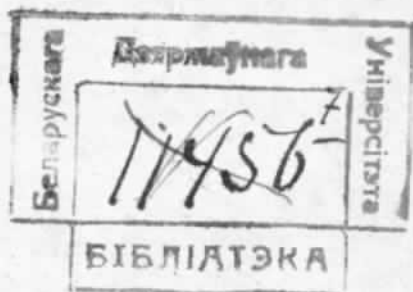


531
K61

Г. В. КОЛОСОВ

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ



О Н Т И

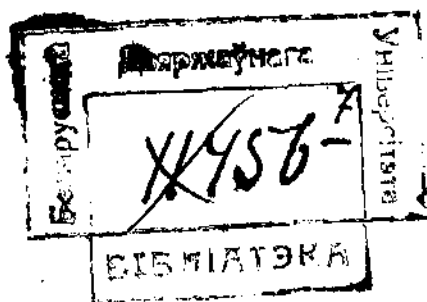
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН
ЛЕНИНГРАД 1935 МОСКВА

Депозитарий

Проф. Г. В. КОЛОСОВ

ПРОВЕРЕНО
1950 г.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ
ДИАГРАММ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ



ПРОВЕРЕНО
1950 г.



ОНТИ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН
ЛЕНИНГРАД 1935 МОСКВА

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

11409367

53

K61

Ответственный редактор *Е. В. Пулькина.*

Сдана в набор 22/VII 1934 г.

Формат 82 × 110 Изд. № 228.

Ленгорлит № 29713.

Бум. листов 3,5.

Тираж 5000—авт. л. 14.

Технический редактор *Р. В. Эмдина.*

Подписана к печати 26/XII 1934 г.

Тип. зн. в. 1 бум. л. 160.000.

Заказ № 3178.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Кр. Командирова, 29.

Памяти друга
проф. С. И. Белзевского
посвящает свое исследование автор.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предметом настоящего исследования является краткое изложение новых идей в теории упругости, получивших развитие в последнее время (главным образом благодаря трудам русских ученых). Мы разумеем применение к ней комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной, обещающее внести много приемов не только для решения задач теории упругости, но и сопротивления материалов и оптического метода определения напряжений.

Как известно, в последнем большую роль играют экспериментально определяемые изоклинические и изохроматические линии, представляющие линии постоянного аргумента и постоянного модуля комплексной величины

$$2X_y + i(X_x - Y_y),$$

где X_x , X_y , Y_y три напряжения плоской задачи, непосредственно связанные с двумя функциями комплексной переменной, играющими основную роль в плоской задаче теории комплексной переменной, а линии постоянного поверхностного расширения являются линиями постоянства величины вещественной части одной из этих функций [формула (31)].

Применение комплексной переменной распространяется не только на плоскую задачу теории упругости (как это имеет место в плоской задаче гидродинамики), но и на целый ряд вопросов трех измерений: задачу Сен-Венана и ее распространение на случай кривых брусьев, задачи Клебша, В. А. Стеклова и вообще на изучение равновесия цилиндрических тел, где по аналогии с задачей двух измерений применение комплексной переменной может оказаться полезным.

Попытки применения в теории упругости комплексной переменной известны довольно давно; Клебш в § 31 своего курса теории упругости (1862) при изложении задачи Сен-Венана пользуется комплексной переменной, но сравнительно мало и формально. Следуя Клебшу, П. А. Шифф в своих лекциях по теории упругости также вводит функции комплексной переменной, а Лове в курсе теории упругости при изложении плоской задачи, с целью сокращения письма, пользуется простейшими формальными свойствами функции комплексной переменной, однако нигде не вдаваясь в их более глубокие свойства (теорему Коши, голоморфность, конформное отображение и т. д.). Немногим больше затронут этот вопрос в только что вышедшем курсе С. П. Тимошенко (1934).

Сильный толчок к применению комплексной переменной был вызван точной формулировкой плоской задачи Морисом Леви в 1898 г., выяснившим, что она не является простейшей задачей общей теории упругости, как это имеет, например, место в кинематике и в других отделах механики, где „плоское“ движение является не только простейшим, но иногда и самым распространенным случаем движения (например в теории механизмов). Не то в теории упругости, где „плоское“ распределение усилий не сопровождается, вообще говоря, плоским перемещением его частиц, а последнее сопровождается усилиями, перпендикулярными к плоскости перемещения.

На плоскую задачу никак повтому нельзя смотреть как на простейшую задачу общей теории упругости, и она развилась главным образом при приближенном исследовании распределения напряжений в задачах трех измерений, где одно из них мало сравнительно с двумя другими, например в тонких пластинках, арках, где для упрощения анализа приходится приближенно пренебрегать их толщиной, а также вообще в тех случаях, где вследствие сложности задачи в трех измерениях ее сводят к двум измерениям.

Задача, поставленная и решенная русским ученым проф. Х. Г. Головиным в 1880 г., о равновесии круглой арки, на основании формул теории упругости, явилась первой плоской задачей теории упругости и дана ранее исследований Мориса Леви (1898). Известный астроном Эри предложил еще в 1862 г. метод решения плоской за-

дачи при помощи функции, называемой функцией Эри, но он не обратил внимания, что она должна удовлетворять бигармоническому уравнению. Ту же ошибку повторил Иббетсон в своем курсе теории упругости (1887 г.), а Рибьер в 1889 г. хотя и получил правильное решение плоской задачи в рассмотренном им частном случае, но не обратил внимания, что распределение усилий в односвязном контуре не зависит от коэффициентов упругости.

Настоящим исследованием мы поставили себе целью дать возможно больше приемов для решения плоской задачи, не вдаваясь в теоретические тонкости самой задачи, таким образом совершенно не затронуты вопросы о существовании решений уравнений теории упругости, о их единственности и т. п. Из приемов решения плоской задачи мало внимания уделено методу, выработанному в последнее время Н. И. Мусхелишвили — интегралов, аналогичных интегралам Коши, в виду того, что этот прием довольно полно и с многочисленными примерами изложен Мусхелишвили в его последних исследованиях и только что вышедшем курсе.

Главной задачей исследования является плоская задача теории упругости, и она рассмотрена с совершенно новой точки зрения. Мы вводим новый основной принцип, названный нами принципом комплексного или гармонического уравнивания, который обещает в плоской задаче получить такое же значение, какое имеет принцип Дирихле в математической физике. От приложимости этого принципа к какому-нибудь контуру зависит успех решения для этого контура плоской задачи.

В частном случае он применим к тем контурам, для которых дано решение Н. И. Мусхелишвили и П. А. Соколовым (результаты которого, найденные при помощи рядов, мы непосредственно получаем сразу в замкнутой форме).

Применяя принцип комплексного уравнивания, мы выработали однообразный метод решения вопроса и даем следующую формулу для одной из двух основных функций комплексной переменной, определяющих плоскую задачу, а именно для функции, вещественной частью которой является поверхностное расширение:

$$\Phi(z) = 2S(P + iU) + C,$$

где C — комплексная постоянная, а S — вводимый нами символ, который мы назовем символом Шварца для данного контура, представляющим обобщение известного интеграла Шварца, определяющего функцию комплексной переменной, вещественная часть которой имеет на данном круге наперед заданные значения P и U , нормальная и касательная составляющие внешнего напряжения, приложенного в какой-нибудь точке контура.

Этот прием напоминает метод Н. И. Мусхелишвили, основанный на свойствах интегралов, которые он назвал „аналогичными“ интегралам Коши.

Таким образом получается метод, повидимому приложимый ко многим аналитическим контурам и в частности для алгебраических; мы применяем здесь формулу Шварца в форме, данной Д. А. Граве при решении задачи Дирихле для алгебраического контура.

Имея в виду важное значение интеграла Шварца для нашего метода, мы заимствуем из этой работы приведенные в ней примеры.

Заметим, что те интегралы, которыми мы пользуемся в символе Шварца, лучше назвать „аналогичными“ интегралу Шварца и не только потому, что они распространены на какой угодно контур (сам интеграл Шварца, как мы уже заметили, дан для круга), но и потому, что в подинтегральной функции вместо функции, представляющей заданные значения вещественной части функции комплексной переменной (и следовательно по существу вещественной) мы предполагаем какие угодно значения (как вещественные, так и мнимые).

Произвольная постоянная, входящая в S , чисто мнимая в интеграле Шварца, может быть здесь комплексной. Кроме этого метода читатель найдет немало исследований, появляющихся в печати впервые.

Так, наравне с эллипсоидом напряжения мы иллюстрируем распределение срезающих усилий особыми поверхностями шестого порядка, еще не встречавшимися в математике и т. п.

Ленинград, октябрь 1934 г.

Г. Колосов

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Комплексные диаграммы при решении технических и математических вопросов.

За последнее время все чаще и чаще находят применение при решении разного рода теоретических и практических вопросов так называемые комплексные диаграммы ¹⁾. Они получили особенно широкое распространение в электротехнике (Штейнметц).

Чтобы дать простой и наглядный пример применения комплексных диаграмм к механике, возьмем вопрос, с которым часто приходится сталкиваться в сопротивлении материалов: изменение моментов инерции и произведений инерции плоских фигур вокруг каких-нибудь осей в плоскости этих фигур при условии, что начало этих осей не меняется, а сами оси поворачиваются в этой плоскости. Положение осей мы будем определять углом γ , образованным новым положением оси $O\xi$ со старым ее положением Ox (черт. 1). Для какой-нибудь точки M_k мы имеем старые координаты x_k, y_k , и новые координаты ξ_k, η_k ; формулы преобразования их будут:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \xi_k \cos \gamma - \eta_k \sin \gamma \\ y_k &= \xi_k \sin \gamma + \eta_k \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда

$$x_k + iy_k = (\xi_k + i\eta_k) e^{i\gamma}. \quad (2)$$

Возвышая обе части (2) в квадрат, найдем

$$(x_k + iy_k)^2 = (\xi_k + i\eta_k)^2 e^{2i\gamma}.$$

¹⁾ Для более обстоятельного ознакомления со свойствами комплексных чисел, их алгеброй и теорией функций комплексной переменной отсылаем к специальным руководствам, например проф. И. И. Привалов [69], Введение в теорию функций комплексной переменной, 1927; проф. В. И. Смирнов, Курс высшей математики для техников и физиков, т. II, III, 1933.

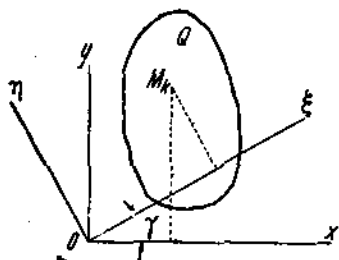
Умножая обе части этого равенства на m_k (массу точки M_k), раскрывая в нем скобки и взяв сумму по всем точкам m_k , прерывно или непрерывно заполняющим некоторую площадь Q , мы найдем

$$J_y - J_x + 2iJ_{xy} = (J_\eta - J_\xi + 2iJ_{\xi\eta})e^{2i\gamma}, \quad (3)$$

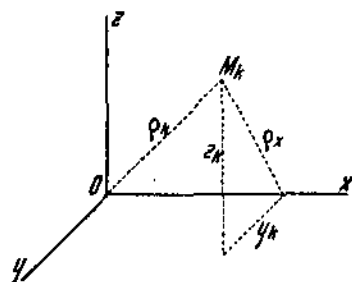
где

$$J_x = \sum m_k y_k^2, \quad J_y = \sum m_k x_k^2, \quad J_{xy} = \sum m_k x_k y_k$$

$$J_\xi = \sum m_k \eta_k^2, \quad J_\eta = \sum m_k \xi_k^2, \quad J_{\xi\eta} = \sum m_k \xi_k \eta_k.$$



Черт. 1.



Черт. 2.

Мы можем теперь несколько обобщить формулу (3).

Предположим, что массы m_k , а следовательно и соответствующие точки M_k , не лежат в одной плоскости xy , а каждая имеет свою ординату z_k (ось Oz перпендикулярна плоскости xy), J_{xy} и $J_{\xi\eta}$ от этого не изменяются, а моменты инерции J_x, J_y, J_ξ, J_η будут отличаться от старых на член $\sum m_k z_k^2$, одинаковый как для осей Ox, Oy, Oz , так и для осей $O\xi, O\eta, Oz$, так например (черт. 2):

$$\rho_x^2 = y_k^2 + z_k^2 \quad \text{и} \quad J_x = \sum m_k \rho_x^2 = \sum m_k y_k^2 + \sum m_k z_k^2,$$

и поэтому значения величин:

$$J_y - J_x + 2iJ_{xy} \quad \text{и} \quad J_\eta - J_\xi + 2iJ_{\xi\eta}$$

останутся неизменными и формула (3) останется такою же при новых условиях.

Формула (3) решает вопрос об определении J_ξ , J_η , $J_{\xi\eta}$ по данным J_x , J_y , J_{xy} , если прибавим к (3) очевидное соотношение

$$J_x + J_y = J_\xi + J_\eta, \quad (4)$$

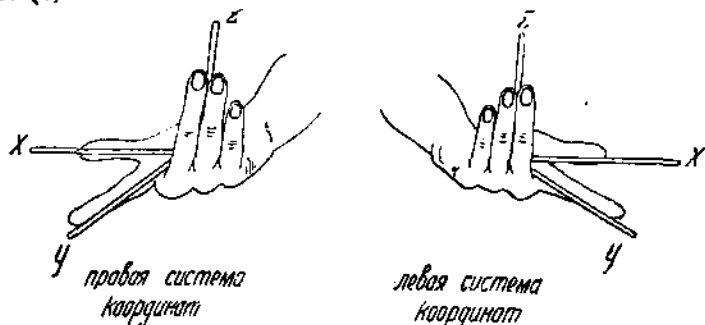
вытекающее из геометрического соотношения

$$\overline{OM}_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = \xi_k^2 + \eta_k^2 + z_k^2,$$

из которого следует:

$$\sum m_k x_k^2 + \sum m_k y_k^2 = \sum m_k \xi_k^2 + \sum m_k \eta_k^2,$$

т. е. (4).



Черт. 3.

Примечание. Мы всегда в дальнейшем будем пользоваться левым расположением осей координат, соответствующим расположению пальцев левой руки (черт. 3).

Чтобы отличать „левое“ расположение от „правого“ есть еще способ наблюдателя, расположенного по оси Oz и смотрящего по оси Ox , причем наблюдатель находится в первом октанте (Ампер). Если Ox соответствует левой руке, расположение левое и наоборот. Наконец, способ (английский) штопора: если при ввинчивании штопора в O по оси Oz переход от оси Ox к Oy соответствует движению штопора—правая система и левая—в противном случае.

§ 2. Графические построения, основанные на комплексном преобразовании.

1) Построение J_ξ , J_η , $J_{\xi\eta}$ по данным J_x , J_y , J_{xy} .

Будем комплексные выражения предыдущего параграфа изображать графически (черт. 4). Пусть M аффикс величины: $J_y - J_x + 2iJ_{xy}$, т. е.

$$ME = 2J_{xy}, \quad OE = J_y - J_x.$$

Чтобы получить аффикс M_1 величины:

$$J_y - J_x + 2iJ_{xy},$$

надо в силу (3) умножить $J_y - J_x + 2iJ_{xy}$ на

$$e^{-2\gamma i} = \cos 2\gamma - i \sin 2\gamma,$$

модуль которого единица, а аргумент — 2γ , и следовательно просто повернуть OM в направлении движения часовой

стрелки (по направлению обратному тому, в котором увеличивается γ) на 2γ . Найдя таким образом M_1 и опуская из этой точки перпендикуляр M_1E_1 на Ox , найдем:

$$M_1E_1 = 2J_{xy}, \quad OE = J_y - J_x,$$

а следовательно, отложив:

$$OH = J_x + J_y = J_x + J_y, \quad OE_1 = OK = J_y - J_x,$$

найдем:

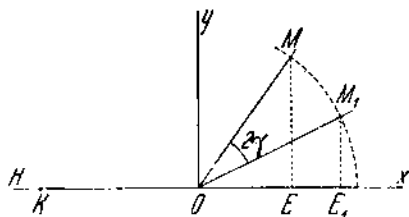
$$HK = 2J_x, \quad HE_1 = 2J_y.$$

Построение предполагает $J_y > J_x$, но распространяется и на случай $J_y < J_x$.

Кроме непосредственного определения моментов и произведений инерции, комплексные диаграммы могут применяться к решению связанных с ними вопросов, например к нахождению направлений главных осей инерции и величин главных моментов инерции. Для главных осей: $J_{xy} = 0$ и следовательно надо, чтобы $M_1E_1 = 0$; угол γ определится из уравнения:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{ME}{OE} = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (5)$$

Так как формула (3), на которой основаны наши построения, справедлива, если точки M_k не лежат в плоскости xu , то и графические построения остаются справедливыми и в этом случае.



Черт. 4.

2) Построение $J_{\xi z}$ и $J_{\eta z}$ по данным J_{xz} и J_{yz} .

Мы имеем формулу преобразования:

$$\begin{aligned} J_{xz} + iJ_{yz} &= \sum m_k x_k z_k + i \sum m_k y_k z_k = \\ &= e^{i\varphi} \sum m_k (\xi_k + i\eta_k) z_k = e^{i\varphi} (J_{\xi z} + iJ_{\eta z}), \end{aligned} \quad (6)$$

из которой следует, что для построения $J_{\xi z}$, $J_{\eta z}$ по данным J_{xz} , J_{yz} мы можем воспользоваться диаграммой, аналогичной диаграмме черт. 4, только вместо 2γ надо взять γ .

§ 3. Обобщение предыдущих формул на целый класс случаев.

Построения § 2 применимы не только к моментам инерции, но и к целому ряду физических (в частности механических) понятий и величин. Для этого нужно, чтобы величина эта зависела от направления некоторого переменного вектора и представлялась однородной функцией второй степени от l , m , n , где l , m , n — косинусы углов, образованных указанным вектором с осями координат. В моментах инерции, например, таким вектором является ось, вокруг которой мы берем момент, т. е. вида

$$V = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm. \quad (7)$$

К таким величинам относятся:

1) $\frac{1}{\rho^2}$, где ρ — расстояние от начала координат O до какой-нибудь поверхности второго порядка (в частности линии второго порядка в одной из координатных плоскостей), так как очевидно из уравнения такой поверхности (или линии), представляющегося в виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = \text{const} = \Gamma$$

(где $x = \rho l$, $y = \rho m$, $z = \rho n$, а l , m , n косинусы углов, образованных ρ с Ox , Oy , Oz), что

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\Gamma} (Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm),$$

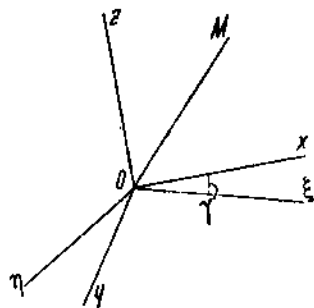
т. е. $\frac{1}{\rho^2}$ имеет характер $V(l, m, n)$. (7),

2) Моменты инерции J вокруг некоторой оси, образующей с осями координат косинусы углов l, m, n , так как известно из механики, что

$$J = J_x l^2 + J_y m^2 + J_z n^2 + 2J_{yz} mn + 2J_{xz} ln + 2J_{xy} lm.$$

Кроме того, мы укажем целый ряд других величин, удовлетворяющих вышеупомянутым условиям.

Покажем, что величины характера V действительно удовлетворяют условиям построения комплексных диаграмм, изложенных в § 1 и 2 для моментов инерции. Для этого повернем оси координат на угол γ (черт. 5) вокруг оси Oz . Формулы преобразования координат какой-нибудь точки M будут:



Черт. 5.

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k \cos \gamma - \eta_k \sin \gamma \\ y_k &= \xi_k \sin \gamma + \eta_k \cos \gamma \\ z_k &= z_k. \end{aligned}$$

Соответственно этому косинусы углов, образованных вектором $\overline{OM}$ с осями координат Ox, Oy, Oz , (l, m, n) и с новыми осями $O\xi,$

$O\eta, Oz$ (l_1, m_1, n_1), связаны соотношениями

$$\begin{aligned} l &= l_1 \cos \gamma - m_1 \sin \gamma \\ m &= l_1 \sin \gamma + m_1 \cos \gamma \\ n &= n_1 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (7), мы найдем:

$$V = A_1 l_1^2 + B_1 m_1^2 + C_1 n_1^2 + 2D_1 m_1 n_1 + 2E_1 n_1 l_1 + 2F_1 l_1 m_1,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos^2 \gamma + B \sin^2 \gamma + 2F \sin \gamma \cos \gamma \\ B_1 &= A \sin^2 \gamma + B \cos^2 \gamma - 2F \sin \gamma \cos \gamma \\ C_1 &= C \\ D_1 &= D \cos \gamma - E \sin \gamma \\ E_1 &= D \sin \gamma + E \cos \gamma \\ 2F_1 &= (B - A) \sin \gamma + 2F \cos 2\gamma, \end{aligned}$$

откуда вытекают соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A_1 - B_1 + 2iF_1 &= (A - B + 2iF) e^{-2\gamma i} \\ A_1 + B_1 &= A + B \\ E_1 + iD_1 &= (E + iD) e^{-2\gamma i} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и устанавливаются диаграммы, совершенно аналогичные диаграммам для моментов инерции.

Из (8) следует, что

$$A + B, (A - B)^2 + 4F^2, E^2 + D^2$$

не меняются при повороте осей вокруг Oz , а следовательно не меняются и

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= A + B + C, \quad \Sigma_2 = CB + AC + AB - D^2 - E^2 - F^2, \\ \Sigma_3 &= ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2; \end{aligned}$$

так как последние симметричны относительно осей координат, то они не меняются и при вращении вокруг Ox , Oy , Oz , а следовательно и при вращении вокруг какой угодно оси.

В вопросах, связанных с преобразованием V , обыкновенно существенно важным является определение такого положения осей Ox , Oy , Oz , при котором

$$D = E = F = 0;$$

такие оси обыкновенно называются *главными осями*.

Вопрос об определении направлений главных осей и об определении соответствующих им коэффициентов $A, B, C, \dots$ очевидно приводит к определению направлений и величин главных полуосей поверхности

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = \text{const}$$

и, как известно, приводится к решению кубического уравнения

$$x^3 - \Sigma_1 x^2 + \Sigma_2 x - \Sigma_3 = 0.$$

В простейших случаях, например в случае равенства нулю двух из коэффициентов V при произведениях косину-

сов l, m, n , например при $D=E=0$, вопрос сразу решается при помощи комплексного преобразования, стоит только в (8) предположить

$$D=E=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2F}{A-B}.$$

В этом случае очевидно $D_1=E_1=F_1=0$, и новое положение осей Ox, Oy, Oz соответствует главным осям. Если C и E не равны нулю, то, как видно из третьего ур-ния (8), простым поворотом на угол γ вокруг Oz мы их никогда не сделаем равными нулю. Но мы можем этого достигнуть, вращая оси вокруг Ox на некоторый угол α (или вокруг Oy на некоторый угол β). В самом деле, в первом случае мы найдем, что вместо первого и третьего ур-ний (8) будем иметь:

$$\begin{aligned} B_1 - C_1 + 2iD_1 &= (B - C + 2iD)e^{-2\alpha i} \\ F_1 + iE_1 &= (F + iE)e^{-\alpha i} \end{aligned}$$

и чтобы $D_1=E_1=0$, надо очевидно, чтобы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2D}{B-C} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{E}{F}$$

и следовательно коэффициенты $A, B, C, \dots$ связаны условием

$$\frac{2D}{B-C} = \frac{2 \frac{E}{F}}{1 - \frac{E^2}{F^2}}$$

или

$$EF(B-C) = D(F^2 - E^2). \quad (9a)$$

То же самое мы достигнем, вращая оси вокруг оси Oy на угол β . Мы найдем тогда вместо (8) ур-ния:

$$\begin{aligned} C_1 - A_1 + 2iE_1 &= (C - A + 2iE)e^{-2\beta i} \\ D_1 + iF_1 &= (D + iF)e^{-\beta i} \end{aligned}$$

и чтобы $D_1=F_1=0$, надо положить

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2E}{C-A}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{F}{D},$$

откуда получится условие

$$FD(C - A) = E(D^2 - F^2). \quad (9b)$$

В случаях (9a), (9b), а также очевидно и в случае, получающемся из них круговой перестановкой букв

$$DE(A - B) = F(E^2 - D^2), \quad (9c)$$

мы приведем двумя вращениями оси Ox , Oy , Oz к главным осям координат.

§ 4. Примеры применения комплексных диаграмм.

1) Нахождение направления и величины главных полу-диаметров кривых линий и поверхностей второго порядка, имеющих центр и отнесенных к прямоугольным прямолинейным осям, имеющим этот центр в начале координат.

Уравнение кривой представится в этом случае в виде:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \text{const} \quad (10)$$

(если плоскость xu совмещена с плоскостью кривой), а уравнение поверхности в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = \text{const}.$$

Если мы введем радиус-вектор, идущий из O в данную точку M , и обозначим косинусы углов, образуемых им с осями координат через l , m , n , то, как мы уже заметили на стр. 11,

$$\frac{\text{const}}{\rho^2} = Al^2 + 2Blm + Cm^2$$

для кривой, а для поверхности

$$\frac{\text{const}}{\rho^2} = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Eln + 2Flm.$$

Если, например, мы пожелаем отнести кривую (10) к главным осям, мы должны будем оси координат повернуть на угол γ такой, что

$$\text{tg } 2\gamma = \frac{2B}{A - C}.$$

2) Нормальные напряжения и величины их в какой-нибудь точке сплошного тела.

Мы имеем в этом случае так называемые формулы элементарного тетраэдра:

$$\left. \begin{aligned} X_N &= X_x l + X_y m + X_z n \\ Y_N &= Y_x l + Y_y m + Y_z n \\ Z_N &= Z_x l + Z_y m + Z_z n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь X_N , Y_N , Z_N — проекции на оси координат напряжений F_N , приложенных в точке M и рассчитанных на площадку, нормаль к которой образует с осями координат углы, косинусы которых l , m , n .

