АВГУСТ КОПФ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

ГТТИ • 1933

АВГУСТ КОПФ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
проф. *В. К. ФРЕДЕРИКСА*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД • 1933 • МОСКВА

GRUNDZÜGE DER EINSTEINSCHEN RELATIVITÄTSTHEORIE

von

DR. AUGUST KOPFF

Zweite verbesserte Auflage

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG 1923

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

Предлагаемая книга Копфа предназначена для читателя, желающего получить первоначальное, краткое и общее знакомство с теорией относительности Эйнштейна, но знакомство, основанное не на популярном и потому нередко полупонятном изложении предмета, а основанное на изложении математическом, т. е. таком, которое позволяет критически отнестись к содержанию предмета и понять его по существу. Как указано самим автором в его предисловии, эта книга должна быть введением к более обширным курсам или изложениям теории вроде книг Эддингтона, Вейля или Паули (см. указанную в конце книги библиографию). С этой точки зрения некоторая неполнота книги вроде отсутствия новых теорий „единого поля", пробующих включить электромагнитные явления в сферу общей теории относительности, отсутствия новых теорий, затрагивающих космологические вопросы, отсутствия новых экспериментальных данных (книга издана в 1923 г.) — не должны считаться ее недостатком. Небольшой объем делает ее доступной для студентов старших курсов, аспирантов, физиков, а равно также и инженеров, знакомых с основами дифференциального и интегрального исчисления, аналитической геометрии и элементами дифференциальной геометрии. После прочтения книги Копфа с особым интересом будут прочтены такие книги, как „Экспериментальные основания теории относительности" С. И. Вавилова, „Вселенная вокруг нас" Дж. Джинса и др. Краткий список основных сочинений по теории относительности к книге приложен. Приходится пожалеть, что столь немногие из них имеются на русском языке.

В. Фредерикс.

ПРЕДИСЛОВИЕ К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ.

Нижеследующее введение в теорию относительности Эйнштейна явилось результатом лекций, прочитанных в зимний семестр 1919/20 и летний семестр 1920 гг. в Гейдельбергском университете.

Оно пытается, по возможности, простым путем передать основные исследования касающиеся этой теории, но не без математического изложения предмета. Без глубокого проникновения в математические проблемы теории относительности никогда нельзя правильно понять ход ее мысли. Теория относительности в самом широком смысле принадлежит и теоретической физике, которая является *математическим* описанием физических процессов.

Согласно цели этой книги — дать *первоначальное* введение, предполагаемые для читателя познания математики и физики охватывают только те, которые получаются в высшей школе на первом семестре.

Не следует удивляться тому, что астроном взялся писать такое введение. В самом деле, теория относительности в такой же мере является делом астрономии, как и физики, и не только потому, что доказательство ее справедливости лежит в настоящее время как раз в области астрономии.

Heidelberg-Königstuhl, февраль, 1921 год. *А. КОПФ.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ.

Второе издание этой книги существенно отличается от первого тем, что § 11 (Связь общей теории относительности с геометрией Римана) подвергся полной переработке. В остальном были устранены некоторые упущения и неточности, указанные мне отчасти со стороны.

Таким образом книга сохраняет свой характер математического введения в теорию относительности. Опять мы отказываемся от обсуждения философских проблем, точно так же как опускаем данное Вейлем развитие теории. Если в первом издании упоминалось, что целью книги было подготовить читателя к изучению Вейля: „Пространство, время, материя“, то теперь это будет годиться также и для двух вновь вышедших изложений, полностью охватывающих теорию относительности: для второго тома „Теории относительности“ М. Лауэ и для статьи В. Пауля младш. „Теория относительности“.

Во время моей поездки на остров Рождества у Явы для проверки теории относительности во время полного солнечного затмения 20 сентября 1922 года корректуры вел д-р М. Мюндлер (M. Mündler). Ему я поэтому особенно благодарен.

Heidelberg-Königstuhl, июнь, 1922 год. *А. КОПФ.*

ВВЕДЕНИЕ.

Начиная изучение теории относительности, легко сделать ошибку и, слишком увлекшись деталями, проглядеть принципиальные вопросы. Поэтому для изучения последующего будет быть может не бесполезно попытаться изложить основные идеи теории, поскольку это можно, без помощи математики[1]). Конечно нам придется при этом говорить о вещах, к которым мы еще раз вернемся впоследствии.

В основу физики теория относительности кладет следующее положение: *все движения в природе представляют собой движения масс или энергий друг относительно друга;* следовательно, *все* явления движений *относительны* (принцип относительности). Это противоречит понятиям классической физики, которая знает *абсолютное* и *относительное* движение. Вспомним несколько простых примеров. *Относительным* движением будет движение равномерно и прямолинейно идущего поезда по отношению к окружающим предметам или, обобщив, *прямолинейное и равномерное движение* одной массы относительно какой-либо другой массы — массы отсчета [2]). Координатная система, к которой мы относим описываемое движение, может быть прикреплена как к движущейся массе, так и к массе отсчета, и в обоих случаях мы получим *одинаковое по форме описание* происходящего движения. *Физически* обе координатные системы неразличимы друг от друга, т. е. они совершеннно равноценны.

Иначе обстоит дело по представлению классической механики при *вращательном движении*. Если тело вращается относительно координатной системы, для которой справедлив галилеев закон инерции (*галилеева система координат*), то появляются центробежные силы, причем безразлично, находятся ли по соседству с этим телом другие покоящиеся массы или нет. Если же, напротив, центральное тело в этой системе неподвижно, а вращаются окружающие его массы, то центробежные силы отсутствуют. Замена вращения центральной массы вращением окружающих масс (масс отсчета) приводит таким образом при описании процессов движения к различным явлениям движения. Вращение является *абсолютным* движением.

То же относится и к *ускорению*. Если какая-нибудь материальная точка имеет некоторое ускорение относительно массы отсчета, которая покоится в галилеевой системе координат, то замена движущейся массы массой отсчета опять повлечет за собой изменение описания процесса движения. В самом деле, при переносе координатной системы

[1]) Более подробно это было изложено автором в докладе „Теория относительности Эйнштейна". Leipzig, Gressner & Schramm, 1920.

[2]) Масса отсчета, т. е. та масса, находясь на которой, воображаемый наблюдатель производит „отсчеты" положения какой-нибудь другой массы. Этот термин в виду его краткости мы сохраним в дальнейшем. *Прим. ред.*

в ускоренно-движущуюся точку вся система приобретает ускоренное движение, а тогда в ней начинают действовать другие законы движения, чем в галилеевой системе координат.

В *электричестве* и *оптике* классическая физика также знает абсолютные движения, а именно движение относительно покоящегося эфира. Твердо связанная с ним координатная система является особой системой, которой мы можем дать преимущество перед другими системами. Это будет „преимущественная" система.

Однако мы *никогда еще не наблюдали в природе абсолютных движений* (т. е. движений только относительно пространства). Каждое замеченное нами вращение, каждое ускорение происходит относительно каких-либо масс. Еще ни разу не удалось доказать существование эфира (в смысле классической физики). *Физическая картина мира была бы проще и больше соответствовала бы действительности, если бы мы все движения могли считать относительными.* До Эйнштейна, яснее всех высказал это Е. Мах (E. Mach). Стоит только вспомнить его рассуждения относительно вращения [1]).

„Для меня вообще существует *только* относительное движение, и поэтому я *не могу* делать разницы между вращательным и переносным движением. Если тело вращается относительно *неподвижных* звезд, то появляются центробежные силы, если же оно вращается относительно *другого* тела, но не относительно неподвижных звезд, то центробежные силы отсутствуют. Я ничего не имею против того, чтобы называть первое вращение *абсолютным*, если при этом не забывать, что это не что иное, как *относительное* вращение по отношению к *неподвижным звездам*. Можем ли мы, держа неподвижным ньютонов стакан с водой, но вращая при этом небесный свод, *показать*, что в таком случае центробежные силы будут отсутствовать?

Но опыт этот невозможен, а сама мысль нелепа, потому что *оба* случая физически между собой неразличимы. Поэтому я считаю оба случая за один и тот же случай, а различие, которое делает Ньютон, за иллюзию".

Здесь уже почти осознана цель теории относительности; последовательно же развить ее смог впервые *Альберт Эйнштейн*, хотя и сейчас еще она далеко не закончена и мы не можем сказать, куда она нас в конце концов приведет.

Но что уже закончено, говорит само за себя. В 1905 г. произведены были Эйнштейном исследования специального случая относительности *прямолинейных* и *равномерных* движений в механике и электричестве, которые мы рассматриваем как подготовительные к исследованиям относительности *всех* движений. Эти последние были доведены в известной степени до определенного конца — опять же Эйнштейном — в 1915 — 1918 гг.

Если мы хотим исключить из физики понятие абсолютного движения, то нам придется предъявить определенные требования к законам природы. Их применение не должно быть больше ограничено, как это имеет место в уравнениях Ньютона и Максвелла, некоторыми преимущественными системами координат. В самом деле, до тех пор пока это существует, путем наблюдений физических явлений природы

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. 5. Aufl. Leipzig 1904, S. 252.

мы всегда можем установить — находимся ли мы в такой преимущественной системе или в „абсолютном" по отношению к ней движении. *Законы природы должны, напротив того, при всяком движении системы сохранять неизменной свою форму.* Формулировка этого требования означает большой сдвиг в физике. При таком требовании исчезает произвол, который вносила в законы природы связанность их с выбором координат.

Эйнштейн не только поставил это требование: ему удалось также и установить инвариантные законы для механики и электричества. Математические средства к этому были уже готовы в тензорном анализе.

Легко убедиться, что эти законы неизбежно должны были привести к теории тяготения. Так, например, если движение падающего камня (или, говоря вообще, любой, предоставленной самой себе материальной точки) к земле должно быть относительным движением, то мы должны суметь дать описание процесса движения как по отношению к земле, так и по отношению к камню, и в обоих случаях описание должно быть одним и тем же. „Камень ускоренно движется в покоящемся поле тяготения земли" или „камень покоится в ускоренной свободной от тяготения координатной системе земли", и будут этими двумя одинаково звучащими описаниями. Все явления движения в покоящемся поле тяготения мы приравниваем к движениям в ускореннодвижущейся, свободной от тяготения, системе (принцип эквивалентности Эйнштейна).

Из законов движения, одинаковых для движущихся любым образом координатных систем, вытекают таким образом сейчас же и законы движения, возникающие под влиянием тяготения. *Тяготение* является при этом чем-то особенным, изъятым из круга прочих сил. В нашем пространстве, наполненном материей, повсюду имеются поля тяготения. Наличие энергии тяготения становится поэтому физическим свойством пространства.

Много нового и необычного было результатом этих исследований. Отпало представление об *эфире*, как всюду покоящемся и все пронизывающем *веществе*. *Материя и электромагнитная энергия* оказались идентичными. Измерение времени и пространства зависит от движения координатной системы и, следовательно, принимая во внимание принцип эквивалентности, зависит от поля тяготения, к которому мы относим измеряемые величины. Геометрические свойства пространства и времени не существуют сами по себе, а существуют только относительно материи, находящейся в пространстве. *Инертность материи* познается, наконец, как *явление тяготения*.

Таким удивительным образом собрала теория относительности разрозненные до сих пор понятия пространства, времени и материи в одну необычайной простоты и законченности физическую картину мира: *материя и электромагнитная энергия слились в одно единое целое, которое и определяет повсюду и в любой момент времени физические свойства пространства (поля тяготения) и в то же время метрику* [1]) *пространства и времени.*

[1]) Под *метрикой пространства* следует понимать те его свойства, которые проявляются в процессах измерений пространства и времени. *Прим. ред.*

В деталях принцип относительности в своей наиболее общей форме еще далеко не исчерпан. Закончена теория относительности только постольку, поскольку дело идет о силах тяготения в смысле классической механики. Но и для этой части физики еще не доказано, что все наблюдаемые нами в природе явления удовлетворяют требованиям теории относительности. Следует заметить, что исследовательской работой всего только немногих лет подобная задача не может быть разрешена.

Но и то, что уже достигнуто до сих пор, имеет такое значение, что, оглядываясь назад на теории классической физики, приходится вспомнить слова К. Неймана (Neumann) [1]:

„Как бы велика и совершенна ни была теория, мы всегда будем вынуждены *дать себе точнейший отчет о ее принципах*. Мы всегда должны твердо помнить, что эти принципы являются чем-то *произвольным* и, следовательно, чем-то *подвижным*; это нужно для того, чтобы в любой момент иметь возможность проследить, какое действие произвело бы *изменение* этих принципов на все построение теории, для того, чтобы оказаться в состоянии в любой момент такое изменение произвести, и наконец для того, чтобы (говоря кратко) иметь возможность уберечь теорию от *окаменения*, от *замерзания*, которое может быть только губительным, может быть только *помехой* для прогресса науки".

[1]) C. Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Antrittsvorlesung. Leipzig 1870.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

§ 1. Принцип относительности Галилея. Принципы теории относительности.

Уже классическая механика знает некоторый принцип относительности, точное рассмотрение которого приводит нас непосредственно к постановке проблем эйнштейновской теории относительности.

Основной закон механики Ньютона в декартовой системе координат — мы будем брать всегда *правую* систему — выражается тремя дифференциальными уравнениями:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

X, Y, Z — составляющие силы, действующей на массу m; вторые производные координат x, y, z по времени — составляющие ускорения этой массы. Координатная система K, для которой ур-ния (1) дают описание движения массы m, называется *покоящейся* или *галилеевой* системой (или инерциальной системой). Как видно из основных уравнений, в этой системе материальная точка, на которую не действует *никакая* внешняя сила, будет или находиться в состоянии покоя или двигаться равномерно и прямолинейно. Таким образом галилеев *закон инерции* связан с галилеевой системой координат K.

Зададим себе, однако, такой вопрос: что станет с основным законом механики (и законом инерции), если мы рассматриваемое движение отнесем не к „покоящейся“ системе координат?

Для наблюдателя B, находящегося в начале нашей покоящейся системы K, уравнение (1) основное. Но вот B начинает сам совершать *любое* движение относительно K. Попробуем найти уравнение, которое вместо (1) выразило бы движение массы m относительно наблюдателя B. Примем B за начало координат второй декартовой системы K' (координат x', y', z'), оси которой параллельны K. Пусть x_0, y_0, z_0 определяют положение B в системе K в некоторый момент времени; пусть они будут произвольными функциями времени.

Тогда имеем:

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0, \tag{2}$$

откуда следует:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}. \tag{3}$$

Равенства (3) называют *теоремой сложения скоростей классической механики.* Скорость относительно K равна сумме двух скоростей: скорости относительно K' и скорости K' относительно K.

Для ускорения имеем соответственно:

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x_0}{dt^2},\quad \frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2y_0}{dt^2},\quad \frac{d^2z'}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d^2z_0}{dt^2}. \tag{4}$$

Действующая сила не зависит от координатной системы, ее составляющие в системе K' остаются те же, что и в K[1]) (т. е. $X'=X$ и т. д.), так что движение массы m в координатной системе K' выразится формулами:

$$X'-m\frac{d^2x'}{dt^2}=m\frac{d^2x_0}{dt^2},\; Y'-m\frac{d^2y'}{dt^2}=m\frac{d^2y_0}{dt^2},\; Z'-m\frac{d^2z'}{dt^2}=m\frac{d^2z_0}{dt^2}. \tag{5}$$

Основной закон механики, так же как и закон инерции, перестали быть правильными. Если известна внешняя сила X', Y', Z', наблюдатель B может механическими измерениями в системе K' определить свое ускорение относительно покоящейся системы.

Если, однако, движение B (т. е. K' относительно K) *прямолинейно* и *равномерно*, т. е.:

$$x_0=ut,\; y_0=vt,\; z_0=wt, \tag{6}$$

где u, v и w являются составляющими скоростей B, то равенство (5) преобразуется в:

$$X'-m\frac{d^2x'}{dt^2}=0,\quad Y'-m\frac{d^2y'}{dt^2}=0,\quad Z'-m\frac{d^2z'}{dt^2}=0. \tag{7}$$

Основной закон механики и закон инерции продолжают существовать также и в системе K'. Наблюдателю B нет никакой возможности никакими измерениями в системе K' определить скорость своего собственного движения.

Таким образом основной закон механики описывает движение m не только в покоящейся системе, но и во всякой другой, находящейся в равномерном переносном движении относительно покоящейся системы. K' есть также галилеева система координат и может быть рассматриваема как покоящаяся.

Уравнения (1) переходят в самих себя, если применить к ним *„галилеевы преобразования“*:

$$x'=x-ut,\; y'=y-vt,\; z'=z-wt; \tag{8}$$

сюда присоединяется еще тождество:

$$t'=t, \tag{8'}$$

т. е. предполагается, что время, как независимая переменная, в обеих системах имеет одну и ту же независимую величину. Другими сло-

[1]) M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. Leipzig 1916, S. 71. (Имеется в русском переводе.)

вами — *основные уравнения механики инвариантны* относительно *преобразования Галилея* [1]).

Инвариантность уравнений (1) не является просто их формальным математическим свойством; как видно из всего вышеизложенного, она имеет, напротив, глубокий физический смысл. Рассмотрим еще раз один простой пример. В очень большом приближении, вследствие больших расстояний до неподвижных звезд, движение центра тяжести солнечной системы удовлетворяет закону инерции. Для применения общих уравнений движения (1) совершенно, следовательно, безразлично, находится ли вся система в покое или в равномерном переносном движении. Никакое механическое измерение внутри солнечной системы не в состоянии дать нам основания в пользу той или другой возможности. Мы наблюдаем только *относительные движения* внутри системы и ничего не можем сказать об абсолютном движении системы в пространстве. Даже в том случае, когда по наблюдению неподвижных звезд удалось определить, что солнечная система движется прямолинейно и равномерно относительно системы неподвижных звезд, было установлено опять только относительное движение. Свойство инвариантности основного закона механики по отношению преобразований Галилея равносильно следующему положению: при всех движениях масс, которые мы наблюдаем, всегда одна часть движения, постоянная по величине и направлению, остается неопределенной. В природе встречаются только относительные движения масс, *нет абсолютных движений* (т. е. нет движений относительно *одной* чем-либо особенным отмеченной координатной системы), по крайней мере в тех случаях, когда речь идет о равномерном переносном движении.

Это основное значение свойства инвариантности приводит к тому, что его можно рассматривать как *принцип механики, как галилеев-ньютонов принцип относительности.*

Мы можем это формулировать следующим образом:

Основной закон, по которому протекают явления в какой-нибудь механической системе, не зависит от того, к которой из двух координатных систем, движущихся прямолинейно и равномерно относительно друг друга, отнесены эти явления.

Или, давая математическую формулировку:

Основные уравнения, которые описывают механические процессы природы, инвариантны относительно преобразований Галилея (8).

Здесь необходимо сделать два различных замечания.

Кинетическая энергия движущейся массы m определяется уравнением

$$E = \frac{1}{2} mv^2,$$

[1]) Уравнение или выражение называется *инвариантным* относительно ряда координатных систем, если оно сохраняет одну и ту же форму для каждой из этих систем; величина, сохраняющая в каждой системе одно и то же значение, называется *инвариантом.* Всякое указание на инвариантность только тогда имеет смысл, когда определена группа координатных систем, по отношению к которым соблюдается инвариантность. Последнее устанавливается уравнениями преобразования, с помощью которых системы переходят одна в другую.

где v обозначает скорость массы m. Таким образом E будет различно в обеих равноправных галилеевых системах K и K', связанных между собой уравнением (6); всегда имеется *одна* такая система, для которой $E=0$. В ней покоится масса m. На такую зависимость величины энергии от выбора координатной системы следует обратить внимание потому, что при дальнейшем развитии теории относительности будут встречаться аналогичные зависимости, которые весьма часто казались странными.

Далее, вышеизложенные выводы мы можем значительно проще представить математически, если воспользуемся *векторным исчислением.*

Под вектором мы понимаем величину, которая помимо определенного числового значения имеет еще и однозначно заданное направление; следовательно, он может быть изображен направленным отрезком. Направление должно быть задано относительно какой-нибудь координатной системы. Мы будем обозначать векторы немецкими (готическими) буквами. Таким образом вектором будет сила $\mathfrak{k}$, расстояние $\mathfrak{r}$ точки от начала координат, скорость $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, ускорение $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$. Величина, значение которой определяется абсолютным числом, независимым от какой-либо координатной системы, которая, следовательно, не имеет направления, называется *скаляром* или *инвариантом*; она будет обозначаться латинскими буквами. Например масса m будет скаляр. Если от точки к точке даны определенные скаляры или векторы, то говорят о *скалярном поле* или *векторном поле.*

Мы можем разложить вектор на составляющие в какой-нибудь заданной системе координат, причем сначала мы будем пользоваться правой декартовой системой координат. Составляющие вектора, исходящего из начала координат, тождественны прямоугольным координатам его конечной точки. Составляющие вектора $\mathfrak{a}$ обозначим через $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$; абсолютное значение через $|\mathfrak{a}|$ или a. $|\mathfrak{a}|$ будет *скаляр.* Часто все три величины $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ в их совокупности называют вектором. Имеем:

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2+\mathfrak{a}_y^2+\mathfrak{a}_z^2}. \tag{9}$$

Направление вектора в заданной системе координат дается уравнениями:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\mathfrak{a}_x}{|\mathfrak{a}|},\ \cos\alpha_2 = \frac{\mathfrak{a}_y}{|\mathfrak{a}|},\ \cos\alpha_3 = \frac{\mathfrak{a}_z}{|\mathfrak{a}|}. \tag{10}$$

Обратно, для составляющих получим выражение:

$$\mathfrak{a}_x = |\mathfrak{a}|\cos\alpha_1,\ \mathfrak{a}_y = |\mathfrak{a}|\cos\alpha_2,\ \mathfrak{a}_z = |\mathfrak{a}|\cos\alpha_3. \tag{11}$$

При перемещении координатной системы параллельно самой себе составляющие вектора остаются неизменными; при вращении координатной системы они преобразуются как координаты точки. Поэтому в каждой повернутой системе они имеют различную величину. Их аналитическая форма (11), напротив, и в повернутой системе остается прежняя; три выражения (11) формально удовлетворяют *любой* координатной системе. При этом $\mathfrak{a}$ или три составляющие могут быть любыми аналитическими функциями; в случае векторного поля они будут функциями координат. Примером может служить левая часть уравнения (14) и разложение ее на составляющие.

Когда вектор $\mathfrak{a}$ равен нулю, то и его составляющие будут нули и при этом во всякой системе. Поэтому уравнения:

$$\mathfrak{a}_x = 0, \quad \mathfrak{a}_y = 0, \quad \mathfrak{a}_z = 0 \tag{12}$$

являются *инвариантными* уравнениями относительно всех декартовых систем, которые получаются путем параллельного перемещения или вращения. Они могут быть выражены одним уравнением

$$\mathfrak{a} = 0, \tag{13}$$

которое, независимо от координатной системы, справедливо при любом направлении вектора $\mathfrak{a}$.

Два вектора считаются равными, если их величины совпадают по размерам и по направлению; $+\mathfrak{a}$ и $-\mathfrak{a}$ будут два векторы одинаковой величины, но противоположного направления.

Одинаково или противоположно направленные векторы можно складывать, складывая их абсолютные значения или их составляющие. Также можно перемножать вектор со скаляром, умножая его абсолютные значения или его составляющие; направление при этом остается без изменения.

Сила и ускорение являются векторами одинакового направления; поэтому, основной закон Ньютона, по которому действующая на массу сила пропорциональна массе и пропорциональна вызываемому этой силой ускорению, можно написать в следующем виде:

$$\mathfrak{f} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0. \tag{14}$$

Составляющими вектора $\mathfrak{f} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ будут $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д. Уравнение (14) тождественно таким образом с тремя основными уравнениями Ньютона (1). Равенство (14) выражает этот основной закон в векторной форме. Три уравнения составляющих (1) справедливы таким образом при любом направлении силы и ускорения и для всякой произвольно повернутой декартовой системы координат[1]).

Кроме того из векторной формы (14) видно, что основные уравнения инвариантны также и относительно преобразования Галилея, потому что для координатной системы K', движущейся прямолинейно и равномерно относительно K, — и только для нее, — на ряду с силой остается неизменным по величине и по направлению также и ускорение. Инвариантность основных уравнений Ньютона вытекает таким образом из векторной формы (14) и не требует особого доказательства.

[1]) В этом можно убедиться также путем вычислений. Для повернутой системы координат равенства переходят в $X' - m\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$ и т. д. См. напр. B. M. Planck. Einführung in die allgemeine Mechanik, S. 72 (есть русский перевод).

Но мы можем также *складывать векторы*, имеющие различное направление. Действуя по закону параллелограмма скоростей, мы можем написать символически:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \tag{15}$$

где сумма $\mathfrak{c}$ по величине и по направлению равна диагонали параллелограмма, построенного из векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Если мы произведем разложение векторов на составляющие, то мы должны будем сложить соответствующие составляющие.

Если, например, скорость точек в системе K выражается через $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, скорость той же точки в системе K' через $\frac{d\mathfrak{r}'}{dt}$, а относительная скорость системы K' относительно K через $\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}$, то мы получим соотношение:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}'}{dt} \text{ или } \frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}. \tag{16}$$

Это уравнение по разложении его на компоненты по осям координат тождественно с уравнением (3), оно представляет собой *теорему сложения скоростей в векторной форме.*

Возвратимся, однако, к нашему принципу относительности. С очень большим приближением он несомненно верен. Ведь уравнения (1), выражающие этот принцип, передают с исключительной точностью все механические процессы движения на земле, в солнечной системе и родственных ей системах.

Но как только мы возьмем за основание наш классический принцип относительности, мы сейчас же почувствуем некоторую неудовлетворенность, причина которой состоит в свойственной ему в двойном отношении ограниченности. Годится ли принцип относительности только для механических явлений природы, или он удовлетворяет также и электрическим (и оптическим)? Относится ли он только к координатным системам, которые двужутся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, или же и к системам, движущимся любым образом относительно друг друга?

Ответить на эти вопросы значит сделать все выводы из такой постановки вопроса и испытать, *согласуются ли явления природы с этими выводами.* Таким образом мы имеем теперь две гипотезы, которые должны лечь в основу нашего физического описания природы. Мы подошли *к специальному и общему принципу относительности Эйнштейна.* Попытаемся выразить их, хотя и не имеем пока возможности дать им более точную математическую формулировку.

Специальный принцип относительности говорит: если K и K' две координатные системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, то всякое явление природы (в механике и электричестве) подчиняется одним и тем же *общим* законам как относительно K, так и относительно K'.

До сих пор теория электричества считала, что ее основные уравнения годятся только для одной системы координат, связанной с покоящимся эфиром. Здесь, следовательно, в противоположность классической механике, имеется *одна* преимущественная система координат. Всякое движение относительно этой системы может быть рассматриваемо как абсолютное движение. Специальный принцип относительности отбрасывает преимущественность одной системы по сравнению с другой; наша задача будет состоять в исследовании, согласуется ли такое положение с действительностью.

Общий принцип относительности говорит: если K и K' *две любым образом* движущиеся друг относительно друга координатные системы, то для описания *всех* процессов природы (в механике и электричестве) в обеих системах годятся одни и те же *общие* законы.

Но мы опять становимся в противоречие с представлениями существовавших до сих пор теорий. Сравним, например, две системы, одну покоящуюся, другую равномерно вращающуюся. Первая является галилеевой системой, в которой действует закон инерции. Если же материальная точка находится во вращающейся системе, то на нее действует сила инерции, сообщающая ей ускорение. Наблюдая силы инерции внутри системы, мы можем, как учит классическая механика, определить, находится ли система в состоянии покоя или равномерно вращается. Покоящаяся система является особенной системой, вращение относительно нее является абсолютным движением.

Но такая точка зрения всегда считалась неудовлетворительной, так как она не дает объяснения явлению, не сводит его к более простым явлениям. Мы не можем указать причину, принципиально доступную наблюдению, как можем, например, при ускорении падающего камня принять за причину поле притяжения земли. Вращение относительно абсолютной, покоящейся системы и появление сил инерции можно считать только различными выражениями одного и того же явления.

В природе мы наблюдаем вращение только относительно масс вне вращающейся системы, и кинематически вращение может быть доказано только таким путем. Мы решительно ничего не знаем, появятся ли силы инерции и тогда, когда все внешние массы будут отсутствовать. Если мы встанем на точку зрения общего принципа относительности, то мы будем отрицать такую возможность. С точки зрения общего принципа относительности вращательное движение есть относительное движение по отношению к внешним массам; силы инерции следует рассматривать как результат действия тяготения этих внешних масс. И в том случае, когда наша система покоится, а вращаются внешние массы, те же самые силы также должны появиться.

Так впервые лишь общий принцип относительности строго проводит идею относительности. Как в специальном принципе относительности остается неопределенным и неопределимым прямолинейное и равномерное движение, так в общем принципе — любое переносное и вращательное движение. Так же как кинематически мы воспринимаем одно только относительное движение, так по общему принципу относительности и динамически мы воспринимаем одно только относительное движение. В природе мы не найдем никаких абсолютных движений ни в механике, ни в электричестве; в этом — физический смысл общего принципа относительности.

Как специальный принцип относительности предъявляет требования к законам природы, чтобы они не менялись при переходе из одной системы координат в другую, движущуюся прямолинейно и равномерно относительно первой, так и общий принцип требует от законов природы, чтобы они годились для любой движущейся системы. *Установить эти законы и сравнить с действительностью и является задачей теории относительности.*

Мы обратимся теперь опять к специальному принципу относительности; но сначала мы должны решить вопрос, не будет ли излишним особое обсуждение его после установления общего принципа относительности. Это ни в коем случае не имеет места. Если даже в природе и мало имеется равномерно-переносных движений, то обсуждение специального принципа относительности все же прежде всего разъяснит нам понятия пространства, времени и массы. Заметим еще, что если любое движение точки в очень маленьких интервалах времени можно считать равномерным и прямолинейным и если в общей теории относительности мы стремимся к установлению дифференциальных законов, которые описывают бесконечно-малые явления природы, то специальная теория относительности окажется таким образом необходимой основой общей теории относительности.

§ 2. Изотропия пространства в физике и относительность временных и пространственных величин.

Для нас нет сомнения в том, что принцип относительности, в данной ему только-что специальной формулировке, применим к проблемам механики. Но, если он должен также удовлетворить и электрическим (и оптическим) явлениям, нам придется сначала исследовать, нет ли таких фактов, которые бы с самого начала исключали возможность его применения.

Представим себе ряд галилеевых координатных систем, находящихся в равномерно-переносном движении друг относительно друга; они могут быть обозначены через K, K' и т. д. [1]). Если мы в системе K найдем для электрических явлений очень простые основные законы, то мы потребуем, чтобы эти же законы годились и для систем K', K''... Выражающие эти законы уравнения должны при переходе от одной системы к другой оставаться инвариантными. Среди систем K не должно быть ни одной преимущественной системы.

Если же таковая существует, то должно получиться следующее. Продолжительность наших физических экспериментов такова, что для большинства из них мы можем рассматривать землю, как носительницу одной из наших координатных систем K. Однако, система эта постоянно меняет направление своего движения; только мимолетно она может совпасть с преимущественной системой. Наши эксперименты, вследствие переменного движения относительно „абсолютной" системы, должны давать в разное время различные результаты; движение

[1]) Так как в специальной теории относительности нам всегда придется иметь дело с такими системами, то в первой части настоящей книги обозначения K, K' и т. д. будут всегда относиться к прямолинейно и равномерно движущимся относительно друг друга галилеевым системам (если не будет специальной оговорки).

земли должно войти в законы природы. Согласно существовавшим до настоящего времени в физике воззрениям электронной теории, такая преимущественная система в самом деле существует.

Явления движения в электричестве и в оптике связывались с некоторой покоящейся субстанцией (*эфиром*), как носительницей координатной системы; выраженные в такой координатной системе законы природы должны были иметь особенно простой вид [1]). *Опыт Физо* (Fizeau) и родственные с ним опыты говорили за покоящийся эфир. Однако, в дальнейшем со всей возможной точностью был произведен ряд электрических и оптических опытов с целью определить, отражается ли движение земли на результатах измерений. Но результат опытов всегда был отрицателен. Насколько позволяет точность наших наблюдений, можно считать, что земное физическое пространство совершенно изотропно, — факт, который делает специальный принцип относительности прямо необходимым и который является исходным пунктом для теории относительности.

Среди этих опытов особо отметим опыт Майкельсона (Michelson). Если свет в покоящемся эфире имеет скорость c, то по теореме сложения скоростей (3) классической механики его скорость относительно земли, движущейся со скоростью v, будет $c - v$ или $c + v$, в зависимости от того, движется ли он в одном направлении с землею или в противоположном ей направлении. Но опыт показывает, что и по отношению к движущейся земле, вопреки теореме сложения, свет распространяется равномерно во все стороны. Величина самой скорости земли остается при этом неопределенной.

Далее следует назвать опыт Трутона и Нобла (Trouton, Noble), которые поместили заряженную пластинку конденсатора под углом относительно направления движения земли. На основании электронной теории следовало бы ожидать появления пары сил, которая будет стремиться повернуть плоскость пластины параллельно направлению движения. Другой опыт Трутона (Trouton) и Ранкина (Rankine) имел целью доказать изменения электрического сопротивления проволоки, помещенной в направлении движения земли или перпендикулярно к нему. В обоих случаях не удалось получить желаемого эффекта. Преимущественная система координат, относительно которой должна двигаться земля, осталась не найденной. Эти опыты как будто находятся в противоречии с опытами Физо.

Однако, в дальнейшем будет видно, что теория относительности дает возможность понять весьма простым образом и опыты Физо (ср. § 5).

Следует отметить, что противоречивость опыта с существовавшей до сего времени теорией — если даже не признавать принципа относительности — может быть устранена, если принять вспомогательную гипотезу, дополняющую электронную теорию. Так, например, можно объяснить опыт Майкельсона, если, сохраняя покоящийся вещественный эфир, принять, что все движущиеся тела сокращаются в определенном отношении (ср. § 5) в направлении движения [сокращение Лоренца (Lorentz)].

---

[1]) Еще до введения теории относительности частично уже отказались от понятия эфира; преимущественная система координат, для которой только и должны быть справедливы уравнения электронной теории, все же продолжала существовать.

Весьма много разнообразных экспериментов, много новых гипотез понадобилось для объяснения этого противоречия [1]).

Но вот выступает Э й н ш т е й н со своей первой работой [2]), появившейся в 1905 году. Если в электрических экспериментах нельзя обнаружить никакой преимущественной системы координат, *то таковой вообще нет; следовательно, для механики и электричества годен специальный принцип относительности.* Это была совершенно новая точка зрения Эйнштейна; выводы из нее сделаны в дальнейшем.

Невозможность существования для электрических явлений преимущественной системы координат заключает в себе прежде всего *невозможность представления об эфире как некоторой покоящейся субстанции.* Только в таком случае скорость света может в каждой системе K, K'... иметь одну и ту же постоянную величину.

Отказ от представления эфира немедленно влечет за собой неизбежный и сознательный отказ от познания тех явлений, которые приводят нас к восприятию электромагнитного силового поля. Мы вынуждены ограничиться лишь тем, что даем эти силы по величине и направлению и выражаем законы, для них действующие, соответствующими математическими уравнениями, не поясняя наглядным для нас образом самых явлений с помощью эфирной модели. Этим самым в электричестве мы становимся на точку зрения, принятую Ньютоном с самого начала для механики. Но это ни в коем случае не означает отказа физиков в будущем от более глубокого исследования явлений электромагнитных, так же как и тяготения.

Теперь мы должны перейти *к математической формулировке специального принципа относительности.* Ограниченный областью механики принцип относительности Галилея-Ньютона был тождествен с понятием инваирантности основных уравнений *механики* относительно преобразования Галилея (8). Было бы естественно при дальнейшем оформлении специального принципа относительности положить в основу те же преобразования.

Исследуем, возможно ли это. Мы пойдем по проложенной историей дороге, причем мы не обратимся сразу же к основным уравнениям электричества и оптики (уравнениям Максвелла), а ограничимся совсем простым случаем. Мы рассмотрим *закон распространения света в пустоте.* При этом должны быть соблюдены два условия. Во-первых, в принятой за покоящуюся системе координат K (в электронной теории это система координат эфира, здесь — любая, как показывает опыт Майкельсона) независимо от рода и состояния движения источника света, распространение света в пустоте должно происходить по всем направлениям и всюду с одной и той же постоянной скоростью $c = 300000$ *км/сек.* Это положение называется *принципом*

---

[1]) Подробнее об истолковании с точки зрения электронной теории приведенных здесь различных опытов можно найти у М. А б р а а м а (M. Abraham), Theorie der Elektrizität, Bd. II, 3. Aufl. Leipzig 1914.

[2]) A. E i n s t e i n, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen d. Phys., Bd. 17, 1905, перепечатанной в Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1921 (готовится к печати на русском языке). Сравн. также доклад Эйнштейна на съезде естествоиспытателей в Зальцбурге в 1909 г.: Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung, Physik. Zeitschrift, Bd. 10, 1909, S. 817.

постоянства скорости света в пустоте. Примем за начало координат системы K точечный источник света и начнем отсчет времени в момент выхода светового луча из этой точки; тогда этот принцип будет гласить:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \tag{17}$$

где c—наша универсальная постоянная. Второе условие гласит: в какой-нибудь другой, отличной от предыдущей, координатной системе K' распространение света должно итти по тому же точно закону. Если начало координат и начальный момент времени выбраны так же, как и раньше, и если координаты, относящиеся к системе K', обозначены соответственно с черточками, то должны также иметь:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \tag{18}$$

Здесь c та же самая постоянная, что и в уравнении (17).

Это второе положение тождественно со специальным принципом относительности. Его также называют иногда положением о постоянстве скорости света (может быть предпочтительнее было бы сказать: *положение об инвариантности скорости света*, если уже желательно вводить особое название).

Из сопоставления уравнений (17) и (18) сразу же видно, что наши галилеевы преобразования (8) не в состоянии преобразовать оба уравнения друг в друга. Уравнение (17) не инвариантно относительно галилеевых преобразований. Таким образом принцип постоянства скорости света противоречит принципу относительности в трактовке Галилея-Ньютона. Но так как первый их них находится вне всяких сомнений и так как специальный принцип относительности правилен в пределах наших опытов, то остается только отбросить для электричества и оптики принятые в механике уравнения галилеевых преобразований и заменить их другими.

Мы уже раньше (стр. 17) натолкнулись на то же самое противоречие. Теорема сложения скоростей в механике, из которой вытекают галилеевы преобразования, требует, чтобы в случае, когда скорость света в координатной системе K равна c, то в координатной системе K' она должна иметь другое значение. Однако, наблюдение, согласное со специальным принципом относительности, дает для K и K' равные значения c, что ставит под вопросом также и теорему сложения.

Но есть действительно один пункт, в котором и теорема сложения и галилеевы преобразования становятся спорными. В предыдущем параграфе мы полагали (см. 8′):

$$t = t'.$$

В классической механике время является абсолютной переменной, независимой ни от какой системы координат. Это является некоторым допущением. Мы должны приступить к *пересмотру понятия времени* в физике; мы обнаружим при этом, что, пользуясь физическим точным определением времени, возможно примирение принципа постоянства скорости света с принципом относительности.

Это особенное определение времени следует дать в таком виде, чтобы на основе его возможно было производить измерение времени.

Мы можем измерить время в одном каком-нибудь месте часами любой конструкции и сказать, что время определяется положением часовых стрелок. Если в различных местах имеются часы, то дожна быть возможность сравнения их. Можно было бы переносить часы, с которыми производят сравнение, с одного места на другое; таким образом мы определили бы абсолютное время. Однако, здесь возможны сомнения. Мы только что видели на стр. 17, что длины меняются при движении (по крайней мере с точки зрения электронной теории; но и теория относительности приведет нас к тому же заключению). Возможно, что при непосредственном переносе часов изменится ход часов [1]). Но у нас имеется возможность сравнивать часы с помощью световых или электрических сигналов.

Допустим, что мы находимся в системе K. С помощью распространения света мы можем дать физически *совершенно безукоризненное определение времени*. Нам нет необходимости знать величину скорости света, мы лучше будем исходить только из принципа постоянства скорости света, по которому свет распространяется равномерно во всех направлениях (стр. 19). Будем сравнивать двое однородных часов в точках A и B и только заранее условимся, что свет из A в B идет столько же времени, как из B в A. Пусть световой сигнал идет из A в B и затем сейчас же назад в A. Пусть t_A — время выхода из точки A, t_B — время выхода из точки B, t'_A — время прибытия в A.

Тогда имеем:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \tag{19}$$

Отсюда получаем t_B, т. е. показание часов в B в момент прибытия светового сигнала, если только показания часов в A и B должны между собой совпадать.

Уравнением (19) время в B так определяется, что оно совпадает со временем в A. Мы говорим, что часы в B идут синхронно с часами в A. Скорость света получается при этом из

$$c = \frac{2AB}{t'_A - t_A}. \tag{20}$$

Если только выполнен принцип постоянства скорости света в пустоте и если придерживаться только что данного определения синхронности, то имеют силу следующие общие положения:

1. Если часы в B идут синхронно с часами в A, то часы в A идут синхронно с часами в B.

2. Если часы в A идут синхронно с часами в B, а также с часами в C, то и часы в B и C идут также синхронно относительно друг друга.

В этом легко убедиться, если принять во внимание, что расстояние между любыми точками всегда равно $c \cdot \Delta t$, где c—определенная нами выше скорость света, Δt — разница во времени, которая необходима для перехода света из одной точки в другую.

---

[1]) Здесь идет речь, конечно, не об изменении хода вследствие несовершенства механизма. Под часами мы понимаем все время совершенно правильно идущие часы, например вибрирующий атом.

Мы можем, следовательно, добиться того, чтобы *все часы, покоящиеся в одной системе,* шли синхронно. Если мы представим себе, что такие часы установлены в каждой точке нашей системы, тогда время какого-нибудь события *определяется* показанием часов, находящихся в соответственном месте. Два события в различных местах будут *одновременны*, если показания находящихся в этих пунктах часов совпадают. Однако, эти положения о времени и одновременности связаны с нашей, любым образом определенной системой, потому что только в пределах этой системы распространение света было предположено равномерным во всех направлениях.

Рассмотрим теперь распространение света с двух различных систем K и K'. Вообразим, что часы в точках A и B жестко связаны между собой, например помещены на концах одного стержня. Пусть стержень покоится в системе K', пусть система K' сама движется в направлении стержня AB с постоянной скоростью относительно системы K. Часы в A и B синхронны со всеми часами системы K.

Положим, что луч, выйдя из точки A в точку B, возвратился снова в точку A. В системе K этот процесс будет наблюдаться следующим образом. Наблюдатель видит, что движение стержня AB происходит со скоростью v, движение света — со скоростью c. Для него относительная скорость стержня и света при переходе света из A в B будет равняться $c-v$, при обратном переходе из B в A — напротив: $c+v$. Внутри *одной* системы остается, таким образом, неизменной теорема сложения скоростей. Если обозначим опять время выхода и прихода света из A в B и в A опять через t_A, t_B и t'_A, то по показаниям часов в системе K:

$$t_B - t_A = \frac{r}{c-v}; \quad t'_A - t_B = \frac{r}{c+v}, \tag{21}$$

где r обозначает расстояние BA, как оно воспринимается в системе K, t_B — это еще раз надо отметить — представляет собой показание часов в B в момент прибытия светового сигнала, причем часы в B идут синхронно с часами в A (относительно системы K).

С другой стороны наблюдатель в системе K', который движется вместе со стержнем, воспримет, при условии справедливости обоих принципов, что свет движется из A в B и назад со скоростью c. Пусть он руководствуется при измерении часами в точке A; если бы часы в B шли *для него* синхронно с часами в A, то в момент прибытия светового сигнала часы в B должны были бы показывать время t_B, для которого $t_B - t_A = t'_A - t_B$. Но часы в B показывают другое время; *в системе* K' они, следовательно, *не синхронны* с часами в A.

Отсюда следует: события, одновременные в системе K, не одновременны в системе K. *Понятие одновременности* не абсолютное, а *относительное* понятие, связанное с координатной системой. Синхронно идущие часы возможны всегда только в *одной* системе; все показания времени относятся только к одной из координатных систем K, K'... Как показания пространственных координат получают смысл только тогда, когда дана система координат, к которой они относятся, так и для установления показания времени надо определить систему, относительно которой эти показания правильны. Таким образом благодаря Эйнштейну уничтожилось понятие „абсолютного времени“.

От правильности данного здесь определения времени и одновременности с помощью постоянной и инвариантной скорости света существенно зависит ход рассуждений теории относительности. Если бы за основу определения времени мы выбрали какой-нибудь физический процесс, распространяющийся не со скоростью света, а с какой-нибудь бесконечно большой скоростью, то мы пришли бы к абсолютному времени классической механики [1]).

Вследствие сделанного нами выбора, скорость света становится предельной скоростью, которая не может быть превзойдена никаким движением (см. § 4).

Понятие относительности времени, приложимое с большой степенью достоверности непосредственно ко всем физическим фактам и опытам, относится прежде всего, конечно, к явлениям в электричестве и оптике. Однако, невозможно, чтобы в механике существовало понятие абсолютного, а в электричестве относительного времени (так как часто обе области связаны в одном и том же явлении); но так как относительность времени в электрических явлениях в настоящее время стала необходимым понятием, нам *придется* отбросить классическую механику и попытаться создать новую механику. Этим мы займемся позднее (§ 9).

Необходимость этого выявляется также и с другой стороны. В классической механике мы рассматривали длины (расстояния между точками твердого тела) независимо от координатной системы. Мы измеряли такие длины наложением масштаба. Если такая длина, положим, в виде прямого отрезка, движется в направлении своей протяженности прямолинейно и равномерно относительно координатной системы K, то мы можем измерить длину с помощью *движущегося одновременно с ней* масштаба, т. е. в движущейся системе $\overline{K}$; мы получим „*длину стержня в движущейся системе*“. Однако, мы можем осуществить измерения еще и другим путем. Пользуясь часами, идущими синхронно в системе K, мы определяем положение начала и конца отрезка в покоящейся системе K в *один и тот же момент времени*. Тем же самым масштабом, которым мы уже пользовались, но только покоящимся *в системе* K, измеряем мы только что определенное в системе K расстояние конечных точек нашей длины. Мы получаем „*длину движущегося отрезка в покоящейся системе*“. Классическая механика считает, что определенные таким способом длины равны между собой. Это произвольно и, как мы скоро увидим, несовместимо одновременно с правильностью принципа постоянства скорости света и со специальным принципом относительности в электричестве. Но тогда не может быть понятия „твердого тела“.

Распространение галилеева-ньютонова принципа относительности на *все* процессы природы неизбежно связано таким образом с коренными изменениями в структуре механики.

[1]) См. Ph. Frank und H. Rothe, Über die Transformation der Raum-Zeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme. Annalen der Physik, Bd. 34, 1911, S. 825.

§ 3. Пространственно-временные координаты и преобразование Лоренца.

Зависимость показаний времени от движения системы координат, к которой эти показания относятся, привело к тому, что на ряду с тремя пространственными координатами ввели время, как четвертую координату.

Все пространственные восприятия относятся к какому-нибудь времени; все показания времени связаны с пространственными процессами. Все происходящее протекает для нас в мире четырех измерений, причем три измерения связаны с пространством, а четвертое — со временем. Такое представление вовсе не ново; в графических изображениях мы всегда вводили время как координату. Но неразрывная связь времени и пространства во всех физических явлениях выступила как нечто обязательное только после того, как была установлена относительность времени. В соответствии с этим Минковский[1]) лишь в рамках теории относительности смог развить наши представления о времени и пространстве настолько, что мы можем теперь изображать все происходящее в пространстве и времени с помощью четырехмерной геометрии пространственно-временного континуума. Мы можем, следовательно, представить обе наши движущиеся друг относительно друга системы K, K'... как четырехмерные пространственно-временные системы. Координаты со значками и без значков будут переходить друг в друга при помощи особых уравнений преобразования, вывод которых и является нашей ближайшей задачей.

Назовем вместе с Минковским наш четырехмерный континуум „миром“; x, y, z, t будут координаты пространственно-временной точки или „*мировой точки*“. Континуум x, y, z мы будем в дальнейшем всегда обозначать как „пространство“. Временно координаты x, y, z будут относиться к пространственной *декартовой* системе. В дальнейшем выяснится, каким образом ввести координату времени.

