются более никакими условиями монотонности.

2. Точка зрения приложений. Отношение первообразной суммирующей функции к удельной плотности распределения станет, пожалуй, еще яснее, если опять представить себе, что с точки зрения физических фактов предельный переход как при интегрировании, так и при дифференцировании представляет идеализацию и что в природе этому предельному переходу в точности ничего не соответствует; что скорее вместо интеграла в физической действительности надо в сущности образовать только сумму очень многих весьма малых слагаемых, а вместо производной — отношение очень малых приращений. Величины Δx остаются отличными от нуля; предельный переход $\Delta x \rightarrow 0$ имеет исключительно математическое значение далеко идущего упрощения, при котором однако точность математического представления действительности заметно не нарушается. Например мы не можем представить себе, принимая атомистическое строение материи, что масса в столбе воздуха распределена непрерывно как функция от x ; наоборот, мы будем представлять себе (что впрочем в свою очередь является идеализирующим упрощением), что масса распределена

вдоль оси x в виде очень многих, лежащих очень близко друг к другу молекул, которые мы себе представляем в виде точек. Тогда суммирующая функция $F(x)$ не будет непрерывна; наоборот, она в интервале между двумя молекулами будет иметь постоянное значение и будет изменяться скачком, когда мы, изменяя x , пройдем через положение новой молекулы. Величина этого скачка как раз равна массе молекулы, а среднее расстояние двух молекул будет согласно результатам атомистической теории порядка 10^{-8} см. Если мы наши величины Δx выберем очень малыми, но все же достаточно большими по сравнению с длиной 10^{-8} см, например равными 10^{-4} см, то число молекул в каждом интервале от x до $x + \Delta x$ будет еще настолько велико, именно порядка 10^4 , что и по отношению к ним еще сохраняется впечатление непрерывного распределения и поэтому считают себя вправе идеализировать это распределение с помощью непрерывной и дифференцируемой функции.

В качестве плотности тогда просто рассматривают отношение приращений

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x};$$

при этом конечно существенным физическим допущением является допущение, что это отношение не будет заметно изменяться, когда мы будем изменять Δx в некоторых пределах, скажем, в пределах от 10^{-4} до 10^{-5} см.

Непосредственно видим, что эта плотность связана со всей массой очевидным равенством

$$F(x) = \sum \frac{\Delta F}{\Delta x} \Delta x.$$

Полезно, пожалуй, разобрать еще один пример понятий: суммирующая функция и плотность распределения. В статистике например, в кинетической теории материи или в статистической биологии эти понятия часто встречаются в форме, в которой характер математической идеализации выступает особенно ясно. Рассмотрим молекулы газа, заключенного в некотором сосуде. Пусть число их N . Число тех молекул, скорость которых меньше x , пусть будет $N\Phi(x)$. Тогда $\Phi(x)$ означает отношение числа молекул, движущихся со скоростью, лежащей между пределами 0 и x , ко всему числу молекул (все рассмотрение относится к определенному моменту времени). Эта суммирующая функция, разумеется, не непрерывна, а остается опять-таки постоянной в некоторых интервалах и возрастает каждый раз скачкообразно на $\frac{1}{N}$, если при возрастании x как раз достигается такое значение x , которому соответствует одна молекула, движущаяся со скоростью x .

Математическая идеализация, которую мы совершаем, заключается теперь в том, что мы мысленно увеличиваем N неограниченно. Мы принимаем, что при этом предельном переходе $N \rightarrow \infty$ суммирующая функция $\Phi(x)$ стремится к непрерывной предельной функции $F(x)$. Что это действительно так [т. е. что с достаточной точностью можно заменить $\Phi(x)$ такой непрерывной функцией $F(x)$], является очевидно существенным физическим допущением; и дальнейшим таким допущением является то, что мы предполагаем, что суммирующая функция $F(x)$ имеет производную $F'(x) = f(x)$, которую мы называем плотностью распределения. Суммирующая функция связана с плотностью распределения равенством

$$F(x) = \int_a^x f(u) du; \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Эту плотность распределения называют иногда также удельной вероятностью того, что молекула обладает скоростью x . Проведенная только что идеализация, которая играет большую роль в созданной Максвеллом кинетической теории газов, появляется во многих вопросах математической статистики в совершенно той же математической форме.

§ 7. Оценка интегралов и теорема о среднем значении интегрального исчисления.

Закончим эту главу некоторыми соображениями по вопросу общего характера, все значение которых выявится впрочем лишь несколько позже. Речь идет об оценке интегралов.

1. Теорема о среднем значении в интегральном исчислении. Первое и простейшее правило оценки интеграла гласит:

Если непрерывная функция $f(x)$ в интервале $a \leq x \leq b$ не имеет нигде отрицательного значения, т. е. имеет либо положительные значения, либо значения нуль, то и определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

имеет неотрицательное значение. Подобным же образом этот интеграл имеет неположительное значение, если функция $f(x)$ повсюду в интервале имеет неположительное значение. Доказательство этого вытекает непосредственно из определения интеграла.

Отсюда получается следующая теорема. Если во всем интервале

$$f(x) \geq g(x),$$

то и

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Ибо согласно предыдущему замечанию интеграл от разности $f(x) - g(x)$ имеет неотрицательное значение, а по правилу интегрирования суммы (стр. 69):

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Пусть M — наибольшее значение, а m — наименьшее значение функции $f(x)$ в интервале от a до b . Тогда функция $M - f(x)$ повсюду в интервале неотрицательна и то же справедливо по отношению к функции $f(x) - m$. Из предыдущих замечаний сразу получается следующее двойное неравенство

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

так как

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \text{а} \quad \int_a^b M dx = M(b-a),$$

то получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Рассматриваемый интеграл можно поэтому представить в виде произведения $b-a$ на значение μ , заключенное между m и M :

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

Точную величину этого промежуточного значения μ мы, вообще говоря, не обязаны указать. Но мы можем утверждать, что это значение функция $f(x)$ принимает в какой-то точке ξ интервала $a < \xi < b$, так как непрерывная функция принимает в интервале все значения, заключенные между ее наибольшим и наименьшим значениями (см. стр. 57). Во многих приложениях, как и для теоремы о среднем значении в дифференциальном исчислении, не играет существенной роли точное указание ξ . Итак, мы можем положить $\mu = f(\xi)$, где ξ — такое промежуточное значение, и писать

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi).$$

В этой последней формулировке мы будем называть формулу оценки интеграла теоремой о среднем значении в интегральном исчислении. Мы можем еще немного обобщить эту теорему о среднем значении, заменив подынтегральную функцию $f(x)$ функцией вида $f(x)p(x)$, где $p(x)$ — произвольная положительная

функция, которую мы считаем, также как и $f(x)$, непрерывной. Так как $Mp(x) \geq p(x) f(x) \geq mp(x)$, то мы получаем тотчас же соотношение:

$$m \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x) p(x) dx \leq M \int_a^b p(x) dx$$

или в виде одного равенства:

$$\int_a^b f(x) p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx,$$

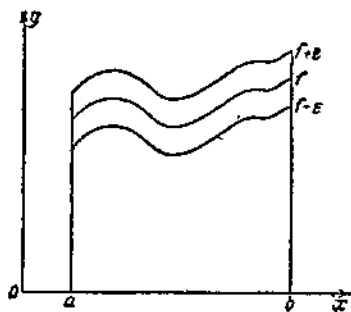
где ξ опять есть среднее значение.

2. Приложения. Интегрирование x^α при любом иррациональном значении α . Теорема о среднем значении или равносильные ей оценки интегралов приводят нас к очень важному, геометрически впрочем очевидному факту. Значение интеграла мало изменяется, если само значение подынтегральной функции повсюду мало изменяется. Точно выражаясь: интегралы двух функций $f(x)$ и $g(x)$, разность которых во всем интервале $a \leq x \leq b$ по абсолютному значению меньше ϵ , разнятся между собой по абсолютному значению меньше чем на $\epsilon(b-a)$. С помощью формул это выражается следующим образом: если в нашем интервале $|f(x) - g(x)| < \epsilon$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| < \epsilon(b-a),$$

или, что равносильно,

$$-\epsilon(b-a) + \int_a^b g(x) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx + \epsilon(b-a).$$



Черт. 47.

Черт. 47 очень ясно обнаруживает это. Мы проводим к кривой $y=f(x)$ параллельные кривые $y=f(x)+\epsilon$ и $y=f(x)-\epsilon$. В полосе, образованной этими двумя параллельными кривыми, согласно условию, проходит кривая $y=g(x)$. Отсюда ясно, что площади, ограниченные кривыми $f(x)$ и $g(x)$, не могут отличаться между собой более чем на половину площади полосы, а эта площадь как раз выражается числом

$$\int_a^b [f(x) + \epsilon] dx - \int_a^b [f(x) - \epsilon] dx = 2\epsilon(b-a).$$

Не прибегая к геометрической интуиции, мы на основании рассуждений п^о 1 из неравенств $-\varepsilon + g(x) < f(x) < \varepsilon + g(x)$ получаем соотношение

$$\int_a^b [-\varepsilon + g(x)] dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b [g(x) + \varepsilon] dx,$$

которое тотчас же с помощью основных правил интегрирования принимает вид:

$$-\varepsilon(b-a) + \int_a^b g(x) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx + \varepsilon(b-a);$$

при этом мы только заменили интеграл суммы соответствующей суммой интегралов и приняли во внимание, что

$$\int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).$$

Чтобы пояснить значение только что доказанного факта, я покажу, что с его помощью можно проинтегрировать функцию x^a при любом иррациональном значении a или, точнее выражаясь, найти значение определенного интеграла $\int_a^b x^a dx$. При этом предполагаем, что $0 < a < b$.

Показатель степени a представим как предел последовательности рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, т. е. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$; при этом мы имеем право предполагать, что ни одно из α_n не равно -1 , так как a не равно -1 . Для степени x^a мы пользуемся тогда определением

$$x^a = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n}$$

и принимаем во внимание следующее: какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, всегда можем выбрать n столь большим, что во всем интервале $a \leq x \leq b$ имеет место неравенство $|x^{\alpha_n} - x^a| < \varepsilon$ ¹⁾.

¹⁾ Доказательство получается, если мы для краткости предположим, что $\alpha_n > a > 0$, т. е. что $\delta_n = \alpha_n - a > 0$, очень просто следующим образом. Принимая во внимание монотонный характер возрастания функции x^a , имеем

$$|x^a - x^{\alpha_n}| = x^a |1 - x^{\delta_n}| < b^a |1 - a^{\delta_n}|.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$ и следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} |1 - a^{\delta_n}| = 0$, то число $\varepsilon_n = b^a |1 - a^{\delta_n}|$, совершенно независимое уже от положения точки x в интервале, стремится при неограниченном возрастании n к нулю, что и требовалось доказать.

Остается теперь только применить наше предыдущее соотношение к функциям $f(x) = x^a$ и $g(x) = x^{a_n}$, и мы получаем

$$-\varepsilon(b-a) + \int_a^b x^{a_n} dx < \int_a^b x^a dx < \int_a^b x^{a_n} dx + \varepsilon(b-a).$$

Но справа и слева мы можем проинтегрировать согласно результату § 2, п° 4 и получаем

$$\begin{aligned} -\varepsilon(b-a) + \frac{1}{a_n+1}(b^{a_n+1} - a^{a_n+1}) &< \int_a^b x^a dx < \\ &< \frac{1}{a_n+1}(b^{a_n+1} - a^{a_n+1}) + \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Если будем теперь неограниченно уменьшать ε , то нам придется брать все большие и большие значения n ; так как при этом числа a_n стремятся к a , числа a^{a_n} и b^{a_n} стремятся соответственно к a^a и b^a , то непосредственно получаем

$$\int_a^b x^a dx = \frac{1}{a+1}(b^{a+1} - a^{a+1}).$$

Иными словами: для иррациональных значений показателя a применима та же формула, что и для рациональных значений. Заметим кстати, что отсюда по основной теореме § 4 следует, что и для иррациональных значений a справедлива формула дифференцирования

$$\frac{d}{dx}(x^{a+1}) = (a+1)x^a.$$

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II.

§ 1. Доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции.

Я еще должен привести аналитическое доказательство того факта, что всегда существует определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$, взятый в пределах от a до b ($a < b$). Для этого рассмотрим, пользуясь обозначениями § 1 главы II, сумму

$$F_n = \sum_{v=1}^n f(\xi_v) \Delta x_v.$$

Вполне очевидно, что

$$F_n = \sum_{v=1}^n f(\eta_v) \Delta x_v \leq F_n \leq \sum_{v=1}^n f(u_v) \Delta x_v = \bar{F}_n,$$

где $f(v_i)$ означает наименьшее, а $f(u_i)$ — наибольшее значение функции $f(x)$ в i -ом интервале. Задача заключается в том, чтобы доказать, что F_n стремится к определенному пределу, не зависящему от специального характера разбиения на интервалы и от выбора значений ξ_i , когда с возрастанием n длина наибольшего из интервалов Δx стремится к нулю. Для этого очевидно необходимо и достаточно показать, что оба выражения F_n и $\bar{F}_n$ сходятся к одному и тому же пределу.

Если взять разбиение на столь мелкие интервалы, что в каждом из них колебание $f(u_i) - f(v_i)$ непрерывной функции $f(x)$ будет меньше, чем наперед заданное сколь угодно малое число ε , что всегда возможно благодаря равномерной непрерывности функции $f(x)$, то будем иметь

$$0 \leq \bar{F}_n - F_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i [f(u_i) - f(v_i)] < \varepsilon(b-a).$$

Мы видим таким образом, что разность эта с возрастанием n стремится к 0, и мы можем поэтому ограничиться доказательством сходимости $\bar{F}_n$. Эта сходимость будет доказана, коль скоро покажем, что $(\bar{F}_m - \bar{F}_n)$ может быть сделана сколь угодно малой, если только в обоих соответствующих разбиениях, которые мы будем называть „разбиением m “ и „разбиением n “, выберем интервалы достаточно малыми. Итак, мы предполагаем, что для обоих разбиений колебание функции $f(x)$ в каждом из частичных интервалов меньше ε ; затем переходим к третьему разбиению, точки деления которого получаем, взяв все точки деления как разбиения m , так и разбиения n . Пусть это разбиение состоит из l интервалов. Отметим его индексом l и рассмотрим соответствующее значение $\bar{F}_l$. Мы сможем оценить выражение $\bar{F}_m - \bar{F}_n$, если будем иметь оценки для выражений $|\bar{F}_m - \bar{F}_l|$ и $|\bar{F}_n - \bar{F}_l|$. Я утверждаю, что имеют место следующие два соотношения:

$$\bar{F}_n \leq \bar{F}_l \leq \bar{F}_m \quad \text{и} \quad F_m \leq \bar{F}_l \leq F_n.$$

Доказательство непосредственно вытекает из значения наших выражений. Рассмотрим например i -й интервал, принадлежащий разбиению n . Этому интервалу соответствует один или несколько интервалов из разбиения l ; все соответствующие слагаемые при последнем разбиении состоят из двух множителей, первый из которых есть некоторая разность Δx , а второй во всяком случае не больше $f(u_i)$ и не меньше $f(v_i)$. Но сумма всех разностей Δx более мелкого разбиения l , принадлежащих рассматриваемому i -му интервалу разбиения n , как раз равна Δx_i . Мы видим таким образом, что соответствующая часть суммы $\bar{F}_l$ заключается между $\Delta x_i f(u_i)$ и $\Delta x_i f(v_i)$. Суммируя теперь по всем n интервалам, мы сразу получаем первое из вышеуказанных неравенств, а второе полу-

чается точно таким же путем, если исходить не из разбиения n , а из разбиения m .

Мы раньше видели, что $\bar{F}_n - \underline{F}_n < \varepsilon(b-a)$; аналогично

$$\bar{F}_m - \underline{F}_m < \varepsilon(b-a).$$

Из доказанных неравенств относительно $\bar{F}_i$ следует поэтому, что

$$0 \leq \bar{F}_n - \bar{F}_i < \varepsilon(b-a) \quad \text{и} \quad 0 \leq \bar{F}_m - \bar{F}_i < \varepsilon(b-a).$$

Вместе с тем конечно следует, что

$$|(\bar{F}_n - \bar{F}_i) - (\bar{F}_m - \bar{F}_i)| = |\bar{F}_n - \bar{F}_m| < 2\varepsilon(b-a).$$

Так как ε может быть задано сколь угодно малым, то из этого соотношения на основании критерия сходимости Коши вытекает сходимость наших чисел $\bar{F}_n$. Вместе с тем мы из нашего рассмотрения непосредственно видим, что предел совершенно не зависит от способа разбиения ¹⁾.

Таким образом доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции проведено до конца.

Наш способ доказательства дает еще больше. Он обнаруживает, что во многих случаях приводят к интегралу еще несколько более общие предельные переходы. Если например $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ и промежуток интегрирования от a до b разбит точками деления x_i на n частей, то мы рассмотрим теперь вместо суммы $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ более общую сумму

$$\sum \varphi(\xi'_i)\psi(\xi''_i)\Delta x_i,$$

где ξ'_i и ξ''_i уже не являются непременно совпадающими точками в i -ом интервале. И эта сумма с возрастанием n стремится к пределу

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx,$$

если только длины всех частичных интервалов стремятся при этом к нулю. То же справедливо для всех аналогичным образом построенных сумм, например сумма

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi(\xi'_i)^2 + \psi(\xi''_i)^2} \Delta x_i,$$

стремится к пределу

$$\int_a^b \sqrt{\varphi(x)^2 + \psi(x)^2} dx.$$

Доказательство этих положений ведется совершенно так же, как только что приведенное доказательство, и поэтому нет надобности излагать его особо.

¹⁾ См. замечание 1 на стр. 39.

§ 2. Связь между теоремами о среднем значении в дифференциальном и интегральном исчислении.

Между теоремой о среднем значении в дифференциальном исчислении и соответствующей теоремой в интегральном исчислении существует простое соотношение, которое получается из основной теоремы и которое я здесь хочу вывести в качестве поучительного примера применения этой теоремы. Если возьмем теорему о среднем значении интегрального исчисления в ее специальной форме

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi),$$

то, положив $\int f(x) dx = F(x)$, следовательно $f(x) = F'(x)$, получим непосредственно, как выражение этой теоремы, равенство

$$F(b) - F(a) = (b - a) F'(\xi)$$

или

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi).$$

При этом мы в качестве функции $F(x)$ можем выбрать произвольную функцию, производная которой $F'(x) = f(x)$ непрерывна; тем самым доказана для таких функций теорема о среднем значении дифференциального исчисления.

Более общая формулировка теоремы о среднем значении интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x) p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx,$$

где $p(x)$ — положительная, а $f(x)$ — произвольная непрерывная функция в нашем интервале, приводит соответственно к обобщенной теореме о среднем значении дифференциального исчисления. Если положим

$$\int f(x) p(x) dx = F(x), \quad \text{т. е.} \quad f(x) p(x) = F'(x);$$

$$\int p(x) dx = G(x), \quad \text{т. е.} \quad p(x) = G'(x),$$

то предыдущая формула примет вид

$$F(b) - F(a) = [G(b) - G(a)] f(\xi)$$

или, так как $f(x) = \frac{F'(x)}{G'(x)}$,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

Эта формула, в которой ξ опять означает некоторое промежуточное значение между a и b , носит название обобщенной теоремы о среднем значении дифференциального исчисления. При этом выводе надо очевидно только предположить, что F и G — непрерывные функции с непрерывными производными и что кроме того $G'(x)$ повсюду в интервале имеет положительное значение (или повсюду отрицательное). В самом деле, при этих предположениях можно непосредственно обратиться к предыдущему рассуждению.

Укажу наконец, что данные здесь выводы теорем о среднем значении дифференциального исчисления заставляют вводить более ограничительные предположения, чем это необходимо по существу (ср. главу II, § 3 п^о 8 и далее, стр. 176).

ГЛАВА III.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ПРИМЕНЕНИИ К ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ФУНКЦИЯМ.

§ 1. Простейшие правила дифференцирования и их применение.

В анализе и его приложениях дело обыкновенно обстоит так, что проблемы интегрирования важнее проблем дифференцирования, но дифференцирование однако представляет значительно меньше трудностей. Поэтому при построении дифференциального и интегрального исчисления представляется естественным сперва научиться дифференцировать возможно более широкие классы функций и затем использовать полученные результаты с помощью основных теорем § 4 главы II для решения проблем интегрирования. Задачей ближайших параграфов и будет проведение этой программы. При этом мы известным образом начнем опять сначала, а именно в систематическом порядке проведем важнейшие дифференцирования и интегрирования, не ссылаясь на результаты предыдущей главы. Важную роль при этом будут играть некоторые правила дифференцирования: с первым из них мы впрочем уже познакомились в § 3 главы II.

1. Правила дифференцирования. Предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в рассматриваемом интервале; тогда наши правила гласят:

1-е правило. Умножение на постоянное. Если c — постоянное и $\varphi(x) = cf(x)$, то $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция и

$$\varphi'(x) = cf'(x)$$

Доказательство непосредственно следует из соотношения

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и предельного перехода при $h \rightarrow 0$.

2-е правило. Производная суммы. Если $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, то $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция и

$$\varphi'(x) = f'(x) + g'(x),$$

т. е. процесс дифференцирования и операцию сложения можно переставить между собой. Это же справедливо и для суммы произвольного числа n слагаемых

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x),$$

тогда

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x).$$

Опуская доказательство, которое почти очевидно, согласно § 3 предыдущей главы.

3-е правило. Производная произведения. Если

$$\varphi(x) = f(x)g(x),$$

то функция $\varphi(x)$ дифференцируема и

$$\varphi'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Доказательство следует из равенства

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

В последнем выражении переход к пределу при $h \rightarrow 0$ выполняется сразу и ведет непосредственно к доказываемой формуле.

Эта формула принимает еще более удобный вид, если мы разделим обе части на $\varphi(x) = f(x)g(x)$ ¹⁾. Мы получаем тогда

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Если применить эту формулу дифференцирования произведения несколько раз, то для производной от произведения нескольких, скажем, n функций получается выражение, состоящее из n слагаемых, каждое из которых представляет произведение производной одного из сомножителей на остальных сомножителей первоначального произведения. Запишем это формулой:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx} [f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)] = f'_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) + f_1(x)f'_2(x)\dots f_n(x) + \dots \\ &\dots + f_1(x)f_2(x)\dots f'_n(x) = \sum_{i=1}^n f'_i(x) \frac{\varphi(x)}{f_i(x)} \end{aligned}$$

¹⁾ При этом мы конечно должны допустить, что $\varphi(x)$ нигде не обращается в нуль.

или в более удобной форме, разделив обе части на

$$\varphi(x) = f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x),$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \sum_{v=1}^n \frac{f_v'(x)}{f_v(x)}.$$

4-е правило. Производная частного. Для частного

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

имеет место следующее правило: во всех точках, в которых $g(x)$ не обращается в нуль, функция $\varphi(x)$ дифференцируема и

$$\varphi'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

или

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Если заранее допустить дифференцируемость функции $\varphi(x)$, то на основании правила дифференцирования произведения из соотношения $f(x) = \varphi(x)g(x)$ можно заключить, что

$$f'(x) = \varphi'(x)g(x) + g'(x)\varphi(x).$$

Если в правой части заменим $\varphi(x)$ через $\frac{f(x)}{g(x)}$ и из полученного уравнения найдем $\varphi'(x)$, то как раз получим указанное правило. Однако же, для того чтобы одновременно доказать и дифференцируемость функции $\varphi(x)$, мы ведем доказательство следующим образом. Мы пишем:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}. \end{aligned}$$

Если заставим h стремиться к нулю, то получим требуемый результат; в самом деле, согласно условию, существуют пределы обоих получающихся в результате деления слагаемых в правой части и они равны соответственно $\frac{g(x)f'(x)}{g(x)^2}$ и $\frac{g'(x)f(x)}{g(x)^2}$, а вместе с тем отсюда следуют существование предела выражения, стоящего в левой части, и искомая формула дифференцирования.

2. Дифференцирование рациональных функций. Выведем сперва еще раз для n целого и положительного формулу

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$$

опираясь на правило дифференцирования произведения. Рассматриваем x^n как произведение n множителей $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ и получаем тогда

$$\frac{d}{dx} x^n = 1 \cdot x^{n-1} + 1 \cdot x^{n-1} + \dots + 1 \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Вторая производная функции x^n получается непосредственно, если воспользоваться только что полученной формулой и первым правилом дифференцирования,

$$\frac{d^2}{dx^2} x^n = n(n-1)x^{n-2};$$

отсюда таким же путем

$$\frac{d^3}{dx^3} x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Мы видим, что $(n+1)$ -я производная от x^n тождественно равна нулю. Умея дифференцировать степени, мы можем на основании нашего второго правила продифференцировать произвольную целую рациональную функцию

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Мы имеем просто

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1},$$

далее

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} \text{ и т. д.}$$

Дифференцирование дробных рациональных функций получается теперь с помощью правила дифференцирования частного. В частности выведем еще раз формулу дифференцирования функции x^m , когда $m = -n$ есть целое отрицательное число. Применение правила дифференцирования дроби дает, если принять во внимание, что производная числителя равна нулю, результат

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^m} \right) = - \frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = - \frac{m}{x^{m+1}},$$

или, заменяя m через $-n$,

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$$

что формально вполне совпадает с формулой для положительного n и согласуется с результатом, полученным раньше (глава II, § 3, п° 3).

3. Дифференцирование тригонометрических функций. Для тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ мы уже раньше (стр. 82) получили формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Мы можем теперь продифференцировать также функции

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{и} \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

с помощью правила дифференцирования частного. Производная первой функции согласно этому правилу равна

$$y' = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

и мы получаем

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

и совершенно также получается

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 2. Соответствующие формулы интегрирования.

1. Общие правила интегрирования. Основная теорема § 4 главы II и определение неопределенного интеграла дают нам возможность отнести каждой формуле дифференцирования соответствующую эквивалентную ей формулу интегрирования. Вполне эквивалентными по отношению к трем первым правилам дифференцирования являются очевидно следующие, частью уже упомянутые в § 1 главы II правила интегрирования.

Умножение на постоянное число. Если c — число постоянное, то

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Интегрирование суммы.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Третьему правилу дифференцирования соответствует правило интегрирования по частям. Интегрированием мы из правила дифференцирования произведения получаем:

$$\int [f(x) g(x)]' dx = \int f(x) g'(x) dx + \int g(x) f'(x) dx.$$

Неопределенный интеграл в левой части очевидно равен $f(x)g(x)$, и мы можем поэтому записать правило интегрирования по частям в следующем виде:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx.$$

Я привел эту формулу здесь только для полноты как соответствующую формуле дифференцирования произведения; она будет иметь для нас важное значение лишь в следующей главе (см. там же § 4).

2. Интегрирование простейших функций. Полученным выше формулам дифференцирования отдельных функций мы теперь противопоставляем по существу эквивалентные им формулы интегрирования. Формула

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

рассматриваемая как формула интегрирования, гласит:

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}, \quad n \neq 0.$$

В самом деле, эта последняя формула выражает лишь, что производная правой части равна функции, стоящей под знаком интеграла слева. Если вместо n подставим $n+1$, то получим формулу

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1.$$

Эта формула справедлива при любом целом значении показателя n , за исключением $n=-1$, когда знаменатель $n+1$ обратился бы в нуль. Этим исключительным случаем $n=-1$ мы займемся подробнее в § 6.

Основная теорема интегрального исчисления позволяет нам сейчас же использовать формулы интегрирования для определения площади, т. е. для вычисления определенных интегралов. Мы непосредственно получаем согласно главе II, § 4, n° 4

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1;$$

при этом, в случае отрицательного значения n , мы предполагаем, что a и b одинакового знака, ибо в противном случае подынтегральная функция была бы разрывна в промежутке интегрирования.

Формулам дифференцирования для $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ соответствуют следующие формулы интегрирования:

$$\begin{aligned}\int \cos x \, dx &= \sin x; & \int \sin x \, dx &= -\cos x; \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \operatorname{tg} x; & \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\operatorname{ctg} x.\end{aligned}$$

Из этих формул сразу получаются, согласно основному правилу § 4 главы II, значения определенных интегралов, взятых в произвольных пределах¹⁾, например

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

Едва ли нужно здесь особо подчеркнуть, что с помощью двух первых правил интегрирования возможно интегрировать любые целые рациональные функции, как и любые линейные комбинации, образованные с помощью произвольных постоянных коэффициентов, других проинтегрированных здесь функций. Я хочу однако еще указать на следующий пункт. Правила интегрирования и дифференцирования должны быть, согласно основной теореме, эквивалентны друг другу; поэтому можно также сперва доказать общие правила интегрирования этого параграфа и из них уже прямо получить правила дифференцирования предыдущего параграфа. Я рекомендовал бы вам провести самим эту мысль.

§ 3. Обратная функция и ее производная.

1. Общая формула дифференцирования. Мы уже раньше (стр. 14 и 58) видели, что непрерывную функцию $y=f(x)$ можно однозначно обратить в интервале, в котором она монотонна. Точнее: если $a \leq x \leq b$ — интервал, в котором непрерывная функция $y=f(x)$ изменяется монотонно, и если положим $f(a)=\alpha$ и $f(b)=\beta$, то x является в интервале от α до β однозначной непрерывной и монотонной функцией $x=\varphi(y)$ от y .

Понятие производной дает нам очень простое средство определить монотонный характер, а вместе с тем и обратимость функции. Именно дифференцируемая функция всегда монотонно возрастает, если в соответствующем интервале повсюду $f'(x) > 0$, и монотонно убывает, если

¹⁾ В двух последних интегралах нужно конечно следить за тем, чтобы подынтегральная функция была непрерывна в промежутке интегрирования.

там повсюду $f'(x) < 0$. Этот геометрически очевидный факт аналитически сразу же следует из теоремы о среднем значении.

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h); \quad (0 < \theta < 1).$$

Если $f'(x)$ имеет в каждой точке интервала положительное значение и значения x и $x+h$ лежат в этом интервале, то $f(x+h) - f(x)$ будет иметь постоянно тот же знак, что и h ; если же $f'(x)$ имеет повсюду отрицательное значение, то разность $f(x+h) - f(x)$ будет иметь знак, противоположный знаку h .

Докажем теперь следующую теорему. Если функция $y=f(x)$ в интервале $a < x < b$ дифференцируема и в нем либо повсюду $f'(x) > 0$, либо повсюду $f'(x) < 0$, то и обратная функция $x=\varphi(y)$ имеет производную в этом интервале и между производной данной функции $y=f(x)$ и производной обратной функции $x=\varphi(y)$ существует соотношение $f'(x)\varphi'(y)=1$, которое можно записать также в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

В последней записи опять обнаруживается гибкость обозначений Лейбница. Действительно, дело обстоит так, как будто символы dy и dx были бы величинами, с которыми можно оперировать как с обыкновенными числами. Доказательство этой формулы получается непосредственно, если рассматривать производные как пределы отношений приращений:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

причем x и $y=f(x)$, x_1 и $y_1=f(x_1)$ означают пары соответствующих значений. Так как, согласно условию, первый из этих пределов не равен нулю и так как равенства $\lim \Delta x = 0$ и $\lim \Delta y = 0$ совершенно равносильны вследствие непрерывности функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$, а следовательно и соотношения $y_1 \rightarrow y$ и $x_1 \rightarrow x$ равносильны (т. е. существование первого из них влечет существование второго и наоборот), то существует также предел:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{x_1 - x}{y_1 - y}$$

и этот предел равен $\frac{1}{f'(x)}$. С другой стороны, он же означает, согласно определению, производную $\varphi'(y)$ от обратной функции $\varphi(y)$, и тем самым наша формула доказана.

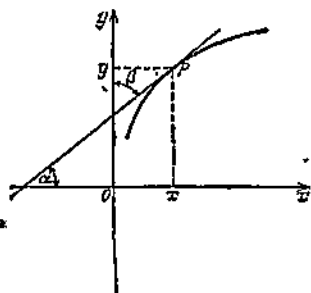
Впрочем формула эта имеет простое геометрическое значение, которое непосредственно уясняется на черт. 48. Касательная к кривой $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$ образует с положительным направлением оси x -ов угол α , с положительным направлением оси y -ов — угол β ; на основании геометрического значения производной имеем:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \varphi'(y) = \operatorname{tg} \beta.$$

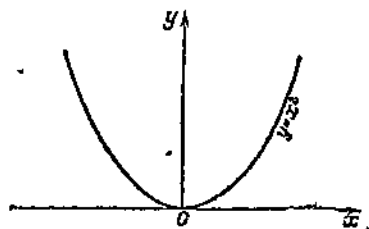
Но так как углы α и β как раз дополняют друг друга до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, и это соотношение точно выражает нашу формулу дифференцирования.

До сих пор мы явно предполагали, что либо повсюду $f'(x) > 0$, либо повсюду $f'(x) < 0$ и что следовательно $f'(x)$ нигде не равно нулю. Что же будет, если имеет место равенство $f'(x) = 0$?

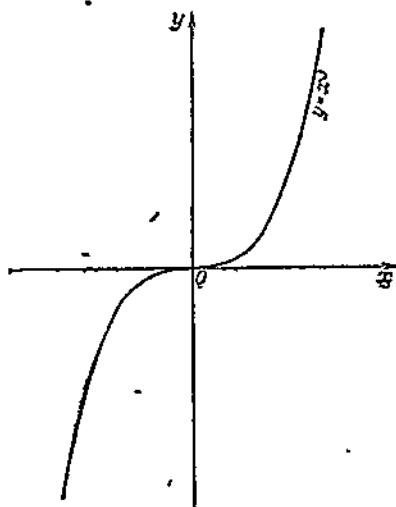
Если равенство $f'(x) = 0$ имеет место во всем интервале, то функция имеет там постоянное значение и следовательно необратима, потому что одному и тому же значению y должны были бы соответствовать все значения x нашего интервала. Если же равенство $f'(x) = 0$ имеет место только для отдельных точек нашего интервала, то следует различать, меняет ли $f'(x)$ при переходе через эти точки знак или нет. В первом случае эта точка отделяет интервал, в котором функция монотонно возрастает, от интервала, в котором функция монотонно убывает. В окрестности такой точки однозначной обратимости не существует. Во втором случае обращение



Черт. 48.



Черт. 49.



Черт. 50.

в нуль производной не нарушает монотонного характера изменения функции $y=f(x)$ и следовательно не нарушает и однозначной обратимости. Только в соответствующей точке обратная функция не будет дифференцируемой, ее производная будет бесконечна.

Пример случая первого рода представляет функция $y=x^2$ при $x=0$, а пример второго случая дает функция $y=x^3$ при $x=0$. Черт. 49 и 50 наглядно изображают нам поведение обеих функций при переходе через начало координат и вместе с тем указывают, что во втором случае функцию $y=x^3$ можно однозначно обратить в окрестности начала координат, а в первом случае — нет.

2. Обратные функции от степеней и тригонометрических функций. Простейший пример представляют функции $y=x^n$ при целом положительном значении n , причем вначале будем рассматривать эти функции только при положительном значении переменной x . Тогда y' имеет постоянно положительные значения, и мы можем поэтому для положительных значений y всегда однозначно образовать положительную обратную функцию

$$x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}.$$

Производная этой обратной функции получается теперь согласно общему правилу непосредственно путем следующего вычисления:

$$\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1},$$

и мы можем, обозначая теперь опять зависимую переменную через y , а независимую — через x , записать окончательный результат:

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1},$$

который впрочем вполне совпадает с результатом, выведенным в п° 3 § 3 главы II прямым путем.

Особого рассмотрения требует только точка $x=0$. Когда x приближается к нулю со стороны положительных значений, то $\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}$ при $n > 1$ очевидно возрастает неограниченно, что соответствует тому обстоятельству, что производная n -й степени $y(x)=x^n$ при $n > 1$ обращается в нуль при $x=0$. Геометрически это значит, что кривые $y=x^n$ при $n > 1$ все касаются в начале координат оси y -ов (черт. 17 на стр. 26).

Заметим, что при нечетном n мы можем отбросить условие $x > 0$ и рассматривать функцию $y=x^n$ для всех значений x ; при этом моно-

тонный характер возрастания ее и однозначная обратимость с помощью функции $x=y^{\frac{1}{n}}$ не нарушаются. Формула дифференцирования

$$\frac{d}{dy} y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

остается в таком случае справедливой и для отрицательных значений y ; при $x=0$ производная $\frac{dx}{dy}=0$ (если $n>1$), что соответствует бесконечному значению производной $\frac{dx}{dy}$ при $y=0$ у обратной функции.

Чтобы обратить тригонометрические функции, рассмотрим еще раз графики $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Из черт. 14 и 15 (стр. 17) мы тотчас же видим, что для каждой из этих функций необходимо выбрать определенный интервал, если речь идет об однозначном обращении; в самом деле, прямые $y=c$, параллельные оси x -ов, пересекают эти кривые (если только они вообще встречаются их) в бесконечном множестве точек.

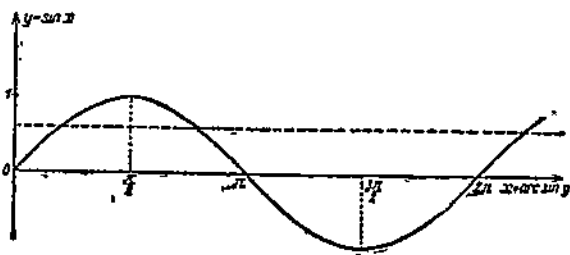
Для $y=\sin x$ производная $y'=\cos x$ остается например положительной в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. В этом интервале мы можем следовательно однозначно обратить функцию $\sin x$; эту обратную синусу функцию мы пишем в виде

$$x=\arcsin y$$

(произносится аркуссинус y , что означает: дуга, синус которой имеет значение y). Эта функция монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, когда y монотонно возрастает от -1 до $+1$. Если хотят подчеркнуть,

что имеют в виду обратную функцию от синуса именно в этом интервале, то говорят о главном значении аркуссинуса. Если обратить функцию $\sin x$ в другом интервале, в котором она монотонно изменяется, например в

интервале $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, то получается „другая ветвь“ аркуссинуса; без точного указания интервала, в котором должны лежать значения функции, аркуссинус представляет многозначную функцию от y .



Черт. 51.

Вообще многозначность функции $\arcsin y$ выражается в том, что одному и тому же значению y синуса соответствуют кроме дуги x также дуга $2k\pi + x$ и дуга $(2k+1)\pi - x$, какое бы целое значение (положительное или отрицательное) мы ни дали числу k (черт. 51).

Дифференцирование функции $x = \arcsin y$ можно теперь провести прямо на основании нашего общего правила с помощью следующего небольшого вычисления:

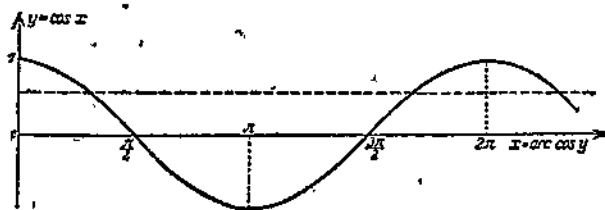
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

причем надо брать положительное значение корня, если x изменяется в указанном интервале ¹⁾.

Если опять независимую переменную вместо y обозначим через x , то получим формулу дифференцирования функции $\arcsin x$ в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

При этом предполагается, что $\arcsin x$ заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$,



Черт. 52.

и поэтому надо взять положительный знак корня.

Совершенно таким же образом получаем для обратной функции от $y = \cos x$, которую мы обозначаем через

$\arccos x$ (черт. 52), формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь надо брать положительный знак корня, если взять значения $\arccos x$ в интервале от 0 до π (а не как у $\arcsin x$ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$).

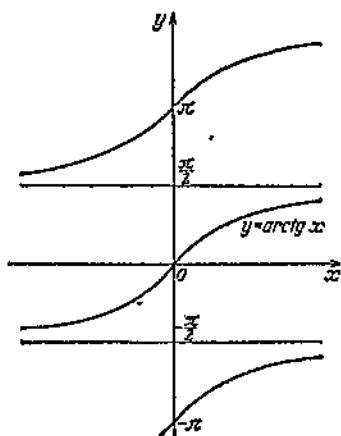
Надо сказать еще пару слов относительно концов $x = -1$ и $x = +1$ интервала, в котором изменяется x . Производные неограниченно возрастают при приближении к этим концам, в соответствии с тем, что кри-

¹⁾ Если бы вместо этого положили в основание интервал $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, что соответствует замене x через $x + \pi$, то мы должны были бы взять отрицательное значение корня, потому что $\cos x$ в этом интервале имеет отрицательное значение

вые, изображающие $\arcsin x$ и $\arccos x$, имеют в этих точках вертикальные касательные, так как $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ и соответственно $\sin 0 = 0$ и $\sin \pi = 0$.

Совершенно аналогично рассматриваем обратные функции от $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Функцию $y = \operatorname{tg} x$, производная которой $\frac{1}{\cos^2 x}$ имеет повсюду положительное значение, можно очевидно однозначно обратить в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Мы называем эту обратную функцию $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y$

или, меняя ролями буквы x и y , $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ и видим тотчас же на черт. 53, что первоначальная многозначность при обращении, т. е. многозначность, имеющая место, если не фиксировать точно интервала для значений $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, выражается в том, что всякому значению x можно было бы вместо значения y отнести такое значение $y + k\pi$ при любом целочисленном значении k . Для функции $y = \operatorname{ctg} x$ обратная функция $x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} y$ или $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$, если поменять ролями x и y , будет однозначно определена, если мы значения этой функции ограничим интервалом от 0 до π ; многозначность же функции $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ такого же рода, как и функции $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.



Черт. 53.

Формулы дифференцирования опять получаются следующим образом:

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} y; \quad \frac{dx}{dy} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

или, если наконец опять независимую переменную обозначим через x ,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

3. Соответствующие формулы интегрирования. Только что выведенные нами формулы, выраженные на языке неопределенного интегрирования, гласят следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x, & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\arccos x, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x, & \int \frac{1}{1+x^2} dx &= -\operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Между первыми двумя формулами и двумя последними, которые относятся к неопределенным интегралам две на первый взгляд совершенно различные функции, нет никакого противоречия. Мы должны принять во внимание, что в неопределенном интеграле остается в нашем распоряжении произвольная аддитивная постоянная. Если мы из этой постоянной выделим часть $\frac{\pi}{2}$ и заметим, что $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$ и точно так же $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x$, то эта формальная несогласованность тотчас разъясняется. Эта неопределенность покоится следовательно исключительно на том, что неопределенный интеграл представляет не одну определенную функцию, а целое семейство функций, отличающихся между собой произвольными аддитивными постоянными. Когда мы пишем, что неопределенный интеграл равен некоторой функции, то мы тем самым определяем только одно из его значений. Правильнее было бы, как мы уж говорили, всегда отмечать этот факт, записывая каждый раз такую произвольную постоянную, т. е. вместо

$$\int f(x) dx = F(x)$$

писать всегда

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Ради краткости часто не пользуются этой более длинной записью; но следует постоянно иметь в виду неопределенность, связанную с сокращенной записью (см. также гл. II, стр. 99).

Из формул неопределенного интегрирования тотчас же вытекают формулы определенных интегралов, если только ввести, согласно § 4 главы II, пределы интегрирования.

В частности получаем:

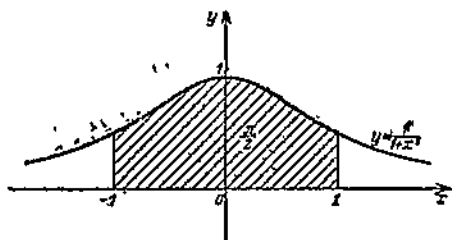
$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_a^b = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a.$$

Если положим $a=0$, $b=1$ и заметим, что $\operatorname{tg} 0=0$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}=1$, то получим замечательную формулу

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Число π , которое первоначально получилось при рассмотрении круга, приводится этой формулой в очень простую связь с рациональной функцией

$\frac{1}{1+x^2}$ и интерпретируется как площадь, определяемая указанным на черт. 54 образом.



Черт. 54.

§ 4. Дифференцирование сложных функций.

1. Правила дифференцирования сложной функции. Предыдущие правила дифференцирования дают нам возможность продифференцировать любую функцию, которая может быть выражена в виде дробно-линейной функции от функций, производные которых нам известны. Но мы можем сделать еще весьма существенный шаг вперед, именно продифференцировать все те сложные функции, которые составлены из функций, производные которых нам известны. Пусть функция $\varphi(x)$ дифференцируема в интервале $a \leq x \leq b$ и принимает там все значения из интервала $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Возьмем далее вторую дифференцируемую функцию $g(\varphi)$ от независимой переменной φ , у которой эта переменная φ пробегает в последнем интервале значения от α до β , и будем рассматривать $g(\varphi) = g[\varphi(x)] = f(x)$ как функцию от x в интервале $a \leq x \leq b$. Тогда функция $f(x) = g[\varphi(x)]$ называется сложной функцией¹⁾ независимой переменной x в интервале $a \leq x \leq b$, составленной из функций g и φ .

Если например $\varphi(x) = 1 - x^2$, а $g(\varphi) = \sqrt{\varphi}$, то сложной функцией будет просто $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. В качестве интервала $a \leq x \leq b$ возьмем здесь интервал $0 \leq x \leq 1$, тогда совокупность значений функции $\varphi(x)$ заполняет при этом весь интервал $0 \leq \varphi \leq 1$; таким образом сложная функция $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ определена в интервале $0 \leq x \leq 1$.

¹⁾ Или функцией от функций.

Другой пример сложной функции представляет функция $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, причем она составлена из функций

$$\varphi(x) = 1+x^2 \quad \text{и} \quad g(\varphi) = \sqrt{\varphi};$$

при этом значение функции $\varphi(x)$ пробегает совокупность всех положительных чисел ≥ 1 , и соответственно этому функция $g(\varphi)$ может быть определена для всех значений x . При составлении этим путем сложных функций надо, разумеется, всегда ограничиваться такими интервалами $a \leq x \leq b$, на которых сложная функция определена в каждой точке. Например сложная функция $\sqrt{1-x^2}$ существует только в области $-1 \leq x \leq 1$ независимой переменной x , но не в области $1 \leq x \leq 2$, потому что совокупность значений $\varphi(x)$ в последнем случае состоит из отрицательных чисел, для которых функция $g(\varphi)$ не определена.

Кроме сложных функций, составленных с помощью двух функций, мы можем и должны конечно рассмотреть и такие, в которых этот процесс составления повторяется несколько раз. Например такова функция

$$\sqrt{1 + \arctg x^2},$$

которая определяется следующим процессом составления:

$$\varphi(x) = x^2, \quad \psi(\varphi) = 1 + \arctg \varphi, \quad g(\psi) = \sqrt{\psi(\varphi)} = f(x).$$

Относительно дифференцирования сложных функций имеет место следующая основная теорема:

Функция $f(x) = g[\varphi(x)]$ дифференцируема и производная ее дается равенством

$$f'(x) = g'(\varphi) \varphi'(x),$$

или, пользуясь обозначениями Лейбница,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Словами это правило дифференцирования сложной функции выражается так: производная сложной функции получается как произведение производных тех функций, с помощью которых она составлена. Доказательство этой формулы получается очень просто, если вернуться к определению производной. Именно мы имеем:

$$\Delta g = g'(\varphi) \Delta \varphi + \varepsilon \Delta \varphi \quad \text{и} \quad \Delta \varphi = \varphi'(x) \Delta x + \eta \Delta x;$$

при этом ε и η означают два числа, которые стремятся к нулю, когда Δx , а следовательно и $\Delta \varphi$ стремятся к нулю. Впрочем относительно

этих двух чисел ε и η мы можем только утверждать, что при $\Delta x = 0$ ε и η равны нулю, и этого нам достаточно. Если теперь подставим в первое равенство значение $\Delta\varphi$ из второго, то получим:

$$\Delta g = g'(\varphi) \varphi'(x) \Delta x + [g'(\varphi) \eta + \varepsilon \varphi'(x)] \Delta x + \varepsilon \eta \Delta x$$

или

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(\varphi) \varphi'(x) + [\eta g'(\varphi) + \varepsilon \varphi'(x) + \varepsilon \eta].$$

В последнем же равенстве уже можем заставить Δx стремиться к нулю и получаем тотчас же требуемый результат, так как выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части, стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. Вместе с тем и левая часть нашего уравнения стремится к пределу y' , и этот предел равен произведению производных, что и требовалось доказать¹⁾.

Наше правило непосредственно распространяется путем последовательного применения его на случай, когда сложная функция составлена из большего числа промежуточных функций. Если например

$$y = g(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

то мы можем рассматривать y как функцию от x и пишем $y = f(x)$; дифференцирование этой функции производится по правилу

$$\frac{dy}{dx} = y' = g'(u) \varphi'(v) \psi'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

и аналогично обстоит дело для любого числа промежуточных функций. Доказательство этого могу предоставить вам самим.

2. Примеры и приложения. В качестве простейшего примера рассмотрим функцию $y = x^a$, где $a = \frac{p}{q}$, а q — целое положительное число, p — положительное или отрицательное целое число, т. е. a означает любое положительное или отрицательное рациональное число. При

$$y = \varphi^p, \quad \varphi = x^{\frac{1}{q}}$$

правило дифференцирования сложной функции дает

$$y' = p \varphi^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1},$$

¹⁾ Мы могли бы также доказать это правило, выполняя переход к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и вытекающим отсюда $\Delta\eta \rightarrow 0$ в соотношении $\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta\eta} \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$. Однако путь, указанный в тексте, удобнее, так как при нем мы избегаем особых рассмотрений, связанных со случаем $\varphi'(x) = 0$.

и мы получаем таким образом для любого рационального значения α формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

что совпадает с производной, найденной другим путем уже раньше, в главе II, § 3.

В качестве второго примера рассмотрим функцию

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ или } y = \sqrt{\varphi},$$

где $\varphi = 1 - x^2$ и $-1 < x < +1$. Наше правило дает

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дальнейшие примеры даны в виде следующих небольших выкладок:

1. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2},$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1^1).$$

2. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{dx} = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Правило дифференцирования сложной функции можем представить в виде формулы интегрирования, ввиду того что всякой формуле дифференцирования соответствует вполне эквивалентная ей формула интегрирования. Однако мы ее здесь приводить не станем, так как она нам в ближайшее время еще не понадобится и нам все равно придется дальше (гл. IV, § 2) подробно на ней остановиться.

3. Еще раз об интегрировании и дифференцировании x^α при иррациональном значении α . Соответственно элементарному определению степени x^α при иррациональном α с помощью равенства

$$x^\alpha = \lim x^{\frac{p}{q}},$$

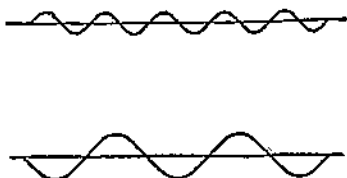
¹⁾ Если $-1 < x < 0$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, так как в этом случае

$$+\sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = -x.$$

где числа r_n представляют последовательность рациональных чисел, стремящихся к пределу a , могло бы явиться искушение провести дифференцирование x^a путем прямого перехода к пределу в формуле

$$\frac{d}{dx} x^{r_n} = r_n x^{r_n-1}.$$

Для этого мы должны были бы иметь право заключать на основании соотношения $x^{r_n} \rightarrow x^a$ о существовании соотношения $\frac{d}{dx} x^{r_n} \rightarrow \frac{d}{dx} x^a$. Но возникают серьезные сомнения принципиального характера в законности такого предельного перехода. Ведь в любой окрестности кривой можно провести другие кривые, направление которых сколь угодно отличается от направления первоначальной кривой в любых точках; например прямую линию можно приближенно представить с помощью волнистой линии, проходящей сколь угодно близко к ней, но пересекающей ее каждый раз под углом в 45° (черт. 55). Другими словами, этот пример показывает нам, что нельзя только из того факта, что две функции повсюду очень мало отличаются между собой, заключать, что и их производные повсюду близки между собой; и это возражение запрещает нам выполнить столь естественный предельный переход без дополнительного обоснования.



Черт. 55.

Совершенно по-иному, чем у производной, обстоит дело у интеграла. Мы видели в главе II, § 7, п^о 2, что интегралы двух функций, которые во всем интервале от a до b отличаются между собой повсюду меньше чем на ε , сами отличаются между собой меньше чем на $\varepsilon(b-a)$. Отсюда мы там с помощью основной теоремы вывели, что формула

$$\frac{1}{a+1} \frac{d}{dx} x^{a+1} = x^a$$

или, заменяя $a+1$ через a ,

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$$

справедлива и для иррациональных значений a , и следовательно этим окольным путем все же наконец подтвердилось указанное соотношение

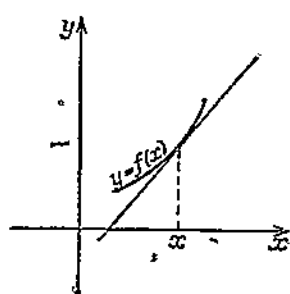
$$\frac{d}{dx} x^{r_n} \rightarrow \frac{d}{dx} x^a.$$

Это рассуждение является характерным примером взаимодействия между дифференциальным и интегральным исчислением. Однако мы из принципиальных соображений предпочтем дать в § 6 вместо элементарного определения x^a другое, по существу более простое, которое приведет нас снова и притом прямым путем к полученному результату.

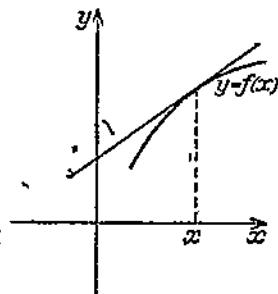
§ 5. Наибольшие и наименьшие значения.

После того как мы до известной степени овладели задачей дифференцирования элементарных функций и сложных функций, из них составленных, нам предоставляется возможность различных применений. Я хотел бы уже на этом месте изложить самое элементарное из этих приложений, именно теорию наибольших и наименьших значений функции в связи с геометрическим толкованием второй производной, с тем, чтобы в ближайшем параграфе снова продолжать изложение общей теории.

1. Общие предварительные замечания о геометрическом значении производных. Согласно определению производной $\frac{d}{dx}f(x)$ от функции $f(x)$, она указывает подъем кривой $y=f(x)$. Этот подъем мы в свою очередь можем представить с помощью кривой $y'=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$, дифференциальной кривой от заданной. Подъем этой последней кривой дается производной $\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)=f''(x)$, т. е. производной второго порядка от $f(x)$ и т. д. Если вторая производная $f''(x)$ имеет в точке x , а следовательно вследствие предполагаемой здесь непрерывности и в некоторой окрестности этой точки положительное значение, то это значит, что



Черт. 56 а.



Черт. 56 б.

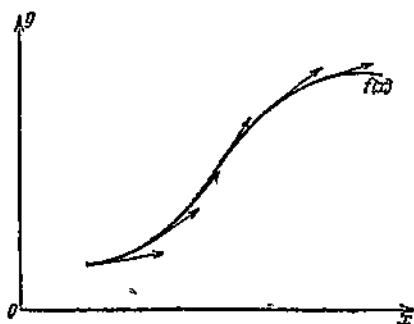
при прохождении этой точки в направлении возрастающих x -ов производная возрастает. Кривая следовательно будет обращена своей выпуклостью в сторону отрицательных y -ов. Обратное будет иметь место, когда $f''(x)$ имеет отрицательное значение.

В первом случае кривая следовательно в окрестности точки x будет расположена над касательной, а во втором случае — под касательной (черт. 56 а и 56 б). Особого рассмотрения требуют только точки, в которых $f''(x)=0$. В общем слу-

чае при переходе через такую точку вторая производная $f''(x)$ будет менять знак. Тогда такая точка будет местом перехода от одного из указанных типов к другому, т. е. касательная в этой точке будет с одной стороны проходить над кривой, а с другой — под нею и следовательно будет не только касаться, но в то же время и пересекать кривую в этой точке (черт. 57). Такая точка называется точкой перегиба, а соответствующая касательная называется касательной в точке перегиба кривой. Простейший пример дает нам функция $y=x^3$, так называемая кубическая парабола, для которой при $x=0$ сама ось x -ов является касательной в точке перегиба. Другой пример представляет функция $f(x)=\sin x$, для которой

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x,$$

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x.$$

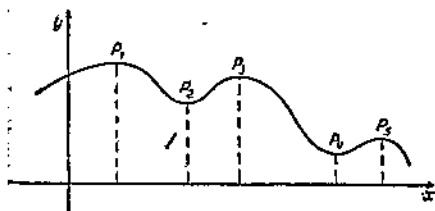


Черт. 57.

При $x=0$ $f'(0)=1$, а $f''(0)=0$; так как $f''(x)$ при $x=0$ меняет знак, то начало координат является точкой перегиба для синусоиды, и соответствующая касательная наклонена под углом в 45° к оси x -ов.

Следует однако заметить, что могут быть точки, в которых $f''(x)=0$, но касательная все же не пересекает в них кривую, а остается по одну сторону от кривой. Это имеет место например для кривой $y=x^4$, которая целиком лежит над осью x -ов, а при $x=0$ ее вторая производная равна нулю.

2. Наибольшее и наименьшее значения. Мы говорим, что функция или кривая $y=f(x)$ имеет в точке $x=\xi$ наибольшее значение (maximum) или наименьшее значение (minimum), если по крайней мере в какой-либо окрестности этой точки $x=\xi$ значения функции $f(x)$



Черт. 58.

все меньше либо соответственно все больше, нежели $f(\xi)$. Под окрестностью точки ξ мы разумеем при этом интервал $\alpha \leq x \leq \beta$, который содержит внутри точку ξ . Геометрически говоря, все такие наибольшие и наименьшие значения представляют гребни и впадины кривой. Достаточно

взглянуть на черт. 58, чтобы убедиться в том, что наибольшее значение в точке P_5 вполне может быть меньше наименьшего значения в точке P_2 ;

итак, понятию наибольшего и наименьшего значения свойственно сперва нечто относительное, именно отношение к некоторой окрестности, которую следует всякий раз ограничить.

Если хотят установить действительно абсолютно наименьшее или абсолютно наибольшее значение функции, то нужны еще дополнительные рассуждения, чтобы решить, можно ли его выделить из максимальных и минимальных значений и как это сделать.

Нам нужно сперва уметь находить относительные наибольшие и наименьшие значения или, как говорят, относительные экстремальные значения (extremum — значит крайнее значение) функции или кривой. Эта задача, которая очень часто ставится в геометрии, механике и физике и которая и так то и дело встречается во многих приложениях, послужила одним из первых поводов к развитию дифференциального и интегрального исчисления в XVII веке.

Непосредственно видно, что касательная в экстремальной точке ξ должна быть горизонтальной, предполагая, что функция дифференцируема в этой точке. Итак, условие

$$f'(\xi) = 0$$

является необходимым условием для существования экстремума; решая это уравнение относительно неизвестной, мы получаем те точки, для которых такой экстремум может появиться. Но наше условие никоим образом не является достаточным условием экстремума; именно могут существовать точки, в которых производная обращается в нуль, т. е. касательная горизонтальна, но в которых кривая не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения. Этот случай имеет место тогда, если кривая в соответствующей точке имеет точку перегиба, т. е. если горизонтальная касательная пересекает кривую в этой точке, как в приведенном выше примере функций $y = x^3$ в точке $x = 0$. Но раз найдена точка ξ , в которой $f'(\xi)$ обращается в нуль, то можно сейчас же заключить, что в этой точке функция достигает наибольшего значения, если $f''(\xi) < 0$, и наименьшего значения, если $f''(\xi) > 0$, ибо в первом случае кривая в окрестности этой точки лежит под касательной, а во втором случае — над ней.

Вместо того чтобы при выводе необходимых условий ссылаться на геометрическую интуицию, мы могли бы конечно легко дать чисто аналитическое доказательство (ср. совершенно аналогичные рассуждения при выводе теоремы Ролля на стр. 90). Если ξ есть точка, в которой функция достигает наибольшего значения, то выражение $f(\xi) - f(\xi + h)$ должно быть при достаточно малом h положительным. Следовательно отношение $\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ будет иметь положительное или отрицатель-

ное значение, смотря по тому, будет ли h иметь отрицательное или положительное значение. Предел этого отношения, когда h стремится к нулю, пробегая отрицательные значения, не может быть отрицательным, в то же время он не может быть положительным, если h стремится к нулю, оставаясь положительным. Так как оба предела должны на основании допущения о существовании производной быть равными между собой, а именно равняться $f'(\xi)$, то они могут равняться только нулю, т. е. непременно $f'(\xi) = 0$. Аналогичное рассуждение имеет место для наименьшего значения.

Мы можем впрочем формулировать и аналитически доказать необходимые и достаточные условия для существования наибольшего или наименьшего значения, не пользуясь второй производной. В точке ξ функция безусловно принимает наименьшее или наибольшее значение, если производная при переходе через эту точку меняет знак, именно функция принимает наименьшее значение, когда производная слева от ξ отрицательна, а справа — положительна, в противном случае функция принимает наибольшее значение.

Для доказательства пишем на основании теоремы о среднем значении

$$f(\xi + h) - f(\xi) = hf'(\xi + \theta h).$$

Мы видим, что при нашем условии разность $f(\xi + h) - f(\xi)$ при выборе достаточно малого по абсолютному значению h должна иметь тот же самый знак, независимо от того, будет ли значение h положительным или отрицательным; отсюда непосредственно вытекает правильность нашего утверждения.

В то же время мы видим, что значение $f(\xi)$ действительно является наименьшим или наибольшим значением во всем интервале, содержащем точку ξ , в котором производная не меняет еще раз знака.

Так как теорема о среднем значении, на которую только и опиралось наше рассуждение, применима и в том случае, когда функция $f(x)$ не дифференцируема в точке ξ , но дифференцируема во всех остальных рассматриваемых точках, т. е. когда кривая $y = f(x)$ имеет например при $x = \xi$ угловую точку, то мы приходим таким образом к несколько более общему результату. Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале, содержащем точку ξ , и дифференцируема в нем повсюду, за исключением самой точки ξ , то функция имеет в этой точке наибольшее или наименьшее значение в том случае, когда ею отделяются два интервала с различными знаками производной $f'(x)$. Например функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ наименьшее значение, потому что $f'(x) > 0$ при

$x > 0$ и $f'(x) < 0$ при $x < 0$ (черт. 34 на стр. 83). Подобным же образом функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ имеет в этой точке наименьшее значение, хотя производная $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ обращается там в бесконечность (черт. 37 на стр. 84).

Впрочем я хотел бы по поводу общей теории наибольших и наименьших значений заметить следующее: нахождение экстремальных значений вовсе не равнозначает с нахождением наибольшего и наименьшего из всех значений функции в замкнутом интервале. У монотонной функции наибольшее и наименьшее из всех значений лежат на границах интервала и не являются уже экстремальными в нашем смысле, так как последнее понятие относится всегда к полной окрестности соответствующей точки. Так например функция $f(x) = x$ в интервале $0 \leq x \leq 1$ имеет в точке нуль наименьшее, а в точке 1 наибольшее значение, и аналогично обстоит дело для любой монотонной функции. Функция $y = \arctg x$, имеющая производную

$$y' = \frac{1}{1+x^2},$$

представляет в интервале $-\infty < x < +\infty$ монотонную функцию и не имеет в этом открытом интервале ни экстремального значения и ни наибольшего или наименьшего из значений.

Если мы хотим быть уверены, что, найдя корни $f'(x)$, мы тем самым нашли также точку, в которой функция достигает абсолютно наибольшего или абсолютно наименьшего значения в интервале, то для этого можно часто воспользоваться следующим критерием: корень ξ уравнения $f'(x) = 0$ несомненно дает абсолютно наименьшее значение функции $f(x)$ во всем интервале, если $f''(x) > 0$ во всем этом интервале, и абсолютно наибольшее значение функций, если $f''(x) < 0$ во всем интервале. В самом деле, по теореме о среднем значении, предполагая, что и точка $\xi + h$ принадлежит еще к нашему интервалу, имеем:

$$f'(\xi + h) = f'(\xi + h) - f'(\xi) = hf''(\xi + \theta h).$$

Следовательно производная $f'(x)$ имеет в точке $x = \xi + h$ тот же знак, что и h , или противоположный, смотря по тому, предполагаем ли мы $f''(x) > 0$ или $f''(x) < 0$; отсюда на основании предыдущего вытекает наше утверждение.

3. Примеры. Задача 1. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь, требуется разыскать прямоугольник с наименьшим периметром.

Пусть площадь равна a^2 , одна сторона x (при этом x приходится рассматривать в интервале $0 < x < \infty$), тогда другая сторона $\frac{a^2}{x}$, а полупериметр равен

$$f(x) = x + \frac{a^2}{x}$$

Имеем

$$f'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2a^2}{x^3}.$$

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный положительный корень $x = a$. При этом значении $f''(x)$ имеет положительное значение (как и вообще при любом положительном значении x), следовательно при этом значении x периметр получает наименьшее значение, и мы получаем весьма естественный результат, что из всех рассматриваемых прямоугольников квадрат обладает наименьшим периметром.

Задача 2. Среди всех треугольников с заданным основанием и заданной площадью надо найти тот, который имеет наименьший периметр.

Для того чтобы решить эту задачу, мы рассматриваем данное основание AB как часть оси x -ов, а середину его O берем за начало координат. Если C — вершина соответствующего треугольника, h — его вполне определенная высота и x и h — координаты вершины C , то суммы двух искомых сторон AC и BC треугольника выразятся, если длину данного основания обозначим через $2a$, так:

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + h^2};$$

далее имеем:

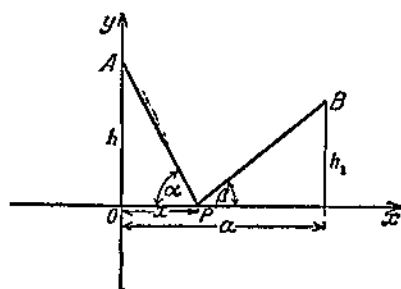
$$f'(x) = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + h^2}},$$

$$f''(x) = \frac{-(x+a)^3}{(\sqrt{(x+a)^2 + h^2})^3} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + h^2}} + \frac{-(x-a)^3}{(\sqrt{(x-a)^2 + h^2})^3} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + h^2}} = \frac{h^2}{(\sqrt{(x+a)^2 + h^2})^3} + \frac{h^2}{(\sqrt{(x-a)^2 + h^2})^3}.$$

Мы сразу видим, 1) что $f'(0) = 0$, 2) что $f''(x)$ имеет всегда положительные значения, поэтому при $x = 0$ действительно имеем минимум, так как $f''(x) > 0$, то $f'(x)$ постоянно возрастает и потому не может равняться нулю ни в какой иной точке. Следовательно при $x = 0$ получаем действительно абсолютно наименьшее значение периметра, и это значение дает нам равнобедренный треугольник.

Аналогичным путем можно убедиться в том, что из всех треугольников, имеющих данный периметр и данное основание, равнобедренный треугольник имеет наибольшую площадь.

Задача 3. Найти на данной прямой точку, сумма расстояний которой от двух точек была бы наименьшей.



Черт. 59.

Пусть дана прямая и две точки A и B . На прямой ищем такую точку P , чтобы сумма расстояний $AP + BP$ была наименьшей.

Берем данную прямую за ось x -ов и пользуемся обозначениями, отмеченными на черт. 59. Тогда искомая сумма расстояний равна:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + h_1^2},$$

и мы имеем далее

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2}}, \\ f''(x) &= \frac{-x^3}{(\sqrt{x^2 + h^2})^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{-(x-a)^3}{(\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2})^3} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2}} = \frac{h^2}{(\sqrt{x^2 + h^2})^3} + \frac{h_1^2}{(\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2})^3}. \end{aligned}$$

Уравнение $f'(\xi) = 0$ дает нам следовательно

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} = \frac{a - \xi}{\sqrt{(\xi - a)^2 + h_1^2}},$$

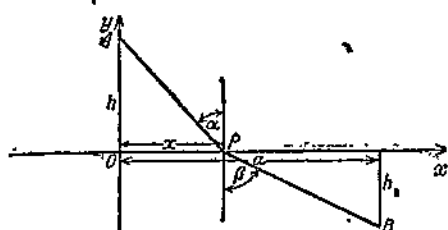
а это означает, что обе прямые PA и PB должны образовать с данной прямой равные углы. В том, что мы при этом получаем действительно наименьшее значение, убеждает нас положительный знак $f''(x)$.

Решение этой задачи находится в очень тесной связи с законом отражения в оптике. Согласно важному принципу оптики, так называемому принципу Фермата о кратчайшем времени распространения света, путь светового луча характеризуется тем свойством, что время, которое нужно световому лучу, чтобы при известных условиях попасть из точки A в точку B , должно быть кратчайшим. Если на луч наложим условие, чтобы он на своем пути проходил через точку заданной прямой (например зеркала), то мы видим, что кратчайшее время прохождения достигается таким лучом, для которого угол падения равен углу отражения.

Задача 4. Закон преломления. Пусть даны две точки A и B , лежащие по разные стороны от оси x -ов. Какой путь ведет в самое

короткое время из точки A в точку B , если скорость по одну сторону от оси x -ов — c_1 , а по другую сторону — c_2 ?

Ясно, что этот „кратчайший“ путь должен состоять из двух прямых отрезков, которые граничат в некоторой точке P оси x -ов. При помощи обозначений черт. 60 мы получаем для длины отрезков PA и PB выражения



Черт. 60.

$$\sqrt{h^2 + x^2} \text{ и } \sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}$$

и получаем время, которое требуется для прохождения этого пути, делением этих длин на соответствующие скорости. Следовательно время, потребное для прохождения этого пути, равно

$$f(x) = \frac{1}{c_1} \sqrt{h^2 + x^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}.$$

Отсюда, дифференцируя, получаем

$$f'(x) = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{a - x}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{c_1} \frac{\sqrt{h^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{h^2 + x^2}}}{(\sqrt{h^2 + x^2})^3} + \frac{1}{c_2} \frac{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2} - \frac{(a - x)^2}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}}}{(\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2})^3} = \\ &= \frac{1}{c_1} \cdot \frac{h^2}{(\sqrt{h^2 + x^2})^3} + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{h_1^2}{(\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2})^3}. \end{aligned}$$

Уравнение $f'(x) = 0$, т. е.

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}},$$

эквивалентно, как легко видеть из чертежа, условию:

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta,$$

или

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Могу предоставить вам самим доказательство того, что существует только одна точка, которая удовлетворяет этому условию, и что в этой

точке действительно получается наименьшее значение. Физическое значение нашего примера опять-таки получается из принципа оптики о кратчайшем времени распространения света. Луч света проходит между двумя точками тот путь, для которого требуется наименьшее время. Если c_1 и c_2 означают скорости света по обе стороны плоскости раздела двух оптических сред, то ход светового луча должен происходить согласно полученному результату; итак, наш результат дает закон преломления Снеллиуса.

§ 6. Логарифмическая и показательная функции.

При установленной нами общей связи между дифференциальным и интегральным исчислением само собой получается удобный подход к показательной и логарифмической функциям. Хотя мы уже рассматривали эти функции раньше, однако мы хотим теперь, не пользуясь прежними определениями и основанными на них рассуждениями, дать здесь новые определения этих функций и развить их теорию. При этом мы будем исходить из логарифмической функции, а затем путем обращений получим из нее показательную функцию.

1. Определение логарифмической функции. Формула дифференцирования. Мы видим, что неопределенный интеграл степени x^n при любом целом положительном или отрицательном значении n опять приводит к степени; единственное исключение представляет функция $\frac{1}{x}$, которая не является производной какой-либо из рассмотренных нами до сих пор функций. Естественно поэтому ожидать, что неопределенный интеграл от функции $\frac{1}{x}$ представляет новую функцию; ввиду этого займемся исследованием функции:

$$y = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = f(x),$$

при $x > 0$. Мы называем ее логарифмом x или, точнее, натуральным логарифмом x и пишем $y = \log x$, или также $\ln x$, или $\log \text{nat} x$. Переменную интегрирования мы обозначили через ξ , чтобы не смешивать ее с верхним пределом x .

То, что мы в качестве нижнего предела взяли число 1, есть на первый взгляд произвольный, однако, как скоро обнаружится, целесообразный выбор.

В дальнейшем рассуждении выяснится само собой, что определенная здесь логарифмическая функция совпадает с определенным ранее „элемен-

тарным путем" логарифмом. Но результаты следующих рассуждений, на что я еще раз указываю, не зависят от ранее полученных.

Геометрически наша логарифмическая функция означает площадь, заштрихованную на черт. 61, которая ограничена гиперболой

$y = \frac{1}{\xi}$ и осью ξ с одной стороны и прямыми

$\xi = 1$ и $\xi = x$ — с другой. При этом площадь надо считать положительной, если $x > 1$, и отрицательной, если $x < 1$. При $x = 1$ площадь исчезает и потому $\log 1 = 0$.

Из предыдущего определения следует, что производная логарифма выражается формулой:

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Специально подчеркиваем, что аргумент x всегда предполагается положительным; образовать логарифм нуля или даже отрицательных чисел мешает нам то обстоятельство, что подынтегральная функция при $\xi = 0$ обращается в бесконечность. Наоборот, можно конечно, если только взять за нижний предел отрицательное число, например -1 , образовать интеграл с отрицательным пределом, т. е. рассматривать выражение

$$\int_{-1}^x \frac{d\xi}{\xi} \quad (x < 0).$$

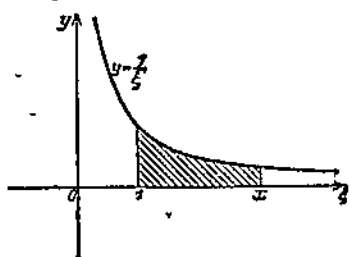
Рассматривая интеграл как предел суммы или как площадь, мы видим, что при $x < 0$

$$\int_{-1}^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{-x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{|x|} \frac{d\xi}{\xi} = \log |x|.$$

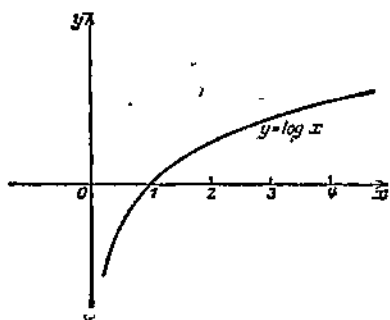
Соответственно этому мы можем написать общую формулу неопределенного интегрирования в виде:

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x|.$$

Логарифмическую функцию можно конечно наглядно представить с помощью кривой. Эта логарифмическая кривая представлена на черт. 62. Как полу-



Черт. 61.



Черт. 62.

чить графическое построение этой кривой, было указано в § 5 главы II (см. черт. 45, стр. 103).

2. Теорема сложения. Определенная таким образом логарифмическая функция удовлетворяет следующему основному закону:

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

Доказательство этой теоремы сложения получается очень просто из определения интеграла и его геометрического значения.

Именно мы имеем:

$$\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^a \frac{d\xi}{\xi} + \int_a^{ab} \frac{d\xi}{\xi},$$

поэтому остается только доказать, что

$$\int_a^{ab} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^b \frac{d\xi}{\xi}.$$

Мы можем написать

$$\int_1^b \frac{d\xi}{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\Delta \xi_v}{\xi_v},$$

причем $\xi_v = 1 + v h$, где $h = \frac{b-1}{n}$, а $\Delta \xi_v = \xi_{v+1} - \xi_v$.

Представив сумму, стоящую в правой стороне, в виде

$$\sum_{v=0}^{n-1} \frac{a \Delta \xi_v}{a \xi_v} = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\Delta \eta_v}{\eta_v},$$

где $\eta_v = a \xi_v$, т. е.

$$\eta_v = a + v \frac{ab - a}{n},$$

мы видим, что эта сумма при $n \rightarrow \infty$ переходит в $\int_a^{ab} \frac{d\xi}{\xi}$, и тем

самым доказано равенство интегралов, которое выражает замечательный геометрический факт относительно площадей, ограниченных гиперболой

$$y = \frac{1}{x}.$$

Из теоремы сложения вытекает для произвольных положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ равенство:

$$\log(a_1 a_2 \dots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n$$

Если в частности все числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ равны одному и тому же числу a , то получаем

$$\log a^n = n \log a.$$

Также получаем

$$\log a + \log \frac{1}{a} = \log 1 = 0,$$

следовательно

$$\log a = -\log \frac{1}{a}.$$

Если положим далее $\sqrt[n]{a} = a$, то $\log a = n \log a$, или

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a.$$

Отсюда же, применяя еще раз теорему сложения, получаем

$$\frac{m}{n} \log a = \log \sqrt[n]{a^m} = \log a^{\frac{m}{n}}.$$

Равенство

$$\log a^r = r \log a$$

доказано таким образом для всех положительных рациональных значений r . При отрицательных значениях r тоже имеет место

$$\log a^r = \log \frac{1}{a^{-r}} = -\log a^{-r} = r \log a.$$

3. Монотонный характер и совокупность значений логарифма. Ясно, что значение $\log x$ возрастает, когда x возрастает, и убывает с убыванием x ; логарифм является монотонной функцией.

Так как производная $\frac{1}{x}$ с возрастанием x убывает, то возрастание функции с возрастанием x все замедляется. Несмотря на это однако, функция $\log x$ при неограниченном возрастании x не стремится к какому-то определенному пределу, а стремится к бесконечности, т. е. как бы ни было велико положительное число A , всегда можно указать такие значения x , что $\log x > A$. Этот факт очень легко следует из теоремы сложения. Именно имеем $\log 2^n = n \log 2$. Так как $\log 2$ — положительное число, то при $x = 2^n$ для достаточно большого значения n функция $\log x$ будет иметь сколь угодно большое значение.

Так как $\log \frac{1}{2^n} = -n \log 2$, то мы видим, что $\log x$, когда x , оставаясь положительным, стремится к нулю, неограниченно возрастает в отрицательном направлении.

Итак, резюмируя, можно сказать:

Функция $\log x$ — монотонная функция, которая принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, когда независимая переменная x пробегает континуум (непрерывное множество) положительных чисел.

4. Обратная функция от логарифма (показательная функция). Так как функция $y = \log x$ является монотонной функцией от x , принимающей все действительные значения, то обратная функция, которую мы сперва обозначим $x = E(y)$, есть функция однозначная, монотонная, определенная для любого значения y ; она дифференцируема, потому что $\log x$ — дифференцируемая функция (см. § 3, стр. 124).

Поменяв между собой обозначения зависимой и независимой переменной, займемся подробным изучением этой функции $E(x)$. Прежде всего мы видим, что эта функция при любом значении x должна иметь положительное значение. Далее мы видим, что

$$E(0) = 1,$$

так как это равенство равнозначуще с тем, что логарифм единицы равен нулю. Во-вторых, из теоремы сложения для логарифма вытекает непосредственно теорема умножения

$$E(\alpha) E(\beta) = E(\alpha + \beta).$$

Для доказательства нам нужно только заметить, что равенства

$$E(\alpha) = a, \quad E(\beta) = b, \quad E(\alpha + \beta) = c$$

эквивалентны равенствам:

$$\alpha = \log a, \quad \beta = \log b, \quad \alpha + \beta = \log c.$$

Но так как по теореме сложения для логарифма $\alpha + \beta = \log(ab)$, то $c = ab$, что и доказывает теорему умножения.

