

537.626

K-56.

проф. В. И. КОВАЛЕНКОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

534-626

K 56

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ

~~624-387~~

~~K 56~~

~~53~~

Проф. В. И. КОВАЛЕНКОВ
член-корр. Академии Наук СССР

5
~~10/4~~

ДЕП

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ
И ПРИМЕНЕНИЕ ЕЕ
К АНАЛИЗУ РЕЛЕЙНЫХ СХЕМ

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

45729

MP-171

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

Восточная Область
РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА БССР

MP 89 96, 08

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА ССР
МОСКВА • 1940 • ЛЕНИНГРАД

850
850-4

Ответственный редактор
акад. В. С. КУЛЕБАКИН

ВЕРИФИКАЦИЯ
17.01.58
И. С. КУЛЕБАКИН

Редактор издательства З. Н. Перля

Технические редакторы: О. Н. Персиянинова и А. Н. Троицкая
Корректор А. И. Новакович

Сдано в набор 17/II 1940 г. Подписано к печати 15/X 1940 г. АНИ № 1559. РИСО № 1313. А31281.
Формат 70×101/16. Объем 9 1/2 печ. л. 13,87 уч.-изд. л. В печ. листе 58000 тип. ар. Тираж 1 200 экз.
1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста "Полиграфкинг". Москва, Валовая, 28. Заказ № 893.

ПРЕДИСЛОВИЕ

К числу наиболее актуальных и сложных задач телемеханики, несомненно, следует отнести, во-первых, создание теории магнитных цепей и применение ее к анализу и проектированию релейных схем, во-вторых, распространение вдоль линии устанавливаемых электромагнитных процессов с учетом влияния электромагнитного приемника. Несмотря на весьма большую практическую важность указанных задач, несмотря на многочисленные и многолетние попытки решить их, исчерпывающего решения до настоящего времени еще не имеется.

Настоящий труд касается только первой задачи — создания теории магнитных цепей и анализа влияния последних на электромагнитные процессы в электрических цепях. Рассмотрев теорию магнитных цепей на основе понятия о размагничивающем факторе, автор переходит к построению новой теории, перенося понятие о четырехполюснике из теории электрических цепей на магнитные цепи. Применение теории четырехполюсника дает возможность разобраться в распределении магнитных потоков и магнитной энергии в магнитных цепях и приводит к новым методам расчета электромагнитных реле. Не ограничиваясь магнитными цепями, в которых расчетная магнитная проницаемость может быть принята постоянной, автор переходит к цепям с проницаемостью, зависящей от величины магнитного потока. Для этой цели он строит электрическую схему, эквивалентную магнитной цепи, и приводит математическую зависимость B и μ от H , после чего намечает путь к решению задачи о магнитных цепях без каких бы то ни было ограничений. Далее автор переходит к анализу релейных схем и методам учета времени срабатывания реле, а также проводит анализ влияния железа на устанавливающиеся электромагнитные процессы в электрической цепи с постоянной электродвижущей силой. Заканчивается настоящий труд анализом явлений последействия, в частности магнитного гистерезиса, и созданием нового метода математического исследования указанных явлений.

Проводя анализ перечисленных выше проблем, автор все время подчеркивает необходимость дальнейшего их развития и углубления и пытается таким путем привлечь молодых ученых к работе над актуальнейшей в настоящее время задачей электротехнической промышленности — созданием удобной для практических надобностей теории магнитных цепей и на ее основе научных методов анализа существующих электромагнитных приборов и схем и проектированием новых.

Второй задаче — об устанавливающихся электромагнитных процессах вдоль линий — будет посвящен особый труд.

Автор

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка вопроса. Магнитные цепи составляют основу промышленной электротехники. Однако, несмотря на их особо практическую важность, теория магнитных цепей и непосредственно связанная с ней теория электромагнитных механизмов до настоящего времени разработаны более чем недостаточно. Этим определяется существующий характер расчета и конструирования электромагнитной аппаратуры, в частности электромагнитных реле: эксперимент, личный опыт и подбор играют в промышленности все еще весьма существенную роль.

Чем объясняется отсутствие прикладной теории магнитных цепей и электромагнитных механизмов?

Основная трудность при создании теории магнитных цепей порождается, с одной стороны, зависимостью магнитного сопротивления от величины магнитного потока, причем сама зависимость не имеет математического выражения, с другой стороны, сложностью конфигурации магнитных цепей, весьма осложняющей математическую их обработку.

В противоположность этому проектирование и анализ электрических линий строго обоснованы и исключают элемент случайности. Теория линий достигла весьма высокой степени развития, все задачи, связанные с теорией линий, решаются самым верным способом.

Какие причины обуславливают такую разницу в анализе магнитных и электромагнитных линий?

Электрические линии характеризуются двумя существенными особенностями: постоянством параметров и простой их конфигурацией.

Насколько безнадежно обстоит дело в этом отношении с магнитными цепями? Все ли магнитные цепи в одинаковой степени характеризуются непостоянством магнитного сопротивления?

Нет. Зависимость магнитного сопротивления от величины магнитного потока определяется как качеством железа, так и формой самой магнитной цепи.

Нельзя ли выделить такую группу цепей, для которой с достаточной практической степенью точности можно считать магнитное сопротивление постоянным?

Этим вопросом в первую очередь придется заняться. Доказав же, что существует обширная группа электромагнитных механизмов (значительная часть телеграфных, телефонных, сигнализационных реле), для которых магнитная проницаемость почти не меняется с изменением величины магнитного потока, можно в основу создания теории магнитных цепей выделенной группы положить теорию электрических линий и, в частности, теорию активного четырехполюсника. Подобный анализ облегчается еще тем, что имеется достаточно большая группа электромагнитных приборов, характеризующихся магнитными цепями, приближающимися по своей форме к электрическим линиям. С них и следует начать попытку перенести теорию электрических линий на цепи магнитные.

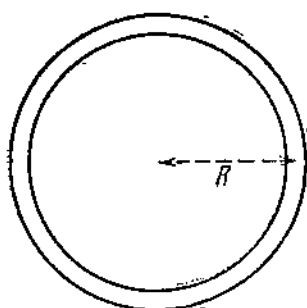
Доказав применимость теории четырехполюсника к анализу простейших магнитных линий, перейдем к усложнению теории, принимая во внимание нелинейную зависимость B от H , а также усложняя конфигурацию магнитной цепи, принимая во внимание влияние гистерезиса, токов Фуко и т. д., имея при этом в виду основную цель создания теории — ее прикладное инженерное значение.

Первое положение, необходимое при попытке применения к магнитным цепям теории электрических линий, — существование группы электромагнитных реле, для которых с достаточной практической точностью можно допустить, что магнитное сопротивление магнитных линий не зависит от величины магнитного потока, — попытаемся доказать, исходя из понятия о размагничивающем факторе.

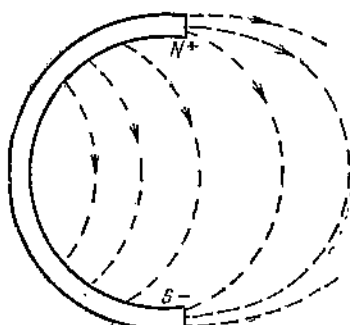
2. Теория магнитных цепей на основе понятия о размагничивающем факторе.¹ Из бесконечного числа возможных форм магнитных цепей выделим одну, имеющую особое значение при магнитных измерениях, — тороид (фиг. 1), равномерно обмотанный изолированной проволокой (на фиг. 1 обмотка не показана). При достаточном значении среднего радиуса R по сравнению с толщиной тороида можно принять, что тороид во всех своих частях намагничивается одинаково, причем напряженность поля внутри тела тороида равна:

$$H = \frac{2\pi i}{R},$$

где ω — число витков обмотки и i — ток в обмотке. Мы можем принять также, что ни одна магнитная линия не выходит из тела тороида и что на поверхности последнего совсем нет наведенных магнитных масс.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Если разрезать такой тороид на две части и отделить одну часть от другой (фиг. 2), то равномерность намагничивания нарушается. В местах выхода и входа магнитных линий появляются наведенные противоположного знака магнитные массы $+m$ и $-m$. Эти магнитные массы вызывают появление дополнительного поля, направленного внутри тела против основного поля.

Возьмем видоизменение разрезанного тороида — подкову (фиг. 3; на чертеже намагничивающая обмотка не показана); идеализируем ее. Предположим, что боковой магнитной утечки совсем нет и что магнитный поток равномерно проходит через тело подковы. Тогда распределение магнитных линий будет представлено фиг. 3. При таком распределении магнитного потока полюсы магнита будут находиться как раз на концах магнита. Если обозначить интенсивность намагничивания через J и сечение магнита через sS , то на концах магнита будут сосредоточены магнитные массы: $+J \cdot sS$ на северном конце и $-J \cdot sS$ на южном.

Если представить себе единицу северного магнетизма на нейтральной линии магнита, то в результате ее взаимодействия с полюсами магнита получим равнодействующую силу H_1 , направленную в сторону, противоположную направлению магнитного потока, т. е. под влиянием концов магнита создается поле, размагничивающее магнит. Внутри тела будет действовать поле:

$$h = H - H_1.$$

¹ См. многочисленные работы члена-корр. АН проф. В. К. Аркальева, а также работы проф. В. И. Коваленкова „Основы теории связей“, ч. I, ГНТИ, 1931; „Теория магнитных цепей“, ч. I, изд. ВЭТА, 1933; „Основы теории электромагнитных цепей“, изд. ЛЭТИИСС, 1939.

Из подобия треугольников CH_1D и ACB нетрудно определить зависимость размагничивающего поля H_1 от интенсивности намагничивания J и размеров подковы:

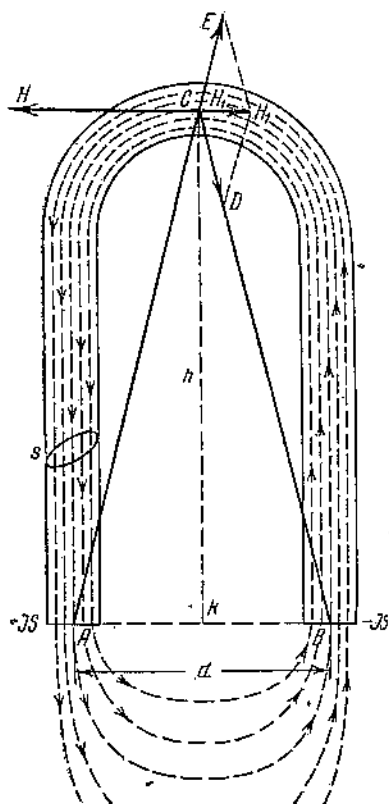
$$H_1 = J \frac{sd}{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}},$$

где s — поперечное сечение подковы, d — расстояние между осями подковы, h — высота подковы. Обозначим:

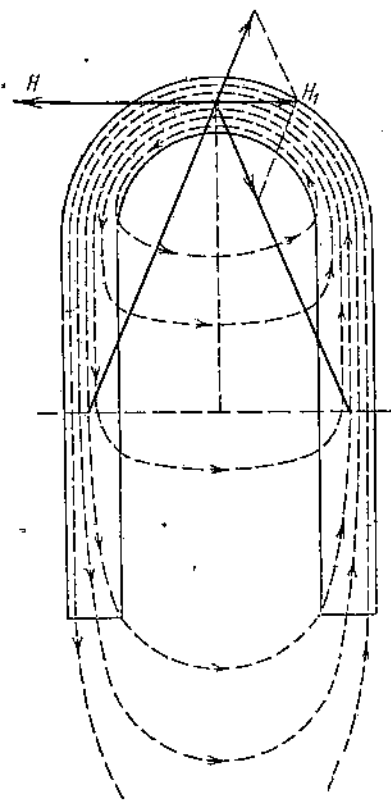
$$p = \frac{sd}{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}},$$

тогда

$$H_1 = pJ,$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

т. е. размагничивающее поле H_1 пропорционально интенсивности намагничивания J тела. Коэффициент же пропорциональности p , как видно из полученной формулы, зависит исключительно от параметров формы намагничиваемого тела и носит название размагничивающего фактора.

При выводе формулы размагничивающего фактора p мы идеализировали явления в подкове. В действительности явление размагничивания значительно сложнее, так как имеется боковая магнитная утечка (фиг. 4), обуславливающая распределение свободного магнетизма не только по концам магнита, но и по боковым сторонам его. Любая же точка поверхности магнита, обладающая свободным магнетизмом, взаимодействует с единицей северного магнетизма, помещенной на нейтральной линии. В результате взаимодействия всего свободного северного и всего свободного южного магнетизма с указанной единицей магне-

тизма создается равнодействующая, направленная в сторону, противоположную направлению магнитного потока, т. е. создается размагничивающее поле H_1 , только отличающееся своей величиной от полученного выше. Реальное распределение магнитных линий сказывается лишь в перемещении действующих магнитных центров (полюсов) с оснований подковы в сторону дуги последней. Эксперимент показывает, что выведенная выше формула для размагничивающего фактора, отнесенная к нейтральной линии магнита, вполне согласуется с опытом, если только в нее подставить вместо полной высоты h подковы часть ее:

$$h_1 = 0.76h,$$

т. е. будем иметь:

$$p = \frac{sd}{\left(0.76^2 h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{sd}{\left(0.58 h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Очевидно также, что величина размагничивающего фактора p зависит от положения рассматриваемой точки внутри тела подковы; с переходом от точки к точке значение p меняется. Поэтому в дальнейших примерах мы будем иметь в виду значение размагничивающего фактора, отнесенного только к нейтральной линии намагничиваемого тела.

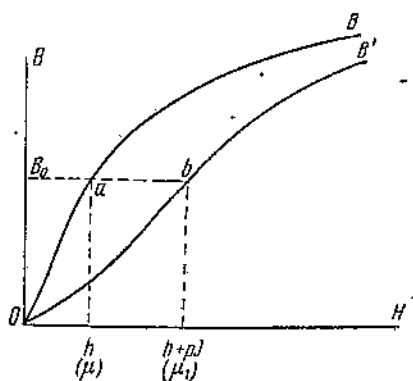
Переходя от подковы к любой иной форме магнитной цепи, мы придем к тем же понятиям размагничивающего поля H_1 и размагничивающего фактора p , причем для подавляющего большинства форм магнитных цепей вывод соответствующих формул для размагничивающего фактора сопряжен с весьма большими математическими трудностями.

Таким образом, для любой магнитной цепи мы имеем:

$$H_1 = pJ \quad \text{и} \quad H = h + pJ.$$

В тороиде все магнитное поле мы полагаем сосредоточенным внутри тела, следовательно, на поверхности тороида нет свободных магнитных масс, нет и размагничивающего поля, размагничивающий фактор p равен нулю, значит, для тороида поле h , намагничивающее вещество, равно полному полю H :

$$h = H.$$



Фиг. 5.

Возьмем две магнитные цепи из одного и того же магнитного материала: одну любой конфигурации, другую тороид. Для этих цепей получим кривые намагничивания: OB' и OB (фиг. 5). Чтобы намагнитить обе цепи до одной и той же магнитной индукции B_0 , нужны разные напряженности магнитных полей (фиг. 5): для тороида h и для второй цепи $h + pJ$. Различие полей при одной и той же индукции

приводит к различным значениям магнитной проницаемости: для тороида μ и для второй цепи μ_1 , причем

$$\mu = \frac{B_0}{h} \quad \text{и} \quad \mu_1 = \frac{B_0}{h + pJ}.$$

Имея в виду, что

$$B_0 = h + 4\pi J_0$$

и выражая μ_1 через μ , находим

$$\mu_1 = \frac{\mu}{1 + \frac{p}{4\pi}(\mu - 1)}.$$

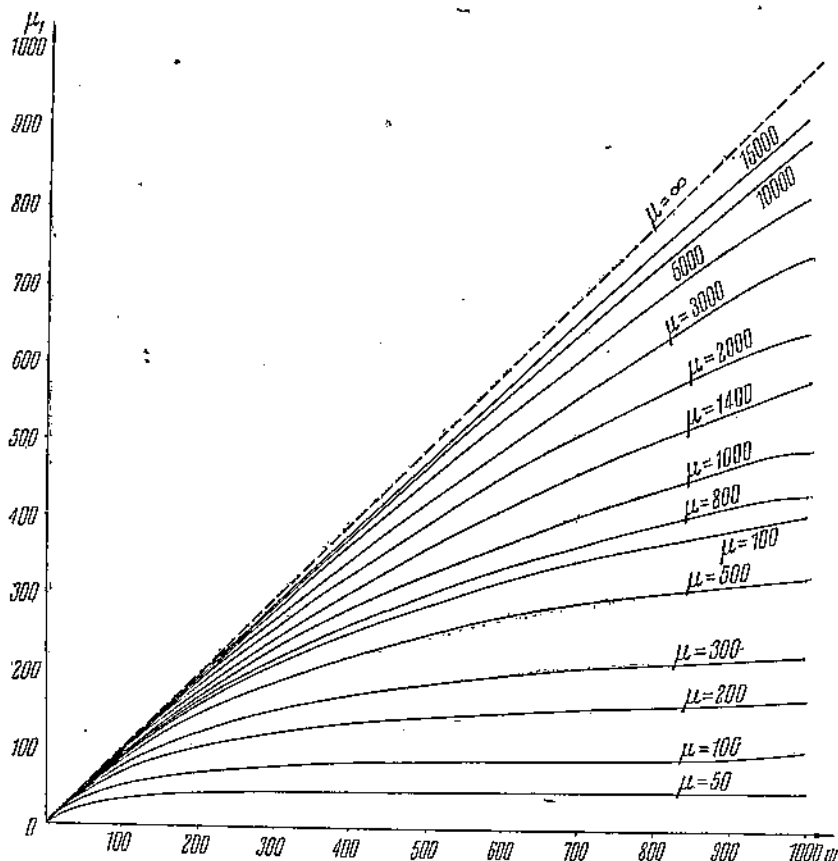
Обозначим

$$\frac{4\pi}{p} = m,$$

тогда

$$\mu_1 = \frac{m\mu}{m + \mu - 1}.$$

Коэффициент m , характеризующий форму намагничиваемого тела, называется магнитным коэффициентом формы тела, или магнитной проницаемостью формы, коэффициент μ — магнитной проницаемостью вещества и μ_1 — расчетной магнитной проницаемостью.



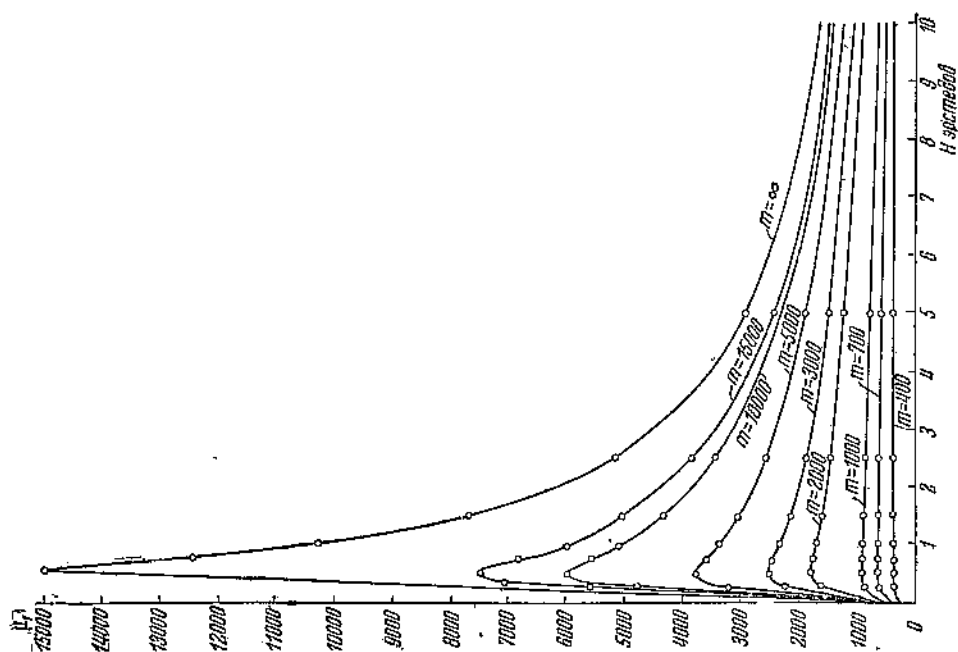
Фиг. 6.

Параметры магнитной цепи m и μ , как показывает приведенная формула, вполне равнозначны: при намагничивании любого тела необходимо считаться в одинаковой степени как с веществом ферромагнетика, так и с формой тела.

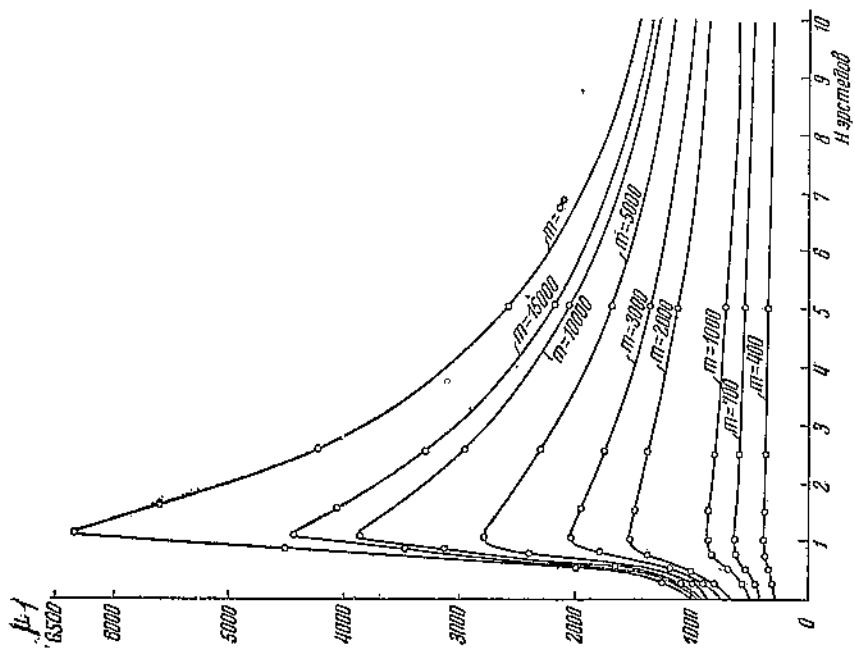
Рассмотрим некоторые практически важные выводы, вытекающие из приведенной теории и совпадающие с соответствующими результатами опыта.

3. Практическое применение теории. Проанализируем зависимость расчетной магнитной проницаемости от параметров μ и m .

Приведенная выше формула для μ_1 показывает, что с изменением μ от 1 до ∞ расчетная магнитная проницаемость μ_1 меняется от 1 до m , т. е. значение параметра m будет тем пределом, выше которого расчетная проницаемость μ_1 не может подняться. Откладывая по оси абсцисс значение m , по оси ординат проницаемость μ_1 , вычисленную для ряда значений μ , получим весьма показательную группу кривых (фиг. 6).



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Чем больше параметр m , тем сильнее сказывается качество железа на магнитных свойствах цепи и наоборот. Для малых значений m , например для $m=25$, расхождение кривых на фиг. 6 настолько мало, что можно считать магнитные свойства данной цепи почти не зависящими от качества железа, — безразлично, из какого материала изготовить цепь: из чугуна или лучшего ферромагнитного сплава. С увеличением же параметра m кривые все более и более расходятся, переход от одного сорта ферромагнетика к другому уже ощутительно чувствуется, и тем сильнее, чем больше m . Но как бы ни был идеален в магнитном отношении ферромагнетик, предельное значение расчетной проницаемости μ_1 не может подняться выше нанесенной на чертеже пунктирной прямой.

Рассмотрим теперь, как меняется зависимость расчетной магнитной проницаемости μ_1 от напряженности магнитного поля H с изменением формы магнитной цепи.

Выберем в качестве примера какие-либо два сорта железа, например электролитическое и шведское отожженное. Пользуясь таблицами зависимости коэффициента μ от напряженности магнитного поля H , построим кривые такой же зависимости расчетной магнитной проницаемости от H . Для этого, задаваясь каким-либо определенным значением m и подставляя в формулу

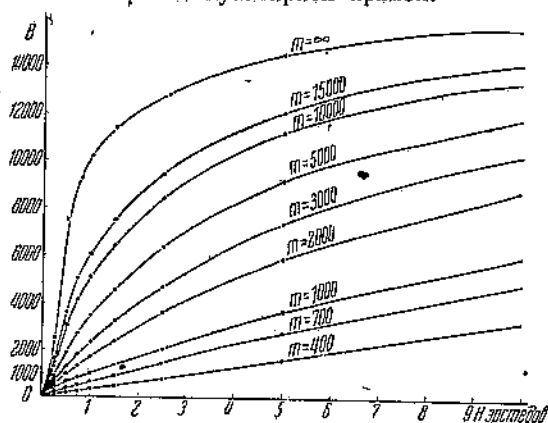
$$\mu_1 = \frac{m\mu}{m + \mu - 1}$$

ряд значений μ для разных H , взятых из таблиц, получим группу кривых $\mu_1 = f(H)$ для электролитического железа, приведенную на фиг. 7, и для шведского отожженного железа — на фиг. 8.

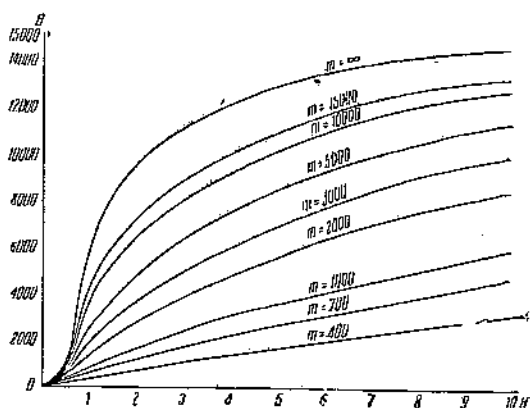
Для тороида $m = \infty$, кривая μ_1 совпадает с кривой μ . Чем меньше значение m , тем ниже кривая расчетной магнитной проницаемости μ_1 , тем менее рельефно выступает ее максимум. При значениях $m \leq 400$ можно считать, что кривая μ_1 практически мало отличается от прямой, параллельной оси абсцисс, т. е. для значений $m \leq 400$ можно считать, что магнитная проницаемость μ_1 практически не зависит от напряженности магнитного поля. Умножая ординаты кривых фиг. 7 и 8 на соответствующие значения напряженности H , получим кривые магнитной индукции на фиг. 9 и 10. Малая зависимость μ_1 от H при значениях $m \leq 400$ приводит к тому, что для $m \leq 400$ кривые индукции B мало отличаются от прямых, проходящих через начало координат.

При расчетах магнитных цепей нас более интересует степень зависимости μ_1 от величины индукции B . Эта зависимость для выбранных нами сортов железа приведена на фиг. 11 и 12.

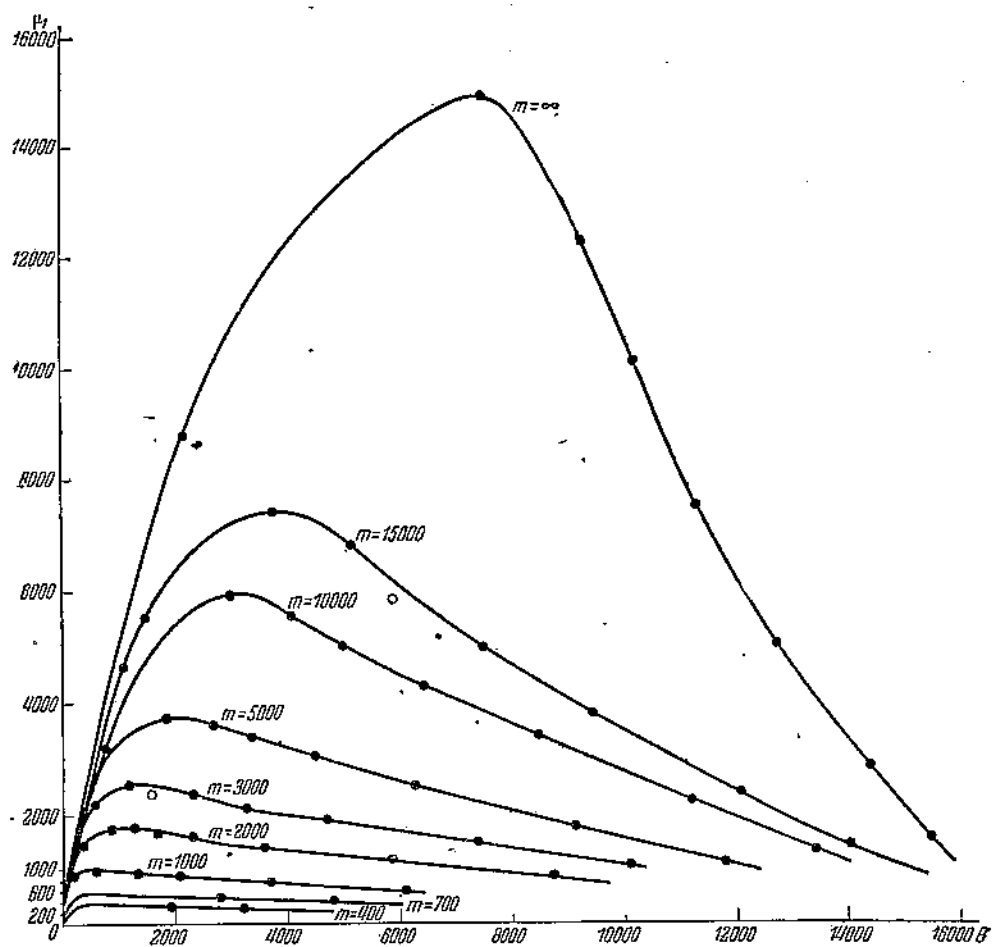
Так как магнитное сопротивление R_m обратно пропорционально расчетной магнитной проницаемости μ_1 , мы вправе сказать, что для всех электромагнит-



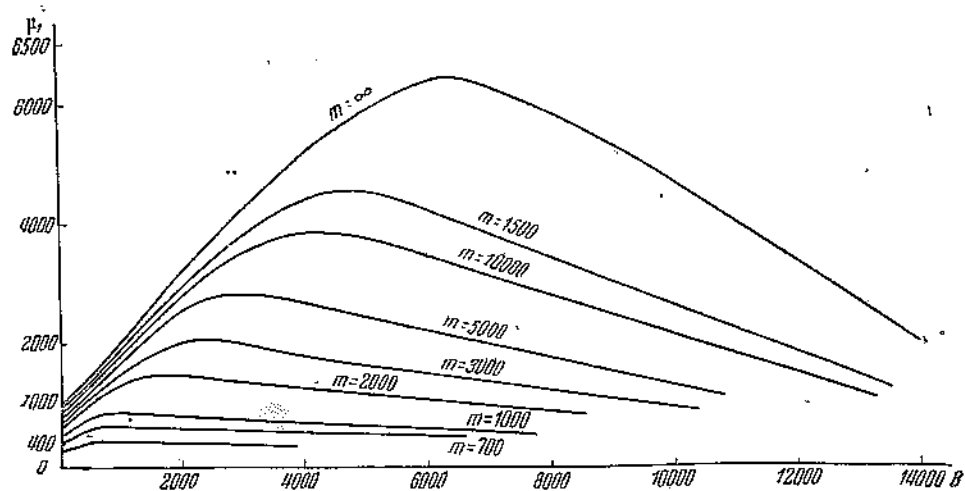
Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.



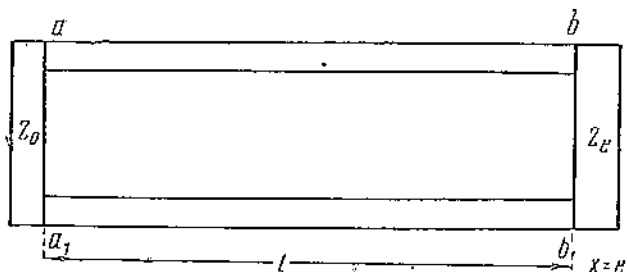
Фиг. 12.

ных приборов, магнитные цепи которых характеризуются магнитной проницаемостью формы $m \ll 400$, магнитное сопротивление R_m практически не зависит от величины магнитного потока. Второе следствие: так как индуктивность L электромагнитных приборов прямо пропорциональна μ_1 , для указанной группы приборов индуктивность L не зависит от силы тока. Условию же $m \ll 400$ удовлетворяет большая часть реле телеграфных, телефонных и сигнализационных; следовательно, на основании первого вывода мы можем перейти к попытке перенести теорию электрических линий на линии магнитные, второй же вывод позволяет при анализе устанавливающихся электромагнитных процессов в цепях с выделенной группой реле применять уравнение Гельмгольца с постоянной индуктивностью.

II. УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ.

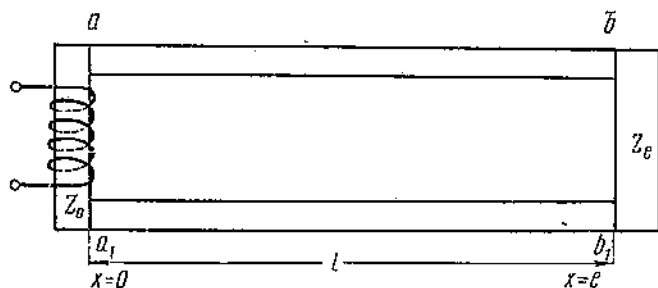
А. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ С РАСЧЕТНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ μ_1 , ПРАКТИЧЕСКИ НЕ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВЕЛИЧИНЫ МАГНИТНОГО ПОТОКА

1. Общие положения. Рассмотрим магнитную линию, по конфигурации приближающуюся к двухпроводным электрическим линиям (фиг. 13; ab и a_1b_1 — магнитопроводы, Z_0 — магнитное сопротивление в начале линии, с сопротивлениями стыков, Z_e — магнитное сопротивление в конце линии). Источник магнит-



Фиг. 13.

ного потока в магнитной линии — магнитодвижущая сила — может быть приложен как вне линии (фиг. 14), так и по длине линии (фиг. 15). Следуя терминологии для электрических линий, мы назовем первую линию (фиг. 14) пассивным четырехполюсником, вторую (фиг. 15) — активным. Четырехполюсником же вообще в теории электрических цепей называется любая электрическая цепь,

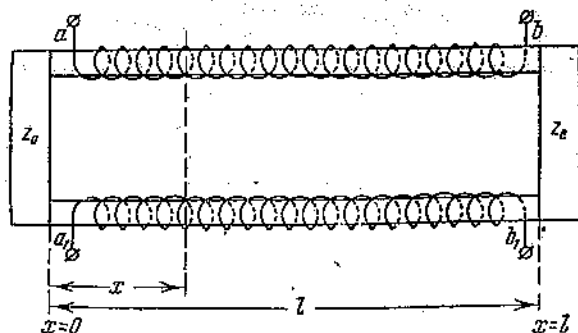


Фиг. 14.

имеющая два выходных и два входных зажима (фиг. 16). Если рассматриваемая цепь не содержит внутри себя никакого источника электродвижущей силы, то такая цепь носит название пассивного четырехполюсника.

Примером пассивного четырехполюсника может быть, например, междугородная телефонная или телеграфная линия, свободная от каких бы то ни было внешних электромагнитных влияний.

Если рассматриваемая цепь содержит в себе какие-либо источники эдс, то такая цепь носит название активного четырехполюсника. Примером активного

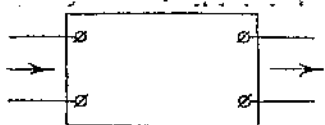


Фиг. 15.

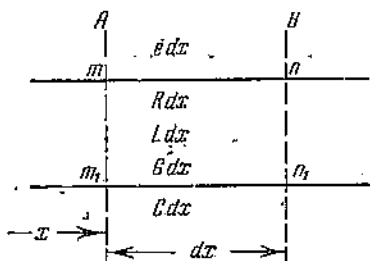
четырёхполюсника может служить, например, та же междугородная линия, подверженная влиянию линий сильного тока, грозы или радиоволн.

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом активные магнитные четырёхполюсники, поэтому предварительно приведем основы теории активного четырёхполюсника.

2. Основы теории активного четырёхполюсника.¹ Пусть вдоль линии каким-либо образом наведена непрерывно распределенная эдс. Обозначим ее на элементе dx линии через edx , где $e = \phi(x, t)$ (Фиг. 17).



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Если напряжение между точками mm_1 , отстоящими от левого по чертежу конца электрической линии на расстоянии x , будет u , сила тока в указанных точках i , тогда между точками nn_1 , отстоящими на $x + dx$, напряжение будет

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

и сила тока в точках nn_1

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Падение напряжения от пункта A до пункта B равно:

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

но

$$- \frac{\partial u}{\partial x} dx = R dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t} - e dx,$$

или, относя к единице длины:

$$- \frac{\partial u}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} - e,$$

где R и L — сопротивление и индуктивность линии на единицу длины.

¹ В. И. Коваленков. Теория передачи по линиям электросвязи, т. I, Связь-техиздат, 1937; линия с непрерывно распределенной электродвижущей силой, изд. ВЭТА, т. V, 1933.

Таким же путем приходим ко второму уравнению:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t},$$

где G и C — проводимость изоляции и емкость линии на единицу длины.

Ограничимся пока рассмотрением только установившихся уже процессов. Пусть эдс, действующие в линии, синусоидальны (при непрерывном уменьшении частоты мы приближаемся к предельному случаю — к линии с постоянными эдс).

Переходя от алгебраических функций к комплексным, получим:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R + j\omega L)\dot{I} - \dot{E},$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (G + j\omega C)\dot{U},$$

где $\dot{U}$, $\dot{I}$ и $\dot{E}$ — векторы напряжения, тока и эдс на единицу длины, не зависящий от $\dot{U}$ и $\dot{I}$.

Продифференцировав первое уравнение по x и подставив значение производной $\frac{d\dot{I}}{dx}$ из второго уравнения, получим:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2\dot{U} + \frac{d\dot{E}}{dx},$$

где $\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$.

Общее решение последнего уравнения имеет следующий вид:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 e^{\gamma x} + \dot{U}_2 e^{-\gamma x},$$

где $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ — функции от x , определяемые из нижеследующей системы уравнений:

$$e^{\gamma x} \frac{d\dot{U}_1}{dx} + e^{-\gamma x} \frac{d\dot{U}_2}{dx} = 0,$$

$$e^{\gamma x} \frac{d\dot{U}_1}{dx} - e^{-\gamma x} \frac{d\dot{U}_2}{dx} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\dot{E}}{dx},$$

откуда

$$\frac{d\dot{U}_1}{dx} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{d\dot{E}}{dx} e^{-\gamma x},$$

$$\frac{d\dot{U}_2}{dx} = -\frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{d\dot{E}}{dx} e^{\gamma x},$$

следовательно:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2\gamma} \int \frac{d\dot{E}}{dx} e^{-\gamma x} dx + p_2,$$

$$\dot{U}_2 = -\frac{1}{2\gamma} \int \frac{d\dot{E}}{dx} e^{\gamma x} dx + p_1,$$

где p_1 и p_2 — постоянные.

Подставляя в общие решения для $\dot{U}$, находим:

$$\dot{U} = p e^{-\gamma x} + p_2 e^{\gamma x} + f(x),$$

где

$$f(x) = \frac{e^{\gamma x}}{2\gamma} \int \frac{d\dot{E}}{dx} e^{-\gamma x} dx - \frac{e^{-\gamma x}}{2\gamma} \int \frac{d\dot{E}}{dx} e^{\gamma x} dx.$$

Дифференцируем $\dot{U}$ по x :

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = -\gamma(p_1 e^{-\gamma x} - p_2 e^{\gamma x}) + f'(x).$$

С другой стороны, мы имеем для той же производной следующее выражение:

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = -(R + j\omega L)\dot{I} + \dot{E},$$

следовательно,

$$\dot{I} = \frac{\gamma}{R + j\omega L} (p_1 e^{-\gamma x} - p_2 e^{\gamma x}) + \frac{\dot{E} - f'(x)}{R + j\omega L}.$$

Обозначим

$$\frac{\dot{E} - f'(x)}{R + j\omega L} = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\gamma}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} = \frac{1}{Z_c},$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{\dot{E} - f'(x)}{Z_c \gamma} \quad \text{и} \quad \dot{I} Z_c = p_1 e^{-\gamma x} - p_2 e^{\gamma x} + Z_c \varphi(x).$$

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= p_1 e^{-\gamma x} + p_2 e^{\gamma x} + f(x), \\ \dot{I} Z_c &= p_1 e^{-\gamma x} - p_2 e^{\gamma x} + Z_c \varphi(x). \end{aligned}$$

Выражая постоянные интегрирования p_1 и p_2 через начальные значения напряжения $\dot{U}_0$ и тока $\dot{I}_0$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{U} - f(x) &= A_x [\dot{U}_0 - f(0)] - B_x [\dot{I}_0 - \varphi(0)], \\ \dot{I} - \varphi(x) &= A_x [\dot{I}_0 - \varphi(0)] - C_x [\dot{U}_0 - f(0)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= \operatorname{ch} \gamma x, \\ B_x &= Z_c \operatorname{sh} \gamma x, \\ C_x &= \frac{1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x. \end{aligned}$$

Если выразить те же постоянные p_1 и p_2 через конечные значения напряжения $\dot{U}_e$ и тока $\dot{I}_e$, то мы придем к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{U} - f(x) &= A'_x [\dot{U}_e - f(l)] + B'_x [\dot{I}_e - \varphi(l)], \\ \dot{I} - \varphi(x) &= A'_x [\dot{I}_e - \varphi(l)] + C'_x [\dot{U}_e - f(l)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A'_x &= \operatorname{ch} \gamma (l - x), \\ B'_x &= Z_c \operatorname{sh} \gamma (l - x), \\ C'_x &= \frac{1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma (l - x). \end{aligned}$$

Как первая, так и вторая системы уравнений носят названия уравнений активного четырехполюсника.

Полагая в первых $x=l$ и во вторых $x=0$, получим:

$$\begin{cases} \dot{U}_e - f(l) = A [\dot{U}_0 - f(0)] - B [\dot{I}_0 - \varphi(0)], \\ \dot{I}_e - \varphi(l) = A [\dot{I}_0 - \varphi(0)] - C [\dot{U}_0 - f(0)], \\ \dot{U}_0 - f(0) = A' [\dot{U}_e - f(l)] + B' [\dot{I}_e - \varphi(l)], \\ \dot{I}_0 - \varphi(0) = A' [\dot{I}_e - \varphi(l)] + C' [\dot{U}_e - f(l)], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{ch} \gamma l, \\ B &= Z_c \operatorname{sh} \gamma l, \\ C &= \frac{1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned}$$

Пусть $E = \text{const}$, тогда $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = \frac{E}{Z_{c1}} = \text{const}$; последние уравнения примут для этого случая следующий вид: —

$$\begin{cases} \dot{U}_e = A\dot{U}_0 - B \left(i_0 - \frac{E}{Z_{c1}} \right), \\ i_e - \frac{E}{Z_{c1}} = A \left(i_0 - \frac{E}{Z_{c1}} \right) - C\dot{U}_0, \\ \dot{U}_0 = A\dot{U}_e + B \left[i_e - \frac{E}{Z_{c1}} \right], \\ i_0 - \frac{E}{Z_{c1}} = A \left[i_e - \frac{E}{Z_{c1}} \right] + C\dot{U}_e. \end{cases}$$

Если линия не подвержена внешним электромагнитным влияниям, то $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$; в этом случае уравнения активного четырехполюсника переходят в уравнения пассивного четырехполюсника:

$$\begin{cases} \dot{U} = A_x \dot{U}_0 - B_x i_0, \\ i = A_x' \dot{U}_0 - C_x \dot{U}_0, \\ \dot{U} = A_x' \dot{U}_e + B_x' i_e, \\ i = A_x \dot{U}_e + C_x \dot{U}_e. \end{cases}$$

3. Теория магнитных цепей на основе теории активного четырехполюсника. ¹ Возьмем магнитную цепь фиг. 15. Пусть на единицу длины линий магнитное сопротивление равно R_m и проводимость путей магнитной утечки G_m . По условию $R_m = \text{const}$ и $G_m = \text{const}$. Пусть намагничивание рассматриваемой магнитной цепи происходит под влиянием постоянного тока в намагничивающих катушках. Обозначим магнитодвижущую силу на единицу длины двухпроводной линии через F . Если число витков на единицу длины линии по двум проводам равно ω_1 , а сила тока в обмотках i , то

$$F = \frac{0.4 \pi \omega_1 i}{R_m}.$$

При $i = \text{const}$, $F = \text{const}$.

Если обозначить для любого сечения линии x (фиг. 15) магнитный поток через Φ и магнитное напряжение через U_m , то, в силу изложенного в предыдущем параграфе, будем иметь:

$$\begin{cases} U_m = A_x U_{m0} - B_x \left(\Phi_0 - \frac{F}{Z_{m1m}} \right), \\ \Phi - \frac{F}{Z_{m1m}} = A_x \left(\Phi_0 - \frac{F}{Z_{m1m}} \right) - C_x U_{m0}, \\ U_m = A_x' U_{me} + B_x' \left[\Phi_e - \frac{F}{Z_{m1m}} \right], \\ \Phi - \frac{F}{Z_{m1m}} = A_x' \left[\Phi_e - \frac{F}{Z_{m1m}} \right] + C_x' U_{me}, \end{cases}$$

где

$$A_m = \sqrt{R_m G_m} \quad \text{и} \quad Z_m = \sqrt{\frac{R_m}{G_m}}.$$

¹ В. И. Коваленков. Применение теории активного четырехполюсника к расчету магнитных цепей, изд. ВЭТА, т. V, 1933; Теория магнитных цепей, вып. II, изд. ВЭТА, 1934; Теория магнитных цепей, Изв. электропромышленности слабых токов, №№ 3, 4, 5, 1934.

Так как $U_{m0} = -\Phi_0 Z_0$ и $U_{me} = \Phi_e Z_e$, то

$$\begin{cases} U_m = B_x \frac{F}{Z_m \gamma_m} - \Phi_0 (B_x + A_x Z_0), \\ \Phi = \frac{F}{Z_m \gamma_m} (1 - A_x) + \Phi_0 (A_x + C_x Z_0), \\ U_m = \Phi_e (B'_x + A'_x Z_e) - B'_x \frac{F}{Z_m \gamma_m}, \\ \Phi = \Phi_e (A'_x + C'_x Z_e) + \frac{F}{Z_m \gamma_m} (1 - A'_x). \end{cases}$$

Из последней системы уравнений находим:

$$\Phi_e = \frac{U_m + B'_x \frac{F}{Z_m \gamma_m}}{B'_x + A'_x Z_e} = \frac{\Phi - \frac{F}{Z_m \gamma_m} (1 - A'_x)}{A'_x + C'_x Z_e},$$

откуда

$$\begin{aligned} \Phi (B'_x + A'_x Z_e) - U_m (A'_x + C'_x Z_e) &= \\ &= \frac{F}{Z_m \gamma_m} [B'_x (A'_x + C'_x Z_e) + (1 - A'_x) (B'_x + A'_x Z_e)] = \\ &= \frac{F}{Z_m \gamma_m} [B'_x + Z_e (A'_x - 1)]. \end{aligned}$$

Так как выведенное соотношение справедливо для любого значения x , то оно справедливо и для $x=0$, а потому

$$\Phi_0 (B + A Z_e) - U_{m0} (A + C Z_e) = \frac{F}{Z_m \gamma_m} [B + Z_e (A - 1)],$$

но $U_{m0} = -\Phi_0 Z_0$, следовательно,

$$\Phi_0 = \frac{F}{Z_m \gamma_m} \frac{B + Z_e (A - 1)}{B + A (Z_0 + Z_e) + C Z_0 Z_e}.$$

Подставляя полученное выражение для Φ_0 в первую систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{F}{Z_m \gamma_m} \frac{B_x [A Z_0 + (C Z_0 + 1) Z_e] - A_x Z_0 [B + Z_e (A - 1)]}{B + A (Z_0 + Z_e) + C Z_0 Z_e}, \\ \Phi &= \frac{F}{Z_m \gamma_m} \left\{ 1 - \frac{A_x [A Z_0 + (C Z_0 + 1) Z_e] - C_x Z_0 [B + Z_e (A - 1)]}{B + A (Z_0 + Z_e) + C Z_0 Z_e} \right\}. \end{aligned}$$

Полученные решения дают полную картину распределения магнитного потока по рассматриваемой магнитной цепи. Если перейти к частному случаю, — подково, — то мы должны положить

$$Z_0 \approx 0, \quad Z_e \neq 0.$$

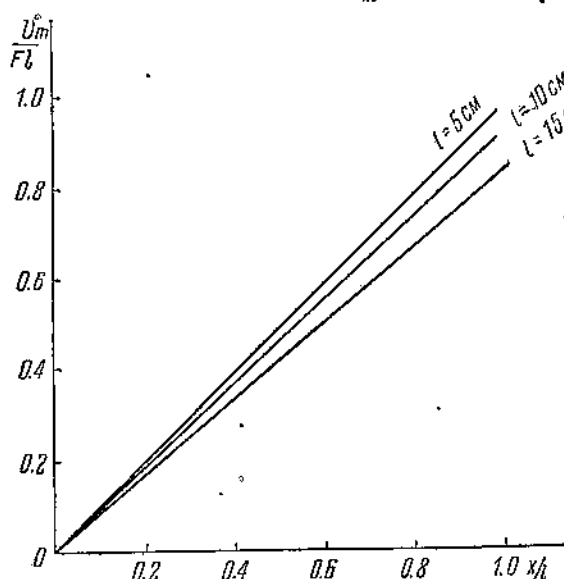
В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{F}{Z_m \gamma_m} \frac{Z_e B_x}{B + A Z_e} = F \frac{Z_e}{R_m} \frac{Z_m \operatorname{sh} \gamma_m x}{Z_m \operatorname{sh} \gamma_m l + Z_e \operatorname{ch} \gamma_m l}, \\ \Phi &= \frac{F}{Z_m \gamma_m} \left(1 - \frac{Z_e A_x}{B + A Z_e} \right) = \frac{F}{R_m} \frac{Z_m \operatorname{sh} \gamma_m l + Z_e (\operatorname{ch} \gamma_m l - \operatorname{ch} \gamma_m x)}{Z_m \operatorname{sh} \gamma_m l + Z_e \operatorname{ch} \gamma_m l}. \end{aligned}$$

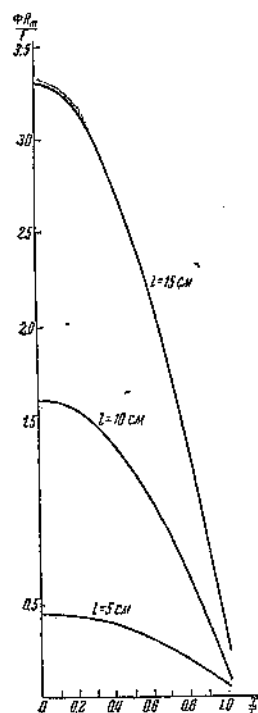
Пусть сечение магнитопровода $s = 2 \text{ см}^2$, длина магнитопровода $l = 5, 10$ и 15 см , расстояние между проводами линии $d = 5 \text{ см}$, при этом $R_m = 0.001$ электромагнитной единицы сопротивления, $G_m = 1.61$ электромагнитной единицы проводимости, магнитная проводимость концов подковы $G_e = 0.56$ электромагнитной единицы проводимости, следовательно, магнитное сопротивление концов рассматриваемой магнитопровода $Z_e = \frac{1}{G_e} = 1.8$ электромагнитной единицы сопротивления.

В этом случае $\gamma_m = \sqrt{R_m G_m} = 0.04012$ и $Z_m = \sqrt{\frac{R_m}{G_m}} = 0.02494$ электромагнитной единицы сопротивления.

Выражая магнитное напряжение U_m в долях от $F \cdot l$ и магнитный поток в долях от $\frac{F}{R_m}$, вычислим по при-



Фиг. 18.



Фиг. 19а.

Таблица 1

$\frac{x}{l}$	$l = 5 \text{ см}$	$l = 10 \text{ см}$	$l = 15 \text{ см}$
Напряжение			
0	0	0	0
0.1	0.09782	0.09202	0.08353
0.2	0.1957	0.1840	0.1672
0.3	0.2936	0.2761	0.2505
0.4	0.3914	0.3681	0.3340
0.5	0.4892	0.4601	0.4176
0.6	0.5872	0.5521	0.5011
0.7	0.6848	0.6440	0.5847
0.8	0.7828	0.7362	0.6680
0.9	0.8802	0.8282	0.7513
1.0	0.9782	0.9202	0.8353
Магнитный поток			
0	0.02224	0.07972	0.1654
0.1	0.02208	0.07960	0.1637
0.2	0.02130	0.07705	0.1594
0.3	0.02035	0.07339	0.1513
0.4	0.01913	0.06774	0.1395
0.5	0.01737	0.06136	0.1252
0.6	0.01520	0.05307	0.1086
0.7	0.01249	0.04287	0.08846
0.8	0.009507	0.03190	0.06510
0.9	0.006120	0.01903	0.03746
1.0	0.002734	0.005254	0.00739

веденным выше формулам нижеследующую таблицу отношений $\frac{U_m}{F \cdot l}$ и $\frac{\Phi R_m}{F}$ и графики (фиг. 18 и 19а).

Если оба конца линии замкнуть накоротко, то мы переходим к случаю тороида с равномернораспределенной по нему обмоткой. Для этого случая $Z_0 = 0$, $Z_e = 0$, следовательно, $U_m = 0$ и

$$\Phi = \frac{F}{R_m} = \frac{0.4 \pi w_1 I}{R_m} = \frac{0.4 \pi w I}{R_m l}.$$

Возвращаясь к общим формулам для U_m и Φ , упростим их, введя следующие обозначения:

$$k_1 = \frac{AZ_0 + (CZ_0 + 1)Z_e}{B + A(Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e},$$

$$k_2 = \frac{B + (A - 1)Z_e}{B + A(Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e} \cdot \frac{Z_0}{Z_m}.$$

Получим:

$$U_m = \frac{F}{\gamma_m} (k_1 \text{sh } \gamma_m x - k_2 \text{ch } \gamma_m x),$$

$$\Phi = \frac{F}{\gamma_m Z_m} (1 - k_1 \text{ch } \gamma_m x + k_2 \text{sh } \gamma_m x).$$

Возьмем первые и вторые производные U_m и Φ по x . Тогда

$$\frac{dU_m}{dx} = F(k_1 \operatorname{ch} \gamma_m x - k_2 \operatorname{sh} \gamma_m x),$$

$$\frac{d^2 U_m}{dx^2} = F \gamma_m (k_1 \operatorname{sh} \gamma_m x - k_2 \operatorname{ch} \gamma_m x),$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{F}{Z_m} (-k_1 \operatorname{sh} \gamma_m x + k_2 \operatorname{ch} \gamma_m x),$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{F \gamma_m}{Z_m} (-k_1 \operatorname{ch} \gamma_m x + k_2 \operatorname{sh} \gamma_m x).$$

Если

$$\operatorname{th} \gamma_m x = \frac{k_2}{k_1},$$

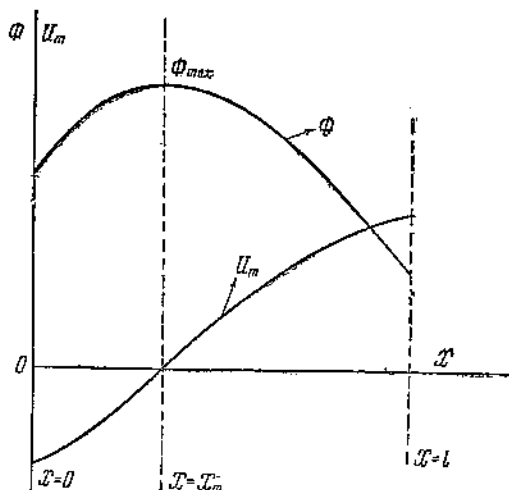
то

$$U_m = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 U_m}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{dU_m}{dx} = F \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1} \operatorname{ch} \gamma_m x > 0,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{F \gamma_m}{Z_m} \cdot \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1} \operatorname{ch} \gamma_m x < 0.$$

Следовательно, при расстоянии x от начала линии, определяемом из уравнения:



Фиг. 196.

$$\operatorname{th} \gamma_m x_m = \frac{k_2}{k_1} = \frac{B + (A - 1) \frac{Z_e}{AZ_0 + (CZ_0 + 1) \frac{Z_0}{Z_e}}}{\frac{Z_0}{Z_m}},$$

магнитный поток Φ проходит через максимум, напряжение же U_m равно нулю, причем кривая $U_m = f(x)$ в этом пункте имеет точку перегиба (фиг. 196).

С изменением положения якоря реле меняется расстояние x_m , перемещается нейтральная линия, в обмотке наводится противоэлектродвижущая сила не только вследствие изменения величины магнитного потока, но и смещения его максимума.

Переходим к распределению энергии в разобранный выше магнитной цепи¹ (фиг. 15).

Магнитная энергия всей цепи складывается из следующих частей: энергия концов W_0 и W_e , энергия магнитопроводов W_n и энергия рассеяния W_p , т. е. полная энергия W равна:

$$W = W_0 + W_n + W_p + W_e.$$

Эта полная энергия W создается магнитодвижущей силой, развиваемой намагничивающей катушкой с током. В каждом элементе dx цепи создается энергия

$$dW = \frac{1}{8\pi} F \Phi dx,$$

следовательно, полная энергия W равна:

$$W = \frac{1}{8\pi} F \int_0^l \Phi dx.$$

¹ В. И. Коваленков. Теория магнитных цепей, изд. ВЭТА, ч. II, 1934.

Таким образом

$$W = \frac{1}{8\pi} F \int_0^l \Phi dx = W_0 + W_n + W_p + W_e.$$

Энергия концов W_0 и W_e определяется весьма просто:

$$W_0 = -\frac{1}{8\pi} U_0 \Phi_0$$

$$\text{и } W_e = \frac{1}{8\pi} U_e \Phi_e$$

Несколько сложнее подсчитать энергию в магнитопроводах W_n и энергию рассеяния W_p .

Энергия магнитопроводов на элемент dx равна:

$$dW_n = -\frac{1}{8\pi} \Phi \frac{dU_m}{dx} dx.$$

Энергия рассеяния на элемент dx равна:

$$dW_p = -\frac{1}{8\pi} U_m \frac{d\Phi}{dx} dx.$$

Имея в виду, что при учете расхода энергии

$$-\frac{dU_m}{dx} = R_m \Phi,$$

$$-\frac{dI}{dx} = G_m U_m,$$

перепишем выражения для энергии dW_n и dW_p в следующем виде:

$$dW_n = \frac{R_m}{8\pi} \Phi^2 dx,$$

$$dW_p = \frac{G_m}{8\pi} U_m^2 dx,$$

следовательно, для всей цепи:

$$W_n = \frac{R_m}{8\pi} \int_0^l \Phi^2 dx,$$

$$W_p = \frac{G_m}{8\pi} \int_0^l U_m^2 dx.$$

Подставляя значения Φ и U_m из полученных в этом параграфе общих формул для Φ и U_m , приходим к общим решениям W_n и W_p .

Ради облегчения математических выкладок, введем следующие обозначения:

$$a = AZ_0 + (CZ_0 + 1) Z_e,$$

$$b = Z_0[B + Z_e(A - 1)],$$

$$c = B + A(Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e;$$

тогда общие решения для U_m и Φ примут следующий вид:

$$U_m = \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{aB_x - bA_x}{c},$$

$$\Phi = \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{c - aA_x + bB_x}{c}.$$

Произведя указанную подстановку, получим:

$$W_n = \frac{R_m}{8\pi c^2} \cdot \frac{F^2}{Z_m^2 \gamma_m^2} \int_0^l (c - aA_x + bC_x)^2 dx,$$

$$W_p = \frac{G_m}{8\pi c^2} \cdot \frac{F^2}{Z_m^2 \gamma_m^2} \int_0^l (aB_x - bA_x)^2 dx,$$

или, иначе:

$$W_n = \frac{R_m}{8\pi c^2} \cdot \frac{F^2}{Z_m^2 \gamma_m^2} \left(c^2 l + a^2 \int_0^l \text{ch}^2 \gamma_m x dx + \frac{b^2}{Z_m^2} \int_0^l \text{sh}^2 \gamma_m x dx - 2ac \int_0^l \text{ch} \gamma_m x dx + \right. \\ \left. + \frac{2bc}{Z_m} \int_0^l \text{sh} \gamma_m x dx - \frac{2ab}{Z_m} \int_0^l \text{ch} \gamma_m x \text{sh} \gamma_m x dx \right),$$

$$W_p = \frac{G_m}{8\pi c^2} \cdot \frac{F^2}{Z_m^2 \gamma_m^2} \left(a^2 Z_m^2 \int_0^l \text{sh}^2 \gamma_m x dx + b^2 \int_0^l \text{ch}^2 \gamma_m x dx - \right. \\ \left. - 2ab Z_m \int_0^l \text{ch} \gamma_m x \text{sh} \gamma_m x dx \right).$$

Интегрируя, получим

$$W_n = \frac{F^2}{8\pi c^2 R_m} \left[\frac{l}{2} \left(2c^2 + a^2 - \frac{b^2}{Z_m^2} \right) + \frac{2b}{R_m} \left(\frac{a}{4} - c \right) - \right. \\ \left. - \frac{2ac}{\gamma_m} \text{sh} \gamma_m l + \frac{2bc}{R_m} \text{ch} \gamma_m l + \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{\gamma_m} + \frac{b^2}{R_m Z_m} \right) \text{sh} 2\gamma_m l - \frac{ab}{2R_m} \text{ch} 2\gamma_m l \right], \\ W_p = \frac{G_m F^2}{8\pi c^2 R_m^2} \left[\frac{l}{2} (b^2 - a^2 Z_m^2) + \frac{ab}{2G_m} - \frac{ab}{2G_m} \text{ch} 2\gamma_m l + \frac{b^2 + a^2 Z_m^2}{4\gamma_m} \text{sh} 2\gamma_m l \right].$$

В то же время

$$W_0 = \frac{F^2}{8\pi c^2 R_m^2} (c - a) b,$$

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{F^2}{c^2 R_m^2} (aB - bA) (c - aA + bC).$$

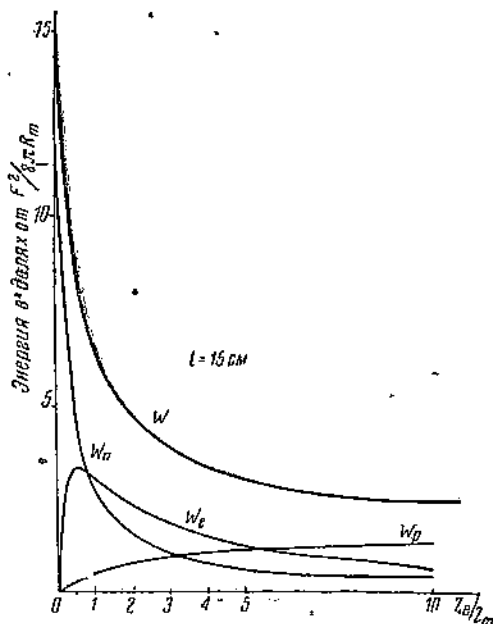
Сложив полученные отдельные части энергии, получим полную энергию W

$$W = W_0 + W_e + W_n + W_p = \\ = \frac{F^2}{8\pi c^2 Z_m^2 \gamma_m^2} \left(bc - ab + ac Z_m \text{sh} \gamma_m l - a^2 Z_m \text{sh} \gamma_m l \text{ch} \gamma_m l + ab \text{sh}^2 \gamma_m l - \right. \\ \left. - bc \text{ch} \gamma_m l + ab \text{ch}^2 \gamma_m l - \frac{b^2}{Z_m} \text{sh} \gamma_m l \text{ch} \gamma_m l + \gamma_m Z_m l c^2 + \right. \\ \left. + \frac{a^2 Z_m \gamma_m l}{2} - \frac{b^2 \gamma_m l}{2 Z_m} + \frac{ab}{2} - 2bc - 2ac Z_m \text{sh} \gamma_m l + 2bc \text{ch} \gamma_m l + \right. \\ \left. + \frac{a^2 Z_m}{4} \text{sh} 2\gamma_m l + \frac{b^2}{4 Z_m} \text{sh} 2\gamma_m l - \frac{ab}{2} \text{ch} 2\gamma_m l + \frac{a^2 Z_m}{4} \text{sh} 2\gamma_m l - \right. \\ \left. - \frac{a^2 Z_m \gamma_m l}{2} + \frac{b^2}{4 Z_m} \text{sh} 2\gamma_m l + \frac{b^2 \gamma_m l}{2 Z_m} - \frac{ab}{2} \text{ch} 2\gamma_m l + \frac{ab}{2} \right) = \\ = \frac{F^2}{8\pi c^2 Z_m \gamma_m} \left(c - \frac{b}{Z_m \gamma_m} - \frac{a}{\gamma_m} \text{sh} \gamma_m l + \frac{b}{Z_m \gamma_m} \text{ch} \gamma_m l \right).$$

К тому же выражению мы должны прийти, исходя из формулы полной энергии:

$$W = \frac{F}{8\pi} \int_0^l \Phi dx = \frac{F^2}{8\pi R_m c} \left(cl - a \int_0^l A_x dx + b \int_0^l c_x dx \right) = \\ = \frac{F^2}{8\pi c R_m} \left(cl - \frac{b}{R_m} - \frac{a}{\gamma_m} \operatorname{sh} \gamma_m l + \frac{b}{R_m} \operatorname{ch} \gamma_m l \right).$$

Так как $R_m = Z_m \gamma_m$, то обе формулы совпадают. Для числового примера возьмем разобранный уже выше магнитную цепь (фиг. 15) с параметрами: $R_m = 0.001$ электромагн. ед. сопр., $G_m = 1.61$ электромагн. ед. пров., $Z_0 = 0$, $\frac{Z_e}{Z_m} = 0; 0.5; 1.5$ и 10 , $l = 15$ см. Получим табл. 2 и графики фиг. 20.