Возьмем проекцию F_N на направление N , т. е. найдем величину так называемого нормального напряжения и для этого умножим первое уравнение (11) на l , второе на m , третье на n и сложив результаты найдем:

$$F_N \cos(F_N, N) = X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2 + 2Y_x nm + 2X_z ln + 2X_y lm. \quad (12)$$

Отсюда видна приложимость к рассматриваемому случаю соображений § 3, и мы например можем при повороте осей на угол γ вокруг оси Oz написать:

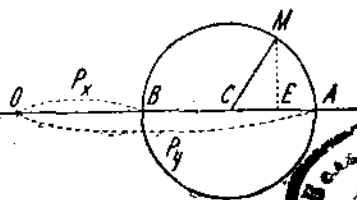
$$\left. \begin{aligned} E_\xi - H_\eta + 2iE_\gamma &= (X_x - Y_y + 2iX_y) e^{-2i\gamma} \\ E_\xi + H_\gamma &= X_x + Y_y \\ E_\gamma + iH_x &= (X_x + iY_y) e^{-i\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В комплексной диаграмме, связанной с первым из уравнений (13), не трудно узнать известную диаграмму Мора, по которой, отложив по оси Ox отрезки, равные главным напряжениям P_x , P_y (черт. 6) и построив на AB окружность (круг Мора), найдем для какого-нибудь сечения, образующего угол γ с главной плоскостью, для которой нормалью

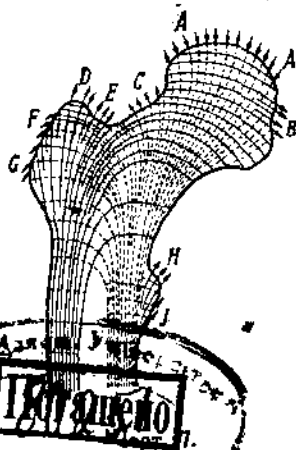
¹⁾ Эта формула введена Michell'ем, но только для плоских систем. Точно также построение круга Мора обыкновенно дают для плоских систем и только последнее время E. Trefftz (Handbuch der Physik, Bd. VI, стр. 54) дает его для пространственных.

является ось Oy , величину OE как нормальную составляющую напряжения и величину ME как касательную.

В элементарных курсах сопротивления материалов при доказательстве построения Мора заранее считают доказанным существование главных напряжений, с которыми и совмещают оси координат. Кроме того, предполагают, что мы имеем дело с так называемым „плоским“ распределением усилий (см. ниже глава II), при котором все напряжения, относящиеся к одной из осей, например оси Oz , равны нулю ($X_z = Y_z = Z_z = 0$). Здесь это построение доказано в самом общем виде. С главными напряжениями связаны так называемые линии главных напряжений, по которым направлены эти напряжения в какой-нибудь точке тела.



Черт. 6.



С такими линиями мы часто встречаемся в природе при выработывании каким-нибудь организмом или растением наиболее прочного материала. Например, губчатое вещество костей человека и вышних позвоночных расположено по этим линиям (черт. 7).

§ 5. Геометрическая интерпретация напряжений в сплошном теле и их нормальных и тангенциальных составляющих

Формула (12) обыкновенно интерпретируется геометрически.

Откладываем по нормали вектор p , причем:

$$p^2 = \frac{k^2}{\pm F_N \cos (F_N, N)} \quad (k = \text{const}).$$

Знак $+$ мы берем, если $F_N \cos(F_N, N) > 0$ и знак $-$, если $F_N \cos(F_N, N) < 0$.

Концы его лежат на поверхности второго порядка:

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2X_x xz + 2Y_y yz + 2X_y xy = \pm k^2,$$

называемой *поверхностью нормальных напряжений* (Коши).

Если оси координат будут совмещены с главными осями, уравнения (11) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} X_N &= X_x l \\ Y_N &= Y_y m \\ Z_N &= Z_z n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Отсюда следует, что концы напряжений, представленных для разных N векторами $\bar{F}_N$, лежат на поверхности эллипсоида (Ляме):

$$\frac{X_N^2}{X_x^2} + \frac{Y_N^2}{Y_y^2} + \frac{Z_N^2}{Z_z^2} = 1. \quad (15)$$

Если построим поверхность второго порядка

$$\frac{x^2}{X_x} + \frac{y^2}{Y_y} + \frac{z^2}{Z_z} = \text{const} \quad (16)$$

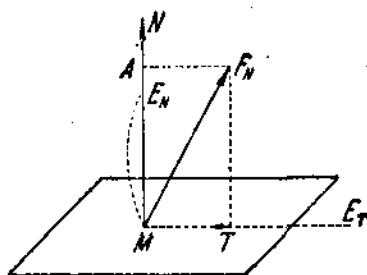
и постоянную в ее правой части возьмем так, чтобы она проходила через какую-нибудь точку x, y, z на эллипсоиде (15), то очевидно нормаль в этой точке к (16), направленная по градиенту левой части (16), совпадает в силу (14) с нормалью N , косинусы углов которой с осями Ox, Oy, Oz — l, m, n очевидно совпадают с косинусами углов, образуемых этим градиентом; направление его поэтому покажет направление нормали к той плоскости, на которую действует напряжение, соответствующее взятой нами точке на эллипсоиде Ляме (15), и поэтому (16) называют *поверхностью направлений*.

Проекция $\bar{F}_N$ на плоскость площадки, к которой она приложена, равная MT (черт. 8), называется *срезающим или скалывающим напряжением*. Чтобы интерпретировать гео-

метрически распределение этих напряжений на различные площадки, проходящие через одну и ту же точку M , будем откладывать по направлению MT радиус-вектор ρ такой, что $k\rho^x = MT$. Если MA будет проекция $\bar{F}_N$ на направление N , то очевидно:

$$MT^2 = F_N^2 - MA^2 = X_x^2 l^2 + Y_y^2 m^2 + Z_z^2 n^2 - (X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2)^2.$$

Поверхность, образуемая концами $\bar{\rho}$, получает более простой вид, если ρ откладывать не по направлению MT , а по направлению нормали N . Вместе с тем эта поверхность наглядно представляет распределение усилий MT (по величине). Если E_N будет конец радиус-вектора $\bar{\rho}$, отложенного по направлению N , то уравнения поверхности, описываемой концом E_N , будут очевидно (для различных направлений нормали):



Черт. 8.

$$k^2 \rho^{2x+4} = (X_x^2 x^2 + Y_y^2 y^2 + Z_z^2 z^2) (x^2 + y^2 + z^2) - (X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2)^2$$

или

$$k^2 \rho^{2x+4} = A^2 y^2 z^2 + B^2 x^2 z^2 + C^2 x^2 y^2, \quad (17)$$

где

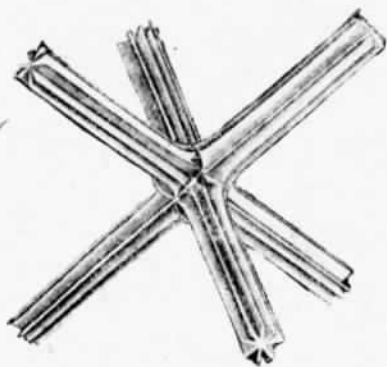
$$A = Y_y - Z_z, \quad B = Z_z - X_x, \quad C = X_x - Y_y.$$

Наиболее простые виды этой поверхности соответствуют случаям: $x = -2$ (черт. 9)¹⁾; $x = -1$ (черт. 10) и $x = +1$ (черт. 11).

¹⁾ По фотографии с моделей, вычисленных и сконструированных П. П. Образцовым, которым моделированы поверхности (17) также при $A = B = C$. (На черт. 11 дана такая модель для $x = +1$).



Черт. 9.



Черт. 10.

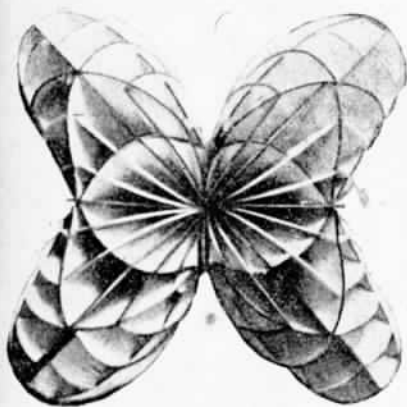
Пересечения этих поверхностей с плоскостями координат, являющимися их плоскостями симметрии, будут для поверхности $z = -2$ (с плоскостью xy , т. е. $z = 0$) две равнобочные гиперболы (черт. 12):

$$Cxy = \pm k;$$

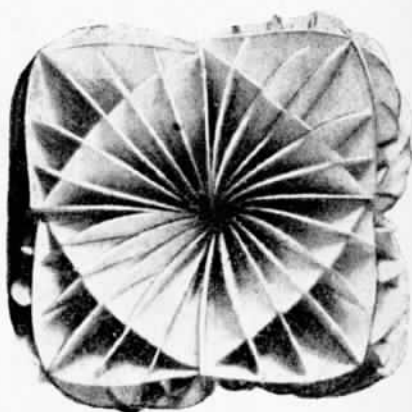
для поверхности $\varkappa = -1$ кривые

$$k\rho = \pm Cxy$$

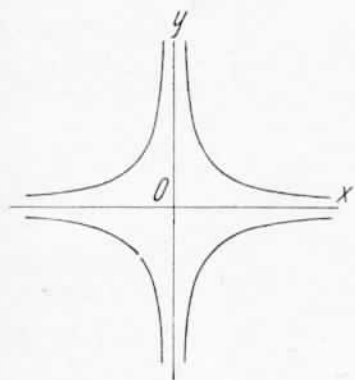
напоминающие гиперболы;



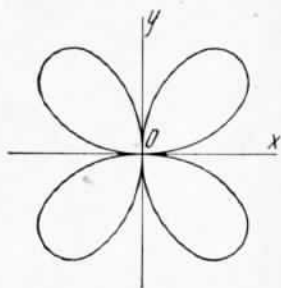
Черт. 11.



Черт. 11*.



Черт. 12.



Черт. 13.

для поверхности $\varkappa = +1$ четырехлепестный венчик (черт. 13), уравнение которого:

$$k^2\rho^2 = C^2x^2y^2,$$

Мы встретимся с большими трудностями, если пожелаем получить уравнение поверхности, описываемой концом радиуса ρ , отложенного непосредственно по направлению MT (черт. 8), в виде:

$$\rho = ME_T.$$

Чтобы найти уравнение поверхности, описываемой E_T , установим прежде всего зависимость между косинусами l, m, n и косинусами углов, образованных направлением MT (λ, μ, ν) с осями координат. Для этого заметим, что MT перпендикулярно MA (черт. 8) и следовательно

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0. \quad (18)$$

Так как MT, E_N, N лежат в одной плоскости, то

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ X_l & Y_m & Z_n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\lambda A}{l} + \frac{\mu B}{m} + \frac{\nu C}{n} = 0. \quad (18^*)$$

Присоединив к (18) уравнение $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, мы удовлетворим им, положив

$$l = \frac{a_l + b_l \omega}{s}, \quad m = \frac{a_m + b_m \omega}{s}, \quad n = \frac{a_n + b_n \omega}{s},$$

причем

$$\left. \begin{aligned} s^2 &= (a_l + b_l \omega)^2 + (a_m + b_m \omega)^2 + (a_n + b_n \omega)^2 \\ \lambda(a_l + b_l \omega) + \mu(a_m + b_m \omega) + \nu(a_n + b_n \omega) &= 0 \\ A\lambda(a_m + b_m \omega)(a_n + b_n \omega) + \\ &+ B\mu(a_l + b_l \omega)(a_n + b_n \omega) + \\ &+ C\nu(a_m + b_m \omega)(a_l + b_l \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Чтобы удовлетворить первому из (19), положим

$$\lambda a_l + \mu a_m + \nu a_n = 0, \quad \lambda b_l + \mu b_m + \nu b_n = 0, \quad (20)$$

а из второго найдем квадратное уравнение для ω ; подставим найденные l , m , n в уравнение (17), которое по разделении на ρ^4 представится в виде (независимо от того, как отложено ρ)

$$k^2 \rho^{2\alpha} = A^2 m^2 n^2 + B^2 l^2 n^2 + C^2 l^2 m^2, \quad (20^*)$$

и мы найдем уравнение искомой поверхности в очень сложном виде, которая будет иметь две доли соответственно двум значениям ω .

При $\alpha = -1, -2, +1$ получаются поверхности от 24 до 32 степени, т. е. значительно сложнее, чем рассмотренные ранее. Уравнение этой поверхности можно еще представить в параметрическом виде

$$\begin{aligned} k\rho^{\alpha-1}x &= l(Cm^2 - Bn^2); & k\rho^{\alpha-1}y &= m(An^2 - Cl^2); \\ k\rho^{\alpha-1}z &= n(Bl^2 - Am^2), \end{aligned}$$

так как из (18) и (18*) x , y , z пропорциональны $l(Cm^2 - Bn^2)$, $m(An^2 - Cl^2)$, $n(Bl^2 - Am^2)$, а из (20*) будем иметь коэффициент пропорциональности $k\rho^{\alpha-1}$.

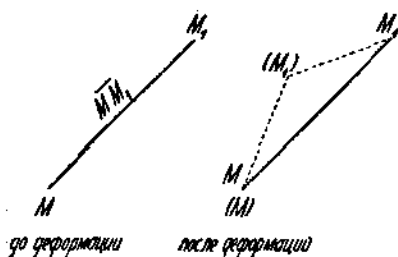
Легко видеть что пересечение этой поверхностью плоскостей координат происходит по тем же кривым линиям, как и поверхности (17).

§ 6. Растяжения, сжатия и сдвиги в бесконечно мало деформируемом теле.

Пусть $M(x, y, z)$ какая-нибудь точка деформируемого тела. Напряжения, происходящие вследствие деформации, мы будем предполагать происходящими от относительной деформации, и чтобы выяснить, от каких обстоятельств зависит относительная деформация, вообразим точку, соседнюю с M и к ней бесконечно близкую. Координаты ее до деформации будут: $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. После деформации координаты $M(x, y, z)$ получают некоторые приращения и будут $x + u$, $y + v$, $z + w$. Координаты бесконечно близкой соседней точки M_1 получают приращения (черт. 14) $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$. Относительная деформация в смежности с M выражается вектором ϵ (проекции которой Δu , Δv , Δw). Раскладывая эти проекции в ряды по бесконечно

малым приращениям x, y, z , мы найдем для проекции относительного перемещения выражения

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



Черт. 14.

Возьмем проекцию $\bar{e}$ на направление MM_1 , разделенную на MM_1 , т. е.

$$\frac{\text{пр.}(\bar{e})_{MM_1}}{MM_1}.$$

и назовем ее относительным удлинением по направлению MM_1 . Чтобы получить величину относительного

удлинения, умножим обе части (21) на косинусы углов l, m, n , образуемых MM_1 с осями координат:

$$l = \frac{\Delta x}{MM_1}, \quad m = \frac{\Delta y}{MM_1}, \quad n = \frac{\Delta z}{MM_1}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} \frac{\text{пр.}(\bar{e})_{MM_1}}{MM_1} &= \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) lm + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) ln + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) mn. \end{aligned} \quad (22)$$

Это выражение показывает, что относительное удлинение принадлежит к числу понятий, к которым применима теория, изложенная в § 3, и к которым приложимо построение комплексных диаграмм. Остановимся несколько на значе-

ниях коэффициентов в (22), связанных с относительной деформацией.

$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ — очевидно относительные удлинения в направлениях Ox , Oy , Oz ; $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$, — так называемые двойные сдвиги в плоскостях координат xy , xz , zy .

Введя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

мы перепишем (21) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta u &= e_{xx} \Delta x + e_{xy} \Delta y + e_{xz} \Delta z + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y \\ \Delta v &= e_{xy} \Delta x + e_{yy} \Delta y + e_{yz} \Delta z + \omega_x \Delta x - \omega_z \Delta z \\ \Delta w &= e_{xz} \Delta x + e_{yz} \Delta y + e_{zz} \Delta z + \omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x, \end{aligned}$$

а (22) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\text{пр. } (\bar{e})_{MM_1}}{MM_1} &= e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{zz} n^2 + 2e_{yz} mn + \\ &+ 2e_{xz} ln + 2e_{xy} lm. \end{aligned}$$

Чтобы выяснить значение двойных сдвигов в плоскостях координат, например $2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ в плоскости xy , заметим, что $\frac{\partial v}{\partial x}$ есть величина простого сдвига, испытываемого вблизи точки, для которой мы ее рассматриваем, в плоскости xy параллельно Oy (отношение приращения y к приращению x) и точно также $\frac{\partial u}{\partial y}$ есть простой сдвиг

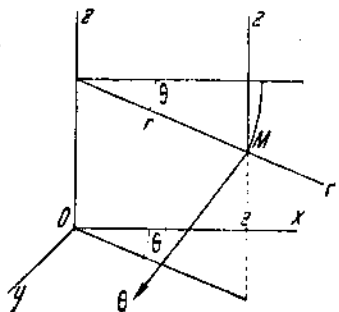
параллельно Ox , так что вполне уместно назвать $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ двойным сдвигом в плоскости xy .

Что касается $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, то они являются проекциями вихря в рассматриваемой точке.

С изучением деформации тела связано, так же как с изучением распределения напряжений, построение разных кривых, интерпретирующих деформацию. В этом отношении мы ¹⁾ выдвинули изучение так называемых нейтральных кривых, по направлению касательных к которым не происходит ни растяжения, ни сжатия.

§ 7. Преобразование элементов деформации в криволинейные координаты.

Установив применимость к элементам деформации комплексных диаграмм, мы можем их преобразовывать в какие угодно криволинейные координаты.



Черт. 15.

Пусть r, θ, φ (черт. 15) будут цилиндрические координаты какой-нибудь точки деформируемого тела, $e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{\varphi\varphi}, e_{r\theta}, e_{r\varphi}, e_{\theta\varphi}$,

¹⁾ См. G. Kolosoff und E. Paukull. Ueber Leistenfiguren von Primaten Palma und Planta. Zeitschrift für Anatomie, Zürich, 1906.

В этой работе сделано предположение, что так называемые дактилоскопические кривые, покрывающие ладонную поверхность рук и ног человека и вышних позвоночных, совпадают с нейтральными линиями растянутой поверхности кожи и этим объясняется, что, прикасаясь к внешним объектам (при нащупывании их), составляется более точное представление о их форме, так как дактилоскопические линии представляют собою бороздки, которые являются нейтральными, т. е. ни натянутыми ни сжатыми, и более отчетливо воспринимают форму соприкасающихся тел, как при письме по чистой бумаге более отчетливо выступает написанное, чем при письме на бумаге, на которой что-нибудь уже написано.

Мы показываем, что этим объясняется завихрение дактилоскопических кривых и различные видоизменения их очертания. (См. Пуркинье, Pinkus Rauler. Anatomie des Menschen; В. П. Воробьев. Анатомия человека, стр. 603; М. И. Виллямовская. Дерматографика. Дипломная работа).

$e_{rz}, e_{r\theta}$ — элементы деформации, а $u_r, u_\theta, u_z = w$ проекции перемещения точки на оси взятой цилиндрической системы координат. Мы имеем формулы преобразования:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} - e_{yy} + 2ie_{xy} &= e^{2\theta i} (e_{rr} - e_{\theta\theta} + 2ie_{r\theta}) \\ e_{xx} + e_{yy} &= e_{rr} + e_{\theta\theta} \\ e_{xz} + ie_{yz} &= e^{i\theta} (e_{rz} + ie_{\theta z}); \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

если далее через $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$ обозначим проекции вихря на Ox, Oy, Oz , мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x + i\omega_y &= e^{i\theta} (\omega_r + i\omega_\theta) \\ u + iv &= e^{i\theta} (u_r + iu_\theta). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Вводя комплексные переменные

$$\zeta = x + iy; \quad \bar{\zeta}_1 = x - iy$$

и замечая, что

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}_1}{2}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}_1}{2i}, \quad r^2 = \zeta \bar{\zeta}_1, \quad \theta = \frac{1}{2i} \ln \frac{\zeta}{\bar{\zeta}_1},$$

найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \frac{1}{2i}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{2i\zeta}, \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\zeta}_1}{\zeta}} \end{aligned} \right\}$$

а следовательно

$$\left. \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right\} = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \right\} \quad (26)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} = \frac{e^{i\theta}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\},$$

Сравнивая формулы

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial (u + iv)}{\partial \zeta} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= e_{xx} + e_{yy} + 2i\omega_z = e^{2\psi} (e_{rr} + e_{\theta\theta} + 2ie_{r\theta}) \\ 2 \frac{\partial (u + iv)}{\partial \bar{\zeta}_1} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= e_{xx} - e_{yy} + 2ie_{xy} = e^{2\psi} (e_{rr} - e_{\theta\theta} + 2ie_{r\theta}) \end{aligned}$$

с формулами:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial (u + iv)}{\partial \zeta} &= 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (u_r + iu_\theta) e^\psi = \\ &= e^{2\psi} \left\{ \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + i \left(\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right\} \\ 2 \frac{\partial (u + iv)}{\partial \bar{\zeta}_1} &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} (\dot{u}_r + i\dot{u}_\theta) e^\psi = \\ &= e^{2\psi} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} + i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right\} \end{aligned}$$

мы найдем:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\omega_z &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Точно также из формул (25) и (26) мы найдем:

$$\begin{aligned} \omega_r + i\omega_\theta &= e^{-i\psi} (\omega_x + i\omega_y) = e^{-i\psi} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} + i \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{i}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 2\omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \quad 2\omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial_r w}{\partial_r}, \end{aligned}$$

а из формул (24) и (26) получим:

$$e^{\theta i} (e_{rz} + i e_{\theta z}) = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u + i v)}{\partial z} = \\ = e^{\theta i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + i \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\},$$

откуда найдем:

$$e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \quad e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right).$$

Несколько проще получаются эти формулы, исходя из соотношений

$$\Delta u_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} \Delta z$$

$$\Delta u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Delta z$$

$$\Delta u_z = \frac{\partial u_z}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \Delta z,$$

которые могут быть переписаны следующим образом:

$$\Delta u_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \Delta r + \frac{1}{2} r \Delta \theta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{2} \Delta z \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \Delta z \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \\ - \frac{1}{2} r \Delta \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - u_\theta \Delta \theta$$

$$\Delta u_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \Delta r + \\ + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) r \Delta \theta + \frac{1}{2} \Delta z \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \Delta r - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \Delta z + u_r \Delta \theta$$

$$\Delta u_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \Delta r + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) r \Delta \theta +$$

$$+ \frac{\partial u_z}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) r \Delta \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \Delta r.$$

Отсюда, принимая в расчет формулы проекций на подвижную ось, мы найдем выражения для

$$e_{rr}, e_{r\theta}, e_{rz}, e_{\theta\theta}, e_{r\phi}, e_{z\theta} \text{ и } \omega_r, \omega_z, \omega_\theta.$$

Если r, θ, ψ будут сферические (полярные) координаты точки (черт. 16), то, учтя два поворота, которые здесь имеются при переходе к ним от системы прямоугольных, прямолинейных координат, мы теми же методами легко найдем:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ e_{\psi\psi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}, \\ e_{\psi\theta} &= e_{\theta\psi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial \theta} - u_\psi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi}, \\ e_{\psi r} &= e_{r\psi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial r} - \frac{u_\psi}{r}, \\ e_{r\theta} &= e_{\theta r} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Для проекций вихря мы найдем здесь выражения:

$$\begin{aligned} 2\omega_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (ru_\psi) \sin \theta - \frac{\partial}{\partial \psi} (ru_\theta) \right\} \\ 2\omega_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (ru_\psi \sin \theta) \right\} \\ 2\omega_\psi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(ru_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Таким же способом могут быть получены выражения элементов деформации в каких угодно криволинейных координатах. Мы остановимся на случае так называемых *изотермических* или *сопряженных* координат (изокоординат) на плоскости и соответствующих им цилиндрических

координат в пространстве. Оставив из трех прямолинейных прямоугольных координат z , мы вместо x и y возьмем такие функции их ξ и η , что

$$\zeta = \xi + i\eta = F(z)^{1)}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

отсюда

$$z = \omega(\zeta), \quad F(z) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

причем

$$\omega'(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{h} e^{i\theta},$$

где

$$\frac{1}{h} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}, \quad \frac{1}{h^2} = \omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta_1)}, \quad \zeta_1 = \xi - i\eta,$$

а θ есть угол, образованный положительной нормалью N к кривой $\xi = \text{const.}$ с осью Ox .

Имея в виду, что

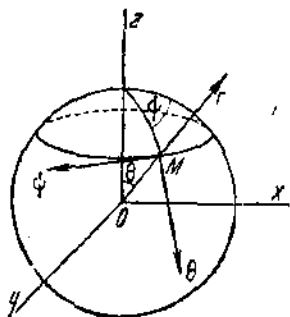
$$\frac{e_{xx} - e_{yy} + 2ie_{xy}}{h^2} = \frac{e_{\xi\xi} - e_{\eta\eta} + 2ie_{\xi\eta}}{h^2} e^{2i\theta} = \\ = (e_{\xi\xi} - e_{\eta\eta} + 2ie_{\xi\eta}) \omega'(\zeta)^2$$

аналогично случаю полярных координат, легко получим следующие формулы:

$$e_{\xi\xi} = h \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} - u_\eta \frac{\partial h}{\partial \eta},$$

$$e_{\eta\eta} = h \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} - u_\xi \frac{\partial h}{\partial \xi},$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$



Черт. 16.

1) Здесь надо различать: z — третья координата и $z = x + iy$.

так что

$$\begin{aligned}
 e_{\xi\xi} + e_{\eta\eta} + e_{zz} &= \Delta = h^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\xi}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\eta}{h} \right) \right\} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 e_{\eta z} = e_{z\eta} &= h \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial z}; & 2\omega_\xi &= h \frac{\partial u_z}{\partial \eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \\
 e_{\xi z} = e_{z\xi} &= \frac{\partial u_\xi}{\partial z} + h \frac{\partial u_z}{\partial \xi}; & 2\omega_\eta &= \frac{\partial u_\xi}{\partial z} - h \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \\
 e_{\xi\eta} = e_{\eta\xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (u_\eta h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\xi h); & 2\omega_z &= h^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\eta}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\xi}{h} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Можно применить к выводу их кинематический способ, примененный нами на стр. 29 к выводу элементов деформации в полярных координатах, преобразовав выражения

$$\begin{aligned}
 \Delta u_\xi &= \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \Delta z \\
 \Delta u_\eta &= \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \Delta z \\
 \Delta u_z &= \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \Delta z
 \end{aligned}$$

к виду:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_\xi &= e_{\xi\xi} \frac{\Delta \xi}{h} + \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial z} + h \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \right) \Delta z + \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\xi h) \right] \frac{\Delta \eta}{h} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial z} - h \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \right) \Delta z - \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\eta}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\xi}{h} \right) \right] \frac{\Delta \eta}{h} - u_\eta \Delta \theta \\
 \Delta u_\eta &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\eta h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\xi h) \right] \Delta \xi + \left(h \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \right) \Delta z + e_{\eta\eta} \Delta \eta + \\
 &+ \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\eta h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\xi h) \right] \Delta \xi - \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \right) \Delta z + u_\xi \Delta \theta \\
 \Delta u_z &= e_{zz} \Delta z + e_{\eta z} \Delta \eta + \omega_\xi \Delta \eta - \omega_\eta \Delta \xi,
 \end{aligned}$$

имея в виду, что

$$\theta = \frac{1}{2i} \ln \frac{\zeta}{\zeta_1}$$

и следовательно

$$\Delta\theta = \frac{1}{2i} \frac{\zeta_1 \Delta\zeta - \zeta \Delta\zeta_1}{\zeta \zeta_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{1}{h} = \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2}.$$

§ 8. Применение комплексного преобразования к выводу основных уравнений равновесия сплошного тела в криволинейных координатах.