Из этой теоремы вытекает основное свойство функции $y = E(x)$, которое дает нам право назвать ее показательной функцией и представить символически в виде:

$$y = e^x.$$

Чтобы получить это свойство, мы примем во внимание, что должно непременно существовать такое число, назовем его через e^1 , для которого

$$\log e = 1.$$

Эквивалентным является определение

$$E(1) = e.$$

⁴⁾ Мы докажем в н° 6 этого параграфа, что это число e тождественно с числом e , которое мы рассматривали в главе I.

На основании теоремы умножения для показательной функции отсюда выводят, так же как раньше при логарифме, для любого целого положительного значения n

$$E(n) = e^n,$$

и таким же образом при целых значениях m и n

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}},$$

что впрочем мы могли бы и прямо вывести из теоремы сложения для логарифма.

Доказанное таким образом для положительных рациональных значений r равенство $E(r) = e^r$ справедливо на основании равенства

$$E(r)E(-r) = E(0) = 1$$

и для отрицательных рациональных значений r .

Итак, функция $(E)x$ непрерывна при всех значениях x и совпадает при всех рациональных значениях $x=r$ с функцией e^x . Этот факт позволяет обозначать эту функцию через e^x и при любых иррациональных значениях x ¹⁾. (Заметьте, что при этом определении непрерывность функции e^x как обратной функции от непрерывной монотонной функции очевидна заранее, между тем при элементарном определении непрерывность приходится доказывать.)

Дифференцирование показательной функции дается формулой:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \text{или} \quad y' = y.$$

Эта формула выражает важный факт, что показательная функция при дифференцировании не изменяется.

Доказательство крайне простое. Именно имеем $x = \log y$, откуда, принимая во внимание формулу дифференцирования логарифма, выводим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y},$$

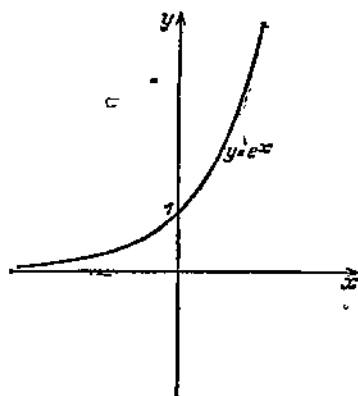
¹⁾ Действительно теперь доказано, что данное нами определение приводит к той же самой показательной функции с основанием e , которая была ранее элементарно определена с помощью возведения в степень. В самом деле, при том элементарном определении функцию e^x при иррациональном значении x рассматривали как предел выражений e^{x_n} , где x_n пробегало последовательность рациональных чисел, стремящихся к x . Так как $E(x_n) = e^{x_n}$, а вследствие непрерывности $E(x)$ имеем $E(x) = \lim E(x_n)$, то элементарное определение функции e^x повсюду согласуется с данным теперь определением.

следовательно по правилу для обратных функций имеем:

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x,$$

как мы и утверждали.

Кривая, изображающая показательную функцию e^x , так называемая экспоненциальная кривая, получается просто путем отражения логарифмической кривой относительно биссектрисы положительного квадранта. Она представлена на черт. 63.



Черт. 63.

5. Общая показательная функция a^x и общая степень x^a . Мы определяем теперь показательную функцию a^x при произвольном положительном основании a просто с помощью равенства

$$y = a^x = e^{x \log a},$$

что согласуется с элементарным определением, ввиду того что

$$e^{\log a} = a.$$

С помощью правила дифференцирования сложной функции сразу получаем:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \log a} = e^{x \log a} \cdot \log a,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a.$$

Обратную функцию от показательной функции $y = a^x$ называют логарифмом при основании a и записывают так:

$$x = \log_a y,$$

между тем как логарифм, который мы раньше ввели, называют, там где нужно различать их, натуральным логарифмом.

Непосредственно из определения получаем соотношение

$$x \log a = \log a \cdot \log_a y = \log y,$$

которое показывает, что логарифм числа y при любом положительном основании $a \neq 1$ получается из натурального логарифма этого числа путем умножения его на величину, обратную натуральному логарифму a ; эта величина называется модулем системы логарифмов при основании a ¹⁾

¹⁾ При $a=10$ получаются знакомые со средней школы „бриггов“ логарифмы, которые преимущественно применяются для практических вычислений.

Вместо нашего прежнего определения обобщенной степени x^a вводим теперь определение с помощью равенства

$$x^a = e^{a \log x}$$

(и здесь непосредственно очевидно, что по существу это определение совпадает с элементарным определением).

Правило дифференцирования степени x^a получается на основании этого определения непосредственно с помощью правила дифференцирования сложной функции; действительно

$$\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a \log x} = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1},$$

что совпадает с нашим прежним результатом (ср. стр. 112).

6. Представление показательной и логарифмической функции в виде пределов. Наши рассуждения позволяют нам просто установить важные предельные соотношения для введенных величин. Исходным пунктом служит формула дифференцирования функции $f(x) = \log x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

В частности при $x=1$ имеем

$$f(1) = \log(1) = 0,$$

и потому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log(1+h) = 1;$$

это соотношение, так как $\frac{1}{h} \log(1+h) = \log(1+h)^{\frac{1}{h}}$, можем записать в виде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1.$$

Если положим $\log(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1 + \delta$, то при $h \rightarrow 0$ и δ будет стремиться к нулю. Но $(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{1+\delta} = e \cdot e^{\delta}$, а $\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\delta} = 1$, следовательно получаем следующий важный факт.

Если число h стремится к нулю, то выражение $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ стремится к числу e :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Отсюда заключаем, что наше число e как раз совпадает с тем числом e , которое мы рассматривали на стр. 35, как пример чисел, определяемых путем предельного перехода. Именно, мы можем в частности вместо числа h подставлять по порядку значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ и получаем таким образом равенство:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Для любого положительного или отрицательного значения x получается соответствующее предельное равенство:

$$e^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}}.$$

Для доказательства заменяем число h в предыдущем равенстве для e через $x \cdot h$, которое конечно тоже стремится к нулю вместе с h . Тогда при $h \rightarrow 0$ получаем $(1 + xh)^{\frac{1}{xh}} \rightarrow e$ и вместе с тем

$$\left[(1 + xh)^{\frac{1}{xh}}\right]^x = (1 + xh)^{\frac{1}{h}} \rightarrow e^x.$$

В частности опять получаем, когда h пробегает последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Из формулы дифференцирования для a^x :

$$a^x \log a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

при $x = 0$ получаем формулу:

$$\log a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h},$$

которая непосредственно выражает логарифм от a с помощью предела.

Замечу еще по поводу этого равенства, что с его помощью можно удовлетворительным образом дополнить ранее полученное соотношение:

$$\int_a^b x^a dx = \frac{1}{a+1} (b^{a+1} - a^{a+1}), \quad (0 < a, \quad 0 < b).$$

¹⁾ Когда последовательность чисел $a_1, a_2, \dots$ сходится к пределу a , то и степени $a_1^x, a_2^x, \dots$ стремятся к пределу a^x , так как a^x представляет непрерывную функцию от a .

Нам приходилось всегда исключать здесь случай $a = -1$. Теперь же мы можем проследить, что произойдет, когда число a , стоящее в обеих частях этого равенства, будет стремиться к пределу -1 . Если положим $a = 1$, то левая часть будет на основании нашего определения логарифма иметь пределом:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \log b^1);$$

поэтому и правая часть равенства должна при $a \rightarrow -1$ стремиться к тому же пределу. И этот факт согласуется с формулой

$$\log b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h},$$

достаточно только заменить $a + 1$ через h .

Таким образом мы устранили исключительное положение числа $a = -1$ в этой столь часто рассматривавшейся нами формуле интегрирования. Именно, хотя формула при $a = -1$ теряет смысл, зато она сохраняет свое значение как предельная формула при $a \rightarrow -1$.

7. **Заключительные замечания.** Хочу еще раз вкратце резюмировать ход рассуждений в этом параграфе.

Мы прежде всего дали определение натурального логарифма $y = \log x$ при $x > 0$ с помощью интеграла и отсюда же сразу вывели формулу дифференцирования, теорему сложения и обратимость. Затем мы исследовали обратную функцию $y = e^x$ (где число e означало то число, логарифм которого равен 1) и вывели для нее формулу дифференцирования, а также предельные выражения для нее и для логарифма. Введение функций $y = x^a = e^{a \log x}$ и $y = a^x = e^{x \log a}$ получилось при этом само собой.

При данном здесь изложении в противоположность „элементарному“ изложению не возникает никаких затруднений в вопросах о непрерывности, так как логарифм с самого начала характеризуется как интеграл и тем самым как непрерывная дифференцируемая функция своего аргумента, а непрерывность обратной функции вытекает сама собой.

§ 7. Некоторые применения показательной функции.

Мы изучим в этом параграфе ряд различных примеров, где появляются показательные функции, и получим таким образом представление о фундаментальном значении этой функции в самых разнообразных приложениях.

⁴⁾ Предельный переход $a \rightarrow -1$ мы совершили непосредственно под знаком интеграла (см. по этому поводу рассуждения в № 2 § 7 главы II).

1. Дифференциальное уравнение, характеризующее показательную функцию. Мы можем охарактеризовать показательную функцию с помощью простой теоремы, применение которой сэкономит нам много отдельных рассуждений.

Если функция $y=f(x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$y' = ay,$$

где $a \neq 0$ — постоянная, то y имеет вид

$$y = f(x) = ce^{ax},$$

где c — тоже постоянная; обратно, каждая функция вида ce^{ax} удовлетворяет предыдущему уравнению, которое называют дифференциальным уравнением, так как в нем устанавливается соотношение между функцией и ее производной.

Чтобы уяснить себе эту теорему, заметим сперва, что в простейшем случае при $a=1$ наше уравнение принимает вид $y' = y$. Мы знаем, что $y = e^x$ удовлетворяет этому уравнению, и ясно, что $y = ce^x$ тоже удовлетворяет ему, если c — произвольное постоянное число. Но мы можем легко обнаружить, что и обратно: никакая иная функция не удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению. В самом деле, пусть y — функция, удовлетворяющая этому дифференциальному уравнению, тогда рассмотрим функцию $u = ye^{-x}$. В таком случае

$$u' = y'e^{-x} - ye^{-x} = e^{-x}(y' - y).$$

Но правая часть равна нулю вследствие предполагаемого соотношения, а потому и $u' = 0$, т. е. u равно постоянной c и $y = ce^x$, что и требовалось доказать.

Совершенно так же как в частном случае $a=1$, можно поступить и в случае произвольного a , неравного нулю. Если мы введем $u = ye^{-ax}$ как новую искомую функцию, то получим $u' = y'e^{-ax} - aye^{-ax}$, а вместе с тем в силу допущения, что y удовлетворяет данному дифференциальному уравнению, получаем $u' = 0$. Итак, $u = c$ и $y = ce^{ax}$, как мы и утверждали.

Применим теперь полученное положение к ряду примеров и выясним его поближе.

2. Непрерывное начисление процентов. Радиоактивный распад. Капитал, процентные деньги к которому присчитываются каждый раз через определенные промежутки времени, возрастает в эти моменты скачками следующим образом. Если $100a$ — процентная такса и если далее нарощенные проценты присчитываются к капиталу в конце каждого года, то из начального капитала в 1 получается по истечении x лет сумма

$$(1+a)^x.$$

Если бы процентные деньги причислялись к капиталу не по истечении года, а по истечении $\frac{1}{n}$ части года, то капитал превратился бы по истечении x лет в

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{nx}.$$

Если возьмем для простоты $x=1$, т. е. рост в $100a\%$, рассчитанный на год, то в последнем случае получим, что из капитала 1 в год образуется капитал

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Заставим теперь n расти неограниченно, т. е. будем неограниченно уменьшать промежутки времени, по истечении которых процентные деньги присчитываются к капиталу, тогда предельный случай будет означать, что начисление производится известным образом непрерывно в каждый момент, и мы видим, что величина наращенного капитала по истечении года в e^a раз больше первоначального капитала; подобным же образом при этом способе начисления по истечении x лет (x может быть любым целым или нецелым числом) наращенный капитал в e^{ax} раз более первоначального.

Этот пример и ему подобные можно истолковать в духе рассуждений п°1 следующим образом. Имеется некоторое количество, выражаемое числом y , которое с течением времени возрастает (или убывает). Пусть скорость возрастания или убывания этого количества будет пропорциональна общему количеству. Тогда для скорости возрастания y' (как независимую переменную x мы рассматриваем при этом время) имеет место закон вида $y' = ay$, причем множитель пропорциональности a положителен или отрицателен, смотря по тому, имеем ли мы дело с возрастанием или убыванием. Сама величина y выразится согласно п°1 формулой

$$y = ce^{ax},$$

при этом значение постоянной c сейчас же обнаружится, если рассмотрим момент $x=0$. Тогда $e^{ax}=1$ и постоянная $c=y_0$, т. е. количеству в начальный момент, так что можем писать

$$y = y_0 e^{ax}.$$

Типичный пример такого рассмотрения представляет радиоактивный распад. Скорость, с которой уменьшается общее количество у радиоактивного вещества, пропорциональна, как с самого начала ясно, всему имеющемуся налицо в данный момент количеству этого

вещества, так как каждая составная частица вещества уменьшается столь же быстро, как и всякая другая.

Поэтому мы имеем право написать для количества вещества y , рассматриваемого как функция времени x , соотношение $y' = -ky$, причем множитель пропорциональности k следует взять положительным, так как речь идет об уменьшении количества вещества. Отсюда для количества вещества как функции времени x получаем выражение $y = y_0 e^{-kx}$, где y_0 — количество вещества в начальный момент ($x = 0$).

Через некоторое время τ количество радиоактивного вещества уменьшится вдвое против первоначального количества. Это время τ так называемый „период“ находится из уравнения

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-k\tau},$$

откуда тотчас же получаем для τ значение $\tau = \frac{\log 2}{k}$.

3. Охлаждение или нагревание тела в окружающей среде. Другим типичным примером появления показательной функции служит явление охлаждения тела, например металлической пластинки, погруженной в очень большую ванну определенной температуры; при рассмотрении такого охлаждения мы предполагаем, что окружающая ванна настолько велика, что на ее собственную температуру процесс не влияет. Далее мы предполагаем, что погруженное тело в каждый момент имеет повсюду одну и ту же температуру и что быстрота изменения температуры пропорциональна разности температур тела и окружающей среды (ньютоновский закон охлаждения).

Если мы обозначим разность температур через $y = y(x)$, а время — через x , то закон охлаждения выразится уравнением

$$y' = -ky;$$

при этом мы разумеем под k положительную постоянную, зависящую от материала. Речь теперь идет о том, чтобы из этого дифференциального закона, который выражает тенденцию процесса охлаждения в определенный момент времени x , вывести „интегральный закон“, который позволил бы на основании известных условий в начальный момент $x = 0$ делать заключения относительно любого следующего момента x . Этот интегральный закон получается непосредственно с помощью теоремы из п^о 1 в виде

$$y = ce^{-kx},$$

где k — указанная раньше постоянная, зависящая от материала. Следовательно оказывается, что температура с течением времени „экспоненциально“ понижается и стремится к окружающей температуре. Скорость,

с которой это происходит, характеризуется постоянной k . Значение постоянной c опять находим рассмотрением момента $x=0$ и получаем $y_0=c$; таким образом мы можем наш закон охлаждения окончательно записать в виде

$$y=y_0 e^{-kx}.$$

Впрочем заметим, что тот же самый закон, само собой понятно, будет иметь место и при нагревании тела. Единственное различие заключается в том, что начальная разность температур y_0 в данном случае имеет не положительное, а отрицательное значение.

4. Зависимость атмосферного давления от высоты над поверхностью земли. В качестве дальнейшего примера, относящегося к другой области, выведем закон зависимости атмосферного давления от высоты, так называемую барометрическую формулу высоты. Мы будем при этом опираться, с одной стороны, на тот известный из физики факт, что воздушное давление равно весу столба воздуха, стоящего перпендикулярно над площадкой, площадь которой равна 1; с другой стороны, на закон Бойля, гласящий, что давление газа p при постоянной температуре пропорционально его плотности σ . Выражая это формулой, имеем: $p=a\sigma$, где a — постоянная, которая зависит только от особых физических свойств воздуха и которая впрочем пропорциональна абсолютной температуре воздуха, что в данном случае для нас не имеет значения. Нашей задачей является определить давление $p=f(l)$ как функцию высоты l над поверхностью земли.

Если обозначить через p_0 воздушное давление у поверхности земли, т. е. вес всего вертикального столба воздуха, покоящегося над единицей площади, то вес столба до высоты l выразится интегралом

$$\int_0^l \sigma(\lambda) \cdot d\lambda,$$

а давление p на высоте l будет равняться

$$p=f(l)=p_0-\int_0^l \sigma(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Но отсюда дифференцированием получаем соотношение между давлением p и плотностью σ

$$\sigma(l)=-f'(l)=-p'.$$

Из этого уравнения с помощью закона Бойля исключаем величину σ и приходим таким образом к уравнению

$$p'=-\frac{1}{a}p,$$

содержащему одну только неизвестную функцию давления. На основании п^о 1 получаем теперь

$$p = c \cdot e^{-\frac{l}{a}}.$$

Обозначая, как и раньше, давление на поверхности земли, т. е. значение $p(0)$, через p_0 , получаем тотчас же $c = p_0$ и потому

$$p = p_0 e^{-\frac{l}{a}}.$$

Переходя к логарифмам, имеем

$$l = a \log \frac{p_0}{p}.$$

Эти две формулы находят частое применение. Они позволяют например, если известна постоянная a , путем измерения атмосферного давления определить высоту местонахождения или путем измерения атмосферного давления в двух местах определить разность их высот. Подобным же образом можно с помощью этой формулы, когда известны атмосферное давление и высота, определить постоянную a , которая играет большую роль в теории газов.

5. Ход химических реакций. Рассмотрим еще пример из области химии, а именно так называемые унимолекулярные реакции. Допустим, что некоторое вещество растворено в гораздо большем количестве растворителя, например некоторое количество тростникового сахара в воде, тогда для химических реакций мы можем в этом простом случае формулировать так называемый закон действия масс в химии следующим образом: быстрота реакции пропорциональна имеющемуся еще наличию количеству превращающегося вещества. Представим себе, что благодаря каталитическому действию тростниковый сахар превращается в инвертированный, и обозначим количество еще непревращенного тростникового сахара в момент времени x через $u(x)$, тогда быстрота реакции $-\frac{du}{dx}$, и согласно закону действия масс имеет место уравнение вида

$$\frac{du}{dx} = -ku,$$

где k — постоянная, зависящая от вещества. Из этого дифференциального закона получаем согласно п^о 1 тотчас же интегральный закон, который дает нам прямо количество $u(x)$ остающегося тростникового сахара как функцию времени:

$$u(x) = ae^{-kx}.$$

Эта формула ясно указывает, каким образом химическая реакция асимптотически стремится к своему конечному состоянию $u=0$ полного превращения. Постоянная a очевидно представляет количество вещества u_0 , которое имелось в момент $x=0$.

6. Замыкание и размыкание электрического тока. В качестве последнего примера рассмотрим явление, которое происходит при замыкании (или размыкании) постоянного электрического тока. Если W — сопротивление цепи, E — внешняя электродвижущая сила, то сила тока J постепенно возрастает от начального значения 0 до конечного стационарного состояния $\frac{E}{W}$. Мы должны следовательно рассматривать силу тока J как функцию времени. При этом явлении замыкания тока играет роль самоиндукция; цепь характеризуется определенным постоянным числом L , коэффициентом самоиндукции, а именно при каждом изменении силы тока в цепи появляется электродвижущая сила, противоположно направленная внешней электродвижущей силе и равная $L \frac{dJ}{dx}$, уменьшающая силу тока в цепи. На основании закона Ома, по которому в каждый момент произведение из силы тока на сопротивление равно фактически действующей электродвижущей силе, получаем следующее соотношение:

$$J \cdot W = E - L \frac{dJ}{dx}.$$

Чтобы иметь возможность применить теорему № 1, полагаем

$$f(x) = J(x) - \frac{E}{W}$$

и получаем $f'(x) = -\frac{W}{L}f(x)$, следовательно $f(x) = f(0)e^{-\frac{W}{L}x}$ и вместе с тем, ввиду того что $J(0) = 0$ или $f(0) = -\frac{E}{W}$, получаем для силы тока как функции времени выражение:

$$J = f(x) + \frac{E}{W} = \frac{E}{W} \left[1 - e^{-\frac{W}{L}x} \right].$$

Из него мы видим, как сила тока при замыкании асимптотически приближается к своему стационарному конечному значению $\frac{E}{W}$.

§ 8. Гиперболические функции.

1. Аналитическое определение. Во многих приложениях показательная функция появляется не отдельно, но в комбинациях вида

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

или

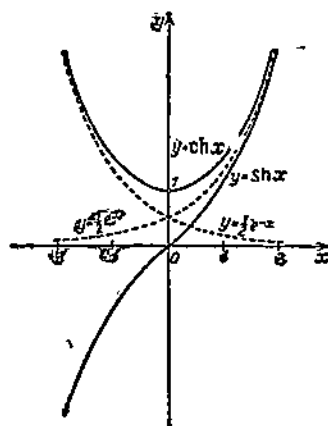
$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Целесообразно ввести эти и подобные комбинации как отдельные функции; мы обозначаем их следующим образом:

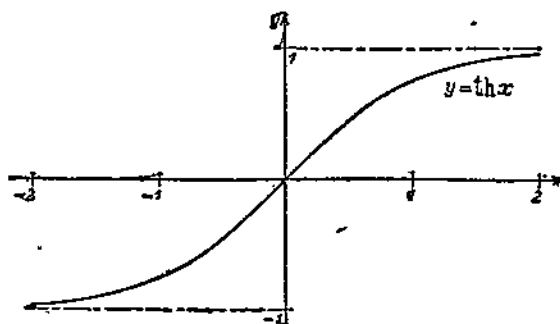
$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

и называем гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом, гиперболическим тангенсом и гиперболическим котангенсом¹⁾.

Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ определены для всех значений x , между тем для $\operatorname{cth} x$ точку $x=0$ необходимо исключить. Этими обозначениями



Черт. 64.



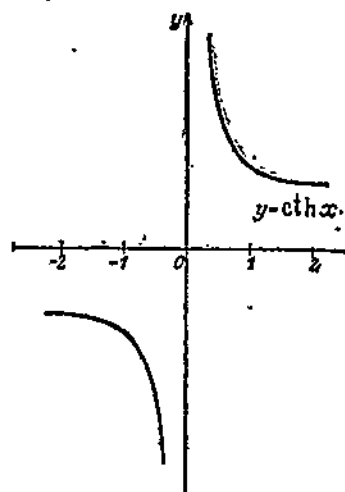
Черт. 65.

выражают известную аналогию с тригонометрическими функциями, и как раз эта аналогия, которую мы сейчас подробно изучим, оправдывает

особое рассмотрение наших новых функций. На черт. 64, 65 и 66 представлены графики гиперболических функций; для сравнения на черт. 64 даны пунктиром кривые $y = \frac{1}{2}e^x$ и $y = \frac{1}{2}e^{-x}$, с помощью которых можно тотчас же построить кривые $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$.

Мы видим, что $\operatorname{ch} x$ — четная функция, т. е. такая функция, которая не меняет своего значения, когда заменяют x через $-x$,

¹⁾ Пишут также $\sin \operatorname{hyp} x$, $\cos \operatorname{hyp} x$, $\operatorname{tg} \operatorname{hyp} x$ и $\operatorname{ctg} \operatorname{hyp} x$ или $\sin h x$, $\cos h x$, $\operatorname{tg} h x$ и $\operatorname{ctg} h x$. В немецкой литературе приняты обозначения: $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Xg} x$ и $\operatorname{Stg} x$.



Черт. 66.

а $\operatorname{sh} x$ — нечетная функция, т. е. при замене x через $-x$ меняет знак.

Функция

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

как вытекает из ее определения, имеет положительные значения при всех значениях x . Наименьшее значение она имеет при $x=0$, а именно $\operatorname{ch} 0=1$. Между $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ имеет место основное соотношение:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

что непосредственно следует из определения этих функций. Обозначим теперь независимую переменную через t вместо x и положим

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t,$$

тогда получим

$$x^2 - y^2 = 1,$$

т. е. точка с координатами $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ движется по равносторонней гиперболе $x^2 - y^2 = 1$, когда t пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. При этом, согласно нашему определяющему уравнению, $x \geq 1$, и мы легко убеждаемся в том, что y пробегает вместе с t все значения от $-\infty$ до $+\infty$, так как когда t неограниченно возрастает, то e^t неограниченно возрастает, а e^{-t} стремится к нулю. Поэтому мы можем теперь точнее сказать, что уравнения $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ дают правую ветвь нашей равносторонней гиперболы, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Теоремы сложения и формулы дифференцирования. Из определения наших функций следуют указанные ниже формулы, которые носят название теорем сложения:

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Доказательство получается сразу, если написать равенства

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}, \quad \operatorname{sh}(a+b) = \frac{e^a e^b - e^{-a} e^{-b}}{2}$$

и подставить в них

$$e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a, \quad e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a,$$

$$e^b = \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b, \quad e^{-b} = \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b.$$

Аналогия наших формул с соответствующими тригонометрическими формулами ясна. Различие заключается только в знаке в теоремах сложения для косинуса.

Соответствующую аналогию мы получаем в формулах дифференцирования. Из наших определений, как вы сами без труда докажете на основании того, что $\frac{de^x}{dx} = e^x$, вытекают формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x &= \operatorname{sh} x, & \frac{d}{dx} \operatorname{sh} x &= \operatorname{ch} x, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{th} x &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & \frac{d}{dx} \operatorname{cth} x &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.\end{aligned}$$

3. Обратные функции. Гиперболические функции $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ имеют обратные функции, которые мы обозначаем так:

$$t = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x, \quad t = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} y$$

(Ar произносится „area“, что означает площадь). Так как $\operatorname{sh} t$ повсюду монотонно возрастающая функция t , то ее обратная функция однозначно определена для всех значений y , между тем обратная функция $t = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$, как видно с первого взгляда на кривую на стр. 160, неоднозначна, а определена только с точностью до знака, ввиду того что данному значению x соответствует не только значение t , но и значение $-t$. Так как $\operatorname{ch} t \geq 1$, то функция $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$ определена только для значений $x \geq 1$.

Эти обратные функции можно очень легко выразить с помощью логарифмической функции, рассматривая в уравнениях

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

которые служат определением $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$, величину $e^t = u$ как неизвестную и решая получающиеся квадратные уравнения, получаем

$$u = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad u = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

и потому, переходя к логарифмам, имеем

$$\begin{aligned}t &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x, \\ t &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} y.\end{aligned}$$

Переменная x у функции $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$ ограничена интервалом $x \geq 1$, а функция $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} y$ определена для всех значений y .

В формуле $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} y$ квадратный корень необходимо брать положительным (в противном случае выражение в скобках имело бы отрицательное значение и логарифм не имел бы смысла); наоборот, в формуле для $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$ допустимы оба знака корня: как положительный, так и отрица-

тедный. Разумея под $\sqrt{x^2-1}$ положительное значение корня, мы имеем таким образом для функции $\text{Ar ch } x$ два значения:

$$\log(x + \sqrt{x^2-1}) \text{ и } \log(x - \sqrt{x^2-1}),$$

которые соответствуют обоим ветвям $\text{Ar ch } x$.

Так как

$$(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1,$$

то действительно сумма этих обоих значений равна нулю в согласии с тем, что было сказано раньше.

Совершенно аналогично можно конечно определить обратные функции от гиперболических тангенса и котангенса. Для этих функций, которые мы обозначим $\text{Ar th } x$ и $\text{Ar ct h } x$, без труда получаем (причем независимая переменная повсюду обозначается через x) равенства

$$\text{Ar th } x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \text{ в интервале } -1 < x < 1,$$

$$\text{Ar ct h } x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \text{ в интервалах } x < -1, \quad x > 1.$$

Дифференцирование наших обратных функций проведите сами, причем можете воспользоваться или правилом дифференцирования обратных функций или также выражениями этих обратных функций с помощью логарифма и правилом дифференцирования сложной функции. Обозначая повсюду независимую переменную через x , получаем

$$\frac{d}{dx} \text{Ar ch } x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{d}{dx} \text{Ar sh } x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad ^1),$$

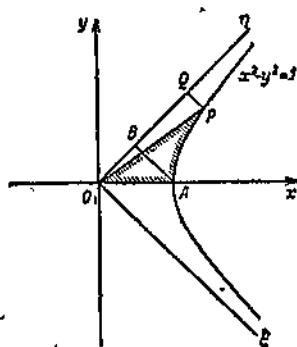
$$\frac{d}{dx} \text{Ar th } x = \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{d}{dx} \text{Ar ct h } x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Последние две формулы не противоречат друг другу, так как первая имеет место только в интервале $-1 < x < 1$, а вторая применима только при $-1 < \frac{1}{x} < 1$.

4. Дальнейшие аналогии. Когда мы раньше представили равностороннюю гиперболу с помощью величины t , мы не указали там геометрического значения этой величины; сделав это теперь, мы составим себе полное представление об аналогии между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Представляя окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 1$, с помощью „параметра“ t в виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, мы

¹⁾ Корни в обеих формулах положительны, причем в первой из них разумею под $\text{Ar ch } x$ положительную ветвь этой функции.

можем рассматривать величину t как угол или как дугу окружности; но мы можем также рассматривать t как удвоенную площадь кругового сектора, относящегося к соответствующему углу, причем эту площадь надо считать положительной или отрицательной, смотря по тому, положителен или отрицателен угол сектора.



Черт. 67.

Теперь я утверждаю, что совершенно аналогично для гиперболических функций величина представляет удвоенную площадь „гиперболического сектора“, изображенного на черт. 67. Доказательство нетрудно получить, если отнести гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ с помощью преобразования координат $x - y = \sqrt{2}\xi$, $x + y = \sqrt{2}\eta$, или

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi),$$

к ее асимптотам; при этом уравнение гиперболы принимает вид

$$\xi\eta = \frac{1}{2}.$$

Теперь непосредственно получаем, что площадь, о которой идет речь, равна площади криволинейной трапеции $ABQP$, так как прямоугольные треугольники OPQ и AOB на основании уравнения гиперболы равновелики. Обе точки A и P соответствуют очевидно значениям:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

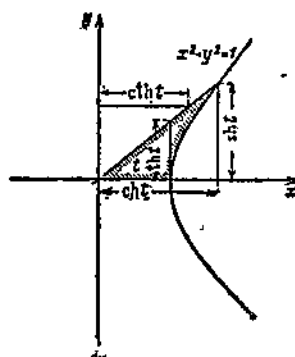
и потому двойная площадь нашей фигуры равна

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) + 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2\eta} d\eta = \log(x+y) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Сравнивая это выражение с формулами на стр. 162 для функции $\text{Ar} \sinh x$, мы видим, что наше утверждение относительно величины t справедливо.

Тем самым, между прочим, оправдывается название $\text{Ar} \sinh$ (площадь) для обратных гиперболических функций.

Укажем наконец в заключение, что, как отмечено на черт. 68, гиперболические функции могут быть наглядно представлены на равно-



Черт. 68.

сторонней гиперболе совершенно таким же образом, как тригонометрические на окружности [†]).

§ 9. Порядок роста функций.

Различные функции, с которыми мы встретились в этой главе, весьма существенно различаются между собой в смысле их поведения в бесконечности или, как говорят, по порядку их роста. Я здесь остановлюсь вкратце на этих вещах ввиду их важного значения, хотя они не имеют непосредственного отношения к понятию интеграла или производной.

1. Понятие о порядке роста. Простейшие случаи. Когда переменная x возрастает неограниченно, то одновременно с ней возрастают неограниченно функции x^a при $a > 0$, а также функции $\log x$, e^x , e^{ax} . Но относительно характера этого возрастания мы можем сразу же установить существенные различия. Например функция x^3 обратится в бесконечность более высокого порядка, нежели функция x^2 ; мы хотим этим сказать, что частное $\frac{x^3}{x^2}$ при неограниченном возрастании x тоже неограниченно возрастает. Подобным же образом мы скажем, что функция x^a обращается в бесконечность более высокого порядка, нежели x^b , если $a > b > 0$, и т. д.

Вообще относительно двух функций $f(x)$ и $g(x)$, которые обе с возрастанием x неограниченно возрастают, мы скажем: функция $f(x)$ обращается в бесконечность более высокого порядка, чем функция $g(x)$, если с возрастанием x частное $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ неограниченно возрастает; мы скажем, что $f(x)$ обращается в бесконечность более низкого порядка, чем $g(x)$, когда частное $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ стремится к нулю, и мы скажем, что обе функции обращаются в бесконечность того же порядка, если частное $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ с возрастанием x стремится к пределу, отличному от нуля, или по крайней мере всегда остается между двумя положительными границами. Так например функция $ax^3 + bx^2 + c = f(x)$ при $a \neq 0$ будет того же порядка, что и функция $x^3 = g(x)$, так как частное $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^3} \right|$ имеет предел $|a|$. Наоборот, функция $x^3 + x + 1$

[†] Неоднократно составлялись таблицы значений гиперболических функций, которыми чрезвычайно удобно пользоваться при многих практических вычислениях. Назовем здесь таблицы H. A. u. s. h. I., „Fünfstellige Tafeln für die Kreis- und Hyperbelfunktionen“, Berlin — Leipzig 1921.

обратится в бесконечность более высокого порядка, чем функция $x^2 + x + 1$.

Сумма двух функций $f(x) + \varphi(x)$, из которых $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $\varphi(x)$, имеет такой же порядок, как и $f(x)$. В самом деле $\left| \frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x)} \right| = \left| 1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right|$, а последнее выражение с возрастанием x стремится по условию к пределу 1.

Можно было бы попытаться измерить порядок роста функции по известной шкале, приписывая величине x порядок роста 1, а степени x^α при положительном значении α — порядок α . Тогда целая рациональная функция степени n имела бы очевидно порядок роста n ; дробная рациональная функция, у которой степень числителя на h единиц больше степени знаменателя, имела бы порядок роста h .

2. Порядок роста показательной и логарифмической функции. Оказывается однако, что попытка определить порядок роста любых функций с помощью предыдущей шкалы обречена на неудачу. Именно существуют функции, которые стремятся к бесконечности сильнее, чем любая сколь угодно большая степень x^α от x ; точно так же имеются функции, которые стремятся к бесконечности слабее любой сколь угодно малой степени x . Эти функции таким образом совершенно нельзя включить в нашу шкалу.

Не вдаваясь здесь в более подробную теорию порядка роста, я докажу следующее положение. Если a — произвольное число, большее 1, то отношение $\frac{a^x}{x}$ стремится с возрастанием x к бесконечности.

Для доказательства образуем функцию:

$$\varphi(x) = \log \frac{a^x}{x} = x \log a - \log x;$$

очевидно достаточно показать, что эта функция неограниченно возрастает, когда x стремится к $+\infty$. Рассмотрим для этого производную:

$$\varphi'(x) = \log a - \frac{1}{x}$$

и заметим, что при $x \geq c = \frac{2}{\log a}$ она не менее положительного числа $\frac{1}{2} \log a$. Отсюда для $x \geq c$ получим

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \int_c^x \varphi'(t) dt \geq \int_c^x \frac{1}{2} \log a dt = \frac{x-c}{2} \log a,$$

$$\varphi(x) \geq \varphi(c) + \frac{x-c}{2} \log a$$

и выражение в правой части стремится с возрастанием x к бесконечности.

Приведем еще второе доказательство этой важной теоремы. Имеем

$$a^x = e^{x \log a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x \log a}{n} \right)^n.$$

С другой стороны, согласно оценке на стр. 23,

$$\left(1 + \frac{x \log a}{n} \right)^n > 1 + \frac{n^2}{4} \cdot \frac{x^2 (\log a)^2}{n^2} = 1 + \frac{x^2 (\log a)^2}{4},$$

следовательно и

$$\frac{a^x}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{x (\log a)^2}{4} \rightarrow \infty.$$

Из доказанного положения вытекает еще гораздо больше, а именно: при любом положительном показателе a и при любом числе $a > 1$ отношение $\frac{a^x}{x^a}$ стремится с возрастанием x к бесконечности, т. е. показательная функция стремится к бесконечности сильнее любой степени x . Чтобы убедиться в этом, нам достаточно только показать, что корень степени a из выражения $\frac{a^x}{x^a}$, т. е.

$$\frac{a^{\frac{x}{a}}}{x} = \frac{a^{\frac{x}{a}}}{\frac{x}{a^{\frac{x}{a}}}} = \frac{1}{a} \frac{a^y}{y}$$

стремится к бесконечности. Но это непосредственно вытекает из предыдущей теоремы, если применить ее к $y = \frac{x}{a}$ вместо x .

Подобным же образом мы можем доказать следующее положение. При любом положительном значении a отношение $\frac{\log x}{x^a}$ стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности, т. е. логарифм стремится слабее к бесконечности, чем любая сколь угодно малая положительная степень x .

Доказательство получается, тотчас же, если положим $\log x = y$; тогда наше отношение примет вид $\frac{y}{e^{ay}}$. Положим $e^y = a$, тогда число a больше 1, и наше частное $\frac{y}{a^y}$ стремится с возрастанием y к нулю. Так

как у стремится к бесконечности одновременно с x , то наше утверждение тем самым доказано ¹⁾.

Очевидно мы можем на основании наших результатов образовать функции, имеющие еще гораздо более высокий порядок роста, чем показательная функция, и имеющие гораздо более низкий порядок, чем логарифмическая функция. Например функция e^{x^x} растет быстрее показательной функции, а функция $\log \log x$ растет медленнее логарифма; и мы можем очевидно подобные процессы итерации нагромождать как угодно один на другой и комбинировать между собой.

3. Общие замечания. Наши рассуждения обнаруживают, что принципиально невозможно отнести каждой функции определенное число как порядок ее роста таким образом, чтобы быстрее растущей функции соответствовало большее число. Например, если функция x имеет порядок 1, а функция $x^{1+\varepsilon}$ — порядок роста $1+\varepsilon$, то функция $x \log x$ должна была бы иметь порядок больший, чем 1, и меньший, чем $1+\varepsilon$, как бы мало ни было положительное число ε . Такого числа не существует. Но и помимо только что указанного обстоятельства легко видеть, что функции могут и не иметь вполне определенного порядка роста. Например функция $\frac{x^2(\sin x)^2 + x}{x^2(\cos x)^2 + x}$ с возрастанием x не будет стремиться к определенному пределу; в самом деле, при $x = n\pi$ (n — целое число) значение функции равно $\frac{n\pi}{n^2\pi^2 + n\pi} = \frac{1}{n\pi + 1}$, а при $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ оно равно $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + 1$. Хотя числитель и знаменатель в отдельности обращаются в бесконечность, однако не имеет места ни один из трех указанных выше случаев, а именно при неограниченном возрастании x значения функции не остаются заключенными в определенных положительных границах и не стремятся ни к нулю ни к бесконечности; следовательно мы на основании нашего определения не можем сказать, имеет ли больший порядок роста числитель или знаменатель или они оба имеют одинаковый порядок.

¹⁾ Намечу еще другое очень простое доказательство. При $x > 1$

$$\log x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} < \int_1^x \xi^{\varepsilon-1} d\xi = \frac{1}{\varepsilon} (x^\varepsilon - 1),$$

при этом мы берем число ε положительным и меньшим ε ; разделив обе части полученного неравенства на x^ε , тогда же получим, что при $x \rightarrow \infty$ выражение $\frac{\log x}{x^\varepsilon} \rightarrow 0$.

4. Порядок роста функции в окрестности произвольной точки. Совершенно таким же образом как при исследовании поведения функций при неограниченном возрастании x , возникает вопрос, можно ли различать функции, которые в точке $x = \xi$ обращаются в бесконечность, по характеру их возрастания и как это сделать. Мы опять, скажем: функция $f(x) = \frac{1}{|x - \xi|}$ в точке $x = \xi$ обращается в бесконечность первого порядка и соответственно функция $f(x) = \frac{1}{|x - \xi|^a}$ обращается в бесконечность порядка a , если a — положительное число.

Тогда снова увидим, что функция $e^{\frac{1}{|x - \xi|}}$ обращается в бесконечность более высокого порядка, а функция $\log |x - \xi|$ — в бесконечность более низкого порядка, чем все эти степени, т. е. что имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |x - \xi|^a e^{\frac{1}{|x - \xi|}} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} |x - \xi|^a \log |x - \xi| = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно только положить $\frac{1}{|x - \xi|} = y$, и тогда наши утверждения сводятся к теоремам, доказанным в п^о 2, так как

$$|x - \xi|^a e^{\frac{1}{|x - \xi|}} = \frac{e^y}{y^a} \quad \text{и} \quad |x - \xi|^a \log |x - \xi| = -\frac{\log y}{y^a},$$

а значениям x , стремящимся к ξ , соответствуют неограниченно возрастающие значения y .

Между прочим, метод, сводящий с помощью „подстановки“ $\frac{1}{|x - \xi|} = y$ исследование в конечной точке к исследованию в бесконечности, оказывается часто полезным и в других случаях.

5. Порядок исчезания функции. Обращение функции в бесконечность точнее характеризуется с помощью понятия о порядке роста; таким же путем можно точнее характеризовать и обращение функции $f(x)$ в нуль.

Так например говорят: порядок исчезания $\frac{1}{x}$ при $x \rightarrow \infty$ равен единице, порядок исчезания x^{-a} при положительном значении a равен a . Тогда опять оказывается, что порядок исчезания функции $\frac{1}{\log x}$ ниже порядка исчезания любой степени x^{-a} , т. е. что при любом положительном значении a имеет место соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} \cdot \log x = 0.$$

Аналогично скажем, что при $x \rightarrow \xi$ порядок исчезания $x - \xi$ равен единице, порядок исчезания $|x - \xi|^a$ равен a . Соотношения, которые на основании предыдущего легко доказать,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^a \log |x| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{-a} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$$

выражают обычно словами так: порядок исчезания функции $\frac{1}{\log |x|}$ при $x \rightarrow 0$ ниже порядка исчезания любой степени x ; порядок исчезания показательной функции $e^{-\frac{1}{|x|}}$ при $x \rightarrow 0$ выше порядка исчезания любой степени x .

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III.

§ 1. Рассмотрение некоторых специальных функций.

На примерах мы имели случай себе уяснить, что в общем понятии функции таятся многочисленные возможности, которые кажутся странными и неправильными нашей непосредственной интуиции. Эти примеры в общем не представлялись единичными аналитическими выражениями. Поэтому я хотел бы теперь показать, что можно на очень простых выражениях, составленных при помощи элементарных функций, представить типичные разрывы и особенности. Начиная, правда, с примера, в котором разрывов не встречается.

1. Функция $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Эта функция (черт. 69), которая вначале определена только для всех отличных от нуля значений x , имеет очевидно

при $x \rightarrow 0$ пределом 0;

в самом деле, с помощью

преобразования $\frac{1}{x^2} = \xi$

наша функция пере-

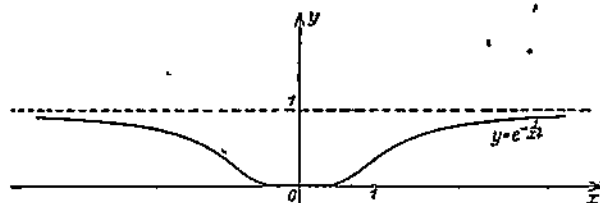
ходит в $y = e^{-\xi}$, а

$\lim_{\xi \rightarrow \infty} e^{-\xi} = 0$. Таким об-

разом, чтобы дополнить

нашу функцию так, чтобы она оставалась непрерывной и при $x=0$, мы определяем ее значение при $x=0$ равенством $y(0)=0$.

Производная нашей функции при $x \neq 0$ на основании правила дифференцирования сложной функций равна $y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Когда x стремится



Черт. 69.

к нулю, то и производная тоже стремится к нулю, что сразу следует на основании § 9 главы III. В самой точке $x=0$ производная

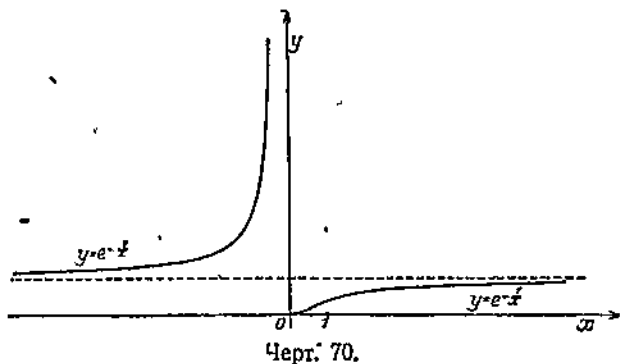
$$y'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}.$$

тоже равна нулю.

Если образуем производные высших порядков сперва при $x \neq 0$, то получим очевидно всякий раз произведение функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ на целую рациональную функцию от x и, переходя к пределу при $x \rightarrow 0$, получим всегда значение 0. И в самой точке $x=0$ все производные высших порядков так же, как и производная $y'(0)$, равны нулю.

Мы видим таким образом, что наша функция, непрерывная при всех значениях x , обращается в точке $x=0$ в нуль вместе со всеми своими производными (см. также § 2). Исключительный характер этого факта еще яснее обнаружится перед нами позже (см. дополнения к главе VI)

2. Функция $y = e^{-\frac{1}{x}}$. Эта функция, как вы легко себе уясните, имеет для положительных значений x тот же общий характер, как и предыдущая функция, т. е. когда x , оставаясь положительным, стремится к нулю, функция стремится к нулю, и то же справедливо для производной любого порядка. Если принять, что при $x=0$ значение функции $y(0)=0$, то все правые производные будут иметь в точке $x=0$ значение 0. Но совершенно иначе обстоит дело, когда x приближается к нулю со стороны отрицательных значений, тогда функция и все ее производные растут неограниченно и следовательно не существует левых производных в точке $x=0$. Функция имеет таким образом в точке $x=0$ замечательный вид разрыва (черт. 70), иной, чем те бесконечные разрывы, которые мы рассматривали в главе I у рациональных функций.

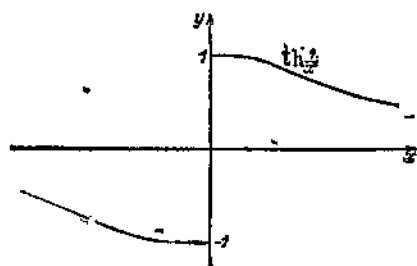


3. Функция $y = \text{th } \frac{1}{x}$. Мы уже в главе I видели, что мы можем из простых функций путем предельного перехода получить функции с конечными разрывами. Определенная в главе III показательная

функция и принцип образования сложных функций дают нам дальнейшее средство строить функции с такого рода разрывами и прямо, не пользуясь новыми предельными переходами, из элементарных функций. Примером может служить функция:

$$y = \operatorname{th} \frac{1}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

и поведение ее в окрестности точки $x=0$. Прежде всего эта функция не определена в этой точке. Если мы неограниченно приближаемся к этой точке со стороны положительных значений x , мы получаем в пределе 1; если же будем приближаться со стороны отрицательных значений x , то получим в пределе -1 . Точка $x=0$ является следовательно точкой разрыва функции, при переходе через которую функция делает



Черт. 71.

скачок, равный 2 (черт. 71). Производная же

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{4}{\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}\right)^2}$$

стремится с обеих сторон к пределу 0, в чем опять легко убедиться на основании § 9 главы III¹⁾.

4. Функция $y = x \operatorname{th} \frac{1}{x}$. У функции:

$$y = x \operatorname{th} \frac{1}{x} = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

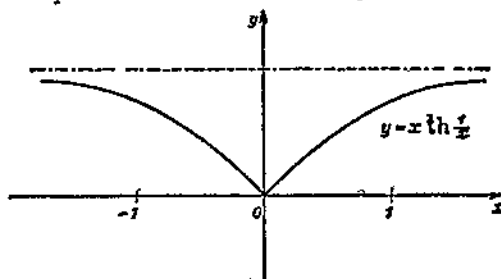
предыдущий разрыв устраняется множителем x . При $x \rightarrow 0$ с той и с другой стороны функция стремится к пределу 0, поэтому целесообразно опять определить $y(0) = 0$. Тогда наша функция непрерывна при $x=0$, однако ее первая производная

$$y' = \operatorname{th} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{1}{x}}$$

¹⁾ Дальнейший пример точки конечного разрыва представляет функция $y = \arctg \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

как раз будет иметь рассмотренный выше разрыв, т. е. функция представляется кривой с угловой точкой (черт. 72): в точке $x=0$ функция не имеет производной, но имеет правую производную, равную $+1$, и левую, равную -1 .

5. Функция $y = x \sin \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$. Относительно этой функции мы уже знаем, что хотя она и не состоит из конечного числа монотонно изменяющихся кусков или, как иногда говорят, не является „кусочно-монотонной“, она все же непрерывна (стр. 45). Наоборот, ее первая производная



Черт. 72.

$$y' = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

при приближении к точке $x=0$ непрерывно колеблется между все возрастающими по абсолютному значению положительными и отрицательными границами и следовательно в точке $x=0$ имеет разрыв. В самой точке $x=0$ отношение приращений $\frac{y(h) - y(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$; так как это отношение при $h \rightarrow 0$ бесконечно часто колеблется между -1 и $+1$, то функция в этой точке не имеет ни правой ни левой производной.

§ 2. Замечания относительно дифференцируемости функций.

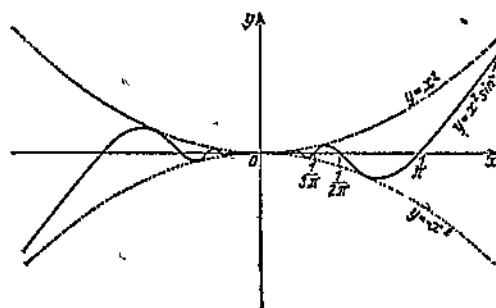
Если функция непрерывна и имеет в каждой точке производную, то эта производная вовсе не обязана быть непрерывной. В качестве простейшего примера рассмотрим функцию:

$$y = f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},$$

которая сперва определена только при значениях $x \neq 0$ и которой условимся при $x=0$ приписывать значение $f(0)=0$, и таким образом она представляет уже непрерывную повсюду определенную функцию от x . Для всех отличных от нуля значений x производная имеет выражение:

$$y' = -x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + 2x \sin \frac{1}{x} = -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}.$$

Когда x стремится к нулю, производная $f'(x)$ не стремится к определенному пределу. Если же мы образуем выражение $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \sin \frac{1}{h}$, то сразу видим, что с неограниченным убыванием h оно стремится к нулю. Следовательно существует производная в точке $x = 0$



Черт. 73.

и $f'(0) = 0$. Для того чтобы наглядно представить себе это парадоксальное поведение, изобразим функцию графически (черт. 73). Кривая совершает колебания между кривыми $y = x^2$ и $y = -x^2$, которых она поочередно касается. Хотя при этом отношение высоты вершин волн нашей кривой к их расстоянию от начала координат все уменьшается, тем не менее волны

не становятся при этом более покатыми; их подъем, измеряемый производной $y' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ в точках $x = \frac{1}{2n\pi}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), где $\cos \frac{1}{x} = 1$, равен -1 , а в точках $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ равен $+1$.

В противовес указанной здесь возможности производной существующей, но не повсюду непрерывной, имеет место следующая теорема, которая освещает целый ряд предыдущих примеров и рассуждений. Если нам известно, что производная $f'(x)$ существует и непрерывна повсюду в некоторой окрестности точки a и что $\lim f'(x) = b$, то мы можем утверждать, что существует производная $f'(a)$ и в точке $x = a$ и что $f'(a) = b$. Доказательство непосредственно следует из теоремы о среднем значении. Именно $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\xi)$, где ξ — некоторое промежуточное значение между a и $a+h$. Когда h стремится к нулю, то $f'(\xi)$ по условию стремится к b , и отсюда тотчас же вытекает наше утверждение.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x \leq b$, а при $a < x < b$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, которая неограниченно возрастает при приближении точки x к точке a , то и отношение $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ неограниченно возрастает, когда h стремится к нулю, оставаясь положительным, т. е. не существует конечной правой производной. Геометрическим истолкованием этого случая служит конечная точка кривой с вертикальной касательной.

§ 3. Различные частные вопросы.

1. Доказательство бинома Ньютона. С помощью наших правил дифференцирования получается простое доказательство бинома Ньютона, которое я хочу привести здесь в качестве примера важного для нас в дальнейшем приема рассуждения, именно „метода неопределенных коэффициентов“. Мы ищем разложение выражения, $(1+x)^n$ по степеням x для любого целого и положительного значения n . Непосредственно видно, что функция $(1+x)^n$ должна быть целой рациональной функцией степени n , т. е.

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

и дело только в том, чтобы определить коэффициенты a_i . Положим $x=0$, тогда сразу получаем $a_0=1$. Если продифференцируем обе части равенства по x однажды, дважды, трижды и т. д., то получим равенства:

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1},$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

.....

так как эти равенства справедливы для любого значения x , то мы можем опять положить в каждом из них $x=0$ и получим таким образом для коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots$ одно за другим выражения

$$a_1 = n, \quad a_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$a_k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \dots$$

следовательно окончательно находим разложение бинома в виде:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + x^n.$$

2. Многократное дифференцирование. Предлагаю вам в качестве упражнения в связи с этим доказать, что многократное дифференцирование произведения можно производить по следующей формуле (правило Лейбница):

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(fg) &= \frac{d^n}{dx^n}f \cdot g + \binom{n}{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f \cdot \frac{d}{dx}g + \binom{n}{2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}f \cdot \frac{d^2}{dx^2}g + \dots \\ &\dots + \binom{n}{1} \frac{d}{dx}f \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}g + f \frac{d^n}{dx^n}g \end{aligned}$$

или

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2}f^{(n-2)}g'' + \dots + \binom{n}{1}f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}.$$

Не так нагляден закон образования производных высшего порядка от сложной функции $y = f[\varphi(x)]$. Согласно правилам дифференцирования предыдущей главы (правила дифференцирования произведения и сложной функции) имеем

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = f' \varphi', \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= f'' \varphi'^2 + f' \varphi'', \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= f''' \varphi'^3 + 3f'' \varphi' \varphi'' + f' \varphi'''.\end{aligned}$$

.....

3. Дальнейшие примеры применения правила дифференцирования сложной функции. Обобщенная теорема о среднем значении. Производную функции x^x образуем, полагая $x^x = e^{x \log x}$; применяя затем правило дифференцирования сложной функции, находим:

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x (\log x + 1).$$

Совершенно таким же путем получается производная более общего выражения $f(x)^{f(x)} = e^{f(x) \log f(x)}$ в виде:

$$\frac{d}{dx} f(x)^{f(x)} = f(x)^{f(x)} f'(x) [\log f(x) + 1].$$

В качестве дальнейшего примера применения этого правила я привожу доказательство указанной уже в § 2 дополнений к главе II обобщенной теоремы о среднем значении, причем эта теорема получится теперь при менее ограничительных условиях. Пусть функция $G(x) = u$ непрерывна и монотонна в замкнутом интервале $a \leq x \leq b$ и дифференцируема в открытом интервале $a < x < b$, причем производная $G'(x)$ нигде не обращается там в нуль, и пусть функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема в той же области. Введем в $F(x)$ с помощью обратной функции $x = \Phi(u)$ от $G(x)$ вместо x независимую переменную u , т. е. рассмотрим сложную функцию $f(u) = F[\Phi(u)]$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции $f'(u) = F'(\Phi(u)) \Phi'(u) = \frac{F'(\Phi(u))}{G'(\Phi(u))}$. Применяя обыкновенную теорему о среднем значении к функции $f(u)$ в интервале между $u_1 = G(a)$ и $u_2 = G(b)$, получаем для некоторого промежуточного значения ω :

$$\frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} = f'(\omega),$$

или

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

где $\xi = \Phi(\omega)$ есть промежуточное значение между a и b .

ГЛАВА IV.

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Установив правила дифференцирования, мы в прошлой главе в значительной мере справились с задачей дифференцирования заданных функций. Но как раз обратная задача, задача интегрирования, оказывается почти всегда более важной, чем задача дифференцирования. Ввиду этого мы должны теперь ознакомиться с искусством интегрирования заданных функций.

Результат, полученный с помощью наших правил дифференцирования, можно формулировать следующим образом: всякая функция, выраженная с помощью элементарных функций „в конечном виде“¹⁾, может быть продифференцирована, и производная ее является функцией, которая также выражается с помощью элементарных функций в конечном виде.

Напротив, в проблеме интегрирования элементарных функций мы не встретились с вполне аналогичным фактом. Мы знаем, правда, что всякая элементарная функция и даже любая непрерывная функция интегрируема, и мы даже проинтегрировали много элементарных функций прямо или путем обращения формул дифференцирования с помощью элементарных функций, однако мы еще очень далеки от того, чтобы уметь решить в общем виде следующую задачу:

Дана функция $f(x)$, которая каким-нибудь образом выражена с помощью элементарных функций в конечном виде. Требуется найти выражение ее неопределенного интеграла $F(x) = \int f(x) dx$ и притом найти в том смысле, чтобы функция $F(x)$ тоже была выражена с помощью элементарных функций в конечном виде.

Более того, такая задача в общем даже не разрешима; интеграл от элементарной функции не всегда приводит опять к элементарной функции

¹⁾ Под этим мы разумеем функцию, которая может быть образована из элементарных функций путем многократного (но конечного) применения процессов составления сложных функций и рациональных операций.

При этом обращают также внимание на то, что само разделение функций на „элементарные“ и неэлементарные есть нечто весьма произвольное.

или, как мы скажем, не всегда интегрирование „выполняется элементарно“. Однако, несмотря на это, чрезвычайно важно уметь действительно выполнять такие интегрирования там, где они возможны, и вообще приобрести известные технические навыки в интегрировании заданных функций.

Первая часть этой главы и будет посвящена изложению приемов такого интегрирования. При этом я хотел бы определенно предостеречь начинающего, от попытки выучить наизусть то множество формул, которое получается при применении этих технических приемов. Нужно стремиться исключительно к тому, чтобы понять и научиться применять методы интегрирования.

Далее мы в этой главе (независимо от вопроса о технике интегрирования) займемся некоторыми вопросами более принципиального характера, касающимися углубления и дополнения наших взглядов на интегрирование и интеграл.

§ 1. Таблица элементарных интегралов.

Прежде всего еще раз напоминаю, что каждой из ранее доказанных формул дифференцирования соответствует равнозначная формула интегрирования. Так как эти элементарные интегралы то и дело встречаются при интегрировании, то мы сведем их в таблицу. В каждой строке этой таблицы справа стоит элементарная функция, слева — ее производная. Если будем читать эту таблицу слева направо, то получим для функции, стоящей слева, ее неопределенный интеграл справа (см. табл. на стр. 179).

Напомню далее о доказанных в § 4 главы II основных теоремах дифференциального и интегрального исчисления, особенно о том, что определенный интеграл получается из неопределенного интеграла $F(x)$ с помощью формулы:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Наконец для техники интегрирования необходимо помнить элементарные правила интегрирования, изложенные в § 1 главы II.

В ближайших параграфах мы попытаемся тем или иным путем свести интегрирование заданных функций к элементарным интегралам, собранным в таблице. Если отвлечься от искусственных приемов, которые начинающий не может конечно систематически изучить и которыми овладевают лишь в результате более долгой практики, такое сведение в основном всегда базируется на двух приемах. Каждый из них позволяет различными способами преобразовать данный интеграл и целью таких преобра-

	$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \int f(x) dx$
1	$x^a (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
2	$\frac{1}{x}$	$\log x $
3	e^x	e^x
4	$a^x (a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\log a}$
5	$\sin x$	$-\cos x$
6	$\cos x$	$\sin x$
7	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
9	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
10	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
11	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$
12	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
13	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (x < 1)$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$
14	$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \operatorname{arctg} x \\ -\operatorname{arcctg} x \end{cases}$
15	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Arsh} x = \log (x + \sqrt{1+x^2})$
16	$\frac{1}{\pm \sqrt{x^2-1}} (x > 1)$	$\operatorname{Arch} x = \log (x \pm \sqrt{x^2-1})$
17	$\frac{1}{1-x^2} \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} \operatorname{Arth} x &= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{Arcth} x &= \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$

зований является свести данную задачу интегрирования сразу или целым рядом шагов к одной или нескольким из указанных элементарных формул интегрирования.

§ 2. Метод подстановки.

Первым из этих приемов при рассмотрении задач на интегрирование является введение новой переменной (подстановка или преобразование переменной). Соответствующая формула интегрирования

представляет не что иное как правило дифференцирования сложной функции, выраженное в интегральной форме.

1. Формула подстановки. Представим себе, что в функцию $F(x)$ введена с помощью уравнения $x = \varphi(u)$ новая переменная u , так что $F(x)$ становится сложной функцией от u .

$$F(x) = F[\varphi(u)] = G(u).$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{dG}{du} = \frac{dF}{dx} \varphi'(u).$$

Если напомним теперь

$$F'(x) = f(x) \text{ и } G'(u) = g(u)$$

или, что равносильно,

$$F(x) = \int f(x) dx \text{ и } G(u) = \int g(u) du,$$

то, с одной стороны, формула дифференцирования примет вид:

$$g(u) = f(x) \varphi'(u),$$

а с другой стороны, по определению:

$$G(u) = F(x),$$

т. е.

$$\int g(u) du = \int f(x) dx,$$

и мы получаем таким образом формулу интегрирования, эквивалентную формуле дифференцирования сложной функции:

$$\int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du = \int f(x) dx.$$

Эта формула представляет основу метода введения новой переменной в интеграл. Она гласит: если нам нужно образовать неопределенный интеграл от функции от u , заданной в специальной форме $f[\varphi(u)] \varphi'(u)$, то мы можем вместо этого найти неопределенный интеграл от функции $f(x)$ переменной x и затем положить $x = \varphi(u)$ и ввести таким образом опять переменную u .

Применим например эту формулу к подынтегральной функции $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$, тогда непосредственно получаем:

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du = \int \frac{dx}{x} = \log |x| = \log |\varphi(u)|,$$

или, если вместо u писать x ,

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log |\varphi(x)|.$$

Полагая например в этой важной формуле $\varphi(x) = \log x$ или $\varphi(x) = \sin x$, или $\varphi(x) = \cos x$, получаем

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log |\log x|,$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \log |\sin x|,$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\log |\cos x|.$$

Дальнейшим примером служит интеграл:

$$\int \varphi(u) \varphi'(u) \, du = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} [\varphi(u)]^2,$$

в котором также $f(x) = x$. Так например для $\varphi(u) = \log u$ получаем:

$$\int \frac{\log u}{u} \, du = \frac{1}{2} (\log u)^2.$$

Наконец рассмотрим пример:

$$\int \sin^n u \cos u \, du.$$

Здесь $x = \sin u = \varphi(u)$ и мы получаем

$$\int \sin^n u \cos u \, du = \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{\sin^{n+1} u}{n+1}.$$

Во многих случаях мы будем однако нашу общую формулу применять в обратном направлении, отправляясь от интеграла $\int f(x) \, dx$, стоящего в правой стороне.

Теперь следовательно дело заключается в том, чтобы вычислить или упростить заданный неопределенный интеграл $F(x) = \int f(x) \, dx$, вводя с помощью уравнения $x = \varphi(u)$ новую переменную интегрирования u , находя затем неопределенный интеграл $G(u) = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) \, du$ и выражая наконец в последней переменную u через x .

Чтобы иметь возможность выполнить этот последний шаг, мы должны быть уверены, что каждому значению x соответствует вполне определенное значение u , т. е. что функция $x = \varphi(u)$ обратима. Ввиду этого мы теперь рассматриваем переменную x как первоначальную и предполагаем, что в рассматриваемом интервале функция $u = \psi(x)$ есть монотонная дифференцируемая функция, производная которой $\psi'(x)$ нигде не обра-

¹⁾ Проверьте правильность этих формул и следующих, показав, что дифференцирование результата приводит каждый раз к подынтегральной функции.

щается в нуль. Обратную функцию, которая, как следует из нашего предположения, однозначно определена, назовем $x = \varphi(u)$; ее производная в таком случае $\varphi'(u) = \frac{1}{\psi'(x)}$. Итак, получаем следующую основную формулу для введения новой переменной u в интеграл:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du, \quad [u = \psi(x)].$$

Неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ получится, если найти неопределенный интеграл $\int f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$ и заменить в нем переменную u через x с помощью уравнения $u = \psi(x)$. Следовательно нельзя просто выразить интегрируемой функции старую переменную x через новую переменную u и затем интегрировать, а необходимо еще перед интегрированием умножить на производную от старой переменной x по новой переменной u .

Соответственно этому пишем для определенного интеграла формулу:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du,$$

т. е. пределы интегриации для новой переменной надо выбрать так, чтобы они соответствовали по формулам преобразования $x = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$ старым пределам интегриации.

Большой частью в применениях подынтегральная функция $f(x)$ с самого начала окажется сложной функцией, скажем $f(x) = h(u)$, где $u = \psi(x)$. Тогда удобнее записать нашу формулу несколько иначе, отождествляя выражение $f[\varphi(u)]$ с функцией $h(u)$. Если сделаем подстановку $u = \psi(x)$, $x = \varphi(u)$, то наша формула преобразования просто такова:

$$\int h[\psi(x)] dx = \int h(u) \frac{dx}{du} du.$$

В качестве первого примера рассмотрим интегрирование функции $f(x) = \sin 2x$, следовательно $u = 2x$, а $h(u) = \sin u$. При этом

$$\frac{du}{dx} = \psi'(x) = 2.$$

Введем в интервал новую переменную $u = 2x$, тогда интеграл переходит не в $\int \sin u du$, а в

$$\frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

что вы, разумеется, можете немедленно проверить дифференцированием правой части.

Интегрируем в пределах от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$, тогда соответствующими пределами для u будут $u=0$ и $u=\frac{\pi}{2}$; получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Второй простой пример представляет интеграл $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Здесь мы берем

$u = \psi(x) = \sqrt{x}$. Следовательно $x = \varphi(u) = u^2$.

Так как далее $\varphi'(u) = 2u$, то мы получаем

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_1^2 \frac{u \, du}{u} = 2 \int_1^2 du = 2.$$

2. Другое доказательство формулы преобразования переменной. Мы можем впрочем нашу формулу интегрирования доказать еще другим прямым путем, а именно мы будем доказывать формулу для определенного интегрирования, основываясь на значении определенного интеграла как предела суммы. Чтобы вычислить интеграл

$$\int_a^b h[\psi(x)] \, dx,$$

мы можем положить в основу какое угодно разбиение интервала $a \leq x \leq b$ на частичные интервалы, которые мы дальнейшим подразделением неограниченно уменьшаем. Выберем это разбиение следующим образом. Если предположить, что функция $u = \psi(x)$ монотонно возрастает, то интервалу $a \leq x \leq b$ оси x -ов соответствует одно-однозначно интервал $\alpha \leq u \leq \beta$ для соответствующих значений u функции $u = \psi(x)$, причем полагаем $\alpha = \psi(a)$ и $\beta = \psi(b)$. Этот u -интервал мы делим на n равных частей длины Δu ¹⁾; этому разбиению соответствует разбиение x -интервала на части, которые, вообще говоря, между собой не равны. Обозначим точки деления этого разбиения через $a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, а соответствующие длины интервалов — через $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

¹⁾ Допущение, что эти интервалы равны между собой, впрочем совершенно несущественно для доказательства.

В таком случае рассматриваемый интеграл представляет предел суммы

$$\sum_{v=1}^n h[\psi(\xi_v)] \Delta x_v,$$

где значение ξ_v мы можем выбрать совершенно произвольно в v -ом частичном интервале разбиения x -интервала, и эту сумму запишем следующим образом:

$$\sum_{v=1}^n h(u_v) \frac{\Delta x_v}{\Delta u},$$

где $u_v = \psi(\xi_v)$. Но по теореме о среднем значении $\frac{\Delta x_v}{\Delta u} = \varphi'(\eta_v)$, где η_v есть некоторое промежуточное значение переменной u в v -ом частичном интервале u -разбиения. Распорядимся теперь значениями ξ_v так, чтобы они как раз соответствовали значениям η_v , т. е. чтобы $\xi_v = \varphi(\eta_v)$, $\eta_v = \psi(\xi_v)$, тогда наша сумма примет вид:

$$\sum_{v=1}^n h(\eta_v) \varphi'(\eta_v) \Delta u.$$

Если перейдем к пределу в сумме, записанной в этом виде, то непосредственно получим в качестве предела, т. е. в качестве значения рассматриваемого интеграла, выражение

$$\int_a^b h(u) \frac{dx}{du} du$$

в полном согласии с формулой предыдущего номера.

3. Примеры. Формулы интегрирования. С помощью метода подстановок мы можем во многих случаях вычислить заданный интеграл $\int f(x) dx$, сводя его путем подходящей подстановки к одному из элементарных интегралов нашей таблицы. Существуют ли такого рода подстановки, и как их найти, по этому поводу никаких общих указаний дать нельзя; здесь именно такой пункт, где систематический метод уступает свое место сноровке и ловкости.

Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ мы вычислим например с помощью подстановки ¹⁾ $x = \varphi(u) = au$, $u = \frac{x}{a}$, $dx = a du$, и таким образом, принимая во внимание 13-й интеграл нашей таблицы, находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a du}{a \sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u = \arcsin \frac{x}{a}.$$

¹⁾ Мы разрешим себе в дальнейшем для краткости писать в наших формулах символы dx и du отдельно, т. е. $dx = \varphi'(u) du$ вместо $\frac{dx}{du} = \varphi'(u)$.

Таким же образом с помощью той же подстановки получаем:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a du}{a^2(1+u^2)} = \frac{1}{a} \arctg u = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{x}{a} & \text{при } |x| < |a|, \\ \frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{cth} \frac{x}{a} & \text{при } |x| > |a|. \end{cases}$$

Эти формулы, которые очень часто встречаются, впрочем легко проверить путем дифференцирования правых частей.

В заключение я хочу еще раз подчеркнуть следующее обстоятельство.

Мы предполагали при нашей подстановке, что во всем рассматриваемом интервале $\varphi'(u) \neq 0$, откуда следует, что подстановка $x = \varphi(u)$ однозначно обратима, т. е. $u = \psi(x)$.

Если это условие не выполнено, то при применении формулы подстановки легко прийти к неправильным результатам. Чтобы избежать затруднений такого рода, следует в том случае, когда в отдельных точках промежутка интеграции $\varphi'(u) = 0$, разбить этот промежуток на части так, чтобы $\varphi'(u) = 0$ только на концах этих отдельных промежутков и выполнять подстановку в каждом таком промежутке отдельно.

§ 3. Дальнейшие примеры применения метода подстановки.

В этом параграфе я кратко излагаю решение ряда дальнейших примеров, которые вы должны тщательно проработать в качестве материала для упражнения.

С помощью подстановок $u = 1 \pm x^2$, $du = \pm 2x dx$ получаем

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 \pm x^2}} = \pm \sqrt{1 \pm x^2},$$

$$\int \frac{x dx}{1 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \log |1 \pm x^2|.$$

В этих формулах надо во всех трех местах одновременно брать или знак $+$ или знак $-$.

С помощью подстановки $u = ax + b$, $du = a dx$ мы получаем

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \log |ax+b|,$$

$$\int (ax+b)^x dx = \frac{1}{a(x+1)} (ax+b)^{x+1}, \quad (x \neq -1),$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b);$$

подобным же образом с помощью подстановки $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$ получаем

$$\int \lg x dx = -\log |\cos x|,$$

а с помощью подстановки $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ имеем

$$\int \text{ctg } x dx = \log |\sin x|.$$

Путем совершенно аналогичных подстановок $u = \text{ch } x$, $du = \text{sh } x dx$ и $u = \text{sh } x$, $du = \text{ch } x dx$ получаются формулы

$$\int \text{th } x dx = \log |\text{ch } x|$$

и

$$\int \text{cth } x dx = \log |\text{sh } x|.$$

При помощи подстановки

$$u = \frac{a}{b} \text{tg } x, \quad du = \frac{a}{b} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

мы получаем обе формулы

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \text{tg}^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{ab} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{ab} \text{arc tg} \cdot \left(\frac{a}{b} \text{tg } x \right)$$

и

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x} = -\frac{1}{ab} \text{Ar th} \cdot \left(\frac{a}{b} \text{tg } x \right)^1).$$

*) Эта формула применима, если $\left| \frac{a}{b} \text{tg } x \right| \leq 1$, т. е. в интервале $-\text{arc tg } \frac{b}{a} \leq x \leq \text{arc tg } \frac{b}{a}$; если же $\left| \frac{a}{b} \text{tg } x \right| > 1$, то интеграл равен

$$-\frac{1}{ab} \text{Ar ch} \left(\frac{a}{b} \text{tg } x \right),$$

(см. формулу 17 на стр. 179).

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

мы вычисляем, представляя $\sin x$ в виде $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$

и полагая $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, следовательно $du = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$; тогда

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

Если в этой формуле заменим x через $x + \frac{\pi}{2}$, то формула перейдет в следующую

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Подстановка $u = 2x$ приводит, если принять во внимание известные тригонометрические формулы $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ и $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, к часто употребляющимся формулам

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x).$$

С помощью подстановки $x = \cos u$, откуда $u = \arccos x$, или более общей $x = a \cos u$ интегралы

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \text{и} \quad \int \sqrt{a^2-x^2} \, dx$$

приводятся к предыдущим. Таким образом получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx = -\frac{a^2}{2} \arccos \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2}.$$

Совершенно аналогично путем подстановки $x = a \operatorname{ch} u$ получается формула

$$\int \sqrt{x^2-a^2} \, dx = -\frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2},$$

а с помощью подстановки $x = a \operatorname{sh} u$ — формула

$$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2}.$$

Подстановка $u = \frac{a}{x}$, $dx = -\frac{a}{u^2} du$ приводит к формулам

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arsh} \frac{a}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arch} \frac{a}{x}.$$

Рассмотрим наконец еще следующие три интеграла:

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \cos mx \cos nx \, dx,$$

причем m и n — целые положительные числа. По известным тригонометрическим формулам мы можем каждый из этих интегралов разбить на два, именно мы пишем:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Применим теперь подстановки $u = (m+n)x$ и $u = (m-n)x$, тогда непосредственно получаем систему формул:

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) & \text{если } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right) & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right) & \text{если } m \neq n, \\ -\frac{1}{2} \frac{\cos 2mx}{2m} & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) & \text{если } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2mx}{2m} + x \right) & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Если мы в частности проинтегрируем от $-\pi$ до $+\pi$, то получим из этих формул чрезвычайно важные соотношения

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases} \end{cases}$$

Это — „условия ортогональности“ тригонометрических функций, с которыми нам еще придется иметь дело в главе IX.

§ 4. Интегрирование по частям.

Второй технический прием для разрешения задач на интегрирование дает нам формула дифференцирования произведения: $(fg)' = f'g + g'f$.

1. Общие соображения. Если запишем эту формулу в виде формулы интегрирования, получим (см. главу III, § 2, н° 1)

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int g(x)f'(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \\ \text{или} \quad \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести один интеграл к другому. Именно, если мы в интеграле $\int \omega(x) dx$ представим подынтегральную функцию в виде произведения $\omega(x) = f(x)\varphi(x)$ и если мы можем с помощью элементарных функций найти неопределенный интеграл

$$g(x) = \int \varphi(x) dx$$

от множителя $\varphi(x)$, то $\varphi(x) = g'(x)$ и тогда с помощью нашей формулы

$$\int \omega(x) dx = \int f(x)\varphi(x) dx = \int f(x)g'(x) dx$$

сводится к другому интегралу $\int g(x)f'(x) dx$, который в иных случаях может оказаться более простым, чем первоначальный. Так как данную подынтегральную функцию $\omega(x)$ можно различным образом представить в виде произведения $f(x)\varphi(x) = f(x)g'(x)$, то эта формула дает нам широкую возможность для преобразования интегралов.

Формула интегрирования по частям для определенных интегралов гласит:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \end{aligned}$$

В самом деле, для того чтобы получить из формулы неопределенного интегрирования формулу для определенных интегралов, нам на основании сказанного в § 4 главы II нужно только в формуле неопределенного интегрирования в обеих частях подставить вместо переменной сперва значение $x=b$, потом значение $x=a$ и из первого выражения вычесть второе.

Поясним этот метод на следующем примере: -

$$\int \log x \, dx = \int \log x \cdot 1 \cdot dx.$$

Этой записью мы отмечаем, что полагаем $f(x) = \log x$, и $g'(x) = 1$, следовательно $f'(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = x$. Правая часть нашей формулы переходит таким образом в

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \log x - x.$$

Последнее выражение представляет следовательно интеграл логарифма, что подтверждается также непосредственно дифференцированием.

2. Примеры. Следующие примеры должны ознакомить вас с применением этого метода.

Полагая $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, откуда $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$, получаем

$$\int x e^x \, dx = e^x (x - 1);$$

подобным же образом получается

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

и

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

При $f(x) = \log x$, $g'(x) = x^a$ получаем

$$\int x^a \log x \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \left(\log x - \frac{1}{a+1} \right).$$

При этом предполагаем, что $a \neq -1$. Если $a = -1$, то (ср. стр. 181)

$$\int \frac{1}{x} \log x \, dx = (\log x)^2 - \int \log x \frac{dx}{x},$$

следовательно, перенося интеграл из правой части в левую, получим

$$\int \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{1}{2} (\log x)^2.$$

Интеграл $\int \arcsin x \, dx$ вычислим, полагая $f(x) = \arcsin x$, $g'(x) = 1$. Тогда

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

мы можем на основании § 3 сразу найти интеграл в правой части и получаем

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

По тому же способу вычисляется также интеграл

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

и многие аналогичные интегралы.

Несколько иной характер имеют следующие примеры, у которых после двукратного применения интегрирования по частям снова приходим к исходному интегралу и таким образом получаем для него уравнение.

С помощью двукратного интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx \, dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx; \end{aligned}$$

определяя из этого уравнения исходный интеграл $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, имеем

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx).$$

Таким же образом получаем

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx).$$

3. Рекуррентные формулы. Во многих случаях, когда подынтегральная функция зависит не только от независимой переменной, но и от целочисленного индекса n , с помощью интегрирования по частям удастся не сразу вычислить интеграл, а свести его к интегралу такой же формы, но с меньшим значением индекса; продолжаем понижать таким путем индекс, пока мы наконец после некоторого числа таких шагов не придем к интегралу, который можно найти с помощью нашей таблицы интегралов. Такой метод вычисления называют рекуррентным методом (методом приведения). Разъясним этот метод на нескольких примерах. Повтор-

ным применением интегрирования по частям можно вычислить тригонометрические интегралы

$$\int \cos^n x \, dx, \quad \int \sin^n x \, dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

если m и n — целые положительные числа. В самом деле, имеем например

$$\int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx,$$

выражение в правой части можем представить в виде

$$\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

и получаем отсюда рекуррентную формулу

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

Эта формула дает возможность уменьшать показатель степени в подынтегральной функции до тех пор, пока мы наконец не придем к интегралу

$$\int \cos x \, dx = \sin x \quad \text{или} \quad \int dx = x,$$

смотря по тому, будет ли n число нечетное или четное. Таким же путем получаются аналогичные рекуррентные формулы:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

и

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

В частности эти формулы позволяют вычислить интеграль

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

и

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x),$$

что мы уже раньше получили с помощью метода подстановки.