Фиг. 20.

Таблица 2

$\frac{Z_e}{Z_m}$	Энергия в долях от $\frac{F^2}{8\pi R_m}$			
	W	W_n	W_p	W_e
0	15	15	0	0
0.5	8.513	4.847	0.3145	3.353
1	6.235	2.606	0.5737	3.055
5	2.769	0.5210	1.070	1.178
10	2.264	0.3100	1.322	0.6324

При определенном соотношении Z_e и Z_m энергия W_e проходит через максимум. Определим этот максимум и соответствующее ему значение соотношения $\frac{Z_e}{Z_m}$.

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{F^2}{R_m} \cdot \frac{aB - bA}{c^2 R_m} (c - aA + bC).$$

В рассматриваемом случае $Z_0 = 0$, следовательно, $b = 0$, $a = Z_e$ и $c = B + AZ_e$, значит

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{F^2}{R_m} \cdot \frac{B^2}{R_m} \cdot \frac{Z_e}{(B + AZ_e)^2};$$

откуда максимум W_e будет при значении

$$\frac{Z_e}{Z_m} = \operatorname{th} \gamma_m l$$

и сам максимум W_e равен:

$$(W_e)_{\max} = \frac{F^2}{8\pi R_m} \cdot \frac{Z_m}{4R_m} \operatorname{th} \gamma_m l.$$

Для разобранный выше числовой примера имеем:

$$\frac{Z_e}{Z_m} = 0.539 \quad \text{и} \quad (W_e)_{\max} = 3.358 \frac{F^2}{8\pi R_m}.$$

4. Основы расчета электромагнитного неполяризованного реле.¹ Продолжим наш анализ на примере электромагнитного реле, схематически изображенного на фиг. 21.

¹ В. И. Коваленков, Теория магнитных цепей, вып. II, изд. ВЭТА, 1934.

Обозначим переменное расстояние между якорем и концами сердечников намагничивающих катушек через $\frac{\delta}{2}$; тогда вторая форма уравнений Лагранжа дает

$$P = - \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial W}{\partial \delta'} - \frac{\partial W}{\partial \delta} \right),$$

где

$$\delta' = \frac{d\delta}{dt}.$$

Так как мы рассматриваем статические характеристики, то

$$P = \frac{dW}{d\delta}.$$

В предыдущем параграфе мы вывели следующее выражение для полной энергии магнитной цепи:

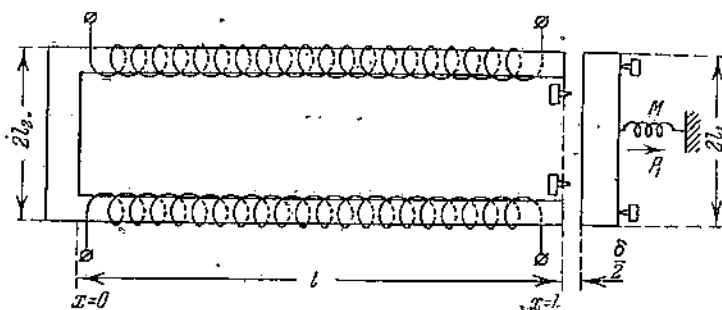
$$W = \frac{F^2}{8\pi R_m^2} \left[R_m l + \frac{b(A-1) - aB}{c} \right],$$

где

$$a = AZ_0 + (CZ_0 + 1)Z_e,$$

$$b = Z_0[B + (A-1)Z_e],$$

$$c = B + A(Z_0 + Z_e) + CZ_0Z_e,$$



Фиг. 21.

следовательно,

$$P = \frac{dW}{d\delta} = \frac{F^2}{8\pi R_m^2 c^2} \cdot D \cdot \frac{dZ_e}{d\delta},$$

где

$$D = \left[(A-1) \frac{db}{dZ_e} - B \frac{da}{dZ_e} \right] c - [b(A-1) - aB] \frac{dc}{dZ_e}.$$

Так как

$$\frac{da}{dZ_e} = 1 + CZ_e; \quad \frac{db}{dZ_e} = (A-1)Z_0; \quad \frac{dc}{dZ_e} = A + CZ_0,$$

то

$$D = -[B + Z_0(A-1)]^2.$$

Таким образом

$$P = - \frac{F^2}{8\pi R_m^2 c^2} [B + Z_0(A-1)]^2 \frac{dZ_e}{d\delta}.$$

Считая положительным направление силы P (по фиг. 21) справа налево и имея в виду, что

$$\frac{F}{R_m} \cdot \frac{B + Z_0(A-1)}{c} = \Phi_e,$$

получим:

$$F = \frac{\Phi_e^2}{8\pi} \cdot \frac{dZ_e}{d\delta},$$

где $\Phi_e = f(Z_e) = \varphi(\delta)$ некоторая функция от δ .

При очень малых значениях δ можно положить

$$Z_e = \frac{\delta}{s\mu_0} + R_m I_1,$$

где s — поперечное сечение междужелезного пространства, равное сечению сердечников реле, и $\mu_0 = 1$.

В этом случае

$$\frac{dZ_e}{d\delta} = \frac{1}{s},$$

и мы переходим к известной формуле Максвелла:

$$P = \frac{\Phi^2}{8\pi s}.$$

Если δ не настолько мало, чтобы можно было принять линейную зависимость сопротивления междужелезного пространства от δ , то формула для P соответственно усложнится.

Общую формулу для Z_e применительно к рассматриваемому типу реле мы можем вывести из следующих предположений. Если якорь весьма близок к сердечникам реле, то, как мы уже видели, для Z_e можно принять формулу:

$$Z_e = \frac{\delta}{s} + R_m I_1.$$

Графически это представляется прямой AB на фиг. 22, причем $OA = R_m I_1$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{s}$, т. е., численно $s = \operatorname{ctg} \alpha$.

Для средних и больших значений δ этот простой закон нарушается. С приближением δ к ∞ , т. е. с полным удалением якоря, сопротивление Z_e очевидно, будет определяться магнитной утечкой G_e с концов сердечников реле.

Таким образом, с непрерывным уменьшением δ выражение для магнитного сопротивления Z_e стремится к виду:

$$Z_e = \frac{\delta}{s\mu_0} + R_m I_1,$$

и при $\delta = 0$ обращается в

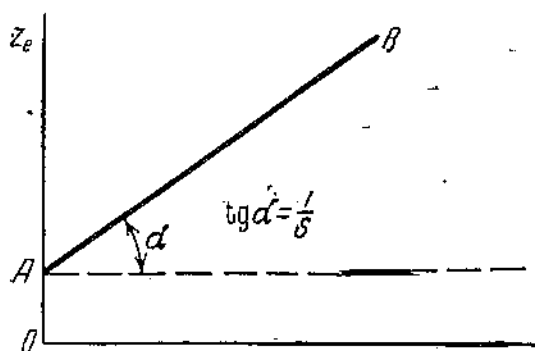
$$Z_e = R_m I_1 = R_e,$$

с приближением же δ к ∞ кривая зависимости сопротивления Z_e от расстояния δ асимптотически стремится к прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстоянии $\frac{1}{G_e}$. Следовательно, магнитное сопротивление Z_e должно меняться по кривой, близкой к кривой AD , приведенной на фиг. 23. Кривую же AD можно представить следующей формулой:

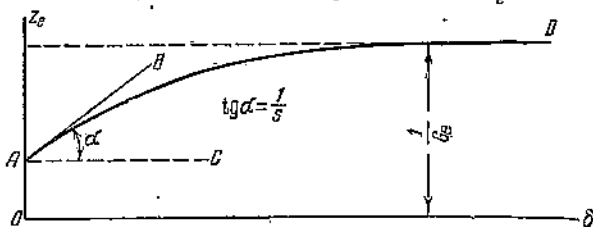
$$AD = Z_e = \frac{R_e \cdot s\mu_0 + \delta}{s\mu_0 + G_e \cdot \delta}$$

и так как $\mu_0 = 1$, то

$$Z_e = \frac{R_e s + \delta}{s + G_e \delta}.$$



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Действительно, при $\delta=0$

$$Z_e = R_e,$$

при δ , достаточно малом для того, чтобы пренебречь произведением $G_e \delta$ по сравнению с величиной s , получим

$$Z_e = R_e + \frac{\delta}{s},$$

наконец, для $\delta=\infty$ имеем:

$$Z_e = \frac{1}{G_e}.$$

Может быть предложена и другая формула для выражения функции $Z_e = f(\delta)$:

$$Z_e = K(1 - ae^{-\delta/s}).$$

Так как для $\delta=0$ сопротивление $Z_e = R_e = K(1 - a)$,

для $\delta=\infty \dots Z_e = \frac{1}{G_e} = K$ и $\left(\frac{dZ_e}{d\delta}\right)_{\delta=0} = \frac{1}{s} = Kab$,

то

$$Z_e = \frac{1}{G_e} \left[1 - (1 - R_e G_e) e^{-\frac{G_e \delta}{(1 - R_e G_e) s}} \right].$$

При достаточно малых значениях δ мы можем принять, что

$$e^{-\frac{G_e \delta}{(1 - R_e G_e) s}} = 1 - \frac{G_e \delta}{(1 - R_e G_e) s}.$$

Тогда

$$Z_e = R_e + \frac{\delta}{s}.$$

Пренебрегая произведением $R_e G_e$ по сравнению с единицей, получим:

$$Z_e = \frac{1}{G_e} (1 - e^{-\frac{G_e \delta}{s}}).$$

Имея формулы для полной магнитной энергии цепи, магнитного потока Φ_e и сопротивления Z_e в конце цепи, не трудно вывести также формулы статических магнитных характеристик:

$$L = f(\delta), \quad \Phi_e = \varphi(\delta), \quad P = \psi(\delta).$$

Действительно, выше мы вывели следующую формулу полной магнитной энергии цепи W :

$$W = \frac{E}{8\pi} \int_0^l \Phi dx = \frac{F^2}{8\pi R_m^2 c_1} [c_1 R_m l + b_1 (A - 1) - a_1 B],$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= AZ_0 + (cZ_0 + 1) Z_e, \\ b_1 &= Z_0 [B + Z_e (A - 1)], \\ c_1 &= B + A(Z_0 + Z_e) + cZ_0 Z_e. \end{aligned}$$

С другой стороны, полная магнитная энергия W равна:

$$W = \frac{LJ^2}{2},$$

Следовательно,

$$L = \frac{F^2}{4\pi R_m^2 J^2 c_1} [c_1 R_m l + b_1 (A - 1) - a_1 B],$$

откуда

$$L = \alpha w^2, \quad \text{где } \alpha = \frac{4\pi}{R_m^2 J^2 c_1} [c_1 R_m l + b_1 (A - 1) - a_1 B].$$

Полагая

$$\operatorname{sh} \gamma_m l \approx \gamma_m l \text{ и } \operatorname{ch} \gamma_m l \approx 1 + \frac{\gamma_m^2 l^2}{2},$$

получим:

$$L = \frac{\pi}{c_1} \left(2 + \frac{Z_0}{Z_m} \gamma_m l \right) \left(2 + \frac{Z_e}{Z_m} \gamma_m l \right) \omega^2.$$

Пусть $Z_0 = 0$, тогда

$$L = \frac{2\pi\omega^2}{Z_m} \frac{2Z_m + Z_e \gamma_m l}{B + AZ_e}.$$

И так как

$$Z_e = \frac{R_e s + \delta}{s + G_e \delta},$$

то

$$L = k \frac{m + \delta}{n + \delta},$$

где

$$k = \frac{2\pi}{Z_m} \frac{2Z_m G_e + \gamma_m l}{BG_e + A} \omega^2,$$

$$m = \frac{2Z_m + R_e \gamma_m l}{2Z_m G_e + \gamma_m l} s,$$

$$n = \frac{B + AR_e}{BG_e + A} s.$$

Приведем здесь же формулу, выражающую зависимость магнитного потока Φ_e от положения якоря реле. Для упрощения же выкладок положим $Z_0 = 0$, тогда

$$\Phi_e = \frac{F}{\gamma_m Z_m} \frac{B}{B + AZ_e}$$

и так как

$$Z_e = \frac{R_e s + \delta}{s + G_e \delta},$$

то

$$\Phi_e = \frac{FB}{\gamma_m Z_m} \cdot \frac{s + G_e \delta}{(B + AR_e)s + (BG_e + A)\delta}.$$

Вводя обозначения:

$$k_1 = \frac{4\pi B G_e \omega l}{\gamma_m l Z_m (B G_e + A)}, \quad m_1 = \frac{s}{G_e},$$

$$n_1 = \frac{B + AR_e}{B G_e + A} s,$$

получим

$$\Phi_e = k_1 \frac{m_1 + \delta}{n_1 + \delta}.$$

В формулу для k_1 входит сила тока i , которая с изменением положения якоря меняется. Ограничиваясь статическими характеристиками, мы можем положить $i = J = \text{const}$ и построить кривую, выражающую зависимость Φ_e от δ .

Также легко выводится и формула статической тяговой характеристики:

$$P = f(\delta) \text{ при } J = \text{const}.$$

Действительно (см. стр. 27),

$$P = \frac{\Phi_e^2}{8\pi s} \frac{1 - G_e R_e}{\left(1 + G_e \frac{\delta}{s}\right)^2}.$$

Если при этом $Z_0 = 0$, то

$$P = \frac{F^2 B^2 s}{8\pi \gamma_m^2 Z_m^2} \frac{1 - G_e R_e}{[(B + AR_e)s + (B G_e + A)\delta]^2}.$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{0.02\pi w^2 J^2 B^2 s}{Z_m^2 \gamma_m^2 J^2} \frac{1 - G_e R_e}{(B G_e + A)^2}; \quad b = \frac{B + A R_e}{B G_e + A} s,$$

тогда

$$P = \frac{a}{(b + \delta)^2}$$

К последней формуле мы могли бы прийти и иным путем. Действительно, в случае независимости тока J от параметра δ мы имеем:

$$P = \frac{1}{2} J^2 \frac{dL}{d\delta},$$

но

$$\frac{dL}{d\delta} = k \frac{n-m}{(n+\delta)^3} w^2,$$

следовательно,

$$P = \frac{k}{2} \frac{n-m}{(n+\delta)^3} w^2 J^2.$$

Обозначая

$$\frac{k(n-m)}{2} w^2 J^2 = a \text{ и } n = b,$$

приходим к выведенной выше формуле.

Остановимся еще на одном соотношении, которое имеет большое значение при анализе устанавливающихся электромагнитных процессов в релейных цепях. Мы видели, что энергия рассматриваемой цепи W может быть представлена следующей формулой:

$$W = \frac{wJ}{2l} \int_0^l \Phi dx = \frac{LJ^2}{2}.$$

Обозначая средний магнитный поток цепи через Φ_{cp} , имеем:

$$\Phi_{cp} = \frac{1}{l} \int_0^l \Phi dx.$$

Следовательно,

$$\frac{wJ}{2} \Phi_{cp} = \frac{LJ^2}{2},$$

откуда

$$\Phi_{cp} = \frac{LJ}{w}.$$

Остановившись на выведенной вначале формуле, для магнитного сопротивления Z_e , получим:

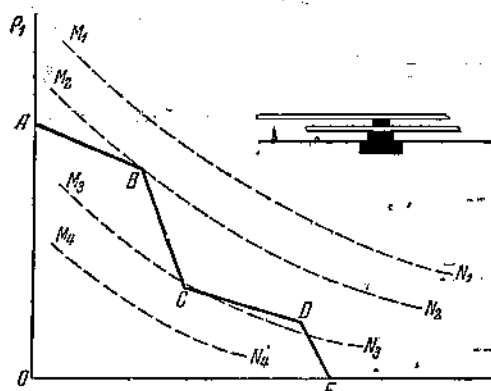
$$\frac{dZ_e}{d\delta} = s \frac{1 - G_e R_e}{(s + G_e \delta)^2} \quad \text{и} \quad P = \frac{\Phi_e^2}{8\pi s} \cdot \frac{1 - G_e R_e}{\left(1 + \frac{G_e \delta}{s}\right)^2}.$$

Если при этом можно пренебречь произведением $G_e \cdot R_e$, то

$$P \approx \frac{\Phi_e^2}{8\pi s} \left(\frac{s}{s + G_e \delta} \right)^2.$$

Эта сила P в случае реле типа фиг. 21 должна преодолеть натяжение пружины M , в общем же случае — противодействие якоря, связанного с контактными приспособлениями. Для телефонных реле противодействующая механическая сила P_1 характеризуется ломаной линией, примером которой может служить линия $ABCDE$ на фиг. 24. Эта ломаная линия P_1 носит название механической характеристики реле. Кривую же P , характеризующую зависимость тяговой силы реле от расстоя-

ния δ , называют тяговой, или электромеханической, характеристикой. В зависимости от величины магнитодвижущей силы F последняя характеристика изобразится одной из кривых MN (фиг. 24). Реле будет надежно работать только в том случае,



Фиг. 24.

если тяговая характеристика всеми своими точками будет расположена выше механической характеристики: разность $P - P_1$ создаст живую силу движения якоря, а при остановке якоря у контактного винта создастся соответствующее контактное давление.

Чтобы облегчить построение тяговой характеристики, преобразуем формулу для P , подставляя в нее значение потока Φ_c :

$$\Phi_c = \frac{F}{R_m} \cdot \frac{B + Z_0(A-1)}{c},$$

Получим

$$P = \frac{F^2}{8\pi s R_m^2} \left[\frac{B + Z_0(A-1)}{c} \cdot \frac{s}{s + G_e \delta} \right]^2.$$

Задаваясь разными значениями магнитодвижущей силы F , построим ряд тяговых характеристик MN (фиг. 24), из которых выберем наиболее удовлетворяющую нас. Остановившись же на определенной кривой тяговой характеристики, соответствующей магнитодвижущей силе F , определим и необходимое число ампервитков. Действительно,

$$Fl = 0.4\pi wi,$$

откуда

$$wi = \frac{Fl}{0.4\pi}.$$

И так как

$$F = 2R_m \frac{c(s + G_e \delta)}{s[B + Z_0(A-1)]} \sqrt{2\pi s P},$$

то

$$wi = 10R_m l \frac{c(s + G_e \delta)}{B + Z_0(A-1)} \sqrt{\frac{P}{2\pi s}}.$$

От этой общей формулы не трудно перейти к формулам ампервитков трогания и установившегося режима.

Якорь начинает трогаться, когда $P = P_1$, следовательно,

$$(wi)_{тр} = 10R_m l \frac{c(s + G_e \delta)}{B + Z_0(A-1)} \sqrt{\frac{P_1}{2\pi s}}.$$

Когда якорь перебросится к рабочему контакту и обеспечит необходимое нам контактное давление p , тогда $P = P_1 + p$, следовательно, установившиеся ампервитки wJ определятся из формулы:

$$wJ = 10R_m l \frac{c(s + G_e \delta)}{B + Z_0(A-1)} \sqrt{\frac{P_1 + p}{2\pi s}}.$$

Определив установившиеся ампервитки wJ , зная геометрические размеры магнитной цепи (фиг. 21) и задавшись установившимся током J или напряжением U на зажимах катушек, не трудно рассчитать и самые катушки реле.

Исходя из приведенной выше теории магнитных цепей, определим и индуктивность L реле.

5. Упрощение теории.¹ В предыдущем параграфе мы вывели следующие формулы для магнитного напряжения U_m и магнитного потока Φ применительно к магнитной цепи (фиг. 15) с магнитным сопротивлением Z_0 в начале ее, магнитным сопротивлением Z_e в конце, первичными параметрами R_m (магнитное сопротивление магнитопровода на единицу длины), G_m (магнитная проводимость утечки на единицу длины той же магнитопровода) и вторичными параметрами

$$\gamma_m (\gamma_m = \sqrt{R_m G_m}) \text{ и } Z_m (Z_m = \sqrt{\frac{R_m}{G_m}}):$$

$$U_m = \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{B_x [AZ_0 + (CZ_0 + 1) Z_e] - A_x Z_0 [B + Z_e (A - 1)]}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e},$$

$$\Phi = \frac{F}{Z_m \gamma_m} \left\{ 1 - \frac{A_x [AZ_0 + (CZ_0 + 1) Z_e] - C_x Z_0 [B + Z_e (A - 1)]}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e} \right\},$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= \operatorname{ch} \gamma_m x, & A &= \operatorname{ch} \gamma_m l, \\ B_x &= Z_m \operatorname{sh} \gamma_m x, & B &= Z_m \operatorname{sh} \gamma_m l, \\ C_x &= \frac{1}{Z_m} \operatorname{sh} \gamma_m x, & C &= \frac{1}{Z_m} \operatorname{sh} \gamma_m l. \end{aligned}$$

и F — магнитодвижущая сила на единицу длины магнитопровода. В начале линии, т. е. при $x=0$, мы имеем следующий магнитный поток Φ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{B + Z_e (A - 1)}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e}.$$

Подставляя в формулу для Φ , получим:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 - \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{AZ_0 + (CZ_0 + 1) Z_e}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e} (A_x - 1) + \\ &+ \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{Z_0 [B + Z_e (A - 1)]}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e} C_x. \end{aligned}$$

Получили весьма сложные формулы, неудобные при практическом их использовании. Придадим им более удобную форму.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{Z_0 [B + Z_e (A - 1)]}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e} &= Z_0 \Phi_0 = k'_1, \\ \frac{F}{Z_m \gamma_m} \cdot \frac{AZ_0 + (CZ_0 + 1) Z_e}{B + A (Z_0 + Z_e) + CZ_0 Z_e} &= \frac{F_1}{Z_m \gamma_m} - \Phi_0 = k'_2. \end{aligned}$$

После соответствующей подстановки получим:

$$\begin{aligned} U_m &= k'_2 B_x - k'_1 A_x, \\ \Phi &= \Phi_0 + k'_1 C_x - k'_2 (A_x - 1). \end{aligned}$$

Члены A_x , B_x и C_x содержат в себе гиперболические косинус и синус: $\operatorname{ch} \gamma_m x$ и $\operatorname{sh} \gamma_m x$.

Разложим $\operatorname{sh} \gamma_m x$ и $\operatorname{ch} \gamma_m x$ в бесконечные ряды:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \gamma_m x &= \gamma_m x + \frac{(\gamma_m x)^3}{3!} + \frac{(\gamma_m x)^5}{5!} + \frac{(\gamma_m x)^7}{7!} + \dots \\ \operatorname{ch} \gamma_m x &= 1 + \frac{(\gamma_m x)^2}{2!} + \frac{(\gamma_m x)^4}{4!} + \frac{(\gamma_m x)^6}{6!} + \frac{(\gamma_m x)^8}{8!} + \dots \end{aligned}$$

Практика работы с электромагнитными реле связи и сигнализации показывает, что в приведенных рядах с большой степенью точности можно пренебречь всеми

¹ В. И. Коваленков, Теория магнитных цепей, вып. III, изд. ВЭТА, 1935.

членами со степенями выше второй, после чего будем иметь:

$$\operatorname{sh} \gamma_m x \approx \gamma_m x,$$

$$\operatorname{ch} \gamma_m x \approx 1 + \frac{\gamma_m^2 x^2}{2}.$$

Подставляя в формулы для U_m и Φ , находим:

$$U_m \approx k'_2 Z_m \gamma_m x - k'_1 \left(1 + \frac{\gamma_m^2}{2} x^2 \right),$$

$$\Phi \approx \Phi_0 + \frac{k'_1 \gamma_m}{z_m} x - k'_2 \frac{\gamma_m^2}{2} x^2.$$

Вводим новые обозначения:

$$\frac{k'_1 \gamma_m}{Z_m} = k_1 \quad \text{и} \quad k'_2 \frac{\gamma_m^2}{2} = k_2,$$

тогда

$$U_m = -k_1 \frac{Z_m}{\gamma_m} + k_2 \frac{2Z_m}{\gamma_m} x - k_1 \frac{Z_m \gamma_m}{2} x^2,$$

$$\Phi = \Phi_0 + k_1 x - k_2 x^2.$$

Так как

$$\frac{Z_m}{\gamma_m} = \frac{1}{G_m} \quad \text{и} \quad Z_m \gamma_m = R_m,$$

то

$$U_m = -\frac{k_1}{G_m} + \frac{2k_2}{G_m} x - \frac{k_1 R_m}{2} x^2,$$

$$\Phi = \Phi_0 + k_1 x - k_2 x^2,$$

причем

$$k_1 = G_m Z_0 \Phi_0, \quad k_2 = \frac{\gamma_m^2}{2} \left(\frac{F}{Z_m \gamma_m} - \Phi_0 \right).$$

Если $Z_0 = 0$, то $k_1 = 0$ и

$$U_m = \frac{2k_2}{G_m} x,$$

$$\Phi = \Phi_0 - k_2 x^2.$$

Преобразуем выражения для коэффициентов k_1 и k_2 (для общего случая: $Z_0 \neq 0$). Так как

$$U_{m0} = -Z_0 \Phi_0,$$

то

$$k_1 = -G_m U_{m0}.$$

С другой стороны,

$$\gamma_m^2 = R_m G_m \quad \text{и} \quad Z_m \gamma_m = R_m,$$

следовательно,

$$k_2 = \frac{R_m G_m}{2} \left(\frac{F}{R_m} - \Phi_0 \right) = G_m \left(\frac{F}{2} - \frac{\Phi_0 R_m}{2} \right),$$

или

$$\frac{k_2}{G_m} = \frac{F}{2} - \frac{\Phi_0 R_m}{2},$$

но

$$\Phi_0 = B_0 s = \mu h_0 s,$$

$$R_m = \frac{2}{\mu s},$$

значит

$$\frac{k_0}{G_m} = \frac{F_1}{2} - h_0.$$

Обозначим

$$\frac{F_1}{2} = F_1,$$

где F_1 представляет собой магнитодвижущую силу на единицу длины одного магнитопровода, т. е.

$$F_1 = 0.4\pi \frac{w_1}{2} i,$$

тогда

$$\frac{k_0}{G_m} = F_1 - h_0,$$

или

$$F_1 = \frac{k_0}{G_m} + h_0.$$

Обозначим

$$\frac{k_0}{G_m} = H_0,$$

после чего имеем:

$$F_1 = H_0 + h_0.$$

В основу вышеприведенного анализа были положены уравнения активного четырехполюсника, в котором постоянные интегрирования выражались через начальные значения магнитного напряжения U_{m0} и магнитного потока Φ_0 . Выражая те же постоянные через конечные значения U_{me} и Φ_e , получим следующие уравнения:

$$U_m = \frac{k_{1e}}{G_m} - \frac{2k_{2e}}{G_m}(l-x) + \frac{k_{1e}G_m}{2}(l-x)^2,$$

$$\Phi = \Phi_e + k_{1e}(l-x) - k_{2e}(l-x)^2,$$

где

$$k_{1e} = Z_e G_m \Phi_e = U_e G_m,$$

$$k_{2e} = \left(\frac{F}{R_m} - \Phi_e \right) \frac{R_m G_m}{2} = \left(F_1 - \frac{R_m \Phi_e}{2} \right) G_m = \left(F_1 - \frac{2\mu_s h_e}{2\mu_s} \right) G_m,$$

или

$$\frac{k_{2e}}{G_m} = F_1 - h_e.$$

В конце линии, следовательно,

$$F_1 = h_e + H_e.$$

Если постоянные интегрирования уравнений активного четырехполюсника выразить через поток Φ_a и напряжение U_{ma} , где a — расстояние от начала магнитопровода до рассматриваемого пункта, то получим следующее выражение:

$$F_1 = h_a + H_a.$$

Вообще же

$$F_1 = h_x + H_x.$$

Полученное выражение показывает, что магнитодвижущая сила F_1 в любом пункте активной части цепи распадается на две части, из которых одна (h_x) направлена на намагничивание железа в рассматриваемом пункте.

Обычно напряженность магнитного поля H_x называют размагничивающей силой или размагничивающим полем (см. главу I, § 2).

Для магнитного напряжения U_m , как мы видели, справедливо уравнение:

$$-\frac{dU_m}{dx} = R_m \Phi - F,$$

но

$$R_m \Phi = 2h_x \quad \text{и} \quad F = 2F_1,$$

следовательно,

$$-\frac{dU_m}{dx} = 2(h_x - F_1),$$

откуда

$$F_1 = h_x + \frac{1}{2} \frac{dU_m}{dx}.$$

Сравнивая с приведенным выше выражением

$$F_1 = h_x + H_x,$$

находим

$$H_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{dU_m}{dx},$$

и так как

$$U_m = k'_2 Z_m \operatorname{sh} \gamma_m x - k'_1 \operatorname{ch} \gamma_m x,$$

то

$$H_x = \frac{k'_2 Z_m \gamma_m}{2} \operatorname{ch} \gamma_m x - \frac{k'_1 \gamma_m}{2} \operatorname{sh} \gamma_m x.$$

Имея в виду, что

$$\frac{k'_2 \gamma_m^2}{2} = k_2, \quad \frac{k'_1 \gamma_m}{Z_m} = k_1, \quad \frac{Z_m}{\gamma_m} = G_m,$$

получим

$$H_x = \frac{k_2}{G_m} \operatorname{ch} \gamma_m x - \frac{k_1 Z_m}{2} \operatorname{sh} \gamma_m x.$$

Полагая

$$\operatorname{sh} \gamma_m x \approx \gamma_m x,$$

$$\operatorname{ch} \gamma_m x \approx 1 + \frac{\gamma_m^2 x^2}{2},$$

находим:

$$H_x \approx \frac{k_2}{G_m} - \frac{1}{2} k_1 R_m x + \frac{1}{2} k_2 R_m x^2.$$

Если исходить из упрощенного уравнения для магнитного напряжения U_m :

$$U_m \approx -\frac{k_1}{G_m} + \frac{2k_2}{G_m} x - \frac{k_1 R_m}{2} x^2,$$

то

$$H_x \approx \frac{k_2}{G_m} - \frac{1}{2} k_1 R_m x.$$

Для $x=0$ имеем:

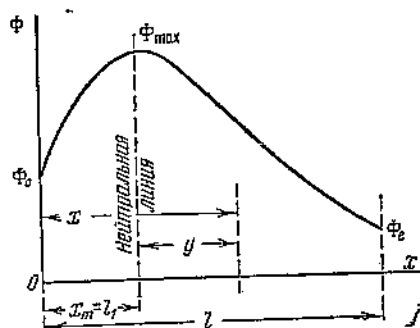
$$H_0 = \frac{k_2}{G_m} = F_1 - \frac{\Phi_0 R_m}{2} = F_1 - \Phi_0 R_{m1}.$$

Возвращаясь к уравнению:

$$\Phi = \Phi_0 + k_1 x - k_2 x^2,$$

замечаем, что магнитный поток на некотором расстоянии от начала магнитолнии проходит через максимум (фиг. 25). Определим это расстояние x_m (расстояние нейтральной линии от начала магнитолнии) и значение максимума Φ . Так как

$$\frac{d\Phi}{dx} = k_1 - 2k_2 x,$$



Фиг. 25.

то

$$x_m = \frac{k_1}{2k_2}$$

Подставляя в уравнение для Φ , получим:

$$\Phi_{\max} = \Phi_0 + \frac{k_1^2}{4k_2}$$

Перенесем начало координат из начала магнитной цепи (фиг. 25) в точку максимального значения магнитного потока, т. е. совместим вертикальную ось координат с нейтральной линией магнитной цепи. Так как расстояние нейтральной линии от начала линии равно $x_m = l_1 = \frac{k_1}{2k_2}$, то, обозначая любые расстояния по оси абсцисс от нового начала координат через y , мы должны в нашем уравнении для Φ заменить x на $y + l_1$. Проведем это, получим:

$$\Phi = \Phi_0 + k_1 l_1 - k_2 l_1^2 - (k_1 - 2k_2 l_1)y - k_2 y^2$$

Подставляя

$$l_1 = \frac{k_1}{2k_2}$$

находим

$$\Phi = \Phi_{\max} - k_2 y^2$$

Если $Z_0 = 0$, то $k_1 = 0$, $\Phi_{\max} = \Phi_0$, $x_m = l_1 = 0$ и $\Phi = \Phi_0 - k_2 x^2$.

На этом мы и закончим главу, намечающую пути упрощения теории магнитных цепей.

Б. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ С РАСЧЕТНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ μ , ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВЕЛИЧИНЫ МАГНИТНОГО ПОТОКА¹

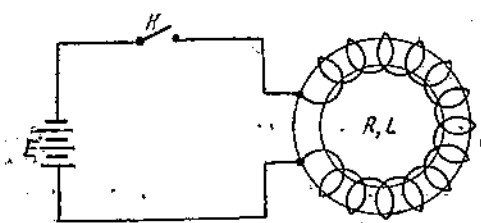
1. Постановка вопроса. Мы рассмотрели теорию магнитных цепей с постоянными (практически постоянными) параметрами R_m и G_m . Такие цепи встречаются в значительном числе электромагнитных реле связи и СЦБ. Однако наибольшее количество электромагнитных механизмов сильного тока, СЦБ и большая группа их в области связи имеют магнитные цепи с сопротивлением R_m , зависящим от величины напряженности магнитного поля H . Чтобы перейти к анализу подобного рода цепей, необходимо прежде всего определить математическую зависимость магнитной проницаемости μ или индукции B от поля H . До настоящего времени подобной зависимости мы не имеем. Не имея же математического изображения функций $\mu = f(H)$ и $B = \varphi(H)$, мы не можем даже приступить к анализу магнитных цепей с переменным параметром R_m . Отсутствие математического выражения указанных функций объясняется весьма большой сложностью физических процессов, происходящих в ферромагнетике при его намагничивании. Не имея возможности справиться в настоящее время с этими трудностями, пойдем по иному пути. Оставляя в стороне физическую сторону процессов намагничивания ферромагнетиков, решим задачу формально. Подыщем электрическую цепь, эквивалентную в интересующем нас отношении магнитной цепи, и выведем отсюда соответствующие формулы. Если выведенные формулы $\mu = f(H)$ и $B = \varphi(H)$ дадут результаты, совпадающие с экспериментом, то и такое решение будет большим шагом вперед, давая возможность математического анализа поставленных выше вопросов.

2. Два вида индуктивности и магнитной проницаемости. Уравнение Гельмгольца для цепи фиг. 26 имеет следующий вид:

$$I = i + \frac{1}{R} \cdot \frac{dLi}{dt}, \quad (1)$$

¹ В. И. Коваленков. Основные магнитные параметры электромагнитной цепи, "Автоматика и телемеханика", № 4—5, 1938.

где $I = \frac{E}{R}$ — установившееся значение тока в электрической цепи и $Li = \Phi = \Phi \cdot w$ — полное потокоцепление. Произведя дифференцирование, получим



Фиг. 26.

$$I = i + \frac{1}{R} \left(L + i \frac{dL}{di} \right) \frac{di}{dt}$$

Вводя обозначение

$$L_k = i \frac{dL}{di} + L, \quad (2)$$

приходим к уравнению:

$$I = i + \frac{L_k}{R} \frac{di}{dt}. \quad (3)$$

Как в уравнении (1), так и в уравнении (3) параметры L и L_k зависят от силы тока в цепи:

$$L = f_1(i), \quad L_k = f_2(i).$$

Имея в виду, что

$$L_i = \Phi \cdot \frac{w}{l}, \quad (4)$$

где w — число витков обмотки тороида, от уравнения (1) переходим к уравнению

$$I = i + \frac{w}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5)$$

Сравнивая последнее с (3), находим:

$$L_k = w \frac{d\Phi}{di}. \quad (6)$$

От приведенных уравнений и соотношений легко перейти к аналогичным уравнениям и соотношениям, отнесенным к магнитной цепи тороида. Обозначим:

$$\frac{0.4\pi w I}{l} = H, \quad \frac{0.4\pi w i}{l} = h \quad \text{и} \quad L = \frac{0.4\pi s}{l} \mu w^2,$$

где H — установившееся значение магнитной напряженности в сердечнике тороида (в настоящей работе берем средние значения магнитной напряженности в сердечниках тороидов), h — ее устанавливающееся значение, μ — магнитная проницаемость железа сердечника, s — сечение сердечника тороида и l — его длина. Умножая обе части уравнения (1) на $\frac{0.4\pi w}{l}$, получим следующее выражение:

$$H = h + \alpha \frac{d\mu}{dt},$$

где

$$\alpha = \frac{0.4\pi s}{Rl} w^2.$$

Далее, приведенным выше методом приходим к следующим соотношениям:

$$\mu + h \frac{d\mu}{dh} = \mu_k, \quad (7)$$

$$\mu = \frac{B}{h}, \quad (8)$$

$$\mu_k = \frac{dB}{dh}, \quad (9)$$

$$H = h + \alpha \mu_k \frac{dh}{dt}. \quad (10)$$

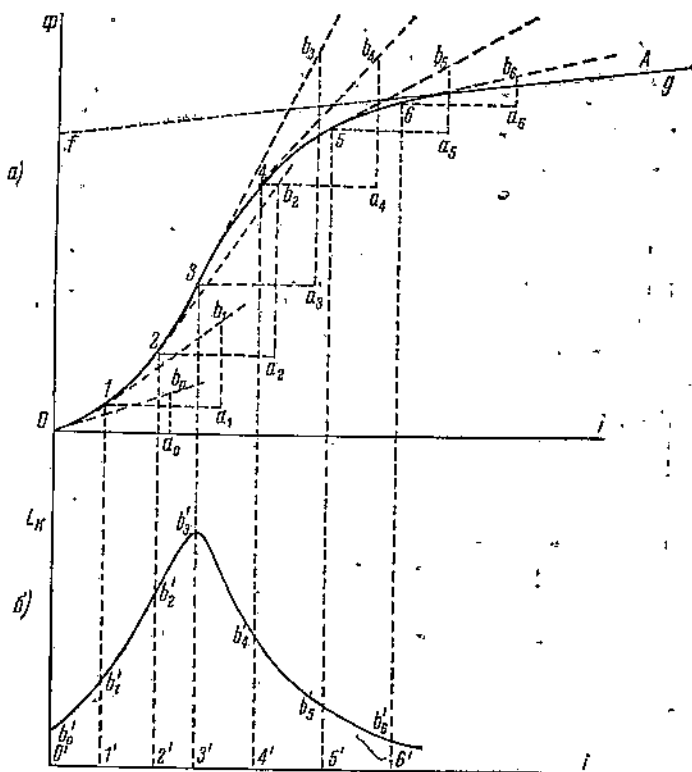
3. Построение кривых индуктивности. Пусть кривая 0123456A (фиг. 27) изображает зависимость магнитного потока Φ от тока i .

Так как

$$L_k = w \frac{d\Phi}{di} = w \operatorname{tg} \beta,$$

где β — угол между касательной в рассматриваемой точке кривой и направлением оси абсцисс, то для определения значений индуктивности L_k в точках 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 достаточно в этих точках провести касательные $Ob_0, 1b_1, 2b_2, 3b_3, 4b_4, 5b_5$ и $6b_6$ и определить значение тангенсов углов, образованных проведенными касательными и направлением оси абсцисс. Графически это может быть сделано следующим образом.

Проводим из намеченных на кривой точек прямые, параллельные оси абсцисс, и откладываем на них равные отрезки: $0a_0 = 1a_1 = 2a_2 = 3a_3 = 4a_4 = 5a_5 = 6a_6$.



Фиг. 27.

Из точек $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ и a_6 восставляем перпендикуляры до пересечения с проведенными уже касательными и отмечаем отрезки: $a_0b_0, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5$ и a_6b_6 . Отношения длин этих отрезков к длине горизонтального отрезка $0a_0 = 1a_1 \dots = 6a_6$ и представляют собою соответствующие тангенсы углов:

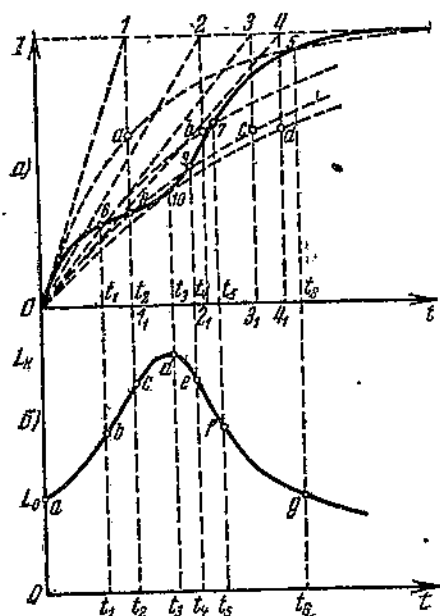
$$\frac{a_k b_k}{k a_k} = \operatorname{tg} \beta_k.$$

Спроектируем точки 0, 1, 2, 3... 6 на нижнюю ось абсцисс (фиг. 27, б): $0', 1', 2' \dots 6'$ и от нижней оси абсцисс отложим отрезки: $0'b'_0 = a_0b_0; 1'b'_1 = a_1b_1; 2'b'_2 = a_2b_2; 3'b'_3 = a_3b_3; 4'b'_4 = a_4b_4; 5'b'_5 = a_5b_5; 6'b'_6 = a_6b_6$. Длины отложенных отрезков пропорциональны соответствующим тангенсам углов. Так как число витков $w = \text{const}$, длины тех же отрезков будут пропорциональны также и индуктивности L_k . Соединив точки $b'_0, b'_1, b'_2, \dots, b'_6$, и подбирая масштаб ординат, получим искомую кривую индуктивности $L_k: b'_0 b'_1 b'_2 b'_3 b'_4 b'_5 b'_6$ (фиг. 27, б).

В тех случаях, когда требуется определить только характер кривой индуктивности, причем не по кривой $\Phi = f(i)$, а по осциллограмме тока $i = \varphi(t)$, можно

предложить способ, дающий возможность построить кривую, среднюю между кривыми индуктивности L_k и L .

Возьмем на осциллограмме тока 0-6-8-10-9-7-5 (фиг. 28, а) какую-либо точку, например точку 6. Если бы индуктивность L_k или L , соответствующая этой точке, была постоянной, то кривая тока, как показывает уравнение (3), не совпала бы с нанесенной на чертеже осциллограммой, а представляла бы собой кривую Гельмгольца 0-6-7. Эта кривая пересекает осциллограмму в тех точках, которым соответствует индуктивность кривой Гельмгольца 0-6-7. Проведя вторую кривую Гельмгольца 0-8-9, исходя из какой-то другой постоянной индуктивности L_k (или L), получим еще две точки пересечения (8 и 9), которым соответствует индуктивность кривой 0-8-9. Проведя любую кривую Гельмгольца, пересекающую данную осциллограмму в двух точках или касающуюся ее,



Фиг. 28.

и зная значение индуктивности проведенной кривой Гельмгольца, определим те положения на осциллограмме тока, которым соответствует эта индуктивность. Наметив ряд точек на осциллограмме тока, которым соответствуют определенные значения индуктивности, нетрудно построить и кривую изменения индуктивности во времени (фиг. 28, б).

Для того чтобы определить, например, значение индуктивности в самом начале осциллограммы тока, проведем к последней начальную касательную 0-1 (фиг. 28, а). Как известно, отрезок $I-I_1$ будет представлять постоянную времени нашей цепи с постоянной индуктивностью, равной индуктивности в начале осциллограммы. Опустим из точки 1 перпендикуляр на ось абсцисс и отложим на этом перпендикуляре отрезок $I_1 a$, равный $0.632I$. Через точку a должна пройти кривая Гельмгольца, касательная к осциллограмме в точке 0. Кривая эта пересекает осциллограмму в точке 5, следовательно, точка 5 соот-

ветствует та же индуктивность, что и точке 0. Зная сопротивление цепи и постоянную времени $I-I_1$, находим начальное значение индуктивности $L_k = L_0$. Началу осциллограммы соответствует время $t=0$, точке 5 — время $t=t_6$. На фиг. 28, б, отложим по оси ординат найденное значение индуктивности $L_k = L_0$ для момента времени $t=0$ и $t=t_6$. Проводим на фиг. 28, а, прямые 0-2, 0-3, 0-4 и примем их за начальные касательные к каким-то кривым Гельмгольца. Опуская из точек 2, 3 и 4 перпендикуляры на ось абсцисс и откладывая на них отрезки 2_1-b , 3_1-c , 4_1-d , равные $0.632I$, получим точки, через которые пройдут соответствующие кривые Гельмгольца: 0-6-b-7, 0-8-9-c, 0-10-d. Индуктивность этих кривых определим из указанных постоянных времени. Откладывая полученные значения индуктивности по ординатам моментов времени, соответствующих точкам пересечений осциллограммы с кривыми Гельмгольца, построим кривую abcdefg (фиг. 28, б), выражающую временную зависимость индуктивности L_k рассматриваемой цепи. По кривой же временной зависимости средней индуктивности и осциллограмме тока нетрудно построить и кривую зависимости средней индуктивности от силы тока i .

4. Сравнение кривых индуктивности L и L_k . Сравним значения индуктивности L и L_k , для чего вспомним, что

$$L_k = L + i \frac{dL}{di}.$$

Если $i=0$, то $\frac{dL}{di} \neq 0$, следовательно, $i \frac{dL}{di} = 0$ и $L_k = L = L_0$. При какой-то силе тока $i=i_m$ кривая L проходит через максимум, следовательно, при $i=i_m$ имеем:

$$\frac{dL}{di} = 0, \quad i \frac{dL}{di} = 0, \\ L_k = L = L_{\max}.$$

С приближением тока i к бесконечно большому значению кривая L асимптотически стремится к прямой, параллельной оси абсцисс, следовательно, производная $\frac{dL}{di}$ стремится к нулю, а индуктивность L_k стремится к $L=L_y$.

Последний вывод еще недостаточно ясен, так как произведение $i \frac{dL}{di}$ с приближением i к ∞ стремится к $(\infty \cdot 0)$. Надо еще раскрыть эту неопределенность. Обращаясь для этого к кривой Φ (фиг. 27, а), замечаем, что кривая с приближением i к ∞ асимптотически стремится к прямой fg . Перенесем эту кривую на фиг. 29. Пусть точка a соответствует такому значению тока i , при котором практически разницей ординат Φ и ее асимптоты fg можно пренебречь. Индуктивность L для точки a численно будет определяться тангенсом угла α :

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{aa_1}{Oa_1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

индуктивность же L_k — тангенсом угла β :

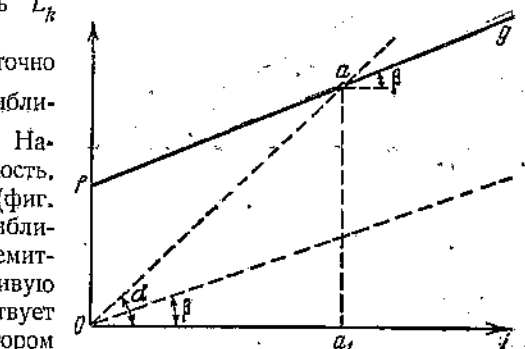
$$L_k = \frac{d\Phi}{di} = \operatorname{tg} \beta.$$

Очевидно, что $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ и $L > L_k$. Но чем больше значение тока i , тем ближе угол α к углу β , и с приближением i к ∞ угол α стремится к β , следовательно, с приближением i к ∞ индуктивность L_k стремится к $L=L_y$, а произведение $i \frac{dL}{di}$ — к нулю.

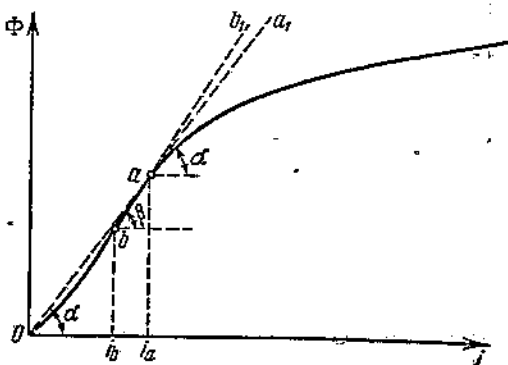
Таким образом кривые L и L_k имеют три общих точки, соответствующих значениям тока: $i=0$, $i=i_m$ и $i=\infty$.

Для $i=i_m$ индуктивность $L=L_{\max}=L_k$. Будет ли в этом случае $L_k=|L_k|_{\max}$, т. е. проходит ли кривая L_k при значении тока $i=i_m$ через максимум?

Обращаемся к кривой, выражающей зависимость Φ от i (фиг. 30). Для определения значения Φ , при котором L проходит через максимум, надо провести из начала координат касательную к кривой Φ . Значение Φ , при котором L_k проходит через максимум, определит касательная, которую надо провести в точке перегиба кривой Φ . Обозначим точку касания первой касательной через a и точку перегиба Φ — через b . Численное значение $L_{\max}$ определяется тангенсом угла наклона касательной Oaa_1 к



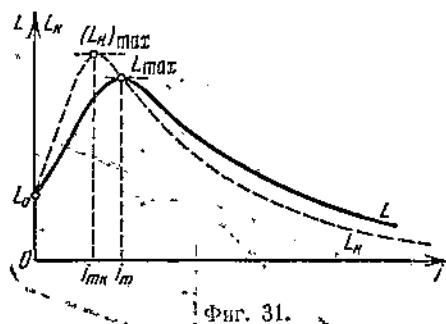
Фиг. 29.



Фиг. 30.

оси абсцисс, т. е. $\operatorname{tg} \alpha$, численное значение $|L_k|_{\max}$ определяется тангенсом угла β . Максимум L соответствует значению тока i_a , максимум L_k — значению тока i_b . Очевидно, что $\alpha < \beta$, $L_{\max} < |L_k|_{\max}$, $i_a = i_m > i_b$.

Таким образом, кривая L_k проходит через максимум при токе $i_b = i_{km}$, меньшем того значения тока $i_a = i_m$, при котором кривая L проходит через максимум; максимальное значение L меньше максимального значения L_k . Из кривой Φ (фиг. 30) видно также, что значение индуктивности L_k в точке a определяется



Фиг. 31.

Принимая во внимание сказанное выше о $L_{\max}$ и $|L_k|_{\max}$, располагаем кривые L и L_k так, как показано на фиг. 31.

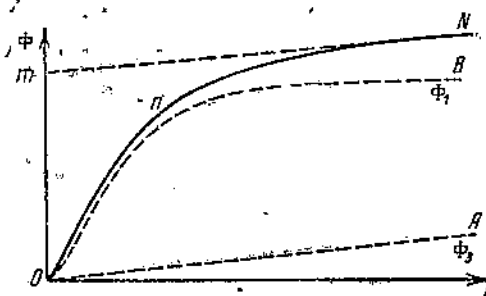
5. Аналогия между характеристиками магнитных и электрических цепей. Имея математическое выражение зависимости $\Phi = \frac{Li}{w} = \varphi(i)$ или $L = f_1(i)$, дальнейший анализ следует вести, исходя из уравнения Гельмгольца вида:

$$I = i + \frac{1}{R} \cdot \frac{dLi}{dt}.$$

Если же известна математическая зависимость $L_k = f_2(i)$, то в основу дальнейшего анализа положим уравнение Гельмгольца вида:

$$I = i + \frac{L_k}{R} \cdot \frac{di}{dt}.$$

К сожалению, ни одна из функций $\varphi(i)$, $f_1(i)$ и $f_2(i)$ в математическом их изображении нам не известна. Функции эти, как мы видели, можно получить только экспериментально. Однако, исходя из экспериментально полученных кривых Φ , L и L_k , возможно подобрать и соответствующие формулы $\Phi = \varphi(i)$, $L = f_1(i)$ и $L_k = f_2(i)$, причем формулы эти будут лишь формально выражать искомые зависимости. При достаточно точном выражении этими формулами экс-



Фиг. 32.

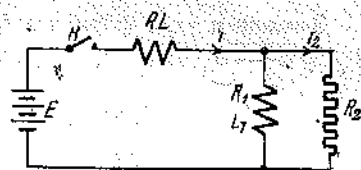
периментально полученных кривых, даже подобный формальный подход к математической обработке эксперимента может дать большие практические результаты, если только полученные формулы не приведут к сложным математическим выкладкам, затрудняющим их практическое использование.

Переходя к подбору указанных формул, не будем выдумывать их, подгоняя под кривые, полученные опытным путем. Попробуем воспользоваться для этого готовыми формулами из общей теории электротехники, хотя и выражающими совершенно иные процессы, но по характеру близкими к исследуемым кривым.

При каких бы условиях ни снимать кривую $\Phi = \varphi(i)$ для тороидов с сердечником из любого ферромагнитного вещества, всегда получается характерная кривая, приведенная на фиг. 32. Кривую эту можно рассматривать как резуль-

тирующую прямой OA (процесс Φ_3) и кривой OB (процесс Φ_1). Кривая же OB нам хорошо известна из общей электротехники.

По этому закону меняется во времени ток в обмотке дросселя (R_1, L_1) цепи (фиг. 33) при ее замыкании: ¹



Фиг. 33.

$$i_1 = I_1 \left[1 + \frac{2n}{\sqrt{m^2 - 4n}} \left(\frac{e^{-\frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2} t}}{m + \sqrt{m^2 - 4n}} - \frac{e^{-\frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2} t}}{m - \sqrt{m^2 - 4n}} \right) \right],$$

где

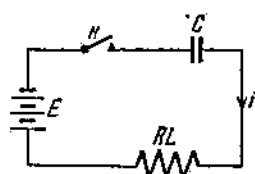
$$I_1 = \frac{ER_2}{R_2(R + R_1) + RR_1},$$

$$m = \frac{R_2(L + L_1) + R_1L + RL_1}{LL_1},$$

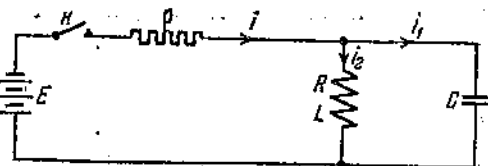
$$n = \frac{R_2(R + R_1) + RR_1}{LL_1}.$$

Введем обозначения $\frac{m}{2} = b$ и $n = \omega_0^2$ и преобразуем формулу:

$$i_1 = I_1 \left[1 - e^{-bt} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t + \operatorname{ch} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t \right) \right]$$



Фиг. 34.



Фиг. 35.

По тому же закону меняется во времени количество электричества в цепи фиг. 34, причем параметры последней имеют такие значения, при которых в цепи возможен только аperiодический процесс: ²

$$q = Q \left[1 - \frac{\omega_0^2 e^{-bt}}{2\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \left(\frac{e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t}}{b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}} - \frac{e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t}}{b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \right) \right]$$

или

$$q = Q \left[1 - e^{-bt} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t + \operatorname{ch} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t \right) \right],$$

где

$$Q = EC, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad b = \frac{R}{2L}.$$

Этому же закону подчиняется нарастание во времени тока в дросселе (R, L), включенном в цепь фиг. 35 при ее замыкании (процесс аperiодический): ³

$$i_2 = I \left[1 - e^{-bt} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t + \operatorname{ch} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t \right) \right],$$

где

$$I = \frac{E}{R + \rho}, \quad b = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2\rho C}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R + \rho}{LC\rho}}.$$

¹ В. И. Коваленков. Основы теории связи, часть I, стр. 125.

² Там же, стр. 177.

³ Там же, стр. 244.

Заменяя в этих формулах i_1 , q и i_2 через Φ_1 ; t через ωt ; I_1 , Q и I через Φ_y ; $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ через a , получим:

$$\Phi_1 = \left(\frac{Li}{w}\right)_1 = \Phi_y \left[1 - e^{-b\omega t} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega t + \operatorname{ch} a\omega t \right) \right].$$

Процесс $\Phi_3 = \left(\frac{Li}{w}\right)_3$, очевидно, выражается формулой:

$$\Phi_3 = \left(\frac{Li}{w}\right)_3 = \frac{L_y i}{w},$$

где $L_y = \text{const.}$

Общий процесс $\Phi = \frac{Li}{w}$, таким образом, может быть выражен следующей формулой

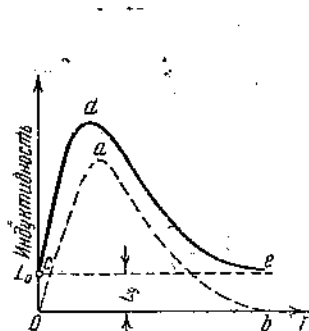
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_y \left[1 - e^{-b\omega t} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega t + \operatorname{ch} a\omega t \right) \right] + \frac{L_y i}{w}. \quad (11)$$

Исходя из этой формулы, удобно выразить и индуктивность L_k и L :

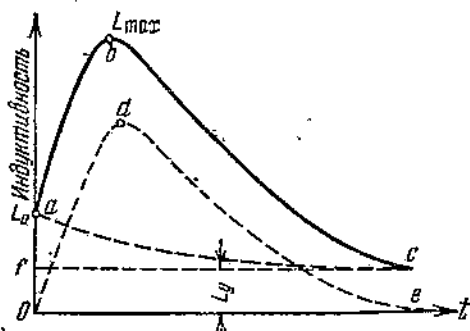
$$L_k = w \frac{d\Phi}{di} = L_{k1} + L_{k3} = \Phi_y w^2 \frac{b^2 - a^2}{a} e^{-b\omega t} \operatorname{sh} a\omega t + L_y \dots \quad (12)$$

$$L = \frac{\Phi w}{i} = \frac{\Phi_y w}{i} \left[1 - e^{-b\omega t} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega t + \operatorname{ch} a\omega t \right) \right] + L_y \dots \quad (13)$$

6. Вывод эквивалентной схемы магнитной цепи. Если сравнить полученные формулы (12) и (13) для L_k и L с экспериментально полученными кривыми, то между ними окажется существенное расхождение.



Фиг. 36.



Фиг. 37.

Полученные формулы показывают, что как индуктивность L_k , так и индуктивность L имеют по два слагаемых. Первое слагаемое (L_{k1} или L_1), зависящее от i , можно выразить кривой Oab (фиг. 36) и второе слагаемое, не зависящее от i , — прямой ce . Полный процесс выражается кривой cde (фиг. 36), которая расходуется с экспериментально полученной кривой (фиг. 37).

Действительная кривая abc (фиг. 37) разлагается на две кривые: Ode (совпадающую с кривой Oab , фиг. 36) и ac , или какой-то другой кривой, начинающейся в точке a и асимптотически приближающейся к прямой fc . Фиг. 37 совпадает с фиг. 36 только для одного частного случая, когда $L_0 = L_y$. В формулы (12) и (13)

необходимо внести поправку: вместо слагаемого $L_y = \text{const}$ следует ввести какую-то функцию, зависящую от i и выражающую переход индуктивности от точки a к точке c (фиг. 37); $L_4 = f_3(i)$. Функция эта согласно сделанной выше установке должна быть подобрана не произвольно, а исходя из известных уже в электротехнике формул и кривых.

Возьмем схему фиг. 38. Для нее имеется:¹

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2} [(\tau_2 - \Delta_1) e^{-\frac{t}{\Delta_1}} - (\tau_2 - \Delta_2) e^{-\frac{t}{\Delta_2}} + \Delta_1 - \Delta_2], \\ i_2 &= I_2 \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2} [(\tau_1 - \Delta_1) e^{-\frac{t}{\Delta_1}} - (\tau_1 - \Delta_2) e^{-\frac{t}{\Delta_2}} + \Delta_1 - \Delta_2], \\ i &= I \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2} [(\tau_3 - \Delta_1) e^{-\frac{t}{\Delta_1}} - (\tau_3 - \Delta_2) e^{-\frac{t}{\Delta_2}} + \Delta_1 - \Delta_2], \end{aligned}$$

где I , I_1 и I_2 — установившиеся значения токов в соответствующих ветвях схемы,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{L_1}{R_1}, \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}, \quad \tau_3 = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}, \\ \Delta_1 &= \frac{2}{m - \sqrt{m^2 - 4n}}, \quad \Delta_2 = \frac{2}{m + \sqrt{m^2 - 4n}}, \\ m &= \frac{L(R_1 + R_2) + R(L_1 + L_2) + R_1 L_2 + L_1 R_2}{L(L_1 + L_2) + L_1 L_2}, \\ n &= \frac{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{L(L_1 + L_2) + L_1 L_2}. \end{aligned}$$

Представим формулу для тока i в следующем виде:

$$i = I \left[1 + \frac{\tau_3}{\Delta_1 - \Delta_2} (e^{-\frac{t}{\Delta_1}} - e^{-\frac{t}{\Delta_2}}) + \frac{\Delta_2 e^{-\frac{t}{\Delta_2}} - \Delta_1 e^{-\frac{t}{\Delta_1}}}{\Delta_1 - \Delta_2} \right].$$

Обозначим

$$\frac{m}{2} = b \quad \text{и} \quad n = \omega_0^2,$$

тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta_1} &= -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}, \quad -\frac{1}{\Delta_2} = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}, \\ \Delta_1 - \Delta_2 &= 2 \frac{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{\omega_0^2}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} i &= I \cdot \left[1 + \frac{e^{-bt} \omega_0^2}{2 \sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \left(\frac{e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t}}{b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}} - \frac{e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t}}{b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_3 \omega_0^2 e^{-bt}}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t \right]. \end{aligned}$$

Обозначив еще

$$\sqrt{b^2 - \omega_0^2} = a, \quad \frac{\tau_3 \omega_0^2}{2} = c,$$

получим

$$i = I \left[1 - e^{-bt} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} at + \operatorname{ch} at \right) + ce^{-bt} \operatorname{sh} at \right], \quad (14)$$

$$\frac{di}{dt} = I e^{-bt} \left[\frac{b^2 - a^2}{a} \operatorname{sh} at + ac \left(\operatorname{ch} at - \frac{b}{a} \operatorname{sh} at \right) \right]. \quad (15)$$

Заменим i через Φ_n ; I_1 — через Φ_y , t — через ωt . Тогда, имея в виду, что

$$L_k = \omega \frac{d\Phi}{di} = \omega^2 \frac{d\Phi}{d\omega i},$$

¹ В. И. Коваленков. Основы теории связи, ч. I, стр. 134.