Имеем известные уравнения элементарного параллелепипеда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Вместо первых двух уравнений возьмем одно в комплексной форме, сложив первое уравнение со вторым, умноженным на i , и положив $x + iy = \zeta$, $x - iy = \bar{\zeta}_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} (X_x - Y_y + 2iX_y) + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} (X_x + Y_y) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (X_z + iY_z) + \rho (X + iY) = 0, \end{aligned}$$

а третье уравнение перепишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (X_z + iY_z) + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} (X_z - iY_z) + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0.$$

Обозначив через R_r , Θ_θ , Z_z , R_θ , R_z , Θ_z проекции напряжений на оси полуполярных или цилиндрических координат:

нат, а через $F_r, F_\theta, F_z = z$ проекции внешних (объемных) сил на те же оси, мы найдем по формулам (13) соотношения

$$X + iY = (F_r + iF_\theta) e^{i\theta}, \quad X_x + Y_y = R_r + \Theta_\theta$$

$$X_x - Y_y + 2iX_y = (R_r - \Theta_\theta + 2iR_\theta) e^{2i\theta}$$

$$X_z + iY_z = (R_z + i\Theta_z) e^{i\theta}$$

и имея в виду (26)

$$\frac{\partial}{\partial r} = e^{-i\theta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

а следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} = e^{i\theta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

мы найдем уравнения (27) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-i\theta}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (R_r - \Theta_\theta + 2iR_\theta) e^{2i\theta} + \\ & + \frac{e^{i\theta}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (R_r + \Theta_\theta) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (R_z + i\Theta_z) e^{i\theta} + \rho (F_r + iF_\theta) e^{i\theta} = 0 \\ & \frac{e^{-i\theta}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (R_z + i\Theta_z) e^{i\theta} + \\ & + \frac{e^{i\theta}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (R_z - i\Theta_z) e^{-i\theta} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{aligned}$$

Отделяя в первом из этих уравнений вещественную часть от мнимой, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_r}{\partial \theta} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r} + \rho F_r = 0 \\ & \frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Theta_z}{\partial z} + \frac{2R_r}{r} + \rho F_\theta = 0 \\ & \frac{\partial R_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_z}{\partial \theta} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{R_z}{r} + \rho Z = 0. \end{aligned}$$

Точно также, применяя преобразование два раза, мы найдем аналогичные уравнения в полярных координатах r, θ, ψ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} + \\ & + \frac{1}{r} (2R_r - \Theta_\theta - \Psi_\psi + R_\theta \operatorname{ctg} \theta) + \rho F_r = 0 \\ & \frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Theta_\psi}{\partial \psi} + \\ & + \frac{1}{r} [(\Theta_\theta - \Psi_\psi) \operatorname{ctg} \theta + 3R_\theta] + \rho F_\theta = 0 \\ & \frac{\partial R_\psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_\psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi_\psi}{\partial \psi} + \\ & + \frac{1}{r} (3R_\psi + 2\Theta_\psi \operatorname{ctg} \theta) + \rho F_\psi = 0. \end{aligned}$$

§ 9. Элементарный вывод основных уравнений теории упругости изотропного тела.

Чтобы получить основные уравнения теории упругости изотропного тела, введем в уравнения равновесия внутренних сил в теле (27) выражения этих сил через элементы деформации (e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}).

Выражения эти мы напомним, основываясь на законе Гука (1676 г.), по которому упругие деформации тела пропорциональны тем силам, которые их вызывают, что, как известно из курса сопротивления материалов, имеет место до так называемого предела пропорциональности. Воспользуемся также подтверждаемым опытом явлением, что всякое тело, подвергнутое растяжению, сжимается перпендикулярно направлению растяжения, и это сжатие равно растяжению, умноженному на так называемый коэффициент Пуассона, который мы будем обозначать через σ . Наоборот, при сжатии тел появляется, по перпендикулярному направлению, растяжение, равное сжатию, умноженному на σ .

Введя коэффициент E (модуль Юнга), как коэффициент пропорциональности (следующий из закона Гука), между

растяжением (или сжатием) какого-нибудь упругого тела и вызывающими его силами, и сделав также совершенно естественное предположение, что сдвиг в некоторой плоскости вызывается исключительно срезающими в ней силами, ему пропорциональными, и обозначив через μ коэффициент пропорциональности (коэффициент твердости), мы можем предположить, что при равновесии бесконечно малого параллелепипеда, вырезанного из нашего тела в какой-нибудь точке, элементы деформации связаны с развивающимися благодаря им напряжениями следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Ee_{xx} &= X_x - \sigma(Y_y + Z_z); & Y_y &= 2\mu e_{yx} \\ Ee_{yy} &= Y_y - \sigma(X_x + Z_z); & X_x &= 2\mu e_{xx} \\ Ee_{zz} &= Z_z - \sigma(Y_y + X_x); & X_y &= 2\mu e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Складывая первые три уравнения (28), мы найдем:

$$E(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) = (1 - 2\sigma)(X_x + Y_y + Z_z).$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (28), найдем:

$$\begin{aligned} Ee_{xx} &= X_x(1 + \sigma) - \sigma(X_x + Y_y + Z_z) = \\ &= X_x(1 + \sigma) - \frac{\sigma E}{1 - 2\sigma}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \end{aligned}$$

или

$$X_x = \frac{E}{1 + \sigma} e_{xx} + \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}).$$

Вводя обозначения:

$$\frac{E}{2(1 + \sigma)} = \mu_1, \quad \lambda = \frac{\sigma E}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)}, \quad \theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz},$$

получим, выполняя подстановку и по отношению ко второму и третьему уравнениям (28)

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2\mu_1 e_{xx} + \lambda \theta \\ Y_y &= 2\mu_1 e_{yy} + \lambda \theta \\ Z_z &= 2\mu_1 e_{zz} + \lambda \theta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Легко установить, что $\mu = \mu_1$ или $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$; в самом деле, мы найдем из (29) и трех последних ур-ний (28):

$$\begin{aligned} X_x - Y_y + 2iX_y &= 2\mu_1(e_{xx} - e_{yy}) + 4e_{xy}ui = \\ &= 2\mu \left[\frac{\mu_1}{\mu} (e_{xx} - e_{yy}) + 2ie_{xy} \right]. \end{aligned}$$

Это выражение не должно менять своего вида при перемене координат. Повернув оси на какой-нибудь угол α и имея в виду, что вследствие комплексного преобразования

$$X_x - Y_y + 2iX_y \quad \text{и} \quad e_{xx} - e_{yy} + 2ie_{xy}$$

умножаются на $e^{2\alpha i}$, мы легко убедимся, что должно быть $\mu = \mu_1$ и, следовательно, уравнения, связывающие напряжения и перемещения, представляются окончательно в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2\mu e_{xx} + \lambda\theta & X_y &= 2\mu e_{xy} \\ Y_y &= 2\mu e_{yy} + \lambda\theta & Y_x &= 2\mu e_{yx} \\ Z_z &= 2\mu e_{zz} + \lambda\theta & X_z &= 2\mu e_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Ур-ния (30), подставленные в уравнения равновесия элементарного параллелепипеда (27), дадут уравнения равновесия упругого тела ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla_2 u + \rho X &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla_2 v + \rho Y &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla_2 w + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

¹⁾ Эти ур-ния можно представить в виде одного — векторного:

$$\nabla_r \bar{V} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \bar{V} = - \frac{1}{\mu} \bar{F},$$

где $\bar{V}$ — вектор перемещения (с проекциями u, v, w), $\bar{F}$ — вектор сил (с проекциями X, Y, Z).

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nabla_2 u &= \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \nabla_2 v &= \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} - \nabla_2 w &= \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

Дифференцируя первое уравнение по x , второе по y , третье по z и сложив результаты, найдем:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla_2 \theta + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0. \quad (32)$$

В случае отсутствия внешних сил $X=Y=Z=0$ уравнение (32) примет вид

$$\nabla_2 \theta = 0;$$

из уравнений (31) тогда следует

$$\nabla_2 \nabla_2 u = 0,$$

$$\nabla_2 \nabla_2 v = 0,$$

$$\nabla_2 \nabla_2 w = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение (31) по y , второе по x и вычитая, мы найдем, произведя аналогичные операции над вторым и третьим, первым и третьим, следующую систему уравнений:

$$\mu \nabla_2 \omega_x + \rho \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = 0$$

$$\mu \nabla_2 \omega_x + \rho \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = 0$$

$$\mu \nabla_2 \omega_y + \rho \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) = 0,$$

где ω_x , ω_y , ω_z имеют значения (23).

найдем уравнения (31) в виде:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) + \rho X &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) + \rho Y &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31 \text{ bis})$$

Кроме основных ур-ний (31), всякое решение какой-нибудь задачи теории упругости требует удовлетворения условий на поверхности или на контуре. Напряжения, которые развиваются на поверхности (границе), должны быть как раз те, которые там заданы в виде приложенных к телу, на этой границе, напряжений.

§ 10. О коэффициентах упругости в соотношениях между ними.

Ур-ния (30) дают возможность проверить значение уже введенных коэффициентов и ввести некоторые новые, иногда более удобные. Рассмотрим простейшие деформации — растяжение (или сжатие) по некоторому направлению, равномерное растяжение по всем направлениям, простой сдвиг по оси Ox .

При растяжении (или сжатии) по направлению, принятому за Ox , при отсутствии внешних сил, из всех напряжений не равно нулю только X_x , а $Y_y = Z_z = X_y = X_z = Y_z = 0$.

Основные ур-ния (27) при этом очевидно удовлетворены, а из ур-ний (30) следует:

$$\begin{aligned} e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} &= 0 \\ \lambda \theta + 2\mu e_{xx} &= X_x \\ \lambda \theta + 2\mu e_{yy} = \lambda \theta + 2\mu e_{zz} &= 0 \end{aligned}$$

и следовательно

$$(3\lambda + 2\mu) \theta = X_x$$

или

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} X_x,$$

откуда

$$2\mu e_{xx} = X_x - \lambda \theta = \left(1 - \lambda \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\right) X_x = \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} X_x,$$

а так как

$$X_x = E e_{xx},$$

то

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$e_{yz} = e_{xy} = -\frac{\lambda \theta}{2\mu} = -\frac{\lambda X_x}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{xx}$$

откуда

$$\alpha = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Кроме того очевидно

$$\sigma = \frac{E - 2\mu}{2\mu} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

При равномерном растяжении по всем направлениям

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = az, \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \alpha = \frac{\theta}{3}$$

$$X_y = Y_x = X_z = 0, \quad X_x = Y_y = Z_z = (3\lambda + 2\mu)\alpha = p$$

$$X_N = p \cos nx, \quad Y_N = p \cos ny, \quad Z_N = p \cos nz.$$

Нормальное давление $F_N = p = (3\lambda + 2\mu)\alpha$.

$$\text{Отношение } \frac{p}{\theta} = \frac{\text{нормальное давление}}{\text{кубическое расширение}} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = k$$

мы назовем *модулем объемного сжатия*.

При простом сдвиге по оси Ox мы имеем:

$$u = ay, \quad v = w = 0, \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = e_{xz} = \theta = 0, \quad e_{xy} = \frac{\alpha}{2}$$

$$X_x = Y_y = Z_z = Y_x = X_z = 0, \quad Y_x = \mu\alpha$$

$$\frac{T}{Y_x} = \mu \quad (\text{модуль срезывания})$$

$$X_N = T \cos ny, \quad Y_N = T \cos nx, \quad Z_N = 0,$$

$$F_N = T \sqrt{\cos^2 nx + \cos^2 ny} = T \sin nz.$$

Величина модуля Пуассона (по Пуассону при $\lambda = \mu$) $\sigma = \frac{1}{4}$, а на самом деле она колеблется между нулем и $\frac{1}{2}$. В этом легко убедиться из того, что при $\sigma = -1$ модуль объемного сжатия, а при $\sigma = \frac{1}{2}$ модуль срезывания делается меньше нуля, что невозможно, и неизвестны тела, у которых $\sigma < 0$.

ТАБЛИЦА
зависимостей между коэффициентами упругости.

Коэффициенты упругости	λ, μ (Ляме)	E, σ	μ, k	μ, ε	μ, θ (Кирхгофф)	σ, k	μ, ε	E, μ
E модуль Юнга	$\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$	E	$\frac{9k\mu}{3k + \mu}$	$2\mu(1 + \varepsilon)$	$\frac{1 + 3\theta}{2\mu(1 + 2\theta)}$	$3k(1 - 2\varepsilon)$	$\mu \frac{3\varepsilon - 1}{3}$	E
μ коэффициент твердости	μ	$\frac{E}{2(1 + \sigma)}$	μ	μ	μ	$\frac{3k(1 - 2\varepsilon)}{2(1 + \varepsilon)}$	μ	μ
$R = k = \frac{E_s}{3}$ коэффициент объемного сжатия	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$	$\frac{E}{3(1 - 2\varepsilon)}$	k	$2\mu \frac{1 + \sigma}{3(1 - 2\varepsilon)}$	$\frac{2}{3} \mu (1 + 3\theta)$	k	$\mu \frac{3\varepsilon - 1}{3}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu - E)}$
σ коэффициент Пуассона	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	σ	$\frac{1}{2} \frac{3k - 2\mu}{3k + \mu}$	σ	$\frac{\theta}{1 + 2\theta}$	σ	$\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}$	$\frac{E - 1}{2\mu}$
ε коэффициент уруний теории упругости (без внешних сил)	$\frac{\lambda + \mu}{\mu}$	$\frac{1}{1 - 2\varepsilon}$	$\frac{3k + \mu}{3\mu}$	$\frac{1}{1 - 2\varepsilon}$	$1 + 2\theta$	$\frac{1}{1 - 2\varepsilon}$	ε	$\frac{\mu}{3\mu - E}$
$\theta = \sigma\varepsilon$ коэффициент Кирхгоффа	$\frac{\lambda}{2\mu}$	$\frac{\sigma}{1 - 2\varepsilon}$	$\frac{1}{2} \frac{2k + \mu}{6\mu}$	$\frac{\sigma}{1 - 2\varepsilon}$	θ	$\frac{\sigma}{1 - 2\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon - 1}{2}$	$\frac{E - 2\mu}{2(3\mu - E)}$

§ 11. Уравнения Бельтрами-Митчеля и определение перемещений.

Вместо того чтобы подставлять выражения напряжений через перемещения (30) в уравнения (27), можно получить, как показали Бельтрами и Митчель, шесть дополнительных к (27) уравнений, и получить девять уравнений, иногда очень удобных¹⁾ для получения напряжений.

Можно легко найти из первых уравнений (30) и (31) при $X=Y=Z=0$ (отсутствие сил)

$$\nabla_2 X_x = 2\mu \nabla_2 \frac{\partial u}{\partial x} = -2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{-1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2},$$

а из вторых и третьих

$$\nabla_2 Y_y = \frac{-1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}$$

$$\nabla_2 Z_z = \frac{-1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2},$$

где

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z,$$

аналогично

$$\nabla_2 X_y = -\frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y},$$

$$\nabla_2 Y_x = -\frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial x},$$

$$\nabla_2 X_z = -\frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z},$$

Таким же образом при наличии объемных сил найдем уравнения Митчеля

$$\begin{aligned} \nabla_2 X_x + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= \\ &= -\frac{\sigma}{1 - \sigma} \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2\rho \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla_2 Y_y + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\rho \frac{\partial Z}{\partial y} - \rho \frac{\partial Y}{\partial z} \end{aligned}$$

¹⁾ Бывают случаи, когда пользование уравнениями Бельтрами-Митчеля вносит осложнения, так как система их не эквивалентна уравнению (31) и может давать лишние решения.

(с уравнениями, получающимися из них круговой перестановкой букв x, y, z), из которых при $X=Y=Z=0$ получаются уравнения Бельтрами.

Легко показать, что если тензор напряжений $X_x, Y_y, Z_z, X_y, X_z, Y_z$ удовлетворяет трем уравнениям (30) и шести уравнениям Бельтрами, то он наверно представляет тензор упругого тела, и перемещения u, v, w могут быть найдены простой квадратурой.

Заметим, что если введем обозначения

$$X_x = \frac{1}{1+\sigma} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)]$$

$$Y_y = \frac{1}{1+\sigma} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]$$

$$Z_z = \frac{1}{1+\sigma} [Z_z - \sigma(Y_y + X_x)],$$

то условия, связывающие элементы тензора напряжений, можно представить в виде уравнений

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\partial Y_z}{\partial x} + \frac{\partial X_z}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial z} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial z} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial Y_z}{\partial x} + \frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z} \right\}$$

$$2 \frac{\partial^2 Z_y}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_y}{\partial z^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 X_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}.$$

а эти выражения представляют условия, что выражения:

$$\tau_1 = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \int \left(\frac{\partial Z_x}{\partial y} - \frac{\partial Y_x}{\partial z} \right) dx + \\ + \left(\frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_y}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial Z_z}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) dz$$

$$\tau_2 = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \int \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial Z_x}{\partial x} \right) dx + \\ + \left(\frac{\partial X_y}{\partial z} - \frac{\partial Z_y}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right) dz$$

$$\tau_3 = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \right) dx + \\ + \left(\frac{\partial Y_y}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} \right) dz$$

$$\begin{aligned}
 u &= \int \frac{1}{E} [X_x - \sigma (Y_y + Z_z)] dx + \frac{1}{2G} (X_z - \tau_3) dy + \\
 &\quad + \frac{1}{2G} (Y_z - \tau_2) dz, \\
 v &= \int \frac{1}{2G} (Y_z - \tau_3) dx + \frac{1}{E} [Y_y - \sigma (X_x + Z_z)] dy + \\
 &\quad + \frac{1}{2G} (Y_z - \tau_1) dz \\
 w &= \int \frac{1}{2G} (Z_z - \tau_2) dx + \frac{1}{2G} (Z_y - \tau_1) dy + \\
 &\quad + \frac{1}{E} [Z_z - \sigma (X_x + Y_y)] dz
 \end{aligned}$$

представляют интегралы полных дифференциалов и следовательно определяются простой квадратурой.

§ 12. О признаках нахождения общих решений уравнений теории упругости.

При нахождении решений уравнений § 8 обыкновенно задаются каким-нибудь предположением, к которому приходят или из опытных или из каких-нибудь других соображений и стараются удовлетворить или уравнениям (31), связывающим перемещения, или уравнениям (27), связывающим напряжения, присоединив к ним уравнения Бельтрами или уравнения Митчеля.

Такой метод нахождения решений называется „полубратным“, так как некоторые предположения или допущения делаются заранее и первый, применивший этот метод, был Сен-Венан, установивший известную задачу (см. главу III) о равновесии цилиндрического тела, производящие которого параллельны оси Oz .

Предположение Сен-Венана было:

$$X_x = Y_y = Z_z = 0,$$

при котором очевидно волокна, параллельные оси Oz , не оказывают давления друг на друга.

Другое предположение предусматривает равными нулю те напряжения ($X_x = Y_y = Z_z = 0$), которые не равны нулю у Сен-Венана, а не равными нулю те, которые у него равны нулю, является предположением другой известной задачи Клебша и будет тоже рассмотрено в главе III,

Если мы предположим, что все элементы упругого равновесия не зависят от одной из координат, например z , мы будем в области так называемой плоской задачи, которая подробно рассмотрена в главе II.

Простой вид общего решения уравнений (31) дан Б. Г. Галеркиным¹⁾ Положим:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\mu} \nabla_2 \varphi_1 + \gamma_3 y - \gamma_2 z + \delta_1 \\ v &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\mu} \nabla_2 \varphi_2 + \gamma_1 z - \gamma_3 x + \delta_2 \\ w &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{\mu} \nabla_2 \varphi_3 + \gamma_2 x - \gamma_1 y + \delta_3, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

откуда

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1-2\sigma}{2\mu} \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

¹⁾ Формулы Б. Г. Галеркина получаются из (31) при $X=Y=Z=0$. Они могут быть написаны в векторной форме в виде

$$\bar{V} = \nabla_2 \bar{W} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div } \bar{W} + [\bar{r}, \bar{\Omega}] = \bar{\Delta},$$

где

$$\nabla_2 \nabla_2 \bar{W} = -\frac{1}{\mu} \bar{F},$$

$\bar{V}$ — вектор перемещения, проекции которого на оси u, v, w ; $\bar{F}$ — вектор силы, проекции которого X, Y, Z ; $\bar{\Omega}$ — вектор, проекции которого $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и наконец $\bar{\Delta}$ — вектор, проекции которого $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. См. Папкович [94].

причем $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ — произвольные постоянные, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям:

$$\nabla_2 \nabla_2 \varphi_1 + \rho \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} X = 0$$

$$\nabla_2 \nabla_2 \varphi_2 + \rho \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} Y = 0$$

$$\nabla_2 \nabla_2 \varphi_3 + \rho \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} Z = 0$$

или уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \nabla_2 \nabla_2 \varphi_1 + \rho \frac{1}{1-\sigma} X &= 0 \\ \nabla_2 \nabla_2 \varphi_2 + \rho \frac{1}{1-\sigma} Y &= 0 \\ \nabla_2 \nabla_2 \varphi_3 + \rho \frac{1}{1-\sigma} Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Выражения (33) удовлетворяют уравнениям теории упругости, как в этом легко убедиться простой подстановкой этих выражений в (31).

Из (33) следуют формулы

$$X_x = \left(\sigma \nabla_2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial x} \nabla_2 \varphi_1$$

$$Y_y = \left(\sigma \nabla_2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial y} \nabla_2 \varphi_2$$

$$Z_z = \left(\sigma \nabla_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\ + 2(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial z} \nabla_2 \varphi_3$$

$$\begin{aligned}
Y_z = Z_y &= -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\
&\quad + (1-\varepsilon) \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) \\
Z_x = X_z &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\
&\quad + (1-\varepsilon) \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \\
X_y = Y_x &= -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + \\
&\quad + (1-\varepsilon) \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Формулы (33) имеют большие достоинства, заключающиеся в том, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ могут быть какими угодно функциями от x, y, z , удовлетворяющими (34), и следовательно (33) представляют чрезвычайно общее решение ур-ний (31). Кроме того, это решение предполагает наличие каких угодно внешних сил (X, Y, Z). Но (33) представляют некоторые неудобства, заключающиеся главным образом в том, что никто еще не доказал, что они представляют самое общее решение (31). Заметим, что, зная какое-нибудь частное решение (31): y_0, v_0, w_0 , мы можем общее решение рассматривать (так как они линейные) как сумму частного их решения и общего решения этих уравнений без последнего члена (т. е. при $X=Y=Z=0$). Вместо ур-ний (34) при нахождении этого общего решения мы тогда имеем уравнения

$$\nabla_2 \nabla_2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla_2 \nabla_2 \varphi_2 = 0, \quad \nabla_2 \nabla_2 \varphi_3 = 0,$$

т. е. так называемые *бигармонические уравнения*.

Будем теперь искать общее решение. Оно включает в себе три произвольных бигармоники и следовательно всего шесть гармоник ¹⁾, а на самом деле, как это следует из

¹⁾ Всякая бигармоника непременно имеет в своем составе две гармоники, так как, если например A бигармоника, $\nabla_2 A = a$ — гармоника, в из этого уравнения A очевидно определяется также с произвольной гармоникой, так что окончательно в состав A войдут две гармоники.

теоремы Бетти и как это высказал П. Ф. Папкович ссылаясь на проф. Гродского, они сводятся к трем произвольным гармоникам

$$\nabla_2 \varphi_1, \nabla_2 \varphi_2, \nabla_2 \varphi_3.$$

Однако вывод П. Ф. Папковича ¹⁾ это не доказывает, но из него легко усмотреть, что в (33) входят четыре произвольные гармоники: $\nabla_2 \varphi_1, \nabla_2 \varphi_2, \nabla_2 \varphi_3$ и

$$H = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \frac{1}{2} (x \nabla_2 \varphi_1 + y \nabla_2 \varphi_2 + z \nabla_2 \varphi_3).$$

Что функция H гармоническая, усматривается простым дифференцированием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \nabla_2 \varphi_1 - \frac{1}{2} x \nabla_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \\ - \frac{1}{2} \nabla_2 y \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{1}{2} \nabla_2 z \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \nabla_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} x \nabla_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \\ - \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

откуда, составляя аналогично $\frac{\partial^3 H}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$ и суммируя, найдем $\nabla_2 H = 0$.

Поэтому в уравнения (33) войдут четыре гармонические функции:

$$\nabla_2 \varphi_1, \nabla_2 \varphi_2, \nabla_2 \varphi_3, H,$$

которые могут быть заданы произвольно ¹⁾, так как непосредственно друг с другом не связаны.

¹⁾ См. работу П. Ф. Папковича [94]. Решение, связанное с H , будет:

$$u = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial H}{\partial z},$$

с кубическим расширением:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_2 H = 0$$

и само по себе неинтересно, а имеет значение лишь как вводящее новую гармоническую функцию. Ссылку на Cerrutti см. Marcolongo [20*], стр. 237.

Это H , по мнению П. Ф. Папковича (ссылка на проф. Гродского) должно быть функцией от трех первых гармоник или вообще должно исчезнуть.

Чтобы это доказать, введем гармонику

$$\Theta = \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = 2(\lambda + \mu) \Theta,$$

которая очевидно выражается через $\nabla_2 \varphi_1$, $\nabla_2 \varphi_2$, $\nabla_2 \varphi_3$. Через них же и через новую гармоническую функцию выразится

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z};$$

но из (33) видно, что она не даст новой произвольной функции, так как в выражениях u , v , w входят ее частные производные по x , y , z , которые, присоединяясь к произвольным гармоникам $\nabla_2 \varphi_1$, $\nabla_2 \varphi_2$, $\nabla_2 \varphi_3$, сливаются в три произвольные гармоники.

Точное интегрирование (31) при помощи комплексного преобразования будет изложено в главе III и приводит к трем гармоникам трех переменных x , y , z и к трем плоским гармоникам от двух из них. Мы встретимся с формулами, аналогичными (33), еще в плоской задаче, где особенно ясно будет это приведение.

Укажем еще простой способ получения решения уравнения (31), основанный на свойстве потенциальной функции сил, действующих по закону Ньютона.