Едва ли нужно упоминать о том, что аналогичные интегралы для гиперболических функций вычисляются таким же путем.

Следующие преобразования приводят нас к дальнейшим рекуррентным формулам:

$$\int (\log x)^m \, dx = x (\log x)^m - m \int (\log x)^{m-1} \, dx,$$

$$\int x^m e^x \, dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x \, dx,$$

$$\int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \, dx,$$

$$\int x^m \cos x \, dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x \, dx,$$

$$\int x^a (\log x)^m \, dx = \frac{x^{a+1} (\log x)^m}{a+1} - \frac{m}{a+1} \int x^a (\log x)^{m-1} \, dx, \quad (a \neq -1).$$

4. Формула Валлисса. Рекуррентная формула для $\int \sin^n x \, dx$ приводит элементарным путем к замечательному выражению числа π в виде бесконечного произведения. Если в формуле

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

примем за пределы интегрирования 0 и $\frac{\pi}{2}$, то получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx \quad \text{при } n > 1.$$

Применяем теперь рекуррентную формулу к интегралу в правой части и продолжаем поступать таким же образом далее, тогда получаем, рассматривая отдельно случаи $n = 2m$ и $n = 2m+1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx,$$

следовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

Отсюда делением получим

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx}.$$

Но отношение обоих интегралов в правой части с возрастанием m стремится к 1, что вытекает из следующего рассуждения. В интервале $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеем: $0 \leq \sin^{2m+1} x \leq \sin^{2m} x \leq \sin^{2m-1} x$; следовательно

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx$$

Разделив каждый член этих неравенств на $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx$ и заметив, что на основании доказанной в начале формулы

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m},$$

мы находим

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} \leq 1 + \frac{1}{2m},$$

а отсюда вытекает наше утверждение.

Вследствие этого имеет место соотношение:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}.$$

Это выражение π с помощью произведения, которым мы обязаны В аллиссу, представляет благодаря наглядности закона образования весьма замечательную связь между числом π и целыми числами. Этому соотношению можно придать и различные другие формы. Заметив, что

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m}{2m+1} = 1$, можем написать:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2} 2m = \frac{\pi}{2};$$

извлекаем корень и умножаем числителя и знаменателя на $2 \cdot 4 \cdots (2m-2)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \sqrt{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m-2)^2}{(2m-1)!} \sqrt{2m} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m)^2}{(2m)!} \sqrt{2m}. \end{aligned}$$

Отсюда наконец получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}} = \sqrt{\pi}.$$

Формулой Валлиса в этом виде нам еще придется впоследствии воспользоваться (см. главу VII, дополнения).

§ 5. Интегрирование рациональных функций.

Самый важный общий класс функций, интегрирование которых всегда выполнимо с помощью элементарных функций, представляют рациональные функции:

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0, \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \end{aligned}$$

— полиномы.

Напомним, что всякая целая рациональная функция может быть проинтегрирована непосредственно и приводит при этом снова к целой рациональной функции. Нам нужно поэтому сосредоточить внимание исключительно на дробных рациональных функциях, у которых знаменатель отличен от постоянной¹⁾. Далее мы можем заметить, что такая дробная

функция может быть представлена в виде суммы функций $\frac{a_i x^i}{g(x)}$, и поэтому мы должны рассмотреть только интегралы от функций вида $\frac{x^i}{g(x)}$.

1. Основные типы. Мы проведем интегрирование сперва не для самых общих рациональных функций такого рода, а лишь для таких, знаменатель которых $g(x)$ особенно простого типа, а именно:

$$g(x) = x \text{ или } g(x) = 1 + x^2,$$

или более общего вида

$$g(x) = x^n, \quad g(x) = (1 + x^2)^n,$$

где показатель n — любое целое положительное число.

¹⁾ Степень m числителя $f(x)$ мы всегда имеем право при этом предполагать меньшей, чем степень n знаменателя $g(x)$. Действительно, в противном случае можно, как известно, разделить многочлен $f(x)$ на $g(x)$ и остаток будет полином степени меньшей чем n ; иными словами, можем написать $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причём степень $r(x)$ меньше n ; таким образом интегрирование $\frac{f(x)}{g(x)}$ сводится к интегрированию полинома $q(x)$ и „правильной“ дроби $\frac{r(x)}{g(x)}$.

К этому случаю можно тотчас же свести интегрирование несколько более общего случая, когда $g(x) = (ax + \beta)^n$ представляет степень линейного выражения $ax + \beta$ или когда $g(x) = (ax^2 + 2bx + c)^n$ есть степень определенного квадратичного выражения¹⁾. В первом случае мы вводим новую переменную $\xi = ax + \beta$. Тогда $\frac{d\xi}{dx} = a$ и $x = \frac{1}{a}\xi - \frac{\beta}{a}$ также является линейной функцией от ξ . Поэтому числитель $f(x)$ переходит в полином $\varphi(\xi)$ той же степени и

$$\int \frac{f(x)}{(ax + \beta)^n} dx = \frac{1}{a} \int \frac{\varphi(\xi)}{\xi^n} d\xi.$$

Во втором случае мы пишем

$$Q(x) = \frac{1}{a} (ax + b)^2 + \frac{d^2}{a},$$

при этом $d^2 = ac - b^2$ должно быть положительным числом, ввиду того что наше выражение, по условию, определенное. Вводя новую переменную

$$\xi = \frac{ax + b}{d},$$

мы тотчас же приходим к интегралу от рациональной функции со знаменателем $\frac{d^2}{a}(1 + \xi^2)$ или $\left[\frac{d^2}{a}(1 + \xi^2)\right]^n$.

Итак, чтобы проинтегрировать рациональные функции, знаменатель которых есть степень линейного выражения или степень определенного квадратичного выражения, достаточно уметь интегрировать следующие типы функций:

$$\frac{1}{x^n}, \quad \frac{x^{2r}}{(x^2 + 1)^n}, \quad \frac{x^{2r+1}}{(x^2 + 1)^n}.$$

Мы увидим даже, что нам совсем не понадобится рассматривать эти типы в общем виде и что мы сумеем свести интегрирование всех рациональных функций к интегрированию функций этих типов для частного случая $y = 0$. Займемся поэтому сперва интегрированием следующих трех выражений:

$$\frac{1}{x^n}, \quad \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \quad \text{и} \quad \frac{x}{(x^2 + 1)^n}.$$

1) Квадратичное выражение $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ называется определенным, если при действительных значениях x оно может принимать значения только одного знака, т. е. если уравнение $Q(x) = 0$ не имеет действительных корней. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $d^2 = ac - b^2$ было положительным числом.

2. Интегрирование основных типов. Функция первого типа $\frac{1}{x^n}$ при интегрировании дает при $n=1$ функцию $\log|x|$, а при $n>1$ — функцию $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$, т. е. опять рациональную функцию. Функцию третьего типа можно непосредственно проинтегрировать, если ввести новую переменную $\xi = x^2 + 1$; тогда $d\xi = 2x dx$ и следовательно

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\xi^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}.$$

Наконец, для того чтобы найти интеграл

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

при любом $n > 1$, мы пользуемся рекуррентным методом. Именно мы пишем:

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n},$$

откуда

$$-\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n};$$

второй интеграл правой части преобразуем путем интегрирования по частям, полагая в общей формуле

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

Тогда (см. выше)

$$g(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}},$$

и мы в результате получаем

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Следовательно нахождение интеграла J_n приводится к нахождению интеграла J_{n-1} . Применяя тот же прием к последнему интегралу и продолжая этот процесс до тех пор, пока не придем к выражению $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x$, мы убеждаемся в том, что интеграл J_n выражается с помощью рациональных функций и функции $\arctg x$ ¹⁾.

1) Совершенно таким же образом можем, между прочим, найти интеграл от функции $\frac{1}{(x^2-1)^n}$, приведя его аналогичным рекуррентным процессом к интегралу

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{th} x.$$

Кстати замечу, что интегрирование функции $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ можно было бы выполнить также с помощью подстановки $x = \operatorname{tg} t$; тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ и $\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 t$, следовательно

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \cos^{2n-2} t \, dt,$$

а последний интеграл мы уже научились вычислять в н° 3 § 4.

3. Разложение рациональных дробей на простейшие. Интегрирование рациональных функций самого общего типа основано на том, что каждую такую функцию можно представить в виде суммы так называемых элементарных дробей, т. е. суммы, в которой слагаемыми, если не считать целой рациональной функции, являются дробные рациональные функции, каждая из которых имеет знаменателем степень линейного выражения, а числителем — постоянную, или же в качестве знаменателя имеет степень определенного квадратичного выражения, а в качестве числителя — линейную функцию. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то в разложении целой рациональной функции не окажется. Все функции такого вида мы уже умеем интегрировать.

Я не стану излагать здесь полностью общее доказательство возможности такого разложения рациональной функции на простейшие. Я ограничусь тем, что разъясню содержание этой теоремы и покажу на примерах, как в каждом отдельном случае действительно выполняется разложение; на практике приходится иметь дело при этом только со сравнительно простыми функциями, так как в противном случае вычисления становятся слишком громоздкими.

Каждый многочлен $g(x)$ можно, как известно из элементарной алгебры, представить в виде

$$g(x) = a(x - \alpha_1)^{l_1}(x - \alpha_2)^{l_2} \dots (x^2 + 2b_1x + c_1)^{r_1}(x^2 + 2b_2x + c_2)^{r_2} \dots$$

При этом числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ являются действительными корнями уравнения $g(x) = 0$, а целые положительные числа $l_1, l_2, \dots$ указывают кратность этих корней; множители $(x^2 + 2b_i x + c_i)$ означают определенные квадратичные выражения с сопряженными комплексными корнями, а целые положительные числа $r_1, r_2, \dots$ указывают кратность этих корней.

Представьте себе, что знаменатель $g(x)$ или с самого начала дан в виде такого произведения, или что мы привели его к этому виду путем разыскания действительных и мнимых корней. Предположим далее, что степень числителя $f(x)$ меньше n (см. подстрочное замечание на стр. 195), тогда теорема гласит: для каждого множителя $(x - \alpha)^l$, — где α может

равняться любому из действительных корней α , а l есть соответствующее число l_α — можно определить выражение вида

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-a)^l}$$

с постоянными коэффициентами $A_1, \dots, A_l$ для каждого же квадратичного множителя $Q(x) = x^2 + 2bx + c$ нашего произведения, кратность которого равна r , можно определить выражение вида

$$\frac{B_1 + C_1x}{Q} + \frac{B_2 + C_2x}{Q^2} + \dots + \frac{B_r + C_rx}{Q^r}$$

таким образом, чтобы функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ была равна сумме всех этих выражений. Иными словами, дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ может быть представлена в виде суммы „элементарных“ дробей, каждая из которых принадлежит к одному из типов, рассмотренных в п^о 2¹).

В отдельных случаях такое разложение может иметь простой вид. Если например $g(x) = x^2 - 1$, или общее $g(x) = (x-a)(x-\beta)$, т. е. если $g(x)$ является неопределенным квадратичным выражением с двумя различными действительными корнями α и β , то непосредственно получаем

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

и

$$\frac{1}{(x-a)(x-\beta)} = \frac{1}{a-\beta} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{1}{a-\beta} \cdot \frac{1}{x-\beta}$$

4) Наметим здесь хотя бы вкратце основную мысль доказательства возможности нашего разложения. Если $g(x) = (x-a)^k h(x)$ и $h(a) \neq 0$, то можно определить постоянную β таким образом, чтобы разность

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\beta}{(x-a)^k} = \frac{f(x) - \beta h(x)}{(x-a)^k h(x)}$$

представлялась в виде рациональной функции, знаменатель которой содержит множителем $x-a$ в степени не выше $(k-1)$ -й. Это ведет к требованию, чтобы числитель $f(x) - \beta h(x)$ делился без остатка на $x-a$ или, что равносильно, при $x=a$ обращался бы в нуль: $f(a) - \beta h(a) = 0$, вместе с тем, так как $h(a) \neq 0$, получаем $\beta = \frac{f(a)}{h(a)}$. Продолжая идти тем же путем, мы можем понижать степень $(x-a)$ в знаменателе, пока наконец этот множитель совсем не исчезнет из знаменателя. Применяя тот же прием к остающейся после этого дроби и повторяя его столько раз, сколько различных корней имеет уравнение $g(x) = 0$, мы приходим в конце концов, принимая во внимание и мнимые корни, к полному разложению рациональной дроби на простейшие.

и потому

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \text{ и } \int \frac{dx}{(x-a)(x-\beta)} = \frac{1}{a-\beta} \log \left| \frac{x-a}{x-\beta} \right|.$$

4. Пример. Химические реакции. Простой пример применения последних простых разложений представляют так называемые бимолекулярные реакции (ср. главу III, § 7, n° 5). Если имеем два исходных вещества, начальные концентрации которых, выраженные в молях на единицу объема, равны a и b , причем мы предполагаем, что $a < b$, и если за время t образуется количество x продукта химической реакции, то по закону действия масс для простейшего случая, когда соединяется по одной молекуле каждого из обоих веществ, участвующих в реакции, эта величина x как функция времени будет возрастать со скоростью $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$; задача заключается в нахождении функции $x(t)$. Будем рассматривать, наоборот, t как функцию от x , тогда

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)} = \frac{1}{k(b-a)} \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right),$$

следовательно, интегрируя, получаем

$$kt = \frac{1}{a-b} \log \frac{a-x}{b-x} + c \quad \text{при } x < a < b,$$

причем постоянную интегриации c определяем из условия, что при $t=0$ нет еще продукта реакции ($x=0$), т. е. $\frac{1}{a-b} \log \frac{a}{b} + c = 0$.

Окончательно получаем $kt = \frac{1}{a-b} \log \frac{1 - \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{b}}$ или, разрешая отно-

сительно x , получаем искомую функцию

$$x(t) = \frac{ab(1 - e^{(a-b)kt})}{b - ae^{(a-b)kt}}.$$

5. Дальнейшие примеры разложения на простые дроби (метод неопределенных коэффициентов). Если $g(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, где $a_i \neq a_k$ при $i \neq k$, т. е. если $g(x)$ имеет только простые действительные корни, получаем разложение

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2}{x-a_2} + \dots + \frac{a_n}{x-a_n}.$$

Мы получим тотчас же явные выражения для коэффициентов, например для a_1 , если умножим обе части равенства на $(x - a_1)$ и затем положим $x = a_1$. Таким образом находим

$$a_1 = \frac{+1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}.$$

В качестве типичных примеров знаменателя $g(x)$ с кратными или мнимыми корнями рассмотрим сперва функцию $\frac{1}{x^2(x-1)}$, знаменатель которой имеет двойной корень $x=0$. В данном случае мы приходим к цели, полагая согласно п° 3

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2};$$

умножая обе части этого равенства на $x^2(x-1)$, мы получаем для определения коэффициентов a, b, c равенство

$$1 = (a+b)x^2 - (b-c)x - c,$$

которое должно быть справедливо для всех значений x . Ввиду этого все коэффициенты трехчлена $(a+b)x^2 - (b-c)x - c - 1$ должны быть равны нулю, т. е. $a+b = b-c = c+1 = 0$, откуда $c = -1$, $b = -1$, $a = 1$. Мы получаем таким образом разложение

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

и отсюда находим

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x}.$$

Функцию $\frac{1}{x(x^2+1)}$ мы представим в виде

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Для определения коэффициентов получаем уравнения: $a+b=c = a-1=0$, следовательно

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1},$$

и поэтому

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log|x| - \frac{1}{2} \log|x^2+1|.$$

1) Докажите сами, что знаменатель есть не что иное как $g'(a_1)$, т. е. производная функции $g(x)$ в точке $x = a_1$.

В качестве третьего примера рассмотрим функцию $\frac{1}{x^4+1}$, интегрирование которой доставляло еще Лейбницу большие затруднения.

Мы можем представить знаменатель в виде произведения двух квадратичных множителей:

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$$

и потому запишем разложение в следующем виде:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Для определения постоянных a, b, c, d получаем равенство

$$(a + c)x^3 + (b + d - a\sqrt{2} + c\sqrt{2})x^2 + (a + c - b\sqrt{2} + d\sqrt{2})x + b + d - 1 = 0,$$

которое будет тождеством относительно x при значениях

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad d = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1},$$

и с помощью метода, указанного в п° 1, получаем

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |x^2 + \sqrt{2}x + 1| - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |x^2 - \sqrt{2}x + 1| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1),$$

результат, который вы легко можете проверить путем дифференцирования.

§ 6. Интегрирование некоторых других классов функций.

1. Предварительные замечания о рациональном выражении тригонометрических и гиперболических функций. К интегрированию рациональных функций можно свести также интегрирование некоторых других общих классов функций. Мы лучше всего поймем это приведение, если предварительно уясним себе несколько элементарных фактов относительно

тригонометрических и гиперболических функций. Полагая $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, с помощью элементарной тригонометрии получаем следующие формулы:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad 1),$$

т. е. $\sin x$ и $\cos x$ выражаются рационально с помощью величины $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Из равенства $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ дифференцированием получаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2},$$

следовательно

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

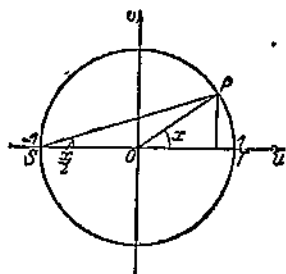
т. е. и производная $\frac{dx}{dt}$ выражается рационально через t .

Геометрическое значение и наглядную интерпретацию наших формул дает нам черт. 74. На нем изображена окружность $u^2 + v^2 = 1$ в плоскости u, v .

Обозначая отмеченный на чертеже угол POT через x , имеем:

$$u = \cos x, \quad v = \sin x.$$

Угол треугольника OSP , вершина S которого находится в точке $u = -1, v = 0$, равен по теореме элементарной геометрии $\frac{x}{2}$, и на чертеже сразу



Черт. 74.

видим геометрическое значение величины $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; когда точка P , начиная от точки S , пробегает один раз в положительном направлении окружность, т. е. когда x пробегает интервал от $-\pi$ до $+\pi$, величина t принимает по одному разу все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Совершенно аналогично мы можем представить также гиперболические функции $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ в виде

1) В самом деле, $\frac{1}{1+t^2} = \cos^2 \frac{x}{2}$, $\frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2 \frac{x}{2}$; отсюда $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$.

Если применим подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то интеграл $\int R(\cos x, \sin x) dx$ перейдет в интеграл

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2},$$

и под знаком интеграла находится теперь рациональная функция от t .

Тем самым задача интегрирования нашего выражения принципиально решена, так как последний интеграл мы можем найти методами, указанными в предыдущем параграфе.

3. Интегрирование $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$. Таким же образом, если $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ есть рациональное выражение относительно гиперболических функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, то его можно проинтегрировать с помощью подстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, следовательно, принимая во внимание, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2},$$

получаем

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) dx = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right) \frac{2}{1-t^2} dt.$$

(Мы могли бы впрочем согласно предыдущему замечанию ввести также просто $t = e^x$ в качестве новой независимой переменной и выразить $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ через e^x .) Снова интегрирование приводится к интегрированию рациональной функции.

4. Интегрирование $R(x, \sqrt{1-x^2})$. Интеграл $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$ мы путем подстановки $x = \cos u$, $\sqrt{1-x^2} = \sin u$, $dx = -\sin u du$ приводим к типу, рассмотренному в п^о 2; с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ можем отсюда тотчас же перейти к интегралу от рациональной функции. Но мы можем так же, как я кстати замечу, сделать это приведение не в два приема, а сразу, применяя подстановку

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2},$$

которая приводит к интегралу от рациональной функции; т. е. мы сразу вводим $t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ в качестве новой переменной и тем самым получаем интеграл от рациональной функции.

5. Интегрирование $R(x, \sqrt{x^2-1})$. Интеграл $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$ переходит с помощью подстановки $x = \operatorname{ch} u$ в интеграл типа, рассмотрен-

ного в п° 3. Мы могли бы здесь также прямо прийти к цели подстановки

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \operatorname{th} \frac{u}{2}.$$

6. Интегрирование $R(x, \sqrt{x^2+1})$. Интеграл $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$ тем подстановки $x = \operatorname{sh} u$ приводится также к типу, рассмотренному в п° 3, и следовательно интегрируется с помощью элементарных функций.

Вместо того чтобы затем путем подстановки $e^u = t$ или $\operatorname{th} \frac{u}{2} = t$ сделать дальнейшее приведение к интегралу от рациональной функции, мы могли бы впрочем также сразу получить с помощью подстановки $t = x + \sqrt{x^2+1}$ или же $t = \frac{-1 + \sqrt{x^2+1}}{x}$ интеграл от рациональной функции.

7. Интегрирование $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$. Интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}) dx$$

от выражения, которое рационально составлено из x и корня квадратного из произвольного трехчлена второй степени от x , можно непосредственно свести к одному из только что рассмотренных типов. Мы пишем (ср. со сказанным на стр. 196)

$$ax^2+2bx+c = \frac{1}{a}(ax+b)^2 + \frac{ac-b^2}{a}$$

и вводим, в случае если $ac-b^2 > 0$, с помощью подстановки

$\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$ новую переменную ξ , причем наш квадратный корень

примет вид $\sqrt{\frac{ac-b^2}{a}} \sqrt{\xi^2+1}$. Следовательно интеграл в новой переменной ξ будет как раз рассмотренного в п° 6 типа. При этом постоянная a должна быть положительной, для того чтобы корень вообще имел действительные значения.

Если $ac-b^2 = 0$, $a > 0$, то ввиду того что $\sqrt{ax^2+2bx+c} = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$, подынтегральная функция уже с самого начала рациональна в x .

Если наконец $ac-b^2 < 0$, то полагаем $\xi = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$ и получаем для корня выражение $\sqrt{\frac{b^2-ac}{a}}(\xi^2-1)$. Если a — число положительное,

то интеграл тем самым приводится к типу, рассмотренному в п° 5, если же a — число отрицательное, то пишем наш корень в виде

$\sqrt{\frac{b^2 - ac}{-a}} \sqrt{1 - \xi^2}$ и видим, что получается интеграл типа, рассмотренного в п° 4.

8. Дальнейшие примеры приведения к интегралам от рациональных функций. Из других типов функций, интегрирование которых осуществляется с помощью приведения подынтегральной функции к рациональному виду, я кратко остановлюсь еще на двух. Во-первых, рассмотрим рациональные выражения относительно двух различных квадратных корней из линейных выражений: $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$; во-вторых, выражения

вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, причем a, b, c и d — постоянные. Вводя в первом случае $\xi = \sqrt{cx+d}$ в качестве новой независимой переменной, откуда $x = \frac{\xi^2 - d}{c}$, $\frac{dx}{d\xi} = \frac{2\xi}{c}$, получаем:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx &= \\ &= \int R\left(\frac{\xi^2 - d}{c}, \sqrt{\frac{1}{c} [a\xi^2 - (ad - bc)]}, \xi\right) \frac{2\xi}{c} d\xi, \end{aligned}$$

т. е. тип, рассмотренный в п° 7.

Во втором случае берем за новую независимую переменную величину

$\xi = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, тогда

$$\xi^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{-d\xi^n + b}{c\xi^n - a}, \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{ad - bc}{(c\xi^n - a)^2} \cdot n\xi^{n-1},$$

и мы приходим к формуле

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{-d\xi^n + b}{c\xi^n - a}, \xi\right) \frac{ad - bc}{(c\xi^n - a)^2} n\xi^{n-1} d\xi,$$

т. е. к интегралу от рациональной функции.

9. Замечания по поводу примеров. Предыдущие рассуждения имеют преимущественно принципиальное теоретическое значение. Действительное проведение вычислений при сложных выражениях было бы часто слишком громоздко. Чтобы добиться большей простоты, целесообразно поэтому в иных случаях использовать специальный характер интегрируемых функций. Например при интегрировании выражения $\frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ лучше

вместо подстановки, указанной в п^о 2, ввести новую переменную $t = \operatorname{tg} x$, так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$, и поэтому возвращаться назад к $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ уже не нужно. Это же относится ко всякому выражению, составленному рационально из $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x \cdot \cos x$ ¹⁾. Во многих случаях впрочем при вычислении интегралов предпочитают иметь дело не с рациональной, а с тригонометрической формой, когда, отправляясь от нее, можно прийти к цели с помощью простого рекуррентного процесса. Например, вместо того чтобы приводить к рациональному виду интеграл $\int x^n (\sqrt{1-x^2})^m dx$, лучше путём подстановки $x = \sin u$ представить его в виде $\int \sin^n u \cos^{m+1} u du$, при котором его легко проинтегрировать рекуррентным процессом, указанным в § 4 (или также, переходя с помощью теорем сложения от степеней синуса и косинуса к синусам и косинусам кратных дуг).

Для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$$

мы, вместо того чтобы пользоваться общей теорией, определим число A и угол ϑ так, чтобы

$$a = A \sin \vartheta, \quad b = A \cos \vartheta,$$

т. е. полагаем

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{a}{b}.$$

Интеграл тогда переходит в

$$\frac{1}{A} \int \frac{dx}{\sin(x + \vartheta)};$$

рассматривая $x + \vartheta$ как новую переменную, находим (см. стр. 187), что значение интеграла равно

$$\frac{1}{A} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x + \vartheta}{2} \right|.$$

§ 7. Замечания относительно функций, не интегрирующихся с помощью элементарных функций.

1. Определение функций с помощью интегралов. Эллиптические интегралы. Указанными примерами типов функций, интегрирование которых приводится к интегрированию рациональных функций, в основном исчерпывается область функций, интегрируемых с помощью элементарных

¹⁾ В самом деле, $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ конечно рационально выражается через $\operatorname{tg} x$.

функций. Попытки выразить с помощью элементарных функций например общие интегралы следующего вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}}, \quad \int \sqrt{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n} dx \quad \text{или} \quad \int \frac{e^x}{x} dx$$

всегда кончались неудачно; в XIX столетии удалось даже доказать принципиальную невозможность выполнить эти интегрирования с помощью элементарных функций.

Если бы следовательно целью интегрального исчисления являлось интегрирование в элементарных функциях, то мы быстро достигли бы границ этой науки. Но такая цель действительно не имеет никакого внутреннего оправдания; наоборот, в ней есть нечто искусственное. Тот факт, что интеграл от непрерывной функции существует и представляет в свою очередь непрерывную функцию верхнего предела, не имеет ничего общего с возможностью выразить последнюю функцию с помощью элементарных функций. В сущности элементарные функции отличаются только тем, что свойства их легко охватить и практическое применение их значительно облегчается удобными таблицами, или тем, что их, как например рациональные функции, можно просто вычислить с произвольной точностью.

Нам ничто не мешает, в случае когда интеграл от некоторой функции не выражается с помощью известных нам функций, ввести этот интеграл как новую „высшую“ функцию, т. е. в сущности только дать ей имя. Целесообразно ли введение такой новой функции или нет, будет зависеть от того, какими свойствами эта функция обладает, часто ли она встречается, и насколько легко она поддается теоретическому изучению или вычислению в смысле нахождения числовых значений функции. В этом смысле следовательно процесс интегрирования является принципом образования новых функций.

В сущности с этим принципом мы уже ознакомились при изучении элементарных функций. Так в третьей главе мы должны были ввести неизвестный нам тогда интеграл от функции $\frac{1}{x}$ в качестве новой функции, которую мы называли логарифмом и свойства которой мы затем легко могли установить. Совершенно аналогичным образом мы могли бы ввести и тригонометрические функции, опираясь исключительно на рациональные функции, процесс интегрирования и процесс обращения. Для этого достаточно было только взять за исходный пункт одно из равенств:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad \text{или} \quad \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

в качестве определения функции $\arctg x$ или $\arcsin x$, чтобы затем путем обращения получить из них тригонометрические функции; этим путем мы освобождаем определение этих функций от геометрии, но налагаем конечно на себя обязанность вывести теперь все их свойства независимо от геометрии прямо из их определения с помощью интегралов ¹⁾.

Первым и самым важным примером, выводящим нас за пределы области элементарных функций, являются эллиптические интегралы. Это такие интегралы, подынтегральная функция которых рационально выражается через корень квадратный из многочлена третьей или четвертой степени. Особенно важной среди этих интегралов оказывается функция

$$u(s) = \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Обратная ей функция $s(u)$ также играет важную роль. При $k=0$ в частности получаем $u(s) = \arcsin s$ или $s = \sin u$. Функция $s(u)$ также хорошо изучена и представлена в таблицах, как и элементарные функции. Но здесь мы уже выходим из рамок нашего курса в область так называемых эллиптических функций, которая составляет важную часть теории функций, и на ней вам еще придется подробно остановиться в ваших дальнейших занятиях.

Укажу только, что название эллиптические интегралы объясняется тем, что такого рода интегралы встречаются в задаче определения длины дуги эллипса (см. гл. V, стр. 246).

Замечу далее, что интегралы на первый взгляд совершенно иного вида сводятся с помощью простых подстановок, к эллиптическим интегралам. Например интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos a - \cos x}}$$

путем подстановки $u = \cos \frac{x}{2}$ переходит в интеграл

$$-k\sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad k = \frac{1}{\cos \frac{a}{2}};$$

интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

¹⁾ Я не буду останавливаться на проведении этой мысли. Основной пункт заключается в доказательстве теоремы сложения для обратных функций, т. е. для синуса и тангенса.

путем подстановки $u = \sin x$ переходит в

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}},$$

наконец интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$$

подстановкой $u = \sin x$ превращается в

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}.$$

2. Замечания по существу относительно дифференцирования и интегрирования. Сделаем еще одно общее замечание об отношении дифференцирования к интегрированию. Операция дифференцирования является более элементарной операцией, чем интегрирование, так как она не выводит нас за пределы ранее известных функций. С другой стороны, мы должны однако иметь в виду, что дифференцируемость какой-либо непрерывной функции ни в коем случае не является чем-то само собой разумеющимся, а представляет весьма ограничивающее условие. Мы ведь видели, что существуют непрерывные функции, которые в отдельных точках недифференцируемы, и я укажу, не доказывая, на то, что можно построить много примеров непрерывных функций, которые даже не имеют производной ни в одной точке ¹⁾; первый пример такого рода был построен Вейерштрассом. (Таким образом в математическом определении непрерывности кроется значительно меньше того, что на первый взгляд позволяет предполагать непосредственная интуиция.) В противоположность этому интегрирование в общем случае правда уже невыполнимо в элементарных функциях, но зато мы всегда уверены в существовании интеграла от непрерывной функции.

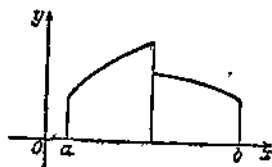
Итак мы видим, что нельзя просто противопоставить одну операцию другой как более элементарную или менее элементарную, но что в одном отношении одна из этих операций заслуживает названия более элементарной, в другом — второй.

Что касается понятия интеграла, то мы в ближайшем параграфе увидим, что оно не связано даже с предположением непрерывности интегрируемой функции, а может быть распространено на широкие классы функций, имеющих разрывы.

¹⁾ См. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. III. Berlin, Julius Springer, 1928.

§ 8. Обобщение понятия интеграла. Несобственные интегралы.

1. **Функции с конечными разрывами.** Прежде всего мы непосредственно видим, что не встречается никаких затруднений в расширении понятия интеграла в том случае, когда функция $f(x)$, которую требуется проинтегрировать, имеет в одной или нескольких точках интервала конечный разрыв. Тогда достаточно под интегралом функции понимать сумму интегралов, взятых по отдельным частичным интервалам, в которых функция остается непрерывной.



Черт. 76.

При этом и геометрическое значение интеграла как площади остается в силе (черт. 76)¹⁾.

2. **Функции, принимающие бесконечно большие значения.** Иначе обстоит дело, когда функция обращается в бесконечность в какой-нибудь точке внутри интервала или на одном из его концов. Для того чтобы иметь возможность формулировать понятие интеграла и для этого случая, мы должны прибегнуть еще к одному предельному переходу. Разъясним предварительно на нескольких примерах, прежде чем перейти к формулировке общих понятий, возможные здесь случаи, а именно рассмотрим интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^a},$$

где a — положительное число. Подынтегральная функция $\frac{1}{x^a}$ обращается в бесконечность при $x \rightarrow 0$, поэтому мы не можем взять за нижний предел интегрирования значение нуль. Но мы можем исследовать, что получится, если возьмем интеграл в пределах от положительного числа ϵ до 1 например, и затем заставим ϵ стремиться к нулю.

На основании элементарных правил интегрирования мы получаем, если $a \neq 1$:

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} (1 - \epsilon^{1-a}).$$

Теперь мы непосредственно видим, что имеются следующие возможности. Во-первых, $a > 1$, тогда правая часть с убыванием ϵ стремится к беско-

¹⁾ Собственно нам следовало бы обратить внимание на то, что раньше при определении интеграла мы рассматривали замкнутые интервалы и предполагали функцию непрерывной во всем замкнутом интервале. Но это обстоятельство не вызывает никаких затруднений, так как в каждом замкнутом частичном интервале мы можем дополнить функцию $f(x)$ до непрерывной, принимая просто пределы функции при неограниченном приближении изнутри к концам интервала за значения функции в этих конечных точках.

нечности. Во-вторых, $\alpha < 1$, тогда правая часть стремится к $\frac{1}{1-\alpha}$. Во втором случае мы будем рассматривать этот предел просто как интеграл, взятый в пределах от 0 до 1. В первом случае мы скажем, что этот интеграл не существует. В третьем случае, когда $\alpha = 1$, интеграл равен $-\log e$ и потому с убыванием e не стремится к конечному пределу, а возрастает неограниченно, т. е. интеграл, взятый от 0 до 1, не существует.

Другой пример того, что можно расширить промежуток интегрирования вплоть до точки, в которой подынтегральная функция обращается в бесконечность, представляет функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Имеем:

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\epsilon).$$

Когда ϵ стремится к нулю, правая часть стремится к определенному пределу, именно к $\frac{\pi}{2}$, и этот предел обозначают поэтому как

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

хотя подынтегральная функция и обращается в ∞ при $x = 1$.

Для того чтобы извлечь из этих примеров общее определение, прежде всего заметим, что совершенно безразлично, лежит ли точка разрыва подынтегральной функции в верхнем или нижнем концах промежутка интегрирования; в самом деле, мы можем поменять местами верхний и нижний пределы, если только изменить в то же время знак интеграла. Теперь мы говорим: если в интервале $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ непрерывна, за исключением быть может крайней точки b , то мы определяем $\int_a^b f(x) dx$ как предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

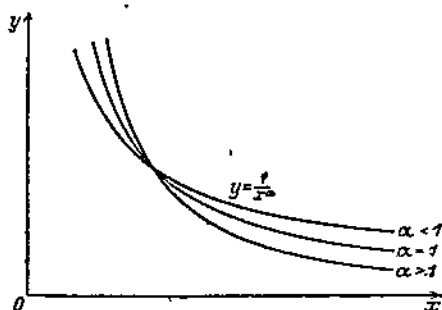
(при этом $b-\epsilon$ стремится к b изнутри интервала) при условии, что этот предел существует.

В этом случае мы говорим, что $\int_a^b f(x) dx$ есть сходящийся несобственный интеграл. Если же предела не существует, то мы говорим, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ не существует или расходится.

И несобственный интеграл можно геометрически интерпретировать с помощью площади. Хотя на первый взгляд не имеет никакого смысла говорить о площади такой области, которая „простирается в бесконечность“, но можно все же попытаться определить такую площадь с помощью предельного перехода от областей с конечной площадью.

Например предыдущий результат, относящийся к функциям $\frac{1}{x^a}$, гласит, что площадь ограниченная осью x -ов, прямыми $x=1$ и $x=\epsilon$ и кривой $y=\frac{1}{x^a}$, при $\epsilon \rightarrow 0$ стремится к конечному пределу, если $a < 1$, и неограниченно возрастает, если $a \geq 1$. Этот факт выражают словами просто так: площадь, заключенная между осью x -ов, осью y -ов, нашей кривой и прямой $x=1$, конечна или бесконечна.

Интуиция не может нам конечно дать никаких точных заключений о конечности или бесконечности площади простирающегося в бесконечность куска плоскости. Можно только сказать, что идущий в бесконечность кусок плоскости тем вероятнее будет иметь конечную площадь, чем уже он стягивается по мере удаления в бесконечность. В этом смысле черт. 77 иллюстрирует нам тот факт, что при $a < 1$ площади под нашими кривыми остаются конечными, между тем как при $a \geq 1$ они становятся бесконечно большими.



Черт. 77.

Для того чтобы узнать, можно ли для функции $f(x)$, обращающейся в бесконечность при $x=b$, продолжить промежуток интеграции до точки b , не всегда понадобится производить особое исследование; часто можно будет воспользоваться следующим критерием:

Пусть в интервале $a \leq x < b$ функция $f(x)$ имеет положительные значения¹⁾ и пусть $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, если существует такое положительное число $\nu < 1$ и такое постоянное, независящее от x число M , что во всем интервале $a \leq x < b$ функция $f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^\nu}$, т. е. иными словами, если функция $f(x)$ в точке $x=b$ обращается в бесконечность ниже первого порядка.

¹⁾ В дополнениях к восьмой главе мы впрочем увидим, что это ограничение относительно знака можно легко устранить,

Наоборот, интеграл расходится, если существует число $\nu \geq 1$ и положительное число N такое, что $f(x) \geq \frac{N}{(b-x)^\nu}$, т. е. иными словами, если порядок обращения функции в точке $x=b$ в бесконечность не ниже первого.

Доказательство почти непосредственно вытекает из сравнения с простейшим разобранным раньше случаем. Чтобы доказать например первую часть теоремы, мы примем во внимание, что

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^\nu} dx$$

и что интеграл в правой части при $\varepsilon \rightarrow 0$, как следует из замечаний в начале этого номера (если только заменим там x через $b-x$, а через ν и 0 через b), сходится и потому остается ограниченным, и наконец, что значения $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ монотонно возрастают.

Следовательно эти значения стремятся к пределу, т. е. $\int_a^b f(x) dx$ сходится.

Совершенно аналогичное доказательство второй части теоремы могу предоставить вам самим.

Таким же образом вы легко сами убедитесь в том, что соответствующие теоремы имеют место и в том случае, когда подынтегральная функция обращается в бесконечность для нижнего предела интегриации. Если подынтегральная функция обращается в бесконечность во внутренней точке рассматриваемого интервала, то достаточно только с помощью этой точки разбить этот интервал на два частичных интервала и к каждому из них применить предыдущие рассуждения.

В качестве дальнейшего примера рассмотрим эллиптический интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (k^2 < 1).$$

—Сразу видим, что при $x=1$ подынтегральная функция обращается в бесконечность порядка $\frac{1}{2}$, откуда следует существование несобственного интеграла.

3. Бесконечный промежуток интегрирования. Другое столь же важное обобщение понятия интеграла заключается в том, что один из

пределов интеграции берут бесконечно большим. Чтобы точно выразить это обобщение понятия об интеграле, мы вводим следующие обозначения: если интеграл

$$\int_a^A f(x) dx$$

при фиксированном значении a стремится к определенному пределу, когда положительное число A неограниченно возрастает, то этот предел мы обозначим

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

и назовем интегралом с бесконечным пределом от функции $f(x)$. Само собою разумеется, что такой интеграл не всегда существует или, как говорят, не всегда сходится. Простые примеры возможных при этом случаев опять дают нам функции $f(x) = \frac{1}{x^a}$:

$$\int_1^A \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} (A^{1-a} - 1);$$

отсюда выводим, исключая сперва случай $a=1$, что при $a>1$ интеграл с бесконечными пределами существует, а именно

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1};$$

наоборот, в случае $a<1$ интеграла уже не существует. В случае $a=1$ интеграл очевидно тоже не существует, так как $\log x$ возрастает неограниченно вместе с x . Итак мы видим, что по отношению к интегралам с бесконечными пределами функции $\frac{1}{x^a}$ ведут себя иначе, чем при интегрировании от точки нуля. И здесь черт. 77 дает некоторое наглядное подтверждение этого факта. В самом деле мы видим, что чем больше a , тем ближе подходят кривые при больших значениях x к оси x -ов, так что становится понятной конечность соответствующей площади при неограниченном возрастании A .

Для решения вопроса о существовании интеграла с бесконечными пределами можно во многих случаях воспользоваться следующим критерием, причём мы опять будем предполагать, что при достаточно больших значениях x , скажем при $x \geq a$, подынтегральная функция имеет

постоянный знак ¹⁾, который мы можем, не ограничивая общности, считать положительным. Интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится, если функция $f(x)$ обращается в бесконечности в нуль порядка выше первого, т. е. если существует такое число $\nu > 1$, что при всех значениях x , как бы велики они ни были, имеет место соотношение $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\nu}$, где M означает некоторую фиксированную грань, не зависящую от x . Интеграл расходится, если функция $f(x)$ остается положительной и в бесконечности обращается в нуль порядка не выше первого, т. е. если существует такая постоянная положительная грань N , что $xf(x) \geq N > 0$. Доказательство этих критериев, которое совершенно аналогично доказательству в предыдущем номере, предоставляю вам самим.

Простейший пример представляет интеграл:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad (a > 0).$$

Подынтегральная функция представляет в бесконечности бесконечно малую второго порядка. И действительно мы сразу видим, что интеграл сходится, так как

$$\int_a^A \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{A},$$

и мы получаем:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a}.$$

Столь же прост пример:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} (\arctg A - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Дальнейший особенно важный для анализа пример представляют так называемые Γ -интегралы (гамма-функции):

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \quad (n \geq 1).$$

¹⁾ Это ограничение относительно постоянства знака будет непосредственно устранено в восьмой главе.

И для них имеет место критерий сходимости; в самом деле, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{n-1} x^2 = 0$, так как показательная функция e^{-x} обращается в нуль

более высокого порядка, чем любая степень $\frac{1}{x^n}$. Эти интегралы, которые мы можем рассматривать как функции числа n , удовлетворяют замечательному соотношению, которое получается с помощью интегрирования по частям следующим образом:

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \int e^{-x} x^{n-2} dx.$$

Если произведем интегрирование в пределах от 0 до ∞ , т. е. сперва от 0 до A , а затем станем неограниченно увеличивать A , то мы в пределе получим:

$$\Gamma(n) = (n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx = (n-1) \Gamma(n-1),$$

и отсюда

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots (n-\mu) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-\mu-1} dx.$$

Если n целое положительное число, получаем, что

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \int_0^{\infty} e^{-x} dx,$$

и так как

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

то окончательно получаем:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = (n-1)!$$

Это представление факториалов с помощью интеграла играет большую роль в очень многих приложениях.

Также сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx,$$

в чем вы сами можете убедиться с помощью наших критериев.

В заключение я еще укажу на то, что все правила относительно подстановки новой переменной и т. д., само собою разумеется, сохраняют силу и для сходящихся несобственных интегралов. Так например, чтобы

вычислить интеграл $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$, мы вводим в качестве новой переменной $u = x^2$ и получаем:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-A}) = \frac{1}{2}.$$

Часто с помощью подстановки несобственный интеграл переходит в собственный, например подстановка $x = \sin u$ дает:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны, наоборот, интегралы от непрерывных функций $f(x)$ переходят в несобственные интегралы, если в конце промежутка интегрирования при подстановке $u = \varphi(x)$ производная $\varphi'(x)$ обращается в нуль, следовательно $\frac{dx}{du}$ обращается в бесконечность.

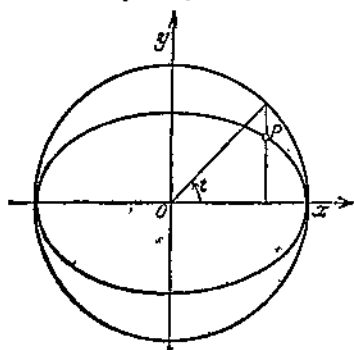
ГЛАВА V.

ПРИМЕНЕНИЯ.

Имея таким образом в своем распоряжении известный запас сведений из области дифференциального и интегрального исчисления, мы покажем в настоящей главе, что полученные нами результаты применимы к различного рода вопросам геометрии и физики.

§ 1. Изображение кривых.

1. Изображение в параметрической форме. При изображении кривой с помощью функции $y=f(x)$ мы должны каждый раз, как мы видели в первой главе, ограничиваться однозначной ветвью кривой. Поэтому во многих случаях, особенно для замкнутых кривых, является более



Черт. 78.

удобным пользоваться другими способами аналитического изображения кривых. Самую общую и в то же время наиболее удобную форму изображения дает нам параметрический способ изображения кривой. При этом способе аналитического изображения кривой мы уже не рассматриваем одну прямоугольную координату как функцию другой, но обе координаты x и y выражаем в виде функций от третьей независимой переменной t , так называемой вспомогательной

переменной или параметра; при этом точка с координатами x и y пробегает кривую, когда t пробегает известный интервал. С такими параметрическими изображениями мы уже встречались. Так например для окружности $x^2 + y^2 = a^2$ мы получаем параметрическое изображение в форме $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. Геометрически t , как известно, здесь означает центральный угол окружности. Точно так же для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получается параметрическое изображение $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, где t означает так называемую эксцентрическую аномалию, т. е. центральный

угол, соответствующий лежащей над точкой P эллипса точке описанной окружности (черт. 78). В обоих случаях точка с координатами x, y описывает всю окружность или соответственно весь эллипс, когда параметр t пробегает интервал от 0 до 2π .

В общем случае мы можем пытаться изобразить заданную нам кривую, полагая

$$x = \varphi(t) = x(t), \quad y = \psi(t) = y(t),$$

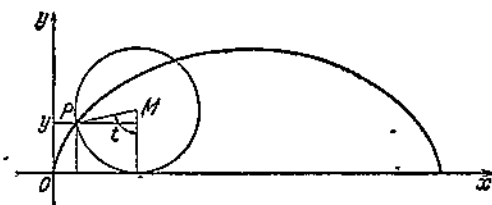
т. е. рассматривая две функции параметра t (мы будем впредь пользоваться более короткой записью $x(t)$ и $y(t)$ всюду, где это не сможет привести к недоразумениям). При этом обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ должны быть для заданной кривой выбраны так, чтобы совокупность пар значений функций $x(t)$ и $y(t)$ внутри заданного интервала для t давала все точки данной кривой и только эти точки. Если кривая первоначально задана в форме $y = f(x)$, то можно получить подобное параметрическое изображение, полагая сперва $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная и монотонная функция, которая принимает в некотором определенном интервале каждое из интересующих нас значений x ровно один раз; тогда $y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$, т. е. вторая функция $\psi(t)$ получается как функция от функции, составленная из f и φ . Мы видим, что произвол в выборе функции φ предоставляет нам еще большую свободу при параметрическом изображении заданной кривой; в частности мы можем положить $t = x$, так что первоначальное изображение $y = f(x)$ можно рассматривать как параметрическое изображение с помощью параметра $t = x$.

Преимущество параметрического изображения заключается как раз в возможности использования остающегося произвола в целях упрощения аналитического выражения. Так например мы изображаем кривую $y = \sqrt[3]{x^2}$, полагая $x = t^3$, $y = t^2$, так что $\varphi(t) = t^3$, $\psi(t) = t^2$. Тогда точка с координатами x, y пробегает всю рассматриваемую кривую (парабола Нейля), когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Обратно, если кривая заранее задана в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и если мы хотим получить уравнение кривой в прямоугольных координатах, то достаточно исключить из обоих уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ параметр t . Для приведенных выше параметрических изображений окружности и эллипса это удастся просто путем возведения в квадрат, принимая во внимание уравнение $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (другой пример см. ниже). В общем случае надо было бы выразить t из уравнения $x = \varphi(t)$ через обратную функцию $t = \Phi(x)$; подставляя в $y = \psi(t)$, получаем уравнение $y = \psi[\Phi(x)] = f(x)$ ¹⁾; впрочем исклю-

¹⁾ При этом однако может случиться, что полученное таким образом уравнение $y = f(x)$ определяет большее число точек, чем первоначальное параметри-

чая t , необходимо в общем случае ограничиваться только частью кривой, а именно одной ветвью ее, расположенной однозначно над осью x -ов. В очень многих случаях можно параметру t придавать непосредственно физическое значение, а именно рассматривать t как время. Всякое движение точки на плоскости математически выражается тем, что координаты x и y являются функциями времени. Эти две функции выражают таким образом в параметрической форме движение по траектории. Этим объясняется то, что все кривые, к которым приводят механические или кинематические рассуждения, само собой задаются в параметрической форме. Я рассмотрю здесь циклоиды, получающиеся, когда круг катится по прямой или по другому кругу. Каждая точка катящегося круга описывает циклоиду.



Черт. 79.

Ограничимся простейшим случаем, когда круг радиуса a катится по оси x -ов, причем рассматривается точка, лежащая на самой окружности этого круга. Эта точка описывает тогда „обыкновенную“ циклоиду.

Если выбрать начало системы координат таким образом, чтобы оно совпадало с точкой кривой при $t=0$, то мы получим (черт. 79) для циклоиды параметрическое изображение

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

причем t означает угол поворота катящегося круга; если круг катится равномерно, то этот угол пропорционален времени.

Исключая t , мы можем написать уравнение циклоиды в прямоугольных координатах, а именно мы получаем:

$$\cos t = \frac{a-y}{a}; \quad t = \arccos \frac{a-y}{a}; \quad \sin t = \sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}},$$

откуда

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{(2a-y)y},$$

т. е. x выражено в виде функции от y ; но вы видите, насколько менее наглядной и неудобной является эта последняя формула по сравнению с параметрической формой изображения.

Так например уравнения $x = a \sin t$, $y = b \sin t$ определяют только конечный отрезок прямой $y = \frac{b}{a}x$, заключающийся между точками $x = -a$, $y = -b$ и $x = a$, $y = b$, тогда как уравнение $y = \frac{b}{a}x$ изображает всю прямую.

Если рассматривать параметрическое изображение заданной геометрически кривой с точки зрения чисто математической (т. е. не рассматривать его как выражение определенного движения через время), то, как мы уже сказали на стр. 221, у нас остается большая свобода при выборе параметра. Так например можно было бы ввести в качестве параметра вместо времени t величину $\tau = t^2$ или наконец какой-нибудь совершенно произвольный параметр τ , связанный с первоначальным параметром t произвольным уравнением вида $\tau = \omega(t)$, причем мы предполагаем, что это уравнение может быть в некотором интервале однозначно обращено с помощью уравнения $t = z(\tau)$.

Разумеется, в параметрической форме можно задавать не только прямоугольные координаты точек кривой, но точно так же и полярные координаты r и ϑ , связанные, как известно, с прямоугольными координатами посредством уравнений:

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y}{x},$$

так что

$$r = r(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

Так например для прямой мы получаем параметрическое изображение (черт. 80):

$$r = \frac{p}{\cos t}, \quad \vartheta = \alpha + t$$

(p и α — постоянные), откуда, исключая параметр t , мы сразу получаем уравнение прямой в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{\cos(\vartheta - \alpha)}.$$

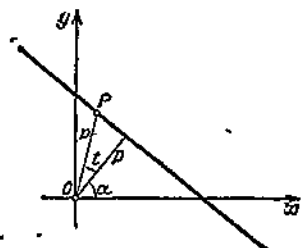
2. Производные от координат для кривой, заданной в параметрическом виде. Если кривая задана, с одной стороны, уравнением $y = f(x)$ и, с другой стороны, в параметрическом виде уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то имеет место тождество $y(t) = f[x(t)]$.

Согласно правилу дифференцирования функции от функции, имеем тогда:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$



Черт. 80

где дифференцирование по параметру t краткости ради обозначается вместо знака ' точкой, поставленной над дифференцируемой величиной (обозначение Ньютона).

Так например для циклоиды получаем:

$$\dot{x} = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2}; \quad \dot{y} = a \sin t = 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}.$$

Эти формулы показывают, что в точках $t=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, в которых циклоида встречает ось x -ов, она имеет точки заострения с вертикальными касательными; в самом деле, при приближении к этим точкам производная

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

стремится к бесконечности; в самой такой точке $y=0$, тогда как в ее окрестности всюду $y > 0$.

Уравнение касательной к нашей кривой, если текущие координаты точек касательной обозначить через ξ и η , принимает вид:

$$(\xi - x)\dot{y} - (\eta - y)\dot{x} = 0.$$

Точно так же уравнение нормали кривой, т. е. прямой, проведенной через какую-нибудь точку кривой перпендикулярно к касательной, имеет вид:

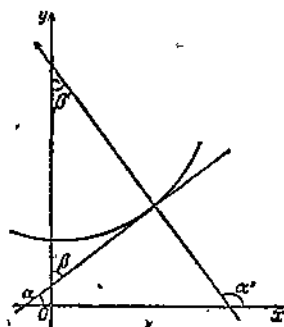
$$(\xi - x)\dot{x} + (\eta - y)\dot{y} = 0.$$

Косинусы углов α, β , образуемых касательной с осью x и осью y , задаются, как вы можете непосредственно в этом убедиться на основании предыдущего, выражениями:

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

тогда как соответствующие „направляющие косинусы“ нормали выражаются формулами:

$$\cos \alpha' = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \cos \beta' = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$



Черт. 81.

(черт. 81). Согласно известной формуле тригонометрии и аналитической геометрии мы получаем

для угла δ между двумя кривыми, из которых одна задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

а другая уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad y_1 = \psi_1(t)$$

(т. е. для угла между их касательными или нормальными) следующее выражение:

$$\cos \delta = \frac{\dot{x}\dot{x}_1 + \dot{y}\dot{y}_1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}}.$$

Неопределенность знака перед квадратными корнями, входящими во все эти формулы, указывает на то, что наши углы не вполне определены, ибо как на касательной, так и на нормали мы можем выбрать любое из двух противоположных направлений, так что вместе с углом δ можно рассматривать и угол $\pi - \delta$ как угол между заданными двумя кривыми.

Вторую производную

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

мы получаем, применяя правила дифференцирования функции от функции и дифференцирования частного, следующим образом:

$$x'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}},$$

следовательно

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}.$$

3. Переход к новым системам координат при параметрическом изображении. Если повернуть систему координат на угол α в положительном направлении, то между новыми прямоугольными координатами ξ, η и старыми x, y имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, & \xi &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, & \eta &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому вместе с x и y новые координаты ξ и η также представлены в виде функций параметра t . Дифференцируя, мы непосредственно получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos \alpha - \dot{\eta} \sin \alpha, & \dot{\xi} &= \dot{x} \cos \alpha + \dot{y} \sin \alpha, \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\eta} \cos \alpha, & \dot{\eta} &= -\dot{x} \sin \alpha + \dot{y} \cos \alpha \end{aligned}$$

и т. д.

Представим себе, что кривая задана в полярных координатах и как полярные, так и прямоугольные координаты представлены в виде функций

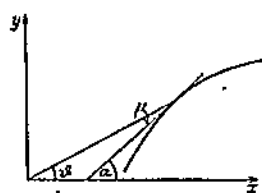
параметра t ; мы получаем тогда, дифференцируя по t уравнения $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, следующие соотношения:

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta}, \end{aligned}$$

которые часто применяются при переходе от прямоугольных к полярным координатам. В качестве примера рассмотрим уравнение кривой в полярных координатах, т. е. уравнение вида $r = f(\vartheta)$, которое например получено путем исключения параметра t из параметрического изображения $r = r(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$. Я утверждаю, что угол μ между радиусом-вектором некоторой точки кривой и касательной к кривой в этой точке задается уравнением:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{f'(\vartheta)}{f(\vartheta)}.$$

Мы можем в этом убедиться хотя бы следующим образом. Представим себе, что кривая задана уравнением $y = F(x)$ и примем специально в качестве параметра $t = \vartheta$, так что $\dot{\vartheta}x = 1$, $\dot{r} = f'(\vartheta)$, тогда



Черт. 82.

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \operatorname{tg} \vartheta + r}{\dot{r} - r \operatorname{tg} \vartheta}$$

[черт. 82 и формулы (*).]

Далее имеем $\mu = \alpha - \vartheta$, так что

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{y' - \operatorname{tg} \vartheta}{1 + y' \operatorname{tg} \vartheta} = \frac{\dot{r} + r \operatorname{tg}^2 \vartheta}{\dot{r} + r \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{r}{r}.$$

§.

Эта формула может быть также легко выведена геометрическим путем.

4. Замечания общего характера. При исследовании заданных кривых рассматривают, с одной стороны, такие свойства, которые несколько не характеризуют формы кривой, но зависят исключительно от положения кривой относительно системы координат. Таково например свойство горизонтальности касательной, выражаемое равенством $\dot{y} = 0$, или же свойство вертикальности таковой, выражаемое равенством $\dot{x} = 0$. При повороте системы координат эти свойства исчезают.

Наоборот, точка перегиба кривой остается и после такого поворота точкой перегиба. В самом деле, условие для точки перегиба выражается при параметрическом изображении, принимая во внимание нашу формулу преобразования, следующим образом:

$$x \ddot{y} - \ddot{x} y = 0.$$

Заменяя слева производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ их выражениями в новых координатах ξ , η , легко получаем соотношение:

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta},$$

откуда следует, что равенство $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = 0$ влечет за собой также и равенство $\dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta} = 0$, так что это равенство выражает такое свойство точки кривой, которое не зависит от системы координат.

В дальнейшем мы неоднократно убедимся в том, что собственно геометрические свойства выражаются такими формулами, вид которых не изменяется при изменении системы координат.

§ 2. Применение к теории плоских кривых.

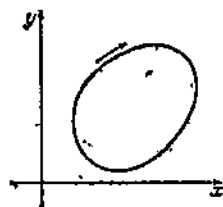
Геометрические свойства кривых, к рассмотрению которых мы переходим, могут быть двух отличных друг от друга видов: одни свойства зависят только от характера кривой в малом, т. е. в непосредственной окрестности рассматриваемой точки, и выражаются аналитически с помощью производных в этой точке, другие же свойства связаны с общим ходом всей кривой или куска кривой и формулируются аналитически с помощью понятия интеграла. Займемся сначала свойствами второго рода.

1. Площадь в прямоугольных координатах. Понятие площади служило нашим исходным пунктом при определении интеграла; однако в этой связи между определенным интегралом и понятием площади содержится еще нечто неудовлетворительное. Задача, которую мы ставим себе в геометрии, заключается в том, чтобы определить площадь части плоскости, ограниченной любыми произвольно заданными замкнутыми

кривыми; для интеграла же $\int_{x_0}^{x_1} y \, dx$ граница выражаемой этим интегралом площади только отчасти состоит из заданной кривой $y=f(x)$, тогда как остальная часть границы состоит из линий, зависящих от произвольного выбора системы координат. Если мы захотим выразить с помощью интегралов этого рода площадь замкнутой кривой, например площадь круга или эллипса, то нам придется разбить эту площадь на известное число частей, каждая из которых ограничена однозначно расположенной над осью x -ов ветвью кривой и самой осью x -ов.

Чтобы исследовать этот общий случай, целесообразно сделать предварительно несколько замечаний относительно определения знака рассматриваемых площадей. Мы видели во второй главе, что при помощи определенных интегралов задаются не площади сами по себе, но что рассмотренным там площадям приписывается с помощью интегрального выражения

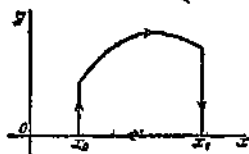
определенный знак. Этот способ определения знака площади — и притом сразу для любой ограниченной замкнутой кривой части плоскости — может быть связан с чисто геометрическим понятием направления обхода с помощью следующих соглашений. Мы говорим, что площадь обходится в положительном направлении, если ее граница пробегается так, что при этом площадь, заключенная внутри замкнутой кривой, остается слева¹⁾,



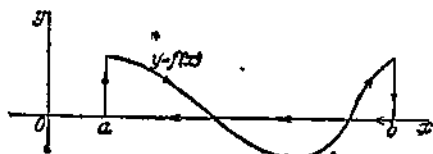
Черт. 83.

противоположное же направление обхода мы считаем отрицательным. Для площади, для которой установлено определенное направление обхода, для так называемой ориентированной площади, число, измеряющее эту площадь, считается тогда отрицательным при положительном направлении обхода и положительным при отрицательном направлении обхода (черт. 83). То, что направлению обхода приписывают знак, как раз противоположный знаку самой площади, является совершенно произвольным, но, как оказывается, очень целесообразным соглашением.

Рассмотрим теперь специально ломаную линию, составленную последовательно из отрезка оси x -ов, пробегаемого от точки $x=b=x_1$ до точки $x=a=x_0$, из примыкающего к нему отрезка ординаты $x=a=x_0$ до кривой $y=f(x)$, затем из рассмотренного выше куска этой кривой и наконец отрезка ординаты $x=b=x_1$, пробегаемого от кривой до оси x (черт. 84). Эта ломаная линия ограничивает одну или



Черт. 84.



Черт. 85.

несколько частей плоскости (черт. 85), границы которых могут при этом пробегаться как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Сумма их площадей, снабженных знаком согласно приведенному выше

¹⁾ Если хотят избежать при этом определении слов слева и справа, то говорят: треугольник, вершинами которого по порядку являются: точка $x=0$, $y=0$, точка $x=1$, $y=0$ и, наконец, точка $x=0$, $y=1$, пробегается в положительном направлении, если при обходе соблюдается этот порядок вершин. Всякая площадь, граница которой пробегается в том же направлении, считается в этой системе координат площадью с положительным направлением обхода, а всякая площадь, граница которой пробегается в противоположном направлении, считается в той же системе координат площадью с отрицательным направлением обхода.

правилу, выражается тогда интегралом $F_{01} = \int_a^b f(x) dx$, как это показы-

вает сопоставление с соглашениями главы II, § 2.

После этих предварительных замечаний мы можем чрезвычайно просто устранить упомянутые раньше затруднения, а именно — мы выражаем для этой цели нашу кривую в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$. Вводя t как новую независимую переменную в рассмотренном выше интеграле, мы получаем формально согласно правилу подстановки:

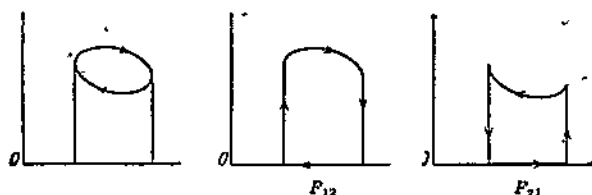
$$F_{01} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt,$$

где t_0 и t_1 означают значения параметра, соответствующие абсциссам $x_0 = a$ и $x_1 = b$. При этом мы пока предполагаем, что интервалу $t_0 \leq t \leq t_1$ однозначным образом соответствует ветвь кривой $y = f(x)$, т. е. что в этом интервале $x(t)$ не обращается в нуль. Тогда наш интеграл выражает только что описанным образом площадь, соответствующую рассматриваемой дуге кривой, т. е. площадь, ограниченную этой дугой, обеими прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$ и осью абсцисс. Характерной особенностью полученной нами параметрической формы выражения площади является то, что эта форма выражения остается в силе и для замкнутых кривых.

Замкнутая кривая задается в параметрической форме двумя функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, которые должны удовлетворять условиям $x(t_0) = x(t_1)$ и $y(t_0) = y(t_1)$, если при изменении параметра t от $t = t_0$ до $t = t_1$ пробегается вся кривая и притом один раз. Если кривая нигде не имеет угловых точек, то мы можем предположить производные $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ всюду непрерывными, тогда как угловым точкам, если таковые существуют, соответствуют точки разрыва этих производных. Когда параметр t пробегает интервал $t_0 \leq t \leq t_1$, то кривая пробегается при этом в определенном направлении, которое, как мы сказали, считается положительным, если оно противоположно направлению вращения часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. На черт. 83 отрицательное направление обхода указано стрелкой.

Оставим пока в стороне случай существования угловых точек и предположим кривую выпуклой, т. е. такой, что всякая прямая пересекает ее не более чем в двух точках. Пусть P_1 и P_2 — те точки кривой, в которых кривая имеет вертикальные касательные или, как говорят, „опорные прямые“. Мы можем тогда рассматривать площадь этой кривой, как это указано на черт. 86, как сумму площади V_{12} , лежащей под верхней

дугой P_1P_2 , и площади F_{21} , лежащей под нижней дугой P_2P_1 . При этом мы принимаем за направление обхода отрицательное направление, как это указано на чертеже, а F_{21} означает снабженное знаком число, измеряющее площадь, ограниченную соответствующей дугой кривой, так что F_{12} будет здесь положительным, а F_{21} — отрицательным. Пусть далее



Черт. 86.

точка $x(t)$, $y(t)$ пробегает верхнюю часть кривой от P_1 до P_2 , когда t изменяется от t_0 до t_1 , и нижнюю часть от P_2 до P_1 при $t_1 \leq t \leq t_0$. Мы тогда непосредственно получаем:

$$F_{12} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt$$

и

$$F_{21} = \int_{t_1}^{t_0} y(t) \dot{x}(t) dt;$$

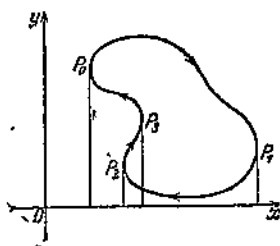
отсюда мы получаем для всей площади выпуклой кривой

$$F = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \dot{x}(t) dt.$$

Эта формула выражает всегда площадь как по величине, так и по знаку. Изменение направления обхода кривой означает, что в интеграле параметр t изменяется не от t_0 до t_1 , но в обратном направлении от t_1 до t_0 и интеграл тогда меняет свой знак. Таким образом, выражаемая нашей формулой площадь положительна или отрицательна, смотря по тому, является ли направление обхода кривой отрицательным или положительным¹⁾.

¹⁾ Мы предположили на нашем чертеже, что вдоль всей кривой всюду $y > 0$. Это однако не ограничивает общности нашей формулы. В самом деле, при перемещении кривых параллельно оси y -ов на расстояние a , т. е. другими словами, при замене y через $y + a$, площадь не изменяется; аналитически это обстоятель-

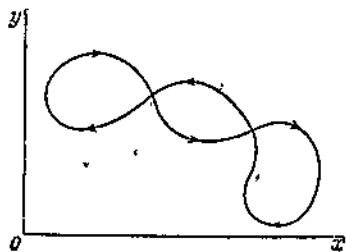
Мы обобщаем полученный нами результат с помощью следующих двух замечаний. С одной стороны мы можем без всяких оговорок допустить также наличие угловых точек кривой, отчего формула наша не теряет своей справедливости. В этом случае только появляются в угловых точках точки разрыва первого рода функции $\dot{x}(t)$ или $\dot{y}(t)$; наш интеграл сохраняет поэтому согласно гл. IV, § 8, свой смысл. Во-вторых, наша формула справедлива и тогда, когда кривая уже не имеет той простой выпуклой формы, которая указана на черт. 86, но имеет более общую замкнутую форму, как например на черт. 87. Мы тогда просто разбиваем кривую с помощью точек $P_0, P_1, P_2, \dots$, в которых кривая имеет вертикальные касательные, на ветви, расположенные однозначно над осью x , и получаем тогда непосредственно, как указано на чертеже, площадь F , ограничиваемую кривой, в форме $F = F_{01} + F_{12} + F_{23} + F_{30}$. Выражая каждую из этих частичных площадей в параметрической форме и соединяя эти выражения в один интеграл, мы получаем точно так же, как и раньше, в качестве площади кривой выражение:



Черт. 87.

$$\int_{t_0}^{t_1} y \dot{x} dt,$$

знак которого нам указывает вместе с тем и направление обхода. Интеграл в правой части нашей формулы имеет определенный смысл даже и в том случае, когда замкнутая кривая перекрещивается сама с собой (черт. 88). Этот интеграл выражает тогда разность между суммой тех из ограниченных кривой площадей, граница которых пробегается в отрицательном направлении, и суммой тех из них, граница которых пробегается в положительном направлении. Наше выражение для площади справедливо для всякой замкнутой кривой, если только $x(t), y(t)$ являются непрерывными функциями,



Черт. 88.

ство выражается в том, что при подобном перемещении стоящий выше интеграл заменяется интегралом $\int_{t_0}^{t_1} (y + a) \dot{x} dt$ и при этом в силу замкнутости кривой имеет место равенство $\int_{t_0}^{t_1} a \dot{x} dt = a \{x(t_1) - x(t_0)\} = 0$.

производные которых непрерывны всюду за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, и если при этом данная кривая имеет только конечное число вертикальных касательных. Мы можем придать нашей формуле площади более изящную симметрическую форму, преобразуя наш интеграл путем интегрирования по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} y \dot{x} dt = - \int_{t_0}^{t_1} x \dot{y} dt + xy \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Так как

$$x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1),$$

то отсюда непосредственно следует ¹⁾:

$$F = \int_{t_0}^{t_1} y \dot{x} dt = - \int_{t_0}^{t_1} x \dot{y} dt.$$

Взяв среднее арифметическое обоих выражений, мы получаем следующую симметрическую формулу ²⁾:

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (y \dot{x} - x \dot{y}) dt.$$

¹⁾ Вместо того, чтобы получить это второе выражение для площади с помощью интегрирования по частям, мы могли бы исходить из того замечания, что при определении площади ось x -ов и ось y -ов являются равноправными и отличаются одна от другой только в том отношении, что направление вращения, переводящего ось x -ов в ось y -ов, противоположно направлению вращения, при котором обратно ось y -ов переходит в ось x -ов.

²⁾ Добавлю к этой формуле попутно следующее замечание, представляющее принципиальный интерес: я утверждаю, что наше определение площади с помощью интеграла действительно не зависит от выбора системы прямоугольных координат, как это должно в самом деле иметь место для всякой настоящей геометрической величины. В самом деле, повернем систему координат на угол α , введя с помощью уравнений $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$, $y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$ вместо переменных x и y новые переменные ξ и η , являющиеся в свою очередь также функциями параметра t ; принимая во внимание, что $\dot{x} = \dot{\xi} \cos \alpha - \dot{\eta} \sin \alpha$ и $\dot{y} = \dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\eta} \cos \alpha$, мы получаем путем небольшого вычисления $y\dot{x} - x\dot{y} = \eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}$, так что

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (y\dot{x} - x\dot{y}) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}) dt.$$

Это уравнение выражает высказанное нами предложение о независимости определения площади от системы координат, показывая, что в системе ξ, η площадь выражается той же формулой, как и в первоначальной системе x, y . Точно так же наше определение площади не зависит от выбора параметра t , т. е. наша

В качестве примера применения нашей формулы для площади рассмотрим эллипс $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Чтобы выразить его площадь в прямоугольных координатах, мы можем рассмотреть в отдельности верхнюю и нижнюю половины эллипса, так что площадь эллипса выражается интегралом:

$$2 \frac{b}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

При параметрическом же изображении эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ мы получаем непосредственно для площади следующее выражение:

$$ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt, \text{ которое интегрируется согласно гл. IV, § 4 и равно } ab\pi.$$

2. Площадь в полярных координатах. Во многих случаях целесообразно выразить площадь в полярных координатах. Пусть $r = f(\theta)$ — уравнение кривой в полярных координатах. Обозначим через $F(\theta)$ площадь, ограниченную радиусом-вектором, проведенным из начала координат к точке $(f(\theta), \theta)$, радиусом-вектором, ведущим к точке $(f(0), 0)$, и лежащей между обоими радиусами-векторами частью кривой. Тогда

$$F'(\theta) = \frac{1}{2} r^2;$$

в самом деле, рассмотрим наряду с радиусом-вектором, соответствующим углу θ , радиус-вектор, соответствующий углу $\theta + \Delta\theta$, и пусть r_0 —

формула сохраняет свой вид, если ввести вместо t новый параметр τ с помощью уравнения $\tau = \tau(t)$. В самом деле имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt},$$

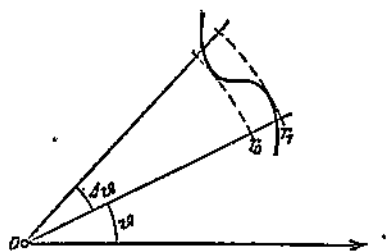
так что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(y \frac{dx}{d\tau} - x \frac{dy}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(y \frac{dx}{d\tau} - x \frac{dy}{d\tau} \right) d\tau,$$

где τ_0 и τ_1 означают начальное и конечное значения нового параметра, соответствующие значениям параметра t_0 и t_1 .

При определении площади мы исходили до сих пор из понятия интеграла и доказали теперь, что это аналитическое определение площади действительно имеет геометрический характер, будучи независимым от системы координат. Можно однако и непосредственно геометрически определить площадь рассмотренных выше кривых следующим образом: площадь есть верхний предел площадей, вписанных в кривую многоугольников. Я опускаю простое само по себе доказательство эквивалентности обоих определений.

наименьший, r_1 — наибольший радиус-вектор в этом интервале изменения угла ϑ (черт. 89). Тогда площадь ΔF сектора, заключенного между радиусом-вектором ϑ и радиусом-вектором $\vartheta + \Delta\vartheta$, содержится между пределами $\frac{1}{2} r_0^2 \Delta\vartheta$ и $\frac{1}{2} r_1^2 \Delta\vartheta$. Таким образом $\frac{1}{2} r_0^2 \leq \frac{\Delta F}{\Delta\vartheta} \leq \frac{1}{2} r_1^2$, и переход к пределу $\Delta\vartheta \rightarrow 0$ дает нам непосредственно указанное выше соотношение.



Черт. 89.

Отсюда получается согласно основной теореме интегрального исчисления следующее выражение площади сектора между полярными углами α и β :

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\vartheta.$$

В качестве примера рассмотрим площадь, ограниченную петлей лемнискаты.

Угол ϑ изменяется здесь от $-\frac{\pi}{4}$ до $+\frac{\pi}{4}$, и мы получаем для этой площади согласно уравнению лемнискаты $r^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta$ (см. стр. 61) следующее выражение:

$$a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\vartheta d\vartheta,$$

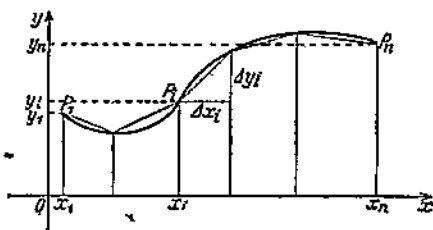
которое непосредственно вычисляется путем введения новой переменной $u = 2\vartheta$ и равняется a^2 .

3. Длина кривой. Вторым важным геометрическим понятием, связанным с кривой и также приводящим к интегралу, является длина дуги.

Уясним себе сначала геометрически, как мы должны определить длину произвольной линии. Элементарный процесс измерения длины состоит в том, что подлежащие измерению длины сравниваются с прямолинейными масштабами; простейшим приемом служит при этом последовательное откладывание масштаба по измеряемой линии и подсчет числа таких возможных откладываний. Этот измерительный процесс уточняется затем в случае необходимости путем введения все более и более мелких масштабов. В соответствии с этим элементарным наглядным представлением мы поступаем при определении длины кривой следующим образом. Мы вписываем в кривую прямолинейный многоугольник и измеряем его длину. Эта длина будет зависеть от того, как этот многоугольник выбран например от числа его вершин. Если мы будем неограниченно увеличивать число вер-

шин такого многоугольника, вписанного в дугу кривой, и в то же время неограниченно уменьшать длину наибольшей стороны многоугольника, то предел, к которому будет стремиться периметр многоугольников, мы и назовем длиной соответствующей дуги кривой. Это определение длины предполагает, что упомянутый предел, во-первых, действительно существует и, во-вторых, не зависит от специального выбора последовательности многоугольников, с помощью которых все с большей и большей точностью вычисляется длина кривой. Только при выполнении этого условия спрямляемости мы сможем говорить о длине кривой. Мы скоро убедимся в том, что при очень широких предположениях легко можно доказать спрямляемость кривой.

Чтобы представить длину с помощью аналитического выражения, а именно с помощью интеграла, предположим сначала, что кривая задана функцией $y=f(x)$ с непрерывной производной y' и что соответствующий рассматриваемой дуге кривой интервал разделен точками $a=x_1, \dots, x_n=b$ на $n-1$ частей длины $\Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$. Пусть вершины вписанного многоугольника лежат над этими точками деления оси x -ов. Вся длина вписанного многоугольника выражается тогда согласно теореме Пифагора (черт. 90) с помощью выражения:



Черт. 90.

$$\sum_{v=1}^{n-1} \sqrt{\Delta x_v^2 + \Delta y_v^2} = \sum_{v=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_v}{\Delta x_v}\right)^2} \Delta x_v.$$

Но по теореме о среднем значении отношение конечных приращений $\frac{\Delta y_v}{\Delta x_v}$ как раз равно $f'(\xi_v)$, где ξ_v есть промежуточное значение, лежащее в интервале Δx_v . Если n неограниченно растет и если при этом наибольший из интервалов Δx_v стремится к нулю, то наше выражение согласно определению интеграла стремится к пределу:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx,$$

который таким образом выражает длину нашей кривой между точками с абсциссами a и b .

Так как наш предельный переход от суммы к интегралу дает всегда один и тот же результат независимо от способа разбиения интервала,

то наше рассмотрение доказывает справедливость следующей теоремы: всякая кривая $y=f(x)$, где функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, спрямляема, и ее длина между точками $x=a$ и $x=b$ выражается формулой:

$$s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Для производной длины дуги по независимой переменной x мы получаем из этого уравнения, обозначая через s эту длину дуги, отсчитываемую от некоторой начальной точки, соотношение $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$.

Однако наше выражение длины дуги справедливо лишь при специальном и искусственном допущении, что рассматриваемая дуга расположена над осью x -ов в качестве однозначной ветви функции $f(x)$. От этого допущения нас освобождает параметрическое изображение. Если наша кривая задана в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, то мы получаем путем введения параметра t в наше предыдущее выражение параметрического изображение длины дуги:

$$s(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

где α и β означают значения t , соответствующие точкам кривой $x=a$ и $x=b$.

Это параметрическое выражение длины имеет по сравнению с прежним выражением то большое преимущество, что оно применимо не только для однозначных ветвей кривых, заданных уравнениями вида $y=f(x)$, но сохраняет свою справедливость для любых дуг и в частности для замкнутых кривых при условии, что вдоль этих дуг $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ непрерывны.

Мы убедимся в этом проще всего, если вернемся к приведенной выше исходной формуле длины вписанного в дугу кривой многоугольника. Пусть вдоль этой дуги $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$. Пусть далее вершинам вписанного многоугольника соответствуют значения параметра $t_1, t_2, \dots, t_n$ с разностями Δt_i и при переходе к пределу при $n \rightarrow \infty$ пусть наибольшая из этих разностей стремится к нулю. Напишем длину многоугольника в форме:

$$\sum \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i.$$

Непосредственно очевидно, что эта сумма стремится к пределу

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Для этого достаточно вспомнить общее определение интеграла (см. стр. 114).