получим

$$\Phi_n = \Phi_y \left[1 - e^{-b\omega i} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i + \operatorname{ch} a\omega i \right) \right] + \Phi_y c e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i,$$

и так как $\Phi = \Phi_n + \Phi_s$, то

$$\Phi = \Phi_y \left[1 - e^{-b\omega i} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i + \operatorname{ch} a\omega i \right) \right] + \Phi_y c e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i + \frac{L_y i}{\omega}; \quad (16)$$

$$L_k = \Phi_y \omega^2 \frac{b^2 - a^2}{a} e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i + \Phi_y \omega^2 a c e^{-b\omega i} \left(\operatorname{ch} a\omega i - \frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i \right) + L_y. \quad (17)$$

Сравним формулы (16) и (17) с формулами (11) и (12). Формула (16) отличается от формулы (11) только одним добавочным членом

$$\Phi_y c e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i.$$

Формула (17) отличается от аналогичной ей формулы (12) также одним членом

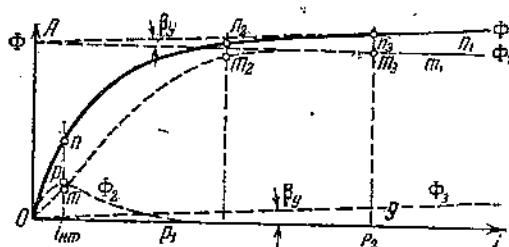
$$\Phi_y \omega^2 a c e^{-b\omega i} \left(\operatorname{ch} a\omega i - \frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i \right).$$

Обозначим

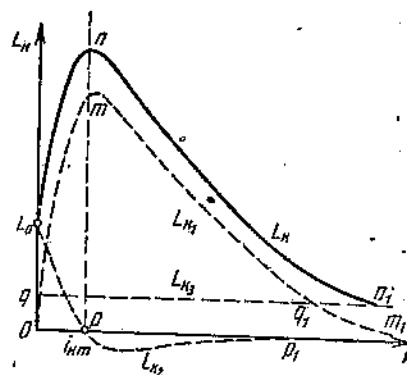
$$\Phi_2 = \Phi_y c e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i,$$

$$L_{k2} = \Phi_y \omega^2 a c e^{-b\omega i} \left(\operatorname{ch} a\omega i - \frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i \right).$$

С изменением тока i от 0 до ∞ функция Φ_2 меняется, как мы увидим ниже, по закону, показанному на фиг. 39 кривой Opp_1 , функция L_{k2} в то же время меняется по кривой L_0pp_1 (фиг. 40). Нанесем на те же фигуры остальные члены общих формул для Φ [формула (16)] и L_k [формула (17)].



Фиг. 39.



Фиг. 40.

Магнитный поток

$$\Phi_1 = \Phi_y \left[1 - e^{-b\omega i} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i + \operatorname{ch} a\omega i \right) \right]$$

изобразится кривой Opp_1 (фиг. 39), магнитный поток $\Phi_s = \frac{L_y i}{\omega}$ — прямой Og (фиг. 39) и общий магнитный поток $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_s$ — сплошной кривой Onp_1 (фиг. 39).

Индуктивность

$$L_{k1} = \Phi_y \omega^2 \frac{b^2 - a^2}{a} e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i$$

изображается кривой Onm_1 (фиг. 40), индуктивность $L_{k3} = L_y$ — прямой qq_1 (фиг. 40) и общая индуктивность $L_k = L_{k1} + L_{k2} + L_{k3}$ — кривой L_0nn_1 (фиг. 40).

Добавочный член Φ_2 в формуле (16) делает более или менее крутой кривую намагничивания Φ (фиг. 39), добавочный член L_{k2} поднимает начальную индук-

тивность L_0 над конечной L_y (фиг. 40). Теперь характер кривых Φ и L_k (фиг. 39 и 40) ничем не отличается от характера подобных кривых, получаемых экспериментальным путем. К подобным же по характеру кривым приводит переход от схемы фиг. 38 к более общей схеме фиг. 41. Повидимому, эта схема и является эквивалентной схемой магнитной цепи. В первом приближении можно пользоваться схемой фиг. 38 и формулами (16) и (17). Остановимся на них подробнее.

7. Анализ формул для магнитного потока и индуктивности. Как показывают формулы (16) и (17), индуктивность

$$L_{k1} = \Phi_y \omega^2 \frac{b^2 - a^2}{a} e^{-b\omega i} \operatorname{sh} a\omega i$$

при каком-то токе L_{km} проходит через максимум и при том же токе магнитный поток

$$\Phi_1 = \Phi_y \left[1 - e^{-b\omega i} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i + \operatorname{ch} a\omega i \right) \right]$$

имеет точку перегиба. Для того, чтобы найти максимум индуктивности L_{k1} , приравняем нулю ее первую производную по току i :

$$\frac{dL_{k1}}{di} = \Phi_y \omega^2 \frac{b^2 - a^2}{a} e^{-b\omega i} (-b \operatorname{sh} a\omega i + a \operatorname{ch} a\omega i) = 0,$$

откуда

$$b = a \operatorname{cth} a\omega i_{km} \quad (18)$$

Очевидно, что при полученном соотношении магнитный поток

$$\Phi_2 = \Phi_y e^{-b\omega i} \operatorname{ch} a\omega i$$

также проходит через максимум, а индуктивность

$$L_2 = \Phi_y \omega^2 a c e^{-b\omega i} \left(\operatorname{ch} a\omega i - \frac{b}{a} \operatorname{sh} a\omega i \right)$$

равна нулю.

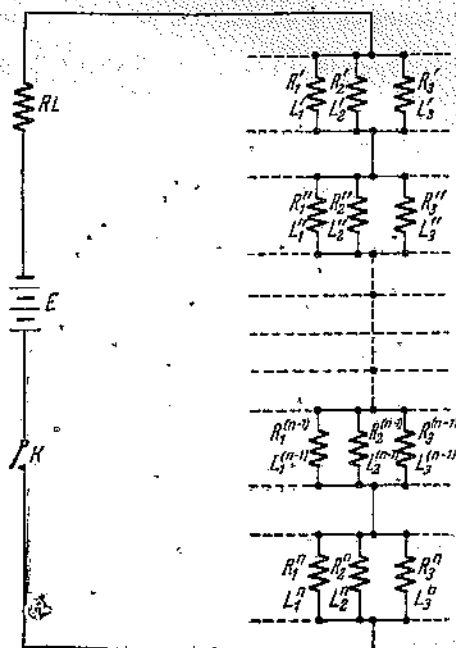
Полная индуктивность L_k есть сумма трех индуктивностей L_{k1} , L_{k2} , L_y . Ее максимум соответствует значению ωi , отличному от полученного выше ωi_{km} . Однако этой разницей в первом приближении можно пренебречь.

Вводим следующие обозначения:

$$\frac{\omega i}{\omega i_{km}} = k, \quad a\omega i_{km} = a_1, \quad b\omega i_{km} = b_1.$$

Имея в виду, что при этих обозначениях

$$b_1 = a_1 \operatorname{cth} a_1, \\ \frac{b^2 - a^2}{a} = \frac{1}{\omega i_{km}} \cdot \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_1} = \frac{1}{\omega i_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 a_1},$$



Фиг. 41.

перепишем формулы для магнитных потоков и индуктивностей в следующем виде:

$$\Phi_1 = \Phi_y \left[1 - e^{-b_1 k} \left(\frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k \right) \right], \quad (19)$$

$$\Phi_3 = \frac{L_y i_{km}}{w} k, \quad (20)$$

$$\Phi_2 = \Phi_y c e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k, \quad (21)$$

$$L_1 = \frac{\Phi_y w}{i_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 a_1} e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k, \quad (22)$$

$$L_3 = L_y, \quad (23)$$

$$L_2 = \frac{\Phi_y w}{i_{km}} a_1 c e^{-b_1 k} \left(\operatorname{ch} a_1 k - \frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k \right), \quad (24)$$

$$\Phi = \Phi_y \left[1 - e^{-b_1 k} \left(\frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k \right) \right] + \Phi_y c e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k + \frac{L_y i_{km}}{w} k, \quad (25)$$

$$L_k = \frac{\Phi_y w}{i_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 a_1} e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k + \frac{\Phi_y w}{i_{km}} a_1 c e^{-b_1 k} \left(\operatorname{ch} a_1 k - \frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k \right) + L_y. \quad (26)$$

Имея в виду, что при $k=0$ индуктивность $L_k = L_0$, получим:

$$L_0 - L_y = \frac{\Phi_y w}{i_{km}} a_1 c,$$

откуда

$$\Phi_y c = \frac{(L_0 - L_y) i_{km}}{w} \cdot \frac{1}{a_1}.$$

Проведя подстановку в формулы (21) и (24), находим:

$$\Phi_2 = \frac{(L_0 - L_y) i_{km}}{w} \cdot \frac{1}{a_1} e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k, \quad (21')$$

$$L_2 = (L_0 - L_y) e^{-b_1 k} \left(\operatorname{ch} a_1 k - \frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k \right). \quad (24')$$

Принимая во внимание соотношение (18), перепишем формулы (25) и (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_y \left[1 - e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} (\operatorname{cth} a_1 \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k) \right] + \\ & + \frac{(L_0 - L_y) i_{km}}{w} \cdot \frac{1}{a_1} e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \frac{L_y i_{km}}{w} k, \end{aligned} \quad (25')$$

$$\begin{aligned} L_k = & \frac{\Phi_y w}{i_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 a_1} e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \\ & + (L_0 - L_y) e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} (\operatorname{ch} a_1 k - \operatorname{cth} a_1 \operatorname{sh} a_1 k) + L_y. \end{aligned} \quad (26')$$

Эти формулы иллюстрируют весьма большое значение параметра a_1 при анализе электромагнитных устанавливающихся процессов.

8. Формулы для магнитной индукции B и магнитной проницаемости μ . Обозначим $B = 4\pi j + h = B_m + h$, $B_\infty = B_y$ и заменим i через B_m , I через B_y , t через h , $\frac{dB}{dh} = \mu_k$; тогда формулы (14) и (15) примут следующий вид:

$$B_m = B_y \left[1 - e^{-bh} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} ah + \operatorname{ch} ah \right) + ce^{-bh} \operatorname{sh} ah \right],$$

и так как

$$B = B_m + h,$$

то

$$B = B_y \left[1 - e^{-bh} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} ah + \operatorname{ch} ah \right) + ce^{-bh} \operatorname{sh} ah \right] + h, \quad (27)$$

$$\mu_k = B_y e^{-bh} \left[\frac{b^2 - a^2}{a} \operatorname{sh} ah + ac \left(\operatorname{ch} ah - \frac{b}{a} \operatorname{sh} ah \right) \right] + 1. \quad (28)$$

Обозначим

$$B = B_1 + B_2 + h, \quad \mu_k = \mu_{k1} + \mu_{k2} + 1,$$

где

$$B_1 = B_y \left[1 - e^{-bh} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} ah + \operatorname{ch} ah \right) \right],$$

$$B_2 = B_y c e^{-bh} \operatorname{sh} ah,$$

$$\mu_{k1} = B_y \frac{b^2 - a^2}{a} e^{-bh} \operatorname{sh} ah,$$

$$\mu_{k2} = B_y a c e^{-bh} \left(\operatorname{ch} ah - \frac{b}{a} \operatorname{sh} ah \right).$$

Максимум μ_k будет при соотношении

$$b = a \operatorname{cth} ah_{km}.$$

Обозначим

$$\frac{h}{h_{km}} = k, \quad ah_{km} = a_1, \quad bh_{km} = b_1,$$

тогда

$$B = B_y \left[1 - e^{-b_1 k} \left(\frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k \right) \right] + B_y c e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k + h_{km} k, \quad (29)$$

$$\mu_k = B_y e^{-b_1 k} \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_1 h_{km}} \operatorname{sh} a_1 k + B_y \frac{a_1}{h_{km}} c e^{-b_1 k} \left(\operatorname{ch} a_1 k - \frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k \right) + 1. \quad (30)$$

Для $k = 0$ имеем

$$\mu_{k0} = \mu_0 = B_y \frac{a_1}{h_1} c + 1,$$

откуда

$$B_y \frac{a_1}{h_{km}} c = \mu_0 - 1; \quad B_y c = \frac{(\mu_0 - 1) h_{km}}{a_1}.$$

Подставляя в формулы (32) и (33) и имея в виду, что

$$b_1 = a_1 \operatorname{cth} a_1,$$

получим

$$B = B_y \left[1 - e^{-b_1 k} \left(\frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k \right) \right] + (\mu_0 - 1) h_{km} \frac{1}{a_1} e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k + h_{km} k, \quad (29')$$

$$\mu_k = \frac{B_y}{h_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 a_1} e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k + (\mu_0 - 1) e^{-b_1 k} \left(\operatorname{ch} a_1 k - \frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k \right) + 1. \quad (30')$$

Подставив $b_1 = a_1 \operatorname{cth} a_1$, получим:

$$B = B_y \left[1 - e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} (\operatorname{ch} a_1 \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k) \right] + (\mu_0 - 1) h_{km} \frac{e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1}}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k + h_{km} k, \quad (29'')$$

$$\mu_k = \frac{B_y}{h_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh}^2 a_1} e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} \operatorname{sh} a_1 k + (\mu_0 - 1) e^{-ka_1 \operatorname{cth} a_1} (\operatorname{ch} a_1 \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k) + 1. \quad (30''')$$

9. Экспериментальное определение параметров магнитной цепи. Прежде всего находим точку перегиба кривой намагничивания. Абсцисса точки перегиба будет wi_{km} (или h_{km}). Точке перегиба будет соответствовать максимум индуктивности L_k (или μ_k). Проведя к кривой намагничивания в точке ее перегиба кас-

тельную, по наклону последней определим максимум L_k (или μ_k). Абсциссе ωi_{km} (или h_{km}) соответствует $k=1$. Подставим это значение k в формулы (26') и (30'):

$$(L_k)_{\max} = \frac{\Phi_y \omega}{i_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh} a_1} e^{-a_1 \operatorname{cth} a_1} + L_y,$$

$$(\mu_k)_{\max} = \frac{B_y}{h_{km}} \cdot \frac{a_1}{\operatorname{sh} a_1} e^{-a_1 \operatorname{cth} a_1} + 1,$$

откуда

$$\frac{(L_k)_{\max} - L_y}{\Phi_y \omega} i_{km} = \frac{a_1}{\operatorname{sh} a_1} e^{-a_1 \operatorname{cth} a_1} = \mathcal{K},$$

или

$$\frac{(\mu_k)_{\max} - 1}{B_y} h_{km} = \frac{a_1}{\operatorname{sh} a_1} e^{-a_1 \operatorname{cth} a_1} = \mathcal{K}.$$

Если $(L_k)_{\max}$, L_y , Φ_y и ω или $(\mu_k)_{\max}$ и B_y известны, то $\mathcal{K}$ определяется из соотношений:

$$\mathcal{K} = \frac{(L_k)_{\max} - L_y}{\Phi_y \omega} i_{km} \quad \text{или} \quad \mathcal{K} = \frac{(\mu_k)_{\max} - 1}{B_y} h_{km}. \quad (31)$$

Получив значение $\mathcal{K}$, параметр a_1 находим из уравнения:

$$\frac{a_1}{\operatorname{sh} a_1} e^{-a_1 \operatorname{cth} a_1} = \mathcal{K}. \quad (32)$$

В виду большого значения функции $\mathcal{K}$, приведем табл. 3 зависимости ее от параметра a_1 , одновременно вычислим также и значения b_1 в зависимости от a_1 .

Таблица 3

a_1	b_1	$\mathcal{K}$	a_1	b_1	$\mathcal{K}$
0	1	0.3679	0.8	1.205	0.2700
0.05	1	0.3679	0.85	1.230	0.2599
0.1	1.003	0.3661	0.9	1.256	0.2496
0.15	1.007	0.3638	0.95	1.284	0.2391
0.2	1.014	0.3608	1	1.313	0.2289
0.25	1.021	0.3565	1.1	1.374	0.2085
0.3	1.030	0.3517	1.2	1.439	0.1886
0.35	1.041	0.3452	1.3	1.508	0.1695
0.4	1.052	0.3400	1.4	1.581	0.1481
0.45	1.067	0.3327	1.5	1.657	0.1344
0.5	1.082	0.3252	1.6	1.735	0.1188
0.55	1.099	0.3169	1.7	1.817	0.1044
0.6	1.117	0.3084	1.8	1.901	0.0914
0.65	1.137	0.2993	1.9	1.987	0.0797
0.7	1.158	0.2898	2	2.075	0.0693
0.75	1.181	0.2800			

При определении значения $\mathcal{K}$ необходимо знать величины Φ_y , $(L_k)_{\max}$, L_y , ω и i_{km} или B_y , $(\mu_k)_{\max}$ и h_{km} .

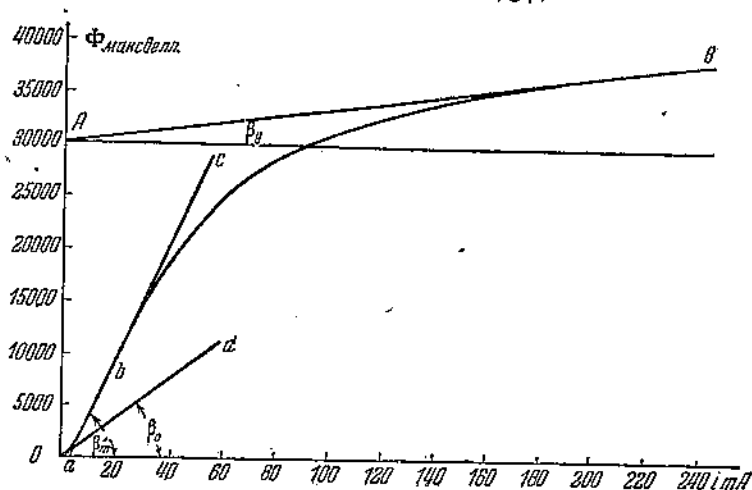
Для определения Φ_y проводим асимптоту $An_2n_3n_1$ к кривой намагничивания (фиг. 39) и из начала координат прямую Og , параллельную асимптоте $An_2n_3n_1$. Вспомним (фиг. 39), что полный магнитный поток Φ является суммой трех потоков. Φ_1 — выражаемого кривой Opp_1 , Φ_2 — выражаемого прямой Og , и Φ_3 , представленного на чертеже кривой Opp_1 .

Кривая Φ_2 , как показывает фиг. 39, асимптотически стремится к оси абсцисс. Начиная с какого-то значения тока i , равного Op_1 , влияние кривой магнитного потока Φ_2 на результирующую кривую Opp_1 практически равно нулю. Начиная с точки n_2 , кривая потока Φ практически является результирующей только двух потоков $\Phi_1 + \Phi_3$. Для точки n_3 , где практически кривая Φ сливается со своей асимптотой, можно считать, что $p_2m_3 = \Phi_y = \Phi - \Phi_2$ и что кривая Opp_1 , начиная от точки m_3 , становится параллельной оси абсцисс, т. е. приводит к состоянию магнитного насыщения вещества (в действительности магнитное насыщение при конечных значениях магнитной напряженности H может быть достиг-

нута только при температуре абсолютного нуля; при всякой другой температуре кривая $Отт_1$ продолжает подниматься при самых сильных полях; практически этим подъемом можно пренебречь). Таким образом, значение магнитного потока Φ_y определяется ординатой точкой A , являющейся точкой пересечения асимптоты $Аи_1$ с осью ординат.

Определение B_y проще. Берем значение B , соответствующее настолько большой магнитной силе H , при которой влиянием B_2 на B можно пренебречь. Тогда $B = B_1 + H$, причем можно считать, что дальнейшая часть кривой B_1 совпадает с прямой, параллельной оси абсцисс, т. е. дает состояние магнитного насыщения вещества. При таком предположении $B_y = B - H$.

Значения индуктивности $(L_k) = L_{km}$ и магнитной проницаемости $(\mu_k)_{\max} = \mu_{km}$, как мы уже видели, определяются тангенсом угла наклона касательной, проведенной в точке перегиба кривой намагничивания ($\tan \beta$).



Фиг. 42.

Наконец, индуктивность L_y находится по тангенсу угла наклона асимптоты $Аи_1$ (фиг. 39).

Попробуем применить приведенный выше анализ к исследованию экспериментально полученных кривых намагничивания.

Таблица 4

i , мм	i , мА	s , мм ²	Φ , максвелл	i , мм	i , мА	s , мм ²	Φ , максвелл
3	4.37	508	1340	64	93.2	11543	30480
7	10.2	1488	3923	71	103.4	11898	31420
10	14.6	2433	6425	77	112.2	12188	32180
13	18.9	3348	8841	82	119.4	12423	32810
16	23.3	4233	11170	87	126.7	12608	33300
19	27.7	5088	13440	91	132.5	12748	33660
22	32.0	5913	15620	94	136.6	12853	33940
25	36.4	6708	17710	96	139.8	12933	34150
29	42.2	7468	19720	98	142.7	12993	34310
33	48.1	8188	21620	100	145.6	13033	34370
37	53.9	8868	23420	101	147.1	13058	34480
41	59.7	9508	25110	102	148.5	13076	34530
46	67.0	10103	26620	103	150.0	13081	34540
52	75.7	10643	28100				
58	84.5	11123	29370				

На фиг. 42 приведена кривая намагничивания тороида (см. табл. 4). Проводим асимптоту AB к кривой намагничивания (фиг. 42) и две касательных: в точке перегиба abc и в начале кривой od . Пересечение асимптоты с осью ординат

(точка A) определяет магнитный поток $\Phi_y = 30\,000$ максвелл. Углы β_0, β_m и β_y дают возможность определить индуктивность L_0, L_{km} и L_y , а именно: $L_0 = 4.5$ генри, $L_{km} = 14$ генри и $L_y = 0.85$ генри.

Замечаем, что точка перегиба кривой соответствует току $i_{km} = 16$ мА и вычисляем параметр λ по формуле (31):

$$\lambda = \frac{L_{km} - L_y}{\Phi_y \omega} i_{km} = \frac{(14 - 0.85) \cdot 10^9}{30\,000 \cdot 2\,500} \cdot 0.0016 = 0.2805.$$

Из табл. 3 находим значения a_1 и b_1 , соответствующие полученной величине λ , т. е. $a_1 = 0.75$ и $b_1 = 1.181$.

Определяем магнитные потоки:

$$\frac{(L_0 - L_y) i_{km}}{\omega} = \frac{(4.5 - 0.85) 10^9 \cdot 0.0016}{2500} = 2528 \text{ максвелл.}$$

$$\frac{L_y i_{km}}{\omega} = \frac{0.85 \cdot 10^9 \cdot 0.0016}{2500} = 544 \text{ максвелл.}$$

Теперь формулу (25) можно переписать следующим образом:

$$\Phi = 30000A + 2528B + 544,$$

где

$$A = 1 - e^{-b_1 k} \left(\frac{b_1}{a_1} \operatorname{sh} a_1 k + \operatorname{ch} a_1 k \right),$$

$$B = \frac{1}{a_1} e^{-b_1 k} \operatorname{sh} a_1 k.$$

Обозначая

$$30000A = \Phi_1, \quad 2528B = \Phi_2 \text{ и } \Phi_3 = 544k,$$

подсчитаем табл. 5.

Таблица 5

κ	Φ_1 , макс- велл	Φ_2 , макс- велл	Φ_3 , макс- велл	Φ , макс- велл	i , мА	Φ ном.	% расхо- ждения
0.5	2148	717	272	3137	8	3030	3.531
1	6156	851	544	7551	16	7220	4.584
1.5	10240	790	816	11846	24	11650	1.683
2	13870	676	1088	15634	32	15550	0.540
2.5	16920	560	1360	18840	40	18950	0.586
3	19530	457	1632	21619	48	21800	0.830
3.5	21460	371	1904	23735	56	24050	1.312
4	23110	300	2176	25586	64	26050	1.781
4.5	24150	242	2448	26840	72	27480	2.329
5	25530	195	2720	28445	80	28700	0.889
5.5	26390	157	2992	29539	88	29850	1.042
6	27090	127	3264	30481	96	30620	0.454
6.5	27430	112	3536	31078	104	31480	1.277
7	28110	83	3808	32001	112	32200	0.618
7.5	28480	66	4080	32626	120	32850	0.682
8	2770	54	4352	33176	128	33420	0.730
8.5	2010	43	4624	33677	136	33870	0.570
9	29200	35	4896	34131	144	34400	0.782
9.5	29360	28	5168	34556	152	34820	0.758
10	29480	23	5440	34943	160	35200	0.730
10.5	29580	18	5712	35300	168	35550	0.675
11	29660	15	5984	35659	176	35800	0.394
11.5	29730	12	6256	35998	184	36110	0.310
12	29780	10	6528	36318	192	36450	0.362
12.5	29820	8	6800	36628	200	36720	0.251
13	29860	6	7072	36938	208	37000	0.168
13.5	29890	5	7344	37239	216	37240	0.000
14	29920	4	7616	37540	224	37540	0.000
14.5	29930	3	7888	37821	232	37820	0.000
15	29940	2	8160	38102	240	38100	0.000

В табл. 5, кроме указанных выше величин k , Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 и Φ , приведены еще значения токов i (в мА), соответствующие данным значениям k , а также величины магнитных потоков ($\Phi_{изм}$), взятые из экспериментально полученного графика фиг. 42, и, наконец, процент расхождения между вычисленными значениями магнитных потоков Φ и экспериментально полученными ($\Phi_{изм}$). Как видно из таблицы, процент расхождения не превосходит 4,6, т. е. практически вычисленная и измеренная кривые для рассматриваемого случая совпадают. Конечно, не для каждой кривой намагничивания можно получить подобное совпадение. В зависимости от качества магнитной цепи кривые теоретическая и экспериментальная могут расходиться значительно, чем в приведенном примере. Значительное расхождение будет показывать, что ограничиться только одним звеном эквивалентной схемы (фиг. 38) нельзя, придется усложнять схему по пути, указанному схемой фиг. 41.

10. Вывод точных формул для определения постоянных параметров магнитной цепи. В предыдущих параграфах мы пришли к следующей зависимости индукции от напряженности магнитного поля H :

$$B = B_y \left[1 - e^{-bH} \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} aH + \operatorname{ch} aH \right) + ce^{-bH} \operatorname{sh} aH \right] + H.$$

Объединяя члены, содержащие $\operatorname{sh} aH$, получим:

$$B = B_y [1 - e^{-bH} (m \operatorname{sh} aH + \operatorname{ch} aH)] + H,$$

где

$$m = \frac{b}{a} - c.$$

Обозначим:

$$m = \operatorname{cth} \sigma,$$

тогда

$$B = B_y \left[1 - \frac{e^{-bH}}{\operatorname{sh} \sigma} (\operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} aH + \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} aH) \right] + H,$$

откуда

$$B = B_y \left[1 - \frac{e^{-bH}}{\operatorname{sh} \sigma} \operatorname{sh} (aH + \sigma) \right] + H.$$

Определив из экспериментально полученной кривой намагничивания численные значения начальной магнитной проницаемости μ_0 , максимальной магнитной проницаемости $\mu_{\max}$, напряженности магнитного поля H_m , соответствующей $\mu_{\max}$, и индукции насыщения B_y и довольствуясь эквивалентной схемой фиг. 38, нетрудно найти точные численные значения постоянных параметров a , b и σ , входящих в приведенное выражение для B . Для этого выведем соответствующие расчетные формулы для указанных параметров a , b и σ .

Взяв первую производную B по H , находим формулу для магнитной проницаемости μ_h :

$$\mu_h = \frac{dB}{dH} = \frac{B_y e^{-bH}}{\operatorname{sh} \sigma} [b \operatorname{sh} (aH + \sigma) - a \operatorname{ch} (aH + \sigma)] + 1.$$

Для $H=0$ имеем:

$$\mu_0 = B_y (b - a \operatorname{cth} \sigma) + 1.$$

Обозначая

$$\frac{B_y}{\mu_0} = H_s$$

и пренебрегая единицей, находим:

$$\operatorname{th} \sigma = \frac{aH_s}{bH_s - 1}.$$

Возьмем вторую производную B по H :

$$\frac{d^2 B}{dH^2} = \frac{B_y e^{-bH}}{\operatorname{sh} \sigma} [2ab \operatorname{ch} (aH + \sigma) - (a^2 + b^2) \operatorname{sh} (aH + \sigma)].$$

Точка перегиба кривой B и максимум кривой μ_k соответствуют тому значению H_m , при котором

$$\frac{d^2 B}{dH^2} = 0.$$

Очевидно, это будет при

$$\operatorname{th}(aH + \sigma) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Теперь нетрудно определить и $\mu_{\max}$. Действительно,

$$\mu_{\max} = \left(\frac{dB}{dH} \right)_{H=H_m} = \frac{B_y e^{-bH_m}}{\operatorname{sh} \sigma} [b \operatorname{sh}(aH_m + \sigma) - a \operatorname{ch}(aH_m + \sigma)] + 1.$$

Исходя же из формулы для $\operatorname{th}(aH_m + \sigma)$, имеем:

$$\operatorname{sh}(aH_m + \sigma) = \frac{2ab}{b^2 - a^2},$$

$$\operatorname{ch}(aH_m + \sigma) = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

Произведя соответствующую подстановку, имеем:

$$\mu_{\max} = \frac{aB_y e^{-bH_m}}{\operatorname{sh} \sigma}.$$

Но, как мы видели выше,

$$\operatorname{th} \sigma = \frac{aH_s}{bH_s - 1}, \quad (a)$$

значит

$$\operatorname{sh} \sigma = \frac{aH_s}{\sqrt{(bH_s - 1)^2 - a^2 H_s^2}},$$

а потому

$$\mu_{\max} = \mu_0 e^{-bH_m} \sqrt{(bH_s - 1)^2 - a^2 H_s^2},$$

откуда

$$a^2 = \left(b - \frac{1}{H_s} \right)^2 - \left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_0} \cdot \frac{e^{bH_m}}{H_s} \right)^2. \quad (\beta)$$

Второе соотношение между параметрами a и b найдем, исходя из формулы

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} = \operatorname{th}(aH_m + \sigma) = \frac{\operatorname{th} aH_m + \operatorname{th} \sigma}{1 + \operatorname{th} aH_m \operatorname{th} \sigma},$$

которую нетрудно представить еще в следующем виде:

$$\frac{1 - \operatorname{th} \sigma}{1 + \operatorname{th} \sigma} \cdot \frac{1 - \operatorname{th} aH_m}{1 + \operatorname{th} aH_m} = \left(\frac{b - a}{b + a} \right)^2.$$

Имея же в виду, что

$$\operatorname{th} \sigma = \frac{aH_s}{bH_s - 1},$$

находим:

$$\left(\frac{b - a}{b + a} \right)^2 \frac{(b + a)H_s - 1}{(b - a)H_s - 1} = \frac{1 - \operatorname{th} aH_m}{1 + \operatorname{th} aH_m}. \quad (\gamma)$$

Соотношение (β) показывает, что параметр a будет действительным только при соблюдении неравенства:

$$bH_s - 1 > \delta e^{bH_m},$$

где

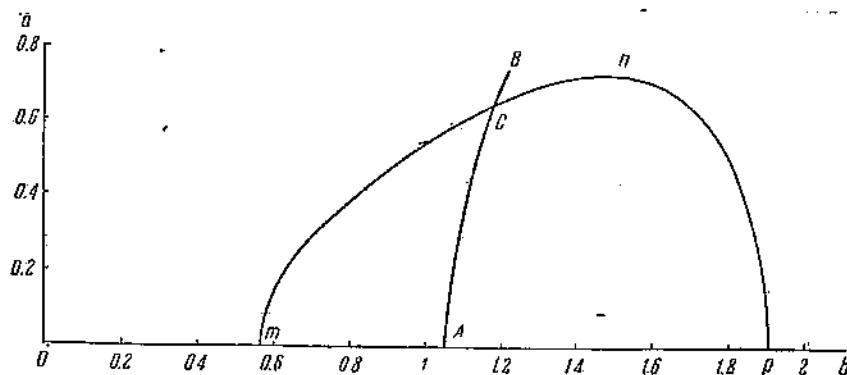
$$\delta = \frac{\mu_{\max}}{\mu_0}.$$

Возьмем численный пример. Пусть $\mu_{\max} = 6403$; $\mu_0 = 950$; $B_y = 21090$ гаусс; $H_m = 0.95$ эрстед; тогда $H_s = \frac{B_y}{\mu_0} = 22.2$, $\delta = 6.74$ и приведенное выше равенство приобретает вид:

$$22.2b - 1 > 6.74e^{0.95b}.$$

Путем непосредственных подсчетов нетрудно убедиться, что

$$0.566 < b < 1.91.$$



Фиг. 43.

При изменении параметра b в указанных пределах параметр a будет меняться так, как показано в табл. 6 и на графике фиг. 43 (кривая *npr*).

Таблица 6

b	0.565	0.57	0.6	0.75	1	1.2	1.3	1.5
a	0.008361	0.05831	0.1407	0.3416	0.5438	0.658	0.6964	0.7232
b	1.6	1.7	1.9	1.91				
a	0.7007	0.6395	0.1844	0.07746				

Переходим к соотношению (γ). При принятых нами численных значениях B_y , μ_0 , $\mu_{\max}$ и H_m единицей по сравнению с членом $(b-a)H_s$ можно пренебречь. Тогда равенство (γ) приобретает знакомый уже нам по предыдущему параграфу вид:

$$b = a \operatorname{cth} aH_m.$$

Задаваясь значениями параметра a , вычислим соответствующее значение параметра b , пользуясь табл. 3. Получим табл. 7 и кривую *AB* на фиг. 43.

Пересечение кривых *npr* и *AB* в точке *C* дает искомые значения параметров a и b : $a = 0.648$, $b = 1.18$.

Остается определить параметр σ , для чего пользуемся формулой:

$$\operatorname{th} \sigma = \frac{aH_s}{bH_s - 1}.$$

Подставляя численные значения a , b и H_s , получим:

$$\operatorname{th} \sigma = 0.5709 \text{ и } \sigma = 0.649.$$

Таблица 7

aH_m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
a	0.1052	0.2104	0.3156	0.4208	0.5260	0.6312	0.7364
bH_m	1.003	1.014	1.03	1.052	1.082	1.117	1.158
b	1.056	1.067	1.084	1.107	1.139	1.175	1.219

Приведенная выше формула

$$B = B_y \left[1 - \frac{e^{-bH}}{\operatorname{sh} \sigma} \operatorname{sh} (aH + \sigma) \right] + H$$

может быть заменена более простой, если разложить $\operatorname{sh} (aH + \sigma)$ и $\operatorname{sh} \sigma$ в бесконечные ряды:

$$\operatorname{sh} (aH + \sigma) = (aH + \sigma) + \frac{(aH + \sigma)^3}{3!} + \frac{(aH + \sigma)^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} \sigma = \sigma + \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{\sigma^5}{5!} + \dots$$

Довольствуясь только первым членом бесконечного ряда и пренебрегая в формуле для B последним членом (т. е. H), получим:

$$B \approx B_y [1 - (1 + a_1 H) e^{-bH}],$$

где $a_1 = \frac{a}{\sigma}$ (в дальнейшем отбросим значок у a_1).

Посмотрим, отражает ли эта формула характернейшие свойства кривой $B = f(H)$.

Кривая $B = f(H)$ начинается от нуля (при $H = 0$), имеет точку перегиба и стремится при бесконечном увеличении H к постоянной величине. С другой стороны, магнитная проницаемость $\mu_k = \frac{dB}{dH}$ начинается каким-то конечным значением μ_{k0} (при $H = 0$), проходит через максимум и при бесконечном увеличении H стремится к единице (последним членом формулы B , т. е. членом H , мы пренебрегаем; следовательно, при $H = \infty$ проницаемость μ_k по приведенной формуле должна стремиться к нулю).

Возьмем первую и вторую производные B по H :

$$\frac{dB}{dH} = \mu_k = B_y e^{-bH} (b - a + abH),$$

$$\frac{d^2B}{dH^2} = b B_y e^{-bH} (2a - b - abH).$$

Вторая производная $\frac{d^2B}{dH^2}$ равна нулю при значении H , равном:

$$H = \frac{2a - b}{ab}.$$

Так как при этом значении H третья производная $\frac{d^3B}{dH^3}$ отрицательна, то при $H = \frac{2a - b}{ab}$ магнитная проницаемость μ_k проходит через максимум, а кривая B имеет точку перегиба.

При $H = 0$ имеем:

$$B = 0, \quad \frac{dB}{dH} = \mu_k = (b - a) B_y;$$

при $H = \infty$:

$$B = B_y \quad \frac{dB}{dH} = \mu_k = 0.$$

Если $2a > b > a$, то формула

$$B = B_y [1 - (1 + aH)e^{-bH}] + H$$

отражает все основные свойства кривой $B = f(H)$.

Последняя формула в свою очередь может быть преобразована нижеследующим образом.

$$B = B_y \left(1 - \frac{1 + aH}{e^{bH}} \right) + H = B_y \left(1 - \frac{1 + aH}{1 + bH + \frac{b^2 H^2}{2} + \dots} \right) + H.$$

Довольствуясь только первыми тремя членами ряда, получим:

$$B = B_y \frac{H^2 + mH}{H^2 + nH + p} + H,$$

где

$$m = 2 \frac{b-a}{b^2}, \quad n = \frac{2}{b} \quad \text{и} \quad p = \frac{2}{b^2}.$$

Не трудно видеть, что и эта формула отражает все свойства кривой

$$B = f(H).$$

Таким образом, имеем следующие формулы, выражающие зависимость B от H :

$$B = B_y \left[1 - \frac{e^{-bH}}{\text{sh } \sigma} \text{sh}(aH + \sigma) \right] + H,$$

$$B = B_y [1 - (1 + aH)e^{-bH}] + H,$$

$$B = B_y \frac{H^2 + mH}{H^2 + nH + p} + H.$$

11. Основы теории магнитных цепей с параметрами, зависящими от величины магнитного потока.

1) Точное решение. Как мы уже видели в предыдущих главах, уравнения распределения магнитного потока Φ и магнитного напряжения U_m вдоль магнитной цепи, приведенной на фиг. 15, имеют следующий вид:

$$-\frac{dU_m}{dx} = R_m \Phi = F,$$

$$-\frac{d\Phi}{dx} = G_m U.$$

Имея же в виду, что $R\Phi = 2h$, приходим к уравнению:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 2G_m (h - F_1)$$

или

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{2G_m}{s} (h - F_1).$$

Обозначим

$$\frac{dB}{dx} = Z_1,$$

тогда

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{dZ}{dx}$$

и мы приходим к системе уравнений:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{2G_m}{s} (h - F_1),$$

$$\frac{dB}{dx} = Z,$$

которая приводит к уравнению:

$$\frac{dZ}{dB} = \frac{2G_m(h-F_1)}{sZ},$$

Разделяя переменные, получим:

$$Z^2 = \frac{4G_m}{s} \int (h - F_1) \frac{dB}{dh} dh.$$

И так как

$$B = B_y \left[1 - \frac{e^{-bh}}{\operatorname{sh} \sigma} (ah + \sigma) \right] + h,$$

то

$$\frac{dB}{dh} = \frac{bB_y e^{-bh}}{\operatorname{sh} \sigma} \left[\operatorname{sh} (ah + \sigma) - \frac{a}{b} \operatorname{ch} (ah + \sigma) \right].$$

Имея в виду, что $\frac{a}{b} < 1$, можем положить:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{th} \sigma_1.$$

В этом случае имеем:

$$\frac{dB}{dh} = \frac{bB_y e^{-bh}}{\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma_1} \operatorname{sh} (ah + \sigma - \sigma_1) + 1.$$

Пренебрегая единицей и производя подстановку, получим:

$$Z^2 = \frac{4G_m}{s} \cdot \frac{bB_y}{\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma_1} \int (h - F_1) e^{-bh} \operatorname{sh} (ah + \sigma - \sigma_1) dh + C_1.$$

И так как

$$\begin{aligned} & \int h e^{-bh} \operatorname{sh} (ah + \sigma - \sigma_1) dh = \\ &= \frac{e^{-bh}}{(a^2 - b^2)^2} \left[\frac{(a^2 - b^2) ah}{\operatorname{sh} \sigma_1} \operatorname{sh} (ah + \sigma) - \frac{a^2 + b^2}{\operatorname{ch} 2\sigma_1} \operatorname{sh} (ah + \sigma + \sigma_1) \right], \\ & \int e^{-bh} \operatorname{sh} (ah + \sigma - \sigma_1) dh = \frac{ae^{-bh}}{(a^2 - b^2) \operatorname{sh} \sigma_1} \operatorname{sh} (ah + \sigma), \end{aligned}$$

то мы приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} Z^2 = & \frac{8abG_m B_y e^{-bh}}{(a^2 - b^2) s \operatorname{sh} \sigma \operatorname{sh} 2\sigma_1} \left[(h - F_1) \operatorname{sh} (ah + \sigma) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \operatorname{th} \sigma_1 \operatorname{sh} (ah + \sigma + \sigma_1) \right] + C_1. \end{aligned}$$

Но

$$Z = \frac{dB}{dx} = \frac{dB}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Произведя соответствующую подстановку и обозначая:

$$2 \sqrt{\frac{aG_m \operatorname{sh} \sigma}{(a^2 - b^2) bsB_y \operatorname{sh} \sigma_1}} = A_1, \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \operatorname{th} \sigma_1 = A_2,$$

получим:

$$\frac{dh}{dx} = A_1 \frac{\sqrt{e^{bh} [A_2 \operatorname{sh} (ah + \sigma + \sigma_1) - (F_1 - h) \operatorname{sh} (ah + \sigma) + C_1]}}{\operatorname{sh} (ah + \sigma - \sigma_1)}.$$

Определим постоянную интегрирования C_1 . Полагая магнитное сопротивление Z_0 в начале линии равным нулю, имеем: при $x=0$, $h=0$ и $\frac{dh}{dx}=0$.

После подстановки находим:

$$C_1 = F \operatorname{sh} \sigma - A_2 \operatorname{sh} (\sigma + \sigma_1).$$

Разделяя переменные в приведенном выше уравнении, получим:

$$x = \frac{1}{A_1} \int \frac{\operatorname{sh}(ah + \sigma - \sigma_1) dh}{\sqrt{e^{bh} [A_2 \operatorname{sh}(ah + \sigma - \sigma_1) - (F_1 - h) \operatorname{sh}(ah + \sigma)] + C_1}} + C_2 = \\ = \frac{1}{A_1} \int \varphi(h) dh + C_2,$$

где

$$\varphi(h) = \frac{\operatorname{sh}(ah + \sigma - \sigma_1)}{\sqrt{e^{bh} [A_2 \operatorname{sh}(ah + \sigma - \sigma_1) - (F_1 - h) \operatorname{sh}(ah + \sigma)] + C_1}}.$$

Построив кривую $\varphi(h)$, нетрудно построить и кривую x , как функцию от h , графически интегрируя кривую $\varphi(h)$.

Определив же графически зависимость x от h , построим и распределение потока вдоль рассматриваемой магнитной цепи.

2) Решение с желаемой степенью точности. Магнитный поток Φ есть функция x , т. е. $\Phi = f(x)$, следовательно:

$$\frac{d\Phi}{dx} = -G_m U = f'(x), \\ \frac{d^2\Phi}{dx^2} = -G_m (2F_1 - R_m \Phi) = f''(x) = \varphi(\Phi).$$

Имея в виду, что $R_m \Phi = 2h$, последнее уравнение перепишем в следующем виде:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -2G_m (F_1 - h) = \varphi(\Phi).$$

Пусть $Z_0 = 0$, т. е. нейтральная линия проходит через начало цепи ($x = 0$). При $x = 0$ имеем:

$$\Phi_0 = f(x_0) = f(0), \\ \frac{d\Phi_0}{dx} = -G_m U_0 = f'(x_0), \\ \frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = -G_m (F_1 - h_0) = \varphi(\Phi_0).$$

Но при $x = 0$ и $Z_0 = 0$ начальное магнитное напряжение $U_{m0} = 0$, следовательно

$$\frac{d\Phi_0}{dx} = f'(x_0) = 0.$$

Так как $h_0 \neq 0$, то

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = -G_m (F_1 - h_0) = \varphi(\Phi_0) \neq 0.$$

Рассмотрим третью, четвертую и т. д. производные Φ по x :

$$\frac{d^3\Phi}{dx^3} = \varphi'(\Phi) \frac{d\Phi}{dx}, \\ \frac{d^4\Phi}{dx^4} = \varphi''(\Phi) \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \varphi'(\Phi) \varphi(\Phi), \\ \frac{d^5\Phi}{dx^5} = \varphi'''(\Phi) \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3 + 3\varphi''(\Phi) \varphi(\Phi) \frac{d\Phi}{dx} + \varphi'^2(\Phi) \frac{d\Phi}{dx}, \\ \frac{d^6\Phi}{dx^6} = \varphi^{IV}(\Phi) \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^4 + 6\varphi'''(\Phi) \varphi(\Phi) \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \\ + 3\varphi''(\Phi) \left[\varphi'(\Phi) \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \varphi^2(\Phi)\right] + \\ + \varphi'(\Phi) \left[2\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^3 + \varphi'(\Phi) \varphi(\Phi)\right]$$

Имея в виду, что при $x=0$ производная $\frac{d\Phi_0}{dx}=0$, напишем:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \Phi_0, \\ f'(x_0) &= \frac{d\Phi_0}{dx} = 0, \\ f''(x_0) &= \varphi(\Phi_0) \neq 0, \\ f'''(x_0) &= 0, \\ f^{IV}(x_0) &= \varphi'(\Phi_0) \varphi(\Phi) \neq 0, \\ f^V(x_0) &= 0, \\ f^{VI}(x_0) &= 3\varphi''(\Phi_0) \varphi^2(\Phi_0) + \varphi'^2(\Phi_0) \varphi(\Phi_0) \neq 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Вспользуемся теперь рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots,$$

Подставляя в него значения соответствующих функций, получим:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \frac{1}{2!} \varphi(\Phi_0) x^2 + \frac{1}{4!} \varphi'(\Phi_0) \varphi(\Phi_0) x^4 + \\ &+ \frac{1}{6!} [3\varphi''(\Phi_0) \varphi^2(\Phi_0) + \varphi'^2(\Phi_0) \varphi(\Phi_0)] x^6 + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь два случая: $R_m = \text{const}$ и $R_m = \Phi$.

а) Магнитное сопротивление R_m практически не зависит от величины магнитного потока.

Так как

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -G_m(2F_1 - R_m\Phi) = \varphi(\Phi),$$

то

$$\begin{aligned} \varphi'(\Phi) &= R_m G_m; \quad \varphi''(\Phi) = 0, \\ \varphi(\Phi_0) &= -G_m(2F_1 - R_m\Phi_0), \\ \varphi'(\Phi_0) &= R_m G_m \text{ и } \varphi''(\Phi_0) = 0. \end{aligned}$$

После подстановки в приведенный выше ряд, находим:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 - \frac{1}{2} G_m(2F_1 - R_m\Phi_0) x^2 - \frac{R_m}{24} G_m^3(2F_1 - R_m\Phi_0) x^4 - \\ &- \frac{R_m^2}{720} G_m^5(2F_1 - R_m\Phi_0) - \dots \end{aligned}$$

Имея в виду, что $R_m\Phi_0 = 2h_0$, получим:

$$\Phi = \Phi_0 - G_m(F_1 - h_0) \left[x^2 + \frac{R_m G_m}{12} x^4 + \frac{R_m^2 G_m^2}{360} x^6 + \dots \right]$$

Задаваясь значением потока Φ_0 , вычислим с любой степенью точности и кривую распределения магнитного потока вдоль магнитной линии.

б) Магнитное сопротивление R_m есть функция магнитного потока.

Исходя из основной формулы

$$\varphi(\Phi) = -2G_m(F_1 - h),$$

находим:

$$\begin{aligned} \varphi'(\Phi) &= 2G_m \frac{dh}{d\Phi}, & \varphi'(\Phi_0) &= 2G_m \frac{dh_0}{d\Phi}, \\ \varphi''(\Phi) &= 2G_m \frac{d^2h}{d\Phi^2}, & \varphi''(\Phi_0) &= 2G_m \frac{d^2h_0}{d\Phi^2}, \\ &\dots & & \end{aligned}$$

откуда

$$-\frac{d^2\Phi}{dx^2} = G_m \frac{dU_m}{dx} = G_m (F - R_m \Phi),$$

но

$$R_m \Phi = h_1 + h_2,$$

следовательно,

$$-\frac{d^2\Phi}{dx^2} = G_m [F - (h_1 + h_2)] = f(\Phi).$$

Вводя, как это было сделано выше, новую функцию Z :

$$Z = -\frac{d\Phi}{dx},$$

придем к следующему решению:

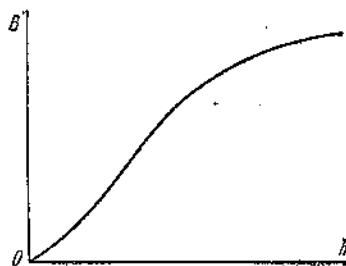
$$Z = \pm \sqrt{-2 \int_{\Phi_{\max}}^{\Phi} f(\Phi) d\Phi},$$

причем

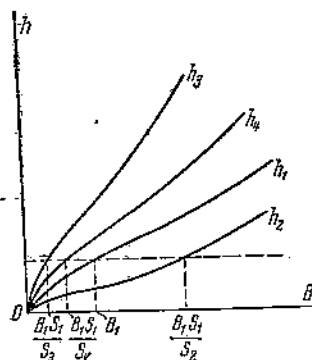
$$f(\Phi) = -\frac{d^2\Phi}{dx^2} = G_m [F - (h_1 + h_2)],$$

значением же $\Phi_{\max}$ задаемся.

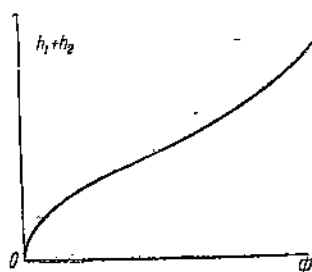
Пусть кривая намагничивания взятого для нашей цепи ферромагнетика выразится



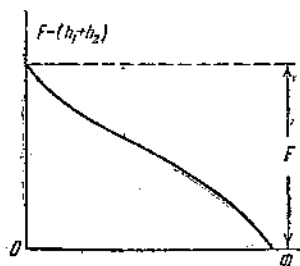
Фиг. 45.



Фиг. 46.



Фиг. 47.

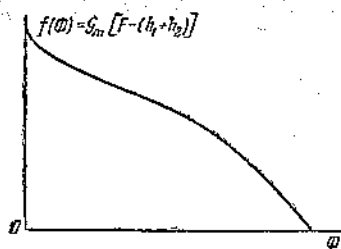


Фиг. 48.

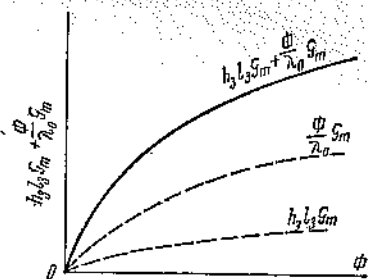
кривой $B=f(h)$, приведенной на фиг. 45. Исходя из этой кривой, строим зависимость h_1 от B (фиг. 46), а от нее переходим к кривым h_2 , h_3 и h_4 . Откладывая по оси абсцисс значения $\Phi = B \cdot s$ и по оси ординат сумму $h_1 + h_2$, получим график фиг. 47. Имея же этот график, строим кривую $F - (h_1 + h_2)$ (фиг. 48), а от нее перейдем к функции $f(\Phi)$, что и сделано на фиг. 49.

Теперь нетрудно получить кривую Z^2 :

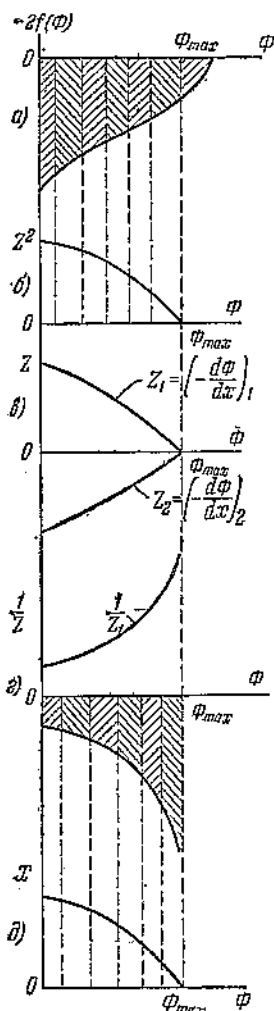
$$Z^2 = \int_{\Phi_{\max}}^{\Phi} -2 f(\Phi) d\Phi.$$



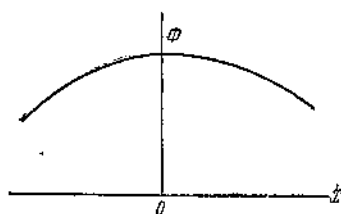
Фиг. 49.



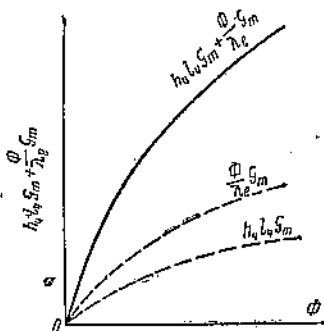
Фиг. 52.



Фиг. 50.



Фиг. 51.



Фиг. 53.

На фиг. 50, а, приведена функция $-2f(\Phi)$, на фиг. 50, б, интеграл ее в указанных пределах, на фиг. 50, в, функция z и на фиг. 50, г, обратная ей функция $\frac{1}{z}$.

Так как

$$\frac{dx}{d\Phi} = -\frac{1}{z},$$

то для определения зависимости x от потока Φ необходимо графически интегрировать функцию $-\frac{1}{z}$ (фиг. 50, г). Прделав это, приходим к кривой фиг. 50, д, которая дает нам возможность построить кривую распределения магнитного потока Φ (фиг. 51), симметричную по отношению к проходящей через $\Phi_{\max}$ оси ординат, но оставляет открытым вопрос о расстоянии концов магнитной цепи от нейтральной линии (от проведенной на фиг. 51 оси ординат). В зависимости от нагрузки концов рассматриваемой цепи положения $\Phi_{\max}$ по длине цепи меняется. Определим значения магнитных потоков Φ_0 и Φ_e , а затем по кривой фиг. 51 и искомым расстояния l_0 и $l-l_0$.

Так как

$$-\frac{d\Phi}{dx} = U_m G_m$$

то

$$-\frac{d\Phi_0}{dx} = U_{m0} G_m,$$

$$-\frac{d\Phi_e}{dx} = U_{me} G_m.$$

Но

$$U_{m0} = -Z_0 \Phi_0 = -\left(h_3 l_3 + \frac{\Phi_0}{\lambda_0}\right),$$

$$U_{me} = Z_e \Phi_e = \left(h_4 l_4 + \frac{\Phi_e}{\lambda_e}\right),$$

следовательно,

$$-\frac{d\Phi_0}{dx} = -\left(h_3 l_3 + \frac{\Phi_0}{\lambda_0}\right) G_m,$$

$$-\frac{d\Phi}{dx} = \left(h_4 l_4 + \frac{\Phi_e}{\lambda_e}\right) G_m.$$

Построим кривые

$$\left(h_3 l_3 + \frac{\Phi}{\lambda_0}\right) G_m \text{ и } \left(h_4 l_4 + \frac{\Phi}{\lambda_e}\right) G_m,$$

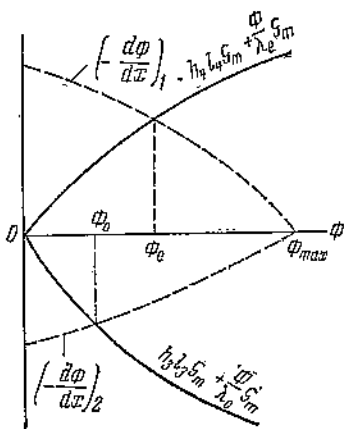
пользуясь графиками фиг. 46 (фиг. 52 и 53).

Имея же в виду, что

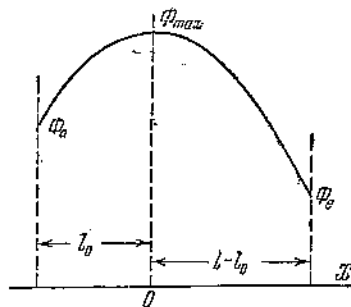
$$h_3 l_3 G_m + \frac{\Phi_0}{\lambda_0} G_m = \frac{d\Phi_0}{dx},$$

$$h_4 l_4 G_m + \frac{\Phi_e}{\lambda_e} G_m = -\frac{d\Phi_e}{dx},$$

легко определить и нужные нам значения потоков Φ_0 и Φ_e . Действительно, взяв кривые $\frac{d\Phi}{dx}$ из фиг. 50, а, и кривые $h_3 l_3 G_m + \frac{\Phi}{\lambda_0} G_m$, $h_4 l_4 G_m + \frac{\Phi}{\lambda_e} G_m$



Фиг. 54.



Фиг. 55.

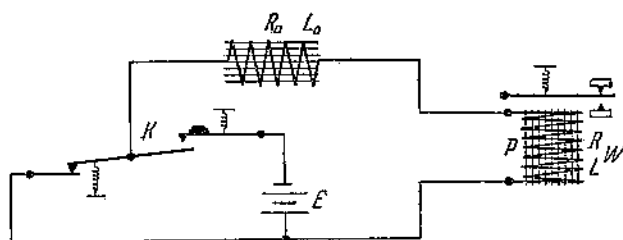
из фиг. 52 и 53, на пересечении их (фиг. 54) найдем искомые потоки Φ_0 и Φ_e . Эти найденные значения потоков Φ_0 и Φ_e ограничивают приведенную выше на фиг. 51 кривую Φ . Таким образом, получаем полный график (фиг. 55) распределения магнитного потока вдоль выбранной нами магнитной цепи.

III. УСТАНОВЛИВАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЛЕЙНЫХ ЦЕПЯХ¹

Основная установка анализа. Анализ устанавливающихся электромагнитных процессов в релейных цепях будем вести по тому же плану, что и предыдущий раздел об установившихся процессах в магнитных цепях. Начнем с реле, индуктивность которых практически не зависит от силы тока. Так как подобного рода реле играют весьма большую роль в технике связи, сигнализации и телемеханике, остановимся на них подробнее. И только проведя подробный анализ с выделенной группой реле, перейдем к реле с индуктивностью, зависящей от силы тока, причем на основе результатов анализа предыдущего раздела приведем решение уравнения Гельмгольца с учетом влияния железа сердечников реле.

А. РЕЛЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ, НЕ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СИЛЫ ТОКА

Общие положения. Возьмем релейную цепь (фиг. 56) из батареи E , ключа K , не разрывающего цепь при своей работе, электромагнита с индук-



Фиг. 56.

тивностью L_0 и сопротивлением R_0 и реле с индуктивностью L и сопротивлением R . Электромагнитные процессы в такой цепи подчиняются уравнениям Гельмгольца:

$$I = i + \tau \frac{di}{dt},$$

$$\Phi_y = \Phi + \tau \frac{d\Phi}{dt},$$

где i — мгновенное значение тока в цепи, $\tau = \frac{L_0 + L}{R_0 + R}$ — постоянная времени цепи, t — время, I — установившийся ток в цепи, Φ — мгновенное значение магнитного потока в сердечнике реле, $\Phi_y = \frac{LI}{w}$ — установившееся значение магнитного потока в том же сердечнике.

¹ Коваленков В. И. Основы теории связи, ч. I, ГНТИ, 1931; Теория магнитных цепей, вып. I, изд. ВЭТА, 1933; Теория магнитных цепей, вып. III, изд. ВЭТА, 1935; Основы теории электромагнитных цепей, изд. ЛЭТИИСС, 1939.

Как известно, при замыкании цепи в случае закрепленного якоря реле мы имеем следующие решения приведенного уравнения:

а) при нажатии ключа:

$$i = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

$$\Phi = \Phi_y(1 - e^{-\frac{t}{\tau}});$$

б) при отпускании ключа после того, как в цепи ток вполне установится:

$$i = Ie^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\Phi = \Phi_y e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную времени в цепях, индуктивность которых не зависит от силы тока, определяют как время, в течение которого ток i и магнитный поток Φ нарастают после нажатия ключа K (фиг. 56) до 0,632 части своего установившегося значения. Та же постоянная τ может быть определена и иначе.

Пусть ключ K (фиг. 56) отпущен после того, как в цепи ток установится. В этом случае

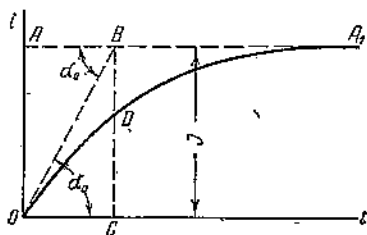
$$i = Ie^{-\frac{t}{\tau}},$$

и ток падает от значения I до нуля по кривой AB (фиг. 57).

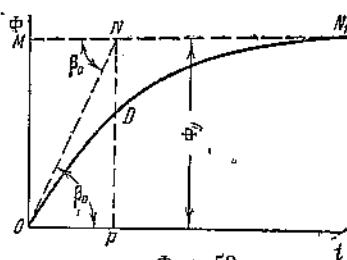
Вычислим площадь Q , ограниченную приведенной кривой с осями координат:

$$Q = \int_0^{\infty} i dt = I \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = I\tau.$$

Итак, искомая площадь Q равна произведению из установившейся силы тока I на постоянную времени τ . Построим равновеликую площадь, ограничив ее прямоугольником, одной из сторон которого будет отрезок $OA = I$; очевидно, что другой, прилегающей к первой, стороной будет постоянная времени



Фиг. 58.



Фиг. 59.

$\tau = AC = OD$. Та же постоянная времени τ дает возможность легко провести начальную касательную как к кривой нарастающего тока (фиг. 58), так и к кривой нарастающего магнитного потока (фиг. 59) при нажатии ключа K (фиг. 56).

Возьмем производную как тока i , так и магнитного потока Φ по времени t , тогда

$$\left| \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I}{\tau} = \frac{E}{L_0 + L},$$

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{\Phi}{\tau} = \frac{E}{w}.$$

С другой стороны, из фиг. 58 и 59 находим:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{OA}{AB}, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{OM}{MN},$$

и так как $OA = I$ и $OM = \Phi_y$, то

$$AB = \tau \quad \text{и} \quad MN = \tau.$$

Таким образом, чтобы провести начальную касательную к кривой тока или магнитного потока, откладываем на асимптоте AA_1 (или MN_1) отрезок AB (или MN), равный τ , и конец отрезка соединяем с началом координат.

Указанный способ построения начальной касательной в связи с первым определением постоянной времени дает возможность быстро и удобно строить кривые нарастания тока или магнитного потока при нажатии ключа K (фиг. 56).

Обращаясь опять к схеме фиг. 56, отмечаем параметры L_0, R_0, L, R, E и ω , определяющие вид кривой нарастания тока или магнитного потока Φ . С изменением любого из них указанные кривые будут соответствующим образом меняться. Так как характер нарастания кривых тока и магнитного потока определяет собою работу реле, необходимо на этом вопросе остановиться подробнее. Исследуем влияние каждого из параметров на процессы установления тока и магнитного потока.