Заметим для этого, что уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

могут быть решены, положив, что за a , b , c взяты три какие-нибудь гармонические функции, связанные соотношением:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

В самом деле

$$dA = \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) dz$$

и условия интегрируемости здесь выполнены в силу (35) и условий:

$$\nabla_2 a = \nabla_2 b = \nabla_2 c = 0,$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \nabla_2 c = 0 \end{aligned}$$

и аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения общих решений уравнений (31) положим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}; & X &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}; & Y &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}; & Z &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Подставив эти выражения в (31), мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L + \rho \Omega] + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla_2 n + \rho \theta) - \frac{\partial}{\partial z} (\mu \nabla_2 m + \rho \psi) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} [(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L + \rho \Omega] + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \nabla_2 l + \rho \varphi) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla_2 n + \rho \theta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} [(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L + \rho \Omega] + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla_2 m + \rho \psi) - \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla_2 l + \rho \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

и мы очевидно им удовлетворим, положив

$$(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L + \rho \Omega = A$$

$$\mu \nabla_2 l + \rho \varphi = a$$

$$\mu \nabla_2 m + \rho \psi = b$$

$$\mu \nabla_2 n + \rho \theta = c,$$

откуда можно получить

$$L = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \iiint \frac{(\rho \Omega - A)_1}{r} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$l = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint \frac{(\rho \varphi - a)_1}{r} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$m = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint \frac{(\rho \psi - b)_1}{r} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$n = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint \frac{(\rho \theta - c)_1}{r} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

где x_1, y_1, z_1 значения x, y, z для какой-нибудь точки M_1 , причем, очевидно, мы можем к L, l, m, n прибавить потенциалы сил, исходящих из точек, расположенных вне тела и следовательно внутри тела представляющие непрерывные функции. Тогда ур-ния (36) дадут окончательные выражения для u, v, w :

$$u = \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{(\rho \Omega - A)_1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\rho \theta - c)_1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{(\rho \psi - b)_1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

и т. д.

Применяя этот прием, надо исследовать каждый раз характер произвольных функций.

В заключение отметим способ С. А. Савина для нахождения общих решений в виде однородных полиномов [83**].

ГЛАВА II.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

§ 1. Понятие о плоской задаче теории упругости.

Деформацию какого-нибудь тела будем называть плоской, если все точки его перемещаются параллельно некоторой плоскости, например плоскости xu , и притом все точки, находящиеся на одном и том же перпендикуляре к xu (параллельном оси Oz), перемещаются одинаково.

Таким образом в этом случае должно быть:

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Основные уравнения равновесия (в предположении, что внешние силы также параллельны xu , т. е. $Z = 0$), а также уравнения, связывающие усилия с перемещениями, дадут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= 0 \\ X_x &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ X_y &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$X_z = Y_z = 0, \quad Z_x = \lambda \Delta, \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ — плоскостное расширение.

Ур-ния (1) мы назовем уравнениями плоской задачи теории упругости. Они соответствуют в сущности теории упругости масс, находящихся в плоскости xu , т. е. двух измерений, а в соединении с (2) дают решение и для масс трех измерений. Приблизительно (1) представляют уравнения равновесия тонкой пластинки (арки), толщиной которой мы пренебрегаем и лежащей в плоскости xu . Эти вопросы и вызвали развитие „плоской задачи“. Заметим, что так называемое „плоское“ распределение усилий, при котором $X_z = Y_z = Z_z = 0$ (соответствующее плоскости xu), составляющее так называемую задачу Клебша, совпадает с распределением напряжений в плоской задаче лишь в случае $\Delta = 0$, т. е. в очень частном случае.

Заметим, что с ур-ниями (1) мы сталкиваемся в задаче трех измерений при изучении средних напряжений в пластинках, ограниченных двумя плоскостями, параллельными xu (основаниями), $z = -h$ и $z = +h$, толщиной, следовательно $2h$, если предположим, что $Z_z = 0$ во всех точках пластинки, а $X_z = Y_z = 0$ на ее основаниях, т. е. при $z = \pm h$.

Взяв $\int_{-h}^{+h}$ от обеих сторон уравнений равновесия упругого тела и уравнений, связывающих перемещения с усилиями, и введя средние значения:

$$\begin{aligned}(u) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u dz, & (v) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} v dz, \\(X_x) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_x dz, & (Y_y) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} Y_y dz, \\(X_y) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_y dz\end{aligned}$$

мы получим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

так как

$$Z_z = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Вставив полученное выражение для $\frac{\partial w}{\partial z}$ в уравнения, связывающие перемещения и усилия, найдем уравнения (1), т. е. распределение средних напряжений будет такое же, как в плоской задаче, но с измененным коэффициентом упругости λ (вместо него будет стоять $\frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}$). Перемещения u и v мы найдем из уравнений, совпадающих с (1).

§ 2. Интегрирование уравнений плоской задачи.

Переходя к вопросу об интегрировании уравнений (1), отметим сначала частный случай $X = Y = 0$. Уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \\ X_x &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ X_y &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и следовательно

$$X_x + Y_y = 2(\lambda + \mu)\Delta.$$

Подставляя X_x , Y_y , X_y из последних трех уравнений (3) в первые два, найдем:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + 2\mu\omega i,$$

где

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

есть функция комплексной переменной $z = x + iy$ и следовательно Δ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Введем комплексные переменные

$$z = x + iy \text{ и } z_1 = x - iy$$

и положим

$$\Phi(z) = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} [(\lambda + 2\mu)\Delta + 2\mu\omega i] = X_x + Y_y + \frac{4\mu(\lambda + \mu)\omega i}{\lambda + 2\mu}. \quad (5)$$

Пусть $\Phi_1(z_1)$ будет функция комплексной переменной z_1 , получающаяся из $\Phi(z)$ путем подстановки вместо z переменной z_1 . Тогда вследствие формул (3) и (4) будут справедливы следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} 4\mu \frac{\partial}{\partial z_1} (v + iu) &= -\frac{i\Phi(z)}{2} + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \Phi_1(z_1) \\ 4\mu \frac{\partial}{\partial z} (v + iu) &= 2X_y + i(X_x - Y_y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставив Δ из ур-ния (4), мы найдем уравнение:

$$\nabla_2(X_x + Y_y) = 0,$$

присоединив к которому первые два ур-ния (3), найдем для напряжений в плоской задаче следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \\ \nabla_2(X_x + Y_y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

которая при заданных на некотором односвязном контуре напряжениях, вообще говоря, достаточна для определения развивающихся внутренних напряжений X_x , Y_y , X_y .

В ур-ния (7) не входят коэффициенты упругости, а поэтому и распределение напряжений от коэффициентов упругости не зависят ¹⁾. Во французской и русской литературе это предложение называют теоремой Мориса Леви, который один из первых обратил внимание на плоскую задачу, представляемую системой (17).

Переходя к исследованию свойств плоской задачи, мы обратим сначала внимание на различные виды решений системы (7), не входя в вопрос об удовлетворении контурных условий, которому будет посвящена глава III.

§ 3. Функция Эри.

В 1861 г. известный английский астроном Эри указал на весьма общий способ для получения решений „плоской“ задачи теорий упругости, заключающийся в том, что полагают

$$X_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Эти выражения действительно удовлетворяют первым двум ур-ниям (7).

Но третье условие (6), приводящее к уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0, \quad (8)$$

обыкновенно не удовлетворялось, и потому первые исследователи, применявшие этот метод, впадали в ошибку (например Иббетсон [9]).

Общий интеграл ур-ния (8), который в переменных $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ будет написан в виде:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0,$$

может быть представлен выражением:

$$\psi = f(z) + f_1(\bar{z}) + z\varphi_1(\bar{z}) + \bar{z}\varphi_2(z),$$

¹⁾ В односвязной области.

где $f(z)$ и $\varphi(z)$ какие угодно функции от z , или полагая

$$\varphi(z) = z\chi(z),$$

найдем его еще в виде

$$\psi = f(z) + f_1(z_1) - \frac{1}{2} z z_1 [\chi(z) + \chi_1(z_1)].$$

При изучении плоского напряженного состояния обыкновенно исследуют системы некоторых кривых линий, тесно связанных с распределением напряжений, а именно:

1) Две взаимно ортогональные системы линий главных напряжений, по касательным к которым направлены в каждой точке главные напряжения. По Кульману их называют *траекториями напряжений*, а по Лямэ — *изостатическими кривыми*.

2) Две взаимно ортогональные системы линий, по касательным к которым происходят главные сдвиги. Эти системы образуют угол в 45° с предыдущими и делят углы между ними пополам; их называют *траекториями главных сдвигов* или *линиями главных сдвигов*.

Определение линий главных напряжений и сдвигов приводят к интегрированию дифференциальных уравнений, к которым мы вернемся ниже.

Оптический метод исследования напряжений выдвинул еще несколько кривых: 1) *изоклинические линии* (термин Максвелла), примененные Вильсоном, 2) *изохроматические кривые*.

Эти системы кривых могут быть в плоском напряженном состоянии продемонстрированы в поляризованном свете, причем *изоклины* представляются в виде темных линий, а *изохромы* — цветными линиями.

Первые представляют геометрическое место точек, в которых главные напряжения (направления их) образуют постоянный угол с осями координат, а *изохромы* — линии одинакового наибольшего сдвига, т. е., следовательно, одинаковой разности главных напряжений. По Вертгейму и Нейману, двойное преломление, развивающееся в теле, производящее явление интерференции и окрашивания, как раз пропорционально этой разности¹⁾.

¹⁾ См. литературу: Кирпичев [53], Кокер и Филон [89].

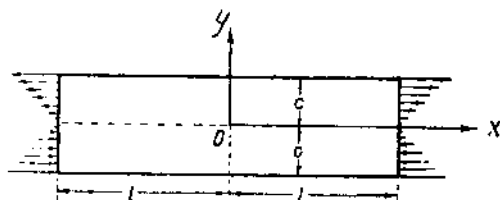
§ 4. Примеры изучения напряжений при помощи функций Эри.

1) Пусть:

$$\psi = \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2,$$

где a, b, c постоянные. Мы найдем:

$$X_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = c, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = a, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -b.$$



Черт. 17.

Это случай однородно напряженного упругого тела, причем напряжение всюду постоянно. Как частный случай, отметим постоянное напряжение по одной из осей координат: по Ox ($c \geq 0$ и $a = b = 0$), по Oy ($a \geq 0$ и $b = c = 0$).

2) Пусть:

$$\psi = \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{b}{1 \cdot 2} x^2 y + \frac{c}{1 \cdot 2} xy^2 + \frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3,$$

мы найдем:

$$X_x = dy + cx, \quad Y_y = ax + by, \quad X_y = -bx - cy.$$

Если из всех коэффициентов не будет равен нулю только d , мы найдем (черт. 17) случай чистого изгиба в плоскости xy балки прямоугольного сечения силами, параллельными Oy . При b и c не равных нулю войдут и касательные напряжения.

3) До сих пор мы брали за функцию Эри целые полиномы, степень которых была меньше четвертой и уравнение (6) автоматически удовлетворялось. Если мы будем брать полиномы выше этой степени, коэффициенты их в силу (6) будут

связаны некоторыми условиями. Например, взяв полином четвертой степени:

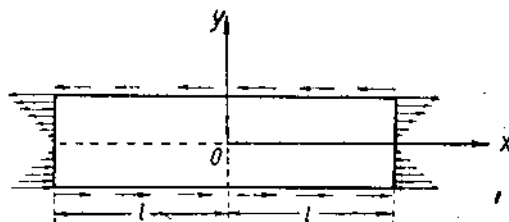
$$\psi = \frac{a}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c}{2} x^2 y^2 + \frac{d}{3 \cdot 2} xy^3 + \frac{e}{4 \cdot 3} y^4,$$

мы, чтобы удовлетворить (6), должны подчинить его коэффициенты условию:

$$e = -(2c + a)$$

или

$$c = -\frac{a + e}{2}.$$



Черт. 18.

Напряжения в этом случае выразятся формулами:

$$X_x = cx^2 + dxy - (2c + a)y^2$$

$$Y_y = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$X_y = -\frac{b}{2}x^2 - 2cxy - \frac{d}{2}y^2.$$

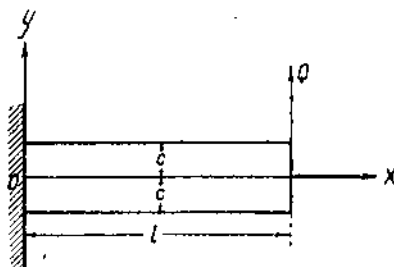
Если все коэффициенты кроме d будут равны нулю, мы получим распределение напряжений:

$$X_x = dxy, \quad Y_y = 0, \quad X_y = -\frac{d}{2}y^2,$$

соответствующее черт. 18.

Прикладывая к этому решению чистый сдвиг $X_x = Y_y = 0$, $X_y = \frac{d}{2} c^2$ и чистый изгиб $X_x = -dl$, $Y_y = X_y = 0$, мы найдем решение:

$$X_x = d(x-l)y, \quad Y_y = 0, \quad X_y = \frac{d}{2}(c^2 - y^2),$$



Черт. 19.

соответствующее черт. 19.

Верхняя и нижняя грани балки свободны от усилий, а к концу ее приложены касательные усилия. Суммируя эти усилия, найдем:

$$Q = \frac{d}{2} \int_{-c}^{+c} (c^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} dc^3,$$

а вводя $J = \frac{2c^3}{3}$ (момент инерции балки относительно нейтральной линии), найдем случай изгиба балки силою Q на ее конце, совпадающий с распределением усилий, даваемых в элементарной теории изгиба:

$$X_x = -\frac{Q(l-x)y}{J}, \quad Y_y = 0, \quad X_y = \frac{Q(c^2 - y^2)}{2J}.$$

4) Возьмем полином пятой степени:

$$\Psi = \frac{a}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e}{4 \cdot 3} x y^4 + \frac{f}{5 \cdot 4} y^5.$$

Чтобы удовлетворить (6), надо положить

$$e = -2c - 3a, \quad f = -\frac{1}{3}(b + 2d),$$

и мы найдем формулы:

$$X_x = \frac{c}{3} x^3 + dx^2y - (2c + 3a)xy^2 - \frac{1}{3}(b + 2d)y^3$$

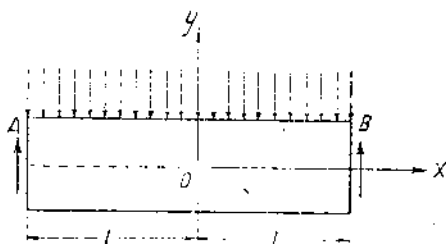
$$Y_y = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + \frac{d}{3}y^3$$

$$X_y = -\frac{b}{3}x^3 - cx^2y - dxy^2 + \frac{1}{3}(2c + 3a)y^3.$$

Положив в этих формулах все коэффициенты кроме d равными нулю, найдем решение:

$$X_x = d \left(x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right), \quad Y_y = \frac{d}{3}y^3, \quad X_y = -dy^2.$$

Желая применить его к случаю (черт. 20) балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки на единицу длины, положим $d = \frac{3q}{4c^3}$ и прибавим к нему очевидное решение:



Черт. 20.

$$X_x = -\frac{3q}{4c^3} \left(l^2 - \frac{2}{5}c^2 \right) y, \quad Y_y = -c^2y - \frac{2}{3}c^3,$$

$$X_y = \frac{3q}{4c},$$

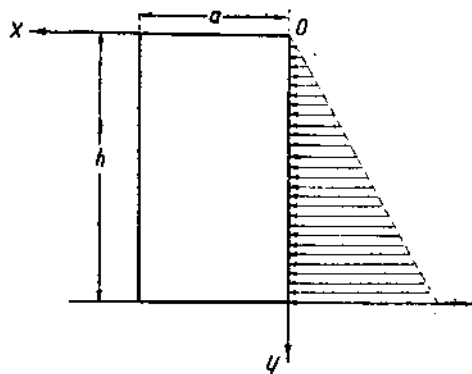
мы найдем решение:

$$X_x = -\frac{3q}{4c^3} (l^2 - x^2) y + \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(\frac{2}{5} c^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right)$$

$$Y_y = \frac{3q}{4c^3} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y - \frac{2}{3} c^3 \right)$$

$$X_y = \frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) x,$$

соответствующее изгибу балки с опертными концами под действием равномерно распределенной нагрузки (черт. 20). Легко убедиться, что распределение касательных усилий X_y совпадает с даваемым в элементарной теории изгиба; нормальные напряжения на площадки перпендикулярно Ox в случае, если a мало сравнительно с l , и в сечениях, удаленных от концов, мало отличаются от даваемых элементарной теорией изгиба. Напряжения Y_y в элементарной теории равны нулю, а в некоторых случаях они могут иметь большое значение. Мы не входим здесь в интересные исследования вида изогнутой оси балки, требующие определения перемещений¹⁾.



Черт. 21.

5) При дальнейшем повышении степени полинома (в функции Эри) получаются более сложные случаи нагрузки (по закону треугольника), параболы и пр. Как интересный случай нагрузки приведем формулы М. Леви²⁾ для подперной стенки.

Легко убедиться, что формулы

$$X_x = -\gamma_1 y \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{x}{a}\right)$$

$$Y_y = -\gamma y - \frac{\gamma_1 y^3}{a^2} \left(\frac{2x}{a} - 1\right) +$$

$$+ \gamma_1 y \left(\frac{4x^3}{a^3} - 6 \frac{x^2}{a^2} + \frac{12}{5} \frac{x}{a} - \frac{1}{5}\right)$$

¹⁾ Эти исследования можно найти в курсе теории упругости (1914 г.) С. П. Тимошенко [57], откуда заимствованы и все приведенные примеры. Там же можно найти интересные примеры при нагрузке, заданной рядом Фурье.

²⁾ Comptes rendus, т. 126, 1898 г.

$$X_y = -\frac{\gamma_1 x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[\frac{3y^2}{a} - \frac{a}{5} + x \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right]$$

дают решение для задачи на черт. 21 (γ и γ_1 — плотности).

Приведем еще интересный пример¹⁾ применения функции Эри для расчета напряжений в равномерно загруженной балке и связанных с распределением их кривых в двух случаях: 1) балка заделана одним концом в стену, 2) балка свободно лежит на опорах в концах ее.

1) Для балки, заделанной одним концом, примем:

$$\psi = p \left\{ \frac{1}{8b^3} y^3 (l-x)^2 + \frac{3}{8b} xy (2l-x) - \frac{x^2}{4} + f(y) \right\},$$

где $f(y)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = \frac{3y}{10b} - \frac{y^3}{2b^3}.$$

Мы найдем:

$$X_x = \frac{p}{2} \left[\frac{3}{2} (l-x)^2 \frac{y}{b^3} + \frac{3}{5} \frac{y}{b} - \frac{y^3}{b^3} \right]$$

$$Y_y = \frac{p}{2} \left(\frac{y^3}{2b^3} - \frac{3}{2} \frac{y}{b} - 1 \right)$$

$$X_y = -\frac{p}{2} \frac{3}{2b^3} (l-x) (y^2 - b^2).$$

2) Для балки, опирающейся на концах, примем:

$$\Psi = -\frac{p}{8} \left\{ \frac{y^3}{b^3} (a^2 - x^2) + \frac{3y}{b} x^2 + 2x^2 \right\} + \frac{p}{20} \frac{y}{b} \left(y^2 - \frac{y^4}{2b^2} \right)$$

и напряжения будут:

$$X_x = \frac{p}{2} \left(-\frac{3}{2} y \frac{a^2 - x^2}{b^3} - \frac{y^3}{b^3} + \frac{3}{5} \frac{y}{b} \right)$$

$$Y_y = \frac{p}{2} \left(-\frac{3}{2} \frac{y}{b} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{b^3} - 1 \right)$$

$$X_y = -\frac{3}{4} \frac{px}{b^3} (y^2 - b^2).$$

Найдем теперь уравнения изоклин и изохром.

¹⁾ Взято у Миура [67].

Уравнение изоклин (стр. 57) будет:

$$\frac{X_x - Y_y}{2X_y} = \text{const},$$

а изохром:

$$(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 = \text{const} = C.$$

Соответственно этому для балки, заделанной одним концом, мы найдем уравнение изоклин в виде:

$$\frac{X_x - Y_y}{2X_y} = \frac{\frac{3}{2}(l-x)^2 \frac{y}{b^3} - \frac{3}{2} \frac{y^3}{b^3} + \frac{21}{10} \frac{y}{b} + 1}{\frac{3(x-l)(y^2 - b^2)}{b^3}} = \text{const}$$

или, полагая

$$\frac{y}{b} = \eta, \quad X = x - l$$

в виде

$$\frac{\frac{X^2}{b^2} - \eta^2 + \frac{7}{5} + \frac{2}{3\eta}}{\frac{2X}{b} \frac{(\eta^2 - 1)}{\eta}} = \text{const} = A.$$

Вводя обозначения:

$$S = \frac{1 - \eta^2}{\eta}, \quad K = \eta^2 - \frac{2}{3\eta} - \frac{7}{5},$$

мы найдем уравнение изоклин в виде:

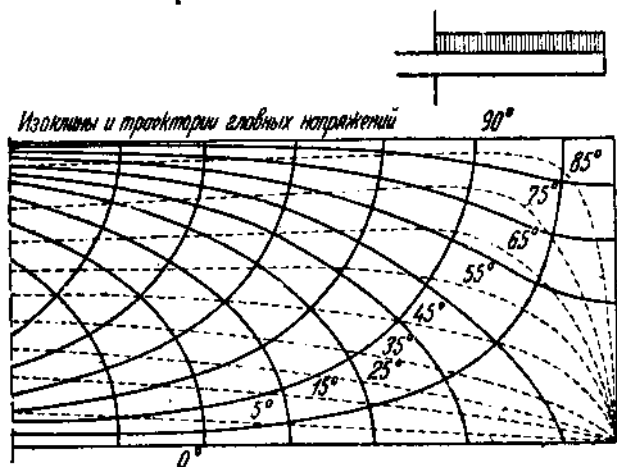
$$\frac{\frac{X^2}{b^2} - K}{-\frac{2X}{b} S} = A$$

или, решая это уравнение относительно $\frac{X}{b}$:

$$\frac{X}{b} = -AS \pm \sqrt{A^2 S^2 + K}.$$

Изоклины изображены на черт. 22 прерывной чертой. Они сходятся в нижнем правом углу (что подтверждает и оптический метод).

Сплошной линией нанесены там же линии (или „траектории“) главных напряжений.



Черт. 22.

Уравнение изохром (главных сдвигов) имеет вид:

$$(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 = \text{const} = 4\tau_0^2.$$

Полагая $\xi = \frac{l-x}{b}$, мы найдем уравнения их в виде:

$$\frac{4^3}{3^2} \frac{\tau_0^2}{p^2 \eta^2} - \xi^4 + 2(K - 2S^2)\xi^2 - K^2 = 0,$$

а решая это уравнение относительно ξ в виде:

$$\xi = \sqrt{(K - 2S^2) \pm \sqrt{(K - 2S^2)^2 - \left(K^2 - \frac{4n^2}{\eta^2}\right)}},$$

где

$$n = \frac{4\tau_0}{3p}.$$

Изохромны изображены на черт. 23.

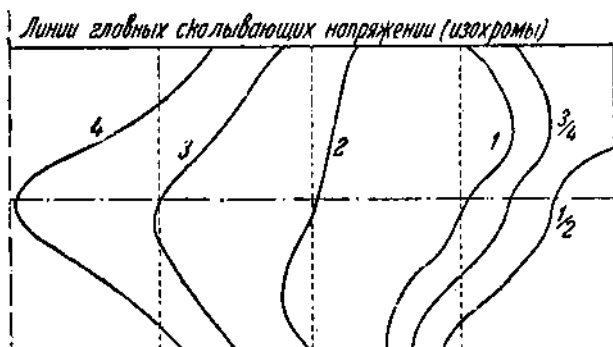
В случае балки на двух опорах уравнение изоклин будет

$$\frac{p}{2} \left\{ -\frac{3}{2} y \frac{a^2 - x^2}{b^3} - \frac{y^3}{b^3} + \frac{3}{5} \frac{y}{b} + \frac{3}{2} \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{b^3} + 1 \right\} - \frac{3p}{2} \frac{x}{b^3} (y^2 - b^2) = \text{const}$$

или

$$-\frac{3}{2} \eta (\xi^2 - \gamma^2) - \frac{3}{2} \eta^3 + \frac{21}{10} \eta + 1 = \frac{\xi^2 - \gamma^2 - K}{2\xi S} = \text{const} =$$

где $\gamma = \frac{a}{b}$.



Черт. 23.

Отсюда получается для ξ квадратное уравнение; решив его, найдем:

$$\xi = SA \pm \sqrt{S^2 A^2 + \gamma^2 + K},$$

изоклины нанесены на черт. 24 прерывной чертой, а сплошной нанесены линии главных напряжений.

Уравнение главных сдвигов (изохром) будет:

$$4\tau_0^2 - \left[\frac{3}{4} p \eta (\xi^2 - \gamma^2 - K) \right]^2 - \frac{4 \cdot 3^3}{4^3} p^2 \eta^2 \xi^2 S^2 = 0$$

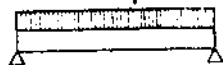
или

$$\frac{8^2}{3^2} \frac{\tau_0^2}{p^2 \eta^2} - (\xi^2 - \gamma^2 - K)^2 - 4\xi^2 S^2 = 0,$$

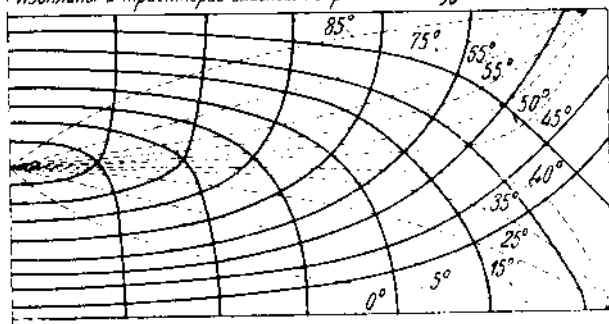
откуда получается для них уравнение:

$$\frac{4n^2}{\gamma^2} - \xi^4 - 2[(\gamma^2 + K) - 2S^2]\xi^2 - (\gamma^2 + K)^2 = 0,$$

$$\gamma = 4$$

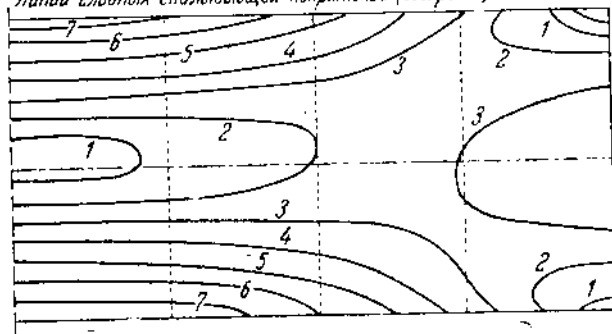


Изоклины и траектории главных напряжений



Черт. 24.

Линии главных скальвающих напряжений (изокномы)



Черт. 25.

решая которое найдем:

$$\xi = \sqrt{\gamma^2 + K - 2S^2 \pm \sqrt{(\gamma^2 + K - 2S^2)^2 - [(\gamma^2 + K)^2 - \frac{4n^2}{\gamma^2}]}}$$

Они нанесены на черт. 25.