Чтобы внешне также придать времени характер четвертой мировой координаты, положим:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ct = x_4, \tag{22}$$

где c — скорость света в пустоте, ct введено вместо t из соображений симметрии. Мы можем, конечно, равенство $x_4 = ct$ истолковать и другим образом: ct есть путь, проходимый светом за время t. Если мы измерим время в такой единице, чтобы тот же интервал времени выразился через число x_4, то скорость света будет равна 1. $x_4 = ct$ обозначает таким образом введение такой единицы времени, для которой $c = 1$. Но мы сохраним вначале прежнее значение для скорости света; x_4 является, следовательно, только условным обозначением произведения ct.

В будущем мы будем пользоваться двумя параллельными друг другу системами обозначений, а именно x, y, z, t и x_1, x_2, x_3, x_4;

[1]) Ср. его доклад „Пространство и время“, напечатанный в книге Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1921. (Во II квартале ГТТИ эту книгу выпустит в русском переводе. *Прим. ред.*).

новый способ обозначения мы применим, когда дело будет итти о теории относительности, старый — для существовавших до сих пор теорий или для сравнения с ними; временами, если нам будет нужно особо подчеркнуть роль времени, мы будем также пользоваться его старым обозначением.

Вернемся теперь к задаче, поставленной в предыдущем параграфе (стр. 19). Принцип постоянства скорости света в пустоте в системе K гласит:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0. \tag{23}$$

Специальный принцип относительности требует, чтобы уравнение (23) оставалось неизменным и было бы удовлетворено во всякой другой системе $K' \ldots$, движущейся прямолинейно и равномерно относительно K.

При этом мы, конечно, полагаем, что длины и время будут в каждой из систем K, K'... измерены одними и теми же масштабами и часами; масштаб, следовательно, сохраняет свою длину внутри всякой системы, в которой он покоится; также и часы сохраняют свой ход, пока они покоятся в той или другой, но какой-нибудь одной системе.

Теперь нам придется преобразования Галилея заменить другими, для которых уравнение (23) будет инвариантно, причем безразлично, отнесем ли мы это уравнение к *покоящейся* (K) *системе или к системе* (K'), *движущейся прямолинейно и равномерно относительно* (K). Для вывода этих уравнений преобразования мы последуем по недавно предложенному Эйнштейном особенно простому пути [1]).

Выберем координатные системы K и K' так, чтобы их x_1-оси все время совпадали друг с другом и с направлением относительной скорости K' по отношению к K. Пусть один луч света двигается в направлении положительной x_1-оси, другой в направлении отрицательной x_1-оси. Тогда в системе K, вследствие равенства (23), имеем:

$$x_1 - x_4 = 0; \quad \text{или} \quad x_1 + x_4 = 0. \tag{24}$$

В движущейся системе K' имеем:

$$x_1' - x_4' = 0; \quad \text{или} \quad x_1' + x_4' = 0; \tag{25}$$

следовательно:

$$(x_1' - x_4') = \lambda (x_1 - x_4) \quad \text{и} \quad (x_1' + x_4') = \mu (x_1 + x_4). \tag{26}$$

Положим:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}; \quad b = \frac{\lambda - \mu}{2}; \tag{27}$$

тогда из (26) следует:

$$x_1' = a x_1 - b x_4; \quad x_4' = a x_4 - b x_1. \tag{28}$$

Если a и b будут известны, то мы будем знать и уравнения преобразования, переводящие равенства (24) в равенства (25) со значками.

---

[1]) A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Sammlung Vieweg, Heft 38 (Anhang).

Для начала координат системы K имеем $x_1' = 0$, следовательно:

$$x_1 = -\frac{b}{a} x_4. \tag{29}$$

Если v — скорость K' относительно K, то

$$x = vt \text{ или } x_1 = \frac{v}{c} x_4, \tag{30}$$

откуда

$$-\frac{b}{a} = \frac{v}{c}. \tag{31}$$

Представим себе масштаб, принятый за единицу; вообразим его один раз покоящимся в системе K' и другой раз в системе K; тогда в первом случае его длина, измеренная в системе K, должна быть равной длине, которая получится во втором случае, когда он покоится в системе K, но измерения ведутся в K'. Измерение длины движущегося стержня с покоящейся системы происходит при этом по способу, указанному на стр. 22.

Положим сначала $x_4 = 0$, тогда на основании уравнения (28) $x_1' = ax_1$. Длина стержня $x_1' = 1$ окажется, следовательно, в системе K равной:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{a}. \tag{32}$$

Исключим x_4 из обоих уравнений (28) и положим для второго случая $x_4' = 0$; тогда получим:

$$x_1' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x_1, \tag{33}$$

или при $x_1 = 1$

$$\Delta x_1' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{34}$$

Так как $\Delta x_1 = \Delta x_1'$, то

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{35}$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}. \tag{36}$$

Следовательно, уравнения преобразования (28) имеют вид:

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_4' = \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{37}$$

С помощью уравнения (37) уравнение (24) преобразуется в (25). Одновременно имеем:

$$x_1'^2 - x_4'^2 = x_1^2 - x_4^2. \tag{38}$$

Если обе системы K и K' сохраняют положение своих осей и направление своей относительной скорости, а движение светового луча идет от начала координат в любом направлении, т. е. согласно уравнению (23), то к (37) присоединяются еще равенства $x_2' = x_2$ и $x_3' = x_3$. Таким образом получаем уравнения преобразования

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{39}$$

Уравнения (39) [как это показывает и (38)] преобразуют равенство (23) в самого себя. Координатная система выбрана при этом так, что точка мира $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ соответствует точке мира

$$x_1' = x_2' = x_3' = x_4' = 0.$$

Обращение уравнений (39) дает:

$$x_1 = \frac{x_1' + \beta x_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \frac{x_4' + \beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{40}$$

Особое внимание следует обратить на то, что уравнения преобразования (38), так же как и (40), не только удовлетворяют уравнению (23), но и любое другое значение величины

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{41}$$

преобразуют в самого себя; это значит, что *квадратичная форма* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ является *инвариантом* относительно данных преобразований. При этом длины и время во всех системах измеряются одними и теми же масштабами и часами.

Уравнения (39) и (40) называют *преобразованием Лоренца;* кроме *Фогта*[1]) (Voigt) они установлены также и *Лоренцом* в работе[2]), которая является предвестником теории относительности.

Вернемся опять к старым обозначениям x, y, z, t мировой точки; тогда преобразование Лоренца гласит:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{42}$$

или по обращении:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{43}$$

[1]) W. Voigt, Über das Dopplersche Prinzip. Göttinger Nachrichten, 1887, S. 41 и Physikal. Zeitschr. Bd. 16, 1915, S. 381.

[2]) H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. Перевод в Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip. Leipzig 1921. См. примечание к стр. 23.

Если движение светового луча в системе K выражено через x, y, z, t, то это же движение в K' получим пересчетом отдельных мировых точек с помощью преобразований Лоренца. В обеих системах движение света происходит со скоростью c.

Отбросим теперь ограничение о положении x-оси. Представим себе произвольно расположенные декартовы системы координат K и K'; K' движется каким-нибудь образом прямолинейно и равномерно относительно K. Выражение $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$ остается всегда неизменным, когда системе K мы даем некоторый поворот в пространстве, потому что при таком повороте $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ сохраняет одно и то же значение.

Мы можем, следовательно, выражение $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$ перевести в $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2$ тремя *линейными* преобразованиями. Выберем две промежуточные системы K^0 и $K^{0'}$ с координатами x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4 и $x_1^{0'}$, $x_2^{0'}$, $x_3^{0'}$, x_4', где K^0 получается из K и $K^{0'}$ из K' поворотом в пространстве.

Пусть для K^0 и $K^{0'}$ x_1^0- и $x_1^{0'}$-оси совпадают друг с другом и с направлением относительной скорости K' по отношению к K. Тогда наша квадратическая форма $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$ сохранит свое значение, если мы ее переведем: 1) в $x_1^{02}+x_2^{02}+x_3^{02}-x_4^2$ при помощи поворота в пространстве, 2) в $x_1^{0'2}+x_2^{0'2}+x_3^{0'2}-x_4'^2$ при помощи преобразования Лоренца и 3) в $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2$ снова при помощи поворота в пространстве.

Три линейных преобразования можно свести к одному, единственному, которое, в противоположность предыдущему *специальному*, называется *общим преобразованием Лоренца*.

Коэффициенты, входящие в это последнее, так же как и коэффициенты специального преобразования Лоренца (стр. 26), вещественные постоянные величины. Чисто формально оно напишется:

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4\\
x_2' &= \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\alpha_{24}x_4\\
x_3' &= \alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3+\alpha_{34}x_4\\
x_4' &= \alpha_{41}x_1+\alpha_{42}x_2+\alpha_{43}x_3+\alpha_{44}x_4
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Так как должно иметь место равенство $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$, то между постоянными коэффициентами в каждой точке должны иметь место следующие 10 соотношений:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{1n}^2+\alpha_{2n}^2+\alpha_{3n}^2-\alpha_{4n}^2=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3)\\
&\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2-\alpha_{44}^2=-1\\
&\alpha_{1n}\alpha_{1o}+\alpha_{2n}\alpha_{2o}+\alpha_{3n}\alpha_{3o}-\alpha_{4n}\alpha_{4o}=0
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$(n,\ o=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ n\neq o).$$

Эти условия отличаются от известных в аналитической геометрии „условий ортогональности" минусом перед x_4^2. Предположим, что переход от K' к системе K'' можно также сделать с помощью соответствующей системы уравнений преобразования. В таком случае можно преобразования Лоренца, первое, дающее переход от K к K', и второе, дающее переход от K' к системе K'', заменить одним единственным, дающим переход от K к K'. Все преобразования Лоренца образуют „группу" [1]) и именно линейную однородную группу.

Вернемся теперь опять к поставленной нами проблеме. Специальный принцип относительности требует, чтобы общие законы природы были всегда справедливы, независимо от того, относим ли мы их к системе K или K'. Одним из таких законов природы является принцип постоянства скорости света; что он правилен не только в одной специально выбранной системе координат, но и во всякой другой, находящейся по отношению к ней в равномерном прямолинейном движении, доказывает опыт Майкельсона. Но переход от одних систем к другим должен происходить тогда с помощью преобразований Лоренца, которые позволяют объединить принцип постоянства скорости света и принцип относительности. В указанном оптическом явлении преобразование Лоренца заменяет собой галилеевы преобразования. Но его значение этим не ограничивается. Мы покажем, что не только закон распространения света, но и уже установленные законы учения об электричестве вообще будут правильны без изменения для всякой системы K, K' . . ., если мы будем пользоваться для преобразований основных уравнений преобразованиями Лоренца. Все системы отсчета, находящиеся друг относительно друга в равномерно прямолинейном движении и полученные с помощью преобразований Лоренца из одной основной системы (для которой справедливы основные положения учения об электричестве), равноценны для описания электрических и оптических процессов. Подобно тому, как в механике инвариантность законов природы относительно преобразования Галилея является математическим выражением галилеева-ньютонова принципа относительности, так и *инвариантность относительно преобразований Лоренца представляет собой математическую формулировку специального принципа относительности*, прежде всего в оптике и электричестве.

Мы имели бы таким образом два принципа относительности: один для механики, другой для электричества и оптики. Но оба принципа не могут существовать одновременно, как не может существовать абсолютное время в механике и вместе с тем относительное в электричестве. Представим себе какой-нибудь процесс, природа которого одновременно и механическая и электрическая (например вращение рычага электромагнитными силами); в механической части процесс будет принадлежать к какой-нибудь одной из ряда координатных систем, которые вытекают одна из другой через преобразования Галилея. В то же время он должен протекать (в своей электрической части) в одной из бесчисленных систем отсчета, обусловленных преобразованиями Лоренца. Рассмотренный процесс позволил бы, следовательно, выделить с помощью обоих принципов относительности одну совсем особую систему координат подобно тому, как можно найти точку, которая должна лежать на двух кривых и которая должна быть точкой их пересечения. Отсюда следует, что для механики и электричества может быть только один принцип относительности.

---

[1]) Cp. F. Klein, Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. Physik. Zeitschr. Bd. 12, 1911, S. 17.

Так как галилеевы преобразования наверное непригодны в учении об электричестве, то остается только признать *преобразование Лоренца, как математическое выражение принципа относительности, правильным и для механики.* Что при этом мы не требуем ничего невозможного, вытекает уже из того, что для малых относительных скоростей v обеих систем K и K' (сравнительно со скоростью света c) преобразование Лоренца переходит в галилеевы преобразования:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t.$$

Мы можем, следовательно, ожидать, что для малых v, — а в природе мы почти всегда встречаем малые v, — классическая механика продолжает быть правильной. Это ожидание найдет себе в дальнейшем подтверждение (§ 9).

Начиная с этого момента, мы будем рассматривать *инвариантность законов природы относительно преобразования Лоренца, как математическое выражение специального принципа относительности в электричестве и механике.* Те законы, которые удовлетворяют этим условиям инвариантности, являются для нас „правильными"; во всех процессах природы они оставляют неопределенным некоторое прямолинейное и равномерное движение. В таком случае все законы природы действительны не только в некоторой *одной* правильно выбранной системе координат, но остаются неизменными в тройном бесконечном разнообразии систем, которые находятся по отношению к ней в равномерно-прямолинейном движении и для которых координаты рассчитываются друг из друга с помощью преобразования Лоренца.

Едва ли надо особо отмечать, что преобразование Лоренца справедливо и для бесконечно малых величин, что, следовательно, всегда x_1, x_2, x_3, x_4 можно заменить через dx_1, dx_2, dx_3, dx_4.

В частности

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 \qquad (46)$$

есть *инвариант* относительно преобразования Лоренца.

§ 4. Пространственноподобные и времениподобные мировые векторы.

Пространственные координаты x_1, x_2, x_3 мировой точки мы представляем себе принадлежащими декартовой системе координат; мы хотим решить вопрос, как связать с тремя пространственными координатами координату времени x_4.

В декартовой системе $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ представляет собой квадрат расстояния пространственной точки x_1, x_2, x_3 от начала координат системы. При повороте системы, т. е. при линейном, однородном и ортогональном преобразовании, значение квадратичной формы остается неизменным. Аналогично — в нашем четырехмерном пространственно-временном континууме при линейном однородном преобразовании (44) сохраняется значение квадратичной формы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

Последнее выражение мы обозначаем, как пространственно-временное расстояние точки мира x_1, x_2, x_3, x_4 от начала координат.

Однако, во втором случае наша квадратичная форма не является одним только простым обобщением при переходе от трех измерений к четырем измерениям; x_4^2 имеет здесь *отрицательный* знак (квадратичная форма, с инерциальным индексом 1), и, следовательно, x_4 надо считать *мнимым* отрезком длиной x_4. В четвертом измерении координату времени $x_4 = ct$ можно представить себе как *перпендикулярную* к трем пространственным координатам, как *вещественное* число, но отложенное на *мнимой оси*. Четырехмерная пространственно-временная геометрия, хотя и весьма близка эвклидовой геометрии (пседо-эвклидова геометрия), однако, она не является просто четырехмерной эвклидовой геометрией.

Формально мы можем с еще большей отчетливостью выявить аналогию с эвклидовой геометрией тем, что выберем за координату времени величину $x_4 = ict$, отчего квадратичная форма перейдет в $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$; x_4 является тогда мнимым числом, отложенным на реальной оси, которая проходит перпендикулярно к трем пространственным осям. Выбор мнимой координаты времени имеет то преимущество, что мы можем, распространив формулы трехмерной геометрии и особенно трехмерного векторного анализа на четыре измерения, непосредственно применять их в специальной теории относительности[1]), в то время как при выбранном нами ранее положении $x_4 = ct$ мы сначала должны создать векторный анализ для особой неэвклидовой геометрии. Если тем не менее мы в дальнейшем изложении предпочтем выбрать $x_4 = ct$, то произойдет это оттого, что таким путем легче осуществить переход к общей теории относительности, которая является непосредственным применением неэвклидовой геометрии в наиболее ее общей форме.

Мы все-таки воспользуемся на мгновенье мнимой координатой времени ict и с ее помощью покажем, что специальные преобразования Лоренца мы можем весьма просто толковать как *поворот на мнимый угол*.

Положим $\bar{x}_4 = ix_4$, тогда преобразование Лоренца (37) переходит в

$$x_1' = \frac{x_1 + i\beta \bar{x}_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{x}_4' = \frac{\bar{x}_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{47}$$

Мнимый угол φ мы определим через:

$$\sin\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = i\beta = i\frac{v}{c}. \tag{48}$$

Преобразование Лоренца будет тогда:

$$x_1' = x_1\cos\varphi + \bar{x}_4\sin\varphi, \quad \bar{x}_4' = -x_1\sin\varphi + \bar{x}_4\cos\varphi, \tag{49}$$

откуда для обратного преобразования следует:

$$x_1 = x_1'\cos\varphi - \bar{x}_4'\sin\varphi, \quad \bar{x}_4 = x_1'\sin\varphi + \bar{x}_4'\cos\varphi. \tag{50}$$

---

[1]) Ср. M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, 1 Band.

Специальное преобразование Лоренца представляет собой положительный поворот на мнимый угол φ, и поэтому можно общее преобразование Лоренца составить из трех поворотов (ср. стр. 27).

Но пусть мировые точки определяются четырьмя вещественными величинами x_1, x_2, x_3, x_4, как они определялись равенствами (22). Согласно сказанному на стр. 12 мы можем эти четыре величины принять за составляющие вектора x в четырехмерном континууме и дать общее определение мирового вектора как совокупность четырех величин, преобразующихся как координаты мировой точки (следовательно по преобразованию Лоренца). Длина s нашего вектора, т. е. пространственно-временное расстояние от начала координат, дается квадратичной формой:

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{41}$$

В то время, однако, как трехмерное пространственное расстояние всегда вещественно, s может быть вещественной и мнимой величиной в зависимости от знака неравенства в $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \gtrless x_4^2$.

Но значение s не зависит от особого выбора координатной системы (стр. 26); таким образом подразделение мировых точек на точки с вещественным или мнимым расстоянием от нулевой точки или соответственно *подразделение мировых векторов на векторы вещественной или мнимой длины* не зависит ни от какой координатной системы.

Мы можем дать очень простое истолкование векторам обоих видов. Пусть выражение $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ *положительно*, представим себе, что некоторое значение его нам задано во всех возможных координатных системах K, K'...; в таком случае всегда имеется какая-нибудь система (K_0), для которой $x_4 = 0$. Величина

$$s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

представляет собой тогда в системе K пространственное расстояние мировой точки от начала координат. Обе эти точки в один и тот же момент времени занимают пространственное положение, определяемое координатами 0, 0, 0 и x_1, x_2, x_3; принято говорить, что в выбранной системе координат K_0 мировая точка и нулевая точка „одновременны“. Существует, следовательно, такая координатная система, в которой при $s^2 > 0$ мировое расстояние становится обычным пространственным удалением; поэтому мы называем такое расстояние

$$s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}$$

или соответствующий вектор *пространственноподобным*.

Если $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ *отрицательно*, то среди систем K, K' ... всегда имеется одна (K_1), для которой $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и соответственно с этим

$$s = \sqrt{-x_4^2}.$$

Расстояние мировой точки от нулевой точки будет представлено в этой системе величиной ix_4, т. е. величиной x_4, отложенной на мнимой оси времени, соединяющей мировую точку с нулевой точкой. Мировая точка все время покоится в начале специально выбранной *пространственной* координатной системы K_1, координата же времени для этой точки, напротив, возросла на $x_4 = ct$; мировая точка определяется, таким образом, часами, покоящимися в начале нашей особым образом выбранной системы K_1 (движущейся равномерно относительно K). Расстояние в данном случае чисто временное. Поэтому всякое расстояние или вектор, для которого $s^2 < 0$, мы называем *времениподобным*.

Мы можем также нашу квадратичную форму (41) заменить следующей:

$$s^2 = x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{51}$$

Для $x_4^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ вектор будет опять пространственноподобным, для $x_4^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ времениподобным. Квадратичная форма (51) будет теперь с инерциальным индексом 3; пространственные координаты могут быть отложены на трех мнимых осях, временные координаты — на одной вещественной оси. Оба вида координатных систем, как определенных на стр. 29, так и только что определенных, могут быть приняты для изображения физических процессов. Для специального принципа относительности мы положим в основу, как наиболее наглядную, систему, данную на стр. 29, для общего же принципа относительности — систему с тремя мнимыми осями. Последняя, как показывает равенство (51), имеет то преимущество, что вектор времени (так же как и подлежащее сейчас определению собственное время) является вещественным.

Представим теперь себе прямолинейно и равномерно движущуюся точку. В некоторый момент времени она может иметь в той системе, в которой она движется, координаты x_1, x_2, x_3, x_4. Жестко связанные с ней часы в тот же самый момент показывают в системе, жестко связанной с точкой, время $\frac{s}{c}$ в секундах. Назовем это время *собственным временем движущейся точки* и пишем для него

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \tag{52}$$

или, пользуясь старым обозначением,

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} = t \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}, \tag{53}$$

где q есть скорость точки.

Примем за единицу времени такую величину, для которой $c = 1$ (ср. стр. 23); тогда *собственное время* дается непосредственно равенством:

$$s = \sqrt{x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = x_4 \sqrt{1 - v^2}, \tag{54}$$

где v будет теперь скорость нашей точки, выраженная в новой единице времени.

Особенно наглядно выступит разница между пространственноподобными и времениподобными векторами, если воспользоваться *данным Г. Минковским геометрическим толкованием преобразования Лоренца*. Оно позволит нам сделать и ряд дальнейших выводов из этого преобразования.

В основу мы положим две движущиеся друг относительно друга системы K и K'; пусть оси x_1 и x_1' опять совпадают друг с другом и с направлением относительной скорости. Мы рассматриваем процесс в плоскости $x_1 x_4$, для которого, следовательно, справедлива простая форма (37) преобразования Лоренца.

Начертим в плоскости $x_1 x_4$ (рис. 1), в которой оси x_1 и x_4 образованы двумя взаимно перпендикулярными прямыми OX_1 и OX_4, равносторонние гиперболы $x_1^2 - x_4^2 = +1$ и $x_1^2 - x_4^2 = -1$ и прямые

$$x_1 + x_4 = 0 \text{ и } x_1 - x_4 = 0.$$

Проведем две прямые OX_1' и OX_4', образующие с осями x_1 и x_4 угол ψ $\left(\text{где } \operatorname{tg}\psi = \beta = \frac{v}{c}\right)$, и докажем следующее положение:

Если для координатной системы K пространственная ось x_1 и ось времени x_4 образованы взаимноперпендикулярными прямыми x_1 и x_4 и если расстояния OX_1 и OX_4 вершин гипербол от начала координат приняты за единицу для координат x_1 и x_4, то соответственные оси движущейся по отношению к K системы K' будут прямыми OX_1' и OX_4', образующими с осями OX_1 и OX_4 угол ψ. При этом расстояния от начала координат O до точек пересечения X_1' и X_4' с гиперболами представляют собой единицы для измерения x_1' и x_4'.

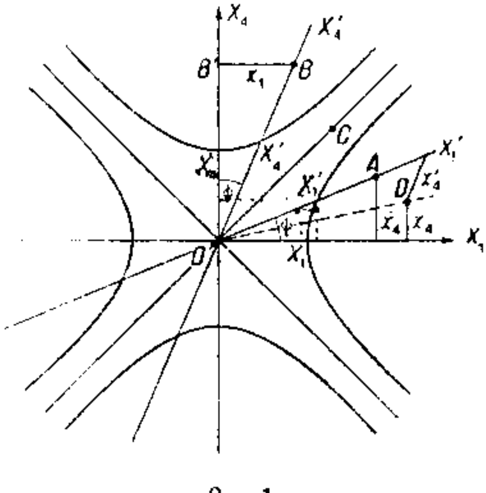

Рис. 1.

Доказательство следующее.

Если координаты какой-нибудь точки в системе K будут x_1, x_4, и координаты той же точки в системе K' будут x_1', x_4', то, предполагая положения x_1'-оси и x_4'-оси сначала произвольными, мы получим на основании нашего рисунка соотношение

$$x_1' = ax_1 + bx_4, \quad x_4' = cx_1 + dx_4. \tag{55}$$

Для наших, особым образом выбранных x_1'-оси и x_4'-оси коэффициенты уравнений преобразования принимают особые нижеуказанные значения. Положение точки X_1' в системе K определяется уравнениями $x_1^2 - x_4^2 = 1$ и $x_4 = \beta x_1$, положение точки X_4' уравнениями $x_1^2 - x_4^2 = -1$ и $x_1 = \beta x_4$; таким образом в системе K:

для X_1':

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_4 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

для X_4':

$$x_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Вследствие принятого нами допущения, для системы со значками мы должны иметь:

для X_1':

$$x_1' = 1, \quad x_4' = 0,$$

для X_4':

$$x_1' = 0, \quad x_4' = 1.$$

Подставим эти выражения в уравнение (55); тогда для определения коэффициентов для каждой точки X_1 и X_4 получим по два уравнения.

Вычисление дает:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad b = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad c = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

при этом уравнение (55) переходит в:

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x_4' = \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{56}$$

Уравнения совершенно тождественны с преобразованием Лоренца (37) (стр. 25). Этим доказано наше положение. Наше построение позволяет простым путем выводить x_1', x_4' из x_1, x_4 и обратно[1]).

Но в нашей четырехмерной геометрии (мнимая) ось x_4' перпендикулярна к оси x_1', а это не имеет места на рисунке. Но мы не должны упускать из виду, что наш рисунок является лишь изображением специальной неэвклидовой геометрии (псевдо-эвклидовой геометрии) на вещественной эвклидовой плоскости.

Рисунок, однако, дает нам возможность тотчас же отличить *пространственноподобные* векторы от *времениподобных*. Для первых $x_1^2 > x_4^2$; если ограничиться первым квадрантом, они все, следовательно, лежат между прямой $OC\,(x_1 = x_4)$ и положительной осью x_1. Времениподобные векторы, для которых $x_1^2 < x_4^2$, находятся между той же прямой и положительной осью x_4. То же соответственно годится и для других квадрантов, так что, следовательно, все пространственноподобные векторы расположены в той части нашей плоскости, которая названа „промежуточной областью", все времениподобные векторы — в частях, которые названы на рисунке частью „за 0" и частью „до 0". Границы между обоими видами векторов образуют прямые $x_1 = x_4$ и $x_1 = -x_4$. Такое подразделение остается во всякой координатной системе, т. е. пространственноподобный вектор не может стать времениподобным и, наоборот, потому что, как это видно из рисунка, положение обеих граничных прямых не зависит от того, какую координатную систему мы берем.

Для каждого пространственноподобного вектора существует, однако, одна координатная система, для которой он представляет чисто пространственное расстояние. Так, например, на нашем рисунке век-

[1]) Здесь следует отметить одно видоизменение построения Минковского, которое делает преобразование координат еще проще: P. G r u n e r, Eine elementare geometrische Darstellung der Transformationsformeln der speziellen Relativitätstheorie. Physikal. Zeitschr. Bd. 22, 1921, S. 384.

тор OA для системы K является пространственноподобным пространственно-временным вектором; для системы же K', на x_1'-оси, на которой он лежит, он будет обычным пространственным расстоянием; величина расстояния $x_1' = OA$, время же для O и A одинаково, так как $x_4' = 0$. A стало „одновременным" с O. Аналогично OB в системе K будет времениподобным пространственно-временным вектором, в системе же K' чисто временным расстоянием с длиной $x_4' = OB$, в то время как для B и O $x_1' = 0$, т. е. B длительно покоится в пространственном начале координат. Обратно чисто пространственные и чисто временные расстояния при соответственном выборе координат могут переходить в пространственно-временные векторы.

Необходимо особо отметить еще одно существенное различие между времениподобными и пространственноподобными векторами. Рассмотрим пространственноподобный вектор OD. Его конец в системе K определяется положительными величинами x_1 и x_4; событие, которое изображается точкой D, лежит таким образом по времени после события O. Однако, существует такая координатная система, в которой D и O одновременны (на рис. 1 стр. 33 соответствующая этому случаю ось x_1 обозначена пунктирной линией); существует, наконец, и такая система (на нашем рисунке это будет система K'), в которой координата x_4' точки D будет отрицательная, следовательно событие D по времени произойдет раньше O. Если два события (мировые точки) O и D связаны *пространственноподобным* вектором, то существует координатная система, в которой O наступает перед D, и такая, в которой D наступает перед O; в одной единственной системе O и D одновременны.

Иначе обстоит дело с *времениподобным вектором*. Если его конец (O его начало) имеет координатой времени положительную величину x_4, то он ее сохраняет во всякой системе. Определяемое концом его событие происходит по времени *всегда* после O; конец лежит „за O". Аналогично пространственно-временная точка с отрицательным x_4 *всегда* остается „до O", и событие происходит раньше O. Времениподобные векторы направлены или в будущее или в прошедшее. Каждый времениподобный вектор может быть образован прямолинейным и равномерным движением одной *единственной* пространственной точки.

О *скорости*, с которой движется такая точка, мы можем сказать следующее. Пусть будет эта скорость v. Тогда для времениподобного вектора имеем $x_1 = vt$ и $x_1^2 - x_4^2 = (v^2 - c^2) t^2 = -s^2$. Следовательно $v < c$. Предельной величиной будет $v = c$, тогда $x_1^2 - x_2^4 = 0$. Прямые $x_1 = +x_4$ и $x_1 = -x_4$, соответствующие поступательному движению со скоростью света, должны быть еще причислены к времениподобным векторам. Для бо́льших значений v было бы $x_1^2 - x_4^2 = +s^2$, т. е. вектор был бы пространственноподобным. Такой вектор не может быть образован поступательным движением одной отдельной точки.

Так как движение всякой массы или энергии мы можем представить движением одной точки и так как таким образом времениподобный пространственно-временный вектор является символом всех (пока что прямолинейных и равномерных) процессов движения материи и энергии, то отсюда следует, *что материя и энергия могут двигаться только со скоростью меньшей или — самое большее — равной скорости света.* Так, например, и тяготение может распространяться — самое большее — со скоростью света.

К этому же выводу мы можем притти и другим путем. Положим, что точка может двигаться поступательно со скоростью $V > c$, а именно от A и B вдоль оси x системы K.

Тогда имеем:

$$\Delta t = \frac{x_B - x_A}{V}. \tag{57}$$

Согласно преобразованию Лоренца (42) в системе K' имеем:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta t \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{58}$$

Так как $V > c$, можно соответствующим подбором v достичь того, что $\Delta t'$ станет нулем или отрицательной величиной. Следовательно должны быть системы, в которых бы точка двигалась от B к A.

Таким образом скорость движущейся точки никогда не может превзойти скорости света. Никакое движение материи или энергии не может происходить со скоростью большей скорости света.

В теории относительности скорость света играет поэтому роль предельной скорости, так же как в классической физике бесконечно большая скорость. В следующем параграфе (стр. 38) мы вернемся к этому еще раз в связи с другими вопросами.

Что никакое движение материи или энергии не может происходить со скоростью большей скорости света, вытекает также непосредственно из преобразования Лоренца [равенства (42) и (43)]. Потому что, если мы представим себе координатную систему, жестко связанную с движущейся точкой, то при $v > c$ мы получили бы мнимые пространственные координаты. Фактически в природе нигде не наблюдались скорости бо́льшие, чем скорость света [1].

Все соотношения, найденные для плоскости x_1x_4, могут быть целиком перенесены в четырехмерный мир, так как координаты x_2 и x_3 совсем не затрагиваются преобразованием Лоренца. Все мировые векторы распадаются на пространственноподобные и временииподобные и обладают в точности вышеопределенными свойствами. Границей являются векторы, соответствующие поступательному движению точки со скоростью света. Выражаясь геометрически, четырехмерный мир распадается: 1) на часть, лежащую „за" O, в которой находятся все точки, исходящие из O; 2) на часть, лежащую „до" O, содержащую все точки, двигающиеся по направлению к O; и наконец 3) на *промежуточную область*, в которой находятся все точки, которые могут быть „одновременными"

[1]) Указанные соотношения справедливы также, как здесь уже было подчеркнуто, и для общего принципа относительности. Только там скорость имеет не постоянное значение c, а переменное. Поэтому вполне возможны скорости бо́льшие, чем 300 000 *км/сек*. Ср. § 11 и 14.

с O. Раздел производится двуполым четырехмерным конусным пространством $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$, состоящим из переднего конуса и заднего конуса. Первый охватывает все точки, которые летят к O со скоростью света, второй—все точки, исходящие из O со скоростью света. Такое подразделение всех, исходящих из одной точки, пространственно-временных векторов годится для любой координатной системы K, K' и т. д.

Все полученные таким образом выводы мы можем целиком отнести к очень важному в *общей* теории относительности случаю, а именно к случаю, когда мировая точка x_1, x_2, x_3, x_4 лежит бесконечно близко к началу координат. Ее координаты или соответственно составляющие *бесконечно малого вектора* будут dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, а пространственно-временное расстояние определится из равенства

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2. \tag{59}$$

Величину ds мы будем считать *линейным элементом* пространственно-временной кривой или *мировой линии*. Мировая линия состоит из любых бесконечно малых пространственно-временных векторов. В зависимости от того, будет ли $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \lesseqgtr dx_4^2$, мы различаем опять пространственно- и времениподобные векторы; для бесконечно малой области, окружающей нашу точку, принятую за начало координат, остается в силе подразделение мира на разделенные „передним" и „задним" конусами времениподобные части, лежащие „до" и „за" от O, и пространственноподобную промежуточную область. Так как ds^2 инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца, то это подразделение снова будет правильным независимо от координатной системы. Мы можем квадрат линейного элемента написать также в виде:

$$ds^2 = dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2); \; dx_4^2 \geqslant dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{60}$$

Здесь годятся те же замечания, что и для равенства (51).

Расстояние ds *для времениподобного вектора* может быть составлено из элементов dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 *одной единственной, любым образом* движущейся точки. Таким образом времениподобный линейный элемент (60) характеризует любое движение какой-нибудь точки.

Элемент *собственного времени* любым образом движущейся точки аналогичен (52); он будет:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} = dt\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}, \tag{61}$$

а для единицы времени, для которой $c = 1$, по аналогии с (54):

$$ds = \sqrt{dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} = dx_4\sqrt{1 - v^2}. \tag{62}$$

Здесь q и соответственно v есть мгновенная скорость точки в той системе, в которой ее движение в данный момент выражается через dx_1, dx_2, dx_3, $dx_4 (= cdt)$.

Собственное время элемента мировой линии есть инвариант преобразования Лоренца [ср. (46)].

§ 5. Геометрические и механические следствия из преобразования Лоренца.

Специальный принцип относительности тождественен с требованием инвариантности законов природы относительно преобразования Лоренца. Все вытекающие из этого преобразования следствия дают нам неизбежно ту физическую картину мира, которую мы должны рассматривать как „верную", если мы встанем на точку зрения специального принципа относительности.

Посмотрим, удерживаются ли эти требования в рамках того, что мы считаем возможным для нашего разума и воспринимаем как реально существующее.

Мы принимаем в классической механике длину (т. е. то, что мы *воспринимаем* как длину стержня или длину прямой линии, начерченной на бумаге) за постоянную величину, независимо от того, измеряли ли мы ее в состоянии покоя или во время движения (ср. стр. 21). Это было допущение; мыслимо также и обратное положение.

По теории относительности имеет место следующее. Пусть стержень, покоящийся в системе K', имеет длину l_0; отложим l_0 на оси x_1', параллельной направлению скорости K' относительно K. Координаты концов стержня будут $x_1^{0\prime}$ и $x_1^{1\prime}$. Тогда имеем:

$$l_0 = x_1^{1\prime} - x_1^{0\prime} = \Delta x_1'. \tag{63}$$

Измеряем длину стержня в системе K приемом, данным на стр. 22. Применим преобразование Лоренца (37), в котором для K время $x_4 = ct$ для обоих концов (координаты которых x_1^0 и x_1^1) имеют одно и то же значение.

Таким образом имеем:

$$x_1^{1\prime} - x_1^{0\prime} = (x_1^1 - x_1^0) : \sqrt{1-\beta^2}; \tag{64}$$

или, если длину стержня в системе K обозначим через l:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{65}$$

l—длина того же стержня в системе K, который в K' имеет длину l_0; стержень движется прямолинейно и равномерно относительно K вдоль своего направления со скоростью v; l и l_0 измерены при этом в системах K и K' одними и теми же масштабами; это надо понимать таким образом, что два масштаба, имеющие одинаковые длины, сохраняют их также в двух различных системах K и K' для находящихся там наблюдателей, если один масштаб покоится в K, другой в K' (ср. стр. 24).

Из (65) следует, что стержень, движущийся относительно K и измеренный из системы K, становится короче в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, если он расположен по *направлению скорости*. *Сокращение Лоренца* (ср. стр. 17) становится таким образом следствием принципа относительности. Чем больше v, тем короче покажется стержень в системе

K; если он будет двигаться со скоростью света, его длина будет равна нулю. Если же, напротив, он будет находиться в покое в системе K, его длина здесь будет l_0. Длина стержня для каждой системы, в которой он покоится,— при непременной согласованности с вышеизложенными положениями относительно масштабов,—есть постоянная величина l_0, которую мы обозначим как длину покоя.

Если при своем движении стержень лежит перпендикулярно к направлению движения, то на основании преобразования Лоренца получится та же самая длина l_0, безразлично, будет ли он измерен из покоящейся системы K или из движущейся вместе со стержнем системы. Всякий, находящийся в любом положении стержень кажется из системы K укороченным настолько, насколько это соответствует составляющей его длины по направлению движения. Отсюда следует также, что в различных системах углы между двумя прямыми имеют, вообще говоря, различные величины.

Если в системе K имеются сначала два одинаковой длины, параллельных и покоящихся масштаба l_1 и l_2, и один из них начинает затем двигаться с постоянной скоростью в направлении своей длины (покоясь, следовательно, в системе K'), то, измеренный в системе K масштабом l_1, он покажется укороченным. Если же в системе K' масштабом l_2 измерить l_1, то, наоборот, l_1 покажется укороченным. Как только оба масштаба в одной и той же системе придут в состояние покоя, они снова становятся одинаковой длины.

Всякое тело, движущееся относительно K так, что оно остается в состоянии покоя в K', становится короче в направлении движения. Измеренный из системы K, его объем выразится через:

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{66}$$

где V_0 обозначает *объем покоя*. Электрон, имеющий в состоянии покоя шарообразную форму, сплющивается при равномерно переносном движении в направлении движения. Таким образом теория относительности непосредственно приводит к форме введенных уже Лоренцом в электродинамику нетвердых электронов [1]); основанные на этом законы движения электронов катодных и β-лучей согласуются с данными опытов (ср. § 9).

Опыт Майкельсона, на котором основано преобразование Лоренца, показывает, что вышеприведенные выводы согласуются с действительностью. В каждой из систем K, K'... скорость света только тогда может иметь постоянное значение c, когда длина указанным образом зависит от той скорости, с которой она движется. Но даже если мы и не будем совсем становиться на точку зрения теории относительности, а посмотрим с точки зрения более старой электронной теории, то и тогда положение, что движущийся в направлении своей длины стержень укорачивается в отношении

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1,$$

[1]) M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. Bd., 3. Aufl. Leipzig 1914, S. 181.

при измерении из покоящейся системы, является необходимым для объяснения опыта Майкельсона (ср. стр. 17).

Это первое вытекающее из преобразования Лоренца требование относительности длин имеет глубокое значение для *геометрии*. Мы требуем от геометрических положений, чтобы они соответствовали действительности. Следовательно, и геометрические отрезки должны иметь различные длины, в зависимости от того, покоятся ли они в системе K или движутся прямолинейно и равномерно относительно нее. Величина углов, очертание геометрических плоских или объемных форм зависят от состояния движения.

Все положения эвклидовой геометрии плоскости и пространства справедливы исключительно для геометрических фигур, находящихся в покое друг относительно друга.

Второе требование преобразования Лоренца относится к *времени*. Уже раньше было установлено (стр. 21), что в теории относительности время, в противоположность классической физике, является понятием *относительным*. Мы можем теперь вывести точные соотношения между временем в различных системах. В каждой системе время может быть определено любыми из всех часов, которые покоятся и идут в этой системе синхронно друг с другом. Таким образом нам всегда надо наблюдать только одни часы, которые покоятся в начале координатных систем K, K'...

Пусть покоящиеся в K' часы идут от t_0' до $t_1' = t_0' + \Delta t'$; соответственная разность координат времени будет тогда $\Delta x_4' = x_4^{1'} - x_4^{0'}$. Пространственные координаты в K' для t_0' и t_1' будут равны нулю. Преобразование Лоренца дает, следовательно, для разности координат времени в K:

$$\Delta x_4 = x_4^1 - x_4^0 = \frac{\Delta x_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{67}$$

или для разности показаний часов:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{68}$$

$\Delta t'$ представляет собой разность времени между двумя событиями (положениями стрелки часов) в системе K', движущейся относительно K. В течение этого времени часы, покоящиеся в K, уходят на Δt вперед. При этом в системах K и K' время измерено двумя одинаково идущими часами (ср. стр. 24); так же как и для масштабов будем считать, что пара измеряющих время часов, которые идут одинаково, пока они покоятся в системе K, будут и тогда итти одинаково, если одни часы будут покоиться в K, а другие в K', для наблюдателей, находящихся соответственно в K или в K'. Иначе обстоит дело с точки зрения равенства (68), если сравнивать часы, покоящиеся в системе K' (поставленные вместо какого-нибудь равномерно происходящего события), с подобными же часами в системе K. $\Delta t > \Delta t'$. Движущиеся с K' часы идут, следовательно, *медленней*; для наблюдателя в системе K в продолжение всего движения они будут отставать от часов, покоящихся в системе K. Событие в K'

происходит медленнее, чем в K. Размер отставания опять зависит от скорости системы K' относительно K. Чем больше скорость, тем медленнее идут часы; при $v=c$ они остановятся. Если же часы в K придут в состояние покоя, то их ход будет опять такой же, как и ход часов, которые все время покоились в K. Однако, разница в показании часов, которая обусловливается движением одних часов, всегда существует.

Допустим, что в системе K помещается пара одинаково идущих (сначала покоящихся) часов A и B; начнем двигать B с постоянной скоростью прямолинейно сначала от A и затем назад к A; тогда во время движения часы B будут все время отставать и при возвращении назад отстанут от A. То же получится, если мы будем двигать A от B и снова назад к B. A отстанет от B. Это кажется *парадоксом*. Рассмотрим еще раз первый случай, когда часы B движутся относительно A. Так как движение обоих часов относительное, то мы с тем же успехом можем сказать, что A движется относительно B, и тогда мы имели бы второй случай. Таким образом часы B должны были бы отставать от A и одновременно A отставать от B, что невозможно.

В действительности же, однако, оба явления в корне различны. В первом случае некоторая сила сообщает часам B ускорение по направлению от A до тех пор, пока не будет достигнута постоянная относительная скорость; затем при действии некоторой другой ускоряющей силы в обратном направлении изменится и направление скорости на обратное, и, наконец, еще одна ускоряющая сила приведет часы B в состояние покоя. На A действующие силы не влияют. Во втором случае, напротив, силы действуют на A и не влияют на B. Существует, следовательно, два различных физических процесса, которые в зависимости от того, как они протекают по отношению к относительному положению обоих часов, приводят к различным результатам.

Более точное объяснение вызываемого ускорением действия на ход часов будет возможно дать только в рамках общей теории относительности (ср. II часть, § 10). Здесь можно только еще отметить, что *при* относительном *прямолинейном и равномерном движении* от A к B, как в первом, так и во втором процессе часы A для наблюдателя в B и часы B для наблюдателя в A будут отставать; это единственное следствие, которое можно вывести из специального принципа относительности и преобразования Лоренца, так как преобразование Лоренца содержит исключительно утверждение о времени в системах, которые находятся друг относительно друга в равномерно-переносном движении.

Мы можем также и другим путем установить, что отставание движущихся часов относительно покоящихся есть объективно существующее явление. Представим себе две мировых точки 1 и 2, соединенные одной мировой линией (ср. стр. 37). Для начала пусть это будет *прямая мировая линия*. Выберем нашу координатную систему так, чтобы мировая прямая совпадала с осью x_4 (ср. стр. 30), т. е. мы будем наблюдать часы во время покоящиеся в системе K; точки 1 и 2 будут тогда заданы начальным и конечным положением стрелки часов. Им способствуют две точки на оси x_4 нашей системы K, из которых одна может совпадать с нулевой точкой. Собственное время линии мира на основании равенства (61) будет:

$$\tau_1 = \frac{1}{c} \int_1^2 dx_4, \tag{69}$$

причем интеграл надо брать вдоль оси x_4.

Перейдем от точки 1 к точке 2 в той же только что выбранной системе координат K, но только по кривому пространственно-временному пути. Другими словами, мы будем наблюдать с системы K часы, которые покоятся в K в точке 1, движутся затем взад и вперед относительно K и, наконец, снова приходят в состояние покоя в точке 2 системы K. Собственное время каждого элемента линии мира определится из равенства (61); общее собственное время для кривой линии мира будет, следовательно [1]):

$$\tau_2 = \frac{1}{c} \int_1^2 \sqrt{dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} \tag{70}$$

При этом для этой линии мира величина $\frac{1}{c} \int_1^2 dx_4$ та же, что и для прямой мира, потому что она обозначает расстояние x_4 точек 1 и 2, т. е. временное расстояние обеих точек, измеренное часами, покоящимися в системе K.

Но тогда $\tau_2 < \tau_1$. *Прямая линия мира имеет, следовательно, самое длинное собственное время.* Это соответствует показанию часов, покоящихся в системе K. Всякие другие часы, которые совершают вышеописанное движение относительно K, при возвращении к первым часам показывают более медленное протекание времени, следовательно они отстали относительно первых часов.

Вытекающие из преобразования Лоренца следствия для хода часов годятся, конечно, для течения любых процессов. Эйнштейн [2]) дал пример, особенно ярко иллюстрирующий эти отношения. „Если бы поместить живой организм в коробку и заставить его совершать те же движения взад и вперед, которые перед этим совершали часы, то можно было бы достичь того, что этот организм, после сколько угодно длинных полетов, сколько угодно мало изменившийся, снова возвратился бы на свое первоначальное место, в то время как совершенно такие же организмы, остававшиеся в покое на первоначальных местах, давно дали место новым поколениям. Для двигавшегося организма долгое время путешествия было одним моментом в том случае, если движение происходило со скоростью, близкой к скорости света".

Сравнение второго, выдвинутого преобразованием Лоренца, требования с действительностью в общем невозможно, потому что

[1]) Здесь не принимается во внимание влияние ускорения на движущиеся часы.
[2]) Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zürich. Bd. 56. 1911, S. 12. Zürich 1912.

встречающиеся в природе скорости v в большинстве случаев значительно меньше скорости света. Выведенные для времени результаты согласуются, конечно, с данными опыта Майкельсона, который является основой преобразования Лоренца. Большие скорости находим мы, однако, в различных излучениях электрической природы, и здесь — возможно — в недалеком будущем удастся провести проверку теории. Атом есть не что иное, как часы; период его колебания может быть принят за единицу. Два *одинаковых* атома, покоящихся или движущихся, имеют *один и тот же период колебания*, выраженный в *собственном времени*. Сравнение периода колебания покоящегося и движущегося атома в одной и той же системе должно таким образом дать требуемую преобразованием Лоренца разницу.

Третье требование специального принципа относительности приводит к *эйнштейновской теории сложения скоростей*. Оно доступно экспериментальной проверке.

В классической механике действительна теорема сложения (3) или (16). Там мы складываем друг с другом скорость материальной точки в K' и скорость самой системы K' относительно K как две однородные величины и получаем скорость в системе K. В теории относительности длины и время меняются, если мы из K наблюдаем процессы в K'; можно, следовательно, ожидать, что обычная теорема сложения больше не будет справедливой.

При выводе новой теоремы возьмем для большей наглядности старые обозначения пространственно-временных координат и положим составляющие скоростей q в системе K равными:

$$q_x = \frac{dx}{dt}, \quad q_y = \frac{dy}{dt}, \quad q_z = \frac{dz}{dt}; \tag{71}$$

соответственно будут:

$$q_x' = \frac{dx'}{dt'}, \quad q_y' = \frac{dy'}{dt'}, \quad q_z' = \frac{dz'}{dt'} \tag{72}$$

скорости в системе K'.