а) Электромагнитное реле непосредственно присоединено к батарее (фиг. 60)

1. Влияние индуктивности на процессы устанавливания тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле. а) Ключ нажимается. Изменить индуктивность L в реле, не меня остальных его параметров, как мы уже знаем, возможно путем соответствующего изменения формы магнитной цепи реле и качества магнитного материала, из которого изготовлена указанная цепь. Возьмем несколько значений L : $L_1 < L_2 < L_3$. Так как R, E и ω постоянны, то мы будем иметь: $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$; $\alpha_{01} > \alpha_{02} > \alpha_{03}$; $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \operatorname{const}$; $I_1 = I_2 = I_3 = \operatorname{const}$; $\Phi_{y1} < \Phi_{y2} < \Phi_{y3}$. Имея в виду приведенное соотношение, строим две группы кривых (фиг. 61): одну для устанавливающегося тока, другую для устанавливающегося магнитного потока, обе при нажатии ключа K (фиг. 60), причем для удобства сравнения кривых этих двух групп располагаем последние одну под другой так, чтобы оси ординат их совпали.



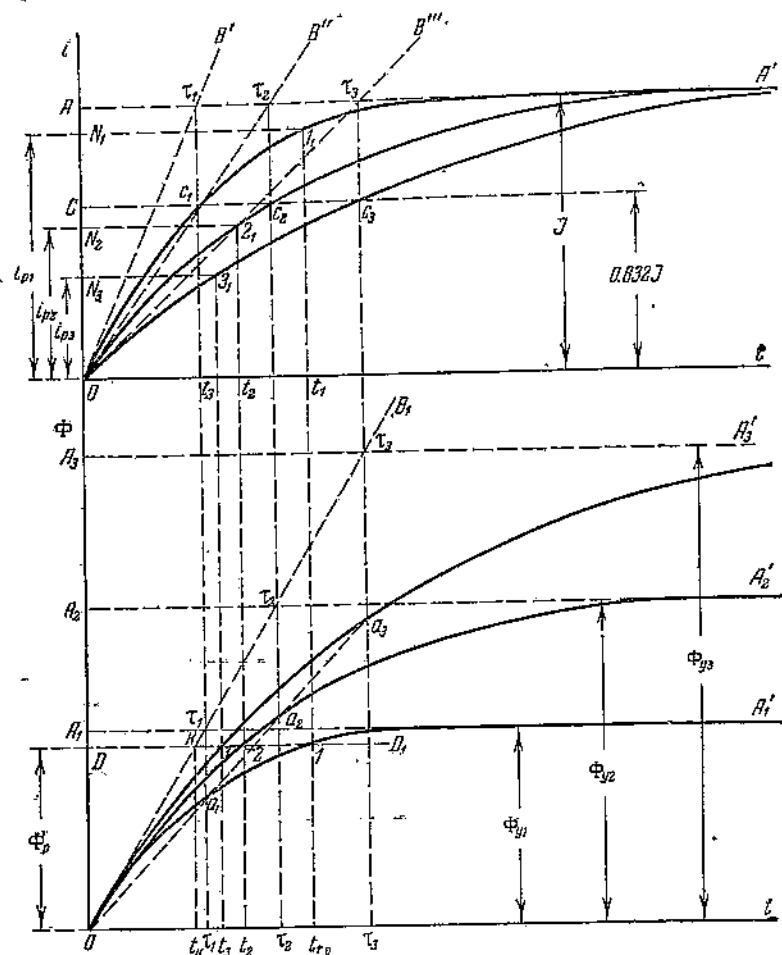
Фиг. 60.

Для построения кривых тока проводим асимптоту AA' , отстоящую от оси абсцисс на расстоянии $I = \frac{E}{R}$. По этой асимптоте от оси ординат откладываем отрезки At_1, At_2, At_3 , равные соответственно постоянным времени τ_1, τ_2 и τ_3 . Соединив точки t_1, t_2 и t_3 с началом координат, проводим начальные касательные OB', OB'' и OB''' . Опустив из точек t_1, t_2 и t_3 перпендикуляры на ось абсцисс, отметим на них точки c_1, c_2, c_3 , отстоящие от оси абсцисс на расстоянии $0.632I$. Теперь нетрудно провести кривые нарастания тока oc_1I_1, oc_2I_2 и oc_3I_3 .

Для построения кривых нарастания магнитного потока проводим асимптоты $A_1A'_1, A_2A'_2$ и $A_3A'_3$, отстоящие от оси абсцисс на расстояниях Φ_{y1}, Φ_{y2} и Φ_{y3} . Так как постоянные времени соответствующих кривых тока и магнитного потока равны, проектируем на проведенные асимптоты точки t_1, t_2 и t_3 , нанесенные ранее на асимптоту AA' . Эти проекции в силу постоянства угла наклона начальной касательной ($\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \operatorname{const}$) должны лежать на прямой OB_1 , которая и является общей касательной ко всем кривым магнитного потока. Наметив точки

a_1 , a_2 и a_3 , отстоящие от оси абсцисс на расстояниях 0.632 частей от соответствующего значения установившегося магнитного потока, проводим кривые Oa_3 , $O2a_2$ и Oa_1I .

Если якорь реле (фиг. 60) не закреплен, то при каком-то вполне определенном при данной регулировке реле значении магнитного потока Φ_p (рабочий магнитный поток) якорь начинает перебрасываться от нерабочего контакта к рабочему. Время от момента нажатия ключа до начала перебрасывания якоря называется „временем трогания якоря“, а до момента установления рабочего контакта — „временем срабатывания реле“; время от начала движения якоря до момента касания рабочего контакта — „временем перелета якоря“. Если не принято особых



Фиг. 61.

предохранительных приспособлений, то между моментом первого касания якорем рабочего контакта и установлением рабочего контакта проходит некоторое время на дребезжание якоря (неустойчивый рабочий контакт), которое носит название „время дребезжания якоря“. Таким образом, время срабатывания реле складывается из времен: трогания якоря, перелета якоря и дребезжания последнего. Остановимся подробнее на времени трогания якоря.

Наметив на фиг. 61 рабочий магнитный поток (отрезок OD), проведем прямую DD_1 , параллельную оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с кривыми магнитного потока (точки 3 , 2 и 1) определяют времена трогания якоря. Обозначим проекции точек 3 , 2 и 1 на ось абсцисс буквами t_3 , t_2 и t_1 . Отрезки Ot_3 , Ot_2 и Ot_1 представляют собой времена трогания якоря реле. Спроектируем

точки t_1 , t_2 и t_3 на верхнюю ось абсцисс и на кривые тока (точки I_1 , I_2 , I_3). Отрезки $t_1 I_1 = ON_1$, $t_2 I_2 = ON_2$ и $t_3 I_3 = ON_3$ представляют собою соответствующие рабочие токи. Таким образом, кривые фиг. 61 показывают, во-первых, что время трогания якоря тем меньше, чем при прочих равных условиях больше индуктивность реле, во-вторых, что с увеличением индуктивности реле рабочий ток последнего уменьшается. Формула же, связывающая магнитный поток с током:

$$\Phi_p = \frac{Li_p}{w},$$

показывает, что при $\Phi_p = \text{const}$ произведение $Li_p = \text{const}$ (при неизменном числе витков w), следовательно, рабочий ток i_p обратно пропорционален величине индуктивности L . Кривые магнитного потока фиг. 61 дают еще возможность построить кривую зависимости времени трогания якоря от величины индуктивности L при постоянных R , E и w .

Будем откладывать по оси абсцисс значения индуктивности L , по оси ординат время трогания $t_{тр}$. Из фиг. 61 ясно, что при определенном рабочем магнитном потоке Φ_p те реле, для которых кривая магнитного потока пройдет ниже прямой DD_1 или асимптотически приближаясь к ней, совсем работать не будут. Прямая DD_1 является границей, отделяющей зону реле, работающих при данной величине потока Φ_p , от зоны реле, не работающих. Величина индуктивности L_n , при которой кривая магнитного потока асимптотически стремится к прямой DD_1 , является граничным значением индуктивности L , — реле с индуктивностью $L > L_n$ работают, с индуктивностью $L < L_n$ не работают. Реле с индуктивностью $L = L_n$ теоретически сработает при значении $t_{тр} = \infty$. Как показывают те же кривые фиг. 61, с увеличением индуктивности L время $t_{тр}$ непрерывно падает. Однако с приближением L к бесконечно большому значению время $t_{тр}$ стремится к вполне определенной конечной величине. Действительно, как бы мы ни меняли значение L , начальная касательная OB_1 будет общей ко всем кривым магнитного потока. С увеличением индуктивности L кривые магнитного потока поднимаются все круче, приближаясь к касательной OB_1 . При значении $L = \infty$ кривая магнитного потока сольется с касательной OB_1 . В этом случае предельное значение времени $t_{тр}$ будет равно Ot_k , что непосредственно видно из фиг. 61.

Для построения кривой трогания (фиг. 62) откладываем по оси абсцисс значение граничной индуктивности L_n , по оси ординат значения предельного времени t_k . Из точек L_n и t_k проводим прямые $t_k k'$ и $L_n f$, параллельные соответствующим осям координат. Эти прямые будут начальной ($L_n f$) и конечной ($t_k k'$) асимптотами кривой трогания. Откладывая по оси абсцисс значения индуктивности L , которым соответствуют рабочие кривые магнитного потока на фиг. 61, по оси ординат соответствующие значения времен трогания, построим кривую $t_{тр}$.

Нетрудно привести аналитическое выражение кривой трогания. Действительно,

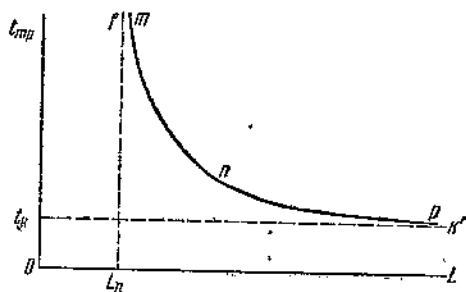
$$\Phi_p = \Phi_y (1 - e^{-\frac{t_{тр}}{\tau}}),$$

откуда

$$t_{тр} = \frac{L}{R} \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_y - \Phi_p}.$$

Имея же в виду, что w и I постоянны, приведенную формулу можно переписать еще в следующем виде:

$$t_{тр} = \frac{L}{R} \ln \frac{L}{L - L_n}.$$



Фиг. 62.

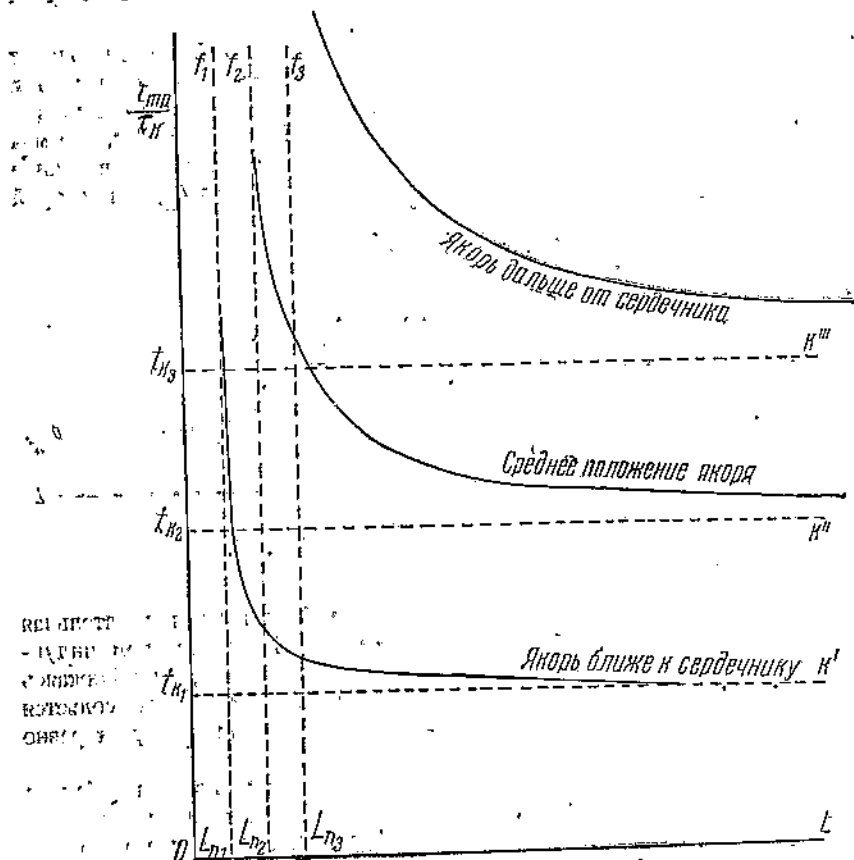
Это и будет формулой кривой трогания для рассматриваемого в настоящем параграфе случая.

Если $L = L_n$, то, очевидно, $t_{тр} = \infty$; если $L = \infty$, то

$$t_{тр} = \frac{1}{R} \left| L \ln \frac{L}{L - L_n} \right|_{L=\infty} = \frac{1}{R} (\infty \cdot 0).$$

Раскрывая эту неопределенность, приходим к следующему выводу: с приближением индуктивности L к бесконечно большому значению время трогания $t_{тр}$ стремится к значению $t_{тр} = \frac{L_n}{R} = \tau_k$. Из чертежа фиг. 61 видно, что $\tau_k = t_k$.

При построении кривой трогания mpr (фиг. 62) мы базировались на определенном значении рабочего магнитного потока Φ_r , но величина этого потока зависит от регулировки реле: чем дальше нерабочий винт якоря от сердечника реле, тем



Фиг. 63.

большее рабочий магнитный поток, чем ближе нерабочий винт якоря к сердечнику реле, тем меньше рабочий поток. С изменением же величины рабочего магнитного потока Φ_r изменится и кривая трогания. Для иллюстрации сказанного на фиг. 63 приведены три кривые трогания, соответствующие трем положениям нерабочего винта якоря по степени удаления его от сердечника: первое — ближе к сердечнику, второе — дальше и третье — еще дальше.

б) Ключ отпускается. Процессы установливания тока и магнитного потока выражаются формулами:

$$i = I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\Phi = \Phi_y e^{-\frac{t}{\tau}},$$

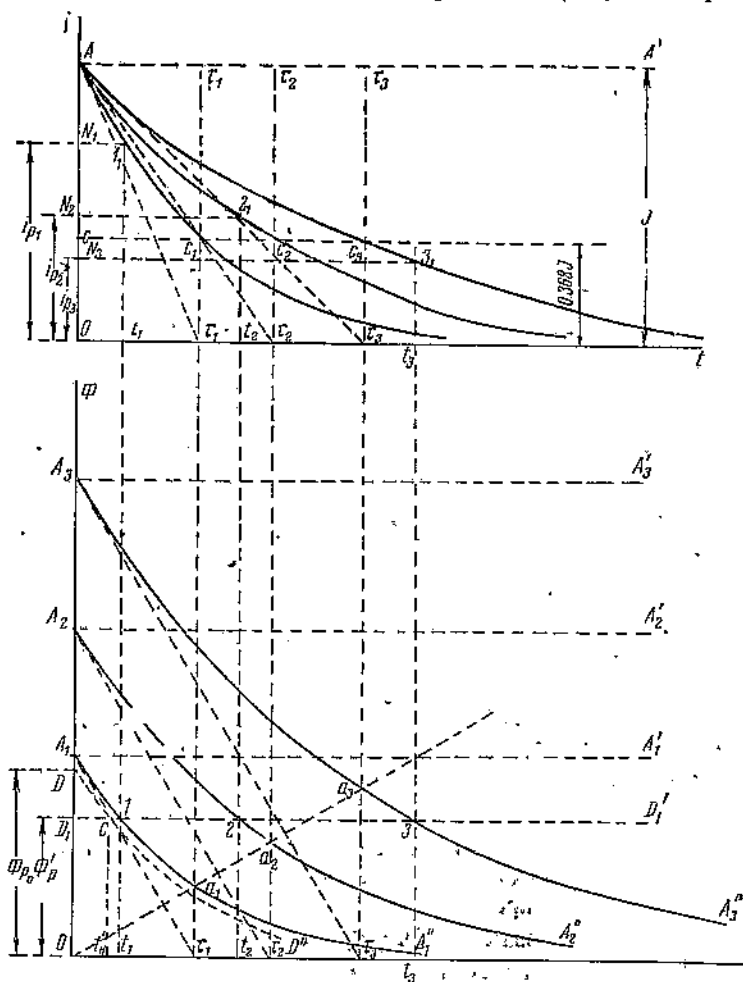
при этом

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{I}{\tau} = -\frac{E}{L},$$

$$\operatorname{tg} \beta_0 = -\frac{\Phi_y}{\tau} = -\frac{E}{w}.$$

Если $L_1 < L_2 < L_3$, то $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$; $|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3|$; $|\beta_1| = |\beta_2| = |\beta_3|$; $\Phi_{y1} < \Phi_{y2} < \Phi_{y3}$.

Строим соответствующие кривые магнитного потока и тока (фиг. 64). Пусть якорь реле отпускается при значении рабочего магнитного потока Φ'_p . Наносим точки 1, 2 и 3, определяющие время трогания якоря при отпускании: t_1 , t_2 и t_3 . Проектируя эти точки на соответствующие кривые тока, определим рабочие токи



Фиг. 64.

отпускания: i_{p1} , i_{p2} и i_{p3} . Фиг. 64 показывает, что с увеличением индуктивности время трогания при отпускании ключа также увеличивается. При некотором значении индуктивности L'_n установившееся значение магнитного потока Φ_y делается равным рабочему магнитному потоку. По чертежу фиг. 64 мы должны прийти к выводу, что при таком значении L'_n , а также меньших его значениях якорь вообще не может быть притянут. Индуктивность L'_n , таким образом, должна являться границей, отделяющей возможные решения от невозможных. На самом деле эта граница несколько выше.

Полученный вывод был бы справедлив, если бы рабочие магнитные потоки при притягивании якоря Φ_p и при отпуске Φ'_p были бы равны. На самом деле они не равны. Докажем это. Как мы уже видели выше, сила f , с которой магнитный поток притягивает якорь, равна:

$$f = \frac{\Phi^2}{8\pi s} \cdot \frac{1 - G_e R_e}{\left(1 + \frac{G_e \delta}{s}\right)^2}.$$

Пусть при спокойном положении якоря натяжение пружины, оттягивающей якорь, равно P , тогда начало перелета якоря будет соответствовать рабочему магнитному потоку Φ_p , определяемому из формулы:

$$P = \frac{\Phi_p^2}{8\pi s} \cdot \frac{1 - G_e R_e}{\left(1 + \frac{G_e \delta}{s}\right)^2},$$

откуда

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{8\pi s P}{1 - G_e R_e}} \left(1 + \frac{G_e \delta}{s}\right).$$

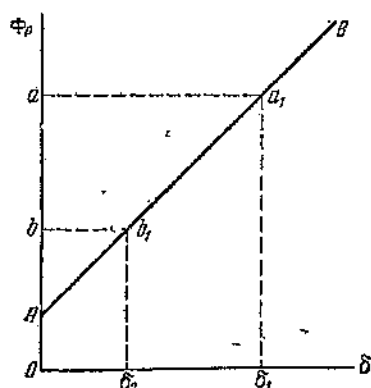
Полагая с некоторым приближением механическую силу P во все время перелета якоря постоянной (при малом ходе якоря) и обозначая:

$$\sqrt{\frac{8\pi s P}{1 - G_e R_e}} = m \text{ и } \sqrt{\frac{8\pi s P}{1 - G_e R_e}} \cdot \frac{G_e}{s} = n,$$

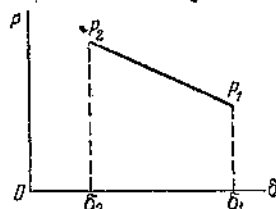
получим:

$$\Phi_p = m + n\delta.$$

Таким образом, с изменением δ при $P = \text{const}$ магнитный рабочий поток Φ_p должен меняться по закону прямой линии (прямая AB на фиг. 65).



Фиг. 65.



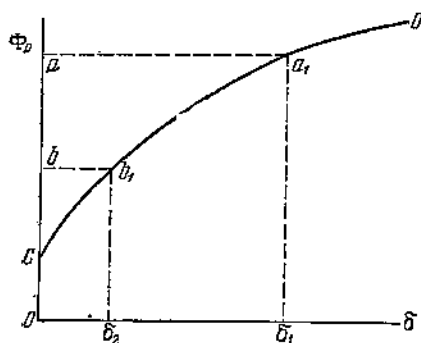
Фиг. 66.

Пусть в нерабочем положении якорь отстоит от сердечника на расстоянии δ_1 , в притяннутом же — на расстоянии δ_2 , тогда рабочий магнитный поток Φ_p при притяжении якоря будет определяться ординатой Oa и поток Φ'_p при отпуске — ординатой Ob , следовательно, $\Phi'_p < \Phi_p$. Если же принять, что механическая сила P при перелете якоря меняется по закону прямой (фиг. 66), то $P = a - b\delta$. Подставляя в формулу для рабочего магнитного потока, имеем:

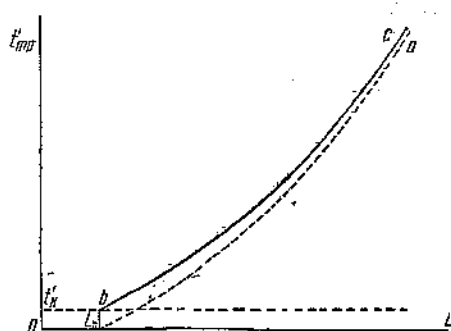
$$\Phi_p = \sqrt{\frac{8\pi s (a - b\delta)}{1 - G_e R_e}} \left(1 + \frac{G_e \delta}{s}\right).$$

С изменением расстояния между якорем и сердечником рабочий магнитный поток по последней формуле меняется не по прямой, как на фиг. 65, а по кривой CD (фиг. 67). Обычно механическая характеристика P реле представляется ломаной линией (фиг. 24). В этом случае каждому отрезку этой ломаной линии будет соответствовать отрезок кривой, подобной CD на фиг. 67, сделанный же выше вывод ($\Phi'_p < \Phi_p$) остается в силе.

Итак, рабочий магнитный поток Φ'_p меньше Φ_p ($\Phi'_p < \Phi_p$), якорь же может притянуться только тогда, когда $\Phi_y > \Phi_p$, следовательно, границей между возможными и невозможными решениями будет значение индуктивности L_n , при



Фиг. 67.



Фиг. 68.

которой $\Phi_y = \Phi_p$. Для этого граничного значения L_n предельное значение времени трогания t'_{tr} определяется отрезком D_1C (фиг. 64). С дальнейшим увеличением индуктивности L время трогания t'_{tr} , как видно из фиг. 64, быстро повышается.

Откладывая по оси абсцисс значения индуктивности L , по оси ординат соответствующие времена трогания, получим кривую bc на фиг. 68. Если бы рабочие магнитные потоки Φ'_p и Φ_p были равны, мы получили бы на той же фигуре кривую $L_n a$. Меняя регулировку нижним (рабочим) винтом, будем менять и характерную кривую t'_{tr} .

Возьмем, например, три положения нижнего винта: первое — ближе к сердечнику реле, второе — дальше, третье — еще дальше; получим три кривые трогания на фиг. 69.

Аналитическое выражение кривой трогания определяется из формулы:

$$\Phi'_p = \Phi_y e^{-\frac{t'_{tr}}{\tau}}.$$

Имеем

$$t'_{tr} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi'_p} = \frac{L}{R} \ln \frac{L}{L'_n}.$$

Если $L = L_n$, то

$$t'_{tr} = t'_k = \frac{L_n}{R} \ln \frac{L_n}{L'_n};$$

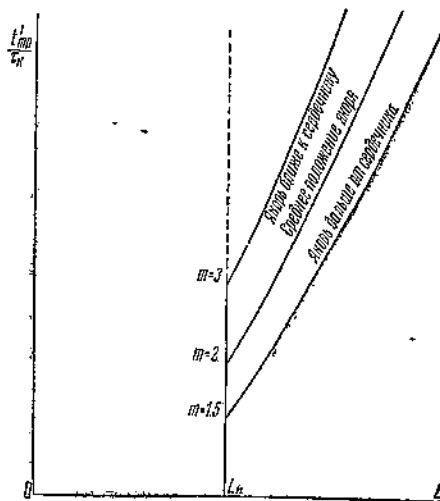
если $L = \infty$, то

$$t'_{tr} = \infty.$$

Выражая L и L'_n в долях от L_n , т. е. полагая $L = kL_n$ и $L'_n = \frac{1}{m}L_n$, получим:

$$t'_{tr} = \tau_k k \ln mk.$$

γ) Общее время трогания. Если по условиям работы реле нас интересует время трогания не при притяжении якоря, не при отпуске послед-



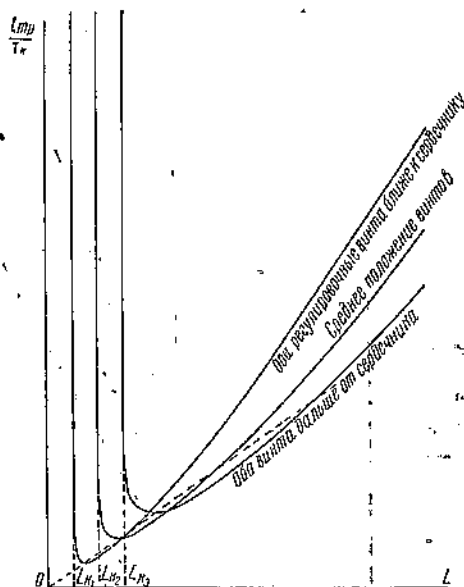
Фиг. 69.

него, а суммарное, то при построении кривых трогания (суммарных) мы должны сложить ординаты соответствующих кривых фиг. 63 и 69. Получим кривые фиг. 70, проходящие при каком-то значении индуктивности L через минимум. Нетрудно видеть, что все минимумы лежат на прямой, проходящей через начало координат. Выведем формулу для минимального значения общего времени трогания при условии $\Phi'_p = \Phi_p$. Общее время трогания, очевидно, определяется следующей формулой:

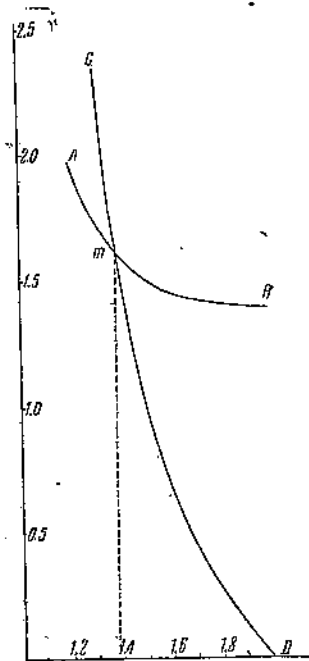
$$t_{\text{тр}} = \frac{L}{R} \ln \frac{L}{L - L_n} + \frac{L}{R} \ln \frac{L}{L_n}.$$

И так как по условию $\Phi'_p = \Phi_p$, то

$$t_{\text{тр}} = \frac{L}{R} \ln \frac{L^2}{(L - L_n) L_n}.$$



Фиг. 70.



Фиг. 71.

Будем выражать индуктивность L в долях предельного значения L_n :

$$L = kL_n,$$

тогда получим:

$$t_{\text{тр}} = \tau_k \ln \left(\frac{k^2}{k-1} \right),$$

где

$$\tau_k = \frac{L_n}{R}.$$

Приравниваем первую производную $t_{\text{тр}}$ по k нулю:

$$\ln \frac{k^2}{k-1} = \frac{2-k}{k-1}.$$

Строим кривую AB (фиг. 71) зависимости от k левой части приведенного уравнения и кривую CD зависимости от правой части того же уравнения. Точка

пересечения m этих кривых дает нам решение уравнения, а именно: $k = 1.383$. Для этого значения k имеем:

$$\left(\frac{t_{\text{тр}}}{\tau_k}\right)_{\min} = \ln\left(\frac{1.383^2}{0.383}\right) = 0.7094.$$

Если необходимо учесть разницу между рабочими магнитными потоками при притяжении и при отпуске якоря, то, как нетрудно убедиться, мы получим

$$t_{\text{тр}} = \tau_k k \ln \frac{mk^2}{k-1},$$

где

$$m = \frac{\Phi_p}{\Phi'_p} = \frac{L_n}{L'_n}.$$

В этом случае минимум $t_{\text{тр}}$ будет при значении k , определяемом следующим уравнением:

$$\ln \frac{k^2}{k-1} = \frac{2-k}{k-1} - \ln m.$$

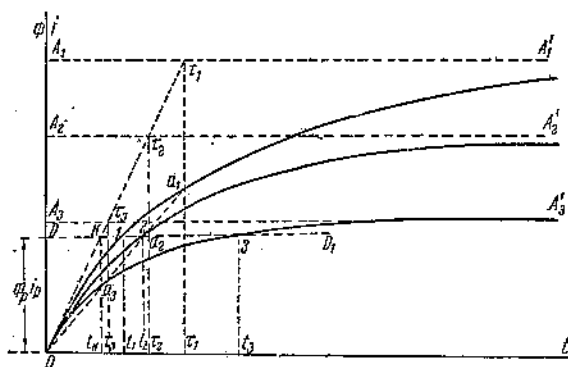
2. Влияние сопротивления R на процессы установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле. а) Ключ нажимается. Если $E = \text{const}$, $L = \text{const}$, $w = \text{const}$ и $R_1 < R_2 < R_3$, то $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$; $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_{03} = \text{const}$; $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \text{const}$; $I_1 > I_2 > I_3$ и $\Phi_{y1} > \Phi_{y2} > \Phi_{y3}$, причем

$$\frac{\Phi_{y1}}{I_1} = \frac{\Phi_{y2}}{I_2} = \frac{\Phi_{y3}}{I_3} = \frac{L}{w} = \text{const},$$

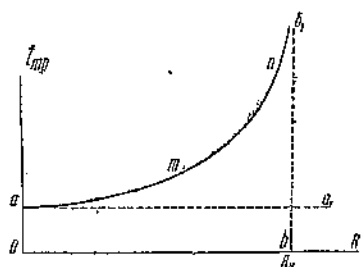
$$\frac{\text{tg } \beta_{01}}{\text{tg } \alpha_{01}} = \frac{\text{tg } \beta_{02}}{\text{tg } \alpha_{02}} = \frac{\text{tg } \beta_{03}}{\text{tg } \alpha_{03}} = \frac{L}{w} = \text{const}.$$

Очевидно, что кривые магнитного потока будут отличаться от кривых тока только масштабом по оси ординат. Подбирая соответствующим образом масштабы, можем совместить те и другие кривые, что и сделано на фиг. 72. Задавая рабочим магнитным потоком Φ_p , определим времена трогания t_1 , t_2 , и t_3 . Очевидно, что в рассматриваемом случае рабочий ток I_p сохраняет свою величину при переходе от одной кривой к другой. Откладывая по

оси абсцисс сопротивление R ,



Фиг. 72.



Фиг. 73.

по оси ординат время трогания при заданном рабочем магнитном потоке, получим кривую трогания (фиг. 73). При построении этой кривой необходимо принять во внимание следующие обстоятельства.

Как показывают кривые фиг. 72, граничным значением сопротивления R , отделяющим зону реле срабатывающего при заданном Φ_p от зоны реле не срабатывающего, будет то, при котором кривые нарастания тока и магнитного потока асимптотически стремятся к прямой DD_1 . При этом значении сопротивления $R = R_k$ время трогания $t_{\text{тр}} = \infty$. Реле будет работать только при $R < R_k$. Так как наклон начальной касательной $O\tau_3\tau_2\tau_1$ (фиг. 72) остается неизменным

для всех кривых нарастания тока и магнитного потока, то при $R=0$ имеем определенное наименьшее значение времени трогания, равное $t_{тр} = Ot_k$ по фиг. 72 и $t_{тр} = Oa$ по фиг. 73.

Таким образом, кривая трогания начинается значением $t_{тр} = Oa$ (фиг. 73), непрерывно увеличивается и при значении $R = Ob = R_k$ стремится к бесконечно большому значению.

Так как величина рабочего магнитного потока Φ_p зависит от положения верхнего (нерабочего) контактного винта якоря, то с регулировкой верхним винтом будет меняться и положение кривой трогания. Выберем три произвольных положения верхнего винта; первое положение — самое близкое к сердечнику, второе — несколько удаленное от сердечника и третье — еще более удаленное. Этим трем положениям нерабочего винта будут соответствовать три кривые трогания (фиг. 74).

Аналитически время трогания, очевидно, выражается формулой:

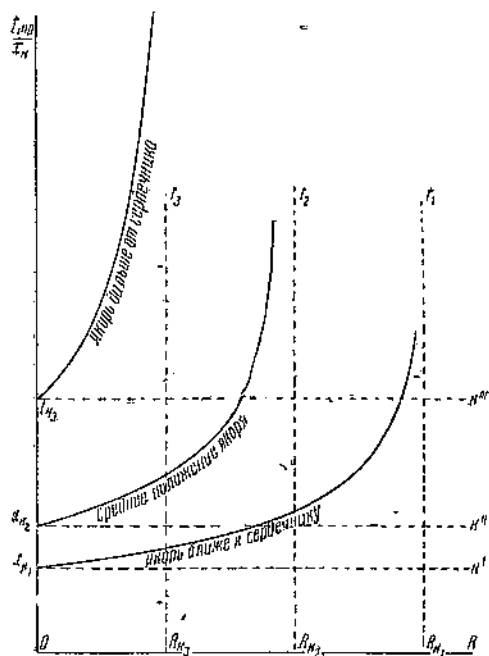
$$t_{тр} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_y - \Phi_p}$$

и так как

$$\Phi_y = \frac{LE}{wR} \text{ и } \Phi_p = \frac{LE}{wR_k},$$

то

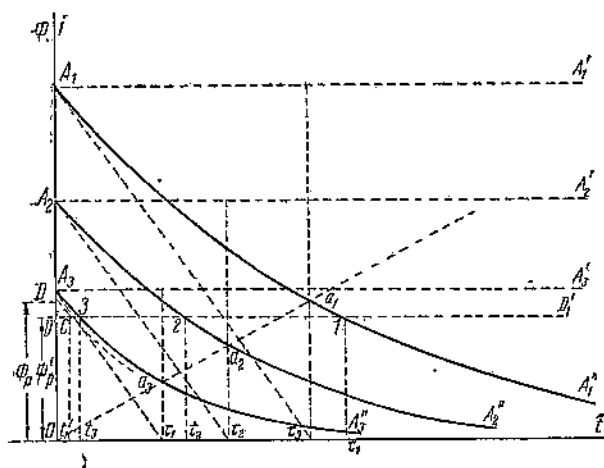
$$t_{тр} = \frac{L}{R} \ln \frac{R_k}{R_k - R}.$$



Фиг. 74.

При $R = R_k$ время трогания $t_{тр} = \infty$, при $R = 0$ приходим к неопределенности:

$$t_{тр} = L \left| \frac{\ln \frac{R_k}{R_k - R}}{R} \right|_{R=0} = \frac{0}{0}.$$



Фиг. 75.

Раскрывая неопределенность, получим:

$$t_{тр} = \frac{L}{R_k} = \tau_k = Ot_k$$

(фиг. 72) = Oa (фиг. 73).

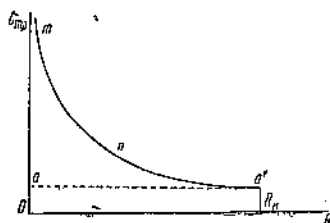
Выражая k в долях от R_k , т. е. полагая $R = kR_k$, получим:

$$t_{тр} = \frac{L}{R_k} \cdot \frac{1}{k} \ln \frac{1}{1-k} = \tau_k \frac{1}{k} \ln \frac{1}{1-k}.$$

β) Ключ отпущается. При отпусканнии ключа батарея выносятся

из цепи без разрыва последней. Устанавливающиеся процессы тока и напряжения при этом представляются кривыми фиг. 75. Задаваясь рабочим магнитным потоком $\Phi_p' < \Phi_p$, будем иметь все данные для построения кривой трогания $t_{тр}$. Действи-

тельно, с непрерывным уменьшением сопротивления R время трогания растет, приближаясь к бесконечно большому значению. С непрерывным увеличением сопротивления R время трогания непрерывно уменьшается, приближаясь к предельному значению $t'_k = Ot'_k = D'C$ (фиг. 75), определяемому рабочим магнитным потоком Φ_p при замыкании цепи. Чем меньше разница между Φ_p и Φ'_p , тем меньше предельное значение $t_{тр} = t'_k$. В случае равенства потоков Φ'_p и Φ_p это значение $t'_k = 0$. Исходя из приведенных положений, строим кривую трогания $ma'R_k$ (фиг. 76). Положение этой кривой находится в непосредственной зависимости от положения нижнего рабочего винта якоря. Меняя положение нижнего рабочего винта, мы автоматически также меняем величину рабочего магнитного потока Φ'_p .



Фиг. 76.

Математически кривая трогания $t_{тр}$ изображается следующей формулой:

$$t_{тр} = \frac{L}{R} \ln \frac{\Phi_y}{\Phi'_p},$$

и, так как

$$\Phi_y = \frac{LE}{wR} \text{ и } \Phi'_p = \frac{LE}{wR'_k},$$

то

$$t_{тр} = \frac{L}{R} \ln \frac{R'_k}{R}.$$

При сопротивлении $R = R_k$ предельное время трогания

$$t_{тр} = \frac{L}{R_k} \ln \frac{R'_k}{R_k} = \tau_k \ln m,$$

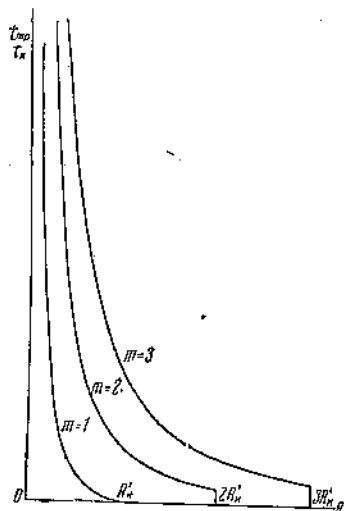
где

$$m = \frac{R'_k}{R_k} = \frac{\Phi_p}{\Phi'_p}.$$

Если $m = 1$, т. е. $\Phi'_p = \Phi_p$, то предельное значение времени трогания равно нулю. С уменьшением сопротивления R время трогания, как показывает формула, непрерывно растет, приближаясь к бесконечности (при $R = 0$). Полагая $R = kR_k$ и $R'_k = mR_k$, получим:

$$t_{тр} = \frac{L}{R_k} \cdot \frac{1}{k} \ln \frac{m}{k} = \tau_k \frac{1}{k} \ln \frac{m}{k}.$$

Пусть при одном и том же значении R_k коэффициент m имеет три значения: $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$. Получим три кривые, приведенные на фиг. 77.



Фиг. 77.

γ) Общее время трогания. Складывая формулы времен трогания при притягивании и при отпуске якоря, получим формулу общего времени трогания:

$$t_{тр} = \frac{L}{R} \left(\ln \frac{R_k}{R_k - R} + \ln \frac{R'_k}{R} \right) = \frac{L}{R} \ln \frac{R_k R'_k}{R(R_k - R)}.$$

Выражая сопротивления R и R'_k в долях от R_k ($R = kR_k$, $R'_k = mR_k$), получим:

$$t_{тр} = \tau_k \frac{1}{k} \ln \frac{m}{k(1-k)},$$

где $\tau_k = \frac{L}{R_k}$.

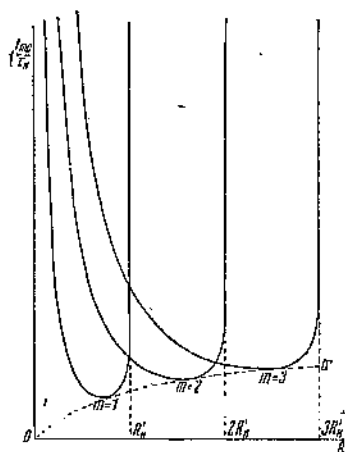
Кривые, соответствующие значениям $m=1, 2$ и 3 , приведены на фиг. 78. Все эти кривые проходят через минимум. Приравняв первую производную $t_{\text{тр}}$ по k нулю, определим то значение k , при котором $t_{\text{тр}}$ проходит через минимум,

$$t \frac{dt_{\text{тр}}}{dk} = \frac{\tau_k}{k^2} \left[\frac{2k-1}{1-k} - \ln \frac{m}{k(1-k)} \right] = 0.$$

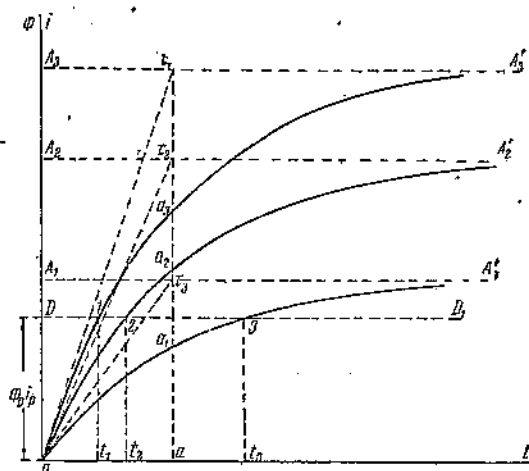
Таким образом, k_m определяется уравнением:

$$\ln \frac{m}{k(1-k)} = \frac{2k-1}{1-k}.$$

Решая графическим путем это уравнение, определим соответствующее значение k_m .



Фиг. 78.

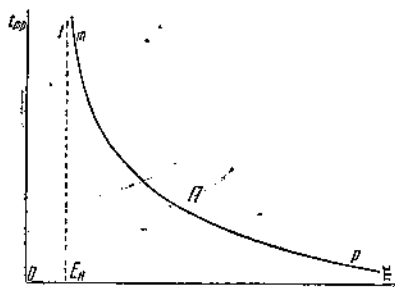


Фиг. 79.

3. Влияние электродвижущей силы E на установление тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле. а) Ключ нажимается. Пусть при постоянстве параметров L, R и w электродвижущая сила E принимает три значения: $E_1 < E_2 < E_3$, тогда $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \text{const}$, $I_1 < I_2 < I_3$; $\Phi_{y1} < \Phi_{y2} < \Phi_{y3}$; $\alpha_{01} < \alpha_{02} < \alpha_{03}$; $\beta_{01} < \beta_{02} < \beta_{03}$, причем

$$\frac{\Phi_{y1}}{I_1} = \frac{\Phi_{y2}}{I_2} = \frac{\Phi_{y3}}{I_3} = \frac{L}{w} = \text{const},$$

$$\frac{\lg \beta_{01}}{\lg \alpha_{01}} = \frac{\lg \beta_{02}}{\lg \alpha_{02}} = \frac{\lg \beta_{03}}{\lg \alpha_{03}} = \frac{L}{w} = \text{const}.$$



Фиг. 80.

Таким образом, кривые тока и кривые магнитного потока можно совместить, меняя соответствующим образом масштаб ординат (фиг. 79). Задавая рабочим магнитным потоком Φ_p , определим времена трогания t_1, t_2 и t_3 . Очевидно, что граничным значением эдс E , отделяющим возможные решения от невозможных, будет то ее значение $E = E_k$, при котором кривая магнитного потока асимптотически стремится к прямой DD_1 , определяемой величиной рабочего магнитного потока Φ_p . С непрерывным увеличением эдс E время трогания непрерывно уменьшается; с приближением E к бесконечности время трогания стремится к нулю (фиг. 80).

Время трогания $t_{\text{тр}}$ может быть подсчитано, исходя из формулы:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L}{R} \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_p}.$$

И так как

$$\Phi_y = \frac{LE}{\omega R} \text{ и } \Phi_p = \frac{LE}{\omega R_k}.$$

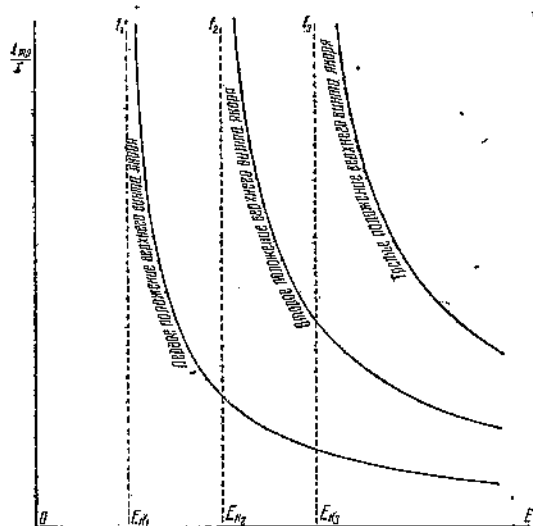
то

$$t_{\text{тр}} = \frac{L}{R} \ln \frac{E}{E - E_k}.$$

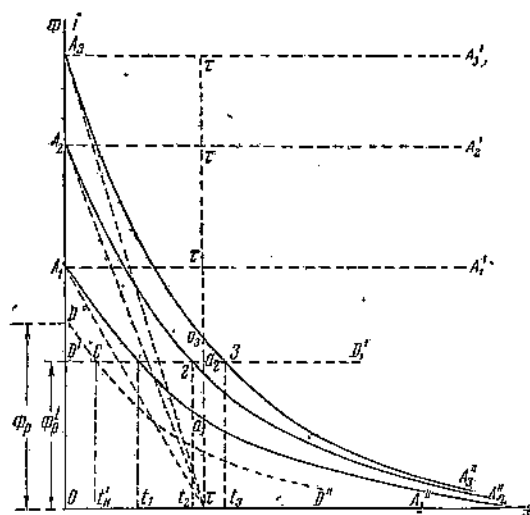
Полагая $E = kE_k$ и $\tau = \frac{L}{R}$, имеем:

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{k}{k-1}.$$

При значении $k=1$ (или $E=E_k$) время $t_{\text{тр}} = \infty$, с приближением E к бесконечности (или $k \rightarrow \infty$) время трогания $t_{\text{тр}}$ стремится к нулю.



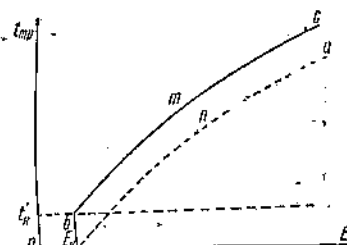
Фиг. 81.



Фиг. 82.

С изменением положения верхнего нерабочего винта якоря меняется и рабочий магнитный поток, меняется положение прямой DD_1 на фиг. 79, меняется и граничное значение эдс E_k . На фиг. 81 показаны три кривые трогания в зависимости от положения нерабочего винта (первое положение наиболее близкое к якору, третье — наиболее удаленное).

β) Ключ отпускается. Кривые тока и магнитного потока при отпускании ключа приведены на фиг. 82. Если рабочий магнитный поток отпускания Φ'_p меньше рабочего потока притягивания Φ_p , то наименьшее время трогания t'_k определяется отрезком $D'C$ (фиг. 82), причем кривая DCD'' соответствует граничной эдс E_k . С возрастанием эдс время трогания непрерывно растет (фиг. 83), кривая трогания, повышаясь, стремится к бесконечности. Чем меньше разница между потоками



Фиг. 83.

притяжения и отпускания, тем ближе кривая трогания к пунктирной кривой E_k на фиг. 83.

Математически время трогания выражается формулой:

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_p},$$

и так как

$$\Phi_y = \frac{LE}{wR} \text{ и } \Phi_p = \frac{LE'_k}{wR},$$

то

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{E}{E'_k}.$$

Выражая эдс E и E'_k в долях от E_k :

$$E = kE_k \text{ и } E'_k = \frac{1}{m} E_k,$$

получим

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln mk.$$

С изменением положения нижнего (рабочего) винта якоря величина рабочего магнитного потока Φ'_p меняется, меняется значение эдс E'_k меняется и коэффициент m . На фиг. 84 приведены три кривые трогания, соответствующие трем положениям нижнего винта: первое положение — ближайшее к сердечнику реле, третье — наиболее удаленное, причем положение верхнего винта остается неизменным.

γ) Общее время трогания. Формула для определения общего времени трогания получается путем сложения формул трогания при притягивании и при отпуске якоря:

$$t_{\text{тр}} = \tau \left(\ln \frac{k}{k-1} + \ln mk \right) = \tau \ln \frac{mk^2}{k-1}.$$

По этой формуле легко могут быть построены соответствующие кривые. На фиг. 85 приведены три кривые соответственно трем положениям нижнего нерабочего винта (при первом положении якорь ближе к сердечнику, чем при втором и третьем), положение верхнего винта остается неизменным.

Приравняв первую производную $t_{\text{тр}}$ по k нулю, найдем значение k , при котором кривая $t_{\text{тр}}$ проходит через минимум:

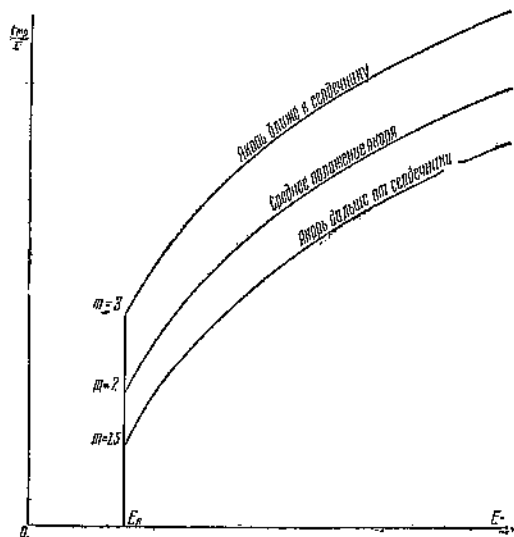
$$\frac{dt_{\text{тр}}}{dk} = \frac{k-2}{k(k-1)} = 0,$$

откуда:

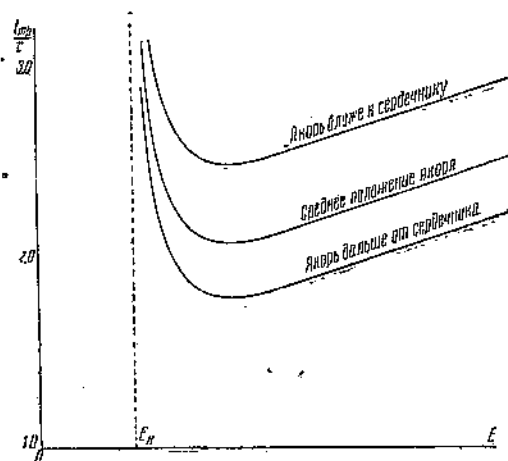
$$k_m = 2.$$

Подставляя значение k_m в формулу для $t_{\text{тр}}$, получим минимальное значение времени $t_{\text{тр}}$:

$$(t_{\text{тр}})_{\text{min}} = \tau \ln 4m.$$



Фиг. 84.



Фиг. 85.

При $m=1$	$\left(\frac{t_{тр}}{\tau}\right)=1.3868$
$m=1.5$	" = 1.7918
$m=2$	" = 2.0794
$m=3$	" = 2.4846

4. Влияние числа витков w обмотки реле на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле. а) Ключ нажимается. Время трогания определяется известной уже нам формулой:

$$t_{тр} = \tau \frac{\Phi_y}{\Phi_y - \Phi_p}.$$

С изменением числа витков w меняется как сопротивление R , так и индуктивность L по формулам:¹

$$L = a w^2, \quad R = w(b + c w),$$

где a , b , c — постоянные, зависящие от конструктивных особенностей катушки, материала проволоки, диаметра последней и слоя ее изоляции, свойств магнитной цепи реле и способа намотки проволоки. Указанные постоянные обычно определяются экспериментальным путем, но могут быть вычислены по следующим формулам:

$$a = \frac{\pi^2 D^2 \mu_1}{l}, \quad b = \pi D \rho \quad \text{и} \quad c = \frac{\pi d^2 \rho}{k l},$$

где D , l и d — постоянные, понятные из фиг. 86, μ_1 — расчетная магнитная проницаемость магнитной цепи катушки, ρ — сопротивление единицы длины проволоки и k — постоянная, определяемая при значениях d от 0.1 до 0.3 мм эмпирической формулой В. М. Денисова²

$$k = d + 0.65,$$



Фиг. 86.

причем d — число, по величине равное диаметру d , выраженному в миллиметрах.³

Для постоянной времени τ после соответствующей подстановки получим формулу:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{a w}{b + c w}.$$

Пусть рабочий магнитный поток при постоянной эдс E определяется числом витков катушки w_k . При этом значении w_k кривая нарастающего магнитного потока асимптотически стремится к прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстоянии Φ_p . Очевидно, что реле с кривыми, находящимися ниже указанной прямой, работать не будут; работать будут только те реле, для которых кривые магнитного потока пересекают указанную прямую. Будем выражать число витков обмотки реле в долях от выбранного граничного числа витков w_k , т. е. положим, что $w = k w_k$, тогда

$$\Phi_y = \frac{L E}{w R} = \frac{a E}{b + c w_k k}, \quad \Phi_p = \frac{L_k E}{w_k R_k} = \frac{a E}{b + c w_k}$$

и время трогания:

$$t_{тр} = \frac{a_1 k}{b + c_1 k} \ln \frac{b + c_1}{c_1 (1 - k)},$$

где $a_1 = a w_k$ и $c_1 = c w_k$.

Так как величина под логарифмом не может быть отрицательной, то возможные решения будут соответствовать только значениям $k < 1$. Для $k = 1$

¹ Коваленков В. И. Основы теории связи, ч. I, ГНТИ, 1931, стр. 51—54.

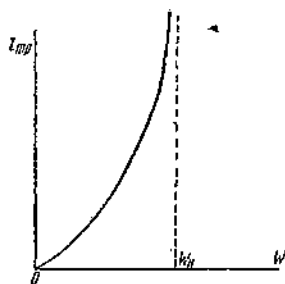
² Труды ЛЭЭЛ, вып. 6, 1927 г.

³ См. также Н. А. Лившин, Д. В. Спицын, А. В. Данилин, Теория и расчет элементов автоматических систем. Реле, ГОНТИ, 1939 (табл. 10, стр. 108).

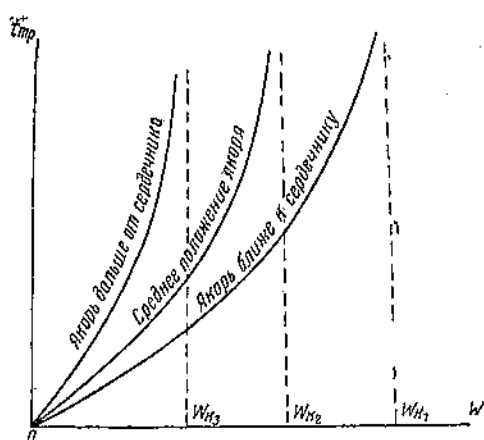
время трогания $t_{тр} = \infty$, для $k=0$ $t_{тр}=0$. Соответствующая кривая трогания приведена на фиг. 87. Меняя положение верхнего винта якоря, мы изменим величину рабочего магнитного потока Φ_p , а следовательно, и граничное значение числа витков w_k . Эту зависимость кривой трогания от регулировки реле верхним винтом можно видеть на фиг. 88.

б) Ключ отпускается. Время трогания $t_{тр}$ равно:

$$t_{тр} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_p}$$



Фиг. 87.



Фиг. 88.

Пусть $\Phi'_p = \frac{1}{m} \Phi_p$, тогда

$$t_{тр} = \frac{a_1 k}{b + c_1 k} \ln \frac{m(b + c_1)}{b + c_1 k}$$

Так как время $t_{тр}$ не может быть отрицательным, то

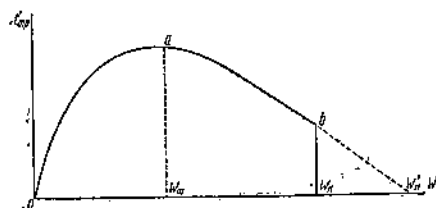
$$\frac{m(b + c_1)}{b + c_1 k} > 1,$$

следовательно,

$$k < \frac{b(m-1)}{c_1} + 1.$$

Если $\Phi'_p = \Phi_p$, то $m=1$ и $k < 1$. Чем рабочий магнитный поток Φ_p при отпуске якоря меньше магнитного рабочего потока Φ_p при притягивании якоря, тем больше единицы может быть значение k . При $k=1 + \frac{b(m-1)}{c_1}$ время трогания $t_{тр}=0$, при $k=0$ $t_{тр}=0$. При некотором значении $k=k_m$ время трогания $t_{тр}$ проходит через максимум. Нетрудно видеть, что этому максимуму соответствует k_m , удовлетворяющее следующему уравнению:

$$\ln \frac{m(b + c_1)}{b + c_1 k_m} = \frac{c_1 k_m}{b(b + c_1 k_m)}$$



Фиг. 89.

Откладывая по оси абсцисс число витков w , по оси ординат — время трогания $t_{тр}$, построим новую кривую трогания $Oa bw_k$ (фиг. 89). Для того же случая, когда $\Phi_p = \Phi'_p$ или, иначе, $w_k' = w_k$, мы получили бы на той же фигуре кривую $Oa bw'_k$.

γ) Общее время трогания. Общее время трогания может быть вычислено по формуле:

$$t_{тр} = \frac{a_1 k}{b + c_1 k} \ln \frac{b + c_1}{c_1(1-k)} + \frac{a_1 k}{b + c_1 k} \ln \frac{m(b + c_1)}{b + c_1 k},$$

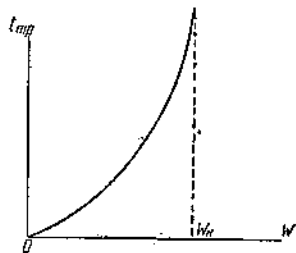
или

$$t_{\text{тр}} = \frac{a_1 k}{b + c_1 k} \ln \frac{m(b + c_1)^2}{c_1(1-k)(b + c_1 k)}.$$

При $k=1$ время трогания $t_{\text{тр}}$, очевидно, равно бесконечности, при $k=0$ $t_{\text{тр}}=0$. Общий вид кривой трогания приведен на фиг. 90.

б) Релейная цепь из батареи, реле и дополнительных приборов, последовательно соединенных с реле

В предыдущей главе мы рассмотрели влияние параметров реле (R , L и W) и эдс E на устанавливающиеся процессы тока и магнитного потока, когда на последние кроме указанных параметров ничто не влияет. На практике, однако, релейные цепи значительно сложнее разобранных. Релейная цепь кроме анализируемого реле и батареи включает еще ряд приборов, имеющих определенную индуктивность, емкость и сопротивление. Рассмотрим сначала наиболее простую цепь (фиг. 56) из последовательно соединенных реле (R , L) и реактивной катушки (R_0 , L_0), затем несколько примеров более сложных цепей с последовательно-параллельным соединением входящих в них приборов.



Фиг. 90.

1. Влияние индуктивности L на процессы

установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле.

а) Ключ нажимается. В формулу времени трогания

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_y - \Phi_p}$$

входят кроме разобранных в предыдущей главе параметров R , L , ω и E еще параметры дополнительных приборов R_0 и L_0 . Действительно, от параметров R_0 и L_0 зависят входящие в формулу постоянная времени цепи τ , установившийся магнитный поток Φ_y в сердечнике анализируемого реле и рабочий поток Φ_p :

$$\tau = \frac{L_0 + L}{R_0 + R}, \quad \Phi_y = \frac{LE}{\omega(R_0 + R)}, \quad \Phi_p = \frac{L_n E}{\omega(R_0 + R)}.$$

Подставляя в формулу, получим;

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{L}{L - L_n}.$$

Будем выражать индуктивность реле L через граничную индуктивность L_n ($L = kL_n$), тогда

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + kL_n}{R_0 + R} \ln \frac{k}{k - 1}.$$

Очевидно, что k не может быть меньше единицы, затем, при $k=1$, время трогания $t_{\text{тр}} = \infty$; при $k=\infty$ время трогания $t_{\text{тр}} = \infty \cdot 0$. Раскрывая неопределенность, убеждаемся, что при $k=\infty$ время трогания равно

$$t_{\text{тр}} = t_k = \frac{L_n}{R_0 + R}.$$

Откладывая по оси абсцисс индуктивность L , по оси ординат время трогания $t_{\text{тр}}$, получим кривую, подобную кривой фиг. 62, разница будет лишь в масштабах.

б) Ключ отпускается. Формула для времени трогания

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_p'}$$

после подстановки в ней значений τ , Φ_y и Φ_p' примет следующий вид:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + kL_n}{R_0 + R} \ln m k,$$

где

$$m = \frac{\Phi_p}{\Phi_p'} = \frac{L_n}{L_n'}$$

Произведение mk не может быть меньше единицы, следовательно, $k > \frac{1}{m}$.

При $k = \frac{1}{m}$ время трогания $t_{тр} = 0$, при $k = 1$ $t_{тр} = \frac{L_0 + L_n}{R_0 + R} \ln m = \tau_k \ln m$, при $k = \infty$ $t_{тр} = \infty$. Очевидно, что кривая трогания качественно не будет отличаться от кривой фиг. 68 ($L_n b = t_k' = \tau_k \ln m$).

γ) Общее время трогания. Формула времени трогания имеет следующий вид:

$$t_{тр} = \frac{L_0 + kL_n}{R_0 + R} \ln \frac{mk^2}{k-1}.$$

При $k = 1$ $t_{тр} = \infty$, при $k = \infty$ $t_{тр} = \infty$. Кривая трогания при значении k_m проходит через минимум. Нетрудно видеть, что значение k_m определится уравнением:

$$\ln \frac{k^2}{k-1} = \frac{L_0 + kL_n}{L_n} \cdot \frac{2-k}{k(k-1)} - \ln m.$$

Кривая трогания в этом случае качественно не отличается от кривых фиг. 70.

2. Влияние сопротивления R на процессы установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле.

а) Ключ нажимается. Так как

$$\tau = \frac{L_0 + L}{R_0 + R}, \quad \Phi_y = \frac{L\dot{E}}{w(R_0 + R)} \quad \text{и} \quad \Phi_p = \frac{LE}{w(R_0 + R_k)},$$

время трогания $t_{тр}$ определяется формулой:

$$t_{тр} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_y - \Phi_p} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{R_0 + R_k}{R_k - R}.$$

Полагая $R = kR_k$ и $R_0 = nR_k$, имеем:

$$t_{тр} = \frac{L_0 + L}{R_0 + kR_k} \ln \frac{n+1}{1-k}.$$

Очевидно, что $k < 1$ и что при $k = 1$ $t_{тр} = \infty$, при $k = 0$

$$t_{тр} = \frac{L_0 + L}{R_k} \cdot \frac{1}{n} \ln(n+1).$$

Кривая трогания качественно не отличается от кривой фиг. 73.

б) Ключ отпускается. Формула для времени трогания:

$$t_{тр} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_p} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{m(R_0 + R_k)}{R_0 + R} = \frac{L_0 + L}{(n+k)R_k} \ln \frac{m(n+1)}{n+k},$$

где

$$m = \frac{\Phi_p}{\Phi_p'}, \quad n = \frac{R_0}{R_k}, \quad k = \frac{R}{R_k}.$$

Так как

$$\frac{m(n+1)}{n+k} > 1,$$

то $k < m(n+1) - n$.

Граничным значением сопротивления, как мы уже видели в предыдущей главе, является R_k , следовательно, предельным значением k будет единица, но при $k = 1$

$$t_{тр} = \frac{L_0 + L}{(n+1)R_k} \ln m;$$

при $k = 0$

$$t_{тр} = \frac{L_0 + L}{nR_k} \ln \frac{m(n+1)}{n}.$$

Так как

$$\frac{1}{n} \ln \frac{m(n+1)}{n} > \frac{1}{n+1} \ln m,$$

с другой же стороны, производная $t_{\text{тр}}$ по k на всем протяжении от 0 до 1 отрицательна, кривая трогания $t_{\text{тр}}$ качественно не отличается от кривой фиг. 76, разница лишь в том, что кривая начинается в общем случае не от бесконечности, а от конечного значения, тем большего, чем меньше n (при $n=0$ кривая начинается, как и на фиг. 76, от бесконечности).