Если кривая состоит из нескольких дуг подобного рода, конечные точки которых могут быть угловыми точками или точками возврата, то мы получаем в качестве выражения для длины дуги сумму соответствующих интегралов.

Таким образом мы получаем следующий результат. Если вдоль дуги кривой $\alpha \leq t \leq \beta$ функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, и их производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ также непрерывны за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то дуга имеет определенную длину, выражаемую интегралом:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

причем этот интеграл следует в случае необходимости рассматривать как несобственный интеграл в смысле главы IV¹⁾.

Приведу еще выражение для длины дуги в том случае, когда в основу положена система полярных координат. Мы должны для этого только подставить в полученное нами выражение вместо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ их значения из формулы (*) стр. 226, и мы получаем $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2$ откуда

$$s(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2} dt.$$

Простой пример вычисления в явном виде длины дуги дает нам парабола $y = \frac{1}{2}x^2$; для длины дуги параболы мы непосредственно полу-

чаем интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + x^2} dx$, который с помощью подстановки $x = \operatorname{sh} u$

¹⁾ Мы непосредственно можем убедиться в том, что это выражение для длины дуги не зависит от выбора параметра. В самом деле, введем новый параметр $\tau = \tau(t)$. Тогда, если $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$, получаем:

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2} dt = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} d\tau.$$

переходит в

$$\int_{\text{Arsh } a}^{\text{Arsh } b} \text{ch}^2 u \, du = \frac{1}{2} \int_{\text{Arsh } a}^{\text{Arsh } b} (1 + \text{ch } 2u) \, du = \frac{1}{2} (u + \text{sh } u \text{ch } u) \Big|_{\text{Arsh } a}^{\text{Arsh } b},$$

так что получается следующее выражение для длины дуги параболы между абсциссами a и b :

$$s(a, b) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Arsh } b + b \sqrt{1 + b^2} - \text{Arsh } a - a \sqrt{1 + a^2} \right\}.$$

Для цепной линии $y = \text{ch } x$ получаем:

$$s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + \text{sh}^2 x} \, dx = \int_a^b \text{ch } x \, dx,$$

или

$$s(a, b) = \text{sh } b - \text{sh } a.$$

Замечу еще, что при изображении кривой во многих случаях удобно выбирать в качестве параметра длину дуги s , отсчитываемую от некоторой фиксированной начальной точки, т. е. рассматривать x и y как функции $x(s)$ и $y(s)$; тогда

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1,$$

откуда дифференцированием получаем:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0.$$

Эти два соотношения часто находят себе различные применения.

4. Кривизна кривой. Тогда как площадь и длина дуги зависят от всей кривой в целом, понятие кривизны, к которому я теперь перехожу, относится только к характеру кривой в окрестности точки.

Пусть кривая пробегается равномерно, так что в равные промежутки времени проходятся дуги равной длины; тогда направление кривой будет изменяться с определенной скоростью. Эту скорость мы должны рассматривать как меру кривизны кривой в соответствующей точке.

Обозначая через α угол между касательной и положительным направлением оси x -ов и рассматривая α как функцию от длины дуги s , мы получаем следовательно для кривизны k в точке, соответствующей длине дуги s , формулу

$$k = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Но $\alpha = \arctg y'$, откуда по правилу дифференцирования функции от функции

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

так что кривизна k выражается формулой:

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

С помощью приведенных в § 1, nº2 формул, представляющих y'' в параметрическом виде, мы отсюда получаем для кривизны кривой, заданной в параметрическом виде, следующее простое выражение:

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

которое конечно может быть также непосредственно получено из равенства

$$\alpha = \arctg \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \arctg \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}}.$$

В противоположность первому выражению для кривизны, связанному с уравнением кривой $y=f(x)$ и справедливому лишь при специальных предположениях относительно положения кривой по отношению к оси x -ов, параметрическая форма кривизны справедлива для любой дуги кривой, вдоль которой $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ являются непрерывными функциями от t и в частности в тех точках, в которых $\dot{x}=0$ и $\frac{dy}{dx}=\infty$.

Введя в качестве параметра длину дуги s , мы получаем в силу соотношений $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ и $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$ просто

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \ddot{y} \left(\dot{x} + \dot{y} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{x}}{\dot{y}},$$

так что кривизна в этом случае выражается особенно просто.

Знак кривизны не имеет независимого от системы координат геометрического значения. Считая, как всегда, корень $\sqrt{1+y'^2}$ положительным, получим, что кривизна имеет тот же знак, что и y'' , и следовательно положительна или отрицательна в зависимости от того, лежит ли кривая в окрестности данной точки над или под касательной.

В качестве примера рассмотрим кривизну круга радиуса a . Исходя из параметрического изображения $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, мы непосредственно получаем:

$$k = \frac{1}{a}.$$

Кривизна круга равна таким образом обратной величине радиуса. Этот результат подтверждает целесообразность нашего определения кривизны, так как совершенно естественно считать мерой кривизны круга обратную величину радиуса.

Полагая $\rho = \frac{1}{k}$, мы называем вообще $|\rho| = \frac{1}{|k|}$ радиусом кривизны кривой в соответствующей точке. Тот из кругов, касающихся кривой в данной точке, который имеет ту же кривизну k и тот же знак кривизны, что и данная кривая, называется соответствующим данной точке кривой кругом кривизны. Написав уравнение этого круга в форме $y = g(x)$, мы получим, что в соответствующей точке кривой не только $g(x) = f(x)$ и $g'(x) = f'(x)$ — равенства, выражающие условия касания круга с кривой, — но кроме того в силу равенства:

$$k = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1+f'(x)^2})^3} = \frac{g''(x)}{(\sqrt{1+g'(x)^2})^3} = \frac{1}{\rho}$$

должно выполняться также и условие

$$f''(x) = g''(x),$$

Центр круга кривизны называется соответствующим данной точке кривой центром кривизны. Координаты центра кривизны выражаются в параметрическом виде формулами:

$$\xi = x - \frac{\rho y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad \eta = y + \frac{\rho x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Чтобы их получить, достаточно применить приведенные выше формулы для направляющих косинусов нормали и принять во внимание, что центр кривизны лежит на этой нормали на расстоянии $\frac{1}{|k|} = |\rho|$ от кривой. Эти формулы выражают координаты центра кривизны через параметр t . Когда t изменяется в некотором интервале, центр кривизны описывает кривую, называемую эволютой данной кривой, и наши формулы представляют эту эволюту в параметрическом виде, так как одновременно с x и y производные x' , y' и радиус кривизны ρ , являются известными функциями от t .

Отдельные примеры будут приведены в следующем параграфе и в дополнениях к настоящей главе.

5. Центр тяжести и статический момент кривой. Переходим к некоторым применениям из области механики. Рассмотрим систему n лежащих в одной плоскости материальных точек. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ — массы этих точек, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — их ординаты. Величина

$$T = \sum_{v=1}^n m_v y_v = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n$$

называется статическим моментом нашей системы точек относительно оси x -ов.

Выражение $\eta = \frac{T}{M}$ дает высоту центра тяжести нашей системы точек над осью x -ов, где $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ означает общую массу всей системы точек.

Аналогично определяется статический момент относительно оси y -ов и абсцисса центра тяжести.

Спросим себя теперь, что следует понимать под статическим моментом материальной кривой $y = f(x)$, рассматриваемой как носительница некоторой равномерно распределенной массы, и как определить соответственно этому координаты ξ и η центра тяжести такой кривой. Мы при этом предполагаем, краткости ради, что плотность массы постоянна вдоль всей кривой; обозначим эту плотность через μ .

Мы сводим нашу задачу к рассмотрению системы конечного числа точек и переходу к пределу. Для этой цели мы предполагаем, что на кривой в качестве параметра выбрана длина дуги s , и делим рассматриваемую дугу кривой с помощью точек $s_1, s_2, \dots, s_n$ на части длиной в $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Массы $\mu \Delta s_i$ этих частей мы представляем себе сконцентрированными в некоторой точке интервала с ординатой y_i .

Согласно определению момента мы получаем для момента этой системы точек выражение:

$$T = \mu \sum y_i \Delta s_i.$$

Переход к пределу при $\Delta s_i \rightarrow 0$ дает искомое выражение для момента кривой относительно оси x -ов:

$$T = \mu \int_{x_0}^{x_1} y \, ds = \mu \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Так как полная масса кривой равняется ее длине, умноженной на μ :

$$\mu \int_{s_0}^{s_1} ds = \mu (s_1 - s_0),$$

то отсюда получаются выражения для координат центра тяжести:

$$\eta = \frac{\int_{s_0}^{s_1} y ds}{s_1 - s_0}, \quad \xi = \frac{\int_{s_0}^{s_1} x ds}{s_1 - s_0}.$$

6. Поверхность и объем тела вращения. Пусть кривая $y=f(x)$, где $f(x) \geq 0$, вращается вокруг оси x -ов, описывая так называемую поверхность вращения. Площадь этой поверхности может быть непосредственно получена путем рассмотрения совершенно аналогичного предыдущему. Пусть абсциссы точек поверхности изменяются в пределах от x_0 до $x_1 > x_0$.

Мы заменяем сначала кривую вписанной ломаной линией и получаем вместо кривой поверхности геометрическую фигуру, состоящую из конечного числа усеченных круговых конусов. Но боковая поверхность усеченного конуса равняется, как известно, длине образующей, умноженной на длину среднего кругового сечения.

Складывая эти выражения и совершая предельный переход от ломаной линии к кривой, мы получаем для величины поверхности выражение:

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y ds.$$

Этот результат можно словесно выразить так: боковая поверхность тела вращения равна длине кривой, умноженной на длину пути, описываемого центром тяжести кривой (правило Гульдена).

Совершенно аналогично получается для объема, ограниченного нашей поверхностью вращения и плоскостями $x=x_0$ и $x=x_1 > x_0$ выражение:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx.$$

Вывод этой формулы основывается на следующем опирающемся на интуицию соглашении: под искомым объемом мы разумеем предел суммы объемов только что рассмотренных усеченных конусов. Указывая на это, предоставляю вам самим доказать эту формулу.

7. Момент инерции. При всех вращательных движениях в механике играют важную роль известные величины, называемые моментами инерции. Остановлюсь кратко также и на этих выражениях.

Пусть материальная точка с массой m , находящаяся на расстоянии y от оси x -ов, рассматриваемой как ось вращения, равномерно вращается вокруг этой оси с угловой скоростью ω (т. е. в единицу времени точка поворачивается на угол ω). Живая сила, или кинетическая энергия точки, равная половине произведения массы на квадрат скорости, выражается, очевидно, формулой $\frac{m}{2} (y \omega)^2$.

Мы называем множитель при $\frac{1}{2} \omega^2$, т. е. величину my^2 , моментом инерции точки относительно оси x -ов. Точно так же и в случае n материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и ординатами $y_1, y_2, \dots, y_n$ мы называем выражение

$$T = \sum_i m_i y_i^2$$

моментом инерции данной системы масс относительно оси x -ов. Момент инерции есть величина, присущая данной материальной системе как таковой независимо от ее состояния движения. Значение момента инерции состоит в том, что, умножая половину квадрата угловой скорости на момент инерции, мы получаем кинетическую энергию этой материальной системы, приведенной во вращательное движение вокруг соответствующей оси, если при этом взаимные расстояния точек системы остаются неизменными. Момент инерции относительно оси играет при вращательных движениях такую же роль, как общая масса материальной системы при прямолинейном движении.

Чтобы определить теперь момент инерции любой кривой $y=f(x)$, покрытой массой плотности 1, между абсциссами x_0 и x_1 , мы поступаем точно так же, как и при определении статического момента; отсюда получается совершенно аналогично следующее определение момента инерции относительно оси x -ов:

$$T = T_x = \int_{x_0}^{x_1} y^2 ds = \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Таким же образом для момента инерции относительно оси y -ов получаем выражение:

$$T_y = \int_{x_0}^{x_1} x^2 ds = \int_{x_0}^{x_1} x^2 \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

§ 3. Примеры.

Теория плоских кривых с их многообразными специальными формами и особенностями дает множество примеров для всех построенных нами понятий. Я не могу однако здесь остановиться подробно на слишком большом числе отдельных деталей и ограничусь лишь некоторыми типичными применениями.

1. Обыкновенная циклоида. Из уравнений (§ 1, 1)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

получаем непосредственно:

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \dot{y} = a \sin t,$$

и отсюда длину дуги

$$s = \int_0^a \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^a \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt.$$

Так как

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

то, подставляя в выражение для s , получаем:

$$s = 2a \int_0^a \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^a = 4a \left(1 - \cos \frac{a}{2}\right) = 8a \sin^2 \frac{a}{4}.$$

Рассмотрим в частности длину дуги между двумя последовательными точками заострения циклоиды. Для этого полагаем $a = 2\pi$, так как эта длина дуги циклоиды соответствует полному обороту катящегося круга. Мы получаем $8a$, т. е. длина циклоиды между двумя последовательными точками заострения равна учетверенному диаметру катящегося круга.

Таким же образом вычисляется площадь, содержащаяся между дугой циклоиды и осью x -ов:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} y \dot{x} dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3a^2\pi, \end{aligned}$$

т. е. вычисленная площадь равна утроенной площади катящегося круга.

Для радиуса кривизны $\rho = \frac{1}{|k|}$ находим:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = 2a \sqrt{2(1 - \cos t)} = 4a \sin \frac{t}{2};$$

в точках $t=0$, $t=\pm 2\pi$ это выражение обращается в нуль; это как раз точки заострения циклоиды, в которых циклоида пересекает ось x -ов под прямым углом.

Поверхность тела вращения, образуемого вращением циклоиды вокруг оси x -ов, получается согласно нашей формуле (стр. 242) в виде:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^{2\pi} y \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 8a^2 \pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16a^2 \pi \int_0^{\pi} \sin^3 u \, du = 16a^2 \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u) \sin u \, du. \end{aligned}$$

Этот интеграл вычисляется с помощью подстановки $\cos u = v$, и мы получаем:

$$F = 16a^2 \pi \left(-\cos u + \frac{1}{3} \cos^3 u \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64a^2 \pi}{3}.$$

В качестве упражнения вычислите сами высоту η центра тяжести над осью x -ов и момент инерции T_x . Результат:

$$\eta = \frac{F}{2\pi s} = \frac{4}{3} a, \quad T_x = \frac{256}{15} a^3.$$

2. Цепная линия. Длину дуги цепной линии мы уже вычисляли в качестве примера в предыдущем параграфе и получили:

$$s = \int_a^b \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a.$$

Для поверхности тела вращения, образуемого вращением цепной линии вокруг оси x -ов, так называемого катеноида, мы получаем:

$$F = 2\pi \int_a^b \operatorname{ch}^2 x \, dx = 2\pi \int_a^b \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx = \pi \left(b - a + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2b - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2a \right).$$

Отсюда получается высота центра тяжести дуги от a до b :

$$\eta = \frac{F}{2\pi s} = \frac{b - a + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2b - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2a}{2(\operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a)}.$$

Наконец для кривизны получаем:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

3. Эллипс и лемниската. Длины дуг этих двух кривых уже не могут быть сведены к элементарным функциям, но выражаются „эллиптическими интегралами“, о которых уже упоминалось в гл. IV, § 7.

Для эллипса

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

мы получаем:

$$s = \frac{1}{a} \int \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = a \int \frac{1 - x^2 \xi^2}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - x^2 \xi^2)}} d\xi,$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad 1 - \frac{b^2}{a^2} = x^2;$$

с помощью подстановки $\frac{x}{a} = \sin \varphi$ мы можем привести этот интеграл к виду:

$$s = \int \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} d\varphi = a \int \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Чтобы получить длину половины эллипса, мы должны изменять здесь x от $-a$ до $+a$, что соответствует интервалу $-1 \leq \xi \leq 1$ и соответственно интервалу $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$.

Для лемнискаты, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r^2 = 2a^2 \cos 2t$, мы получаем аналогично:

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{r^2 + r'^2} dt = \int \sqrt{2a^2 \cos 2t + 2a^2 \frac{\sin^2 2t}{\cos^2 2t}} dt = \\ &= a\sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\cos 2t}} = a\sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 t}}. \end{aligned}$$

Вводя в последний интеграл в качестве независимого переменного $u = \operatorname{tg} t$, получаем:

$$\sin^2 t = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad dt = \frac{du}{1 + u^2}.$$

Вдоль полной петли лемнискаты u изменяется от -1 до 1 , и ее длина поэтому равна:

$$a\sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$

Этот специальный эллиптический интеграл играл большую роль в исследованиях Гаусса.

§ 4. Простейшие задачи механики.

Наряду с геометрией механика была той областью науки, которой в первую очередь интегральное и дифференциальное исчисления обязаны своим возникновением. Механика основывается на нескольких основных принципах, установленных Ньютоном, формулировка которых требует введения понятия производной и использование которых возможно лишь с помощью теории интегрирования. Не вдаваясь в подробный анализ основных принципов, я поясню на простых примерах применение интегрального и дифференциального исчисления в механике.

1. Основные допущения механики. Ограничимся рассмотрением одной материальной точки, т. е. точки, в которой мы представляем себе сконцентрированную некоторую массу величины m ; предположим далее, что движение может происходить исключительно по некоторой заранее заданной фиксированной кривой, на которой положение материальной точки характеризуется длиной дуги s , отсчитываемой от некоторой определенной фиксированной начальной точки; в частности речь может идти о прямой линии, на которой мы тогда вместо s вводим в качестве координаты места абсциссу x . Движение характеризуется заданием координаты $s = \varphi(t)$ в качестве функции от времени t . Под скоростью движения следует понимать производную $\dot{\varphi}(t)$, или, как мы также будем писать:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{\varphi}(t) = \dot{s}.$$

Ускорением мы называем вторую производную

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{\varphi}(t) = \ddot{s}.$$

Механика исходит из того представления, что движение материальных точек может быть объяснено или описано с помощью сил, имеющих определенную величину и направление. Основной закон Ньютона в механике для случая движения по нашей заданной кривой мы выражаем следующим образом: масса m , умноженная на ускорение $\ddot{s}$, равна действующей на материальную точку по направлению кривой силе, или, обозначая силу через S :

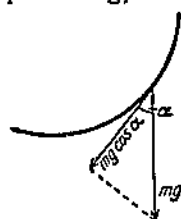
$$m\ddot{s} = S.$$

Направление силы совпадает поэтому всегда с направлением ускорения, так что сила направлена в сторону возрастания значений s , если скорость в этом направлении растет; в противном случае сила направлена противоположно направлению s .

В этом законе Ньютона содержится пока только определение понятия силы. Левая часть нашего равенства является величиной, опреде-

ляемой эмпирически путем наблюдения ускорения, и служит мерой силы. Однако это равенство имеет гораздо дальше идущее значение; опыт показывает, что в очень многих случаях мы можем заранее определить действующие силы, не зная самого движения, исходя из других физических предпосылок; в этом случае приведенный выше основной закон Ньютона является уже не определением силы, но представляет собой соотношение, из которого мы можем делать важные выводы относительно рассматриваемого движения.

Важнейшим примером заранее известной нам силы является сила тяжести. Мы знаем на основании непосредственных измерений, что сила тяжести, действующая на массу m в вертикальном направлении вниз, равна mg , где постоянная g , так называемое ускорение земной силы



Черт. 91.

тяжести, приблизительно равна 981, если время измерять в секундах, а длину в сантиметрах. Если масса движется по заданной кривой, то опыт показывает, что сила тяжести по направлению кривой равна $mg \cos \alpha$, где α означает угол вертикального направления с касательной в соответствующей точке кривой (черт. 91). Основная проблема механики для случая движения по нашей заданной кривой заключается в следующем.

Нам задана каким-нибудь путем сила, действующая на материальную точку, например сила тяжести; требуется определить положение точки, т. е. ее координату s или x , как функцию времени. Ограничимся простейшим случаем, когда сила $S = mf(s)$ ¹⁾ нам заранее известна как функция длины дуги, так что она не зависит от времени; покажем, каким образом мы можем из уравнения

$$\ddot{s} = \frac{1}{m} S = f(s)$$

узнать весь ход движения точки по кривой.

Мы здесь имеем дело с дифференциальным уравнением, т. е. с таким уравнением, из которого требуется определить неизвестную функцию — в данном случае $s(t)$ — и в котором кроме самой этой неизвестной функции содержатся также и ее производные (см. гл. III, § 7).

2. Свободное падение. Трение. При свободном падении материальной точки по вертикальной оси x закон Ньютона дает нам дифференциальное уравнение $\ddot{x} = -g$.

Отсюда следует: $\dot{x}(t) = gt + v_0$, где v_0 есть постоянная интегрирования, значение которой мы получаем, полагая $t = 0$.

¹⁾ Выделение множителя m из выражения для заданной силы делается только ради формальной простоты.

Тогда $\dot{x}(0) = v_0$, т. е. v_0 есть скорость материальной точки в начальный момент отсчета времени, начальная скорость.

Вторичным интегрированием мы получаем:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0,$$

где x_0 есть также постоянная интегрирования, значение которой мы опять получаем, полагая $t=0$; x_0 есть начальная координата, т. е. координата точки в начале движения.

Обратно, мы можем произвольно выбрать начальное положение x_0 и начальную скорость v_0 и получаем тогда в уравнении

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

полное изображение процесса движения.

Если мы хотим учесть влияние действующей на падающую материальную точку силы трения, то мы должны силу трения рассматривать как силу, действующую в направлении, противоположном направлению силы тяжести, и относительно которой мы должны ввести известные физические гипотезы.

Разберем два различных физических допущения:

а) Пусть сила трения пропорциональна скорости; она тогда выражается формулой вида: $-r\dot{x}$, где r есть положительная постоянная.

б) Сила трения пропорциональна квадрату скорости и имеет вид: $-r\dot{x}^2$. В качестве уравнений движения мы получаем тогда согласно основному закону Ньютона:

$$а) \quad m\ddot{x} = mg - r\dot{x},$$

$$б) \quad m\ddot{x} = mg - r\dot{x}^2.$$

Будем рассматривать сначала $\dot{x} = u(t)$ как искомую функцию; тогда

$$\ddot{x}(t) = \dot{u}(t),$$

так что

$$а) \quad m\dot{u} = mg - ru,$$

$$б) \quad m\dot{u} = mg - ru^2.$$

Из этих уравнений мы определяем теперь не u как функцию от t , но, наоборот, t как функцию от u , написав наши уравнения в форме:

$$а) \quad \frac{dt}{du} = \frac{1}{g - \frac{r}{m}u},$$

$$б) \quad \frac{dt}{du} = \frac{1}{g - \frac{r}{m}u^2}.$$

Мы можем тогда с помощью метода интегрирования предшествующей главы выполнить интегрирование и мы получаем:

$$а) \quad t(u) = -\frac{m}{r} \log \left(1 - \frac{r}{mg} u \right) + t_0,$$

$$б) \quad t(u) = -\frac{1}{2} \chi \log \frac{1 - \frac{u}{\chi g}}{1 + \frac{u}{\chi g}} + t_0,$$

где $\chi = \sqrt{\frac{m}{rg}}$, а t_0 есть постоянная интегрирования.

Решая эти уравнения относительно u , мы получаем:

$$а) \quad u(t) = -\frac{mg}{r} \left(e^{-\frac{r}{m}(t-t_0)} - 1 \right),$$

$$б) \quad u(t) = -g\chi \frac{e^{-\frac{2(t-t_0)}{\chi}} - 1}{e^{-\frac{2(t-t_0)}{\chi}} + 1}.$$

Уже из этих уравнений мы усматриваем одно важное свойство наших движений: с возрастанием t скорость не растет неограниченно, но стремится к некоторому определенному, зависящему впрочем от массы m , пределу. Мы получаем в самом деле:

$$а) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{mg}{r},$$

$$б) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \sqrt{\frac{mg}{r}}.$$

Вторичным интегрированием полученных нами выражений мы получаем, как вы это легко можете сделать сами с помощью методов предвещивающей главы и проверить дифференцированием:

$$а) \quad x(t) = \frac{m^2}{r^2} g e^{-\frac{r}{m}(t-t_0)} + \frac{mg}{r} t + c,$$

$$б) \quad x(t) = \frac{m}{r} \log \operatorname{ch} \sqrt{\frac{rg}{m}} (t - t_0) + c,$$

где c есть новая постоянная интегрирования. Обе постоянные интегрирования t_0 и c впрочем тотчас же определяются, если нам известны начальное положение $x(0) = x_0$ и начальная скорость $\dot{x}(0) = u(0) = u_0$ нашей падающей материальной точки в момент $t=0$.

3. Простейшее упругое колебание. В качестве второго примера рассмотрим движение материальной точки, движущейся по оси x -ов и связанной с началом координат упругой силой. Мы предполагаем, что эта упругая сила постоянно направлена в сторону начала и что ее величина пропорциональна расстоянию от начала. Другими словами: мы полагаем силу равной $-kx$, где коэффициент k служит мерой прочности упругой связи. Так как k предполагается положительным, то сила имеет отрицательное значение при положительных значениях x и положительное значение, когда x отрицательно. Уравнение Ньютона в этом случае гласит:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Мы не можем ожидать, что это дифференциальное уравнение вполне определяет процесс движения; наоборот, является более правдоподобным, что в любой определенный момент, например при $t=0$, мы можем произвольно задать начальную координату $x(0)=x_0$ и начальную скорость $\dot{x}(0)=v_0$, т. е., выражаясь физически, мы можем материальную точку вначале привести в любое начальное положение и сообщить ей любую начальную скорость, и уж только тогда процесс движения однозначно определяется согласно уравнению движения. Математически это выражается в том, что самое общее решение нашего дифференциального уравнения содержит две, сначала неопределенные, постоянные интегрирования, которые должны быть определены из обоих начальных условий; докажем, что это на самом деле так. Очень легко дать непосредственно подобное решение. Положим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

тогда наше дифференциальное уравнение удовлетворяется всеми функциями вида:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

где c_1 и c_2 означают произвольно выбранные постоянные; мы в этом легко убедимся дифференцированием. Мы увидим в § 4, что других решений нашего дифференциального уравнения не существует, так что всякое такое движение, совершающееся под влиянием упругой силы, изображается приведенным выше выражением, которое мы можем впрочем легко представить в виде:

$$x(t) = a \cos \omega (t - \delta) = a \cos \omega \delta \cos \omega t + a \sin \omega \delta \sin \omega t,$$

полагая:

$$a \cos \omega \delta = c_1, \quad a \sin \omega \delta = c_2,$$

и вводя таким образом вместо постоянных c_1 и c_2 новые постоянные

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

и

$$\delta = \frac{1}{\omega} \arctg \frac{c_2}{c_1}.$$

Движения этого рода называются чистыми синусоидальными или косинусоидальными колебаниями. Они представляют собою периодические движения; всякое состояние, т. е. положение $x(t)$ и скорость $\dot{x}(t)$, повторяется снова через промежуток $T = \frac{2\pi}{\omega}$, называемый периодом колебания, так как функции $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ имеют период T . Величина a называется амплитудой или максимальным размахом колебания, а число ω — частотой колебания; число ω измеряет быстроту, с которой движение периодически повторяется. В гл. X мы еще вернемся к теории колебаний.

4. Общий случай движения по заданной кривой. Наконец я рассмотрю поставленную выше проблему в ее самом общем виде, именно случай движения по кривой под влиянием произвольной заданной силы $m f(s)$.

Вопрос здесь сводится просто к нахождению функции $s(t)$ в качестве функции от t из дифференциального уравнения

$$\ddot{s} = f(s),$$

где $f(s)$ — данная функция. Это дифференциальное уравнение с неизвестной функцией s можно полностью разрешить, прибегая к следующей уловке.

Рассмотрим сначала любую первообразную функцию $F(s)$ от $f(s)$, так что $F'(s) = f(s)$, и умножим обе части дифференциального уравнения $\ddot{s} = f(s) = F'(s)$ на $\dot{s}$. Мы можем тогда левую часть уравнения написать в виде: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{s}^2 \right)$, в чем мы непосредственно убеждаемся, дифференцируя выражение $\dot{s}^2$; правая же часть $F'(s) \dot{s}$ является как раз производной от $F(s)$ по времени t , если рассматривать в $F(s)$ величину s как функцию от t . Таким образом мы получаем непосредственно:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{s}^2 \right) = \frac{d}{dt} F(s),$$

откуда, интегрируя:

$$\frac{1}{2} \dot{s}^2 = F(s) + c,$$

где c означает еще подлежащую определению постоянную.

Напишем это уравнение в форме:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2[F(s) + c]}.$$

Мы видим, что хотя и нельзя непосредственным интегрированием получить из этого уравнения сразу s как функцию от t , но мы можем зато решить нашу задачу, ограничиваясь сперва нахождением обратной функции $t(s)$, т. е. времени $t = t(s)$, требующегося для того, чтобы материальная точка достигла определенного места s . Для этой функции мы получаем уравнение:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2[F(s) + c]}}.$$

т. е. нам известна производная функции $t(s)$, откуда

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2[F(s) + c]}} + c_1,$$

где c_1 означает новую постоянную интегрирования. Выполнив это последнее интегрирование, мы получаем окончательное решение задачи, так как мы таким путем хотя и не выражаем координату места s как функцию времени, но зато находим обратно выражение времени как функции координаты места s . То обстоятельство, что в нашем распоряжении еще остаются обе постоянные интегрирования c_1 и c_2 , дает нам возможность приспособить общее решение к специальным начальным условиям.

В нашем предшествующем примере упругого движения мы должны x приравнять s , тогда $f(s) = -\omega^2 s$ и соответственно:

$$F(s) = -\frac{1}{2} \omega^2 s^2.$$

Мы получаем таким образом:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2c - \omega^2 s^2}},$$

и отсюда

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2c - \omega^2 s^2}}.$$

Этот интеграл мы можем легко вычислить, вводя в качестве новой переменной $\frac{\omega s}{\sqrt{2c}}$; мы получаем:

$$t = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega s}{\sqrt{2c}} + c_1,$$

или, переходя опять к обратным функциям:

$$s = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \sin \omega(t - c_1).$$

Мы видим, что мы получаем как раз то решение, которое нами было дано выше непосредственно. На этом примере мы снова можем выяснить, каково значение постоянных интегрирования и каким путем они должны быть определены. Если мы например потребуем, чтобы при $t = 0$ материальная точка занимала как раз место $s = 0$ и чтобы ее скорость $\dot{s}(0)$ в этот момент равнялась 1, то мы получаем два уравнения:

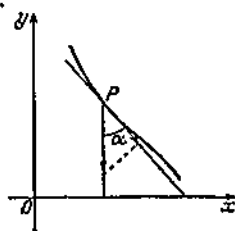
$$0 = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \sin c_1, \quad 1 = \sqrt{2c} \cos c_1,$$

откуда мы получаем для постоянных c_1 и c значения $c_1 = 0$ и $c = \frac{1}{2}$.

Совершенно таким же образом мы можем определить постоянные интегрирования c и c_1 , задавая совершенно произвольно начальное положение s_0 и начальную скорость $\dot{s}_0$ в момент $t = 0$.

§ 5. Дальнейшие применения. Падение материальной точки по кривой.

1. Общие соображения. Изложенный выше метод дает нам возможность особенно просто исследовать движение материальной точки, скользящей под влиянием силы тяжести без трения по некоторой плоской кривой. Я рассмотрю сперва это движение в общем виде и затем остановлюсь на специальных случаях обыкновенного и циклоидного маятников. Выберем систему координат x, y так, чтобы ось y -ов была направлена вертикально вверх, т. е. противоположно направлению силы тяжести, и предположим, что кривая задана с помощью параметра ϑ в параметрическом виде: $x = \varphi(\vartheta) = x(\vartheta)$ и $y = \psi(\vartheta) = y(\vartheta)$, и пусть например x возрастает вместе с ϑ . Часть кривой, движение по которой мы хотим исследовать, приведена на черт. 92. В каждой



Черт. 92.

точке кривой действует на массу m нашей материальной точки направленная вертикально вниз, т. е. противоположно направлению оси y , сила тяжести mg . Обозначим через α угол между вертикальным направлением и касательной к кривой; согласно формулированному в § 4, н° 1 допущению мы получаем, что сила тяжести по направлению кривой равна:

$$mg \cos \alpha = -mg \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

где

$$x' = \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \varphi'(\vartheta), \quad y' = \frac{d\psi}{d\vartheta} = \psi'(\vartheta).$$

(Заметим, что мы обозначаем здесь штрихом не производную по x , а производную по ϑ .)

Введя в частности в качестве параметра вместо ϑ длину дуги s , мы получаем для силы, действующей по направлению кривой, выражение $-mg \frac{dy}{ds}$, и дифференциальное уравнение, определяющее согласно закону Ньютона функцию $s(t)$, гласит:

$$\ddot{s} = -g \frac{dy}{ds}.$$

Справа стоит известная нам функция от s , так как кривая нам задана, и следовательно, величины x и y мы должны рассматривать как известные нам функции от s .

Умножая снова, как в предыдущем параграфе, обе части этого уравнения на $\dot{s}$, мы получаем слева производную от $\frac{1}{2}\dot{s}^2$ по t , а справа производную от $-gy$ по t — мы предполагаем при этом, что в функции $y(s)$ величина s выражена через t , — и находим интегрированием:

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = -gy + c,$$

где c есть постоянная интегрирования. Чтобы заранее установить значение этой постоянной интегрирования, мы предполагаем, что в момент $t=0$ наша материальная точка занимает на кривой место, в котором параметр $\vartheta = \vartheta_0$ и координаты которого суть $x_0 = \varphi(\vartheta_0)$ и $y_0 = \psi(\vartheta_0)$, тогда как скорость движущейся точки в этот момент равна нулю, т. е. $\dot{s}(0) = 0$. Полагая выше $t=0$, мы получаем $-gy_0 + c = 0$, откуда

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = -g(y - y_0).$$

Но, подобно тому как мы можем рассматривать s как функцию от t , можно также рассматривать обратную функцию $t(s)$, и мы получаем для этой функции уравнение

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

равносильное уравнению

$$t = c_1 + \int \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

где c_1 означает новую постоянную интегрирования. Справа стоит под знаком интеграла выражение, известное нам как функция от ϑ , поскольку кривая нам задана. В самом деле, введя ϑ в качестве независимого переменного, мы получаем:

$$t = c_1 + \int \frac{ds}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = c_1 + \int \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y_0 - y)}} d\vartheta,$$

где функции $x' = \varphi'(\vartheta)$, $y' = \psi'(\vartheta)$, $y = \psi(\vartheta)$ суть известные нам функции. Чтобы определить постоянную c_1 , заметим, что при $t=0$ параметр должен равняться ϑ_0 . Мы получаем поэтому наше решение в форме:

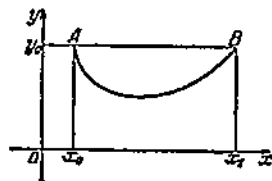
$$t = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y_0 - y)}} d\vartheta$$

Это уравнение выражает с помощью процесса интегрирования время t , требующееся материальной точке для прохождения пути от значения параметра ϑ_0 до значения параметра ϑ . Обратная функция $\vartheta(t)$ определенной таким образом функции $t(\vartheta)$ дает нам возможность полностью описать процесс движения; ибо мы можем для каждого момента t определить точку кривой:

$$x = \varphi[\vartheta(t)], \quad y = \psi[\vartheta(t)],$$

через которую наша движущаяся материальная точка проходит в этот момент.

2. Исследование движения. С помощью наших уравнений мы можем, даже не производя интегрирования посредством элементарных функций, уяснить себе общий характер движения путем простого наглядного исследования.



Черт. 93.

Предположим, что наша кривая имеет указанную на черт. 93 форму, т. е. состоит из дуги, обращенной своей выпуклостью вниз. Если в начале движения материальная точка начинает падать с места A с координатами $x = x_0$, $y = y_0$ и параметром $\vartheta = \vartheta_0$, то ее скорость возрастает, так как ускорение согласно нашему уравнению движения положительно. Материальная точка будет падать до самой нижней точки со все возрастающей скоростью. Но, минуя эту самую нижнюю точку кривой, материальная точка замедляет свое движение, так как ускорение становится отрицательным, ибо правая часть уравнения движения $-g \frac{dy}{ds}$ отри-

пательна. Поэтому скорость опять убывает, и мы видим из уравнения $\dot{s}^2 = -2g(y - y_0)$, что, когда материальная точка в точке кривой B снова достигает своей начальной высоты, скорость обращается в нуль. Так как ускорение попрежнему отрицательно, то материальная точка должна в этом месте возвращаться назад, совершая обратное качание до места A , и этот процесс должен, если не принимать во внимание трения, все время повторяться снова. Время, требующееся материальной точке для совершения этого качания от B к A , должно очевидно равняться времени, в течение которого она совершила первое качание от A к B . Если обозначить время подобного двойного качания туда и обратно через T , то движение будет очевидно периодически повторяться через период T .

Обозначая через ϑ_0 и ϑ_1 значения параметра в точках A и B , мы получим для полупериода нашего колебательного движения следующее выражение:

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{\frac{y^2 + x'^2}{y_0 - y}} d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{\frac{\psi'^2(\vartheta) + \psi''^2(\vartheta)}{\psi(\vartheta_0) - \psi(\vartheta)}} d\vartheta.$$

Если ϑ_2 есть значение параметра в самой нижней точке кривой, то время падения от A до этой нижней точки дается выражением:

$$\sqrt{\frac{1}{2g}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_2} \sqrt{\frac{y^2 + x'^2}{y_0 - y}} d\vartheta.$$

3. Обыкновенный маятник. Простейший пример такого движения дает нам так называемый математический маятник. Здесь заданной кривой является круг радиуса l :

$$x = l \sin \vartheta, \quad y = -l \cos \vartheta.$$

При этом мы отсчитываем угол ϑ от нижней точки. Из написанного выше общего выражения мы получаем непосредственно:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

При этом α означает угол наибольшего отклонения маятника, т. е. угол отклонения в начальный момент, предполагая, что скорость в этот момент равна нулю.

С помощью подстановки

$$u = \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{du}{d\vartheta} = \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

наше выражение для периода колебания маятника принимает вид:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2) \left(1 - u^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Мы выразили таким образом период колебания маятника с помощью эллиптического интеграла.

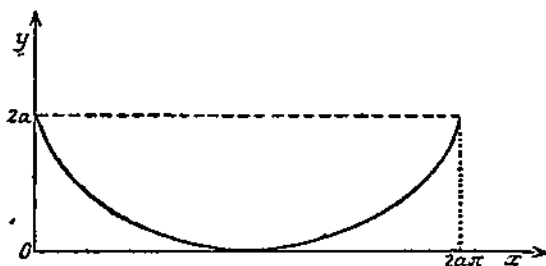
Предположим, что угол наибольшего отклонения α очень мал, так что второй множитель под знаком радикала может быть с достаточной точностью заменен единицей. Мы получаем тогда в качестве приближения периода колебания выражение:

$$2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Этот интеграл мы можем вычислить согласно формуле (13) нашей таблицы интегралов (стр. 179), и мы получаем в качестве приближенного значения T выражение:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

4. Циклоидальный маятник. То обстоятельство, что период колебания обыкновенного маятника не вполне строго независим от угла наибольшего отклонения, побудило



Черт. 94.

Христиана Гюйгенса в связи с его опытами по устройству точных часов искать такую кривую, на которой период колебания был бы строго независим от места кривой, с которого материальная точка начинает свое движение. В качестве такой

кривой Гюйгенсом была получена циклоида.

Для того чтобы материальная точка могла вообще совершать колебания по циклоиде, необходимо, чтобы циклоида была обращена своим

точками заострения в сторону, противоположную направлению силы тяжести, т. е. мы должны циклоиду в том ее положении, в котором мы ее до сих пор рассматривали, перегнуть вокруг оси x -ов (черт. 94). Мы пишем поэтому теперь уравнения циклоиды в форме:

$$x = a(\vartheta - \sin \vartheta), \quad y = a(1 + \cos \vartheta),$$

совершая при этом еще кроме того перемещение на $2a$ в положительном направлении оси y . Время, в течение которого материальная точка проходит по циклоиде путь от точки, находящейся на высоте

$$y_0 = a(1 + \cos \alpha),$$

до самой нижней точки кривой выражается согласно только что полученной формуле так:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{1}{2g}} \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{y_0 - y}} d\vartheta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{\cos \alpha - \cos \vartheta}} d\vartheta.$$

Применяя опять тождество

$$\cos \alpha - \cos \vartheta = 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right),$$

получаем:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} d\vartheta.$$

Мы вычисляем сперва неопределенный интеграл с помощью подстановки

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = u \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = -2 \cos \frac{\alpha}{2} du.$$

Получаем:

$$\int \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} d\vartheta = -2 \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -2 \arcsin u,$$

откуда

$$T = -8 \sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \bigg|_{\alpha}^{\pi} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

так что период колебания T действительно не зависит от угла наибольшего отклонения α .

§ 6. Работа и энергия.

1. Общие замечания. Рассмотренные в предыдущих параграфах вопросы, как и многие другие проблемы механики и физики, получают новое освещение, если ввести понятие работы.

Представим себе опять, что материальная точка движется по кривой под влиянием силы, действующей по направлению этой кривой и что положение точки кривой задается длиной дуги s , отсчитываемой от некоторой начальной точки. Тогда сила будет в общем случае зависеть от s . Мы допускаем, что она является непрерывной функцией от s . Эта функция принимает положительные значения, когда сила направлена в сторону возрастания длины дуги s , и отрицательные, когда сила имеет противоположное направление.

В том случае, когда величина силы, действующей по направлению движения, постоянна, под работой, произведенной силой, подразумевают произведение силы на путь $s_1 - s_0$, пройденный материальной точкой, где s означает конечную, а s_0 — начальную точку движения. Если же сила переменна, то произведенная ею работа должна быть определена с помощью предельного перехода. Для этого мы разбиваем весь интервал от s_0 до s_1 на n равных или неравных частичных интервалов и предполагаем, что в каждом промежуточном интервале сила имеет постоянное значение например, то значение, которое она действительно принимает в некоторой точке σ_i , произвольно взятой в этом интервале. Для такой прерывной силы, изменяющейся скачками от одного интервала к другому, работа выражается суммой

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma_i) \Delta s_i,$$

где под $f(\sigma_1), f(\sigma_2), \dots, f(\sigma_n)$ мы подразумеваем промежуточные значения силы, взятые в первом интервале, втором интервале и т. д., а через $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ обозначаем длины этих интервалов. Если мы теперь совершим предельный переход, заставляя n неограниченно расти, причем максимальная длина частичных интервалов будет стремиться к нулю, то наша сумма согласно определению интеграла будет стремиться к интегралу

$$A = \int_{s_0}^{s_1} f(s) ds,$$

и этот интеграл мы естественным образом рассматриваем как работу произведенную силой при данном движении.

Если направление силы совпадает с направлением движения, то произведенная работа положительна; в этом случае иногда употребляют выра-

жение: „положительно затраченная работа“; если же направление силы и направление движения противоположны, то работа отрицательна; тогда говорят о приобретенной работе¹⁾.

Если мы будем рассматривать координату места s и силу $f(s) = p$ как функции времени t , то на плоскости с прямоугольными координатами s и p точка с координатами $s(t)$ и $p(t)$, зависящими от времени t , опишет некоторую кривую; эту кривую мы называем диаграммой работы рассматриваемого процесса.

В случае периодический повторяющегося явления, как например для всех машин, точка $[s(t), p(t)]$, перемещаясь с изменением параметра t , возвращается через некоторый промежуток T (период) опять к своему исходному положению, т. е. диаграмма работы будет замкнутой кривой. Кривая может при этом состоять просто из одной и той же дуги, пробегаемой туда и обратно, именно в том случае, когда в рассматриваемом явлении сила является однозначной функцией от s и не зависит от t , как например в случае упругих колебаний; однако эта кривая может быть и настоящей замкнутой кривой, ограничивающей некоторую площадь, как например для всякой машины, у которой давление на поршень при его движении вперед отлично от давления, производимого на поршень при обратном движении. Площадь диаграммы работы дает в этом случае величину произведенной работы. Если граница этой площади пробегается при этом в положительном направлении, то соответствующая работа отрицательна; отрицательному же направлению обхода площади соответствует положительная работа. Если кривая состоит из нескольких петель, из которых одни пробегаются в положительном, а другие в отрицательном направлении, то общая величина произведенной работы выражается алгебраической суммой площадей отдельных петель, взятых с соответствующими знаками, и равняется следовательно интегралу

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p(t) \frac{ds}{dt} dt,$$

где промежуток времени от t_0 до $t_0 + T$ является периодом данного движения.

¹⁾ При этом следует помнить, что при этом способе выражения речь идет о работе, производимой действующей силой. Так например при поднимании груза работа силы тяжести отрицательна. С точки же зрения человека, поднимающего этот груз, эту работу следует считать положительной, ибо человек, поднимающий груз, производит работу посредством силы, направленной противоположно силе тяжести.

2. Первый пример: Притяжение масс. В качестве первого примера рассмотрим работу, производимую силой, удаляющей одну материальную точку из сферы притяжения другой материальной точки, предполагая при этом, что сила притяжения подчиняется закону Ньютона, а удаляемая точка движется по прямой, соединяющей данные две точки. Закон притяжения Ньютона гласит, что сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Обозначая это расстояние через r и предполагая притягивающую точку находящейся в покое и помещенной в начале координат, а притягиваемую точку находящейся на расстоянии r от начала, получаем, что сила притяжения выражается формулой:

$$f(r) = -\mu \frac{1}{r^2},$$

где μ — постоянная.

Работа, производимая силой при перемещении точки от расстояния r до расстояния r_1 , выражается поэтому интегралом:

$$-\mu \int_{r_1}^r \frac{ds}{s^2} = \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right).$$

Если мы представим себе конечное положение точки все более и более удаленным от начала, то мы получаем в пределе ту работу, которую нужно произвести против силы притяжения для того, чтобы подвижную точку полностью удалить из сферы притяжения неподвижной точки в „бесконечность“.

Эта работа, равная $\frac{\mu}{r_1}$, является очень важной физической величиной и называется потенциалом. Потенциал следовательно определяется как та работа, которую требуется затратить для того, чтобы совершенно отделить друг от друга две взаимно притягивающиеся точки, как например работа, требующаяся для того, чтобы электрон полностью освободить от связей, удерживающих его внутри атома (ионизационный потенциал).

Если же материальная точка, наоборот, приближается к притягивающей точке под влиянием силы притяжения, т. е. если $r_1 < r$, то при этом движении работа, произведенная силой притяжения положительна.

3. Второй пример. Растягивание пружины. В качестве второго примера рассмотрим работу, производимую при растягивании пружины. Мы делаем обычное в теории упругости допущение (ср. также § 4), что си-

ла, которая требуется для растягивания пружины, пропорциональна удлинению x пружины, т. е. $p = kx$, где k — постоянная. Работа, которую мы должны произвести для того, чтобы привести пружину из положения равновесия $x=0$ в конечное положение $x=x_1$, выражается следовательно интегралом:

$$\int_0^{x_1} kx \, dx = \frac{kx_1^2}{2}.$$

4. Третий пример. Заряжение конденсатора. Аналогично обстоит дело с понятием работы в других областях физики. Рассмотрим например процесс заряжения конденсатора. Обозначим через Q количество электричества на конденсаторе, через C его емкость, через V разность потенциалов на его обкладках. Тогда $Q = CV$.

Если бы разность потенциалов на обкладках конденсатора имела постоянное значение V , то „электрическая работа“, требующаяся для того, чтобы сообщить незаряженному конденсатору количество электричества Q , измерялась бы произведением QV . Но так как при заряжении разность потенциалов возрастает от 0 до V , то мы получаем путем предельного перехода, совершенно аналогичного проведенному нами в п. 1, следующее выражение для работы, затраченной на заряжение конденсатора:

$$\int_0^{Q_1} V \, dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_1} Q \, dQ = \frac{Q_1^2}{2C} = \frac{Q_1 V_1}{2},$$

где Q_1 означает полный заряд электричества, сообщенный конденсатору.

ДОПОЛНЕНИЯ К ПЯТОЙ ГЛАВЕ.

Свойства эволюты.

Приведенное нами выше параметрическое изображение эволюты заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\xi = x - \rho \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \eta = y + \rho \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (\text{см. стр. 240})$$

дает нам возможность вывести некоторые интересные геометрические соотношения между эволютой и данной кривой.

Удобства ради примем за параметр длину дуги s , так что

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 1, & \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} &= k = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{x}}{\dot{y}} \end{aligned}$$

или

$$\rho \ddot{y} = \dot{x} \text{ и } \rho \ddot{x} = -\dot{y}.$$

Поэтому

$$\xi = x - \rho \dot{y}; \quad \eta = y + \rho \dot{x};$$

дифференцируя, получаем:

$$\dot{\xi} = \dot{x} - \rho \ddot{y} - \dot{\rho} \dot{y} = -\dot{\rho} \dot{y}, \quad \dot{\eta} = \dot{y} + \rho \ddot{x} + \dot{\rho} \dot{x} = \dot{\rho} \dot{x}$$

и следовательно

$$\dot{\xi} \dot{x} + \dot{\eta} \dot{y} = 0.$$

Так как направляющие косинусы нормали кривой равны $-\dot{y}$ и $\dot{x}$, то отсюда следует: нормаль кривой касается эволюты в центре кривизны или: касательные к эволюте являются нормальными данной кривой или же: эволюта является „оггибающей“ семейства нормалей данной кривой (черт 95).

Обозначая далее через σ длину дуги эволюты, отсчитываемую на эволюте от любой начальной точки, получаем:

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \dot{\sigma}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2.$$

Из предыдущих формул непосредственно следует, так как

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1,$$

что

$$\dot{\sigma}^2 = \dot{\rho}^2,$$

следовательно при соответственном выборе направления отсчета σ мы получаем) во всяком случае пока $\dot{\sigma}$ остается отличным от нуля):

$$\dot{\sigma} = \dot{\rho}$$

и, интегрируя, получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \rho_1 - \rho_0.$$

Таким образом длина дуги эволюты между двумя точками равна разности соответствующих радиусов кривизны, во всяком случае пока вдоль соответствующей дуги $\dot{\rho}$ остается отличным от нуля.

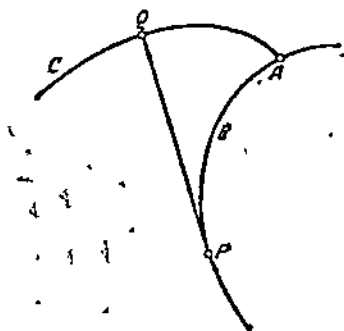
Последнее условие не является излишним: действительно, если $\dot{\rho}$ при переходе через нуль меняет свой знак, так что радиус кривизны достигает максимума или минимума, то при дальнейшем движении точки по эволюте равенство $\dot{\sigma} = \dot{\rho}$ означает, что длину дуги σ следует не просто продолжать считать дальше, но что необходимо при этом дальнейшем

отсчете изменить знак приращения дуги на обратный. Если бы мы пожелали избежать этого, то мы должны были бы изменить знак в нашем равенстве, т. е. положить теперь

$$\dot{\sigma} = -\dot{\rho}.$$

Замечу между прочим, что центры кривизны, соответствующие максимуму или минимуму радиуса кривизны, являются точками заострения (точками возврата) эволюты. (Доказательство я здесь опускаю.)

Найденное нами геометрическое соотношение может быть выражено иначе следующим образом. Представим себе, что вдоль дуги эволюты натянута упругая нерастяжимая нить, часть которой отделяется от кривой и направлена прямолинейно по касательной к кривой; если конец нити Q лежит при этом на первоначальной кривой C , то при развертывании нити точка Q описывает дугу первоначальной кривой. Мы поэтому называем первоначальную кривую C одной из эвольвент (evolvere — развертывать) эволюты E . Это соотношение может быть обращено, т. е. можно исходить от произвольной кривой E и построить эвольвенту C посредством изложенного выше процесса развертывания. Тогда обратно E является эволютой C .



Черт. 95.

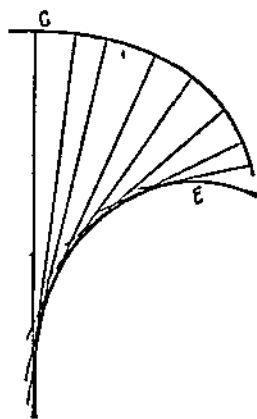
Для доказательства предположим, что кривая E задана уравнениями вида $\xi = \xi(\sigma)$ и $\eta = \eta(\sigma)$, где ξ и η означают текущие прямоугольные координаты, а σ принятую за параметр длину дуги.

Пусть процесс наворачивания происходит следующим образом: при полном наворачивании нити, касающейся кривой в точке P с координатами ξ , η , пусть конец нити Q совпадает с точкой кривой A , которой соответствует длина дуги $\sigma = a$.

Тогда расстояние PQ равно $a - \sigma$, а направляющие косинусы касательной PQ суть $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$, где теперь точки над ξ и η означают дифференцирование по σ . Отсюда получаются для координат x и y точки Q выражения

$$x = \xi + (a - \sigma)\dot{\xi}, \quad y = \eta + (a - \sigma)\dot{\eta},$$

дающие в параметрическом виде эвольвенту, описываемую точкой Q с σ в качестве параметра



Черт. 96.

Дифференцируя по σ , получаем:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\xi} - \dot{\xi} + (a - \sigma)\ddot{\xi} = (a - \sigma)\ddot{\xi}; \\ \dot{y} &= \dot{\eta} - \dot{\eta} + (a - \sigma)\ddot{\eta} = (a - \sigma)\ddot{\eta}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, принимая во внимание, что $\xi\ddot{\xi} + \eta\ddot{\eta} = 0$,

$$\dot{x}\ddot{\xi} + \dot{y}\ddot{\eta} = 0,$$

и это равенство показывает, что прямая PQ является нормалью к эвольвенте C .

Мы можем поэтому сказать: нормали кривой C касаются кривой E . Из этого следует, что E является эволютой линии C ¹⁾, так что всякая кривая является эволютой каждой из своих эвольвент.

В виде примера рассмотрим эволюту циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. Так как

$$\xi = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \quad \eta = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

(см. стр. 239 и сл.), то мы получаем нашу эволюту, выраженную через параметр t в виде

$$\xi = t - \sin t, \quad \eta = -1 + \cos t.$$

Полагая

$$t = \tau + \pi,$$

мы получаем:

$$\xi = \pi - \tau - \sin \tau, \quad \eta + 2 = 1 - \cos \tau,$$

¹⁾ В самом деле, если нормали кривой C : $x = x(s)$, $y = y(s)$ касаются кривой E в точке $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$ (где s — длина дуги кривой C), то направляющие косинусы касательной к кривой E в точке (ξ, η) должны равняться направляющим косинусам $-\dot{y}$, $\dot{x}$ нормали к кривой C в точке (x, y) , откуда следует:

$$\xi\dot{x} + \eta\dot{y} = 0. \quad (A)$$

Так как (ξ, η) лежит на нормали к кривой C в точке (x, y) , то обозначая через r расстояние между этими точками, получаем:

$$\xi = x - r\dot{y}, \quad \eta = y + r\dot{x},$$

откуда, дифференцируя, получаем

$$\dot{\xi} = \dot{x} - \dot{r}\dot{y} - r\ddot{y}; \quad \dot{\eta} = \dot{y} + \dot{r}\dot{x} + r\ddot{x}.$$

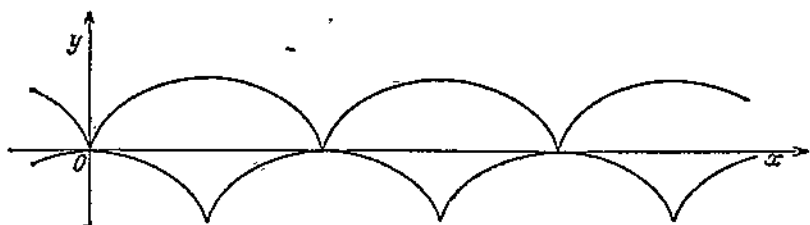
Вставляя эти выражения в уравнение (A) получаем:

$$r(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = 1,$$

заменяя $\ddot{x}$ через $-\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\dot{x}}$, получаем $r = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = r$, т. е. точка (ξ, η) является действительно центром кривизны кривой C в точке (x, y) .

Прим. пер.

и эти уравнения показывают, что эволюта представляет собою опять циклоиду, конгруэнтную первоначальной и получающуюся из последней путем перемещения ее так, как это указано на черт. 97.



Черт. 97.

В качестве следующего примера я выведу уравнение эвольвенты круга. Мы исходим из окружности $\xi = \cos t$, $\eta = \sin t$ и накручиваем на нее касательную, как это указано на черт. 97а.

Мы получаем тогда эвольвенту окружности в форме:

$$x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t,$$

изображенной с помощью параметра t .

Наконец найдем еще эволюту эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Мы получаем:

$$\xi = x - y \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xy - y\dot{x}} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t.$$

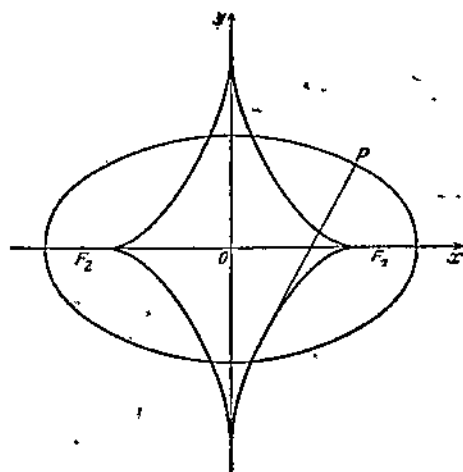
и

$$\eta = y + x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{xy - y\dot{x}} = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

Исключая обычным способом параметр t , мы получаем из найденного параметрического выражения эволюты её уравнение в прямоугольных координатах:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Эта кривая называется астроидой. Ее форма указана на черт. 98. Что центры кривизны вершин эллипса действительно являются точками возврата астроиды впрочем легко усмотреть из параметрического выражения этой кривой.



Черт. 98.

ГЛАВА VI.

ФОРМУЛЫ ТЭЙЛОРА И ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Рациональные функции являются во многих отношениях простейшими функциями анализа; они получаются, если над переменной x произвести конечное число раз рациональные действия, между тем как образование всякой другой функции в конечном счете требует в более или менее замаскированной форме предельного перехода от рациональных функций. Поэтому большое теоретическое и практическое значение имеет вопрос, можно ли заданную функцию $f(x)$ приближенно представить, или, как говорят, аппроксимировать, с помощью рациональных и в особенности с помощью целых рациональных функций.

§ 1. Логарифм и арктангенс.

1 Логарифм. Рассмотрим сперва несколько частных случаев, в которых интегрирование геометрического ряда почти непосредственно приводит нас к требуемому приближенному выражению. Сначала напомним еще раз, что при $q \neq 1$

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + r_n,$$

где

$$r_n = \frac{q^n}{1-q}.$$

В случае $|q| < 1$ остаток r_n стремится с возрастанием n к нулю, и мы получаем, как это было изложено в гл. I (стр. 27) бесконечный геометрический ряд $1 + q + q^2 + \dots$ с суммой $\frac{1}{1-q}$. Теперь рассмотрим формулу:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

и развернем подынтегральное выражение по предыдущей формуле, в которой полагаем $q = -t$. Тогда интегрируя, получаем:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

причем

$$R_n = \int_0^x r_n dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}.$$

Таким образом при любом целом положительном значении n мы приближенно выразили функцию $\log(1+x)$ с помощью целой рациональной функции, именно с помощью функции

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n};$$

остаток R_n указывает, как велика ошибка при этом аппроксимировании.

Чтобы оценить точность этого приближения, нам достаточно только оценить величину остатка R_n ; эту оценку мы сразу же получаем на основании теоремы о среднем значении в интегральном исчислении. Предположим сначала, что $x \geq 0$, тогда подынтегральная функция во всем промежутке интегрирования не отрицательна и меньше, чем t^n . Следовательно

$$|R_n| < \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

и мы видим, что для всех значений x , лежащих в интервале $0 \leq x \leq 1$, этот остаток можно сделать сколь угодно малым, если только выбрать достаточно большое значение n (ср. гл. I, § 5, п° 5).

Если же x лежит в интервале $-1 < x \leq 0$, то подынтегральная функция по абсолютному значению меньше чем $\frac{|t^n|}{1+x}$, и мы получаем следующую оценку остатка:

$$|R_n| < \frac{1}{1+x} \left| \int_0^x t^n dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

Итак мы видим, что и в этом случае остаток сколь угодно мал при достаточно большом значении n ; но наша оценка разумеется неприемлива при $x = -1$.

Окончательно мы можем утверждать, что

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

причем остаток R_n с возрастанием n стремится к нулю, если x лежит в интервале $-1 < x \leq 1$ ¹⁾. Мы можем даже из предыдущих неравенств вывести одну и ту же оценку остатка для всех значений x интервала $-1+h \leq x \leq 1$, где h означает положительное произвольно малое число. Именно

$$|R_n| < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Эта формула показывает, что во всем интервале функция $\log(1+x)$ приближенно представляется многочленом n -ой степени по крайней мере с точностью до $\frac{1}{h(n+1)}$. Предоставляю вам самим доказать, что для значений x , для которых $|x| > 1$, остаток не только не может стремиться к нулю, но должен с возрастанием n неограниченно возрастать по абсолютному значению, так что для этих значений x наши многочлены не дают приближенного выражения логарифмической функции.

Тот факт, что в указанном интервале остаток R_n стремится к нулю с возрастанием n , выражают также следующим образом: в этом интервале логарифм разлагается в бесконечный ряд:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Если в этом ряду положить $x=1$, то получим замечательную формулу:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Это одно из тех соотношений, открытие которых произвело глубокое впечатление на первых исследователей в области дифференциального и интегрального исчисления.

Предыдущее приближенное выражение логарифма приводит к другой формуле полезной во многих отношениях, в особенности для приближенного вычисления; эта формула получается, если образовать выражение

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - R_n^*$$

¹⁾ Следует заметить, что этот интервал слева открыт, а справа замкнут.

и путем вычитания при четном n перейти к равенству

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \bar{R}_n.$$

При этом остаток дается выражением:

$$\bar{R}_n = \frac{1}{2} (R_n + R_n^*) = \frac{1}{2} \int_0^x t^n \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t^2} dt.$$

Допустим, что $-1 < x < 1$, тогда остаток $\bar{R}_n$, в силу соотношения

$$|\bar{R}_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x^2},$$

с возрастанием n стремится к нулю, что мы опять выразим, написав разложение в бесконечный ряд:

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Ar} \operatorname{th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots,$$

имеющее место при $|x| < 1$.

2. Арктангенс. Подобным же образом можно поступить и с функцией $\operatorname{arctg} x$; при этом мы исходим из формулы:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + r_n,$$

где

$$r_n = (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt,$$

и мы тотчас же видим, что в интервале $-1 \leq x \leq 1$ остаток R_n стремится с возрастанием n к нулю, так как по теореме о среднем значении в интегральном исчислении имеем:

$$|R_n| < \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

Из выражения для остатка R_n легко заключить, что при $|x| > 1$, $|R_n|$ с возрастанием n неограниченно возрастает. При $|x| \leq 1$ мы таким образом получаем бесконечный ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

из которого при значении $x=1$ (так как $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$) получается ряд:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Этот результат столь же замечателен, как и предыдущий, полученный для $\log 2$.

§ 2. Формула Тэйлора.

Приближенное выражение с помощью рациональных функций, как в только что рассмотренных частных случаях, можно также получить и в случае произвольной функции $f(x)$, относительно которой мы должны только предположить, что для всех значений из некоторого заданного замкнутого интервала она имеет непрерывные производные по крайней мере до $(n+1)$ -го порядка. В большинстве случаев, с которыми приходится иметь дело, заранее известно, что производные всех порядков существуют и непрерывны, так что в качестве n можно взять любое число натурального ряда. Формула приближенного выражения функции, которую я сейчас выведу, была открыта в начальный период развития дифференциального и интегрального исчисления Тэйлором (Taylor), учеником Ньютона, и носит название формулы Тэйлора ¹⁾.

1. Формула Тэйлора для целых рациональных функций. Для того чтобы ориентироваться, рассмотрим сперва случай, когда функция $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ сама представляет целую рациональную функцию степени n . В этом случае мы можем просто выразить коэффициенты этой функции через производные от $f(x)$ в точке $x=0$. Именно мы дифференцируем наше равенство по x один раз, два раза и т. д. и затем полагаем $x=0$. Таким путем получаем следующие выражения для коэффициентов:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(0), \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

¹⁾ Часто без всяких оснований как по существу, так и в историческом смысле называют частный случай этой формулы формулой Маклорена; мы не будем следовать этому обычаю.

Следовательно всякая целая рациональная функция степени n может быть представлена в виде:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Эта формула указывает только, каким образом коэффициенты a , выражаются через производные в точке нуля.

Мы можем несколько обобщить это „тейлоровское выражение“ целой рациональной функции, если заменим x через $\xi = x + h$ и будем рассматривать функцию $f(\xi) = f(x + h) = g(h)$ как целую рациональную функцию степени n от h , считая пока x постоянным числом, а h независимой переменной. Тогда

$$g'(h) = f'(\xi), \dots, g^{(n)}(h) = f^{(n)}(\xi),$$

следовательно полагая $h = 0$,

$$g'(0) = f'(x), \dots, g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x).$$

Если применим нашу формулу к функции $f(x + h) = g(h)$, которая является целой рациональной функцией степени n от h , то получим формулу Тейлора:

$$f(\xi) = f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

2. Формула Тейлора для любой функции. Полученная формула наводит на мысль искать подобное же выражение и для любой функции $f(x)$, которое в отличие от случая целой рациональной функции может привести нас теперь только к приближенному представлению данной функции с помощью целой рациональной функции.

Мы хотим сравнить между собой значения функции f в точке x и в точке $\xi = x + h$, где h следовательно равно $\xi - x$. Теперь выражение:

$$f(x) + (\xi - x) f'(x) + \dots + \frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

вообще говоря не дает точно значения $f(\xi)$. Мы должны поэтому положить

$$f(\xi) = f(x) + (\xi - x) f'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n,$$

где R_n означает остаток, получающийся при замене $f(\xi)$ выражением $f(x) + (\xi - x) f'(x) + \dots$. Это равенство есть не что иное, как формальное определение выражения R_n . Все значение этого равенства заключается в том, что очень легко найти наглядное и удобное выражение для

остатка R_n . С этой целью представим себе величину ξ постоянной, а x независимой переменной, тогда остаток представляет функцию $R_n(x)$. Эта функция обращается в нуль при $x = \xi$, что непосредственно следует из нашего равенства, определяющего R_n , т. е.

$$R_n(\xi) = 0.$$

Далее путем дифференцирования получаем:

$$R'_n(x) = -\frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x).$$

В самом деле, дифференцируя наше равенство по x , мы слева получаем нуль, так как $f(\xi)$ не зависит от x и поэтому при изменении x остается постоянной; справа мы дифференцируем все слагаемые кроме $R_n(x)$ как произведения и замечаем, что при этом все члены взаимно уничтожаются кроме последнего, написанного выше.

Но согласно основной теореме интегрального исчисления имеем:

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(\xi) = \int_{\xi}^x R'_n(t) dt = - \int_x^{\xi} R'_n(t) dt.$$

Таким образом мы получаем для остатка выражение:

$$R_n(x) = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

которое переходит, если ввести новую переменную интегрирования $\tau = t - x$ в выражение:

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau) d\tau.$$

Формулирую еще раз полученный нами результат: если функция $f(x)$ имеет в рассматриваемом интервале непрерывные производные до $(n+1)$ -го порядка, то имеет место равенство:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n$$

или, что равносильно, при $h = \xi - x$

$$\begin{aligned} f(\xi) = f(x) + (\xi - x)f'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{2!} f''(x) + \dots \\ \dots + \frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n, \end{aligned}$$

где остаток R_n выражается формулой:

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-\tau)^n f^{(n+1)}(x+\tau) d\tau.$$

Если положим в частности $x=0$, а вместо h будем опять писать x , то получим формулу

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n$$

с остатком

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau) d\tau.$$

Наши формулы называются формулами Тэйлора. Они выражают функцию $f(x+h)$ и функцию $f(x)$ с помощью многочлена n -й степени относительно h или относительно x , так называемого аппроксимирующего полинома, и с помощью остаточного члена. Многочлен, дающий приближенное выражение функции, характеризуется тем, что при $h=0$ (или $x=0$) его значение и значения его производных первых n порядков совпадают с соответствующими значениями функции и ее производных первых n порядков. В отличие от формулы Тэйлора для целых рациональных функций¹⁾ здесь существенную роль играет остаточный член и его выражение. Значение формул заключается в том, что этот остаточный член, хотя и имеет более сложную форму, чем остальные члены формулы, все же является удобным орудием для оценки той точности, с которой первые $n+1$ членов формулы

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

выражают функцию $f(x)$.

3. Оценка остаточного члена. Насколько первые $n+1$ членов формулы Тэйлора действительно дают достаточно хорошее приближение к функции, будет конечно зависеть от того, как мал остаточный член; поэтому следует сосредоточить внимание на оценке этого остаточного члена. Естественным средством для такой оценки является теорема о

1) В которой вообще нет остаточного члена.

среднем значении в интегральном исчислении (гл. II, § 7). Применяя эту теорему в виде

$$\int_0^h p(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(\vartheta h) \int_0^h p(\tau) d\tau$$

[причем $p(\tau)$ предполагается непрерывной положительной функцией в промежутке интегрирования, $\varphi(\tau)$ только непрерывной в этом промежутке, а ϑ означает некоторое значение из интервала $0 < \vartheta < 1$] и полагая, во-первых, $p(\tau) = (h - \tau)^n$, во-вторых $p(\tau) = 1$, мы получаем для остаточного члена в первом случае выражение:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \vartheta h),$$

а во втором случае выражение:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!} (1 - \vartheta)^n f^{(n+1)}(x + \vartheta h),$$

имеющее для нас меньшее значение и которое мы приводим здесь только для полноты. В этих формулах ϑ есть некоторое промежуточное значение из интервала $0 < \vartheta < 1$, которое мы точнее не знаем; это промежуточное значение, вообще говоря, конечно различно в обеих формулах для остаточного члена и к тому же зависит от n и x . Первая форма остаточного члена дана Лагранжем, вторая — Коши и соответственно называется остаточным членом в форме Лагранжа и остаточным членом в форме Коши ¹⁾.

¹⁾ Можно впрочем получить эти и еще другие выражения для остаточного члена и прямо из теоремы о среднем значении в дифференциальном исчислении или соответственно из обобщенной теоремы о среднем значении (стр. 176). Нужно применить эту теорему к функции $R_n(x) = R_n(x) - R_n(\xi)$ или соответственно обобщенную теорему к функции

$$\frac{R_n(x) - R_n(\xi)}{(x - \xi)^{n+1}},$$

причем следует рассматривать ξ как постоянную и воспользоваться формулой:

$$R'_n(x) = - \frac{(\xi - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x).$$

При таком выводе формул для остаточного члена больше выделяется характер формулы Тэйлора как обобщения теоремы о среднем значении, кроме того имеется то в теоретическом смысле важное преимущество, что достаточно только предполагать существование, но не непрерывность производной $(n+1)$ -го порядка. Однако при этом приходится отказаться от точного выражения остатка с помощью интеграла.

Интересно прежде всего выяснить, стремится ли остаток R_n с возрастанием n к нулю; если это имеет место, то функция $f(x+h)$ тем точнее выражается соответствующей целой рациональной функцией от h , чем больше n . В этом случае говорят, что функция разлагается в бесконечный ряд Тейлора.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots,$$

или в частности, если положим сперва $x=0$ и затем заменим h через x ,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

В ближайшем параграфе мы познакомимся с примерами такого разложения.

Однако мы сначала отметим вторую существенную точку зрения, вытекающую из рассмотрения формулы Тейлора. Представим себе, что в первой формуле величина h становится все меньше и меньше и стремится к нулю, тогда, пользуясь терминологией гл. III, § 9, порядок исчезания отдельных членов ряда различен; соответственно этому мы называем $f(x)$ членом нулевого порядка, $hf'(x)$ членом первого порядка, $\frac{h^2}{2!} f''(x)$ членом второго порядка и т. д. Форма нашего остаточного члена указывает, что при развертывании до членов n -го порядка мы совершаем ошибку, порядок исчезания которой при $h \rightarrow 0$ равен $n+1$. На этом основаны многие важные применения формулы Тейлора. Мы видим, что аппроксимирующий полином тем лучше представляет функцию $f(x+h)$, чем ближе находится точка $x+h$ к точке x , и что в ближайшей окрестности точки x это приближение может быть улучшено путем увеличения числа n .

§ 3. Применения. Разложение элементарных функций.

Мы воспользуемся общими результатами предыдущего параграфа для того, чтобы приближенно выразить элементарные функции с помощью целых рациональных функций и разложить их в ряды Тейлора. При этом мы однако ограничимся только теми функциями, для которых коэффициенты разложения образуются по простым законам. Разложением в ряды некоторых других функций мы займемся лишь в восьмой главе.

1. Показательная функция. Простейшим примером является показательная функция $f(x) = e^x$. В этом случае все производные тождественны с $f(x)$ и имеют следовательно при $x=0$ значения, равные 1; таким

образом мы непосредственно получаем, пользуясь остаточным членом в форме Лагранжа, согласно § 2 для показательной функции формулу:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Если будем неограниченно увеличивать число n , то остаточный член будет стремиться к нулю, каково бы ни было взятое нами значение x . В самом деле, прежде всего $|e^{\theta x}| < e^{|x|}$. Далее берем целое число m большее, чем $2|x|$. Тогда при $n \geq m$

$$\frac{|x|}{n} < \frac{1}{2};$$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x^m|}{m!} \cdot \frac{|x|}{m+1} \cdots \frac{|x|}{n+1} < \frac{|x^m|}{m!} \frac{1}{2^{n+1-m}} < \frac{|2x|^m}{m!} \frac{1}{2^n},$$

следовательно

$$|R_n| < \frac{|2x|^m}{m!} \cdot e^{|x|} \cdot \frac{1}{2^n};$$

отсюда непосредственно следует наше утверждение, так как первые два множителя, стоящие в правой части, являются независимыми от n постоянными числами, а множитель $\frac{1}{2^n}$ с возрастанием n стремится к нулю.

Если будем рассматривать x не как фиксированное число, а дадим ему возможность изменяться в интервале $-a \leq x \leq a$, где a — постоянное положительное число, то из предыдущего рассуждения, если только выбрать $m > 2a$, следует, что

$$|R_n| < \frac{(2a)^m}{m!} e^a \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Тем самым мы указали для остатка независимую от x , а зависящую только от a грань, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Мы можем следовательно написать следующее разложение в бесконечный ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} \quad 1)$$

и заметить, что это разложение в ряд имеет место для всех значений x . Вместе с тем мы снова подтверждаем, что число e , рассмотренное в

1) Часто употребляемый знак суммирования $\sum_{v=0}^{\infty}$ есть сокращенное обозначение того, что в выражении, стоящем под знаком суммы, надо подставить вместо v все значения $0, 1, 2, \dots$ и затем сложить.

гл. I (стр. 35), совпадает с основанием натуральных логарифмов (гл. III, § 6). Для вычислительных целей мы должны во всяком случае пользоваться формулой Тэйлора с остаточным членом; например при $x=1$ эта формула дает:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^3}{(n+1)!}.$$

Если мы хотим вычислить e с точностью до $\frac{1}{10\,000}$, то нам достаточно выбрать n настолько большим, чтобы остаточный член был меньше чем $\frac{1}{10\,000}$; так как остаточный член меньше чем $\frac{3}{(n+1)!}$ ¹⁾, то достаточно взять $n=7$, так как $8! > 30\,000$. Таким образом находим приближенное значение

$$e = 2,7182,$$

причем ошибка наверное меньше 0,0001.

2. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Для функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ мы получаем следующие формулы²⁾:

$$\begin{array}{llll} f(x) = & \sin x & \cos x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x, \\ f'(x) = & \cos x & -\sin x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x, \\ f''(x) = & -\sin x & -\cos x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x, \\ f'''(x) = & -\cos x & \sin x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x, \\ f^{(IV)}(x) = & \sin x & \cos x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Следовательно в аппроксимирующих полиномах для $\sin x$ и $\operatorname{sh} x$ обращаются в нуль коэффициенты при четных степенях x , а в аппроксимирующих полиномах для $\cos x$ и $\operatorname{ch} x$ обращаются в нуль коэффициенты при нечетных степенях, так что в первом случае $(2n+1)$ -й многочлен

¹⁾ При этом мы предполагаем, что $e < 3$, но это непосредственно вытекает из нашего ряда для e (стр. 35). В самом деле,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

и поэтому

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

²⁾ Если $f(x) = \sin x$ или $f(x) = \cos x$, то можно впрочем n -ую производную всегда представить с помощью выражения:

$$f^{(n)}(x) = f\left(x + n \frac{\pi}{2}\right).$$

и $(2n+2)$ -й многочлен тождественны между собой, а во втором случае $2n$ -й и $(2n+1)$ -й. Представим себе, что мы берем каждый раз высший многочлен, тогда, пользуясь остаточным членом в форме Лагранжа, получаем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \\ + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos(\theta x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \\ + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \operatorname{ch}(\theta x),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \operatorname{ch}(\theta x),$$

причем θ , вообще говоря, в каждой из четырех формул означает различные правильные дроби, которые зависят кроме того от x и n . И в этих формулах можно довести приближение до какой угодно точности, так как остаточный член с возрастанием n стремится к нулю. Таким образом получаем четыре разложения в ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{x^{2v}}{(2v)!},$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!},$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v}}{(2v)!}.$$

Два последних ряда впрочем получаются согласно определению гиперболических функций также формальным путем из разложения в ряд функций e^x .

3. Биномиальный ряд. Мы не станем снова разлагать в ряд с помощью формулы Тэйлора функций $\log(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$, которые мы уже непосредственно изучили в § 1. Но мы должны еще остановиться на обобщении формулы бинома для любых показателей; это обобщение

является одним из плодотворнейших математических открытий Ньютона и представляет вообще один из важнейших примеров разложений в ряд Тэйлора. Речь идет о том, чтобы разложить по формуле Тэйлора функцию:

$$f(x) = (1+x)^a$$

при произвольном положительном или отрицательном, рациональном или иррациональном значении показателя a . То, что мы рассматриваем предьидущую функцию, а не функцию x^2 , объясняется, разумеется, тем, что для функции x^2 в точке $x=0$ не все производные непрерывны, если исключить тривиальный случай целого неотрицательного a . Найдем сперва производные от $f(x)$:

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1}, f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, \dots$$

$$f^{(v)}(x) = a(a-1) \dots (a-v+1)(1+x)^{a-v}.$$

В частности при $x=0$ получаем:

$$f(0) = a, f''(0) = a(a-1), \dots, f^{(v)}(0) = a(a-1) \dots (a-v+1).$$

Таким образом получается формула Тэйлора:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{a(a-1)(a-2) \dots (a-n+1)}{n!} x^n + R_n$$

и нам остается еще исследовать остаточный член. Хотя это и нетрудно сделать, однако задача не так проста, как в ранее рассмотренных случаях. Поэтому я не стану здесь проводить оценки остаточного члена, так как в восьмой главе я дам полное доказательство общей формулы бинома иным, более простым путем. Укажу здесь лишь результат, что во всяком случае при $|x| < 1$ остаточный член с возрастанием n стремится к нулю, и следовательно выражение $(1+x)^a$ может быть в этом случае разложено в бесконечный биномиальный ряд:

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{a}{v} x^v,$$

где для сокращения введены обозначения общих биномиальных коэффициентов

$$\binom{a}{v} = \frac{a(a-1) \dots (a-v+1)}{v!}, \quad \binom{a}{0} = 1.$$

§ 4. Применения к геометрии.