Из преобразования Лоренца (42) следует:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dt}{dt'}, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dt'}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dt'}, \\ \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Следовательно:

$$q_x' = \frac{q_x - v}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}, \quad q_y' = \frac{q_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}, \quad q_z' = \frac{q_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}, \tag{74}$$

или соответственно из (43):

$$\mathfrak{q}_x = \frac{\mathfrak{q}_x' + v}{1 + \frac{v\mathfrak{q}_x'}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}_y = \frac{\mathfrak{q}_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\mathfrak{q}_x'}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}_z = \frac{\mathfrak{q}_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\mathfrak{q}_x'}{c^2}}. \tag{75}$$

Равенства (74) и (75) представляют собой *теорему сложения Эйнштейна*; они заменяют положение (16), которое в принятых здесь обозначениях гласит: $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + \mathfrak{v}$. Они справедливы для указанного на стр. 24 специального выбора координатных систем.

Для абсолютных значений мы имеем равенство [1]):

$$q^2 = \frac{q'^2 + v^2 + 2q'v\cos\vartheta' - \left(\frac{q'v}{c}\sin\vartheta'\right)^2}{\left(1 + \frac{q'v}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2} \tag{76}$$

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\sqrt{\mathfrak{q}_y'^2 + \mathfrak{q}_z'^2}}{\mathfrak{q}_x}.$$

Ограничимся процессом, распространяющимся вдоль оси x, для которого, следовательно, $\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z' = 0$ и $\mathfrak{q}_z = \mathfrak{q}_z' = 0$; в этом случае останется только первое из равенств (74) или первое из равенств (75).

Попробуем проверить справедливость наших соотношений на *опыте Физо*.

В покоящейся среде, показатель преломления которой n, луч света обладает скоростью $\frac{c}{n}$; если среда будет двигаться со скоростью v в направлении светового луча или в противоположном направлении, то скорость света относительно координатной системы наблюдателя, по отношению к которой движется среда, будет

$$\text{не } \frac{c}{n} \pm v,$$

как следовало бы ожидать по теореме сложения классической механики, а как показывает опыт,

$$\frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \text{ где } \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

есть френелевский коэффициент увлечения.

Этот результат является непосредственным следствием из равенства (75). Скорость v есть скорость нашей системы K' (= движущейся среды) относительно K (= покоящегося наблюдателя). Скорость света в K' будет

$$\mathfrak{q}_x' = \frac{c}{n}.$$

---

[1]) Равенство (76) получается после возведения в квадрат и сложения (75). Ср. A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, § 5 (Ann. d. Phys. Bd. 17, 1905) или Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip Leipzig 1921, или также M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, Bd. I.

Отсюда следует, в зависимости от того, имеет ли скорость света то же направление, что и q_x', или противоположное, на основании равенства (75):

$$q_x = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{cn}} = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{77}$$

Здесь отброшены члены второго порядка по отношению к $\frac{v}{c}$ как очень малые величины по сравнению с членами первого порядка. *Опыт Физо является*, следовательно, *экспериментальным подтверждением эйнштейновской теоремы сложения скоростей, а вместе с тем и преобразования Лоренца.*

Следует еще раз отметить, что электронная теория также в состоянии объяснить опыт Физо. При этом существенным является допущение, что для основных уравнений электронной теории имеется преимущественная система, а именно покоящийся эфир[1]). Поэтому долгое время этот опыт рассматривался как доказательство существования покоящегося эфира. Однако, наша теорема сложения показывает, что это допущение не является вовсе необходимым для объяснения опыта Физо. Таким образом нет противоречия между опытами *Майкельсона и Физо* (ср. стр. 17).

Сделаем еще некоторые выводы из первого из уравнений (75), считая опять процесс движения параллельным оси x.

Пусть событие происходит в системе K' со скоростью $q_x' < c$: пусть также относительная скорость обеих систем (K и K') будет $v < c$. Обе скорости имеют одинаковое направление.

Положим:

$$q_x' = c - k, \quad v = c - l, \quad k \text{ и } l > 0. \tag{78}$$

Тогда на основании равенства (75) „сумма" обеих скоростей в K будет

$$q_x = c\,\frac{2c - k - l}{2c - k - l + \frac{kl}{c}} < c. \tag{79}$$

Две скорости, меньшие, чем скорость света, из которых одна относится к событию в системе K', другая к самой системе K', сложенные в системе K, дают опять скорость, меньшую скорости света.

Положим $k = 0$, тогда имеем $q_x = c$, — само собой понятное следствие преобразования Лоренца из данных предположений. Но и для $l = 0$ также $q_x = c$. Скорость, меньшая скорости света, сложенная со скоростью света, опять равняется скорости света. Отсюда опять видно, также как на стр. 17, что скорость света является предельной скоростью, соответствующей бесконечно большой скорости в классической механике.

---

[1]) Ср. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, 2. Bd. 3. Aufl. S. 295.

Если же складывать, напротив, две скорости в одной и той же системе, например, наблюдать распространение света в системе K относительно движущегося в системе K тела, то действительна теорема сложения классической механики. При противоположных направлениях обоих движений получается относительная скорость, бо́льшая чем c. Но при этом каждая скорость наблюдается порознь; следовательно, нет противоречия с положением, что при процессах движения материи или энергии в природе не существует скоростей, бо́льших скорости света.

Преобразование Лоренца привело таким образом к ряду следствий, которые, хотя и необычны, однако не противоречат логически последовательному рассуждению. Они согласуются с явлениями природы и дают возможность проще описать такие опыты как Майкельсона и Физо (потому что исходят из *одного* принципа), чем это делает электронная теория.

Более глубокое основание того, что явления электричества можно одинаково хорошо изобразить как с помощью специальной теории относительности, так и с помощью электронной теории, заключается в том, что обе теории принципиально тождественны. Основные уравнения электродинамики в форме Максвелл-Лоренца подчиняются специальному принципу относительности; следовательно, все явления, объясняемые этими уравнениями, могут быть объяснены также и с точки зрения теории относительности.

Однако, прежде чем приступить к доказательству инвариантности основных уравнений электродинамики относительно преобразования Лоренца, нам придется познакомиться с необходимыми для этого доказательства математическими вспомогательными средствами. Обратимся сначала еще раз к более старому векторному анализу.

§ 6. Обзор более старого векторного и тензорного анализа. Основные уравнения электродинамики.

Понятие *вектора*, так же как и теоремы об умножении векторов со скалярами и о сложении векторов, были уже изложены в § 1 (стр. 12) и 13). Теперь нам придется продолжить наши занятия векторным анализом [1]).

Выведем прежде всего теоремы об *умножении векторов*. Мы знаем в физике *два рода* произведений векторов.

Произведение вектора силы ($\mathfrak{a}$) на вектор пути ($\mathfrak{b}$) мы называем работой. Если направления силы и пути образуют между собой угол ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}$), то работа будет:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{80}$$

[1]) Здесь могут быть даны только важнейшие результаты. Для более подробных занятий можно рекомендовать напр. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, 3. Aufl., Leipzig 1913 или S., Valentiner, Vektoranalysis, Sammlung Göschen № 354. Книга Gans'а содержит все важнейшие уравнения электродинамики, на которые в дальнейшем можно будет тоже только сослаться. Подробно разбирает векторный анализ C. Runge, Vektoranalysis, Bd. I. Die Vektoranalysis des dreidimensionalen Raumes. Leipzig 1919.

Работа есть скаляр; поэтому $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ называется *скалярным произведением* обоих векторов. Оно определяется уравнением (80). Отсюда следует, что $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.

Мы назовем дальше произведение вектора силы ($\mathfrak{a}$) на вектор плеча рычага ($\mathfrak{b}$) статическим моментом или моментом вращения. Если оба вектора образуют опять угол ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}$), то момент вращения равняется:

$$\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\dot{\mathfrak{c}}. \tag{81}$$

Момент вращения есть вектор; поэтому $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ называется векторным произведением $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{b}$. Его определение дается уравнением (81). Абсолютное значение вектора $\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ будет $|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Направление его будет перпендикулярно к плоскости $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, и именно таково, что векторы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, в написанной здесь последовательности образуют правую систему координат. При этом мы переходим от $\mathfrak{a}$ к $\mathfrak{b}$ через самое короткое вращение. В равенстве (81) это *направление* обозначено через $\dot{\mathfrak{c}}$; $\dot{\mathfrak{c}}$ обозначает вектор заданного направления, длина которого $= 1$ (единичный вектор). При образовании векторного произведения $[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$, векторы в порядке $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ должны дать правую систему; направление $\mathfrak{c}$ изменилось на противоположное. Таким образом

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}\mathfrak{b}].$$

Векторное произведение будет вектором совершенно другого рода, чем прежде определенные векторы. В то время как последние (*полярные* векторы) меняют знак при перемене направления всех осей координатной системы на прямопротивоположное у векторов типа векторных произведений (*аксиальные* векторы) знак не меняется.

Скалярное и векторное произведение двух векторов может быть также дано с помощью их составляющих.

Если $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ — три взаимно перпендикулярные единичные векторы, определяющие декартову систему координат, то на основании теоремы сложения векторов (стр. 14) каждый вектор можно представить в виде:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z\mathfrak{k}, \tag{82}$$

где $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ — составляющие вектора в нашей декартовой системе координат.

Но из уравнений (80) и (81) следует:

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1, \quad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0 \tag{83}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0, && [\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = -[\mathfrak{j}\mathfrak{i}] = \mathfrak{k}, \\ &[\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = -[\mathfrak{k}\mathfrak{j}] = \mathfrak{i}, && [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = -[\mathfrak{i}\mathfrak{k}] = \mathfrak{j}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Поэтому, если мы векторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ перемножим скалярно и затем векториально, то:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z\mathfrak{k})\cdot(\mathfrak{b}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{b}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{b}_z\mathfrak{k}) = \mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z \tag{85}$$

и

$$\left.\begin{aligned}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] &= [\mathfrak{a}_x\mathfrak{i}+\mathfrak{a}_y\mathfrak{j}+\mathfrak{a}_z\mathfrak{k},\ \mathfrak{b}_x\mathfrak{i}+\mathfrak{b}_y\mathfrak{j}+\mathfrak{b}_z\mathfrak{k}] = \\ &= (\mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_z-\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_y)\mathfrak{i}+(\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_x-\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_z)\mathfrak{j}+(\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_y-\mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_x) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \\ \mathfrak{b}_x & \mathfrak{b}_y & \mathfrak{b}_z \end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Величины $(\mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_z-\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_y)$ и т. д. являются составляющими векторного произведения; их обозначают также $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_x$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_y$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_z$.

Наиболее важным для теории относительности является выражение скалярного произведения через составляющие (85). Если мы переходим от нашей декартовой системы координат через вращение в другую, в которой составляющие векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ обозначены через $\mathfrak{a}_x'$, $\mathfrak{a}_y'$, $\mathfrak{a}_z'$ и $\mathfrak{b}_x'$, $\mathfrak{b}_y'$, $\mathfrak{b}_z'$, то:

$$\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x+\mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y+\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z=\mathfrak{a}_x'\mathfrak{b}_x'+\mathfrak{a}_y'\mathfrak{b}_y'+\mathfrak{a}_z'\mathfrak{b}_z'. \tag{87}$$

Скалярное произведение инвариантно относительно вращения декартовой координатной системы: его величина есть *инвариант.* Справедливость этого положения вытекает из основного равенства (80).

Мы можем еще и следующим путем убедиться в этом.

При вращении из одной *ортогональной* системы в другую для координат точки действительны линейные однородные уравнения преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z=\frac{\partial x'}{\partial x}x+\frac{\partial x'}{\partial y}y+\frac{\partial x'}{\partial z}z \\ y' &= \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z=\frac{\partial y'}{\partial x}x+\frac{\partial y'}{\partial y}y+\frac{\partial y'}{\partial z}z \\ z' &= \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z=\frac{\partial z'}{\partial x}x+\frac{\partial z'}{\partial y}y+\frac{\partial z'}{\partial z}z \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

причем между коэффициентами должны существовать условия ортогональности:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{m=3}\alpha_{mn}^2=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3) \\ &\sum_{m=1}^{m=3}\alpha_{mn}\alpha_{mo}=0 \quad (n, o=1,\ 2,\ 3;\ \ n\neq o) \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Соответствующие равенства годятся также для коэффициентов $\dfrac{\partial x'}{\partial x}$ и т. д., которые во всем пространстве *постоянны.*

Следствием этих условий ортогональности будет

$$x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2,$$

или для координат двух различных точек:

$$x_1'x_2'+y_1'y_2'+z_1'z_2'=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Но составляющие вектора $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ и $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{b}_y$, $\mathfrak{b}_z$ представляют собой не что иное, как координаты двух точек в декартовой системе

Следовательно, составляющие вектора преобразуются согласно уравнениям (88) при соблюдении условий ортогональности (89). Поэтому скалярное произведение $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_z$ инвариантно. Пусть в какой-нибудь *одной* декартовой координатной системе *все* составляющие вектора равняются нулю, т. е.:

$$\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_y = \mathfrak{a}_z = 0. \tag{90}$$

Пусть $\mathfrak{b}$ будет какой-нибудь любой другой вектор, составляющие которого отличны от нуля; тогда в нашей координатной системе $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$. Это соотношение годится одновременно для всех декартовых координатных систем, которые получаются из одной путем вращения. Так как наш вектор $\mathfrak{b}$ в другой системе имеет координаты $\mathfrak{b}_x'$, $\mathfrak{b}_y'$, $\mathfrak{b}_z'$, вообще говоря отличные от нуля, то следовательно:

$$\mathfrak{a}_x' = \mathfrak{a}_y' = \mathfrak{a}_z' = 0. \tag{91}$$

Если составляющие вектора в *одной* системе координат равны нулю, то они будут равняться нулю,—как это вытекало уже из определения вектора на стр. 12,—и во всякой другой системе, получающейся из первой путем вращения. Мы можем, так же как на стр. 12, равенства (90) и (91) заменить следующим:

$$\mathfrak{a} = 0. \tag{92}$$

Правильность этого положения связана с инвариантностью равенства (87) и годится таким образом прежде всего только для декартовых систем. Распространение его на более общие координатные системы будет дано только в следующем параграфе. Условие инвариантности (87) можно использовать для определения вектора. Три любые величины или аналитические выражения только тогда образуют вектор, когда они с составляющими произвольно выбранного вектора удовлетворяют равенству (87). Если, например, *закон природы* задан уравнением (92) или тремя уравнениями (90), то при преобразованиях (88) и (89),—мы обращаем внимание на выводы стр. 13,—он сохраняет свою форму. $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ обозначают при этом составляющие вектора во *всякой* системе, определяемой уравнениями преобразования. *Закон природы, устанавливаемый путем приравнивания нулю всех составляющих трехмерного вектора, инвариантен относительно однородных линейных и ортогональных преобразований.* Доказательство инвариантности какого-нибудь закона природы оказывается таким образом осуществленным, если закон этот сформулирован с помощью векторов. Примером может служить основной закон механики (14), с которым мы уже познакомились.

Все вышеизложенное годится, конечно, также и для законов, которые состоят в приравнивании двух векторов или соответствующих пар их составляющих, потому что эти законы всегда можно выразить в форме (92) и (90).

Дифференцируя скаляры или составляющие вектора, мы можем получить *новые* векторы и скаляры.

Пусть φ — *скаляр. Градиентом* φ обозначим вектор вида

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathfrak{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathfrak{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathfrak{k}; \tag{93}$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ будут, следовательно, составляющие вектора, значение которых мы лучше всего объясним следующим образом.

Представим себе скалярное поле в пространстве (напр. температурное поле); φ будет различно от места к месту, однако его значения не зависят от координатной системы. Следовательно:

$$\varphi = f(x, y, z) = f'(x', y', z') \tag{94}$$

есть *инвариант*; координаты со значками и без значков представляют собой тождественные точки в различных системах.

При переходе от одной точки к какой-нибудь соседней φ будет меняться, притом различным образом, в зависимости от направления передвижения. Для *одного* направления изменение будет наиболее быстрым. Предс авим себе построенными поверхности $\varphi = f(x, y, z) =$ const, т. е. *поверхности уровня*. Тогда направление самого быстрого изменения будет перпендикулярно к поверхности уровня, проходящей через точку x, y, z; направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к поверхности $\varphi =$ const, как показывает аналитическая геометрия, определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos(ny) &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos(nz) &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Величина самого быстрого изменения относительно бесконечно-малой единицы длины для определенного только что направления выразится отношением $\frac{d\varphi}{dn}$.

Таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dn} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dn}, \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(nz), \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Если наибольшее изменение φ в каком-нибудь месте, отнесенное к единице длины, мы примем за вектор, направление которого задано равенством (95) и абсолютное значение равенством (96), то составляющими этого вектора будут частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Следовательно, наш вектор наибольшего изменения скаляра φ и есть как раз градиент, непосредственно определяющийся уравнением (93). Это определение прежде всего годится для всякой декартовой системы. В дальнейшем мы увидим (§ 7), что пригодность этого определения „grad" может быть распространена еще и дальше. Условно мы можем рассматривать производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и т. д. как произведение скаляра φ на дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ и считать последние составляющими вектора.

Составим дифференциал:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz; \tag{97}$$

его можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: grad φ и

$$(dx \cdot \mathfrak{i} + dy \cdot \mathfrak{j} + dz \cdot \mathfrak{k}).$$

Величина изменения скаляра φ при движении в любом направлении будет таким образом опять скаляр.

Рассмотрим также еще одно другое выражение: пусть будут $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ составляющие вектора $\mathfrak{a}$ в какой-нибудь декартовой координатной системе.

Тогда:

$$\operatorname{div} \mathfrak{a} = \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z} \tag{98}$$

есть скаляр; мы называем его *дивергенцией* (расхождением) вектора $\mathfrak{a}$. Смысл его также очень простой. Если через S обозначим какой-нибудь объем, через σ поверхность этого объема, то [1]):

$$\int_S \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} dS = \int_S \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int_\sigma \mathfrak{a}_x\, dy\, dz = -\int_\sigma \mathfrak{a}_x \cos(nx)\, d\sigma. \tag{99}$$

При этом интегрирование надо произвести по всему объему и по всей поверхности; угол (nx) есть угол между положительной осью x и *внутренней* нормалью к поверхности $d\sigma$. Соответствующие соотношения будут и для $\mathfrak{a}_y$ и $\mathfrak{a}_z$.

[1]) Ср. напр. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1905. S. 29.

Таким образом имеем:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_S \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z}\right) dS = \\ = -\int\limits_s [\mathfrak{a}_x \cos(nx) + \mathfrak{a}_y \cos(ny) + \mathfrak{a}_z \cos(nz)] d\sigma = -\int\limits_\sigma \mathfrak{a}_n\, d\sigma,\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

или

$$\int\limits_S \operatorname{div} \mathfrak{a}\, dS = -\int\limits_\sigma \mathfrak{a}_n\, d\sigma. \tag{101}$$

$\mathfrak{a}_n$ есть составляющая вектора $\mathfrak{a}$ в месте $d\sigma$ поверхности, отнесенная к направлению внутренней нормали к $d\sigma$. Равенство (101) дает преобразование интеграла по объему в интеграл по поверхности; мы называем это равенство *формулой Гаусса* (*или теоремой Гаусса*) [1]).

С помощью этой формулы дивергенция получает следующее значение. Пусть $\mathfrak{a}_n$ будет некоторое количество жидкости, протекающее по направлению нормали в единицу времени через единицу поверхности. Интеграл по поверхности в равенстве (101) выражает тогда все количество жидкости, вытекающее из поверхности S. $\operatorname{div} \mathfrak{a}$ представляет собой, следовательно, количество жидкости, вытекающей из бесконечно малой единицы объема в единицу времени. Мы можем также написать:

$$\operatorname{div} \mathfrak{a} = -\lim_{dS=0} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{a}_n\, d\sigma}{dS}. \tag{102}$$

$\operatorname{div} \mathfrak{a}$ представляет собой интеграл по поверхности бесконечно малого объема, взятого за единицу объема.

Так как интеграл по поверхности не зависит ни от какой системы координат, то равенства (101) и (102) годятся для любой системы.

Введем, наконец, еще одну — третью — величину. Если $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, \mathfrak{a}_z$ будут опять составляющие вектора $\mathfrak{a}$ в декартовой системе координат, то новый вектор, *вихрь* (ротор) $\mathfrak{a}$, в той же системе определяется равенством:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathfrak{a} = \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k} = \\ = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Вихрь $\mathfrak{a}$ представляет собой, таким образом, аксиальный вектор.

При помощи *теоремы Стокса*

$$\int\limits_s \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} = \int\limits_\sigma \operatorname{rot}_n \mathfrak{a}\, d\sigma, \tag{104}$$

[1]) Эта теорема называется в русской литературе весьма часто теоремой Гаусса-Остроградского.

где первый интеграл взят по кривой s, ограничивающей часть поверхности σ, мы можем определить и вихрь или его составляющие в любом направлении n независимо от координатной системы следующим образом:

$$\operatorname{rot}_n \mathfrak{a} = \lim_{d\sigma \to 0} \int_S \frac{\mathfrak{a}\, d\mathfrak{s}}{d\sigma}. \tag{105}$$

Из вышеприведенных основных равенств (93), (98) и (103), определяющих градиент, расхождение и вихрь, путем простых вычислений можно получить следующие соотношения:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = 0 \tag{106}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \tag{107}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi \tag{108}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{a} - \Delta\mathfrak{a}. \tag{109}$$

При этом:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

а $\Delta\mathfrak{a}$ есть вектор с составляющими

$$\Delta\mathfrak{a}_x = \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial z^2}$$

и соответствующими $\Delta\mathfrak{a}_y$ и $\Delta\mathfrak{a}_z$.

Теперь обратимся к уравнениям электродинамики и именно к уравнениям *электронной теории Лоренца*. Они должны дать пример применения векторного анализа в теоретической физике и одновременно послужить основой для доказательства, что теория электричества согласуется со специальным принципом относительности. Мы покажем (§ 8), что нижеприведенные уравнения инвариантны относительно преобразования Лоренца.

Уравнения поля в электронной теории гласят:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{110}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \rho\mathfrak{q}\right), \tag{111}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \rho, \tag{112}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0. \tag{113}$$

Эти уравнения являются основой математического описания всех электромагнитных процессов в вакууме, частично, конечно, при условии привлечения вспомогательных гипотез. Векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ представляют собой по величине и направлению электрическое и магнитное напряжение поля, т. е. силу, действующую в каком-нибудь месте пространства на единицу количества электричества и магнетизма.

Уравнение (110), которое точно так же, как и (111), заключает в себе три уравнения для отдельных координат [1]), дает дифференциальную зависимость напряжения электрического поля, вызванного изменением во времени напряжения магнитного поля в том же самом месте.

Обратно, уравнение (111) выражает магнитное напряжение поля как функцию изменения во времени $\mathfrak{E}$. Одновременно оно определяет часть напряжения магнитного поля $\mathfrak{H}$, возникшую вследствие движения электричества (т. е. электронов), как функцию электричества с плотностью ρ, движущегося конвекционно со скоростью $\mathfrak{q}$. Уравнение (112) дает зависимость между напряжением электрического поля, как бы выходящего из единицы объема (поток поля мы можем наглядно представить себе также с помощью некоторого количества силовых линий, выходящих из единицы объема), и находящимся в этом же месте электричеством плотности ρ. Равенство $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ говорит, что в свободном от электричества месте входящее в бесконечно-малую единицу объема напряжение поля равно исходящему.

Соответственно уравнение (113) указывает на то, что свободного магнетизма вообще нет и что $\mathfrak{H}$ всегда появляется только вследствие описанных уравнением (111) процессов. К уравнениям поля от (110) до (113) прибавляется еще основное уравнение:

$$\mathfrak{F} = \rho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right), \tag{114}$$

так же как и два уравнения:

$$W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2), \tag{115}$$

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{116}$$

Величина $\mathfrak{F}$ представляет собой *электромагнитную силовую плотность*; W — *плотность электромагнитной энергии*; $\mathfrak{S}$, вектор Пойнтинга, — *плотность потока энергии*. $\mathfrak{F}$ относится к единице объема и времени, W к единице объема. $\mathfrak{S}$, наконец, к единице поверхности и к единице времени в „покоящейся“ системе.

Уравнение (114) для плотности $\mathfrak{F}$ *пондеромоторной силы* является соединением закона Кулона ($\mathfrak{F} = \rho\mathfrak{E}$) и закона Био-Савара $\left(\mathfrak{F} = \frac{\rho}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right)$. Значение уравнения (115) выяснится позднее (§ 8). К уравнению (116) надо заметить, что $\mathfrak{S}_n d\sigma$ представляет собой электромагнитную энергию, протекающую в единицу времени в направлении n через элемент поверхности $d\sigma$.

На ряду с векторами применяются в физике аналогичные им величины, служащие, как и векторы, для определения состояния материи, которые мы называем *тензорами*. Каждый тензор определяется *девятью составляющими*. Если от точки к точке тензор имеет опре-

[1]) В § 8 уравнения от (110) до (118) будут описаны подробно.

деленное значение, то существующая таким образом совокупность тензоров называется *тензорным полем*.

Такие тензорные величины, характеризующие состояние вещества или какие-нибудь физические явления, и их составляющие в зависимости от выбора координатной системы имеют разные значения. Эти разные значения получаются друг из друга с помощью формул преобразования, которые нам еще неизвестны и которые должны быть точно указаны. Аналитически же, так же как и составляющие вектора, эти величины сохраняют свою форму для каждой (декартовой) системы координат. При тензорном поле тензоры являются функциями координат, которые существуют независимо ни от какой особой системы.

Рассмотрим сначала, как *пример тензора*, действующую на бесконечно малый объем упругого тела силу *упругого давления или напряжения* [1]; так же как и вектор силы, она не зависит от координатной системы. Силу, действующую на бесконечно малую единицу объема, можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ K_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ K_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

При этом величины X_x, X_y и т. д. будут девять составляющих *тензора упругого напряжения*, определяющих напряжение. Их можно рассматривать как силы сжатия и сдвига, действующие на поверхностях, ограничивающих единицу объема, и привести, например, к виду

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -2K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right) \\ Y_y &= -2K\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + \Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right) \\ Z_z &= -2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right) \\ Y_z = Z_y &= -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \\ Z_x = X_z &= -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\ X_y = Y_x &= -K\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

ξ, η, ζ суть бесконечно малые смещения точки x, y, z, на которую действует сила упругого сжатия. K и Θ — постоянные, зависящие от природы тела. „Как вытекает из вывода этих уравнений, они остаются неизменными для каждой системы координат" (Кирхгоф).

[1] Ср. напр. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 11. Vorlesung, или H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, 2. Bd., § 23 und 24.

Теперь мы дадим общее *определение тензору* соответственно данному на стр. 49 определению вектора.

Если девять величин:

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{a}_{xx} & \mathfrak{a}_{xy} & \mathfrak{a}_{xz} \\ \mathfrak{a}_{yx} & \mathfrak{a}_{yy} & \mathfrak{a}_{yz} \\ \mathfrak{a}_{zx} & \mathfrak{a}_{zy} & \mathfrak{a}_{zz} \end{matrix}\right\} \tag{119}$$

имеют такое свойство, что выражение:

$$\sum_{i,k} \mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_{xx}\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_{xy}\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_{xz}\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_z + \quad \ldots \tag{120}$$

есть инвариант относительно любого вращения декартовой системы координат, причем $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — произвольно выбранные векторы, то величину (119) мы называем *тензором*; отдельные составляющие — *составляющие тензора*. Они преобразуются по уравнениям, которые вытекают из инвариантности (120) [1].

Если в уравнении (120) мы соединим члены с $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{b}_y$, $\mathfrak{b}_z$, то мы сможем тензор определить также тем, что его составляющие с составляющими вектора $\mathfrak{a}$ соединяются в три величины:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_{xx}\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{yx}\mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{zx}\mathfrak{a}_z &= \mathfrak{t}_x \\ \mathfrak{a}_{xy}\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{yy}\mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{zy}\mathfrak{a}_z &= \mathfrak{t}_y \\ \mathfrak{a}_{xz}\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{yz}\mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{zz}\mathfrak{a}_z &= \mathfrak{t}_z, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

которые являются составляющими нового вектора $\mathfrak{t}$. При этом определении следует обратить внимание на аналогию между (121) и (117).

Что определяемые как тензоры величины имеют в каждой системе одну и ту же аналитическую форму, вытекает из следующих соображений.

Дадим составляющим тензора значения:

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{c}_i\mathfrak{d}_k \quad (i,\ k = x,\ y,\ z), \tag{122}$$

где $\mathfrak{c}_i$ и $\mathfrak{d}_k$ являются составляющими вектора; тогда мы получим тензор специального вида. В тензорном характере величины (122) мы убеждаемся путем подстановки (122) в (121). Для первого уравнения получаем например:

$$\mathfrak{d}_x(\mathfrak{a}_x\mathfrak{c}_x + \mathfrak{a}_y\mathfrak{c}_y + \mathfrak{a}_z\mathfrak{c}_z) = \mathfrak{t}_x; \tag{123}$$

выражение в скобках есть инвариант.

Если даны девять *любых* величин $\mathfrak{a}_{ik}$, удовлетворяющих условиям (121), то вообще их нельзя представить в виде (122).

Однако, каждый тензор можно следующим образом свести к ряду составляющих вектора. В каждой координатной системе можно положить:

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_i^{(1)}\mathfrak{b}_k^{(1)} + \mathfrak{a}_i^{(2)}\mathfrak{b}_k^{(2)} + \mathfrak{a}_i^{(3)}\mathfrak{b}_k^{(3)}, \tag{124}$$

[1] В § 7 мы познакомимся с выводом уравнений преобразования тензоров с более общей точки зрения.

где $\mathfrak{a}_i^{(1)}$, $\mathfrak{b}_k^{(1)}$ и т. д. — составляющие трех пар векторов; в уравнении (124) приняты во внимание уравнения (122) и (121). При произвольном выборе трех векторов $\mathfrak{b}^{(1)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, $\mathfrak{b}^{(3)}$ девять составляющих векторов $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ определяются однозначно девятью уравнениями (124). Составляющие тензора преобразуются как правые части уравнения (124). Из этого уравнения следует однако, если принять во внимание свойства векторов, вытекающих из уравнения (11), что в каждой системе составляющие тензора являются одним и тем же аналитическим выражением.

Тензор называют *симметричным*, если:

$$\mathfrak{a}_{xy} = \mathfrak{a}_{yx}, \ \mathfrak{a}_{xz} = \mathfrak{a}_{zx}, \ \mathfrak{a}_{yz} = \mathfrak{a}_{zy}, \tag{125}$$

и *антисимметричным* (или *кососимметричным*), если

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{a}_{xy} = -\mathfrak{a}_{yx}, & \mathfrak{a}_{xz} = -\mathfrak{a}_{zx}, & \mathfrak{a}_{yz} = -\mathfrak{a}_{zy}, \\ \mathfrak{a}_{xx} = 0, & \mathfrak{a}_{yy} = 0, & \mathfrak{a}_{zz} = 0. \end{array}\right\} \tag{126}$$

Если все составляющие тензора в одной координатной системе равны нулю, то из уравнения (124), так же как и из основных уравнений (120) или (121), следует, что все составляющие тензоров во всякой координатной системе, получающейся из первой вращением, равны нулю.

Поэтому по аналогии со стр. 49 мы приходим к следующему выводу: если некоторый *закон природы* выражается приравнением нулю всех составляющих тензора, то он будет инвариантен относительно любого вращения декартовой системы, так как составляющие тензора сохраняют свою аналитическую форму во всякой системе.

С применением симметричного тензора мы встречаемся в электродинамике, и именно в старой теории Максвелла.

Пондеромоторную силу электромагнитного поля, действующую на бесконечно малую единицу объема, можно заменить силами, действующими на ограничивающую объем поверхность. Эти силы аналогичны силам упругого натяжения, уже упоминавшимся как пример тензора; поэтому их называют также напряжениями Максвелла [1]). Составляющие пондеромоторной силы $\mathfrak{P}$, отнесенные к единице объема, согласно формуле (117) упругого напряжения (стр. 55) равны:

$$\left.\begin{array}{l} -\mathfrak{P}_x = \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{xy}}{\partial y} + \dfrac{d \mathfrak{Z}_{xz}}{\partial z} \\ -\mathfrak{P}_y = \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{yz}}{\partial z} \\ -\mathfrak{P}_z = \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_{zz}}{\partial z}. \end{array}\right\} \tag{127}$$

[1] О напряжениях Максвелла см. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität, Bd. I.

Три составляющие в уравнении (127) вполне соответствуют составляющим вектора (117). Величины $\mathfrak{S}_{xx}$, $\mathfrak{S}_{xy}$ и т. д. представляют собой составляющие *тензора напряжений* Максвелла, отнесенного к единице объема. Формально они тождественны с действующими на внешней поверхности силами сжатия и сдвига в теории упругости, причем направление какой-либо нормали к поверхности принимается положительным, когда она направлена вовнутрь поверхности. Вектор $\mathfrak{P}$ не совсем соответствует плотности силы $\mathfrak{F}$ электронной теории [ср. (114)]. К этому мы еще вернемся позднее (§ 8).

Правые части уравнения (127) условно можно рассматривать как расхождения, т. е. можно считать вектором, составляющие которого имеют форму расхождения. Поэтому для $\mathfrak{P}$ вводим символ

$$\mathfrak{P} = -\operatorname{div}\mathfrak{S}. \tag{128}$$

Составляющие тензора Максвелла мы можем следующим образом выразить через составляющие электромагнитного поля; можно показать, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_{xx} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{H}_x^2 \\ \mathfrak{S}_{xy} &= -(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

и аналогичные равенства для остальных составляющих. Уравнения (129) годятся для *всякой* координатной системы.

Все положения, развитые здесь для трех измерений, можно сейчас же перенести на четыре измерения, и такое расширенное векторное исчисление можно применить в специальной теории относительности, если в основу положить координатную систему с четырьмя взаимно перпендикулярными вещественными осями. Инвариантность скалярного произведения двух четырехмерных векторов — аналогично уравнению (87) — связана однако с линейными *ортогональными* уравнениями преобразования. Общие преобразования Лоренца в выбранной нами форме (44) и (45), хотя и линейны, но не ортогональны (ср. стр. 27). Поэтому необходимо будет наши выводы из векторного анализа обобщить, к чему мы теперь и приступим.

§ 7. Общий тензорный анализ (I часть).

Для обоснования общего тензорного анализа [1]) вернемся еще раз к данному нами на стр. 47 определению скалярного произведения. Для примера возьмем следующее положение физики: „работа равна силе, помноженной на путь“.

„Путь“, который мы мыслим прямым отрезком, сдвигом, представляет собой вектор, т. е. величину, составляющие которой преобразуются так же, как координаты. „Сила“ может быть представлена

[1]) Общий тензорный анализ называется также абсолютным дифференциальным исчислением. Основной работой по этому вопросу является: G. Ricci und T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Mathemat. Annalen, Bd. 54, 1900, S. 125.

направленным отрезком; она является также вектором в установленном нами значении понятия вектора. „Работа“ есть скаляр; ее значение является независимым от всякой координатной системы. Когда мы в основу изображения наших векторов положили *декартовы* системы координат, переходящие друг в друга путем поворотов, то было справедливо положение об инвариантности скалярного произведения $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z$.

Однако, *инвариантностные* понятия о работе наверно не связано с декартовой системой координат; оно остается действительным для любого рода координатных систем. Поэтому в дальнейшем мы положим в основу такие группы координатных систем, для которых конечные координаты получаются друг из друга *линейными однородными преобразованиями*. Между коэффициентами уравнений преобразования вообще не должно существовать никаких условий и прежде всего никаких условий *ортогональности*. Оси таких координатных систем прямолинейны и пересекаются под любыми углами. Единицы измерения на отдельных осях независимы друг от друга; следовательно, на каждой оси мы измеряем особым масштабом, определяемым уравнениями преобразования. Такие системы мы называем *аффинными* координатными системами и говорим об аффинном преобразовании координат.

К данному роду преобразования как *специальный случай* относятся преобразования Лоренца (44) и (45) для четырехмерного континуума. Хотя в них и имеются ограничительные условия, и мы имеем дело не с общими аффинными системами, но они не будут условиями ортогональности. Что преобразование Лоренца относится к особого рода аффинной системе в эвклидовом континууме, вытекает из геометрических соображений, данных на стр. 33.

Понятие „перемещения“ мы можем перенести и на аффинные системы. Составляющие перемещения тождественны с координатами точки в аффинной системе координат; они преобразуются, следовательно, так же как и координаты. Также и сила раскладывается в этой системе на составляющие. Если составляющие силы в какой-нибудь системе будут k_x, k_y, k_z, составляющие перемещения v_x, v_y, v_z, то полная работа во всяком случае будет

$$k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z.$$

Она должна быть инвариантна. Это возможно только тогда, когда для силы действительны не те же самые уравнения преобразования, что и для перемещения. Мы должны считать *силу как другой род векторов*, для которых должны быть установлены новые уравнения преобразования.

Рассмотрим сейчас задачу в более общем виде. Принимая во внимание нашу пространственно-временную непрерывность, перейдем *к четырем измерениям*. Выберем *произвольную аффинную систему координат*. Положим в основу *два рода векторов* (в четырехмерной непрерывности они называются также четырехмерными векторами). Те из них, которые соответствуют „пути“, мы называем *контравариантными векторами*; их составляющие пусть будут:

$$a^1, a^2, a^3, a^4.$$

Векторы, аналогичные силе, мы называем *ковариантными*; их составляющие обозначим через b_1, b_2, b_3, b_4. Таким образом для обозначения контравариантных векторов мы выбираем *верхний* [1]), для ковариантных *нижний* значок.

Введение этих двух типов векторов и соответствующее обобщение их в тензоры найдет свое обоснование в том, что благодаря им становятся особенно простыми и наглядными уравнения физики, как мы увидим ниже на уравнениях электродинамики. Прежде всего сами собой упраздняются все исследования инвариантности. Таким образом тензорный анализ является естественным математическим орудием, применяемым в теории относительности.

Оба вида векторов могут быть изображены направленными отрезками, существующими независимо от координатной системы. Аналитическое выражение для составляющих вектора имеется, следовательно, для каждой аффинной системы координат, как уже было отмечено на стр. 12.

Это справедливо, как окажется в дальнейшем, также и для составляющих тензоров, которые на стр. 56 мы уже определили для трехмерной прямоугольной координатной системы и которыми в обобщенном виде нам придется пользоваться.

В дальнейшем будет показано, что векторные и тензорные составляющие всякого вида при переходе из одной аффинной системы координат в другую преобразуются друг в друга с помощью линейных однородных уравнений. Если все составляющие вектора или тензора любого вида в одной системе равны нулю, то они будут нулями во всякой системе.

Таким образом, согласно выводам стр. 49 и 59 мы находим: если *законы природы* находят свое выражение путем приравнения нулю всех составляющих какого-нибудь вектора или тензора, то они будут инвариантны для всех аффинных координатных систем; сюда относятся и системы преобразования Лоренца.

Перейдем теперь *к выводу уравнений преобразования*. Только контравариантные векторы являются настоящими перемещениями, которые преобразуются как координаты.

Следовательно, только для них (сравн. стр. 48) действительны линейные однородные уравнения

$$\left.\begin{aligned}
a^{1'} &= \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_4} a^4 \\
a^{2'} &= \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x_2'}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x_2'}{\partial x_4} a^4 \\
a^{3'} &= \frac{\partial x_3'}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x_3'}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x_3'}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x_3'}{\partial x_4} a^4 \\
a^{4'} &= \frac{\partial x_4'}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x_4'}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x_4'}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x_4'}{\partial x_4} a_4
\end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

[1]) Вряд ли возможно смешение верхнего значка с показателем степени. В особых случаях возводимую в степень величину можно взять в скобки.

Коэффициенты $\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}$ и т. д. являются *постоянными в пространстве и времени;* они *не* подчиняются условиям ортогональности.

Уравнения (130) можно соединить вместе, написав их в виде:

$$a^{i'} = \sum \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} a^k = \frac{\partial x_i'}{d x_k} a^k \qquad i, k = 1, 2, 3, 4. \tag{131}$$

В последнем выражении в уравнении (131) мы отбросили значок суммы и в будущем будем всегда это делать, причем мы раз навсегда устанавливаем следующее правило:

Если в одной части выражения один и тот же значок встречается дважды, первый раз как верхний и второй раз как нижний индекс, то надо всегда суммировать по нему (в нашей четырехмерной непрерывности для всех значений от 1 до 4), если специально не оговорено противоположное.

Надо еще отметить, что координаты или их бесконечно малые приращения являются также составляющими *контравариантных* векторов; но у них мы пишем исключительно только нижние значки, т. е. удерживаем обозначения $x_1, x_2 \ldots dx_1, dx_2 \ldots$

Следовательно, для самих *координат* имеют место *подстановки*:

$$x_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} x_k; \tag{132}$$

аналогичные уравнения имеют место и для дифференциалов

$$dx_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} dx_k. \tag{133}$$

Согласно условиям стр. 48 мы требуем, чтобы:

$$a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 + a^4 b_4 = a^{1'} b_1' + a^{2'} b_2' + a^{3'} b_3' + a^{4'} b_4', \tag{134}$$

или чтобы

$$a^k b_k = \text{инварианту} \tag{135}$$

для всех координатных систем, переходящих одна в другую через уравнение (132).

Отсюда вытекает закон преобразования для ковариантных векторов. Обращение уравнения (131) приводит прежде всего к

$$a^k = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} a^{i'}. \tag{136}$$

Следовательно:

$$a^{i'} b_i' = a^k b_k = b_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} a^{i'}. \tag{137}$$

Отсюда следует, что закон преобразования при переходе от координатной системы без значков к системе со значками будет [1]):

$$b_i' = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} b_k. \tag{138}$$

$\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}$ будут и здесь также постоянными величинами. Условий ортогональности опять, конечно, не существует.

Таким образом мы можем определить контравариантные векторы как такие, которые преобразуются по уравнению (131), *ковариантные* — как такие, которые преобразуются по (138).

Так как преобразования Лоренца в виде (44) являются линейными, но не ортогональными преобразованиями в духе уравнений (88) и (89), то уже *в специальной теории относительности мы должны различать контравариантные и ковариантные векторы*; благодаря дополнительным условиям (45) соотношение между ними будет очень просто. Однако сначала мы им не воспользуемся (ср. стр. 68).

Данное на стр. 56 понятие *тензора* распространим также на аффинную систему координат. Определим сначала *тензоры II ранга* (*или второй ступени*).

Мы считаем тензор II ранга *контравариантным*, если все его 16 составляющих a^{ik} (т. е. a^{11}, a^{12}, . . . a^{44}) удовлетворяют условию

$$a^{ik} c_i d_k = \text{инварианту}\ ^{2)} \tag{139}$$

для всех аффинных координатных систем, причем c_i и d_k являются векторами, преобразующимися по уравнениям (138).

16 произведений составляющих векторов a^i и b^k всегда удовлетворяют условию (139), так что, следовательно, $a^i b^k$ представляет контравариантный вектор II ранга. Но это не наиболее общая его форма.

Но 16 подобного рода произвольных составляющих тензора можно представить как сумму попарно взятых произведений $a^i b^k$ четырех соответственно выбранных пар контравариантных векторов, аналогично (124).

Таким образом можно положить:

$$a^{ik} = a^i_{(1)} b^k_{(1)} + a^i_{(2)} b^k_{(2)} + a^i_{(3)} b^k_{(3)} + a^i_{(4)} b^k_{(4)}. \tag{140}$$

Доказательство вполне соответствует данному на стр. 56.

Составляющие a_{ik} *ковариантного* тензора II ранга определяются условием:

$$a_{ik} c^i d^k = \text{инварианту}. \tag{141}$$

[1]) Следует иметь в виду, что:

$$b_k \frac{\partial x_k}{\partial x_{i'}} a^{i'} = \sum_{i,k} b_k \frac{\partial x_k}{\partial x_{i'}} a^{i'} = \sum_i a^{i'} \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} b_k$$

и что $a_{i'}$ являются составляющими произвольного вектора.

[2]) Здесь так же, как всегда, надо суммировать по i и k.

Наконец, мы установим еще один *смешанный* тензор II ранга a^k [1]), для которого:

$$a_i^k c^i d_k = \text{инварианту}. \tag{142}$$

Ковариантные составляющие тензора сводятся к сумме попарно взятых произведений $a_i b_k$, смешанные составляющие тензора — к сумме попарно взятых произведений $a_i b^k$ четырех соответственно выбранных пар векторов. Тем самым доказывается, так же как и на стр. 57, что аналитическая форма составляющих тензора *не зависит* от той или иной координатной системы.

Последнее свойство, присущее всем трем видам тензоров II ранга, приводит непосредственно *к уравнениям преобразования*, преобразующим значения составляющих тензора из системы без значков в систему со значками. Эти формулы те же самые, как и для соответствующих произведений составляющих вектора.

Они имеют вид для контравариантного тензора II ранга:

$$a^{lm\prime} = \frac{\partial x_l'}{\partial x_i} \frac{\partial x_m'}{\partial x_k} a^{ik}; \tag{143}$$

для *ковариантного* тензора:

$$a_{lm}' = \frac{\partial x_i}{\partial x_l'} \frac{\partial x_k}{\partial x_m'} a_{ik}; \tag{144}$$

и для *смешанного* тензора:

$$a_l^{m\prime} = \frac{\partial x_i}{\partial x_l'} \frac{\partial x_m'}{\partial x_k} a_i^k. \tag{145}$$

Эти же уравнения преобразования можно было бы также вывести из основных уравнений (139), (141) и (142). Способ был бы аналогичен выводу уравнений преобразования (138) из (136) и (135).

Уравнения преобразования (143), (144) и (145) могут быть в свою очередь использованы для *определения* контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров II ранга.

Соответственно основным уравнениям (139), (141) и (142) получаются также *тензоры III и высших* рангов. Так, например, уравнением

$$a_{ik}^l a^i b^k c_l = \text{инварианту} \tag{146}$$

определяется смешанный тензор III ранга a_{ik}^l для всех аффинных координатных систем. Аналогичным образом должны быть обобщены уравнения преобразования. Тензоры любых порядков можно аналогично (140) свести к векторам, причем таким образом для них становится доказанным, что их аналитическая форма остается неизменной для *каждой* из наших координатных систем. Целесообразно вектор обозначать как *тензор I ранга*, скаляр — как контравариантный или ковариантный *тензор нулевого ранга*. Если векторы или тензоры заданы от точки к точке, то их совокупность опять называется *векторным*

[1]) Строго говоря, этот тензор должен быть написан в виде $a_i^{\ k}$ в отличие от тензора $a^k{}_i$, определяющегося уравнением $a_i^k c_k d^i$ = инварианту. Это же замечание следует сделать и для смешанных тензоров высших рангов.

или *тензорным полем*. Составляющие являются функциями координат, и это имеет место для *каждой* системы.

Тензоры II или высших рангов называют *симметричными*, если две составляющие, получающиеся одна из другой путем перестановки двух индексов, равны по величине и по знаку; *антисимметричными (или кососимметричными)*, если они равны по величине и противоположны по знаку (ср. стр. 57). Эти свойства не зависят от системы отсчета.

Для *примера* докажем, что $a^{ik} = a^{ki}$ есть свойство, присущее тензору во всякой координатной системе.

Мы имеем:

$$a^{lm'} = \frac{\partial x_l'}{\partial x_i} \frac{\partial x_m'}{\partial x_k} a^{ik} = \frac{\partial x_l'}{\partial x_i} \frac{\partial x_m'}{\partial x_k} a^{ki}. \tag{147}$$

Так как по *всем* i, $k = 1, 2, 3, 4$ надо суммировать, то при двойном суммировании можно переставить буквы i и k, и выражение при этом не изменится. Таким образом получим:

$$a^{lm'} = \frac{\partial x_m'}{\partial x_i} \frac{\partial x_l'}{\partial x_k} a^{ik} = a^{ml'}. \tag{148}$$

Следует отметить еще один особенно простой тензор II ранга. Из сравнения уравнений (135) и (142) следует, что величины:

$$\left.\begin{aligned} \delta_k^i &= 1 \qquad (i = k) \\ \delta_k^i &= 0 \qquad (i \neq k) \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

представляют собой составляющие тензора II ранга, а именно смешанного фундаментального тензора (ср. § 12).

До сих пор при всех наших определениях принималось, что x_i суть аффинные координаты в четырехмерной эвклидовой непрерывности. Только для них действительны все установленные линейные уравнения преобразования *с постоянными* коэффициентами.

Однако существуют еще координатные системы и другого любого вида, которые все объединяются в одно общее понятие *криволинейных* (гауссовых) *координатных систем*. Так, например, сферические или цилиндрические координаты представляют собой вид координат или параметров [1]), которые можно распространить с трех на четыре измерения.