γ) Общее время трогания. Формула для общего времени трогания:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + L}{(n+k)R_k} \ln \frac{m(n+1)^2}{(n+k)(1-k)};$$

при $k=0$

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + L}{nR_k} \ln \frac{m(n+1)^2}{n},$$

при $k=1$ $t_{\text{тр}} = \infty$,

Очевидно, что при $n \neq 0$ кривая начинается с какого-то конечного значения (для $k=0$), проходит через минимум и растет до бесконечности.

Определим значение k_m , при котором кривая $t_{\text{тр}}$ проходит через минимум. Приравнявая первую производную $t_{\text{тр}}$ по k нулю, придем к уравнению:

$$\ln \frac{n(n+1)^2}{(n+k)(1-k)} = \frac{2k+n-1}{1-k}.$$

Чем больше значение n , тем ближе минимум кривой к оси ординат. Минимум $t_{\text{тр}}$ будет при $k=0$ для n , определяемого уравнением:

$$\ln(n+1) = \frac{n-1}{2}.$$

3. Влияние электродвижущей силы E на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле. а) Ключ нажимается. Формула для времени трогания:

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{\Phi_y}{\Phi_y - \Phi_p} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{E}{E - E_k} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{k}{k-1}.$$

Очевидно, кривая трогания качественно не отличается от кривой фиг. 80.

β) Ключ отпускается.

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{E}{E_k} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln mk,$$

где $m = \frac{E_k}{E_k'}$.

Кривая трогания качественно не отличается от кривой фиг. 83.

γ) Общее время трогания.

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + L}{R_0 + R} \ln \frac{mk^2}{k-1}.$$

Кривая трогания качественно не отличается от кривой фиг. 85.

4. Влияние числа витков w обмотки реле на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле. а) Ключ нажимается. Так как $L = aw^2$, $R = w(b + cw)$, $L_k = aw_k^2$, $R_k = w_k(b + cw_k)$,

$$\Phi_y = \frac{aEw}{R_0 + bw + bw^2},$$

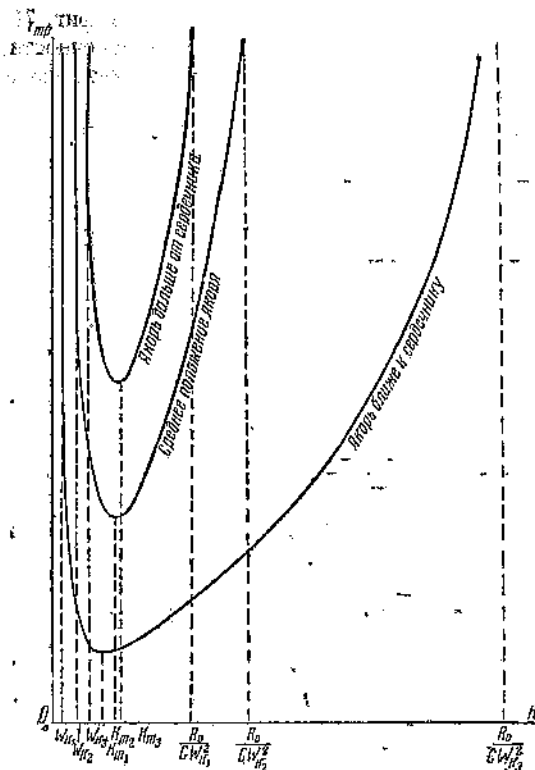
$$\Phi_p = \frac{aEw_k}{R_0 + bw_k + cw_k^2},$$

то формула для времени трогания имеет следующий вид:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + aw^2}{R_0 + bw + cw^2} \ln \frac{R_0 + bw_k + bw_k^2}{R_0 - cw_k w} \cdot \frac{w}{w - w_k}.$$

Полагая же $\omega = k \cdot \omega_k$, получим:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + a\omega_k^2 k^2}{R_0 + b\omega_k k + c\omega_k^2 k^2} \ln \frac{R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2}{R_0 - c\omega_k^2 k} \cdot \frac{k}{k-1}.$$



Фиг. 91.

где

$$f_1(k_m) = \ln \frac{R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2}{R_0 - c\omega_k^2 k_m} \cdot \frac{k_m}{k_m - 1},$$

$$f_2(k_m) = \frac{(R_0 - c\omega_k^2 k_m^2) (L_0 + a\omega_k^2 k_m^2) (R_0 + b\omega_k k_m + c\omega_k^2 k_m^2)}{\omega_k (R_0 - c\omega_k^2 k_m) [2(aR_0 + cL_0) \omega_k k_m + a b \omega_k^2 k_m^2 - b L_0] (k_m - 1) k_m}.$$

Откладывая по оси абсцисс значения k_m , по оси ординат функции $f_1(k_m)$ и $f_2(k_m)$, получим две кривые, пересечение которых определит нам искомое значение k_m .

Теперь мы можем построить кривые зависимости времени трогания $t_{\text{тр}}$ от числа витков. На фиг. 91 приведены три такие кривые для трех положений верхних регулировочных винтов. Чем дальше верхний регулировочный винт от сердечника, или, иными словами, чем больше значение рабочего магнитного потока Φ_p , тем уже кривая трогания и тем короче интервал витков, соответствующий возможной работе реле.

β) Ключ отпускается. Время трогания определяем из формулы:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + a\omega^2}{R_0 + b\omega + c\omega^2} \ln \frac{\omega (R_0 + b\omega + c\omega^2)}{\omega' (R_0 + b\omega + c\omega^2)}.$$

Полагая $\omega = k\omega_k$ и $\omega'_k = m\omega_k$, получим:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + a\omega_k^2 k^2}{R_0 + b\omega_k k + c\omega_k^2 k^2} \ln \frac{k (R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2)}{m (R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2)}.$$

Очевидно, что реле будет работать только при соблюдении следующего неравенства:

$$R_0 > c\omega_k^2 k,$$

или

$$k < \frac{R_0}{c\omega_k^2},$$

так как только в этом случае величина под логарифмом будет положительной.

При $k=1$ время трогания $t_{\text{тр}} = \infty$, при

$$k = \frac{R_0}{c\omega_k^2}$$

$t_{\text{тр}} = \infty$. При каком-то значении $k = k_m$, заключающемся между единицей и $\frac{R_0}{c\omega_k^2}$, функция $t_{\text{тр}}$ проходит через минимум. Приравняв нулю первую производную $t_{\text{тр}}$ по k , придем к следующему уравнению, которому должно удовлетворять искомое значение k_m :

$$f_1(k_m) = f_2(k_m),$$

Возможные решения определяются следующим неравенством:

$$\frac{k(R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2)}{m(R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2)} > 1.$$

Обозначим $R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2 = \rho$; тогда возможные решения будут заключаться между значениями $k = k_1$ и $k = k_2$, причем

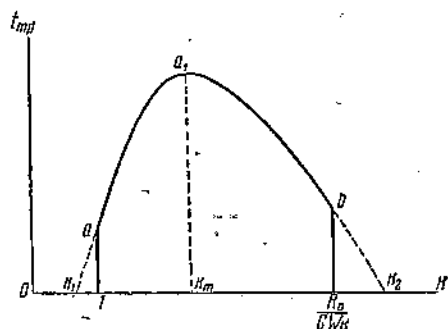
$$k_1 = \frac{\rho - b\omega_k - \sqrt{(\rho - b\omega_k)^2 - 4c\omega_k^2 R_0}}{2c\omega_k^2},$$

$$k_2 = \frac{\rho - b\omega_k + \sqrt{(\rho - b\omega_k)^2 - 4c\omega_k^2 R_0}}{2c\omega_k^2}.$$

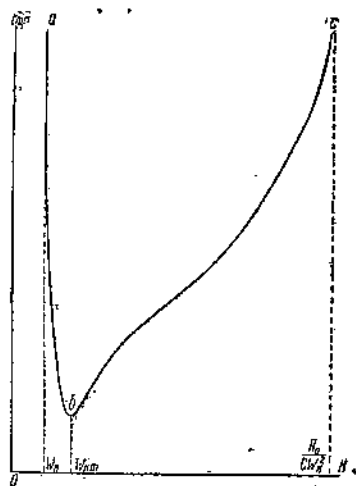
При $k = k_1$ время трогания $t_{\text{тр}} = 0$, при $k = k_2$ $t_{\text{тр}} = 0$. Для какого-то значения $k = k_m$, заключающегося между k_1 и k_2 , мы получим максимальное значение $t_{\text{тр}}$, причем значение k_m определится из уравнения:

$$\ln \frac{\rho k_m}{m(R_0 + b\omega_k k_m + c\omega_k^2 k_m^2)} = \frac{(L_0 + a\omega_k^2 k_m^2)(R_0 - c\omega_k^2 k_m^2)}{k_m [b\omega_k L_0 - 2\omega_k^2 (aR_0 - cL_0) k_m - ab\omega_k^3 k_m^2]}.$$

Уравнение это может быть решено графическим способом. Откладывая по оси абсцисс значения k , по оси ординат время трогания $t_{\text{тр}}$, получим кривую $k_1 a k_2$, приведенную на фиг. 92, действующая часть которой проведена сплошной линией.



Фиг. 92.



Фиг. 93.

γ) Общее время трогания. Складывая ординаты соответствующих кривых фиг. 91 и 92, получим кривую общего времени трогания abc (фиг. 93). Аналитически это время выражается следующей формулой:

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_0 + a\omega_k^2 k^2}{R_0 + b\omega_k k + c\omega_k^2 k^2} \ln \frac{\rho \rho_m}{(R_0 - c\omega_k^2 k)(R_0 + b\omega_k k + c\omega_k^2 k^2)} \cdot \frac{k^2}{k-1},$$

где

$$\rho = R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2; \quad \rho_m = \frac{1}{m}(R_0 + b\omega_k + c\omega_k^2).$$

Переходим к более сложным электрическим цепям.

в) Релейные цепи с последовательно-параллельным соединением приборов

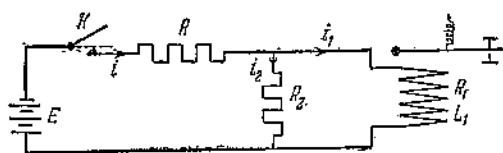
1. Цепь из активного сопротивления и реле, шунтированного активным же сопротивлением (фиг. 94).

а) Замыкание цепи. Обозначим:

$$I_1 = \frac{ER_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}; \quad \tau_1 = \frac{L_1(R + R_2)}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2},$$

тогда закон нарастания тока в обмотке реле выразится следующей формулой:¹⁾

$$i_1 = I_1 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}).$$



Фиг. 94.

Проведем анализ зависимости времени трогания $t_{тр}$ якоря реле от сопротивления шунта R_2 , причем ограничимся только графическим методом анализа.

Графический анализ зависимости $i_1 = f(R_2)$ при $E = \text{const.}$

Так как для $R_2 = 0 \dots I_1 = 0$ и для $R_2 = \infty \dots$

$$I_1 = \frac{E}{R + R_1} = I_0, \text{ причем } \frac{dI_1}{dR_2} = E \frac{RR_1}{(RR_1 + RR_2 + R_1R_2)^2} > 0;$$

то зависимость установившегося в обмотке реле тока I_1 от сопротивления шунта R_2 выразится кривой фиг. 95. С другой стороны,

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{I_1}{\tau_1} = \frac{ER_2}{L_1(R + R_2)},$$

причем для $R_2 = 0 \dots \text{tg } \alpha_0 = 0$; для $R_2 = \infty \dots \text{tg } \alpha_0 = \frac{E}{L_1}$

и

$$\frac{d \text{tg } \alpha_0}{dR_2} = \frac{E}{L_1} \frac{R}{(R + R_2)^2} > 0.$$

Следовательно, зависимость тангенса угла начальной касательной от шунта R_2 изобразится кривой фиг. 96. На основе полученных кривых фиг. 95 и 96 нетрудно построить группу кривых нарастания в обмотке реле тока i_1 для разных значений сопротивления R_2 шунта (фиг. 97) и, задаваясь значением рабочего тока i_p , построить кривую зависимости времени трогания якоря $t_{тр}$ от R_2 (фиг. 98).

Графический анализ зависимости $i_1 = \varphi(R)$ при $I_1 = \text{const.}$

Поддерживать постоянной силу установившегося тока I_1 мы можем лишь за счет соответствующего изменения электродвижущей силы батарей.

Пусть

$$I_1 = I_0 = \frac{E}{R + R_1} = \text{const.},$$

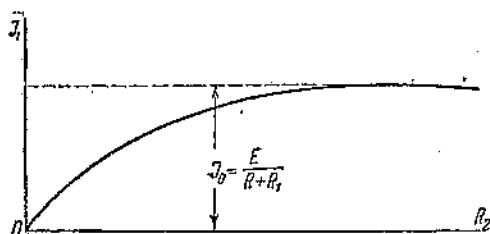
тогда

$$I_1 = \frac{E_1 R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} = I_0 = \frac{E}{R + R_1},$$

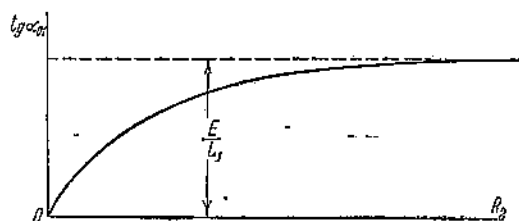
откуда

$$E_1 = \frac{E}{R + R_1} \left(R + R_1 + \frac{RR_1}{R_2} \right).$$

Для каждого значения сопротивления R_2 шунта мы получим определенное значение электродвижущей силы E_1 , постоянной времени τ_1 и соответствующую кривую нарастания тока i_1 . Для построения последних проведем анализ зависимости постоянной времени τ_1 от R_2 :

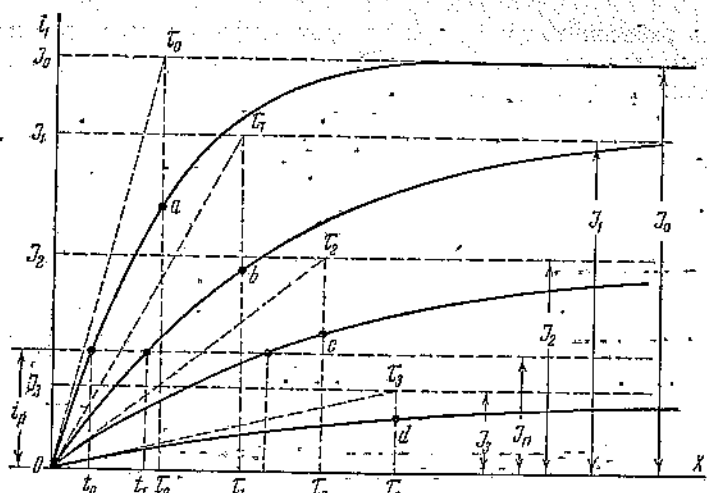


Фиг. 95.



Фиг. 96.

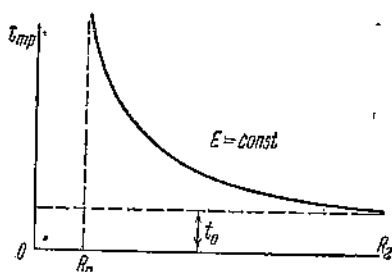
¹ В. И. Коваленков. Основы теории связи, ч. I. ГНТИ, 1931, стр. 115—116.



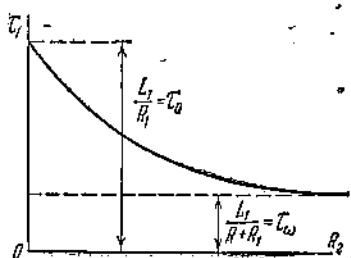
Фиг. 97.

Для $R_2 = 0 \dots \tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$; для $R_2 = \infty \dots \tau_1 = \frac{L_1}{R + R_1}$;

$$\frac{d\tau_1}{dR_2} = -\frac{L_1 R^2}{(R R_1 + R R_2 + R_1 R_2)^2} < 0.$$

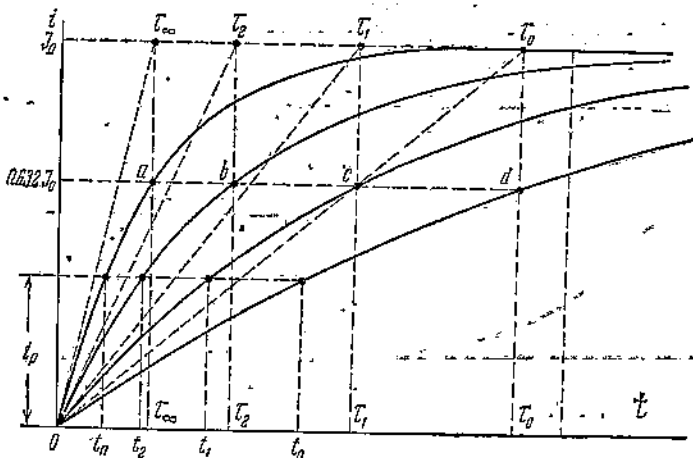


Фиг. 98.



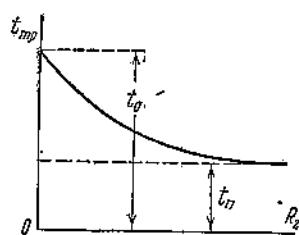
Фиг. 99.

Таким образом, зависимость постоянной времени τ_1 от сопротивления R_2 изобразится кривой фиг. 99. Имея же в виду постоянство установившегося тока I_1 и кривую фиг. 99, строим группу кривых нарастания тока i_1 во времени (фиг. 100).



Фиг. 100.

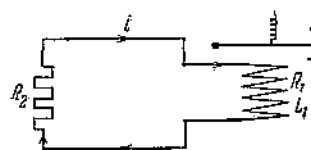
Задавая рабочим током i_p , при котором якорь начинает двигаться, получим все данные для построения кривой зависимости времени трогания $t_{тр}$ от сопротивления R_2 шунта (фиг. 101).



Фиг. 101.

где

β) Размыкание цепи (фиг. 94). Рассмотрим сначала тот случай, когда в рассматриваемой цепи $E = \text{const}$. Полагая разрыв цепи при поднятии ключа мгновенным, приходим при размыкании цепи к схеме фиг. 102, причем изменение тока в цепи происходит по закону:



Фиг. 102.

$$i = I_1 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$I_1 = \frac{ER_2}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

Задавая рабочим током i_p , при котором якорь начинает отходить от контактного винта, и подставляя его в приведенную формулу для i , получим:

$$t_{тр} = \tau \ln \frac{I_1}{i_p} = \frac{L_1}{R_1 + R} \ln \frac{R_2(R_{2n} + R_3)}{R_{2n}(R_2 + R_3)},$$

где

$R_3 = \frac{RR_1}{R + R_1}$ и R_{2n} — то предельное значение сопротивления шунта, при котором рабочий ток i_p равен установившемуся току в обмотке реле:

$$i_p = \frac{ER_{2n}}{RR_1 + RR_{2n} + R_1R_{2n}}.$$

Так как

$$\ln \frac{R_2(R_{2n} + R_3)}{R_{2n}(R_2 + R_3)} = 0 \quad \text{для} \quad R_2 = R_{2n},$$

то равно нулю и время трогания $t_{тр}$.

С другой стороны, с приближением R_2 к бесконечности,

$$\left[\frac{R_2(R_{2n} + R_3)}{R_{2n}(R_2 + R_3)} \right]_{R_2 = \infty} = \frac{R_{2n} + R_3}{R_{2n}} > 1.$$

и

$$\left(\frac{L_1}{R_1 + R_2} \right)_{R_2 = \infty} = 0,$$

следовательно, время трогания $t_{тр}$ стремится к нулю. Таким образом, при каком-то значении сопротивления R_2 время трогания $t_{тр}$ проходит через максимум. Для его определения приравняем нулю первую производную $t_{тр}$ по R_2 :

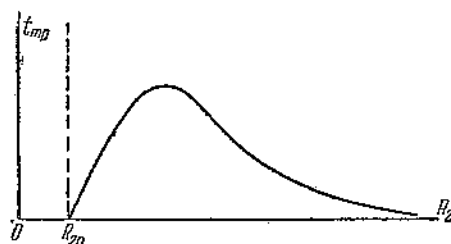
$$\frac{dt_{тр}}{dR_2} = -\frac{L_1}{(R_1 + R_2)^2} \ln \frac{R_2(R_{2n} + R_3)}{R_{2n}(R_2 + R_3)} + \frac{L_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_3}{R_2(R_2 + R_3)} = 0,$$

т. е.

$$R_3 = \frac{R_2(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2} \ln \frac{R_2(R_{2n} + R_3)}{R_{2n}(R_2 + R_3)},$$

откуда сопротивление R_2 определяем графическим способом.

Таким образом, зависимость $t_{тр}$ от R_2 при $E = \text{const}$ может быть изображена кривой фиг. 103.



Фиг. 103.

Если же в обмотке реле рассматриваемой цепи фиг. 94 поддерживается постоянным установившийся ток I_1 , то зависимость $t_{тр}$ от R_2 будет коренным образом отличаться от приведенной на фиг. 103.

Действительно, в этом случае

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln \frac{I}{I_p} = \frac{L_1}{R_1 + R_2} \ln \frac{I}{I_p}.$$

Для $R_1 = 0$ время трогания

$$t_{\text{тр}} = \frac{L_1}{R_2} \ln \frac{I}{I_p},$$

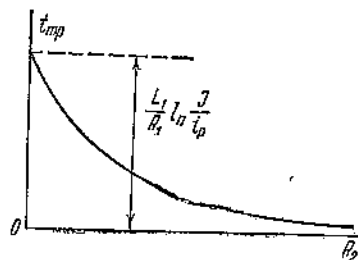
для $R_2 = \infty \dots$

$$t_{\text{тр}} = 0,$$

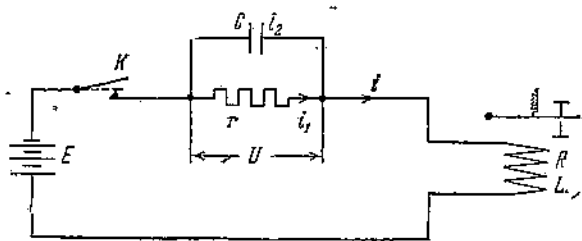
причем

$$\frac{dt_{\text{тр}}}{dR_2} = -\frac{L_1}{(R_1 + R_2)^2} \ln \frac{I}{I_p} < 0,$$

т. е. зависимость $t_{\text{тр}}$ от R_2 при $I = \text{const}$ выражается кривой фиг. 104.



Фиг. 104.



Фиг. 105.

2. Схема под названием „земля Максвелла“ (фиг. 105).

Так как

$$i = i_1 + i_2 = \frac{U}{r} + C \frac{dU}{dt},$$

$$E = U + Ri + \frac{di}{dt},$$

то

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2b \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{E}{LCr},$$

где

$$b = \frac{L + CRr}{2LCr}, \quad \omega_0^2 = \frac{r + R}{LCr}.$$

Общее решение приведенного уравнения имеет следующий вид:

$$i = \frac{E}{r + R} + e^{-bt} (A_1 e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Имея в виду временные условия: для $t = 0$ ток $i = 0$ и производная

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{L},$$

находим постоянные A_1 и A_2 :

$$A_1 = E \frac{r + R - Lb - L\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{2L(r + R)\sqrt{b^2 - \omega_0^2}},$$

$$A_2 = -E \frac{r + R - Lb + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{2L(r + R)\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}.$$

Ограничимся рассмотрением только апериодического процесса. Произведя соответствующую подстановку, приходим к следующему решению:

$$i = I \left\{ 1 + e^{-bt} \left[\frac{r+R-Lb}{L\sqrt{b^2-\omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2-\omega_0^2} t - \operatorname{ch} \sqrt{b^2-\omega_0^2} t \right] \right\},$$

где

$$I = \frac{E}{r+R}.$$

Представим это решение в следующем виде:

$$i = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + i_m,$$

где

$$i_m = I \left[e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-bt} \left(\frac{r+R-Lb}{L\sqrt{b^2-\omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2-\omega_0^2} t - \operatorname{ch} \sqrt{b^2-\omega_0^2} t \right) \right]$$

и

$$\tau = \frac{L}{r+R}.$$

Ток i_m характеризует собою влияние конденсатора C на процесс установливания тока i в реле, так как при отсутствии конденсатора ток i нарастает во времени по закону:

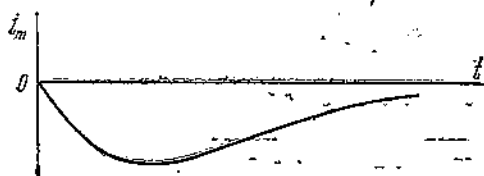
$$i = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Чтобы выявить влияние емкости C на устанавливающиеся процессы в реле, необходимо проанализировать формулу для i_m .

Выявим те условия, при которых конденсатор C будет ускорять работу реле, т. е. будет делать кривую нарастания тока i более крутой по сравнению с тем случаем, когда емкость C отсутствует.

Очевидно, для случая, когда

$$\frac{r+R-Lb}{L\sqrt{b^2-\omega_0^2}} < 0,$$



Фиг. 106.

а это при апериодическом процессе соответствует условию

$$\frac{b}{Cr} > \omega_0^2,$$

ток i_m представится кривой фиг. 106, следовательно, емкость C будет замедлять работу реле.

Если же

$$\frac{r+R-Lb}{L\sqrt{b^2-\omega_0^2}} > 0,$$

что при апериодическом процессе соответствует условию

$$\frac{b}{Cr} < \omega_0^2,$$

ток i_m будет отрицательным в пределах:

$$0 < t < t_a,$$

и положительным в пределах:

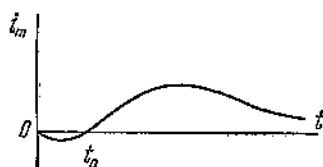
$$t_a < t < \infty,$$

причем при

$$\operatorname{th} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t_a = L \frac{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{r + R - Lb}, \text{ дополнительный ток } i_m - Ie^{-\frac{t_a}{\tau}} > 9,$$

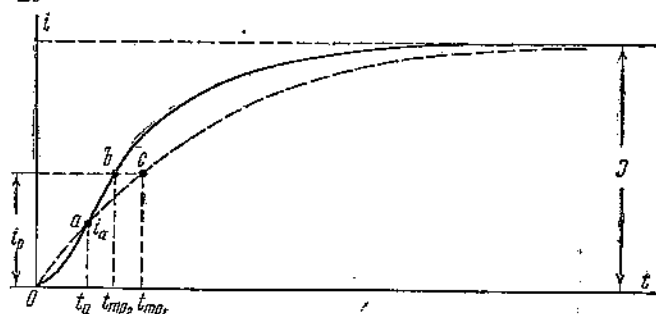
т. е. представится кривой фиг. 107.

При соблюдении этих условий соотношение между кривой тока i в цепи при отсутствии конденсатора (фиг. 108, пунктирная кривая) и при наличии конденсатора (фиг. 108, сплошная кривая) иллюстрируется графиками фиг. 108; взаимное же расположение кривой $\operatorname{th} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t$



Фиг. 107.

и прямой $L \frac{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{r + R - Lb}$ — фиг. 109. Чем меньше время t_a , т. е. чем меньше $L \frac{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{r + R - Lb}$, тем скорее начинается ускоряющий процесс, вызываемый



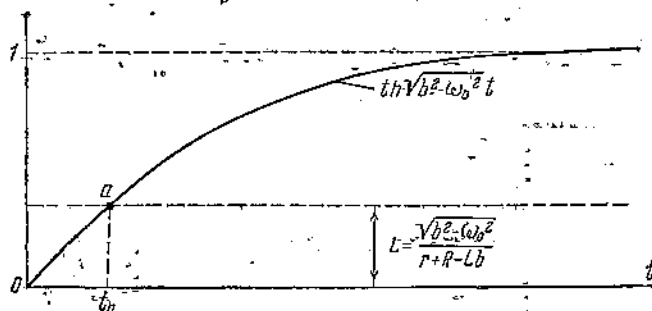
Фиг. 108.

наличием в цепи емкости C . Очевидно, что конденсатор C уменьшит время трогания t_{tr} якоря только в том случае, если

$$i_p > i_a,$$

т. е. если

$$i_p > I(1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}}).$$



Фиг. 109.

3. Упрощенная схема Гульстада для надземных линий. а) Замыкание цепи (фиг. 110). Пусть при переходе ключа k (якоря реле) цепь успела вполне разрядиться, тогда имеем:

$$i = i_1 + i_2,$$

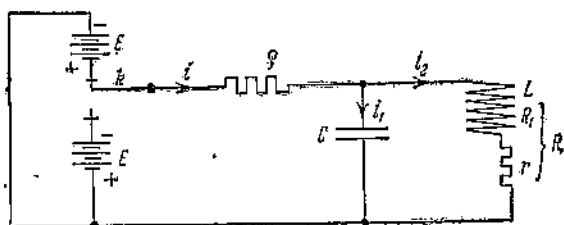
$$E = \rho i + R i_2 + L \frac{di_2}{dt} = \rho i + \frac{1}{C} \int i_1 dt,$$

следовательно,

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2b \frac{di_2}{dt} + \omega_0^2 i_2 = \frac{E}{\rho LC},$$

где

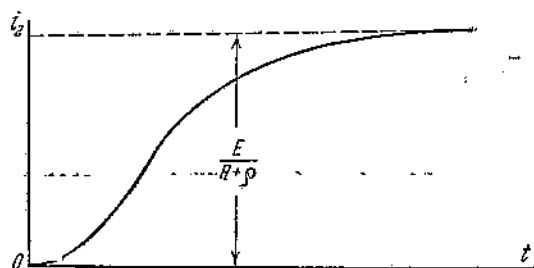
$$b = \frac{\rho RC + L}{2\rho LC} \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{R + \rho}{\rho LC}.$$



Фиг. 110.

Общее решение представится в следующем виде (будем рассматривать только апериодический процесс):

$$i_2 = \frac{E}{R + \rho} + e^{-bt} (B_1 e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t} + B_2 e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t}),$$

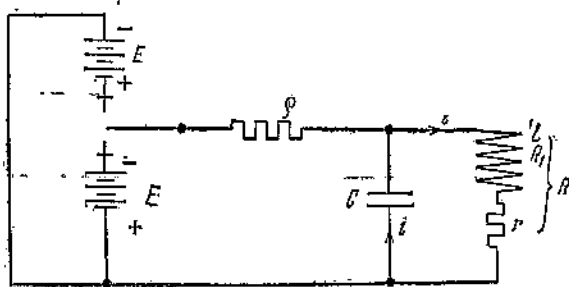


Фиг. 111.

где B_1 и B_2 — постоянные интегрирования, которые могут быть определены, исходя из временных условий: для $t=0$ ток $i_2=0$ и производная $\frac{di_2}{dt}=0$.

Определяя постоянные и подставляя в общие решения, получим:

$$i_2 = \frac{E}{R + \rho} \left[1 - e^{-bt} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t + \operatorname{ch} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t \right) \right].$$



Фиг. 112.

Нарастание тока i_2 во времени иллюстрируется кривой фиг. 111.

Подробнее останавливаться на анализе полученных формулы и кривой в настоящем труде мы не будем.

б) Разрыв цепи (фиг. 112). Установившийся заряд конденсатора C равен

$$Q = E \frac{RC}{R + \rho},$$

установившийся же ток I в момент разрыва цепи:

$$I = \frac{E}{R + \rho}.$$

Уравнение цепи из реле и конденсатора имеет вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2b \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$

где

$$b = \frac{R}{2L} \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

следовательно,

$$i_2 = e^{-bt} \left(A_1 e^{\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t} \right).$$

Так как для $t=0$ ток $i=I$ и производная

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = -2RI, \quad \text{то}$$

$$A_1 = \frac{-3b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} I \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{3b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}}{2\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} I,$$

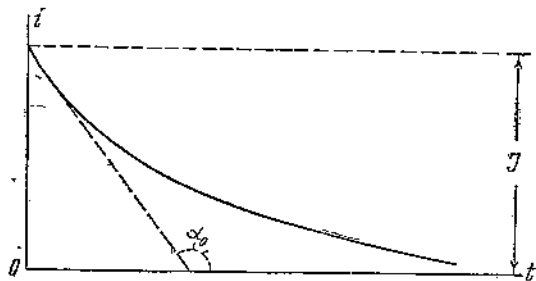
значит,

$$i = \frac{I e^{-bt}}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} \left(\sqrt{b^2 - \omega_0^2} \operatorname{ch} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t - 3b \operatorname{sh} \sqrt{b^2 - \omega_0^2} t \right).$$

Кривая разряда приведена на фиг. 113.

На этом мы закончим краткий анализ релейных схем. Более подробный анализ большого числа релейных схем можно найти в трудах В. И. Коваленкова: „Основы теории связи“, ч. I, ГНТИ, 1931, и „Магнитные цепи“, ч. IV, ВЭТА, 1936.

Теперь же в самых общих чертах коснемся процессов, связанных с перелетом якоря реле, ограничиваясь лишь методикой их анализа, оставляя подробный анализ этих сложных процессов до другого труда.



Фиг. 113.

г) Изменение тока и магнитного потока в цепи во время перелета якоря реле¹

1. Процесс установления тока в цепи с постоянным сопротивлением и меняющейся индуктивностью. Индуктивность релейной цепи зависит от величины междужелезного пространства реле. Междужелезное же пространство определяется положением якоря реле. С перелетом якоря от одного контакта к другому меняется междужелезное пространство, меняется и индуктивность цепи. Для упрощения математических выкладок сделаем предположение, что временная зависимость индуктивности при полете якоря выражается следующим законом:

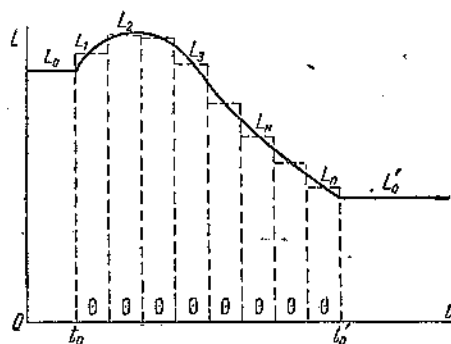
$$L = a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots,$$

¹ Коваленков В. И. Теория магнитных цепей, ч. III, изд. ВЭТА, 1935.

и что для реле с малым ходом якоря возможно ограничиться только первыми двумя членами полинома, т. е.

$$L \approx a + bt.$$

Подставляя в уравнение Гельмгольца приведенную формулу для индуктивности L , определим закон изменения тока в цепи с учетом изменения индуктивности L . В настоящем параграфе задачу эту решим методом интервалов.



Фиг. 114.

Делаем предположение, что индуктивность меняется скачками во времени, в течение же каждого малого промежутка времени θ (фиг. 114) сохраняет свою величину, делая скачок лишь при переходе от одного участка к другому. Вначале индуктивность имела значение L_1 и в течение первого промежутка времени t_0 ток при замыкании цепи нарастал по формуле Гельмгольца:

$$i_0 = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right),$$

где

$$I = \frac{E}{R} \text{ и } \tau_0 = \frac{L_0}{R}.$$

В конце этого промежутка времени, т. е. для $t = t_0$, имеем ток:

$$i_0 = I \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0}} \right).$$

Этот момент будет начальным для первого интервала времени θ , следовательно, для $t = 0$:

$$i_1 = I \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0}} \right)$$

и так как

$$i_1 = I + A_1 e^{-\frac{t_1}{\tau_1}},$$

то

$$I \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0}} \right) = I + A_1,$$

т. е.

$$A_1 = -I e^{-\frac{t_0}{\tau_0}},$$

значит,

$$i_1 = I \left[1 - e^{-\left(\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{t_1}{\tau_1} \right)} \right].$$

В конце первого интервала времени θ имеем для $t = \theta$:

$$i_1 = I \left[1 - e^{-\left(\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{\theta}{\tau_1} \right)} \right].$$

Этот момент будет начальным для второго интервала времени, т. е. для $t_2 = 0$:

$$i_2 = I \left[1 - e^{-\left(\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{\theta}{\tau_1} \right)} \right],$$

следовательно,

$$I \left[1 - e^{-\left(\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{\theta}{\tau_1} \right)} \right] = I + A_2,$$

откуда

$$A_2 = -I e^{-\left(\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{\theta}{\tau_1} \right)},$$

значит,

$$i_2 = I \left[1 - e^{-\left(\frac{t_0}{\tau_0} + \frac{\Theta}{\tau_1} + \frac{t_2}{\tau_2}\right)} \right].$$

Для $t_2 = \Theta$ имеем:

$$i_2 = I \left[1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0} - \Theta \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)} \right].$$

Исходя отсюда, для третьего интервала времени получим:

$$A_3 = -I e^{-\frac{t_0}{\tau_0} - \Theta \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

и

$$i_3 = I \left[1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0} - \Theta \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) - \frac{t_3}{\tau_3}} \right].$$

Таким же путем придем к следующей общей формуле:

$$i_n = I \left[1 - e^{-\frac{t_0}{\tau_0} - \Theta \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots + \frac{1}{\tau_{n-1}}\right) - \frac{t_n}{\tau_n}} \right],$$

или, после подстановки $\tau_k = \frac{L_k}{R}$, имеем:

$$i_n = I \left[1 - e^{-\frac{R t_0}{L_0} - R \left(\frac{\Theta}{L_1} + \frac{\Theta}{L_2} + \frac{\Theta}{L_3} + \dots + \frac{\Theta}{L_{n-1}} + \frac{t_n}{L_n}\right)} \right].$$

С непрерывным уменьшением интервала Θ выражение

$$\frac{\Theta}{L_1} + \frac{\Theta}{L_2} + \frac{\Theta}{L_3} + \dots + \frac{\Theta}{L_{n-1}} + \frac{t_n}{L_n}$$

стремится к следующему интегралу:

$$\int \frac{1}{L} dt.$$

Итак, для промежутка времени от t_0 до t'_0 (фиг. 114) ток будет нарастать по формуле:

$$i = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L_0} t_0 - R \int_0^t \frac{dt}{L}} \right).$$

2. Изменение тока с учетом перелета якоря. Разобьем кривую нарастания тока во времени на три части:

- а) кривая нарастания тока до момента трогания якоря,
- б) кривая нарастания тока во время перелета якоря,
- в) кривая нарастания тока, начиная с того момента, как якорь, перебросившись от одного контакта к другому, остановится (дребезжанием якоря пренебрегаем).

Первая часть кривой (до начала перелета якоря) от момента $t=0$ до $t=t_0$ (фиг. 114) нарастает по известной формуле Гельмгольца:

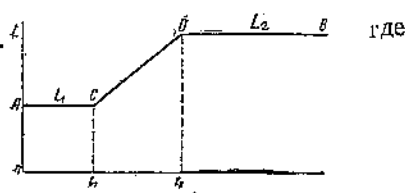
$$i_1 = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L_0} t} \right).$$

Вторая часть кривой, соответствующая перелету якоря от $t=t_0$ до $t=t'_0$, подчиняется закону (начало времен переносится в точку t'_0):

$$i_2 = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L_0} t'_0 - R \int_0^t \frac{dt}{L}} \right).$$

Третья часть после перелета якоря от $t=t'_0$, как легко видеть, определяется формулой (начало времени в точке t'_0):

$$i_3 = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L_2} t} \right) + I_0 e^{-\frac{R}{L_2} t},$$



Фиг. 115.

$$I_0 = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L_2} t_0 - R \int_0^{t'_0} \frac{dt}{L}} \right).$$

Для реле с малым ходом якоря, как мы приняли, индуктивность L во время перелета якоря от верхнего контакта к нижнему меняется по закону прямой. Формула же прямой, проходящей через две точки C и D (фиг. 115), имеет следующий вид:

$$\frac{L - L_1}{L_2 - L_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1},$$

откуда

$$L = a + bt,$$

где

$$a = \frac{L_1 t_2 - L_2 t_1}{t_2 - t_1}$$

и

$$b = \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1}.$$

Интеграл

$$R \int_0^t \frac{dt}{L} = R \int_0^t \frac{dt}{a + bt} = \frac{R}{b} \ln \frac{a + bt}{a} = \frac{R}{b \lg e} \lg \left(1 + \frac{b}{a} t \right)$$

и

$$R \int_0^{t_2} \frac{dt}{L} = \frac{R}{b \lg e} \lg \left(1 + \frac{b}{a} t_2 \right).$$

Рассмотрим численный пример. Пусть $L_2 = 2L_1$,

$$t_1 = \tau_1 = \frac{L_1}{R}, \quad t_2 - t_1 = 0.2\tau_1;$$

тогда

$$\frac{b}{a} = \frac{L_2 - L_1}{L_1 t_2 - L_2 t_1} = -\frac{1.25}{\tau_1},$$

$$\frac{R}{b} = \frac{t_2 - t_1}{L_2 - L_1} = 0.2.$$

Подставляя в формулу

$$i_2 = I \left[1 - e^{-\frac{R}{L_2} t_1 - R \int_0^t \frac{dt}{L}} \right],$$

или для рассматриваемого случая:

$$i_2 = I \left[1 - e^{-1 - \frac{R}{b \lg e} \lg \left(1 + \frac{b}{a} t \right)} \right],$$

получим табл. 8.

Таблица 8

$\frac{t}{0.2\tau_1}$	$\frac{i}{I}$	$\frac{L}{L_1}$
0	0.6321	1
0.1	0.6303	1.17
0.3	0.6262	1.33
0.5	0.6221	1.54
0.7	0.6179	1.75
1	0.6051	2

Третья часть кривой, как мы видели, подчиняется закону:

$$i_3 = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L_2} t} \right) + I_0 e^{-\frac{R}{L_2} t},$$

где при условии $L_2 = 2L_1$ ток $I_0 = 0.6051I$.

Теперь мы можем привести таблицу для всей кривой: если $L_2 = 2L_1$, $t_1 = \tau_1$ и $t_2 - t_1 = 0.2\tau_1$, то получим табл. 9. По этой таблице строим кривую фиг. 116.

Таблица 9

$\frac{t}{\tau_1}$	$\frac{i}{I}$	$\frac{t}{\tau_1}$	$\frac{i}{I}$	$\frac{t}{\tau_1}$	$\frac{i}{I}$
0	0	1.1	0.6221	4.2	0.9119
0.1	0.0952	1.14	0.6179	5.2	0.9466
0.3	0.2592	1.2	0.6051	6.2	0.9676
0.5	0.3935	1.4	0.6427	7.2	0.9803
0.7	0.5034	1.8	0.7080	8.2	0.9881
1	0.6321	2.2	0.7605	9.2	0.9928
1.02	0.6303	2.6	0.8039	10.2	0.9956
1.06	0.6262	3.2	0.8547	11.2	0.9973

3. Изменение магнитного потока с учетом перелета якоря. Разобраным в предыдущем параграфе путем придем к формулам для магнитного потока.

Первая часть кривой до начала перелета якоря:

$$\Phi_1 = \Phi_{y1} \left(1 - e^{-\frac{R}{L_0} t} \right),$$

где

$$\Phi_{y1} = \frac{L_0 I}{w}.$$

Третья часть кривой после перелета якоря (начало времен в точке t'_0):

$$\Phi_3 = \Phi_{y2} \left(1 - e^{-\frac{R}{L'_0} t} \right) + \Phi'_{y2} e^{-\frac{R}{L'_0} t},$$

где Φ_{y2} — магнитный поток в последний момент перелета якоря и $\Phi'_{y2} = \frac{L'_0 I}{w}$.

Что касается второй части кривой во время перелета якоря, то она будет подчиняться несколько иному закону, чем ток. Действительно, во время нарастания тока (первая, вторая и третья части кривой) сила установившегося тока остается одной и той же, во время же нарастания магнитного потока установившееся значение потока, соответствующее разным частям кривой, различно. Первая и третья части кривой нарастания по закону Гельмгольца стремятся соответственно к потокам:

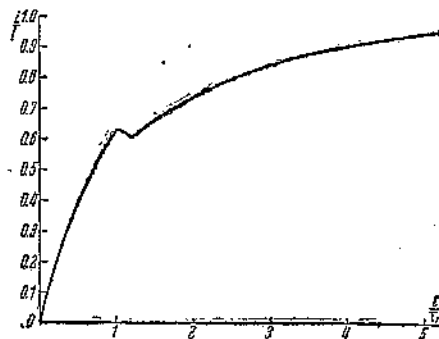
$$\Phi_{y1} = \frac{L_0 I}{w} \quad \text{и} \quad \Phi'_{y2} = \frac{L'_0 I}{w}.$$

вторая же часть кривой в каждом интервале стремится к своему установившемуся потоку, меняющемуся при переходе от одного интервала к другому. Закон нарастания магнитного потока во время перелета якоря выражается следующей формулой:

$$\Phi = e^{-\int_0^t \frac{dt}{\tau}} \left[\Phi_{y1} + \int_0^t \left(\Phi \cdot \frac{1}{\tau} e^{\int_0^t \frac{dt}{\tau}} \right) dt \right];$$

или

$$\Phi = e^{-R \int_0^t \frac{dt}{L}} \left(\Phi_{y1} + \frac{E}{w} \int_0^t e^{R \int_0^t \frac{dt}{L}} dt \right),$$



Фиг. 116.

где

$$L = a + bt,$$

причем

$$a = \frac{L_1 t_2 - L_2 t_1}{t_2 - t_1} \quad \text{и} \quad b = \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1}.$$

Зная законы изменения тока и индуктивности во время перелета якоря, кривую магнитного потока можно построить проще, исходя из формулы:

Таблица 10

$$\Phi w = Li.$$

$\frac{t}{\tau_1}$	$\frac{\Phi}{\Phi_{y1}}$	$\frac{t}{\tau_1}$	$\frac{\Phi}{\Phi_{y1}}$	$\frac{t}{\tau_1}$	$\frac{\Phi}{\Phi_{y1}}$
0	0	1.1	0.9580	4.2	1.824
0.1	0.0952	1.14	1.083	5.2	1.893
0.3	0.2593	1.2	1.210	6.2	1.935
0.5	0.3935	1.4	1.285	7.2	1.961
0.7	0.5034	1.8	1.416	8.2	1.976
1	0.6321	2.2	1.521	9.2	1.986
1.02	0.7375	2.6	1.607	10.2	1.991
1.06	0.8266	3.2	1.709	11.2	1.995

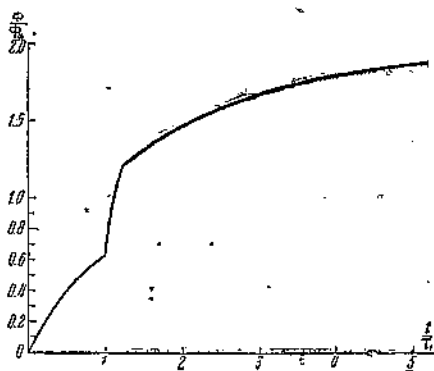
Приводим таблицу значений магнитного потока, соответствующую приведенной выше таблице для тока. Если $L_2 = 2L_1$, $t_1 = \tau_1$ и $t_2 - t_1 = 0.2\tau_1$, то получим табл. 10.

По этой таблице строим кривую фиг. 117.

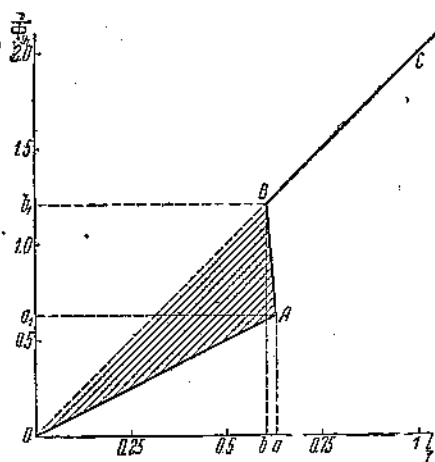
4. **Динамические магнитные характеристики.** Имея кривые тока и магнитного потока, нетрудно построить и соответствующие динамические магнитные характеристики. Откладывая по оси абсцисс мгновенные значения тока, по оси ординат мгновенные значения магнитного потока, получим кривую фиг. 118. Остановимся на этой кривой подробнее.

Выше мы видели, что запас энергии в электромагнитном приемнике, имеющем прямолинейную динамическую магнитную характеристику, выражается формулой:

$$W = \frac{\Phi_y I}{2} w \text{ джоулей.}$$



Фиг. 117.



Фиг. 118.

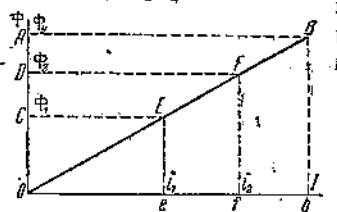
Пусть прямая OB (фиг. 119) представляет собою динамическую магнитную характеристику при изменении тока от нуля до своего установившегося значения $Ob = I$, тогда энергия приемника выразится произведением площади треугольника OAB на число витков обмотки реле w (полагая, что эквивалентный магнитный поток пересекает все витки обмотки). В процессе нарастания тока от нуля до какого-то значения $i_1 = Oc$ приемник запасает энергию:

$$W_1 = \frac{\Phi_1 i_1}{2} w \text{ джоулей,}$$

т. е. пропорциональную площади треугольника OCE ; при нарастании тока до $i_2 = Of$ энергия пропорциональна площади треугольника ODF ; при изменении

тока от значения i_1 до значения i_2 запас энергии увеличится на величину, пропорциональную площади $CDFE$.

Рассматривая динамическую характеристику фиг. 118, приходим к следующему. При изменении тока от нуля до значения Oa в приемнике создается магнитная энергия, пропорциональная площади треугольника Oa_1 , при переходе от значения тока Oa до Ob , т. е. во время перелета якоря, прирост магнитной энергии пропорционален площади a_1ABb_1 . К концу перелета якоря общее количество созданной в приемнике магнитной энергии пропорционально площади $OABb_1$. Количество же фактически запасенной приемником энергии в конце перелета пропорционально площади треугольника OBb_1 (по динамической характеристике OBC , которую мы получили бы, если бы якорь во все время нарастания тока находился у нижнего упора). Избыток энергии, пропорциональный заштрихованной площади треугольника OAB , преобразуется в механическую энергию перелета якоря.



Фиг. 119.

Динамическая характеристика фиг. 119, соответствует нарастанию тока в обмотке реле. Рассмотрим теперь случай убывания тока при вынесении из цепи батареи E , не разрывая цепи (фиг. 124).

5. Влияние перелета якоря на убывание тока и магнитного потока в реле. Кривая убывающего тока состоит из трех частей. Если началом времени каждой части считать начальный момент соответствующей части, то будем иметь нижеследующие формулы.

Первая часть кривой:

$$i_1 = Ie^{-\frac{R}{L_1}t},$$

вторая часть кривой:

$$i_2 = Ie^{-\frac{R}{L_2}t_1 - R \int_0^{t_1} \frac{dt}{L}},$$

третья часть кривой:

$$i_3 = I_0 e^{-\frac{R}{L_1}t},$$

где

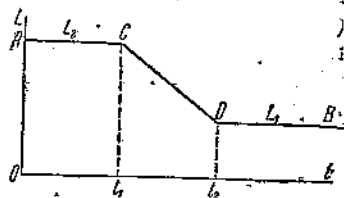
$$I_0 = Ie^{-\frac{R}{L_2}t_1 - R \int_0^{t_1} \frac{dt}{L}}.$$

Закон изменения индуктивности во время перелета якоря остается тот же, что и в разобранный выше случае нарастания тока, только изменение величины индуктивности идет не от наименьшего значения к наибольшему, а, наоборот, от наибольшего к наименьшему (фиг. 120), т. е.

$$L = a - bt,$$

где

$$a = \frac{L_2 t_2 - L_1 t_1}{t_2 - t_1}, \quad b = \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1}.$$



Фиг. 120.

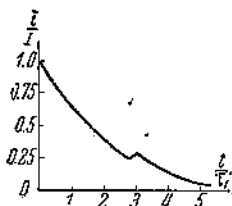
В этом случае имеем:

$$R \int_0^{t_1} \frac{dt}{L} = -\frac{R}{b \lg e} \lg \left(1 - \frac{b}{a} t \right),$$

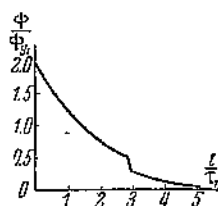
$$R \int_0^{t_2} \frac{dt}{L} = -\frac{R}{b \lg e} \lg \left(1 - \frac{b}{a} t_2 \right).$$

Допустим, что наше реле отпускает якорь не при потоке $\Phi_p'' = 0.632 \Phi_{y1}$, как при замыкании цепи, а при $\Phi_p' = 0.5 \Phi_{y1}$. В этом случае $t_1 = 2.8 \tau_1$. Пусть при этом $t_2 - t_1 = 0.2 \tau_1$ и $L_2 = 2L_1$. Строим кривые тока (фиг. 121), магнитного потока (фиг. 122) и динамической магнитной характеристики (фиг. 123).

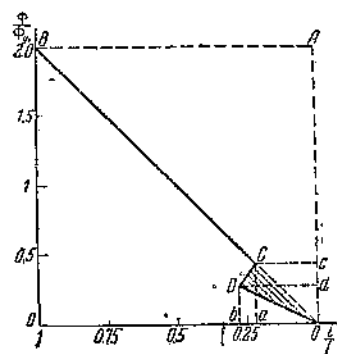
Как видно из динамической характеристики, полная запасенная энергия приемника при установившихся значениях тока и магнитного потока пропорциональна площади треугольника $ABCO$,



Фиг. 121.



Фиг. 122.



Фиг. 123.

общее же количество израсходованной энергии после вынесения из цепи батареей пропорционально площади $ABCO$. Избыток энергии, пропорциональный заштрихованной площади OCD , возвращается в цепь при перелете якоря из нижнего положения в верхнее.

Сравнивая характеристики фиг. 118 и 123, мы видим, что при отпускании якоря в цепь возвращается меньшее количество энергии, чем затрачивается при его притяжении. Разница между ними может характеризовать конструкцию якоря; чем меньше эта разница, тем рациональнее сконструирован и закреплен якорь.

Б. РЕЛЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СИЛЫ ТОКА

Постановка вопроса. Вся предыдущая глава была построена в предположении, что между индукцией B и напряженностью магнитного поля H имеется линейная зависимость. Между тем в действительности эта зависимость выражается довольно сложной математической формулой, значительно отличающейся от линейной. Но и выведенная выше формула зависимости B от H выражает собой статическую зависимость, т. е. зависимость между установившимися значениями индукции B и установившимися значениями напряженности магнитного поля H (или ампервитков). Между тем все электромагнитные реле работают в процессе установления тока, проходящего через обмотку реле, и магнитного потока последнего. В праве ли мы переносить статическую зависимость B от H на устанавливающиеся процессы? А priori — нет. Возможно, что связь между устанавливающимися магнитным потоком и током не та, что между потоком и током в их установившихся состояниях. Вопрос этот еще требует научно-экспериментальной обработки. Только после того как мы разберемся в этом вопросе, возможно будет перейти к анализу релейных схем с учетом влияния железа на устанавливающиеся в рассматриваемой цепи электромагнитные процессы. Таким образом, наш анализ построим следующим образом. Разберемся в вопросе о статических и динамических кривых намагничивания и затем перейдем к рассмотрению релейных схем. Наиболее удобным и простым способом получения динамических электромагнитных характеристик является способ осциллографический, при котором снимается осциллограмма тока, а по ней строятся соответствующие временные зависимости магнитного потока и самоиндукции. Описанием этого метода и получения динамических электромагнитных характеристик мы и начнем наш анализ.

а) Сравнительный анализ динамических и статических электромагнитных характеристик¹

1. Динамические электромагнитные характеристики цепи, состоящей только из индуктивности и активного сопротивления. Рассмотрим наиболее простую цепь из активного сопротивления R и индуктивности L (фиг. 124). Уравнение этой цепи имеет следующий вид:

$$E = Ri + \frac{dLi}{dt}.$$

Обозначим полное потокоцепление буквой Ψ , тогда

$$\Psi = Li = \Phi w,$$

т. е.

$$\Phi = \frac{Li}{w},$$

где w — число витков дросселя.

Подставляя в приведенное выше уравнение, имеем:

$$E = Ri + w \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$\frac{w}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{E}{R} - i.$$

Обозначим установившуюся силу тока в цепи через I , т. е. $I = \frac{E}{R}$, тогда

$$\frac{w}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = I - i$$

или

$$\frac{w}{R} d\Phi = Idt - idt,$$

откуда, интегрируя в пределах от 0 до t , находим:

$$\frac{w}{R} \Phi = It - \int_0^t idt.$$

Но $It = Q$ и $\int_0^t idt = q$, где Q и q — соответствующие количества электричества.

Итак,

$$\frac{w}{R} \Phi = Q - q.$$

Пусть ток в цепи нарастает по кривой OAB (фиг. 125), тогда для момента времени t , соответствующего точке a , количество электричества Q равно $Q = I \cdot Oa$, т. е. определяется площадью прямоугольника $Oa a_1 m$; количество же электричества q равно $q = \int_0^t idt$, т. е. определяется площадью $Oa_2 a$.

Таким образом имеем:

$$\frac{w}{R} \Phi_a = \text{площадь } O m a_1 a - \text{площадь } O a_2 a = \text{площадь } O a_2 a_1 m.$$

Таким же путем для момента времени, определяемого точкой b , получим:

$$\frac{w}{R} \Phi_b = \text{площадь } O a_2 b_2 b_1 a_1 m;$$

¹ Коваленков В. И. Сравнительный анализ динамических и статических электромагнитных характеристик. "Автоматика и телемеханика" № 2, 1938.

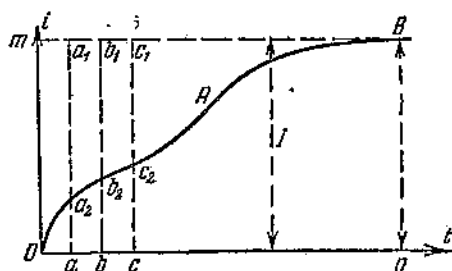
для момента времени $t = Oc$:

$$\frac{w}{R} \Phi_c = \text{площади } Oa_2b_2c_2c_1b_1a_1m.$$

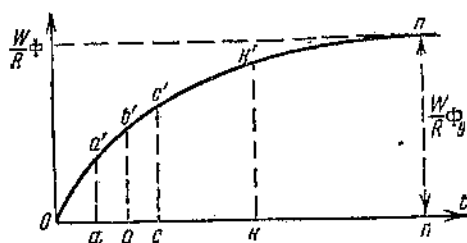
Для момента времени $t = On$, когда ток практически можно считать вполне установившимся, находим:

$$\frac{w}{R} \Phi_y = \text{площади } Oa_2b_2c_2Bc_1b_1a_1m.$$

Откладывая по оси абсцисс время, по оси ординат полученные значения $\frac{w}{R} \Phi$, получим кривую $Oa'b'c'h'n'$ (фиг. 126), ординаты которой будут пропор-



Фиг. 125.



Фиг. 126.

циональны мгновенным значениям магнитного потока Φ . Для перехода от полученной кривой к кривой магнитного потока, необходимо соответствующим образом изменить масштаб ординат.

Имея значения $\frac{w}{R} \Phi$, легко построить как кривую изменения индуктивности L дросселя во времени, так и зависимость мгновенных значений магнитного потока Φ и индуктивности L от мгновенных же значений тока i .

Так как

$$\Phi = \frac{Li}{w},$$

то

$$\frac{w}{R} \Phi = \frac{w}{R} \cdot \frac{Li}{w} = \frac{Li}{R}.$$

Обозначая площадь, соответствующую данному значению $\frac{w}{R} \Phi$, через S_k , находим

$$\frac{Lk i_k}{R} = S_k,$$

откуда

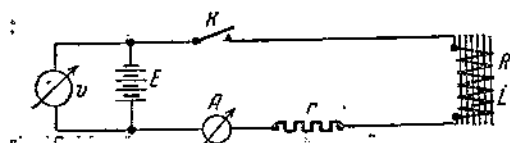
$$L_k = \frac{S_k}{i_k} R.$$

Имея в виду, что

$$S_k = Q_k - q_k,$$

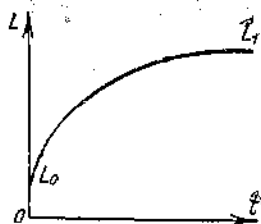
приходим к следующей формуле:

$$L_k = \frac{Q_k - q_k}{i_k} R.$$

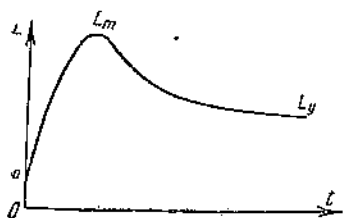


Фиг. 127.

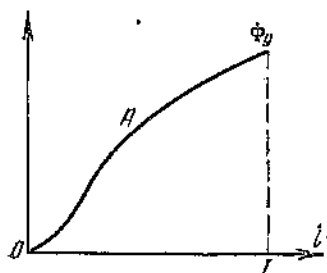
Включим в цепь фиг. 124 вольтметр V и амперметр A (фиг. 127). Пусть показание вольтметра при установившемся значении тока в цепи будет U вольт и показание амперметра I ампер; тогда сопротивление R внешней цепи



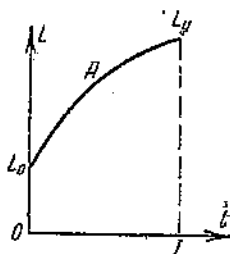
Фиг. 128.



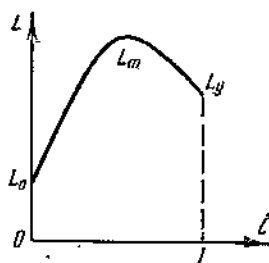
Фиг. 129.



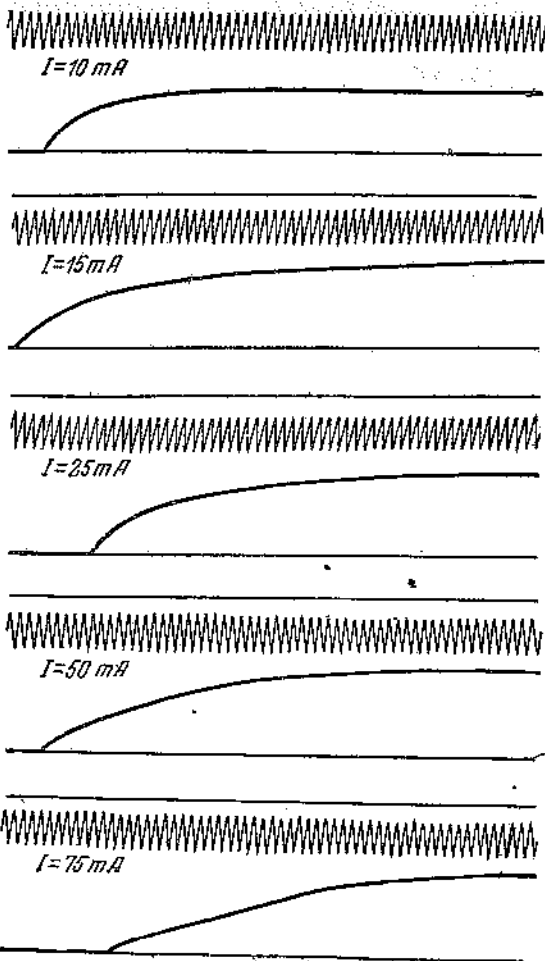
Фиг. 130.



Фиг. 131.



Фиг. 132.



Фиг. 133.