Формула Тэйлора дает нам возможность более точно изучить ход изменения некоторой функции $f(x)$ в окрестности значения $x=a$ или поведение заданной кривой в окрестности некоторой точки, так как она

представляет приращение функции при переходе к соседней точке $x = a + h$ в виде суммы величин первого, второго, третьего порядка и т. д.

1. **Соприкосновение кривых.** Воспользуемся этим, чтобы проанализировать понятие соприкосновения двух кривых. Если две кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в некоторой точке, скажем в точке $x = a$, не только пересекаются, но и имеют общую касательную, то мы говорим, что они в этой точке касаются друг друга. В разложениях Тэйлора функций $f(a + h)$ и $g(a + h)$ совпадают тогда члены нулевого и первого порядка относительно h . Если в точке $x = a$ совпадают между собой также вторые производные от $f(x)$, то мы говорим о соприкосновении второго порядка. В разложениях по формуле Тэйлора совпадают тогда и члены второго порядка и разность $D(x) = f(x) - g(x)$ можно будет представить, если предположить, что производные, по крайней мере до третьего порядка включительно, непрерывны, в виде

$$D(a + h) = f(a + h) - g(a + h) = \frac{h^3}{3!} D'''(a + \theta h) = \frac{h^3}{3!} F(h),$$

причем выражение $F(h)$ при $h \rightarrow 0$ стремится к $f'''(a) - g'''(a)$. Следовательно разность $D(a + h)$ есть бесконечно малая третьего ¹⁾ порядка.

Мы можем продолжать в том же духе; рассматриваем общий случай, когда в формулах Тэйлора для $f(x)$ и $g(x)$ члены до n -го порядка совпадают, причем кроме того предполагаем, что и производные $(n + 1)$ -го порядка еще непрерывны. Если выполнены эти условия, то мы говорим, что кривые имеют в данной точке соприкосновение n -го порядка. Разность обеих функций будет в этом случае иметь вид:

$$f(a + h) - g(a + h) = \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} F(h),$$

где

$$F(h) = D^{(n+1)}(a + \theta h)$$

при $h \rightarrow 0$ стремится к

$$f^{(n+1)}(a) - g^{(n+1)}(a),$$

так как $0 < \theta < 1$. Из этих формул мы видим, что разность $f(x) - g(x)$ в окрестности точки касания будет при $x \rightarrow a$ бесконечно малой тем большего порядка, чем больше n .

Многочлены Тэйлора геометрически определяются просто тем, что они представляют те параболы n -го порядка, которые с кривой, изображающей данную функцию, имеют соприкосновение возможно наивысшего

¹⁾ Или более высокого порядка.

порядка. Поэтому их иногда называют соприкасающимися (или оскулирующими) параболой. Черт. 99 указывает первые соприкасающиеся параболы для кривой $y=e^x$ в точке $x=0$.

Если две кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют соприкосновение n -го порядка, то нашим определением не исключается возможность того, что касание будет и высшего порядка, т. е. может случиться, что и

$$f^{(n+1)}(a) = g^{(n+1)}(a).$$

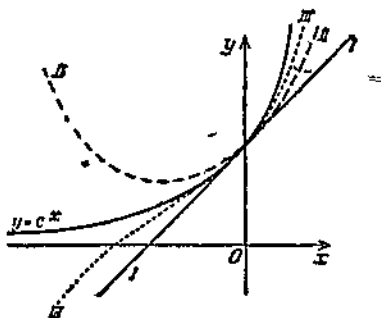
Если этого нет, т. е. если

$$f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a),$$

то мы говорим, что порядок касания¹⁾ в точности равен n .

Из наших формул, а также из чертежа мы можем подметить интересный факт, который начинающие часто упускают из виду. Если точный порядок соприкосновения двух кривых четный, т. е. если совпадает между собой n производных обеих функций (n — четное число), а $(n+1)$ -е производные уже различны, то разность $f(a+h) - g(a+h)$ обеих функций по предыдущей формуле будет иметь для достаточно малых положительных значений h и для столь же малых отрицательных значений h различные знаки. Обе касающиеся кривые будут в точке соприкосновения пересекаться. Этот случай имеет место например при соприкосновении второго порядка, когда производные третьего порядка уже не равны между собой. Если же мы рассмотрим случай соприкосновения нечетного порядка, например случай обыкновенного касания первого порядка, то разность $f(a+h) - g(a+h)$ будет иметь при достаточно малых положительных и отрицательных значениях h тот же самый знак; следовательно обе касающиеся кривые не будут пересекать друг друга в окрестности точки касания. Простейшим примером может служить касание кривой с ее касательной; только в точках, в которых имеем соприкосновение второго порядка, касательная должна пересекать кривую, если только в соответствующей точке не обращается в нуль и производная третьего порядка (или, вообще, все производные до некоторого нечетного порядка включительно), как например у кривой $y=x^4$ в точке $x=0$.

2. Круг кривизны как соприкасающийся круг. В этом порядке идей понятие кривизны в некоторой точке кривой $y=f(x)$ получает новое



Черт. 99.

¹⁾ Что порядок касания двух кривых^{*} есть действительно геометрическая величина, которая не изменяется при повороте системы координат, легко вывести из формул преобразования координат при вращении координатной системы.

наглядное значение. Рассмотрим определенную точку с координатами $x=a$ и $y=b$; через эту точку проходит бесчисленное множество окружностей, которые касаются в этой точке кривой. Центры этих окружностей лежат на нормали к кривой, и каждой точке этой нормали соответствует как раз одна такая касающаяся окружность. Можно ожидать, что при соответствующем выборе центра окружности получится соприкосновение второго порядка между окружностью и кривой. Действительно, в пятой главе мы видели, что для круга кривизны в точке $x=a$, уравнение которого $y=g(x)$, не только $g(a)=f(a)$ и $g'(a)=f'(a)$, но кроме того и $g''(a)=f''(a)$. Итак, круг кривизны является одновременно и соприкасающимся кругом в соответствующей точке, т. е. кругом, который имеет с кривой соприкосновение второго порядка. В предельном случае точки перегиба или вообще точки, в которой кривизна равна нулю, а радиус кривизны бесконечен, круг кривизны вырождается в касательную. Круг кривизны в общем случае, т. е. если случайно порядок соприкосновения не окажется выше второго, не только касается кривой, но и пересекает ее.

3. Применение к теории наибольших и наименьших значений. Мы видели в третьей главе, что функция $f(x)$ достигает в точке $x=a$, в которой $f'(x)=0$, наибольшего значения, если $f''(a)$ имеет отрицательное значение, и наименьшего, если $f''(a)$ имеет положительное значение. Эти условия следовательно являются достаточными условиями для существования наибольшего или наименьшего значения, но они ни в коем случае не являются необходимыми условиями, так как в случае $f''(a)=0$ остаются еще три возможности: $f(a)$ может быть наибольшим значением, наименьшим значением, или ни тем и ни другим. Примеры этих трех возможностей дают нам функции: $y=-x^4$, $y=x^4$ и $y=x^3$ в точке $x=0$. Формула Тэйлора дает нам тотчас же возможность общей формулировки достаточных условий. Нам достаточно только разложить функцию $f(a+h)$ по степеням h ; тогда все сводится к тому, содержит ли первый неисчезающий член четные или нечетные степени h . В первом случае получаем наибольшее или наименьшее значение функции, смотря по тому, будет ли коэффициент при этой степени h отрицательным или положительным числом; во втором случае мы имеем дело с горизонтальной касательной в точке перегиба, и значение функции в этой точке не является ни наибольшим и ни наименьшим. Уясните себе это сами более подробно при помощи остаточного члена ¹⁾.

¹⁾ Впрочем удобнее для применения указанное ранее (стр. 139) необходимое и достаточное условие. Для существования наибольшего или наименьшего значения функции в данной точке необходимо и достаточно, чтобы первая производная $f'(x)$ меняла знак при переходе через эту точку.

ДОПОЛНЕНИЯ К ШЕСТОЙ ГЛАВЕ.

§ 1. Пример функции, не разлагающейся в ряд Тэйлора.

Возможность разложения по формуле Тэйлора с остаточным членом $(n+1)$ -го порядка существенным образом зависит от дифференцируемости функции в соответствующей точке. Поэтому например нельзя по формуле Тэйлора разложить по степеням x функцию $\log x$ или функцию $\sqrt[n]{x}$, производные которых при $x=0$ обращаются в бесконечность.

Для того чтобы возможно было разложить функцию в окрестности некоторой точки в бесконечный ряд Тэйлора, необходимо во всяком случае, чтобы в этой точке существовали производные любого порядка; но это необходимое условие ни в коем случае недостаточно. Функция, все производные которой в некотором интервале непрерывны, может несмотря на это не разлагаться в ряд Тэйлора, т. е. остаточный член R_n формулы Тэйлора может с возрастанием n и не стремиться к нулю, как бы мала ни была область, в которой мы хотим иметь разложение в ряд. Простейший пример такого рода представляет функция:

$$y = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, которую мы уже рассматривали в дополнениях к третьей главе. Функция и все ее производные непрерывны в любом интервале, в частности также в точке $x=0$, и мы видели, что в этой точке все производные равны нулю, т. е. $f^{(n)}(0) = 0$. Следовательно в формуле Тэйлора обращаются в нуль все коэффициенты аппроксимирующего полинома, какое бы число n мы ни взяли, иными словами, остаточный член всегда равен самой функции, следовательно не стремится к нулю, так как функция при всяком $x \neq 0$ имеет положительное значение.

§ 2. Доказательство иррациональности числа e .

Из формулы

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

непосредственно следует, что число e иррационально. Если бы это было не так, т. е. если бы $e = \frac{p}{q}$, где p и q означают целые числа, то мы выбрали бы n больше числа q и в то же время больше 2; тогда $n!e = n! \frac{p}{q}$ было бы целым числом. С другой стороны

$$n!e = 2n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!} + \frac{1}{n+1} e^{\theta}.$$

Так как $e^b < e < 3$, имеем:

$$0 < \frac{e^b}{n+1} < 1.$$

Таким образом целое число $n!e$ должно было бы равняться целому числу

$$2n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1,$$

сложенному с правильной неравной нулю дробью, что невозможно.

§ 3. Нули и бесконечности функций. Неопределенные выражения.

Разложение функции по формуле Тейлора в окрестности точки $x=a$ приводит нас к следующему определению, характеризующему поведение функции в окрестности этой точки. Мы говорим, что функция $f(x)$ при $x=a$ имеет нуль n -й кратности, или что порядок ее обращения в нуль в точности равен n , если $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0, \dots, f^{(n-1)}(a)=0$, а $f^{(n)}(a) \neq 0$. При этом предполагается, что функция в окрестности этой точки имеет непрерывные производные, по крайней мере до n -го порядка включительно. Этим определением мы хотим отметить, что разложение по формуле Тейлора в окрестности этой точки может быть представлено в виде

$$f(a+h) = h^n F(h),$$

причем множитель $F(h)$ при $h \rightarrow 0$ стремится к пределу, отличному от нуля, именно к $f^{(n)}(a)$.

Если функция $\varphi(x)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $x=a$, за исключением самой этой точки, выражением вида

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

причем в точке $x=a$ числитель не обращается в нуль, а знаменатель имеет нуль кратности ν , то говорят, что функция $\varphi(x)$ в точке $x=a$ обращается в бесконечность ν -го порядка. Если в точке $x=a$ числитель имеет нуль кратности μ и $\mu > \nu$, то мы приписываем функции $\varphi(x)$ в этой точке нуль кратности $(\mu - \nu)$; если же $\mu < \nu$, то мы говорим о бесконечности $(\nu - \mu)$ -го порядка.

Между прочим все эти определения согласуются с установленными нами ранее (§ 9, гл. III) определениями, относящимися к поведению функции.

Чтобы придать более точный смысл нашим последним утверждениям, мы представим себе, что числитель и знаменатель разложены по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа в таком виде:

$$\varphi(a+h) = \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{h^\mu f^{(\mu)}(a+\vartheta h)}{h^\nu g^{(\nu)}(a+\vartheta_1 h)},$$

где ϑ и ϑ_1 — два числа, заключенные между 0 и 1, а множители при h^μ и h^ν имеют пределами при $h \rightarrow 0$ соответственно числа $f^{(\mu)}(a)$ и $g^{(\nu)}(a)$, которые отличны от нуля. Тогда при $\mu > \nu$ имеем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\mu-\nu} \frac{f^{(\mu)}(a)}{g^{(\nu)}(a)} = 0,$$

т. е. выражение $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$ есть бесконечно малое $(\mu - \nu)$ -го порядка. При $\nu > \mu$ мы видим, что выражение $\varphi(a+h)$ при $h \rightarrow 0$ обращается в бесконечность $(\nu - \mu)$ -го порядка. В случае $\mu = \nu$ имеем равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(a+h) = \frac{f^{(\mu)}(a)}{g^{(\nu)}(a)}.$$

Содержание последних равенств мы можем выразить в следующей форме. Если числитель и знаменатель некоторой дроби $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ обращаются в нуль при $x = a$, то предел этой дроби при $x \rightarrow a$ определяют просто, дифференцируя числителя и знаменателя одинаковое число раз до тех пор, пока по крайней мере одна из производных при $x = a$ будет отлична от нуля. Если это имеет место одновременно для числителя и знаменателя, то искомый предел равен частному этих двух производных. Если первой, не обращающейся в нуль, производной будет производная от знаменателя, то предел будет равен нулю; если же первой, не обращающейся в нуль, производной будет производная числителя, то дробь неограниченно возрастает.

Таким образом мы получаем правило для определения значений так называемых неопределенных выражений вида $\frac{0}{0}$. В некоторых курсах дифференциального и интегрального исчисления этот вопрос излагается с излишней полнотой. В действительности речь идет только об очень простом определении предела дроби, у которой числитель и знаменатель стремятся одновременно к нулю. Принятый в литературе термин „неопределенные выражения“ является вводящим в заблуждение и неточным способом выражения.

Мы можем впрочем придать нашему рассуждению и несколько иное направление, основываясь не на формуле Тэйлора, а на обобщенной теореме о среднем значении (гл. II, стр. 115)¹⁾. Согласно этой теореме имеет место, если $g'(x) \neq 0$, равенство

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f(a+\vartheta h)}{g'(a+\vartheta h)},$$

где ϑ в числителе и знаменателе одно и то же число; в частности при $f(a)=g(a)=0$ имеем:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+\vartheta h)}{g'(a+\vartheta h)}.$$

При этом ϑ есть некоторое значение из интервала $0 < \vartheta < 1$ и следовательно, если положим $h = \vartheta h$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g'(a+h)}$$

в предположении, что предел выражения, стоящего в правой части, существует. Если $f'(a)$ и $g'(a)$ также равны нулю, то можно продолжать в том же духе, пока не дойдем впервые до такого индекса μ , при котором по крайней мере одна из производных $f^{(\mu)}(a)$ или $g^{(\mu)}(a)$ не равна нулю. Тогда будет иметь место равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(\mu)}(a+h)}{g^{(\mu)}(a+h)},$$

причем включаем и тот случай, когда правая часть имеет „предел, равный бесконечности“.

В качестве примеров рассмотрим:

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{1 - \cos x}{x}, \frac{e^{2x} - 1}{\log(1+x)}, \frac{x^2 \lg x}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

при $x \rightarrow 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \frac{\cos 0}{1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{\sin 0}{1} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\log(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2, \end{aligned}$$

¹⁾ Это видоизменение нашего правила имеет то преимущество, что не приходится пользоваться существованием производной в самой точке $x=a$; далее таким путем охватывается также случай, когда функция $\varphi(x)$ определена только при $x \geq a$, так что предельный переход $x \rightarrow a$ или $h \rightarrow 0$ приходится совершать только с одной стороны.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} \right) \sqrt{1-x^2} = 0.\end{aligned}$$

Заметим далее, что и некоторые другие так называемые неопределенные формы приводятся к нашему случаю. Например предел выражения $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$ как предел разности двух выражений, обращающихся в бесконечность, представляет „неопределенность“ вида $\infty - \infty$. С помощью преобразования

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

мы получаем выражение, предел которого при $x \rightarrow 0$ мы находим с помощью нашего правила:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

§ 4. Задача интерполирования и связь ее с формулой Тэйлора.

Формулу Тэйлора можно рассматривать как предельный случай общей формулы интерполирования, которая не только дает нам возможность глубже заглянуть в самую суть формулы Тэйлора, но и сама по себе имеет важное теоретическое и практическое значение. Я хочу здесь кратко остановиться на этих вещах, тем более что при обычном изложении ими обыкновенно пренебрегают.

1. Постановка задачи и предварительные замечания. Начнем с решения следующей задачи: требуется определить многочлен, т. е. целую рациональную функцию $\varphi(x)$ степени не выше n , который бы в данных $n+1$ различных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ принимал бы соответственно заданные значения $f_0, f_1, \dots, f_n$, т. е.

$$\varphi(x_0) = f_0, \varphi(x_1) = f_1, \dots, \varphi(x_n) = f_n.$$

При этом удобно представить себе заданные значения f_i как значения, принимаемые данной функцией $f(x)$ в точках $x = x_i$, т. е. считать $f_i = f(x_i)$. В этом случае мы назовем многочлен $\varphi(x)$ или $\varphi_n(x)$ интерполирующим многочленом n -ной степени функции $f(x)$ для точек $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Прежде всего замечу, что может существовать самое большое только один такой полином n -ой степени. В самом деле, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ два многочлена такого рода, то их разность $D(x) = \varphi(x) - \psi(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_n$ является многочленом степени n , который обращается в нуль в точках $x_1, \dots, x_n$, следовательно по известной теореме алгебры имеем

$$D(x) = C_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Но так как и $D(x_0) = 0$, т. е.

$$C_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n) = 0,$$

то отсюда следует (ввиду того, что по условию все значения $x_0, x_1, \dots, x_n$ между собой различны), что постоянная $C_0 = 0$ и следовательно все коэффициенты многочлена $D(x)$ равны нулю. Тем самым доказана однозначность интерполирующей функции и ее коэффициентов.

Впрочем мы можем доказать однозначность интерполирующего многочлена еще и другим способом, который непосредственно связан с понятием производной и опирается на общую теорему Ролля. Если функция $F(x)$, имеющая в данном интервале непрерывные производные до n -го порядка включительно, обращается в нуль, по крайней мере в $n+1$ точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ этого интервала, то внутри этого интервала обязательно имеется такая точка ξ , для которой $F^{(n)}(\xi) = 0$, т. е. точка, в которой производная n -го порядка обращается в нуль. Эту вспомогательную теорему легко доказать следующим образом. Представим себе, что значения $x_0, x_1, \dots, x_n$ расположены в порядке возрастания. Тогда по теореме о среднем значении первая производная $F'(x)$ должна обратиться в нуль, по крайней мере по одному разу в каждом из n частных интервалов. То же самое рассуждение, примененное к функции $F'(x)$ и к интервалам между ее корнями, доказывает существование $n-1$ точек, в которых вторая производная $F''(x)$ обращается в нуль; продолжая применять эти рассуждения, мы приходим к нашему утверждению.

Применяя эту теорему к разности $F(x) = D(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, которая по условию обращается в нуль, в $n+1$ точках, мы заключаем, что n -ая производная $D^{(n)}(\xi)$ обращается в нуль в некоторой точке ξ интервала. Но эта производная равна $n! C_0$, следовательно $C_0 = 0$, т. е. разность представляет многочлен $(n-1)$ -й степени, обращающийся в нуль в наших $n+1$ точках. Подобным же образом мы убеждаемся, применяя теорему Ролля к этому многочлену, что $C_1 = 0$; продолжая

таким же путем, мы убеждаемся в том, что и все остальные коэффициенты многочлена $D(x)$ равны нулю, что и выражает однозначность.

2. Построение решения. Подъемы функции. Формула интерполирования Ньютона. Переходим теперь к построению многочлена n -й степени, который удовлетворял бы следующим требованиям: $\varphi(x_0) = f_0, \dots, \varphi(x_n) = f_n$. Чтобы постепенно шаг за шагом построить этот многочлен, мы исходим из постоянной f_0 , многочлена „нулевой степени“, который постоянно, а значит и при $x = x_0$ имеет значение $f_0 = A_0$. К нему прибавляем многочлен первой степени, который обращался бы в нуль при $x = x_0$, т. е. многочлен вида $A_1(x - x_0)$, и определяем A_1 так, чтобы сумма при $x = x_1$ имела бы требуемое значение f_1 . Получающийся в результате многочлен первой степени мы называем $\varphi_1(x)$. Далее мы к $\varphi_1(x)$ прибавляем многочлен второй степени, который обращается в нуль при $x = x_0$ и $x = x_1$, т. е. имеет вид $A_2(x - x_0)(x - x_1)$. Прибавление этого многочлена, следовательно, не изменяет значений в этих точках. Определяем множитель A_2 таким образом, чтобы получающийся многочлен второй степени $\varphi_2(x)$ имел бы и при $x = x_2$ требуемое значение f_2 и т. д. Соответственно этому пишем

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + A_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

и поэтому

$$f(x) = \varphi_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ означает остаток, который во всяком случае обращается в нуль в точках $x = x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Вообще при $v \leq n$ мы полагаем

$$f(x) = \varphi_v(x) + R_v(x),$$

причем остаток $R_v(x)$ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \dots, x_v$. Для того чтобы выразить коэффициенты и остаток в удобной форме, представим себе сначала, что из R_v выделен множитель

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_v),$$

и сообразно с этим пишем:

$$R_v = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_v) f(x, x_v, \dots, x_0)$$

или

$$f(x) = \varphi_v(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_v) f(x, x_v, \dots, x_0).$$

При этом $f(x, x_v, \dots, x_0)$ есть функция от x , которая зависит кроме того от положения точек $x_v, x_{v-1}, \dots, x_0$ и от значений функции $f(x_v), \dots, f(x_0)$. Эта функция пока определена только непрямым путем с помощью предыдущего равенства; однако мы сейчас вычислим ее прямым путем.

Прежде всего заметим, что по определению

$$f(x) = \varphi_v(x) + A_{v+1}(x-x_0) \dots (x-x_v) + \dots,$$

где точками отмечены члены, которые при $x=x_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, v+1$) обращаются в нуль. Если подставим в это равенство и в предыдущее вместо x значение x_{v+1} , то, сравнив результаты, получим:

$$A_{v+1} = f(x_{v+1}, x_v, \dots, x_0).$$

Таким образом мы видим, что вообще имеют место равенства:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_1 = f(x_1, x_0), \quad A_2 = f(x_2, x_1, x_0), \dots, \\ A_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0).$$

Итак решение нашей задачи интерполирования дается следующей формулой, носящей название формулы интерполирования Ньютона:

$$\varphi_n(x) = f(x_0) + f(x_1, x_0)(x-x_0) + \dots \\ \dots + f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}).$$

Чтобы последовательно вычислять коэффициенты A_v , мы пишем с одной стороны:

$$f(x) = \varphi_{v-1}(x) + f(x_v, x_{v-1}, \dots, x_0)(x-x_0) \dots (x-x_{v-1}) + \\ + f(x, x_v, \dots, x_0)(x-x_0) \dots (x-x_v),$$

с другой стороны:

$$f(x) = \varphi_{v-1}(x) + f(x, x_{v-1}, \dots, x_0)(x-x_0) \dots (x-x_{v-1})$$

и, сравнивая, получаем:

$$f(x, x_v, \dots, x_0) = \frac{1}{(x-x_v)} \left\{ f(x, x_{v-1}, \dots, x_0) - f(x_v, x_{v-1}, \dots, x_0) \right\}.$$

Таким образом получаем для наших коэффициентов, так называемых подъемов функции $f(x)$ для точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, следующую систему рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &= f(x_1, x_0) \text{ — первый подъем,} \\ \frac{f(x_2, x_0) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_1} &= f(x_2, x_1, x_0) \text{ — второй подъем,} \\ \frac{f(x_3, x_2, x_0) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_2} &= f(x_3, x_2, x_1, x_0) \text{ — третий подъем,} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{f(x_n, x_{n-2}, x_{n-3}, x_0) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)}{x_n - x_{n-1}} &= f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) \text{ — } n\text{-й подъем.} \end{aligned}$$

Подъемы обладают важным свойством: n -й подъем $f(x_n, \dots, x_0)$ не изменяется, если как угодно переместить между собою аргументы $x_0, \dots, x_n$, или, как говорят, n -й подъем есть симметрическое выражение относительно своих $n+1$ индексов. Доказательство этого свойства непосредственно вытекает из доказанной в п° 1 теоремы об однозначности. В самом деле, выражение $f(x_n, \dots, x_0)$ является коэффициентом наивысшей степени x^n интерполирующего многочлена, а этот многочлен, а следовательно и коэффициент его высшего члена на основании теоремы об однозначности, остается тем же самым, в каком бы порядке мы ни брали точки $x_0, x_1, \dots, x_n$. Для того чтобы выразить подъемы в явном виде, следует заметить, что y -й подъем очевидно является линейной комбинацией значений $f_0, f_1, \dots, f_n$, и что в частности:

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = C_0 f_0 + C_1 f_1 + \dots + C_n f_n,$$

причем C_i зависят только от $x_0, x_1, \dots, x_n$, но не зависят от $f_0, f_1, \dots, f_n$; в силу симметрии C_i и C_k должны поменяться местами, если мы меняем местами x_i и x_k . Но полагая в формуле интерполирования $x = x_n$, мы получаем:

$$f_n = A_0 + \dots + A_{n-1} (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-2}) + \\ + f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Если обратить внимание на то, что в коэффициенты $A_0, \dots, A_{n-1}$ величина f_n не входит, то отсюда можно заключить, что

$$f(x_n, \dots, x_0) = \frac{f_n}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} + \dots,$$

где точками отмечены те члены, в которые f_n не входит. Следовательно $\frac{1}{C_n} = (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})$, и мы вместе с тем на основании свойства симметричности находим искомое явное выражение для n -го подъема в виде:

$$f_n(x_n, \dots, x_0) = \frac{f_n}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} + \dots + \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Простой частный случай формулы Ньютона получается в том случае, когда точки $x_0, \dots, x_n$ лежат на равных расстояниях друг от друга (эквидистантны), т. е. когда

$$x_\nu = x_0 + \nu h, \quad \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда подъемы с точностью до постоянных множителей совпадают с отклонениями разностей $\frac{\Delta^v f}{h^v}$ от функции $f(x)$ ¹⁾. В самом деле, принимая во внимание симметричность подъемов, мы по формулам стр. 292 имеем:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_0) &= \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta^1 f_0}{h}, \\ f(x_2, x_1, x_0) &= f(x_2, x_0, x_1) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \\ &= \frac{\Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0}{2! h^2} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 f_0}{h^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) &= f(x_n, x_0, \dots, x_{n-1}) = \\ &= \frac{f(x_n, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0} = \\ &= \frac{f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)}{nh} = \\ &= \frac{\Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0}{nh(n-1)! h^{n-1}} = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}. \end{aligned}$$

Если введем вместо x новую переменную t с помощью уравнения $x - x_0 = th$ и положим для сокращения:

$$\binom{t}{v} = \frac{t(t-1) \dots (t-v+1)}{v!}$$

(общий биномиальный коэффициент), то наш интерполирующий многочлен примет простой вид:

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = f_0 + \binom{t}{1} \frac{\Delta^1 f_0}{h} h + \binom{t}{2} \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} h^2 + \dots + \binom{t}{n} \frac{\Delta^n f_0}{h^n} h^n.$$

3. Связь между подъемами и производными. Оценка остаточного члена. До сих пор наши рассуждения в сущности не зависели от того, как задаются значения $f_0, f_1, \dots, f_n$. Если эти значения получаются например с помощью физических измерений, то построением многочлена $\varphi(x)$ задача интерполирования полностью разрешается; $\varphi(x)$ представляет насколько возможно простую функцию, принимающую в заранее указан-

¹⁾ С помощью биномиальных коэффициентов можно разность v -го порядка $\Delta^v f_0$ записать следующим образом:

$$\Delta^v f_0 = f_v - \binom{v}{1} f_{v-1} + \binom{v}{2} f_{v-2} - \dots + (-1)^v f_0.$$

что легко доказать методом математической индукции.

ных точках данные значения. Если однако функция $f(x)$ задана заранее, то возникает новая задача; именно нужно оценить разность $R(x) = f(x) - \varphi(x)$, т. е. „ошибку“ при интерполировании. Пока мы только знаем, что все $n+1$ значений $R(x_0), R(x_1), \dots, R(x_n)$ равны нулю. Чтобы иметь возможность сказать больше по поводу $R(x)$, необходимо сделать некоторые допущения относительно функции $f(x)$, а следовательно и относительно $R(x)$. Мы предположим, что функция $f(x)$ имеет в рассматриваемом интервале непрерывные производные по крайней мере до $n+1$ -го порядка.

При этом условии мы сначала докажем вспомогательную теорему, которая имеет важное значение и сама по себе, относительно связи между подъемами и производными.

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

где ξ есть некоторое промежуточное значение между наибольшим и наименьшим из значений x . В самом деле, по теореме Ролля, доказанной в п° 1, существует такое промежуточное значение ξ , что:

$$R^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \varphi^{(n)}(\xi) = 0;$$

но n -я производная многочлена $\varphi_n(x)$ как раз равняется $n! f(x_0, \dots, x_n)$, следовательно получаем:

$$f^{(n)}(\xi) - n! f(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Из найденного соотношения непосредственно вытекает: если все $n+1$ точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ стремятся к совпадению в точке a , то подъем, определяемый выражением $f(x_0, \dots, x_n)$ стремится к значению n -й производной в точке a , деленному на $n!$; в частности это имеет место в том случае, когда вместо подъема берется отношение разностей соответствующего порядка.

С помощью полученного результата мы легко получаем оценку остатка, выражающего ошибку $R(x)$, совершаемую при интерполировании любой функции $f(x)$. Так как этот остаток обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, то естественно записать его в виде:

$$R(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n);$$

теперь мы должны сосредоточить внимание на определении коэффициента A , зависящего от x и от $x_0, x_1, \dots, x_n$. В п° 2 мы видели, что:

$$A = f(x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0),$$

т. е. A является подъемом от $n+2$ аргументов $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. Так как мы предположили, что $f(x)$ имеет производные по крайней мере до $n+1$ -го порядка, то на основании найденного нами соотношения между подъемом и производной получаем:

$$A = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

$$R(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ есть некоторое промежуточное значение между значениями $x, x_0, x_1, \dots, x_n$, которое мы впрочем точнее определить не можем.

Таким образом общая задача интерполирования полностью решена. Вместе с тем мы видим, что наша формула интерполирования переходит почленно в формулу Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа, если все точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ совпадут в одну точку, например в точку 0. Следовательно формулу Тэйлора следует рассматривать как предельный случай формулы интерполирования Ньютона.

В связи с этим приобретает точный смысл принятое в геометрии выражение: соприкасающаяся парабола, имеющая с данной кривой в некоторой точке касание n -го порядка, имеет с данной кривой в этой точке $n+1$ общих „совпадающих“ точек пересечения. Действительно мы получим эту соприкасающуюся параболу, если сперва проведем параболу через $n+1$ различных точек и затем будем неограниченно сближать все эти точки до совпадения в данной точке. Совершенно подобное явление имеет место при соприкосновении любых кривых. Например окружность круга кривизны есть окружность, имеющая с данной кривой три совпадающие точки пересечения.

Формулы интерполирования следует применять в том случае, если хотят представить функцию, значения которой в определенных точках известны, в области, лежащей между этими точками, с более или менее одинаковым приближением. Если точка x лежит вне промежутков между точками $x_0, x_1, \dots, x_n$, то говорят об экстраполировании. При таком экстраполировании можно тем менее рассчитывать на хорошее совпадение результатов, чем дальше точка x находится от промежуточной области. В формуле Тэйлора мы имеем дело известным образом с полным экстраполированием, и в этом именно кроется причина того, что формула Тэйлора часто фактически пригодна только для выражения функции в непосредственной окрестности точки a .

4. Формула интерполирования Лагранжа. В заключение приведу формулу интерполирования к несколько иному виду. Формула в этом виде называется формулой интерполирования Лагранжа и отличается от формулы Ньютона только тем, что отдельные члены расположены не по произведениям разностей, а по значениям f_x самой функции. Мы получим преобразованную формулу интерполирования, исходя из явного выражения для подъема:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \\ + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

Применяя это выражение к подъему $f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ с переменной точкой x , получаем:

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} + \\ + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \dots \\ \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x)(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

Для сокращения введем теперь выражение

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n);$$

это целая рациональная функция $(n+1)$ -й степени, которая нам известна, коль скоро даны точки x_i . Дифференцируя это выражение по правилу дифференцирования произведения и подставляя затем вместо x последовательно $x_0, x_1, \dots, x_n$, получаем соотношения:

$$\psi'(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n), \\ \psi'(x_v) = (x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1})(x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n) \quad (1 \leq v \leq n-1), \\ \psi'(x_n) = (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Теперь мы из предыдущей формулы для $f(x, x_0, \dots, x_n)$ находим непосредственно $f(x)$ в виде:

$$f(x) = \psi(x) \left[\frac{f(x_0)}{(x - x_0)\psi'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x - x_1)\psi'(x_1)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x - x_n)\psi'(x_n)} \right] + R,$$

где остаточный член

$$R = \psi(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

такой же, как и в формуле Ньютона. Это и есть формула интерполирования Лагранжа. Она даёт нам выражение функции $f(x)$ с точностью до остаточного члена R в виде линейной комбинации значений функции $f(x_0), f(x_1), \dots$ с коэффициентами, которые мы сразу можем вычислить, зная точки $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Это Лагранжево выражение n -го интерполирующего многочлена можно и даже легче получить непосредственно, а не окольным путем, ведущим через формулу Ньютона. Достаточно только заметить, что функция $\frac{\psi(x)}{(x-x_v)\psi'(x_v)}$ есть многочлен степени n , принимающий в точке $x=x_v$ значение 1, а в остальных заданных точках x_i — значение нуль. Тогда непосредственно ясно, что предыдущее выражение представляет искомый интерполирующий многочлен.

ГЛАВА VII.

О МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

У того, кто должен применять анализ в качестве орудия при рассмотрении явлений из области физики или техники, возникает вопрос, можно ли и как именно получить из общих теоретических соображений практические средства для действительного выполнения вычислений. Но этот вопрос представляет пожалуй не меньший интерес и с точки зрения теоретика, стремящегося к познанию существующих в природе зависимостей.

Систематическое изложение методов приближенного вычисления можно найти в специальных руководствах¹⁾. Здесь я могу только рассмотреть несколько особенно важных пунктов, более или менее связанных с предстоящим. При этом я подчеркиваю, что всякое приближенное вычисление имеет определенный смысл лишь в том случае, когда оно дополняется оценкой сделанной при этом ошибки, т. е. в том случае, когда имеется уверенность в степени точности результата, полученного при этом вычислении.

§ 1. Приближенное интегрирование.

Мы видели, что даже сравнительно простые функции $f(x)$ не могут быть проинтегрированы с помощью элементарных функций и что не к этой принципиально недостижимой цели стремится интегральное исчисление. С другой стороны определенный интеграл от непрерывной функции действительно существует; возникает поэтому задача найти методы для его приближенного вычисления. Я изложу здесь, опираясь на геометрическую интуицию, наиболее простые и естественные из этих методов, а затем рассмотрю вопрос об оценке погрешности.

Речь идет о вычислении интеграла $J = \int_a^b f(x) dx$. Представим себе, что промежуток интегрирования разделен на n равных частей длины

¹⁾ Runge-König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924 и Whittaker-Robinson, The Calculus of Observations, London 1926.

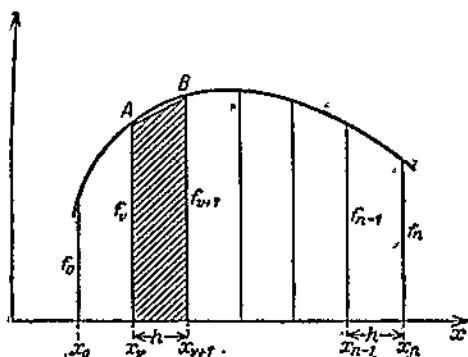
$h = \frac{b-a}{n}$, и обозначим точки деления через $x_0 = a$, $x_1 = a + h, \dots$, $x_n = b$, значения функции в этих точках — через $f_0, f_1, \dots, f_n$, а значения функции в серединах частичных интегралов — соответственно через $f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{3}{2}}, \dots, f_{\frac{2n-1}{2}}$.

Наш интеграл мы рассматриваем как площадь и разбиваем ее обычным путем на полосы ширины h . Теперь все сводится к тому, чтобы приближенно найти площадь каждой такой полосы, т. е. приближенно вычислить интегралы:

$$J = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx.$$

1. Правило прямоугольников. Наиболее грубый и наиболее простой метод для приближенного вычисления J непосредственно связан с определением интеграла; именно мы заменяем площадь полосы J_i площадью прямоугольника $f_i h$ и получаем тогда для интеграла J приближенное выражение ¹⁾:

$$J \approx h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}).$$



Черт. 100.

2. Формула трапеций и формула касательных. Лучшее приближение при той же затрате труда на вычисления получим, если заменим площадь полосы не площадью прямоугольника, а площадью трапеции, изображенной на черт. 100, равной $\frac{1}{2} (f_i + f_{i+1})h$. Для все-

го интеграла получаем в таком случае приближенное выражение (формула трапеции):

$$J \approx h(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + \frac{h}{2}(f_0 + f_n),$$

так как при сложении площадей трапеций каждое из значений функции кроме первого и последнего встречается дважды.

Еще несколько лучше приближение получается, вообще говоря, если заменить полосу J_i не трапецией, ограниченной хордой AB , а трапецией,

¹⁾ Знак $\approx$ означает здесь и в дальнейшем: „приближенно равняется“.

ограниченной сверху касательной к кривой в точке с абсциссой $x_v + \frac{h}{2}$.

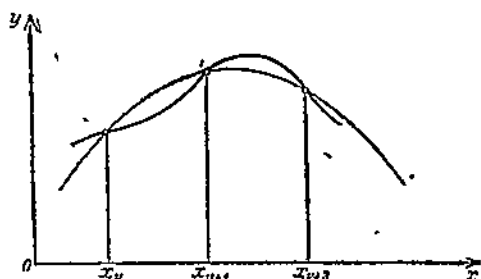
Площадь этой трапеции равна $hf_v + \frac{1}{2}h$, и мы получаем следовательно приближенное выражение интеграла:

$$J \approx h \left(\frac{f_1}{2} + \frac{f_3}{2} + \dots + \frac{f_{2n-1}}{2} \right),$$

формулу касательных.

3. Формула Симпсона. Значительно более точный приближенный результат в общем случае мы получаем при затрате почти такого же количества труда, пользуясь формулой

Симпсона. Эта формула основана на том, что заменяют площадь $J_v + J_{v+1}$ двойной полосы между абсциссами $x = x_v$ и $x = x_v + 2h = x_{v+2}$ площадью, ограниченной сверху не прямолинейно, а дугой параболы, проходящей через 3 точки кривой с абсциссами



Черт. 101.

x_v , $x_{v+1} = x_v + h$ и $x_{v+2} = x_v + 2h$ (черт. 101).

Уравнение этой параболы согласно формуле интерполирования Ньютона (стр. 294) имеет вид:

$$y = f_v + (x - x_v) \frac{f_{v+1} - f_v}{h} + \frac{(x - x_v)(x - x_v - h)}{2} \cdot \frac{f_{v+2} - 2f_{v+1} + f_v}{h^2}.$$

Интегрируя эту целую функцию второй степени в пределах от x_v до $x_v + 2h$, получаем после небольших вычислений для площади, находящейся под дугой параболы, выражение:

$$\begin{aligned} \int_{x_v}^{x_v+2h} y dx &= 2hf_v + 2h(f_{v+1} - f_v) + \frac{8h^3 - 2h^3}{2} (f_{v+2} - 2f_{v+1} + f_v) = \\ &= \frac{h}{3} (f_v + 4f_{v+1} + f_{v+2}). \end{aligned}$$

Оно дает искомое приближенное выражение площади $J_v + J_{v+1}$ нашей двойной полосы.

Если будем предполагать $n = 2m$ четным числом, то получим путем

сложения площадей таких полос формулу Симпсона для приближенного вычисления интегралов:

$$J \approx \frac{4h}{3}(f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}) + \frac{2h}{3}(f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}) + \frac{h}{3}(f_0 + f_{2m}).$$

4. Примеры. Применим эти методы к вычислению $\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Разбиваем интервал от 1 до 2 на десять равных частей, т. е. берем $h=0,1$ тогда по формуле трапеций получаем:

$x_1=1,1$	$f_1=0,90909$
$x_2=1,2$	$f_2=0,83333$
$x_3=1,3$	$f_3=0,76923$
$x_4=1,4$	$f_4=0,71429$
$x_5=1,5$	$f_5=0,66667$
$x_6=1,6$	$f_6=0,625$
$x_7=1,7$	$f_7=0,58824$
$x_8=1,8$	$f_8=0,55556$
$x_9=1,9$	$f_9=0,52632$
	сумма 6,18773.
$x_0=1,0$	$\frac{1}{2} f_0=0,5$
$x_{10}=2,0$	$\frac{1}{2} f_{10}=0,25$
	6,93773 · 0,1
	$\log 2 \approx 0,69377$

Это значение больше истинного, что и можно было ожидать ввиду того, что кривая обращена к оси x -ов своею выпуклостью.

По формуле касательных имеем:

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{1}{2}h &= 1,05 & f_{1/2} &= 0,95238 \\ x_1 + \frac{1}{2}h &= 1,15 & f_{3/4} &= 0,86957 \\ x_2 + \frac{1}{2}h &= 1,25 & f_{5/4} &= 0,8 \end{aligned}$$

$$x_3 + \frac{1}{2}h = 1,35 \quad f_{11/2} = 0,74074$$

$$x_4 + \frac{1}{2}h = 1,45 \quad f_{11/2} = 0,68966$$

$$x_5 + \frac{1}{2}h = 1,55 \quad f_{11/2} = 0,64516$$

$$x_6 + \frac{1}{2}h = 1,65 \quad f_{11/2} = 0,60606$$

$$x_7 + \frac{1}{2}h = 1,75 \quad f_{11/2} = 0,57143$$

$$x_8 + \frac{1}{2}h = 1,85 \quad f_{11/2} = 0,54054$$

$$x_9 + \frac{1}{2}h = 1,95 \quad f_{11/2} = 0,51282$$

$$6,92836 \cdot 0,1$$

$$\log 2 \approx 0,69284$$

Вследствие выпуклости кривой это значение меньше истинного.

Наиболее точный результат при этом же числе делений получаем с помощью формулы Симпсона:

$x_1 = 1,1$	$f_1 = 0,90909$	$x_2 = 1,2$	$f_2 = 0,83333$
$x_3 = 1,3$	$f_3 = 0,76923$	$x_4 = 1,4$	$f_4 = 0,71429$
$x_5 = 1,5$	$f_5 = 0,66667$	$x_6 = 1,6$	$f_6 = 0,625$
$x_7 = 1,7$	$f_7 = 0,58824$	$x_8 = 1,8$	$f_8 = 0,55556$
$x_9 = 1,9$	$f_9 = 0,52632$		
	сумма 3,45955 · 4		сумма 2,72818 · 2
	13,83820		5,45636
			13,83820
	$x_0 = 1,0$	$f_0 = 1,0$	
	$x_{10} = 2,0$	$f_{10} = 0,5$	
			20,79456 · $\frac{1}{30}$
			$\log 2 \approx 0,69315$

В действительности:

$$\log 2 = 0,6931472 \dots$$

5. Оценка погрешности. Во всех наших формулах легко дать оценку погрешности, если известен общий ход изменения производных функций $f(x)$. Пусть $M_1, M_2, M_3, \dots$ верхние грани абсолютных значений производных первого порядка, второго порядка и т. д., т. е. мы предполагаем, что

$|f^{(v)}(x)| < M_v$ во всем интервале. Тогда формулы для оценки погрешности выражаются следующим образом.

В случае правила прямоугольников имеем:

$$|J_v - hf_v| < M_1 h^2 \text{ или } |J - h \sum_{v=0}^{n-1} f_v| < M_1 n h^2 = M_1 (b-a)h,$$

для формулы касательных:

$$|J_v - hf_v + \eta_v| < \frac{M_2 h^3}{24} \text{ или } |J - h \sum_{v=0}^{n-1} f_v + \eta_v| < \frac{M_2}{24} (b-a)h^2;$$

для формулы трапеций:

$$|J_v - \frac{h}{2} (f_v + f_{v+1})| < \frac{M_2 h^3}{12},$$

в случае формулы Симпсона:

$$|J_v + I_{v+1} - \frac{h}{3} (f_v + 4f_{v+1} + f_{v+2})| < \frac{M_4}{90} h^5,$$

а также получаем оценки для всего интеграла J , вытекающие соответственно из двух последних формул. Мы видим, что формула Симпсона дает погрешность более высокого порядка малости относительно h , нежели другие формулы, и поэтому она очень удобна для вычисления, если только M_4 не слишком велико.

Чтобы не утомлять вас проведением доказательств, которые сами по себе очень просты, для всех наших оценок, я ограничусь доказательством для случая формулы касательных. С этой целью мы разлагаем функцию $f(x)$ в v -м интервале по формуле Тейлора:

$$f(x) = f_{v+\eta_v} + \left(x - x_v - \frac{h}{2}\right) f' \left(x_v + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(x - x_v - \frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

где ξ — некоторое промежуточное значение из этого интервала.

Интегрируем правую часть этого равенства в пределах от x_v до $x_v + h$. Тогда интеграл среднего члена равен нулю. Так как

$$\frac{1}{2} \int_{x_v}^{x_v+h} \left(x - x_v - \frac{h}{2}\right)^2 dx = \frac{h^3}{24},$$

то на основании теоремы о среднем значении в интегральном исчислении непосредственно получаем:

$$\left| \int_{x_v}^{x_v+h} f(x) dx - hf_{v+\eta_v} \right| < M_2 \frac{h^3}{24},$$

как мы и утверждали.

§ 2. Применения теоремы о среднем значении и формулы Тэйлора.

1. Исчисление ошибок. В совершенно ином направлении находятся применения к приближенным вычислениям теоремы о среднем значении или в более общем случае формулы Тэйлора с остаточным членом или наконец бесконечного ряда Тэйлора. Рассмотрим сначала в качестве простого, но практически важного примера исчисление ошибок. Оно опирается на лежащее в основании всего дифференциального исчисления положение, что любую дифференцируемую функцию $f(x)$ можно заменить в окрестности какой-либо точки линейной функцией, причем порядок погрешности будет выше первого, или целой функцией второй степени, причем порядок погрешности будет выше второго и т. д. Рассмотрим линейное приближенное выражение функции $y=f(x)$. Если $y+\Delta y=f(x+\Delta x)=f(x+h)$, то по формуле Тэйлора имеем:

$$\Delta y = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi),$$

где $\xi = x + \vartheta h$ ($0 < \vartheta < 1$) — некоторое промежуточное значение, которое нам может быть ближе неизвестно. Если $h = \Delta x$ малая величина, то мы имеем право пренебречь вторым членом и получаем:

$$\Delta y \approx f'(x)h.$$

Иными словами: отношение разностей приближенно заменяют производной, приращение функции приближенно заменяют ее линейной относительно h частью.

Это почти очевидное соображение применяется на практике следующим образом. Пусть две физические величины x и y связаны между собой соотношением $y=f(x)$. Возникает вопрос, какое влияние окажет неточность в измерении величины x на определение величины y . Если вместо „истинной“ величины x из наблюдений получается неточная величина $x+h$, то соответствующее значение y будет отличаться от истинного значения $y=f(x)$ на $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Следовательно приближенно Δy выражается предыдущим соотношением.

Как применяются эти соображения, лучше всего выяснится на нескольких примерах.

1-й пример. Тангенсгальванометр. В случае тангенсгальванометра речь идет о функции $y = c \operatorname{tg} \alpha$, причем α означает угол отклонения магнитной стрелки, c — постоянную, зависящую от прибора, а $y = I$ — силу тока. Имеем:

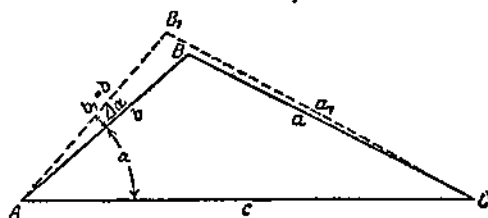
$$dy = \frac{c}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

и приближенно $\Delta y \approx \frac{c}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha$. Точность измерения в процентах выразится так:

$$\frac{100 \cdot \Delta y}{y} \approx \frac{100 \cdot c \Delta \alpha}{c \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{200}{\sin 2\alpha} \Delta \alpha.$$

Мы видим, что относительная точность будет наибольшей, т. е. ошибке в измерении угла на величину $\Delta \alpha$ будет соответствовать наименьшая возможная относительная ошибка при определении силы тока, в том случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{4}$, т. е. когда угол отклонения равен 45° .

Например пусть на приборе возможны отсчеты в $\frac{1}{2}$ градуса, тогда, выражая углы в дуговой мере, имеем $|\Delta \alpha| < \frac{1}{2} \cdot 0,01745, \dots$, и относительная погрешность, выраженная в процентах, равна $\frac{1,745}{\sin 2\alpha}$. Если для α например получен отсчет в 30° , то $\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 1,73205$, и относительная погрешность равна $2 \frac{1,745}{1,732}$, т. е. приблизительно 2% .



Черт. 102.

2-й пример. Пусть в треугольнике ABC (черт. 102) стороны b и c измерены точно, в то время как угол $\alpha = x$ измерен приближенно, причем абсолютное значение погрешности $|\Delta x| < \delta$. Спрашивается, в каких границах лежит

ошибка значения $y = a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

Имеем:

$$\Delta a \approx \frac{1}{a} bc \sin \alpha \Delta \alpha;$$

следовательно относительная погрешность, выраженная в процентах, равна $\frac{100 \cdot \Delta a}{a} = \frac{100 \cdot bc}{a^2} \sin \alpha \Delta \alpha$. Если возьмем в качестве численного примера $b = 400$ м, $c = 500$ м и $\alpha = 60^\circ$, то получаем $y = a = 458,2576$ м и

$$\Delta a \approx \frac{200\,000}{458,2576} \cdot \frac{1}{2} \Delta \alpha;$$

если ошибка в измерении угла не превосходит $10''$, т. е. $\Delta \alpha = 10''$ или $4848 \cdot 10^{-8}$ радианов, то $\Delta a \approx 1,83$ см,

т. е. точность составляет около $0,004\%$.

Если мы хотим увеличить точность, то нам достаточно вместо линейной функции взять по формуле Тэйлора аппроксимирующий многочлен второй или более высокой степени, и мы тогда непосредственно получаем поправки более высокого порядка, вместе с тем и оценки погрешности. Более подробно разберитесь в этом сами.

2. Вычисление π . Ряд Лейбница $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, который мы вывели (гл. VI, § 2, н° 2) из разложения в ряд для арктангенса, неудобен для вычисления π вследствие его медленной сходимости. Однако можно получить сравнительно точный и не требующий большого труда способ вычисления π с помощью следующей уловки. Из теоремы сложения для тангенса $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ вытекает с помощью перехода к обратным функциям $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$, $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} v$ формула:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} u + \operatorname{arc} \operatorname{tg} v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u + v}{1 - uv}.$$

Если выбрать u и v так, чтобы $\frac{u + v}{1 - uv} = 1$, то справа получается значение $\frac{\pi}{4}$; если при этом числа u и v небольшие, то мы можем легко вычислять с помощью известного нам разложения в ряд и левую часть равенства. Если например, как это делал Эйлер, положить $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{3}$, то получаем:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}.$$

Если далее примем во внимание равенство $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{21}} = \frac{1}{2}$, то получим:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7},$$

следовательно:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7},$$

формула, с помощью которой Вега вычислил 140 знаков числа π .

Из равенства $\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{40}} = \frac{1}{3}$ мы далее получаем:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8},$$

следовательно:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8}.$$

Это выражение очень удобно для вычисления π с помощью ряда $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$; в самом деле, подставляя вместо x значения $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ или $\frac{1}{8}$, мы достигаем, взяв только несколько членов суммы, большой точности, так как члены ряда очень быстро убывают. Но можно, если угодно, еще значительно увеличить точность, исходя из формулы:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{120}{119} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239},$$

которая получается с помощью рассуждений аналогичных предыдущим.

3. Вычисление логарифмов. Для вычисления логарифмов целесообразно преобразовать логарифмический ряд $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ ($|x| < 1$) путем подстановки:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p^2}{p^2-1}, \quad x = \frac{1}{2p^2-1}$$

в ряд:

$$\log p = \frac{1}{2} \log (p-1) + \frac{1}{2} \log (p+1) + \frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \dots,$$

причем $2p^2-1 > 1$ или $p^2 > 1$. Этот ряд дает нам возможность в том случае, когда p — целое число, а числа $p-1$ и $p+1$ — составные, выразить логарифм числа p с помощью логарифмов меньших чисел и ряда, члены которого очень быстро убывают; этот ряд можно следовательно вычислить с достаточной точностью, взяв сумму только первых нескольких членов его. Таким образом мы можем с помощью нашего ряда последовательно вычислить логарифмы всех простых чисел и следовательно найти логарифм любого числа, если только предварительно вычислено значение $\log 2$.

Что касается определения степени точности результата при вычислениях с нашими рядами, то целесообразно не возвращаться к общей фор-

муле остаточного члена, а лучше произвести оценку, с помощью геометрического ряда. Для остатка ряда R_n , т. е. для суммы членов, следующих за членом $\frac{1}{n(2p^2-1)^n}$, получаем:

$$R_n < \frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^{n+2}} \left(1 + \frac{1}{(2p^2-1)^2} + \frac{1}{(2p^2-1)^4} + \dots \right) = \\ = \frac{1}{(n+2)(2p^2-1)^n} \cdot \frac{1}{(2p^2-1)^2-1},$$

и эта формула дает нам требуемую оценку погрешности. Вычислим например $\log 7$, используя четыре первых члена ряда. Мы находим:

$$p=7, \quad 2p^2-1=97,$$

$$\log 7 = 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{97} + \frac{1}{3 \cdot 97^3} + \dots,$$

$$\frac{1}{97} = 0,01030928, \quad \frac{1}{3 \cdot 97^3} = 0,00000037,$$

$$2 \log 2 = 1,38629436, \quad \frac{1}{2} \log 3 = 0,54930614,$$

следовательно

$$\log 7 \approx 1,94591015.$$

Оценка погрешности дает:

$$R_n < \frac{1}{5 \cdot 97^3} \cdot \frac{1}{97^2-1} < \frac{1}{36 \cdot 10^9}.$$

Следует еще заметить, что каждое из четырех слагаемых дано с точностью до $\frac{5}{10^9}$, так что последний десятичный знак в указанном значении $\log 7$ может еще подвергнуться изменению на 2. В действительности же верна и последняя цифра.

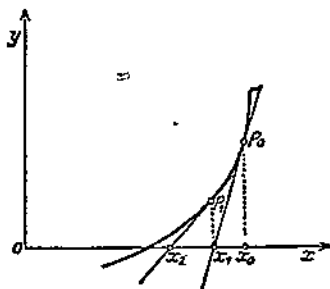
§ 3. Приближенное решение уравнений.

В заключение я хотел бы привести несколько замечаний по поводу приближенного решения уравнений $f(x)=0$, причем $f(x)$ может и не быть целой рациональной функцией ¹⁾. Все приемы вычисления основаны на том, что исходят из какого-либо приближенного значения x_0 корня и приближение затем улучшают. При этом оставляем в стороне вопрос о том, как найдено это приближенное значение искомого корня уравнения и как

¹⁾ Речь идет здесь только об определении действительных корней уравнения $f(x)=0$.

велика степень приближения. Часто первое приближение получают с помощью грубого предварительного подсчета или лучше путем графического изображения функции $y=f(x)$; точки пересечения кривой с осью x -ов дают нам искомые корни (с приближением, зависящим конечно от масштаба и от точности чертежа).

1. Метод Ньютона. Замена кривой линии в ближайшей окрестности точки касания прямой линией, касательной; эта основная идея дифференциального исчисления служит основой следующего метода вычисления, данного Ньютоном. Имея приближенное значение x_0 корня уравнения $f(x)=0$, рассмотрим на кривой $y=f(x)$ точку с координатами $x=x_0$ и $y=f(x_0)$;



Черт. 103.

попытаемся далее, оставаясь возможно ближе к кривой, идти по направлению кривой к точке пересечения ее с осью x -ов. Легче всего достигнуть этого, не вдаваясь в детальное рассмотрение хода кривой, если двигаться по направлению касательной. Абсцисса x_1 точки пересечения касательной с осью x -ов представляет новое, в известных случаях лучшее приближение к искомому корню уравнения.

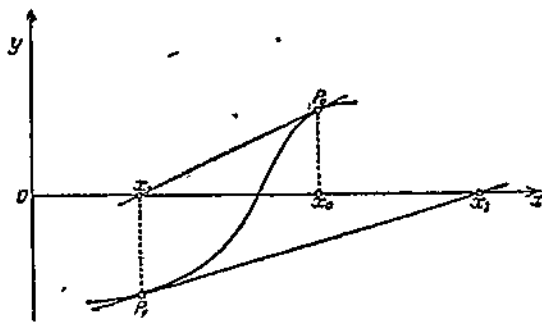
Из черт. 103 на основании геометрического значения производной непосредственно получаем соотношение:

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0).$$

Отсюда получаем формулу для вычисления нового приближенного значения x :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если приближение таким путем улучшено, то можно это значение x_1 снова заменить улучшенным значением x_2 и т. д., и этот процесс дает в том случае, когда кривая имеет форму, изображенную на черт. 103,



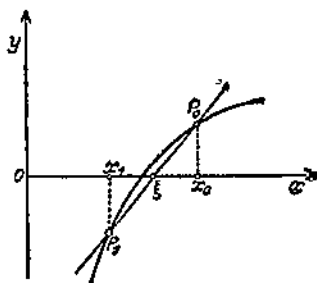
Черт. 104.

значения, все ближе и ближе сходящиеся к искомому значению корня.

Применимость этого метода существенно зависит от хода кривой $y=f(x)$. На черт. 103 мы видим, что, повторяя этот прием несколько

раз, мы получаем все более точные приближенные значения искомого корня. Это объясняется тем, что $f(x_0)$ имеет положительное значение и выпуклость кривой обращена вниз. Однако черт. 104 обнаруживает, что при неудачном выборе начального значения x_0 это построение ни в коем случае не приближает нас к искомому значению корня. Мы видим таким образом, что и при этом способе Ньютона приходится в каждом отдельном случае особо исследовать степень точности найденного решения уравнения.

2. *Regula falsi*. Метод Ньютона, при котором решающую роль играет касательная к кривой, является только предельным случаем более старого способа, называемого *regula falsi*, в котором вместо касательной рассматривается секущая. Допустим, что нам известны две точки x_0, y_0 и x_1, y_1 кривой $y = f(x)$ вблизи искомой точки пересечения кривой с осью x -ов. Заменяя кривую секущей, проходящей через эти две точки, мы можем при известных условиях рассматривать точку пересечения секущей с осью x -ов как лучшее приближение к искомому значению корня уравнения. Если ξ — абсцисса этой точки пересечения, то из черт. 105 получаем уравнение:



Черт. 105.

$$\frac{\xi - x_0}{f(x_0)} = \frac{\xi - x_1}{f(x_1)}$$

и отсюда находим:

$$\xi = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_0 f(x_0) + x_0 f(x_0) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

или

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

Эту формулу, определяющую по значениям x_0 и x_1 следующее приближенное значение ξ , называют *regula falsi*. Эту формулу можно с успехом применять в том случае, когда одно из значений функции положительно, а другое отрицательно, как например на черт. 105, где $y_0 > 0$, а $y_1 < 0$. При последовательном применении она приводит к цели в том случае, если всякий раз брать точки, из которых одной соответствует положительное, а другой отрицательное значение функции; между соответствующими абсциссами непременно должен лежать искомый корень. Предыдущий способ Ньютона получается как предельный случай из этого способа,

если x_1 стремится к совпадению с x_0 . В самом деле, когда x_1 стремится к x_0 , знаменатель второго члена в правой части стремится к $f'(x_0)$.

3. Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

При $x_0 = 2$ значение $f(x_0) = -1$, при $x_1 = 2,1$ значение $f(x_1) = -0,061$; в качестве следующего приближенного значения берем:

$$\xi = \frac{2 \cdot 0,061 - 2,1 \cdot (-1)}{0,061 - (-1)} = 2,0943.$$

Теперь получаем $f(\xi) = -0,0028064982$ и поэтому подставляем далее в нашу формулу $x_0 = \xi = 2,0943$ и $x_1 = 2,1$. Тогда:

$$\xi_1 = 2,0946$$

и

$$f(\xi_1) = 0,00054155.$$

Полагая теперь $x_0 = \xi$, $x_1 = \xi_1$, получаем:

$$\xi_2 = 2,09455,$$

и это значение уже достаточно точное.

ДОПОЛНЕНИЯ К СЕДЬМОЙ ГЛАВЕ.

Формула Стирлинга.

В очень многих приложениях, особенно в статистике и теории вероятностей, встречается необходимость в приближенном представлении с помощью элементарной функции от n выражения $n!$. Такое выражение дает нам формула Стирлинга: при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \rightarrow 1$$

или точнее:

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! \leq \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{4n}}.$$

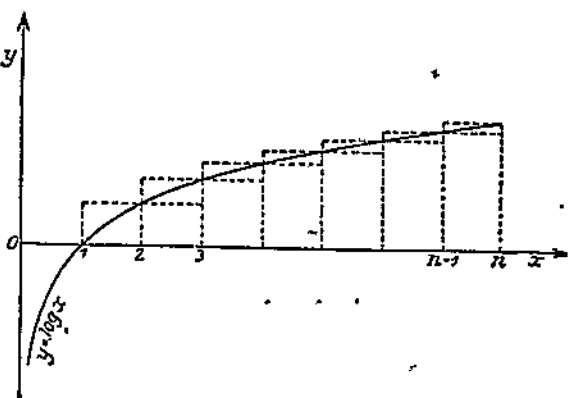
Иными словами, так как $e^{\frac{1}{4n}}$ с возрастанием n стремится к единице, выражение $n!$ тем меньше отличается в смысле относительной погрешности от $\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, чем больше n , или $n!$ „асимптотически“ равняется этому

выражению; вместе с тем множитель $e^{\frac{1}{4n}}$ дает нам оценку достигнутой степени точности.

К этой замечательной формуле мы приходим, если у сравним выражение

$$\log n! = \log 1 + \log 2 + \dots + \log n,$$

пользуясь геометрической интерпретацией, с некоторым интегралом. Именно мы рассмотрим кривую $y = \log x$ при $x \geq 1$. Из черт. 106 мы непосредственно получаем на основании геометрического значения интеграла двойное неравенство:



Черт. 106.

$$\log(n-1)! = \log 2 + \log 3 + \dots + \log(n-1) < \int_1^n \log x dx < \\ < \log 1 + \log 2 + \dots + \log n = \log n!.$$

Так как

$$\int_1^n \log x dx = x(\log x - 1) \Big|_1^n = n \log n - n + 1,$$

то получаем:

$$\log(n-1)! < n \log n - n + 1 < \log n!$$

откуда далее непосредственно следует, что

$$n \log n - n + 1 < \log n! < (n+1) \log(n+1) - n,$$

или

$$e^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n} = n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} e^{-n}.$$

Так как $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ с возрастанием n стремится к e , то естественно

предположить, что $n!$ порядка $n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. В том именно, что это действительно так, и заключается существенное утверждение теоремы Стирлинга.

Чтобы после предварительного наводящего рассуждения действительно доказать эту теорему, мы должны прежде всего показать, что последовательность чисел

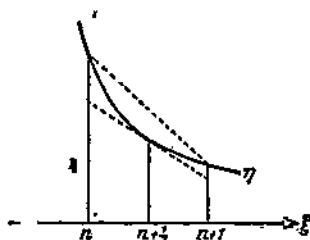
$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

стремится к пределу. Для этого образуем отношение:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}$$

и берем его логарифм:

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$



Черт. 107.

Для оценки этой величины мы рассмотрим гиперболу, $y = \frac{1}{x}$, часть которой между абсциссами $\xi = n$ и $\xi = n + 1$ изображена на черт. 107 в несколько увеличенном масштабе по оси y . Кривая обращена выпуклостью вниз. Следовательно площадь, лежащая под кривой и ограниченная ординатами $\xi = n$ и $\xi = n + 1$ и осью ξ , больше соответствующей площади трапеции, лежащей под

касательной к кривой, проведенной в точке $\xi = n + \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$,

и меньше площади трапеции, лежащей под изображенной на чертеже секущей.

Так как площадь, находящаяся под кривой, равна $\log(n + 1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, то непосредственно получаем соотношение:

$$0 < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}\right) - \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

или, умножая на $n + \frac{1}{2}$,

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{n + \frac{1}{2}}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}\right) - 1;$$

преобразуя правую часть, получаем:

$$0 < \log \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right),$$

следовательно

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right)}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что a_n с возрастанием n стремится к пределу $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, так как числа a_n образуют монотонно убывающую последовательность и притом положительны.

Напишем соответствующие соотношения для индексов $n+1, \dots, n+k-1$ и перемножим, тогда получим:

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)},$$

следовательно и по-прежнему

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+k}} < e^{\frac{1}{4n}}$$

для любого положительного k , как бы велико оно ни было. Следовательно

$$1 < \frac{a_n}{a} \leq e^{\frac{1}{4n}}.$$

Наконец, чтобы действительно найти предел α , относительно которого мы пока только доказали, что он существует, вернемся к доказанной в главе четвертой формуле Валлиса или к вытекающей из нее формуле:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

Заменяя в ней $n!$ через $a_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ и $(2n)!$ через $a_{2n} 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}$, тотчас же получаем:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n} \sqrt{2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha \sqrt{2}},$$

или $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Тем самым утверждение, высказанное в начале параграфа, полностью доказано.

Формула Стирлинга помимо ее большого теоретического значения является очень полезной, когда речь идет о приближенном значении $n!$ для больших значений n . Тогда можно не перемножать между собой целые числа, а вычислить с помощью таблицы логарифмов выражение Стирлинга. Так например, при $n=10$, пользуясь семизначными таблицами логарифмов, находим $n! \approx 3\,598\,700$, между тем как точное значение $n! = 3\,628\,800$. Относительная ошибка составляет $\frac{5}{8} \%$.

ГЛАВА VIII.

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ И ДРУГИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

Геометрический ряд, разложение в ряд Тейлора и ряд частных примеров, с которыми мы встретились на протяжении этого курса, естественно приводят нас к тому, чтобы изучить с несколько более общей точки зрения те предельные переходы, которые носят название бесконечных рядов. В сущности всякий предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

можно записать в виде бесконечного ряда; достаточно только положить $s_n = s_{n-1} + a_n$ и $s_1 = a_1$, тогда

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

и значение S является пределом суммы s_n , состоящей из n слагаемых. Этот факт выражают следующими словами: S есть „сумма бесконечного ряда“:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Таким образом бесконечный ряд представляет только такую форму выражения предела, при которой каждое следующее приближенное значение получается из предыдущего просто путем прибавления дальнейшего члена ряда. Например принцип изображения числа в виде десятичной дроби есть не что иное как представление числа a в виде бесконечного ряда: $a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, причем $a_n = a_n \cdot 10^{-n}$, а a_n означает одно из чисел от 0 до 9 (при этом предполагается, что $0 \leq a \leq 1$). Ввиду того что всякий предел можно представить в виде бесконечного ряда, можно было бы считать излишним особое рассмотрение рядов; оказывается однако, что во многих случаях пределы само собой получаются в виде бесконечных рядов и что при этом получаются особенно простые закономерности. Разумеется не всякое разложение в ряд обнаруживает простые закономерности; например число π можно конечно представить в виде бесконечной десятичной дроби, но мы не знаем простого закона, который дал бы нам возможность указать произвольную, скажем 7 000-ую цифру этого разложения; однако, если мы откажемся от пред-

ставления π в виде десятичной дроби, а возьмем для этого например ряд Лейбница, то получим выражение с чрезвычайно простым общим законом образования.

Совершенно аналогично как с бесконечными рядами, у которых приближение к пределу происходит путем постоянного прибавления новых членов, обстоит дело и с бесконечными произведениями, где приближение к пределу происходит путем умножения на дальнейшие множители. Впрочем мы в дальнейшем только мимоходом коснемся вопроса о бесконечных произведениях. Эта глава и следующая будут главным образом посвящены бесконечным рядам.

§ 1. Понятие сходимости и расходимости.

1. Основные понятия. Рассмотрим бесконечный ряд, „общий член“ которого обозначим через a_n ¹⁾; тогда ряд имеет вид:

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{v=1}^{\infty} a_v.$$

Знак суммирования, как и раньше, означает, что вместо v надо подставить по порядку все числа 1, 2, 3, ... и затем суммировать.

Смотря по тому, стремится ли „ n -ная частичная сумма“

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{v=1}^n a_v,$$

с возрастанием n к пределу

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

или нет, ряд называется сходящимся или расходящимся; в первом случае мы называем S суммой ряда.

С примерами сходящихся рядов мы уже встречались неоднократно: геометрический ряд $1 + q + q^2 + \dots$ с суммой $\frac{1}{1-q}$, если $|q| < 1$, ряд Лейбница, ряд для $\log 2$ или для e и другие.

Общий признак сходимости Коши (см. гл. I, § 6) гласит:

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы число

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m|$$

¹⁾ Из соображений формального характера мы при этом допускаем, что некоторые из чисел a_n могут равняться нулю. В том случае, когда все a_n , начиная с N , т. е. при $n > N$, равны нулю, мы говорим, что ряд обрывается (конечный ряд).

было сколь угодно малым, если только m и n выбраны достаточно большими ($m > n$). Иными словами: сходимость ряда имеет место в том и только в том случае, если выполнено следующее условие: какое бы малое число $\varepsilon > 0$ мы ни задали, всегда можно выбрать такой индекс $N = N(\varepsilon)$ (который, вообще говоря, при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно возрастает), что предыдущее выражение $|s_m - s_n|$ окажется меньше ε , если только $m > N$ и $n > N$, независимо от того, как мы эти два числа m и n выбираем.

Выясним значение критерия сходимости, например на геометрическом ряде, считая $q = \frac{1}{2}$. Берем $\varepsilon = \frac{1}{10}$, тогда достаточно взять $N = 4$. В самом деле

$$|s_m - s_n| = \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n}} \right) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

и $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{10}$, коль скоро $n \geq N = 5$.

Если зададим $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то достаточно взять для N число 8, как вы сами легко проверите.

Ясно, что для сходимости ряда необходимо, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

так как в противном случае не выполнялся бы критерий сходимости. Но это необходимое условие ни в коем случае не является достаточным для сходимости ряда. Очень легко указать бесконечные ряды, общий член a_n которых с возрастанием n стремится к нулю, для которых сумма не существует, так как частичная сумма s_n с возрастанием n неограниченно возрастает. Примером может служить ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

общим членом которого является $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Очевидно, что

$$s_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

следовательно с возрастанием n , n -ая частичная сумма неограниченно возрастает, и поэтому ряд расходится.

То же имеет место и в классическом примере гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Действительно,

$$a_{n+1} + \dots + a_{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ввиду того что n и $m = 2n$ можно взять произвольно большими, ряд расходится, так как не выполняется критерий Коши. При этом ряд очевидно расходится к бесконечности, так как все члены ряда положительны. Напротив ряд с чередующимися знаками (знакопеременный ряд), составленный из тех же чисел,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

сходится и сумма его равна $\log 2$ (см. гл. VI стр. 270). Расходимость ряда не всегда выражается в том, что s_n с возрастанием n неограниченно возрастает. Так у ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

мы видим, что s_n поочередно принимает значения 1 и 0 и поэтому не стремится к определенному пределу.

Сделаю еще следующее, правда очевидное, но принципиально важное замечание по поводу сходимости или расходимости бесконечного ряда: сходимость или расходимость ряда не нарушается, если к ряду прибавить или отнять от него конечное число членов. Следовательно, что касается вопроса о сходимости или расходимости ряда, совершенно безразлично, начинается ли ряд с a_0 или с a_1 или с a_2 или с любого другого члена.

2. Абсолютная и условная сходимость. Ряд, члены которого $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, расходится, если все эти члены имеют положительные знаки, и сходится, если знаки членов чередуются. По-иному обстоит дело у геометрического ряда, где при $|q| < 1$ одновременно с рядом $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v q^v = \frac{1}{1+q}$ сходится и ряд $\sum_{v=0}^{\infty} q^v$ и представляет число $\frac{1}{1-q}$.

Здесь обнаруживается различие, которое мы должны несколько ближе изучить. Для ряда, все члены которого положительны, возможны оче-

видно только два случая: либо ряд сходится, либо частичные суммы s_n с возрастанием n неограниченно возрастают. В самом деле, частичные суммы представляют монотонно возрастающую последовательность и следовательно должны сходиться, если только остаются ограниченными. Сходимость имеет место в том случае, когда члены ряда с возрастанием n достаточно быстро стремятся к нулю, расходимость же в том случае, когда члены вообще не стремятся к нулю или же слишком медленно стремятся к нулю. Но у рядов, члены которых частью положительны, частью отрицательны, сходимость может быть обусловлена этим различием знаков, именно слишком быстрое возрастание частичных сумм благодаря положительным членам компенсируется отрицательными членами, так что в окончательном счете частичные суммы стремятся к некоторому пределу.

Чтобы лучше уяснить себе это обстоятельство, отнесем к ряду $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$

с положительными и отрицательными членами ряд абсолютных значений его членов, т. е. ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots = \sum_{v=1}^{\infty} |a_v|.$$

Если последний ряд сходится, то при достаточно большом значении n и $m > n$ выражение

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m|$$

будет сколь угодно малым; поэтому в силу соотношения

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m|$$

выражение в левой части этого неравенства также будет сколь угодно малым, следовательно обязательно сходится и первоначальный ряд. В этом случае ряд называется абсолютно сходящимся. Сходимость его обуславливается малостью абсолютных значений членов и не зависит от распределения знаков.

Если же ряд абсолютных значений членов расходится, а первоначальный ряд сходится, то этот ряд называется условно сходящимся. Сходимость в этом случае является следствием компенсаций, получающихся благодаря различию знаков.

Относительно условной сходимости приведем здесь только следующую теорему Лейбница, которая часто бывает полезна. Если ряд знакопеременный (т. е. знаки идут чередуясь) и если кроме того абсолютное значение $|a_n|$ с возрастанием

n стремится монотонно к нулю, т. е. $|a_{n+1}| < |a_n|$, то ряд $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ сходится (например ряд Лейбница).

Для того чтобы провести простое доказательство этой теоремы, запишем наш ряд в виде

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots,$$

где все числа b_n положительны и удовлетворяют условию $b_{n+1} < b_n$. Группируя члены следующими двумя способами

$$b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots$$

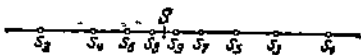
и

$$(b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + (b_5 - b_6) + \dots,$$

мы непосредственно замечаем, что частичные суммы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} s_1 > s_3 > s_5 > \dots > s_{2m+1} > \dots, \\ s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2m} < \dots, \end{aligned}$$

а, с другой стороны, $s_{2n} < s_{2n+1}$ и $s_{2n} < s_{2n-1}$. Следовательно частичные суммы с нечетным индексом образуют монотонно убывающую последовательность чисел, которые однако всегда остаются больше чем s_2 ; поэтому эта последовательность стремится к некоторому пределу G (см. гл. I, § 6). Подобным же образом частичные суммы с четным индексом $s_2, s_4, s_6 \dots$ образуют монотонно возрастающую последовательность чисел, которые во всяком случае меньше постоянного числа s_1 , следовательно эта последовательность должна иметь предел G' . Так как числа s_{2n} и s_{2n+1} отличаются между собой на число



Черт. 103.

b_{2n+1} , стремящееся с возрастанием n к нулю, то оба предела G и G' должны быть равны между собой. Таким образом те и другие частичные суммы стремятся к одному и тому же пределу, который мы теперь обозначим через S (черт. 108). Но это означает, что наш ряд сходится и сумма его равна S .

В заключение сделаем еще одно общее замечание относительно коренного различия между абсолютно и условно сходящимися рядами. Обозначим положительные члены нашего ряда $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ по порядку через $p_1, p_2, p_3, \dots$, а отрицательные через $-q_1, -q_2, -q_3, \dots$. Если образуем n -ую частичную сумму $s_n = \sum_{v=1}^n a_v$, то среди ее слагаемых должно встре-

таться некоторое число, скажем n' , положительных и некоторое число, скажем n'' , отрицательных членов, причем $n' + n'' = n$; далее при неограниченном возрастании n будут неограниченно возрастать и числа n' и n'' , если только в нашем ряду бесконечно большое число как положительных, так и отрицательных членов. Частичная сумма s_n очевидно просто равна

частичной сумме $\sum_{v=1}^{n'} p_v$ ряда положительных членов, сложенной с частичной суммой $-\sum_{v=1}^{n''} q_v$ ряда отрицательных членов. Если заданный ряд сходится абсолютно, то непременно сходится и ряд положительных членов

$\sum_{v=1}^{\infty} p_v$ и ряд отрицательных $\sum_{v=1}^{\infty} q_v$ ¹⁾; следовательно сумма данного

ряда равна сумме рядов, составленных только из положительных и только из отрицательных членов, иными словами: сумма ряда равна разности двух рядов с положительными членами²⁾. Если ряд содержит только конечное число членов определенного знака, то подожжение соответствующим образом упрощается.