Декартовы или аффинные координаты, сферические или цилиндрические координаты в пространстве все имеют одно общее свойство: если определена координатная система, то для определения пространственной точки необходимо *три* числовых данных. Если же не делать никаких предположений относительно способа изображения координат, то можно вообще сказать, что положение пространственной точки определяется заданием трех параметров [2]).

Соответственно с этим в четырехмерной непрерывности мировая точка

---

[1]) Криволинейные координаты в нижеследующем часто называются параметрами. *Прим. ред.*

[2]) Пока что мы оставляем открытым вопрос о том, имеем ли мы дело с эвклидовым или неэвклидовым континуумом (ср. II часть, § 11).

определяется четырьмя параметрами, которые мы опять обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4. Все мировые точки образуют четырехмерное многообразие. Если точка в какой-нибудь системе определяется четырьмя параметрами x_1, x_2, x_3, x_4, то в другой системе она будет определяться четырьмя значениями x_1', x_2', x_3', x_4'. Но между параметрами со значками и без значков не существует уже больше простой линейной зависимости (132). Если мы не хотим ограничиться каким-нибудь особым выбором параметров, то мы должны теперь положить:

$$x_i' = f_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{150}$$

причем в самом общем случае x_i' являются от точки к точке различными функциями от параметров x_i. Мы должны, однако, считать, что эти функции всегда дифференцируемы и функциональный определитель отличен от нуля.

Тогда имеем четыре уравнения:

$$dx_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial x_i'}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial x_i'}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial x_i'}{\partial x_4}dx_4 = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}dx_k\,. \tag{151}$$

Здесь коэффициенты $\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}$ являются *от точки к точке различными величинами*, между которыми в общем случае не существует никаких связывающих их между собой уравнений. Уравнения (151) формально соответствуют (133). Если мы ограничимся бесконечно малым объемом, окружающим какую-нибудь точку, то тогда внутри этого объема можно рассматривать эти коэффициенты как постоянные и для бесконечно малого перемещения („пути“), составляющие которого dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 будут действительно те же уравнения преобразования, что и при конечных аффинных координатных системах.

Таким образом, если мы перейдем от *конечных перемещений к бесконечно малым*, оставаясь в пределах бесконечно малого объема вокруг какой-либо точки, то *при любом параметрическом способе изображения* мировой точки мы можем сохранить неизменными *понятия векторов и тензоров, так же как и их уравнения преобразования*. Но при любых системах координат векторы и тензоры связаны с точкой; они образуют векторное или тензорное поле, и коэффициенты уравнений преобразования меняются от точки к точке.

Свойства *инвариантности*, которые в аффинных координатных системах распространяются на конечные величины и конечные соотношения, действительны при любых системах координат всегда только для бесконечно малого объема вокруг каждой точки; инвариантные соотношения представляют собой дифференциальные уравнения.

Таким образом все положения общего тензорного анализа относятся к конечному или бесконечно малому в *аффинных*, но только к бесконечно малому в *любых* системах координат. *Законы природы*, выраженные через приравнение нулю всех составляющих любого тензора, могут быть соотношениями между конечными величинами; при этом мы имеем инвариантность относительно уравнений преобразования (132). Или это будут дифференциальные законы; тогда они будут инвариантны по отношению к координатным системам, для которых действительны уравнения (133) или (151). Только в случае, относящемся к уравнению (151), *законы природы обще инвариантны* (т. е. инвариантны относительно любых преобразований координат).

Преобразование Лоренца (44) благодаря (45) является специальным случаем уравнений преобразования (132). Таким образом законы инвариантности по отношению к этим преобразованиям получаются как частный случай нашего тензорного анализа. Инвариантные относительно преобразования Лоренца дифференциальные законы не обладают общею инвариантностью. Если в уравнениях преобразования (44) заменить координаты x_i дифференциалами dx_i, то вследствие постоянства коэффициентов в конечном участке пространства мы не получим частного случая применения (151), а получим частный случай применения (133).

Теперь мы переходим к важнейшим положениям *тензорной алгебры*. Если мы имеем два тензора одинакового ранга и одного вида, то, как вытекает из основных уравнений, мы можем их объединить в новый тензор, складывая соответствующие составляющие. Этот процесс мы называем *сложением тензоров*. В результате получим тензор того же ранга и того же вида. Доказательство может быть дано через уравнения преобразования, которые при таком сложении остаются неизменными.

Далее, под *внешним умножением двух тензоров* понимают образование нового тензора таким путем, что все составляющие одного тензора перемножаются со всеми составляющими другого. Так, например, составляющие нового тензора получают следующим путем:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a_i b_k \\ a^{iklm} &= a^{ik} b^{lm} \\ a_{ik}^{lm} &= a_{ik} b^{lm}. \end{aligned} \tag{152}$$

Что эти произведения представляют собой составляющие тензора, можно, например, для последнего случая доказать следующим образом. a_{ik} и b^{lm}—составляющие тензора; следовательно, $a_{ik}c^i d^k$ и $b^{lm}e_l f_m$ инварианты. Произведение обеих сумм $a_{ik}b^{lm}c^i d^k e_l f_m$ также инвариантно. Поэтому $a_{ik}b^{lm}$ являются составляющими смешанного тензора четвертого ранга. Первый случай мы уже обсуждали на стр. 62 и 63. Соответствующим образом всегда проводится доказательство характера тензорности внешнего произведения двух или более тензоров.

При известных условиях можно также из тензоров высших рангов получить тензоры более низкого ранга. Такую операцию называют *композицией тензоров*.

Пусть даны составляющие a_i^k смешанного тензора II ранга. Составим сумму $\sum_i a_i^i = a_i^i$ и докажем, что она есть *инвариант*. Согласно стр. 63 a_i^k вообще можно представить в виде:

$$a_i^k = \sum_{n=1}^{n=4} a_{(n)i} b_{(n)}^k, \tag{153}$$

где значок n относится к четырем отдельным парам векторов, из которых могут быть составлены составляющие тензора. Но $a_i b^i$ является инвариантом для всякой пары векторов; следовательно, также:

$$a_i^i = \text{инварианту}. \tag{154}$$

Из смешанного тензора II ранга получается таким образом инвариант, если приравнять верхний и нижний индекс и суммировать по нему. Эту теорему можно еще обобщить.

Если в смешанном тензоре любого ранга приравнять верхний индекс нижнему и суммировать по нему, то получится смешанный тензор, ранг которого будет на две единицы ниже (одна единица пойдет за счет верхнего, вторая за счет нижнего индекса).

Проведем доказательство для тензора a_{il}^{km}. $a_{il}^{km} b^i c_k d^l e_m$ есть инвариант; если выделим отсюда $a_{il}^{km} b^i c_k$, то из только что приведенной инвариантности следует, что выделенная часть является тензором II ранга, так что мы можем написать:

$$a_{il}^{km} b^i c_k = f_l^m. \tag{155}$$

Положим $l = m$ и просуммируем по l, тогда получим:

$$a_{il}^{kl} b^i c_k = \text{инварианту}; \tag{156}$$

следовательно a_{il}^{kl} есть тензор II ранга, и мы можем написать:

$$a_{il}^{kl} = a_i^k. \tag{157}$$

Внешнее умножение и композиция тензоров могут применяться одновременно. Так, например, внешнее умножение a_{ik} на b^l дает тензор a_{ik}^l, откуда для $k = l$ и суммирования получается ковариантный вектор I ранга a_i. Вектор a_i есть результат *внутреннего перемножения* тензоров a_{ik} и b^l. Из a_{ik} и b^{lm} через внешнее перемножение и композицию получается тензор a_i^l. В этом случае говорят о *смешанном умножении тензоров* a_{ik} и b^{lm}.

Теперь мы снова вернемся к специальной теории относительности; но раньше нам придется изучить в общей форме еще один тензор, который в дальнейшем будет играть существенную роль. Инвариантный линейный элемент (59) относится к декартовым координатам. Если мы переходим к любой (и в бесконечно-малом аффинной) системе координат, полагая для этого $dx_i' = a_{ik} dx_i$, где a_{ik} различно от точки к точке, то *линейный элемент* принимает вид:

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + \ldots = g_{ik} dx_i dx_k \ (g_{ik} = g_{ki}). \tag{158}$$

ds^2 есть инвариант. Коэффициенты g_{ik} являются, следовательно, составляющими симметричного ковариантного тензора II ранга [ср. (141)]. Мы называем его *общим фундаментальным тензором* (ср. § 12).

Для специальной теории относительности уравнение (158) переходит в (59). Коэффициенты g_{ik} принимают таким образом значения [1]):

$$g_{11} = +1,\ g_{22} = +1,\ g_{33} = +1,\ g_{44} = -1,\ g_{ik} = 0\ (i \neq k). \quad (159)$$

Мы называем этот тензор *фундаментальным тензором специальной теории относительности.* Мы воспользуемся им, чтобы вывести простую зависимость, существующую в специальной теории относительности между *контравариантными и ковариантными* тензорами (ср. стр. 62).

По нашим правилам относительно внутреннего умножения для всякого любого тензора g_{ik} имеем:

$$a_i = g_{ik} a^k \qquad \text{и} \qquad a_{ik} = g_{il} g_{km} a^{lm}.$$

Для тензора (159) будет:

$$a_i = a^i\ (i = 1,\ 2,\ 3); \quad a_4 = -a^4 \quad (160)$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_{ik} &= a^{ik}\ (i, k = 1, 2, 3); \quad a_{4k} = -a^{4k}\ (k = 1,\ 2,\ 3); \\ a_{i4} &= a^{i4}\ (i = 1,\ 2,\ 3); \quad a_{44} = +a^{44}. \end{aligned}\right\} \quad (161)$$

Так же можно показать:

$$a_i^k = a^{ik} \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}; \quad a_4^k = -a^{4k} (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \quad (162)$$

Если бы в специальной теории относительности мы выбрали четыре взаимно перпендикулярные *вещественные* оси, то исчезло бы совершенно различие между контравариантными и ковариантными тензорами.

Вообще для принятого на стр. 62 выбора координатной системы мы можем вывести правило: если в *специальной* теории относительности у каких-нибудь составляющих тензора переходит индекс $i = 1,\ 2,\ 3$ сверху вниз или обратно, то эти составляющие сохраняют неизменным свое значение; для индексов $i = 4$ переменится знак, если число меняющих место индексов нечетное.

Эти зависимости справедливы для всех систем координат, потому что коэффициенты фундаментального тензора всегда имеют одно и то же значение (159); но они связаны с условиями (45) преобразования Лоренца и, следовательно, применимы только в рамках специальной теории относительности.

Рассмотрим теперь наиболее важные вопросы *тензорного анализа*: пусть φ *скаляр*, значение которого в нашем четырехмерном континууме меняется от точки к точке (скалярное поле); тогда изменение его при перемещении в определенном направлении (т. е. при переходе к соседней точке)

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} dx_4 \quad (163)$$

---

[1]) Для принятого на стр. 31 второго выбора координатной системы значения переходит в $-1,\ -1,\ -1,\ +1$. Ср. (60) стр. 37 и § 11.

будет также скаляром (ср. стр. 51). dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 есть контравариантный вектор. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ представляет собой, следовательно, ковариантные составляющие вектора, который называется *градиентом.*

Так как φ есть скаляр, то мы можем (так же как на стр. 51) рассматривать дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ как ковариантный вектор. Однако, вообще говоря, это допустимо только в связи со скаляром. Но мы можем показать, что в пределах специальной теории относительности (однако *не* в пределах общей; ср. II часть, § 12) символ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в *связи с любыми* тензорами также можно рассматривать как ковариантный вектор.

Выражение $f_{ik}^l a^i b^k c_l$ есть инвариант. a^i, b^k, c_l представляют собой составляющие любых векторов; допустим, что во всякой системе при переходе от места к месту последние имеют одни и те же *постоянные* составляющие. Это допущение возможно только для специальной теории относительности, т. е. для линейных преобразований с постоянными от точки к точке коэффициентами. Тензор f_{ik}^l пусть меняется от места к месту. Изменение нашего инварианта, вследствие некоторого определенно заданного перемещения, будет опять инвариантом, следовательно:

$$\frac{\partial f_{ik}^l}{\partial x_h} a^i b^k c_l dx_h \quad \text{инварианту.} \tag{164}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial f_{ik}^l}{\partial x_h} = f_{ikh}^l. \tag{165}$$

Путем дифференцирования мы повысили ранг тензора на одну единицу (ковариантный ранг тензора). Вообще мы можем рассматривать дифференцирование как внешнее умножение тензора на ковариантный вектор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ [1]).

Отсюда легко получаются еще несколько новых положений:

Если φ_i являются составляющими ковариантного вектора, то $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ будут составляющими ковариантного тензора II ранга; так, например,

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \tag{166}$$

[1]) Следует обратить внимание, что это действительно только для специальной теории относительности. Это положение соответственным образом будет правильно также и для старого векторного анализа (ср. стр. 51). Но в нем контравариантные и ковариантные векторы и тензоры равны между собой.

будет таким *антисимметричным* тензором. $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}$ представляет собой тензор III ранга. Из уравнения (166) следует, что

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}=0. \tag{167}$$

Левая часть уравнения (167) является опять тензором III ранга. Из уравнения (167) видно, что все составляющие этого тензора равны нулю. Поэтому закон природы, представленный в виде (167), есть инвариант относительно преобразования Лоренца.

Из ковариантного тензора F_{ik} с помощью уравнения (161) мы можем образовать контравариантный тензор F^{ik}, который также будет антисимметричным.

Через композицию мы можем получить отсюда контравариантный тензор первого ранга:

$$s^i=\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} \quad \text{или} \quad s^i-\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{168}$$

Это уравнение также представляет собой инвариантное относительно преобразования Лоренца соотношение.

§ 8. Электродинамика пустого пространства.

До сих пор мы показали только то, что уравнение, выражающее распространение света, инвариантно относительно преобразования Лоренца. Но специальный принцип относительности требует, чтобы этим свойством инвариантности обладали все основные уравнения в механике и электричестве.

Если же основные уравнения, установленные еще более старыми теориями, не удовлетворяют этому требованию, то они должны быть отброшены и заменены новыми.

Мы докажем однако, что основные уравнения максвелло-лоренцовой электродинамики инвариантны относительно преобразования Лоренца. Для этого достаточно показать, что эти уравнения можно написать в четырехмерной тензорной форме. При этом мы положим в основу уравнения электронной теории в том виде, в каком они приведены на стр. 53.

Согласно электронной теории, при переходе электрона из состояния покоя в движение, заряд его остается неизменным. Следовательно, количество электричества остается то же, когда оно покоится в K или в движущейся относительно K системе K'. Поэтому *количество электричества* есть *инвариант преобразования Лоренца.*

Плотность электричества определяется уравнением:

$$\rho=\frac{e}{V}. \tag{169}$$

Следовательно, $\rho V=$ инварианту.

Объем, который в состоянии покоя имеет размер V_0, при равномерно переносном движении со скоростью q (стр. 66) будет

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}.$$

Таким образом, при переходе из состояния покоя в равномерное движение, для плотности ρ будет справедливо уравнение преобразования

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \tag{170}$$

так как $\rho V = \rho_0 V_0$.

Плотность покоя есть инвариант, так же как и *объем покоя* V_0.

Введем теперь некоторые новые векторы; прежде всего *четырехмерную скорость*. Для движущейся точки dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 $(= cdt)$ являются контравариантным четырехмерным вектором временноподобного направления. Этот вектор останется вектором, если мы каждую составляющую его разделим на инвариантный элемент линии ds (стр. 29 и 37); таким образом так называемая *четырехмерная скорость* или

$$u^i = \frac{dx_i}{ds} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{171}$$

также является контравариантным временноподобным четырехмерным вектором.

Принимая во внимание уравнение (ср. стр. 32 и 37):

$$ds = cdt \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = dt \sqrt{c^2 - q^2} \tag{172}$$

и (ср. стр. 43)

$$\frac{dx_1}{dt} = q_x, \quad \frac{dx_2}{dt} = q_y, \quad \frac{dx_3}{dt} = q_z, \tag{71}$$

имеем:

$$u^1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{q_x}{c\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}; \qquad u^2 = \frac{q_y}{c\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}};$$

$$u^3 = \frac{q_z}{c\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}; \qquad u^4 = \frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}. \tag{173}$$

Четырехмерная скорость мировой точки выражена, таким образом, через пространственную скорость q этой точки и три ее составляющие q_x, q_y, q_z.

Возьмем составляющие плотности тока: $\frac{\rho q_x}{c}$, $\frac{\rho q_y}{c}$, $\frac{\rho q_z}{c}$ и прибавим к ним ρ. Если мы заменим $1:\sqrt{1-\frac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}$ через ρ, то из уравнений (173) и (170) следует, что эти четыре величины представляют собой опять контравариантный четырехмерный вектор. Он будет:

$$s^1=\frac{\rho\mathfrak{q}_x}{c},\ s^2=\frac{\rho\mathfrak{q}_y}{c},\ s^3=\frac{\rho\mathfrak{q}_z}{c},\ s^4=\rho. \tag{174}$$

Четырехмерный вектор s^i, образованный из плотности тока и плотности заряда, мы называем *четырехмерным током.*

Далее в электродинамике Лоренца пользуются понятием трехмерного *вектор-потенциала*, три составляющие которого $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ определяются уравнением:

$$-\mathfrak{H}=\operatorname{rot}\mathfrak{f}, \tag{175}$$

равно как и понятием *скалярного потенциала* φ, определяемым уравнением:

$$\mathfrak{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial t}=\operatorname{grad}\varphi, \tag{176}$$

причем $\mathfrak{f}$ и φ связаны друг с другом уравнением:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathfrak{f}=0. \tag{177}$$

Четыре величины $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$, φ составляют также контравариантный четырехмерный вектор. Доказательство будет следующее. Из уравнений (175), (176) и (177), так же как из основных уравнений (112) $\operatorname{div}\mathfrak{E}=\rho$ и (111) $\operatorname{rot}\mathfrak{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=\frac{\rho\mathfrak{q}}{c}$ получаются волновые уравнения [1]):

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\rho \tag{178}$$

и

$$\Delta\mathfrak{f}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial t^2}=\frac{\rho\mathfrak{q}}{c}; \tag{179}$$

(179) заключает в себе три уравнения для трех составляющих $\mathfrak{f}$. Составляющие $\mathfrak{f}$ связаны с составляющими $\frac{\rho\mathfrak{q}}{c}$ таким же образом, как φ с ρ. Так как $\frac{\rho\mathfrak{q}}{c}$ посредством ρ дополняется до четырехмерного вектора, то то же самое действительно и для $\mathfrak{f}$ и φ. Последний четырехмерный вектор мы называем *электромагнитным четырехмерным потенциалом* и полагаем:

$$\varphi^1=\mathfrak{f}_x,\ \varphi^2=\mathfrak{f}_y,\ \varphi^3=\mathfrak{f}_z,\ \varphi^4=\varphi, \tag{180}$$

[1]) См. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. II, Leipzig 1914, § 6. Электромагнитные потенциалы; см. также R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1905, глава IV, § 12. Запаздывающие потенциалы. Определение Δ см. стр. 60.

или для ковариантных составляющих, согласно уравнению (160):

$$\varphi_1 = \mathfrak{f}_x,\ \varphi_2 = \mathfrak{f}_y,\ \varphi_3 = \mathfrak{f}_z,\ \varphi_4 = -\varphi. \tag{181}$$

Из ковариантного вектора (181) на основании уравнения (166) мы образуем антисимметричный тензор II ранга. Для составляющих, например, мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} F_{12} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial x} = +\mathfrak{H}_z, \\ F_{14} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathfrak{E}_x \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Величины F_{12} и F_{14} приравнены здесь $\mathfrak{H}_z$ и $\mathfrak{E}_x$ на основании основных уравнений (175) и (176). Полное вычисление дает:

$$\left.\begin{aligned} &F_{14} = \mathfrak{E}_x,\ F_{24} = \mathfrak{E}_y,\ F_{34} = \mathfrak{E}_z \\ &F_{23} = \mathfrak{H}_x,\ F_{31} = \mathfrak{H}_y,\ F_{12} = \mathfrak{H}_z \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &F^{14} = -\mathfrak{E}_x, && F^{24} = -\mathfrak{E}_y, && F^{34} = -\mathfrak{E}_z \\ &F^{23} = \mathfrak{H}_x, && F^{31} = \mathfrak{H}_y, && F^{12} = \mathfrak{H}_z. \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

При перемене мест каких-нибудь двух индексов знаки составляющих меняются на обратные.

Таким образом составляющие электромагнитного поля являются составляющими антисимметричного тензора II ранга F_{ik} или F^{ik} (одна, теперь уже устарелая терминология называет его также вектором с шестью компонентами); согласно уравнению (166) они могут быть выражены через составляющие электромагнитного *четырехмерного потенциала* (180) или (181). Таким образом для описания всех электромагнитных и оптических процессов необходимо только знание четырехмерного потенциала.

Разложим теперь основные уравнения электронной теории со (110) по (113) на их составляющие и мы получим две группы, каждая из которых состоит из четырех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= \frac{1}{c}\rho\mathfrak{q}_x \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} &= \frac{1}{c}\rho\mathfrak{q}_y \\ +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} &= \frac{1}{c}\rho\mathfrak{q}_z \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} &= \rho \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

и

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}=0\\
-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}=0\\
+\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}=0\\
\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (186)
$$

Основные уравнения (174), (183) и (184) показывают, что системы уравнений (185) и (186) можно написать в четырехмерной векториальной форме:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}=s^i \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (187)$$

и

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}=0 \quad (i,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ 4)\ ^{1)}. \qquad (188)$$

Уравнения совершенно тождественны с (167) и (168); тем самым доказано, что *уравнения поля электронной теории инвариантны относительно преобразования Лоренца.* Следовательно, уравнения поля в формулированном уже нами на стр. 38 смысле надо считать физически «правильными». Эта инвариантность основных электромагнитных уравнений относительно преобразования Лоренца не является только случайным их аналитическим свойством; напротив, она показывает, что все чисто электромагнитные явления движения относительны постольку, поскольку они оставляют неопределенным равномерное переносное движение системы отсчета. Но, прежде всего, она говорит в пользу самого преобразования Лоренца. Уравнения поля электронной теории дают нам систему уравнений, которые в пределах точности наших наблюдений вполне хорошо передают явления электричества и оптики; то обстоятельство, что эти уравнения, известные еще до создания специального принципа относительности, удовлетворяют последнему, показывает несомненно, что наш принцип в своей математической формулировке (стр. 28) как основа теоретической физики имеет весьма глубоколежащие корни. Основные уравнения являются *дифференциальными законами;* они описывают процессы в бесконечно-малом. Так как с другой стороны общая теория относительности в бесконечно-малом, при особом выборе системы координат, переходит в специальную теорию относительности (ср. стр. 16), то инвариантность наших дифференциальных

[1]) Число уравнений (188) равно числу комбинаций из четырех элементов по три класса без повторений, следовательно 4.

уравнений является в то же время существенной и для общего принципа относительности.

Уравнения электродинамики в их более старой форме, так же как и в форме тензорного анализа, относятся сперва к „покоящейся" системе K. Если мы перейдем из этой системы в другую K', K''... то, хотя *основные уравнения формально и остаются без изменения*, но входящие в них величины принимают в каждой системе другие *значения*. Так как эти величины представляют собой векторы и тензоры, то для них действительны уравнения преобразования, данные в § 7. Вообще в вопросах электродинамики мы не будем останавливаться на выводе специальных уравнений преобразования, но все же на двух примерах мы покажем характер подобного рода вывода.

Для упрощения наших рассуждений, положим, что переход от системы K' к K происходит согласно *специальному* преобразованию Лоренца (43). Контравариантные четырехмерные векторы преобразуются как координаты. Таким образом для *четырехмерного тока* согласно уравнению (43) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \rho\mathfrak{q}_x &= \rho'\frac{\mathfrak{q}_x'+v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \rho\mathfrak{q}_y=\rho'\mathfrak{q}_y', \quad \rho\mathfrak{q}_z=\rho'\mathfrak{q}_z' \\ \rho &= \rho'\frac{1+\dfrac{v\mathfrak{q}_x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{189}$$

Для ковариантных тензоров II ранга действительны уравнения преобразования (144), которые мы можем написать в такой форме:

$$F_{ik}=\frac{\partial x_l'}{\partial x_i}\frac{\partial x_m'}{\partial x_k}F_{lm}'. \tag{190}$$

Так, например, мы имеем:

$$F_{12}=\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}F_{12}'+\frac{\partial x_4'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}F_{42}'; \tag{191}$$

остальные члены в сумме (190) отпадают. Принимая во внимание преобразование Лоренца (39) и соотношения (183), получаем:

$$\mathfrak{H}_z=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{H}_z'+\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{E}_y'. \tag{192}$$

Таким способом для *составляющих электромагнитного поля* выводится следующая система уравнений преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}_x' & \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}_x' \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\mathfrak{E}_y'+\beta\mathfrak{H}_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_y &= \frac{\mathfrak{H}_y'-\beta\mathfrak{E}_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\mathfrak{E}_z'-\beta\mathfrak{H}_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_z &= \frac{\mathfrak{H}_z'+\beta\mathfrak{E}_y'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right| \tag{193}$$

Разложение электромагнитного поля на электрическую и магнитную часть имеет, как мы видим, только относительное значение.

Теперь обратимся к важным для теории относительности тензорам, к *четырехмерной силе* и к *тензору энергии и импульса.*

Мы видели, что плотность пондеромоторной силы электромагнитного поля равна:

$$\mathfrak{F}=\rho\left(\mathfrak{E}+\frac{1}{c}[\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}]\right). \tag{114}$$

Выражение это также может быть преобразовано.

Положим

$$p^{i}=\mathfrak{F}^{ik}s_k \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{194}$$

и вычислим четыре составляющие вектора p^i. Принимая во внимание уравнения (184) и (174), получим:

$$\left.\begin{aligned} p^1 &= F^{12}s_2+F^{13}s_3+F^{14}s_4=\frac{\rho\,\mathfrak{q}_y}{c}\mathfrak{H}_z-\frac{\rho\,\mathfrak{q}_z}{c}\mathfrak{H}_y+\rho\,\mathfrak{E}_x= \\ &=\rho\left(\mathfrak{E}_x+\frac{1}{c}[\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}]_x\right)=\mathfrak{F}_x; \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

аналогично $p^2=\mathfrak{F}_y$; $p^3=\mathfrak{F}_z$. Таким образом первые три уравнения (194) согласуются с уравнением (114).

Далее [1]:

$$p^4=\frac{\rho}{c}(\mathfrak{q}_x\mathfrak{E}_x+\mathfrak{q}_y\mathfrak{E}_y+\mathfrak{q}_z\mathfrak{E}_z)=\frac{1}{c}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F}). \tag{196}$$

$\mathfrak{q}\,F$ есть работа, произведенная плотностью сил в единицу времени, т. е. *плотность мощности* электромагнитного поля.

Составляющие плотности сил образуют вместе с плотностью мощности $\frac{1}{c}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$ (как временной составляющей) контравариантный четырехмерный вектор p^i, который мы назовем *четырехмерной силой* электромагнитного поля.

Мы можем также определить и ковариантную четырехмерную силу, если положим:

$$p_i=F_{ik}s^k, \tag{197}$$

причем переход от контравариантных векторов и тензоров к ковариантным и обратно происходит по уравнениям (161) и (162). Подобно тому, как в электродинамике Максвелла пондеромоторная сила, действующая на единицу объема, может выражаться через симметричный тензор напряжений, точно так же и четырехмерная сила может быть выражена через четырехмерный симметричный тензор *энергии-импульса* или короче *тензор энергии.*

---

[1]) Следует помнить, что $\mathfrak{q}$ и $[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]$ представляют собой два взаимно перпендикулярных вектора. Их скалярное произведение согласно уравнению (80) равно нулю.

Положим:

$$S_i^k = F_{ir} F^{kr} - \frac{1}{2}\delta_i^k |F|^2, \tag{198}$$

где δ_i^k обозначает тензор с составляющими 1 $(i = k)$ и 0 $(i \neq k)$ [ср. уравнение (149), стр. 64] и

$$|F|^2 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}. \tag{199}$$

Вычислим выражение [1]):

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = \sum_{k,r} F_{ir}\frac{\partial F^{kr}}{\partial x_k} + \sum_{k,r} F^{kr}\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\sum_k \delta_k^i \frac{\partial |F|^2}{\partial x_k}. \tag{200}$$

Здесь для правой части имеем:

$$\text{I член} = -\sum_r F_{ir} s^r = -p_i$$

вследствие уравнений (187) и (197);

$$\text{II член} = \sum_{k,r} F^{kr}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,r} F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r}\right),$$

так как

$$\sum_{k,r} F^{kr}\frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} = \sum_{k,r} F^{rk}\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_r} = \sum_{k,r} F^{kr}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r};$$

$$\text{III член} = -\frac{1}{2}\frac{\partial |F|^2}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k,r}\left(F_{kr}\frac{\partial F^{kr}}{\partial x_i} + F^{kr}\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k,r} F^{kr}\frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}$$

вследствие уравнения (161).

Таким образом имеем:

$$(\text{II} + \text{III}) \text{ члены} = -\frac{1}{2}\sum_{k,r} F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} + \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k}\right) = 0$$

вследствие уравнения (167).

Поэтому для ковариантной четырехмерной силы получаем уравнение:

$$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{201}$$

---

[1]) Мы будем писать в виде исключения знаки суммы.

или для контравариантной четырехмерной силы:

$$-p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k}. \tag{202}$$

Тем самым *четырехмерная сила приводится к тензору II ранга, к тензору энергии-импульса.* Условия его симметрии показывают непосредственно уравнения (198).

Уравнения (201) и (202), так же как и основные уравнения (194) и (197), инвариантны относительно преобразования Лоренца; мы опять пользовались выводами § 7, которые касаются специальной теории относительности (стр. 68). *Составляющие тензора энергииимпульса* могут быть выражены через известные величины электромагнитного поля.

Будем исходить из уравнения (198) и примем во внимание уравнения (183) и (184).

Тогда имеем, например:

$$S_1{}^1 = F_{1r}F^{1r} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F_{kr}F^{kr}\right) = \mathfrak{H}_z{}^2 + \mathfrak{H}_y{}^2 - \mathfrak{E}_x{}^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \mathfrak{E}_x{}^2 - \mathfrak{H}_x{}^2,$$

ли согласно (129)

$$S_1{}^1 = S^{11} = \mathfrak{s}_{xx}.$$

Далее:

$$S_1{}^4 = F_{1r}F^{4r} = \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x,$$

или согласно (116)

$$S^{41} = S^{14} = \frac{\mathfrak{S}_x}{c};$$

наконец:

$$S_4{}^4 = -\mathfrak{E}_x{}^2 - \mathfrak{E}_y{}^2 - \mathfrak{E}_z{}^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2) = -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2),$$

или согласно (115):

$$S^{44} = W.$$

Если мы произведем полностью все вычисления, то для *контравариантного тензора энергии-импульса* S, из которого по уравнению (202) вытекает четырехмерная сила, получим следующие контравариантные составляющие S^{ik}:

$$S = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{s}_{xx} & \mathfrak{s}_{xy} & \mathfrak{s}_{xz} & \frac{\mathfrak{S}_x}{c} \\ \mathfrak{s}_{xy} & \mathfrak{s}_{yy} & \mathfrak{s}_{yz} & \frac{\mathfrak{S}_y}{c} \\ \mathfrak{s}_{xz} & \mathfrak{s}_{yz} & \mathfrak{s}_{zz} & \frac{\mathfrak{S}_z}{c} \\ \frac{\mathfrak{S}_x}{c} & \frac{\mathfrak{S}_y}{c} & \frac{\mathfrak{S}_z}{c} & W \end{matrix} \right\} \tag{203}$$

Здесь $\mathfrak{S}_{xx}, \mathfrak{S}_{xy} \ldots$ — составляющие тензора натяжения Максвелла (129), $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ — составляющие вектора Пойнтинга (116) и W — плотность электромагнитной энергии. Дадим сейчас этому тензору еще несколько другую форму.

Покажем, что в электродинамике *уравнения*

$$p^i = -\frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k} \tag{202}$$

содержат в себе *одновременно закон сохранения энергии и закон сохранения количества движения*, что они, следовательно, представляют собой *основные динамические уравнения теории электричества и оптики.*

Рассмотрим сначала временную составляющую. Согласно уравнению (196) мы имели $p^4 = \frac{1}{c}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$.

Далее

$$\frac{\partial S^{4k}}{\partial x_k} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\mathfrak{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{204}$$

следовательно:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{q}\,\mathfrak{F}) + \operatorname{div}\mathfrak{S} = 0. \tag{205}$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ представляет собой приращение плотности электромагнитной энергии в единицу времени; $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$ — мощность работы пондеромоторной силы, следовательно приращение механической плотности энергии в единицу времени, которую можно выразить через $\frac{\partial A}{\partial t}$. Оба первых слагаемых дают общее приращение плотности энергии. Согласно стр. 52 расхождение представляет собой некоторый поток, выходящий в единицу времени из единицы объема. Если мы примем вектор $\mathfrak{S}$ *за электромагнитный поток энергии*, то наше уравнение в форме:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{S} \tag{206}$$

будет выражать следующее: общее приращение плотности энергии в единицу времени равно потоку энергии, входящему в бесконечно малую единицу объема. Введя понятие электромагнитного потока энергии, мы распространим на электродинамику *закон сохранения энергии*, устанавливаемый раньше для чисто механических процессов. В то же время уравнение (206) оправдывает определение величины W (ср. стр. 54) как электромагнитной плотности энергии.

Следует добавить еще одно замечание относительно частных производных $\frac{\partial W}{\partial t}$ и $\frac{\partial A}{\partial t}$. Изменение плотности энергии маленькой материальной пространственной частицы может быть обусловлено прежде всего изменением энергии в *данном месте*. В таком случае мы пишем $\frac{\partial W}{\partial t}$. Но изменение плотности может появиться также вследствие изменения положения пространственной частицы; тогда изменение плотности будет

$$\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Общее изменение во времени плотности энергии *движущейся* материальной пространственной частицы будет поэтому:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{207}$$

В нашем выражении закона сохранения энергии (206) речь идет только об изменении для пространственной частицы, жестко связанной с „покоящейся“ системой координат, т. е. об изменении в данном месте $\frac{\partial W}{\partial t}$. Если же, напротив, мы рассматриваем материальную точку, движущуюся под влиянием чисто механических сил, то *общее* изменение энергии обусловливается действием силы, и мы можем положить: $\frac{dE}{dt}=\mathfrak{q}\,\mathfrak{K}$. Те же соображения действительны также и для импульса.

Если же в уравнении (206) $\operatorname{div}\mathfrak{S}=0$, т. е. энергия не входит и не выходит из единицы объема, то:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial t}=0 \tag{208}$$

или

$$W+A=\text{const}. \tag{209}$$

Следовательно, имеет место только переход электромагнитной энергии в механическую и обратно.

Если мы рассмотим *чисто электродинамические процессы*, то $A=0$; тогда наш закон сохранения энергии для единицы объема будет:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\operatorname{div}\mathfrak{S}=0. \tag{210}$$

Рассмотрим теперь в их совокупности три пространственных составляющих (202). Имеем [ср. (127)]:

$$\left.\begin{aligned}p^1=\mathfrak{F}_x&=-\frac{\partial S^{1k}}{\partial x_k}=-\left(\frac{\partial \mathfrak{p}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{p}_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{p}_{xz}}{\partial z}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}\right)=\\&=\mathfrak{P}_x+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \tag{211}$$

Соответствующие значения получим для p^2 и p^3; равенство (211) и ему аналогичные для p^2 и p^3 можно написать в виде трехмерного векторного уравнения:

$$\mathfrak{F} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} = \mathfrak{P} = -\operatorname{div} \mathfrak{s}. \tag{212}$$

Тем самым найдена зависимость (ср. стр. 58), существующая между величинами $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{P}$. Покажем, что уравнение (212) представляет собой теорему сохранения количества движения в электродинамике.

Вспомним сначала то значение, какое эта теорема (называемая также теоремой сохранения импульсов) имеет в классической механике.

Механическим импульсом мы называем величину

$$\mathfrak{G} = m\frac{dx}{dt}, \tag{213}$$

так что, когда $\mathfrak{K}$ представляет собой действующую силу, уравнения движения имеют вид:

$$\mathfrak{K} = m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{214}$$

Таким образом $\mathfrak{K}$ есть приращение импульса в единицу времени; уравнение (214) показывает, что импульс движущейся точки возрастает только под действием силы. Если механическая система находится в равновесии, т. е. если для нее $\Sigma\mathfrak{K} = 0$, то тогда и $\sum\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0$, или:

$$\Sigma\mathfrak{G} = \mathrm{const.} \tag{215}$$

Последнее уравнение представляет собой закон сохранения количества движения в более узком смысле этого слова; согласно уравнению (215) сумма импульсов замкнутой системы постоянна.

Возвратимся, однако, к уравнению (212). Пондеромоторная плотность силы F является там приращением (обусловленным действием электромагнитных сил) механического количества движения $\mathfrak{G}$, отнесенного к „покоящейся“ единице объема, т. е. приращением плотности количества движения.

Мы можем положить:

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t}. \tag{216}$$

Чтобы с формальной стороны сохранить механическую теорему о сохранении количества движения, величину

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{S} \tag{217}$$

рассматривают как *электромагнитную плотность импульса* [1]), а величину $\mathfrak{P} = -\operatorname{div}\mathfrak{s}$ как *электромагнитный поток импульса.* Каж-

[1]) Это понятие справедливо в физике независимо от теории относительности. Ср. M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Bd. II, 3 Aufl. Leipzig 1914, S. 189.

дая составляющая потока импульса представляет собой расхождение, т. е. поток, в том смысле, как это разъяснено на стр. 52. Величины, характеризующие поток импульса, являются составляющими напряжений Максвелла; они образуют, следовательно, трехмерный контравариантный тензор II ранга.

Таким образом уравнение (212) выражает, что приращения механического и электромагнитного импульса вместе равны возникающему потоку импульса, отнесенного к единице объема и времени. Тем самым мы получаем самую общую форму *теоремы сохранения импульса*, которую мы можем также написать:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathfrak{z}. \tag{218}$$

Если в системе нет приращения или убывания потока электромагнитного импульса, т. е. если $\operatorname{div} \mathfrak{z} = 0$, то мы имеем:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = 0 \tag{219}$$

или

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{g} = \text{const} \tag{220}$$

Следовательно, сумма механического и электромагнитного импульса остается для единицы объема неизменной.

Если мы рассмотрим опять *чисто электромагнитные процессы*, то уравнение (218) перейдет в

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \mathfrak{P} = -\operatorname{div} \mathfrak{z}. \tag{221}$$

Уравнения (210) и (221) по аналогии с (202) могут быть соединены в уравнение:

$$\frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{222}$$

Это уравнение представляет собой *закон сохранения энергии и количества движения* для чисто электромагнитных процессов.

Вследствие введения электромагнитной плотности импульса $\mathfrak{g}$, которая в последних членах трех пространственных составляющих уравнения (202) ставится на место $\frac{1}{c}\mathfrak{S}$, *тензор энергии и импульса* (203) можно написать в виде:

$$S = \begin{Bmatrix} \mathfrak{z}_{xx} & \mathfrak{z}_{xy} & \mathfrak{z}_{xz} & c\,\mathfrak{g}_x \\ \mathfrak{z}_{xy} & \mathfrak{z}_{yy} & \mathfrak{z}_{yz} & c\,\mathfrak{g}_y \\ \mathfrak{z}_{xz} & \mathfrak{z}_{yz} & \mathfrak{z}_{zz} & c\,\mathfrak{g}_z \\ \dfrac{\mathfrak{S}_x}{c} & \dfrac{\mathfrak{S}_y}{c} & \dfrac{\mathfrak{S}_z}{c} & W \end{Bmatrix} \tag{223}$$

Из этих окончательных значений тензора энергии-импульса получаются на основании уравнения (202) законы сохранения энергии и количества движения или импульса, инвариантные относительно преобразования Лоренца. Так как составляющие тензора (228) могут быть вычислены из четырехмерного потенциала (180) и (181), то к последнему сводятся все величины, определяющие состояния электромагнитного поля.

Основные уравнения электродинамики специальной теории относительности оказываются, как это видно из вышеизложенного, тождественными с основными уравнениями электронной теории. Но в электронной теории они действительны только для некоторой преимущественной системы координат, тогда как в действительности они имеют место во всех системах, получающихся одна из другой через какое-нибудь преобразование Лоренца. Такое положение вещей влечет за собой то, что электродинамика теории относительности не приводит ни к каким новым результатам, хотя в ней и отброшены некоторые допущения, которые приходилось делать в электронной теории для объяснения отдельных явлений (ср. стр. 17). То же действительно и в оптике; явления вроде аберрации или принципа Допплера вытекают непосредственно из специального принципа относительности.

В теории относительности весьма просто также построить электродинамику тел, находящихся в движении [1]). Однако, рамки этого введения не позволяют обсуждать здесь такие специальные вопросы. Также придется отказаться от обсуждения термодинамики [2]); мы же должны обратиться к имеющей весьма большое значение области теории относительности, а именно к *механике*.

§ 9. Механика специальной теории относительности. Материя и энергия.

Классическая механика не подчиняется специальному принципу относительности в данной ему на стр. 28 формулировке; ее основные уравнения не инвариантны относительно преобразования Лоренца. Мы должны, следовательно, построить механику на новом основании.

Электродинамика привела нас к основным уравнениям (202), которые распадаются на закон сохранения энергии (205) и закон сохранения количества движения (212).

Как это было уже отмечено в предыдущих параграфах (стр. 80 и 81), оба закона выражают собой результаты опытов, полученных сначала в механике. Следовательно, законы сохранения энергии и количества движения должны быть также самой существенной основой новой механики.

Какую же аналитическую форму будут иметь они?

Оба закона и в механике должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца. Если механические и электродинамические

---

[1]) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten Körpern. Nachr. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math. Phys. Kl. Sitzung vom 21 Dez 1907. Перепечатано в H. Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Leipzig 1910.

[2]) Для изучения ее следует прежде всего указать на M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, Bd. I.

процессы происходят вместе, то согласно принципу относительности описание этих совместных процессов во всех системах $K, K' \ldots$ должно остаться неизменным. Если, например, силы механического или электродинамического происхождения в *одной* системе находятся в равновесии, то они должны оставаться также в равновесии во всякой другой системе. Не только пондеромоторные силы электромагнитного поля, но и все пондеромоторные силы должны подчиняться преобразованиям Лоренца. Поэтому законам сохранения мы дадим одну и ту же форму как для чисто механических процессов, так и для электродинамических процессов [ср. (210) и (221)]; тем самым мы формально подчиняем механику электродинамике.

Таким образом, закон сохранения энергии в механике говорит:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0; \tag{224}$$

закон сохранения количества движения:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathfrak{z}. \tag{225}$$

Оба уравнения справедливы, как и раньше, для единицы объема; наши предположения приводят нас таким образом к механике сплошной среды. Значение величин $\mathfrak{z}_{xx}, \mathfrak{z}_{xy} \ldots, \mathfrak{S}$, $\mathfrak{g}$ и W, конечно, другое, чем в электродинамике, однако в своей совокупности они опять образуют контравариантный, симметричный тензор II ранга, *тензор энергии и импульса материи.* W представляет собой плотность механической энергии, изменение которой обусловливается притоком и утечкой энергии через совершенные какого-нибудь вида работы в единицу времени. Мы распространяем, следовательно, понятие *потока энергии* как вектора $\mathfrak{S}$ также и на механику [1]), причем все виды передачи энергии мы рассматриваем как процессы *близкодействия.* Сюда относятся: механическая передача энергии давлением или ударом, тепловое излучение и теплопроводность, конвекционные потоки атомов и электронов и, наконец, распространение энергии *тяготения.* Наше уравнение (224) говорит в таком случае, что изменение плотности энергии в каком-нибудь месте в единицу времени равно потоку энергии, втекающей или вытекающей из единицы объема.

В уравнении (225) $\mathfrak{g}$ обозначает, следовательно, механический импульс единицы объема, а изменение импульса $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}$ механическую силу, возбуждаемую каждой единицей объема или на единицу объема действующую. В нашей механике близкодействия изменение импульса вызвано механическим потоком импульса, который определяется составляющими $\mathfrak{z}_{ik}$ трехмерного тензора напряжения. Действие *любых* механических сил может быть представлено таким тензором; тензор напряжения теории упругости является только специ-

---

[1]) Ср. M. Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, Physik. Zeitschr., Bd. 9, S. 828, 1908.

альным случаем. Плотность количества движения и поток энергии связаны также и в механике простой зависимостью:

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}. \qquad (217)$$

Текущей энергии соответствует таким образом некоторое количество движения (закон импульса потока энергии).

Если же мы рассмотрим не чисто механические процессы, а такие, природа которых частью механическая, частью электромагнитная, то, как следует из рассуждений этого и предыдущего параграфов, мы можем сохранить законы сохранения энергии и импульса в той же форме, в какой они даны в выражениях (224) и (225). Входящие в эти уравнения величины обозначают тогда вместе взятые механическую и электромагнитную энергию, компоненты количества движения и т. д. Как показывают также равенства (209) и (220), механические и электромагнитные величины представляют собой только различные формы проявления одной энергии, одного количества движения. Однако, в дальнейшем мы ограничимся только механическими процессами.

Уравнения (224) и (225) получаются из (202), если мы положим $p^i = 0$. Следовательно, мы можем и в механике оба эти уравнения согласно (222) объединить:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \qquad (226)$$

Таким образом мы получаем основные динамические уравнения механики. T^{ik} является тензором данного на стр. 82 вида, для которого мы должны найти содержание.

С помощью следующего предположения, которое мы более подробно разберем для механики точки, мы придем к уравнениям, содержащим основные уравнения Ньютона, как приближенные уравнения. Тем самым, следовательно, предположение наше с самого начала будет стоять в широких пределах в соответствии с действительностью. Разложим T^{ik} на два тензора:

$$T^{ik} = R^{ik} + S^{ik}. \qquad (227)$$

Пусть будет

$$R^{ik} = c^2\mu_0 u^i u^k = c^2\mu_0 \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}. \qquad (228)$$

μ_0 есть *механическая плотность покоя*, соответствующая электромагнитной плотности покоя (ср. стр. 73). u^i и u^k — составляющие четырехмерной скорости (ср. стр. 73). R^{ik} зависит только от движущейся материи; тензор R^{ik} есть *тензор энергии и количества движения* (или, короче, тензор энергии) материи. Если мы выберем единицу времени так, что $c = 1$ (ср. стр. 23), то мы будем иметь:

$$R^{ik} = \mu_0 u^i u^k. \qquad (229)$$

S^{ik} есть тензор, определяющий внешние силы, действующие на единицу объема. Согласно (202) мы формально можем положить:

$$\frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k} = -p^i, \tag{230}$$

где p^i являются составляющими внешней механической четырехмерной силы (ср. стр. 76). *Если не действует никакая внешняя сила, то* $p^i = 0$ и

$$T^{ik} = R^{ik} = c^2\mu_0 u^i u^k. \tag{231}$$

Мы можем выражению $\frac{\partial R^{ik}}{\partial x_k}$ придать более простую форму.

Мы имеем:

$$\frac{\partial R^{ik}}{\partial x_k} = c^2 u^i \frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} + c^2\mu_0 u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{232}$$

Выражение $\frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k}$ равно нулю. В самом деле мы можем написать его в виде:

$$\frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_0 \frac{\partial x_1}{\partial x_4}\frac{dx_4}{ds}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\mu_0 \frac{dx_4}{ds}\right). \tag{233}$$

Так как согласно уравнению (173)

$$\frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

и согласно уравнению (170)

$$\frac{\mu_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = \mu,$$

причем μ обозначает плотность материи в той системе, в которой движение происходит со скоростью q, то, следовательно, наше выражение будет:

$$\frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu \frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right) + \ldots + \frac{\partial \mu}{\partial x_4}. \tag{234}$$

Если мы положим его равным нулю, то в более старом обозначении мы получим:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu q) = 0. \tag{235}$$

Мы получим таким образом *уравнение неразрывности для материи* [1]), т. е. аналитическое выражение того, что та материя, которая входит в единицу объема в единицу времени (следовательно $\frac{\partial\mu}{\partial t}$), попадает в него через поверхность этого объема (ср. определение расхождения стр. 52).