постоянному току будет равно отношению $\frac{U}{I}$.
Подставляя в формулу для I_k , находим:

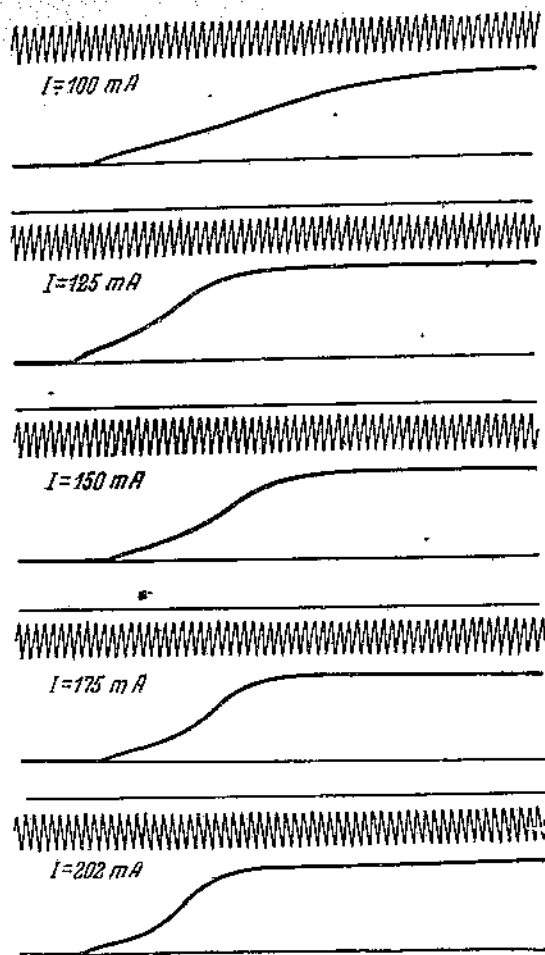
$$L_k = \frac{Q_k - q_k}{i_k} \cdot \frac{U}{I} \text{ генри.}$$

Таким путем получим кривую временной зависимости индуктивности L (фиг. 128 и 129), вид которой будет определяться степенью магнитного насыщения сердечника дросселя.

От кривых фиг. 125, 126, 128 и 129 нетрудно перейти к кривым зависимости магнитного потока Φ (фиг. 130) и индуктивности L (фиг. 131 и 132) от мгновенных значений тока i .

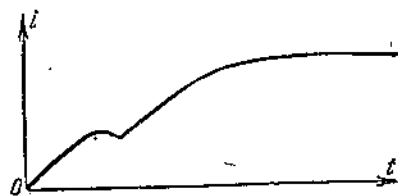
Определяя указанным путем временные зависимости магнитного потока и индуктивности, а также зависимость последних величин от мгновенных значений тока, мы получим экспериментальную базу, на которой сможем построить математическую теорию влияния железа на устанавливающиеся процессы в соответствующих электромагнитных цепях. О характере же влияния железа на процесс установления тока в простейшей цепи из активного сопротивления и индук-

ных значений тока, мы получим экспериментальную базу, на которой сможем построить математическую теорию влияния железа на устанавливающиеся процессы в соответствующих электромагнитных цепях. О характере же влияния железа на процесс установления тока в простейшей цепи из активного сопротивления и индук-



Фиг. 134.

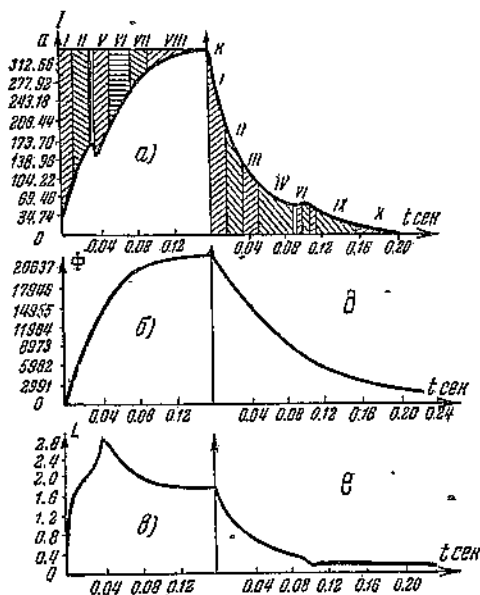
чество квадратных миллиметров на каждом участке площади. В результате получаем табл. 11, в которой ток i , магнитный поток Φ и индуктивность L приведены в условных единицах. Чтобы перейти от условных единиц к миллиамперам, максвеллам и генри, необходимо условные значения тока i умножить на коэффициент α , магнитного потока Φ — на β и индуктивности L — на γ , причем значения этих коэффициентов даются в примечаниях к таблице, а способ вычисления будет ясен из дальнейшего изложения.



Фиг. 135.

тивности (фиг. 124) можно судить по осциллограммам тока, приведенным на фиг. 133 и 134. Осциллограммы эти сняты для цепи с одним и тем же дросселем (число витков $w = 2500 = \text{const}$), но при различных установившихся значениях тока I . В качестве дросселя был взят тороид с сердечником из пластин лучшего трансформаторного железа; влияние токов Фуко на устанавливающиеся процессы в этом тороиде настолько ослаблено, что практически с ними можно совсем не считаться.

2. Переход от осциллограмм тока к кривым магнитного потока и индуктивности. Имея осциллограмму тока замыкания (фиг. 135), наносим координатные оси Ot и Oi (фиг. 136, а) и проводим асимптоту ak . Площадь, ограниченную кривой тока и асимптотой, разбиваем на ряд участков вертикальными прямыми с таким расчетом, чтобы легче было провести на основании подсчетов кривую магнитного потока. Перечерчиваем указанную площадь в увеличенном масштабе на миллиметровую бумагу и подсчитываем или определяем каким-либо иным путем коли-



Фиг. 136.

По этой таблице строим графики фиг. 136, б и 136, в. Сама обработка увеличенной на миллиметровой бумаге осциллограммы ведется следующим образом.

Пусть расстояние между вершинами синусоиды для определения времени (на миллиметровой бумаге) равно 20 мм, тогда 1 мм соответствует время, равное $\frac{1}{50} \cdot 20 = \frac{1}{1000}$ сек.

Установившийся ток для осциллограммы фиг. 125 равен 350 мА, а расстояние асимптоты от оси абсцисс на увеличенном изображении 201.5 мм, следовательно, 1 мм соответствует $\frac{350}{201.5}$ мА; площади же 1 мм² соответствует количество электричества $\frac{350}{201.5} \cdot \frac{1}{1000}$ $\frac{\text{мА}}{\text{сек}}$, в абсолютных же единицах: 1 мм соответствует $\frac{0.035}{201.5}$ абс. ед. тока, 1 мм² соответствует $\frac{0.035}{201.5} \cdot \frac{1}{1000}$ абс. ед. количества электричества, магнитный же поток Φ равен $\frac{SR}{w}$, причем для реле,

Таблица 11

Длина, мм	t сек.	i	Площадь S мм ²	Φ	L	Примечания
15.0	0.0150	58.5	2557	51.0	97.8	$\alpha = 1.737$ $\beta = 145.5$ $\gamma = 0.02$
32.5	0.0325	96.0	4483	95.5	111.6	
35.0	0.0350	93.0	5103	102.0	123.1	
36.0	0.0360	85.5	5221	104.5	137.2	
55.0	0.0550	135.0	6972	139.5	115.9	
75.0	0.0750	180.0	7765	155.5	96.9	
95.0	0.0950	195.0	8032	160.5	92.8	
135.0	0.1350	201.0	8141	163.0	91.0	
175.0	0.1750	201.5	8151	163.0	91.0	

соответствующего рассматриваемой осциллограмме, $R = 33.14 \Omega$ и $w = 2600$ витков, следовательно, для площади, например, $S = 8151$ мм² имеем магнитный поток:

$$\Phi = \frac{8151 \cdot 0.035 \cdot 33.14 \cdot 10^9}{1000 \cdot 201.5 \cdot 2600} = 18\,045 \text{ максвелл.}$$

Коэффициенты α , β и γ находятся следующим образом. Так как 1 мм ординаты кривой тока на миллиметровой бумаге соответствует $\frac{350}{201.5}$ мА $= 1.737$ мА, то $\alpha = 1.737$.

Наибольшее значение магнитного потока мы получили равным 18 045 максвелл, наибольшая же ордината кривой магнитного потока на миллиметровой бумаге в произвольном масштабе равна 163 мм, следовательно

$$\beta = \frac{18045}{163} = 145.5.$$

Таким же образом находим, что установившемуся значению индуктивности в произвольном масштабе (91 мм) соответствует индукция в 1.82 генри, следовательно

$$\gamma = \frac{1.82}{91} = 0.02.$$

3. Динамические временные характеристики тороида. В качестве первого объекта нашего исследования выберем тороид с сердечником из пластин лучшего трансформаторного железа. Активное сопротивление тороида $R_1 = 18 \Omega$, число витков обмотки $w = 2500$.

Таблица 12

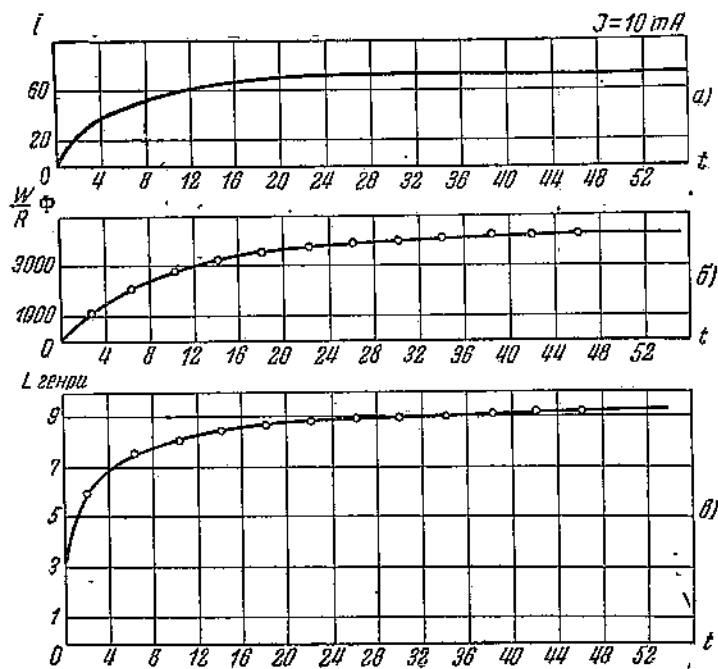
I, mA	E, V	R, Ω
10	0.65	65.00
15	0.60	40.00
25	1.4	56.00
50	2.0	40.00
75	2.0	26.67
100	2.0	20.00
125	3.4	27.20
150	3.4	22.62
175	3.55	20.29
202	3.9	19.30

Съемка осциллограмм тока велась при следующих значениях эдс батареи E , установившейся силе тока I и полном активном сопротивлении внешней цепи R (табл. 12).

В результате получим осциллограммы тока (фиг. 137, а, 138, а, 139, а, ... 145, а, 146, а). Пользуясь приведенным выше методом перехода от осциллограмм тока к соответствующим временным кривым магнитного потока и самоиндукции, получим для магнитного потока кривые фиг. 137, б, 138, б, 139, б, ... 145, б, 146, б и для индуктивности — фиг. 137, в, 138, в, 139, в, ... 145, в, 146, в.

Полученные кривые дают наглядную картину зависимости установления во времени тока и магнитного потока от степени магнитного насыщения железа

сердечника тороида. Кривые показывают, что если при слабых магнитных полях мы еще можем с некоторым приближением пользоваться формулами Гельмгольца, рассматривая процессы нарастания тока при замыкании цепи с электромагнитами, заключающими в себе железные сердечники, то при среднем и большем насыщении делать этого мы не в праве, так как закон нарастания тока резко отличается от закона Гельмгольца. Такую же резкую зависимость вида кривых от

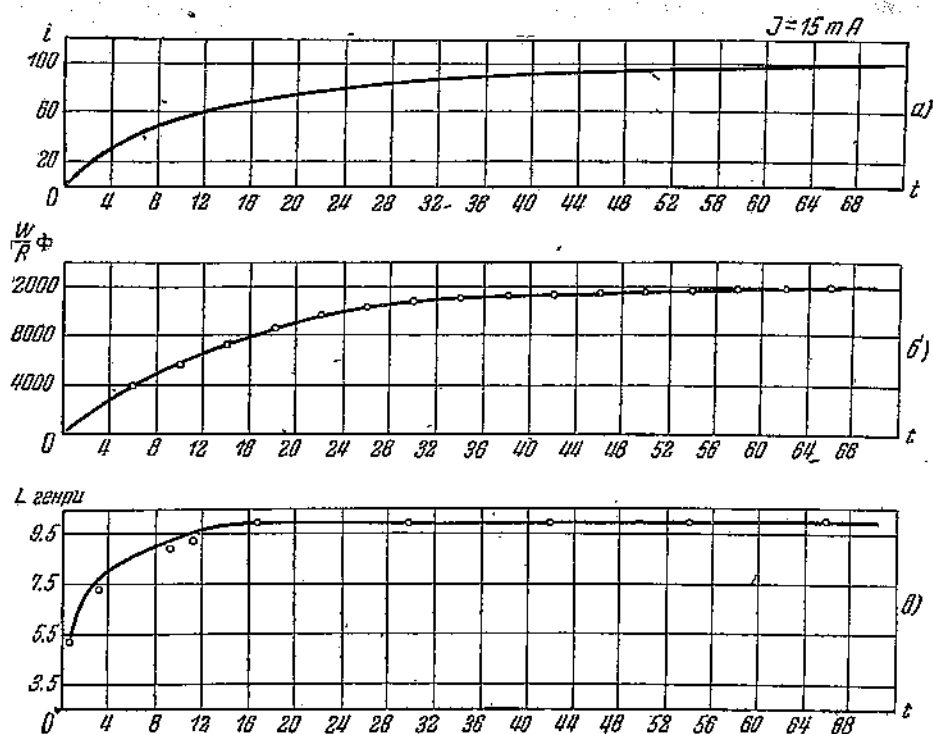


Фиг. 137.

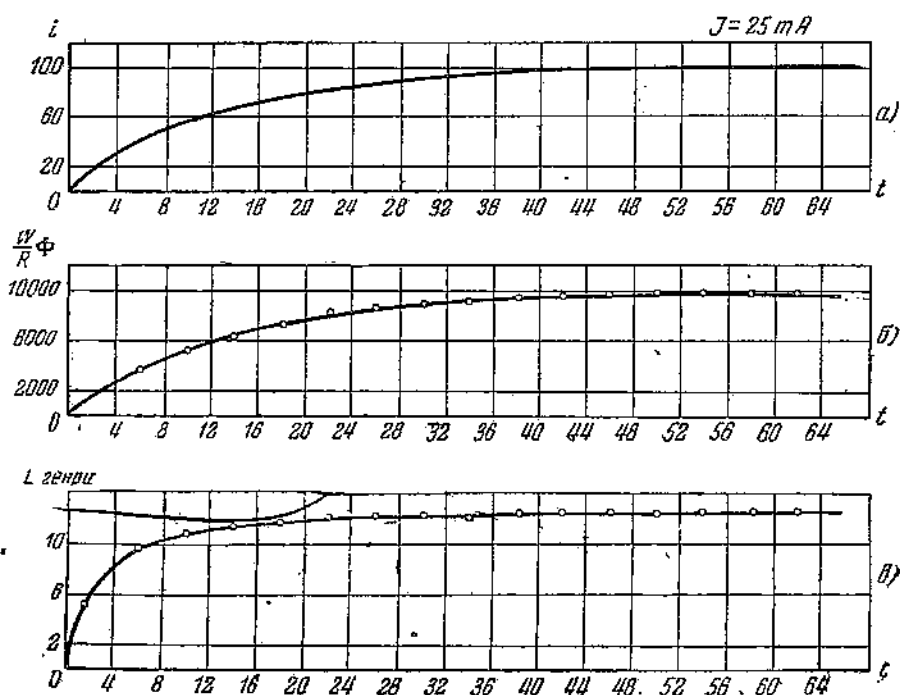
степени магнитного насыщения мы находим и при рассмотрении временного изменения индуктивности в процессе нарастания тока и магнитного потока.

Указанная резкая зависимость вида кривых тока и индуктивности от магнитного насыщения в значительной степени уменьшается при перемножении соответствующих ординат этих кривых, а так как магнитный поток Φ равен $\Phi = \frac{Li}{w}$, то по отношению к кривым магнитного потока наблюдается большая устойчивость: все кривые нарастания магнитного потока сохраняют один и тот же вид, напоминающий кривую Гельмгольца, но не совпадающий с ней.

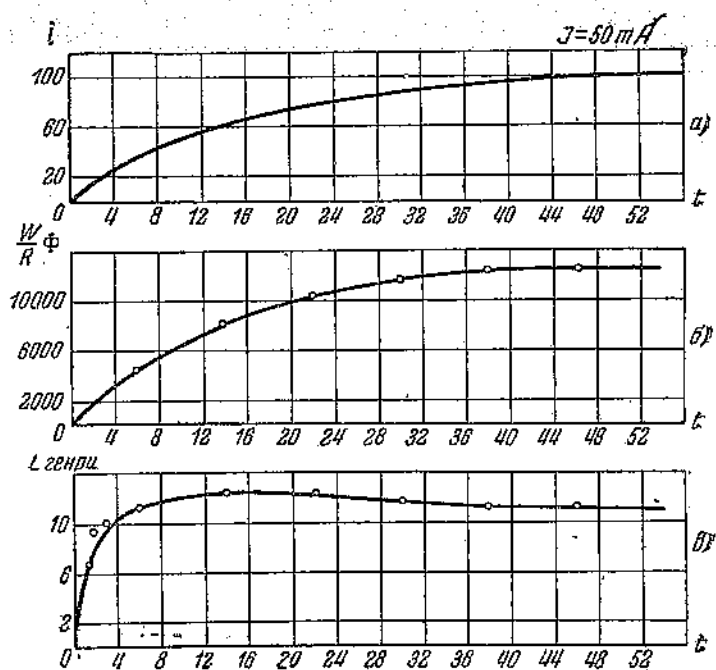
Остановимся подробнее на трех наиболее характерных для кривых индуктив-



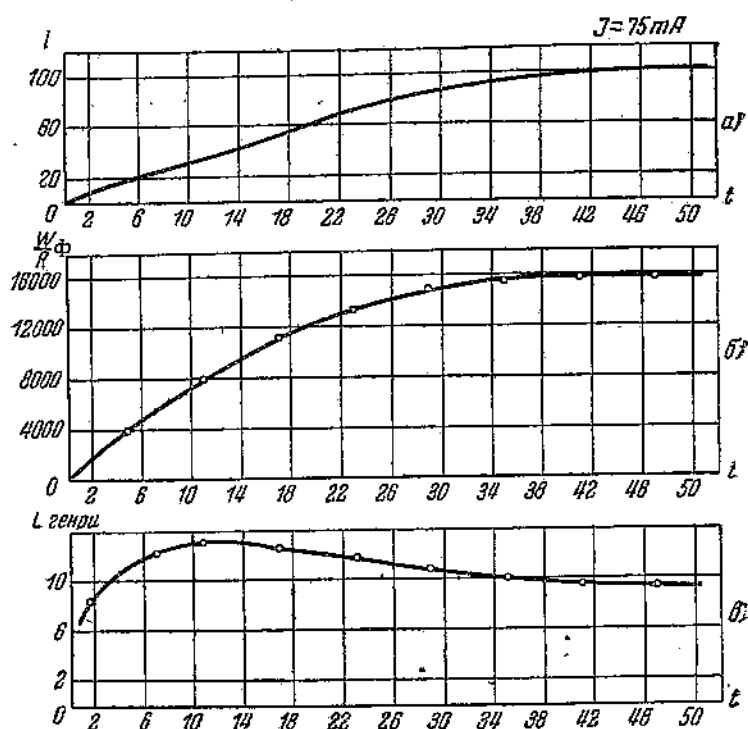
Фиг. 138.



Фиг. 139.



Фиг. 140.



Фиг. 141.

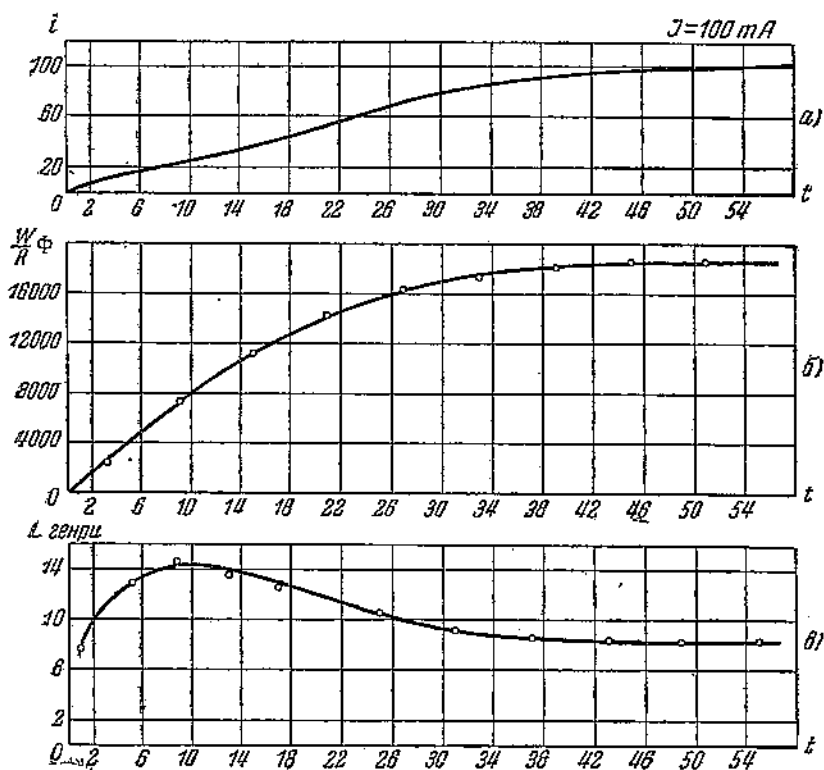
ности точках: установившемся, начальном и максимальном значениях индуктивности (фиг. 138, а, б, в; 139, а, б, в, ... 146, а, б, в).

а) Определение установившегося значения индуктивности. Обозначим активное сопротивление всей цепи через R ; тогда

$$E = Ri + \frac{dLi}{dt}.$$

Определим то конечное значение индуктивности, к которому она стремится с приближением времени к бесконечности. Обозначим это значение индуктивности через L_y , а соответствующее ей предельное значение постоянной времени цепи через τ_y . Разделим обе части уравнения на сопротивление R :

$$\frac{E}{R} = i + \frac{1}{R} \cdot \frac{dLi}{dt}.$$



Фиг. 142.

Имея в виду, что $\frac{E}{R} = I$ и интегрируя в пределах от $t=0$ до $t=\infty$, получим:

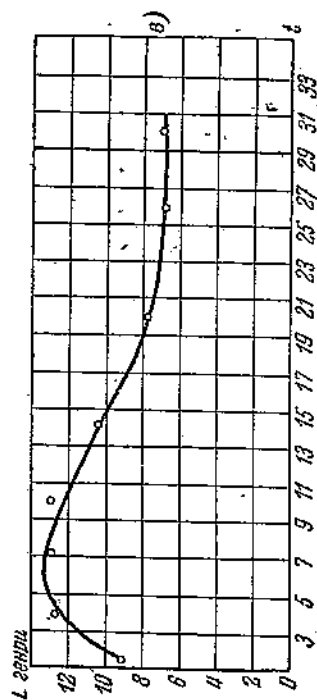
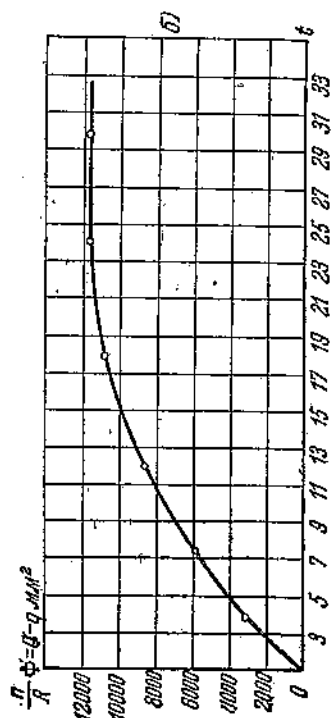
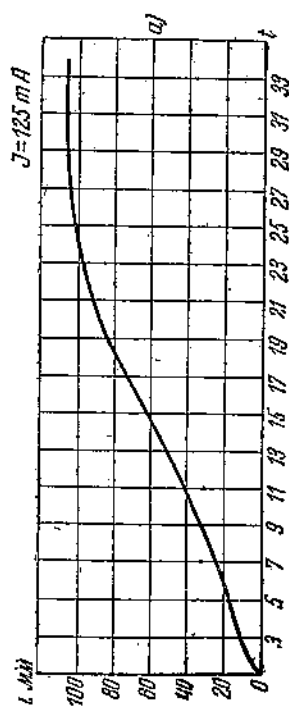
$$\int_0^{\infty} I dt - \int_0^{\infty} i dt = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \frac{dLi}{dt} dt = S,$$

откуда

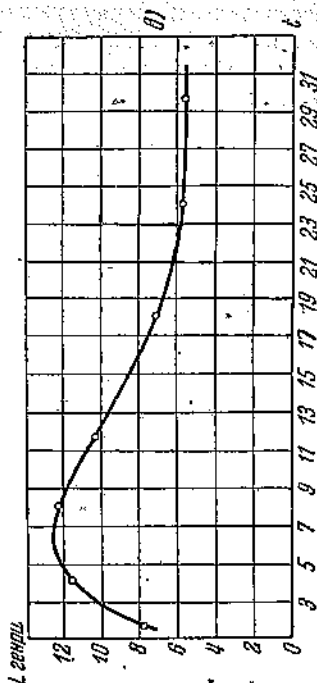
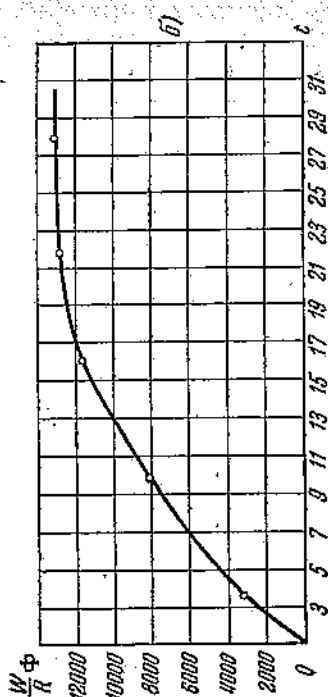
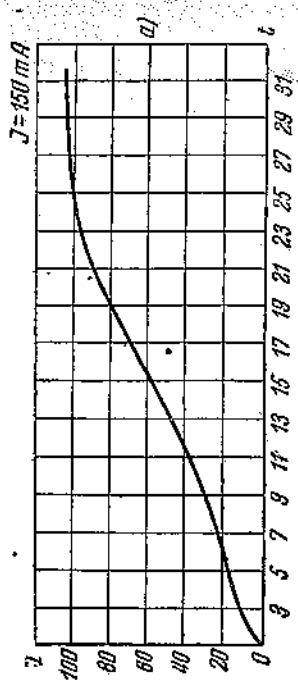
$$S = \frac{1}{R} \left| Li \right|_0^{\infty} = Q - q,$$

где

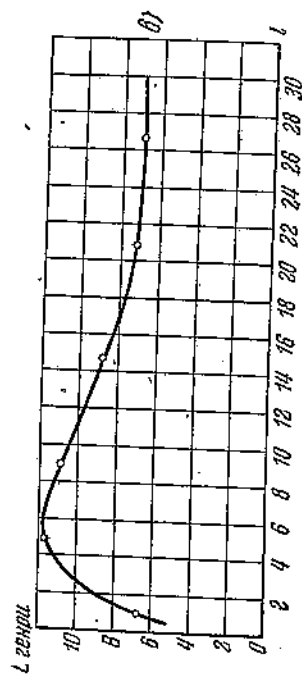
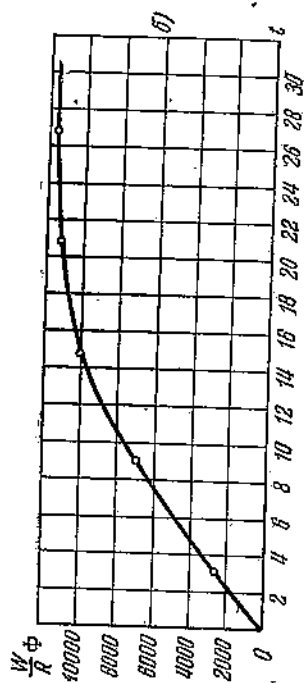
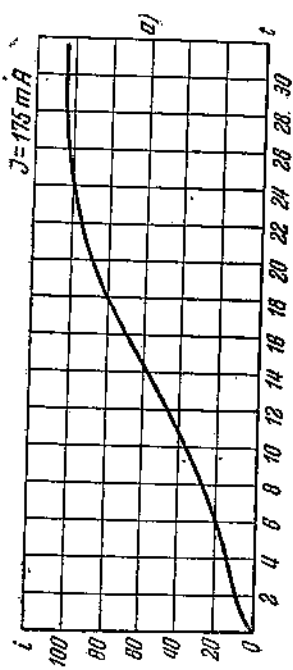
$$Q = \int_0^{\infty} I dt \text{ и } q = \int_0^{\infty} i dt.$$



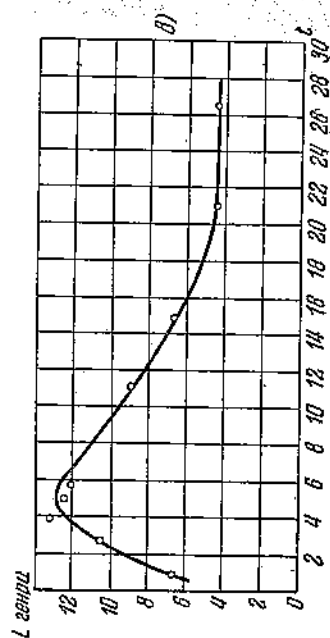
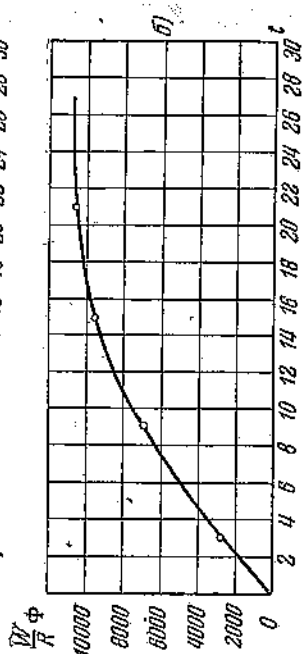
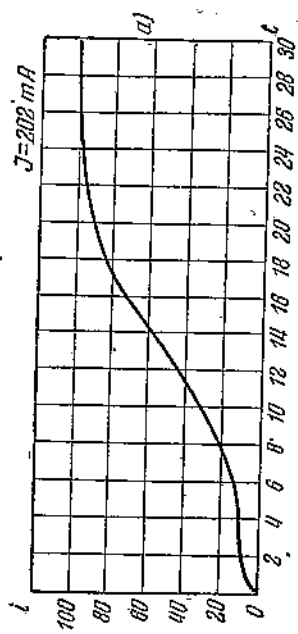
Фиг. 143.



Фиг. 144.



Фиг. 145.



Фиг. 146.

Итак

$$S = (Q - q)_{t=\infty} = \frac{1}{R} (L_y I - L_y 0) = \frac{L_y}{R} I = \tau_y I,$$

т. е. рассматриваемая в § 2 полная площадь $(Q - q)$ представляет собой произведение из установившегося тока I в цепи на предельное значение постоянной τ_y . Из последней формулы находим

$$L_y = S \frac{R}{I}.$$

Проверим этот вывод. Полагая $I = 125$ мА, получим для дроссели осциллограмму тока фиг. 143, а. Полная площадь S для этой осциллограммы, увеличенной на миллиметровой бумаге, равнялась 11751 мм², установившийся же ток изображался ординатой в 106 мм. Одному миллиметру по оси абсцисс соответствовало время в $\frac{1}{450}$ сек. Исходя из этих данных, находим площадь S в абсолютных единицах:

$$S = 11751 \cdot \frac{0.125}{106 \cdot 450};$$

с другой стороны, эта площадь равна произведению

$$I \tau_y, \text{ т. е. } S = I \tau_y = 0.125 \frac{L_y}{R}.$$

Сопротивление же цепи было 27.2 Ω, следовательно, индуктивность L_y в генри выражается следующей формулой:

$$L_y = \frac{11751 \cdot 27.2}{106 \cdot 450} \text{ генри} = 6.7 \text{ генри}.$$

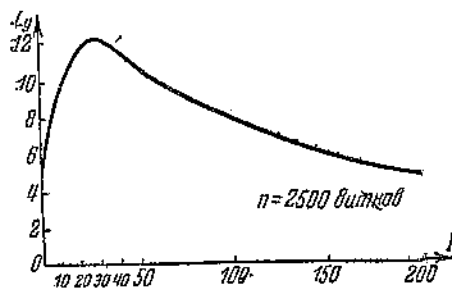
Сравнивая с кривой нарастания индуктивности во времени на фиг. 143, в, находим, что полученное значение индуктивности совпадает с предельным значением ординаты, к которому стремится указанная кривая. Таким же путем определим предельные значения индуктивности для всех осциллограмм (табл. 13), приведенных на фиг. 137—146.

Таблица 13

I , мА	L , генри	I , мА	L , генри
10	9.135	100	8.042
15	10.65	125	6.700
25	12.16	150	5.745
50	10.93	175	5.142
75	9.101	202	4.548

Так как значение индуктивности L_y тороида вполне определяет статическую магнитную проницаемость железа сердечника тороида, то, исходя из табл. 13, легко построить статическую кривую магнитной проницаемости для железа рассматриваемого тороида. Действительно, $|L_y| \text{ абс. ед.} =$

$$= \frac{4 \pi s}{l} w^2 \mu, \text{ где: } s \text{ — поперечное сечение железного сердечника тороида, } l \text{ — средняя длина тороида, } w \text{ — число витков обмотки последнего.}$$



Фиг. 147.

Откладывая по оси абсцисс значения установившихся токов I , по оси ординат L_y (фиг. 147), получим кривую $L_y = f(I)$, меняя же соответствующим образом масштаб ординат, — кривую $\mu = \varphi(I)$.

Имея кривую $L_y = f(I)$, легко построить и кривую намагничивания железа взятого тороида. Действительно, $\Phi_y = \frac{L_y I}{w}$, откуда вычисляем данные для построения кривой $\Phi_y = \varphi(I)$, или же $B_y = \varphi_1(I)$.

Подставляя в приведенную формулу для Φ_y значения I и L_y из табл. 13 и вспоминая, что $w=2500$ витков, получим табл. 14. По этой таблице строим график фиг. 148.

Предельное значение индуктивности L_y мы можем определить и иным путем.

Таблица 14

I, mA	$L_y, \text{генри}$	$\Phi_y, \text{макс-велл}$	I, mA	$L_y, \text{генри}$	$\Phi_y, \text{макс-велл}$
10	9.185	3 654	100	8.042	32 170
15	10.65	6 388	125	6.7	33 500
25	12.16	12 160	150	5.745	34 470
50	10.93	21 870	175	5.142	35 994
75	9.101	27 310	202	4.548	36 750

Представим уравнение цепи в следующем виде:

$$E = \frac{w}{\tau} \Phi + w \frac{d\Phi}{dt},$$

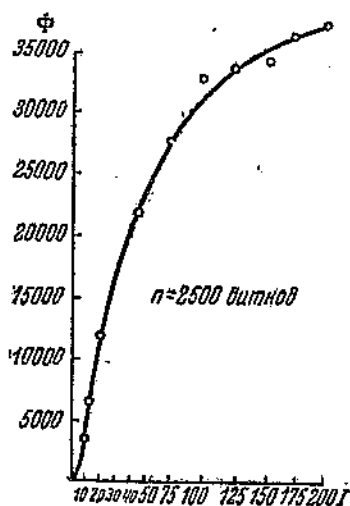
где $\tau = \frac{L}{R}$ — величина, меняющаяся во времени, так как $L = f(t)$. Так как в момент включения цепи, т. е. для $t=0$, магнитный поток Φ равен нулю (фиг. 137, б, — 146, б), то

$$E = w \left[\frac{d\Phi}{dt} \right]_{t=0'}$$

или

$$\left[\frac{d\Phi}{dt} \right]_{t=0'} = \frac{E}{w} = \operatorname{tg} \beta_0.$$

Таким образом при неизменном числе витков w обмотки тороида угол начальной касательной к кривой магнитного потока не зависит от величины индуктивности. С другой стороны, установившееся значение магнитного потока Φ_y зави-



Фиг. 148.

сит от предельного значения индуктивности L_y : $\Phi_y = \frac{L_y I}{w}$, следовательно, если провести начальную касательную к кривой магнитного потока и продолжить ее до асимптоты кривой, то отрезок между точкой их пересечения и осью ординат (т. е. Bb , фиг. 149) и представит собой предельное значение постоянной времени τ_y цепи. Зная же постоянную времени τ_y , получим и индуктивность L_y из формулы $L_y = \tau_y R$.

Проверим этот вывод. Из прямоугольного треугольника Ocb (фиг. 149) имеем:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{cb}{Oc} = \frac{\Phi_y}{\tau_y},$$

но $\operatorname{tg} \beta_0$, как мы видели, определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{E}{w},$$

следовательно

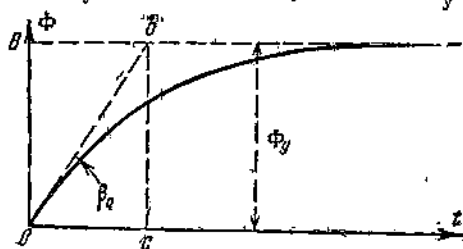
$$\frac{E}{w} = \frac{\Phi_y}{\tau_y} = \frac{\Phi_y R}{L_y},$$

откуда

$$\Phi_y = \frac{EL_y}{Rw} = \frac{IL_y}{w},$$

т. е. мы пришли к хорошо известной формуле.

Задаваясь произвольным масштабом для магнитного потока, например изображая установившееся значение магнитного потока Φ_y отрезком OB (фиг. 149), равным 120 мм, и зная, что 1 мм по оси абсцисс соответствует T сек., напри-



Фиг. 149.

мер $T = \frac{1}{450}$ сек., легко определить в миллиметрах отрезок τ'_y по оси абсцисс, изображающий постоянную времени τ_y , а следовательно, легко провести при выбранных масштабах и начальную касательную к кривой магнитного потока (фиг. 149).

Действительно,

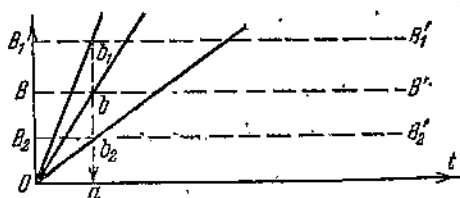
$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{E \cdot 10^8 \cdot 120}{\omega \cdot 450 \cdot \Phi} = \frac{120 \text{ мм}}{(\tau'_y) \text{ мм}};$$

откуда

$$\tau'_y \text{ мм} = \frac{(\omega) \text{ витков} \cdot (\Phi_y) \text{ максвелл}}{(E) \text{ вольт} \cdot 10^8 \cdot T \text{ сек.}};$$

Из табл. 14 видно, что току $I = 75$ мА соответствует магнитный поток $\Phi = 27310$ максвелл; кроме того $T = \frac{1}{450}$ сек. и $E = 2$ В, следовательно

$$\tau'_y \text{ мм} = \frac{2500 \cdot 27310 \cdot 450}{2 \cdot 10^8} \text{ мм} = 153.6 \text{ мм}.$$



Фиг. 150.

Откладывая по оси абсцисс отрезок длиной 153.6 мм, восстанавливая из его конца a (фиг. 150) перпендикуляр ab_2 bb_1 и откладывая по нему отрезок $ab = 157$ мм (соответствует выбранному нами масштабу ординат для кривой с установившимся током $I = 75$ мА), проведем начальную касательную Ob . Изменяя масштаб ординат, например изображая установившийся магнитный поток отрезком ab_1 или ab_2 , получим иной наклон касательной (Ob_1 или Ob_2).

Вычислим значения отрезков τ'_y мм для всех десяти разбираемых нами значений установившегося тока, пользуясь табл. 12, 13, 14 и сводя результаты в табл. 15.

Таблица 15

I , мА	Φ_y , максвелл	T , сек.	E , В	τ'_y , мм
10	3654	$\frac{1}{400}$	0.65	56.1
15	6388	$\frac{1}{450}$	0.60	119.8
25	12160	$\frac{1}{450}$	1.4	97.7
50	21870	$\frac{1}{450}$	2.0	123.1
75	27310	$\frac{1}{450}$	2.0	153.6
100	32170	$\frac{1}{450}$	2.0	181.0
125	33500	$\frac{1}{450}$	3.4	110.8
150	34470	$\frac{1}{500}$	3.4	126.7
175	35994	$\frac{1}{450}$	3.4	114.1
202	36750	$\frac{1}{450}$	3.9	106.0

Пользуясь полученными результатами, можем провести начальные касательные к кривым фиг. 137,б—146,б.

Переходим к определению начального значения индуктивности L_0 в момент замыкания.

б) Определение начального значения индуктивности. Перепишем уравнение цепи в следующем виде:

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}.$$

В момент включения цепи, т. е. для $t = 0$, имеем:

$$i = 0, \quad E = \left[L \frac{di}{dt} \right]_{t=0},$$

откуда

$$\left[\frac{di}{dt} \right]_{t=0} = \frac{E}{L_0} = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Если отложить по асимптоте AA' (фиг. 151) отрезок Aa , равный $\tau_0 = \frac{L_0}{R}$, и соединить точку a с началом координат, то прямая Oa как раз и будет началь-

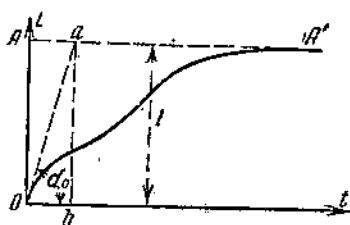
ной касательной к кривой нарастания тока. Действительно, из прямоугольника Oab имеем;

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = \frac{Ob}{ab} = \frac{Aa}{ab} = \frac{\tau_0}{I} = \frac{L_0 R}{E} = \frac{L_0}{E},$$

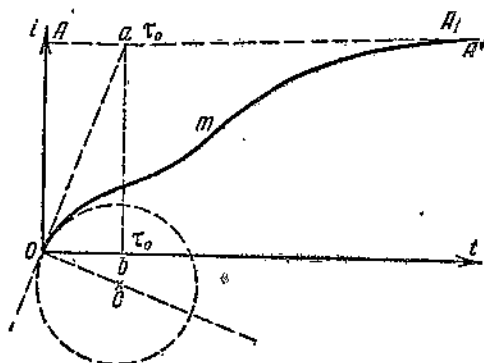
т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \left[\frac{di}{dt} \right]_{t=0} = \frac{E}{L_0}.$$

Проведя начальные касательные к кривым тока на фиг. 137—146, определим и начальную индуктивность L_0 . Необходимо, однако, оговориться, что вследствие значительной трудности проведения начальных касательных, полученные значения индуктивности L_0 могут быть рассматриваемы только как приближенные. Трудность проведения касательных побуждает к особо тщательному их проведению. Касательные к кривым тока фиг. 137, а—146, а проводим следующим образом. Подбираем



Фиг. 151.



Фиг. 152.

окружность с центром C (фиг. 152), возможно большим числом точек совпадающую с началом осциллограммы тока OmA' ; тогда касательная к окружности в точке O будет касательной и к началу кривой тока. Пересечение этой касательной с асимптотой AA_1 определяет отрезок Aa , как раз равный начальной постоянной времени τ_0 . Имея значение τ_0 , определим индуктивность из формулы $L_0 = \tau_0 R$.

Тщательное определение значений τ_0 для кривых фиг. 137—146 и указанный подсчет привели к одному и тому же значению начальной самоиндукции для всех рассматриваемых кривых, а именно $L_0 = 4.8$ генри.

γ) Определение максимального значения индуктивности. Возвращаемся опять к уравнению цепи:

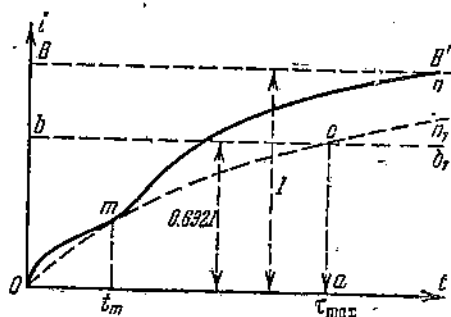
$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}. \quad (a)$$

В тот момент времени, когда индуктивность L проходит через максимум, третий член правой части исчезает, и мы имеем значение тока i , удовлетворяющее уравнению;

$$E = Ri + L_{\max} \frac{di}{dt}; \quad (b)$$

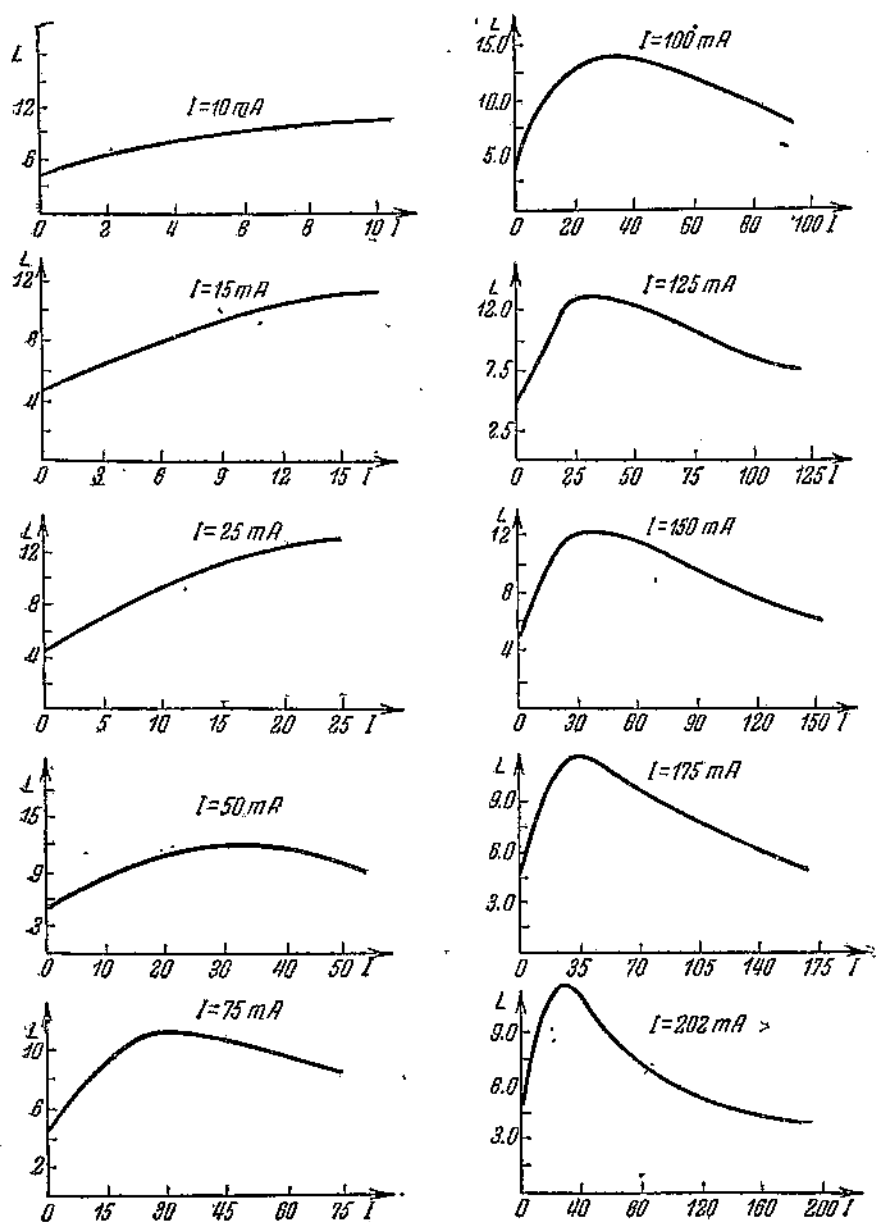
ными словами, кривые, выражаемые уравнениями (a) и (b), будут касаться в точке, соответствующей максимальному значению индуктивности (фиг. 153). Это обстоятельство дает нам возможность определить как максимальное значение индуктивности $L_{\max}$, так и соответствующий этому значению момент времени t_m .

Пусть имеем осциллограмму тока $Om\eta$ (фиг. 153). Проведем к ней касательную кривую Гельмгольца $Om\eta_1$; получим точку касания m и искомое время t_m .



Фиг. 153.

С другой стороны, мы знаем, что в момент времени t , равный постоянной времени цепи, кривая Гельмгольца проходит через точку, ордината которой равна $0.632 I$. Отложим по оси ординат отрезок $Ob = 0.632 I = 0.632 \cdot OB$ и проведем из точки b прямую bb_1 , параллельную оси абсцисс. Отметим точку пересечения C этой прямой с кривой Гельмгольца и опустим из этой точки на



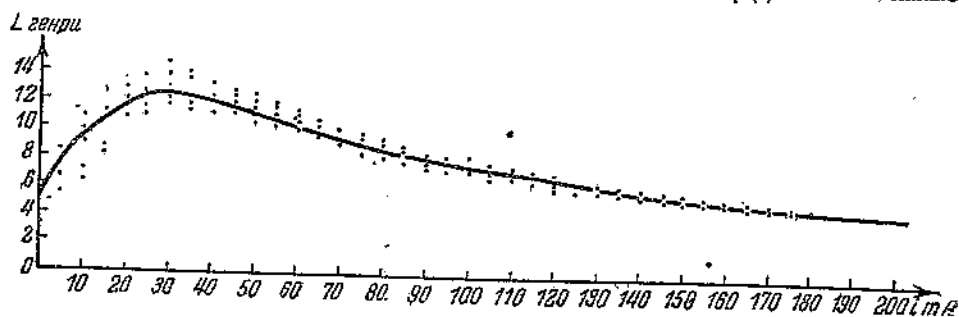
Фиг. 154.

ось абсцисс перпендикуляр Ca ; тогда абсцисса точки C , т. е. отрезок Oa , и будет определять максимальную постоянную времени цепи, которой соответствует кривая тока $Отл$. Так как $\tau_{max} = \frac{L_{max}}{R}$, то, зная сопротивление цепи R , найдем индуктивность $L_{max} = R \cdot \tau_{max}$.

4. Составление динамических и статических магнитных характеристик. Кривые зависимости индуктивности L от мгновенных значений тока i

приведены на графиках фиг. 154. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что максимум индуктивности L на всех кривых приблизительно соответствует одному и тому же значению мгновенного тока. В среднем это значение равняется 32,4 мА. Сами максимумы индуктивности колеблются около одного и того же значения, в среднем равного 12,4 генри. Этот максимум совпадает также с максимумом статической характеристики $L_y = \varphi(I)$, как это видно из кривой фиг. 147. Если все динамические характеристики фиг. 154 перенести на один чертеж, приняв для всех одинаковые масштабы как по оси абсцисс, так и по оси ординат, то не будет ли зависимость $L = \varphi(i)$ для исследуемого нами тороида из лучшего трансформаторного железа, с тщательным ослаблением влияния токов Фуко и отсутствием коротко замкнутых витков выражаться одной и той же кривой?

Наметим на всех кривых фиг. 154 точки, соответствующие значениям тока 1, 10, 15, 20, 25... 150, 175, 200 мА и перенесем их на один чертеж (фиг. 155). На этот же чертеж нанесем статическую кривую индуктивности, взятую с фиг. 147. Кривая эта как раз и является средней кривой, проведенной по нанесенным на чертеж точкам. Если же при этом принять во внимание ту сравнительную трудность построения динамических кривых самоиндукции $L = f(i)$, а по этим кривым и по осциллограммам тока кривых $L = \varphi(i)$ и неизбежные



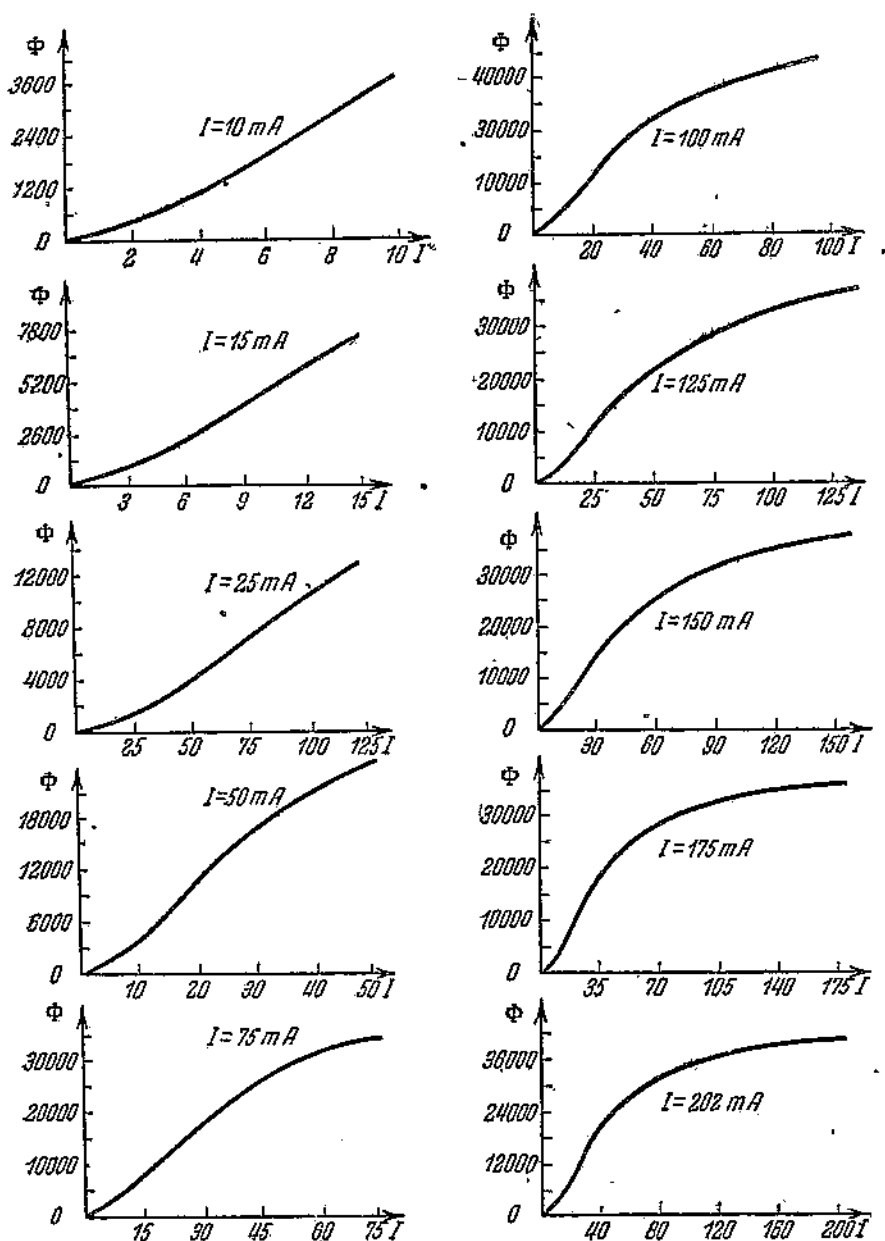
Фиг. 155.

при этом погрешности, то на основании фиг. 155 мы можем сделать следующий весьма важный вывод. Все динамические характеристики, выражающие зависимость индуктивности от мгновенных значений тока [$L = \varphi(i)$] для рассматриваемого тороида совпадают со статической характеристикой $L_y = \varphi(I)$, укладываемая на определенную часть ее. Динамическая характеристика $L = \varphi(i)$ при установившемся токе $I = 10$ мА укладывается на статическую характеристику $L_y = \varphi(I)$ в пределах $0 \leq I \leq 10$ мА; при установившемся токе $I = 50$ мА — на отрезок статической характеристики в пределах $0 \leq I \leq 50$ мА, при $I = 202$ мА — в пределах $0 \leq I \leq 202$ мА, и т. д.

Построив статическую характеристику $L_y = \varphi(I)$, легко по ней начертить и динамические характеристики $L = \varphi(i)$, приведенные на фиг. 154. Все имеющиеся на фиг. 154 отклонения от кривых, полученных из статической характеристики $L_y = \varphi(I)$, можно отнести к неизбежным погрешностям при их построении. Во всяком случае, на основании фиг. 155 можно допустить, что динамические характеристики $L = \varphi(i)$ тороидов с хорошо расслоенными сердечниками (токи Фуко практически сведены к нулю) могут быть с достаточной для практики точностью совмещены со статической характеристикой $L_y = \varphi(I)$. Разумеется, этот вывод требует еще дополнительной проверки на ряде тороидов с сердечниками из различных сортов железа. Насколько повлияют токи Фуко на сделанный вывод, покажет особый посвященный этому вопросу анализ.

Все сказанное относительно зависимости динамических характеристик $L = \varphi(i)$ и статической $L_y = \varphi(I)$, очевидно, можно отнести и к зависимости между динамическими характеристиками $\Phi = \varphi_1(i)$ (фиг. 156) и статической $\Phi_y = \varphi_1(I)$, так как $\Phi = \frac{LI}{w}$. Проверим и это, теперь уже в сущности очевидное, заключение.

На фиг. 156 приведены характеристики $\Phi = \varphi_1(i)$, на фиг. 157 нанесены точки этих кривых, соответствующие значениям мгновенных токов $i = 5, 10, 15, 25 \dots 150, 175, 200$ мА. И в этом случае статическая характеристика $\Phi_y = \varphi_1(I)$ является средней кривой, построенной на всех нанесенных на чертежах точках. Теперь мы можем ответить на поставленный в начале настоящей главы



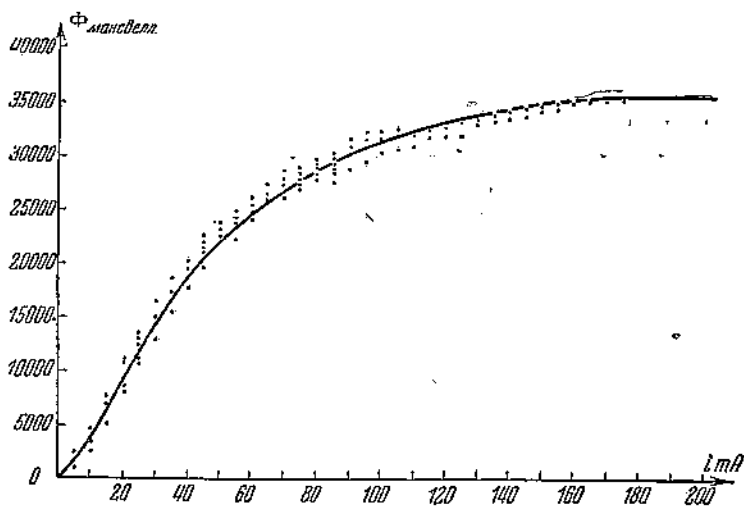
Фиг. 156.

вопрос: совпадают ли динамические характеристики $L = \varphi(i)$, $\Phi = \varphi_1(i)$, $\mu = \varphi_2(i)$, со статическими $L_y = \varphi(I)$, $\Phi_y = \varphi_1(I)$ и $\mu_y = \varphi_2(I)$?

В тех случаях, когда влияние токов Фуко, короткозамкнутых витков и гистерезиса сведено до минимума, не ощутимого на практике, можно допустить, что динамические и статические характеристики совпадают.

5. Динамические электромагнитные характеристики реле с учетом перелета якоря. В главе II, § 4, мы вывели следующие формулы статических характеристик реле:

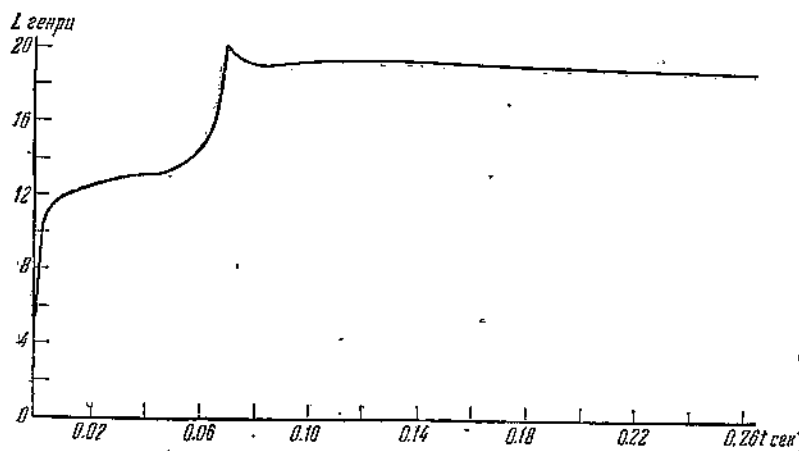
$$L = k \frac{m + \delta}{n + \delta}, \quad \Phi = k_1 \frac{m_1 + \delta}{n_1 + \delta}.$$



Фиг. 157.

Обозначая расстояние якоря от его крайнего положения ($\delta = \delta_1$) через x , получим

$$\delta = \delta_1 - x, \\ L = k \frac{m + \delta_1 - x}{n + \delta_1 - x}, \quad \Phi = k_1 \frac{m_1 + \delta_1 - x}{n_1 + \delta_1 - x},$$



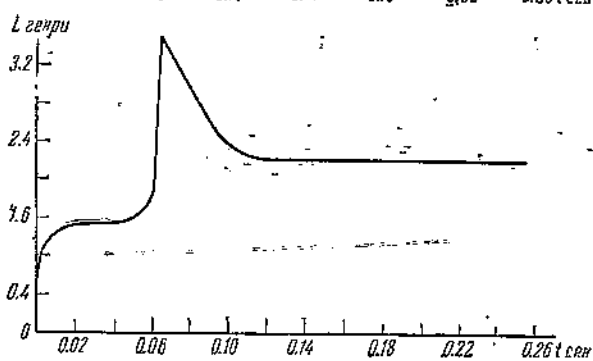
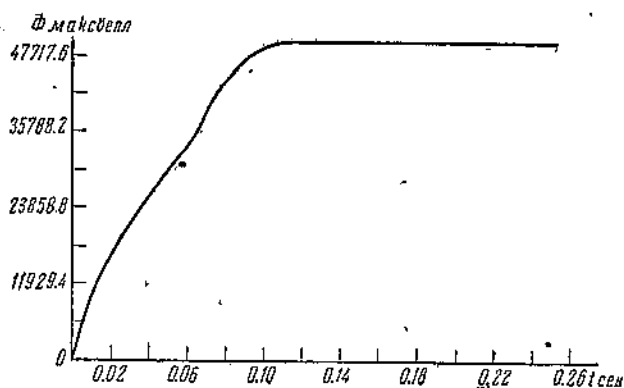
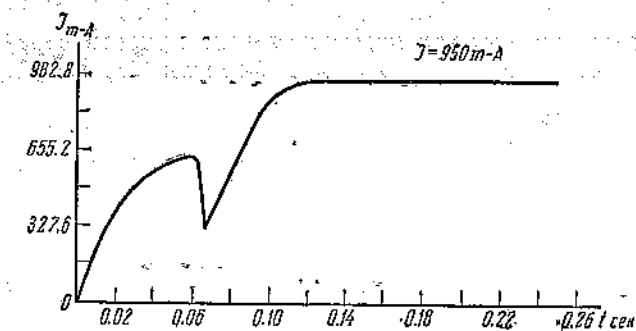
Фиг. 158.