§ 5. Способ функций комплексной переменной для получения решений плоской задачи (без внешних сил).

Перепишем первые два уравнения (3) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}(X_x - Y_y + 2iX_y) + \frac{\partial}{\partial z_1}(X_x + Y_y) = 0,$$

где

$$z = x + iy, \quad z_1 = x - iy,$$

а имея в виду (5), найдем:

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2} \{ \Phi(z) + \Phi_1(z_1) \}, \quad (6)$$

где $\Phi(z_1)$ некоторая и, пока не заданы контурные условия, произвольная функция комплексной переменной. Из этих уравнений следует:

$$X_x - Y_y + 2iX_y = -\frac{1}{2} z \Phi'_1(z_1) + iF_1(z_1), \quad (10)$$

где $F(z)$ — новая произвольная функция комплексной переменной. Подставив в (10) вместо i — i , мы напомним его в виде:

$$X_x - Y_y - 2iX_y = -\frac{1}{2} z_1 \Phi'(z) - iF(z)$$

и по умножении на i найдем уравнение:

$$2X_y + i(X_x - Y_x) = -\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z). \quad (11)$$

Имея в виду, что

$$-\frac{z_1 i}{2} = -\frac{xi + y}{2} = -y + \frac{y + xi}{2} = -y - i \frac{x + iy}{2}$$

и, вводя вместо $F(z)$ новую функцию $F(z)$ следующим образом:

$$\text{новая } F(z) = \text{старой } F(z) - i \frac{z}{2} \Phi'(z),$$

можно представить уравнение (11) в виде:

$$2X_y + i(X_x - Y_x) = -y \Phi'(z) + F(z)$$

ли в более общем виде:

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = i(\alpha + i\beta)\Phi'(z) + F(z) \quad (12)$$

при условии

$$\frac{\partial}{\partial z_1} i(\alpha + i\beta) = -\frac{i}{2},$$

имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

мы должны удовлетворить условиям:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

например:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta &= y \\ \alpha &= -x, & \beta &= 0 \\ \alpha &= -\frac{x}{2}, & \beta &= \frac{y}{2} \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

так что за α и β можно взять например

$$\alpha = 0, \quad \beta = y$$

или

$$\alpha = -\frac{x}{2}, \quad \beta = \frac{y}{2} \text{ и т. п.}$$

6. Об определении перемещений по напряжениям и определении уравнений кривых, связанных с распределением напряжений. Закон взаимности.

Для определения перемещений u и v возьмем уравнения стр. 55 и (11)

$$4\mu \frac{\partial(v + iu)}{\partial z_1} = -\frac{i}{2} \Phi(z) + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \Phi_1(z_1),$$

$$4\mu \frac{\partial(v + iu)}{\partial z} = -\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z),$$

из которых следует:

$$4\mu(v + iu) = -\frac{i}{2} z_1 \Phi(z) + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \int F(z) dz. \quad (13)$$

Таким образом плоская задача приводится к следующим основным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= -\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z) \\ X_x + Y_y &= R\Phi(z) - \frac{1}{2} \{ \Phi(z) + \Phi_1(z_1) \} \\ 4\mu(v + iu) &= -\frac{i}{2} z_1 \Phi(z) + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \int F(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

На основании этих уравнений решаются все вопросы, относящиеся к плоской задаче.

Составим например дифференциальные уравнения линий главных напряжений и главных сдвигов.

Если $y = f(x)$ будет уравнение линий одной из этих категорий, а φ — угол, образованный в какой-нибудь точке их с Ox , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$$

и следовательно:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Для определения $f(x)$ это уравнение придется интегрировать, полагая

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2X_y}{Y_y - X_x}$$

для линий главных напряжений и

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{X_x - Y_y}{2X_y}$$

для линий главных сдвигов.

Зная $\operatorname{tg} 2\varphi$ как функцию от x, y , мы найдем уравнение для определения y :

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} 2\varphi \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\varphi + 1}.$$

Несколько проще (при решенной задаче о распределении напряжений без новых интегрирований) определяются кривые, имеющие большое значение в оптическом методе определения напряжений, известные под именем изоклин и изохром, а также кривые одинакового плоскостного расширения. Из определения этих линий (см. § 3) ясно, что изоклины — линии одинакового аргумента, а изохромы — постоянного модуля комплексной величины

$$2X_y + i(X_x - Y_y).$$

Из уравнений (13) вытекает интересный закон взаимности в плоской задаче, так как из них следует:

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2} \{ \Phi(z) + \Phi_1(z_1) \}$$

$$X_y + iX_x = -\frac{1}{4} z_1 \Phi'(z) + \frac{1}{2} F(z) + \\ + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} \frac{i}{4} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)].$$

Имеем далее

$$X_y + i \left[X_x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} (X_x + Y_y) \right] = -\frac{i}{4} z_1 \Phi'(z) + \\ + \frac{1}{2} F(z) + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} \frac{i}{4} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)].$$

Вводя в это соотношение вместо

$$\Phi(z) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}F(z) + i \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} \Phi(z)$$

выражения

$$\frac{1}{2} \int \Phi(z) dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\mu} \int F(z) dz$$

и сравнивая с выражением $v + iu$ (13), мы приходим к следующему выводу:

Всякому распределению напряжений X_x , Y_y , X_y соответствует другое, в котором перемещения u и v будут:

$$u = X_x + \omega, \quad v = X_y,$$

где

$$\omega = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (X_x + Y_y)^1.$$

Примечание. Из уравнений (14) вытекает, что при заданных напряжениях в плоской задаче, удовлетворяющих ее уравнениям, перемещения определяются до перемещений плоской неизменяемой фигуры в ее плоскости, так как $\Phi(z)$ определяется по своей вещественной части.

§ 7. О применении конформных отображений к плоской задаче теории упругости ²⁾.

Пусть имеем плоскую задачу теории упругости (без внешних сил) с двумя основными функциями $\Phi(z)$ и $F(z)$. Мы имеем тогда (в прямоугольных прямолинейных координатах):

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}(x - iy) \frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z),$$

$$X_x + Y_y = R\Phi(z),$$

¹⁾ Не следует смешивать этот результат с принципом взаимности работ Бетти.

²⁾ С основаниями конформного отображения можно ознакомиться в любом курсе теории функций комплексной переменной, напр. в курсе И. И. Привалова. Применительно к плоской задаче основные свойства его формулированы в работе Н. И. Мусхелишвили [99].

причем на границе (которую мы будем предполагать замкнутым односвязным контуром):

$$\{2X_y + i(X_x - Y_y)\} e^{2i\theta} + \frac{i}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

где θ (угол нормали к контуру с Ox) является заданной величиной. Отобразим область нашей плоской задачи на другую плоскую область переменной Z , связанной с z уравнением:

$$z = \omega(Z) \quad \text{и} \quad Z = X + iY,$$

где $\omega(Z)$ — однозначная аналитическая функция от Z ; в аналитическом отношении это связано с введением вместо x, y координат X, Y . Комплексным отображением можно пользоваться для нахождения новых решений плоской задачи по решениям уже известным (на чем мы здесь и остановимся), и кроме того вообще для нахождения решений плоской задачи по заданным контурным условиям, причем в этом случае пользуются или таким отображением (Н. И. Мусхелишвили), которое отображает контур, упругое равновесие которого исследуется, на более простой (обыкновенно на круг), или (как это мы будем применять далее) таким, которое отображает контур на координатную линию вводимой при отображении криволинейной системы координат.

Одним из простейших случаев отображения является преобразование при помощи взаимных радиусов-векторов соответствующего уравнения:

$$zZ = \text{const} = R^2.$$

Мы имеем из этого соотношения:

$$\frac{dz}{dZ} = -\frac{z}{Z} = -\frac{R^2}{Z^2}.$$

Эти уравнения соответствуют преобразованию при помощи взаимных радиусов-векторов, и из них следует:

$$X = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{R^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Если

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad dS = \sqrt{dX^2 + dY^2}$$

будут дифференциалы дуг соответствующих кривых, то легко убедиться, что

$$R^2 ds = dS(x^2 + y^2), \quad R^2 dS = ds(X^2 + Y^2).$$

Вводя в приведенные в начале этого параграфа уравнения плоской задачи вместо x, y , — X, Y и обозначив выраженные в переменных X, Y

$$\Phi(z) \text{ и } F(z) \text{ через } \Phi(Z) \text{ и } F(Z),$$

найдем:

$$[2X_y + i(X_x - Y_y)]_{X, Y} = -\frac{i}{2} \frac{Z^2}{X - iY} \frac{d\Phi(Z)}{dZ} + F(Z),$$

откуда

$$[2X_y + i(X_x - Y_y)](X^2 + Y^2) = -\frac{i}{2} (X - iY) \frac{d\Phi(Z)}{dZ} + F(Z),$$

где

$$\Phi(Z) = 2i \int Z F(Z) dZ, \quad F(Z) = \frac{i}{2} Z^3 \frac{d\Phi(Z)}{dZ},$$

т. е. что напряжения:

$$X_x(X^2 + Y^2) + p, \quad Y_y(X^2 + Y^2) + p, \quad X_y(X^2 + Y^2)$$

соответствуют новой плоской задаче и (не считая p) распределяются в обеих задачах одинаково, так как хотя и умножаются на $(X^2 + Y^2)$, но зато и ds увеличивается в $(X^2 + Y^2)$ раз.

Здесь p найдется из условия:

$$2p = \text{вещ. части } \Phi(Z) - (X_x + Y_y)(X^2 + Y^2).$$

Это преобразование указано Митчелем (на основании теоремы Леви-Чивита) и его можно значительно обобщить, взяв

$$z = \varphi(Z),$$

где

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY$$

и две функции комплексной переменной $Z\Phi(Z)$ и $F(Z)$.

Положив:

$$\lambda + \mu i = \frac{-\frac{i}{2}(X - iY) \frac{d\Phi(Z)}{dZ} + F(Z)}{-\frac{i}{2} \varphi(X - iY) \frac{d\Phi(Z)}{dZ} + F(Z)}$$

и

$$2X_y + i(X_x - Y_y)(\lambda + \mu i) = 2X_y + i(X_x - Y_y)$$

при условии

$$X_x + Y_y = \text{вещ. части } \Phi(Z),$$

найдем, что

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}(X - iY) \frac{d\Phi(Z)}{dZ} = F(Z),$$

т. е. X_x, Y_y, X_y соответствуют новой плоской задаче, напряжения которой и условия на контуре связаны известным образом с напряжениями и контурными условиями рассматриваемой задачи.

Примечание. На широкую возможность применения комплексного преобразования для получения новых решений плоской задачи по уже имеющимся указал Лове, обративший внимание, что в этих приложениях нет надобности всегда предполагать соблюденными условия непрерывности, требуемые в других приложениях конформных отображений (картография, электротехника и т. п.), так как непрерывность можно интерпретировать появлением внешних сил. К сожалению, ему повидимому остались неизвестными русские работы по плоской задаче, так как он вводит одну только функцию комплексной переменной, а введение второй существенно необходимо для этих преобразований. Работа Каротерса (§ 9, стр. 81), в которой даны общие формулы плоской задачи, здесь неприменима.

§ 8. Распространение решения на случай приложенных внешних сил.

Легко распространить анализ § 6 на случай действия внешних сил. Возьмем для этого случая уравнения плоской задачи 1. Мы найдем из них тем же приемом, каким получено (7):

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y = 0$$

$$\gamma_y(X_x + Y_y) + 2x^2 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \rho = 0.$$

Очевидно общее решение этих уравнений складывается из общего их решения для случая $X=Y=0$ и частного решения. Чтобы найти это решение, мы перепишем уравнения в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}(X_x - Y_y + 2iX_y) + \frac{\partial}{\partial z_1}(X_x + Y_y) + \rho(X + iY) = 0$$

$$\nabla_2(X_x + Y_y) + 2\kappa^2 \rho \operatorname{div} F = 0, \quad (15)$$

где

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \kappa^2 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu};$$

имея в виду, что

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial(X + iY)}{\partial z} + \frac{\partial(X - iY)}{\partial z_1}$$

и

$$\nabla_2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_1},$$

мы найдем из уравнений (15):

$$\left. \begin{aligned} X_x - Y_y + 2iX_y + \frac{\partial}{\partial z_1} \int (X_x + Y_y) dz + \\ + \rho \int (X + iY) dz = F_1(z_1) \\ X_x + Y_y = \frac{\kappa^2 \rho}{2} \int (X + iY) dz_1 + \frac{\kappa^2 \rho}{2} \int (X - iY) dz + \\ + \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)], \end{aligned} \right\} (15^*)$$

где $F(z)$ и $\Phi(z)$ произвольные функции от z .

Этот результат можно высказать в следующей форме: формулы, решающие плоскую задачу при действии внешних сил, получаются из формул без внешних сил (в которые, как мы видели, входят две произвольные функции комплексной переменной $\Phi(z)$ и $F(z)$), если мы к $\Phi_1(z_1)$ и $F_1(z_1)$ прибавим по $\int (X + iY) dz$, т. е. к вещественной части $\Phi(z)$, $\frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)]$, входящей в $X_x + Y_y$,

прибавим $\frac{x^2\rho}{2} \int (X+iY) dz + \frac{x^2\rho}{2} \int (X-iY) dz$, а вместо $F(z)$ возьмем $F_1(z) + \int (X-iY) dz$.

В некоторых случаях вместо проекций внешних сил X, Y удобнее ввести две новые функции φ и ψ , положив:

$$X = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad Y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

откуда

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{2} \nabla_2 \varphi,$$

$$\operatorname{curl} F = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{2} \nabla_2 \psi.$$

Тогда наши уравнения представятся в виде:

$$X_x - Y_y + 2X_y i + \frac{\partial}{\partial z_1} \int (X_x + Y_y) dz + \\ + \int \rho (X + iY) dz = F_1(z_1)$$

$$X_x + Y_y + 2x^2 \rho \varphi = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)].$$

Из этих формул (как и из формул (15) и (15*)) обнаруживается влияние коэффициентов упругости на распределение напряжений внутри тела. Эти коэффициенты входят только в x^2 и группировки

$$X_x + Y_y + 2x^2 \rho$$

и

$$X_x - Y_y + 2iX_y - \frac{\partial}{\partial z_1} \rho \int x^2 \varphi dz + \int \rho (X + iY) dz + \\ + \frac{1}{2} z \Phi_1(z_1)$$

распределяются в теле по тому же закону, как $X_x + Y_y$ и $X_x - Y_y + 2iX_y$ в задаче без внешних сил.

§ 9. Примеры распределения напряжений при действии отдельных сил или групп сил, приложенных внутри тела в его плоскости.

Особенно удобно вводить φ и ψ , если мы примем, что они представляют потенциалы сил, действующих в плоскости тела по закону логарифмического потенциала и расположенных внутри тела прерывно или непрерывно. Выражение же $\frac{1}{2} \{\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\}$ представляет такой же потенциал, но не прерывный и конечный во всех точках внутри тела. Этим можно удобно воспользоваться для решения ряда интересных задач о распределении усилий в теле под влиянием внешних сил, прерывно распределенных внутри его, например в виде отдельных сил, уравнивающих напряжения на контуре.

Итак, примем, что

$$X = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad Y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Если внешних сил нет, то X и Y равны 0 и тогда имеем условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и $\varphi + i\psi$ есть функция комплексной переменной $z = x + iy$. Если

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

тогда $\varphi + i\psi$ есть функция переменной $z_1 = x - iy$.

Мы имеем в этом случае внешние силы, имеющие потенциал φ и

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Из наших формул легко убедиться, что в этом случае действие внешних сил аналогично гидростатическому давлению. Как частный случай, мы получим действие силы тяжести.

Рассмотрим еще интересный пример отдельной силы, приложенной к телу в начале координат по направлению отрицательной оси Oy .

Примем

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \rho \frac{\partial}{\partial x} \ln r; \quad \psi = 0.$$

Имея в виду, что эта функция представляет производную от логарифмического потенциала, соответствующей силе, направленной по Oy

$$\varphi = \frac{2F}{\pi} \rho \frac{x}{r^2} = \frac{2}{\pi} \rho \frac{\zeta + \bar{\zeta}_1}{2\zeta\bar{\zeta}_1} F = \frac{2}{\pi} \rho \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1}{2\bar{\zeta}_1} \right) F.$$

Из (15) и (15*) мы найдем

$$\begin{aligned} X + iY &= -\frac{2}{\pi} F \rho \frac{1}{2\zeta^2_1} \\ X_x - Y_y + 2iX_y &= -\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \int F \frac{\rho \zeta^2}{2\pi} \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}_1}{2\zeta\bar{\zeta}_1} \right) d\zeta + \\ &+ \int \rho F \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\zeta^2_1} d\zeta + \Phi_1(\zeta_1), \end{aligned}$$

откуда, положив $F_1(\zeta_1) = \frac{2\rho}{\pi} \frac{F}{\zeta_1}$, мы найдем

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{2}{\pi} \frac{F\rho x}{r^2} \left\{ \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r^2} \right\} \\ Y_y &= \frac{2}{\pi} \frac{F\rho x}{r^2} \left\{ -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{y^2}{r^2} \right\} \\ X_y &= \frac{2}{\pi} \frac{F\rho y}{r^2} \left\{ \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{x^2}{r^2} \right\}. \end{aligned}$$

Точно так же может быть рассмотрен случай, если в точке O мы имеем действие пары данного момента и $X = Y = 0$, положив $\psi = \frac{2}{\pi} A \frac{\partial}{\partial x} \ln r$, $\varphi = 0$, где $A = \text{const.}$

В полярных координатах для взятого случая одной силы мы найдем уравнения:

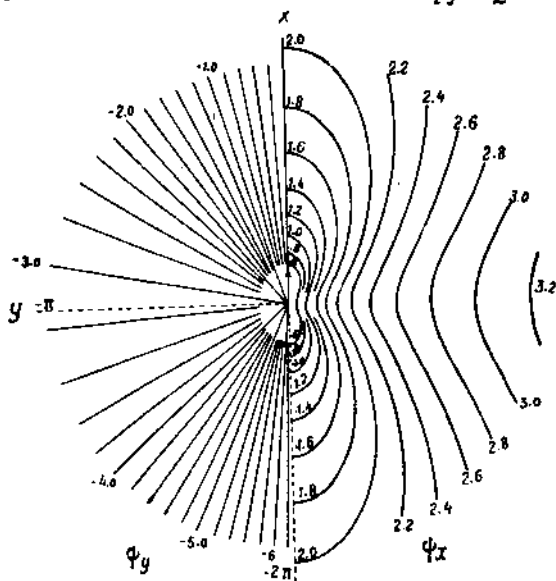
$$\begin{aligned} R_r &= -(3 + \sigma) F \frac{\cos \theta}{4\pi r}, \quad \Theta_\theta = (1 - \sigma) F \frac{\cos \theta}{4\pi r}, \\ R_\theta &= (1 - \sigma) F \frac{\sin \theta}{4\pi r} \end{aligned}$$

или

$$R_r = \frac{\partial}{\partial y} \psi_y, \quad \Theta_\theta = \frac{\partial}{\partial x} \psi_x, \quad R_\theta = (1 - \sigma) F \frac{\sin \theta}{4\pi r} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \psi_y = -\frac{\partial}{\partial y} \psi_x,$$

где ψ_x, ψ_y производные одной и той же функции ψ .



Черт. 26.

При $\sigma = \frac{1}{4}$ мы имеем

$$\psi_x = \frac{F}{4\pi} (1 - \cos \theta) + \frac{3F}{32\pi} (2 \lg r + 1 + \cos 2\theta)$$

$$\psi_y = -\frac{F}{4\pi} (2\theta + \sin 2\theta) + \frac{3F}{32\pi} \sin 2\theta.$$

Этот случай иллюстрируется черт. 26.

При всякой другой $F(\cdot)$ мы получим для перемещений многозначные функции.

Мы получаем, например, другое решение этой задачи, взяв за $F(r) \frac{C}{r}$ (C — постоянная)

$$X_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4}$$

$$Y_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{r^4}$$

$$X_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{r^4},$$

где P — сила, направленная по оси Y .

Это решение впервые получено Flamant [Paris, C. R., CXIV (1892)], см. также Тимошенко, Теория упругости, 1911. В полярных координатах это решение имеет вид:

$$\Theta_\theta = R_\theta = 0,$$

$$R_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi}.$$

Общее решение плоской задачи по способу Каротерса ¹⁾ получается, если мы положим:

$$X_x = a\varphi + b\psi + c \left(\varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + d \left(\varphi + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$Y_y = -a\varphi - b\psi + c \left(\varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + d \left(\varphi - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$2X_y = -2a\psi + 2b\varphi + 2c \left(-x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + 2d \left(-y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

§ 10. Плоская задача по способу, аналогичному методу Галеркина для задачи трех измерений.

(Способ двух гармонических функций).

Напишем по аналогии с задачей в трех измерениях для u и v следующие общие формулы:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\mu} \nabla_2 \varphi_1 + y\gamma_0 + \delta_1 \\ v &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\mu} \nabla_2 \varphi_2 - x\gamma_0 + \delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

¹⁾ The direct determination of stress, in two-dimensional elastic system referred to orthogonal curvilinear coordinates by S. D. Carothers, London Roy. Soc. Proc. (Ser. A), vol. 97, 1920, p. 110.

так что

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right),$$

причем φ_1 и φ_2 связаны уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \nabla_2 \nabla_2 \varphi_1 + \rho \frac{2(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} X &= 0 \\ \nabla_2 \nabla_2 \varphi_2 + \rho \frac{2(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В справедливости (16) и (17) можно убедиться, непосредственно подставив их в уравнения плоской задачи:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla_2 u + \rho X = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla_2 v + \rho Y = 0,$$

получающиеся аналогично уравнениям (31) гл. I (Ляме).

Из уравнений (16) вытекает формула для напряжений

$$X_x = \left(\sigma \nabla_2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + 2(1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial x} \nabla_2 \varphi_1$$

$$Y_y = \left(\sigma \nabla_2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + 2(1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial y} \nabla_2 \varphi_2$$

$$X_y = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + (1 - \sigma) \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)$$

и из них следует:

$$\begin{aligned} 4\mu(v + iu) &= -4i \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \int \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) dz_1 + \\ &+ \frac{2}{z^2} i \nabla_2 (\varphi_1 - i\varphi_2) - 4iz \gamma_0 + 4\mu(\delta_2 + i\delta_1), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\frac{1}{z^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$.

Сравнивая эту формулу с формулой (13) для случая отсутствия внешних сил и имея в виду, что

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_1} = \nabla_2$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\} &= 2(\lambda + \mu) \Delta = \nabla_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial \nabla_2 \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \nabla_2 \varphi_2}{\partial y}, \end{aligned}$$

мы найдем, что для совпадения (18) и (13) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \frac{2}{\kappa^2} i \nabla_2 (\varphi_2 + i \varphi_1) &= \\ = \int F(z) dz + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \int \Phi_1(z_1) dz_1. \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{2}{\kappa^2} \nabla_2 (\varphi_2 + i \varphi_1) = \int F(z) dz + \frac{1}{\kappa^2} \int \Phi_1(z_1) dz_1,$$

если γ_0 и $\delta_2 + i \delta_1$ отнести к постоянным интегрирования.

Вводя функции комплексной переменной $\varphi_2(z)$ и $\varphi_1(z)$, у которых вещественная часть первой равна $\nabla_2 \varphi_2$, а мнимая часть второй $\nabla_2 \varphi_1$, мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} \left[\frac{1}{2} [\varphi_2(z) + \varphi_2(z_1)] + \frac{1}{2} [\varphi_1(z) - \varphi_1(z_1)] \right] &= \\ = \int F(z) dz + \frac{1}{\kappa^2} \int \Phi_1(z_1) dz_1. \end{aligned}$$

В силу этого уравнения надо очевидно положить:

$$F(z) = \frac{1}{\kappa^2} [\varphi_2'(z) + \varphi_1'(z)]$$

$$\Phi(z) = \varphi_2'(z) - \varphi_1'(z).$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_2'(z) = \frac{1}{2} [\Phi(z) + z^2 F(z)]$$

$$\varphi_1'(z) = \frac{1}{2} [-\Phi(z) + z^2 F(z)].$$

§ 11. Четвертый способ интегрирования уравнений плоской задачи.

Возьмем уравнения плоской задачи:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X = 0$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y = 0,$$

$$X_x = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Y_y = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$X_y = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Вместо последних трех уравнений можно взять уравнение

$$\nabla_2 (X_x + Y_y) + \rho \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0.$$

Применим к плоской задаче соображения конца § 12 гл. I о применении теории логарифмического потенциала. Возьмем уравнения, аналогичные (35) гл. I, но для плоской задачи

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

из которых следует, что $A - ic$ есть функция комплексной переменной $x + iy$ и следовательно $A + ic$ — функция комплексной переменной $x - iy$, и A найдется интегрированием полного дифференциала:

$$dA = - \frac{\partial c}{\partial y} dx + \frac{\partial c}{\partial x} dy.$$

Чтобы найти общий вид решения плоской задачи, положим

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y}, & X &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x}, & Y &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \nabla_2 \Omega,$$

т. е. следовательно

$$X_x + Y_y = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (2\lambda + \mu) \nabla_2 L$$

$$X_y = \mu \left(2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right),$$

поэтому уравнения плоской задачи примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L] + \mu \frac{\partial}{\partial y} \nabla_2 n + \rho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L] - \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla_2 n + \rho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0.$$

Тогда имеем, что

$$[(\lambda + 2\mu) \nabla_2 L + \rho \Omega] + i(\mu \nabla_2 n + \rho \theta)$$

есть функция комплексной переменной $x + iy$ и очевидно:

$$A + ic = F(x + iy).$$

Отсюда

$$\nabla_2 L = \frac{1}{\lambda + 2\mu} (A - \rho \Omega), \quad \nabla_2 n = (c - \rho \theta)$$

и следовательно

$$L = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \iint \frac{(\rho \Omega - A)_1 dx_1 dy_1}{r} + M$$

$$n = \frac{1}{2\pi\mu} \iint \frac{(\rho \theta - c)_1 dx_1 dy_1}{r} + H,$$

где значок один внизу указывает на значение при $x = x_1$, $y = y_1$, $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$, а M и H — произвольные гармонические функции конечные и непрерывные внутри контура.

Отсюда получим

$$u = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \iint (\rho\Omega - A)_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dx_1 dy_1 + \\ + \frac{1}{2\pi\mu} \iint (\rho\theta - c)_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) dx_1 dy_1 + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \iint (\rho\Omega - A)_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) dx_1 dy_1 - \\ - \frac{1}{2\pi\mu} \iint (\rho\theta - c)_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dx_1 dy_1 + \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Окончательно найдем

$$u + iv = \frac{1}{\pi(\lambda + 2\mu)} \iint (\rho\Omega - A)_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r} \right) dx_1 dy_1 - \\ - \frac{i}{\pi\mu} \iint (\rho\theta - c)_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) dx_1 dy_1 + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} M - i \frac{\partial}{\partial z_1} H \right\}.$$

Переменные Ω и θ совпадают с переменными φ и ψ метода комплексной переменной и само решение близко к решению § 6, 8, 10.