На основании этого уравнения неразрывности мы получим.

$$\frac{\partial R^{ik}}{\partial x_k}=c^2\mu_0 u^k\frac{\partial u^i}{\partial x_k}=c^2\mu_0\frac{\partial u^i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}=c^2\mu_0\frac{du^i}{ds}, \tag{236}$$

и основное динамическое уравнение (226), принимая во внимание уравнение (230), перейдет в:

$$c^2\mu_0\frac{du^i}{ds}=p^i \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{237}$$

Оно опять относится к единице объема. Его инвариантность относительно преобразования Лоренца вытекает непосредственно из его векториальной формы.

Рассмотрим теперь *движение массы*, которую мы вообразим сконцентрированной в ее центре тяжести. Интегрируя обе части уравнения (237) по объему массы, мы получим *уравнения движения материальной точки*. Было бы недопустимо умножать обе части равенства (237) на dV, на элементарный объем; dV не является инвариантом преобразования Лоренца (ср. стр. 39), а векторный характер уравнение сохраняет только тогда, когда составляющие вектора умножаются на инвариант. Таковым же является

$$\frac{dV}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

где q обозначает скорость массы.

Таким образом мы можем положить:

$$c^2\mu_0\frac{du^i}{ds}\frac{dV}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}=c^2dm\frac{du^i}{ds}=p^i\frac{dV}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}; \tag{238}$$

dm представляет собой элемент массы. Так как составляющие скорости и ускорения для всех частей нашей массы одни и те же, то интегрирование по всему объему дает:

$$c^2m\frac{du^i}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\int p^i dV=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}K^i. \tag{239}$$

---

[1]) Ср. также, например, B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, S. 66, Leipzig 1905.

$\frac{du^i}{ds}$ являются составляющими *четырехмерного ускорения* нашей материальной точки, K^i — составляющими *четырехмерной силы*, действующей на всю массу.

По аналогии с четырехмерной силой электромагнитного поля (стр. 75) мы можем написать для составляющих K^i

$$\mathfrak{K}_x,\ \mathfrak{K}_y,\ \mathfrak{K}_z,\ \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \tag{240}$$

где $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$ — три составляющие силы $\mathfrak{K}$, действующие на нашу материальную точку, $\frac{dE}{dt}$ — приращение энергии, т. е. работа, производимая силой $\mathfrak{K}$ в единицу времени. Мы можем также представить составляющие четырехмерного ускорения в другой форме. Согласно уравнениям (172) и (173) имеем:

$$\frac{du^1}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx_1}{dx_4}\frac{dx_4}{ds}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{q}_x}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \tag{241}$$

Аналогичные выражения получатся $\frac{du^2}{dt}$ и $\frac{du^3}{dt}$.

Далее имеем:

$$\frac{du^4}{ds}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \tag{242}$$

Поэтому, если мы три первые из уравнений (230) напишем в трехмерной векторной форме, то получим из этих уравнений:

$$\mathfrak{K}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right) \tag{243}$$

и

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right). \tag{244}$$

Таким образом мы получили для динамики материальной точки *основные уравнения Минковского*. Соответственно уравнению (202) в электродинамике (стр. 78) уравнение (243) представляет собой закон сохранения количества движения и (244) закон сохранения энергии.

В отличие от классической механики [ср. (213)] в теории относительности импульс имеет форму:

$$\mathfrak{G}=\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \tag{245}$$

Но мы тем ближе приближаемся к значению (213), чем меньше q. Для энергии из уравнения (244) следует:

$$\left.\begin{aligned} E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} &= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{q^4}{c^4} + \dots\right) = \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mq^2 + \frac{3}{8}m\frac{q^4}{c^2} + \dots \end{aligned}\right\} \quad (246)$$

Если не принимать во внимание постоянного члена mc^2, то для малых скоростей q кинетическая энергия очень близко совпадает с данными классической механики и только для больших q по сравнению с c получаются заметные расхождения. В принципе теория относительности приводит в механике к *новым* основным законам, формально тождественным с основными законами электродинамики. Однако, для скоростей материальных точек, малых по сравнению со скоростью света, динамика специальной теории относительности переходит в ньютонову. Поэтому обе теории в этом случае одинаково справедливы для большей части явлений природы и на основе наблюдений нельзя отдать какой-нибудь из них предпочтение.

Это возможно только для больших скоростей. Однако, доступные наблюдению большие скорости в явлениях корпускулярного излучения не дают тем не менее окончательного решения в пользу теории относительности. Правда, они позволяют проверить на них справедливость уравнений (243) и (244), причем получается очень близкое совпадение между наблюдением и теорией [1]. Но электронная теория Лоренца в соединении с предположением нетвердого электрона (ср. стр. 39) приводит к тем же законам движения, так что эта теория также может объяснить наблюдаемые явления. Теория относительности имеет здесь лишь то преимущество, что она дает возможность делать теоретические выводы с единой для всех явлений точки зрения.

Кроме того специальная теория относительности оставляет некоторый пробел в механике. Если мы желаем рассмотреть отдельные частные случаи, то сила $\mathfrak{K}$ должна быть известна. Для весьма важного случая, когда $\mathfrak{K}$ представляет собой *силу тяготения*, специальная теория относительности не дает нам решения вопроса. Закон тяготения Ньютона есть закон действия на расстоянии; тогда как мы должны были бы на основании уравнения (230) свести составляющие K^i [ср. (240)] к составляющим тензора S^{ik}; действие тяготения должно было бы быть представлено как закон близкодействия.

Только общая теория относительности может дать разрешение этой проблеме. Но прежде чем перейти к этому, покажем еще одно последнее следствие из наших основных механических законов.

Уравнение (217) (стр. 81) показало, что движущаяся энергия обладает количеством движения. Но в механике количество движения связано с движущейся *инертной массой*; следовательно, энергия, так же как и масса, должна обладать инерцией. В действительности

---

[1]) Ср. при этом, в особенности, соображения и указания литературы у M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, I Bd., 4 Aufl., § 2.

же не только существует тесная связь между энергией и массой, как это можно ожидать из уравнения (217), но сама масса, материя, является особой формой энергии. Существующую между массой и энергией зависимость мы можем вывести различным образом. Уравнением (228) мы определили тензор энергии и количество движения движущейся массы. Рассмотрим тот же самый тензор для системы, в которой материя покоится; тогда его составляющие [ср. (173)] будут:

$$R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2\mu_0 \end{Bmatrix} \tag{247}$$

На том месте, где теперь стоит $c^2\mu_0$, в механике находится (стр. 84 и сл.) плотность энергии W. Мы можем, следовательно, ожидать между плотностью энергии и плотностью массы следующую зависимость: $W = c^2\mu_0$.

Это подтверждается уравнением (246).

На основании этого уравнения энергия покоящегося тела будет не нуль, но:

$$E = c^2 m. \tag{248}$$

В системе, в которой тело покоится, энергия массы равна этой массе, помноженной на c^2 (*теорема инертности энергии*).

Изменение массы обусловливает изменение энергии и наоборот; *следовательно, масса является особой формой энергии.*

Еще нагляднее станут эти соотношения из следующих соображений [1]). Пусть замкнутая система плоских световых волн движется в координатной системе K под углом φ к положительной оси x. Пусть значение энергии движущейся системы будет E. Если мы преобразуем выражение энергии E для координатной системы K', движущейся прямолинейно и равномерно со скоростью v относительно K, параллельно оси x, то мы получим [2]):

$$E' = E\,\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{249}$$

где $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Положим, что в системе K покоится тело, энергия которого равна E_0; его энергия в системе K' будет E_0'. Пусть тело посылает под углом φ относительно оси x и в противоположных направлениях энергию $\dfrac{E}{2}$ (измеренную в системе K).

[1]) A. Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energteinhalt abhängig? Annalen der Phys. Bd. 17 (1905). Перепечатано в Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip Leipzig 1921.

[2]) Вывод уравнения преобразования имеется у A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. § 8. Annal. der Phys. Bd. 17 (1905). Перепечатано также в Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip.

Тогда после посылки энергия в K будет:

$$E_1 = E_0 - \left(\frac{E}{2} + \frac{E}{2}\right) = E_0 - E, \tag{250}$$

в K':

$$E_1' = E_0' - \left(\frac{E}{2}\,\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{E}{2}\,\frac{1+\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$

$$= E_0' - \frac{E}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{251}$$

Вычитание обоих равенств дает:

$$(E_1' - E_1) = (E_0' - E_0) - E\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{252}$$

Но разности энергий E_0 и E_0', и соответственно E_1 и E_1' в системах K и K' являются как раз кинетической энергией покоящегося в K тела до и после отдачи энергии. Положим:

$$E_0' - E_0 = K_0, \quad E_1' - E_1 = K_1, \tag{253}$$

тогда получим:

$$K_1 = K_0 - E\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \ .\ .\ .\ - 1\right) = K_0 - \frac{E}{c^2}\,\frac{v^2}{2}, \tag{254}$$

если ограничимся членами второго порядка. Так как кинетическая энергия массы m принята равной $\frac{1}{2}mv^2$, то из уравнения (253) мы должны заключить, что тело до испускания энергии обладало массой m_0, после испускания массой m_1, и что:

$$m_1\frac{v^2}{2} = m_0\frac{v^2}{2} - \frac{E}{c^2}\,\frac{v^2}{2}, \tag{255}$$

или

$$m_1 = m_0 - \frac{E}{c^2}. \tag{256}$$

Если тело отдает энергию, то его масса уменьшается на $\frac{E}{c^2}$. Между инертной массой и энергией существует зависимость:

$$m = \frac{E}{c^2}. \tag{257}$$

Инертная масса тела является мерой содержащейся в нем энергии. Масса есть сжатая энергия. *Следовательно, материя и электромагнитное поле тождественны.* Энергия электромагнитного поля существует, так же как и материя, как нечто совершенно самостоятельное и не связана с независимо от нее существующей средой, эфиром классической физики (ср. также стр. 18). Можно преобразовать материю в энергию и обратно.

Качественно этот результат подтверждается явлением распада радиоактивных веществ; однако, потеря энергии в 1 эрг соответствует потере массы в $9 \cdot 10^{-20}$ *г*, так что количественная проверка в настоящее время невыполнима.

Из тождества инертной массы и энергии вытекает еще следующее: закон сохранения энергии и закон сохранения материи сливаются в один, который мы назовем *законом сохранения энергии*. На ряду с ним имеется совершенно равноценный ему закон сохранения количества движения; оба они вместе составляют основу общей теории относительности.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

§ 10. Принцип эквивалентности.

Уже классическая механика учила, что все прямолинейные и равномерные движения массы относительны; при всех механических явлениях движения остается неопределенным некоторое равномерное поступательное движение.

Далее специальная теория относительности показала, что электрическое и оптическое явления, связанные с движением, поскольку речь идет о равномерно-поступательном движении, также следует считать относительными. Возможность распространить принцип относительности механики на электричество и оптику удалось прежде всего доказать для принципа постоянства скорости света с помощью преобразований Лоренца; при этом нужно считать относительным понятие времени и ограничить применение эвклидовой геометрии к формам, покоящимся друг относительно друга. Новая механика была, конечно, следствием преобразований Лоренца.

Однако, на ряду с относительными классическая механика знает и *абсолютные* движения. Если мы определим галилееву (абсолютную) координатную систему как такую, в которой действительны законы движения Ньютона (1), то все вращающиеся координатные системы принципиально отличаются от нее. В галилеевой координатной системе материальная точка, если на нее не действуют никакие внешние силы, будет двигаться прямолинейно и равномерно; во вращающейся системе (даже при равномерном вращении) на нее действуют центробежные силы. Появление этих сил связано с вращательным движением относительно *галилеевой координатной системы;* поэтому вращение есть *абсолютное* движение. С этой точки зрения классическая механика отказывается раз навсегда от удовлетворительного *объяснения* вращения с точки зрения теории познания.

Напротив, уже наши предварительные выводы, (стр. 15) показали, что такое объяснение становится возможным, как только мы расширим наш принцип относительности до общего принципа. Тогда вращение становится движением, происходящим относительно какой-нибудь массы. Центробежные силы вызваны не вращением относительно координатной системы, а вращением системы относительно масс и обусловлены последними. Мы рассматриваем теперь самым общим образом любое движение, т. е. ускорение и вращение, как относительное. Масса и любым образом движущаяся относительно нее другая масса образуют, например, систему, которая сама может совершать любое произвольное и навсегда неопределимое движение. *Благодаря такому толко-*

ванию мы впервые достигаем согласия с непосредственным наблюдением, которое всегда нам дает движение тел или энергии только друг относительно друга.

Отсюда сейчас же следует одно основное требование, предъявленное к общим законам физики.

Если мы нашли в *одной* координатной системе *общие* основные законы для физического описания природы, *то они должны сохранить свою форму во всякой другой, любым образом движущейся относительно первой системе.* Если бы это не имело места, если бы основные законы были справедливы только в одной координатной системе или в группе систем, то мы могли бы путем наблюдения установить, находимся ли мы в какой-нибудь одной преимущественной системе или движемся („абсолютно") относительно нее.

В общей теории относительности мы не делаем больше различия между координатными системами, относительно которых справедливы или несправедливы основные законы; их аналитическое выражение должно оставаться постоянным, если система отсчета совершает любые, от места к месту различные движения. Тем самым мы получаем принцип, которым мы должны руководствоваться при установлении всех основных законов: *общие законы природы инвариантны для всякой, любым образом движущейся координатной системы.* Это означает огромное упрощение физического описания природы.

Если мы примем за основу этот общий принцип относительности, то наша задача будет заключаться в том, чтобы получить законы природы, обладающие этим общим свойством инвариантности, и *сравнить их с действительностью. Результат этого сравнения должен решить, имеет ли право наш общий принцип относительности стать основным принципом физики.*

Но прежде чем перейти к аналитической трактовке лежащей перед нами задачи, мы можем ближе подойти к вопросу, имеются ли вообще в электричестве и оптике указания на относительность любых движений. В какой мере это оказывается верным для электричества и оптики, было уже выведено на стр. (74 и 75) Еще убедительнее обнаруживаются эти указания *в механике.*

Разберем простой пример. Рассмотрим падающий камень — т. е. *предоставленную самой себе материальную точку* — в комнате, которая должна представлять нашу координатную систему.

Камень падает на пол с определенным ускорением. Причину этого мы ищем в поле тяготения земли, которое мы в пределах комнаты можем рассматривать как *однородное.* Движение камня происходит при этом относительно нашей покоящейся или принятой за равномерно движущуюся системы, которая для ускорения камня является по представлению классической механики *абсолютной.* В ней действителен закон движения Ньютона; сила тяжести является одной из допустимых законом Ньютона сил и не имеет никакого отношения к выбранной координатной системе.

Напротив, согласно общей теории относительности движение камня по отношению к комнате является *относительным.* Система, состоящая из земли и камня, может совершать любое неизвестное движение; воспринимается только движение обоих друг относительно двуга. Должна иметься возможность заменить движущуюся массу (камень) и массу отсчета (комнату) одну через другую без того, *чтобы в принципе изменилось описание процесса движения.* Мы можем сказать: камень движется относительно земли с ускорением g, или земля [1]) движется относительно камня с ускорением g. В первом случае камень находится в покоящемся поле тяготения земли. Во втором случае камень покоится или находится в равномерном переносном движении и координатная система имеет ускорение, направленное против ускорения падающего камня в первом случае; во втором случае поле тяготения *отсутствует*.

При этом следует отметить, что в целом поле тяготения земли, конечно, нельзя заменить одной ускоренной системой координат. Это правильно только для небольшой части поля земли, поскольку поле тяготения можно принять за однородное.

Но если обе системы — покоящаяся система однородного поля тяготения и ускоренная, свободная от тяготения система — должны быть равноценны для описания нашего процесса, то никакой эксперимент не должен решать в пользу той или другой системы. Пусть в комнате кроме камня „падают" еще тела из другого вещества и с другими физическими свойствами, все они должны иметь то же самое ускорение.

Общий принцип относительности требует таким образом *равенства инертной и тяжелой массы*, потому что сила притяжения земли в каком-нибудь месте во-первых равна произведению инертной массы m_t на ускорение $\frac{d^2r}{dt^2}$ и во-вторых равна произведению тяжелой массы m_s на напряжение поля тяготения g. Отсюда следует:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{m_s}{m_t} g. \tag{258}$$

Если в каком-нибудь месте ускорение для *всех* масс одно и то же, то $m_s = m_t$.

Равенство же тяжелой и инертной массы доступно теперь наблюдению с исключительно большой точностью, особенно после того как Р. Этвеш (R. v. Eötvös) произвел свои измерения с крутильными весами [2]). Таким образом общая теория относительности опирается в своем основном требовании на совершенно достоверное явление в механике. В то время как до сих пор равенство тяжелой и инертной массы принималось как случайное свойство тел, не нуждавшееся ни в каком дальнейшем разъяснении, общая теория относительности оказалась в состоянии объяснить явление удовлетворительным образом. *От выбора координатной системы зависит считать ли массу инертной или тяжелой*. Возвратимся еще раз к опыту с падающим камнем. Один раз он падает как *тяжелая* масса под действием нашего поля тяготения. Другой раз поле тяготения отсутствует — мы находимся в галилеевой системе координат — и камень движется прямолинейно и равномерно, как *инертная* масса. Ускорение же происходит потому, что мы относим движение к ускоренной системе, к земле, а не к галилеевой системе. В зависимости

---

[1]) Собственно, строго говоря, надо добавить: и весь мир. Ср. § 14.

[2]) Ср. здесь, например, обзорные статьи Д. Пекара (D. Pekár) в „Die Naturwissenschaften", 7 Jahrg. Berlin 1919.

от выбора координатной системы масса является или инертной или тяжелой.

Еще нагляднее выступят эти соотношения, если представить себе следующий воображаемый опыт. В свободной от каких бы то ни было внешних сил (галилеевой) системе отсчета движется закрытый от внешнего мира объем, ящик, с равномерным ускорением в направлении крыши. Тогда внутри этого объема все тела, предоставленные самим себе, будут с тем же ускорением „падать" на дно. Наблюдатель в комнате будет воспринимать движение тел совершенно так же, как движение *тяжелых* масс в поле тяготения, и будет прав, считая его таковым, если он ничего не знает о своем собственном движении. Напротив, наблюдатель вне комнаты, в покоящейся галилеевой системе, воспримет движение как движение *инертных* масс.

Следовательно, всякое наблюдаемое равномерное ускорение предоставленной самой себе материальной точки может быть описано или как ускоренное движение тяжелой массы в покоящемся однородном поле тяготения, или как равномерное движение инертной массы в ускоренной, свободной от тяготения координатной системе (принцип эквивалентности Эйнштейна)[1]. Поле тяготения не существует как нечто абсолютное; оно связано с координатной системой так же, как мы установили это раньше для кинетической энергии (ср. § 9). Говорить о поле тяготения в одном месте земной поверхности имеет смысл, только относя его к жестко связанной с ним покоящейся координатной системе.

Путем особого выбора координат мы можем также совершенно уничтожить ускорение. Если мы находимся в однородном поле тяготения и описываем движение какой-нибудь массы относительно координатной системы, ускорение которой по величине и по направлению совпадает с ускорением тяжести, то это движение происходит так, *как будто бы координатная система покоится и не существует поле тяготения.* В такой координатной системе, как мы это примем в дальнейшем, должны тогда быть действительными выводы специальной теории относительности. Однако, как правило, такие координатные системы простираются только на бесконечно малые области, потому что только для таких областей существует однородное поле тяготения.

Следствием данных на стр. 70 выводов является *инертность энергии* такая же, как и инертность *массы.* Поэтому, на основании принципа эквивалентности при соответствующем выборе координатной системы, *энергия всякого рода* (напр. энергия электрического поля) является также и тяжелой; энергия всякого рода *должна, следовательно, вызывать действие тяготения* (принцип действия и противодействия). Следовательно, материя и энергия ведут себя совершенно одинаково. В общей теории относительности материя принимается также за особую форму проявления энергии.

Таким образом мы пришли к *расширению эйнштейновского прин-*

---

[1] Ср. здесь и для последующего: A. Einstein, Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Annalen der Physik (4). Bd. 35, 1911, S. 898. Перепечатано в H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip, 4 Aufl., Leipzig 1921.

ципа эквивалентности: при описании *всех* явлений природы *покоящееся однородное поле тяготения равноценно равномерно-ускоренной, свободной от тяготения координатной системе,* ускорение которой равно по величине ускорению тяготения и противоположно ему по направлению.

Следовательно, если мы рассматриваем *какое-нибудь* явление механического или электромагнитного характера в равномерно ускоренной координатной системе, принадлежащей пространству, свободному от тяготения, то согласно принципу эквивалентности совершенно таким же образом это явление должно происходить в покоящемся однородном поле тяготения. Брошенный камень должен описывать в поле тяготения кривой путь. Совершенно так же, однако, и луч света: массы притягивают энергию света так же, как и брошенный камень. Скорость света в поле тяготения в общем не постоянна. Однако, как мы только что видели, существует в однородном поле тяготения всегда *одна* координатная система, для которой это имеет место. Отсюда уже видно, что *в конечном счете принцип эквивалентности приведет к теории тяготения.*

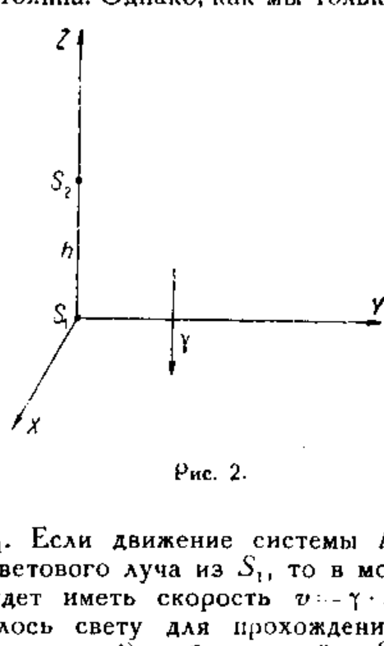

Рис. 2.

Теперь мы приходим к следствиям, проверка которых доступна непосредственному наблюдению.

Разберем следующий случай. Из точки S_1 (см. рис. 2), лежащей в начале координатной системы K, идет свет вдоль положительной оси z в точку S_2, отстоящую от S_1 на расстоянии h. Пусть координатная система K движется с ускорением γ в направлении положительной оси z. Период колебания света в точке S_1 пусть будет ν_1. Если движение системы K начинается в момент выхода нашего светового луча из S_1, то в момент его прибытия в S_2 система K будет иметь скорость $v = \gamma \cdot t$, где t есть время, которое понадобилось свету для прохождения из S_1 в S_2. На основании принципа Допплера [1]) наблюдаемый в S_2 период колебания ν_2 дается равенством:

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{259}$$

Сделаем допущение, которое годится только приближенно (однако, как мы еще увидим, для наших наблюдений достаточно точное), что в ускоренной системе K скорость света имеет также постоянное значение c; тогда $t = \frac{h}{c}$, и следовательно период колебания:

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 - \frac{h\gamma}{c^2}\right). \tag{260}$$

[1]) См. О. Д. Хвольсон. Курс физики, т. I, стр. 172, изд. 1923.

В точке S_2 период колебания оказывается увеличенным.

Согласно принципу эквивалентности мы можем заменить нашу ускоренную систему K покоящейся системой при условии существования поля тяготения с постоянным ускорением силы тяжести γ в направлении отрицательной оси z. Если мы передвинемся в направлении положительной оси z на dz, то потенциал тяготения [1]) возрастет на величину:

$$d\Phi = \gamma\, dz; \tag{261}$$

поэтому $h\gamma$ представляет собой величину, показывающую, насколько потенциал тяготения в S_2 больше, чем в S_1. Положим разность потенциала между S_2 и S_1 равной Φ, тогда уравнение (260) будет:

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{262}$$

Таким образом наш принцип эквивалентности учит: если в *однородном* поле тяготения свет переходит из места с меньшим потенциалом в место с бо́льшим потенциалом, то его период колебания ν_1 оказывается увеличенным на величину $\nu_2 \frac{\Phi}{c^2}$ (что мы можем также положить равным $\nu_1 \frac{\Phi}{c^2}$), но это лишь в первом приближении вследствие предположения постоянства скорости света в K.

Предположим, что тот же закон действителен не только в однородных, но и в *любых* полях тяготения [2]); тогда свет, доходящий до нас от мест с более низким потенциалом, следовательно от бо́льших масс, должен показывать смещение линий в спектре в сторону красного цвета, если мы при наблюдении сравниваем его с *точно таким же по своей природе источником света*. В обратном случае имеет место смещение в сторону фиолетового конца.

Однако, необходимы уже очень большие разности потенциалов Φ, чтобы относительное смещение линий было измеримо. Для света, доходящего от солнца к земле, $\frac{\Phi}{c^2}$ имеет значение [3]) $2 \cdot 10^{-6}$; отсюда следует,—так как $\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} = 2 \cdot 10^{-6}$,—что смещение линий равно 0,008 Å при $\lambda = 400\,\mu\mu$, что соответствует эффекту Допплера приблизительно в 0,6 *км* в секунду. По малой величине сдвига можно заключить также, что при экспериментальном определении изменения периода колебания правильно ограничиться приближенным его вычислением.

Величина смещения еще измерима; однако, ряд наблюдений Шварцшильда (Schwarzschild), Эверсхеда (Evershed) и особенно С...

---

[1]) Потенциал тяготения—существенно отрицательная величина; *абсолютное значение* возрастающего потенциала тяготения становится меньше.

[2]) Ср. при этом выводы § 14.

[3]) Ср. K. Schwarzschild, Über die Verschiebung der Bande bei 3883 A.-E. im Sonnenspektrum. Sitzber. d. Berl. Ak. d. W. 1914, S. 1201.

Джона (St. John)[1]) не дали никаких положительных результатов. Процессы внутри солнечной атмосферы чрезвычайно сложны, давления и температуры, при которых светятся солнечные газы, нельзя просто воспроизвести в лаборатории. Самое существенное условие для доказательства смещения линий, именно — что источник света, с которым сравнивают, должен быть совершенно той же природы, что и источник, из которого исходит свет, — может быть выполнено с большим трудом и то только приближенно. Недавно Л. Гребе (L. Grebe) и А. Бахэму (A. Bachem)[2]) удалось показать, что измеренные в солнечном спектре линии частично возмущены близкими к ним другими линиями и спутниками и, если исключить эти возмущения, то для смещения в сторону красного конца получаются значения, близко совпадающие с теми, которых требует теория относительности. Однако, здесь необходимы еще обстоятельные дальнейшие исследования, прежде чем станет возможным окончательное решение.

Масса неподвижных звезд в общем достаточно велика, чтобы вызвать измеримое смещение линий. Однако, условия здесь еще сложнее, чем у солнца, потому что смещение линий вызывается, кроме процессов в самой атмосфере, также и неизвестным движением звезд в мировом пространстве. Определенные спектральные типы (*B*-, *K*- и *M*- звезды) показывают *систематическое* смещение линий, которое, может быть, указывает на большую массу этих звезд.

Кроме того в звездных спектрах наблюдаются и другие явления, которые могут быть рассматриваемы как эффект тяготения. На одно своеобразное явление указал Э. Фрейндлих (E. Freundlich). Если неподвижные звезды пространственно связаны с туманностями таким образом, что они имеют общее движение в мировом пространстве, и если наблюдать свет, идущий от тех и других, то можно ожидать, что звездный спектр, вследствие значительно большего скопления масс в звездах, покажет смещение линий к красному концу по сравнению со спектральными линиями туманностей. Проверка оказалась возможной, например, у тех звезд (главным образом типа *B*), которые по всей вероятности органически принадлежат к тумманности Ориона. В среднем они имеют относительно туманности Ориона смещение к красному концу, которое, переведенное на эффект Допплера, составляет +6,0 *км*.

Далее О. Колю (O. Kohl) удалось показать, что те из звезд потока Тельца, которые, повидимому, обладают большей массой, дают систематическое смещение к красному концу относительно других звезд. Возникающие при всех этих исследованиях вопросы, конечно, далеко еще не разъяснены [3]).

---

[1]) Ch. E. St. John, The principle of generalized relativity and the displacement of Frauenhofer lines toward the red. Astrophys. Journal. Vol 46, 1917, S. 249.

[2]) Ср. особенно L. Grebe и A. Bachem. Die Einsteinsche Gravitationsverschiebung im Sonnenspektrum der Stickstoffbande λ 3883 A.-E. Zeitschr. f. Physik 2, 1920, S. 415. L. Grebe, Über die Gravitationsverschiebung der Frauenhoferschen Linien. Physik. Zeitschr. 21, 1920, S. 662. L. Grebe, Sonnengravitation und Rotverschiebung. Zeitschrift f. Physik 4, 1921, S. 105.

[3] Из новой литературы следует указать: E. Freundlich, Zur Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie, Die Naturwissenschaften, 7. Jahrg., 1919, S. 629. E. Freundlich, Über die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei Fixsternen. II. Mitt. Physikal. Zeitschr. 20, 1919, S. 561. См. также Kruse, Das Problem der

Применение получающегося из принципа эквивалентности уравнения (262) не ограничивается только периодом колебания светящегося атома. Всякий колеблющийся атом представляет собой *часы* (ср. стр. 43). Мы можем, следовательно, наше соотношение (262) интерпретировать следующим образом. Если имеются двое совершенно одинаково идущих часов A и B (ход которых в *одном и том же* месте совпадает) и если перенести одни часы A в место с меньшим потенциалом тяготения, т. е. поместить их поблизости бо́льших масс, то по сравнению с часами B они будут итти медленнее; в месте же с более высоким потенциалом тяготения, напротив, они будут итти быстрее; по сравнению с часами в B, они будут отставать или итти вперед на величину $\Delta\tau_2 \frac{\Phi}{c^2}$, если $\Delta\tau_2$ представляет собой время, которое прошло по часам B, и если Φ обозначает разность потенциалов мест B и A.

Это положение дает нам объяснение встречающемуся в специальной теории относительности (стр. 41) парадоксу часов [1].

Мы рассмотрели следующее явление. Из двух часов A и B, которые сначала покоились в начале галилеевой системы отсчета, двигаются одни часы B с постоянной скоростью v вдоль положительной оси v в направлении от A и затем снова назад. Каждое изменение скорости обусловливается *силами, действующими* на B в течение короткого времени в одном или противоположном направлении. Пусть эти силы не оказывают влияния на ход часов B; тогда мы имели:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t_2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right), \tag{263}$$

или часы B при своем возвращении к A отстали в первом приближении на величину $\frac{1}{2}\Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$.

Однако, движение обоих часов относительно; при описании мы можем также принять A за движущиеся и B за покоящиеся. Но уже отмечалось (ср. стр. 41), что если силы вместо B действуют на A, мы получаем другое физическое явление. Теория относительности, конечно, никогда не утверждала, что физически различные процессы равны. Мы должны, поэтому, первое явление, когда B рассматриваем как *покоящиеся* часы и когда те же силы, что и прежде, действуют на B, описать следующим образом.

Сначала A и B покоятся в начале координат нашей системы. Пусть на B, так же как и прежде, действует сила, но сами часы B остаются в покое, тогда как часы A получают ускорение в направлении отрицательной оси x, которое по величине равно ускорению B

rubenden Kalziumlinien. Die Naturw., 9. Jahrg., 1921, S. 483. O. Kohl, Die Rotverschiebung der Spektrallinien der Sterne des Taurusstromes. Physik. Zeitschr. 22, 1921, S. 665.

[1]) A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie. „Die Naturwissenschaften", 6. Jahrg., 1918, S. 697. См. также H. Thirring, Über das Uhrenparadoxon in der Relativitätstheorie. Ebenda, 9. Jahrg., 1921, S. 209.

в первом случае. Мы должны, следовательно, принять, что A и B одновременно испытывают одно и то же ускорение в направлении отрицательной оси x, но что ускорение B как раз компенсируется нашей действующей силой.

Вместо этого мы можем также сказать согласно принципу эквивалентности: в течение короткого времени действует однородное поле тяготения [1]) в направлении отрицательной оси x; обе пары часов испытывают одинаковое ускорение; но на B действует сила, удерживающая часы на их первоначальном месте. После исчезновения поля тяготения часы A движутся с постоянной скоростью v в направлении отрицательной оси x, пока они не достигнут расстояния h от B. Тогда опять в течение короткого времени действует однородное поле тяготения в направлении положительной оси x; опять сила удерживает часы B.

Поле тяготения исчезает, как только A получает скорость v в направлении положительной оси x. Соответствующее поле тяготения и вновь действующая на B сила восстанавливают в конце концов опять первоначальное положение.

В продолжение равномерного движения часы A отстают от B; положим теперь:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t_2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right), \tag{264}$$

тогда A (в пèрвом приближении) отстанут на $\frac{1}{2}\Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$. Но A и B) временно находятся в однородном поле тяготения (с ускорением γ). В начале и в конце движения потенциал для обоих часов одинаков, но в момент поворота часы A находятся в таком месте, для которого потенциал тяготения на $h\gamma$ больше. Таким образом эти часы идут на $\Delta\tau_2 \cdot \frac{h\gamma}{c^2}$ впереди, где $\Delta\tau_2$ обозначает время (измеренное часами B), в течение которого существует второе поле тяготения. Но:

$$\Delta\tau_2 = \frac{2v}{\gamma}; \quad h = \frac{1}{2}\Delta t_2 v. \tag{265}$$

Часы A во время перехода из отрицательного в положительное направление уходят вперед на $\Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$.

---

[1]) Введение этого поля тяготения неоднократно вызывало сомнения. Однако, несомненно, что физически мы имеем один и тот же эффект, безразлично, дается ли B ускорение внешней силой или A и B указанным образом подвергаются действию однородного поля тяготения, причем B удерживается той же самой внешней силой, что и прежде. *Физически оба случая неразличимы.* Только в первый раз A, во второй раз B приняты за покоящиеся. Таким образом введение поля тяготения является необходимым, поскольку желательно рассматривать процесс движения как *относительный*. Подробнее см. § 14. Там будет также показано, что приведенное здесь изложение является приближенным. Более строгое рассуждение, вследствие инвариантности основных уравнений, привело бы к тем же результатам.

В течение всего процесса часы A уходят вперед на $\frac{1}{2}\Delta t_2\frac{v^2}{c^2}$ (в первом приближении).

Таким образом в описываемом нами явлении B отстают от A в общем на одну и ту же величину, безразлично, принимаем ли мы за покоящиеся часы A или B — в точности, как этого требует общая относительность процессов движения.

Но теперь мы можем также и возникающее при равномерном вращении *центробежное поле, в согласии с нашим принципом эквивалентности*, рассматривать *как поле тяготения* (ср. стр. 94).

Во вращающейся системе координат всякая предоставленная самой себе материальная точка (на которую, следовательно, не действуют никакие силы тяготения) испытывает относительно этой системы известное ускорение, которое в любом месте этой системы зависит только от скорости вращения, т. е. для всех масс будет одно и то же. Точка движется как *инертная* масса, ускорение вызывается движением координатной системы. Только с одной этой точки зрения рассматривает и толкует классическая механика существование центробежного поля, появление центробежных сил.

Но вследствие равенства инертной и тяжелой массы движение в определенном месте центробежного поля ничем не отличается от движения в поле тяготения, так что в каком-нибудь месте земной поверхности, например, невозможно отделить друг от друга ускорение тяготения от центробежного ускорения. В целом, все же, оба поля различны; центробежное поле увеличивается по направлению от центра.

Если мы рассматриваем, следовательно, вращающуюся координатную систему как *покоящуюся*, то материальная точка находится в поле тяготения. Так как общая теория относительности знает только вращение относительно масс, находящихся вне вращающегося тела отсчета, то следует принять, что возникающее при втором выборе координатной системы поле тяготения должно объясняться наличием таких масс („далеких масс"). Здесь еще преждевременно говорить о том, каким образом создается это действие тяготения [1].

Мы можем, наконец, так сформулировать результат наших предыдущих исследований: вытекающий непосредственно из общего принципа относительности принцип эквивалентности ни в какой мере не противоречит опыту [2]; он дает возможность, напротив, объяснить ряд явлений, прежде всего равенство инертной и тяжелой массы, для которых до сих пор совсем не было объяснений или были возможны только неудовлетворительные. Опираясь на это, мы можем приступить к проблеме математического обсуждения нашего общего принципа относительности.

---

[1] Ср. § 14. В теории относительности, в ее наиболее общей форме, нельзя, все же, больше говорить об инертной массе в употребляемом здесь смысле. Но так как в ней масса, получившая начальную скорость, в координатной системе, жестко связанной с небесным сводом (в которой звезды в среднем находятся в покое), и в большом удалении от остальных масс будет двигаться прямолинейно и равномерно, т. е. так же как в вышеизложенном движется инертная масса, то данное здесь объяснение сохраняет свою силу.

[2] Окончательное доказательство смещения спектральных линий к красному концу, правда, еще отсутствует.

§ 11. Связь общей теории относительности с геометрией Римана.

Мы требуем *инвариантности общих законов природы* относительно любым образом движущихся друг относительно друга координатных систем. Согласно предыдущим выводам из принципа эквивалентности в этом содержится требование *инвариантности для любых полей тяготения*. Специальная теория относительности показала, что при системах координат, находящихся друг относительно друга в равномерно прямолинейном движении, время оказывается связанным с каждой отдельной системой и что инвариантность относительно этих систем сводится к инвариантности по отношению к одному особого рода линейному преобразованию в четырехмерном пространственно-временном континууме. Мы примем, что для произвольных систем, любым образом движущихся друг относительно друга, время также относительно и зависит от системы, что, следовательно, в общей теории относительности мы опять имеем дело с четырехмерным пространственно-временным континуумом, но только более общего характера.

Каким образом при этом понимать координаты, мы иллюстрируем сначала на примере. Представим себе свободное от каких бы то ни было полей тяготения пространство с галилеевой координатной системой K. Для покоящихся геометрических тел в нем будет справедливой эвклидова геометрия; покоящиеся часы показывают время системы. Для того чтобы определить в этой системе координаты пространственной точки, мы измеряем с помощью перекладывания *твердого, конечного (прямого) масштаба* расстояния проекции этой точки на какие-нибудь определенным образом выбранные оси от начала координат. При этом для наблюдателя, в каком бы месте он ни находился, этот конечный масштаб имеет одну и ту же неизменную величину. В декартовой системе координат для стержня длины s в любом месте пространства справедливо соотношение:

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \tag{266}$$

где x_1, y_1... координаты конечных точек стержня s. Если стержень имеет бесконечно малую длину ds, тогда в каждом месте пространства будет:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{267}$$

причем дифференциалы dx, dy, dz относятся к какой-нибудь декартовой системе. Суммируя (267), мы снова приходим к (266).

Такое пространство, в котором твердый, конечный, определяемый уравнением (266) масштаб повсюду имеет одну и ту же величину и в котором справедливы вытекающие отсюда геометрические свойства (в их совокупности мы называем их эвклидовой геометрией), мы называем *трехмерным эвклидовым континуумом*. В противном случае мы говорим о *неэвклидовом континууме* самого общего вида.

До сих пор при всяких физических измерениях, сознательно или бессознательно, мы всегда брали за основание эвклидов континуум; его геометрические свойства мы просто принимали за свойства пространства. Время мы измеряем, так же как и пространственные координаты, накладывая одну на другую некоторые единицы времени, которые мы получаем с помощью повсюду идущих равномерно часов. Время также имеет при этом как бы эвклидову структуру.

Специальная теория относительности не меняет такое понимание пространства и времени, если только наши измерения касаются предметов, покоящихся внутри прямолинейно и равномерно движущейся системы координат.

Но пусть теперь другая, вторая система K *равномерно вращается* относительно галилеевой системы K. Выберем за ось вращения ось z и ограничимся рассмотренной плоскостью xy. Будем рассматривать ее как вращающийся диск, центр которого является началом координат систем K и K'. Мы положим, что при неравномерном движении, как мы уже отмечали на стр. 96, мы имеем право применять данные специальной теории относительности к бесконечно малой пространственно-временной области; для нее движение K' относительно K является прямолинейным и равномерным. Одинаковой длины маленькие отрезки, расположенные на различных расстояниях от центра круга перпендикулярно к радиусу, на основании специальной теории относительности должны, будучи измерены с системы K, показаться различным образом укороченными, в то время как те же самые отрезки, расположенные вдоль радиуса, сохраняют свою длину. Если мы измерим окружность концентрического круга нашего диска с помощью покоящегося в K бесконечно малого масштаба, то мы получим $2\pi r$.

Другой получается результат, если ту же самую окружность мы измерим тем же самым бесконечно малым масштабом, но только покоящимся в системе K'. Представим себе на вращающемся диске наблюдателя B_1, который измеряет окружность круга наложением масштаба. Пусть второй наблюдатель B_2 следит за процессом с покоящейся системы K. Наблюдатели B_1 и B_2 одинаково воспримут, что *покоящийся* в K' масштаб, вследствие своего укорочения, чаще может быть отложен на окружности, чем масштаб, покоящийся в K, хотя радиусы круга в K и K' имеют одно и то же значение. Таким образом, измеренная с помощью покоящегося в K' масштаба окружность круга будет больше, чем $2\pi r$, и тем больше, чем дальше от центра будет измерена окружность. B_2 будет объяснять отклонения от эвклидовой геометрии вращательным движением. Напротив, B_1, если он рассматривает K' как покоящуюся систему, вследствие возникновения центробежных сил установит поле тяготения и наличием его объяснит наблюдаемое отклонение[1]). Таким образом, во вращающейся системе не действительна больше эвклидова геометрия; координаты точки вращающегося диска не могут быть определены

---

[1]) Данные здесь выводы должны служить только для объяснения встречающихся в общей теории относительности геометрических соотношений. Некоторые связанные с введением вращающейся системы координат трудности здесь не будут рассмотрены. Ср. W. Pauli, Relativitätstheorie, S. 690, а также F. Kottler Rotierende Bezugssysteme in der Minkowskischen Welt. Physik. Zeitschrift, 22. Jahrg., 1921, S. 274 и S. 480.

Особенно следует обратить внимание на то, что сокращение Лоренца относится не ко всей окружности круга вращающегося диска во всей ее совокупности, а только к отдельным и столь малым ее частям, что движение их в течение короткого времени можно рассматривать как прямолинейное и равномерное.

тем же путем, который установлен для эвклидова континуума. Вернее: мы находимся в *неэквлидовом континууме*, точки которого должны отмечаться *криволинейными* (*гауссовыми*) *координатами* или *параметрами* (ср. с выводами стр. 103 и сл.).

Те же соотношения, что и для пространственных координат, находим мы для *времени*. Часы с одинаковыми свойствами, установленные в различных местах вращающегося диска и сравненные с соответствующими часами, идущими синхронно в покоящейся системе, идут тем медленнее, чем дальше от центра они находятся. В K' покоящиеся часы не идут синхронно; разности во времени не могут быть больше определены с помощью одних правильных для всей системы нормальных часов. *Время* также является *параметром*.

То, что справедливо в качестве частного случая для вращающейся координатной системы, остается правильным для любым образом движущейся координатной системы. Представим себе в какомнибудь месте наблюдателя; по отношению к нему остальные точки системы за небольшие промежутки времени совершают равномернопрямолинейные движения, различные от точки к точке. Таким образом для этого наблюдателя от точки к точке единица масштаба будет иметь другую величину, часы — другой ход.

Всякая, любым образом движущаяся координатная система,—будет ли она ускоренной или вращающейся, — согласно принципу эквивалентности в различных местах своих имеет различное поле тяготения, т. е. поле, которое в самом общем случае меняется от точки к точке (вращающемуся диску соответствует вращательно-симметричное поле тяготения, увеличивающееся от центра к окружности); поэтому указанные соотношения справедливы *для любых неоднородных полей тяготения*. Единицы длины и времени, наблюдаемые с какойнибудь одной точки, будут в различных местах поля тяготения различны.

Временно-пространственный континуум общей теории относительности является, следовательно, *неэвклидовым континуумом общего вида, пространственно-временные точки которого определяются криволинейными координатами или параметрами*. Только в случае *однородного* поля тяготения, вообще говоря, следовательно только в *бесконечно малом*, можно всегда так выбрать координатную систему K', что поле тяготения исчезнет (стр. 96) и, следовательно, пространство станет эвклидовым и время можно будет отложить на мнимой оси, перпендикулярно к пространству. Таким образом пространственные и временные величины измеримы эвклидовым образом, хотя, как уже было указано на стр. 29, наш четырехмерный пространственно-временный континуум уже и здесь является нам как особый вид неэвклидового, но тесно связанного с эвклидовым континуумом (*псевдоэвклидов* континуум).

В дальнейшем мы будем называть *общей координатной системой* координатную систему K, различные точки которой находятся в различном движении или в которой существует неоднородное поле тяготения; пространственно-временные точки будут в ней определяться параметрами. Особую координатную систему K', внутри которой пространственно-временный континуум воспринимается как псевдоэвклидов, мы называем местной или локальной системой. Ее применение распространяется обычно на бесконечно малую область окружающую мировую точку; эта бесконечно малая область пространственно-временного континуума определяется именно тем, что в ней движение может рассматриваться как равномерно ускоренное и что поле тяготения в ней может быть принято за однородное.

Таким образом следующее положение (на которое уже указывалось на стр. 96 и которое мы использовали на примере с вращающимся диском) будет для нас с самого начала вполне естественным: *для всех локальных координатных систем K', принадлежащих к какой-нибудь бесконечно малой четырехмерной области, справедлива специальная теория относительности.*

Это допущение приведет нас к специализации неэвклидового континуума, который требуется для теории относительности. Чтобы это установить, рассмотрим бесконечно малую область, окружающую пространственно-временную точку P, и определим соседнюю точку P' четырьмя вещественными координатами dX_1, dX_2, ∂X_3, dX_4, относящимися к *трем мнимым пространственным осям и одной вещественной—оси времени* (ср. стр. 32). Следовательно, наш элемент линии в общей теории относительности мы опять представим в виде (60) и напишем:

$$ds^2 = dX_4^2 - (dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2). \tag{268}$$

ds^2 является положительным для времениподобного и отрицательным для пространственно-подобного вектора. В первом случае P' получается из P путем движения. Вокруг каждой точки P существует данное в § 4 деление пространственно-временного континуума на различные, передним и задним конусом разделенные, части.

Значение ds^2 мы можем установить пространственно-временным измерением. Элемент линии в уравнении (268) всегда относится к *локальной* системе координат, свободной от ускорения и от поля тяготения. Пространственные координаты P' будут, следовательно, внутри *всякой* локальной системы (т. е. для наблюдателя, который сам находится в точке P) измерены относительно P неизменным, бесконечно малым масштабом, координаты времени — часами, которые сохраняют свой ход во всякой локальной системе[1]. ds^2 имеет вполне определенное значение, которое, вследствие инвариантности линейного элемента в специальной теории относительности (ср. стр. 29), *для всякой любой локальной системы остается неизменным.* Точно так же во всякой локальной системе *скорость света* имеет универсальное значение c, которое, при данном на стр. 23 выборе единицы времени, становится равным единице.

Но в *общей системе* K положение точки P' относительно P определяется четырьмя дифференциалами параметров dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. В бесконечно малой области вокруг P общая система координат становится аффинной (ср. стр. 59), но различной от места к месту и с мероопределением, т. е. свойствами масштабов, которые еще надо определить. Для дифференциалов в локальной и общей системе

[1] О свойствах масштабов и часов в общей системе (т. е. при суждении о них с какого-нибудь одного определенного места) мы сможем говорить только позже.

справедливы линейные, однородные уравнения:

$$dX_i = \alpha_{ik}\, dx_k, \tag{269}$$

причем α_{ik}—произвольные, зависящие от рода координатной системы и от точки к точке различные величины. Таким образом наш линейный элемент в общей системе координат переходит в:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}); \tag{270}$$

суммирование распространяется на все i, k от 1 до 4. При этом ds^2 имеет то значение, которое было определено в нашей локальной координатной системе.

Если, сохраняя наш линейный элемент ds, мы перейдем через пространственно-временное преобразование координаты от общей системы K к какой-нибудь другой, или перенесем линейный элемент в другое место нашей системы K, то мы всегда можем опять от общей перейти к локальной системе K'. Во всех локальных системах события во всяком месте происходят так, как будто бы бесконечно малая область свободна от тяготения и не имеет ускорения. Так как ds^2 имеет одно и то же значение для всех локальных систем, то это действительно также и для общих систем. Таким образом из предположения, что специальная теория относительности справедлива для всех локальных систем, следует: *линейный элемент ds является инвариантом относительно любого выбора нашей координатной системы. Его значение не зависит от того или иного выбора координат.* Во всякой локальной системе он может быть определен пространственно-временным измерением.