Если же данный ряд не абсолютно сходящийся, то оба ряда $\sum_{v=1}^{\infty} p_v$ и

$\sum_{v=1}^{\infty} q_v$ необходимо должны быть расходящимися. В самом деле, если бы

оба ряда были сходящимися, то данный ряд был бы абсолютно сходящимся, что противоречит условию. Если бы только один из рядов,

скажем $\sum_{v=1}^{\infty} p_v$, был бы расходящимся, а другой был бы сходящимся,

то, как следует из разложения $s_n = \sum_{v=1}^{n'} p_v - \sum_{v=1}^{n''} q_v$, данный ряд вообще

1) В самом деле, частичные суммы $\sum_{v=1}^m p_v$ и $\sum_{v=1}^m q_v$ представляют последовательности чисел, монотонно возрастающих вместе с m , которые остаются меньше чем $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|$.

2) Действительно $\sum_{v=1}^n a_v = \sum_{v=1}^{n'} p_v - \sum_{v=1}^{n''} q_v$; с возрастанием n неограниченно возрастают также n' и n'' , следовательно предел левой части должен равняться разности пределов обеих сумм справа

не был бы сходящимся; в самом деле, с возрастанием n число $n!$ и $\sum_{v=1}^n p_v$ неограниченно возрастают, в то время как $\sum_{v=1}^{n!} q_v$ стремится к определенному пределу, поэтому частичная сумма $\sum_{v=1}^n a_v$ с возрастанием n должна неограниченно возрастать.

Итак мы видим, что условно сходящийся ряд нельзя рассматривать как разность двух сходящихся рядов с положительными членами, составленных из членов этого ряда. С этим тесно связано еще дальнейшее различие между абсолютно сходящимися и условно сходящимися рядами, на котором я хотел бы теперь несколько остановиться.

3. Об изменении порядка членов в ряду. Конечные суммы обладают тем свойством, что в них можно произвольно менять порядок слагаемых. Возникает вопрос, какой смысл имеет понятие об изменении порядка членов для бесконечного ряда и изменяется ли при этом сумма ряда. В то время как для конечной суммы имеет вполне определенный смысл складывать слагаемые в обратном порядке, для бесконечного ряда такой возможности нет, так как не существует последнего члена, с которого можно было бы начать. В данном случае изменение порядка членов будет означать лишь следующее: говорят, что ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ переходит путем перестановки членов в ряд $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$, если каждый член a_n первого ряда встречается ровно один раз во втором ряду и обратно. Этот член может быть например тем далее сдвинут со своего места, чем более n . Он должен только непременно встретиться в ряду с переставленными членами, причем в этом ряду встретится, с другой стороны, члены первого ряда, на местах более близких к началу ряда, чем раньше. Так например ряд

$$1 + q^1 + q^2 + q^4 + q^3 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^{16} + \dots$$

получается путем перестановки членов из геометрического ряда $1 + q + q^2 + \dots$

И вот в отношении изменения порядка членов в ряду существует основное различие между абсолютно сходящимися и условно сходящимися рядами. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах не нарушает сходимости ряда, и сумма ряда не изменяется, совершенно так же как и для конечных сумм. Наоборот, в условно сходящемся ряду можно всегда путем соответствующей перестановки членов

придать сумме ряда произвольное значение или даже сделать ряд расходящимся.

Первое предложение, относящееся к абсолютно сходящимся рядам, очень легко доказывается. Допустим сначала, что наш ряд имеет только

положительные члены, и рассмотрим n -ую частичную сумму $s_n = \sum_{v=1}^n a_v$.

Все слагаемые этой суммы безусловно встретятся в m -ой частичной

сумме $t_m = \sum_{v=1}^m b_v$ ряда, полученного путем перестановки членов, если

только выбрать достаточно большое значение m . Тогда $t_m \geq s_n$. С другой стороны, можно по индексу m выбрать такой индекс n' , чтобы в ча-

стичной сумме $s_{n'} = \sum_{v=1}^{n'} a_v$ первоначального ряда содержались все слагае-

мые $b_1, b_2, \dots, b_m$; тогда $s_{n'} \geq t_m$. Следовательно каждая частичная сумма одного ряда заключена между двумя частичными суммами другого ряда, а отсюда непосредственно следует, что частичные суммы обоих рядов стремятся к одному и тому же пределу.

Если абсолютно сходящийся ряд содержит как положительные, так и отрицательные члены, то его можно рассматривать как разность двух рядов с положительными членами. При изменении порядка членов нашего ряда в каждом из этих двух рядов члены также подвергаются перестановке, что по доказанному не изменяет суммы каждого из них, поэтому не изменяется и значение разности этих рядов; таким образом теорема доказана и для этого случая.

Начинающему только что доказанное предложение может показаться само собой разумеющимся. В том, что это положение нуждается в доказательстве и что доказательство существенным образом опирается на абсолютную сходимость ряда, мы прежде всего убеждаемся на примере условно сходящегося ряда, где дело обстоит совершенно по-иному. Берем ряд, с которым мы уже встречались,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \log 2,$$

умножая обе части на множитель $\frac{1}{2}$, пишем под ним ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \log 2$$

и складываем ¹⁾, соединяя вместе члены, стоящие друг под другом; тогда мы получим

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \log 2.$$

Но этот ряд можно очевидно получить из первоначального путем перестановки членов; в результате этой перестановки сумма ряда умножается на $\frac{3}{2}$. Легко себе представить, как должно было подействовать открытие этого кажущегося парадокса на математиков XVIII столетия, которые привыкли оперировать с бесконечными рядами, не обращая внимания на характер сходимости.

Приведу здесь доказательство сформулированной выше теоремы об изменении суммы условно сходящегося ряда при изменении порядка расположения членов, хотя этим результатом нам в дальнейшем пользоваться не придется. Пусть $p_1, p_2, \dots$ положительные слагаемые, а $-q_1, -q_2, \dots$ отрицательные слагаемые ряда. Так как абсолютное значение $|a_n|$ с возрастанием n стремится к нулю, то и числа p_n и q_n с возрастанием n

стремятся к нулю. Далее мы видели, что ряды $\sum_{v=1}^{\infty} p_v$ и $\sum_{v=1}^{\infty} q_v$ должны

расходиться. Теперь мы можем расположить члены в таком порядке, чтобы сумма стремилась к произвольному пределу a . Сперва мы складываем положительные члены до тех пор, пока сумма $\sum_{v=1}^{n_1} p_v$ как раз не пре-

высит числа a ²⁾. Так как $\sum_{v=1}^{n_1} p_v$ с возрастанием n_1 неограниченно воз-

растает, то мы при некотором числе слагаемых непременно получим сумму, превосходящую число a . Затем прибавляем столько отрицатель-

ных членов $-\sum_{v=1}^{m_1} q_v$, чтобы сумма оказалась как раз меньше значения a ;

возможность этого вытекает из расходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} q_v$. Далее мы при-

бавляем из следующих положительных членов как раз столько $\sum_{n_1+1}^{n_2} p_v$,

¹⁾ О сложении рядов см. п^о 4.

²⁾ т. е. $\sum_{v=1}^{n_1} p_v > a$, а $\sum_{v=1}^{n_1-1} p_v \leq a$.

чтобы сумма опять оказалась больше a , что возможно опять-таки в силу расходимости ряда положительных членов. Путем прибавления дальней-

ших отрицательных членов — $\sum_{m_1+1}^{m_2} q_n$ мы уменьшаем сумму до тех пор,

пока она как раз не станет меньше a , и продолжаем поступать таким образом дальше неограниченно. Получаемые нами таким образом значения сумм будут колебаться около значения a , и если мы только достаточно далеко продолжим этот процесс, то эти колебания будут происходить в произвольно тесных границах, так как члены p_n и q_n с возрастанием n стремятся к нулю. Таким образом наше утверждение доказано.

Пользуясь тем же самым методом, можно расположить члены в таком порядке, чтобы ряд стал расходящимся; достаточно например брать положительные члены настолько часто по сравнению с отрицательными, чтобы компенсации уже не было.

4. Действия над бесконечными рядами. Ясно, что два сходящихся ряда $a_1 + a_2 + \dots = S$ и $b_1 + b_2 + \dots = T$ можно складывать почленно, т. е. что ряд, составленный из членов $c_n = a_n + b_n$, сходится и сумма его равна $S + T$. В самом деле

$$S_n + T_n = \sum_{v=1}^n a_v + \sum_{v=1}^n b_v = \sum_{v=1}^n c_v \rightarrow S + T^1).$$

Далее непосредственно ясно, что можно умножить ряд на некоторый множитель, умножая на него каждый член этого ряда.

Эти предложения не зависят от того, будет ли сходимость рядов абсолютной или условной. Но что касается умножения двух сходящихся рядов по той же схеме, по которой обыкновенно перемножают конечные суммы, то более подробное рассмотрение, которое нам здесь не нужно, обнаруживает, что такое умножение, вообще говоря, можно применять лишь в том случае, если оба ряда или по крайней мере один из них абсолютно сходящийся (см. дополнения, § 1).

§ 2. Исследование сходимости и расходимости ряда

Мы вывели в предыдущем параграфе критерий сходимости общего характера, относящийся к знакопеременным рядам, члены которых по абсолютному значению убывают; согласно этому критерию такие ряды схо-

¹⁾ Эта теорема, относящаяся к рядам, представляет лишь иную формулировку доказанного уже в гл. I, § 6, п° 2 предложения: предел суммы двух слагаемых равен сумме соответствующих пределов.

дятся по крайней мере условно. Теперь мы займемся выводом критериев, касающихся лишь абсолютной сходимости.

1. Принцип сравнения рядов. Все исследования сходимости такого рода основаны на том, что данный ряд сравнивают с другим рядом, члены которого по абсолютному значению больше членов данного ряда; пытаются этот второй ряд выбрать таким образом, чтобы вопрос о его сходимости разрешался просто. Общий принцип сравнения рядов можно выразить следующим образом: если числа $b_1, b_2, \dots$ все положительны и если при любом значении n

$$|a_n| \leq b_n,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходящийся.

Доказательство с помощью критерия Коши почти очевидно. Действительно

$$|a_n + \dots + a_m| \leq |a_n| + \dots + |a_m| \leq b_n + \dots + b_m,$$

но при достаточно больших значениях m и n правая часть сколь угодно мала, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, следовательно и левая часть произвольно мала, а отсюда следует сходимость данного ряда; абсолютная сходимость данного ряда вытекает из того, что наше рассуждение обнаруживает заодно и сходимость ряда абсолютных значений $|a_n|$.

Предоставляю вам самим аналогично доказать следующее положение.

Если

$$|a_n| \geq b_n,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не может абсолютно сходиться в том случае, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

2. Сравнение с геометрическим рядом. Наиболее частое применение находит этот принцип в том случае, когда в качестве ряда для сравнения берут геометрический ряд. Тогда непосредственно получаем следующую теорему: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если начиная с некоторого члена постоянно имеет место соотношение вида

$$|a_n| < cq^n,$$

где q есть независимое от n положительное число, а q — правильная положительная дробь. Обычно этот критерий дается в одном из следующих двух видов. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если начиная с некоторого члена имеет место соотношение вида

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q, \quad \text{IIa}$$

где q — опять независимая от n правильная положительная дробь, или если начиная с некоторого места справедливо соотношение

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q. \quad \text{IIb}$$

Условия этих критериев например всегда выполнены, если имеем соотношение вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k < 1 \quad \text{IIIa}$$

или соотношение вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k < 1. \quad \text{IIIb}$$

Доказательство наших утверждений очень легко получить следующим образом. Пусть критерий IIa, основанный на рассмотрении отношения двух последовательных членов ряда ¹⁾, выполняется начиная с некоторого индекса n_0 . Тогда мы для краткости полагаем $a_{n_0+m} = b_m$ и имеем

$$|b_1| < q |b_0|, |b_2| < q |b_1| < q^2 |b_0|, |b_3| < q |b_2| < q^3 |b_0|,$$

следовательно

$$|b_m| < q^m |b_0|,$$

что и доказывает наше утверждение. Для критерия IIb, основанного на рассмотрении корня ²⁾, непосредственно имеем $|a_n| < q^n$; т. е. наше утверждение правильно. Наконец, чтобы доказать критерий III, мы рассмотрим произвольное число q , удовлетворяющее условию $k < q < 1$. Тогда начиная с некоторого n_0 , т. е. при $n > n_0$, обязательно

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q \text{ и } \sqrt[n]{|a_n|} < q,$$

так как числа

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ и } \sqrt[n]{|a_n|}$$

¹⁾ Так называемый признак сходимости Даламбера.

²⁾ Так называемый признак сходимости Коши.

при достаточно большом значении n произвольно мало отличаются от k . Таким образом на основании только что полученного общего результата критерии доказаны.

Обратим внимание на то, что эти четыре критерия, полученные из первоначального критерия $|a_n| < cq^n$, не равносильны друг другу и не равносильны первоначальному критерию, т. е. они не вытекают взаимно друг из друга. Если для некоторого ряда выполнен один из этих критериев, то это ни в коем случае не значит, что для этого ряда выполняются и остальные критерии, как мы сейчас увидим на примерах ¹⁾.

В дополнение замечу еще, что ряд обязательно расходится, если начиная с некоторого члена

$$|a_n| > c,$$

или

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

или когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k,$$

где k — положительное число, большее 1. В самом деле, легко видеть, что у такого ряда члены с возрастанием n не могут стремиться к нулю, следовательно ряд расходится. (В данном случае не может быть речи и об условной сходимости.)

Впрочем наши критерии представляют только достаточные условия абсолютной сходимости ряда, т. е. если они выполнены, то можно заключить, что ряд абсолютно сходящийся. Но они ни в коем случае не являются необходимыми условиями, т. е. могут быть абсолютно сходящиеся ряды, для которых эти условия не выполняются.

Например нельзя уже сделать никаких общих утверждений, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Такие ряды могут быть или сходящимися или расходящимися.

Например ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v},$$

¹⁾ Точнее: мы можем конечно на основании IIIa или IIIb заключить, что имеет место IIa или IIb и критерий I, но не можем сделать обратного заключения,

для которого

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

является, как мы раньше видели, расходящимся. С другой стороны, мы сейчас увидим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

для которого выполняются те же соотношения, сходится.

В качестве примера на применение наших критериев рассмотрим сперва ряд

$$1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n + \dots$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |q| \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = |q|,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |q|.$$

Что ряд сходится при $|q| < 1$, следует как из первого, так и из второго критерия.

Если же мы рассмотрим ряд

$$1 + 2q + q^2 + 2q^3 + \dots + q^{2n} + 2q^{2n+1} + \dots,$$

то мы уже не можем решить вопрос о его сходимости с помощью критерия, основанного на рассмотрении отношений последовательных членов, так как ведь

$$\left| \frac{2q^{2n+1}}{q^{2n}} \right| = 2|q| > 1, \text{ если } |q| > \frac{1}{2}.$$

Наоборот, критерий, основанный на рассмотрении корня, непосредственно дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |q|$$

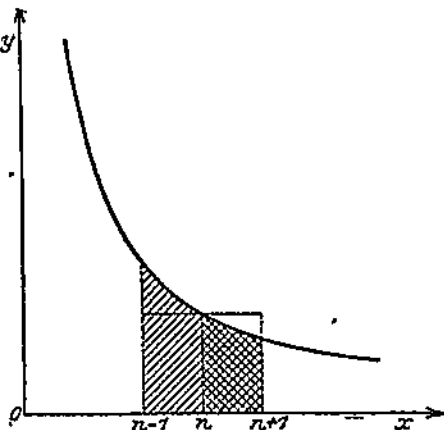
и обнаруживает сходимость ряда при $|q| < 1$, что можно было конечно и непосредственно заметить.

3. Сравнение с интегралом¹⁾. Наряду с только что проведенными исследованиями сходимости существует еще другой метод исследования, не сводящийся к предыдущим и имеющий самостоятельное значение. Проведем этот метод на наиболее простом и важном примере ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots,$$

¹⁾ См. также гл. VII, дополнения, § 1.

в котором общий член a_n равен $\frac{1}{n^a}$ и под a разумею некоторое положительное число. Чтобы исследовать сходимость или расходимость таких рядов, представим себе кривую $y = \frac{1}{x^a}$ и отметим на оси x -ов целочисленные абсциссы $x=1, x=2, \dots$. Построим прямоугольник с высотой $\frac{1}{n^a}$ сперва над отрезком оси x -ов $n-1 \leq x \leq n$, а затем над отрезком $n \leq x \leq n+1$ и сравним площадь этого прямоугольника с соответствующими площадками (заштрихованными по-разному на черт. 109), ограниченными теми же отрезками оси x -ов, ординатами в конечных точках и вырезаемыми ими дугами кривой $y = \frac{1}{x^a}$. Очевидно, что площадь первой больше, а площадь второй меньше площади прямоугольника, которая равна $\frac{1}{n^a}$. Иными словами,



Черт. 109.

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^a} < \frac{1}{n^a} = a_n < \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^a},$$

в чем можно конечно убедиться и непосредственно из рассмотрения интегралов (см. гл. II, § 7, п° 1). Таким образом мы получаем, складывая неравенства при $n=2, n=3$ и т. д., для m -ой частичной суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^a}$$

соотношение ¹⁾

$$1 + \int_2^{m+1} \frac{1}{x^a} dx < S_m < 1 + \int_1^m \frac{1}{x^a} dx.$$

¹⁾ Между прочим из этого соотношения при $a=1$ непосредственно следует что последовательность чисел $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ ограничена снизу и

Но мы знаем (см. гл. IV, § 8), что с возрастанием m интеграл

$$\int_1^m \frac{1}{x^a} dx$$

стремится к конечному пределу или возрастает неограниченно, смотря по тому, будет ли $a > 1$ или $a \leq 1$.

Монотонно возрастающая последовательность S_m будет следовательно в первом случае ограниченной, а во втором случае — неограниченно возрастающей. Мы получаем отсюда следующую теорему: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots$$

сходится в том и только в том случае, когда $a > 1$. Расходимость гармонического ряда, которую мы раньше доказали другим путем, является, как видим, непосредственным следствием этой теоремы. В частности из нее следует между прочим, что ряды

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \\ \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \end{aligned}$$

сходятся.

Только что исследованные в отношении сходимости ряды $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^a}$ в свою очередь часто применяются как ряды для сравнения при исследовании сходимости. Например непосредственно ясно, что ряд $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v}{v^a}$ сходится абсолютно, если только абсолютные значения $|c_v|$ коэффициентов остаются меньше некоторого постоянного, не зависящего от v , числа M .

монотонно убывает с возрастанием n . Следовательно существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = C.$$

Это число, значение которого равно 0,5772..., называют Эйлеровой постоянной. В отличие от других замечательных чисел анализа вроде e или π , для постоянной Эйлера не удалось найти других выражений с простыми знаменателями образования.

§ 3. Пределы последовательностей функций и ряды функций от одной переменной.

До сих пор мы рассматривали ряды, члены которых были постоянными числами; поэтому и суммы этих рядов представляли постоянные числа. Но как для теории так, и для приложений, прежде всего имеют важное значение те ряды, члены которых являются функциями некоторой переменной и суммы которых вследствие этого также являются функциями той же переменной; таковы например рассмотренные нами в шестой главе ряды Тейлора.

Итак мы рассматриваем теперь в общем виде ряд

$$g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + \dots,$$

в котором $g_n(x)$ представляет функцию, определенную в интервале $a \leq x \leq b$. Обозначим n -ую частичную сумму $g_1(x) + \dots + g_n(x)$ этого ряда через $f_n(x)$. Сумма $f(x)$ нашего ряда есть ни что иное, как предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, если только этот предел существует. Следовательно мы можем рассматривать сумму бесконечного ряда функций как предел последовательности функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ и обратно для каждой такой последовательности функций $f_n(x)$ мы можем построить эквивалентный ей ряд, полагая $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ и $g_1(x) = f_1(x)$. Поэтому мы имеем право заменять рассмотрение бесконечных рядов рассмотрением последовательностей функций и обратно, смотря по тому, как нам удобнее.

1. Предельные переходы для функций и для кривых. Мы теперь точно формулируем, в каком случае функция $f(x)$ представляет в определенном интервале предельную функцию для последовательности функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$. Мы говорим: последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots$ сходится к предельной функции $f(x)$ в данном интервале, если в каждой точке x этого интервала значение $f_n(x)$ стремится к значению $f(x)$ в обычном смысле и пишем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ или $f_n(x) \rightarrow f(x)$. На основании общего критерия сходимости Коши (см. гл. I, § 6), мы можем также охарактеризовать сходимость последовательности функций, совершенно не зная заранее и даже не упоминая о предельной функции $f(x)$. Именно наша последовательность функций сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ в том и только в том случае, если в каждой точке x нашего интервала величина $|f_n(x) - f_m(x)|$ становится меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε , как только мы возьмем числа m и n достаточно большими, т. е. большими, чем некоторое число $N = N(\varepsilon)$, которое, вообще говоря, зависит от ε и при неограниченном убывании ε неограниченно возрастает.

С примерами такого рода пределов последовательностей функций мы встречались неоднократно. Напомню определение степени x^a для иррационального значения a с помощью равенства

$$x^a = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n},$$

причем под $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ мы разумели последовательность рациональных чисел, стремящихся к пределу a ; или равенство

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

где функциями $f_n(x)$ справа являются целые рациональные функции степени n .

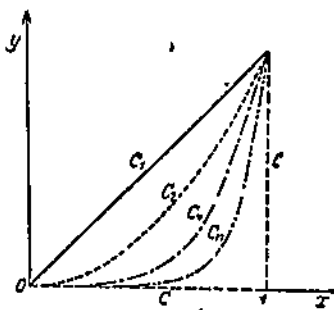
Изображение функций с помощью кривых естественно приводит к тому, чтобы говорить также о предельном переходе для кривых. Мы говорим, что кривые, изображающие предыдущие предельные функции x^a и e^x , являются предельными кривыми для последовательностей кривых, изображающих функции x^{r_n} и $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Однако между предельным переходом для функций и для кривых имеется тонкое различие, на которое до середины XIX столетия не обращали достаточного внимания. Но только ясное понимание этого различия позволяет нам избежать некоторых кажущихся парадоксов.

Рассмотрим в качестве примера функции

$$f_n(x) = x^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

в промежутке $0 \leq x \leq 1$. Все эти функции непрерывны, и существует предельная функция $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Эта предельная функция однако уже не является непрерывной; в самом деле $f(1) = 1$, так как при любом значении n значение $f_n(1) = 1$, между тем при всяком положительном значении $x < 1$, как мы видели (см. гл. I, § 5, стр. 25), $f(x) = 0$. Следовательно предельная функция $f(x)$ представляет в нашем промежутке прерывную функцию, имеющую повсюду значение 0, и только при $x = 1$ значение ее равно 1. Эта прерывность функции, которую мы уже раньше рассматривали, становится наглядной, если рассмотрим кривые C_n , изображающие функции $y = f_n(x)$. Это непрерывные кривые (см. черт. 11 на стр. 15), которые проходят через начало координат и через точку $(x = 1, y = 1)$ и которые тем ближе примыкают к оси x -ов, чем больше n . Эти кривые стремятся к предельной кривой C , которая ни в коем случае не будет прерывной. Она состоит (черт. 110) из отрезка оси x -ов от $x = 0$ до $x = 1$ и перпендикулярного к нему отрезка прямой $x = 1$

от $y=0$ до $y=1$. Итак кривые сходятся к непрерывной предельной кривой, содержащей отрезок, перпендикулярный оси x -ов, функции же сходятся к прерывной предельной функции. Таким образом мы видим, что прерывность предельной функции геометрически выражается в том, что предельная кривая содержит отрезок, перпендикулярный к оси x -ов. Такой отрезок непременно должен означать прерывность функции, так как функция $f(x)$ относит каждому значению x одно определенное значение y . При графическом изображении функции такая однозначность возможна лишь в том случае, если график не содержит отрезков, перпендикулярных оси x -ов и каждая прямая, перпендикулярная оси x -ов, пересекает кривую только в одной точке. То, что мы говорили о последовательностях функций, относится разумеется и к бесконечным рядам функций (см. стр. 333).

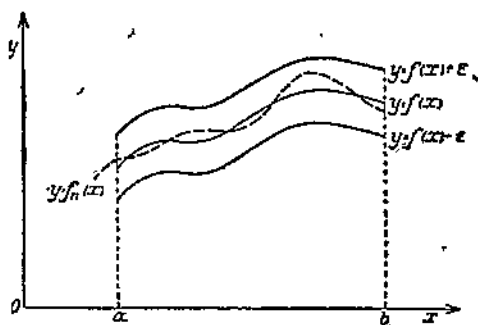


Черт. 110.

§ 4. Равномерная и неравномерная сходимость.

1. Общие соображения и примеры. Несоответствие между понятием сходимости последовательности функций и последовательности кривых является основой явления, которое необходимо уяснить себе при изучении сходимости, именно неравномерной сходимости последовательностей функций или бесконечных рядов функций. Так как этот пункт обычно доставляет затруднения начинающим, то я остановлюсь на нем несколько подробнее. Что функция $f(x)$ является пределом последовательности функций $f_n(x)$ в интервале $a \leq x \leq b$, согласно определению означает лишь, что в каждой точке x интервала имеет место соотношение $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. С наивной точки зрения можно было ожидать, что с этим понятием сходимости само собой связан следующий факт: если задана произвольная степень точности, например $\epsilon = \frac{1}{1000}$ или $\epsilon = \frac{1}{100}$, то начиная с некоторого индекса N все функции $f_n(x)$ для всех значений x интервала заключаются между $f(x) + \epsilon$ и $f(x) - \epsilon$, т. е. кривые $y = f_n(x)$ целиком находятся внутри полосы, изображенной на черт. 111; иными словами по данному ϵ можно найти число $N = N(\epsilon)$, которое разумеется, вообще говоря, с убыванием ϵ возрастает, так, что при $n > N$ всегда $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, какое бы мы ни взяли значение x из нашего интервала. Мы можем выразить это требование и так: $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ если одновременно $n > N$ и $m > N$. То, что степень

точности приближения может быть сделана по крайней мере равной наперед заданному числу ε повсюду в интервале одновременно, т. е. путем выбора одного и того же числа $N(\varepsilon)$, не зависящего от x , называют равномерной сходимостью. Оказывается однако, и это на первый взгляд кажется поразительным, что наивное предполо-



Черт. 111.

жение, будто всякая сходимость непременно должна быть равномерной, совершенно не соответствует действительности. Иными словами сходимость может быть и неравномерной.

1-й пример. Неравномерная сходимость обнаруживается уже в рассмотренной нами раньше последовательности функций $f_n(x) = x^n$; они сходятся в интервале $0 \leq x \leq 1$ к предельной

функции $f(x) = 0$ при $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. В любой точке интервала имеет место сходимость; именно, если задать наперед сколь угодно малое положительное число ε и выбрать определенное значение $x = \xi$, то достаточно только сделать n достаточно большим, чтобы имело место неравенство $|x^n - f(\xi)| < \varepsilon$.

Но это приближение к пределу неравномерно; в самом деле, если возьмем например $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то как бы велико ни было число n , мы всегда можем найти такие значения $x = \eta \neq 1$ в окрестности точки $x = 1$, для которых $|\eta^n - f(\eta)| = \eta^n > \frac{1}{2}$, а именно те значения $x = \eta$, для которых $\eta = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Следовательно невозможно выбрать число n настолько большим, чтобы во всем интервале разность между $f_n(x)$ и $f(x)$ была меньше $\frac{1}{2}$.

Это обстоятельство становится понятным, если представим функции в виде кривых и обратим внимание на то, что кривые в окрестности точки $x = 1$ становятся все более крутыми, но что крутой подъем с возрастанием n ограничивается все меньшей и меньшей окрестностью этой точки и что наконец кривые стремятся к указанному ранее предельному положению.

Аналогично ведут себя функции

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

в окрестности точек $x=1$ и $x=-1$, в чем вы сами легко можете убедиться (см. также рассуждения в § 8, гл. I).

2-й пример. В предыдущих двух примерах неравномерность сходимости зависела от того, что предельная функция была прерывной. Легко построить также последовательность непрерывных функций, которые хотя и сходятся к непрерывной предельной функции, но сходятся неравномерно.

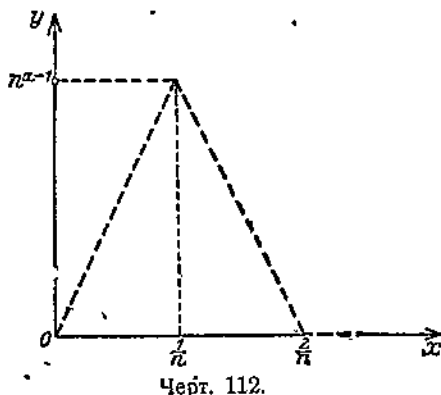
Мы берем интервал $0 \leq x \leq 1$ и определяем:

$$f_n(x) = x^n \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{n},$$

$$f_n(x) = \left(\frac{2}{n} - x\right)n^a \quad \text{при } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n},$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{при } \frac{2}{n} \leq x \leq 1, \quad (n \geq 2),$$

причем a есть положительное число, которое находится пока в нашем распоряжении, но которое является постоянным для всех функций нашей последовательности. Геометрически наши функции изображаются в виде фигуры, состоящей из двух прямолинейных отрезков, симметричной относительно прямой $x = \frac{1}{n}$ и расположенной над осью x -ов от $x=0$



до $x = \frac{2}{n}$ и части самой оси x -ов от $x = \frac{2}{n}$ до $x=1$ (черт. 112).

Если $a < 1$, то высота построенного треугольника, которая вообще равна n^{a-1} , с возрастанием n стремится к нулю; кривые равномерно стремятся к оси x -ов, а функции равномерно стремятся к нулю.

Если $a = 1$, то зубец при любом n будет иметь высоту, равную единице. Если $a > 1$, то высота зубца с возрастанием n будет неограниченно возрастать.

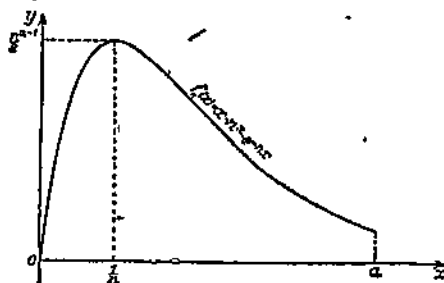
Но как бы мы ни выбрали a , последовательность функций $f_n(x)$ всегда будет стремиться к предельной функции $f(x) = 0$. В самом деле, любое положительное значение x интервала при достаточно большом значении n всегда окажется вне основания треугольника; при $x=0$ все функции $f_n(x)$ равны нулю, следовательно и их предельное значение $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$. Но при $a \geq 1$ сходимость безусловно неравно-

мерна, так как уже невозможно одновременно для всех значений x нашего интервала выбрать столь большое n , чтобы абсолютное значение разности $|f(x) - f_n(x)| = |f_n(x)|$ было, скажем, меньше $\frac{1}{2}$.

3-й пример. Аналогичный характер обнаруживает и последовательность функций

$$f_n(x) = xn^2 e^{-nx},$$

заданная в отличие от предыдущего примера единым аналитическим выражением (черт. 113). И здесь при положительном значении x непре-



Черт. 113.

менно будет иметь место соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, так как при возрастании n порядок исчезания показательной функции выше порядка исчезания любой степени числа $\frac{1}{n}$ (гл. III, § 9). При $x=0$ всегда $f_n(0) = 0$, и мы получаем таким образом во всем интервале $0 \leq x \leq a$, где a — любое положительное число,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Но и здесь при $a \geq 1$ сходимость последовательности к предельной функции неравномерна.

В самом деле, в точке $x = \frac{1}{n}$ [точка максимума для функции $f_n(x)$]

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{n-1}}{e},$$

и мы видим, что кривая при $a \geq 1$ будет иметь максимум, высота которого с возрастанием n безусловно не будет стремиться к нулю. Впрочем в этом примере дело обстоит совершенно так же, как и в предыдущем.

4-й пример. Понятия равномерной и неравномерной сходимости переносятся разумеется и на бесконечные ряды. Мы называем ряд $g_1(x) + g_2(x) + \dots$ равномерно сходящимся или неравномерно сходящимся, смотря по характеру сходимости последовательности ее частичных сумм $f_n(x)$. Очень простой пример неравномерно сходящегося ряда представляет ряд

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots$$

При $x=0$ каждая частичная сумма $f_n(x)=x^2+\dots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}=0$, следовательно и $f(0)=0$. При $x\neq 0$ мы имеем просто геометрический ряд со знаменателем $\frac{1}{1+x^2}$, и этот знаменатель наверно меньше 1. Следовательно мы можем просуммировать по элементарному правилу и получаем при условии $x\neq 0$ в качестве суммы ряда значение

$$\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

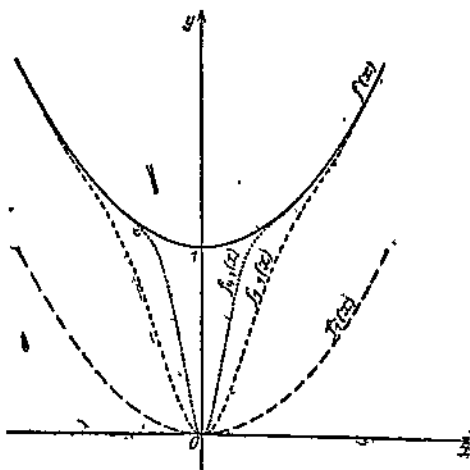
Предельная функция $f(x)$ имеет повсюду кроме $x=0$ выражение $f(x)=1+x^2$, а $f(0)=0$; ей таким образом как бы искусственно в точке $x=0$ навязан разрыв.

И здесь мы в каждом интервале, содержащем точку $x=0$, имеем дело с неравномерной сходимостью. Разность $f(x)-f_n(x)=r_n(x)$ при $x=0$ равна нулю, между тем при всяком другом значении x эта разность дается выражением $r_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$.

Если мы потребуем, чтобы это выражение было, скажем, меньше $\frac{1}{2}$, то при постоянном значении x

мы можем всегда этого достигнуть, выбирая достаточно большое значение для n . Однако при любом фиксированном значении n мы можем всегда указать такие близкие к нулю значения $x=\xi$, при которых $r_n(\xi) > \frac{1}{2}$; таким образом невозможно равномерно достигнуть указанной степени приближения.

Наглядно все это опять тотчас же выясняется при рассмотрении последовательности кривых, изображающих функции $f_n(x)$ (черт. 114). Эти кривые при достаточно большом значении n будут, за исключением непосредственной окрестности точки $x=0$, все теснее примыкать к параболе $y=1+x^2$; но в окрестности точки $x=0$ все эти кривые протягивают все более и более суживающиеся хоботообразные отростки к началу координат, и эти отростки при неограниченном возрастании n все более стягиваются к соответствующему отрезку



Черт. 114.

оси y -ов, так что в качестве предельной кривой получаем параболу с направленным вниз прямолинейным отростком, перпендикулярным к оси x -ов и проходящим до начала координат.

В качестве дальнейшего примера неравномерной сходимости привожу

ряд $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x)$, где $g_v(x) = x^v - x^{v-1}$ в интервале $0 \leq x \leq 1$; частичные

суммы этого ряда образуют рассмотренную выше в первом примере последовательность функций x^v .

2. Критерий равномерной сходимости. Все наши рассмотрения обнаруживают, что равномерность сходимости в некотором интервале во всяком случае является особым свойством последовательности функций или бесконечного ряда функций. Формулируем еще раз понятие равномерной сходимости.

Сходящийся ряд $g_1(x) + g_2(x) + \dots$ называется равномерно сходящимся в некотором интервале, если можно вычислить его сумму $f(x)$ с точностью до любого сколь угодно малого положительного числа ϵ , пользуясь достаточно большим числом членов, одним и тем же для всего интервала; иными словами, если для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ можно указать независимое от x число N такое, что при $n > N$ всегда $|f(x) - f_n(x)| = |R_n(x)| < \epsilon$, где $R_n(x)$ означает остаток ряда для n -ной частичной суммы $f_n(x)$.

Если мы рассматриваем не бесконечный ряд, а последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots$ с предельной функцией $f(x)$, то равномерную сходимость мы, как и раньше, определяем тем свойством, что разность $|f(x) - f_n(x)|$ или же выражение $|f_n(x) - f_m(x)|$ при достаточно большом значении n или при достаточно больших значениях m и n одновременно для всего интервала окажется меньше любого наперед заданного числа ϵ .

Мы сейчас увидим, что лишь при условии равномерной сходимости ряды или последовательности функций являются удобными орудиями анализа; к счастью оказывается, что неравномерность сходимости является известным образом исключительным явлением, которое нам мало мешает при применении методов анализа.

Обычно равномерность сходимости ряда доказывается с помощью сле-

дующего критерия: если члены ряда $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x)$ удовлетворяют условиям $|g_n(x)| < a_n$, где a_n — положительные постоянные,

образующие в свою очередь сходящийся ряд $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, то ряд $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x)$ сходится равномерно (и заметим кстати также абсолютно). В самом деле

$$\left| \sum_{v=n}^m g_v(x) \right| \leq \sum_{v=n}^m |g_v(x)| \leq \sum_{v=n}^m a_v;$$

отсюда непосредственно вытекает наше утверждение, так как согласно критерию сходимости Коши $\sum_{v=n}^m a_v$ может быть сделана сколь угодно малой.

В качестве примера может служить геометрический ряд $1 + x + x^2 + \dots$, если ограничиться интервалом $|x| < q$, где q произвольное положительное число, меньшее единицы. В этом случае члены ряда по абсолютному значению меньше членов сходящегося геометрического ряда $\sum q^v$.

Дальнейший пример представляет „тригонометрический ряд“

$$\frac{C_1 \sin(x - \delta_1)}{1^2} + \frac{C_2 \sin(x - \delta_2)}{2^2} + \frac{C_3 \sin(x - \delta_3)}{3^2} + \dots,$$

в котором $|C_n| < C$, где под C разумеется положительную постоянную не зависящую от n . В данном случае $g_n(x) = \frac{C_n \sin(x - \delta_n)}{n^2}$ и следовательно $|g_n(x)| < \frac{C}{n^2}$; отсюда в силу сходимости ряда $C \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$ следует

равномерная и абсолютная сходимость нашего тригонометрического ряда.

3. Непрерывность равномерно сходящихся рядов непрерывных функций. Значение равномерной сходимости бесконечных рядов заключается прежде всего в том, что равномерно сходящийся ряд во многих отношениях ведет себя совершенно таким же образом, как сумма конечного числа функций. Так например сумма конечного числа непрерывных функций непрерывна, и соответственно справедлива теорема: равномерно сходящийся в замкнутом интервале ряд, членами которого являются непрерывные функции, представляет непрерывную функцию в этом интервале.

Доказательство очень простое. Представим ряд $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots$ как сумму n -ной частичной суммы $f_n(x)$ и „остатка“ $R_n(x)$. При этом $f_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$. Если нам задается произвольно

малое положительное число ε , то мы можем на основании условия о равномерной сходимости выбрать сначала число n настолько большим, чтобы остаток по абсолютному значению был меньше $\frac{\varepsilon}{4}$ по всем интервалам и потому непременно будет иметь место неравенство

$$|R_n(x+h) - R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где x и $x+h$ произвольные значения из нашего интервала. Частичная сумма $f_n(x)$ состоит из конечного числа непрерывных слагаемых и поэтому в свою очередь непрерывна; следовательно мы можем во всякой точке x интервала выбрать столь малое h , чтобы

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если значения x и $x+h$ лежат в нашем интервале; тогда

$$|f(x+h) - f(x)| = |f_n(x+h) - f_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x)| < \\ < |f_n(x+h) - f_n(x)| + |R_n(x+h) - R_n(x)| < \varepsilon,$$

а это соотношение и выражает непрерывность функции $f(x)$.

Значение этой теоремы выясняется, если заметить, что у неравномерно сходящихся рядов непрерывных функций сумма, как мы видели непосредственно на примерах, ни в коем случае не является обязательно непрерывной. Из предыдущего результата мы можем вывести следующее заключение: если сумма сходящегося ряда непрерывных функций прерывна в некоторой точке, то ряд в некоторой окрестности этой точки непременно сходится неравномерно. Следовательно представление прерывных функций с помощью рядов непрерывных функций как раз и основано на применении неравномерно сходящихся рядов.

4. Интегрирование равномерно сходящихся рядов. Сумма конечного числа непрерывных функций может быть почленно проинтегрирована, т. е. интеграл суммы можно получить, интегрируя каждую функцию в отдельности и складывая полученные интегралы. Для сходящегося ряда функций, т. е. для бесконечной суммы, этот прием также законен, если допустить, что ряд сходится равномерно в промежутке интегрирования. Равномерно сходящийся в некотором интервале ряд

непрерывных функций $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x) = f(x)$ можно в этом интервале почленно интегрировать, точнее: если a и x два числа этого интервала, то ряд $\sum_{v=1}^{\infty} \int_a^x g_v(t) dt$ сходится и притом

равномерно относительно x (при фиксированном a), и сумма его равна $\int_a^x f(t) dt$. Для доказательства напомним, пользуясь предыдущими обозначениями:

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} g_v(x) = f_n(x) + R_n(x),$$

и предположим, что отдельные члены ряда, а следовательно и сумма $f(x)$, непрерывны в данном интервале и поэтому могут быть проинтегрированы. Далее мы можем для любого ϵ всегда выбрать число n на столько большим, чтобы во всем интервале имело место соотношение $|R_n(x)| < \epsilon$, а вместе с тем и $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, где ϵ означает некоторое произвольно малое наперед заданное число. По первой теореме о среднем значении интегрального исчисления имеем:

$$\left| \int_a^x [f(t) - f_n(t)] dt \right| < \epsilon l,$$

где l — длина промежутка интегрирования; но так как интегрирование конечной суммы $f_n(x)$ мы имеем право выполнять почленно, то мы непосредственно получаем:

$$\left| \int_a^x f(t) dt - \sum_{v=1}^n \int_a^x g_v(t) dt \right| < \epsilon l.$$

Приближая ϵ неограниченно к нулю и тем самым увеличивая неограниченно n , мы из последнего соотношения непосредственно получаем теорему о возможности почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда.

Если речь идет не о рядах, а просто о пределе последовательности:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

то наш результат можно выразить следующим образом: если в некотором интервале соотношение $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ выполнено равномерно, т. е. если последовательность функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

если только a и b лежат в интервале; иными словами, мы имеем право в этом случае переставлять между собой порядок операций интегрирования и предельного перехода.

Этот факт ни в коем случае не является очевидным с самого начала. Правда с научной точки зрения, господствовавшей вплоть до XIX столетия, едва ли возникают сомнения в возможности изменения порядка этих операций, однако одного взгляда на примеры п° 1 этого параграфа достаточно, чтобы убедиться в том, что наше утверждение в случае неравномерно сходящихся рядов или последовательностей функций может оказаться неверным. Достаточно рассмотреть второй пример. Здесь интеграл предельной функции равен нулю, в то время как интеграл от функции $f_n(x)$, взятый в пределах от 0 до 1, т. е. площадь построенного треугольника, имеет значение:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^{2-a}$$

и следовательно в случае $a \geq 2$ не стремится к нулю. Мы здесь непосредственно видим, что причина несовпадения значений $\int_0^1 f(x) dx$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ лежит в неравномерности сходимости.

С другой стороны в случае $1 \leq a \leq 2$ обнаруживается, что несмотря на неравномерность сходимости может иметь место равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

То же обнаруживают и другие примеры, приведенные в п° 1. Мы можем например почленно интегрировать в пределах от 0 до 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, где $g_n(x) = x^n - x^{n-1}$, несмотря на неравномерную сходимость этого ряда, т. е. мы получим таким путем правильный результат. Итак, равномерность сходимости является достаточным условием, но ни в коем случае не является необходимым условием возможности почленного интегрирования; на этот пункт надо обратить внимание, чтобы избежать недоразумений.

§. Дифференцирование бесконечных рядов. По отношению к дифференцированию равномерно сходящиеся ряды или последовательности функ-

ций ведут себя иначе, чем по отношению к интегрированию. Например последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$ равномерно сходится к нулю, но производные $f'_n(x) = n \cos n^2 x$ с возрастанием n совсем не стремятся к производной от предельной функции, т. е. к нулю, например, этого не будет при $x=0$. Следовательно несмотря на равномерность предельного перехода, мы не имеем права изменять порядок операций дифференцирования и перехода к пределу.

То же самое относится и к бесконечному ряду. Например ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \dots,$$

абсолютно и равномерно сходится, так как члены его по абсолютному значению меньше членов сходящегося ряда $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$

Дифференцируя предыдущий ряд почленно, получим ряд:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + 3^2 \cos 3^4 x + \dots,$$

который очевидно сходится не во всех точках; так например при $x=0$ члены его не стремятся к нулю.

Следующая теорема представляет единственный удобный критерий, который в отдельных случаях дает нам уверенность в том, что почленное дифференцирование законно. Если при почленном дифференцировании сходящегося бесконечного ряда

$$\sum_{v=1}^{\infty} G_v(x) = F(x),$$

получается равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x) = f(x),$$

то значение последнего ряда представляет производную от суммы первого ряда. Таким образом условие теоремы ясно требует, чтобы после почленного дифференцирования мы еще убедились в том, сходится ли полученный ряд равномерно.

Доказательство теоремы почти очевидно. В самом деле, на основании п° 4 мы можем ряд, полученный путем дифференцирования, почленно интегрировать в нашем интервале, причем верхний предел x можно оста-

вить, неопределенным. Принимая во внимание, что $g_v(t) = G'_v(t)$, мы получаем таким образом:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{v=1}^{\infty} g_v(t) \right) dt = \sum_{v=1}^{\infty} \int_a^x g_v(t) dt = \sum_{v=1}^{\infty} [G_v(x) - G_v(a)] = \\ = F(x) - F(a).$$

Следовательно

$$f(x) = F'(x),$$

как мы и утверждали.

§ 5. Степенные ряды.

Из бесконечных рядов наиболее важное значение имеют степенные ряды. Под степенным рядом разумеют ряд вида

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v,$$

или также более общего вида

$$\mathfrak{P}(x - x_0) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} c_v(x - x_0)^v,$$

где x_0 постоянное число. Если мы в последнем ряду введем в качестве новой независимой переменной $x - x_0 = x'$, то ряд перейдет в степенной ряд $\sum_{v=0}^{\infty} c_v x'^v$ относительно переменной x' ; поэтому мы можем, не нарушая общности, ограничиться рассмотрением степенных рядов более частного вида $\sum_{v=1}^{\infty} c_v x^v$.

Мы уже в гл. VI подробно рассмотрели вопрос о приближенном выражении функций с помощью целых рациональных функций и в связи с этим вопрос о разложении в ряды Тэйлора, которые конечно представляют собой степенные ряды. В этом параграфе мы займемся изучением степенных рядов самих по себе и получим таким путем новые и во многих отношениях более простые и удобные подходы к разложению в ряд наиболее важных функций.

1. Сходимость степенного ряда. Существуют степенные ряды, которые расходятся для всех значений x , за исключением конечно значения $x=0$, например ряд $x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \dots + n^2 x^n + \dots$; действительно, если, скажем, $|x| > \frac{1}{N}$, где N —целое число, то все члены $n^2 x^n$ при $n > N$ по абсолютному значению больше 1 и даже с возрастанием n неограниченно возрастают, между тем члены сходящегося ряда должны стремиться к нулю.

С другой стороны существуют степенные ряды, сходящиеся при любом значении x , например степенной ряд показательной функции

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

сходимость которого при любом значении x непосредственно вытекает из критерия Ша (§ 2, п° 2); в самом деле, при делении $(n+1)$ -го члена на n -ый получаем $\frac{x}{n+1}$, и это частное всегда стремится к нулю с возрастанием n , какое бы мы ни выбрали значение для x .

Вообще относительно сходимости степенных рядов имеет место следующая основная теорема: если степенной ряд сходится при некотором значении $x=\xi$, то он абсолютно сходится при всяком значении x , для которого $|x| < |\xi|$, и сходимость будет равномерной во всяком интервале $|x| < \eta$, если только η постоянное положительное число, меньшее чем $|\xi|$, которое может впрочем быть сколь угодно близким к $|\xi|$.

Доказательство очень простое. Если ряд $\sum_{v=0}^{\infty} c_v \xi^v$ сходится, то члены его с возрастанием v должны стремиться к нулю; следовательно они непременно по абсолютному значению меньше некоторого независимого от v числа M , т. е. $|c_v \xi^v| < M$. Возьмем теперь постоянное число q , удовлетворяющее условиям $0 < q < 1$, и ограничим изменение x интервалом $|x| \leq q|\xi|$, тогда $|c_v x^v| \leq |c_v \xi^v| q^v < M q^v$. Итак, члены нашего ряда $\sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$ в этом интервале по абсолютному значению меньше членов сходящегося геометрического ряда $M \sum q^v$, состоящего из постоянных положительных чисел. Отсюда же непосредственно вытекает на основании теоремы § 4, п° 2 абсолютная и равномерная сходимость в интервале $-q|\xi| < x < q|\xi|$. Если степенной ряд сходится не повсюду, т. е. если существует значение $x=\xi$, при котором ряд расходится, то ряд непременно расходится и при всяком значении x , при котором $|x| > |\xi|$. Действительно, если бы ряд при таком значении x сходил, то на основании только что доказанной теоремы ряд должен был бы сходиться и при значении ξ , которое по абсолютному значению меньше.

Мы видим, что для такого степенного ряда существует интервал сходимости, т. е. существует определенное положительное число ρ такого рода, что при $|x| > \rho$ ряд расходится, при $|x| < \rho$ ряд сходится; относительно $|x| = \rho$ мы не можем сделать заранее никаких общих утвер-

жений. Предельные случаи, когда ряд сходится только при значении $x=0$ или сходится при всех значениях x , мы символически выражаем записью $\rho=0$ или $\rho=\infty$ ¹⁾.

Например для геометрического ряда $1+x+x^2+\dots$ значение ρ равно 1; на концах интервала сходимости ряд расходится. Подобным же образом для ряда

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

с которым мы ознакомились в гл. VI, $\rho=1$; в обоих концах интервала сходимости, т. е. когда $|x|=1$, ряд сходится; что непосредственно следует из критерия Лейбница (§ 1, н° 2).

В качестве следствия равномерной сходимости отмечу то важное положение, что степенной ряд внутри промежутка сходимости представляет непрерывную функцию.

2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ввиду равномерной сходимости можно степенной ряд

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$$

почленно интегрировать внутри промежутка сходимости. Таким образом получаем функцию

$$F(x) = c + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v+1} x^{v+1},$$

для которой

$$F'(x) = f(x).$$

Между прочим заметим, что коэффициенты ряда, полученного интегрированием, по абсолютному значению уменьшаются и следовательно абсолютная сходимость по сравнению с первоначальным рядом улучшается при интегрировании.

¹⁾ Можно прямо указать, каким образом отрезок сходимости зависит от коэффициентов c_n ряда. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

В общем случае ρ выражается формулой

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

(где $\overline{\lim}$ есть символ верхней точки накопления, введенный в дополнениях к гл. I).

Мы имеем право также почленно дифференцировать степенной ряд внутри его промежутка сходимости и приходим таким образом к равенству:

$$f'(x) = \sum_{v=1}^{\infty} v c_v x^{v-1}.$$

Чтобы доказать правильность этого утверждения, нам достаточно только показать, что стоящий справа степенной ряд сходится равномерно, коль скоро x ограничено интервалом, который целиком лежит внутри промежутка сходимости. Пусть $|x| < q |\xi|$, причем мы пользуемся обозначением п^о 1. Члены интересующего нас ряда по абсолютному значению

меньше членов ряда $\sum_{v=1}^{\infty} |v c_v q^{v-1} \xi^{v-1}|$, следовательно нам достаточно до-

казать, ввиду того что $|c_v \xi^{v-1}| < \frac{M}{\xi} = N$, только сходимость ряда

$N \sum_{v=1}^{\infty} v q^{v-1}$. Но в этом ряду отношение $(n+1)$ -го члена к n -ному равно

$\frac{n+1}{n} q$. Оно стремится с возрастанием n к пределу q , представляющему

правильную дробь, а отсюда по теореме § 2, п^о 2 следует сходимость этого ряда с положительными и независимыми от x членами. Следовательно предыдущий степенной ряд сходится равномерно и представляет поэтому согласно теореме предыдущего параграфа производную $f'(x)$ от функции $f(x)$; тем самым наше утверждение доказано.

Применяя этот результат снова к степенному ряду

$$f'(x) = \sum_{v=2}^{\infty} v c_v x^{v-1},$$

мы видим, что путем почленного дифференцирования получается степенной ряд:

$$f''(x) = \sum_{v=2}^{\infty} v(v-1) c_v x^{v-2};$$

продолжая таким образом дальше, мы приходим к следующей общей теореме: всякая функция, выражаемая с помощью степенного ряда, имеет внутри промежутка сходимости производные любого порядка, и эти производные можно

получить почленным дифференцированием данного ряда¹⁾.

3. Действия над степенными рядами. Свойствами степенных рядов, выраженными в предыдущих теоремах, объясняется тот факт, что со степенными рядами можно оперировать так же, как с целыми рациональными функциями. Само собой понятно (см. стр. 326), что сложение и вычитание степенных рядов производятся путем сложения и вычитания соответствующих коэффициентов. Подобным же образом очевидно, что умножение степенного ряда на постоянный множитель производится, как и у всякого ряда, путем умножения каждого члена в отдельности. Умножение и деление степенных рядов требуют уже несколько более детального рассмотрения, которое дается в дополнениях к этой главе. Здесь я только отмечу, не доказывая, что два степенных ряда

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v x^v$$

перемножаются между собой как целые рациональные функции. Именно имеет место следующая теорема.

Произведение двух предыдущих степенных рядов выражается в общей области сходимости обоих рядов в виде степенного ряда

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v,$$

коэффициенты которого даются формулами

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots \dots \dots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

(доказательство дано в дополнениях § 1).

¹⁾ В качестве явного выражения k -той производной получаем:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{v=k}^{\infty} v(v-1)\dots(v-k+1) c_v x^{v-k},$$

или, записывая в несколько иной форме,

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{v=k}^{\infty} \binom{v}{k} c_v x^{v-k} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{k+v}{k} c_{v+k} x^v,$$

эти две формулы часто применяются.

4. Теорема об однозначности разложения в степенной ряд. Для теории степенных рядов имеет важное значение следующий факт: если относительно двух степенных рядов

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \text{ и } \sum_{v=0}^{\infty} b_v x^v$$

нам известно, что они выражают одну и ту же функцию $f(x)$, то они тождественны между собой, т. е. при любом n имеет место равенство $a_n = b_n$, или иными словами: функция $f(x)$ может быть только единственным образом представлена с помощью степенного ряда.

Для доказательства этого факта нам достаточно только заметить, что разность этих двух рядов, т. е. степенной ряд:

$$\varphi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$$

с коэффициентами $c_v = a_v - b_v$ имеет для всех рассматриваемых значений x значение 0, т. е. представляет функцию $\varphi(x) = 0$. В частности следовательно при $x=0$ значение степенного ряда равно нулю, т. е. $c_0 = 0$, и потому $a_0 = b_0$. Дифференцируя степенной ряд и замечая, что производная $\varphi'(x)$ тоже повсюду равна нулю, мы получаем, что и степенной ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} v c_v x^{v-1}$$

постоянно равен нулю, откуда специально при $x=0$ следует, что $c_1 = 0$ или $a_1 = b_1$. Мы можем продолжать таким образом дифференцировать и полагать затем $x=0$ и находим при этом, что все коэффициенты c_v исчезают, а это и нужно было доказать.

Впрочем мы видим, что мы можем придать нашим рассуждениям также следующий оборот: если мы продифференцируем ряд

$$f(x) = \sum a_v x^v$$

v раз и затем положим $x=0$, то мы тотчас же получим:

$$a_v = \frac{1}{v!} f^{(v)}(0),$$

т. е. всякий степенной ряд является рядом Тейлора для выражаемой с его помощью функции. Однозначность разложения выражается теперь в том, что коэффициенты разложения однозначным образом определяются из хода функции

§ 6. Разложение заданных функций в степенные ряды.

Метод неопределенных коэффициентов. Примеры.

Всякий степенной ряд представляет в своей области сходимости непрерывную функцию, имеющую непрерывные производные любого порядка. Мы рассмотрим теперь обратную задачу о разложении заданных функций в степенные ряды. В принципе для этого всегда можно воспользоваться формулой Тэйлора, но в отдельных случаях часто при этом возникают затруднения при нахождении n -ной производной и при оценке остаточного члена. Во многих случаях можно гораздо проще достигнуть цели, если поступить следующим образом: полагаем

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v,$$

где c_v — неизвестные нам пока коэффициенты, затем определяем коэффициенты c_v на основании известных нам свойств функции $f(x)$ и после этого доказываем сходимость найденного ряда. Этот ряд представляет тогда некоторую функцию от x и остается только убедиться в том, что эта функция совпадает с $f(x)$. На основании доказанной однозначности разложения в степенной ряд мы уверены, что никакой другой степенной ряд кроме найденного не может дать требуемого разложения.

Мы сейчас ознакомимся с примерами применения этого метода. Впрочем мы уже в шестой главе получили разложения для $\arctg x$ и $\log(1+x)$ таким путем, который собственно говоря относится по идее к содержанию настоящей главы. Именно мы просто почленно интегрировали ряды для производных этих функций, которые оказались геометрическими рядами.

1. Показательная функция. Поставим себе задачу найти функцию $f(x)$, для которой $f'(x) = f(x)$ и $f(0) = 1$. Пишем степенной ряд с неопределенными коэффициентами

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

дифференцируя получаем

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

Так как по условию эти два ряда должны совпадать, то непосредственно получаем уравнения:

$$nc_n = c_{n-1}.$$

Заметив, что из условия $f(0) = 1$ следует, что коэффициент c_0 должен иметь значение, равное 1, мы можем последовательно определить все коэффициенты и получаем степенной ряд:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Этот степенной ряд сходится для всех значений x , что легко видеть с помощью критерия сходимости, основанного на рассмотрении отношения двух последовательных членов, и представляет поэтому функцию $f(x)$, для которой действительно выполнены условия $f(x) = f(x)$ и $f(0) = 1$. (При этих рассуждениях мы сознательно не пользовались известными нам результатами относительно показательных функций.) Что эта функция $f(x)$ совпадает с показательной функцией e^x непосредственно следует из того, что e^x удовлетворяет предыдущим условиям. В самом деле, образуя отношение:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

и дифференцируя его, получаем:

$$\varphi'(x) = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0,$$

следовательно функция $\varphi(x)$ является постоянной и она должна равняться 1, так как при $x=0$ она имеет значение 1. Тем самым доказана тождественность нашего степенного ряда с показательной функцией. (См. также совершенно аналогичное рассуждение на стр. 154.)

2. Биномиальный ряд. Мы можем теперь легко вывести с помощью метода неопределенных коэффициентов биномиальный ряд (см. гл. VI, § 3, п° 3). Мы хотим разложить в ряд функцию $f(x) = (1+x)^a$ и полагаем:

$$f(x) = (1+x)^a = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Принимая во внимание, что наша функция очевидно удовлетворяет соотношению:

$$(1+x)f'(x) = af(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a c_v x^v,$$

образуем, дифференцируя почленно предыдущий ряд и умножая его на множитель $(1+x)$, ряд:

$$(1+x)f'(x) = c_1 + (2c_2 + c_1)x + (3c_3 + 2c_2)x^2 + \dots$$

Путем сравнения коэффициентов получаем соотношения:

$$a c_0 = c_1; \quad a c_1 = 2c_2 + c_1; \quad a c_2 = 3c_3 + 2c_2, \dots$$

Но $c_0 = 1$, так как при $x=0$ наш ряд должен иметь значение 1, и мы получим таким образом для коэффициентов последовательно выражения:

$$c_1 = a, \quad c_2 = \frac{a(a-1)}{2}, \quad c_3 = \frac{a(a-1)(a-2)}{3 \cdot 2}, \dots$$

и, как легко доказать, вообще

$$c_v = \frac{a(a-1)\dots(a-v+1)}{1 \cdot v(v-1)\dots 2 \cdot 1} = \binom{a}{v},$$

т. е. мы действительно получаем биномиальный ряд

$$(1+x)^a = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{a}{v} x^v.$$

Критерий сходимости, основанный на рассмотрении отношения двух последовательных членов, показывает, что при $|x| < 1$ ряд сходится, а при $|x| > 1$ расходится, если только a не является целым положительным числом; действительно, отношение $n+1$ -го члена к n -ному равно в данном случае $\frac{a-n}{n+1}x$, а абсолютное значение этого выражения при неограниченном возрастании n стремится к $|x|$. Следовательно при $|x| < 1$ наш ряд представляет функцию $f(x)$, которая удовлетворяет соотношению $(1+x)f'(x) = af(x)$, что непосредственно следует из закона образования коэффициентов. Кроме того $f(0) = 1$. Но эти условия характеризуют нашу функцию $f(x)$, как функцию тождественную с функцией $(1+x)^a$. В самом деле для отношения

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^a}$$

имеем:

$$\varphi'(x) = \frac{(1+x)^a f'(x) - a(1+x)^{a-1} f(x)}{(1+x)^{2a}} = 0;$$

следовательно $\varphi(x)$ есть постоянная, равная притом единице, так как $\varphi(0) = 1$.

Приведу еще отдельно следующие частные случаи биномиального ряда: геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v x^v,$$

4) Привожу без доказательства точные условия сходимости этого разложения в ряд. Если показатель степени a целое положительное число, то ряд с некоторого места обрывается и поэтому разложение имеет место при всех значениях x (элементарная формула бинома). При всех других значениях a ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = 1$ имеем в случае $a > 0$ абсолютную сходимость, в случае $-1 < a < 0$ условную сходимость, в случае $a \leq -1$ расходимость. Наконец при $x = -1$ ряд абсолютно сходится если $a \geq 0$ и расходится если $a < 0$.

производную геометрического ряда с обратным знаком

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v (v+1) x^v$$

и ряды

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \end{aligned}$$

Если возьмем первые два или три члена в этих рядах, то получим часто применяющиеся приближенные формулы.

3. Ряд для $\arcsin x$. Этот ряд проще всего получить разлагая выражение $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ по формуле бинома в ряд

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots$$

и интегрируя почленно этот равномерно сходящийся при $|t| < q < 1$ ряд в пределах от 0 до x ; мы непосредственно получаем таким путем разложение:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots,$$

которое сходится при $|x| \leq 1$ и расходится, как легко видеть с помощью признака Даламбера, при $|x| > 1$.

Вывести это разложение с помощью формулы Тейлора было бы значительно неудобнее ввиду трудности оценки остаточного члена.

4. Разложение в степенной ряд функции $\text{Ar sh } x = \log(-x + \sqrt{1+x^2})$. Этот ряд мы получаем совершенно аналогичным путем: разлагаем производную по формуле бинома:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

и затем почленно интегрируем. Таким образом получаем разложение в ряд

$$\text{Ar sh } x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \dots,$$

промежуток сходимости которого есть интервал $-1 \leq x \leq 1$.

5. Пример умножения рядов. Разложение функции

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}$$

дает нам простой пример применения правила умножения степенных рядов. Действительно, достаточно только перемножить логарифмический ряд

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

с геометрическим рядом $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$, и мы получаем при $|x| < 1$ замечательное разложение

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+x)}{1+x} &= x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots, \end{aligned}$$

в чем вы сами легко можете убедиться.

6. Пример почленного интегрирования ряда. Эллиптический интеграл. Мы встретились раньше в приложениях (время колебания маятника) с эллиптическим интегралом:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Мы допускаем, что $k^2 < 1$. Чтобы вычислить этот интеграл мы можем поступить следующим образом: разлагаем сначала подынтегральную функцию по формуле бинома:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots$$

Так как этот ряд, сходится равномерно при всех значениях φ (ибо $k^2 \sin^2 \varphi \leq k^2$), то мы можем его почленно интегрировать:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi + \dots$$

Встречающиеся здесь интегралы были уже нами раньше вычислены (см. гл. IV, § 4, п. 4). Подставляя их значения, получаем:

$$\begin{aligned} K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Дальнейшие примеры разложения в ряд даны в дополнениях к этой главе.

§ 7. Степенные ряды с комплексными членами.

1. Введение комплексных членов в степенные ряды. Сходство между степенными рядами для функций, которые на первый взгляд совершенно различны между собой, побудило еще Эйлера установить чисто формальным образом связь между ними, допуская, что переменная x может принимать и комплексные значения, и подставляя в частности вместо x чисто мнимые значения. Мы вначале поступим таким же образом и убедимся в плодотворности такого приема.

Первое поразительное соотношение такого рода получим, заменяя в ряде для e^x величину x чисто мнимой величиной $i\varphi$, где φ —действительное число. Принимая во внимание основное соотношение для мнимой единицы i , именно $i^2 = -1$, из которого вытекает, что $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$,... и отделяя в полученном ряду действительную часть от мнимой, непосредственно имеем:

$$e^{i\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots + i \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right)$$

или записывая в ином виде

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Это весьма важное Эйлерово соотношение, носящее пока чисто формальный характер, согласуется с формулой Муавра, о которой мы уже упоминали в дополнениях к гл. I, т. е. равенством:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).$$

Это равенство показывает в силу формулы Эйлера, что и для чисто мнимых значений $x = i\varphi$, $y = i\psi$ имеет место соотношение:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Если в степенном ряду для $\cos x$ заменить переменную x чисто мнимой величиной ix , то непосредственно получается ряд для $\operatorname{ch} x$. Это соотношение можем выразить с помощью равенства:

$$\operatorname{ch} x = \cos ix.$$

Подобным же образом получаем

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix.$$

Эйлерово соотношение, на основании которого также $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, дает выражение тригонометрических функций с помощью показательных

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

эти выражения вполне аналогичны соответствующим выражениям для гиперболических функций и непосредственно переходят в них на основании соотношений $\operatorname{ch} x = \cos ix$, $\operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix$.

Соответствующие формальные соотношения имеют место конечно также для функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cth} x$, связанных равенствами

$$\operatorname{th} x = \frac{1}{i} \operatorname{ctg} ix, \quad \operatorname{th} x = i \operatorname{ctg} ix.$$

Наконец аналогичные соотношения имеют место также для функций обратных тригонометрическим и гиперболическим. Так например из равенства:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{e^{2ix} - 1}{i(e^{2ix} + 1)}$$

непосредственно находим:

$$e^{2ix} = \frac{1 + iy}{1 - iy}.$$

Логарифмируя это равенство и заменяя y через x , а x через $\operatorname{arctg} x$, получаем равенство:

$$[\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

устанавливающее замечательную связь между $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ и логарифмом. Если в известный ряд для $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ подставим вместо x величину ix , то действительно получим степенной ряд для $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \left(ix - \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5} - \dots \right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Предыдущие соотношения носят пока чисто формальный характер и нуждаются конечно в более точном выяснении их внутреннего значения. В ближайшем номере мы наметим, как это можно сделать, опираясь на теорию функций. В дальнейшем однако будет играть роль только соотношение Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Для обоснования этого соотношения мы можем обойтись без более подробного анализа с помощью теории функций, просто рассматривая символ $e^{i\varphi}$ как сокращенную запись выражения $\cos \varphi + i \sin \varphi$. Тогда формула Моавра $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)}$ является простым следствием элементарных тригонометрических теорем сложения. Далее для того, чтобы соотношение $e^x e^y = e^{x+y}$ имело место и для комплексных значений аргумента, мы, оставаясь на формальной точке зрения, вводим определение: $e^x = e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta)$ при $x = \xi + i\eta$, (ξ и η — действительные числа).

2. Краткие указания из области общей теории функции. Хотя указанная чисто формальная точка зрения сама по себе безупречна, все же хочется в предыдущих формулах видеть нечто большее чем чисто формальные определения. Стремление к этой цели приводит к общей теории функции, как сокращенно называют теорию аналитических функций комплексного переменного. В теории функции можно взять за исходный пункт установление общей теории степенных рядов с комплексными переменными и комплексными коэффициентами. Построение такой теории степенных рядов действительно не представляет никаких затруднений, если ввести сначала понятие о пределе в область комплексных чисел, и выполняется почти тем же самым путем, как и для действительных чисел. Так как нам в дальнейшем не придется пользоваться этими вещами, то я приведу здесь только несколько теорем, не приводя доказательств. Оказывается, что для степенных рядов в комплексной области имеет место следующая теорема, представляющая непосредственное обобщение теоремы § 5, п° 1: Если степенной ряд сходится при комплексном значении $x = \xi$, то он сходится также при всяком значении x , для которого $|x| < |\xi|$; если ряд расходится при некотором значении $x = \xi$, то он расходится также при всяком значении x , для которого $|x| > |\xi|$. Степенной ряд, который не является повсюду сходящимся и сходящийся не только при $x = 0$, имеет круг сходимости, т. е. существует радиус сходимости $\rho > 0$, или такое число, что при $|x| < \rho$ ряд абсолютно сходится, при $|x| > \rho$ ряд расходится.

Коль скоро понятие о функции, выражаемой с помощью степенного ряда от комплексного переменного x , и правила действий над этими рядами обоснованы, можно представить себе, что функции e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\arctg x$ и т. д. просто определяются с помощью тех же степенных рядов, которыми они выражаются для действительных значений x . В таком случае все предыдущие формальные соотношения действительно становятся очевидными. }

Я хотел бы пояснить только на двух примерах, какую пользу приносит рассмотрение комплексных значений для понимания элементарных функций. Геометрический ряд для функции $\frac{1}{1-x}$ перестает быть сходящимся при $x = 1$ и $x = -1$, также и ряд для $\arctg x$ хотя обе эти функции не обнаруживают на концах промежутка сходимости никаких особенностей и при всех действительных значениях x они и все их производные непрерывны. (Что ряд для $\frac{1}{1-x^2}$ и $\log(1-x)$ при $x = 1$

перестает быть сходящимся, наоборот, нам вполне понятно, так как при этом значении функции обращаются в бесконечность.) Но то, что ряд для $\operatorname{arctg} x$ и ряд $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v x^{2v}$ при $|x| > 1$ перестают быть сходящимися, становится непосредственно ясным, если рассматривать также комплексные значения x . Именно при $x = i$ эти функции обращаются в бесконечность и следовательно не могут уже быть представлены с помощью сходящегося ряда; поэтому теорема о круге сходимости сама по себе исключает возможность сходимости рядов в области действительных чисел вне промежутка $|x| \leq 1$.

Второй пример представляет рассмотренная нами раньше (стр. 285) функция $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, которая несмотря на регулярный характер не разлагается в ряд Тэйлора. В действительности однако функция перестает быть непрерывной в окрестности нулевой точки, если только станем рассматривать чисто мнимые значения $x = i\xi$: Функция переходит тогда в $e^{-\frac{1}{\xi^2}}$ и при $\xi \rightarrow 0$ неограниченно возрастает. Поэтому понятно, что для нее не может существовать разложения в степенной ряд по степеням x .

Этими краткими указаниями относительно теории функций и степенных рядов в комплексной области я должен здесь ограничиться.

ДОПОЛНЕНИЯ К ВОСЬМОЙ ГЛАВЕ.

§ 1. Умножение и деление рядов.

1. Умножение абсолютно сходящихся рядов. Пусть

$$A = \sum_{v=0}^{\infty} a_v, \quad B = \sum_{v=0}^{\infty} b_v$$

два абсолютно сходящихся ряда; одновременно рассмотрим также ряды их абсолютных значений

$$A = \sum_{v=0}^{\infty} |a_v| \quad \text{и} \quad B = \sum_{v=0}^{\infty} |b_v|.$$

Полагаем далее

$$A_n = \sum_{v=0}^n a_v, \quad B_n = \sum_{v=0}^n b_v, \quad A_n = \sum_{v=0}^n |a_v|, \quad B_n = \sum_{v=0}^n |b_v|$$

и

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0.$$

Мы утверждаем, что ряд $\sum_{v=0}^{\infty} c_v$ абсолютно сходящийся и сумма его равна AB .

Для доказательства представим себе, что n -ые частичные суммы A_n и B_n и соответственно A_n и B_n перемножаются между собой

$$A_n B_n = a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$A_n B_n = |a_0| |b_0| + |a_1| |b_0| + |a_0| |b_1| + |a_1| |b_1| + \dots + |a_n| |b_n|.$$

Если будем неограниченно увеличивать n , то справа получим ряды, содержащие члены вида $a_v b_\mu$ в первом случае и вида $|a_v| |b_\mu|$ во втором случае. Второй ряд состоит из положительных членов, следовательно его частичные суммы возрастают. Так как эти частичные суммы, ввиду того что $A_n < A$ и $B_n < B$, остаются всегда меньше постоянного числа AB , то второй ряд сходится, а вместе с тем абсолютно сходится и первый ряд. Непосредственно ясно, что сумма первого ряда равна AB , а сумма второго ряда равна AB . Так как в абсолютно сходящихся рядах можно произвольно изменять порядок членов, не изменяя суммы ряда и так как ряд $\sum_{v=0}^{\infty} c_v$ отличается только порядком членов от ранее рассмотренного,

то наше утверждение доказано.

2. Умножение и деление степенных рядов. Наша теорема главным образом применяется в теории степенных рядов. Из нее непосредственно следует, что произведение двух степенных рядов:

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \text{ и } \sum_{v=0}^{\infty} b_v x^v$$

выражается в общей области сходимости этих рядов с помощью степенного ряда $\sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$, коэффициенты которого даются формулой

$$c_v = a_0 b_v + a_1 b_{v-1} + \dots + a_v b_0.$$

Что касается деления степенных рядов, то частное двух предыдущих рядов можно также представить в виде степенного ряда $\sum_{v=0}^{\infty} q_v x^v$, если только постоянный член b_0 в делителе не равен нулю. (В противном случае такое выражение вообще говоря невозможно, потому что при $x=0$, благодаря обращению делителя в нуль, ряд не мог бы сходиться,

между тем с другой стороны всякий ряд, расположенный по степеням x , должен сходиться при $x=0$.) Коэффициенты ряда

$$\sum_{v=0}^{\infty} q_v x^v$$

можно последовательно определить, если заметить, что непременно

$$\sum_{v=0}^{\infty} q_v x^v \cdot \sum_{v=0}^{\infty} b_v x^v = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$$

и следовательно имеют место равенства

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 b_0, \\ a_1 &= q_0 b_1 + q_1 b_0, \\ a_2 &= q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_v &= q_0 b_v + q_1 b_{v-1} + \dots + q_v b_0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем q_0 , из второго уравнения находим q_1 , из третьего, пользуясь найденными значениями, находим q_2 и т. д. Для того чтобы строго обосновать возможность выражения частного двух степенных рядов с помощью третьего степенного ряда, мы должны

еще исследовать, сходится ли формально полученный ряд $\sum_{v=0}^{\infty} q_v x^v$ и в какой области он сходится. Я опущу это общее исследование, результатами которого мы дальше не воспользуемся, и ограничусь только указанием, что ряд действительно сходится, если только x изменяется в достаточно малом интервале, в котором во всяком случае делитель не должен обращаться в нуль и как делимое так и делитель должны быть сходящимися рядами.

§ 2. Предельные переходы, связанные с показательной функцией.

1. Равномерность предельного перехода $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$. При любом заданном числе a предельный переход $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$ при $n \rightarrow \infty$ в интервале $0 \leq x \leq a$ оказывается равномерным, так же как и предельный переход

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^{-x}.$$

Достаточно доказать первую часть утверждения, так как доказательство второй части проводится тем же самым путем. Для этого мы исходим из формулы:

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} \rightarrow e, \text{ если } h \rightarrow 0,$$

которая имеет следующий смысл: для любого наперед заданного положительного, сколь угодно малого числа δ можно выбрать достаточно малое число h так, чтобы при $0 < h \leq h$ имело место соотношение

$$e(1-\delta) < (1+h)^{\frac{1}{h}} < e(1+\delta).$$

Но при $h = \frac{x}{n}$ очевидно

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = (1+h)^{\frac{x}{h}} = \left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^x.$$

Полагаем $\frac{a}{n} = h$, тогда h зависит только от a и n , но не зависит от x и с возрастанием n стремится к нулю; для всего интервала имеем:

$\frac{x}{n} = h \leq k$, а вместе с тем для любого сколь угодно малого δ при выборе достаточно большого числа n :

$$e(1-\delta) < (1+h)^{\frac{1}{h}} < e(1+\delta),$$

а следовательно и

$$e^x(1-\delta)^x < (1+h)^{\frac{x}{h}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x(1+\delta)^x.$$

Но при $0 \leq x \leq a$

$$(1+\delta)^x \leq (1+\delta)^a \text{ и } (1-\delta)^x \geq (1-\delta)^a,$$

следовательно мы имеем:

$$e^x(1-\delta)^a < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x(1+\delta)^a.$$

Эти неравенства и доказывают равномерность предельного перехода, так как $(1-\delta)^a$ и $(1+\delta)^a$ лежат сколь угодно близко к 1, если только $h = \frac{a}{n}$ выбрано достаточно малым, т. е. если n выбрано достаточно большим. В самом деле, мы видим на основании этих неравенств, что при выборе достаточно большого n разность $\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x\right|$ может

быть сделана меньше любого числа, независимо от положения точки x в интервале $0 \leq x \leq a$.

2. Замечание по поводу интегрирования и дифференцирования показательной функции. Доказанная равномерность даст нам право применить следующее рассуждение, полезное как иллюстрация наших предыдущих теорем об интегрировании. Имеем:

$$\int_0^x \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} - 1 \right],$$

что непосредственно получается путем подстановки $u = 1 + \frac{t}{n}$ в левую часть равенства. Далее в силу равномерности сходимости мы имеем право выполнить переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ под знаком интеграла и получаем

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1,$$

т. е. формулу интегрирования для показательной функции.

3. Доказательство формулы $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$. Дадим еще другое

более глубокое применение этого свойства, пользуясь полученным при выводе формулы В ал л и с а (гл. IV, § 4, п° 4) результатом:

$$J_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

и понятием несобственного интеграла. Вводя в только что написанную формулу $u = \sin x$ в качестве нового переменного интегриации, получаем $du = \cos x dx$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1 - u^2)^n du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Полагая $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$, находим:

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Теперь мы пишем, разумея под A определенное постоянное число,

$$J_n = K_A + R_n,$$

где

$$K_A = \int_0^A \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt, \quad R_n = \int_A^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Далее отметим соотношение:

$$1 - a < e^{-a}, \quad (a > 0),$$

которое непосредственно вытекает из теоремы о среднем значении дифференциального исчисления следующим образом:

$$e^{-a} - e^0 = e^{-a} - 1 = -ae^{-ab} > -a.$$

В частности при $a = \frac{t^2}{n}$ имеем:

$$1 - \frac{t^2}{n} < e^{-\frac{t^2}{n}}, \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n < e^{-t^2}.$$

Предполагаем, что $A > 1$, тогда при $t > A$ непременно $e^{-t^2} < e^{-t}$ и мы получаем для R_n оценку:

$$0 < R_n < \int_A^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt < \int_A^{\sqrt{n}} e^{-t} dt = e^{-A} - e^{-\sqrt{n}},$$

т. е. во всяком случае $0 < R_n < e^{-A}$. Теперь переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$. В силу доказанного в п^о 1 свойства равномерности интеграл

K_A переходит при этом в $\int_0^A e^{-t^2} dt$ и мы таким образом непосредственно получаем:

$$0 < \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \int_0^A e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (J_n - K_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n \leq e^{-A}.$$

Теперь мы можем неограниченно увеличивать число A , которое мы до сих пор считали неизменным; при этом e^{-A} стремится к нулю. Следовательно мы получаем формулу:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

которую мы хотели доказать; эта формула может быть записана также в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

так как e^{-t^2} является четной функцией.