§ 12. Применение теории функций комплексной переменной к получению решения плоской задачи в прямоугольных координатах.

Применяя комплексную переменную, мы очень просто можем написать какое-нибудь решение плоской задачи. Например, полагая

$$X_x + Y_y = A_m \Phi_m + A_{1m} \Phi_{1m},$$

где A_m и A_{1m} некоторые постоянные, а Φ_m и Φ_{1m} — гармонические полиномы такие, что

$$\Phi_m + i \Phi_{1m} = (x + iy)^m$$

и следовательно

$$\Phi(z) = A_m z^m - i A_{1m} z^m,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_m &= x^m - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4} y^4 + \dots \\ \Phi_{1m} &= mx^{m-1} y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} y^3 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{m-5} y^5 + \dots\end{aligned}$$

Точно так же положив

$$F(z) = \varphi + i\psi,$$

где

$$\begin{aligned}\varphi &= B_m \Phi_m + B_{1m} \Phi_{1m}, \\ \psi &= B_m \Phi_{1m} - B_{1m} \Phi_m,\end{aligned}$$

получим:

$$F(z) = \varphi + i\psi = B_m z^m - i B_{1m} z^m.$$

Взяв за α и β значения: $\alpha = -x$, $\beta = 0$, мы найдем решение, данное Менаже [99], причем у него

$$\begin{aligned}A_m &= a + a'', & B_m &= m(a' + a''') - 2a''' \\ A_{1m} &= a' + a''', & B_{1m} &= (1-m)a'' - (1+m)a'''\end{aligned}$$

Положив:

$$\begin{aligned}X_x + Y_y &= \sum (A_m e^{my} + A_{-m} e^{-my}) \cos mx \\ \varphi &= \sum (B_m e^{my} + B_{-m} e^{-my}) \sin mx \\ \psi &= \sum (B_m e^{my} - B_{-m} e^{-my}) \cos mx\end{aligned}$$

и взяв за α и β прежние значения, мы найдем решение Рибьера [11], причем у него

$$\begin{aligned}A_m &= 4ma_2, & B_m &= 2(a_2 - 2a_1) \\ A_{-m} &= -4mb_2, & B_{-m} &= 2(b_2 - 2b_1).\end{aligned}$$

Таким образом метод функций Эри устанавливает связь плоской задачи с интегрированием бигармонического уравнения при заданных контурных условиях. Обыкновенно задают производные бигармонической функции на некотором контуре. Ограничимся пока простейшим случаем прямолинейного контура, который мы примем за ось Ox (черт. 27) и представим себе, что нам заданы по этой оси нормальное и тангенциальное напряжения Y_y и X_y .

Уравнения плоской задачи будут

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}(x - iy)\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z)$$

$$X_x + Y_y = R\Phi(z) = \frac{1}{2}\{\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\}.$$

Откуда следует

$$4(Y_y + iX_y) = (x - iy)\Phi'(z) - 4iF(z) + 2i\Phi(z) + \Phi_1(z_1).$$

Таким образом по заданным на контуре напряжениям Y_y и X_y мы должны определить две неизвестные функции комплексной переменной $\Phi(z)$ и $F(z)$.

Покажем, что с совершенно такой же задачей мы столкнемся при определении бигармонической функции по заданным на контуре значениям самой функции $V = f(x)$ и ее производной по нормали к контуру, т. е. $\frac{\partial V}{\partial n}$ или $\frac{\partial V}{\partial y} = f_1(x)$.

Мы имели (§ 2 гл. II) общее выражение бигармонической функции в виде

$$V = f(z) + f_1(z_1) + z_1\varphi(z) + z\varphi(z_1)$$

или

$$V = f(z) + f_1(z_1) + zz_1[\psi(z) + \psi_1(z_1)],$$

где $z\psi(z) = \varphi(z)$.

Взяв от первого из этих выражений производную по z , мы найдем:

$$2\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = 2f'(z) + 2z_1\varphi'(z) + 2\varphi(z_1),$$

теперь, очевидно, что задача теории упругости и об определении бигармонической функции совершенно совпадают, если положим:

$$2\varphi(z) = \Phi(z), \quad 2iF(z) + \Phi(z) = 2f'(z),$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} = Y_y,$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial y} = -X_y.$$

Применительно к задаче теории упругости функцию V мы назовем контурной бигармонической функцией, в данном случае для прямолинейного контура.

Примечание. Очевидно, что V связана с функцией ψ Эри (§ 3 гл. II) соотношением $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{4} V$; точно также мы могли бы взять $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{4} V_1$. Кривые $V = \text{const}$ и $V_1 = \text{const}$ очень удобны, как мы видели в § 10 стр. 80 и увидим далее, для наглядного представления напряжений.

§ 13. Плоская задача в криволинейных координатах.

Введем вместо прямолинейных прямоугольных координат x, y, z криволинейные координаты, которые мы возьмем в виде изокоординат, с которыми мы встречались в § 7 гл. II при конформном отображении. Если θ будет угол, образованный осью $O\xi$ криволинейных координат с осью Ox , а E_ξ, H_η, E_η будут напряжения, отнесенные к новым осям, то мы будем иметь формулу преобразования этих напряжений в виде

$$e^{-2\theta i} [2E_\eta + i(E_\xi - H_\eta)] = -\frac{i}{2} (x - iy) \frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z), \quad (19)$$

где

$$z = x + iy, \quad z_1 = x - iy.$$

Взяв уравнения плоской задачи (11) и имея в виду, что $x + iy = \omega(\zeta)$ и $x - iy = \omega_1(\zeta_1)$, а следовательно:

$$\begin{aligned}\omega'(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta} (x + iy) = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{h} (\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1}{h} e^{i\theta},\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}} = \frac{1}{h}, \\ \cos \theta &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}, \\ \omega'(\zeta) \omega'_1(\zeta_1) &= \frac{1}{h^2}\end{aligned}$$

и очевидно

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2.$$

Далее имеем:

$$X_x + Y_y = E_z + H_\eta = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)] = \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

обозначая $\{\Phi(z)\}_{z=\omega(\zeta)} = \Phi(\zeta)$.

Умножая обе части (19) на $\omega'(\zeta)^2 = \frac{1}{h^2} e^{2i\theta}$, полагая

$$F(z) \omega'(\zeta)^2 = F(\zeta)$$

и замечая, что

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} \omega'(\zeta) = \frac{d\Phi(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}$$

мы найдем следующее основное уравнение напряжений в криволинейных координатах:

$$\frac{2\Xi_{\eta} + i(\Xi_{\xi} - H_{\eta})}{h^2} = -\frac{i}{2} \omega_1(\zeta_1) \omega'(\zeta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta),$$

или прибавляя к обеим частям

$$\frac{i(\Xi_{\xi} + H_{\eta})}{h^2},$$

получим:

$$\frac{2(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi})}{h^2} = -\frac{i}{2} \omega_1(\zeta_1) \omega'(\zeta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta) + \frac{i(\Xi_{\xi} + H_{\eta})}{h^2},$$

или, умножая на $h^2 = \frac{1}{\omega'(\zeta) \omega_1(\zeta_1)}$,

$$2(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi}) = -\frac{i}{2} \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta) \omega_1(\zeta_1)} + i(\Xi_{\xi} + H_{\eta}). \quad (20)$$

Имея в виду, что

$$\Xi_{\xi} + H_{\eta} = \frac{1}{2} \{ \Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1) \}$$

мы можем так формулировать плоскую задачу применительно к контуру $\xi = \alpha$.

При заданных на контуре $\xi = \alpha$ нормальном Ξ_{ξ} и касательном Ξ_{η} напряжениях, найти целые (голоморфные) функции $\Phi(\zeta)$ и $F(\zeta)$ внутри контура $\xi = \alpha$, чтобы они производили на контуре $\xi = \alpha$ напряженное состояние с заданными нормальным и касательным напряжениями.

Чтобы получить общие выражения для перемещений в криволинейных координатах ξ, η , составим проекции их на оси координат по формуле:

$$v_{\eta} + iu_{\xi} = (v + iu) e^{bi},$$

а так как

$$v + iu = \frac{1}{4\mu} \left(-i \frac{z}{2} \Phi(z) + \int F(z_1) dz + \right. \\ \left. + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \int \Phi_1(z_1) dz_1 \right)$$

и

$$e^{hi} = h\omega'(\zeta),$$

мы найдем

$$h^2\omega'(\zeta) = \frac{1}{\omega'_1(\zeta_1)}$$

$$\frac{4\mu}{h}(v_\eta + iu_\xi) = -\frac{i\omega'(\zeta)\omega_1(\zeta_1)}{2} \Phi(\zeta) + \omega'(\zeta) \int F(\zeta)\omega'_1(\zeta_1)d\zeta + \\ + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \omega'(\zeta) \int \Phi_1(\zeta_1)\omega'_1(\zeta_1)d\zeta_1$$

или обозначая

$$\Phi(\omega(\zeta)) = \Phi(\zeta), \quad F(\omega(\zeta)) = F(\zeta),$$

имеем:

$$4\mu(v_\eta + iu_\xi) = -\frac{i}{2} \Phi(\zeta)\omega_1(\zeta_1)\omega'(\zeta) + \\ + \frac{i}{2} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \omega'(\zeta) \int \Phi(\zeta)\omega'_1(\zeta_1)d\zeta_1 + \\ + \omega'_1(\zeta_1) \int F(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta. \quad (21)$$

§ 14. Полярные координаты на плоскости.

Возьмем $\zeta = \xi + i\eta = \ln(x + iy) = \ln r + i\theta$,

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\theta = \arctg \frac{y}{x}$

$$\omega(\zeta) = e^\zeta, \quad \alpha + i\beta = -\frac{1}{2} e^{\bar{\zeta}} e^\zeta = -\frac{1}{2} e^{2\zeta} = -\frac{1}{2} r^2,$$

$$h = \frac{1}{r}, \quad \alpha = -\frac{1}{2} r^2, \quad \beta = 0.$$

Для полярной системы координат мы найдем:

$$r^2 [2R_\eta + i(R_r - \Theta_\eta)] = -\frac{1}{2} i r^2 \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta)$$

или

$$\left. \begin{aligned} 2R_\eta r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \Omega + \varphi \\ (R_r - \Theta_\eta) r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

где

$$\Omega = R_r + \Theta_\eta, \quad \varphi + i\psi = F(\zeta).$$

Эти формулы указаны нами в Comptes Rendus 1908 г.
Полагая

$$\begin{aligned} R_r + \Theta_\eta &= \sum (A_m r^m + A_{-m} r^{-m}) \cos m\theta \\ \varphi &= \sum (B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \sin m\theta \\ \psi &= \sum (-B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \cos m\theta \end{aligned}$$

мы найдем решение Рибьера [11], а прибавляя к $R_r + \Theta_\eta$ член $C_1 \ln r + C_2$, получим решение С. И. Белзевского [35] и А. Тимпе [32]. Частный случай $m=1$ был открыт еще в 1881 г. Х. С. Головиным, а именно:

$$1) R_r = \frac{A}{r^2} + A_1 + A_2 \ln r.$$

$$R_\eta = 0.$$

$$2) R_r = \left(\frac{B}{r^4} + \frac{B_1}{r^2} + B_2 \right) y$$

$$R_\eta = \left(\frac{B}{r^4} + \frac{B_1}{r^2} + B_2 \right) x.$$

$$3) R_r = \left(\frac{C}{r^2} + C_1 + C_2 r^2 \right) \frac{x}{r^2}$$

$$R_\eta = - \left(\frac{C}{r^2} + C_1 + C_2 r^2 \right) \frac{y}{r^2}.$$

Комбинируя эти три решения, Х. С. Головин дает решение

$$R_r = A \left\{ \ln \frac{r}{r_1} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) - \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \right. \\ \left. + (B \cos \theta + C \sin \theta) \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{1}{r} + \frac{r}{r_1^2 r_2^2} \right\} \right. \\ \left. R_\theta = (B \sin \theta - C \cos \theta) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{1}{r} + \frac{r}{r_1^2 r_2^2} \right) \right.$$

Д. А. Гавра [101], применяя к выводу результатов Головина метод функций комплексной переменной, заметил, что решение может быть обобщено на случай с большим числом произвольных постоянных, чем у Головина.

§ 15. О функциях, аналогичных функции Эри.

Подобно тому как мы связали задачу о нахождении бигармонической функции, при заданных контурных условиях, с плоской задачей в прямолинейных координатах (§ 12), распространим эту связь на случай криволинейных изотермических координат.

Общее выражение бигармонической функции в этих координатах будет очевидно следующее¹⁾.

$$V_1 = f(\zeta) + f_1(\zeta_1) + \omega(\zeta) \omega_1(\zeta_1) \{ \varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1) \}, \quad (23)$$

или²⁾

$$V_2 = f(\zeta) + f_1(\zeta_1) + \omega(\zeta) \varphi_1(\zeta_1) + \omega_1(\zeta_1) \varphi(\zeta).$$

Составив от (23) производную по ζ , найдем:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} = \omega(\zeta) \omega_1(\zeta_1) \varphi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \omega_1(\zeta_1) \{ \varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1) \} + f'(\zeta),$$

¹⁾ Получается из выражения Гурса

$$V = f(z) f_1(z_1) + z z_1 [\varphi(z) + \varphi_1(z_1)]$$

подстановкой $z = \omega(\zeta)$ и следовательно $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$.

²⁾ Получается из того же выражения, написанного в виде $V = f(z) + f_1(z_1) + z \varphi_1(z_1) + z_1 \varphi(z)$ при $f(\omega(\zeta)) = f(\zeta) \varphi(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$.

Сравним с этим выражением общее решение плоской задачи в изокординатах (20):

$$2(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi})\omega'(\zeta)\omega_1'(\zeta_1) = -\frac{1}{2}i\omega_1(\zeta_1)\omega'(\zeta)\Phi'(\zeta) + f(\zeta) + \\ + \frac{i}{2}\omega'(\zeta)\omega_1(\zeta_1)\{\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)\}.$$

Представляя его в виде:

$$4i(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi})\omega_1'(\zeta_1) = \omega_1(\zeta_1)\Phi'(\zeta) + \\ + \frac{2i}{\omega'(\zeta)}f(\zeta) - \omega_1(\zeta_1)\{\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)\}$$

и переписав выражение для $\frac{\partial V_1}{\partial \zeta}$ в виде:

$$\frac{1}{\omega(\zeta)}\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} = \omega_1(\zeta_1)\varphi'(\zeta) + \frac{\omega_1(\zeta_1)d\ln\omega(\zeta)}{d\zeta}[\varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1)] + \\ + \frac{f'(\zeta)}{\omega(\zeta)}.$$

Чтобы эти выражения совпадали, необходимо выполнение при $\varphi(\zeta) = \Phi(\zeta)$ равенства:

$$\frac{1}{\omega(\zeta)}\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} - \omega_1(\zeta_1)\frac{d\ln\omega(\zeta)}{d\zeta}[\varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1)] - \frac{f'(\zeta)}{\omega(\zeta)} = \\ = 4(-\Xi_{\xi} + i\Xi_{\eta})\omega_1'(\zeta_1) + \omega_1'(\zeta_1) + [\varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1)] - \frac{2i}{\omega'(\zeta)}F(\zeta)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2}[\varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1)] = \Xi_{\xi} + H_{\eta}$$

и полагая

$$2iF(\zeta) = f'(\zeta)\frac{d\ln\omega(\zeta)}{d\zeta},$$

мы найдем соотношение:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} - 2\omega_1(\zeta_1)\omega'(\zeta) + \omega_1'(\zeta_1)\omega(\zeta)(\Xi_{\xi} + H_{\eta}) - \\ - 4i(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi})\omega_1'(\zeta_1)\omega(\zeta) = 0$$

или

$$\frac{\partial V_1}{\partial \zeta_1} - 2\omega_1(\zeta_1)\omega'(\zeta)(\Xi_{\bar{\zeta}} + H_{\bar{\zeta}}) = 2\omega(\zeta)\omega'_1(\zeta_1)\{2i\Xi_{\eta} + H_{\eta} - \Xi_{\zeta}\}.$$

Например, для полярных координат:

$$\omega(\zeta) = e^{\zeta}, \quad \omega'(\zeta) = e^{\zeta}, \quad \omega_1(\zeta_1) = e^{\zeta_1}\omega'_1(\zeta_1) = e^{\zeta_1}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \zeta_1} = 2r^2(2R_{\theta}i + 2\theta_0), \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_1}{\partial \zeta} = 4(\theta_0 + iR_{\eta})$$

или

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial V_1}{\partial r} = 4R_{\theta}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = -4\theta_0.$$

Обратим теперь внимание на полную аналогию, которая существует между тремя задачами:

1) Определение бигармоники по контурным условиям (которые обыкновенно приводятся к заданным на контуре ее частным производным по координатам).

2) Плоскую задачу при заданных на контуре напряжениях.

3) Плоскую задачу при заданных на контуре перемещениях.

Чтобы формулировать первую задачу, возьмем выражение бигармоники (23); дифференцируя его по ζ , мы найдем:

$$\frac{1}{2\omega'\zeta} \frac{\partial V_1}{\partial \zeta} = \psi(\zeta, \zeta_1) + \frac{1}{2}[\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

где

$$\psi(\zeta, \zeta_1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \Phi(\zeta) \right\}$$

или, заменяя i на $-i$,

$$\frac{1}{2\omega'_1(\zeta_1)} \frac{\partial V_1}{\partial \zeta_1} = \psi_1(\zeta_1, \zeta) + \frac{1}{2} \left\{ \Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1) \right\}.$$

Точно также из формулы (20) для напряжений найдем:

$$4i(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi}) = \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)} \Phi'(\zeta) + 2iF(\zeta) \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'_1(\zeta_1)} - \Phi(\zeta) - \Phi_1(\zeta_1)$$

и заменяя i на $-i$

$$2(\Xi_{\xi} + i\Xi_{\eta}) = \chi_1(\zeta_1, \zeta) + \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

где $\chi_1(\zeta_1, \zeta$ — некоторая функция от ζ, ζ_1 .

Наконец из формулы (21) для перемещений мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (v_{\xi} + iu_{\xi}) = & -\frac{i}{8\mu} \omega_1(\zeta_1) \omega'(\zeta) \Phi(\zeta) + \\ & + \frac{1}{4\mu} \omega'(\zeta) \int \frac{F(\zeta) d\zeta}{\omega'(\zeta)} + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \omega'_1(\zeta) \omega'_1(\zeta_1) \Phi_1(\zeta_1) d\zeta \end{aligned}$$

и, заменяя i на $-i$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (v_{\eta} - iu_{\eta}) = & \frac{i}{8\mu} \omega(\zeta) \omega'_1(\zeta_1) \Phi_1(\zeta_1) + \\ & + \frac{1}{4\mu} \omega'_1(\zeta_1) \int \frac{F_1(\zeta_1) d\zeta_1}{\omega'_1(\zeta_1)} + \frac{i}{8\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \omega'_1(\zeta_1) \omega'(\zeta) \Phi(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает полнейшая аналогия между этими тремя задачами, состоящая в том, что все они приводятся к определению двух неизвестных функций комплексной переменной по заданному на контуре соотношению, связывающему вещественную часть одной из этих функций, сложенную с некоторой функцией, принимающей на контуре наперед заданное значение. Мы увидим в гл. III, что это соотношение дает возможность определить обе неизвестные функции по одинаковому для всех трех задач методу.

ГЛАВА III.

О СПОСОБАХ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ЗАДАННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ НА КОНТУРЕ (ГРАНИЦЕ ТЕЛА).

§ 1. Общие замечания.

Плоская задача теории упругости, при действии на тело внешних сил, может быть, как это мы видели в гл. I, приведена к задаче без внешних сил, но при измененных условиях на контуре. Поэтому мы остановимся исключительно на случае отсутствия внешних сил.

Если на контуре заданы не напряжения, а перемещения, то задача эта приводится к задаче, аналогичной задаче при заданных на контуре напряжениях. Задача на плоскости приводит к определению двух функций $\Phi(z)$ и $F(z)$.

Для их определения (при заданных на контуре напряжениях) можно применять разные методы. Из этих методов мы заметим:

1) способ, который мы называем способом комплексного уравнивания или компенсации;

2) способ интегралов типа интеграла Шварца (в соединении со способом комплексной компенсации); см. наши работы [90] 1931;

3) способ интегралов типа интеграла Коши¹⁾; см. Мухелишвили [64] 1922;

4) способ интегральных уравнений;

5) способ неопределенных коэффициентов и бесконечных рядов.

Имея в виду приложение теории функций комплексной переменной, мы остановимся главным образом на первых

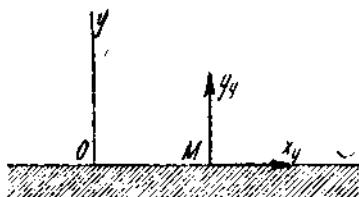
¹⁾ Во время печатания настоящей работы опубликован еще способ, аналогичный способу интегралов типа Коши, предложенный А. А. Назаровым и Д. М. Волковым. См. „Об одной предельной задаче и ее применении к плоской теории упругости“, Математический сборник, Т. 40, № 2. С. Г. Михлиным сообщен новый способ решения плоской задачи, основанный на свойствах функций Грина, по существу близкого к способу интегралов Шварца. Новый способ сообщен также Н. И. Мухелишвили.

двух способах и отчасти на третьем и начнем с простейшего случая, когда контур представляет прямую линию.

§ 2. Решение плоской задачи теории упругости для прямолинейного контура в определенных интегралах.

Примем нашу прямую за ось Ox (черт. 27) прямоугольной прямолинейной системы координат, которая представляет границу упругого тела, расположенного по ту ее сторону (заштрихована), где $y < 0$, причем заданы при $y=0$ нормальное и тангенциальное напряжения, так что при $y=0$

$$X_y = f_1(x), \quad Y_y = f_2(x) \dots (1)$$



Черт. 27.

Чтобы задача была вполне определенной, необходимо также задать напряжения в бесконечно далеких точках. Если напряжения в теле вызваны конечными силами в конечное время, то в бесконечно далеких точках они всегда равны нулю. На основании ф-лы (12) гл. II имеем:

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -y\Phi'(z) + F(z) \quad (2)$$

при $\alpha=0$, $\beta=y$.

Отсюда следует, что на оси Ox , т. е. при $y=0$

$$[2X_y + i(X_x - Y_y)]_{y=0} = [F(z)]_{y=0} = (\varphi + i\psi)_{y=0}. \quad (3)$$

Мы видим, следовательно, что на контуре $y=0$ значения

$$2X_y + i(X_x - Y_y)$$

таковы, как будто бы

$$2X_y + i(X_x - Y_y)$$

была функцией комплексной переменной

$$z = x + iy$$

(каковой она на самом деле не является) или, другими словами, „компенсируется“ значениями некоторой функции комплексной переменной. Чтобы достичь этого, мы правую сторону (2) видоизменяем при помощи уравнения контура.

Надо заметить, что операция такого рода имеет существенное значение в методах решения плоской задачи и решается введением вместо координат x, y комплексных величин

$$z = x + iy \quad \text{и} \quad z_1 = x - iy$$

(„комплексное преобразование“), с которым мы уже имели дело в гл. I. Из этих выражений следует:

$$x = \frac{z + z_1}{2}, \quad y = \frac{z - z_1}{2i}.$$

Вставив эти выражения в уравнение контура

$$f(x, y) = 0, \quad (4)$$

мы найдем, что на контуре (4) z является некоторой функцией от z_1 и позволяет всякую функцию от x, y , а следовательно и от z, z_1 преобразовать в функцию одного z или одного z_1 , что имеет важное значение в методах решения плоской задачи.

Из (3) имеем

$$2(X_y - iY_y)_{y=0} = [\varphi + i(\psi - \Omega)]_{y=0},$$

где

$$\Omega = X_x - Y_y,$$

т. е.

$$[\varphi]_{y=0} = 2f_1(x), \quad [\Omega - \psi]_{y=0} = 2f_2(x)$$

а принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 (\Omega - \psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Omega - \psi)}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и что они должны быть конечны и непрерывны на всей полуплоскости $y < 0$, мы можем положить

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s) y ds}{(s-x)^2 + y^2}. \quad (6)$$

$$\Omega - \psi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(s) y ds}{(s-x)^2 + y^2}. \quad (7)$$

В самом деле, если $f(s)$ будет значение, принимаемое на оси Ox функцией $f(x, y)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

конечной и непрерывной во всех точках той половины плоскости координат Oxy , где $y < 0$, то

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s) y ds}{(s-x)^2 + y^2} \quad (8)$$

удовлетворяет уравнению (2), так как представляет вещественную часть функции комплексной переменной $z = x + iy$

$$- \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s) ds}{s-z},$$

мнимая часть которой

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-s) f(s) ds}{(s-x)^2 + y^2}. \quad (9)$$

Кроме того, легко убедиться, что (8) представляет везде конечную и непрерывную функцию, а приняв за новую переменную $t = \frac{s-x}{y}$, так что $dt = \frac{ds}{y}$, мы найдем левую часть (8) в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(ty+x) dt}{1+t^2}.$$

При $y = 0$ это выражение обращается в

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dt}{1+t^2} = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = f(x)$$

и следовательно (6) и (7) представляют функции, удовлетворяющие (5), конечные и непрерывные на полуплоскости

$y < 0$, удовлетворяющие при $y = 0$ условиям (1). Кроме того из (9) очевидно, что ψ , как функция сопряжения с (6), может отличаться только на постоянную от

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-s) f_1(s) ds}{(s-x)^2 + y^2},$$

т. е.

$$\psi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-s) f_1(s) ds}{(s-x)^2 + y^2} + C \quad (10)$$

и следовательно из (7)

$$\Omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f_2(s) + (x-s) f_1(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds + C. \quad (11)$$

Постоянная C зависит от значений, принимаемых напряжениями в бесконечно далеких точках, и ее надо определять в каждом отдельном случае.

Решение задачи мы получим из уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2X_y &= -y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \varphi \\ X_x - Y_y &= y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \psi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

так что

$$\begin{aligned} 2X_y &= -y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \varphi \\ 2X_x &= y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \Omega + \psi \\ 2Y_y &= \Omega - y \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \psi, \end{aligned}$$

где Ω дано уравнением (11), а φ и ψ — уравнениями (6) и (10).

§ 3. Примеры.