Таким образом мы приходим к весьма далеко идущей аналогии с геометрией Римана. В то время как вначале мы ограничивались требованием, чтобы общие законы природы в любым образом движущихся координатных системах или в таких, в которых существуют любые поля тяготения, были инварианты, теперь надо прибавить ограничение, что при этом бесконечно малый четырехмерный элемент линии тоже должен быть инвариантом относительно всех рассматриваемых координатных систем. То же самое ограничение делает также геометрия Римана среди всех возможных неэвклидовых геометрий самого общего вида. Этим мы займемся еще обстоятельнее.

Однако, сначала надо сделать еще одно замечание. Мы только что сделали основное предположение, что четырехмерный линейный элемент ds при изменении координатной системы сохраняет свою величину не только в том же самом „месте“ (в пространственном и временном смысле этого слова), но и тогда, когда он переносится с какого-нибудь одного „места“ на другое.

Бесконечно малые масштабы сохраняют свою длину, часы—свой ход относительно каждый раз выбранной локальной системы, если они с какого-нибудь одного „места“ попадают на другое. Но это требование не является необходимым; это требование может быть опущено. Можно ограничить инвариантность ds, сократив ее только для всевозможных координатных систем в области вокруг одной единственной мировой точки, и тем самым устранить из физики последние следы геометрического дальнодействия. Тогда ds должно меняться некоторым закономерным образом при переходе от одной мировой точки к соседней. Исходя из такого допущения, Г. Вейль (H. Weyl) создал чистую *дифференциальную еометрию* и на ее основе развил далее общую теорию относительности. Таким путем ему удалось тесно связать друг с другом *электричество и тяготение*, которые у Эйнштейна стоят отдельно друг от друга [1]).

Чтобы детальнее рассмотреть зависимость между общей теорией относительности и *геометрей Римана*, мы должны подробнее заняться последней. Основанием ее послужила гёттингенская вступительная лекция В. Римана о гипотезах, лежащих в основе геометрии [2]): она является распространением на любое число измерений развитой впервые Гауссом теории поверхностей. Однако, для большей наглядности мы ограничимся сначала, как и в первоначальной теории поверхностей, *двумя пространственными измерениями*.

В отличие от эвклидовой геометрии, геометрия Римана определяет точки *параметрами* или криволинейными (гауссовыми) координатами. Такую координатную систему мы опять обозначим как *общую систему* [3]), причем здесь это понятие несколько шире, чем приведенное на стр. 105. Здесь может итти речь о произвольных системах, переходящих друг в друга через любые преобразования; там же рассматриваются только такие системы, которые ускоренно движутся друг относительно друга. Однако, в дальнейшем эта разница еще отпадет.

Уже в геометрии на плоскости мы встречаемся с понятием параметра. Через преобразование:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{271}$$

мы переводим, например, декартовы координаты в полярные координаты; r и φ являются параметрами, определяющими положение точки на плоскости. До тех пор пока мы предполагаем, что любой конечный масштаб повсюду имеет одну и ту же длину, мы всегда можем провести на плоскости декартову сеть координат и преобразовать полярные координаты в декартовы. Плоскость будет эвклидовым континуумом и при параметрах в качестве координат.

Но как только мы отбросим наше допущение, она станет неэвклидовым континуумом, каким являются вращающийся диск и соответственно поле тяготения. Мы можем, конечно, положение каждой точки диска определить параметрами r и φ по отношению к центру. Но так как единица масштаба в различных местах (считая от одной точки) имеет различную длину, то мы не можем представить в виде $s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ постоянную длину s стержня, который мы

[1]) См. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 3. und 4. Auflage.

Попытку Weyl'я объединить электричество и тяготение одной единой геометрией поля нельзя считать законченной или завершенной теорией. Это не больше чем попытка. *Примечание ред.*

[2]) B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, № XIII. Вновь издано с пояснениями Г. Вейлем. Берлин 1921.

[3]) Общую параметрическую систему *Римана* называют также естественной системой, самые параметры—*естественными* координатами. Длины и время, определяемые разностями параметров, мы можем поэтому называть „естественно измеренными".

переносим вдоль по радиусу на различные расстояния от центра. Следовательно, в такой плоскости, как в неэвклидовом континууме, невозможны декартовы координаты.

Но мы всегда можем с помощью параметров бесконечно большим числом способов определить положение точки. В самом общем случае мы покрываем плоскость двумя семействами любых кривых, которые мы обозначим через:

$$u_1 = \text{const}, \qquad u_2 = \text{const} \tag{272}$$

(*гауссова координатная система*). Все u_1-кривые переходят непрерывно друг в друга, не пересекаясь; то же действительно и для u_2-кривых. Каждая кривая u_1 должна пересекать каждую кривую u_2 только в одной точке. Для наших параметров r и φ эти кривые являются радиусами и концентрическими кругами. Каждая точка является точкой пересечения кривой u_1 и u_2, т. е. задана двумя числовыми значениями. Чтобы сделать возможным измерение на плоскости с помощью параметров, мы должны каким-нибудь образом установить эти числовые значения для выбранной параметрической сетки, т. е. установить *плотность* этой сетки во всяком месте. Мы должны установить бесконечно малую единицу длины, которая бы давала от точки к точке расстояние соседних кривых. Мы можем производить измерения, только переходя от точки к точке. Всякое „измерение" состоит в определении чисел u_1 и u_2, которыми характеризуются обе параметрические кривые, пересекающиеся в какой-нибудь определенной точке.

Если мы перейдем от плоскости к *любым образом искривленной поверхности*, то совершенно пропадет возможность измерять на ней *твердыми*, конечными (прямыми) масштабами. Любая поверхность какой бы то ни было кривизны является всегда двухмерным неэвклидовым *континуумом*. Какая-нибудь точка поверхности определяется двумя значениями параметров, причем в самом общем случае параметрические линии являются любыми пересекающимися на поверхности семействами кривых u_1 и u_2. Если на поверхности должна существовать геометрия, то здесь также должна быть определена плотность параметрической сетки.

Для примера дадим *два параметрических изображения шара*.

При этом мы исходим из уравнения шара в пространстве трех измерений с радиусом равным единице, которое мы относим к *декартовой* системе координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{273}$$

Этому уравнению удовлетворяют значения:

$$x = \cos u_1 \cos u_2, \qquad y = \cos u_1 \sin u_2, \qquad z = \sin u_1. \tag{274}$$

Положение точки на шаре задано параметрами u_1 и u_2, широтой и долготой. Параметрические линии представляют собой круги широты и долготы на шаре.

Другое параметрическое изображение шара мы получим, если мы все точки спроектируем из центра на касательную к южному полюсу плоскость $z=1$. Если декартовы координаты в касательной плоскости u_1, u_2, то:

$$x=\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}, \quad y=\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}, \quad z=\frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}. \tag{275}$$

Каждая точка на шаре определяется двумя величинами u_1 и u_2. u_1 и u_2 представляют собой не только координаты точки шара в *плоскости проекции*, но также и параметры на самом шаре. Сетка декартовых координат плоскости проекции соответствует сетке параметрических линий на шаре. Соответственно мы можем также параметры u_1 и u_2 в равенствах (274) рассматривать одновременно как координаты на плоскости. Мы получаем в том и другом случае *отображение* шара на плоскости.

В самом общем случае, аналогично уравнениям (274) и (275), параметрическое изображение любой поверхности, координаты которой в декартовой системе в трехмерном пространстве будут x, y, z, дается уравнениями:

$$x=x(u_1, u_2), \quad y=y(u_1, u_2), \quad z=z(u_1, u_2). \tag{276}$$

Каждая точка определяется двумя сопряженными значениями параметра u_1 и u_2. Ей всегда соответствует некоторая точка в декартовых координатах на некоторой плоскости, которая служит для отображения рассматриваемой поверхности.

Особого внимания заслуживает еще и следующий параметрический способ рассмотрения поверхности. Если поверхность в пространственной декартовой системе определяется уравнением:

$$z=f(x,y), \tag{277}$$

то

$$x=u_1, \; y=u_2, \; z=f(u_1, u_2)=f(x, y) \tag{278}$$

будет частным случаем по отношению к (276). Отображение точек поверхности представляет собой перпендикулярную проекцию на плоскости. Параметры являются одновременно и декартовыми координатами на плоскости проекции; параметрические линии — соответственным переносом декартовой сетки этой плоскости на поверхность.

Общим для всех различных параметрических изображений любых поверхностей является то, что точка поверхности всегда определяется двумя независимыми параметрами; поэтому вместе с Риманом мы обозначаем поверхность как двумерное многообразие. (Аналогично каждая кривая будет обозначаться как одномерное, всякое пространство как трехмерное, „мир“ как четырехмерное многообразие.)

Но в нашем двумерном многообразии еще отсутствует возможность *измерять*, т. е. отсутствует возможность создать *метрическую* геометрию. Нам недостает определения употребляемого на любой поверхности *масштаба*. Как мы уже упоминали на стр. 107 и сл., по этому поводу могут быть сделаны различные предположения. Различные возможности, которые здесь могут представиться, были Риманом в его вступительной лекции сужены настолько, что в конце концов у него *действительным для всей поверхности неизменным масштабом остается бесконечно малый элемент линии* ds, расстояние двух бесконечно близких, твердо связанных друг с другом точек. Таким путем мы приходим к совершенно определенной неэвклидовой геометрии, *римановской дифференциальной геометрии*. В ней метрика вокруг всякой точки определяется инвариантным для всей поверхности линейным элементом.

Выражение *линейного элемента* поверхности, через поверхностные параметры, мы получаем следующим образом.

Если поверхность определяется пространственными декартовыми координатами, то расстояние двух бесконечно близких ее точек будет:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{279}$$

где согласно уравнению (276) имеем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 \tag{280}$$

и аналогичные выражения для dy и dz. Следовательно, расстояние ds будет определяться уравнением:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} du_i du_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}). \tag{281}$$

При этом:

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial u_k}. \tag{282}$$

10 величин g_{ik} являются функциями параметров и постоянны в бесконечно малой области, окружающей каждую точку.

Элемент линии (281) вполне тождественен с выражением (270) в общей теории относительности. Но существует различие, на которое уже указывалось на стр. 103. В то время как в теории относительности требование инвариантности ds ставится для любых ускоренных друг относительно друга координатных систем, в геометрии Римана ds является инвариантом относительно каждого любого преобразования координат.

Если мы перемещаем по плоскости бесконечно малый масштаб, то g_{ik} принимают все время различные числовые значения; однако, ds должно оставаться неизменным. Также, если мы на одном и том же месте выберем различные параметрические сетки, то g_{ik} изменяются, в то время как ds сохраняет свое значение. Например, из уравнения (282) при параметрическом изображении (274) мы получаем для шара с радиусом равным единице (273):

$$ds^2 = du_1^2 + \cos^2 u_1 \, du_2^2, \tag{283}$$

а при параметрическом изображении (275) элемент линии:

$$ds^2 = \frac{(1+u_1^2+u_2^2)(du_1^2+du_2^2)-(u_1du_1+u_2du_2)^2}{(1+u_1^2+u_2^2)^2}. \tag{284}$$

Но в геометрии Римана *инвариантный элемент линии* (281), как мы сейчас покажем, устанавливает мероопределение на поверхности однозначным образом. В бесконечно малой области вокруг какой-нибудь точки всякая общая система координат может рассматриваться как аффинная (ср. стр. 65); обе координатные оси пересекаются под любыми углами, на каждой оси действительны различные единицы длины.

Если даны оси и мероопределение для них, то этим самым определена и геометрия в области вокруг точки P. Мы можем тогда положение соседней точки P' однозначно задать двумя числами.

Если мы дадим линейному элементу с известными коэффициентами g_{ik} длину равную единице, то тем самым мы получим в области каждой точки для локальной системы координат единичный масштаб. Одновременно также в бесконечно малой области, окружающей каждую точку, определяется в вышеприведенном смысле и параметрическая сетка на поверхности, так как мы имеем возможность переносить наше мероопределение с одного места на любое другое.

Если, например, на любой поверхности точка P', бесконечно близкая к точке P, лежит на линии u_2, проходящей через P, то для расстояния $PP' = ds = 1$ разность параметров дается уравнениями:

$$du_1 = 0, \qquad du_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}. \tag{285}$$

Следовательно, линии u_2 выбраны в месте P настолько плотно, что между P и P' укладывается $\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$ количество таких линий. Если мы поместим $PP' = ds = 1$ на линии u_2, проходящей через P, то соответственно будем иметь:

$$du_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \qquad du_2 = 0, \tag{286}$$

и количество u_1-линий определяется через $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$. Бесконечно малый масштаб, имеющий в местной системе длину равную единице, в общей системе обладает отличной от единицы длиной, зависящей от его положения, длиной, которая определяется через разности параметров. Величины $\sqrt{g_{11}}$ и $\sqrt{g_{22}}$ дают во всяком месте для параметрической системы отношение обоих масштабов аффинной системы к масштабу в локальной системе.

Угол между обеими осями аффинной системы также определяется коэффициентом g_{ik} линейного элемента. Как показывает дифференциальная геометрия [1]), *угол между двумя любыми бесконечно малыми*

[1]) См. напр. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen. 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 39.

перемещениями, составляющие которых du_1, du_2 и δu_1, δu_2 определяются уравнением:

$$\cos\alpha = \frac{g_{11}\,du_1\,\delta u_1 + g_{12}(du_1\,\delta u_2 + du_2\,\delta u_1) + g_{22}\,du_2\,\delta u_2}{\sqrt{g_{11}du_1^2 + 2g_{12}\,du_1\,du_2 + g_{22}\,du_2^2}\sqrt{g_{11}\,\delta u_1^2 + 2g_{12}\,\delta u_1\,\delta u_2 + g_{22}\,\delta u_2^2}} \tag{287}$$

Если одно перемещение совпадает с u_1-линией, а другое с u_2-линией, то мы получаем отсюда для координатного угла α:

$$\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\cdot g_{22}}}\,. \tag{288}$$

Тем самым, следовательно, определена *система осей аффинной системы.*

Далее, площадь бесконечно малого параллелограмма, лежащего между обоими перемещениями, будет [1]):

$$dJ = \sqrt{g}\begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix}, \tag{289}$$

где g обозначает определитель g_{ik}, т. е.:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{290}$$

Этим показано, что линейный элемент однозначно определяет собой геометрию на поверхности. Для различных параметрических изображений одной и той же поверхности, т. е. для различных форм линейного элемента, как, например, (283) и (284), мы приходим к различным видам геометрии.

Но надо заметить, что коэффициенты линейного элемента определяют собой *геометрию на поверхности, но не саму поверхность.* Представим себе две поверхности, на которых от точки к точке линейные элементы по величине друг с другом совпадают; тогда мы можем одну поверхность отобразить на другой так, что всякой кривой на одной поверхности соответствует одинаковой длины кривая на другой поверхности. Одна поверхность налагается на другую или одна поверхность может быть изогнута и приложена к другой. Если даны коэффициенты линейных элементов для каждой точки, то определяемая ими геометрия действительна для всех наматывающихся друг на друга поверхностей.

В связи с этим следует упомянуть еще одно выражение, обобщение которого на многомерные многообразия играет важную роль в теории относительности. *Гауссовой мерой кривизны* поверхности в какой-нибудь точке называют выражение:

$$R = \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2}\,, \tag{291}$$

[1]) См. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen. 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 45.

где ρ_1 и ρ_2 обозначают оба *главных радиуса кривизны* для выбранной точки поверхности (экстремальные значения радиусов кривизны всех кривых пересечения). Но гауссова кривизна может быть выражена через одни только коэффициенты g_{ik} линейного элемента в этой точке и их первые и вторые производные.

Мы имеем [1]):

$$
\begin{aligned}
R = -\frac{1}{4\,(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2}\Big\{ & g_{11}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}-2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}+\right.\\
& \left.+\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2\right]+g_{12}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}+\right.\\
& \left.+4\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}-2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}-2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right]+\\
& +g_{22}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}-2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}+\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)^2\right]+\\
& +2\left(g_{11}\,g_{12}-g_{12}^2\right)\left(2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1\,\partial u_2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2}\right)\Big\}.
\end{aligned}
\qquad (292)
$$

Как уже вытекает из определения, R является инвариантом относительно любых преобразований координат; в то же время оно сохраняет для всех наматывающихся друг на друга поверхностей в соответствующих точках одно и то же значение. Одновременно из уравнения (292) вытекает еще, что поверхность тогда и только тогда во всех точках имеет *кривизну нуль*, следовательно является *эвклидовой плоскостью* (или налагающейся на нее поверхностью), когда все g_{ik} от точки к точке постоянны.

Установленные через g_{ik} мероопределения всех наматывающихся друг на друга поверхностей, однако, не ограничиваются только этими поверхностями; они справедливы также на „плоскости, служащей для отображения изучаемой поверхности“ (ср. стр. 110), если только мы дадим линейному элементу на ней вид (281). Таким образом геометрия на шаре и на отображающей поверхность шара плоскости будет одна и та же, если на последней элемент линии имеет вид (283) или (284). При этом эта плоскость будет иметь кривизну, отличную от нуля.

В бесконечно малом, вследствие неизменности линейного элемента ds, всегда имеет место эвклидова геометрия. В бесконечно малой области вокруг всякой точки общие координаты могут быть заменены декартовыми, и линейный элемент (281) линейной однородной подстановкой между дифференциалами может быть приведен к форме:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad (293)$$

соответствующей уравнению (268).

Такую декартову систему, существующую в бесконечно малой области вокруг каждой точки, мы опять назовем локальной системой. В ней действительна теорема Пифагора (293).

---

[1]) См. напр. J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie. Leipzig 1913, S. 120.

Однако, следует обратить внимание на то, что dx и dy не связаны зависимостью (280) с приращением параметров du_1 и du_2; dx и dy не являются полными дифференциалами. Для любой произвольно взятой поверхности не существует параметрического изображения, т. е. не существует аналитической зависимости:

$$x = f_1\ (u_1,\ u_2), \quad y = f_2\ (u_1,\ u_2) \tag{294}$$

между параметрами такого вида, чтобы линейный элемент (281) на всей поверхности принимал простую форму (293). Только в *плоскости* и в налагающихся на нее (так наз. *развертывающихся*) поверхностях возможно такое параметрическое изображение, потому что только в этом случае g_{ik} для *всей* поверхности являются постоянными и всегда существует преобразование, переводящее линейный элемент (281) в (293).

Те же самые геометрические соотношения, которые мы здесь изложили для двух измерений, существуют также для трех и большего числа измерений, вообще говоря—для многообразий n-ой степени. Элемент линии имеет форму (270), причем в самом общем случае надо суммировать от 1 до n. Коэффициенты g_{ik} являются функциями места и времени. Они устанавливают мероопределение во всяком месте n-мерного континуума. Если они имеют везде постоянные значения или если имеются преобразования, с помощью которых они могут переходить в таковые, то этот континуум является эвклидовым.

При более чем двух измерениях на место гауссовой кривизны появляется тензор четвертого ранга, *тензор Римана-Кристоффеля* (Riemann-Christoffel), из которого через композицию получается *тензор кривизны* и *инвариантная кривизна* (см. § 13). Эти тензоры также выражаются только через g_{ik} и их первые и вторые производные, и они являются единственными существующими тензорами подобного рода [1]). Их следует понимать только как математические соотношения; им недостает наглядности, которая свойственна кривизне поверхности.

Однако возвратимся снова к теории относительности. Как уже упоминалось на стр. 106, на основании соображений чисто физического характера — а именно предположения о справедливости принципа относительности в локальной системе — мы пришли к требованию инвариантности четырехмерного линейного элемента для всех встречающихся в общей теории относительности координатных систем. *Теория относительности ставит при этом задачу сформулировать общие законы природы, которые при инвариантности вышеуказанного линейного элемента оставались бы неизменными* для всех допустимых систем.

На языке *геометрии* это значит: в нашем четырехмерном пространственно-временном *континууме* должны быть найдены инвариантные соотношения, причем сам линейный элемент (270) остается инвариантным. Инвариантность должна относиться ко всем координатным системам, любым образом движущимся друг относительно

[1]) Ср. M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, II Bd., § 10.

друга или в которых любым образом изменяются в пространстве и во времени поля тяготения.

Мы дадим этой задаче еще более общий характер, если потребуем *инвариантности относительно любых координатных преобразований* в четырехмерном пространственно-временном континууме. Мы кладем, следовательно, в основу четырехмерный „мир", причем каждая мировая точка определяется четырьмя параметрами. x_1, x_2, x_3 являются пространственными координатами, x_4 — временной. Всякий закон природы представляет собой систему дифференциальных уравнений (ср. стр. 65) между такими параметрами и *он должен оставаться неизменным, если переход из одной системы в другую происходит с помощью общей подстановки*:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad i = 1 \text{ до } 4. \tag{295}$$

При этом характер мероопределения устанавливаются инвариантным линейным элементом. Так как в движущихся каким-нибудь образом системах пространственные и временные координаты меняются (ср. стр. 103), то наше общее требование во всяком случае содержит в себе эти изменения. Это последнее требование приводит нас *к полному соответствию с дифференциальной геометрией Римана*, требования инвариантности в которой распространяются также на *любые* преобразования координат при одновременной инвариантности линейного элемента. Мы оставляем открытым вопрос о том — требуется ли природой вещей с самого начала какое-либо дальнейшее ограничение в постановке этой проблемы в физике (ср. стр. 117) [1].

Но надо разрешить еще один вопрос. Положение, что при наших наблюдениях мы определяем не декартовы координаты, а параметры, не ставит ли нас в противоречие с опытом?

Все физические измерения в конечном счете являются пространственными и временными измерениями. Мы измеряем масштабами, которые мы до сих пор рассматривали как неизменные; часами, ход которых мы считали постоянным. Однако, это гипотезы, которые мы можем отбросить, не натолкнувшись при измерении на противоречия, потому что *наши измерения покоятся только на констатировании совпадений пространственных и временных*. Мы, по возможности, приводим точки к пространственному наложению с другими точками; мы наблюдаем совпадение события с определенным положением стрелок наших часов. Если даже масштаб любым образом искривляется или растягивается, если часы изменяют свой ход, как только мы их переносим в различные места пространства, процесс измерения, как таковой, остается при этом прежним. Совпадения могут иметь место в параметрах, так же как и в декартовых координатах. Следовательно, в этой части проблемы не приходится ожидать противоречия с требованием общей теории относительности. Скорее можно ждать противоположного.

Факт, что мы можем наблюдать только совпадения (так же как и то, что мы воспринимаем только относительное движение), показывает,

---

[1]) См. при этом E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate. Annalen der Physik (4) Bd. 53, 1917, S. 575.

что нет никакого основания отдавать особое предпочтение некоторым координатным системам. *Только такие законы природы мы сможем рассматривать как общие, которые не связаны ни с какой, особым образом определенной системой.* В этом положении виден существенный прогресс теории относительности по сравнению с классической физикой.

При установлении этих законов природы линейный элемент, аналогично соотношениям римановской геометрии, будет представлять собой неизменный масштаб во всем пространственно-временном континууме. Если даны g_{ik}, то известны мероопределения во всяком месте „мира". *g_{ik} описывают метрические свойства нашего четырехмерного континуума для каждой мировой точки.*

Правда, здесь *совершенно пропадает различие между пространственными и временными координатами.* Но если мы хотим сохранить это различие, присущее нашему представлению о времени и пространстве, то мы должны сохранить и далее *деление „мира" на пространство и время.* Поэтому в линейном элементе (207) коэффициенты g_{ik} не могут быть совершенно произвольными величинами; они должны быть подчинены известным условиям. Согласно принятому на стр. 32 выбору координат для $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$, ds^2 должно быть положительно, для $dx_4 = 0$, напротив, отрицательно. Необходимыми и достаточными для этого условиями являются [1]):

$$\begin{gathered} g_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad g_{44} > 0. \end{gathered} \tag{296}$$

Таким образом для законов природы речь может итти только о таких координатных системах, для которых коэффициенты g_{ik} удовлетворяют условию (296).

Во многих случаях мы можем придать линейному элементу (270) еще более специальную форму. В нашей локальной системе линейный элемент был представлен уравнением (268). Координатная система, к которой принадлежит этот линейный элемент, является пространственной декартовой системой. Вещественная ось времени проходит перпендикулярно к трем мнимым пространственным осям (ср. стр. 32), следовательно перпендикулярно к любому пространственному направлению. Мы можем сказать: *вектор времени направлен перпендикулярно к пространству.* Если время должно сохранить это особое положение относительно пространственных координат также и в общей теории относительности, если оно и в дальнейшем должно быть как вектор направлено перпендикулярно ко всякому пространственному направлению, то линейный элемент должен принять форму:

$$ds^2 = f^2\, dx_4^2 - d\sigma^2, \tag{297}$$

---

1) Ср. M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, Bd. II, S. 40 и 253.

где:

$$d\sigma^2 = \sum_{i, k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k. \qquad (297')$$

Следовательно, наши коэффициенты g_{ik} будут здесь:

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &= -\gamma_{ik} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3) \\ g_{4i} &= g_{i4} = 0, \quad g_{44} = f^2. \end{aligned}\right\} \qquad (298)$$

Коэффициенты γ_{ik} описывают геометрию, существующую от точки к точке в нашей любым образом движущейся пространственной системе координат или в соответствующем поле тяготения; f^2 показывает связь времени с этой системой. Если мы ограничим наши любые четырехмерные координатные преобразования такими, которые относятся к любым образом движущимся друг относительно друга пространственным системам, у которых, следовательно, время и пространство существуют раздельно, то линейный элемент всегда приводится к форме (297).

На этом линейном элементе мы объясним также, каким образом с помощью g_{ik} мы можем определить во всяком месте метрику общей пространственно-временной системы координат. Мы будем исходить из соображений, которые на стр. 112 были приведены для плоскости.

В специальной теории относительности линейный элемент $ds^2 = dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ имеет для всякой прямолинейно и равномерно движущейся системы одну и ту же величину. При этом было допущено, что *внутри* системы каждый конечный масштаб сохраняет свою длину, каждые часы свой ход, если мы их перенесем из *одной* системы в другую, равномерно движущуюся относительно первой. Длины стержня, ход часов только тогда зависят от скорости системы, когда мы их определяем с системы, находящейся в состоянии покоя.

В общей теории относительности линейный элемент $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ является инвариантом для любого преобразования *параметров* x_i. Значение ds получается путем измерений в локальной системе с помощью бесконечно малых масштабов и с помощью часов, причем относительно тех и других мы предполагаем, что они не изменяются при переносе из одной локальной системы в другую. Таким образом мы должны исследовать, как ведут себя масштабы и часы с точки зрения общей системы. Если мы не находимся сами в том месте, где должно происходить измерение, то нельзя непосредственно применять ни бесконечно малые масштабы, ни часы. Мы воспринимаем исключительно разности параметров в пространстве и во времени, и они для одного и того же неизменного ds различны от места к месту.

Рассмотрим пространственное расстояние двух бесконечно близких, жестко связанных друг с другом точек. Для него $dt = 0$, и если мы его выберем как масштаб, то согласно уравнению (297) $ds^2 = -1$ (измеренное в локальной системе). Это значение является инвариантом для любого четырехмерного координатного преобразования; ds сохраняет свое значение во всяком месте общей системы. Если мы поместим в каком-нибудь месте обе точки так, что соединяющая их линия совпадает где-нибудь с осью x_1 нашей общей системы, то $dx_2 = dx_3 = 0$ и $g_{11}\,dx_1^2 = -1$, или:

$$dx_1 = \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}\,. \tag{299}$$

Таким образом конечные точки *твердого* стерженька $ds = \sqrt{-1}$ не находятся друг от друга в нашей параметрической сетке на абсолютном расстоянии, равном единице; разность их координат или параметров определяется уравнением (299). Но так как в общей теории относительности естественное измерение внутри одной системы координат состоит в определении параметрических разностей, — мы можем измерять с помощью эвклидовой геометрии только в непосредственной близости нас окружающего пространства,—то в каждом месте длины будут зависеть от коэффициентов линейного элемента. На ряду с постоянной длиной в локальной системе появляется переменная длина в общей системе. То же действительно и для времени. Потому что, когда мы рассматриваем чисто временное расстояние $ds^2 = f^2\,dx_4^2 = 1$, то во всяком месте параметрическая разность будет:

$$dx_4 = \frac{1}{f}\,. \tag{300}$$

Величина f является не чем иным, как скоростью света в общей системе координат. В самом деле, если пространственно-временное расстояние ds в уравнении (297) возникло вследствие того, что точка P передвинулась со скоростью света к бесконечно близкой точке P', то согласно уравнению (268) $ds = 0$; а отсюда следует, что в общей системе координат для движения со скоростью света мы имеем:

$$f = \frac{d\sigma}{dx_4}\,. \tag{301}$$

Вообще f отлично от 1 и является функцией параметров (ср. стр. 97). Здесь следует еще раз указать на то, что для материи и электромагнитной энергии не существует скоростей бóльших скоростей света. Если бы скорость $\frac{d\sigma}{dx_4}$ была больше f, то согласно уравнению (297) ds^2 должно было бы быть отрицательным. Но согласно с выводами стр. 36 для движущейся точки такой случай не может иметь места.

Таким образом для общей параметрической системы (бесконечно малые) длины стержня и ход часов оказались переменными в пространстве и во времени; оба являются функциями коэффициентов линейного элемента, которые сами в свою очередь на основании уравнения (269) являются функциями параметров x_i. Однако g_{ik} не зависят от рода локальной системы. Если мы переходим от одной общей системы K к другой через уравнение (295), то, независимо от всякой локальной системы, будет:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k = g'_{ik}\,dx'_i\,dx'_k\,. \tag{302}$$

Следовательно g_{ik} являются только лишь функциями параметров системы K, к которой они относятся.

Но коэффициенты g_{ik} определяют в теории относительности не только одну метрику; они имеют значительно более широкое значение, пояснить которое можно следующим образом. В специальной теории относительности, т. е. для движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга систем, при условии указанного на стр. 106 выбора координатной системы, в любых *конечных* областях имеют место следующие значения для g_{ik}:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix} \tag{303}$$

Предоставленная самой себе материальная точка движется в такой области прямолинейно и равномерно.

Если же мы перейдем путем любой подстановки (295) к произвольно движущейся пространственно-временной системе, то g_{ik} будут любыми функциями x_i'. Движение нашей точки является относительно новой системы координат криволинейным и неравномерным; однако, оно не зависит от природы самой движущейся материальной точки. Материальная точка находится в поле тяготения. В зависимости от свойств поля тяготения g_{ik} являются все время разными функциями параметра. *В любой пространственно-временной системе 10 коэффициентов g_{ik} описывают поле тяготения во всяком месте системы.* Напротив, в локальной координатной системе g_{ik} постоянны и особыми преобразованиями могут быть приведены к значениям (303). По некоторой причине, которая будет объяснена позже, мы называем *g_{ik} потенциалами поля тяготения.*

Те самые коэффициенты, которые *описывают метрическое поле, определяют, следовательно, и поле тяготения.* Если мы допустим, что поле тяготения однозначно определяется материей мирового пространства, *то это значит, что материя определяет метрику пространства и времени* [1]. *Во всяком месте пространства геометрия определяется окружающей материей.* Таким образом пространство совершенно потеряло свою объективность и самостоятельность. Теория относительности не только не знает больше никаких движений относительно пространства, но и пространство само по себе также не обладает больше никакими геометрическими свойствами. Понятие „время" также утратило свою самостоятельность. Каждая точка в пространстве имеет *свое* время, и понятие об одинаковой продолжительности времени имеет смысл только для одной точки.

Таким образом мы подошли к тому месту, с которого мы можем обозреть основные идеи общей теории относительности.

Уже специальная теория относительности привела к тому, что

---

[1]) Ср. здесь все же H. W e y l, Raum, Zeit, Materie. Berlin 1918, S. 176.

материю и электромагнитное поле следует рассматривать как одно целое (ср. стр. 91); принцип эквивалентности снова показал нам, что материя и электромагнитная энергия ведут себя совершенно одинаково в поле тяготения. Одно целое, объединяющее материю и электричество, которые в их совокупности можно назвать „полем", является, следовательно, извечно существующим в мире, воспринимаемым в вечном движении и изменении, но в целом, однако, неразрушимым.

На ряду с этим стоит и другое. В нашем действительном, заполненном материей пространстве, всюду, во всяком месте, в котором сама материя (или „поле") не присутствует, действует все-таки энергия, которую мы называем тяготением. Появляются физические свойства, *поле тяготения*, которое связано с пространством и временем.

Материя обусловливает это поле тяготения. Она обусловливает также метрические свойства пространства и времени. Если мы дадим совокупности физических свойств пространства название „эфира" или „эфира тяготения" [1]), то принцип относительности приведет к положению: „поле" во всякое время определяет собой „эфир" и кроме того однозначно определяет метрические свойства пространства и времени. Коэффициенты g_{ik}, устанавливающие поле тяготения и метрику пространства и времени, имеют решающее значение для всех явлений движения; сами они являются функциями материи и электричества.

Таким образом задача теории относительности заключается в том, чтобы установить общие инвариантные законы природы для всех явлений движения, а также в том, чтобы вывести инвариантные законы для зависимости g_{ik} от материи. В своей *теории тяготения Эйнштейн* разрешил эту задачу или, по меньшей мере, дал основные положения для ее разрешения. При этом мы требуем *инвариантности общих законов природы* относительно любых систем *в предположении, что в бесконечно малой области при соответствующем выборе координатных систем действительна специальная теория относительности* (ср. стр. 106); другими словами, мы требуем *инвариантности в четырехмерном пространственно-временном континууме Римана*.

Однако, прежде чем мы обратимся к разрешению задач общей теории относительности, мы должны еще раз возвратиться к тензорному анализу.

---

[1]) Мы сохраняем, следовательно, понятие „эфир" для той реальности, которая имеется в пространстве в местах, где отсутствует материя и электромагнитная энергия. В этом смысле мы можем эфир тяготения просто считать „пространством" и противопоставлять „материи". Насколько мы имеем право и в других отношениях считать эфир средой, которая оказывается лишенной всех механических свойств, — об этом см. A. Einstein, Äther und Relativitätstheorie, Berlin 1920.

Надо иметь в виду основное различие между эфиром классической физики и эфиром теории относительности. Первый, световой эфир был совокупностью физических свойств, принадлежащих в равной мере каждой точке пространства и существующих самостоятельно и неизменно. Эфир теории относительности связан с присутствующей в пространстве материей (и электромагнитным полем) и изменяется пространственно и временно.

§ 12. Общий тензорный анализ (II часть). Основные уравнения общей теории относительности.

В § 7 мы познакомились с общим тензорным анализом в такой мере, в какой это необходимо для понимания специальной теории относительности.

Мы должны теперь заняться специальным *вопросом о получении* в самом общем случае *новых тензоров* посредством *дифференцирования*; для этого нам необходимо сделать несколько предварительных замечаний.

Прежде всего заметим следующее: определяемый уравнением (295) линейный элемент является инвариантом относительно любых преобразований координат. Коэффициенты g_{ik} линейного элемента образуют, следовательно, как мы уже упоминали на стр. 67, *симметричный ковариантный тензор II ранга*, который мы называем *фундаментальным тензором*.

Но существует также и *контравариантный фундаментальный тензор*, который мы можем вывести из ковариантного. Покажем, что если g является определителем, составленным из g_{ik} $(= g_{ki})$, т. е. если:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} = |g_{ik}|, \tag{304}$$

то субдетерминанты Δ_{ik}, соответствующие g_{ik}, деленные на g, образуют составляющие g^{ik} $(= g^{ki})$ некоторого контравариантного тензора.

Если принять во внимание, что определитель g равен

$$\sum_{k=1}^{4} g_{ik}\,\Delta_{ik},$$

и затем, что определитель, у которого два горизонтальных или два вертикальных ряда имеют одно и то же значение, равен нулю, то получим следующее отношение:

$$g_{ir} g^{kr} = \delta_i^k \begin{cases} = 1 & \text{для } i = k \\ = 0 & \text{для } i \neq k \end{cases} \tag{305}$$

Здесь суммирование проведено только по r (композиция). δ_i^k сам является тензором (ср. стр. 64), который мы называем *смешанным фундаментальным тензором*.

Таким образом имеем:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k = g_{is}\,\delta_k^s\,dx_i\,dx_k = g_{is} g_{kt} g^{st}\,dx_i\,dx_k. \tag{306}$$

Заметим, что:

$$g_{is}\,dx_i = d\xi_s \quad \text{и} \quad g_{kt}\,dx_k = d\xi_t \tag{307}$$

являются ковариантными четырехмерными векторами; имеем:

$$ds^2 = g^{st} d\xi_s d\xi_t. \qquad (308)$$

Следовательно, коэффициенты g^{st} являются составляющими симметричного контравариантного тензора II ранга, который мы и называем *контравариантным фундаментальным тензором*. Из составляющих ковариантного фундаментального тензора мы всегда можем вывести составляющие контравариантного тензора и наоборот.

Что касается знака g, то его надо определить особо. Согласно уравнению (289) величина бесконечно малого четырехмерного пространственного объема будет:

$$dJ = \sqrt{g}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Величина dJ не зависит от выбора координатной системы. Для локальной системы, согласно принятому на стр. 106 выбору осей, $\sqrt{g}$ во всех точках мнимая величина, так как при этом g_{ik} переходят в значения (303). Величины $dX_1, \ldots$, напротив, вещественные (ср. стр. 29). Мы *допустим*, что $dx_1, \ldots$ для всякой системы также вещественны; тем самым мы ограничиваем выбор координат. В таком случае dJ всегда мнимая величина. Но положим теперь, начиная с этого момента, — и это нисколько не затрагивает наших выводов относительно ковариантных и контравариантных фундаментальных тензоров, — что g должно обозначать отрицательное значение определителя, т. е. что:

$$g = -|g_{ik}|; \qquad (309)$$

тогда dJ будет вещественным. Величина g не может менять своего знака ни при каком выборе координат.

Для некоторых *специальных* координатных систем мы можем иметь $\sqrt{g} = 1$[1]. За исключением этого ограничения g_{ik} могут все еще подвергаться любым изменениям; существует, следовательно, бесконечно много координатных систем, при которых $\sqrt{g} = 1$. Для всех таких систем соотношения теории относительности принимают особенно простые формы. Поэтому для многих исследований целесообразно перейти к такого рода системам. Этим упрощением мы будем пользоваться здесь не раз, так как наша цель — дать очерк закономерностей нашей теории. Но прежде всего, конечно, нам надо получить основные законы в самом их общем виде. В дальнейшем же выбор специальных систем приведет нас быстрее к нужным результатам, чем общие уравнения. Но, конечно, вопрос о том, насколько таким образом полученные результаты будут правильны и в общем случае, насколько правильность их ограничивается нашим специальным выбором координат, может быть решен только дальнейшими исследованиями от случая к случаю.

Выведем теперь *уравнение геодезической линии в нашем четырех-*

---

[1] Это означает, что мы ограничиваемся теми преобразованиями координат, для которых функциональный определитель равен 1.

мерном пространственно-временном континууме. Линейный элемент ds, т. е. расстояние двух соседних пространственно-временных точек P и P' (мы допускаем, что P' получается из P путем перемещения) имеет, как инвариант, независимое от координатной системы значение. То же самое будет правильно и для любой мировой линии, проходящей между двумя неподвижными точками P_1 и P_2, длина которой равна $\int\limits_{P_1}^{P_2} ds$. Если мы определим *геодезическую мировую линию* как такую, длина которой имеет *наименьшее* (экстремальное) *значение*, для которой справедливо, следовательно, соотношение:

$$\delta \int\limits_{P_1}^{P_2} ds = 0, \tag{310}$$

то уравнение (310) также является независимым от координатной системы. Но уравнение (310) геодезической линии приводит *к четырем дифференциальным уравнениям*, также определяющим геодезическую линию независимо от координатной системы. При этом сам линейный элемент ds, согласно установленному нами в § 11 требованию, инвариантен.

Если мы будем рассматривать длину дуги L пространственно-временно-кривой как функцию некоторого параметра t, который в точках P_1 и P_2 принимает значение a и b, то:

$$L = \int\limits_a^b ds = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}\, dt = \int\limits_a^b F\, dt, \tag{311}$$

где:

$$F^2 = g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}. \tag{312}$$

Таким образом для геодезической линии имеем:

$$\int\limits_a^b \delta F dt = 0. \tag{313}$$

Принимая во внимание, что $g_{ik} = g_{ki}$, из уравнения (312) получаем:

$$2F\delta F = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \delta x_r + 2g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \delta \left(\frac{dx_k}{dt} \right). \tag{314}$$

Допустим теперь, что параметр t является длиной s дуги кривой. Тогда $F = 1$, и мы имеем:

$$\delta F = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta x_r + g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{d\delta x_k}{ds}. \tag{315}$$

Вторым слагаемым в интеграле $\int\limits_a^b \delta F ds$ будет:

$$\int\limits_a^b g_{ik} \frac{dx_i}{ds} d\,\delta x_k = \left[g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \delta x_k \right]_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{ds}\left(g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \right) ds\,\delta x_k. \qquad (316)$$

Первый член в правой части уравнения пропадает, так как вариации δx_k в конечных точках кривой равны нулю. Из уравнения (315) мы получаем, следовательно:

$$\int\limits_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta x_r - \frac{d}{ds}\left(g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \right) \delta x_k \right\} ds = 0. \qquad (317)$$

δx_r и δx_k являются произвольными вариациями.

Во втором слагаемом мы можем заменить значок k значком r, так как в каждой части уравнения (317) надо суммировать по r и k от 1 до 4. Таким образом из уравнения (317) следует:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{ir} \frac{dx_i}{ds} \right) = 0. \qquad (318)$$

Таким образом мы получим четыре уравнения ($r = 1, 2, 3, 4$), которые мы преобразуем еще дальше.

Сначала имеем:

$$g_{ir} \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0. \qquad (319)$$

Обратим внимание, что вследствие того, что суммирование производится по i и k, второе слагаемое можно написать в виде:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds};$$

введем *символ Кристоффеля первого рода*, т. е. положим

$$\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right); \qquad (320)$$

тогда уравнение (319) примет вид:

$$g_{mr} \frac{d^2 x_m}{ds^2} + \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0. \qquad (321)$$

Далее имеем:

$$g^{rt} g_{mr} \frac{d^2 x_m}{ds^2} = g_m^t \frac{d^2 x_m}{ds^2} = \frac{d^2 x_t}{ds^2}. \qquad (322)$$

Если мы воспользуемся *символом Кристоффеля второго рода*, т. е. положим

$$g^{rt} \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} = \Gamma^t_{ik}, \qquad (323)$$

то получим, наконец, для системы уравнения *геодезической линии* следующую систему:

$$\frac{d^2 x_t}{ds^2}+\left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0. \tag{324}$$

Эти четыре уравнения ($t=1, 2, 3, 4$) при любых координатных преобразованиях сохраняют свой вид; они существуют *независимо от особого выбора координатных систем*. Величины $\left[{ik \atop t} \right]$ и $\left\{ {ik \atop r} \right\}$ симметричны относительно i и k, в чем можно убедиться, если в уравнении (320) i и k переменить местами.

Геодезическую линию можно также определить как такую кривую, для которой линейные элементы каждых двух соседних точек параллельны, или как кривую, которая всегда сохраняет свое направление. Исходя из этих определений, придем для геодезической линии к тем же дифференциальным уравнениям (324) [1]. Этот путь имеет очень большое значение для систематического построения дифференциальной геометрии. Он позволяет установить, что в дифференциальной геометрии геодезическая линия имеет то же значение, что и прямая в эвклидовой геометрии; это обстоятельство поясняет, почему в дальнейшем мы отдадим преимущество геодезической линии перед всеми другими линиями. Она будет, как мы сейчас увидим, той кривой, вдоль которой мы будем перемещаться при дифференцировании.

Теперь же мы можем *перейти к образованию новых тензоров посредством дифференцирования*.

Пусть нам задано в пространстве *скалярное поле* φ (ср. стр. 68). Следовательно, φ инвариантно относительно любого координатного преобразования (295). Изменение $d\varphi$ при перемещении в некотором определенном пространственно-временном направлении также инвариантно; точно так же и $\psi=\frac{d\varphi}{ds}$. Но

$$\psi=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}=\varphi_i\frac{dx_i}{ds}. \tag{325}$$

Следовательно, как мы уже показали на стр. 68, $\varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ представляет собой *ковариантный тензор I ранга*. Далее, по тем же соображениям, что и раньше, $\frac{d\psi}{ds}$ также является инвариантом.

Так как:

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d^2 x_i}{ds^2}, \tag{326}$$

то отсюда мы еще ничего не можем сказать о существовании какого-либо тензора.

---

[1]) Ср. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 3 и 4 издания. Также H. Bauer, Mathematische Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins. Leipzig und Wien, 1922.

Но если мы положим, что *кривая, вдоль которой мы дифференцируем, является геодезической пространственно-временной линией*, то имеем:

$$\frac{d^2 x_t}{ds^2} = -\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds};$$

и, следовательно,

$$\frac{d\psi}{ds} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} \right] \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}. \tag{327}$$

Отсюда следует, что:

$$\psi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \varphi_t \tag{328}$$

представляет собой *ковариантный тензор II ранга*, составленный из компонента тензора I ранга $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ согласно выражению (328). ψ_{ik} симметричен относительно i и k. Допущение, что мы должны дифференцировать вдоль геодезической линии, не означает никакого ограничения в соотношении (328). В самом деле мы можем переместиться от одной точки ко всякой соседней точке по геодезической линии. Наше правило составления нового тензора, которое, правда, не имеет уже больше той простой формы, которую оно имело в специальной теории относительности, применимо, следовательно, всегда. Оно существует для каждого преобразования координат и является таким образом *общеинвариантным*. Так как мы все время перемещаемся по геодезической линии, то вместе с тем будет инвариантен и четырехмерный линейный элемент.

При выводе уравнения (328) мы сделали допущение, что тензор φ_i представляет собой градиент скаляра $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Все же правило (328) составления нового тензора существует для любого ковариантного тензора I ранга.

Доказательство проводится следующим путем. Если μ и ν скаляры, то $\mu \frac{\partial \nu}{\partial x_i}$ является ковариантным тензором I ранга. Это справедливо также и для

$$S_i = \mu_{(1)} \frac{\partial \nu_{(1)}}{\partial x_i} + \mu_{(2)} \frac{\partial \nu_{(2)}}{\partial x_i} + \mu_{(3)} \frac{\partial \nu_{(3)}}{\partial x_i} + \mu_{(4)} \frac{\partial \nu_{(4)}}{\partial x_i}, \tag{329}$$

где $\mu_{(1)}, \nu_{(1)}$ . . . тоже являются скалярами.

Но любой тензор I ранга с составляющими φ_i, которые являются функциями x_i, можно представить в виде (329). Надо только положить:

$$\left.\begin{matrix} \mu_{(1)} = \varphi_1, & \mu_{(2)} = \varphi_2, & \mu_{(3)} = \varphi_3, & \mu_{(4)} = \varphi_4 \\ \nu_{(1)} = x_1, & \nu_{(2)} = x_2, & \nu_{(3)} = x_3, & \nu_{(4)} = x_4 \end{matrix}\right\}. \tag{330}$$

Если, следовательно, с помощью любого тензора I ранга φ_i через выражение:

$$\varphi_{ik}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\varphi_t \tag{331}$$

действительно можно составить тензор II ранга ψ_{ik}, то достаточно доказать это для тензора S_i или еще проще для $\mu\frac{\partial\nu}{\partial x_i}$. Но согласно уравнению (328)

$$\mu\frac{\partial^2\nu}{\partial x_i\partial x_k}-\mu\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\frac{\partial\nu}{\partial x_t}$$

является тензором II ранга, — так же как и

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\nu}{\partial x_k}.$$

Сложение обоих тензоров дает тензор:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\frac{\partial\nu}{\partial x_i}\right)-\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\left(\mu\frac{\partial\nu}{\partial x_t}\right) \tag{331'}$$

Сравнение с (331) показывает, что последнее соотношение действительно применимо к любому ковариантному тензору I ранга φ_i.

С помощью выражения (331) нами дано только одно из соотношений, показывающих, каким способом, применимым в любой координатной системе, путем дифференцирования мы можем получать новые тензоры высших рангов. Сейчас мы приведем еще несколько других аналогичных правил составления новых тензоров, которые понадобятся позднее. На выводе их мы не будем останавливаться. Ограничимся указанием на книгу Г. Вейля: „Пространство, время, материя" или А. Эйнштейна: „Основы общей теории относительности".

Если принять во внимание, что индексы показывают характер тензора, то нижеследующие уравнения понятны без дальнейших объяснений.