или, вводя обозначения

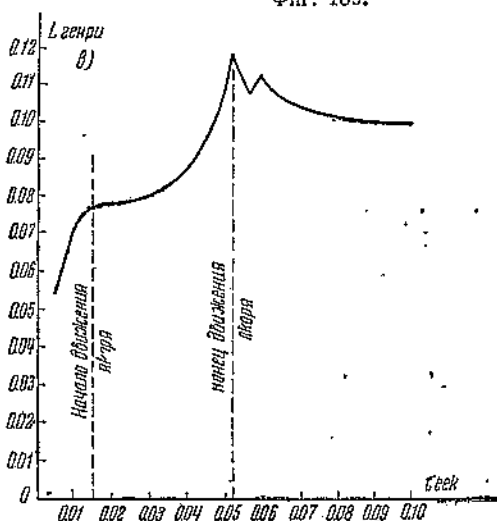
$$\begin{aligned} m + \delta_1 &= a, & n + \delta_1 &= b, \\ m_1 + \delta_1 &= a_1, & n_1 + \delta_1 &= b_1, \end{aligned}$$

перепишем формулы в следующем виде:

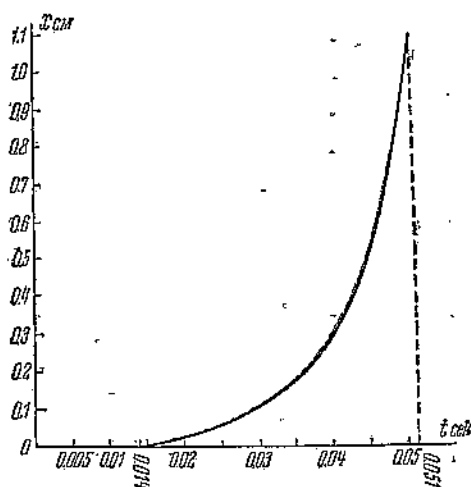
$$L = k \frac{a - x}{b - x}, \quad \Phi = k_1 \frac{a_1 - x}{b_1 - x}.$$



Фиг. 159.



Фиг. 160.



Фиг. 161.

В последнюю формулу, как мы видели, входит сила тока i , меняющаяся с положением якоря; следовательно, последняя формула не может быть безоговорочно перенесена на динамические процессы. Подробный анализ явлений, связанных с перелетом якоря, не входит в задачу настоящего труда, поэтому коснемся этих явлений лишь в общих чертах.

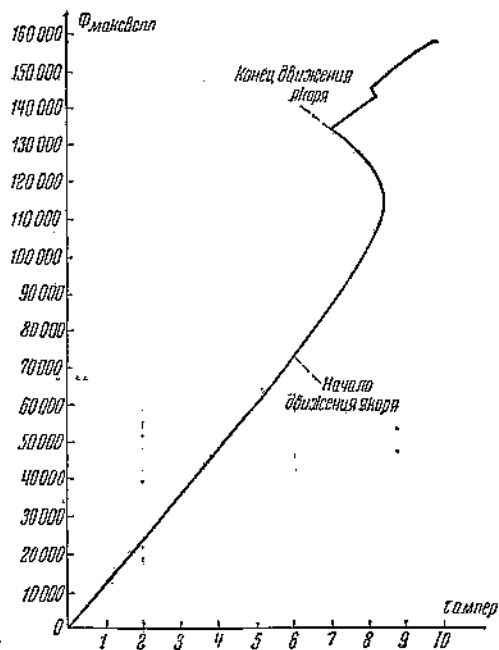
На фиг. 158, 159 и 160 приведены кривые временных зависимостей тока i , магнитного потока Φ и индуктивности L для двух кодовых реле СЦБ (фиг. 158 для установившегося тока $I=50$ мА и фиг. 159 для $I=950$ мА) и втяжного электромагнита¹ (фиг. 160 для $I=10$ ампер).

Все приведенные кривые имеют один и тот же характер: сильное изменение тока и индуктивности и незначительное магнит-

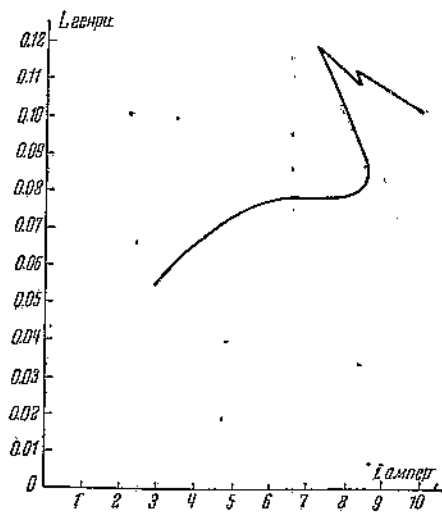
¹ Кривые фиг. 160, 161, 162, 163, 164 и 165, а также табл. 16 любезно предоставлены мне кандидатом технических наук Б. И. Якимовичем.

ного потока при перелете якоря. На фиг. 161 приведена кривая временной зависимости хода якоря для того же втяжного электромагнита. Исходя из кривых фиг. 160 и 161, не трудно построить также зависимости

$$\Phi = f_1(i), \quad L = f_2(i), \quad \Phi = \varphi_1(x), \\ L = \varphi_2(x) \quad \text{и} \quad i = \varphi_3(x).$$



Фиг. 162.



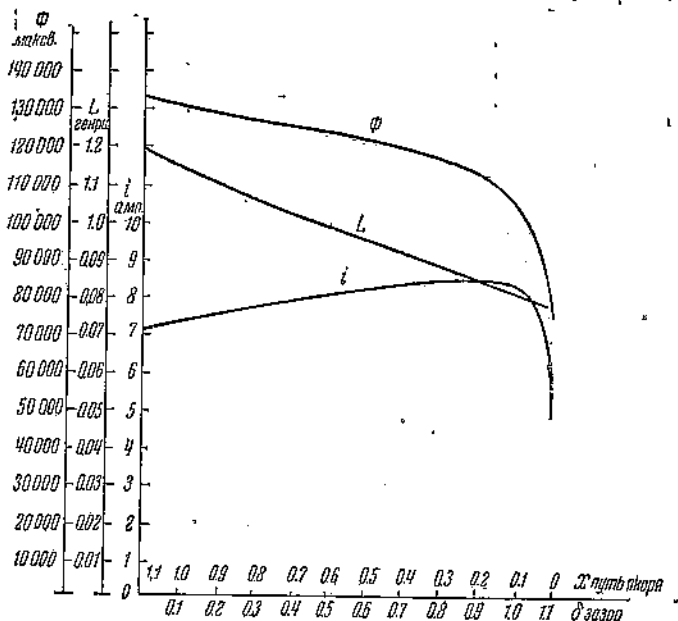
Фиг. 163.

Численная зависимость между приведенными величинами может быть получена из табл. 16. Пользуясь этой таблицей, строим графики фиг. 162, 163 и 164. Кривые фиг. 164 повторены с другим втяжным электромагнитом и приведены на фиг. 165.

Проверим формулу для индуктивности L , пользуясь табл. 16. Исходя из последней, не трудно определить коэффициенты: $k=0.268$, $a=-2.9$ и $b=10.1$.

Подставляя, имеем:

$$L = 0.268 \cdot \frac{2.9 + x}{10.1 - x}.$$



Фиг. 164.

Таблица 16

Время от начала замыкания цепи, сек.	i ампер	Φ , максвелл	L , генри	Расстояние якоря до сердечника (вазор) δ , см	Путь якоря x , см
0.005	2.85	3 2500	0.0543	1.1	0
0.010	4.88	5 5800	0.0732	1.1	0
0.015	6.18	7 5200	0.0781	1.095	0.005
0.020	7.17	8 7600	0.0783	1.08	0.02
0.025	7.90	9 7500	0.0790	1.05	0.05
0.030	8.30	10 5000	0.0798	1.01	0.09
0.035	8.47	11 1000	0.0840	0.94	0.16
0.040	8.50	11 6000	0.0875	0.82	0.28
0.045	8.22	12 3000	0.0955	0.57	0.53
0.048	7.80	12 7000	0.1050	0.35	0.75
0.050	7.40	13 0000	0.1130	0.11	0.99
0.051	7.13	13 3000	0.1190	0.00	1.10
0.053	7.65	13 7000	0.1150		
0.055	8.06	14 0000	0.1110		
0.056	8.30	14 2000	0.1090		
0.058	8.23	14 4000	0.1120		
0.060	8.46	14 6000	0.1110		
0.065	9.05	15 1000	0.1070		
0.070	9.45	15 5000	0.1050		
0.075	9.76	15 6000	0.1030		
0.080	9.95	15 7000	0.1010		
0.085	9.95	15 7000	0.1010		
0.090	9.97	15 7000	0.1010		
0.095	9.99	15 7000	0.1010		
0.100	10	15 7000	0.1010		
0.105	10	15 7000	0.1010		

На основании этой формулы подсчитаем табл. 17.

Таблица 17

x	L вычисл	L измер	x	L вычисл	L измер
0.005	0.07712	0.0781	0.28	0.08679	0.0875
0.02	0.07763	0.0783	0.53	0.09605	0.0955
0.05	0.07867	0.0790	0.75	0.1046	0.1050
0.09	0.08005	0.0798	0.99	0.1141	0.1130
0.16	0.08250	0.0840	1.1	0.1191	0.1190

Наибольший процент расхождения между вычисленными и измеренными значениями индуктивности L не превосходит 1.8. Обращает на себя внимание и другое обстоятельство. Как показывают кривые $L=f(x)$ на фиг. 164 и 165, зависимость L от x почти прямолинейная. Во всяком случае, практически эту зависимость можно принять за прямолинейную и с достаточной практической точностью можно положить:

$$L = p + qx.$$

Кривая $\Phi = \varphi(x)$ более сложная и уже не может быть на всем своем протяжении выражена приведенной выше формулой статической характеристики Φ , приходится в последнюю ввести поправочный член:

$$\Phi = k_1 \frac{a_1 - x}{b_1 - x} + k_2 \frac{x}{b_2 - x},$$

Формулу эту приведем в следующем виде:

$$\Phi = k \frac{m_1 x^2 + n_1 x + p_1}{m_2 x^2 + n_2 x + p_2}.$$

Исходя из данных табл. 16, находим численные значения приведенной формулы:

$$k=147000; \quad m_1=1; \quad n_1=12.94; \quad p_1=0.2207;$$

$$m_2=-1; \quad n_2=16.47 \quad \text{и} \quad p_2=0.4785.$$

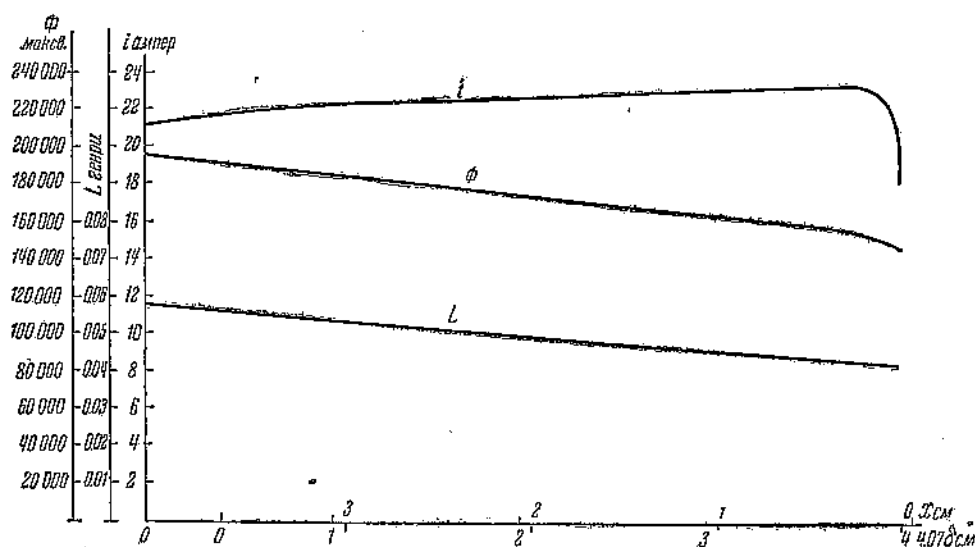
Следовательно,

$$\Phi = 147000 \frac{0.2207 + 12.94x + x^2}{0.4785 + 16.47x - x^2}.$$

По этой формуле подсчитаем табл. 18.

Таблица 18

x	Φ измер	Φ вычисл	x	Φ измер	Φ вычисл
0.005	75200	74810	0.28	116000	115000
0.02	87600	87360	0.53	123000	121200
0.05	97500	98400	0.75	127000	125700
0.09	105000	105000	0.99	130000	130500
0.16	111000	112200	1.1	133000	132400



Фиг. 165.

Наибольший процент расхождения не превосходит 1.5. Так как все кривые и табл. 16 получены исходя из соответствующей осциллограммы тока, то в данном случае

$$\Phi = \Phi_{\text{ср}} = \frac{Li}{w},$$

откуда

$$i = \frac{\Phi \cdot w}{L} = \frac{a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d}{a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d}.$$

Число витков обмотки втяжного электромагнита было равно 640. Пользуясь приведенными выше формулами для Φ и L с их численными коэффициентами, получим:

$$i = 3.511 \frac{2.229 + 130.5x - 2.84x^2 - x^3}{1.388 + 48.24x + 13.57x^2 - x^3}.$$

x	i вычисл	i измер	x	i вычисл	i измер
0.005	6.209	6.18	0.28	8.483	8.50
0.02	7.203	7.17	0.53	8.077	8.22
0.05	8.009	7.90	0.75	7.689	7.80
0.09	8.387	8.30	0.99	7.461	7.40
0.16	8.555	8.47	1.1	7.118	7.13

Ошибка не превосходит 1,5%.

Не трудно продолжить исследование в этом же направлении и получить ряд важных зависимостей при перелете якоря, как то: изменение энергии W , динамическую тяговую характеристику; зависимость x от t и др., но это исследование мы отложим до другого труда, теперь же переходим к аналитическому выводу самой осциллограммы тока с учетом влияния железа.

б) Общее решение уравнения Гельмгольца с учетом влияния железа

Выше мы пришли к следующей формуле, выражающей зависимость магнитного потока от намагничивающих сердечник рассматриваемого реле ампервитков:

$$\Phi = \Phi_y \left[1 - \frac{e^{-b\omega t}}{\operatorname{sh} \sigma} \operatorname{sh} (a\omega t + \sigma) \right] + \frac{L_y i}{w},$$

где Φ_y — магнитный поток насыщения, a , b и σ — параметры магнитной цепи, L_y — установившаяся индуктивность обмотки электромагнитного реле, w — число витков обмотки реле, i — устанавливающийся ток в электромагнитной цепи.

Рассмотрим процесс установления тока в цепи, состоящей из батареи и присоединенных к ней реостата и реле (фиг. 124), причем разберем два случая: 1) случай замыкания цепи и 2) случай выноса батареи из цепи, без разрыва последней.

1. Включение в цепь электромагнитного реле эдс E (фиг. 124). До нажатия ключа K в цепи реле тока совсем не было, процесс установления тока начинается только с момента включения в цепь батареи E , причем ток нарастает по какому-то неизвестному пока еще нам закону от нуля до установившегося значения I . Считая за начало времени момент нажатия ключа, мы можем написать: для $t=0 \dots i=0$, для $t=\infty \dots i=I$. При этих временных условиях мы должны решить уравнение Гельмгольца:

$$I = i + \frac{w}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{di}{dt}.$$

Пользуясь приведенной выше зависимостью Φ от i , находим:

$$\frac{d\Phi}{di} = \Phi_y w \frac{e^{-b\omega t}}{\operatorname{sh} \sigma} \left[b \operatorname{sh} (a\omega t + \sigma) - a \operatorname{ch} (a\omega t + \sigma) \right] + \frac{L_y}{w}.$$

Обозначая же

$$\frac{a}{b} = \operatorname{th} \alpha_1,$$

получим

$$\frac{d\Phi}{di} = \Phi_y b w \frac{e^{-b\omega t}}{\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \alpha_1} \operatorname{sh} (a\omega t + \sigma - \alpha_1) + \frac{L_y}{w},$$

где i_{km} — сила тока, при которой устанавливающаяся индуктивность L_k проходит через максимум.

После соответствующей подстановки, приходим к следующему уравнению:

$$I = i + \left[\Phi_y \cdot \frac{b w^2}{R} \cdot \frac{e^{-b\omega t}}{\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \alpha_1} \operatorname{sh} (a\omega t + \sigma - \alpha_1) + \frac{L_y}{R} \right] \frac{di}{dt};$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\Phi_y}{\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} a_1} \cdot \frac{b\omega^2}{R} = m, \quad \sigma - a_1 = \sigma_1 \quad \text{и} \quad \frac{L_y}{R} = \tau_y;$$

тогда уравнение получит следующий вид:

$$I = i + [me^{-b\omega i} \operatorname{sh} (a\omega i + \sigma_1) + \tau_y] \frac{di}{dt}.$$

Уравнение это легко может быть сведено к уравнению с разделенными переменными, если мы введем новую переменную i_1 , связанную с i следующим соотношением: $i = I - i_1$.

Подставляя, получим:

$$i_1 + f(i_1) \frac{di_1}{dt} = 0,$$

где

$$f(i_1) = me^{-b\omega(I-i_1)} \operatorname{sh} [a\omega(I-i_1) + \sigma_1] + \tau_y.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{f(i_1)}{i_1} di_1 = -dt.$$

Имея же в виду, что для $t=0$ ток $i=0$, следовательно, $i_1=I$, определяем время t в зависимости от тока i_1 :

$$t = - \int_I^{i_1} \frac{f(i_1)}{i_1} di_1.$$

Заменяя функцию $f(i_1)$ приведенным выше выражением, получим

$$t = - me^{-b\omega I} \int_I^{i_1} \frac{e^{-b\omega i_1}}{i_1} \operatorname{sh} [a\omega(I-i_1) + \sigma] di_1 - \tau_y \int_I^{i_1} \frac{di_1}{i_1}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$t = - me^{-b\omega I} \left[\operatorname{sh} (a\omega I + \sigma_1) \int_I^{i_1} \frac{e^{b\omega i_1}}{i_1} \operatorname{ch} a\omega i_1 di_1 \right. \\ \left. - \operatorname{ch} (a\omega I + \sigma_1) \int_I^{i_1} \frac{e^{b\omega i_1}}{i_1} \operatorname{sh} a\omega i_1 di_1 \right] - \tau_y \ln \frac{i_1}{I}.$$

Но

$$\int_I^{i_1} \frac{e^{b\omega i_1}}{i_1} \operatorname{ch} a\omega i_1 di_1 = \frac{1}{2} (E_{b+a} + E_{b-a}), \\ \int_I^{i_1} \frac{e^{b\omega i_1}}{i_1} \operatorname{sh} a\omega i_1 di_1 = \frac{1}{2} (E_{b+a} - E_{b-a}),$$

где

$$E_{b+a} = \ln \left(1 - \frac{i}{I} \right) - (b+a)\omega I \left(1 - \frac{I-i}{I} \right) - \\ - \frac{(b+a)^2 \omega^2 I^2}{2 \cdot 2!} \left[1 - \left(\frac{I-i}{I} \right)^2 \right] - \frac{(b+a)^3 \omega^3 I^3}{3 \cdot 3!} \left[1 - \left(\frac{I-i}{I} \right)^3 \right] - \dots \\ E_{b-a} = \ln \left(1 - \frac{i}{I} \right) - (b-a)\omega I \left(1 - \frac{I-i}{I} \right) - \\ - \frac{(b-a)^2 \omega^2 I^2}{2 \cdot 2!} \left[1 - \left(\frac{I-i}{I} \right)^2 \right] - \frac{(b-a)^3 \omega^3 I^3}{3 \cdot 3!} \left[1 - \left(\frac{I-i}{I} \right)^3 \right] - \dots$$

Таким образом имеем:

$$t = \frac{1}{2} m e^{-b\omega I} (pE_{b+a} - qE_{b-a}) - \tau_y \ln \left(1 - \frac{i}{I}\right),$$

где

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{ch}(\alpha\omega I + \sigma_1) - \operatorname{sh}(\alpha\omega I + \sigma_1), \\ q &= \operatorname{ch}(\alpha\omega I + \sigma_1) + \operatorname{sh}(\alpha\omega I + \sigma_1). \end{aligned}$$

Бросается в глаза одна весьма существенная особенность в этом решении. Кривая зависимости t от i зависит от величины установившегося тока I и, наоборот, кривая нарастания тока i во времени зависит от силы установившегося тока I , т. е. от степени намагничивания сердечника реле. Определенному значению установившегося тока I , иначе — определенной степени намагничивания сердечника реле соответствует своя определенная кривая нарастания тока i . Вывод этот, как показывают осциллограммы тока предыдущей главы, вполне подтверждается опытом.

При численных подсчетах зависимости t от i , или, наоборот, i от t , придется вычислять функции E_{b+a} и E_{b-a} . Функции эти сводятся к интегральным показательным функциям, при вычислении которых можно пользоваться таблицей, приведенной, например, в книге Е. Янке и Ф. Эмде „Таблицы функций с формулами и кривыми“ (ОНТИ НКТП, 1934, стр. 25—26). К сожалению, таблица эта недостаточно полна и требует соответствующих пересчетов. В виду большой практической важности выведенной формулы $t = f(i)$ и в целях облегчения численных подсчетов приводим в приложении таблицу следующей функции:

$$Z_a = \frac{y_a}{1!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_a^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y_a^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_a^4}{4!} + \dots,$$

к которой сводятся функции:

$$E_{b-a} - \ln \left(1 - \frac{i}{I}\right) \text{ и } E_{b+a} - \ln \left(1 - \frac{i}{I}\right).$$

Действительно, обозначая:

$$\begin{aligned} (b-a)\omega I &= y_1, & (b-a)\omega(I-i) &= y_2, \\ (b+a)\omega I &= y_3, & (b+a)\omega(I-i) &= y_4, \end{aligned}$$

получим

$$E_{b-a} - \ln \left(1 - \frac{i}{I}\right) = -Z_1 + Z_2,$$

$$E_{b+a} - \ln \left(1 - \frac{i}{I}\right) = -Z_3 + Z_4.$$

Имея таблицу для функции Z_a , легко для любого значения определить и соответствующие значения Z_a , а следовательно, и функции E_{b-a} и E_{b+a} .

Для больших значений y_a можно пользоваться следующим рядом:

$$Z_a = \frac{e^{y_a}}{y_a} \left(1 + \frac{1}{y_a} + \frac{2!}{y_a^2} + \frac{3!}{y_a^3} + \dots\right) - \ln y_a - 0.5772.$$

Для $y_a > 12$ последними двумя членами можно пренебречь. Чтобы иллюстрировать на графиках полученное решение и проверить основную формулу $B = f(\omega i)$, воспользуемся параметрами тороида, для которого в предыдущей главе были приведены осциллограммы тока.

Мы имеем следующие параметры: $a_1 = 0.75$, $b_1 = 1.181$, $c = 0.1035$; $\Phi_y = 30\,000$ максвелл, $i_{km} = 15$ мА, $\omega = 2500$ витков, $L_0 = 4.5$ Н, $L_{km} = 14$ Н, $L_y = 0.86$ Н. Так как $\tilde{a} = \frac{a_1}{\omega i_{km}}$, $\tilde{b} = \frac{b_1}{\omega i_{km}}$, $\operatorname{th} \sigma = \frac{c}{b_1 - a_1 c}$, то $a = 0.1875$, $b = 0.2952$, $\sigma = 0.83$, $\sigma_1 = 0.68$, $mR = 0.04603 \cdot 10^{12}$.

Осциллограммы тока взятого нами тороида снимались при следующих значениях установившегося тока I и полного сопротивления цепи R (табл. 20).

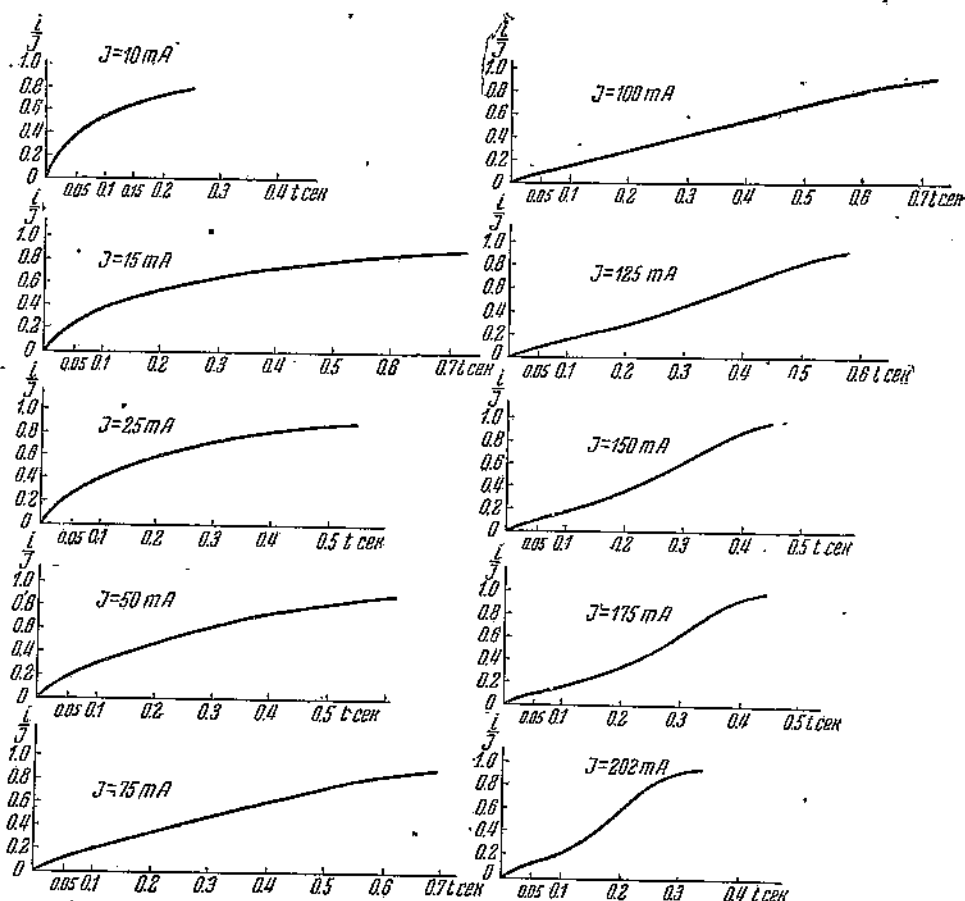
Для этих же значений тока I и сопротивления R будем производить наш численный расчет,

Задавая значения отношения $\frac{i}{I}$ через одну десятую от 0 до 1 для приведенных выше значений тока I и пользуясь таблицей зависимости Za от y , вычислим функции E_{b+a} и E_{b-a} , а затем и время t в зависимости от тока i (см. табл. в приложении). По этой таблице строим графики фиг. 166.

Соответствующие осциллограммы тока, снятые для того же тороида и при тех же условиях, были приведены в предыдущей главе. Сравнивая теоретиче-

Таблица 20

I, mA	R, Ω	I, mA	R, Ω
10	65	100	20
15	40	125	20.29
25	56	150	22.62
50	40	175	20.29
75	22.67	202	19.3



Фиг. 166.

ские кривые с указанными осциллограммами, мы убеждаемся, что теоретически полученные кривые в точности повторяют все особенности кривых экспериментальных. Это совпадение теоретических кривых с соответствующими кривыми, полученными опытным путем, показывает, что формула, выражающая зависимость магнитного потока от намагничивающего тока, положенная в основу этой главы, достаточно точно выражает действительную зависимость $\Phi = f(wi)$ и что пользование этой формулой может быть весьма полезно при учете влияния железа на устанавливающиеся электромагнитные процессы в цепях с железом.

Возвращаясь к полученным нами графикам фиг. 166, заметим, что они не совсем удобны при выяснении влияния степени намагничивания железа тороида на устанавливающийся процесс тока. Действительно, все десять кривых получены при различных значениях сопротивления цепи. Величина же R цепи при прочих равных условиях значительно влияет на форму кривой тока. Иллюстрируем это следующим легким анализом.

Как мы видели, время t определяется следующей формулой:

$$t = t_1 + t_2 + t_3,$$

где

$$t_1 = -\tau_y \ln \left(1 - \frac{i}{I} \right);$$

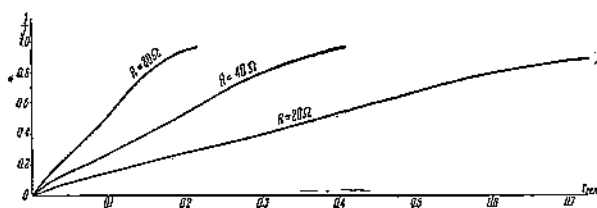
$$t_2 = \frac{1}{2} m p e^{-b \omega I} E_{b+a},$$

$$t_3 = -\frac{1}{2} m q e^{-b \omega I} E_{b-a}.$$

При заданных значениях I , a , b , σ , ω и L_y только два члена зависят от величины сопротивления R . Действительно,

$$\tau_y = \frac{L_y}{R}, \quad m = \frac{\Phi_y}{\text{sh } \sigma \text{ ch } a_1} \cdot \frac{b \omega^2}{R},$$

причем как τ_y , так и m обратно пропорциональны R , следовательно, обратно пропорциональны R также и члены t_1 , t_2 и t_3 , значит, и полное время t .



Фиг. 167.

Итак, при одном и том же значении отношения $\frac{i}{I}$ соответствующее время t обратно пропорционально сопротивлению R . Это положение позволяет нам при заданном значении тока I , например 100 мА, построить без предварительного составления таблиц кривые тока для любых значений сопротивления R , пользуясь лишь приведенными в таблице временными значениями отношения $\frac{i}{I}$ при сопротивлении $R = 20 \Omega$.

На фиг. 167 приведены кривые для $R = 10, 40$ и 80Ω . Мы видим, что величина сопротивления цепи R значительно влияет на масштаб оси времен.

Чтобы правильно оценить степень влияния намагничивания сердечника тороида на кривую нарастания тока, необходимо кривые $\frac{i}{I} = f(t)$, приведенные на фиг. 166, перестроить на общее для всех их сопротивление цепи, например на $R = 20 \Omega$. Проделав это (заново вычисляя таблицу по формуле для t), получим приведенную в приложении таблицу зависимости времени t от отношения $\frac{i}{I}$ при взятых выше значениях установившихся токов I и общем для всех их сопротивлении $R = 20 \Omega$. По этой таблице строим графики фиг. 168.

2. Вынесение эдс E из цепи, не разрывая последней. Отпуская ключ K (фиг. 124), мы выносим батарею из цепи без разрыва последней. Уравнение Гельмгольца для этого случая имеет следующий вид:

$$0 = i + \frac{w}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dt},$$

После соответствующей подстановки имеем:

$$0 = i + [m e^{-b\omega i} \operatorname{sh}(\alpha\omega i + \sigma_1) + \tau_y] \frac{di}{dt},$$

или

$$i + \varphi(i) \frac{di}{dt} = 0,$$

где

$$\varphi(i) = m e^{-b\omega i} \operatorname{sh}(\alpha\omega i + \sigma_1) + \tau_y.$$

Разделяя переменные и имея в виду, что для $t=0$ $i=I$ и для $t=\infty$ $i=0$, получим:

$$t = - \int_I^0 \frac{\varphi(i)}{i} di,$$

или, после замены $\varphi(i)$ приведенным выше выражением, находим:

$$\begin{aligned} t &= -m \int_I^0 \frac{e^{-b\omega i}}{i} \operatorname{sh}(\alpha\omega i + \sigma_1) di - \tau_y \int_I^0 \frac{di}{i} = \\ &= -m \left[\operatorname{ch} \sigma_1 \int_I^0 \frac{e^{-b\omega i}}{i} \operatorname{sh} \alpha\omega i di + \operatorname{sh} \sigma_1 \int_I^0 \frac{e^{-b\omega i}}{i} \operatorname{ch} \alpha\omega i di \right] - \tau_y \ln \frac{I}{I}. \end{aligned}$$

И так как

$$\begin{aligned} \int_I^0 \frac{e^{-b\omega i}}{i} \operatorname{sh} \alpha\omega i di &= \frac{1}{2} (E_{-(b-a)} - E_{-(b+a)}), \\ \int_I^0 \frac{e^{-b\omega i}}{i} \operatorname{ch} \alpha\omega i di &= \frac{1}{2} (E_{-(b-a)} + E_{-(b+a)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_{-(b-a)} &= \ln \frac{I}{I} + \frac{(b-a)\omega I}{1} \left(1 - \frac{I}{I}\right) - \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2 \omega^2 I^2}{2!} \left(1 - \frac{I^2}{I^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{(b-a)^3 \omega^3 I^3}{3!} \left(1 - \frac{I^3}{I^3}\right) - \frac{1}{4} \frac{(b-a)^4 \omega^4 I^4}{4!} \left(1 - \frac{I^4}{I^4}\right) + \dots, \\ E_{-(b+a)} &= \ln \frac{I}{I} + \frac{(b+a)\omega I}{1} \left(1 - \frac{I}{I}\right) - \frac{1}{2} \frac{(b+a)^2 \omega^2 I^2}{2!} \left(1 - \frac{I^2}{I^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{(b+a)^3 \omega^3 I^3}{3!} \left(1 - \frac{I^3}{I^3}\right) - \frac{1}{4} \frac{(b+a)^4 \omega^4 I^4}{4!} \left(1 - \frac{I^4}{I^4}\right) + \dots \end{aligned}$$

После подстановки имеем:

$$t = \frac{m}{2} [p_1 E_{-(b+a)} - q_1 E_{-(b-a)}] - \tau_y \ln \frac{I}{I},$$

где

$$p = \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma; \quad q_1 = \operatorname{ch} \sigma + \operatorname{sh} \sigma.$$

Обозначив же

$$(b-a)\omega I = y_1, \quad (b-a)\omega i = y_2,$$

$$(b+a)\omega I = y_3, \quad (b+a)\omega i = y_4,$$

получим

$$\begin{aligned} E_{-(b-a)} - \ln \frac{I}{I} &= - \left(-y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_1^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_1^4}{4!} - \dots \right) + \\ &+ \left(-y_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_2^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_2^4}{4!} - \dots \right), \end{aligned}$$

$$E_{-(b+a)} - \ln \frac{i}{I} = - \left(-y_3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_3^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_3^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_3^4}{4!} - \dots \right) + \\ + \left(-y_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_4^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_4^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_4^4}{4!} - \dots \right).$$

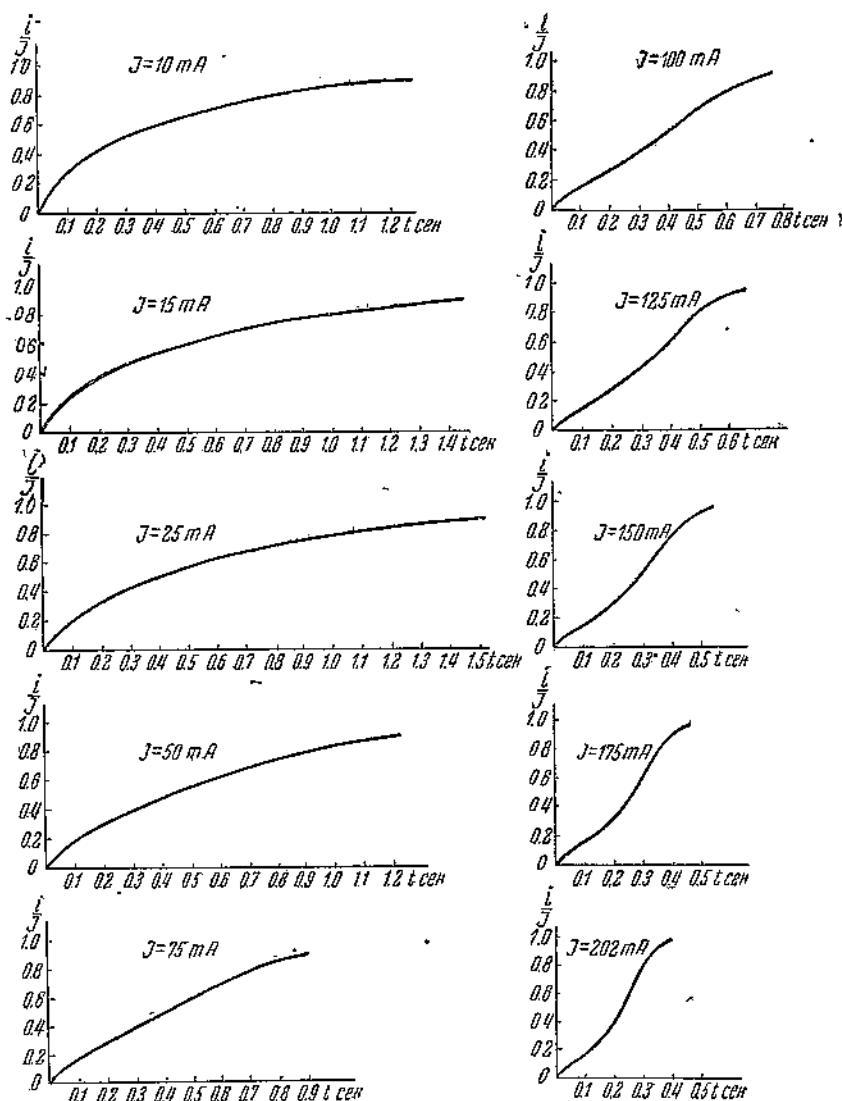
Подсчет функций $E_{-(b-a)} - \ln \frac{i}{I}$ и $E_{-(b+a)} - \ln \frac{i}{I}$ не представит трудностей, если мы будем иметь таблицу для ряда:

$$Z_b = -y_b + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_b^2}{2!} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_b^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_b^4}{4!} - \dots$$

Таблица эта приведена в приложении (стр. 156).

Для значений $y_b > 5$ можно для вычисления функции $(-Z_b)$ пользоваться следующей формулой:

$$-Z_b = 0.5772 + \ln y_b.$$



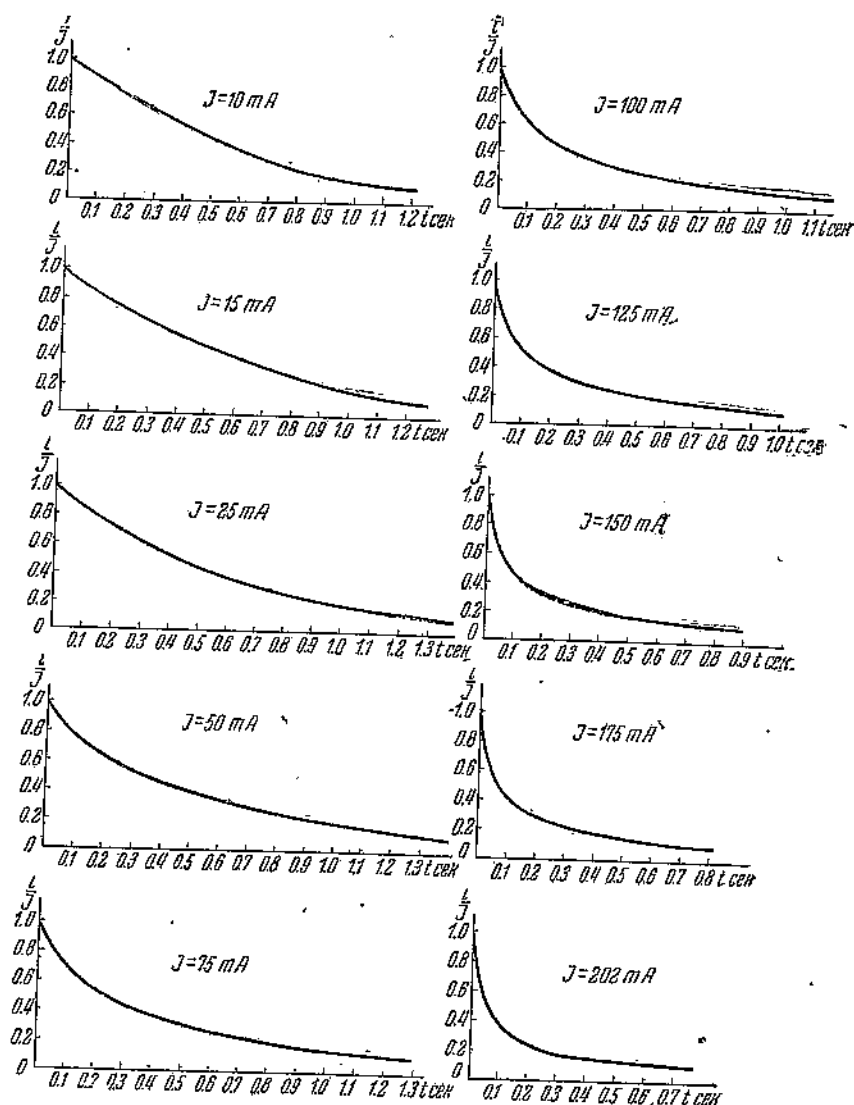
Фиг. 168.

Пользуясь приведенной таблицей, вычисляем значения времени t в зависимости от отношений $\frac{i}{I}$ по формуле:

$$t = -\tau_y \ln \frac{i}{I} - \frac{m}{2} q_1 \left(-Z_1 + Z_2 + \ln \frac{i}{I} \right) + \frac{m}{2} p_1 \left(-Z_3 + Z_4 + \ln \frac{i}{I} \right).$$

Пусть сопротивление цепи тороида равно 20Ω , установившийся же ток I в момент вынесения из цепи эдс E имел приведенные уже выше значения: 10, 15, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 202 мА.

Задаваясь отношениями $\frac{i}{I}$, вычислим таблицу значений времени t в зависимости от отношения $\frac{i}{I}$ при указанных значениях установившихся токов. Таблица приведена в приложении. По этой таблице построены графики убывающего тока на фиг. 169. Кривые нарастающего тока при тех же условиях были приведены на фиг. 168. И те и другие графики приведены в одном масштабе и дают возможность сравнить зависимость процессов заряда и разряда от степени намагничивания сердечника тороида.



Фиг. 169

При решении поставленной задачи можно избежать бесконечных рядов, если для магнитного потока взять формулу (см. § 10 главы II):

$$\Phi = \Phi_y \frac{(\omega i)^2 + m \omega i}{(\omega i)^2 + n \omega i + p} + \frac{L_y i}{w}.$$

Производная этой функции по i равна:

$$\frac{d\Phi}{di} = \Phi_y w \frac{(n-m) \omega^2 i^2 + 2 p \omega i + m p}{(\omega^2 i^2 + n \omega i + p)^2} + \frac{L_y}{w}.$$

Производя подстановку в уравнение

$$I = i + \frac{w}{R} \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt}$$

и вводя обозначения

$$I - i = i_1; \quad 2[(n-m) \omega I + p] = a_1; \\ 2 p \omega I + m p = b_1; \quad 2 \omega I + n = a_2 \text{ и } n \omega I + p = b_2,$$

получим

$$dt = -\frac{w}{R} \left[\Phi_y w \frac{(n-m) \omega^2 i_1^2 - a_1 \omega i_1 + b_1}{\omega^2 i_1^2 - a_2 \omega i_1 + b_2} + \frac{L_y}{w} \right] \frac{di_1}{i_1}.$$

Следовательно

$$t = -\frac{\omega^2}{R} \Phi_y \int_i^{I-i} \frac{(n-m) \omega^2 i_1^2 - a_1 \omega i_1 + b_1}{(\omega^2 i_1^2 - a_2 \omega i_1 + b_2)^2} \frac{di_1}{i_1} - \frac{L_y}{R} \int_i^{I-i} \frac{di_1}{i_1}.$$

Задача сводится к нахождению первого интеграла, но

$$\int \frac{(n-m) \omega^2 i_1^2 - a_1 \omega i_1 + b_1}{(\omega^2 i_1^2 - a_2 \omega i_1 + b_2)^2 i_1} di_1 = \frac{A + B \omega i_1}{\omega^2 i_1^2 - a_2 \omega i_1 + b_2} + \\ + \frac{b_1}{2 b_2^2} \ln \frac{i_1^2}{\omega^2 i_1^2 - a_2 \omega i_1 + b_2} - C \ln \omega \frac{2 \omega i_1 - a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4 b_2}}{\sqrt{\omega^2 i_1^2 - a_2 \omega i_1 + b_2}},$$

где

$$A = \frac{2 b_2^2 (n-m) - a_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1 - 2 b_1 b_2}{b_2 (a_2^2 - 4 b_2)}, \\ B = \frac{2 a_1 b_2 - a_1 b_1 - a_2 b_2 (n-m)}{b_2 (a_2^2 - 4 b_2)}, \\ C = \frac{2 a_2 b_2^2 (n-m) - 4 a_1 b_2^2 + 6 a_2 b_1 b_2 - a_2^3 b_1}{b_2^2 (a_2^2 - 4 b_2)^{3/2}}.$$

3. Необходимые предпосылки дальнейшего развития теории влияния железа на электромагнитные процессы в электрических цепях. В предыдущих параграфах рассматривались процессы нарастания и убывания тока в релейной цепи по схеме фиг. 124 без учета токов Фуко и гистерезиса. В то время как теоретический учет влияния токов Фуко на устанавливающиеся процессы не представляет большого труда, учет влияния магнитного гистерезиса связан с чрезвычайными трудностями. До настоящего времени мы не имеем математического описания этого процесса, — описания, полезного для технических надобностей. Между тем вопрос этот имеет весьма большое практическое значение и, не решив его, мы не сможем создать исчерпывающей теории влияния железа на электромагнитные процессы в электрических цепях, особенно же в случае действия в этих цепях переменной эдс. В виду этого полезно привести обзор того, что сделано в этом направлении, и наметить пути такого математического решения, которое возможно было бы использовать на практике. Этой важной проблемой мы и займемся в следующей главе.

В. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЯВЛЕНИЙ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ, В ЧАСТНОСТИ ГИСТЕРЕЗИСА¹

1. Введение. Изучая в отдельных телах те или иные физические процессы, мы должны иметь в виду три нижеисследующих основных положения.

1. Тело не может быть вполне изолировано от окружающей его среды; всякий совершающийся процесс в теле в той или иной степени взаимодействует со средой. При нагревании тела часть теплоты передается окружающей среде, при электризации тела электризуется в той или иной степени и окружающая среда, и т. д.

2. Всякое тело представляет собой комплекс разного рода физических процессов. Возбуждая и развивая один из них, мы в той или иной степени затрагиваем и другие. Намагничивая тело, мы вызываем в нем соответствующие механические деформации, тепловые явления и т. п.

3. Связь тела с окружающей средой и возбуждаемого извне отдельного физического процесса с рядом других процессов внутри тела приводит к динамической многозначности физических состояний тела. Любое физическое состояние тела есть результат предыдущей его истории.

Есть явления, где эта зависимость от предыдущих состояний тела выражена более резко, и есть явления, где она выражена гораздо менее резко. До сих пор наука ограничивалась главным образом описанием последних явлений, предполагая ради простоты полную независимость дальнейшего процесса от предыдущей истории.

Действительно, всякая физическая или физико-техническая теория, базирующаяся на применении дифференциальных уравнений, может быть прежде всего понята, как утверждающая связь каждого дальнейшего состояния тела только с величинами, характеризующими данное его состояние. Приведем примеры.

Сначала рассмотрим чисто механическое явление. Исходим из закона Ньютона, дополнив его трением:

$$\text{Сила} = K = m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{x(t+dt) - 2x(t) + x(t-dt)}{(dt)^2} + \alpha \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \quad (1)$$

(m — масса, α — коэффициент трения, x — координата, t — время).

Таким образом, мы видим, что каждое „последующее“ положение тела $x(t+dt)$ определяется двумя „предыдущими“ положениями: $x(t)$ и $x(t-dt)$. Конечно, два ближайших начальных положения должны быть известны, или, что то же самое, начальное положение и скорость. Это, очевидно, соответствует двум произвольным при решении уравнения (1). Таким образом, уравнение (1) выражает связь между тремя бесконечно близкими (по времени) положениями:

$$x(t+dt), \quad x(t), \quad x(t-dt). \quad (2)$$

Иначе говоря, в уравнении (1) не содержится влияние прежних положений тела:

$$x(t-t_1), \quad x(t-t_2) \quad \dots \quad \text{и т. п.}, \quad (3)$$

где t_1 , t_2 и т. д. — конечные величины.

Если даже внешние силы массы и трения изменяются со временем, в уравнение (1) входят их значения, соответствующие данному моменту, что и доказывает высказанное выше суждение. Ведь величина dt бесконечно мала, и физический смысл уравнения (1), согласно всему сказанному, заключается в определении каждого бесконечно близкого последующего состояния тела x (а следовательно, и $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д.) через состояние в настоящее время (K , m , α , x в настоящий момент) и через бесконечно близкое предыдущее состояние x . Зависимости

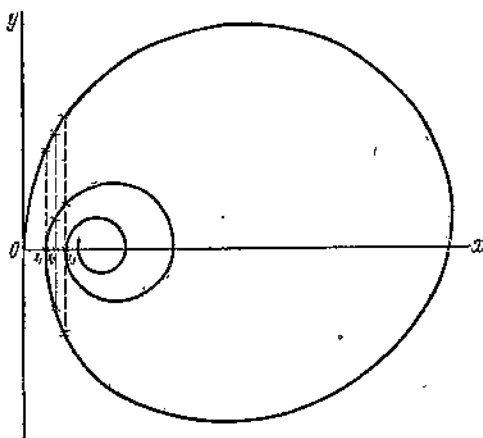
¹ Глава эта написана совместно с проф. М. В. Мачинским, см. статью под тем же названием в „Известиях ОН^а Академии Наук СССР, 1939, № 6.

же не от математически предыдущих (бесконечно близких), а от физически предыдущих величин (3) уравнение (1) не содержит.

Аналогичное имеет место и в электротехнике. Так, например, уравнение колебаний контура представляет собою связь между силой тока и напряжениями в настоящий момент и теми же в последующий, бесконечно к нему близкий, момент. Даже при переменных во времени самоиндукции, емкости и сопротивлении последние входят в уравнение лишь своими значениями в настоящий момент. Таким образом, и здесь мы видим, что физически предыдущие состояния

$$\begin{matrix} i(t-t_1), & i(t-t_2), & E(t-t_1), & E(t-t_2), \\ C(t-t_1), & C(t-t_2), & L(t-t_1), & L(t-t_2) \text{ и т. д.} \end{matrix} \quad (4)$$

не входят в уравнения контура. И наше обычное уравнение контура, так же, следовательно, как и рассмотренное выше механическое, не дает зависимости от истории процесса. Такие примеры можно множить до бесконечности. Все они, очевидно, относясь к самым различным отраслям науки и будучи выражены раз-



Фиг. 170.

ными буквами, если только мы исходим из дифференциальных уравнений и обычных функций времени и параметров, в них входящих, приводят к тем же, что и только что полученные, результатам. Иначе говоря, мы не получим в наших формулах влияния истории процесса на его состояние в настоящий момент.

Но внимательное рассмотрение дела заставляет усомниться в правильности таких математических описаний. Например, обратимся к только что рассмотренному случаю электрического контура. Так, если катушка самоиндукции этого контура имеет железный сердечник, то результаты, полученные по обычному способу, будут

достаточно грубо приближенными, ибо в данном случае уже никак нельзя пренебречь влиянием на последующее состояние контура (тока и напряжения в нем) таких величин, как две последние из (4). Очевидно, L зависит от μ — магнитной проницаемости, — последняя же для ферромагнитных тел может иметь достаточно резко выраженную зависимость от предыдущих намагничиваний и размагничиваний, т. е. от предыдущей истории процесса.

Может показаться, что можно поправить дело, введя в рассмотрение многозначные функции. Но, к сожалению, это не так просто. Та многозначность, которая обычно встречается в теории функций, если можно так выразиться, имеет статический характер. Многозначность же, необходимая для описания физических явлений, должна иметь гораздо более сложный, переменный, так сказать, динамический характер.

Этой динамической многозначности физических состояний тела мы можем даже в известном смысле противопоставить статическую многозначность. В качестве примера приводим график спирали (фиг. 170).

Значению независимой переменной $x=x_1$ соответствуют два значения y , значению $x=x_2$ — три значения y ; $x=x_3$ — четыре значения y и т. д. Эти значения y не зависят от направления изменения x . Изменяя направления переменной x от $x=0$ к $x=\infty$, мы получим при $x=x_3$ четыре указанных значения y и те же четыре значения y мы получим при обратном (от $x=\infty$ до $x=0$) прохождении x через значение x_3 .

Многозначность приведенной функции застывшая, статическая. График фиг. 171, в противоположность графику фиг. 170, выражает динамическую многозначность. Меняя x от 0 до x_1 , мы получаем значения y , определяемые кривой Oa ; изменив направление x и переходя от x_1 до x_2 , получим кри-

вую ab и совсем иные значения y , соответствующие тем же значениям x между 0 и x_1 ; изменив снова направление x , получим кривую bc и, следовательно, опять новые значения y , и т. д. С каждым изменением направления x мы меняем кривую y и, многократно проходя через одно и то же значение x , получаем все новые значения y . Кривая фиг. 171 представляет собой серию магнитных циклов при намагничивании тела при непрерывном увеличении крайних значений x . При намагничивании тела с непрерывным уменьшением крайних значений x получим подобную же серию уменьшающихся циклов, не совпадающую с циклами предыдущего намагничивания.

Характерным примером динамической многозначности является также кривая фиг. 172, выражающая собою частичные циклы при намагничивании прямого магнита.

Рассмотренные примеры многозначностей (обычно изучаемых математически и необходимых нам для описания физических явлений) имели целью показать несоответствие их и неприменимость первой для описания второй. Нами рассмотрены примеры гистерезиса; если мы перейдем к вопросам чистого последствия, то несоответствие станет еще более разительным. Так что от применения элементарной алгебраической многозначности приходится отказаться.

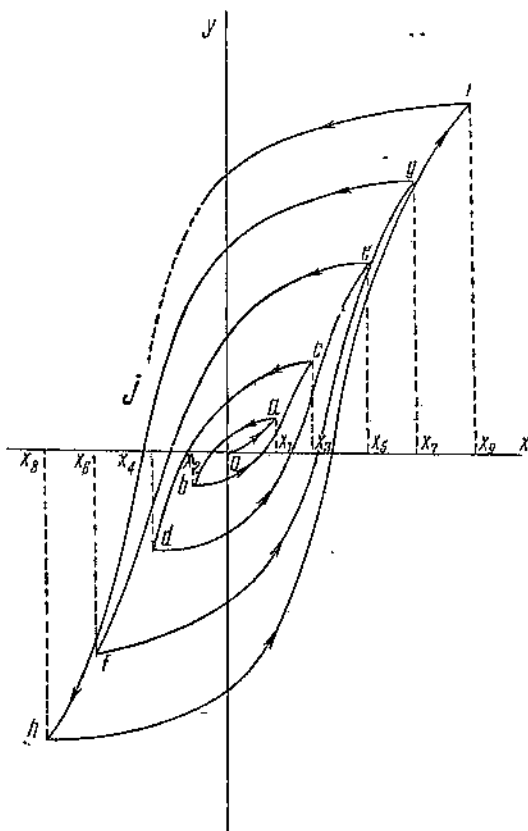
Но вопросы, связанные с историей процесса, настолько теоретически и практически важны, что человеческая мысль вот уже полстолетия интенсивно работает над ними. Хотя нами предлагается новый способ математического описания таких явлений, все же представляется целесообразным уделить прежде немного места истории вопроса и имеющимся уже в этой области исследованиям.

2. Краткий обзор истории вопроса. Основные результаты в интересующей нас области связаны в основном с именами Л. Больцмана, В. Вольтерры и Т. Леви-Чивита. Бесчисленное множество других авторов занималось, собственно, развитием их идей. Они будут упомянуты ниже в соответствующих местах.

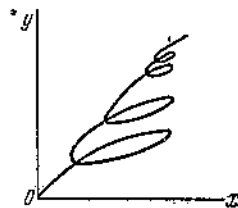
Исходным пунктом для всех (насколько нам известно) авторов была замечательная идея Людвига Больцмана¹ с математическим описанием явлений последствия в механике, в частности упругого последствия. Этот великий ученый еще в 1874 г. предложил, находясь в кругу развитых выше (см. введение к этой главе) идей, заменить обычный закон Гука:

$$\gamma_{rs}(t) = a_{ixrs} x_{ik}(t) \quad (5)$$

¹ Wiss. Abh. Vol. I, 1874; Wien. Ber. 70, 1875.



Фиг. 171.



Фиг. 172.

(здесь γ_{rs} — тензор деформаций, x_{ik} — тензор напряжений, α_{ikrs} — тензор констант упругости, t — попрежнему время), выражающий зависимость деформаций только от напряжений в данный же момент t , более общим законом:

$$\gamma_{rs}(t) = \alpha_{ikrs} x_{ik}(t) + \int_{-\infty}^t \psi_{ikrs}(t-\tau) x_{ik}(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Этот обобщенный закон, который мы в дальнейшем будем обозначать как закон упругости Больцмана, и выражает как раз зависимость данной деформации γ_{rs} не только от напряжения x_{ik} в тот же момент, но и от $x_{ik}(\tau)$ — напряжений в любой предыдущий момент ($-\infty < \tau < t$).

Позднее Вито Вольтерра¹ указал, что (6) не является единственно возможной формулой, интегрально связывающей $\gamma(t)$ (деформации) с $x_{ik}(t)$ (напряжениями). Закон Больцмана является лишь общим случаем для ограничения себя бесконечно малыми деформациями (линейной упругости). Но, не останавливаясь на этих механических вопросах, обратимся к интересующим нас электромагнитным. По поводу же механического последствия мы отсылаем к имеющей скоро появиться капитальной работе проф. М. В. Мачинского.²

Аналогично закону Больцмана (6) Вито Вольтерра (гораздо позднее, в начале текущего столетия) предложил заменить обычную связь между магнитной индукцией B и напряженностью магнитного поля H :

$$B(t) = \mu H(t) \quad (7)$$

(μ — магнитная проницаемость), связь, не выражающую исторической зависимости, обобщенной связью:

$$B(t) = \mu H(t) + \int_{-\infty}^t \mu_1(t-\tau) H(\tau) d\tau, \quad (8)$$

которую мы будем обозначать как закон магнитного последствия Вольтерра. Как то очевидно, формула (8) содержит зависимость $B(t)$ — магнитной индукции — не только от $H(t)$ (напряженности) данного момента t , но и от $H(\tau)$, где τ — любой прошедший момент ($-\infty < \tau < t$).

Совершенно так же, как и (6), закон магнитного последствия (8) Вольтерра не общ, так как содержит H лишь линейно. В общем случае необходима нелинейная связь. Так, Т. Левн-Чивита³ доказал, что явления магнитного гистерезиса с характерной для него петлей нельзя получить из (8). Для гистерезиса необходимо, чтобы H под интеграл входило нелинейно. Фактически же этой нелинейной интегральной зависимости, хорошо увязанной с данными опыта, насколько нам известно, до сих пор никто не дал.

Как мы указывали выше, кроме трех приведенных авторов к аналогичным требованиям, с аналогичными же приемами, подходил целый ряд исследователей, из которых назовем следующими: Аморозо, Вейхерт, Джорджи, Донати, Костицын, Лауричелла, Марколонго, Серини, Странео.⁴

Занимались вопросами математического описания явлений последствия также

¹ Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes (Coll. Borel), Gauthier — Villars, Paris, 1913; Leçons sur équations intégrales et les équations integro-différentielles, Paris, 1913; Theory of functionals, 1930.

² Мачинский М. В. Развитие теории Больцмана—Вольтерра для явлений усталости и т. д.

³ Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes, 1913, стр. 114. и след.

⁴ Amoroso L. Atti Congr. Int. Mat. Bologna, 1928. Wiechert J. E. Wied. Ann., Vol. 50. Giorgi G. Atti Ass. Elettrotecnica Italiana, 1903, 1905. B. Acc. dei Lincei. Rend., Vol. XXI, Ser. 5, 1912. Donati L. Mem. d. R. Acc. delle Sc. d'Ist. di Bologna. Ser. IV, Vol. IX, 1888. Kosiitizin V. A. Rec. Math. Moscou, Vol. 33, 1926; Proc. Int. Math. Congr., Toronto, Vol. II, 1928. Lauricella G. Nuovo Cim., Ser. 5, Vol. XIII, 1907. Marcolongo R. R. Acc. dei Lincei Rend., Vol. XVI, Ser. 5, 1907; Ann. Fac. des Sc. de Toulouse, Ser. 2, Vol. IX. Serini R. R. Ist. Veneto, 1917, 1919. Straneo P. R. Acc. dei Lincei Rend., Vol. I, Ser. 6, 1925.

и многие другие авторы. Но, как мы только что говорили, ничего принципиально нового они не привнесли в интересующую нас проблему. Таким образом, в настоящий момент единственным способом описания явлений последствия является способ Больцмана—Вольтерра, только что изложенный и в основном сводящийся к формулам (6) и (8). Все остальное лишь представляет математическую обработку и развитие (6) и (8).

Переходя теперь к обсуждению допущений, выраженных равенствами (6) и (8), как со стороны теоретической точности их, так и со стороны их практической применимости, необходимо отметить следующее.

1. С принципиально теоретической точки зрения как допущения (6) и (8), так и обобщающие их допущения вида

$$B(t) = \mu H(t) + \int_{-\infty}^t F[\mu_1(t-\tau)H(\tau)] d\tau \quad (9)$$

(здесь $F[...]$ —какая-то экспериментально определяемая функция, вообще говоря, могущая быть и нелинейной) или еще более общие выражения (с F не функцией, а функционалом, см. ниже) должны быть признаны вполне логически правильными и обобщающими обычные физические равенства именно в нужном направлении—учета значений нашей величины (например H) и в прежние моменты времени. Присутствие интеграла в таких формулах совершенно неизбежно, ибо предыдущих моментов по существу вопроса бесконечно много и ни один из них не может быть опущен. Так что обязательна при такой постановке вопроса в (9) операция с бесконечным числом составляющих, т. е. интеграл или что-либо еще более общее. Конечно, пределы такого интеграла могут быть и не $(-\infty, t)$, а (t_1, t) , где $t_1 < t$. Действительно, материал наш (например железо) можно считать хотя и „памятливым“ (влияние истории), но все же „помнящим“ не все прежде бывшее, а лишь недавнее ($t_1 < \tau < t$).

II. Но в какой мере теоретически (6), (8) и (9) представляются правильными и нужными, в такой же мере практическое значение их было до последнего времени (несмотря на несколько десятилетий их существования) ничтожным. Они не только почти никем не применялись, но были почти неизвестны скольким-нибудь широким кругам физиков и техников.

Вызывается это крайней громоздкостью получающихся [при таких, как (6), (8) и (9) допущениях] окончательных формул и решений, почти всегда существующих лишь в виде бесконечных и притом весьма неудобных практически рядов и почти нигде в виде простых и конечных комбинаций из элементарных функций. С этим связаны также и трудности проверки (см. III). Трудности эти создают необходимость применения при рассмотрении (6), (8) и (9) особых видов анализа: функционального анализа¹ и теории композиций.²

Конечно, когда трудности лежат в самом существе вопроса, когда они неизбежны, с преодолением их приходится мириться. Но нам кажется, что для ряда физических и физико-технических вопросов могут быть предложены более простые, чем Больцмана—Вольтерра, средства описания. А тогда, конечно, упрек в расчетной трудности и, как говорят немцы, „плохой обзорности“ формул делается заслуженным.

III. Наконец, что, пожалуй, самое важное, допущения (6), (8) и (9) до сих пор не получили экспериментальной проверки. Мы не хотим этим сказать, что опыты опровергнут допущения Больцмана—Вольтерра. Нет, пока просто нет еще сравнения экспериментального материала с теоретически получающимся по (6), (8) и (9), что вызвано, естественно, расчетными трудностями, только что упомя-

¹ Функциональным анализом, как известно, называется отрасль математики, изучающая функционалы. Функционалы—это величины, каждое отдельное значение которых определяется бесконечно большим числом значений аргумента (в противоположность функции, каждое значение которой определяется только одним значением аргумента). Простейшим примером функционала является обычный интеграл. См., например, *Theory of functionals by V. Volterra, 1930.*

² Volterra, V. et Pérès J. Leçons sur la composition. — Coll. Borel, 1924.