Как пример, рассмотрим случай, когда напряжение, приложенное по оси Ox , есть постоянное гидростатическое

давление p на протяжении от точки A ($x = -a$) до точки B ($x = a$), следовательно:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 0, f_2(s) = p & (\text{для } x > -a, \text{ но } < a) \\ f_1(s) &= 0, f_2(s) = 0 & (\text{для } x < -a \text{ и для } x > a) \end{aligned}$$

По формулам (6), (10), (11)

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \quad \psi = C, \\ \Omega &= \frac{2p}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{y ds}{(s-x)^2 + y^2} + C = \\ &= \frac{2p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) + C. \end{aligned}$$

Поэтому, так как по формуле (12)

$$\begin{aligned} 2X_y &= -y \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ X_x - Y_y &= y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + C \end{aligned}$$

и так как

$$X_x + Y_y = \frac{2p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) + C,$$

получим

$$\begin{aligned} X_y &= \frac{4ay^3xp}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]} \\ X_x &= \frac{p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) + \\ &+ \frac{2ya(x^2-y^2-a^2)p}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]} + C \\ Y_y &= \frac{p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) - \\ &- \frac{2ya(x^2-y^2-a^2)p}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]}. \end{aligned}$$

Если при x и y , равных ∞ напряжения равны нулю то $C=0$, и мы окончательно найдем:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) + \\ &+ \frac{2pya(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi [(y^2 + x^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2]} \\ Y_y &= -\frac{p}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) - \\ &- \frac{2pya(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi [(y^2 + x^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2]} \\ X_y &= \frac{4ay^2xp}{\pi [(y^2 + x^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2]} \end{aligned}$$

Направления главных напряжений найдутся по формуле

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \frac{2X_y}{X_x - Y_y},$$

где Ψ угол, образованный одним из них с Ox и следовательно в настоящем примере

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \frac{2yx}{x^2 - y^2 - a^2}.$$

Этот частный случай исследован Митчелем, показавшим, что линии главных напряжений (изостатические линии) будут здесь софокусные эллипсы и гиперболы, фокусы которых A и B (см. также Лове, гл. IX). Митчель исследовал этот пример при помощи функции Эри, за которую можно принять здесь

$$\frac{1}{2} \frac{p}{\pi} (r_2^2 \theta_2 - r_1^2 \theta_1),$$

где r_1 , θ_1 и r_2 , θ_2 — полярные координаты какой-нибудь точки по отношению к полюсам A и B и оси Ox , как полярной оси.

Для всех точек на осях Ox и Oy ($y=0$ или $x=0$)

$$\operatorname{tg} 2\Psi = 0, \Psi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$$

т. е. главные напряжения направлены параллельно осям Ox, Oy . Для всех точек равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \pm \infty \quad \text{и} \quad \Psi = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \dots$$

и следовательно одно из главных напряжений встречается эту линию под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси Ox .

Как другой пример, рассмотрим распределение напряжений в рассматриваемом случае, если по оси Ox приложено на протяжении от $-a$ до $+a$ тангенциальное напряжение постоянной величины k ; в рассматриваемом случае:

$$\begin{cases} f_1(s) = k & (\text{для } x > -a, \text{ но } < a) \\ f_1(s) = 0 \\ f_2(s) = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{для } x < -a \text{ и для } x > a) \end{array} \right.$$

По формулам (6), (10), (11)

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2k}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{y ds}{(s-x)^2 + y^2} = \frac{2k}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{s-x}{y} \right]_{-a}^{+a} = \\ &= \frac{2k}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2k}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{(x-s) ds}{(s-x)^2 + y^2} + C = -\frac{k}{\pi} \left[\ln [(s-x)^2 + y^2] \right]_{-a}^{+a} + C = \\ &= \frac{k}{\pi} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} + C \end{aligned}$$

$$\Omega = \psi,$$

Если в бесконечно далеких точках напряжения должны быть равны нулю, то $C=0$, и мы найдем:

$$2X_y = -y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \varphi = -\frac{ky}{\pi} \left[\frac{2(a+x)}{(a+x)^2 + y^2} + \frac{2(a-x)}{(a-x)^2 + y^2} \right] +$$

$$+ \frac{2k}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right)$$

$$X_x - Y_y = y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \psi = \frac{ky}{\pi} \left[\frac{2y}{(a+x)^2 + y^2} - \frac{2y}{(a-x)^2 + y^2} \right] +$$

$$+ \frac{k}{\pi} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2},$$

или

$$X_y = -\frac{4kay}{\pi} \frac{a^2 - x^2 + y^2}{(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2} +$$

$$+ \frac{k}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right)$$

$$X_x - Y_y = -\frac{8ky^2ax}{\pi[(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2]} +$$

$$+ \frac{k}{\pi} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}$$

и так как

$$X_x + Y_y = \Omega = \psi = \frac{k}{\pi} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2},$$

то

$$X_y = \frac{k}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) -$$

$$- \frac{4kay}{\pi} \frac{a^2 - x^2 + y^2}{(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2}.$$

$$X_x = \frac{k}{\pi} \ln \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} - \frac{4kaxy^2}{\pi[(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2]}$$

$$Y_y = \frac{4kaxy^2}{\pi[(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2]}.$$

Направления главных напряжений найдутся по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\Psi = \frac{2X_y}{X_x - Y_y}$$

образуют две системы кривых несколько более сложных чем в предыдущем примере.

Перейдем к другому способу решения той же задачи, более короткому, — способу интегралов, аналогичных интегралу Шварца.

§ 4. Об интегралах аналогичных интегралу Коши и интегралу Шварца.

Интегралом Коши, как известно, называют интеграл, выражающий значение некоторой функции комплексной переменной $f(z)$, голоморфной внутри некоторой замкнутой кривой C , через значения этой функции на контуре

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z')}{z' - z} dz'.$$

Вырабатывая способ решения плоской задачи теории упругости и аналогичных ей задач математической физики, Н. И. Мусхелишвили ввел понятие об интегралах, аналогичных интегралу Коши, как об интегралах вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1 + if_2}{z' - z} dz',$$

где $z = x + iy$ — комплексная переменная, C замкнуты контур, z' — переменная точка на C и f_1, f_2 — две вещественные функции дуги s на контуре.

Интегралом Шварца обыкновенно называют интеграл:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + ia_0, \quad (13)$$

дающий значения функции комплексной переменной внутри окружности, описанной из начала координат как из центра радиуса R , $\varphi(\theta)$ представляют значения веществен-

ной части функции $f(z)$ на обводе окружности, θ — значение центрального угла, а a_0 — вещественная произвольная постоянная.

Обыкновенно это определение распространяют на случай какой угодно кривой, и называют „интегралом Шварца“ интеграл вида:

$$f(z) = \int_C \varphi_c Q d\sigma,$$

дающий значение функции комплексной переменной $f(z)$ по заданным на контуре кривой C значениям φ_c вещественной части функции $f(z)$.

Мы будем обозначать этот интеграл сокращенно через $S\varphi$, т. е. $f(z) = S_C \varphi$ и называть символом Шварца, кроме того мы будем в подынтегральную функцию вставлять и мнимые значения, так что будем писать

$$i S_C \psi = S_C i\psi, \quad S_C \varphi + i\psi = S_C \varphi + i S_C \psi.$$

Символ S обладает следующими свойствами:

$$S_C \varphi = f(z) + a_0 i, \quad S_C -\psi = i f(z) + a_1 i \quad (1)$$

где a_0, a_1 — вещественные постоянные, отсюда следует:

$$S_C \varphi + i\psi = 2f(z) + a_1 + ia_0,$$

$$S_C \varphi - i\psi = -a_1 + ia_0,$$

т. е. если под знаком символа S стоит комплексное выражение, символ определяется до произвольной комплексной постоянной, которую мы иногда будем писать явно на одной буквой C .

Для прямой линии значение голоморфной функции, принимающей на контуре (оси Ox) значения $\varphi(x)$, будет:

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{dx}{x-z} + ia_0.$$

Формула Шварца для полосы, образованной $y = -h$ и $y = h$, дает:

$$f(z) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_+(x_1) + \varphi_-(x_1)] \frac{dx_1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x_1 - z)}{2h}} - \\ - \frac{i}{4h} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_+(x_1) - \varphi_-(x_1)] \frac{dx_1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x_1 - z)}{2h} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{h}}$$

(до мнимой постоянной), где $\varphi_+(x_1)$ — значения вещественной части $f(z)$ на прямой $y = +h$, а $\varphi_-(x_1)$ — значения ее на прямой $y = -h$.

Если $\varphi_+(x_1) = \varphi_-(x_1)$, то мы найдем

$$f(z) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1) \frac{dx_1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x_1 - z)}{2h}}.$$

Эта формула принадлежит Палатини (см. протоколы кружка математиков в Палермо, т. 39, 1915 г., стр. 373, Ф-ла 12).

Если функция $f(z)$ принимает на оси Ox чисто мнимые значения, то значение ее прямо противоположно на одинаковых расстояниях от Oy (аналитическое отражение). Мы имеем тогда

$$\varphi_+(x_1) + \varphi_-(x_1) = 0 \text{ или } \varphi_+(x_1) = -\varphi_-(x_1)$$

и

$$f(z) = \frac{1}{2ih} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1) \frac{dx_1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(x_1 - z)}{2h} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{h}},$$

отсюда, перенеся начало координат в точку $z = -ih$ и заменяя следовательно z на $z + ih$, найдем

$$f(z) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_+(x_1) + \varphi_-(x_1)] \frac{dx_1}{\operatorname{sh} \frac{\pi(x_1 - z)}{2h}} - \\ - \frac{i}{4h} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2h} \int_{-h}^{+h} [\varphi_+(x_1) - \varphi_-(x_1)] \frac{dx_1}{\operatorname{sh} \frac{\pi(x_1 - z)}{2h} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{h}}.$$

Если φ обращается в бесконечности в нуль, то при беспредельном увеличении h

$$\lim_h \frac{\pi(x_1 - z)}{2h} = \frac{\pi(x_1 - z)}{2},$$

и мы найдем выражение для интеграла Шварца на бесконечной прямой линии, взятой за ось Ox и ограничивающей полуплоскость, в виде

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1) \frac{dx_1}{x_1 - z},$$

совпадающее с найденными выше.

§ 5. Решение плоской задачи теории упругости для безграничной прямой при помощи интегралов Шварца.

Переходим теперь к решению задачи о безграничной прямой при помощи интегралов, аналогичных интегралам Шварца.

Во-первых, заметим, что

$$2(Y_y + iX_y) = i[2X_y + i(X_x - Y_y)] + X_x + Y_y.$$

Подставим сюда значение

$$2X_y + i(X_x + Y_y) = -y\Phi'(z) + F(z),$$

мы найдем для всех точек прямой $y=0$

$$2(Y_y + iX_y)_{y=0} = i[F(z)]_{y=0} + \frac{1}{2}[\Phi(z) + \Phi_1(z)]_{y=0} \quad (15)$$

Чтобы определить основные функции $\Phi(z)$ и $F(z)$, возьмем от обеих частей (5) символ Шварца и найдем:

$$\frac{2i}{\pi} \int \frac{(Y_y + iX_y)}{s-z} ds = 2iF(z) + \Phi(z) + C,$$

где C — комплексная произвольная постоянная.

Заменяя в (5) i на $-i$ и применяя ту же операцию, найдем

$$\frac{2i}{\pi} \int \frac{(Y_y - iX_y)}{s-z} ds = \Phi(z) + C,$$

откуда определяются $\Phi(z)$ и $F(z)$, которые совпадут с определенными ранее.

Последнюю формулу можно написать еще в виде:

$$\frac{2}{\pi} \int \frac{X_y + iY_y}{s-z} ds = \Phi(z) + C.$$

§ 6. Решение плоской задачи теории упругости для круга по методу комплексного уравнивания.

Пусть имеем окружность (черт. 28) и в точках ее обвода приложены напряжения R_r и R_θ .

Пусть напряжения эти взаимно уравниваются. Диск, как твердое тело, находится в равновесии. Тогда они должны удовлетворить условиям равновесия:

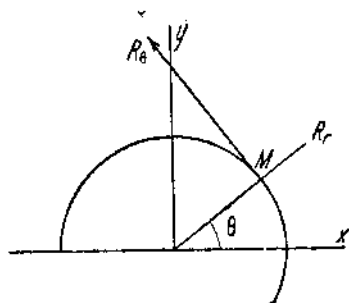
$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum yX - xY = 0,$$

где x, y координаты точек приложения сил, а X, Y проекции этих сил на прямоугольные оси координат. Эти условия примут в данном случае вид

$$\int_0^{2\pi} (R_r \cos \theta - R_\theta \sin \theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (R_r \sin \theta + R_\theta \cos \theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} R_\theta d\theta = 0$$



Черт. 28

Вместо первых двух уравнений можно взять уравнение

$$\int_0^{2\pi} (R_r + i R_\theta) e^{i\theta} d\theta = 0.$$

Заметим для дальнейшего, что если на контуре круга $f(\psi)$ будут значения функции $f(r, \theta)$, удовлетворяющей уравнению

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

на контуре круга и внутри его, конечно, непрерывно и однозначно, то из известной формулы Пуассона вытекает

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi) (R^2 - r^2) d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2}. \quad (17)$$

Сопряженная с этой функцией будет функция

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi) 2r R \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + C^1 \quad (18)$$

Для круга мы имеем по формуле (22) гл. II, § 14

$$\left. \begin{aligned} 2R_\theta r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi \\ (R_r - \Theta_\theta) r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \ln r, \quad R_r + \Theta_\theta = \Omega \\ \varphi + i\psi &= F(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\theta. \end{aligned}$$

Пусть на контуре круга нам задано:

$$R_\theta = f_1(\theta), \quad R_r = f_2(\theta). \quad (20)$$

1) Обе эти формулы получаются, отделяя вещественную часть от мнимой в формуле Шварца для круга (13).

Из первого уравнения (19) на контуре круга мы найдем:

$$2f_1(\theta)R^2 = -\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\right)_{r=R} + (\varphi)_{r=R} = \\ = \left(-\frac{1}{2}R^2\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \varphi\right)_{r=R}.$$

Так как функция

$$-\frac{1}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\Omega + \varphi$$

удовлетворяет (16), то, зная в силу (20) ее значение на контуре круга, мы найдем:

$$-\frac{1}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\Omega + \varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2R^2f_1(\psi)(R^2-r^2)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2}d\psi. \quad (21)$$

Функция

$$-\frac{1}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega + \psi$$

будет очевидно функцией, сопряженной с (21), а, определяя ее по формуле (18), мы найдем:

$$-\frac{1}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega + \psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2R^2f_1(\psi)2Rr\sin(\theta-\psi)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2}d\psi + C. \quad (22)$$

Из второго уравнения (19) мы имеем на контуре $r=R$:

$$[R_r - \Theta_\theta]_{r=R}R^2 = -\frac{1}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega + \psi,$$

и так как

$$R_r + \Theta_\theta = \Omega$$

и в силу (20)

$$(R_r)_{r=R} = f_2(\theta),$$

получим:

$$2f_2(\theta)R^2 = -\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega\right)_{r=R} + R^2(\Omega)_{r=R} + (\psi)_{r=R}$$

и следовательно:

$$\left\{ -\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \Omega r^2 + \psi \right\}_{r=R} = 2f_2(\theta) R^2, \quad (23)$$

а так как функция

$$-\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \Omega r^2 + \psi$$

очевидно удовлетворяет уравнению (16), то, зная в силу (23) ее значения на контуре круга $r=R$, мы найдем по формуле (17)

$$-\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \Omega R^2 + \psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2f_2(\psi) R^2 (R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi,$$

следовательно в силу (22) имеем:

$$\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2f_2(\psi)(R^2 - r^2) - 2Rr \sin(\theta - \psi) f_1(\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi - \frac{C}{R^2}. \quad (24)$$

Далее получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 f_1(\psi)(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + C \\ \psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 f_1(\psi) 2Rr \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + C \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Подставив в (19) вместо φ и ψ выражения (25), а вместо Ω выражение (24) и замечая, что $\Omega = R_r + \Theta_\eta$, мы найдем:

$$\begin{aligned} 2R_\eta r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 f_1(\psi)(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 2R_r r^2 = & -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi + \Omega r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega + \\
 & + \frac{R^2 - r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi) 2Rr \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \\
 & + \frac{r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi) (R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + C \frac{R^2 - r^2}{R^2} \quad (27)
 \end{aligned}$$

Из (27) следует, что если напряжения внутри круга $r = R$ (и следовательно при $r = 0$) мы будем предполагать конечными и непрерывными, то мы должны положить $C = 0$, формулы, решающие нашу задачу, будут:

$$\left. \begin{aligned}
 2R_r r^2 = & \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \\
 & + \frac{R^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi) (R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \\
 2R_r r^2 = & \frac{R^2 - r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega + \\
 & + \frac{R^2 - r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi) 2Rr \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \\
 & + \frac{r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi) (R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \Omega = R_r + \Theta_\theta = \\
 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi) (R^2 - r^2) - 2Rr \sin(\theta - \psi) f_1(\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi. \quad (29)
 \end{aligned}$$

§ 7. Примеры решения плоской задачи для круга в определенных интегралах.

Предположим, что к точкам окружности радиуса R от $\theta=0$ до $\theta=\alpha < \frac{\pi}{2}$ приложено равномерное гидростатическое давление p и такое же давление приложено на противоположную часть окружности от $\theta=\pi$ до $\theta=\pi+\alpha$.

Чтобы решить вопрос об упругом равновесии площади круга, ограничиваемой рассматриваемой окружностью, мы должны положить в формулах предыдущего параграфа: $f_1(\theta)=0$ на всем контуре круга; $f_2(\theta)=p$ для θ от нуля до α и для θ от π до $\pi+\alpha$; $f_2(\theta)=0$ для всех других значений.

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi)(R^2-r^2)d\psi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2} = \\ & = p(R^2-r^2) \left\{ \int_0^\alpha \frac{d\psi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2} + \right. \\ & \quad \left. + \int_\pi^{\pi+\alpha} \frac{d\psi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\psi)+r^2} \right\} = \\ & = 2p \left[\arctg \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\psi-\theta}{2} \right\} + \arctg \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\psi-\theta}{2} \right\} \right]_0^\alpha = \\ & = 2p \left[\arctg \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right\} + \arctg \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \arctg \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right\} + \arctg \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} \right], \end{aligned}$$

найдем по формуле (28) и (29):

$$\begin{aligned} \Omega = R_r + \Theta_r = & \frac{2p}{\pi} \left[\arctg \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right\} + \right. \\ & + \arctg \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} + \arctg \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right\} + \\ & \left. + \arctg \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} \right]; \end{aligned}$$

$$2R_{\theta}r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega$$

$$2R_r r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega + \Omega r^2.$$

При помощи этих формул решается вопрос об упругом равновесии круга.

Если мы предположим, что вместо гидростатического давления p к точкам окружности от $\theta = 0$ до $\theta = \alpha$ и к точкам от $\theta = \pi$ до $\theta = \pi + \alpha$ приложено постоянное тангенциальное напряжение k , т. е. $f_2(\theta) = 0$ на всем контуре круга, а $f_1(\theta) = k$ для $\theta > 0$ и $\theta < \alpha$, и $f_1(\theta) = -k$ для $\theta > \pi$ и $\theta < \pi + \alpha$ и $f_1(\theta) = 0$ для всех прочих значений θ , то, имея в виду, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi) 2rR \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi =$$

$$= k \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{2rR \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi - \int_{\pi}^{\pi + \alpha} \frac{2rR \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \right\} =$$

$$= -k \left[\ln(R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2) - \right.$$

$$\left. - k \left[\ln(R^2 + 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2) = \right. \right.$$

$$= k \ln \frac{P^2 - 4R^2 r^2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) + 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{P^2 - 4R^2 r^2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) - 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

где

$$P = R^2 + r^2.$$

Мы найдем из (28) и (29)

$$\Omega + R_r + \theta_0 =$$

$$= \frac{k}{\pi} \ln \frac{P^2 - 4R^2 r^2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) - 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{P^2 - 4R^2 r^2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) + 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$2R_\theta r^2 = \frac{f^2 - r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \frac{2kR^2}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right\} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right\} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} \right],$$

$$2R_r r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega +$$

$$+ \frac{R^2 - r^2}{\pi} k \ln \frac{P^2 - 4R^2 r^2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) + 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{P^2 - 4R^2 r^2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) - 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Как другой пример, рассмотрим случай, когда гидростатическое давление равно p и приложено кроме части окружности, где

$$0 < \theta < \alpha, \quad \pi < \theta < \pi + \alpha$$

еще в тех точках, где

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \alpha; \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} + \alpha.$$

Имея в виду, что в этом случае

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi) (R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi = \\ = p (R^2 - r^2) \left\{ \int_0^\alpha \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} + \\
 & + \int_{\pi}^{\pi + \alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} + \\
 & + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \psi) + r^2} = \\
 & = 2p \left\{ \int_0^{\alpha} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right\} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right\} + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\alpha} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right\} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right\} = \right. \\
 & = 2p \left[\operatorname{arctg} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right\} + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} + \right. \\
 & \quad + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right\} - \\
 & \quad - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right\} + \\
 & \quad + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right\} + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} + \\
 & \quad + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right\} - \\
 & \quad \left. - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \right].
 \end{aligned}$$

§ мы найдем по формуле (29), а $2R_\theta$ и $2R_r$ — по формуле (28). Точно так же весьма просто может быть рассмотрен случай, когда к частям окружности:

$$0 < \theta < \alpha, \quad \pi < \theta < \pi + \alpha, \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

приложены тангенциальные напряжения постоянной величины.

§ 8. Решение плоской задачи для окружности при помощи интеграла Шварца.

Умножив основное уравнение плоской задачи:

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{iz}{2} \Phi'(z) + F(z)$$

на $e^{2\theta i}$ (r и θ — полярные координаты), мы найдем:

$$\begin{aligned} \{2X_y + i(X_x - Y_y)\} e^{2\theta i} &= 2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta) = \\ &= -\frac{iz}{2} \Phi'(z) e^{2\theta i} + F(z) e^{2\theta i}. \end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$r^2 e^{2\theta i} = z^2,$$

получим

$$2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta) = -\frac{iz}{2} \Phi'(z) + F(z) \frac{z^2}{r^2}; \quad (30)$$

$\Phi(z)$ и $F(z)$ мы предполагаем внутри нашего круга голоморфными, и поэтому $2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)$ представляет на контуре круга $r=R$ значения голоморфной внутри круга функции:

$$-\frac{iz}{2} \Phi'(z) + F(z) \frac{z^2}{R^2},$$

т. е. комплексно уравновешена, а потому, если мы возьмем: $2R_\theta - i(R_r - \Theta_\theta)$, т. е. изменим в (30) i на $-i$, то (14) дает:

$$S[2R_\theta - i(R_r - \Theta_\theta)] = a_0 i - a_1,$$

где a_0, a_1 — вещественные произвольные постоянные.

Переходя теперь к определению неизвестных функций $\Phi(z)$ и $F(z)$, возьмем символ Шварца от обеих частей тождества:

$$2R_0 + i(R_r - \Theta_0) - i(R_r + \Theta_0) = 2(R_0 - iR_r),$$

умноженного на i .

Мы найдем:

$$\Phi(z) = 2S(R_r + iR_0) + C,$$

где C — комплексная постоянная.

Припомним выражение символа Шварца для круга (13), мы найдем формулу

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (R_r + iR_0) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + C,$$

данную нами для определения $\Phi(z)$.

Сразу видно, что выражение для $R_r + \Theta_0 = \Omega$, представляющее вещественную часть $\Phi(z)$, совпадает с данным нами раньше выражением (29).

Для определения $F(z)$ возьмем символ Шварца от обеих частей тождества:

$$i(R_r + \Theta_0) + 2R_0 + i(R_r - \Theta_0) = 2(R_r + iR_0),$$

получающегося из прежнего (примененного для определения $\Phi(z)$) заменой i на $-i$,

$$2SR_0 + iR_r + C = i\Phi(z) + 2F(z) \frac{z^2}{R^2} - iz\Phi'(z),$$

получим формулу:

$$F(z) = \frac{R^2}{z^2} + \frac{iR^2}{2z^2} [z\Phi'(z) - \Phi(z)],$$

из которой определяется $F(z)$.

Мы видим, что это формула совершенно такого же типа, как та, которую мы применяли для решения задачи с прямолинейным контуром.

Таким образом вся трудность задачи заключается в умении вычислить символ Шварца.

§ 9. Решение плоской задачи для кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями.

Возьмем уравнения упругости плоской задачи в полярных координатах r, θ .

$$\left. \begin{aligned} 2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta) &= -\frac{1}{2} i\psi'(z) + \frac{F(z)}{r^2} \\ R\Phi(z) &= \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Задача приводится к определению двух функций $\Phi(z)$, $F(z)$, голоморфных на площади кольца, образованного двумя окружностями $r=R_0$ и $r=R$.

Мы можем представить их в виде рядов Лорана:

$$\Phi(z) = a_0 + \sum a_n z^n + \sum \frac{b_n}{z^n} = a_0 + \sum a_n e^{nz} + \sum b_n e^{-nz},$$

$$F(z) = c_0 + \sum c_n z^n + \sum \frac{d_n}{z^n} = c_0 + \sum c_n e^{nz} + \sum d_n e^{-nz},$$

$$z = \ln z = \ln(x + iy) = \ln r + i\theta,$$

$$a_n = \alpha_n + i\alpha_{1n}, \quad b_n = \beta_n + i\beta_{1n}, \quad c_n = \gamma_n + i\gamma_{1n}, \quad d_n = \delta_n + i\delta_{1n},$$

где $\alpha_n, \alpha_{1n}, \beta_n, \beta_{1n}, \dots$ — вещественные постоянные.