Имеем:

$$\psi_k^i=\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_k}+\begin{Bmatrix} kt \\ i \end{Bmatrix}\varphi^t \tag{332}$$

$$\psi_{kl}^i=\frac{\partial\varphi_k^i}{\partial x_l}+\begin{Bmatrix} lt \\ i \end{Bmatrix}\varphi_k^t-\begin{Bmatrix} kl \\ t \end{Bmatrix}\varphi_t^i \tag{333}$$

$$\psi_l^{ik}=\frac{\partial\varphi^{ik}}{\partial x_l}+\begin{Bmatrix} lt \\ i \end{Bmatrix}\varphi^{tk}+\begin{Bmatrix} lt \\ k \end{Bmatrix}\varphi^{it}. \tag{334}$$

Следующая группа уравнений, вывод которых мы здесь также не даем, представляет собой соотношения между коэффициентами g_{ik} фундаментального тензора. Появляющаяся при этом величина g опять определяется уравнением (309).

Мы имеем следующие соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_r}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log g}{\partial x_r}=\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}=-\frac{1}{2}g_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} \qquad (335)$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r}=-g^{is}g^{kt}\frac{\partial g_{st}}{\partial x_r} \qquad (336)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}=-g_{is}g_{kt}\frac{\partial g^{st}}{\partial x_r} \qquad (337)$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r}=-\left(g^{is}\begin{Bmatrix} sr \\ k \end{Bmatrix}+g^{ks}\begin{Bmatrix} sr \\ i \end{Bmatrix}\right) \qquad (338)$$

$$\begin{Bmatrix} kr \\ k \end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_r}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log g}{\partial x_r}. \qquad (339)$$

Прибавим сюда, наконец, еще две группы уравнений, получающихся из (333) и (334) путем композиции и позволяющих сводить тензоры II ранга к тензорам I ранга. Эти уравнения будут:

$$\psi_i=\frac{\partial\varphi_i^k}{\partial x_k}+\begin{Bmatrix} kt \\ k \end{Bmatrix}\varphi_i^t-\begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}\varphi_t^k \qquad (340)$$

$$\psi^i=\frac{\partial\varphi^{ki}}{\partial x_k}+\begin{Bmatrix} kt \\ k \end{Bmatrix}\varphi^{ti}+\begin{Bmatrix} kt \\ i \end{Bmatrix}\varphi^{kt} \qquad (341)$$

или

$$\psi_i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi_i^k)}{\partial x_k}-\begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\varphi_s^r \qquad (342)$$

$$\psi^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\varphi^{ki}}{\partial x_k}+\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}\varphi^{rs}. \qquad (343)$$

Уравнение (332) приводит через композицию к скаляру:

$$\varphi=\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_i}+\begin{Bmatrix} it \\ i \end{Bmatrix}\varphi^t=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i}. \qquad (344)$$

Исходя из только что приведенных дифференциальных соотношений, перейдем теперь к составлению *основых уравнений общей теории относительности*. Согласно равенству (166) в специальной теории относительности выражение $F_{ik}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$, как разность двух тензоров II ранга с переставленными индексами, являлось антисимметричным тензором. Соответствующий тензор мы получим в общей теории (т. е. как соотношение, инвариантное для любых преобразований координат), если мы составим разность:

$$F_{ik}=\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r\right)-\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}-\begin{Bmatrix} ki \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r\right)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}. \qquad (345)$$

F_{ik} сохраняет, следовательно, ту же самую форму, что и прежде.

Поэтому в общей теории относительности также справедливо соотношение, соответствующее уравнениям (167) и (188):

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0. \qquad (346)$$

Для преобразования ковариантных тензоров в контравариантные и обратно при помощи (ковариантного или контравариантного) фундаментального тензора, в отличие от специальной теории относительности применимы теперь общие соотношения (ср. стр. 67):

$$\begin{aligned} a_i &= g_{ik} a^k; \quad a^i = g^{ik} a_k; \\ a_{ik} &= g_{il} g_{km} a^{lm}; \quad a^{ik} = g^{il} g^{km} a_{lm} \end{aligned} \qquad (347)$$

и им подобные.

Для образования уравнения, соответствующего (168), следует отметить, что в общей теории относительности $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}$ не является больше, как прежде, контравариантным вектором (ср. стр. 70). Теперь мы должны обратиться к уравнению (341). Если в нем φ^{ik} является антисимметричным тензором, то последний член правой части уравнения равен нулю. В самом деле $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ симметрично, φ^{kl} — антисимметрично относительно значков k и l; при суммировании произведения этих двух величин по всем k и l каждые два члена взаимно уничтожают друг друга. Если принять еще во внимание уравнение (339), то из антисимметричного тензора II ранга оказывается возможным получить тензор I ранга:

$$\varphi^i = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r} \varphi^{ir} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, \varphi^{ik})}{\partial x_k}. \qquad (348)$$

Вместо уравнений (168) и (187) мы получаем, следовательно, в общей теории относительности соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, F^{ik})}{\partial x_k} = s^i. \qquad (349)$$

В уравнениях (346) и (349) мы имеем те самые два уравнения, которые в специальной теории относительности были тождественны с уравнениями поля по Максвеллу. Оба уравнения инвариантны относительно любых преобразований координат, *они представляют собой, следовательно, обобщение уравнений электромагнитного поля для явлений, протекающих в поле тяготения.* Поскольку мы рассматриваем чисто электрические явления и не предполагаем, следовательно, существование поля тяготения, $\sqrt{g}$ является постоянным; в таком случае уравнение (349) переходит в (187) [1].

[1]) При сравнении с формулами, выведенными в § 8, надо отметить, что там знаки компонент специального фундаментального тензора (159) противоположны знакам в линейном элементе (263). Согласно сделанному на стр. 105 новому опреде-

То же самое будет справедливо в бесконечно малой области при соответствующем выборе координат.

Наше уравнение

$$-p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k}, \qquad (202)$$

так же как и основной закон динамики:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad (226)$$

также должны быть заменены в общей теории относительности новыми уравнениями, которые должны быть общеинвариантными. Эти новые уравнения получаются сразу из уравнений (341), справедливых для любых тензоров. Принимая во внимание симметричность S^{ik}, так же как и выкладки, сделанные при выводе уравнения (348), мы получим:

$$p^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, S^{ik})}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} S^{rs}. \qquad (350)$$

Если мы распространим приведенные на стр. 81 и следующих соображения на наш общий случай, то четыре *основных уравнения общей теории относительности* будут:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T^{ik})}{\partial x_k} + \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} T^{rs} = 0. \qquad (351)$$

Это уравнение имеет место *в любой координатной системе*. Оно представляет собой *обобщение закона сохранения энергии и количества движения для поля тяготения* [1]. При отсутствии поля тяготения, а, следовательно, также и в бесконечно малой области при соответствующем выборе координат оно переходит в соответствующее уравнение (226) специальной теории относительности. Потому что тогда g_{ik}, так же как и $\sqrt{g}$ будут постоянными и исчезает второй член в уравнении (351).

Если бы мы исходили вместо уравнения (341) из уравнения (340), то *основные* уравнения получили бы вид:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T_i^k)}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ir \\ s \end{matrix} \right\} T_r^s = 0. \qquad (352)$$

В своей общей форме уравнения (351) и (352) описывают все электромагнитные или механические процессы движения в поле тяготения. Мы должны только составляющим тензора T_{ik} или T_i^k дать соответ-

лению, данная на стр. 67 зависимость между ковариантными и контравариантными тензорами оказывается уже больше не имеющей места. Но мы положим, что величины φ_i, F_{ik}, p^i, s^i, S^{ik} сохраняют свои прежние знаки. При этом p_i и S_k^i получают знаки противоположные прежним. Ср. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Глава IV.

[1]) Ср. при этом A. Einstein, Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Preuss. Akad. d. Wiss., 1918, стр. 448. См. также выводы следующего § 13.

ствующие изучаемому явлению значения; для электродинамики значения (198); для механики значения (231).

Таким образом вывод наших основных уравнений со всей ясностью показывает нам также и то, *что общеинвариантные законы природы возможны только тогда, когда мы пространственно-временный континуум принимаем неэвклидовым.* Принцип общей относительности всех движений осуществим только при неэвклидовой структуре пространства и времени; как мы видим, он может быть удовлетворен, если мы за неэвклидову геометрию возьмем в основу созданную Риманом дифференциальную геометрию.

Здесь следует еще заметить, что основные уравнения динамики мы могли бы свести *к своего рода принципу Гамильтона* (Hamilton)[1]).

§ 13. Теория тяготения Эйнштейна.

Установленные в предыдущих параграфах общие основные уравнения мы теперь применим к *механике*. Таким путем мы придем *к теории тяготения*.

Слово „теория" не следует понимать в том смысле, что мы попытаемся разъяснить явление всеобщего тяготения с помощью каких-либо физически не наблюдаемых явлений, наподобие, например, эфирных теорий тяготения. Наоборот мы принимаем, так же как это делает и классическая механика, тяготение как данное, как основное свойство материи, и ставим себе задачу *математически описать явления движения под влиянием общей силы тяжести*. Наши основные уравнения приводят нас к дифференциальным законам, которые таким образом от точки к точке описывают явления движения. Тем самым удаляется из механики дальнодействие Ньютона.

Рассмотрим *движение материальной точки* с точки зрения общей теории относительности.

Мы ограничимся сначала всеми теми координатными системами, для которых $\sqrt{g}=1$.

На основании уравнения (229) положим контравариантный тензор энергии и количества движения движущейся точки равным:

$$T^{ik}=mu^i u^k. \tag{353}$$

Тогда, согласно данному [уравнение (236)] выводу,

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,T^{ik})}{\partial x_k}=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}$$

становится равным $m\frac{du^i}{ds}$, и наши основные уравнения (351) принимают вид:

$$m\frac{du^i}{ds}=-\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}T^{rs}=-m\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}u^r u^s, \tag{354}$$

---

[1]) Ср. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 4 издание, § 28.

или

$$\frac{du^i}{ds} = -\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} u^r u^s. \tag{355}$$

Но это уравнение совершенно тождественно с уравнением (324) геодезической линии. Оно не только инвариантно для всех координатных систем, для которых $\sqrt{g} = 1$, но также и для всех других любых координатных систем. Вместе с законом движения (355) мы нашли для материальной точки общий инвариантный закон.

Этот закон говорит: *всякая предоставленная самой себе материальная точка описывает в любым образом движущейся координатной системе или в соответствующем поле тяготения геодезическую про транственно-временную линию.* Или: *мировая линия движущей я материальной точки представляет собой геодезическую линию.*

Таким образом мы получим обобщение галилеева закона инерции, по которому свободная материальная точка движется в свободном от тяготения пространстве прямолинейно и равномерно.

Действующая благодаря полю тяготения на материальную точку сила $p^i = m\frac{du^i}{ds}$ имеет вид:

$$p^i = -\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} T^{rs} = \quad m\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} u^i u^k. \tag{356}$$

Действующая сила состоит из двух множителей; первый $\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}$ зависит только от поля тяготения, второй T^{rs} — только от материи. Сила пропорциональна массе; ускорение, следовательно, не зависит от массы, как это, согласно нашему опыту, и требуется для силы тяготения. Для локальной координатной системы все множители

$$\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = 0;$$

движение точки является галилеевым. В свободной от тяготения системе силы не действуют.

Но если даже уравнение (354) и приводит к результатам, согласующимся с установленными до сих пор закономерностямм для движения точек, все-таки следует принять во внимание, что в *принципе они отличаются от законов теории тяготения Ньютона.*

Согласно *классической механике* материя обладает двоякими свойствами, существующими независимо друг от друга; *она инертная и она тяжелая. Инертная* масса движется согласно галилееву закону инерции. Ускорение массы происходит оттого, что на нее действуют силы, и именно величина ускорения пропорциональна действующей силе и обратно пропорциональна инертной массе. Тяготение является одной из возможных сил, и его действие описывается при помощи закона тяготения Ньютона, закона дальнодействия. В этом законе инертная масса приравнивается тяжелой массе. Таким образом в ньютоновой теории тяготения движение в каждый момент определяется *инерцией* и *силой тяжести*.

Напротив, *теория тяготения Эйнштейна* находит свое выражение в одном единственном законе (354) или (355). Этот закон является законом близкодействия, так же как уравнения Максвелла. Здесь имеется только одна масса, ускорение которой в *данной координатной системе* определяется однозначно с помощью g_{ik}. Только при постоянных значениях g_{ik}, в бесконечно малой области, следовательно всегда, при соответствующем выборе координатной системы, ускорение будет равно нулю; масса движется тогда как инертная масса классической механики. *Следовательно, здесь инерция стала специальным случаем тяготения.* В зависимости от выбора координатной системы масса движется как инертная или как тяжелая (ср. стр. 95, а также § 14). Тяготение не является больше одной из возможных сил, а становится физическим свойствам пространства, наполненного материей [1]).

Следует отметить еще аналогию между уравнениями (356) и (194) для пондеромотнорной силы электромагнитного поля, которая, если принять во внимание сделанное на стр. 131 допущение относительно знаков, гласит:

$$p^i = -F^i_k s^k. \tag{357}$$

F^i_k зависят только от электромагнитного поля, s^k представляют собой движущееся электричество. Составляющие поля F^i_k получились путем дифференцирования электромагнитного потенциала φ_i. Согласно уравнению (323) *составляющие поля тяготения* [2]):

$$\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma^i_{rs} \tag{358}$$

точно так же получаются из производных g_{ik}. Поэтому мы называем *10 величин тензора g_{ik} потенциалами метрического поля или поля тяготения*. Правильность такой терминологии покажется нам особенно убедительной при сравнении с теорией Ньютона (ср. также стр. 120), которое нами будет сделано ниже.

Описать движение точки в поле тяготения массы (например планеты в поле тяготения солнца) с помощью уравнения (355) с исчерпывающей полнотой мы сможем только в том случае, если сумеем при заданных массах вычислить из них потенциалы тяготения g_{ik}. Таким образом, общая теория относительности ставит требование *установить общеинвариантные уравнения* (*уравнения тяготения или уравнения поля тяготения между g_{ik} и массой*) и тем самым приводит нас к теории тяготения.

---

[1]) Ср. при этом также выводы E. Freundlich в Newcomb-Engelmann: Populäre Astronomie, 6 издание, Лейпциг 1921.

[2]) Величина Γ^i_{rs} не имеет в общей теории относительности тензорного характера, как и $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}$, из которых она образуется.

Для того чтобы установить свою теорию тяготения, *Эйнштейн* исходит из *уравнения Пуассона* (Poisson):

$$\Delta \Phi = -4\pi k \mu, \tag{359}$$

где Φ обозначает потенциал тяготения классической механики, μ — плотность массы, k — постоянную тяготения Ньютона. Уравнение (359) представляет собой соотношение между потенциалом тяготения и материей в механике Ньютона. Соответствующее соотношение надо установить для общей теории относительности.

Согласно уравнению (229) материя характеризуется в теории относительности тензором энергии-импульса $T^{ik} = \mu_0 u^i u^k$. Нам придется установить соотношение между этим тензором и тензором, зависящим от g_{ik}. Если мы приравняем соответствующие компоненты этих двух тензоров, то сразу же получим соотношения, удовлетворяющие поставленному нами условию инвариантности. Но, как уже было указано в § 11, в дифференциальной геометрии имеется тензор II ранга, который составляется из g_{ik} аналогично тому, как выражение

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

в уравнении Пуассона из Φ. Этот тензор имеет вид:

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix}. \tag{360}$$

Он называется *тензором кривизны*. Через композицию он приводит к *инвариантной кривизне:*

$$R = g^{ik} R_{ik}. \tag{351}$$

Если мы ограничимся координатными системами, для которых

$$\sqrt{g} = 1,$$

то вследствие равенства (339) выражение (360) переходит в

$$R_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix}. \tag{362}$$

Таким образом можно было бы, как это сначала и было сделано *Эйнштейном*[1]), сформулировать уравнения тяготения в виде:

$$R_{ik} = -\varkappa T_{ik}. \tag{363}$$

Но тогда R_{ik}, введенное в основное уравнение (351) вместо T_{ik}, должно было бы удовлетворять этому уравнению. Последнее, однако, не имеет места; следовательно уравнение (363) должно быть отброшено.

---

[1]) Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Preuss. Akad. d. Wiss., 1915, стр. 778 и 799.

Мы сейчас покажем, что для того, чтобы удовлетворить инвариантному уравнению (351), надо уравнение (363) заменить другим. *При этом мы ограничимся такими координатными системами, для которых*

$$\sqrt{g} = 1$$ [1].

Прежде всего необходимо сделать некоторые предварительные амечания.

В классической механике для потенциала в случае, когда в каком-нибудь месте пространства не присутствует сама материя, уравнение Пуассона сводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{364}$$

В общей теории относительности в таких местах все составляющие тензора T_{ik} равны нулю. Согласно уравнению (363), уравнением, соответствующим (364), было бы:

$$R_{ik} = 0. \tag{365}$$

Это положение согласуется с основным уравнением (351). В своей теории тяготения *Эйнштейн* исходит из него и обозначает 10 уравнений (365) как *уравнения поля тяготения при отсутствии материи.*

Придадим этим уравнениям, которые мы согласно уравнению (358) можем написать как

$$\frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x_r} = \Gamma^s_{ir}\Gamma^r_{ks}, \tag{366}$$

другой вид.

Можно показать, что *принцип Гамильтона*, т. е.

$$\delta\int H\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 = 0, \tag{367}$$

приводит к уравнениям [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} = 0, \tag{368}$$

причем введено обозначение:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} = g^{ik}_r. \tag{369}$$

Покажем, что уравнения (368) тождественны с уравнениями (366), если только мы положим:

$$H = g^{ik}\Gamma^r_{is}\Gamma^s_{kr}. \tag{370}$$

[1] A. Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsb. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1915, стр. 844. Общее доказательство дано Эйнштейном в работе Hamiltonisches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1916, стр. 1111. (Перепечатано в H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 3 издание, Leipzig 1920.) Ср. также H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Глава IV.

[2] Enzyklopädie d. math. Wissenschaften. Bd. II., 1, стр. 615.

Мы покажем таким образом, что *уравнения тяготения могут быть сведены к принципу Гамильтона.* Имеем:

$$\begin{aligned}\delta H &= \frac{\partial H}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial H}{\partial g_r^{ik}}\delta g_r^{ik} = \\ &= \Gamma_{is}^r\Gamma_{kr}^s\delta g^{ik} + 2g^{ik}\Gamma_{is}^r\delta\Gamma_{kr}^s = \\ &= -\Gamma_{is}^r\Gamma_{kr}^s\delta g^{ik} + 2\Gamma_{is}^r\delta(g^{ik}\Gamma_{kr}^s)\end{aligned} \tag{371}$$

причем во втором члене частично переставлены индексы, по которым надо суммировать.

Но в выражении:

$$2\Gamma_{is}^r\delta(g^{ik}\Gamma_{ks}^s) = \Gamma_{is}^r\delta\left(g^{ik}g^{sh}\left[\frac{\partial g_{kh}}{\partial x_r} + \frac{\partial g_{rh}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_h}\right]\right)$$

отпадают оба последних члена, так как последний член при замене h на k и i на s оказывается равен предпоследнему члену. Принимая во внимание уравнение (336), уравнение (371) переходит тогда в

$$\delta H = -\Gamma_{is}^r\Gamma_{kr}^s\delta g^{ik} - \Gamma_{is}^r\delta g_r^{is}. \tag{372}$$

Поэтому имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial g^{ik}} = -\Gamma_{is}^r\Gamma_{kr}^s; \quad \frac{\partial H}{\partial g_r^{ik}} = -\Gamma_{ik}^r, \tag{373}$$

и при подстановке этих значений уравнение (368) переходит в (366).

Мы можем теперь уравнениям тяготения (366) придать еще третью форму. Умножив уравнение (368) на g_l^{ik}, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g_l^{ik}\frac{\partial H}{\partial g_r^{ik}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g_r^{ik}}\frac{\partial g_r^{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

при этом мы пользуемся равенством:

$$\frac{\partial g_l^{ik}}{\partial x_r} = \frac{\partial g_r^{ik}}{\partial x_l}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g_l^{ik}\frac{\partial H}{\partial g_r^{ik}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_l} = 0. \tag{374}$$

Если мы введем обозначение

$$-2\varkappa t_l^r = g_l^{ik}\frac{\partial H}{\partial g_r^{ik}} - \delta_l^r H, \tag{375}$$

то уравнение (374) перейдет в

$$\frac{\partial t_l^r}{\partial x_r} = 0. \tag{376}$$

Таким образом мы имеем *третью форму* для уравнения (366).

Принимая во внимание равенства (373) и (370) и, кроме того, уравнение (338), можно выражение (375) заменить следующим:

$$\varkappa t_l^v = \frac{1}{2}\,\delta_l^v g^{ik}\,\Gamma^n_{is}\,\Gamma^s_{kn} - g^{ik}\,\Gamma^v_{is}\,\Gamma^s_{kl}. \tag{377}$$

t_l^v зависят только от составляющих поля тяготения. Они удовлетворяют уравнению (376), которое вполне совпадает с законом сохранения энергии и количества движения (226) специальной теории относительности. Поэтому t_l^v правильно назвать *составляющими энергии* поля тяготения. Однако t_l^v не являются составляющими тензора, как это следует из основного уравнения (377) и из примечания на стр. 134 относительно Γ^l_{rs}.

Дадим еще одну, четвертую форму уравнений тяготения. Помножив уравнения тяготения (366) на g^{kl} и сложив, получим, следовательно, выражение $R_i^l = 0$. Применяя уравнение (338), получим тогда:

$$\begin{aligned} g^{kl}\,\frac{\partial \Gamma^v_{ik}}{\partial x_v} &= \frac{\partial}{\partial x_v}\,(g^{kl}\,\Gamma^v_{ik}) - \Gamma^v_{ik}\,\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_v} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_v}\,(g^{kl}\,\Gamma^v_{ik}) + g^{mk}\,\Gamma^l_{mv}\Gamma^v_{ik} + g^{ml}\,\Gamma^k_{mv}\,\Gamma^v_{ik} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_v}\,(g^{ln}\,\Gamma^v_{in}) + g^{jk}\,\Gamma^l_{js}\,\Gamma^s_{ik} + g^{kl}\,\Gamma^v_{ks}\,\Gamma^s_{iv} = \\ &= g^{kl}\,\Gamma^s_{iv}\,\Gamma^v_{ks}; \end{aligned} \tag{378}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_v}\,(g^{ln}\,\Gamma^v_{in}) = -\,g^{jk}\,\Gamma^l_{js}\,\Gamma^s_{ik}. \tag{379}$$

Положим теперь:

$$\varkappa\, t_i^l = \frac{1}{2}\,\delta_i^l g^{jk}\,\Gamma^n_{js}\,\Gamma^s_{kn} - g^{jk}\,\Gamma^l_{js}\,\Gamma^s_{ik}. \tag{380}$$

Композиция этого уравнения по i и l дает [1]):

$$\varkappa\, t_i^i = \varkappa\, t = 2g^{jk}\,\Gamma^n_{js}\,\Gamma^s_{kn} - g^{jk}\,\Gamma^n_{js}\,\Gamma^s_{kn} = g^{jk}\,\Gamma^n_{js}\,\Gamma^s_{kn}. \tag{381}$$

Из (380) и (381) следует:

$$\varkappa\left(t_i^l - \frac{1}{2}\,\delta_i^l t\right) = -\,g^{jk}\,\Gamma^l_{js}\,\Gamma^s_{ik},$$

так что в конце концов наше уравнение (366) переходит в:

$$\frac{\partial}{\partial x_v}\left(g^{ln}\,\Gamma^v_{in}\right) = \varkappa\left(t_i^l - \frac{1}{2}\,\delta_i^l t\right). \tag{382}$$

---

[1]) Композиция тензора δ_i^l вследствие суммирования дает значение 4 [ср. (305)].

Таким образом мы получили *четвертый вид* уравнений тяготения в свободном от материи пространстве. Если, однако, в каком-нибудь месте пространства присутствует материя, заданная тензором энергии T_{ik}, то мы можем установить между ним и R_{ik} зависимость тем, что вместо уравнения (382) напишем:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{lm}\Gamma^r_{im}\right) = \varkappa\left[\left(t^l_i + T^l_i\right) - \frac{1}{2}\delta^l_i\left(t + T\right)\right], \qquad (383)$$

где T обозначает композицию T^l_i. Эйнштейн следующим образом обосновывает введение сумм из компонентов t^l_i и T^l_i в уравнение (383) [1]:

„Если рассматривать замкнутую систему (например солнечную систему), то вся масса системы, в ее совокупности, а следовательно также и действие тяготения будут зависеть от всей энергии системы, т. е. от энергии материальной и тяготеющей, вместе взятых. Это можно выразить тем, что в уравнении (382) вместо одних составляющих энергии t^l_i поля тяготения придется ввести сумму $t^l_i + T^l_i$ составляющих энергии материи и поля тяготения“.

Принимая во внимание, что вследствие уравнений (378) и (362) равенство (382) оказывается тождественным с $-R^l_i = 0$, уравнение (383) можно переписать в виде:

$$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right) \qquad (384)$$

Это уравнение становится на место (363) *как искомое уравнение тяготения.* Это уравнение дает g_{ik}, т. е. *геометрию пространства и времени, как функцию материи.* Согласно данному здесь выводу оно имеет место как инвариантное соотношение только для тех координатных систем, для которых $\sqrt{-g} = 1$; однако, исходя из некоторого обобщенного принципа Гамильтона можно показать, что оно справедливо при любых координатных системах (ср. примечание 1, стр. 136).

Теперь мы должны доказать, что *уравнение* (384) *находится в согласии с основным уравнением* (351) *общей теории относительности, т. е. с обобщенным законом энергии и количества движения.* Возвратимся для этого к уравнению (383); композиция по i и l дает:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{mn}\Gamma^r_{mn}\right) = -\varkappa(t + T); \qquad (385)$$

таким образом из уравнений (383) и (385) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{lm}\Gamma^r_{im} - \frac{1}{2}\delta^l_i g^{mn}\Gamma^r_{mn}\right) = \varkappa\left(t^l_i + T^l_i\right). \qquad (386)$$

---

[1]) A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig 1916, стр. 47.

Продифференцируем теперь уравнение (386) по x_l и покажем, что *левая часть будет тождественно равна нулю.*

Составим уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(g^{ln}\Gamma^r_{in}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left[g^{ln}g^{ro}\left(\frac{\partial g_{io}}{\partial x_n}+\frac{\partial g_{no}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{in}}{\partial x_o}\right)\right]. \quad (387)$$

При суммировании по r, l, n, o переставим в третьем члене правой части r с l и n с o; тогда третий член будет равен первому и противоположен по знаку. Таким образом имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(g^{ln}\Gamma^r_{in}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left[g^{ln}g^{or}\frac{\partial g_{no}}{\partial x_i}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{nr}}{\partial x_r \partial x_n \partial x_i}. \quad (388)$$

При этом мы, воспользовались соотношением (336) и при суммировании букву l заменили на n.

Далее имеем:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(\delta^l_i g^{mn}\Gamma^r_{mn}\right)&=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_i}\left(g^{mn}\Gamma^r_{mn}\right)=\\ &=-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_i}\left[g^{mn}g^{rp}\left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial x_n}+\frac{\partial g_{np}}{\partial x_m}-\frac{\partial g_{mn}}{\partial x_p}\right)\right].\end{aligned} \quad (389)$$

Последний член правой части пропадает вследствие уравнения (335), при условии, что $\sqrt{g}=1$. Так как суммировать надо по m и n, то два других члена соединяются, и, принимая во внимание уравнение (336), получаем:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(\delta^l_i g^{mn}\Gamma^r_{mn}\right)=+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{nr}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_n}. \quad (390)$$

Соединение равенств (388) и (390) приводит к:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(g^{ln}\Gamma^r_{in}-\frac{1}{2}\delta^l_i g^{mn}\Gamma^r_{mn}\right)=0. \quad (391)$$

Откуда, согласно уравнению (386):

$$\frac{\partial\left(t^l_i+T^l_i\right)}{\partial x_l}=0. \quad (392)$$

Если сравнить это уравнение, вытекающее из (383), с основным уравнением (226) специальной теории относительности, то видно, что во всяком месте пространства справедливы теоремы сохранения энергии и импульса и в том случае, когда мы на ряду с составляющими тензора энергии и материи введем составляющие энергии поля тяготения. *Законы сохранения справедливы для суммы обеих составляющих энергии* [1]).

---

[1]) По вопросам, сюда относящимся, ср. A. Einstein, Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1918, стр. 448. См. также стр. 153.

С помощью уравнения (392) мы можем свести уравнение (384) к основному уравнению (352) общей теории относительности.

Помножим уравнение (384) на g^{ik}_m:

$$-g^{ik}_m \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x_r} + g^{ik}_m \Gamma^s_{ir} \Gamma^r_{ks} = -\varkappa g^{ik}_m T_{ik} + \frac{1}{2} \varkappa g^{ik}_m g_{ik} T. \qquad (393)$$

Вследствие уравнения (335) последний член правой части при условии $\sqrt{g} = 1$ равняется нулю.

Левую часть мы можем привести к виду $\varkappa \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l}$.

Именно из равенства

$$2\varkappa t^l_m = \delta^l_m H - g^{ik}_m \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \qquad (375)$$

следует:

$$2\varkappa \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l} = \frac{\partial H}{\partial x_m} - g^{ik}_m \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \frac{\partial g^{ik}_m}{\partial x_l}. \qquad (394)$$

Принимая во внимание, что:

$$\frac{\partial H}{\partial x_m} = \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} g^{ik}_m + \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \frac{\partial g^{ik}_l}{\partial x_m}, \qquad (395)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} 2\varkappa \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l} &= -g^{ik}_m \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \right) + \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} g^{ik}_m \\ &= -g^{ik}_m \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_l} - \Gamma^n_{is} \Gamma^s_{kn} \right). \end{aligned} \qquad (396)$$

Поэтому уравнение (393) приводит к:

$$\frac{\partial t^l_m}{\partial x_l} - \frac{1}{2} g^{ik}_m T_{ik} = 0 \qquad (397)$$

или, вследствие (392), к:

$$\frac{\partial T^l_m}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_m} T_{ik} = 0. \qquad (398)$$

Но это последнее уравнение, как показывает простой расчет, тождественно с основным уравнением (352).

Согласно уравнению (338) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_m} T_{ik} &= -\frac{1}{2} \left(g^{ir} \Gamma^k_{rm} + g^{kr} \Gamma^i_{rm} \right) T_{ik} \\ &= -g^{ir} \Gamma^k_{rm} T_{ik} = -\Gamma^k_{rm} T^r_k. \end{aligned} \qquad (399)$$

Следовательно уравнение (398) принимает вид:

$$\frac{\partial T^l_m}{\partial x_l} - \left\{ {mr \atop s} \right\} T^r_s = 0. \tag{400}$$

Таким образом, исходя из уравнений тяготения (383), мы вывели основные уравнения общей теории относительности в форме (352).

Следовательно, уравнения тяготения Эйнштейна (384) *согласуются с основными уравнениями* (351) *и* (352) *общей теории относительности*. В конечном счете они основываются на законах сохранения энергии и импульса, которые образуют фундамент выведенных нами закономерностей в электричестве и механике. Как уже было упомянуто на стр. 136, доказательство этого можно было бы осуществить и для любых координатных систем (независимо от ограничения $\sqrt{g} = 1$).

В этой согласованности с законом сохранения энергии прежде всего и нужно видеть доказательство справедливости установленных нами уравнений тяготения, которые сами по себе, конечно, являются чем-то произвольным. Свою собственную опору они получат тогда, когда с их помощью удастся рассчитать наблюдаемые явления. Этим мы займемся в следующем параграфе.

Дадим теперь уравнениям тяготения (384) еще одну, другую форму. Помножим это уравнение на g^{ik} и произведем композицию.

Тогда имеем:

$$R = -\varkappa(T - 2T),$$

или

$$R = \varkappa T. \tag{401}$$

Уравнение (381) переходит, следовательно, в:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}. \tag{402}$$

Назовем оба уравнения (384) и (402) *уравнениями тяготения Эйнштейна I рода*. Они дают тензор потенциалов тяготения как функцию тензора материи. Однако этим не заканчивается теория тяготения Эйнштейна.

Уравнения тяготения мы можем заменить еще более общими.

Инвариантная кривизна R в уравнении (361) не является самым общим из инвариантов, составленных из g_{ik} и их производных; таковым в большей мере является выражение:

$$R' = \alpha R + \beta = \alpha g^{ik} R_{ik} + \beta, \tag{403}$$

где α и β являются постоянными. Мы можем R' написать также в виде:

$$R' = g^{ik}(R_{ik} - \lambda g_{ik}) \tag{404}$$

($\lambda = \text{const}$), т. е. расширить наши уравнения тяготения тем, что вместо R_{ik} мы поставим тензор $R_{ik} - \lambda g_{ik}$.

Обобщенные уравнения тяготения Эйнштейна[1]) [мы обозначим их в отличие от (384) и (402) как *уравнения тяготения II рода*] гласят тогда:

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right). \qquad (405)$$

Эти уравнения тяготения также согласуются с основными уравнениями (351) и (352) общей теории относительности. Но доказательства приводить здесь не будем[2]).

Приведем уравнения (405) еще к другому виду. Образуем путем умножения на g^{ik} и сложения скалярное уравнение:

$$R - 4\lambda = -\varkappa(T - 2T) = \varkappa T. \qquad (406)$$

Это уравнение в соединении с уравнением (405) дает уравнения тяготения II рода во второй их форме:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik}. \qquad (407)$$

В этих уравнениях мы можем заменить универсальную постоянную λ другой величиной. Если в каком-нибудь месте нет ни материи, ни электромагнитной энергии, то в уравнении (406) можно положить $T = 0$. Следовательно будем иметь:

$$\lambda = \frac{R_0}{4}, \qquad (408)$$

если мы через R_0 обозначим скалярную кривизну в подобного рода месте.

Следовательно R_0 также является универсальной постоянной. Подставим значение (408) для λ в уравнение (407), тогда это уравнение перейдет в:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \frac{1}{4} g_{ik} R_0 = -\varkappa T_{ik}. \qquad (409)$$

Если $\lambda = \frac{R_0}{4} = 0$, то уравнения тяготения II рода переходят в уравнения тяготения I рода.

Исходя из постоянства R_0, Эйнштейн установил таким образом еще раз *новые уравнения тяготения*[3]), которые мы назовем *уравнениями тяготения III рода*.

---

[1]) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1917, стр. 142. Перепечатано в H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 4 Aufl., Leipzig 1921.

[2]) См. в другом месте, стр. 129.

[3]) A. Einstein, Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsber. der Preuss. Akad. d. Wiss., 1919, стр. 349. Перепечатано там же, где указано в примечании 1) настоящей страницы. Здесь следует еще указать на то, что в работе A. Einstein, Über eine naheliegende Ergänzung des Fundamentes der allgemeinen Relativitätstheorie (Sitzungsber. usw., 1921, S. 261) дается обобщение общей теории относительности, родственное теории Вейля.

Они гласят:

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}. \tag{410}$$

Покажем, что в принципе они тождественны с уравнениями II рода. Для уравнения (410) мы можем написать:

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \frac{1}{4} g_{ik} R_0 = -\varkappa\left(T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0]\right). \tag{411}$$

Уравнение (411) отличается от (409) только тем, что место тензора материи T_{ik} занимает тензор

$$T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0],$$

зависящий от скалярной кривизны. Если введем здесь новое обозначение, то получим полное совпадение. Универсальная постоянная λ пропала в уравнении (410); вместо того существует условие, что для $T_{ik} = 0$ скалярная кривизна R не равна нулю, как в уравнениях тяготения I рода, *а переходит в постоянное значение* R_0.

Таким образом уравнения тяготения I рода существенно отличаются от уравнений II (и III) рода. Этим мы должны еще подробнее заняться.

Как мы покажем в следующем параграфе, мы можем найти решения для уравнений тяготения I рода в предположении, что для масс, полностью расположенных в конечной области пространства, величины g_{ik} для бесконечно удаленных частей пространства, при соответствующем выборе координат, переходят в значения (303). Существует, следовательно, предположение, что в очень большом удалении от масс справедлива специальная теория относительности. Мы не будем разбирать вопроса, не являются ли, и если являются, то в какой мере, таким образом найденные g_{ik} особым решением уравнений тяготения I рода; во всяком случае такие решения возможны.

Эти g_{ik}, получаемые из уравнений тяготения I рода, обладают тем свойством, что они *только частично определяются материей*, главным же образом они определяются установленными для них значениями в бесконечности (ср. § 14).

Но это противоречит принципу относительности в его самом общем смысле. Если в большом удалении от масс или в свободных от масс *конечных* пространствах действительна специальная теория относительности, то *одна единственная материальная точка*, которую мы туда перенесем, обладает *инерцией;* специальная теория относительности знает инертные массы сами по себе (an und für sich), свойство которых, обозначаемое как „свойство инерции“, существует *независимо от других масс* (ср. стр. 87 и сл.) [1]. Такой массе может быть сообщено какой-нибудь силой ускорение и при этом масса

[1] Ср. здесь: A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Berl. Akad. d. Wiss., 1917, S. 142 ff. (Перепечатано в H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 4 издание. Leipzig 1921.)

оказывает сопротивление изменению скорости. Однако, по нашему самому широкому пониманию относительности совершенно нельзя говорить о движении или об изменении движения массы, так же как и о вращении, если только существует *одна эта* масса. В случае специальной теории относительности еще возможно движение относительно некоторых особых координатных систем, именно относительно бесконечно большого числа прямолинейно и равномерно движущихся систем, для которых действительно основное ур-ние (226). В общей теории относительности это последнее представление должно отпасть. Уравнения тяготения приводят таким образом к решению, противоречащему общему принципу относительности.

К тому же результату мы приходим путем следующего *геометрического рассуждения*. Согласно общему принципу относительности геометрические свойства пространства и времени должны устанавливаться *только* через материю. Без материи мы не можем говорить ни о пространстве, ни о времени; следовательно, g_{ik} должны определяться исключительно материей. Но если принять уравнение тяготения I рода, то геометрия пространства и времени вдали от всех масс является эвклидовой. Только вблизи масс (и „поля") геометрия будет неэвклидовой. На основании наших уравнений тяготения I рода мы можем обозначить пространство как *квазиэвклидово*. Если представить себе всю материю удаленной из него, то остается эвклидово пространство. g_{ik} всюду принимают значения (303).

Только уравнения тяготения II (и III) рода вполне удовлетворяют принципу общей относительности. Приведем доказательство для уравнений тяготения II рода.

Покажем сначала, что *пространственно замкнутый мир, с равномерно распределенной в среднем покоящейся материей, совместим с этими уравнениями тяготения*.

Обратимся к координатной системе, в которой материя, в среднем, покоится; тогда согласно уравнению (229) тензор энергии-импульса представится в виде:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{matrix} \qquad (412)$$

Здесь μ_0 — средняя плотность материи; пусть она постоянна относительно пространства и времени. Материя, следовательно, определяет статическое поле тяготения. Определить g_{ik}, не зависящие от времени, и является нашей задачей. Если мы проведем деление параметров по пространству и по времени, то мы можем придать линейному элементу форму (297); положим следовательно:

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0. \qquad (413)$$

Далее, вследствие уравнения движения (355), точка только тогда может оставаться в покое, когда $g_{44} = \text{const}$, потому что для такой точки $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$.

Уравнение (355) требует, чтобы $\left\{ \begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right\} = 0$ или:

$$\left[\begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3); \quad g_{44} = \text{const}. \tag{414}$$

Следовательно, g_{44} является постоянной в пространстве и во времени. Положим:

$$g_{44} = 1. \tag{415}$$

Остается таким образом еще вывести коэффициенты g_{ik} ($i,\ k = 1,\ 2,\ 3$), определяющих метрику пространства. Возьмем особый случай замкнутого пространства, *сферическое пространство*. Мы исходим из четырехмерного эвклидова пространства с декартовыми координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 [1]). Четырехмерный пространственный линейный элемент представляет собой:

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \tag{416}$$

В этом пространстве трехмерная гиперповерхность определяется уравнением:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = a^2. \tag{417}$$

a является постоянным радиусом кривизны сферического пространства; ξ_1, ξ_2, ξ_3 мы принимаем за параметры трехмерного пространства в смысле наших уравнений (278). Если мы, следовательно, представим все четырехмерные точки спроектированными на гиперплоскости $\xi_4 = 0$, то ξ_1, ξ_2, ξ_3 являются в то же время декартовыми координатами трехмерного пространства, служащими для отображения сферического пространства. Линейный элемент $d\sigma$ мы получаем в нем путем исключения ξ_4 из уравнений (416) и (417). Из уравнения (417) ξ_4 определяется как функция трехмерных координат. Вычисление дает:

$$\begin{gathered} d\sigma^2 = \gamma_{ik}\, d\xi_i\, d\xi_i, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3 \\ \gamma_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\xi_i \xi_k}{a^2 - \rho^2}, \end{gathered} \tag{418}$$

где $\delta_{ik} = 1$ ($i = k$) или $= 0$ ($i \neq k$) и $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$.

Для самих потенциалов g_{ik} получаем, следовательно:

$$g_{ik} = -\left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right); \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{419}$$

Мы ввели при этом вместо параметров ξ_i, ξ_k параметры x_i, x_k трехмерного пространственного континуума.

Теперь нетрудно будет убедиться, что уравнениям тяготения (405) будут удовлетворять значения T_{ik} (412) и g_{ik} (413), (415) и (419); следовательно, эти g_{ik} являются решением наших уравнений тяготения

[1]) Обратите внимание в дальнейшем на аналогию с выводами стр. 109 и след.

II рода. При этом получается, что постоянная λ приобретает особое физическое значение. Принимая во внимание основные уравнения (360) для R_{ik}, прежде всего получаем:

$$R_{i4} = R_{4i} = R_{44} = 0. \tag{420}$$

Если мы примем во внимание, что $T = \mu_0$, то уравнение (405) для $i = k = 4$ перейдет в:

$$-\lambda = -\frac{\varkappa\mu_0}{2} \tag{421}$$

или

$$\lambda = \frac{R_0}{4} = \frac{\varkappa\mu_0}{2}. \tag{422}$$

Постоянная λ или скалярная кривизна R_0 определяются плотностью материи. Те из уравнений (405), которые содержат в себе $R_{i4} = R_{4i}$ (при $i = 1, 2, 3$) удовлетворены, так как обе части тождественно равны нулю.

Остается еще рассмотреть уравнения тяготения для $i, k = 1, 2, 3$. Для них мы выберем особый путь. Вследствие уравнений (413), (415) и постоянства во времени g_{ik}, в R_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ индекс 4 в них совсем не входит. Наши R_{ik} зависят только от пространственных g_{ik} (419); они являются, следовательно, функциями места. Так как в нашем сферическом пространстве все точки равноценны, следовательно всякая точка может иметь координаты $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, то достаточно провести вычисление только для одной такой точки.

Для этой нулевой точки g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ принимают значения:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \tag{423}$$

Первые производные всех g_{ik}, вследствие уравнения (419), будут равны нулю. Тензор R_{ik} принимает, следовательно, специальное значение:

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} ik \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} ik \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} ik \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}. \tag{424}$$

Здесь надо положить $i, k = 1, 2, 3$. Вычисление дает:

$$\left.\begin{aligned} R_{ik} &= -\frac{2}{a^2} \quad \text{для } i = k \\ R_{ik} &= \quad 0 \quad \text{для } i \neq k, \end{aligned}\right\} \tag{425}$$

так что уравнения тяготения (405) приводят к соотношению:

$$-\frac{2}{a^2} + \lambda = -\frac{\varkappa\mu_0}{2}. \tag{426}$$

Уравнениям тяготения удовлетворяет, следовательно, пространственный замкнутый, конечный мир, если:

$$\lambda = \frac{R_0}{4} = \frac{\varkappa\mu_0}{2} = \frac{1}{a^2}. \tag{427}$$

Радиус a сферического пространства связан простой зависимостью с нашими постоянными λ и скалярной кривизной R_0. Объем нашего пространства равняется $2\pi^2a^3$. Общая масса мира следовательно:

$$M = \mu_0 \cdot 2\pi^2a^3 = 4\pi^2 \cdot \frac{a}{\varkappa}. \tag{428}$$

Из этого уравнения следует, что как только исчезает общая масса M, то радиус a сферического пространства также становится нулем. Таким образом существование пространства целиком связано с материей; поскольку нет материи, не имеет никакого смысла говорить о пространстве или о движении и о геометрии в пространстве. С помощью обобщения первоначальных уравнений тяготения (I рода) оказывается доведенной до конца идея относительности.

Таким образом инерция движущейся материальной точки обусловливается исключительно всей имеющейся в мире материей. Подставим полученные из уравнений (413), (415) и (419) значения g_{ik} в уравнения движения (355) и мы получим, что в окрестности нулевой точки, следовательно в окрестности всякой точки, покоящаяся материальная точка длительно остается в покое; масса, которой сообщена начальная скорость, продолжает двигаться прямолинейно и равномерно. Таким образом *закон инерции Галилея* выступает здесь также опять как частный случай теории тяготения Эйнштейна (ср. стр. 133). Если исчезнет вся материя мирового пространства, то движение по инерции потеряет свой смысл. Последнее является, следовательно, результатом особого расположения материи, и мы можем считать подобного рода движение реализованным в прямолинейном и равномерном движении центра тяжести солнечной системы.

В § 14 мы еще яснее покажем, как можно инерцию включить в тяготение.

Точно так же и *описываемые геометрией свойства пространства существуют только по отношению к находящейся в нем материи.* Принцип относительности в своем самом общем толковании приводит к безграничному в целом, но конечному пространству. Пространство является замкнутым трехмерным многообразием постоянной положительной кривизны, которую мы можем принять *за сферическую* [1]). Вблизи отдельных масс, которые можно рассматривать как отдельные нарушения равномерного распределения в, вообще говоря, равномерно распределенной материи, геометрия становится другой, причем изменение ее определяется массой. Мы можем назвать геометрию, определяемую уравнениями тяготения II и III рода, *квазисферической.*

[1]) Возможно также эллиптическое пространство. Ср. F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt. Nachr. d. Gesellsch. d. W. zu Göttingen. Math. Phys. Kl., 1918, S. 405.

Если мы ограничимся маленькой областью — локальной координатной системой, то с полным на то правом, как приближение, остается существовать эвклидова геометрия.

Благодаря эйнштейновской теории тяготения геометрия получила свое последнее завершение. Если Риман в заключении своей вышеупомянутой вступительной лекции (ср. стр. 108) указывал на то, что основу мероопределения пространства надо искать вне его, в действующих и связывающих его силах, то *Эйнштейн определил эти силы как силы тяготения материи.*

Но допущение равномерно распределенной, покоящейся материи не будет, конечно, правильным для всего мирового пространства. Правда, мы знаем, что звезды обладают друг относительно друга только очень незначительной скоростью по сравнению со скоростью света, так что в среднем материю можно принимать за покоящуюся. Но распределение ее неравномерно. Нашу систему млечного пути надо считать уплотнением материи в мировом пространстве, но эта система занимает только маленькую часть всего конечного пространства [1]). Мы должны допустить, что на больших расстояниях существуют другие аналогичные этой системы, так что только для очень больших космических пространств можно говорить о средней плотности материи.

Наконец, мы должны еще попытаться определить величину радиуса кривизны a нашего конечного, замкнутого пространства. На основании разных гипотез В. де-Ситтер (W. de Sitter) [2]) вычислил радиус a и нашел для него значения от 10^{12} до 10^{13} радиуса земной орбиты. Этому соответствует средняя плотность около 10^{-26} г на кубический сантиметр. Постоянная λ имеет при этом значение около 10^{-30}. Но эти цифры надо принимать только как некоторые предельные значения. Очень вероятно, что средняя плотность еще меньше, a таким образом еще больше. Во всяком случае λ очень мала. Поэтому мы можем всегда ее отбросить, если мы ограничимся процессами движения в маленьких частях мирового пространства. Таким образом для всех исследований внутри солнечной системы совершенно достаточны эйнштейновские уравнения тяготения I рода. В дальнейших рассуждениях мы также сначала ограничимся ими.

§ 14. Особые случаи теории тяготения. Поле тяготения звезд.

При рассмотрении отдельных случаев теории тяготения мы ограничимся сначала, по причинам, изложенным в конце предыдущего параграфа, *уравнениями тяготения I рода.*

Мы покажем *сперва, в качестве первой задачи, что при известных допущениях эти уравнения в первом приближении приводят к теории Ньютона.* Рассмотрим только лишь координатные системы, для которых $\sqrt{g}=1$. Допустим, что g_{ik} отличаются от значений (303) специальной теории относительности только на малые ве-

[1]) Ср. „Die Naturwissenschaften". 9. Jahrgang, 1921, S. 773.