§ 3. Бесконечные ряды и несобственные интегралы.

Бесконечные ряды и введенные при их изучении понятия находят простые применения и аналогии в теории несобственных интегралов (см. гл. IV, § 8). Я ограничусь здесь случаем сходящегося интеграла с бесконечным промежутком интегрирования, например интегралом вида

$$\int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Если разделить промежуток интегрирования с помощью последовательности чисел $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots$ где $x_n \rightarrow \infty$, то можно интеграл представить в виде

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = a_1 + a_2 + \dots,$$

причем каждый член нашего ряда есть интеграл, именно

$$a_1 = \int_0^{x_1} f(x) dx, \quad a_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \dots$$

При этом совершенно безразлично, как мы выбрали точки x_n . Мы видим таким образом, что понятие сходящегося несобственного интеграла можно самым различным образом свести к понятию бесконечного ряда.

Особенно удобно выбрать точки x_n таким образом, чтобы подынтегральная функция имела в каждом частичном интервале постоянный знак.

Ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ соответствует тогда интеграл от абсолютного значения нашей функции

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx.$$

Мы естественно приходим таким образом к следующему понятию: несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ называется абсолютно

сходящимся, если интеграл $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ существует. В противном случае интеграл, если он вообще существует, называется условно сходящимся. Рассмотренные нами раньше интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

все абсолютно сходящиеся. Наоборот интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$$

представляет простой и важный пример условно сходящегося интеграла. Чтобы убедиться в сходимости этого интеграла, мы разбиваем его с помощью точек $x_v = v\pi$. Мы получаем таким образом члены:

$$a_v = \int_{(v-1)\pi}^{v\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

относительно которых мы тотчас же видим, что знаки их идут чередуясь и что $|a_{v+1}| < |a_v|$. Следовательно ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ сходится на основании критерия Лейбница (гл. VIII, § 1), так как кроме того $a_v \rightarrow 0$; отсюда нетрудно вывести заключение, что и интеграл сходится.

Что этот интеграл сходится только условно, предоставляю доказать вам самим; главным средством при доказательстве служит сравнение с членами гармонического ряда.

§ 4. Бесконечные произведения.

Мы подчеркнули уже в предварительных замечаниях к этой главе, что бесконечные ряды представляют собой только один (правда особенно важный) из способов выражения величин или функций с помощью бесконечных процессов. В качестве примера других процессов подобного рода я хотел бы рассмотреть здесь бесконечные произведения, не приводя доказательств.

В гл. IV, § 4 мы ознакомились с формулой Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots,$$

которая выражает число $\frac{\pi}{2}$ в виде „бесконечного произведения“.

Под значением бесконечного произведения:

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 a_2 a_3 a_4 \dots,$$

разумеют предел последовательности частичных произведений

$$a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots,$$

если этот предел существует.

Множители $a_1, a_2, a_3, \dots$ такого произведения могут конечно быть и функциями от переменной x . Особенно интересный пример представляет разложение в бесконечное произведение функции $\sin \pi x$, которое мы выведем в § 4, п° 7, следующей главы:

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \dots$$

В теории чисел играет очень важную роль разложение в бесконечное произведение „зета-функции“. Придерживаясь обозначений, принятых в теории чисел, обозначая переменную через s и определяю эту функцию при $s > 1$ выражением:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Мы знаем (гл. VIII, § 2, п° 3), что при $s > 1$ ряд, стоящий в правой части, будет сходящимся. Если p есть некоторое число большее единицы, то путем разложения в геометрический ряд непосредственно получаем равенство:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

Представим себе, что вместо p мы последовательно подставили в эту формулу все простые числа $p_1, p_2, p_3, \dots$ и полученные равенства перемножили между собой, тогда в левой части получим произведение вида:

$$\frac{1}{1 - p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \dots$$

Если перемножим между собой ряды, стоящие в правой части, не доказывая законности этого приема, и заметим, что по известной элементарной теореме всякое целое число n можно представить одним и только одним способом в виде произведения степеней простых чисел, то увидим, что в правой части как раз и получается функция $\zeta(s)$ и мы приходим к замечательному разложению в бесконечное произведение:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_3^{-s}} \dots$$

Это разложение, доказательство которого я здесь лишь вкратце отметил, действительно представляет разложение функции $\zeta(s)$ в бесконечное произведение, так как существует бесчисленное множество простых чисел.

В общей теории бесконечных произведений обычно исключают тот случай, когда один из множителей равен нулю или когда произведение $a_1 a_2 \dots a_n$ с возрастанием n стремится к нулю. В таком случае для сходимости произведения необходимо, чтобы множители a_n с возрастанием n стремились к 1. Поэтому мы имеем право допустить (отбрасывая в случае надобности конечное число множителей, что при вопросе о сходимости значения не имеет), что $a_n > 0$, и можем сказать: необходимым и достаточным условием сходимости бесконечного произведения является сходимость ряда:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \log a_v.$$

В самом деле, очевидно что одновременно с частичными суммами этого ряда стремятся к пределу и частичные произведения $a_1 a_2 \dots a_n$ и обратно.

Обыкновенно пользуются, полагая $a_n = 1 + \alpha_n$, при исследованиях сходимости следующим достаточным признаком. Произведение

$$\prod_{v=1}^{\infty} (1 + \alpha_v),$$

сходится, если ряд:

$$\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$$

сходится. Для доказательства мы имеем право, опуская в случае надобности конечное число членов, допустить, что $|\alpha_v| < \frac{1}{2}$. Тогда

$$1 - |\alpha_v| > \frac{1}{2}.$$

По теореме о среднем значении имеем:

$$\log(1 + \alpha_v) = \log(1 + h) - \log 1 = h \frac{1}{1 + \theta h},$$

где

$$0 < \theta < 1,$$

следовательно:

$$\left| \log(1 + \alpha_v) \right| = \left| \frac{\alpha_v}{1 + \theta \alpha_v} \right| < \frac{|\alpha_v|}{1 - |\alpha_v|} < 2 |\alpha_v|$$

и потому сходимость ряда $\sum_{v=1}^{\infty} |\log(1 + \alpha_v)|$ следует из сходимости

ряда $\sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v|$.

Из нашего критерия непосредственно следует сходимость указанного выше разложения в бесконечное произведение функций $\sin \pi x$ для всех значений x . Подобным же образом, легко видеть, что при $p \geq 2$ и $s > 1$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s-1}, \quad \frac{1}{p^s-1} < \frac{2}{p^s};$$

если заставим теперь p пробегать ряд простых чисел, то ряд $\sum \frac{1}{p^s}$ должен сходиться, так как члены его составляют только часть членов сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, следовательно тем самым доказана сходимость произведения $\prod \frac{1}{1-p^{-s}}$ при $s > 1$.

§ 5. Дальнейшие примеры бесконечных рядов.

1. Различные разложения в ряд. В качестве примеров на метод неопределенных коэффициентов я привожу следующие разложения в ряд:

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^5 + \dots \quad (1)$$

$$(\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3} \frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{3} + \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cos(\mu \arcsin x) &= 1 - \frac{\mu^2}{2!} x^2 + \\ &+ \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!} x^4 - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{6!} x^6 + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

из которого путем дифференцирования получается ряд:

$$\frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\mu}{1!} x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{5!} x^5 - \dots$$

Далее, имеем ряд:

$$\sin(\mu \arcsin x) = \frac{\mu}{1!} x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{5!} x^5 - \dots \quad (4)$$

из которого дифференцированием получаем ряд:

$$\frac{\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{\mu^2-1^2}{2!} x^2 + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{4!} x^4 - \dots$$

Все эти разложения имеют место при $|x| < 1$. Если в ряды (3) и (4) подставим $x = \sin \varphi$, то получим разложение $\cos \mu \varphi$ и $\sin \mu \varphi$ по степеням $\sin \varphi$. Эти ряды обрываются, т. е. превращаются в полиномы, если μ — целое число, а именно в первых двух рядах, если μ — четное и в последних двух, если μ — нечетное целое число.

Мы получаем эти ряды следующим образом: сначала мы пишем для функции $y=f(x)$, которая должна быть разложена, ряд с неопределенными коэффициентами $y=\sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$, затем устанавливаем для функции $f(x)$ требования в виде дифференциальных уравнений и условий в точке $x=0$ с помощью которых определяем коэффициенты, доказываем сходимость полученного таким образом степенного ряда и должны наконец доказать, что сумма ряда $\varphi(x)$ тождественна с $f(x)$.

Рассмотрим сперва функцию:

$$y=f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производная ее

$$y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

следовательно $y'(1-x^2)-xy-1=0$ и далее $f(0)=0$. Подставляя степенной ряд $\sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v$ в левую часть предыдущего равенства и располагая левую часть по степеням x , мы находим, что ряд

$$(c_1-1)+(c_2-c_0)x+(3c_3-2c_1)x^2+\dots \\ \dots +[(v+2)c_{v+2}-(v+1)c_v]x^{v+1}+\dots$$

должен обращаться в нуль при всех значениях x ; следовательно все его коэффициенты должны равняться нулю, откуда мы можем последовательно определить все значения $c_0, c_1, c_2, \dots$. Действительно замечая, что $c_0=0$, так как $f(0)=0$, получаем, что $c_0=c_2=c_4=\dots=0$ и $c_1=1$, $c_3=\frac{2}{3}$, $c_5=\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$, $c_7=\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}, \dots$; таким образом мы получаем ряд:

$$\varphi(x)=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x^5+\dots$$

сходимость которого при $|x|<1$ непосредственно вытекает из критерия Даламбера.

Остается еще показать, что найденная функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Функция $\varphi(x)$ во всяком случае удовлетворяет условиям $\varphi(0)=0$ и $(1-x^2)\varphi'(x)-x\varphi(x)-1=0$, что следует из свойств ряда, выражаю-

щего $\varphi(x)$. Для функции $u = \sqrt{1-x^2} \varphi(x)$ производная

$$u' = \sqrt{1-x^2} \varphi' - \frac{x\varphi}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{откуда } u(0) = 0 \text{ и } u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

из второго условия путем интегрирования находим $u(x) = u(0) + \arcsin x$, а отсюда на основании первого условия следует $u(x) = \arcsin x$. Вместе с тем доказано равенство:

$$\varphi(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и справедливость формулы (1).

Так как

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\arcsin x)^2,$$

то путем почленного интегрирования формулы (1) в пределах от 0 до x получаем формулу (2).

Для функции $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$ находим:

$$f'(x) = -\frac{\mu}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\mu \arcsin x),$$

следовательно $(1-x^2)f'(x)^2 = \mu^2(1-f(x)^2)$; дифференцируя еще раз и опуская множитель $2f'(x)$, получаем:

$$(1-x^2)f'' - xf' + \mu^2 f = 0.$$

Кроме того $f(0) = 1$ и $f'(0) = 0$. Обратно, если нам относительно некоторой функции известно, что она удовлетворяет этим трем условиям, то мы можем заключить, что непременно $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$. В самом деле, умножая прежде всего на $2f'(x)$ получаем дифференциальное уравнение $2(1-x^2)f'f'' - 2xf'^2 + 2\mu^2 ff' = 0$ которое можно также записать в виде:

$$\frac{d}{dx} \{ (1-x^2)f'^2 - \mu^2(1-f^2) \} = 0;$$

отсюда следует, что $(1-x^2)f'^2 - \mu^2(1-f^2) = \text{const}$, но левая часть при $x=0$ равна нулю, ввиду того что $f(0) = 1$ и $f'(0) = 0$, следовательно $(1-x^2)f'^2 - \mu^2(1-f^2) = 0$. Вводя вместо x новое переменное t с помощью подстановки $\cos t = f(x)$ или $t = \arccos f(x)$ после небольших преобразований получим дифференциальное уравнение

$$(1-x^2) \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - \mu^2 = 0$$

откуда, принимая во внимание условие $f(0) = 1$, т. е. $t(0) = 0$, находим искомый результат $t(x) = \mu \arcsin x$, или $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$.

и подставить справа вместо $e^x - 1$ степенной ряд, то по способу, указанному на стр. 362, получим для коэффициентов B_n рекуррентную формулу, которая дает возможность последовательно вычислить все B_n . Эти числа называются Бернуллиевыми числами. Это рациональные числа, так как при их вычислении приходится иметь дело только с рациональными операциями, которые, как легко видеть, при нечетном n , за исключением $n=1$, обращаются в нуль; первые несколько коэффициентов выражаются следующим образом

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_{10} = \frac{5}{66}, \dots$$

Я ограничусь кратким указанием на то, каким образом эти числа входят в искомые разложения элементарных трансцендентных функций. Сначала получаем, пользуясь преобразованием:

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \frac{B_2}{2!} x^2 + \dots = \frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + 1}{e^{\frac{x}{2}} - 1} = \frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}},$$

что

$$\frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_{2v}}{(2v)!} x^{2v}.$$

Заменяя в последней формуле x через $2x$, получаем имеющее место при $|x| < \pi$ разложение в ряд:

$$x \operatorname{cth} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{2^{2v} B_{2v}}{(2v)!} x^{2v}$$

из которого, при замене x через ix , получается разложение:

$$x \operatorname{ctg} x = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{2^{2v} B_{2v}}{(2v)!} x^{2v}, \quad |x| < \pi.$$

Пользуясь тождеством $2 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$, приходим к разложению:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{2^{2v} (2^{2v} - 1) B_{2v}}{(2v)!} x^{2v-1},$$

которое имеет место при $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Что касается доказательства этих утверждений, то я должен отослать к специальной литературе ¹⁾.

¹⁾ См. например К. Клопп, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 2 Aufl. Berlin, 1924, стр. 181 и след.

ГЛАВА IX.

РЯДЫ ФУРЬЕ.

Наряду со степенными рядами особенно важную роль как в чисто математических дисциплинах, так и в приложениях играет другой класс бесконечных рядов, а именно так называемые ряды Фурье, у которых отдельные члены являются тригонометрическими функциями, а сумма ряда представляет периодическую функцию.

§ 1. Периодические функции.

1. Общие замечания. Во многих приложениях мы встречаемся с периодическими функциями времени, т. е. такими функциями, ход изменения которых закономерно повторяется через определенные промежутки времени. У большинства машин периодические явления обуславливаются ритмом вращения махового колеса; примером может служить переменный ток от динамомашинны. Периодические функции встречаются далее во всех явлениях колебания. Периодическая функция с периодом $2l$ характеризуется равенством, имеющим место при всех значениях x ,

$$f(x + 2l) = f(x);$$

число $2l$ называется периодом¹⁾. Если нам теперь задана в определенном интервале, скажем в интервале $-l \leq x \leq l$ любая функция $f(x)$, то ее всегда можно продолжить как периодическую функцию, полагая, что вне интервала функция определена с помощью равенств $f(x + 2nl) = f(x)$, где n означает произвольное целое число, положительное или отрицательное. Правда, при этом следует заметить, что благодаря продолжению

¹⁾ Для представления периодических функций иногда бывает удобно изображать независимую переменную x не в виде точки на числовой прямой, а в виде точки на окружности. Если функция $f(x)$ имеет, скажем период 2π , т. е. если для каждого значения x имеет место равенство:

$$f(x + 2\pi) = f(x),$$

и если будем рассматривать x как центральный угол в круге радиуса 1, отсчитываемый от некоторого начального положения, то периодичность функции $f(x)$ выражается просто в том, что каждой точке окружности соответствует только одно значение функции (например в машине явление однозначно определяется положением махового колеса).

в точках $x = (2n+1)l$ функция становится прерывной, если только в первоначально заданной функции начальное и конечное значение не были равны между собой, т. е. $f(-l) = f(l)$; то же справедливо конечно и для производных. Для того чтобы иметь перед собой наглядный образ, будем рассматривать независимую переменную x как время (и писать соответственно этому иногда t вместо x) и выражать в таком случае с помощью функции $f(x)$ периодическое явление или, как мы будем это называть, колебание. Тогда период $2l = T$ называется периодом колебания.

Тут же отмечу общее предложение относительно периодических функций, выражаемое равенством:

$$\int_{-l-a}^{l-a} f(x) dx = \int_{-l}^l f(x) dx;$$

или словами: интеграл от периодической функции, распространенный на промежутке длины $T = 2l$, имеет одно и то же значение, как бы мы не сдвигали этот промежуток. Доказательство получим, заметив, что в силу равенства $f(\xi - 2l) = f(\xi)$ подстановка $x = \xi - 2l$ приведет к равенству:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_{a+2l}^{\beta+2l} f(\xi) d\xi = \int_{a+2l}^{\beta+2l} f(x) dx,$$

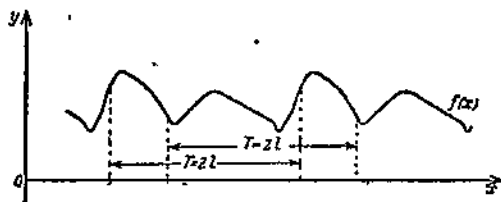
которое имеет место при любых значениях a и β .

В частности при $a = -l - a$ и $\beta = -l$ имеем:

$$\int_{-l-a}^{-l} f(x) dx = \int_{-l-a}^{-l} f(x) dx$$

поэтому:

$$\begin{aligned} \int_{-l-a}^{l-a} f(x) dx &= \int_{-l-a}^{-l} f(x) dx + \int_{-l}^{l-a} f(x) dx = \int_{-l-a}^{-l} f(x) dx + \int_{-l}^{l-a} f(x) dx = \\ &= \int_{-l}^l f(x) dx, \end{aligned}$$



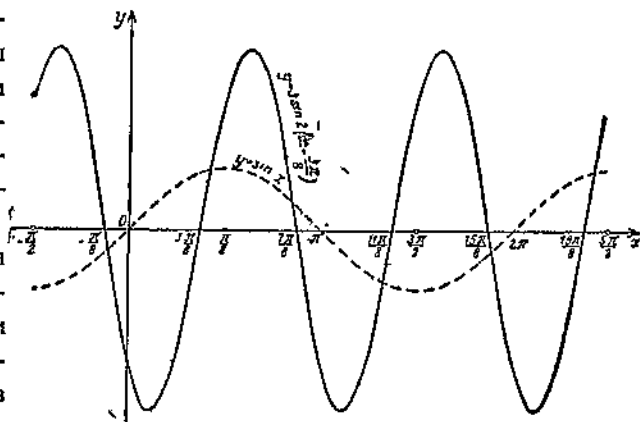
Черт. 115.

что и требовалось доказать. Впрочем черт. 115 это наглядно обнаруживает, если принять во внимание геометрическое значение интеграла.

Простейшими периодическими функциями, которые как мы увидим являются элементами, из которых строятся самые общие периодические функции, являются $a \sin \omega x$ и $a \cos \omega x$ или общее $a \sin \omega(x - \xi)$ и

$a \cos \omega(x - \xi)$, причем $a > 0$, ω , ξ означают постоянные. Явления, изображаемые этими функциями, мы называем простыми колебаниями. Период колебания $T = \frac{2\pi}{\omega}$, число ω называется частотой колебания, оно равно числу колебаний в течение времени 2π , так как $\frac{1}{T}$ есть число колебаний в единицу времени¹⁾. Число a называется амплитудой колебания; оно указывает нам наибольшее значение, которое может иметь функция $a \cos \omega(x - \xi)$ или $a \sin \omega(x - \xi)$. Число $\omega(x - \xi)$ мы называем фазой, а $\omega\xi$ — сдвигом фаз.

Графически эти функции получают, если сожмем синусоиду по направлению оси x -ов в отношении $\omega:1$ и растянем ее в направлении оси y -ов в отношении $a:1$ (черт. 116).



Черт. 116:

По формулам сложения тригонометрических функций можно наши простые колебания представить также в виде

$$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x \text{ и } \beta \cos \omega x - \alpha \sin \omega x,$$

где $\alpha = -a \sin \omega \xi$, $\beta = a \cos \omega \xi$. Обратно любая функция вида:

$$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x,$$

представляет простое колебание $a \sin \omega(x - \xi)$ с амплитудой $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и сдвигом фаз, определяемым из уравнений $\alpha = -a \sin \omega \xi$ и $\beta = a \cos \omega \xi$. Отсюда мы заключаем, что сумма таких функций с одной и той же частотой ω опять представляет функцию того же рода, т. е. простое колебание с частотой ω .

2. Сложение простых колебаний. Высшие гармонические. Биения. Часто движения оказываются простыми колебаниями (см. гл. V, § 4 и 1)

¹⁾ Часто, особенно в технической литературе, называют введенное здесь число колебаний в течение времени 2π круговой частотой, а число $\frac{1}{T}$ число колебаний в единицу времени, называют просто частотой. Здесь мы повсюду под термином частота будем разуметь круговую частоту.

гл. X), однако большей частью периодические движения носят более сложный характер, а именно представляются как результат „наложения“ простых колебаний. Математически это просто означает следующее: движение, например расстояние точки от положения покоя, выражается как функция времени суммой некоторого числа простых периодических функций предыдущего вида. Волны синусоид геометрически располагаются одна над другой или как говорят налагаются друг на друга. При таком наложении мы конечно будем считать, что периоды колебаний, которые нужно сложить, различны между собой; в самом деле наложение двух простых колебаний с той же самой частотой ω дает опять простое колебание с той же частотой, но с измененной амплитудой и фазой, как непосредственно вытекает из предыдущих формул.

Рассматривая простейший случай наложения двух колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , мы находим, что существует коренное различие между тем случаем, когда отношение частот рациональное число, и тем случаем, когда это отношение есть число иррациональное, или как говорят, когда частоты соизмеримы или несоизмеримы. Рассмотрим сначала первый случай и возьмем в качестве простейшего примера для второй частоты значение $\omega_2 = 2\omega_1$, тогда второе колебание будет иметь период

$$\frac{2\pi}{2\omega_1} = T_2 = \frac{T_1}{2},$$

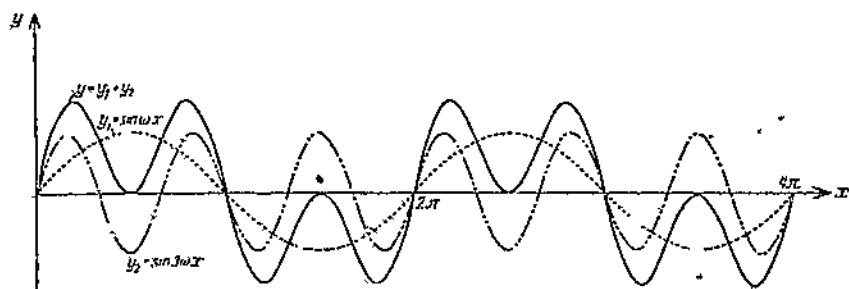
как раз равный половине периода первого колебания и будет само собой иметь не только период T_2 , но и двойной период T_1 , так как ход изменения функции безусловно повторяется по истечении двойного периода. Такое колебание с удвоенной частотой и вдвое меньшим периодом колебания называется первым гармоническим колебанием по отношению к первоначальному.

То же самое имеет место, если рассмотреть еще дальнейшее простое колебание с частотой $\omega_3 = 3\omega_1$. И здесь выражающая колебание функция $\sin 3\omega_1 x$ будет разумеется повторяться по истечении периода $\frac{2\pi}{\omega_1} = T_1$.

Такое колебание носит название второго гармонического колебания к данному; подобным же образом мы можем рассматривать третье, четвертое, $(n-1)$ -е гармоническое колебание с частотами $\omega_4 = 4\omega_1$, $\omega_5 = 5\omega_1$, $\omega_n = n\omega_1$ и произвольными впрочем сдвигами фаз друг относительно друга. Каждое такое высшее гармоническое колебание будет само собой также периодически повторяться по истечении периода

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, поэтому всякое наложение некоторого числа колебаний, пред-

ставляющих высшие гармонические по отношению к заданной основной частоте ω_1 , опять представляет периодическую функцию с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1} = T_1$. Налагая друг на друга колебания начиная с основного и кон-



Черт. 117.

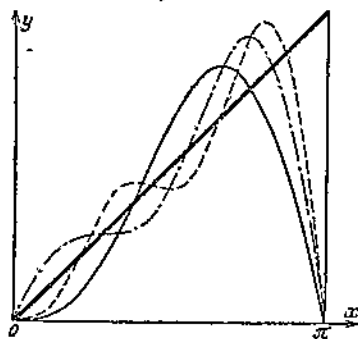
чая $(n - 1)$ -м гармоническим, мы получаем периодическую функцию вида:

$$S(x) = a + \sum_{\gamma=1}^n (a_{\gamma} \cos \gamma \omega x + b_{\gamma} \sin \gamma \omega x),$$

(постоянная a не нарушает периодичности, так как она является периодической функцией любого периода). Благодаря входящим в эту функцию $2n + 1$ постоянным, которые находятся в нашем распоряжении, мы имеем возможность образовать довольно сложные кривые, которые по форме своей уже весьма мало напоминают исходную синусоиду. Черт. 117—119 дают об этом более наглядное представление, чем может дать словесное описание.

Название „высшие гармонические колебания“ взято из акустики; если основному колебанию с частотой ω соответствует определенный тон, то первому, второму, третьему и т. д. гармоническим колебаниям соответствует ряд гармонических обертонов к основному тону, т. е. октава, октава + квинта, двойная октава и т. д.

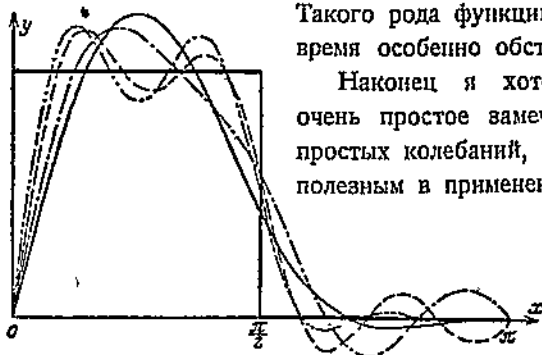
В общем случае при сложении колебаний, частоты которых находятся в рациональном отношении, периоды могут быть выражены как целые кратные общего основного периода. Совершенно иного типа явление



Черт. 118.

$$\begin{aligned} & \text{—} \sin x - \frac{\sin 2x}{2} \\ & \text{---} \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \\ & \text{---} \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \end{aligned}$$

представляется при сложении двух колебаний с несоизмеримыми частотами ω_1 и ω_2 . Получающееся здесь в результате наложения простых колебаний явление не будет уже чисто периодическим. Я не имею возможности входить здесь в рассмотрение связанной с этим математической точки зрения. Замечу только, что функции все же имеют до некоторой степени периодический характер, т. е. что они „почти“ периодически повторяются, или, как говорят, функции почти периодические. Такого рода функции были как раз в последнее время особенно обстоятельно исследованы.

Черт. 119 ¹⁾.

Наконец я хотел бы сделать еще одно очень простое замечание по поводу сложения простых колебаний, которое часто оказывается полезным в применении к физике. Оно относится

к так называемым биеениям. Если мы складываем два колебания с одной и той же амплитудой, равной единице и частотами ω_1 и ω_2 и примем для простоты, что и фазы

одинаковы (обобщение на случай разных фаз предоставляю вам самим), то речь идет просто об изучении функций

$$y = \sin \omega_1 x + \sin \omega_2 x \quad (\omega_1 > \omega_2 > 0).$$

По известной тригонометрической формуле непосредственно получаем:

$$y = 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} x,$$

и эта функция выражает явление, которое мы можем рассматривать следующим образом: имеем колебание с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ и периодом $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$, но это колебание не имеет постоянной амплитуды; „амплитуда“ его дается выражением $2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x$, которое изменяется и имеет более долгий период, именно период $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$. Это рассмотрение особенно по-

¹⁾ Начерченные кривые соответствуют тригонометрическим многочленам, получаемым из ряда:

$$\frac{\sin x}{1} + 2 \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + 2 \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \dots,$$

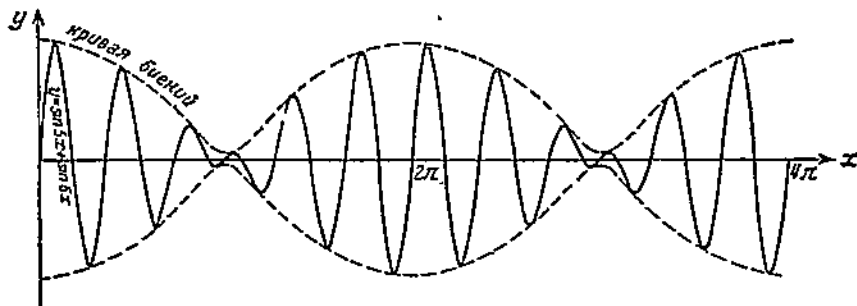
который мы соответственно обрываем при $n = 3, 5, 6$ и 7 .

лезно и наглядно в том случае, когда обе частоты ω_1 и ω_2 сравнительно велики, а разность их $\omega_1 - \omega_2$ относительно очень мала. Тогда колебание с периодом $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ будет по сравнению с этим периодом лишь медленно

изменять свою амплитуду $2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x$ и эти изменения в свою оче-

редь будут периодически повторяться, имея длинный период $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$.

Эти ритмические колебания амплитуды называют биениями. Каждому из вас это явление знакомо главным образом из акустики, а может быть



Черт. 120.

также из беспроволочной телеграфии. В беспроволочной телеграфии обычно частоты ω_1 и ω_2 берут гораздо большими чем частоты тех тонов, которые воспринимаются нашим ухом, а разность $\omega_1 - \omega_2$ попадает в область тонов, воспринимаемых органом слуха. Биение может быть превращено в таком случае в воспринимаемый ухом тон, между тем как собственные колебания не могут быть восприняты ухом.

На черт. 120 графически представлен пример биения.

§ 2. Применение комплексных чисел.

1. Общие замечания. Рассмотрение явлений колебания и периодических функций формально упрощается, если пользоваться комплексными числами и употреблять вместо тригонометрических функций $\cos \omega x$ и $\sin \omega x$ выражения вида $\cos \omega x + i \sin \omega x = e^{i\omega x}$ (см. гл. VIII, § 7). При этом мы должны конечно иметь в виду, что одно равенство между комплексными числами равносильно двум равенствам между действительными числами и что результат мы всегда должны истолковать и понимать в действительной области.

Заменяя повсюду тригонометрические функции показательными по формулам:

$$2 \cos \vartheta = e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}, \quad 2i \sin \vartheta = e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta},$$

мы приходим к выражению простых колебаний с помощью комплексных величин $e^{i\omega x}$, $e^{-i\omega x}$ или

$$ae^{i\omega(x-\xi)}, ae^{-i\omega(x-\xi)},$$

причем как и раньше a , ω , $\omega\xi$ действительные числа: амплитуда, частота и сдвиг фаз. Действительные колебания получаются из этого комплексного выражения как действительная и мнимая часть.

Удобство такого представления для многих приложений объясняется тем, что производные действительных колебаний по времени x формально получаются путем дифференцирования комплексной показательной функции так, как будто i было бы действительной постоянной, что выражается формулой:

$$\frac{d}{dx} a [\cos \omega (x - \xi) + i \sin \omega (x - \xi)] = a\omega [-\sin \omega (x - \xi) + i \cos \omega (x - \xi)] = i a \omega [\cos \omega (x - \xi) + i \sin \omega (x - \xi)]$$

или

$$\frac{d}{dx} ae^{i\omega(x-\xi)} = i a \omega e^{i\omega(x-\xi)}.$$

2. Применение в теории переменного тока. Разъясню это на важном примере. Будем обозначать независимое переменное, время не через x , а через t . Представим себе цепь с омическим сопротивлением R и самоиндукцией L , в которой действует внешняя электродвижущая сила E . В случае идеального постоянного тока величина E имеет постоянное значение и для силы тока J имеет место закон Ома:

$$E = RJ.$$

Если же речь идет о переменном токе, то E и вместе с тем J представляет функцию времени t , и закон Ома принимает вид:

$$E - L \frac{dJ}{dt} = RJ.$$

В простейшем случае, который мы и рассмотрим, внешняя электродвижущая сила E будет простым гармоническим колебанием частоты ω . Но вместо того чтобы брать это колебание в виде $a \cos \omega t$ или $a \sin \omega t$ мы формально можем объединить эти две возможности в комплексной форме следующим образом:

$$E = \varepsilon e^{i\omega t} = \varepsilon (\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

где ε означает амплитуду, а ω — частоту. Мы оперируем с этой „комплексной электродвижущей силой“ так, как будто i был бы действительным параметром, и находим из нее комплексную силу тока J . Значение по-

лучающихся таким образом соотношений между комплексными величинами E и J заключается в том, что электродвижущей силе $\varepsilon \cos \omega t$ соответствует в качестве силы тока действительная часть J , а электродвижущей силе $\varepsilon \sin \omega t$ соответствует коэффициент при i в мнимой части J . Комплексную силу тока J мы можем тотчас же определить, если будем искать J в виде:

$$J = \alpha e^{i\omega t} = \alpha (\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

т.е. если мы с самого начала допустим, что J также представляет гармоническое колебание с частотой ω . Тогда производная от J формально выражается так:

$$\frac{dJ}{dt} = i\alpha\omega e^{i\omega t} = \alpha\omega (-\sin \omega t + i \cos \omega t),$$

и мы получаем из обобщенного закона Ома, вводя наши величины и сокращая на всюду встречающийся множитель $e^{i\omega t}$, непосредственно соотношение $\varepsilon - \alpha Li\omega = Ra$ или $\alpha = \frac{\varepsilon}{R + i\omega L}$, следовательно:

$$E = (R + i\omega L)J = WJ.$$

Последнее равенство можем рассматривать, как закон Ома для переменного тока в комплексной форме, если величину

$$W = R + i\omega L$$

назовем комплексным сопротивлением в цепи. Тогда закон Ома гласит совершенно так же как и в случае постоянного тока: сила тока равна электродвижущей силе, деленной на сопротивление.

Если представим комплексное сопротивление в виде:

$$W = w e^{i\delta} = w \cos \delta + i w \sin \delta,$$

где

$$w = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L}{R},$$

то мы получим:

$$J = \frac{\varepsilon}{w} e^{i(\omega t - \delta)}.$$

Согласно этой формуле сила тока имеет тот же период (и частоту) как и напряжение; амплитуда $|\alpha|$ силы тока связана с амплитудой ε напряжения соотношением:

$$|\alpha| = \frac{\varepsilon}{w},$$

и далее имеет место сдвиг фаз силы тока по отношению к напряжению. Сила тока достигает максимума не в то же время, что напряжение, но лишь на $\frac{\delta}{\omega}$ позже, и то же имеет конечно место для минимума. Величина $w = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ носит в электротехнике название полного или кружущегося сопротивления или импеданца в замкнутой цепи при частоте ω .

3. Комплексное представление наложения простых колебаний. Наконец скажу еще несколько слов относительно сложения колебаний в комплексной форме, причем для простоты беру $\omega = 1$. Наложение простых колебаний, имеющее вид:

$$S(x) = a + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx),$$

мы можем тотчас же написать в комплексной форме, подставляя

$$\cos vx = \frac{1}{2} (e^{ivx} + e^{-ivx}) \text{ и } \sin vx = \frac{1}{2i} (e^{ivx} - e^{-ivx}).$$

Наше выражение при этом переходит в выражение вида:

$$S(x) = \sum_{v=-n}^n a_v e^{ivx},$$

причем комплексные числа a_v связаны с действительными числами a , a_v и b_v равенствами:

$$a_v = a_v + a_{-v}, \quad a = a_0, \quad b_v = i(a_v - a_{-v}).$$

Для того чтобы равенство $a_v = a_v + a_{-v}$ формально включало и случай $v=0$, мы полагаем $a = a_0 = \frac{a_0}{2}$.

Обратно, мы можем любое выражение вида:

$$\sum_{v=-n}^n a_v e^{ivx},$$

рассматривать как наложение колебаний записанных в комплексном виде; для того чтобы результат этого наложения был действительным, необходимо лишь чтобы $a_v + a_{-v}$ было действительным числом, а $a_v - a_{-v}$ чисто мнимым, т. е. a_v и a_{-v} должны быть сопряженными комплексными числами.

§ 3. Тригонометрическое интерполирование.

1. Решение задачи интерполирования. После этих предварительных рассмотрений я перехожу к задаче, которая представляет естественный исходный пункт как для теории, так и для практических применений

тригонометрических рядов, именно к проблеме интерполирования. Пусть нам задана функция $f(x)$ с периодом $2l$; в связи с предварительными замечаниями в § 1 естественно возникает вопрос, можно ли представить такую функцию с помощью наложения простых колебаний и как именно это сделать с помощью колебания с основной частотой $\frac{\pi}{l}$ и верхними гармоническими к нему колебаниями с частотами $\frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \dots$. Такое выражение будет в общем случае представлять только приближенное выражение, которое мы затем попытаемся путем предельного перехода превратить в точное выражение. Возникает вопрос, каким образом мы можем получить такое приближенное выражение.

Для того чтобы вначале избежать всяких излишних усложнений в записи, мы возьмем в качестве интервала, в котором задана функция $f(x)$, интервал $-\pi < x < +\pi$, т. е. положим $l = \pi$, ограничение, от которого мы в конце легко освободимся, замещая x через $\frac{l}{\pi}x$.

Мы рассмотрим теперь периодические колебания вида

$$a + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx)$$

и попытаемся дать приближенное выражение для нашей функции $f(x)$ с помощью такой функции с соответственно выбранными коэффициентами, причем число n будем рассматривать как заданное.

В нашем распоряжении находятся всего $2n+1$ постоянных, именно $a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$, поэтому следует ожидать, что при аппроксимировании функции мы можем удовлетворить $2n+1$ условиям. Наиболее естественные условия такого рода формулируются в следующей задаче об интерполировании. Требуется определить постоянные так, чтобы функция

$$S_n(x) = a + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx)$$

совпадала в $2n+1$ заданных точках интервала с данной функцией $f(x)$. В этом и заключается общая задача тригонометрического интерполирования. Она вполне аналогична задаче об интерполировании с помощью целых рациональных функций, рассмотренной в § 4 дополнений к гл. VI. Наиболее простой результат получается в том случае, когда $2n+1$ точек, в которых мы требуем совпадения значений $f(x)$ и $S_n(x)$, лежат на одинаковом расстоянии друг от друга и симметрично расположены на интервале. Мы рассмотрим поэтому отрезок $\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$,

представляющий $(2n+1)$ -ю часть всего интервала, и отложим его от начала в обе стороны последовательно по n раз, тогда получим $2n+1$ точек деления с координатами

$$x = -n\lambda, -(n-1)\lambda, \dots, 0, \dots, (n-1)\lambda, n\lambda,$$

которые мы по порядку обозначим через

$$x_{-n} = -n\lambda, \dots, x_x = x\lambda, \dots, x_n = n\lambda.$$

Оба конца — π и $-\pi$ интервала не являются точками деления, а удалены как раз на расстояние $\frac{1}{2}\lambda$ соответственно от первой и последней точек деления. Заданные значения функции в этих точках деления обозначим через

$$f_{-n}, \dots, f_x, \dots, f_n$$

так что $f_x = f(x_x)$. (Впрочем из заданной функции $f(x)$ в наших рассуждениях ничего кроме этих $2n+1$ значений f_x не понадобится.)

С формальной стороны решение задачи интерполирования упрощается, если пользоваться комплексными числами. Поэтому мы так и поступим, хотя я и знаю, что начинающий испытывает при этом некоторые затруднения. Итак, пишем интерполирующую функцию в виде:

$$S_n = \sum_{v=-n}^n a_v e^{i v x},$$

причем величины a_v представляют комплексные числа. Наша задача заключается в том, чтобы определить $2n+1$ величин $a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_0, \dots, a_{n-1}, a_n$ так, чтобы удовлетворялись $2n+1$ уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{v=-n}^n a_v e^{-i v n \lambda} &= f_{-n}, \\ \sum_{v=-n}^n a_v e^{-i v (n-1) \lambda} &= f_{-n+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{v=-n}^n a_v e^{i v x} &= f_x, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{v=-n}^n a_v e^{i v n \lambda} &= f_n, \end{aligned}$$

или короче:

$$S_n(x_x) = f_x, \quad x = -n, \dots, 0, \dots, n.$$

(Эти уравнения просто выражают, что функция $S_n(x)$ должна иметь в точках x_x заданные значения f_x .)

Они представляют систему $2n+1$ линейных уравнений с $2n+1$ неизвестными $a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n$ и могут быть очень легко решены в явном виде. Выбираем какое-нибудь целое число μ среди чисел $-n, -n+1, \dots, n$ и умножаем обе части первого из наших уравнений на $e^{i\mu\lambda}$, второго на $e^{i\mu\lambda(n-1)}, \dots$, обе части последнего на $e^{-i\mu\lambda n}$ и затем все эти уравнения складываем. Таким образом в правой части получаем выражение $\sum_{x=-n}^n f_x e^{-i\mu\lambda x}$, а в левой части перегруппируем получившуюся сумму

$$\sum_{x=-n}^n \sum_{v=-n}^n a_v e^{i\lambda x(v-\mu)},$$

соединяя каждый раз множители при a_v , т. е. запишем двойную сумму в виде:

$$\sum_{v=-n}^n a_v \sum_{x=-n}^n e^{i\lambda x(v-\mu)}.$$

Множителем при a_v является сумма

$$e^{-i\lambda(v-\mu)n} + e^{-i\lambda(v-\mu)(n-1)} + \dots + e^{i\lambda(v-\mu)n},$$

а эту сумму мы можем очень просто вычислить. Полагаем для краткости $v-\mu=\delta$ и $e^{i\lambda\delta}=\rho$ и замечаем, что

$$\rho^{2n+1} = e^{2\pi i\delta} = 1,$$

или, как говорят, что число ρ представляет корень $(2n+1)$ -й степени из единицы. Если $v=\mu$, то все выражения $e^{-i\lambda(v-\mu)n}, \dots, e^{i\lambda(v-\mu)n}$ равны 1, и в качестве множителя при a_μ мы получаем число $2n+1$. Если же $\mu \neq v$, то сумма представляет геометрическую прогрессию со знаменателем ρ , отличным от единицы, которую мы, пользуясь нашими сокращенными обозначениями, можем записать и просуммировать следующим образом:

$$\rho^{-n} + \rho^{-n+1} + \dots + \rho^n = \rho^{-n} \frac{\rho^{2n+1} - 1}{\rho - 1}.$$

Теперь нам достаточно заметить, что $\rho^{2n+1}=1$, и мы получаем для нашей суммы значение нуль.

Таким образом при сложении уравнений в левой части пропадают все коэффициенты за исключением a_μ , имеющего множитель $2n+1$, и мы получаем в качестве решения простое равенство:

$$a_\mu = \frac{1}{2n+1} \sum_{x=-n}^n f_x e^{-i\mu\lambda x},$$

которое и решает проблему интерполирования; в самом деле, задача и заключалась тодько в определении этих величин α_μ .

С помощью символа двойной суммы мы можем записать решение задачи интерполирования в следующей изящной форме:

$$S_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=-n}^n \sum_{\lambda=-n}^n f_\lambda e^{i\nu(x-\lambda)}.$$

Что в наших предыдущих формулах особенно бросается в глаза — это их симметрия, которую я хотел бы резюмируя подчеркнуть еще раз.

Для того чтобы имели место равенства

$$f_x = \sum_{\nu=-n}^n \alpha_\nu e^{i\nu x}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$$

при $x = -n, \dots, 0, \dots, n$, величины α_ν должны быть заданы равенствами

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2n+1} \sum_{x=-n}^n f_x e^{-i\nu \lambda x}$$

и обратно. Симметрию между этими равенствами мы можем сделать еще более совершенной, если положим:

$$\alpha_\nu = c_\nu \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Тогда мы получаем результат в следующей вполне симметричной форме: для того чтобы имели место равенства

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{\nu=-n}^n c_\nu e^{i\nu \lambda x},$$

необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась другая система равенств:

$$c_\nu = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{x=-n}^n f_x e^{-i\nu \lambda x}.$$

Обыкновенно бывает нужно записать наш результат в действительной форме. Если введем вместо показательных функций тригонометрические, то наше интерполирующее выражение

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=-n}^n \alpha_\nu e^{i\nu x}$$

примет вид:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx);$$

коэффициенты a_v и b_v получаются с помощью формул:

$$a_v = (a_v + a_{-v}), \quad b_v = i(a_v - a_{-v}),$$

и мы получаем следовательно решение нашей задачи об интерполировании в действительной форме с помощью следующей теоремы: коэффициенты тригонометрического выражения n -го порядка

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx),$$

принимаящего в заданных точках $x_k = x\lambda$ ($k = -n, \dots, n$) заданные значения $f_k = f(x_k)$, выражаются суммами:

$$a_v = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k \cos vk\lambda, \quad b_v = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n f_k \sin vk\lambda.$$

Можно конечно получить только что формулированный в вещественной области результат, и не пользуясь комплексными числами. Тогда приходится вместо простых вычислений с показательными функциями и геометрической прогрессией пользоваться соответствующими тригонометрическими формулами. Предоставляю выполнение этого вычисления вам самим.

2. Предельный переход к ряду Фурье. Подобно тому как от интерполирования с помощью целых рациональных функций мы путем перехода к пределу приходим к представлению функции $f(x)$ в виде ряда Тэйлора, так мы здесь от аппроксимирования функции с помощью тригонометрического выражения n -го порядка придем к точному выражению функции с помощью бесконечного тригонометрического ряда, увеличивая неограниченно число точек. Я ограничусь тем, что проведу здесь этот предельный переход чисто формально, а для строгого обоснования разложения в ряд отсылаю к § 5.

При предельном переходе мы опираемся прежде всего на только что выведенные действительные формулы. Если будем неограниченно увеличивать n , то числа a_v и b_v в пределе переходят в величины:

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos vx \, dx, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin vx \, dx, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx,$$

так как

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{\Delta x}{\pi}$$

стремится к нулю; при этом достаточно только предположить, скажем, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $-\pi < x < \pi$. Мы перейдем таким образом чисто формальным путем от интерполирования к выражению произвольно заданной в интервале $-\pi < x < \pi$ непрерывной функции в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx)$$

коэффициентами

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos vt \, dt, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin vt \, dt.$$

Этот ряд, соответствующий функции $f(x)$, называется еще рядом Фурье по имени великого французского математика Фурье, который в связи с вопросами математической физики первый систематически пользовался такими рядами для представления произвольных функций. На основании предшествующего решения задачи интерполирования, правда, кажется вероятным, что найденный таким образом бесконечный ряд сходится и повсюду представляет эту функцию. В действительности однако мы должны на нашу функцию наложить некоторые ограничения для того, чтобы это было так.

Мы увидим, что функция во всяком случае разлагается в ряд Фурье, если она и ее производные первого и второго порядка непрерывны повсюду в основном интервале за исключением конечного числа точек непрерывности первого рода. При этом функция вовсе не обязана подчиняться в разных интервалах одному и тому же аналитическому или геометрическому закону образования; она может быть „произвольной“.

В этом обстоятельстве, а также в том, что коэффициенты ряда Фурье зависят от всего хода изменения функции, обнаруживается глубокое различие по сравнению со степенными рядами. Именно, в степенном ряде можно выразить коэффициенты с помощью производных функций в определенной точке. Следовательно степенной ряд нам дан, если мы знаем функцию в сколь угодно малой окрестности некоторой точки. Функции, выражаемые с помощью степенных рядов, „аналитические“ функции, имеют поэтому особенный характер: их общий ход известен, если только дается ход их в некотором интервале, как бы мал он ни был. Аналитическая функция представляет таким образом до некоторой сте-

пени органическое, единое образование. В ряде Фурье, наоборот, об этом на основании ранее сказанного не может быть и речи. Ход функции в окрестности некоторой точки можно произвольно изменить совершенно независимо от хода функции в окрестности другой точки, не нарушая разложимости в ряд Фурье.

Если совершим предельный переход к ряду Фурье от тригонометрического интерполирования в комплексной форме, то мы формальным путем получаем ряд Фурье в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v e^{ivx},$$

с коэффициентами

$$a_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ivt} dt.$$

При этом суммирование от $-\infty$ до $+\infty$ означает не что иное как предельный переход, при котором сначала суммируем от $-n$ до $+n$ или общее от $-n$ до m , а затем переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$ или общее при $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ одновременно.

Прежде чем перейти к строгому обоснованию нашего перехода от интерполирования к ряду Фурье, я хотел бы на ряде примеров показать исключительную плодотворность и изящество разложений в ряд Фурье, причем я буду предполагать, что упомянутая теорема о разложимости функции в ряд Фурье справедлива.

§ 4. Примеры разложения в ряд Фурье.

1. Предварительные замечания. Примем за период наших функций $f(x)$ величину 2π , а за рассматриваемый интервал примем интервал от $-\pi$ до $+\pi$. Функции $f(x)$ определены тогда сначала только в интервале $-\pi < x < \pi$ и должны быть продолжены согласно § 1 периодически вправо и влево.

Прежде чем приступить к вычислениям, сделаю следующее простое замечание. Если $f(x)$ четная функция, т. е. $f(x) = f(-x)$, то $f(x) \sin vx$ очевидно нечетная функция, а $f(x) \cos vx$ четная, поэтому

$$b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin vx dx = 0, \quad a_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos vx dx.$$

Следовательно мы получаем ряд косинусов. Если же функция $f(x)$ нечетная, т. е. если $f(x) = -f(-x)$, то

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

и мы получаем ряд синусов ¹⁾.

2. Разложение функций $\psi(x) = x$ и $\varphi(x) = x^2$. Для нечетной функции x

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx,$$

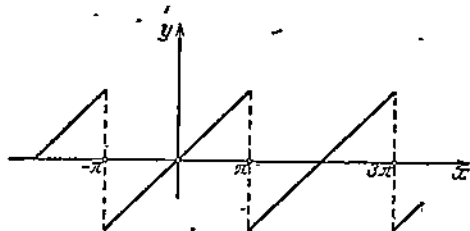
интегрируя по частям, получаем:

$$\frac{\pi}{2} b_n = - \left. \frac{x \cos nx}{n} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}.$$

Таким образом мы получаем для периодической функции $\psi(x)$ (черт. 121), совпадающей в интервале $-\pi < x < \pi$ с функцией x , разложение в ряд:

$$\psi(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

Если положим $x = \frac{\pi}{2}$, то придем к известному нам ряду Лейбница $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$. Выражаемая предыдущим рядом функция



Черт. 121.

$\psi(x)$ вовсе не является повсюду непрерывной. Напротив, она разрывна в точках $k\pi$, где $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, и скачок функции в этих точках равен 2π . При этих значениях каждый член ряда равен нулю, и поэтому значение функции $\psi(x)$ тоже равно нулю. Следовательно в

точках прерывности ряд представляет среднее арифметическое между предельным значением слева и предельным значением справа.

¹⁾ Если функция задана только в промежутке $0 < x < \pi$, то ее можно продолжить в интервал $-\pi < x < 0$ как четную или как нечетную функцию и соответственно этому представить ее в интервале $0 < x < \pi$ или рядом косинусов, или рядом синусов.

Если в предыдущем ряду заменим x через $x - \xi$, где ξ — определенное число, заключенное между $-\pi$ и π , то получим ряд:

$$\begin{aligned}\psi(x - \xi) &= 2 \left(\frac{\sin(x - \xi)}{1} - \frac{\sin 2(x - \xi)}{2} + \frac{\sin 3(x - \xi)}{3} - \dots \right) = \\ &= -\frac{2}{1} \sin \xi \cos x + \frac{2}{1} \cos \xi \sin x + \frac{2}{2} \sin 2\xi \cos 2x - \frac{2}{2} \cos 2\xi \sin 2x - \\ &\quad - \frac{2}{3} \sin 3\xi \cos 3x + \frac{2}{3} \cos 3\xi \sin 3x + \dots,\end{aligned}$$

который можно также записать в виде ряда Фурье с стремящимися к нулю коэффициентами:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 2 \frac{(-1)^n}{n} \sin n\xi, \quad b_n = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos n\xi;$$

эта функция имеет разрывы только что указанного характера в точках $x = \xi \pm \pi$, $x = \xi \pm 3\pi$, ...

Для четной функции x^2 путем двукратного интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned}a_v &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos vx dx = (-1)^v \frac{4}{v^3} \quad (v > 0), \\ a_0 &= \frac{2\pi^2}{3},\end{aligned}$$

и приходим таким образом к разложению:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right),$$

из которого формально получается путем почленного дифференцирования и деления на 2 разложение для $\psi(x) = x$.

3. Разложение функции $x \cos x$. Для этой нечетной функции имеем:

$$a_v = 0, \quad b_v = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos x \sin vx dx;$$

пользуясь формулой

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin \mu x dx = (-1)^{\mu+1} \frac{2}{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots),$$

полученной в п° 2, имеем:

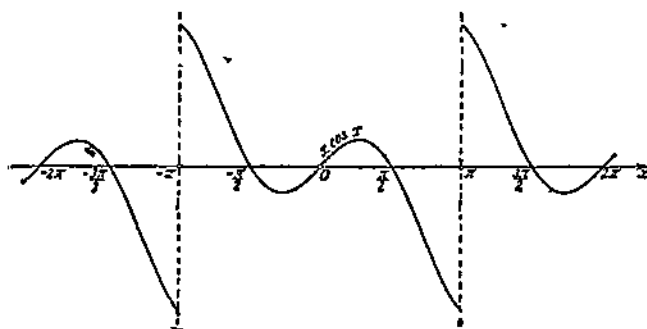
$$\begin{aligned} b_v &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \sin vx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(v+1)x + \sin(v-1)x] \, dx = \\ &= \frac{(-1)^{v+2}}{v^2-1} + \frac{(-1)^v}{v^2-1} = (-1)^v \frac{2v}{v^2-1} \quad (v=2,3,\dots), \\ b_1 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем разложение в ряд:

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-1)^v v}{v^2-1} \sin vx;$$

складывая этот ряд с рядом для $\psi(x)$ из п° 2, получаем:

$$x(1 + \cos x) = \frac{3}{2} \sin x + 2 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right).$$



Черт. 122.

Функция $x \cos x$, определенная в интервале $-\pi < x < \pi$, будучи периодически продолжена за концы интервала (черт. 122), имеет при переходе через границы интервала разрыв такого же рода, как и рассмотренная в п° 2 функция $\psi(x)$; напротив, функция $x(1 + \cos x)$ при периодическом продолжении остается непрерывной при переходе через концы интервала, и даже производная ее остается непрерывной, так как прерывность устраняется благодаря множителю $1 + \cos x$, который в этих точках обращается в нуль вместе со своей производной.

4. $f(x) = |x|$. Это — четная функция, следовательно

$$b_v = 0, \quad a_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos vx \, dx;$$

с помощью интегрирования по частям легко получаем:

$$\int_0^{\pi} x \cos vx dx = \frac{1}{v} x \sin vx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{v} \int_0^{\pi} \sin vx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } v - \text{четное число} \neq 0, \\ -\frac{2}{v^2}, & \text{если } v - \text{нечетное число}, \end{cases}$$

следовательно

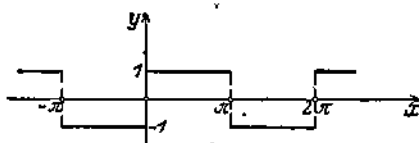
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Полагая $x=0$, получаем замечательную формулу:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

5. Пример. Для функции $f(x)$, определенной с помощью равенств:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < \pi, \end{cases}$$



Черт. 123.

и изображенной на черт. 123:

$$a_v = 0, \quad b_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin vx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } v - \text{четное}, \\ \frac{4}{\pi v}, & \text{если } v - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Поэтому для нее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

В частности при $x = \frac{\pi}{2}$ получаем отсюда снова ряд Лейбница.

6. $f(x) = |\sin x|$. Четную функцию $f(x) = |\sin x|$ мы можем разложить в ряд по косинусам, так как для нее $b_v = 0$; значения a_v получаются следующим образом!

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_v &= \int_0^{\pi} \sin x \cos vx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin(v+1)x - \sin(v-1)x] dx = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } v - \text{нечетное}, \\ -\frac{2}{v^2-1}, & \text{если } v - \text{четное число} > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x}{4\mu^2-1}.$$

7. Разложение функции $f(x) = \cos \mu x$. Разложение котангенса на элементарные дроби. Выражение синуса в виде бесконечного произведения. Пусть в интервале $-\pi < x < \pi$ функция $f(x) = \cos \mu x$, где μ не является целым числом. Так как $f(x)$ четная функция, то опять $b_v = 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_v &= \int_0^{\pi} \cos \mu x \cos vx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(\mu + v)x + \cos(\mu - v)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\mu + v)\pi}{\mu + v} + \frac{\sin(\mu - v)\pi}{\mu - v} \right) = \frac{\mu(-1)^v \sin \mu\pi}{\mu^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Следовательно получаем:

$$\cos \mu x = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 - 2^2} - \dots \right).$$

Функция $f(x)$ остается непрерывной при переходе через точки $x = \pm \pi$. Если в найденном разложении положим $x = \pi$, разделим обе части равенства на $\sin \mu\pi$ и вместо μ будем писать x , то получим формулу:

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - 1^2} + \frac{1}{x^2 - 2^2} + \dots \right),$$

представляющую разложение котангенса на элементарные дроби; это очень важная формула, часто встречающаяся в анализе. Запишем теперь этот ряд в виде:

$$\operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{1^2 - x^2} + \frac{1}{2^2 - x^2} + \dots \right).$$

n -ый член ряда в правой части равенства по абсолютному значению меньше $\frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 - q^2}$, если x лежит в интервале, $0 \leq x \leq q < 1$. Следовательно ряд равномерно сходится в этом интервале и мы имеем право его почленно интегрировать. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \pi \int_0^x \left(\operatorname{ctg} \pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt &= \log \frac{\sin \pi x}{\pi x} - \lim_{a \rightarrow 0} \log \frac{\sin \pi a}{\pi a} = \log \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \\ &= \log \left(1 - \frac{x^2}{1^2} \right) + \log \left(1 - \frac{x^2}{2^2} \right) + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \log \left(1 - \frac{x^2}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Переходя от логарифмов к показательной функции, имеем:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n \log \left(1 - \frac{x^2}{v^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{v=1}^n \log \left(1 - \frac{x^2}{v^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{v^2} \right),$$

следовательно

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \dots^1)$$

Таким образом мы получили известное разложение синуса в бесконечное произведение²⁾. Из этой формулы при $x = \frac{1}{2}$ получаем формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots,$$

что согласуется с результатами, полученными на стр. 194.

8. Дальнейшие примеры. С помощью небольших вычислений по образцу тех, которые здесь были проведены, получаем следующие примеры разложений в ряд.

Функция $f(x)$, определенная при $-\pi < x < \pi$ равенством $f(x) = \sin \mu x$, разлагается в ряд:

$$f(x) = \sin \mu x = -\frac{2 \sin \mu \pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{\mu^2 - 1} - \frac{2 \sin 2x}{\mu^2 - 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{\mu^2 - 3^2} - \dots \right),$$

из которого при $x = \frac{\pi}{2}$, пользуясь соотношением

$$\sin \mu \pi = 2 \sin \mu \cdot \frac{\pi}{2} \cos \mu \cdot \frac{\pi}{2},$$

можно получить разложение на элементарные дроби для секанса, т. е. для $\frac{1}{\cos \frac{\mu}{2}}$; это разложение, если в нем вместо $\frac{\mu}{2}$ писать x , имеет вид:

$$\pi \sec \pi x = \frac{\pi}{\cos \pi x} = 4 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v (2v-1)}{4x^2 - (2v-1)^2}.$$

Ряды для гиперболических функций $\operatorname{ch} \mu x$ и $\operatorname{sh} \mu x$ ($-\pi < x < \pi$) имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \mu x &= \frac{2\mu}{\pi} \operatorname{sh} \mu \pi \left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 + 1^2} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 + 2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2 + 3^2} + \dots \right), \\ \operatorname{sh} \mu x &= \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \mu \pi \left(\frac{\sin x}{\mu^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{\mu^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{\mu^2 + 3^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Формула доказана в предположении, что $x < q < 1$, но можно доказать, что формула справедлива для любых значений x .

²⁾ Эта формула интересна прежде всего в том отношении, что из нее непосредственно можно усмотреть, что функция $\sin \pi x$ обращается в нуль при

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

в этом смысле она соответствует разложению целой рациональной функции в произведение с помощью ее корней.

§ 5. Строгое обоснование разложения в ряд Фурье.

Можно строго обосновать разложение в ряд Фурье, если более детально изучить тот предельный переход, который в § 2 был выполнен чисто формальным образом. Но этот путь довольно утомительный, и мы поэтому проведем здесь доказательство другим путем.

Прежде всего образуем для данной функции $f(x)$ коэффициенты Фурье:

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos vt \, dt, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin vt \, dt,$$

что всегда возможно, коль скоро функция $f(x)$ непрерывна или в крайнем случае имеет конечное число точек прерывности в интервале $(-\pi, \pi)$, в которых функция делает конечный скачок. Во-вторых, мы можем исследовать сходимость формально полученного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx).$$

Если ряд сходящийся, то он представляет некоторую функцию от x , которую мы обозначим через $S(x)$, и мы должны будем доказать, что эта функция тождественна с $f(x)$. Это доказательство легко провести во всех тех случаях, когда можно доказать равномерную сходимость предельного ряда. Но для рассматриваемых нами непрерывных функций равномерную сходимость действительно можно доказать с помощью простых соображений. Наконец мы потом распространим теорему о разложении функций в ряд Фурье и на те случаи, когда равномерность сходимости нарушается в отдельных точках, благодаря тому что функция в этих точках прерывна.

В общем получается несколько длинное рассуждение, которое состоит однако из ряда простых шагов. Этот вопрос считался раньше одним из наиболее трудных в анализе. Первое строгое доказательство разложимости в ряд Фурье представляет одно из совершеннейших творений Дирихле. В настоящее время методы настолько упростились, что доказательство доступно и начинающему.

1. Функции с равномерно сходящимся рядом Фурье. Мы раз навсегда ограничимся рассмотрением кусочно гладких функций, т. е. таких функций, которые непрерывны или имеют только конечное число точек разрыва первого рода и которые повсюду за исключением конечного числа точек имеют такую первую и вторую производную; эти производные непрерывны, а в исключительных точках претерпевают конечные разрывы.

Иными словами: можно разбить интервал $-\pi \leq x \leq \pi$ на конечное число интервалов таким образом, чтобы внутри каждого из этих интервалов сама функция $f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ были непрерывны, а при приближении к границам этих интервалов они стремились к определенным пределам, причем эти пределы при приближении с одной и с другой стороны к концам интервалов могут быть различны. При этом следует, как мы уже раньше указывали, заметить, что при периодическом продолжении разрывы такого рода получаются в точках $x = n\pi$ и $x = -n\pi$, если только предельные значения $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ при $x \rightarrow \pi$ изнутри интервала $-\pi \leq x < \pi$ не совпадают соответственно с предельными значениями при $x \rightarrow -\pi$ тоже изнутри интервала. С примерами функций такого рода мы в достаточной мере ознакомились в предыдущем параграфе.

Для каждой такой функции мы можем с помощью равенств

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos vt \, dt, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin vt \, dt$$

образовать коэффициенты Фурье a_v и b_v и формально составить ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx).$$

Установим прежде всего условия, которые гарантируют равномерную сходимость этого ряда, а именно докажем следующую теорему: ряд Фурье от всякой функции, удовлетворяющей предыдущим условиям, сходится равномерно во всем интервале $-\pi \leq x \leq \pi$, если сверх того сама функция непрерывна, т. е. если разрывы встречаются только у производных.

Для доказательства мы обнаружим, что для каждой такой функции существует определенное постоянное, не зависящее от v , число C такого рода, что

$$|a_v| < \frac{C}{v^2}, \quad |b_v| < \frac{C}{v^2}.$$

Тогда члены ряда Фурье по абсолютному значению меньше соответствующих членов сходящегося ряда с постоянными членами:

$$2C \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2},$$

а отсюда согласно п^о 3, § 2, гл. VIII вытекает равномерная (и абсолютная) сходимость ряда Фурье.

Так как доказательство для коэффициентов a_n и b_n одно и то же, то достаточно доказать предыдущие неравенства, скажем, для a_n . Сперва при помощи интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} -\pi a_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{f(t) \sin nt}{n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(t) \sin nt \, dt = \\ &= -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt \, dt, \end{aligned}$$

так как $\sin n\pi = 0$. Аналогично получаем:

$$\pi b_n = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

так как в силу непрерывности $f(x)$ имеет место равенство:

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

Теперь разобьем интервал с помощью точек, в которых $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны, на частичные интервалы. Если, скажем, $\xi \leq t \leq \eta$ один из таких интервалов, то соответствующее ему слагаемое из суммы, представляющей πa_n , преобразуем путем интегрирования по частям следующим образом:

$$-\frac{1}{n} \int_{\xi}^{\eta} f'(t) \sin nt \, dt = \frac{f'(t) \cos nt}{n^2} \Big|_{\xi}^{\eta} - \frac{1}{n^2} \int_{\xi}^{\eta} f''(t) \cos nt \, dt.$$

Так как $|f'(t)|$, несмотря на скачки в концах частичных интервалов, остается меньше некоторого постоянного числа M во всем интервале $-\pi \leq t \leq \pi$, и так как подобная грань существует и для $|f''(t)|$ (под M мы будем просто разуметь наибольшую из этих двух верхних граней), то по теореме о среднем значении непосредственно получаем:

$$\left| \frac{1}{n^2} \int_{\xi}^{\eta} f''(t) \cos nt \, dt \right| < \frac{2M}{n^2} + \frac{|\eta - \xi|M}{n^3};$$

складывая конечное число слагаемых, из которых состоит a_n , получим требуемое неравенство. Таким образом доказательство закончено.

Следовательно ряд Фурье от непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей предыдущим условиям, представляет непрерывную во всем интервале и удовлетворяющую условию $s(\pi) = s(-\pi)$ функцию.

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx).$$

Нашей задачей является доказать, что эта функция совпадает с данной функцией $f(x)$.

Из равномерной сходимости непосредственно вытекает следующее. Если умножим обе части нашего равенства на $\cos \mu x$ или на $\sin \mu x$ и проинтегрируем почленно в пределах от $-\pi$ до $+\pi$ (законность этого приёма следует из равномерной сходимости ряда на основании теоремы § 4, гл. VI), то в силу известных нам (стр. 189) формул:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin vx \cos \mu x \, dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin vx \sin \mu x \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{при } v \neq \mu \\ \pi & \text{при } v = \mu, v \neq 0, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos vx \cos \mu x \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq v \\ \pi & \text{при } \mu = v, v \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

выражающих свойства ортогональности тригонометрических функций, получаем следующие соотношения:

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s(t) \cos vt \, dt, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s(t) \sin vt \, dt, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s(t) \, dt.$$

Так как с другой стороны коэффициенты a_v и b_v были определены с помощью равенств, аналогичных предыдущим (см. стр. 398), то для разности:

$$D(x) = f(x) - s(x)$$

функций $f(x)$ и $s(x)$ получаем равенства:

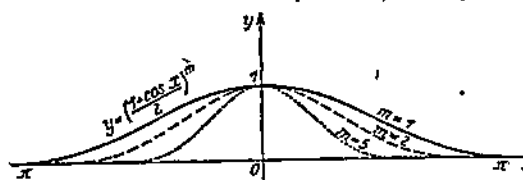
$$\int_{-\pi}^{+\pi} D(t) \cos vt \, dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} D(t) \sin vt \, dt = 0,$$

имеющие место для всех целых значений v . Из этих уравнений мы выведем заключение, что разность $D(x)$ повсюду равна нулю.

2. Доказательство разложимости. Доказательство будем вести от противного, а именно допустим, что $D(x)$ не повсюду равно нулю, и покажем, что это допущение приводит к противоречию.

Чтобы не пришлось прерывать в дальнейшем хода рассуждений, я предварительно сделаю следующие замечания. Функция

$$\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right)^m = \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^m$$



Черт. 124.

имеет в нашем интервале максимум в точке $x=0$. Это максимальное значение равно 1, и функция убывает к концам интервала до нуля. Чем больше m , тем более круто происходит это паде-

ние и тем уже та область вокруг точки $x=0$, внутри которой еще функция заметно отличается от нуля (черт. 124).

Совершенно таким же образом ведет себя функция

$$\left(\frac{1 + \cos(x - \xi)}{2}\right)^m$$

в интервале $-\pi + \xi \leq x \leq \pi + \xi$ относительно точки $x = \xi$. Если разложить наши функции по биному Ньютона и заметить, что каждая степень $\cos x$ может быть представлена в виде линейной комбинации функций:

$$\cos x, \cos 2x, \dots, \cos mx,$$

то легко видеть, что наши функции

$$\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^m \quad \text{и} \quad \left(\frac{1 + \cos(x - \xi)}{2}\right)^m$$

могут быть записаны первая в виде:

$$c_0 + a_1 \cos x + \beta_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \dots + \beta_m \sin mx,$$

а вторая в виде:

$$\begin{aligned} c_0 + a_1 \cos(x - \xi) + \beta_1 \sin(x - \xi) + a_2 \cos 2(x - \xi) + \dots + \\ + \beta_m \sin m(x - \xi) = \\ = c_0 + a_1 \cos x + \beta_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \dots, \end{aligned}$$

где числа $c_0, a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \dots, a_m, \beta_m, \dots$, постоянные, которые нам здесь нет надобности вычислять. Если умножим последнее вы-

ражение на $D(x)$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, то согласно доказанному в конце п^о 1 получим, что всегда имеет место равенство:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} D(x) \left(\frac{1 + \cos(x - \xi)}{2} \right)^m dx = 0,$$

какой бы мы ни выбрали целый положительный показатель m . Если введем новое переменное $t = x - \xi$, то получим равенство:

$$\int_{-\pi - \xi}^{\pi - \xi} D(t + \xi) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m dt = 0,$$

которое в силу периодичности подынтегральной функции можно согласно замечанию в п^о 1, § 1 записать также в виде:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(t) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m dt = 0,$$

причем для краткости полагаем $F(t) = D(t + \xi)$.

Теперь я утверждаю, что это равенство противоречит допущению $D(\xi) = F(0) \neq 0$. А именно противоречие заключается в том, что в интеграле, стоящем в левой части, благодаря указанному свойству функции $\left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m$ при достаточно большом значении m , влияние окрестности точки $t = 0$ перевешивает влияние остальной части промежутка интегрирования, так что соответствующие части интеграла не могут в сумме равняться нулю.

Итак, если бы $F(0)$ не равнялось нулю, а было бы положительным числом (для отрицательных значений $F(0)$ можно было бы применить совершенно аналогичное рассуждение), то мы в силу непрерывности функции $F(t)$ могли бы ограничить определенный раз навсегда выбранный интервал $-q \leq t \leq q$ ($q < \pi$), в котором функция не только не обращается в нуль, но и остается повсюду больше постоянного положительного числа μ , которое мы в дальнейшем также изменять не будем. Теперь мы представим выражение:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(t) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m dt,$$

которое по условию равно нулю, в виде суммы двух слагаемых:

$$J_1 = \int_{-q}^{+q} F(t) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m dt$$

и

$$J_2 = \int_{-\pi}^{-q} F(t) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m dt + \int_q^{\pi} F(t) \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^m dt,$$

для которых следовательно имеет место соотношение:

$$J_1 + J_2 = 0.$$

Теперь произведем оценку каждого из этих двух слагаемых, а именно укажем нижнюю грань для абсолютного значения первого и верхнюю грань для абсолютного значения второго. Для первого слагаемого имеет место следующая цепь неравенств:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-q}^{+q} F(t) \cos^{2m} \frac{t}{2} dt \geq \mu \int_{-q}^{+q} \cos^{2m} \frac{t}{2} dt = 2\mu \int_0^q \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right)^m dt > \\ &> 2\mu \int_0^q \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right)^m \cos \frac{t}{2} dt > 2\mu \int_0^q \left(1 - \sin \frac{t}{2} \right)^m \cos \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

При этом переход от первого выражения к ближайшему основан на оценке интеграла по теореме о среднем значении (гл. II, § 7), так как в промежутке интегрирования $F(t) > \mu$. Переход от первого неравенства ко второму основан на добавлении под знаком интеграла множителя $\cos \frac{t}{2}$ (этот множитель положителен и меньше 1); наконец при следующем шаге мы разложили в подынтегральном выражении на множителей $1 - \sin^2 \frac{t}{2} = \left(1 + \sin \frac{t}{2} \right) \left(1 - \sin \frac{t}{2} \right)$ и опустили множитель $1 + \sin \frac{t}{2}$, который больше 1.

Последний интеграл мы можем найти с помощью подстановки:

$$\sin \frac{t}{2} = u, \quad \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} dt = du;$$

мы получаем для него значение:

$$2 \int_0^k (1-u)^m du = \frac{2}{m+1} [1 - (1-k)^{m+1}].$$

При этом $k = \sin \frac{q}{2}$ положительное число, меньшее единицы. Так как, $(1-k)^{m+1} < 1-k$, то получаем следующую оценку:

$$J_1 > \frac{4k\mu}{m+1}.$$

С другой стороны, для слагаемого J_2 получаем оценку:

$$|J_2| \leq \left| \int_{-\pi}^{-q} F(t) \cos^{2m} \frac{t}{2} dt \right| + \left| \int_q^{\pi} F(t) \cos^{2m} \frac{t}{2} dt \right| < 2\pi M \cos^{2m} \frac{q}{2},$$

где M есть верхняя грань абсолютного значения функции $F(t)$ во всем интервале, т. е. $F(t) \leq M$. Эта оценка непосредственно получается, если заметить, что подынтегральная функция в промежутке интегрирования от $-\pi$ до $-q$ и в промежутке от q до π по абсолютному значению не больше чем $M \cos^{2m} \frac{q}{2}$ и что длина каждого из этих промежутков меньше π . Полагаем далее $\cos^2 \frac{q}{2} = \lambda$ и замечаем, что λ есть положительная правильная дробь; теперь мы можем окончательно записать нашу оценку в таком виде:

$$|J_2| < 2\pi M \lambda^m.$$

Но, как мы видели, $J_1 + J_2 = 0$, следовательно $|J_1| = |J_2|$; поэтому непременно:

$$2\pi M \lambda^m > \frac{4k\mu}{m+1} \quad \text{или} \quad \lambda^m > \frac{c}{m+1},$$

где c — число, независимое от m . Но при достаточно большом значении показателя последнее неравенство очевидно невозможно, так как степень λ^m стремится при возрастании m гораздо быстрее к нулю, чем выражение $\frac{c}{m+1}$ (гл. III, § 9, н° 2)¹⁾. Точнее: мы можем выбрать

число m настолько большим, чтобы $\lambda^m < \frac{c}{m+1}$ и тогда конечно не может иметь места соотношение $\lambda^m > \frac{c}{m+1}$, вытекающее из равенства $J_1 + J_2 = 0$.

Итак наше допущение $D(\xi) \neq 0$ привело нас к противоречию, поэтому $D(\xi) = 0$. Так как это рассуждение справедливо для любого значения ξ из интервала $-\pi \leq x \leq \pi$, то тем самым доказано, что функция $D(x)$ тождественно равна нулю, а вместе с тем доказано, что ряд Фурье действительно представляет нашу функцию $f(x)$.

¹⁾ Так как $\lambda < 1$, т. е. $a = \frac{1}{\lambda} > 1$, имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^m (m+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{a^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{a^m} \cdot \frac{m+1}{m} = 0.$$

Из полученного результата следует доказательство, которое мы еще должны были дать, для большинства разложений, полученных в § 4. Именно теперь уже доказаны все те, у которых соответствующие функции непрерывны и следовательно ряды сходятся равномерно, так как в этих примерах первые и вторые производные кусочно непрерывны.

3. Обобщение теоремы о разложимости в ряд Фурье на более широкий класс функций. Для того чтобы обосновать разложимость в ряд Фурье всех практически важных функций, остается рассмотреть только еще один пункт, именно разложимость функций, удовлетворяющих указанным с самого начала условиям, в том случае когда сами эти функции имеют точки разрыва. В качестве простейшего примера, к которому мы затем сведем все остальные функции, рассмотрим функцию $\phi(x)$, которая в основном интервале совпадает просто с x ; согласно § 4 ее ряд Фурье имеет вид:

$$2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

Этот ряд не может быть равномерно сходящимся. В самом деле, в противном случае по предыдущему этот ряд представлял бы функцию $\phi(x)$, с другой стороны этот ряд, как равномерно сходящийся ряд непрерывных функций, должен был бы представлять непрерывную функцию, но это очевидно неверно, так как функция $\phi(x)$ при переходе слева направо через границы интервала делает скачок вниз, равный 2π . Следовательно мы не можем ожидать, чтобы ряд сходился равномерно вплоть до границ интервала, но тем важнее отметить следующий факт: наш ряд равномерно сходится во всяком интервале $-l \leq x \leq l$, для которого $0 < l < \pi$, т. е. имеет место равномерная сходимость, если мы только выделим сколь угодно малый интервал вокруг точек прерывности.

Доказательство будем вести с помощью следующей уловки¹⁾. Заметим, что функция $\cos \frac{x}{2}$ в интервале $-l \leq x \leq l$ повсюду больше положительного числа $\cos \frac{l}{2} = k$. Умножив абсолютное значение раз-

1) К ней мы естественно приходим, если заметим, что функция $2y \cos y$ периодически продолженная вне интервала $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ остается непрерывной, и следовательно по предыдущему ее ряд Фурье должен сходиться равномерно и представлять эту функцию. Но этот ряд получится из ряда Фурье для $2y$ путем умножения на $\cos y$. Полагая $y = \frac{x}{2}$ и произведя умножение, мы как раз и приходим к рассуждениям, изложенным в тексте.

ности между m -й и n -й частичной суммой предыдущего ряда ($m > n$), т. е. выражение:

$$|S_m(x) - S_n(x)| = 2 \left| \frac{\sin(n+1)x}{n+1} - \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \dots \pm \frac{\sin mx}{m} \right|$$

на $\cos \frac{x}{2}$, получим, пользуясь известной тригонометрической формулой $2 \sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$, равенство:

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{x}{2} \left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} - \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \dots \pm \frac{\sin mx}{m} \right) = \\ = \frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{n+1} - \frac{\sin\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{n+2} + \dots \pm \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{m} + \\ + \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1} - \frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{n+2} + \frac{\sin\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{n+3} + \dots \end{aligned}$$

Соединяя вместе члены, стоящие друг под другом в правой части, получим выражение:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1} \pm \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{m} + \\ + \frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\sin\left(n+\frac{5}{2}\right)x}{(n+2)(n+3)} + \dots \mp \frac{\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x}{(m-1)m}; \end{aligned}$$

так как $\cos \frac{x}{2} > k$ и $|\sin u| \leq 1$, то имеем следующую оценку:

$$|S_m - S_n| \leq \frac{1}{k} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} \right].$$

Но выражение, стоящее в правой части, уже не зависит от x и может при выборе достаточно больших значений для m и n стать меньше любого наперед заданного числа, так как ряд $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)}$ сходящийся, а это и означает, что наш ряд Фурье равномерно сходится в интервале $-l \leq x \leq l$.