нутыми. А раз так, то при всей логичности допущения Больцмана — Вольтерра остается открытым вопрос об истинности его. Следовательно, целесообразна каждая попытка дать теоретическое оружие для работы над явлениями с последствием, как более простое, так и соответствующее опыту.

Итак, подведя итоги, сказанному в настоящем параграфе, еще раз подчеркнем, что, не сомневаясь в логичности допущения Больцмана — Вольтерры, мы все же считаем его практически применимым лишь в весьма немногих случаях, где без него никак нельзя обойтись. Для весьма же большого класса физических и физико-технических явлений может быть предложен новый, более простой (и тем самым более практически применимый) способ описания.

3. Изложение предлагаемого метода. Пусть

$$y = f(x) \quad (10)$$

— какая-то функция, выражающая девственную кривую (упругого, электрического или магнитного гистерезиса — безразлично).

Пусть в точке, где мы совершили поворот на обратную операцию [если по (10) намагничивали, стали размагничивать, и т. п.],

$$y_{1n} = f(x_{1n}). \quad (11)$$

Тогда кривая приняла какой-то новый вид

$$y = f_1(x) = \varphi[f(x), x_{1n}], \quad (12)$$

где φ — какая-то новая функция, выражающая переход от девственной (11) к новой (12) кривой.

Пусть, далее, в новой точке

$$y_{2n} = f_1(x_{2n}) \quad (13)$$

снова изменим направление процесса. Тогда естественно предположить, и это есть центральное место нашей работы, что дальнейшая зависимость имеет вид:

$$y = f_2(x) = \varphi[f_1(x), x_{2n}], \quad (14)$$

т. е. что функция, переводящая старую зависимость в новую, для каждого поворота в направлении процесса одна и та же. Одна и та же алгебраически; параметры, конечно, могут и изменяться (см. примеры).

С помощью такого допущения мы, очевидно, легко получим и любую дальнейшую кривую. Находим последовательно:

$$\left. \begin{aligned} f_3(x) &= \varphi[f_2(x), x_{3n}], \\ f_4(x) &= \varphi[f_3(x), x_{4n}], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и т. д.

Вообще имеем кривую зависимости y от x после n -ого поворота

$$f_n(x) = \varphi[f_{n-1}(x), x_{nn}]. \quad (16)$$

Таким образом мы пришли к системе итеративных операций. Если мы введем обычные в исчислении итераций сокращения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= x, \\ \varphi_1(x) &= \varphi(x), \\ \varphi_2(x) &= \varphi[\varphi(x)], \\ \varphi_3(x) &= \varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

то сможем наш процесс гистерезиса описать с помощью уравнений вида

$$y = \varphi_n[f(x)], \quad (18)$$

где зависимость от точек поворота $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$ для краткости письма явно не выписана, но, конечно, может подразумеваться. В уравнение (18) входят две функции, подлежащие экспериментальному определению: f и φ . Первая из них есть девственная кривая процесса (кривая первого воздействия на тело), вторая

выражает изменение нашей кривой в результате каждого изменения в направлении течения процесса. Вместе с тем (18) описывает нам все возможные кривые нашего процесса.

Мы полагаем (и вряд ли приходится настаивать на этом), что предлагаемое средство описания явления гистерезиса проще, чем предлагаемое по методу Больцмана — Вольтерра выражение (9). Это очевидно. Прежде всего в (18) отсутствует интегрирование, так же как и в обычных формулах, описывающих явления без последствия. Интегралы, конечно, могут появиться, как и обычно при решении дифференциального уравнения, куда войдет (18), и, как это было и при обычной, вместо (18), формуле. Но в самом выражении интегральных операций нет, и это, конечно, весьма облегчает оперирование с (18) в противоположность (9).

Далее, мы устраним [переходя от (9) к (18)] все проблемы так наз. функционального анализа (см. примечание к концу § 2), что также чрезвычайно упрощает расчеты.

Правда, и описание по (18) также выводит нас из обычных, привычных физику и технику, областей математики. А именно, при работе с формулой (18) желательно знание итерационного исчисления и теории уравнений в функциях. Но это уже круг проблем, гораздо более легких.

Итерационное исчисление есть достаточно молодая отрасль математики. Фундаментальные работы в этой области принадлежат Абелю¹ и особенно Кенигсу.² Хотя эта отрасль математики и не получила еще должного развития, но по ней уже имеется достаточно много работ. Есть и общие обзоры. Из более старых стоит отметить статьи Пинчерле³ в „Математической энциклопедии“; из более новых — краткую, но весьма интересную главу в книге Монтеля.⁴

Теория уравнений в функциях (которую часто называют теорией функциональных уравнений, что путает эти вопросы с уравнениями в функционалах,⁵ за которыми и стоит только оставить название функциональных уравнений, ведет свое начало еще с XVIII века (обзор см. у только что цитированного Пинчерле).

Возвращаясь к уравнению (18), легко, конечно, заметить, что оно применимо не только к явлению гистерезиса, но (несколько измененное) и к другим процессам с последствием. На этом останавливаться мы здесь не будем. Но одно общее замечание о границах применимости (18) можно сделать. А именно, предлагаемый способ описания имеет естественное применение к процессам, хотя и зависящим от характера предыдущих состояний, но не зависящим от времени пребывания в этих состояниях, т. е. от скорости прохождения через те или иные состояния.

4. Примеры к § 3. Для краткости введем следующие обозначения: $f(x)$ — функция девственной кривой, φ — функция поворота. Для ясного понимания итерационных процессов мы рассмотрим примеры как с постоянной для каждого поворота φ , так и примеры φ с изменяющимися параметрами.

а) Функция поворота линейна:

$$\varphi(f, x_n) = (\sigma - 1)f + \sigma f(x_n) = Af + B; \quad \sigma = \text{const}; \quad 0 < \sigma < 1.$$

Имеем девственную кривую: $y = f(x)$.

Возьмем два предела независимой переменной x : нижний x_1 и верхний x_2 , так что $x_2 > x_1 > 0$. Доведем x от нуля до x_2 ; изменим направление x и будем уменьшать x до x_1 , затем опять изменим направление x и увеличим его до верхнего предела x_2 , и т. д., т. е. x колеблется в пределах от x_1 до x_2 .

При первом изменении x от 0 до x_2 имеем:

$$y_1 = f_1(x).$$

¹ Абель. Oeuvres 2, p. 36.

² Кенигс. Bull. des Sc. Math. et Astron. Deuxième série. Tome VII, 1883, Prem. Part.; Ann. de l'Ec. Norm., 3e série, Tome I, 1885; Ann. de l'Ec. Norm., 3e série, Tome II.

³ Пинчерле. Enc. Math. Wiss., II, All. Functionaloperationen und Gleichungen. 1905.

⁴ Монтель. Нормальные семейства аналитических функций (русский перевод), 1934.

⁵ Вольтерра. Функциональный анализ (см. примечания к § 2).

Когда x достигает верхнего предела x_2 , изменим направление x . Пусть это изменение направления выразится добавочным членом

$$+ \sigma [f_1(x_2) - f_1(x)],$$

т. е. при изменении x от x_2 до x_1 имеем:

$$y_2 = f_2(x) = f_1(x) + \sigma [f_1(x_2) - f_1(x)].$$

Очевидно, что при $x = x_2$, т. е. в пункте перемены добавочный член равен нулю:

$$\sigma [f_1(x_2) - f_1(x_2)] = 0.$$

При $x = x_2$ имеем:

$$y_2 = f_2(x_1) = f_1(x_1) + \sigma [f_1(x_2) - f_1(x_1)] = (y_1)_{x_1} + \sigma [f_1(x_2) - f_1(x_1)],$$

т. е. точка y_2 при $x = x_1$ поднимается над y_1 при том же $x = x_1$.

В пункте x_1 опять изменим направление, что выразится добавочным членом

$$\sigma [f_2(x_1) - f_2(x)],$$

т. е.

$$y_3 = f_3(x) = f_2(x) + \sigma [f_2(x_1) - f_2(x)].$$

При $x = x_1$ добавочный член равен нулю, затем значения x будут больше нуля, следовательно

$$f_2(x) > f_2(x_1),$$

следовательно

$$y_3 = f_3(x) = f_2(x) - \sigma [f_2(x) - f_2(x_1)],$$

т. е. кривая y_3 будет лежать под кривой y_2 .

При $x = x_2$ имеем:

$$y_3 = f_3(x_2) = f_2(x_2) - \sigma [f_2(x_2) - f_2(x_1)].$$

Опять изменим направление. Тогда получим:

$$y_4 = f_4(x) = f_3(x) + \sigma [f_3(x_2) - f_3(x)],$$

и т. д.

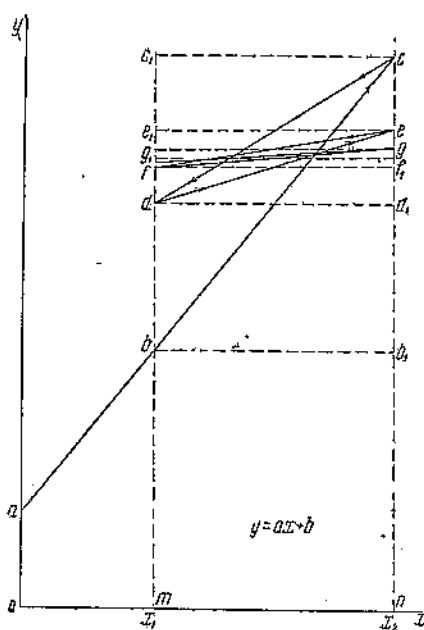
Приведем численный пример. Пусть не только функция поворота, но и сама девственная кривая, линейны:

$$y_1 = a + bx \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{1}{2}.$$

При изменении x от 0 до x_2 мы имеем (фиг. 173) прямую abc . При первом изменении направления x функция y_2 будет выражаться прямой cd , причем отрезок $bd = b_1 d_1 = \sigma [f_1(x_2) - f_1(x_1)] = \frac{1}{2} cb_1 = \frac{1}{2} b c_1$. При втором изменении направления x функция y выразится прямой de , причем отрезок $ce = \sigma [f_2(x_2) - f_2(x_1)] = \frac{1}{2} (nc - nd_1) = \frac{1}{2} cd_1$. При третьем изменении направления x функция y представится прямой ef , причем $df = \sigma [f_3(x_2) - f_3(x_1)] = \frac{1}{2} de_1$ и т. д.

При беспредельном изменении направления x функция y все время поворачивается, асимптотически стремясь стать параллельной оси абсцисс.

Нетрудно определить и положение асимптоты. Действительно, положение точки d определится суммой отрезков: $mb + bd = mb + \frac{1}{2} cb_1$; точки f — суммой



Фиг. 173.

$$\begin{aligned}
 y_5 &= (1-\sigma)^4 f_1(x) + \sigma(1-\sigma)[1+(1-\sigma)^2]f_1(x_1) + \sigma[1+(1-\sigma)^2]f_1(x_2) \\
 y_6 &= (1-\sigma)^5 f_1(x) + \sigma(1-\sigma)[1+(1-\sigma)^2]f_1(x_1) + \sigma[1+(1-\sigma)^2+(1-\sigma)^4]f_1(x_2) \\
 y_7 &= (1-\sigma)^6 f_1(x) + \sigma(1-\sigma)[1+(1-\sigma)^2+(1-\sigma)^4]f_1(x_1) + \sigma[1+(1-\sigma)^2+ \\
 &\quad + (1-\sigma)^4]f_1(x_2) \\
 &\dots \dots \dots \\
 y_\infty &= (1-\sigma)^\infty f_2(x) + \sigma(1-\sigma) \frac{1}{1-(1-\sigma)^2} f_1(x_1) + \sigma \frac{1}{1-(1-\sigma)^2} f_2(x_2).
 \end{aligned}$$

Так как $0 < \sigma < 1$, то $(1-\sigma)^\infty = 0$ и $y_\infty = 0$, т. е. если $\sigma = \text{const}$, то при любом виде функций девственной кривой $y_1 = f_1(x)$ с приближением числа перемен (между x_1 и x_2) к бесконечности кривые стремятся к асимптоте, параллельной оси абсцисс.

Пусть $x_1 = -x_2$, функция же $f_1(x)$ выражается прямой, проходящей через начало координат (фиг. 174), т. е. $y = mx$; тогда при $\sigma = \frac{1}{n}$ асимптота y_∞ выразится формулой:

$$y_\infty = \frac{1}{2n-1} mx_2.$$

Чем больше n , т. е. чем меньше σ , тем ближе асимптота к оси абсцисс.

Так, например, на фиг. 174 характерна для линейной функции поворота величина $\sigma = \frac{1}{4}$, следовательно, асимптота $y_\infty = oc = \frac{1}{7} mx_2 =$

$$= \frac{1}{7} de. \text{ Все восходящие прямые при}$$

этом проходят через полюс b , лежащий на асимптоте, и все нисходящие — через полюс a , лежащий на той же асимптоте.

Расстояние между полученными полюсами a и b легко находится из подобия треугольников oed и obc , а именно:

$$\frac{cb}{oe} = \frac{oc}{de}, \text{ но } oe = x_2, \quad de = mx_2, \quad oc = y_\infty = \frac{mx_2}{2n-1},$$

следовательно, расстояние между полюсами равно:

$$\begin{aligned}
 ab &= 2cb = 2 \frac{oc}{de} = 2 \frac{x_2}{mx_2} \cdot \frac{mx_2}{2n-1} = \frac{2x_2}{2n-1}, \\
 ab &= \frac{2x_2}{2n-1}.
 \end{aligned}$$

б) Функции поворота линейны, но каждая со своим множителем σ ($\sigma \neq \text{const}$, т. е. зависит от номера поворота).

Пусть σ в моменты перемены направления x меняет свою величину по следующему закону:

$$\sigma = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots,$$

причем девственная кривая линейна:

$$y = ax.$$

Исходя из этого задания, строим графики фиг. 175. Мы видим, что прямая асимптотически приближается к какой-то прямой, наклоненной под определенным углом к оси абсцисс.

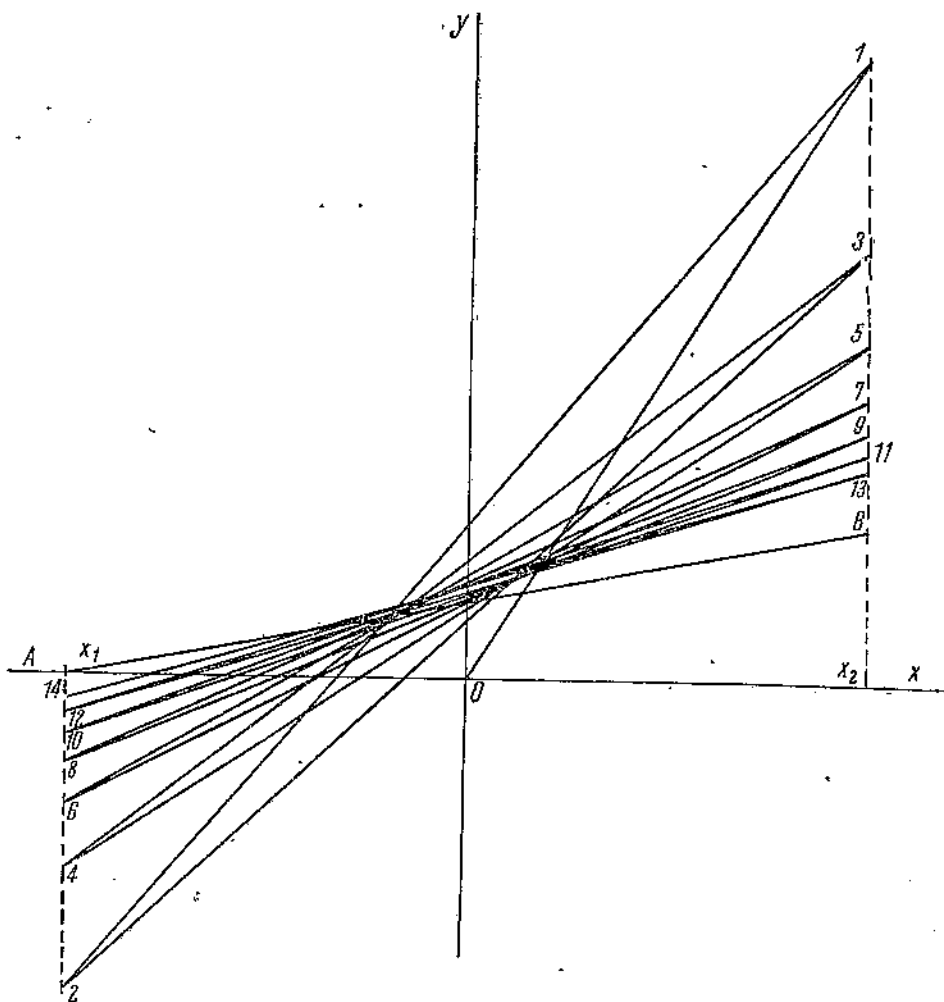
Если ординату абсциссы x_2 принять за единицу, то ординаты точки x_2 убывают по следующему ряду:

$$1, \frac{7}{10}, \frac{39}{70}, \frac{199}{420}, \frac{1937}{4620}, \dots,$$

асимптотически приближающемуся к значению 0.25, и ордината x_1 убывает по ряду:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{27}{140}, \frac{53}{420}, \frac{373}{4620}, \dots,$$

асимптотически приближающемуся к нулю.



Фиг. 175.

Таким образом, асимптотой y будет прямая AB .

Пусть σ в моменты перемены направления x меняет свою величину по закону убывающего геометрического ряда:

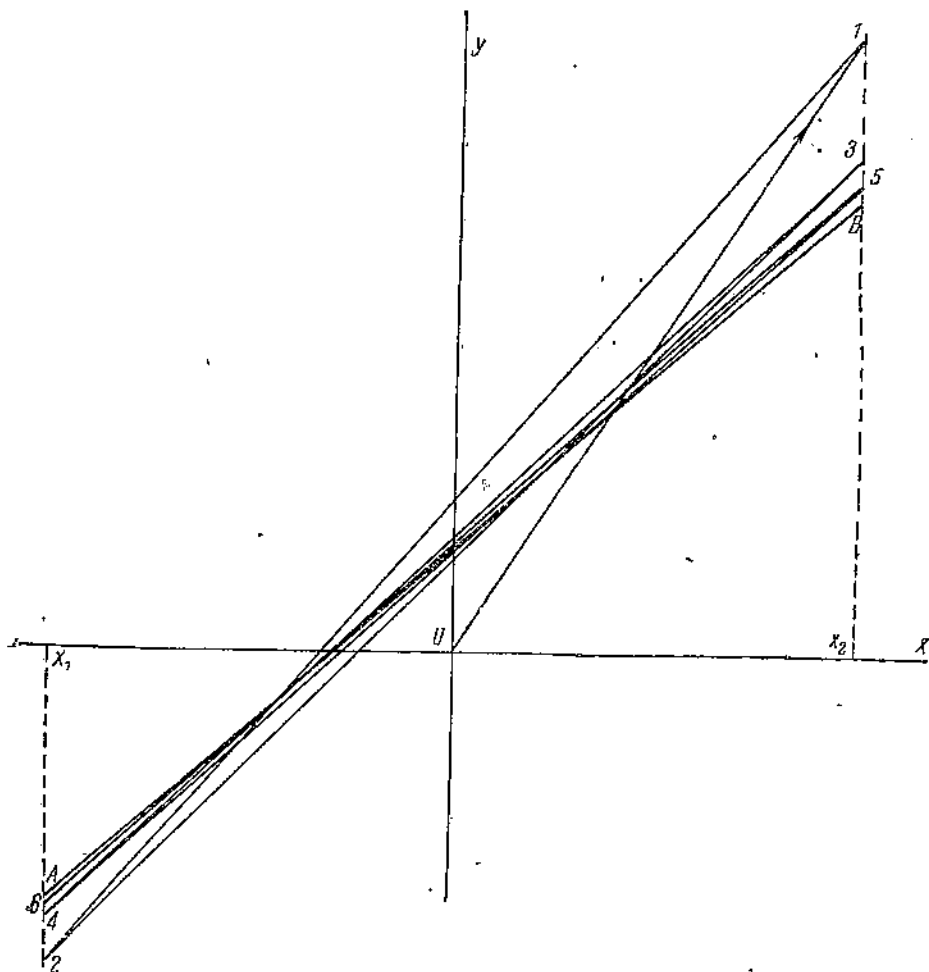
$$\sigma = \sigma_1, \sigma_1 q, \sigma_1 q^2, \sigma_1 q^3, \dots,$$

где $\sigma_1 < 1$ и $q < 1$.

Если положить $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ и $q = \frac{1}{2}$, тогда при виде функции $y = ax$ получим графики фиг. 176, на которых функция y асимптотически стремится к прямой AB .

Резюме по примерам „а“ и „б“. Если функция поворота в точности та же при каждом повороте, если, следовательно, $\sigma = \text{const}$ и кроме того $0 < \sigma < 1$, то при любом виде функции девственной кривой $y = f(x)$ последняя стремится к прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние этой прямой зависит от значения σ .

Если все функции поворота имеют различные σ , если, следовательно, $\sigma \neq \text{const}$, то функция $y = ax$ стремится к прямой, наклоненной под определенным углом к оси абсцисс. Положение этой предельной прямой зависит от закона изменения величины σ .



Фиг. 176.

И в том и в другом случаях развитие процесса идет следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) \\ y_2 &= f_1(x) + \sigma[f_1(x_2) - f_1(x)] = f_2(x) \\ y_3 &= f_2(x) + \sigma[f_2(x_1) - f_2(x)] = f_3(x) \\ y_4 &= f_3(x) + \sigma[f_3(x_2) - f_3(x)] = f_4(x), \end{aligned}$$

что и представляет нашу итерацию, записанную в развернутом виде и для φ линейной.

Примеры 1 и 2 могли быть повторены и при отрицательном значении σ , тогда процесс развивался бы следующим путем:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) \\ y_2 &= f_1(x) - \sigma[f_1(x_2) - f_1(x)] = f_2(x) \end{aligned}$$

$$y_3 = f_2(x) - \sigma[f_2(x_1) - f_2(x)] = f_3(x)$$

$$y_4 = f_3(x) - \sigma[f_3(x_2) - f_3(x)] = f_4(x)$$

.....

В этом случае графики фиг. 174 заменились бы графиками фиг. 177. Мы получили бы расходящийся до бесконечности процесс с асимптотой, совпадающей с осью ординат, в общем же случае перпендикулярной где-либо к оси абсцисс.

Наконец, мы могли бы связать знак σ с направлением изменения независимой переменной x , например, при движении в положительную сторону x знак σ положительный, в обратном направлении — отрицательный.

При таких предпосылках закон развития процессов выражался бы следующим образом:

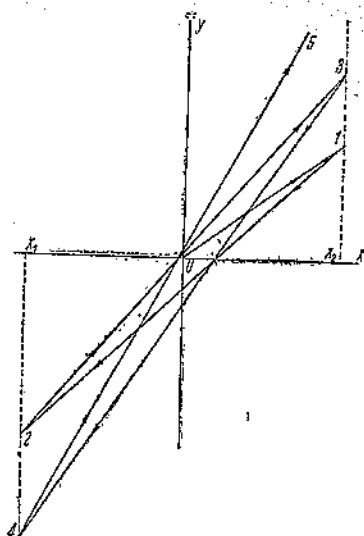
$$y_1 = f_1(x)$$

$$y_2 = f_1(x) + \sigma[f_1(x_2) - f_1(x)] = f_2(x)$$

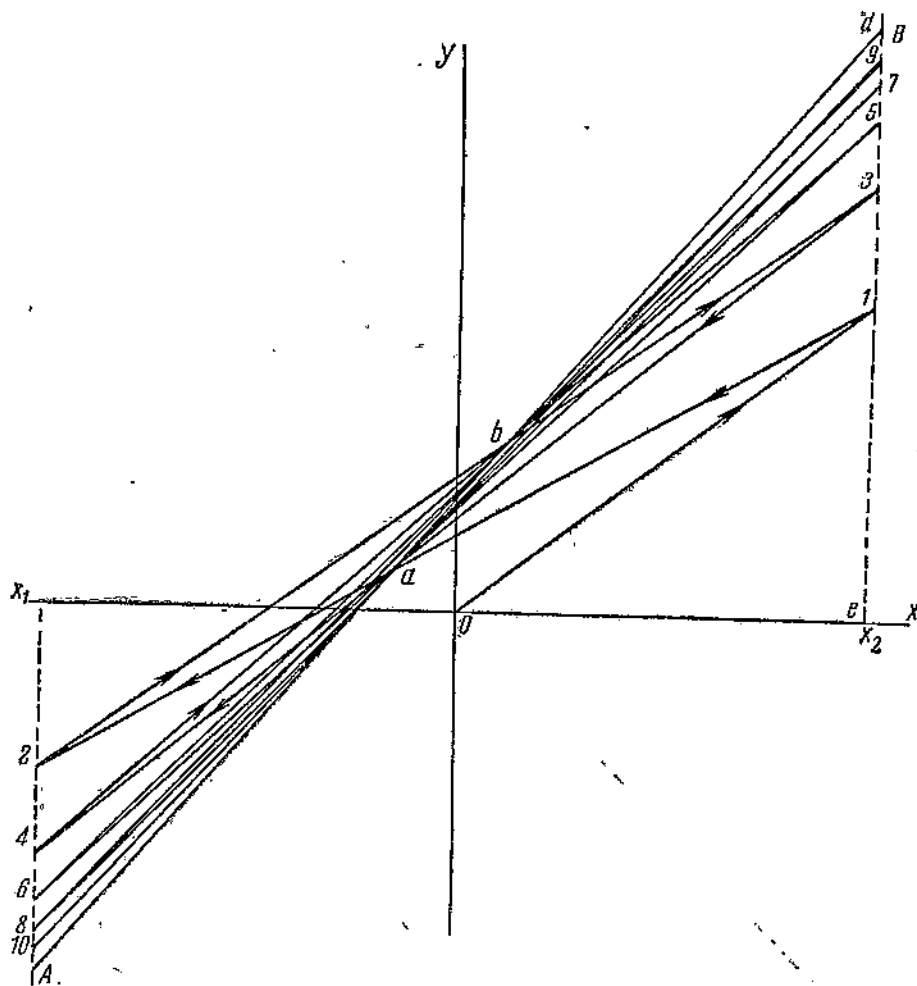
$$y_3 = f_2(x) - \sigma[f_2(x_1) - f_2(x)] = f_3(x)$$

$$y_4 = f_3(x) + \sigma[f_3(x_2) - f_3(x)] = f_4(x)$$

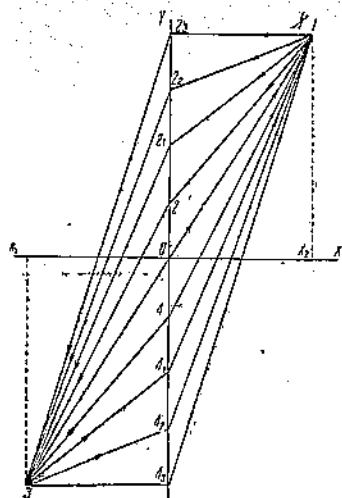
.....



Фиг. 177.



Фиг. 178.

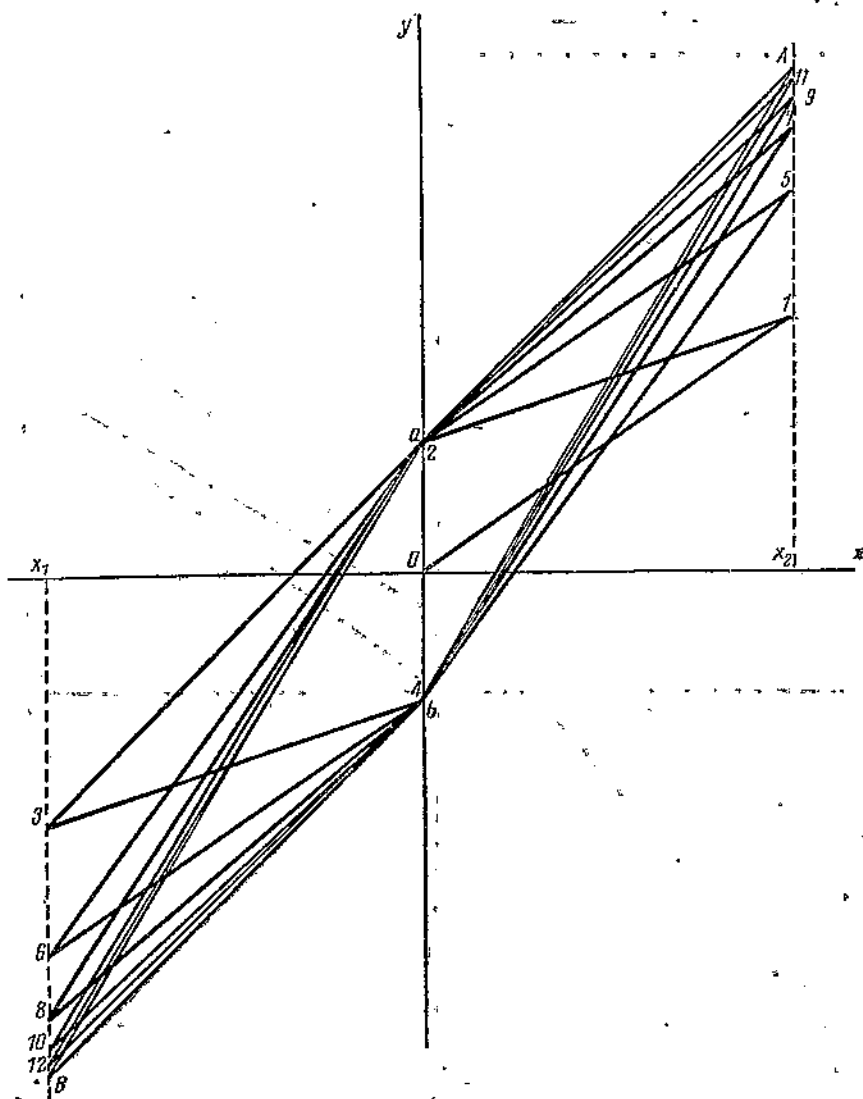


Фиг. 179.

В этом случае графики фиг. 174 переходят в графики фиг. 178. Асимптота, расположенная по прямой AB , параллельной оси абсцисс на фиг. 174, заменилась бы асимптотой по прямой AB (фиг. 178), наклоненной под некоторым углом к оси абсцисс; соответствующим образом переместятся и полюсы a и b .

Далее останавливаться сейчас на этих процессах мы не будем, оставим пока и случай, когда величина σ является функцией x . Потом мы еще вернемся к этим вопросам, сейчас же рассмотрим случай „симметричной“ функции поворота, при котором процессы при $x > 0$ и $x < 0$ развиваются симметрично.

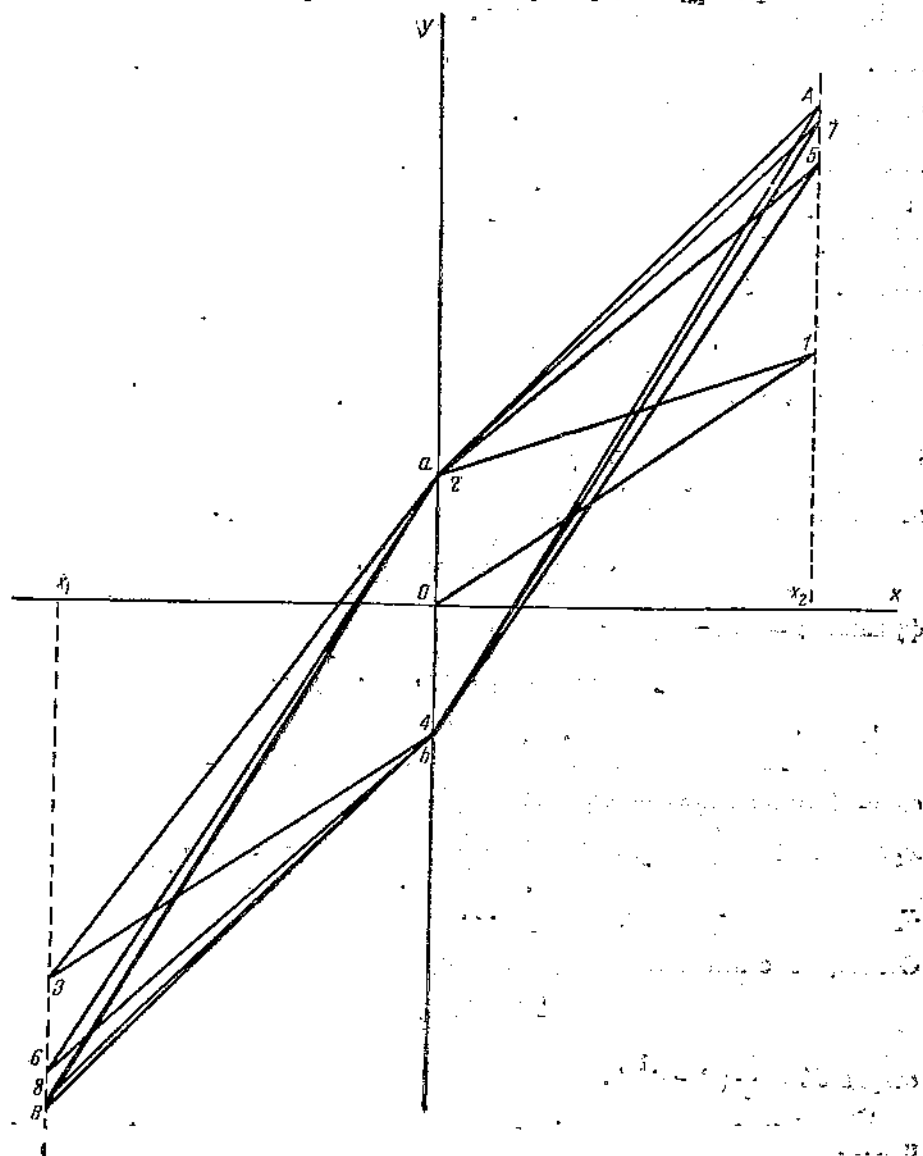
в) „Симметричная“ линейная функция поворота. А) Замкнутые циклы (фиг. 179). Пусть $x_1 = -x_2$ и знак величины σ зависит от знака x и его направления.



Фиг. 180.

Имеем два процесса:

$$\begin{array}{lcl}
 y_1 = f(x) & \rightarrow & -y'_1 = f(-x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 y_2 = y_1 + \sigma(y_{1x_2} - y_1) & \rightarrow & -y'_2 = y'_1 - \sigma(y'_{1x_1} - y'_1) \\
 & & \downarrow \\
 y_3 = y_1 + \sigma(y_{1x_2} - y_1) & \leftarrow & -y'_3 = y'_1 + \sigma(y'_{1x_2} - y'_1)
 \end{array}$$



Фиг. 181.

Цикл замкнут и начинает повторяться.

Если взять $f(x) = ax$, то при значении $\sigma = \frac{1}{4}$ получим цикл $0-1-2-3-4-1$; если $\sigma = \frac{1}{2}$, то $0-1-2_1-3-4_1-1$; если $\sigma = \frac{3}{4}$, то $0-1-2_2-3-4_2-1$; если $\sigma = 1$, то $0-1-2_3-3-4_3-1$.

Б) Асимптотически стремящиеся к замкнутым циклы. Полюса a и b лежат на оси ординат. Эти циклы характеризуются изме-

нением величины параметра σ после каждого полного колебания x :

$$0 \rightarrow x_2; \quad x_2 \rightarrow 0; \quad 0 \rightarrow x_1 (-x_2); \quad x_1 \rightarrow 0.$$

В этом случае автоматически меняются при переходе от периода к периоду и параметры функции y . Если действительная кривая $y \equiv ax$, то первый переход характеризуется параметром $a_1 = \sigma_1 a$, второй $a_2 = \sigma_2 a$, и т. д.

Пусть, например, $y = \frac{1}{2}x$, $x_2 = -x_1 = 1$ и при первом периоде изменения x величина $\sigma = \frac{1}{2}$; тогда функция y_1 изобразится циклом (фиг. 180) $0-1-2-3-4$, причем $02 = 04 = \frac{1}{4}$. В этот момент величина $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ меняет свое значение на $\sigma_2 = \frac{1}{3}$. Так как отрезок $02 = \frac{1}{4}$ должен составлять $\frac{1}{3}$ от $y_2 = a_2 x_2 = a_2$, то $a_2 = \frac{3}{4}$, т. е. для второго периода x функция $y_2 = \frac{3}{4}x$, и мы получим второй цикл: $4-5-2-6-4$. В этот момент σ получает значение $\sigma = \frac{2}{7}$, следовательно $a_3 = 04 \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{8}$ и $y_3 = \frac{7}{8}x$. Получим третий цикл: $4-7-2-8-4$.

Пусть σ меняется по закону: $\sigma = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{4}{15}, \frac{8}{31}, \dots$ (стремится к значению $\frac{1}{4}$); тогда параметр a будет меняться следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128} \text{ (сумма ряда стремится к единице).}$$

Получим ряд циклов фиг. 180, асимптотически стремящихся к циклу $AaBb$,

К подобному же изменению циклов мы придем, меняя σ через полпериода изменения x . Пусть σ по полупериодам меняется по закону:

$$\sigma = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{4}{15}, \frac{8}{31};$$

функция $y = ax$, $-x_2 = -x_1 = 1$. Тогда по полупериодам же параметр

$$a = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32} \dots$$

Получим циклы фиг. 181.

Полюса a и b лежат на оси абсцисс. Пусть

$$oa = ob = 25; \quad ox_2 = -ox_1 = 100; \quad x_2 l = 50;$$

$$x_1 3 = 50 \left(1 + \frac{1}{2}\right); \quad x_2 5 = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right); \quad x_1 7 = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right);$$

$$x_2 9 = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \dots x_2 A = x_1 B = 100.$$

Соединяя 3 с полюсом a , получим точку 2, причем

$$\frac{(x_1 3) + 02}{02} = \frac{(x_1 0)}{02},$$

$$\text{откуда } 02 = \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Соединяем 1 с 2 и 2 с 3. Проведем прямую через 5 и b , получим точку 4, причем

$$\frac{(x_2 5) + 04}{04} = \frac{0x_2}{0b},$$

$$\text{откуда } 04 = \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

— Соединяем 3 с 4 и 4 с 5. Проведем прямую через точки 7 и a , получим точку 6, причем

$$\frac{(x_1 7) + 06}{06} = \frac{0x_1}{0a},$$

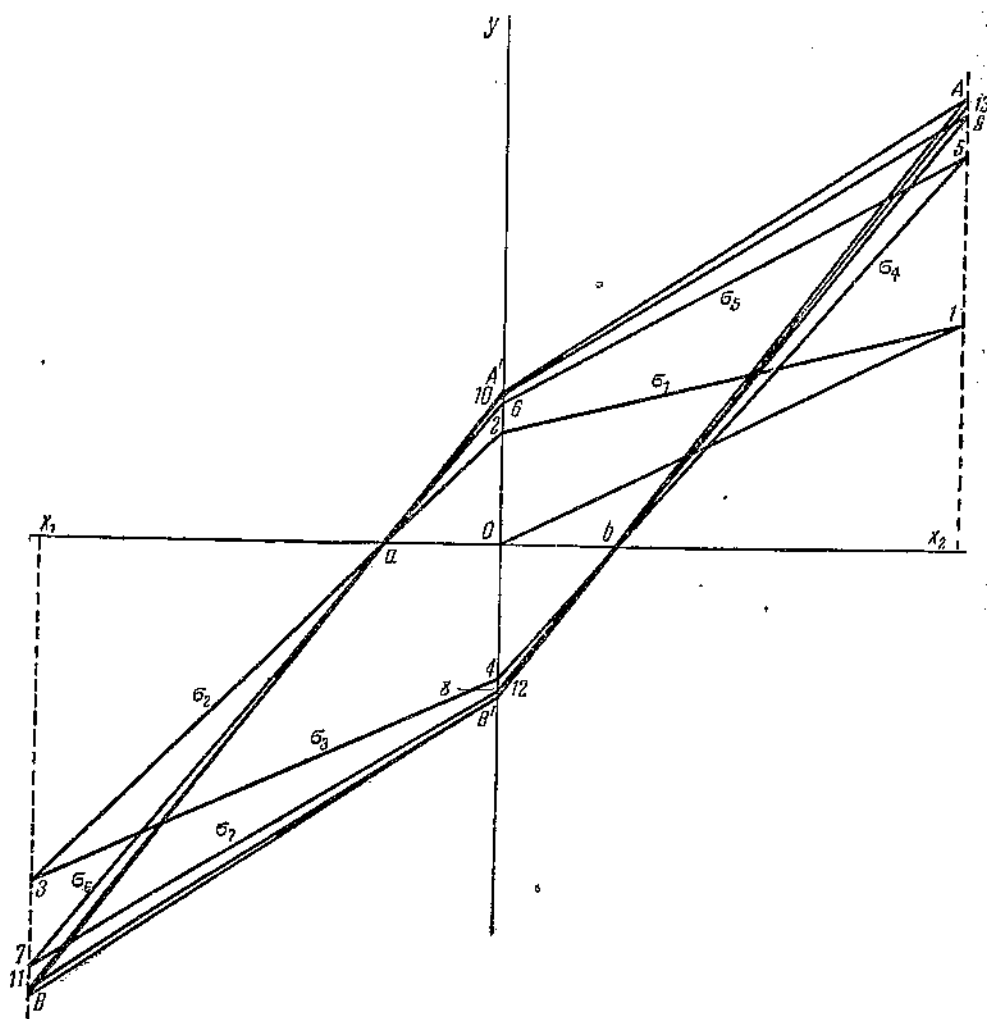
$$\text{откуда } 06 = \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right), \text{ и т. д.}$$

Продолжая указанные действия, получим графики фиг. 182. Все циклы асимптотически стремятся к циклу

$$AA'aBB'bA,$$

причем

$$aA' = oB' = \frac{2}{3} \cdot 50.$$



Фиг. 182.

Математически эти циклы могут быть записаны следующим образом:

$$y_1 = 50x \dots \quad (0-1)$$

$$y_2 = y_1 + \sigma_1(y_{1,x_2} - y_1) = 50x + \sigma_1(50 - 50x) \quad (1-2)$$

при $x=0$

$$y_2 = o2 = \sigma_1 50, \text{ но } o2 = \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right),$$

следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$y_3 = -50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) x - \sigma_3 \left[-50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) x \right]; \quad (2-3)$$

при $x=0$

$$y_3 = +02 = 50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) \sigma_2; \quad \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) \sigma_2; \quad \sigma_2 = \frac{1}{3};$$

$$y_4 = -50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) x + \sigma_3 \left[-50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) x \right]; \quad (3-4)$$

при $x=0$

$$y_4 = -50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) \sigma_3 = 04, \text{ но } 04 = -\frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right),$$

следовательно,

$$-\frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -50 \left(1 + \frac{1}{2} \right) \sigma_3; \quad \sigma_3 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$

$$y_5 = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) x - \sigma_4 \left[50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) x \right]; \quad (4-5)$$

при $x=0$

$$-50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \sigma_4 = 04; \quad \sigma_4 = \frac{1}{3}$$

$$y_6 = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) x + \sigma_5 \left[50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) x \right] \dots; \quad (5-6)$$

при $x=0$

$$\sigma_5 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 06,$$

но

$$06 = \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right),$$

следовательно

$$\sigma = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{14}$$

$$y_7 = -50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) x - \sigma_6 \left[-50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) + \right. \\ \left. + 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) x \right] \dots; \quad (6-7)$$

при $x=0$

$$50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \sigma_6 = 06; \quad \sigma_6 = \frac{1}{3}$$

$$y_8 = -50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) x + \sigma_7 \left[-50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) + \right. \\ \left. + 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) x \right]; \quad (7-8)$$

150

при $x=0$

$$-50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \sigma_7 = 0.8$$

$$\text{но } 0.8 = \frac{50}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right),$$

следовательно

$$\sigma_7 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{90}$$

$$\begin{aligned} y_8 = 50 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) x - \sigma_8 \left[50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) - \right. \\ \left. - 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) x \right]; \end{aligned} \quad (8-9)$$

где

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, σ меняет свою величину после каждой четверти колебания x , причем знак у σ чередуется.

Имеем

$$\sigma_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\sigma_2 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\sigma_3 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18} = 0.3889$$

$$\sigma_4 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\sigma_5 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{14} = 0.3571$$

$$\sigma_6 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\sigma_7 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{90} = 0.3444$$

$$\sigma_8 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\sigma_9 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{21}{62} = 0.3387$$

$$\sigma_\infty = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

5. Заключительные замечания. Все изложенное в настоящей главе имеет совершенно общий характер и может быть применено к явлениям любого гистерезиса (магнитного, электрического, упругого и т. д.) и также к ряду других вариантов явлений последействия.

Разобранные же примеры отнюдь не претендуют ни на математическую полноту, ни на точное физическое соответствие гистерезисным явлениям. Они имели лишь целью: а) пояснить элементарно те математические операции интегрирования, которые мы нашли целесообразным ввести для описания явлений гистерезиса, и б) показать, что, ограничиваясь даже весьма элементарными функциями, можно получить, хотя и схематичное, но в принципе правильное математическое и графическое представление явлений гистерезиса (ср. последние примеры и соответствующие им фиг. 180, 181, 182).

Конечно, для математически строгого и физически точного описания надо исходить не из произвольно взятых линейных, а из точно определенных функций поворота и девственной кривой. В качестве таковой может быть взята приведенная выше формула:

$$B = B_y \left[1 - \frac{e^{-BH}}{\text{sh} \sigma} \text{sh} (aH + \sigma) \right] + H.$$

Такому точному определению вида гистерезисной кривой должна быть посвящена особая работа. Настоящая же глава намечает лишь путь к полезному для практических применений решению вопроса. И нам кажется, что разобранный выше способ описания последействия (18), несравненно проще способа Больцмана и Вольтерра (9). В дальнейших работах мы надеемся обосновать экспериментальное соответствие предлагаемого метода с отдельными частными явлениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Над созданием теории магнитных цепей, стоящей на уровне современной науки и пригодной для промышленного использования, в настоящее время работает очень много ученых и техников. За последние годы получены значительные результаты, но впереди еще много трудностей, много проблем, требующих дальнейшей проработки и обработки достигнутого в направлении приближения полученных результатов к практике; ряд вопросов, нерешенных или находящихся только в начальной стадии проработки, — обширное поприще для пробы сил молодых ученых. Наибольшие успехи в этом направлении за последнее время достигнуты в СССР — разработана теория активного четырехполюсника и применена к анализу магнитных цепей, выведены точные формулы распределения магнитных потоков и энергий в основных магнитных цепях, внесена необходимая для проектирования новых электромагнитных приборов поправка в формулу Максвелла, разработан новый метод подсчета ампервитков для реле, применяемых в электросвязи и телемеханике, произведен учет влияния железа на устанавливающиеся процессы в электрической цепи с постоянной электродвижущей силой и т. п. Однако полная проработка теории магнитных цепей и релейных схем требует еще много работы. Действительно, применение теории четырехполюсника к магнитным цепям касается только наиболее простых форм последних; математического выражения зависимости B и μ от H с физическим его обоснованием все еще нет; теория устанавливающихся электромагнитных процессов в релейных цепях с учетом влияния железа в зачаточном состоянии; явление последействия и, в частности, магнитного гистерезиса требует еще глубокого физического и математического анализа и т. д.

А между тем теория магнитных цепей и ее связь с анализом электромагнитных процессов в электрических цепях по существу должна составить теоретическую основу всей электротехнической промышленности. Это обстоятельство настоятельно требует привлечения к решению указанных проблем новых сил; в этой области молодые ученые найдут весьма интересный материал для научной работы, положительные результаты которой тотчас же будут использованы нашей электропромышленностью.

Автор настоящего труда будет вполне удовлетворен, если ему удастся заинтересовать и привлечь к решению поставленных проблем молодых ученых.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ТАБЛИЦА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ

$$Z_a = y_a + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_a^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y_a^3}{3!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y_a^4}{4!} + \dots$$

y_a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0	0.0101	0.0202	0.0303	0.0404	0.0507	0.0609	0.0713	0.0817	0.0921
0.1	0.1026	0.1211	0.1314	0.1381	0.1459	0.1558	0.1664	0.1783	0.1946	0.2076
0.2	0.2105	0.2325	0.2420	0.2435	0.2589	0.2666	0.2759	0.2892	0.3028	0.3167
0.3	0.3241	0.3430	0.3543	0.3605	0.3736	0.3833	0.3955	0.4081	0.4194	0.4364
0.4	0.4439	0.4584	0.4693	0.4808	0.4918	0.5062	0.5164	0.5289	0.5438	0.5552
0.5	0.5702	0.5882	0.6048	0.6167	0.6270	0.6360	0.6496	0.6629	0.6756	0.6895
0.6	0.7036	0.7181	0.7329	0.7479	0.7661	0.7730	0.7953	0.8093	0.8195	0.8299
0.7	0.8444	0.8543	0.8693	0.8835	0.8979	0.9188	0.9263	0.9462	0.9553	0.9696
0.8	0.9934	0.9986	1.0153	1.0332	1.0402	1.0710	1.0847	1.1031	1.1197	1.1404
0.9	1.1510	1.1761	1.1932	1.2054	1.2157	1.2332	1.2447	1.2623	1.2770	1.2889
1.0	1.3179	1.3379	1.3550	1.3743	1.3886	1.4060	1.4256	1.4422	1.4609	1.4807
1.1	1.4949	1.5155	1.5325	1.5486	1.5708	1.5881	1.6064	1.6218	1.6313	1.6619
1.2	1.6826	1.7062	1.7230	1.7468	1.7577	1.7837	1.7937	1.8248	1.8440	1.8612
1.3	1.8819	1.8998	1.9232	1.9447	1.9622	1.9837	2.0063	2.0250	2.0447	2.0655
1.4	2.0936	2.1182	2.1402	2.1622	2.1842	2.2053	2.2234	2.2546	2.2766	2.2991
1.5	2.3187	2.3447	2.3681	2.3906	2.4100	2.4366	2.4611	2.4808	2.5074	2.5351
1.6	2.5581	2.5816	2.6074	2.6322	2.6561	2.6811	2.7090	2.7340	2.7570	2.7821
1.7	2.8132	2.8343	2.8615	2.8867	2.9079	2.9322	2.9585	2.9859	3.0112	3.0436
1.8	3.0849	3.1015	3.1330	3.1635	3.1911	3.2236	3.2541	3.2799	3.3086	3.3373
1.9	3.3747	3.3997	3.4275	3.4583	3.4861	3.5180	3.5469	3.5798	3.6137	3.6507
2.0	3.6839	3.7037	3.7437	3.7728	3.8039	3.8370	3.8672	3.9003	3.9375	3.9747
2.1	4.0194	4.0341	4.0674	4.1017	4.1340	4.1714	4.1997	4.2331	4.2665	4.2999
2.2	4.3670	4.3838	4.4213	4.4678	4.5074	4.5419	4.5885	4.6250	4.6607	4.7063
2.3	4.7443	4.7826	4.8253	4.8640	4.8967	4.9334	4.9702	5.0069	5.0467	5.0825
2.4	5.1481	5.1572	5.2001	5.2389	5.2758	5.3247	5.3717	5.4156	5.4676	5.5075
2.5	5.5803	5.6075	5.6536	5.7056	5.7497	5.7987	5.8448	5.8929	5.9400	6.9802
2.6	6.0434	6.0695	6.1177	6.1618	6.2161	6.2603	6.3260	6.3828	6.4490	6.5163
2.7	6.5399	6.6009	6.6672	6.7125	6.7599	6.8072	6.8696	6.9200	6.9774	7.0388
2.8	7.0725	7.1426	7.2011	7.2586	7.3210	7.3695	7.4370	7.4845	7.5490	7.5896
2.9	7.6441	7.7057	7.7582	7.8138	7.8684	7.9230	7.9846	8.0303	8.0929	8.1516
3.0	8.2580	8.2679	8.3386	8.4113	8.4930	8.5557	8.6284	8.6962	8.7779	8.8467
3.1	8.9177	8.9932	9.0660	9.1388	9.2106	9.2734	9.3573	9.4311	9.4869	9.5738
3.2	9.6270	9.7126	9.7884	9.8573	9.9193	9.9902	10.064	10.134	10.208	10.279
3.3	10.390	10.450	10.523	10.617	10.705	10.792	10.881	10.962	11.046	11.127
3.4	11.211	11.333	11.425	11.501	11.585	11.677	11.749	11.834	11.922	12.000
3.5	12.096	12.211	12.293	12.404	12.496	12.591	12.695	12.776	12.879	12.980
3.6	13.048	13.219	13.301	13.394	13.499	13.588	13.685	13.782	13.859	13.964
3.7	14.076	14.167	14.293	14.400	14.516	14.622	14.727	14.839	14.950	15.089
3.8	15.183	15.313	15.428	15.539	15.658	15.796	15.891	15.998	16.128	16.247
3.9	16.378	16.494	16.613	16.743	16.848	16.985	17.109	17.234	17.377	17.521
4.0	17.666	17.777	17.927	18.054	18.189	18.318	18.468	18.608	18.746	18.896
4.1	19.060	19.176	19.336	19.503	19.667	19.814	19.957	20.110	20.260	20.418
4.2	20.563	20.739	20.875	21.028	21.203	21.359	21.545	21.703	21.866	22.005
4.3	22.192	22.348	22.521	22.683	22.848	23.028	23.204	23.385	23.538	23.730
4.4	23.950	24.103	24.264	24.432	24.707	24.816	25.002	25.206	25.400	25.555
4.5	25.853	25.972	26.178	26.365	26.605	26.797	27.014	27.228	27.447	27.643
4.6	27.911	28.040	28.270	28.487	28.736	28.979	29.232	29.416	29.638	29.824
4.7	30.139	30.248	30.464	30.723	30.975	31.230	31.497	31.733	31.985	32.184
4.8	32.552	32.718	32.948	33.226	33.442	33.703	33.947	34.211	34.522	34.764
4.9	35.166	35.300	35.538	35.823	36.045	36.369	36.678	36.989	37.305	37.540
5.0	37.999	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ТАБЛИЦА ЗАВИСИМОСТИ t ОТ $\frac{i}{I}$ ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ I ДЛЯ
СХЕМЫ ФИГ. 124 В СЛУЧАЕ НАЖАТИЯ КЛЮЧА К

$\frac{i}{I}$	$I=10 \text{ mA}$ $R=65 \Omega$	$I=15 \text{ mA}$ $R=40 \Omega$	$I=25 \text{ mA}$ $R=56 \Omega$	$I=50 \text{ mA}$ $R=40 \Omega$	$I=75 \text{ mA}$ $R=26.67 \Omega$	$I=100 \text{ mA}$ $R=20 \Omega$	$I=125 \text{ mA}$ $R=20.29 \Omega$	$I=150 \text{ mA}$ $R=22.62 \Omega$	$I=175 \text{ mA}$ $R=20.29 \Omega$	$I=202 \text{ mA}$ $R=19.3 \Omega$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.00875	0.01656	0.01814	0.02208	0.03801	0.05916	0.06055	0.05198	0.05540	0.08521
0.2	0.01843	0.03797	0.03156	0.05420	0.09780	0.1402	0.1366	0.1212	0.1289	0.08926
0.3	0.03394	0.06802	0.06189	0.1023	0.1651	0.2226	0.2115	0.1778	0.1850	0.1272
0.4	0.05601	0.1163	0.1008	0.1571	0.2359	0.3010	0.2749	0.2263	0.2300	0.1567
0.5	0.08610	0.1721	0.1435	0.2143	0.3085	0.3755	0.3314	0.2650	0.2649	0.1787
0.6	0.1251	0.2460	0.2019	0.2808	0.3844	0.4477	0.3837	0.2998	0.2990	0.2019
0.7	0.1730	0.3400	0.2731	0.3603	0.4642	0.5209	0.4356	0.3339	0.3235	0.2225
0.8	0.2440	0.4829	0.3722	0.4578	0.5405	0.6058	0.4923	0.3709	0.3553	0.2480
0.9	0.3976	0.7250	0.5363	0.6070	0.6781	0.7226	0.5701	0.4215	0.4000	0.2854
1.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ТАБЛИЦА ЗАВИСИМОСТИ t ОТ $\frac{i}{I}$ ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ I И ОБЩЕМ
ДЛЯ ВСЕХ ИХ СОПРОТИВЛЕНИИ ЦЕПИ $R=20 \Omega$ (БАТАРЕЯ ВНОСИТСЯ В ЦЕПЬ)

$\frac{i}{I}$	$t, \text{сек.}$									
	10	15	25	50	75	100	125	150	175	202
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.0294	0.0331	0.03675	0.04416	0.05069	0.05916	0.06187	0.05870	0.05621	0.05410
0.2	0.0601	0.0759	0.0884	0.1084	0.1304	0.1402	0.1386	0.1370	0.1307	0.1218
0.3	0.1107	0.1360	0.1729	0.2046	0.2202	0.2226	0.2144	0.2011	0.1877	0.1676
0.4	0.1962	0.2326	0.2810	0.3142	0.3147	0.3010	0.2789	0.2559	0.2333	0.2026
0.5	0.2939	0.3442	0.4021	0.4286	0.4115	0.3755	0.3362	0.2997	0.2688	0.2278
0.6	0.4101	0.4920	0.5650	0.5616	0.5126	0.4477	0.3893	0.3391	0.2992	0.2539
0.7	0.5964	0.6800	0.7633	0.7206	0.6193	0.5209	0.4420	0.3777	0.3282	0.2765
0.8	0.7762	0.9658	1.0419	0.9156	0.7209	0.6058	0.4994	0.4194	0.3594	0.3026
0.9	1.3050	1.4500	1.5014	1.214	0.9043	0.7226	0.5783	0.4766	0.4056	0.3405
1.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

ТАБЛИЦА ЗАВИСИМОСТИ t ОТ $\frac{i}{I}$ ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ I И ОБЩЕМ
ДЛЯ ВСЕХ ИХ СОПРОТИВЛЕНИИ ЦЕПИ $R=20 \Omega$ (БАТАРЕЯ ВЫНОСИТСЯ ИЗ
ЦЕПИ)

$\frac{i}{I}$	$t, \text{сек.}$									
	10	15	25	50	75	100	125	150	175	202
1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.9	0.0733	0.0629	0.0691	0.0391	0.0233	0.0136	0.0087	0.0074	0.0063	0.0050
0.8	0.1516	0.1561	0.1473	0.0876	0.0542	0.0330	0.0221	0.0184	0.0136	0.0123
0.7	0.2359	0.2507	0.2328	0.1542	0.0963	0.0616	0.0395	0.0308	0.0262	0.0225
0.6	0.3372	0.3536	0.3339	0.2329	0.1534	0.1005	0.0687	0.0512	0.0406	0.0345
0.5	0.4219	0.4714	0.4357	0.3473	0.2376	0.1607	0.1114	0.0840	0.0650	0.0525
0.4	0.5397	0.6252	0.5591	0.4946	0.3539	0.2486	0.1830	0.1333	0.1083	0.0860
0.3	0.6700	0.7774	0.7455	0.6973	0.5326	0.3991	0.3038	0.2371	0.1896	0.1529
0.2	0.8190	0.9592	0.9980	0.9857	0.8133	0.6564	0.5496	0.4388	0.3669	0.3077
0.1	1.220	1.282	1.394	1.407	1.294	1.156	1.015	0.8987	0.8322	0.7725
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
I. ВВЕДЕНИЕ	5
1. Постановка вопроса	5
2. Теория магнитных цепей на основе понятия о размагничивающем факторе	6
3. Практическое применение теории	9
II. УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТНЫХ ЦЕПЯХ	14
A. Магнитные цепи с расчетной магнитной проницаемостью μ_r , практически не зависящей от величины магнитного потока	14
1. Общие положения	14
2. Основы теории активного четырехполюсника	15
3. Теория магнитных цепей на основе теории активного четырехполюсника	18
4. Основы расчета электромагнитного неполяризованного реле	24
5. Упрощение теории	31
B. Магнитные цепи с расчетной магнитной проницаемостью μ_r , зависящей от величины магнитного потока	35
1. Постановка вопроса	35
2. Два вида индуктивности и магнитной проницаемости	35
3. Построение кривых индуктивности	36
4. Сравнение кривых индуктивности L и L_k	38
5. Аналогии между характеристиками магнитных и электрических цепей	40
6. Вывод эквивалентной схемы магнитной цепи	42
7. Анализ формул для магнитного потока и индуктивности	45
8. Формулы для магнитной индукции B и магнитной проницаемости μ	46
9. Экспериментальное определение параметров магнитной цепи	47
10. Вывод точных формул для определения постоянных параметров магнитной цепи	51
11. Основы теории магнитных цепей с параметрами, зависящими от величины магнитного потока	55
III. УСТАНОВЛИВАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЛЕЙНЫХ ЦЕПЯХ	63
Основная установка анализа	63
A. Релейные цепи с индуктивностью, не зависящей от силы тока	63
Общие положения	63
a) Электромагнитное реле непосредственно присоединяется к батарее	65
1. Влияние индуктивности на процессы установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	65
2. Влияние сопротивления R на процессы установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	73
3. Влияние электродвижущей силы E на установление тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	76
4. Влияние числа витков w обмотки реле на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	79
b) Релейная цепь из батареи, реле и дополнительных приборов последовательно соединенных с реле	81
1. Влияние индуктивности L на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	81

2. Влияние сопротивления R на процессы установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	82
3. Влияние электродвижущей силы E на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	83
4. Влияние числа витков w обмотки реле на процесс установления тока в цепи и магнитного потока в сердечнике реле	83
в) <i>Релейные цепи с последовательно-параллельным соединением приборов</i>	85
1. Цепь из активного сопротивления и реле, шунтированного активным же сопротивлением	85
2. Схема под названием "земля Максвелла"	89
3. Упрощенная схема Гультстада для надземных линий	91
г) <i>Изменение тока и магнитного потока в цепи во время перелета якоря реле</i>	93
1. Процесс установления тока в цепи с постоянным сопротивлением и меняющейся индуктивностью	93
2. Изменение тока с учетом перелета якоря	95
3. Изменение магнитного потока с учетом перелета якоря	97
4. Динамические магнитные характеристики	98
5. Влияние перелета якоря на убывание тока и магнитного потока в реле	98
Б. Релейные цепи с индуктивностью, зависящей от силы тока	100
Постановка вопроса	100
а) <i>Сравнительный анализ динамических и статических электромагнитных характеристик</i>	101
1. Динамические электромагнитные характеристики цепи, состоящей только из индуктивности и активного сопротивления	101
2. Переход от осциллограммы тока к кривым магнитного потока и индуктивности	104
3. Динамические временные характеристики торонда	105
4. Сопоставление динамических и статических магнитных характеристик	116
5. Динамические электромагнитные характеристики реле с учетом перелета якоря	119
б) <i>Общие решения уравнения Гельмгольца с учетом влияния железа</i>	124
1. Включение в цепь электромагнитного реле эдс E	124
2. Вынесение эдс E из цепи, не разрывая последней	128
3. Необходимые предпосылки дальнейшего развития теории влияния железа на электромагнитные процессы в электрических цепях	132
В. Методы математического описания явлений последействия, в частности гистерезиса	133
1. Введение	133
2. Краткий обзор истории вопроса	135
3. Изложение предлагаемого метода	138
4. Примеры к § 3	139
5. Заключительные замечания	152
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	153
Приложения	154

521-397

K-56



04380