[2]) W. de Sitter, On Einsteins theory of gravitation, and its astronomical consequences. III paper. Monthly Not. of R. A. S. Vol. 78. Nr. 1. Эти вычисления относятся к эллиптическому пространству. Ср. примечание стр. 148.

личины первого порядка и что мы можем отбрасывать величины второго и высших порядков. Далее, поля тяготения должны возникать благодаря массам, которые целиком находятся в некоторой конечной области.

В бесконечно удаленных частях пространства g_{ik} должны в точности переходить в значения (303). Затем мы ограничимся скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Поэтому мы рассматриваем также $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ как малые величины I порядка и положим $\frac{dx_4}{ds}$ равным 1 с точностью до величины II порядка.

Тогда уравнения движения (355) *материальной точки в поле тяготения* переходят в:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{44} = 0; \tag{429}$$

или, если положить $ds = dx_4 = dt$, т. е. так выбрать единицу времени, чтобы $c = 1$, то в:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \Gamma^i_{44} = 0. \tag{430}$$

Но мы имеем: $\Gamma^i_{44} = g^{ik} \left[{44 \atop k}\right]$. В нашем приближении для $i \neq k$ g_{ik} являются величинами первого порядка; при $i = k$, напротив, близкими к ∓ 1 (ср. стр. 122). Отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{44} &= -\begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \Gamma^4_{44} &= +\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{431}$$

и уравнения движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} &= -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{432}$$

Так как правая часть последнего уравнения равна нулю, то отсюда следует справедливость положения $dx_4 = ds$.

Теперь рассмотрим материю, к которой мы относим движение материальной точки, как покоящуюся, т. е. рассмотрим статическое поле тяготения, в котором g_{ik} не зависит от времени; тогда уравнения движения (432) переходят окончательно в:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{433}$$

Эти уравнения тождественны с *уравнениями движения Ньютона*; $\frac{1}{2} g_{44}$ является потенциалом тяготения теории Ньютона (ср. при этом стр. 134). Таким образом в первом приближении движение материальной точки определяется только составляющими g_{44} нашего потенциального тензора.

Таким же образом доказывается, что эйнштейновские уравнения тяготения I рода (384) в том же приближении приводят к уравнению Пуассона (359). В самом деле, тензор энергии материи определяется уравнениями:

$$T^{rs} = \mu_0 \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_s}{ds}, \tag{229}$$

или

$$T_{rs} = \mu_0 g_{rt} \frac{dx_t}{ds} g_{su} \frac{dx_u}{ds}. \tag{434}$$

В нашем приближении все составляющие этого тензора за исключением T_{44} равны нулю. Остается:

$$T_{44} = \mu_0 \left(g_{44} \frac{dx_4}{ds} \right)^2 = \mu_0. \tag{435}$$

Далее имеем:

$$T = g^{ik} T_{ik} = g^{44} T_{44} = \mu_0. \tag{436}$$

Правая часть уравнения тяготения при $i = k = 4$ переходит при этом в $-\varkappa \left(T_{44} - \frac{1}{2} g_{44} T\right) = -\frac{1}{2} \varkappa \mu_0$. Так как в теории Ньютона речь идет только об определении g_{44}, то мы можем, как мы сейчас увидим, ограничиться одним этим уравнением.

Рассмотрим, следовательно, левую часть уравнения (384) и возвратимся при этом к уравнению (362). Второй член представляет собой малую величину второго порядка. Первый член дает:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ {ik \atop r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial x_r} \left(g^{rl} \left[{ik \atop l} \right] \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[{ik \atop 1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[{ik \atop 2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[{ik \atop 3} \right] - \frac{\partial}{\partial x_4} \left[{ik \atop 4} \right]. \end{gathered} \tag{437}$$

Для $i = k = 4$, вследствие уравнения (320) это выражение переходит в:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} \right) = -\frac{1}{2} \Delta g_{44}. \tag{438}$$

Последнее из уравнений (384) дает, следовательно:

$$\Delta g_{44} = \varkappa \mu_0. \tag{439}$$

Оно совпадает с уравнением Пуассона (359).

Таким образом теория Ньютона содержится как приближение в теории тяготения Эйнштейна. Это очень существенно для оценки теории относительности.

Согласно уравнениям (439) и (433) потенциал тяготения [1]) представляет собой:

$$\frac{1}{2} g_{44} = -\frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\mu_0 \, dV}{r} + \text{const.} \tag{440}$$

Если мы вычислим потенциал тяготения из обычной формы уравнения Пуассона (359), то вместо уравнения (433) мы должны пользоваться уравнением:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{441}$$

Множитель $\frac{1}{c^2}$ появляется здесь оттого, что мы хотим сравнить (441) с (433), а для этого мы должны ввести здесь ту же единицу времени, что в (433), но в этом последнем выражении $dt = dx_4$ ($= cd'$, согласно старому обозначению). В выбранной единице времени мы получаем для потенциала тяготения:

$$\Phi = -\frac{k}{c^2} \int \frac{\mu_0 \, dV}{r} + \text{const}, \tag{442}$$

где k имеет значение $6 \cdot 7 \times 10^{-8}$. Между обычными постоянными тяготения k и постоянными $\varkappa$ эйнштейновской теории тяготения существует зависимость:

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}87 \times 10^{-27}. \tag{443}$$

Теперь в качестве второй задачи мы полностью проведем *приближенное интегрирование наших уравнений тяготения I рода* [2]). При этом мы рассмотрим следующий простой случай. Пусть дана масса M (например солнце); определим приближенно все составляющие g_{ik} поля тяготения вне массы. При этом пусть опять $\sqrt{g} = 1$. Величины g_{ik} должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial}{dx_r} \Gamma^r_{ik} = \Gamma^r_{is} \Gamma^s_{kr}. \tag{366}$$

Чтобы иметь возможность однозначно установить значения g_{ik}, мы должны определить ту систему координат (или параметров), к которой они относятся. При переходе к любой другой системе g_{ik} преобразуются согласно законам тензорного анализа, в то время как уравнения тяготения и уравнения движения должны, конечно, сохранять свою форму.

[1]) Ср. напр. M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. S. 55.

[2]) Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1915, S. 833.

Выберем систему параметров, соответствующую параметрическому изображению поверхности (278). Параметры в пространстве, которое мы рассматриваем как любое трехмерное многообразие, должны быть в то же время декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 в эвклидовом пространстве, которое служит отображением трехмерного многообразия; пусть в каждой мировой точке время $x_4 = ct$ направлено перпендикулярно к пространству и имеет в отображении мира эвклидову структуру. В картине, дающей отображение мира, параметры x_1, x_2, x_3, x_4 соответствуют, следовательно, координатам специальной теории относительности. Однако четырехмерный линейный элемент не имеет здесь специальной формы (268), а имеет общую форму (270). Подлежащие определению коэффициенты g_{ik} устанавливают геометрию в окрестности каждой точки (ср. стр. 118). g_{ik} должны еще удовлетворять следующим требованиям [1]):

1. Все составляющие g_{ik} не зависят от времени.

2. Коэффициенты $g_{4i} = g_{i4}$ $(i = 1, 2, 3)$ строго равны нулю (ср. стр. 118).

3. Решение является *пространственно* симметричным относительно начала нашей координатной системы, лежащего в центре массы M. Таким образом решение годится не только для одной координатной системы, но также и для всякой, повернутой по отношению к ней около начала координат.

4. В бесконечно большом удалении от M g_{ik} принимают значения (303) специальной теории относительности.

Удовлетворяющее этим условиям решение наших уравнений тяготения будет:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= -\delta_{ik} - \alpha \frac{x_i x_k}{r^3} \quad (i, k = 1, 2, 3), \\ g_{i4} &= g_{4i} = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3), \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned} \tag{444}$$

При этом $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$. r обозначает величину $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Чтобы быть в согласии с уравнением (440), мы должны иметь:

$$\alpha = \frac{\varkappa M}{4\pi} = \frac{2kM}{c^2}. \tag{445}$$

M является массой, потенциалы тяготения которой g_{ik} мы определяем.

Мы должны, таким образом, показать, что система значений (444) удовлетворяет приближенно уравнениям тяготения (366), так же как и условию $\sqrt{g} = 1$.

Будем рассматривать при этом, так же как и прежде, разности между g_{ik} и 1 или, соответственно, 0, как малые величины I порядка, и отбросим наряду с ними величины II и высших порядков.

[1]) Ср. также K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1916, S. 190.

В том, что условие для определителя $\sqrt{g}=1$ выполнено, легко убедиться с помощью подстановки.

Ограничиваясь членами I порядка, получаем:

$$g=-\begin{vmatrix} \left(-1-\alpha\frac{x_1^2}{r^3}\right) & -\alpha\frac{x_1x_2}{r^3} & -\alpha\frac{x_1x_3}{r^3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\alpha}{r} \end{vmatrix} \tag{446}$$

$$=-\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left\{-\left(1+\alpha\frac{x_1^2}{r^3}\right)\left(1+\alpha\frac{x_2^2}{r^3}\right)\left(1+\alpha\frac{x_3^2}{r^3}\right)\right\}$$

$$=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)=1.$$

Приближенно, уравнения тяготения (366) переходят в:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\Gamma_{ik}^r=\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix}=0, \tag{447}$$

причем суммирование надо распространить по $r=1, 2, 3$.

$\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix}$ является независимым от x_4. Если мы подставим значения (444) в (447), то последние уравнения будут удовлетворены. Убедимся в этом для частного случая. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial g_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x_3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{x_1^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{x_2^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_2}\left(\frac{x_1x_3}{r^3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}\left(\frac{x_3x_3}{r^3}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{x_1x_2}{r^3}\right)\right\}.$$

Вычислив производные, мы убедимся, что все члены в фигурных скобках взаимно сокращаются.

Найденные с помощью уравнения (444) g_{ik} позволяют нам определить обусловленные массой M метрические свойства пространства и времени как функцию расстояния r от массы. Мы имеем здесь специальные случаи приведенных на стр. 118 и следующих более общих рассуждений.

Отложим на оси x_1 бесконечно малый единичный масштаб, для которого $ds^2=-1$; тогда согласно уравнению (299), если мы примем во внимание, что $x_1=r$, $x_2=x_3=0$, имеем:

$$dx_1=\frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha\frac{x_1^2}{r^3}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{r}}}=1-\frac{\alpha}{2r}. \tag{448}$$

Стержень, имеющий в локальной системе длину равную 1, укорачивается в общей системе, если он будет отложен *радиально*. Мы всегда „измеряем" разности параметров; поэтому стержень, имеющий в непосредственной близости от нас (в локальной системе) некоторую длину dl, *всегда оказывается укороченным*, если мы в каком-нибудь месте нашего поля тяготения дадим ему радиальное положение. Он кажется тем более укороченным, чем ближе он лежит к массе M.

Поместим теперь единичный масштаб в *касательное* положение. Тогда опять имеем $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$. Следовательно:

$$dx_2 = \frac{1}{\sqrt{-g_{22}}} = 1. \tag{449}$$

Помещенный в касательное положение стержень *всегда* оказывается *неукороченным*.

Рассмотрим еще *часы, отсчитывающие единицы времени*. Согласно уравнению (300) имеем:

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(g_{44}-1)}} = 1 - \frac{g_{44}-1}{2}$$

или

$$dx_4 = 1 + \frac{\alpha}{2r} = 1 + \frac{\varkappa M}{8\pi r} = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho_0\,dV}{r} = 1 + \frac{\Phi}{c^2}. \tag{450}$$

Следовательно, *всякие часы*, по сравнению с часами в непосредственной близи от нас (в локальной системе), идут повсюду в *поле тяготения медленнее* и тем медленнее, чем ближе к массе они находятся. Доходящий до нас от колеблющегося атома свет должен показывать смещение к красному концу спектра. Таким образом мы приходим к тем же результатам, которые мы получили в § 10 непосредственно из принципа эквивалентности. При сравнении следует только обратить внимание на то, что в уравнении (262) Φ означает разность потенциалов, тогда как в (450) — сам потенциал[1]).

Исследуем теперь *ход светового луча в поле тяготения нашей массы M*. Движение светового луча в общей системе координат определяется уравнением:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0 \tag{451}$$

(ср. стр. 119).

Далее, если мы будем рассматривать движение в определенном на стр. 153 эвклидовом пространстве, которым мы пользуемся для отображения трехмерного многообразия, то наблюдаемая скорость света определяется уравнением:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}. \tag{452}$$

[1]) Строгую теорию смещения в сторону красного цвета дает М. ф.-Лауэ. См. Physik. Zeitschr. Bd. 21, 1920, S. 659, и Die Relativitätstheorie, II. Bd.

При этом в пространстве, служащем для отображения, величины $\frac{dx_1}{dx_4}$, $\frac{dx_2}{dx_4}$, $\frac{dx_3}{dx_4}$ получаются из уравнения (451), если в каком-нибудь месте известно направление скорости света (т. е. $dx_1 : dx_2 : dx_3$). Так как коэффициенты g_{ik} не постоянны, то, как мы уже раньше нашли (ср. стр. 120), скорость света γ в поле тяготения также является переменной. Следовательно, вообще говоря, световой луч окажется искривленным, если он проходит вблизи массы M. Вычислим величину искривления.

Рассмотрим луч света, идущий в *плоскости отображения* $x_1 x_2$. Согласно с нижеприведенным рис. 3 угол искривления на бесконечно малом пути $\gamma\, dt$ будет:

$$\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{1}\, dt = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dt, \tag{453}$$

причем угол считается положительным, если кривизна вогнута в сторону начала координат. Полное искривление светового луча, проходящего перпендикулярно к оси x_1 в направлении положительной оси x_2 на расстоянии Δ от массы M, мы можем *приближенно* [1]) положить равным:

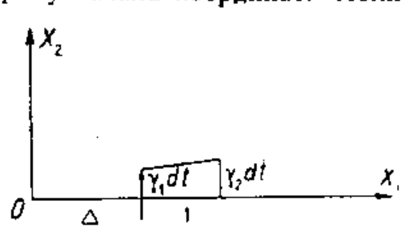

Рис. 3.

$$B = + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dx_2, \tag{454}$$

причем приращение времени dt заменено через dx_2 $(= dx_2 : \gamma)$, т. е., другими словами, для скорости света принято постоянное значение $\gamma = 1$. B представляет собой искривление светового луча, если мы нанесем его ход в плоскости отображения $x_1 x_2$ в декартовых координатах. При выборе нашей координатной системы мы положим $dx_3 = 0$. Изменение dx_1 на пути света dx_2 мы рассматриваем как бесконечно малую величину второго порядка; следовательно, имеем также $dx_1 = 0$, и уравнение (451) переходит в:

$$g_{22}\, dx_2^2 + g_{44}\, dx_4^2 = 0. \tag{455}$$

Согласно уравнениям (452) и (444) скорость γ равняется:

$$\gamma = \left(\frac{-g_{44}}{+g_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 - \frac{x_2^2}{r^3}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right). \tag{456}$$

Последнее уравнение показывает, что скорость света здесь не может быть больше 1.

---

[1]) Более строгое вычисление надо производить иначе. Ср. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 4. Aufl. § 29.

Приближенное значение искривления будет теперь:

$$B=\frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_1}{r^3}dx_2+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_1 x_2^2}{r_5}dx_2\right).$$

Если ввести полярные координаты, т. е. положить:

$$x_1=\Delta;\quad x_2=\Delta\operatorname{tg}\vartheta;\quad r=\frac{\Delta}{\cos\vartheta},$$

то при вычислении интеграла для полного искривления получается значение

$$B=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\Delta}+\frac{2}{\Delta}\right)=\frac{2\alpha}{\Delta}=\frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}=\frac{4\,kM}{c^2\Delta}. \tag{457}$$

Для светового луча, проходящего около края солнца, следовало бы ожидать искривление следующего размера.

Так как:

$$k=6{,}7\times10^{-8}\frac{см^3}{г\cdot сек^2},\ c=3\times10^{10}\ \frac{см}{сек},\ M_{\odot}=2\times10^{33}\,г,$$

$$\Delta=7\times10^{10}\,см,$$

то должно быть:

$$B=8\times10^{-6}=1{,}7''. \tag{458}$$

Убывание искривления лучей с возрастающим удалением от солнца происходит по формуле (457).

Найденные здесь закономерности непосредственно доступны проверке путем наблюдения. Во время полного солнечного затмения возможно зафиксировать на фотографии положение неподвижных звезд, находящихся вблизи солнца, и из сравнения с фотографией положения тех же звезд на ночном небе можно вычислить размеры искривления. Так как мы для изображения наблюдаемых размеров искривления также пользуемся эвклидовым пространством отображения, то таким путем возможно непосредственное сравнение с теорией.

Во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 г. двум английским экспедициям впервые удалось получить пригодные для измерения снимки неподвижных звезд; наблюдаемые смещения их показывают очень хорошее совпадение с теми значениями, которых требует эйнштейновская теория тяготения [1]). Однако этот результат

[1]) Sir F. W. Dyson, A. S. Eddington и C. Davidson, A determination of the deflection of light by the suns gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919. Philosoph. Transact. of the R. Soc. of London. Ser. A. Vol. 220. S. 291. H. N. Russel, Note of the Sobral Eclipse Photographs. Monthly Notices of the Royal Astron. Society. Vol. 81. S. 154. Ср. также E. Freundlich, Der Bericht der englischen Sonnenfinsternisexpedition über die Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfelde der Sonne. „Die Naturwissenschaften", 8. Jahrg., 1920. Heft 34, S. 667.

требует еще дальнейшего подтверждения путем дальнейших наблюдений во время будущих затмений. Также нельзя считать законченным исследование вопроса о том, нет ли и других причин для объяснения наблюдаемого явления.

Возвратимся теперь к *движению точки (планеты) в поле тяготения массы* M *(солнца)*. Движение будет описано уравнением геодезической линии:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_s}{ds} = 0. \tag{355}$$

Приближенные значения (444) приводят, как мы уже показали, к теории Ньютона. Если мы захотим установить, отличается ли от нее теория тяготения Эйнштейна, то мы должны будем искать более строгого решения, в котором сохранены по крайней мере малые величины второго порядка. Впервые это решение было дано Эйнштейном (ср. примечание 2, стр. 152). Вполне строгое решение уравнений тяготения I рода для задачи одного тела нашел Шварцшильд (Schwarzschild) (ср. примечание, стр. 153) [1]).

Ограничимся здесь тем, что приведем результаты строгого решения. Если мы выберем линейный элемент в форме:

$$ds^2 = f^2 dx_4{}^2 - d\sigma^2, \tag{459}$$

(ср. стр. 118), то вместо величин (444) появляются следующие строгие значения:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= -\delta_{ik} - \frac{\alpha x_i x_k}{f^2 r^3} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \\ g_{i4} &= g_{4i} = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3) \\ g_{44} &= f^2 = 1 - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned} \tag{460}$$

Выбор координатной (параметрической) системы тот же, что и для приближенного решения. g_{ik} также удовлетворяют тем же условиям, что и там. В частности опять $\sqrt{g} = 1$.

Уравнение (355) геодезической линии даст при значении индекса $i = 4$ *закон сохранения живой силы* в форме:

$$-\frac{\alpha}{r} + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r(r-\alpha)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = c, \tag{461}$$

и для индексов $i = 1, 2, 3$ законы площадей:

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c'. \tag{462}$$

Разница с теорией Ньютона [2]) состоит в том, что здесь дифференцирование производится по собственному времени s, вместо вре-

[1]) Ср. также H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 4. Aufl. § 31. Strenge Lösung der Einkörperproblems.

[2]) Для дальнейшего ср. M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. стр. 64 и следующие.

мени s; кроме того третий член уравнения (461) имеет множитель $(r-\alpha)$ вместо r. Оба уравнения (461) и (462) позволяют вывести φ как функцию r и таким образом полностью описывают движение точки. r и φ являются параметрами в общей системе координат, которые мы будем наносить в эвклидовом пространстве, служащем для отображения трехмерного многообразия (ср. стр. 153). Таким образом, движение, которое мы получим, относится к системе полярных координат в обычном смысле.

Так как в астрономии мы определяем движение планет относительно солнца также в такой системе, то возможно непосредственное сравнение теории с действительностью.

Для исключения собственного времени из уравнений (461) и (462) мы действуем так же, как в теории Ньютона.

Положим:

$$r = \frac{1}{\rho}; \tag{463}$$

тогда уравнение (461) переходит в:

$$\left(\frac{d\rho}{\rho^2 ds}\right)^2 = \alpha\rho - c - c'^2\rho^2(1-\alpha\rho).$$

Разделим на выражение, получающееся из уравнения (462):

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = c'^2\rho^4,$$

и мы получим для искомого уравнения между r и φ:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\alpha}{c'^2}\rho - \frac{c}{c'^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3. \tag{464}$$

В теории Ньютона отсутствует последний член правой части уравнения. Полином второй степени

$$\rho^2 - \frac{\alpha}{c'^2}\rho + \frac{c}{c'^2}$$

имеет там для движения планет два положительных корня ρ_1 и ρ_2, соответствующие расстояниям перигелия и афелия орбиты. Следовательно $\rho_1 > \rho > \rho_2$. Так как правая часть уравнения (464) также должна дать два решения, близких к значениям ρ_1 и ρ_2, то на основании известной алгебраической теоремы она имеет три положительных корня. Один из них ρ_0, как мы увидим, значительно больше ρ_1 и ρ_2.

Таким образом для уравнения (464) мы можем написать:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \alpha(\rho_0-\rho)(\rho_1-\rho)(\rho-\rho_2). \tag{465}$$

Если вместо постоянных ρ_1 и ρ_2 мы введем употребляемые в астрономии величины a (половина большой оси орбиты) и e (эксцентриситет), полагая при этом:

$$\frac{1}{\rho_1} = a(1-e), \quad \frac{1}{\rho_2} = a(1+e), \tag{466}$$

то получим:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2}{a(1-e^2)} = \frac{2}{p}, \quad \rho_1 - \rho_2 = \frac{2e}{a(1-e^2)} = \frac{2e}{p}. \tag{467}$$

$p = a(1-e^2)$ является при этом параметром орбиты. Сравнивая коэффициенты при ρ^2 в уравнениях (464) и (465), получим:

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{\alpha}. \tag{468}$$

Принимая во внимание (445) и (443), получаем отсюда, что ρ_0 очень велико по сравнению с ρ_1 и ρ_2. Вследствие уравнения (465) искомое соотношение между r и φ принимает форму:

$$\varphi = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\alpha(\rho_0 - \rho)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)}}. \tag{469}$$

Аналогичным соотношением в теории Ньютона является:

$$d\theta = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)}}, \tag{470}$$

которое приводит к интегралу:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \tag{471}$$

т. е. к уравнению конического сечения, причем θ обозначает истинную аномалию. Воспользовавшись уравнением (467), можно уравнение (471) написать также в виде:

$$\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos\theta. \tag{472}$$

Введем теперь значение $d\theta$ из уравнения (470) в (466) и мы получим:

$$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha(\rho_0 - \rho)}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha\left(\rho_0 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos\theta\right)}}. \tag{473}$$

Следовательно, φ является функцией истинной аномалии конического сечения. По теории тяготения Эйнштейна материальная точка также движется по коническому сечению. Если мы будем отсчитывать направление радиуса вектора от направления перигелия, то направление радиуса вектора дается углом θ. Если же мы будем отсчитывать его от определенного направления в нашем отображающем пространстве, то оно определяется через угол φ. *Само коническое сечение, следовательно, вращается.* Если мы ограничимся эллипсом, то перигелий определяется значениями $\theta = 0, 2\pi, \ldots\ldots$ Полному обороту точки по эллипсу соответствует угол:

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha\left(\rho_0 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos\theta\right)}}. \tag{474}$$

Так как ρ_1 и ρ_2 мало отличаются друг от друга, поскольку речь идет о планетах, то мы можем для них приближенно положить:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\left(\rho_0 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)}}. \tag{475}$$

Таким образом имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\left(\rho_0 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{a(1-e^2)}\right)}} = 1 + \frac{3}{2}\frac{\alpha}{a(1-e^2)}.$$

В течение одного оборота перигелий эллипса продвигается, следовательно, вперед на $\frac{3\alpha\pi}{a(1-e^2)}$. Обратим еще внимание на то, что на основании третьего закона Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{kM},$$

следовательно:

$$\alpha = \frac{2kM}{c^2} = \frac{8\pi^2 a^3}{c^2 T^2}.$$

Таким образом согласно теории тяготения Эйнштейна перигелий продвигается при каждом обороте на величину

$$\varepsilon = 24\,\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}. \tag{476}$$

Отсюда получаем для четырех *внутренних планет* числовые значения перемещения перигелия в течение времени, равного юлианскому столетию $\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$:

Меркурий	$+42{,}9''$
Венера.	8,6
Земля.	3,8
Марс.	1,4

Движения наших планет, после исключения влияния взаимных возмущений, действительно показывают подобного рода *смещения пери-*

гелия своих эллиптических орбит, которые, однако, вследствие ничтожных эксцентриситетов планетных орбит, только у Меркурия можно определить до некоторой степени точно. Впервые его обнаружил Леверрье (Leverrier). По исследованиям С. Ньюкомба (S. Newcomb) для Меркурия в 100 лет это смещение все же достигает значительной величины в $+41''$ ($\pm 2''$). Наблюдаемое для Венеры значение очень ненадежно. Для земли значение Ньюкомба равняется $+6''$ ($\pm 8''$), для Марса $+8''$ ($\pm 4''$). Таким образом полное совпадение между значениями Ньюкомба и данными теории относительности получается по крайней мере для Меркурия.

Однако, недавно Е. Гроссман (E. Grossmann) [1]) указал на то, что данные Ньюкомба искажены ошибкой, исправление которой приводит к менее хорошо совпадающим значениям. Таким образом является необходимым повторить исследование Ньюкомба. Частично такое повторение было проведено Е. Дулитлем (E. Doolittle), причем опять получаются лучшие совпадения с данными Эйнштейна [2]). В настоящее время можно только сказать, что движение перигелия Меркурия в течение 100 лет лежит в пределах от $27''$ до $45''$ и, по всей вероятности, ближе к последнему значению, чем к первому.

Таким образом, по меньшей мере, можно ручаться, что порядок величины совпадает при сравнении теории относительности с наблюдениями. Тем самым мы приобрели существенный аргумент в пользу теории относительности Эйнштейна.

Однако, если обратиться к некоторым вспомогательным гипотезам, то механика Ньютона также может объяснить наблюдаемые смещения перигелия.

Г. ф.-Зелигер (H. v. Seeliger) [3]) показал прежде всего, что благодаря массам космической пыли, находящимся приблизительно между солнцем и Марсом, и с которыми следует связать зодиакальный свет, могут возникнуть наблюдаемые движения перигелия внутренних планет (так же как и другие аномалии). Но наблюдаемые яркость и плотность зодиакального света делают необходимым допущение, что как раз те массы, которые должны обусловливать движение Меркурия, должны быть распределены внутри орбиты Меркурия не в виде мелкой пыли, а в виде камней значительных размеров. Они, следовательно, не должны наблюдаться в виде светящегося облака пыли, как зодиакальный свет на большом расстоянии от солнца; их наличие требуется в настоящий момент исключительно для наблюдаемых аномалий планетных орбит. Таким образом теория Ньютона для объяснения движения перигелия должна обращаться к *гипотетическим*

[1]) E. Grossmann, Die Bewegung des Merkurperihels nach den Arbeiten Newcombs. Astronom. Nachrichten. Bd. 214. S. 41 u. 195.

[2]) Ср. при этом E. Kienle, Die Bewegung der vier inneren Planeten mit besonderer Berücksichtigung des Merkurperihels. „Die Naturwissenschaften“, 10. Jahrg., 1922, S. 217 и 246.

[3]) H. Seeliger, Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten. Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der Akad. d. Wiss. München. Bd. 36, 1906, S. 595. Далее: E. Freundlich, Über die Erklärung der Anomalien im Planetensystem durch die Gravitationswirkung interplanetarer Massen. Astron. Nachricht. Bd. 201, S. 49. H. Seeliger, Über die Anomalien in der Bewegung der inneren Planeten. Astron. Nachrichten. Bd. 201, S. 273.

массам, от которых теория тяготения Эйнштейна, быть может, будет в состоянии совсем отказаться [1]).

Не входя в подробности, мы вкратце рассмотрим еще следующую проблему, имеющую основное значение для теории относительности, а именно *проблему вращения*. Мы брали неоднократно вращение как пример, чтобы особенно выявить разницу между абсолютным и относительным движениями, между представлениями классической механики и представлениями теории относительности. Мы должны теперь требовать от теории относительности, чтобы она действительно объясняла центробежные и кориолисовы силы, возникающие при вращении, присутствием *масс*, находящихся вне вращающейся системы.

Первое решение этой задачи на основании уравнений тяготения I рода было дано Г. Тиррингом (H. Thirring) [2]). Внутри вращающегося полого шара, с равномерно распределенной на нем массой, возникает поле тяготения; вследствие этого на находящуюся в нем материальную точку действуют силы, аналогичные центробежным и кориолисовым силам классической механики и зависящие от массы полого шара и скорости его вращения. При интегрировании уравнений тяготения здесь было необходимо допустить, так же как при решении задачи одного тела (ср. стр. 153), что величины g_{ik} в бесконечно удаленных частях пространства принимают значения, которые они имеют в специальной теории относительности. Поэтому результат этот относится только к некоторой ограниченной области в конечной части пространства.

Но как только, независимо от вращения полого шара, вращается сама система отсчета относительно координатной системы (в которой выполнены в бесконечно далеком пограничные условия), можно показать, что опять появляются обычные центробежные и кориолисовы силы классической механики, даже и в том случае, когда исчезают все массы во вселенной. Как мы уже раньше видели (ср. стр. 144), в подобного рода координатной системе масса обладает инерцией и при отсутствии других масс; следовательно, в рассматриваемом случае внутри вращающейся координатной системы также должны появиться центробежные силы, как чистые силы инерции в смысле классической механики. Таким же образом трактовалось вращение еще в § 10, и приводимые на стр. 102 „далекие массы“ имели там исключительно

1) В связи с этим следует обратить внимание на результат исследования Баушингера (J. Bauschinger) (Enzykl. der math. Wissensch. Bd. VI$_2$, Heft 7. Bestimmung und Zusammenhang der astronomischen Konstanten. S. 887). Пользуясь механикой Ньютона, можно показать, что эмпирическим способом определенная координатная система, в которой имеет место закон Ньютона и к которой мы относим движение планет (инерциальная система), вращается относительно неподвижных звезд. Если допустить теорию тяготения Эйнштейна, то, как доказал Баушингер, это вращение исчезает. Координатная система, в которой действительны уравнения тяготения Эйнштейна первого рода, покоится относительно системы неподвижных звезд. Этот последний результат очень существен для теории относительности. Ср. при этом: H. Osten, Über einen Zusammenhang der Bezugssysteme in der Relativitätstheorie. Astron. Nachrichten. Bd. 214, S. 179.

2) H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Physikal. Zeitschr., 19. Jahrg., 1918, S. 33, u. 22. Jahrg., 1921, S. 29.

гипотетический характер, что, однако, противоречит общему принципу относительности. Поэтому не следует ожидать решения общей проблемы вращения с помощью уравнений тяготения I рода.

Скорее мы должны воспользоваться для этого уравнениями тяготения II или III рода. Потенциалы тяготения g_{ik}, данные на стр. 145 и следующих, для решения уравнений тяготения II рода *обусловливаются исключительно* всей материей мирового пространства (в среднем распределенной равномерно и покоящейся). Если вся ее масса исчезнет, то радиус кривизны трехмерного пространства будет равен нулю и перестает существовать поле тяготения g_{ik}, так же как и само пространство. Указанные g_{ik} таким образом *приблизительно описывают поле тяготения звезд*, отнесенное к координатной системе, в которой звезды в среднем покоятся [1]).

Если мы перейдем с помощью уравнений преобразования:

$$\begin{aligned} x_1' &= +x_1 \cos(\omega' x_4) + x_2 \sin(\omega' x_4), \\ x_2' &= -x_1 \sin(\omega' x_4) + x_2 \cos(\omega' x_4), \\ x_3' &= x_3, \qquad\qquad x_4' = x_4 \end{aligned} \tag{477}$$

из этой координатной системы в другую, равномерно вращающуюся относительно первой с угловой скоростью ω', то на основании уравнений движения (355) теории относительности мы можем сделать заключение о появляющихся в новой координатной системе силах. Приближенно мы можем написать уравнения движения, отнесенные к вращающейся координатной системе, если мы при этом ограничимся малыми величинами первого порядка (ср. стр. 150), в виде:

$$\frac{d^2 x_k'}{dt^2} = -2\left(\Gamma^k_{14}\frac{dx_1'}{dt} + \Gamma^k_{24}\frac{dx_2'}{dt} + \Gamma^k_{34}\frac{dx_3'}{dt}\right) - \Gamma^k_{44}. \tag{478}$$

Составляющие поля Γ^k_{lm} выводятся на основании уравнения (323) из g'_{ik}. Последние, также отнесенные к вращающейся системе координат, мы получаем с помощью уравнений преобразования (144) из (413), (415), (419) и (477). При принятом здесь приближении получаются значения [2]):

$$\begin{aligned} g'_{14} &= x_2'\omega'; \qquad g'_{24} = -x_1'\omega'; \\ g'_{34} &= 0; \qquad\quad g'_{44} = 1 - (x_1'^2 + x_2'^2)\,\omega'^2; \end{aligned} \tag{479}$$

---

[1]) Эту систему можно назвать „*преимущественной координатной системой*", если это понимать так, что в ней особенно просто описываются явления движения звездной системы. Во всяком случае *целесообразно* для этих явлений выбрать именно эту систему, так же как для явлений движения в солнечной системе целесообразно провести систему отсчета через центр солнца или через центр тяжести солнечной системы. Для самих законов природы она *не* является преимущественной системой, потому что последние *инвариантны по отношению* ко всякой системе.

[2]) Ср. Physikal. Zeitschr., 22. Jahrg., 1921, S. 24 u. 179.

откуда, принимая во внимание уравнения (358):

$$\Gamma^1_{24} = -\omega'; \; \Gamma^2_{14} = +\omega'$$
$$\Gamma^1_{44} = -\Gamma^4_{14} = -x'_1 \; \omega'^2 \qquad (480)$$
$$\Gamma^2_{44} = -\Gamma^4_{24} = -x'_2 \; \omega'^2.$$

Остальные Γ^k_{lm} равны нулю.

Подставим эти значения в уравнения движения (478) и мы получим:

$$\frac{d^2x'_1}{dt^2} = + \; 2\omega' \; \frac{dx'_2}{dt} + x'_1\omega'^2$$
$$\frac{d^2x'_2}{dt^2} = - \; 2\omega' \; \frac{dx'_1}{dt} + x'_2\omega'^2 \qquad (481)$$
$$\frac{d^2x'_3}{dt^2} = 0.$$

Во вращающейся относительно покоящейся материи мирового пространства координатной системе появляются таким образом обычные центробежные и кориолисовы силы классической механики. Следовательно, силы, действующие на материальную точку во вращающейся системе, обусловлены не свойственной самой точке „инерцией", а полем тяготения всех масс мирового пространства; эти силы возникают вследствие вращательного движения относительно масс и исчезают вместе с ним. Таким образом, так называемые силы инерции совершенно утратили характер „кажущихся сил"; напротив, они подчинены силам тяготения. Это обозначает колоссальный прогресс в познавании физических явлений природы.

Так как наши законы теории относительности обще-инвариантны, то те же центробежные и кориолисовы силы должны возникать и тогда, когда покоится прежде вращавшаяся координатная система, а вращается относительно нее вся вселенная с угловой скоростью ω'. В этом заключается смысл положения, что согласно общей теории относительности безразлично—вращается ли земля, а неподвижные звезды находятся в состоянии покоя, или покоится земля, а вращаются неподвижные звезды. Оба случая не только кинематически, но и *динамически равноценны*. В действительности они представляют собой только один случай, который может быть описан различным образом [1]).

Представление о вращательном движении как об относительном встречалось неоднократно с различного рода трудностями, на которых придется еще остановиться несколько подробнее.

Теория относительности ни в коем случае не говорит одностороние: земля покоится, а небесный свод вращается вокруг нее. Напротив, она говорит, что наблюдаемый процесс вращения можно

[1]) См. также „Die Naturwissenschaften", 9. Jahrg., 1921, S. 9.

воспринимать двояко и что оба случая *нельзя будет физически* (т. е. путем физического эксперимента) *различить*. При этом остается совершенно открытым вопрос, не существуют ли другие основания для выбора той или другой точки зрения.

Обратимся сначала еще раз к простейшему случаю классической механики. Наблюдателю, находящемуся в прямолинейно и равномерно движущемся поезде, *физически* невозможно установить, находится ли поезд или окружающие его предметы в равномерном переносном движении; движение является относительным. Несмотря на это, соображение, что поезд составляет только маленькую частицу земли и что кроме его поезда на земле едет в этот момент бесконечное множество поездов, приведет его к тому, что он примет за наиболее подходящую для описания процессов движения координатную систему, жестко связанную с землей.

Совершенно также, при вращении, выражение: земля вращается, а покоится небесный свод, будет всегда наиболее соответствовать здравому смыслу. Однако, мы все же должны оба наши выражения принимать за одинаково возможные, чтобы избежать понятия абсолютного движения. Справедливое в ньютоновском смысле выражение: „земля вращается“ должно быть заменено в теории относительности другим: „земля вращается относительно масс мирового пространства“. Это последнее выражение только тогда имеет смысл, когда оба наши положения приводят физически к одним и тем же следствиям.

При этом в самой теории относительности не возникает никаких решительно трудностей. Хотя наблюдаемые скорости, если допустить, что вращается небесный свод, в общей параметрической системе, значительно больше, чем 300 000 *км* в секунду, все же такие скорости в рамках общей теории относительности вполне допустимы. Так как в случае звезд мы имеем дело с движущимися материальными точками, то на основании теории их скорости должны быть меньше, чем скорость света в том же месте и в том же направлении.

Опыт Фуко с маятником также не противоречит теории относительности. Он ни в коем случае не является доказательством того, что вращение земли представляет собой „абсолютное“ движение. Это совсем не опыт на земной поверхности,—правильнее сказать: это опыт в поле тяготения звезд. Вспомним сначала еще раз о том, как рассматривается опыт Фуко с маятником в классической механике [1]), и ограничимся простейшим случаем, когда маятник свободно подвешен на одном из полюсов. В галилеевой координатной системе маятник, находящийся на полюсе, качается в неизменной плоскости. Так как земля вращается относительно этой системы, то вращается и плоскость качания маятника относительно постоянной точки на земле. Галилеева координатная система в очень большом приближении совпадает с системой отсчета, твердо связанной с небесным сводом.

Но в теории относительности материальная точка также движется прямолинейно и равномерно в координатной системе, в которой

---

[1]) Ср. напр. W. Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig 1911; стр. 118 и следующие.

покоится в среднем равномерно распределенная материя мирового пространства. На земном полюсе маятник качается в плоскости, неизменной относительно только что определенной системы. Следовательно, для опыта Фуко с маятником наша система отсчета совпадает с системой небесного свода, так же как и галилеева система классической механики. Если земля вращается относительно системы неподвижных звезд, то мы наблюдаем с ее поверхности вращение плоскости качания. Таким образом опыт Фуко с маятником показывает только, что земля вращается *относительно общей массы вселенной.*

Все, что мы до сих пор рассматривали, относится исключительно к равномерному вращению. С этим не нужно смешивать, конечно, явление, в течение которого тело из состояния относительного покоя переходит во вращение. При этом явлении некоторое время действуют силы, которые вызывают ускорения. Для изложения этого случая необходимо глубже рассмотреть вопрос.

Подобно тому как мы представляем себе, что при вращении силы инерции обусловливаются полем тяготения звезд, мы должны на основании теории относительности в ее самой общей форме представить себе, что *повсюду, где мы наблюдаем действие инерции, оно является действием тяготения всех масс вселенной*, относительно которых происходит движение (*относительность инерции*). Сообщим, например, шару толчок; тогда он получит ускорение относительно других масс. Это ускорение вызывается тем же путем, что и вращательное движение,—действием сил тяготения, исходящих от всей материи мирового пространства. Они действуют на шар и *обусловливают его инерционное сопротивление.*

Если же движение шара является относительным по отношению ко всей вселенной, то весь процесс мы можем также представить так, что *шар покоится*, а вселенная имеет ускорение относительно шара. Ускорение всей массы относительно шара вызывает при этом те же силы тяготения, что и описанные в первом случае, и эти силы стремятся сообщить шару ускорение. Точно такая же внешняя сила, которая раньше сообщала шару ускорение (толчок), нужна теперь, чтобы удержать шар в покое. При этом явлении мы можем представить себе, что во время фазы ускорения поле тяготения индуктируется аналогично тому, как „индуктируется электрическое поле ускоренно движущимися электрическими зарядами“ [1]).

Таким образом следует обратить внимание на то, что при втором способе описания действие внешних сил приложено не к вселенной, а опять к шару. Положение механики Ньютона: „толчок сообщает ускорение шару“ должно быть заменено другим: „толчок сообщает ускорение шару относительно остальных масс вселенной“. Оба выражения: „благодаря толчку шар получает ускорение относительно вселенной“ и „благодаря толчку вселенная получает ускорение относительно шара“ должны быть физически равноценны.

Второй способ описания мы можем дать еще в другой форме (ср. § 10). Вместо того чтобы говорить, что вселенная находится в состо-

---

[1]) A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie. Die Naturwissenschaften, 6. Jahrg., 1908, S. 700.

нии ускорения, которое индуцирует инерционное сопротивление, мы можем также сказать: вселенная вместе с шаром находится в однородном поле тяготения, действие которого на шар проявляется в виде инерционного сопротивления. Это описание опять физически равноценно данному прежде описанию. Однако, оно оказывается верным только приближенно, так как допущение конечных однородных полей тяготения предполагает эвклидову структуру пространства в них. Пространство же только в ограниченных областях и то только приближенно можно принимать за эвклидово.

Правда введенное только что поле тяготения в целом не зависит от масс; речь идет, однако, единственно о том, чтобы дать возможно простое описание наблюдаемых процессов. Отсюда ни в коем случае нельзя делать заключения, что теория относительности знает действия, не имеющие причины. При толчке или любом другом явлении ускорения появляется инерционное сопротивление, которое обусловливается всей массой вселенной, относительно которой происходит ускорение.

Применение *к вращению* получается отсюда само собой. Если мы приведем волчок из состояния покоя относительно вселенной в равномерное вращение, то придется преодолеть силы инерции. Мы имеем дело с особым случаем ускоренного движения, причем выражения: „мы приводим волчок во вращение относительно вселенной" или „мы приводим вселенную во вращение относительно волчка" мы можем ставить рядом, как *физически равноценные*.

Появляющиеся при ускорении силы тяготения приводились уже раньше (ср. стр. 100) для объяснения *парадокса с часами*. Мы можем описать движение обоих часов A и B друг относительно друга двумя различными способами, из которых оба передают одно и то же явление, только с двух различных точек зрения. Один раз благодаря действующим силам часы B получают ускорение относительно покоящихся часов A и (как мы теперь должны добавить) относительно покоящихся масс вселенной. Второй раз часы A и вселенная находятся в ускоренном движении, в то время как часы B удерживаются в покое теми же самыми действующими силами, которые раньше обусловливали их ускорение. Эти последние силы в точности уравновешивают действие силы тяготения, появляющейся во время фазы ускорения.

Это второе описание, как мы только что вывели, тождественно тому, которое мы дали раньше для того же процесса: часы A и B некоторое время находятся в однородном поле тяготения, причем часы B во время возникновения поля удерживаются на месте на них действующей силой.

Данное здесь представление относительности инерции нуждается еще в детальной проработке. Одно, однако, несомненно. Мы не можем отказаться от него без того, чтобы не отнять у принципа относительности его всеобщее значение. Теория относительности, которая должна была бы отбросить *поле тяготения звезд* и определяемое *их* вращением или ускорением действие, не была бы теорией относительности в смысле нашего общего принципа. Она осталась бы стоять на полпути. Если же применять ее только к силам тяготения в смысле классической механики, то это означало бы признание уравнений тяготения I рода и отказ от уравнений II и III рода. Тогда, например, вращение вовсе не было бы относительным движением.

Должны ли мы рассматривать уравнения тяготения II и III рода как соответствующие действительности, весьма существенно зависит от одного обстоятельства. Оба последних вида уравнений требуют конечной пространственно замкнутой вселенной [1]).

В настоящее время астрономия не может дать решительного ответа—и может быть еще надолго—на вопрос о конечности мира, хотя, вообще говоря, такой возможностью пренебрегать не следует [2]). В. де-Ситтер [3]) в связи с теорией относительности прежде всего исследовал, согласуются ли результаты астрономических наблюдений с допущением конечного мира, и не нашел противоречий. При этом он вывел указанное выше (стр. 149) значение радиуса кривизны вселенной. Однако это только первые попытки, которые, — как бы ни были радостны для теории относительности их результаты,—должны быть еще значительно продолжены и для которых опытный материал может накапливаться лишь очень медленно.

Таким образом в настоящее время мы не в состоянии доказать, опираясь на действительность, справедливость уравнений тяготения II (и III) рода; точно так же и уравнения тяготения I рода ждут своего окончательного подтверждения.

Конечность мирового пространства в настоящее время надо рассматривать как *предсказание* теории относительности, вероятность какового растет в той же мере, в какой принцип относительности оказывается справедливым и для других явлений. Но необходимо будет, конечно, вывести эту конечность мира со временем и непосредственно из наблюдений. И поныне еще имеют значение слова Г. Вейля, сказанные им в его основном труде „Пространство, время, материя“ (I издание) о теории относительности: „Свою настоящую опору она находит не столько в опыте, сколько в своей внутренней последовательности, в которой она значительно превосходит классическую механику, а также в том, что она одним ударом разрешает загадку относительности движения и тяготения наиболее удовлетворительным для разума образом“.

Серьезных противоречий между теорией относительности и действительностью, правда, не имеется в настоящее время; существующие противоречия все больше и больше разрешаются, видимо, в пользу теории относительности. Но только будущее может доказать полное согласие между теорией и опытом.

---

1) W. de Sitter (ср. On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Monthly Notices of R. Astron. Society, Vol. 78, № 1, Nov. 1917) дал правда другое решение уравнений тяготения II рода, которое *не* приводит к этим результатам. Но оно физически совершенно неудовлетворительно, и поэтому мы не будем на нем останавливаться подробнее. (Ср. F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt. Nachr. der Göttinger Gesellsch. der Wiss. math-phys. Kl. 1918. S. 394.)

2) Ср. Die Naturwissenschaften. 9. Jahrg., 1921, S. 9 u. 773.

3) W. de Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. 3 paper. Monthly Notices of R. Astron. Society. Vol. 78. № 1. Nov. 1917; u. W. de Sitter, On the curvature of space. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam Proceedings. Vol. 20. S. 229. 1917.

ЛИТЕРАТУРА.

Основные руководства.

Вавилов С. И. Экспериментальные основания теории относительности. Москва. 1928.

Laue M. Die Relativitätstheorie. B. I und B. 2. 1921.

Lorentz H., Einstein A., Minkowski H. Das Relativitätsprinzip. 1923.

В ближайшем будущем выходят на русском языке:

Wege H. Raum, Zeit, Materie. 5 Aufl. Berlin. 1923.

Eddington A. E. The mathematical theorie of relativity. 2 ed. Cambridge. 1924.

Pauli W. Relativitätstheorie. Enzyklopedie der mathemathischen Wissenschafften. Band 5. Leipzig—Berlin. 1922.

Becquerel. Le principe de relativité et la theorie de gravitation. Paris. 1922.

Френкель Я. И. Теория относительности. Л-град. 1923.

Silberstein L. The theorie of Relativity. London. 1924.

Bauer H. Mathematishe Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins. Wien. 1922.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Сокращенные обозначения: об. = общий; кл. = классический; мех. = механический; т. о. = теория относительности; сп. = специальный (-ая); сист. = координатная система; и с. = и следующие страницы; о. = относительность.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Часть первая.

Специальная теория относительности.

Часть вторая.

Общая теория относительности.

Ответственный редактор *Н. Иванов.* Технический редактор *Р. В. Эмдина.*
Сдано в набор 6/XII 1932 г. Подписано к печати 1/III 1933 г.
Формат 62×93. Тип. зн. в 1 п. л. 55 296.
т-41в-5а-4. ОНТИ № 385.
Ленгорлит № 2883. Тираж 3.150—11 л. Заказ № 3997.

2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.