Из доказанного еще ни в коем случае не вытекает, что этот ряд действительно представляет нашу функцию, ибо для этого заключения мы в предыдущем номере пользовались равномерной сходимостью во всем интервале $-\pi \leq x \leq \pi$. Чтобы преодолеть это небольшое затруднение,

заметим, что ряд, получающийся из данного путем почленного интегрирования от 0 до x :

$$\begin{aligned} & -2 \left(\frac{\cos x - 1}{1^2} - \frac{\cos 2x - 1}{2^2} + \frac{\cos 3x - 1}{3^2} - \dots \right) = \\ & = 2 \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \right) - 2 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \end{aligned}$$

повсюду равномерно сходится и, на основании предыдущего номера и

§ 4, представляет функцию $\frac{x^2}{2}$ (во всяком случае с точностью до аддитивной постоянной). Теперь воспользуемся теоремой предыдущей главы, заключающейся в том, что равномерно сходящийся ряд можно почленно дифференцировать во всяком интервале, в котором ряд, полученный дифференцированием, равномерно сходится. На основании этой теоремы наш ряд действительно представляет во всяком интервале $-l \leq x \leq l$, где $l < \pi$, производную $\left(\frac{x^2}{2}\right)'$, т. е. функцию $y = x$, и мы получаем таким образом разложение:

$$\phi(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right),$$

имеющее место повсюду в интервале, за исключением точек $x = \pi$ и $x = -\pi$. В этих же точках функция равна нулю, так как каждый член ряда равен нулю. Таким образом периодическая функция, выражаемая этим рядом, графически изображается линией, представленной на черт. 121, стр. 392, причем в точках разрыва приходится рассматривать как значение функции не предельное значение справа или предельное значение слева, а среднее арифметическое этих значений. Мы получили таким образом разложение в ряд Фурье для специальной прерывной функции, теперь мы можем (см. § 4) путем параллельного перенесения кривой или системы координат поместить точку разрыва в любую точку интервала. В самом деле, функция

$$\phi(x - \xi) = 2 \left(\frac{\sin(x - \xi)}{1} - \frac{\sin 2(x - \xi)}{2} + \frac{\sin 3(x - \xi)}{3} - \dots \right)$$

непрерывна в основном интервале повсюду за исключением точки $-\pi + \xi$ (если $0 < \xi < \pi$) или $\pi + \xi$ (если $-\pi < \xi < 0$). При переходе слева направо через эту точку функция претерпевает скачок от значения π к значению $-\pi$, и принимает в этой точке значение нуль.

Пусть $f(x)$ произвольная кусочно непрерывная функция, имеющая кусочно непрерывные первую и вторую производные, точки разрыва

которой внутри основного интервала суть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, и пусть скачки, которые претерпевает эта функция при переходе через эти точки слева направо, соответственно равны $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, тогда функция

$$f(x) - \frac{\delta_1}{2\pi} \phi(x + \pi - \xi_1) - \frac{\delta_2}{2\pi} \phi(x + \pi - \xi_2) - \dots - \frac{\delta_m}{2\pi} \phi(x + \pi - \xi_m)$$

будет непрерывной функцией, имеющей кусочно непрерывные первую и вторую производные, и следовательно согласно результатам предыдущего номера разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье. Ряд Фурье для функции $f(x)$ мы можем теперь непосредственно получить, прибавляя к этому ряду почленно ряды Фурье от функций $\frac{\delta_1}{2\pi} \phi(x + \pi - \xi_1), \dots,$

$\frac{\delta_m}{2\pi} \phi(x + \pi - \xi_m)$. Таким образом мы приходим наконец к окончательному результату: всякая кусочно непрерывная функция $f(x)$, имеющая кусочно непрерывные первую и вторую производные, разлагается в ряд Фурье. В точках прерывности функции $f(x)$ ряд Фурье представляет среднее арифметическое между предельным значением справа и предельным значением слева. В каждом интервале, не содержащем ни внутри ни на границах точек разрыва, ряд сходится равномерно и абсолютно.

Этот результат в большинстве случаев вполне достаточен для математических исследований и для приложений. Однако я хотел бы указать в заключение на то, что изучение рядов Фурье проведено гораздо дальше. Условия разложимости, которые нами здесь установлены, являются достаточными условиями, но ни в коем случае не являются необходимыми условиями. Можно представить с помощью рядов Фурье классы функций, имеющие разрывы значительно более сложного характера; этим вопросам и вообще вопросу о разложимости функции в ряд Фурье посвящена большая специальная литература. В качестве замечательного результата такого рода исследований укажу лишь на тот факт, что существуют непрерывные функции, ряд Фурье которых не сходится ни в каком интервале, как бы мал этот интервал ни был. Этот результат конечно ничего не говорит против применимости рядов Фурье; наоборот его следует рассматривать как свидетельство того, что абстрактное понятие непрерывной функции таит в себе такие возможности, которые непосредственно совсем нельзя предвидеть; на что впрочем указывает также пример непрерывной, но нигде недифференцируемой функции.

§ 6. Аппроксимирование в среднем с помощью тригонометрических многочленов.

При рассмотрении рядов Фурье, как и вообще бесконечных рядов и других бесконечных процессов надо всегда иметь в виду, что смысл каждого такого разложения заключается в аппроксимировании (приближенном выражении) разлагаемой функции с помощью конечного выражения; разложение в бесконечный ряд означает, что конечный ряд, получающийся при обрывании ряда на n -м члене, представляет приближение к разложенной функции, и притом приближение, которое можно довести до какой угодно точности путем выбора достаточно большого значения n .

Приближенное выражение функции $f(x)$ с помощью интерполирующего тригонометрического многочлена в § 2 является лишь одним из многих возможных способов аппроксимирования. Принципом аппроксимирования в этом случае является совпадение с данной функцией в $2n+1$ заданных точках, в то время как к значениям в других точках никаких требований не предъявляется. Если же приближенно выразить функцию $f(x)$ с помощью того тригонометрического многочлена, который получается, если оборвать ряд Фурье на члене $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, то приближение носит иной характер, так как коэффициенты теперь не совпадают точно с коэффициентами интерполирующего многочлена. Это аппроксимирование с помощью частичных сумм ряда Фурье имеет простое значение, которое я здесь кратко изложу.

Ставим себе следующую задачу. Среди всех тригонометрических многочленов n -го порядка

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (\alpha_v \cos vx + \beta_v \sin vx)$$

требуется найти путем соответствующего выбора коэффициентов α_v и β_v , тот, для которого выражение:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{v=1}^n (\alpha_v \cos vx + \beta_v \sin vx) \right]^2 dx,$$

так называемая средняя квадратичная ошибка, имеет наименьшее значение. Говорят, что определенный таким образом многочлен и дает наилучшее приближение в среднем к функции $f(x)$.

Это требование и это название можно непосредственно обосновать следующими соображениями. Чем меньше значение интеграла, тем меньше в среднем должна быть и подынтегральная функция, т. е. расхождение

между $S_n(x)$ и $f(x)$, хотя малое значение интеграла конечно принципиально не исключает возможности того, чтобы в тесной окрестности отдельных точек существовали значительные расхождения между этими функциями. Задачу же о наилучшем приближении в среднем можно решить непосредственно: возводим под знаком интеграла в квадрат и интегрируем почленно получающуюся при этом конечную сумму. Мы имеем под знаком интеграла следующее выражение:

$$f(x)^2 - a_0 f(x) - 2 \sum_{v=1}^n (a_v f(x) \cos vx + \beta_v f(x) \sin vx) + \\ + \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 \cos^2 vx + \beta_v^2 \sin^2 vx) \right].$$

Заметив, что выражения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos vx dx = a_v, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin vx dx = b_v,$$

как раз являются коэффициентами Фурье от функции $f(x)$, и выполняя интегрирование, непосредственно получаем, принимая во внимание соотношения ортогональности (§ 5, п° 1, стр. 401), равенство:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - S_n(x)\}^2 dx = \\ = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx + \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 + \beta_v^2) - a_0 a_0 - 2 \sum_{v=1}^n (a_v a_v + \beta_v b_v) \right\} = \\ = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx + \pi \left\{ \frac{1}{2} (a_0 - a_0)^2 + \sum_{v=1}^n [(a_v - a_v)^2 + (\beta_v - b_v)^2] \right\} - \\ - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2) \right\}.$$

Из этого равенства непосредственно ясно, что интеграл, стоящий в левой части, будет иметь наименьшее значение в том случае, когда положим

$$a_v = a_v, \quad \beta_v = b_v.$$

Таким образом получаем следующий результат. Частичная сумма ряда Фурье:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx)$$

дает наилучшее приближение в среднем для функции $f(x)$ с помощью тригонометрического многочлена n -го порядка. Минимальное значение средней квадратичной ошибки равно:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2) \right\}. \quad (*)$$

Этот результат обнаруживает, что если хотят повысить точность приближения в среднем путем повышения степени n , нет надобности изменять найденные уже коэффициенты, а нужно только определить дальнейшие члены многочлена. Из предыдущего равенства, левая часть которого всегда больше или равна нулю, следует непосредственно неравенство:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx.$$

Это неравенство указывает, что состоящая из положительных слагаемых сумма в левой части всегда остается меньше независимой от n грани

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx.$$

Поэтому сумма в левой части с возрастанием n сходится к определенному пределу, который во всяком случае не больше указанного интеграла; иными словами мы получаем соотношение:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v^2 + b_v^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx,$$

которое носит название неравенства Бесселя — по имени астронома Бесселя. Но можно утверждать и больше. Допустим для упрощения, что функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье; тогда подынтегральная функция в левой части равенства (*) при достаточно большом значении n может быть сделана равномерно относительно x сколь угодно малой, следовательно то же будет иметь место и для интеграла, и мы получаем поэтому вместо неравенства Бесселя равенство:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v^2 + b_v^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 dx.$$

Это равенство, которое называют условием полноты системы тригонометрических функций, имеет место впрочем и для значительно более общих классов функций $f(x)$, например для любых кусочно непрерывных функций¹⁾. (Доказывать это здесь не будем.)

Этому соотношению можно легко дать еще несколько более общий вид. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют соответственно коэффициенты Фурье a_v, b_v и α_v, β_v , то для функции $f(x) + \varphi(x)$ имеем соотношение:

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \{(a_v + \alpha_v)^2 + (b_v + \beta_v)^2\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)^2 + 2f(x)\varphi(x) + \varphi(x)^2\} dx,$$

а для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ соотношения:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v^2 + b_v^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx,$$

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (\alpha_v^2 + \beta_v^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)^2 dx.$$

Отнимая два последних соотношения из первого, получаем соотношение:

$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \alpha_v + b_v \beta_v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx,$$

которое является обобщением условия полноты для пары функций.

ДОПОЛНЕНИЯ К ДЕВЯТОЙ ГЛАВЕ.

Примеры тригонометрического интерполирования.

1. Предварительные замечания. До сих пор мы рассматривали только примеры разложения в ряд Фурье. Теперь я хотел бы показать, что и тригонометрическое интерполирование приводит к интересным формулам²⁾. В связи с этим займемся в этом параграфе решением поставленной в § 3, гл. IX задачи об интерполировании для некоторых простейших функций. При этом полезно наряду с формулой § 3, относящейся к разделению

¹⁾ См. Courant und Hilbert, Methoden der mathem. Physik, I, стр. 36.

²⁾ Я полагаю, что не следует опускать краткого изложения следующих в тексте вычислений, которых в литературе нет, хотя они может быть и будут представлять для начинающего некоторые затруднения. Впрочем результатами этого параграфа нам нигде в этой книге пользоваться не придется.

интервала от $-\pi$ до $+\pi$ на $2n+1$ частей¹⁾, пользоваться еще и другой формулой, не столь симметричной, ввиду того что в ней особое положение занимает начальная точка интервала $x = -\pi$. Представим себе, что интервал разделен на $2n$ частей с помощью $2n$ точек деления

$$x_{-n} = -n\lambda = -\pi, \dots, x_n = n\lambda, \dots, x_{n-1} = (n-1)\lambda,$$

где $\lambda = \frac{\pi}{n}$, и обозначим значения функции $f(x)$ в точках деления x_n через $f_n = f(x_n)$. Теперь тем же путем, что в § 3, получаем коэффициенты интерполирующего полинома

$$S_n(x) = \sum_{v=-n}^{n-1} a_v e^{ivx},$$

принимаящего в точках деления заданные значения f_x в виде

$$a_v = \frac{1}{2n} \sum_{x=-n}^{n-1} f_x e^{-ivx}.$$

Это несимметрическое выражение целесообразно применять в том случае, когда речь идет действительно о периодической функции $f(x)$, т. е. если $f(\pi) = f(-\pi)$. Тогда функция $S_n(x)$ дает точное значение функции $f(x)$ и в точке $x = \pi$, так как $S_n(\pi) = S_n(-\pi)$, т. е. формальная несимметричность не мешает.

Если же $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то мы будем применять формулы § 3. Так как в формулу интерполирования входят только $2n+1$ или $2n$ значений функций f_x , то можно наши формулы интерполирования выразить в виде следующих взаимных соотношений.

1. Если между $2n$ значениями $f_{-n}, \dots, f_x, \dots, f_{n-1}$ и $2n$ значениями $c_{-n}, \dots, c_x, \dots, c_{n-1}$ имеют место равенства:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{v=-n}^{n-1} c_v e^{ivx\lambda}, \quad \lambda = \frac{\pi}{n},$$

то имеют место и равенства:

$$c_v = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{x=-n}^{n-1} f_x e^{-ivx\lambda}$$

и обратно.

¹⁾ Если представить себе, что точки деления нанесены на окружности.

II. Если между $2n+1$ значениями $f_{-n}, \dots, f_x, \dots, f_n$ и $2n+1$ значениями $c_{-n}, \dots, c_x, \dots, c_n$ имеют место соотношения:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{\nu=-n}^n c_\nu e^{i\nu x}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{2n+1},$$

то из них вытекают соотношения:

$$c_\nu = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{x=-n}^n f_x e^{-i\nu x \lambda}$$

и обратно.

Из этих выражений для значений f_x мы получаем интерполирующий многочлен, заменяя в правой части $x\lambda$ через x .

2. Примеры. Рассмотрим теперь отдельные примеры, исходя из простейших функций $f(x)$, разложенных раньше в ряд Фурье, и будем брать значения f_x для этих функций.

I. Полагаем $f_x = x$, что соответствует функции $f(x) = x$, и применяем формулу II; тогда

$$\sqrt{2n+1} c_\nu = \sum_{\mu=-n}^n \mu e^{-i\nu \mu \lambda}.$$

Значение этой суммы при $\nu=0$ равно $\sqrt{2n+1} c_0 = 0$. Если $\nu \neq 0$, то полагая $\rho = e^{-i\nu \lambda}$, получаем:

$$\sqrt{2n+1} c_\nu = \sum_{\mu=-n}^n \mu \rho^\mu.$$

Чтобы вычислить эту сумму, умножаем ее на $1-\rho$. Так как $\rho \neq 1$, мы получаем:

$$\begin{aligned} (1-\rho) \sum_{\mu=-n}^n \mu \rho^\mu &= \sum_{\mu=-n}^n \rho^\mu - n\rho^{n+1} - (n+1)\rho^{-n} = \\ &= \rho^{-n} \left[\frac{1-\rho^{2n+1}}{1-\rho} - n\rho^{2n+1} - (n+1) \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\rho^{2n+1} = e^{-i\nu 2\pi} = 1$ и $\rho^{n+\frac{1}{2}} = e^{-i\nu \pi} = (-1)^\nu$, имеем:

$$\sqrt{2n+1} c_\nu = -(2n+1) \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} = -(2n+1) (-1)^\nu \frac{e^{-i\nu \frac{\lambda}{2}}}{1-e^{-i\nu \lambda}}$$

или

$$\frac{c_v}{\sqrt{2n+1}} = \alpha_v = \frac{(-1)^v i}{2 \sin \frac{v\lambda}{2}}.$$

Таким образом для $f_x = x$ получаем формулу интерполирования:

$$x = \sum_{v=-n}^n \frac{(-1)^v i e^{iv\lambda}}{2 \sin \frac{v\lambda}{2}}.$$

(при этом v не должно принимать значения нуля), или в действительной форме

$$x = - \sum_{v=1}^n (-1)^v \frac{\sin v\lambda}{\sin \frac{v\lambda}{2}}.$$

II. Для того чтобы представить значения $f_x = |x|$, соответствующие функции $f(x) = |x|$, мы применяем первую формулу интерполирования. Получаем:

$$\sqrt{2n} c_v = \sum_{\mu=-n}^{n-1} |\mu| e^{-i\mu v \lambda}.$$

и непосредственно имеем:

$$\sqrt{2n} c_0 = 2 \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu + n = n^2, \text{ т. е. } c_0 = \frac{n}{2}.$$

При $v \neq 0$ находим:

$$\sqrt{2n} c_v = \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu (e^{-i\mu v \lambda} + e^{i\mu v \lambda}) + (-1)^v n.$$

Полагаем $e^{-i\lambda} = \rho$, тогда $\rho \neq 1$ и встречающаяся здесь сумма:

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} \mu \rho^{\mu} + \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu \rho^{-\mu}$$

может быть вычислена таким же приемом, как и в первом примере; мы получаем:

$$\frac{1}{1-\rho} \left[\frac{1-\rho^n}{1-\rho} - (n-1) \rho^n - \frac{1-\rho^{-n}}{1-\rho^{-1}} - 1 + n \rho^{-n+1} \right].$$

Если v число четное, то это выражение, ввиду того что

$$\rho^n = \frac{1}{\rho^n} = e^{-iv\pi} = 1,$$

(так как $\lambda n = \pi$), принимает значение $-n$, следовательно

$$\sqrt{2n} c_v = -n + (-1)^v n = 0.$$

Если v — число нечетное, то $\rho^n = -1$, и наша сумма принимает значение:

$$n + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} = n + \frac{-4}{\left(e^{\frac{v\lambda}{2}} - e^{-\frac{v\lambda}{2}}\right)^2}.$$

Следовательно в этом случае:

$$\sqrt{2n} c_v = -\frac{1}{\sin^2 \frac{v\lambda}{2}}.$$

В качестве формулы интерполирования получаем, переходя к выражению в действительной форме и ограничиваясь случаем четного n , выражение:

$$|x| = \frac{n}{2} - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\cos v\lambda}{\sin^2 \frac{v\lambda}{2}},$$

причем суммирование должно распространяться только на нечетные значения индекса v .

Обе формулы интерполирования для $f_x = x$ и $f_x = |x|$ переходят чисто формальным образом в ряды Фурье для функции $f(x) = x$ и $f(x) = |x|$, выведенные нами в п° 2 и п° 4 § 3, если $x\lambda$ приравнять x и неограниченно увеличивать n , а вместе с тем и $\frac{1}{\lambda}$, и наконец заменить $\frac{1}{\lambda} \sin \frac{v\lambda}{2}$ через $\frac{v}{2}$.

То же будет иметь место и для следующих формул интерполирования, которые я привожу без доказательства.

3. Значения

$$\begin{aligned} f_x &= -1 \text{ при } -n \leq x \leq -1, \\ f_0 &= 0, \\ f_x &= 1 \text{ при } 1 \leq x \leq n, \end{aligned}$$

соответствующие функции, рассмотренной в § 3, п° 5, выражаются, если воспользоваться формулой II, в виде:

$$f_x = \frac{2}{2n+1} \sum_{v=1}^n \frac{\cos \frac{v\lambda}{2} - (-1)^v}{\sin \frac{v\lambda}{2}} \sin v\lambda.$$

4. Для $f_x = \cos \alpha x \lambda$, где α — число целое, мы получаем, применяя формулу I:

$$\cos \alpha x \lambda = \frac{1}{2n} \sin \alpha \pi \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\alpha \lambda}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^v \frac{\sin \alpha \lambda \cos v x \lambda}{\sin^2 \frac{\alpha \lambda}{2} - \sin^2 \frac{v \lambda}{2}} - (-1)^x (-1)^n \operatorname{tg} \frac{\alpha \lambda}{2} \right\}.$$

Полагая $x = n$ и деля на $\sin \alpha \pi$, получаем:

$$\operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{1}{2n} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\alpha \lambda}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\sin \alpha \lambda}{\sin^2 \frac{\alpha \lambda}{2} - \sin^2 \frac{v \lambda}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\alpha \lambda}{2} \right\}.$$

Если проинтегрируем эту формулу по α от $\alpha = 0$ до $\alpha = x < 1$, то, принимая во внимание формулу интегрирования,

$$\pi \int_0^x \left(\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\alpha \pi}{2n} \right) d\alpha = \log \frac{\sin x \pi}{\sin \frac{x \pi}{2n}} - \log 2n,$$

получим равенство:

$$\log \sin x \pi = \log \left(2n \sin \frac{x \lambda}{2} \right) + \sum_{v=1}^{n-1} \log \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x \lambda}{2}}{\sin^2 \frac{v \lambda}{2}} \right) + \log \cos \frac{x \lambda}{2}, \quad \left(\lambda = \frac{\pi}{n} \right),$$

из которого непосредственно получаем:

$$\sin x \pi = \sin x n \lambda = n \sin x \lambda \cdot \prod_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x \lambda}{2}}{\sin^2 \frac{v \lambda}{2}} \right).$$

Эта формула дает разложение синуса в произведение и аналогична формуле разложения синуса в бесконечное произведение, выведенной нами в $n^\circ 7$, § 3.

5. Дальнейшими интересными примерами являются выражения величин

$$f_x = \operatorname{ch} \alpha x \lambda$$

и

$$f_x = \operatorname{sh} \alpha x \lambda,$$

причем α может быть каким угодно числом. Пользуясь формулой I, мы приходим путем вычислений, аналогичных вычислениям в пункте четвертом, к выражениям:

$$\operatorname{ch} \alpha x \lambda = \frac{\operatorname{sh} \alpha \pi}{2n} \left[\operatorname{cth} \frac{\alpha \lambda}{2} + \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^v \frac{\operatorname{sh} \alpha \lambda \cosh v x \lambda}{\sin^2 \frac{v \lambda}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha \lambda}{2}} + (-1)^{x+n} \operatorname{th} \frac{\alpha \lambda}{2} \right].$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \alpha x \lambda = & -\frac{\operatorname{sh} \alpha \pi}{2n} \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu} \frac{\sin \nu \lambda \sin \nu x \lambda}{\sin^2 \frac{\nu \lambda}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha \lambda}{2}} + \right. \\ & \left. + 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu} \cos \nu x \lambda + (-1)^{x+n} \right], \end{aligned}$$

причем сумма последних трех выражений обращается в нуль при всех значениях x кроме $x = -n$.

В заключение обратим внимание на то, насколько сложнее решается задача алгебраического интерполирования, чем задача о разложении в ряд Фурье, которое получается формально из формул интерполирования путем предельного перехода. Этим подтверждается тот факт, что хотя предельные переходы и выводят нас из области элементарных алгебраических рассуждений, однако в действительности они в очень многих случаях представляют средство для существенного упрощения формальных соотношений.

ГЛАВА X.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ КОЛЕБАНИЙ.

Нам уже в различных вопросах встречались дифференциальные уравнения, т.е. уравнения, из которых требуется определить неизвестную функцию и в которые входит не только эта функция, но и ее производные.

Простейшей задачей такого рода является нахождение неопределенного интеграла от заданной функции $f(x)$: задача интегрирования заключается в определении функции $y = F(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $y' - f(x) = 0$. Далее в § 7, гл. III мы видели, что уравнение вида $y' = ay$ решается с помощью показательной функции $y = ce^{ax}$. Затем в § 4, гл. V мы видели, что задачи механики приводят к дифференциальным уравнениям, и вообще оказывается, что эти уравнения играют основную роль во многих отделах чистой математики и в большей части областей прикладной математики. Не останавливаясь на общей теории дифференциальных уравнений, я хочу рассмотреть в этой главе дифференциальные уравнения простейших колебательных явлений в качестве примера, поучительного в смысле теории и весьма важного для применений.

При этом полезно заметить следующее. Под решением дифференциального уравнения разумеют функцию, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение, удовлетворяет этому уравнению при всех рассматриваемых значениях независимого переменного. Часто вместо термина решение дифференциального уравнения употребляют выражение интеграл дифференциального уравнения, во-первых, потому что речь идет известным образом об обобщении задачи интегрирования и, во-вторых, потому что во многих случаях решение действительно приводит к выполнению интегрирований.

§ 1. Проблема колебаний в механике и физике.

1. Простейшие механические колебания. Механические колебания простейшего типа мы уже рассмотрели в § 4, гл. V. Речь идет о материальной точке с массой m , которая может перемещаться вдоль

оси x -ов и которая связана силой упругости с точкой $x=0$, в которой она находится в состоянии покоя. Мы допускаем, что величина этой силы пропорциональна отклонению x , и полагаем ее равной $-kx$, причем k положительная постоянная, а знак минус указывает на то, что сила всегда направлена к точке $x=0$. Далее допустим существование силы трения и примем, что эта сила пропорциональна скорости точки $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ и имеет противоположное направление, т.е. численно

выражается в виде $-r\dot{x}$, где r (коэффициент трения) положительная постоянная. Допустим наконец, что на точку действует еще внешняя сила, заданная как функция $f(t)$ времени t , тогда по основному закону Ньютона (см. гл. V, § 4) произведение из массы m на ускорение $\ddot{x}$ равно силе упругости, сложенной с силой трения и внешней силой, и мы получаем таким образом в качестве выражения основного закона Ньютона уравнение:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t).$$

Это уравнение колебаний управляет течением механического процесса. Как показывают рассмотренные раньше частные случаи дифференциальных уравнений (например задача интегрирования $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t)$ с ее

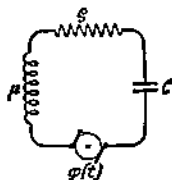
решением $x = \int f(t) dt + c$ или решение дифференциального уравнения $m\ddot{x} + kx = 0$ в гл. V, § 4), такое дифференциальное уравнение ни в коем случае не может иметь единственного решения или конечного числа различных решений; наоборот, оно будет иметь, как мы сейчас увидим, бесчисленное множество решений, которые выражаются следующим образом. Можно указать общее решение $x(t)$ уравнения колебаний, которое зависит не только от независимой переменной t , но и от двух совершенно произвольных параметров c_1 и c_2 , так называемых произвольных постоянных интегрирования; подставляя вместо c_1 и c_2 определенные значения, мы получаем определенное частное решение и мы можем таким путем получить любое решение этого уравнения. Таким образом „общее решение“ представляет собой совокупность всех частных решений.

Этот факт вполне понятен (см. также гл. V, § 4). В самом деле мы не можем ожидать, чтобы наше уравнение само по себе вполне определяло явление; наоборот, кажется весьма вероятным, что можно еще произвольно выбрать в данный момент, скажем в момент $t=0$, начальное положение $x(0) = x_0$ и начальную скорость $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ или короче начальное состояние, т.е. что в момент $t=0$ мы можем привести точку

в движение из произвольного начального положения с заданной скоростью, и лишь после этого мы можем ожидать, что движение вполне определено. Обе находящиеся в нашем распоряжении постоянные c_1 и c_2 общего решения как раз и будут служить для того, чтобы мы могли выбрать определенное решение, соответствующее этим начальным условиям. В ближайшем параграфе мы увидим, что это возможно сделать единственным образом, и покажем, как это сделать.

Если внешней силы нет, т. е. если $f(t) \leq 0$, то говорят о свободном колебании. Дифференциальное уравнение называется в этом случае однородным. Если же функция $f(t)$ не равна нулю при всех значениях t , то говорят о вынужденном колебании, и дифференциальное уравнение называют неоднородным. Член $f(t)$ иногда называют возмущающим членом.

2. Электрические колебания. В действительности приходится иметь дело с механическими системами, которые представляют лишь приближение к системе указанного простого типа, например маятник при малых амплитудах колебания. Точно так же колебания магнитной стрелки, или колебания центра телефонной или микрофонной пластинки и другие механические колебания можно приближенно заменить предыдущей схемой. Однако гораздо точнее соответствует указанному дифференциальному уравнению явление электрических колебаний. Рассмотрим разомкнутую электрическую цепь, схематически изображенную на черт. 125, с само-



Черт. 125.

индукцией L , сопротивлением R и емкостью $C = \frac{1}{\chi}$.

Пусть кроме того в цепи действует внешняя электродвижущая сила $\varphi(t)$, известная как функция времени t , например напряжение, доставляемое альтернатором, или напряжения, возбуждаемые электрическими волнами. Чтобы описать явление в нашей цепи с помощью дифференциального уравнения, обозначим напряжение на обкладках конденсатора через E , заряд конденсатора через Q , тогда эти величины связаны соотношением:

$$CE = \frac{1}{\chi} E = Q.$$

Сила тока J , которая, так же как и напряжение E , является функцией времени t , определяется как изменение заряда в единицу времени, т. е. как скорость уменьшения заряда конденсатора:

$$J = -\dot{Q} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{\chi} \dot{E}.$$

Далее по закону Ома произведение из силы тока на омическое сопротивление равно действующей электродвижущей силе, т. е. в данном случае равно напряжению на обкладках конденсатора, уменьшенному на величину противодействующей электродвижущей силы самоиндукции, т. е. на $\mu \dot{J}$, и увеличенному на внешнюю электродвижущую силу $\varphi(t)$. Мы приходим таким образом к уравнению:

$$J\rho = E + \varphi(t) - \mu \dot{J},$$

или

$$-\frac{\rho}{\chi} \dot{E} = E + \frac{\mu}{\chi} \ddot{E} + \varphi(t),$$

т. е. к уравнению:

$$\mu \ddot{E} + \rho \dot{E} + \chi E = -\chi \varphi(t),$$

которому должно удовлетворять напряжение в цепи. Мы получили, как видим, дифференциальное уравнение как раз того типа, который мы рассматривали в п^о 1. При этом масса соответствует самоиндукция, трению — сопротивление, коэффициенту упругости — величина обратная емкости, а внешней силе — внешняя электродвижущая сила. Если последняя равна нулю, то мы имеем дело с однородным дифференциальным уравнением.

Умножая обе части нашего уравнения на $-\frac{1}{\chi}$ и дифференцируя по времени, непосредственно получаем соответствующее дифференциальное уравнение для силы тока J :

$$\mu \ddot{J} + \rho \dot{J} + \chi J = \dot{\varphi}(t),$$

которое только правой частью отличается от уравнения для напряжения, а при свободных колебаниях ($\varphi = 0$) полностью с ним совпадает.

§ 2. Решение однородного уравнения. Свободные колебания.

1. Формальное решение. Решение однородного дифференциального уравнения $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ из § 1, п^о 1 можно легко получить в виде показательной функции, если попытаться подобрать постоянную λ так, чтобы выражение $e^{\lambda t} = x$ удовлетворяло уравнению. Подставляя это выражение и вытекающие из него $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ и $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ в дифференциальное уравнение и сокращая на общий множитель $e^{\lambda t}$, получаем квадратное уравнение относительно λ :

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0,$$

которое имеет корни:

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{r^2 - 4mk}$$

и

$$\lambda_2 = -\frac{r}{2m} - \frac{1}{2m} \sqrt{r^2 - 4mk}.$$

Каждое из выражений $x = e^{\lambda_1 t}$ и $x = e^{\lambda_2 t}$ представляет собой, по крайней мере формально, частное решение дифференциального уравнения, в чем можно убедиться, проделав последнее вычисление в обратном порядке. Возможны при этом три случая:

1. Если $r^2 - 4mk > 0$, то оба корня действительны, различны и имеют отрицательное значение, и мы получаем сперва два решения

$$x = u_1 = e^{\lambda_1 t} \text{ и } x = u_2 = e^{\lambda_2 t}$$

дифференциального уравнения. С помощью этих решений мы можем получить решение, содержащее две произвольных постоянных c_1 и c_2 . В самом деле путем дифференцирования непосредственно находим, что и

$$x = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

является решением дифференциального уравнения. В п° 3 мы докажем, что это выражение является самым общим решением нашего дифференциального уравнения, т. е. что всякое решение получается, если подставить вместо c_1 и c_2 соответствующие численные значения.

2. Если $r^2 = 4mk$, то наше квадратное уравнение имеет только один двойной корень, следовательно имеем (с точностью до постоянного множителя) пока только одно решение:

$$x = w_1 = e^{-\frac{r}{2m} t},$$

но очень легко проверить, что в этом случае также и функция

$$x = w_2 = t e^{-\frac{r}{2m} t}$$

является решением дифференциального уравнения¹⁾. В самом деле для этого выражения:

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{r}{2m} t\right) e^{-\frac{r}{2m} t}, \quad \ddot{x} = \left(\frac{r^2}{4m^2} t - \frac{r}{m}\right) e^{-\frac{r}{2m} t},$$

¹⁾ К этому решению естественно приводит следующий предельный переход. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то в частности выражение

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

также представляет решение. Если станем теперь неограниченно приближать λ_1 к λ_2 и будем писать λ вместо λ_1 и λ_2 , то наше выражение перейдет в

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t}) = t e^{\lambda t}.$$

откуда, подставляя, непосредственно находим, что удовлетворяется уравнение:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + \frac{r^2}{4m}x = m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0.$$

Теперь выражение

$$x = c_1 e^{-\frac{r}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{r}{2m}t}$$

опять дает нам решение однородного дифференциального уравнения с двумя произвольными постоянными c_1 и c_2 .

3. Если наконец $r^2 - 4mk < 0$, то полагаем $r^2 - 4mk = -4m^2\gamma^2$ и получаем сперва два решения дифференциального уравнения в комплексной форме, именно выражения:

$$x = u_1 = e^{-\frac{r}{2m}t + i\gamma t} \quad \text{и} \quad x = u_2 = e^{-\frac{r}{2m}t - i\gamma t}.$$

Значение этих комплексных решений заключается просто в том, что их действительная часть и коэффициент при i в мнимой части представляют действительные решения дифференциального уравнения. Разложения

$$e^{\pm i\gamma t} = \cos \gamma t \pm i \sin \gamma t$$

дают нам непосредственно оба решения:

$$v_1 = e^{-\frac{r}{2m}t} \cos \gamma t = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad v_2 = e^{-\frac{r}{2m}t} \sin \gamma t = \frac{u_1 - u_2}{2i}.$$

Полезно в качестве небольшого упражнения непосредственно без помощи комплексных величин путем дифференцирования и подстановки проверить, что эти выражения действительно являются решениями нашего дифференциального уравнения.

С помощью наших двух частных решений и двух произвольных постоянных c_1 и c_2 мы можем опять составить общее решение:

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 = (c_1 \cos \gamma t + c_2 \sin \gamma t) e^{-\frac{r}{2m}t},$$

которое можно также записать в виде:

$$x = a \cos \gamma (t - \delta) e^{-\frac{r}{2m}t},$$

причем полагаем:

$$c_1 = a \cos \gamma \delta, \quad c_2 = a \sin \gamma \delta,$$

где a и δ — две новые постоянные.

Напомним, что это решение для частного случая $r=0$ нам знакомо уже из гл. V, § 4.

2. Физическая интерпретация решения. В первых двух случаях, когда $r > 2\sqrt{mk}$ и когда $r = 2\sqrt{mk}$, решение выражается показательными функциями или функцией $te^{-\frac{r}{2m}t}$, график которой при больших значениях t имеет большое сходство с графиком показательной функции, или же линейной комбинацией этих функций. В этих случаях мы имеем дело с аperiodически затухающими явлениями, т. е. такими явлениями, когда „отклонение“ x с возрастанием t асимптотически приближается к значению нуль и нет колебаний вокруг значения $x=0$. Здесь следовательно не может быть речи о колебаниях; влияние трения r , или затухание, настолько велико, что упругие силы не могут вызвать колебательных движений.

Совершенно по-иному обстоит дело в третьем случае при $r < 2\sqrt{mk}$, когда затухание r настолько мало, что появляются мнимые корни λ_1 и λ_2 . Здесь выражение

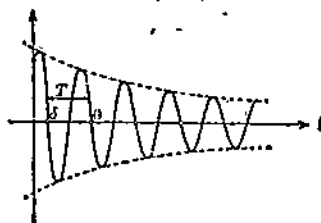
$$x = a \cos \nu(t - \delta) e^{-\frac{r}{2m}t}$$

дает нам так называемые затухающие гармонические колебания, т. е. колебания, происходящие по синусоидальному закону, частота¹⁾ которых

$\nu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$, но амплитуда их не остается по-

стоянной, как у простых колебаний, а дается выражением $ae^{-\frac{r}{2m}t}$, т. е. убывает по экспоненциальному закону и тем быстрее, чем больше множитель затухания $\frac{r}{2m}$. Этот множитель затухания в физике часто назы-

$$u = a' \cos \nu(t - \delta) e^{-\frac{r}{2m}t}$$



Черт. 126.

вают логарифмическим декрементом затухающего колебания, чем хотят отметить, что логарифм амплитуды убывает со скоростью $\frac{r}{2m}$. На черт. 126 изображен

ход таких затухающих колебаний. Как и раньше, мы называем величину $T = \frac{2\pi}{\nu}$ периодом колебания, а величину δ сдвигом фазы колебания. В частном случае $r=0$ мы

получаем уже рассмотренные нами простые колебания с частотой

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

¹⁾ Под частотой мы здесь повсюду, как и в гл. IX, разумеем круговую частоту, т. е. число колебаний за время 2π .

собственной частотой системы, совершающей незатухающие колебания.

3. Выбор решения, соответствующего заданным начальным условиям. Однозначность решения. Мы должны еще доказать, что найденное решение, содержащее две произвольные постоянные, действительно можно применить к любым наперед заданным начальным условиям и далее что в этой форме заключаются все решения. Если мы потребуем, чтобы было найдено решение, для которого в момент $t=0$ имели бы место равенства:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

причем значения x_0 и $\dot{x}_0$ заданы произвольно, то в случае первом мы должны положить:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_0, \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 &= \dot{x}_0. \end{aligned}$$

Мы получаем таким образом два линейных уравнения для обеих постоянных c_1 и c_2 , из которых они тотчас же однозначно определяются:

$$c_1 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

В случае втором тот же прием дает два линейных уравнения:

$$c_1 = x_0, \quad \lambda c_1 + c_2 = \dot{x}_0,$$

из которых также однозначно определяются c_1 и c_2 . Наконец в случае третьем уравнения для определения a и δ принимают вид:

$$a \cos \gamma \delta = x_0, \quad a \left(\gamma \sin \gamma \delta - \frac{r}{2m} \cos \gamma \delta \right) = \dot{x}_0,$$

и решаются с помощью формул:

$$\delta = \frac{1}{\gamma} \arccos \frac{x_0}{a}, \quad a = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 x_0^2 + \left(\dot{x}_0 + \frac{r}{2m} x_0 \right)^2}.$$

Таким образом действительно доказано, что полученные общие решения можно применить к любым начальным условиям. Остается доказать, что не существует других решений, а для этого достаточно доказать, что при одних и тех же начальных условиях не может быть двух различных решений.

Если бы существовали два таких решения $u(t)$ и $v(t)$, для которых

$$u(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{x}_0$$

$$v(0) = x_0, \quad \dot{v}(0) = \dot{x}_0,$$

то разность их $w = u - v$ тоже была бы решением дифференциального уравнения, притом таким, что

$$w(0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{w}(0) = 0.$$

Это решение таким образом соответствовало бы начальному состоянию покоя, т. е. такому состоянию, при котором в момент $t = 0$ точка, имея скорость, равную нулю, находится в положении равновесия. Требуется показать, что она никогда не может прийти в движение. Для этого умножаем дифференциальное уравнение $m\ddot{w} + r\dot{w} + kw = 0$ на $2\dot{w}$ и замечаем, что $2\dot{w}\ddot{w} = \frac{d}{dt}(\dot{w}^2)$, $2\dot{w}\dot{w} = \frac{d}{dt}(w^2)$; получаем:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{w}^2) + \frac{d}{dt}(kw^2) + 2r\dot{w}^2 = 0.$$

Интегрируя теперь в пределах от $t = 0$ до $t = \tau$ и принимая во внимание начальные условия $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = 0$, получаем:

$$m\dot{w}^2(\tau) + kw^2(\tau) + 2r \int_0^\tau \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 dt = 0.$$

Но это равенство невозможно, если только w для некоторого τ отлично от нуля; в самом деле тогда в левой части находилась бы положительная величина, так как мы m, r, k считаем положительными величинами, а в правой части имеем нуль. Следовательно w постоянно равно нулю, и предложение доказано.

§ 3. Неоднородное уравнение. Вынужденные колебания.

1. Общие замечания. Решению нашей проблемы в том случае, когда существует внешняя сила $f(t)$, т. е. интегрированию неоднородного дифференциального уравнения, я предположу следующее замечание.

Если w и v два решения неоднородного уравнения, то разность $u = w - v$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, в чем непосредственно убеждаемся путем подстановки в это дифференциальное уравнение. Можно следовательно получить все решения неоднородного уравнения, зная одно решение его, если прибавить к этому решению самое общее решение однородного дифференциального уравнения. Поэтому дело сводится теперь только к тому, чтобы найти одно решение неоднородного дифференциального уравнения. С физической точки зрения это значит, что на явление, вызываемое внешней силой, может еще налагаться произвольное явление свободного колебания. Последнее, выражаемое решением однородного уравнения, входящим в ка-

честве слагаемого, будет при существовании трения всегда затухающим благодаря множителю $e^{-\frac{r}{2m}t}$; следовательно при всех вынужденных колебаниях с трением, независимо от того, какие налагаются свободные колебания, с течением времени будет все более и более вырисовываться одно и то же конечное состояние.

Во-вторых, замечу, что действие силы можно разложить таким же образом, как и самую силу. Это значит: если функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f(t)$ связаны соотношением:

$$f_1(t) + f_2(t) = f(t),$$

если далее $x_1 = x_1(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f_1(t),$$

а $x_2 = x_2(t)$ — решением дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f_2(t),$$

то

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

является решением первоначального уравнения

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f(t).$$

Конечно аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда функция $f(t)$ составлена из любого числа слагаемых. Доказательство этого простого, но важного факта получается само собой при одном взгляде на уравнение. Таким образом мы получаем возможность путем разложения функции $f(t)$ на два или большее число слагаемых разбить данное дифференциальное уравнение на несколько других, которые в иных случаях решаются значительно проще.

Наиболее важным случаем является тот, когда внешняя сила $f(t)$ периодическая. Такую периодическую функцию $f(t)$ мы можем разложить согласно предыдущей главе на гармонические периодические функции, т. е. можем приблизительно выразить ее с какой угодно точностью при помощи суммы конечного числа слагаемых такого рода. Поэтому нам достаточно дать решение нашего дифференциального уравнения в предположении, что правая часть его имеет вид:

$$a \cos \omega t \quad \text{или} \quad b \sin \omega t,$$

где a , b и ω представляют какие-то постоянные величины.

Вместо того, чтобы оперировать с этими тригонометрическими функциями, мы можем воспользоваться комплексной записью, которая более

Простым и наглядным путем приведет нас к решению наших дифференциальных уравнений. Полагая $f(t) = ce^{i\omega t}$, мы в силу предыдущего замечания рассматриваем дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ce^{i\omega t},$$

причем под c мы разумеем любое действительное или комплексное постоянное число. Смысл такого дифференциального уравнения заключается в том, что оно представляет два дифференциальных уравнения с действительными коэффициентами. В самом деле разлагаем правую часть на два слагаемых, принимая, скажем, $c = 1$, т. е. пишем:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t,$$

тогда наше комплексное дифференциальное уравнение эквивалентно двум дифференциальным уравнениям

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \cos \omega t$$

и

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \sin \omega t$$

с действительными коэффициентами, и решения x_1 и x_2 этих уравнений объединяются в решение $x = x_1 + ix_2$ комплексного дифференциального уравнения. Обратно, решив уравнение в комплексной форме, мы получим в действительной части этого решения функцию x_1 , а в мнимой части функцию x_2 .

2. Решение неоднородного уравнения. Уравнение $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ce^{i\omega t}$ мы опять решаем с помощью естественного допущения, предполагая сначала $r \neq 0$. Именно мы имеем право ожидать, что движение следует за периодической внешней силой в том же ритме, и соответственно этому попытаемся удовлетворить дифференциальному уравнению функцией вида:

$$x = \sigma e^{i\omega t},$$

причем остается только определить не зависящий от времени множитель σ . Подставляя эту функцию в дифференциальное уравнение, мы получаем, ввиду того что $\dot{x} = i\omega \sigma e^{i\omega t}$ и $\ddot{x} = -\omega^2 \sigma e^{i\omega t}$, после сокращения на $e^{i\omega t}$ уравнение:

$$-m\omega^2 \sigma + ri\omega \sigma + k\sigma = c,$$

или

$$\sigma = \frac{c}{-m\omega^2 + ir\omega + k},$$

и обратно мы видим, что при этом значении постоянной σ выражение $\sigma e^{i\omega t}$ действительно является решением неоднородного дифференциального

уравнения. Таким образом мы нашли решение в комплексной форме. Чтобы выяснить смысл нашего результата, мы должны однако сделать еще некоторые преобразования.

Напишем прежде всего комплексный множитель σ в виде:

$$\sigma = e^{\frac{(k - m\omega^2) - ir\omega}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}} = c\alpha e^{-i\omega\delta},$$

причем положительный коэффициент искажения α и сдвиг фаз $\omega\delta$ находятся из данных величин m , r , ω и k с помощью уравнений:

$$\alpha^2 = \frac{1}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \omega\delta = \frac{r\omega}{k - m\omega^2}.$$

Теперь наше решение принимает вид: $x = c\alpha e^{i\omega(t-\delta)}$, и значение нашего результата следующее: силе $c \cos \omega t$ соответствует „действие“ $c\alpha \cos \omega(t - \delta)$, силе $c \sin \omega t$ соответствует действие $c\alpha \sin \omega(t - \delta)$.

Итак, получаем следующий результат. Действие является функцией того же рода, что и сила, т. е. незатухающим колебанием. Это колебание отличается от колебания, представляющего силу, искажением амплитуды с коэффициентом искажения α и сдвигом фазы на угол $\omega\delta$. Конечно этот результат легко получить и без помощи комплексных чисел при несколько большей затрате труда на вычисления.

Согласно замечаниям, сделанным нами в начале параграфа, мы находим одно решение полностью решили нашу задачу, так как мы можем путем наложения свободного колебания получить самое общее вынужденное колебание.

Формулирую результат еще раз. Общее решение дифференциального уравнения $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ce^{i\omega t}$ есть

$$x = c\alpha e^{i\omega(t-\delta)} + u,$$

где u есть общее решение однородного дифференциального уравнения $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$, а величины α и δ определяются равенствами

$$\alpha^2 = \frac{1}{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \omega\delta = \frac{r\omega}{k - m\omega^2}.$$

Постоянные c_1 и c_2 в этом общем решении дают возможность подобрать решение, соответствующее произвольным начальным условиям, т. е. достигнуть того, чтобы при произвольно заданных значениях x_0 и $\dot{x}_0$ имели место равенства $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

3. Кривая резонанса. Чтобы составить себе наглядное представление о полученном решении и о его значении в приложениях, будем рассматривать коэффициент искажения α как функцию „возбуждающей частоты“ ω , т. е. исследуем функцию:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + r^2\omega^2}}.$$

Побуждает нас к такому исследованию то обстоятельство, что при заданных постоянных значениях k , m , r , или, как говорят, при заданной „системе, допускающей колебания“, можно представить себе заданными периодические „возбуждающие силы“ $e^{i\omega t}$ самой разнообразной частоты ω , и важно поэтому сделать обзор решений дифференциального уравнения при таких различных возбуждающих силах. Чтобы удобнее было описать ход нашей функции, вводим для сокращения величину $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; ω_0 есть та частота, которую имела бы наша система при свободных колебаниях, если бы трение r равнялось нулю, или, короче говоря, собственная частота системы, совершающей незатухающие колебания (см. стр. 427). Действительное число колебаний свободной системы вследствие существования трения r не равно ω_0 , а равно:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}},$$

причем мы предполагаем, что $4km - r^2 > 0$, ибо в противном случае свободная система является аperiodической.

Функция $\varphi(\omega)$ приближается асимптотически к значению нуль, когда возбуждающая частота ω стремится к бесконечности, причем исчезание ее порядка $\frac{1}{\omega^2}$. Далее $\varphi(0) = \frac{1}{k}$, иными словами: для возбуждающей силы периода нуль и амплитуды 1, т. е. для постоянной силы, равной единице, получается определенная амплитуда x совершающей колебания системы, равная $\frac{1}{k}$. Производная $\varphi'(\omega)$ может обращаться в нуль лишь при тех значениях, при которых обращается в нуль производная подкоренного выражения, т. е. при значении $\omega = \omega_1$, удовлетворяющем уравнению $4m\omega(k - \omega^2) - 2r^2\omega = 0$; из этого уравнения непосредственно находим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Так как функция $\varphi(\omega)$ повсюду положительна, а в бесконечности исчезает, то функция $\varphi(\omega)$ в точке ω_1 достигает максимума. Частоту ω_1 мы называем „частотой резонанса“ нашей системы. Для того чтобы такая частота резонанса существовала необходимо очевидно, чтобы $2km - r^2$ было больше нуля.

Максимальное значение равно:

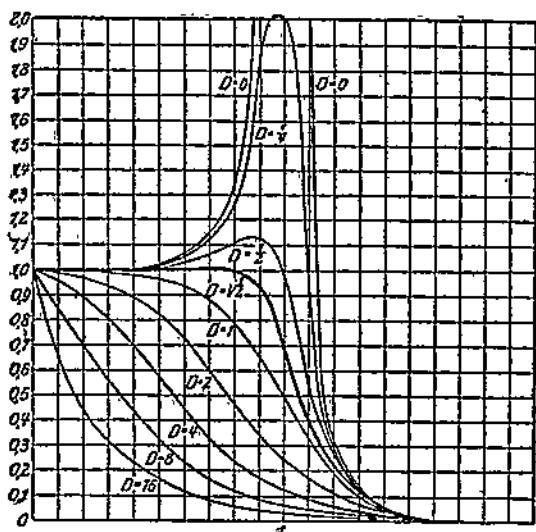
$$\varphi(\omega_1) = \frac{1}{r \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}},$$

что мы находим, подставляя выражение для ω_1 . Это значение будет тем больше, чем меньше r . При $r=0$, т. е. для системы, совершающей незатухающие колебания, функция $\varphi(\omega)$ обращалась бы в точке $\omega=\omega_1$ в бесконечность; этот предельный случай мы еще должны будем рассмотреть особо.

Кривая, изображающая функцию $\varphi(\omega)$, называется кривой резонанса данной допускающей колебания системы. Тот факт, что при $\omega=\omega_1$ (т. е. при малых значениях r вблизи собственной частоты ω_0 системы) искажение амплитуд $a=\varphi(\omega)$ становится особенно большим, является математическим выражением явления резонанса, которое при остающихся без изменения значениях m и k проявляется тем резче, чем меньше трение r .

На черт. 127 изображено в предположении, что $m=1$ и $k=1$, а следовательно и $\omega_0=1$, семейство кривых резонанса, которые различаются между собой только различными значениями $D=\frac{r}{2}$. Мы видим,

что при малых значениях D имеет место резко выраженный резонанс вблизи $\omega=1$ [в предельном случае $D=r=0$ при $\omega=1$ мы имели бы не максимум, а бесконечно большое значение функции $\varphi(\omega)$]; с возра-



Черт. 127.

станнем D максимум сдвигается влево и при значении $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ значение $\omega_1 = 0$. Таким образом точка с горизонтальной касательной попадает в точку нуля и максимум исчезает. При $D > \frac{1}{\sqrt{2}}$ производная $\varphi'(\omega)$ в нуль не обращается и кривая резонанса не имеет уже точки максимума, т. е. явления резонанса нет.

Вообще явления резонанса не бывает, если выполнено условие

$$2km - r^2 \leq 0.$$

Если имеет место знак равенства, то кривая резонанса начинается при $\omega_1 = 0$ на высоте $\varphi(0) = \frac{1}{k}$ и имеет в этой точке горизонтальную касательную; кривая протекает сперва приблизительно горизонтально и падает затем до нуля.

4. Более подробное исследование хода колебаний. Мы не можем ограничиться предыдущим исследованием. Для того чтобы действительно уяснить себе явление вынужденного колебаний, необходимо подчеркнуть еще один пункт. Предыдущее решение $ca e^{i\omega(t-b)}$ следует рассматривать лишь как предельное состояние, к которому с течением времени все более и более приближается полное решение:

$$x(t) = ca e^{i\omega(t-b)} + c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

благодаря тому, что свободное колебание $c_1 u_1 + c_2 u_2$, налагающееся на чистое вынужденное колебание, с течением времени затухает. Этот процесс затухания происходит тем медленнее, чем меньше r , и тем быстрее, чем больше r .

Допустим например, что в начале движения, т. е. при $t=0$, система находилась в покое, т. е. пусть $x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=0$. Отсюда определяются постоянные c_1 и c_2 . Если возбуждающая частота ω приблизительно или точно равна ω_1 , т. е. если имеет место резонанс, то сравнительно большая амплитуда $a = \varphi(\omega_1)$ обнаружится не с самого начала; она будет покрыта функцией $c_1 u_1 + c_2 u_2$ и лишь при затухании этой функции она обнаружится, следовательно это произойдет тем позже, чем меньше r .

В случае отсутствия затухания, т. е. при $r=0$, наше решение вообще не подходит, если возбуждающая частота ω равна собственной частоте $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, так как при этом $\varphi(\omega_0)$ обращается в бесконечность. Следовательно нельзя получить решения уравнения $m\ddot{x} + kx = e^{i\omega t}$ в виде $ca e^{i\omega t}$. Однако мы можем непосредственно найти одно решение нашего

уравнения в виде $x = \sigma t e^{i\omega t}$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, мы приходим, ввиду того что

$$\dot{x} = \sigma e^{i\omega t} (1 + i\omega t), \quad \ddot{x} = \sigma e^{i\omega t} (2i\omega - t\omega^2),$$

к уравнению

$$\sigma (2mi\omega - mt\omega^2 + kt) = 1,$$

следовательно, принимая во внимание, что $m\omega^2 = k$, имеем:

$$\sigma = \frac{1}{2mi\omega}.$$

Таким образом мы получаем в случае резонанса для неза-
ухающей системы решение:

$$x = \frac{t}{2im\omega} e^{i\omega t} = \frac{t}{2i\sqrt{km}} e^{i\omega t}$$

или, записывая в действительной форме, в случае $f(t) = \cos \omega t$ получаем:

$$x = \frac{t}{2\sqrt{km}} \sin \omega t,$$

в случае $f(t) = \sin \omega t$, находим:

$$x = -\frac{t}{2\sqrt{km}} \cos \omega t.$$

Мы видим, что здесь мы имеем дело с функцией, которую также можно назвать колебанием, но амплитуда этого колебания растет пропорционально времени. Налагающееся свободное колебание в данном случае, правда, вообще не затухает, так как $\gamma = 0$, но оно постоянно сохраняет свою амплитуду и не может препятствовать неограниченному возрастанию амплитуды чистого вынужденного колебания. Следовательно в том, что значение решения в данном случае с возрастанием t колеблется между все большими и большими по абсолютному значению положительными и отрицательными пределами и кроется собственно смысл обращения в бесконечность нашей функции резонанса в случае незатухающей системы.

5. Замечания относительно устройства регистрирующих приборов. Исследование, проведенное в п° 4, имеет чрезвычайно большое значение для самых разнообразных приложений в области физики и техники. Во многих приборах, например в гальванометрах, сейсмографах, в цепях электрических колебаний в радиоприемниках, в микрофонных пластинках и т. д. дело заключается в том, чтобы зарегистрировать размах колебания x или другие аналогичные величины как действие внешних периодических сил. Величина x удовлетворяет при этом, по крайней мере в первом приближении, нашему дифференциальному уравнению колебаний.

Если T представляет период колебаний внешней периодической силы, то мы на основании предыдущей главы можем представить себе эту функцию силы разложенной в ряд Фурье вида:

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \gamma_l e^{i \frac{2\pi}{T} l t}$$

или, лучше, выраженной с достаточным приближением при помощи конечного тригонометрического выражения:

$$\sum_{l=-N}^N \gamma_l e^{i \frac{2\pi}{T} l t}.$$

Согласно нашему принципу наложения, мы можем представить решение x нашего дифференциального уравнения, оставляя пока в стороне налагающееся свободное колебание, в виде бесконечного ряда ¹⁾ вида:

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sigma_l e^{i \frac{2\pi}{T} l t}$$

или приближенно с помощью конечного выражения вида:

$$x(t) = \sum_{l=-N}^N \sigma_l e^{i \frac{2\pi}{T} l t}.$$

При этом на основании наших общих результатов:

$$\sigma_l = \gamma_l \alpha_l e^{-i \frac{2\pi}{T} l t}$$

и

$$\alpha_l^2 = \frac{1}{\left(k - ml^2 \frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 + r^2 l^2 \frac{4\pi^2}{T^2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{T} \delta_l = \frac{2\pi l r}{T \left(k - \frac{4m\pi^2 l^2}{T^2}\right)}.$$

Итак мы можем описать действие произвольного внешнего возбуждения на нашу систему следующим образом. Если разложить возбуждение на чистые периодические частичные возбуждения, представляющие отдельные члены нашего ряда Фурье, то каждое частичное возбуждение подвергается особому искажению амплитуды и особому сдвигу фаз, и частичные действия затем суммируются. Когда нас главным образом интересуют искажения амплитуд (в приложениях смещения фаз играют меньшую роль ²⁾), но их впрочем можно исследовать совершен-

¹⁾ Вопросов сходимости мы здесь рассматривать не будем.

²⁾ Так как наше ухо например не в состоянии их уловить.

но аналогичным образом, как и искажения амплитуд), то мы на основании нашего исследования кривой резонанса получаем полное представление о том, каким образом регистрирующий прибор отражает внешнее возбуждение своими размахами x . Влияние возбуждающих частот при очень больших значениях l или $\omega = \frac{2\pi}{T} l$ на отклонение x будет едва заметно; напротив, все возбуждающие частоты, лежащие вблизи частоты, соответствующей резонансу, очень сильно отразятся на величине x .

В физических измерительных и регистрирующих приборах можно постоянные m , k , r варьировать в широких пределах. Эти постоянные стараются подобрать таким образом, чтобы форма кривой резонанса была по возможности лучше приспособлена к потребностям измерения. При этом обычно решающую роль играют два требования. Во-первых, желательна большая чувствительность прибора, т. е. математически говоря, большее значение α для интересующих нас возбуждающих частот ω . Для небольших значений ω значение α приблизительно пропорционально $\frac{1}{k}$,

так что число $\frac{1}{k}$ может служить мерой чувствительности прибора при небольших значениях возбуждающих частот. Таким образом можно увеличить чувствительность прибора путем увеличения $\frac{1}{k}$, т. е. путем уменьшения упругой связи.

Во-вторых, существенную роль играет требование, чтобы не было относительного искажения. Допустим, что наша возбуждающая частота с достаточной точностью дается приближенным выражением:

$$f(t) = \sum_{l=-N}^N \gamma_l e^{i \frac{2\pi}{T} l t},$$

тогда мы говорим, что наш прибор регистрирует возбуждение $f(t)$ без относительного искажения, если для всех частот $\omega < N \frac{2\pi}{T}$ коэффициент искажения $\varphi(\omega)$ имеет приблизительно одно и то же значение. Это требование имеет решающее значение, если мы хотим по действию прибора непосредственно заключать о явлении, возбуждающем это действие, например в граммофоне или радиоприемнике высокие и низкие тоны музыкального произведения должны передаваться приблизительно с одинаковой силой. Конечно точно удовлетворить этому требованию невозможно, так как кривые резонанса никогда не проходят точно горизонтально. Но можно попытаться подобрать постоянные m , r и k так, чтобы не было

явления резко выраженного резонанса и чтобы кривая по крайней мере вначале имела горизонтальную касательную, тогда функция $\varphi(\omega) = a$ при малых значениях ω будет оставаться приблизительно постоянной. Согласно предыдущим результатам мы достигнем этого, полагая

$$2km - r^2 = 0.$$

При постоянных значениях m и k мы можем достигнуть этого выбором соответствующего значения для трения r (например путем включения омического сопротивления в цепь электрических колебаний). Кривая резонанса показывает нам, что в этом случае прибор будет регистрировать почти без относительного искажения до собственной частоты ω_0 незатухающей системы и что для больших частот имеет место почти полное затухание. Следовательно можно добиться отсутствия относительного искажения в данном интервале, если сделать собственную частоту ω_0 незатухающей системы путем увеличения k больше наибольшей из возбуждающих частот, которые приходится рассматривать и затем выбрать трение r , удовлетворяющее уравнению $2km - r^2 = 0$.

Дифференциальные уравнения, рассмотренные в этой главе, относятся только к колебательным явлениям простейшего типа. Во втором томе, после того как изложим дифференциальное и интегральное исчисление для функций от многих переменных, мы вернемся еще к дифференциальным уравнениям колебательных явлений более общего характера.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Абсолютная сходимость интегралов 366
 — рядов 319—323
 — критерий 326—332, 340, 341
 Абсолютное значение действительного числа 4
 — комплексного числа 63
 Алгебраическая функция 15—16
 Амплитуда 63, 252, 377
 Аналитическая функция 359, 390
 Аппроксимирование 268
 — в среднем 410
 — с помощью тригонометрических
 многочленов 410—413
 Аппроксимирующий многочлен 275
 Агеа 162, 164
 Агеасинус *hyp.* и т. д. см. обратные
 гиперболические функции
 Арксинус и т. д. см. обратные триго-
 нометрические функции
 Асимптотически равен 312
 Астроида 267
 Атомное строение материи 106, 107

 Барометрическая формула 157—158
 Бернуллиевы числа 373—374
 Бесконечная последовательность см.
 последовательность
 Бесконечное значение функции 12, 43,
 171, 212
 — производной 84
 — произведение 367—370
 Бесконечный геометрический ряд 27—28,
 268
 — интервал 8
 — промежуток интегрирования 215—217
 — ряд см. ряд
 Бесселево неравенство 412
 Биекие 380—381
 Вином Ньютона 175
 Випоминальные коэффициенты 19
 Випоминальный ряд 280—281, 353—354
 Бойля закон 7
 Больцано-Вейерштрасса теорема 46—
 47, 48—49

 Валлиса формула 193—195, 397
 Вейерштрасса теорема о точках накоп-
 ления 46—47, 48—49
 Вероятность удельная 108

 Верхняя грань 52—53
 — сумма 65
 — точка накопления 52—53
 Возбуждающая сила 432
 — частота 432
 Возмущающий член 422
 Вспомогательная переменная см. пара-
 метр
 Вынужденные колебания 422, 428—435
 Высшее гармоническое колебание
 377—379
 Вычисление логарифмов 308—309
 — определенного интеграла 100
 — π 307—308

 Г-интеграл 217—219
 Гармоническое колебание 378—379
 — затухающее 426
 Гармонический ряд 319, 332
 Геометрическая прогрессия 27
 Гипербола 11, 161, 163—165
 Гиперболические функции 159—161,
 163—165
 — связь с тригонометрическими
 функциями 357—358
 — Тригонометрическое интерполи-
 рование 418—419
 — дифференцирование 162
 — интегрирование 186
 — разложение в ряд Фурье 397
 — рациональное выражение 203—
 204
 Гиперболический синус и т. д. см. ги-
 перболические функции
 Главное значение арксинуса и т. д. 127
 Графическое изображение функций 9
 — интегрирование 102—104
 Грань 52—53
 Гульдена правило 242

 Даламбера признак 328—329
 Движение. Дифференциальные уравне-
 ния 248—249
 — по кривой 252—254
 — см. также падение и колебание
 Двоничная система 7
 Декремент логарифмический 426
 Диаграмма работы 261
 Дифференциал 91—92

- Дифференциальная кривая 84, 186
 Дифференциальные уравнения 154, 248,
 420 см. также движение и колебание
 Дифференцирование 77
 — основные правила 82, 117—119
 — обратных функций 123—124
 — неопределенного интеграла 94—95
 — произведения 118, 176
 — рядов 344—346
 — сложной функции 131—133, 176
 Дифференцируемость 78, 83, 173—174,
 177, 211
 Длина дуги в параметрической форме
 236
 — — в полярных координатах 237
 — — в прямоугольных координатах
 234—236
 в 35—36, 148, 152, 279, 285—286
 Замкнутый интервал 8
 Затухание 426
 Заряжение конденсатора 263
 Зета-функция, разложение в произве-
 дение 368
 Импеданс 384
 Интеграл неопределенный 93—99
 — неособенный 212—219, 366—367
 — определенный 64—69, 112—114
 — дифференциального уравнения 420
 — вычисление 100
 — оценка 108—110
 Интегралы элементарные 178—179
 Интеграф 104
 Интегрирование 93—100
 — графическое 102—104
 — по частям 121—122, 189—193
 — рядов 342—344, 356
 — приближенное 299—304
 — общие правила 121—122
 — пределы 65
 — в элементарных функциях 177—178,
 208—209
 Интервал замкнутый 8
 — открытый 8
 — полуоткрытый 8
 Интерполирование с помощью целых
 рациональных функций 289—298
 — тригонометрическое 384—389, 413—
 419
 — формула Лагранжа 297—298
 — — Ньютона 292—294, 297
 Интерполирующий многочлен 289
 Ионизационный потенциал 262
 Искажение амплитуды 431, 436
 Исчисление ошибок 305—306
 Касательная 75—76, 224
 Касательных формула 301
 Катеноид 245
 Квадратичная функция 15
 Квадратичное выражение, определенное
 196
 Кинетическая теория газов 108
 — энергия 248
 Комплексная запись колебаний 381—382,
 384, 429—430
 — переменная 359
 Комплексное напряжение и сопротивле-
 ние 383
 Комплексные числа 61—63
 — сопряженные 63
 — члены степенных рядов 357—360
 Конечный ряд 317
 Колебания 376—381
 — затухающие и незатухающие 426—
 427
 — косинусоидальное 252
 — простые 377
 — механические 420—422
 — синусоидальное 252
 — упругое 251—252
 — электрические 422—423
 Колебание функции 56
 Косинус см. синус
 Котангенс см. тангенс
 Коши критерий (общий) 30, 49—51
 — — для рядов 317—318
 — — для последовательностей функ-
 ций 333
 — признак сходимости ($\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$)
 328—329
 — обозначение 77
 — остаточный член 276
 Коэффициент искажения 481
 — неопределенные 198—199, 352 и сл.
 Кривизна 238—240, 283—284
 — круг 240, 284, 298
 — радиус 240
 — центр 240
 Круг 220, 240
 — соприкасающийся 283—284
 — сходимости 359
 Круговая частота 377
 Кусочно гладкая функция 398
 — монотонная функция 173
 Лагранжа обозначения 76
 — остаточный член 276
 — формула интерполирования 297—298
 Лейбница обозначения 77, 86—87
 — правило дифференцирования произ-
 ведения 175
 — признак сходимости 320—321
 — ряд 272, 307, 395
 Лемниската 61, 234, 246
 Limes см. предел
 — superior; inferior 52
 Линейная функция 11, 15, 80
 Логарифмы при любом основании 150

Логарифмы натуральные 144, 146—148
 — вычисление 308—309
 — дифференцирование 145
 — интегрирование 190
 — бригады 150
 — порядок роста 167, 169
 — разложение в ряд 268—271

Маклорена формула 272
 Максимум 137—140, 284
 Маятник обыкновенный 257—258
 — циклоидальный 258—259
 Механика. Основные допущения и основной закон 247—248
 Минимум 137—140, 284
 Многочлен 14
 — аппроксимирующий 275
 — интерполирующий 289
 Многозначные функции 9, 127
 Модуль системы логарифмов 150
 Момент инерции 243
 — статический 241
 Монотонная последовательность 31, 51
 — функция 13
 Молера формула 63, 357

Нагревание и охлаждение 156—157
 Накопления точка 48—49
 — — верхняя, нижняя 52
 Наложение 377, 384
 Направление обхода 228
 Направляющие косинусы 224
 Начальная скорость 249
 Начальное состояние 421
 Начальные координаты 249
 Незатухающие колебания 427, 432
 Нейля парабола 84, 221
 Неоднородное уравнение колебания 422, 428—434
 Неопределенные выражения 286—289
 — коэффициенты 203—202, 352—353
 Непрерывная переменная 8, 39
 Непрерывное начисление процентов 154
 Непрерывность 12, 41—46, 53—57
 — и дифференцируемость 83—84
 — равномерная 54—57
 — равномерно сходящихся рядов 341
 Неравенства 6
 — Бесселя 412
 Неравномерная сходимость см. равномерная сходимость
 Несобственные интегралы 212—219
 366—367
 Нечетные функции 13
 Нижняя грань 52, 53
 — сумма 65
 — точка накопления 52, 53
 Нормаль 224
 Нули кратные 286
 Ньютона закон охлаждения 156—157
 — — тяготения 262

Ньютона обозначения 224
 — основной закон механики 247, 421
 — метод 310—311
 — формула интерполирования 292—294, 297

Объем поверхности вращения 242
 Обратные функции 13—14
 — — дифференцирование 123—125
 — — гиперболические 162—163, 358
 — — монотонных функций 58
 — — от степени 126—127
 Обратные тригонометрические функции 128—130, 209—210, 358
 — — — дифференцирование 128—129
 — — — интегрирование 191
 — — — разложение в ряды 271—272, 355

Общее решение уравнения колебаний 420—421
 Общий член 317
 Ограниченная последовательность 32, 49, 50

Однозначная ветвь функции 10, 127
 Однородное уравнение колебаний 422, 423—428

Окрестность 137
 Ома закон 382, 423
 Опорная прямая 229
 Ориентированная площадь 228
 Ортогональность тригонометрических функций 189, 401
 Оскулирующая парабола 283
 Остаток 268, 261, 270, 271
 Остаточный член Лагранжа и Коши 276
 Оценка остаточного члена формулы Тейлора 275—277

— остатка при интерполировании 294—296

— интеграла 109—110
 — факториала 312—315

Ошибка средняя квадратичная 410

Отношение разностей (приращений) 76, 86

— — высших порядков 87

Основная теорема алгебры 62

П 36—37, 131, 194—195, 272, 315, 397

Падение свободное 248—250

— по кривой 252—254

Парабола 12

— Нейля 84

— соприкасающаяся 283

— 3-го порядка 12, 15

Параметр 220

Параметрическое изображение кривых 220—227

Первообразная функция 96—98

Перегибная точка 137

Переменная 8

— интегрирования 69

- Переменный ток 382—384
 Период 375
 — при радиоактивном распаде 156
 Периодические функции 375
 Периодическое движение см. колебание
 Плотность и распределение масс 104—105
 Плотность распределения 108
 Площадь, определение 66, 67
 — неограниченной области 214
 — в полярных координатах 233—234
 — в прямоугольных координатах 227—233
 — поверхности вращения 242
 — знак 68, 227—228
 Поверхность вращения 242
 Подынтегральная функция 68
 Подстановка 179
 — метод 179—189
 Подъемы 291—296
 Полином см. многочлен
 Полнота условие 413
 Положительное направление вращения 76
 — — обхода 228
 Показательная функция 17—18, 59—60, 148—151
 — — приложения 153—159
 — — порядок роста 166—167, 169
 — — разложение в ряд 277—279, 352—353
 Полярные координаты 223
 Порядок исчезания 169—170, 286
 — роста 165—169
 — соприкосновения 282
 Последовательность бесконечная 20—29
 — сходящаяся и расходящаяся 29—33, 48—52
 — монотонная 31—32
 — функций 333—335
 — — равномерно сходящаяся 335—338, 343—344
 Постоянные интегрирования дифференциальных уравнений 421
 Потенциал 262
 Почти периодические функции 380
 Правильный прямоугольник 360
 Предел последовательности 20, 29—33, 49—52, 316
 — — функций 333—335
 — — непрерывной переменной 39—41
 Предельная кривая 334
 — функция 333
 Пределы интегрирования 65
 Преобразование переменной 179
 Приближенное выражение функций с помощью линейных 90—92
 Приближенное решение уравнений 303—312
 Признаки сходимости рядов 326—332
 — — несобственных интегралов 336—357
 Признак сходимости Коши 30, 51, 317—318, 327
 — — $(\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1)$ 328—329
 — — Даламбера $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1)$ 328—329
 — — Лейбница 320—321
 Произведение бесконечное 367—370
 Производная 75—77, 85—86, 136—138
 — и подъем 294—295
 — как угловой коэффициент касательной 75—76
 — как скорость 78—79
 — правая и левая 83, 171—174
 — при параметрическом изображении кривой 223—224
 — бесконечная 84, 174
 Производные высших порядков 84—85
 Произвольная постоянная, аддитивная 94
 — — интегрирования дифференциальных уравнений 421
 Промежуток сходимости 347—348
 Работа 260—261
 Равномерная сходимость 335—341
 Равномерность непрерывности 54—57
 Радиальная мера 16—17
 Радиоактивный распад 154
 Разложение на простейшие дроби 198—202, 396, 397
 Разность (приращение) 67, 85—86
 Разности высших порядков 87
 Разрыва точка: 12, 42—43, 171—172, 212
 Растяжение пружины 262—263
 Расходимость см. сходимость
 Рациональная функция 14
 — — целая, формула Тейлора 273
 — — дифференцирование 120
 — — интегрирование 195—202
 Рациональные арифметические действия 3
 Регистрирующие приборы 435
 Regula falsi 311
 Резонанс 433
 — частота 433
 — кривая 432—434, 437
 Рекуррентные формулы 191—193
 Решение дифференциального уравнения 420—421
 Ролля теорема 89
 — — общая 290
 Ряды 27, 268—272, 275—277, 316
 — действия над рядами 326, 350—351
 — и несобственные интегралы 366—367
 — сходящиеся 317—319
 — — абсолютно и условно 319—323, 327—332
 — — изменение порядка членов 323—326

Ряды функций 333

- — равномерно сходящиеся 335—341
- — — непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость 341—344
- степенные 346—352
- Фурье 375, 389—413

Свободное падение 248—250

Свободные колебания 422, 423—428

Сгущения точка см. точка накопления

Сдвиг фаз 377, 384, 431

Секанс. Разложение на простейшие дроби 397

Сила 247—248

Симпсона формула 304

Синус и косинус 17, 209—210

— — дифференцирование 82, 102, 121

— — интегрирование 74—75

— — определение для комплексного аргумента 359—360

— — разложение в произведение 397

— — степенной ряд 279—280

— — ряд Фурье 396

— — рациональное выражение 203

— — тригонометрическое интерполирование 384

Синусоидальное колебание 252

Симметрическое выражение 293

Системы счисления 6—7

Скачок 42—43, 171—172

Скорость 79—80

Сложная функция 131—133

Снеллиуса закон преломления 144

Собственная частота незатухающей системы 427

Соприкасающийся круг 283—284, 296

Соприкасающаяся парабола 283

Соприкосновение 282—283

Сопротивление комплексное 383

Спряmlяемость 235

Средняя квадратичная ошибка 410

Среднее значение. Теорема о среднем значении в дифференциальном исчислении 88—89

— — — — — в интегральном исчислении 108—110

— — обобщенная теорема о среднем значении 116

— — связь между обеими теоремами о среднем значении 115

Статистический момент 241

Статистическая биология 107

Степень 59—60, 150—151

— с рациональным показателем, дифференцирование 80—81, 101, 120, 126—127, 133—134

— с рациональным показателем, интегрирование 71—74, 122, 144

— с иррациональным показателем, дифференцирование 135, 151

Степень, с иррациональным показателем, интегрирование 110—112, 134—136, 151

Степенные ряды 346—352

— — интегрирование и дифференцирование 348—350

— — примеры 352—356

— — с комплексными членами 357—360

— — см. также ряд Тейлора

— — сходимость 346—348

— — теорема об однозначности 351

Стирлинга формула 312—315

Сумма ряда 316—317

Суммирующая функция 105

Сходимость абсолютная и условная 319—323, 340—341

— бесконечных рядов 317—319

— произведений 369

— несобственных интегралов 213—214, 217

— последовательности 20—33, 49—52

— равномерная 335—341

Сходимости круг и радиус 359

— признаки для рядов 326—332

— признаки для несобственных интегралов 214—217, 366—367

— промежутков 347—348

Тангенс-гальванометр 305

Тангенс и котангенс 17, 203

— — дифференцирование 121

— — интегрирование 181, 186

— — определение для комплексного аргумента 359—360

— — Разложение в степенной ряд 374

— — — на элементарные дроби 396

— — рациональное выражение 203

Тейлора ряд 277, 351 см. также степенные ряды

— формула 272—281

Теоретико-числовая функция 18

Теплоемкость удельная 106

Трансцендентная функция 16

Трапеций формула 300

Трепие 248—249

Тригонометрические интегралы 181, 186—189, 192—195, 203—205, 207—208

— ряды см. ряды Фурье

— функции см. синус и косинус

— — рациональное выражение 203

— — условия ортогональности 189, 401

Тригонометрическое аппроксимирование 410—413

— интерполирование 384—389

Угловая скорость 243

— точка 83

Угол, измерение в радианах 16—17

— между двумя кривыми 224—225

Удельная вероятность 108

— теплоемкость 106

- Унимолекулярная реакция 158
 Условия ортогональности тригонометрических функций 189, 401
 — сходимости, см. абсолютная сходимость
 Ускорение 85
- Фаза 377
 — сдвиг 377, 384, 431
 Факториал, оценка 312—315
 Фермата принцип 142
 Функции, не интегрирующиеся с помощью элементарных 209
 Функция, понятие 7—8
 — индекса, см. теоретико-числовая функция
 — от функции см. сложная функция
 Фурье ряды 375, 389—413
 — коэффициенты 398
- Химическая реакция 158
- Центр кривизны 240
 — тяжести 241—242
 Цепная линия 238, 245
 Циклоида 222, 244—245
 Циклоидальный маятник 258—259
- Частичные суммы 27, 317
 Частота 252, 377
 — круговая 377
 Четная функция 13
 Числа действительные 5
 — иррациональные 5
 — комплексные 61—63
 Числовая последовательность см. последовательность
- Эвольвента 265—267
 — окружности 267
 Эволюта 240, 263—267
 — циклоиды 266—267
 Эйлера постоянная 332
 — формула 357
 Экстраполирование 296
 Экстремум 138—140, 284
 Эксцентрическая аномалия 220—221
 Электрический заряд 106
 Электрические колебания 422—423
 — ток 159
 Элементарные интегралы 178—179
 — дроби 198
 Эллипс 220—221, 233, 246, 267
 Эллиптические интегралы 210—211, 215, 246, 258
 — функции 210