Предположим, что $R_\theta + iR_r$ разложено (для значений на окружности радиуса r) в ряд Фурье:

$$R_\theta + iR_r = A_{0r} + \sum A_{nr} \cos n\theta + \sum B_{nr} \sin n\theta,$$

где

$$A_{0r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta + iR_r) d\theta,$$

$$A_{nr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta + iR_r) \cos n\theta d\theta,$$

$$B_{nr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta + iR_r) \sin n\theta d\theta.$$

Но

$$R_\theta + iR_r = \frac{1}{2} \{2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)\} + \frac{1}{2} (R_r + \Theta_\theta)$$

и на основании ур-ний (31):

$$R_\theta + iR_r = -\frac{1}{4} i\Phi'(\zeta) + \frac{F(\zeta)}{2} + \frac{1}{4} i[\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)].$$

Сравнивая постоянные в разложениях обеих частей, найдем:

$$A_{0r} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta + iR_r) d\theta = \frac{C_0}{2r^2} + \frac{1}{2} i\alpha_0$$

для $r=R_0$ и $r=R$, или

$$\frac{\gamma_0}{2R_0^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R_0} d\theta, \quad \frac{\gamma_0}{2R^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R} d\theta,$$

$$\frac{\gamma_{10}}{2R_0^2} + \frac{1}{2} \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_r)_{r=R_0} d\theta,$$

$$\frac{\gamma_{10}}{2R^2} + \frac{1}{2} \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_r)_{r=R} d\theta.$$

Отсюда следует:

$$\gamma_0 = \frac{R_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R_0} d\theta = \frac{R^2}{\pi} \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R} d\theta,$$

следовательно мы получаем условие:

$$R_0^2 \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R_0} d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R} d\theta,$$

а так как условия статики, если кольцо находится в равновесии, требуют, чтобы,

$$\int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R_0} d\theta = \int_0^{2\pi} (R_\theta)_{r=R} d\theta = 0,$$

мы получаем, что должны быть отдельно соблюдены равенства

$$\int_0^{2\pi} (R_0)_{r=R_0} d\theta = 0^1) \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} (R_0)_{r=R} d\theta = 0.$$

Таким образом мы видим, что не при всяких контурных условиях задача может быть решена в голоморфных функциях при помощи ряда Лорана. Если это возможно, то можно применить, для получения фактического решения, формулу Шварца для кольца. Эту формулу дал Вилла [52] для решения задачи Дирихле в области кольца. Формула имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 H d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2 K d\theta + ia_0,$$

где

$$K = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n (z^n e^{-in\theta} - z^{-n} e^{in\theta})}{1 - q^{2n}},$$

$$H = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta}}{1 - q^{2n}}.$$

Бесконечные суммы, входящие в K и H , могут быть суммированы в эллиптических функциях.

Здесь φ_1 представляют значения гармонической функции на внешнем круге (радиус которого предположен равным единице), а φ_2 — значения ее на внутреннем круге радиуса $q < 1$; применяя эту формулу, мы совершенно так же, как

1) Легко показать, исследуя однозначность перемещений, что для нее главный вектор приложенных к кольцу сил должен для равновесия отдельно равняться нулю на обеих окружностях или, следовательно, условия равновесия должны быть выполнены отдельно для каждой окружности.

при помощи формулы Шварца для круга, найдем для плоской задачи:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(R_r + iR_\theta)_1 d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2(R_r + iR_\theta)_1 H d\theta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (R_r + iR_\theta)_q K d\theta + i\alpha_0,$$

а $F(\zeta)$ определим также как в круге. Здесь

$$(R_r + iR_\theta)_1 \text{ и } (R_r + iR_\theta)_q$$

значения $R_r + iR_\theta$ на соответствующих окружностях.

§ 10. Формула, аналогичная формуле Дини в плоской задаче теории упругости для круга.

Формула Дини дает зависимость между мнимой и вещественной частью некоторой функции комплексной переменной, голоморфной внутри этой окружности, в виде следующего соотношения:

$$\psi(\theta) = b_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta_1) \ln \frac{1}{4 \sin \frac{2\theta_1 - \theta}{2}} d\theta_1.$$

Здесь $\varphi_\theta + i\psi_\theta$ — значения функции комплексной переменной на окружности, а θ и θ_1 — значения центрального угла на ней.

Применим эту формулу к функции

$$2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta),$$

представляющей значения функции комплексной переменной:

$$-\frac{z}{2} iV'(z) + \frac{F(z)}{R^2}$$

на круге радиуса $r = R$.

Найдем:

$$(R_r - \Theta_\theta)_{r=R} = b_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (2R_\theta)_{r=R}}{\partial \theta_1} \ln \frac{1}{4 \sin \frac{\theta_1 - \theta}{2}} d\theta_1.$$

Точно также найдем, применяя формулу Дини к значениям функции комплексной переменной

$$\left(\frac{z}{2} \Phi'(z) + i \frac{F(z)}{R^2} \right) = [2R_\theta i + (\Theta_\theta - R_r)]_{r=R}$$

$$(2R_\theta)_{r=R} = b_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\Theta_\theta - R_r)_{r=R}}{\partial \theta_1} \ln \frac{1}{4 \sin \frac{\theta_1 - \theta}{2}} d\theta_1.$$

Из этих формул следует еще следующая:

$$[(R_r - \Theta_\theta + 2iR_\theta)]_{r=R} = b_0(1+i) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial [2R_\theta + i(\Theta_\theta - R_r)]_{r=R}}{\partial \theta_1} \ln \frac{1}{4 \sin^2 \left(\frac{\theta - \theta_1}{2} \right)} d\theta_1$$

$R_r - \Theta_\theta$ и R_θ величины, с которыми приходится иметь дело в оптическом методе определения напряжений, поэтому эти формулы могут быть там полезны ¹⁾.

§ 11. Простейшие случаи плоской задачи для окружности. Определение напряжений в однородной плоской растянутой среде, ослабленной круговым отверстием. Формулы Кирша.

Остановимся сначала на исторической задаче о равновесии упругой полосы, ослабленной круговым отверстием.

Приняв за начало координат центр отверстия, формулируем задачу следующим образом: найти такое плоское рас-

¹⁾ В задаче Дирихле для круга.

распределение напряжений (X_r, Y_r, X_y) , которое в бесконечности обращалось бы в однородно напряженное:

$$X_y = 0, \quad Y_y - X_x = 2q, \quad X_x + Y_y = 2p \quad (32)$$

так что оси x, y, z совпадают с главными напряжениями), на обводе отверстия круга, описанного из начала координат радиусом R , как касательное, так и нормальное напряжения обращались бы в нуль. Как частные случаи получаются:

1) при $p = q$ — однородно растянутое поле по оси Oy

$$X_x = 0, \quad Y_y = 2p;$$

2) при $p = -q$ — однородно растянутое поле по оси Ox

$$X_x = 2p, \quad Y_y = 0;$$

3) при $q = 0$ — однородно растянутое поле с силой p по всем направлениям

$$X_x = Y_y = p;$$

4) при $p = 0$ — однородно сдвинутое поле

$$X_x = -q, \quad Y_y = q.$$

Сначала будем искать такое распределение напряжений, которое получается из выше формулированного, если к нему прибавить однородно напряженное поле, напряжения которого прямо противоположны напряжениям (32), так что напряжения в бесконечности равны нулю, а на контуре отверстия:

$$2(R_\theta + iR_r) = 2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta) + i(R_r + \Theta_\theta) = \\ = [2X_y + i(X_x - Y_y)] e^{i\theta} + i(X_x + Y_y) = -2pi + 2qie^{2i\theta}. \quad (33)$$

Здесь $R_r, R_\theta, \Theta_\theta$ проекции на оси полярных координат, удовлетворяющие уравнениям плоской задачи в полярных координатах

$$r^2 [2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)] = -\frac{1}{2} r^2 i \Phi'(\zeta) + F(\zeta).$$

Первый способ решения (гармонической компенсации)

$$[2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)]_{r=R} = \left\{ -\frac{1}{2} i \Phi'(\zeta) + \frac{F(\zeta)}{r^2} \right\}_{r=R},$$

т. е. при $r=R$ значения этого выражения совпадают со значениями функции комплексной переменной

$$-\frac{1}{2} i\Phi'(\zeta) + \frac{F(\zeta)}{R^2},$$

голоморфной во всех точках вне окружности (отверстия), а так как вещественная ее часть принимает значения на окружности, равные

$$(R_p)_{r=R} = -2q \sin \theta,$$

то эта функция будет:

$$-2qie^{-2\tau} R^2 + Ci,$$

следовательно по (33):

$$(R_r + \Theta_\theta)_{r=R} = -2p + 4q \cos \theta - C.$$

Поэтому

$$\Phi(\zeta) = 4qe^{-2\tau} R^2 - 2p - C.$$

Но $\Phi(\zeta)$ голоморфна на всей плоскости вне отверстия (круга) и в бесконечности равна нулю, а следовательно $C = -2p$, так что $2p + C = 0$ и:

$$R_r + \Theta_\theta = R\Phi(\zeta) = \frac{4qR^2 \cos 2\theta}{r^2},$$

а так как

$$-\frac{1}{2} i\Phi'(\zeta) + \frac{F(\zeta)}{R^2} = -2qie^{-2\tau} R^2 + Ci,$$

то

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= R^2 Ci - 2qiR^4 e^{-2\tau} - \frac{1}{2} i8qe^{-2\tau} R^4 = \\ &= -2R^2 ip - 6qR^4 ie^{-2\tau}. \end{aligned}$$

Чтобы получить распределение напряжений, соответствующие (32), очевидно к $\Phi(\zeta)$ надо прибавить $2p$, а к $F(\zeta)$ прибавить $2ipe^{2\tau}$, и мы найдем для (32):

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= 2p + 4qe^{-2\tau} R^2 \\ F(\zeta) &= 2i(-Rp^2 - 3qR^4 e^{-2\tau} - pe^{2\tau}). \end{aligned}$$

Для случая $p = -q$ (растяжение по оси Ox ; случай, рассмотренный Киршем) мы найдем:

$$2R_\theta r^2 = 2p \sin \theta \left(\frac{3R^4}{r^2} - r^2 - 2R^2 \right)$$

$$(R_r - \Theta_\theta) r^2 = 2p \left(-2R^2 \cos 2\theta + r^2 \cos 2\theta + \frac{3R^4}{r^2} \cos 2\theta - R^2 \right)$$

$$2R_r r^2 = (R_r - \Theta_\theta) r^2 + (R_r + \Theta_\theta) r^2 =$$

$$= 2p (r^2 - R^2) \left(1 + \frac{r^2 - 3R^2}{r^2} \cos 2\theta \right).$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} 2X_y + i(X_x - Y_y) &= e^{-2\theta i} [2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)] = \\ &= e^{-2\theta i} \left(-\frac{i}{2} \Phi'(\zeta) + \frac{F(\zeta)}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно найдем:

$$2X_y = 2p \left\{ \frac{3R^2 - 2r^2}{r^4} R^2 \sin 4\theta - \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta \right\}$$

$$X_x - Y_y = 2p \left\{ \frac{3R^2 - 2r^2}{r^4} R^2 \cos 4\theta - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + 1 \right\}$$

$$2X_x = 2p \left\{ 1 - \frac{3R^2 \cos 2\theta}{2r^2} + \frac{3R^2 - 2r^2}{2r^4} R^2 \cos 4\theta \right\}$$

$$2Y_y = 2p \left\{ -\frac{R^2 \cos 2\theta}{2r^2} - \frac{3R^2 - 2r^2}{2r^4} R^2 \cos 4\theta \right\}$$

и получаем формулы Кирша:

$$X_x = 2p - \frac{6R^2 p (x^2 - y^2)}{2r^4} - \frac{2R^2 p (2r^2 - 3R^2) (r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8}$$

$$Y_y = -2p \frac{R^2 (x^2 - y^2)}{2r^4} + 2p \frac{R^2 (2r^2 - 3R^2) (r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8}$$

$$X_y = -2p \frac{R^2 xy}{r^4} - \frac{4p R^2 (2r^2 - 3R^2) (x^2 - y^2) xy}{r^8}.$$

§ 12. Решение предыдущей задачи при условии существования „предельного“ круга, концентрического отверстию, за пределами которого влияние отверстия незаметно.

Имея в виду, что влияние отверстия не может простираться далеко, а тем более до бесконечности, поставим себе целью найти такое распределение напряжений в полосе, ослабленной отверстием, при котором напряжения сливаются с однородно растянутым полем не в бесконечности, а на круге радиуса $r = R_0$.

Следуя обозначениям и приемам предыдущего параграфа, введем две функции комплексной переменной, основные для данной задачи, $\Phi(\zeta)$ и $F(\zeta)$ и полярные координаты r, θ . Напряжения пусть будут: $R_r, \Theta_\theta, R_\theta$, тогда основные уравнения дают:

$$r^2 [2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)] = -\frac{1}{2} r^2 i \Phi'(\zeta) + F(\zeta),$$

$$R_r + \Theta_\theta = R[\Phi(\zeta)],$$

так что

$$R_\theta + iR_r = -\frac{1}{4} i \Phi'(\zeta) + \frac{F(\zeta)}{2r^2} + \frac{1}{2} R[\Phi(\zeta)].$$

Мы кроме того предположим, что на окружности отверстия радиуса R мы имеем условие

$$R_\theta + iR_r = 0 \text{ при } r = R,$$

а на окружности предельного круга $r = R_0$ условие:

$$R_\theta + iR_r = i(p - qe^{2\theta i}).$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, положим:

$$\Phi(\zeta) = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} + \alpha r^2 e^{2\theta i} + \frac{\beta}{r^2} \frac{e^{-2\theta i}}{r^2} + i\alpha_0,$$

$$F(\zeta) = -\frac{2pR^2 i}{1-\varepsilon^2} + i\gamma r^2 e^{2\theta i} + i\delta \frac{e^{-2\theta i}}{r^2},$$

где $\varepsilon = \frac{R_0}{R}$, так что

$$R[\Phi(\zeta)] = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left(\alpha r^2 + \frac{\beta}{r^2} \right) (e^{2\theta i} + e^{-2\theta i})$$

$$\Phi'(\zeta) = 2 \left(\alpha r^2 e^{2\theta i} - \frac{\beta}{r^2} e^{-2\theta i} \right).$$

Обозначив

$$z = re^{i\varphi} = x + iy,$$

найдем:

$$-\frac{1}{4} i W'(\zeta) = -\frac{1}{2} i \left(\alpha z^2 - \frac{\beta}{z^2} \right),$$

$$\frac{F(\zeta)}{2r^2} = -\frac{pR^2 i}{(1-\varepsilon^2)r^2} + \frac{i\gamma}{2r^2} z^2 + \frac{\delta i}{2r^2 z^2},$$

$$\frac{i}{2} R [W(\zeta)] = \frac{ip}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{4} i \left(\alpha z^2 + \frac{\beta}{z^2} + \frac{\alpha r^4}{z^2} + \frac{\beta}{r^2} \right).$$

Из условий на контурах $r=R$ и $r=R_0$, условия

$$\left[-\frac{pR^2 i}{(1-\varepsilon^2)r^2} + \frac{pi}{1-\varepsilon^2} \right]_{r=R} = 0,$$

$$\left[-\frac{pR^2 i}{(1-\varepsilon^2)r^2} + \frac{pi}{1-\varepsilon^2} \right]_{r=R_0} = ip$$

очевидно выполнены, а условия:

$$\left\{ -\frac{1}{2} i\alpha + \frac{i\gamma}{2r^2} + \frac{1}{4} i \left(\alpha + \frac{\beta}{r^4} \right) \right\}_{r=R} = 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{2} i\beta + \frac{\delta i}{2r^2} + \frac{1}{4} i \left(\beta + \alpha r^4 \right) \right\}_{r=R} = 0,$$

$$\left\{ -\frac{1}{2} i\alpha + \frac{i\gamma}{2r^2} + \frac{1}{4} i \left(\alpha + \frac{\beta}{r^4} \right) \right\}_{r=R_0} = -\frac{qi}{R_0^2},$$

$$\left\{ \frac{1}{2} i\beta + \frac{\delta i}{2r^2} + \frac{1}{4} i \left(\beta + \alpha r^4 \right) \right\}_{r=R_0} = 0$$

дают четыре уравнения:

$$-\frac{1}{4} \alpha + \frac{\gamma}{2R^2} + \frac{1}{4} \frac{\beta}{R^4} = 0,$$

$$\frac{3}{4} \beta + \frac{\delta}{2R^2} + \frac{1}{4} \alpha R^4 = 0,$$

$$-\frac{1}{4} \alpha + \frac{\gamma}{2R_0^2} + \frac{1}{4} \frac{\beta}{R_0^4} = -\frac{q}{R_0^2},$$

$$\frac{3}{4} \beta + \frac{\delta}{2R_0^2} + \frac{1}{4} \alpha R_0^4 = 0,$$

откуда следует:

$$\gamma = \frac{1}{2} R^2 \alpha - \frac{\beta}{2R^2} = \frac{1}{2} \alpha R_0^2 - \frac{\beta}{2R_0^2} - 2q,$$

$$\delta = -\frac{\alpha}{2} R^6 - \frac{3}{2} \beta R^2 = -\frac{\alpha}{2} R_0^6 - \frac{3}{2} \beta R_0^2$$

Отсюда получаются два уравнения для определения α и β

$$\frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \beta = 2q$$

$$\frac{1}{2} (R^6 - R_0^6) \alpha + \frac{3}{2} (R^2 - R_0^2) \beta = 0,$$

из которых

$$\alpha = \frac{-12q R^2 R_0^2}{(R^2 - R_0^2)^3} = -\frac{12q \varepsilon^2}{R_0^2 (1 - \varepsilon^2)^3}$$

$$\beta = -\frac{4q R^2 R_0^2}{(R^2 - R_0^2)^3} (R^4 + R^2 R_0^2 + R_0^4) = -\frac{4q R^2}{(\varepsilon^2 - 1)^3} (1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4),$$

а следовательно

$$\gamma = \frac{2q (4\varepsilon^4 + 1 - \varepsilon^2 - 1)}{(1 - \varepsilon^2)^3}$$

$$\delta = -\frac{(1 + \varepsilon^2)^2}{(1 - \varepsilon^2)^3} 6q R^4,$$

и мы найдем:

$$\Phi(\zeta) = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} + \frac{12q \varepsilon^2}{R_0 (1 - \varepsilon^2)^3} e^{2\zeta} + \frac{4q R_0^{2-2\zeta} (1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4)}{(1 - \varepsilon^2)^3} + \alpha_0 i$$

$$F(\zeta) = -\frac{2p R_0^2}{1 - \varepsilon^2} - \frac{2qi}{(1 - \varepsilon^2)^3} - \frac{6qi (1 + \varepsilon^2) R^4}{(1 - \varepsilon^2)^3} e^{-2\zeta}.$$

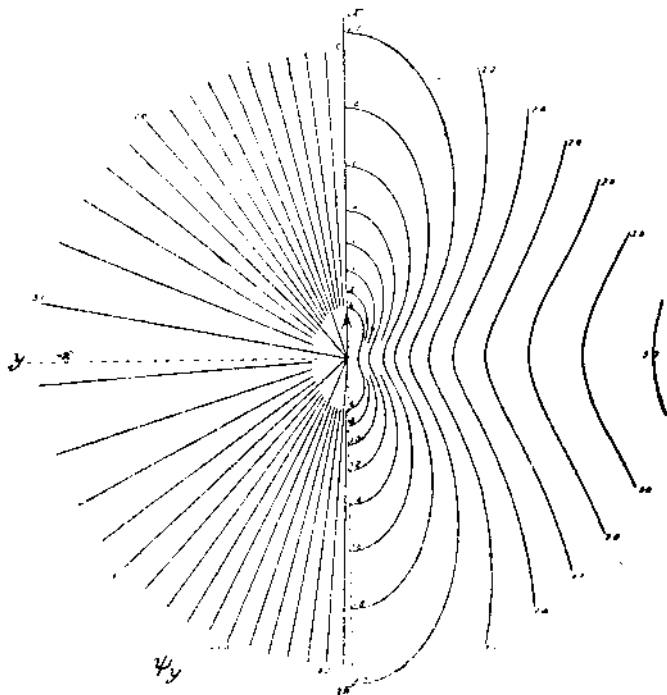
В частном случае: $\varepsilon = 0$, $p = -q$, $R_0 \rightarrow \infty$ мы получаем формулы Кирша:

$$\Phi(\zeta) = 2p - 4p R^2 e^{-2\zeta} + i\alpha$$

$$F(\zeta) = -2pi (R^2 + e^{2\zeta} + 3R^4 e^{-2\zeta}).$$

§ 13. Примеры равновесия кругового диска под влиянием внешних приложенных сил и развивающихся при этом напряжений.

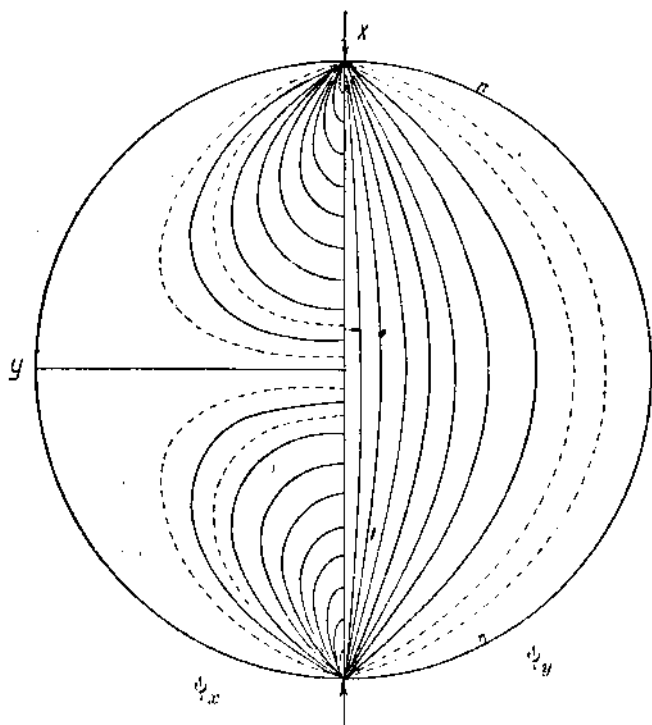
Умея решать задачу о равновесии кругового диска под влиянием внешних сил, приложенных к его обводу, мы мо-



Черт. 29.

жем, зная распределение усилий, развивающихся под влиянием отдельной силы (см. конец § 9) и отдельного момента, легко находить распределение усилий, развивающихся в диске под влиянием отдельных внешних сил и отдельно приложенных моментов. Для этого нужно к тем напряжениям, которые развиваются под влиянием сил и моментов, прибавить по обводу окружности (диска) такие усилия, чтобы были аннулированы на контуре диска на-

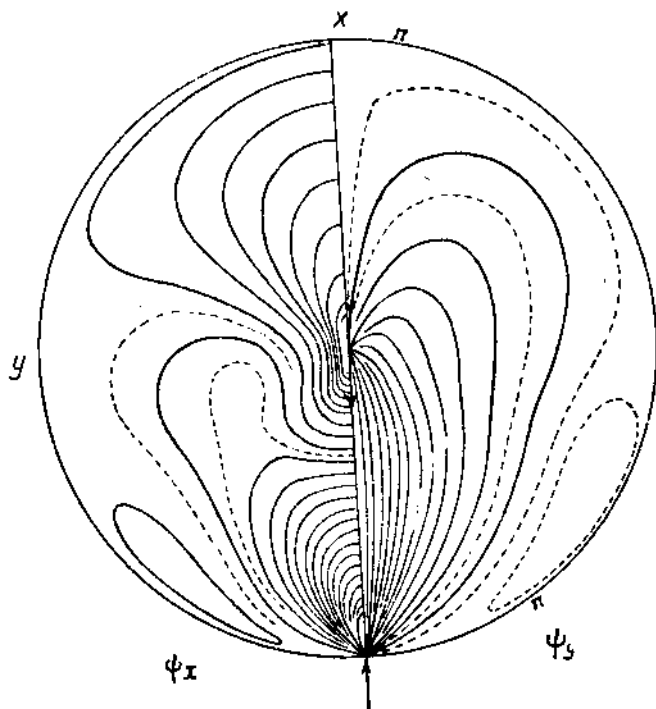
пряжения отдельных сил и моментов, что приводит к простой задаче о равновесии диска под влиянием сил, приложенных по его обводу. Для геометрической интерпретации получаемых напряжений лучше всего (как это делает Митчелль, из мемуара которого мы заимствуем эти примеры)



Черт. 30.

ввести вспомогательные функции ψ_x , ψ_y , как это было сделано при исследовании напряжений, развивающихся при действии отдельной силы (черт. 26 и 29). Ось x -ов мы будем везде брать в направлении одной из действующих сил. ρ и ϑ — полярные координаты точек приложения сил по отношению центра диска как полюса, r и η — тоже по отношению к точкам приложения сил как полюсам (если их две — они отмечены значками внизу).

Вследствие симметрии диаграмм на одном и том же чертеже указаны диаграммы ψ_x и ψ_y , кроме черт. 32, где помещены под буквами а) и б) полные диаграммы. На черт. (30) представлены напряжения, развивающиеся в катке



Черт. 31.

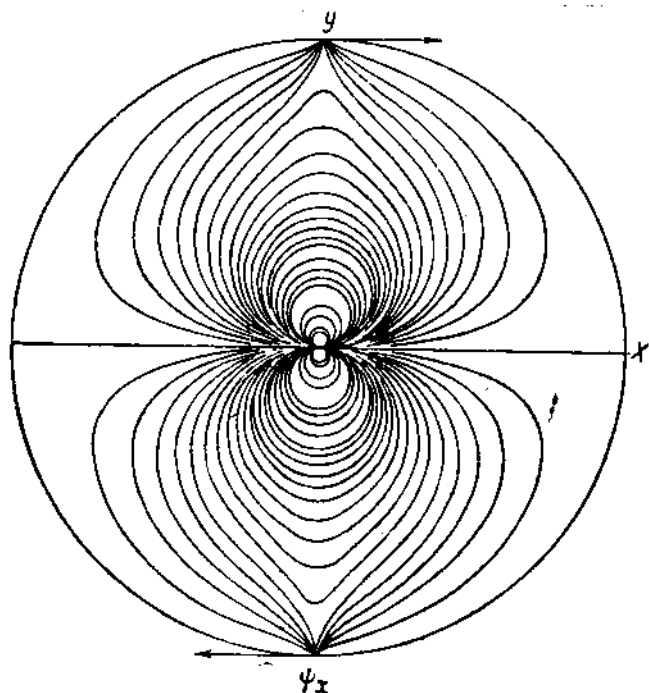
под влиянием двух одинаковых сил, направленных по его диаметру. Мы имеем в этом случае напряжения

$$\psi_x = \frac{F}{2\pi} (1 - \cos 2\theta_2) - \frac{F}{2\pi} (1 - \cos 2\theta_1) + \frac{F}{\pi R} \rho \cos \theta,$$

$$\psi_y = -\frac{F}{2\pi} (2\theta_2 + \sin 2\theta_2) + \frac{F}{2\pi} (2\theta_1 + \sin 2\theta_1) + \frac{F}{\pi R} \rho \sin \theta.$$

На черт. 31 представлены напряжения в дисковом колесе (нагрузка в центре, реакция точек опор — вниз).

$$\begin{aligned}\psi_x &= \frac{F}{2\pi} (1 - \cos 2\theta) - \frac{F}{4\pi} (1 - \cos 2\theta) - \frac{3F}{32\pi} (2 \ln \rho + \\ &+ 1 + \cos 2\theta) - \frac{5F}{32\pi R^2} \rho^2 (2 + \cos 2\theta) + \frac{F}{2\pi R} \rho \cos \theta \\ \psi_y &= -\frac{F}{2\pi} (2\theta + \sin 2\theta) + \frac{F}{4\pi} (2\theta + \sin 2\theta) - \frac{3F}{32\pi} \sin 2\theta - \\ &- \frac{5F}{32\pi R^2} \rho^2 \sin 2\theta + \frac{F}{2\pi R} \rho \sin \theta.\end{aligned}$$

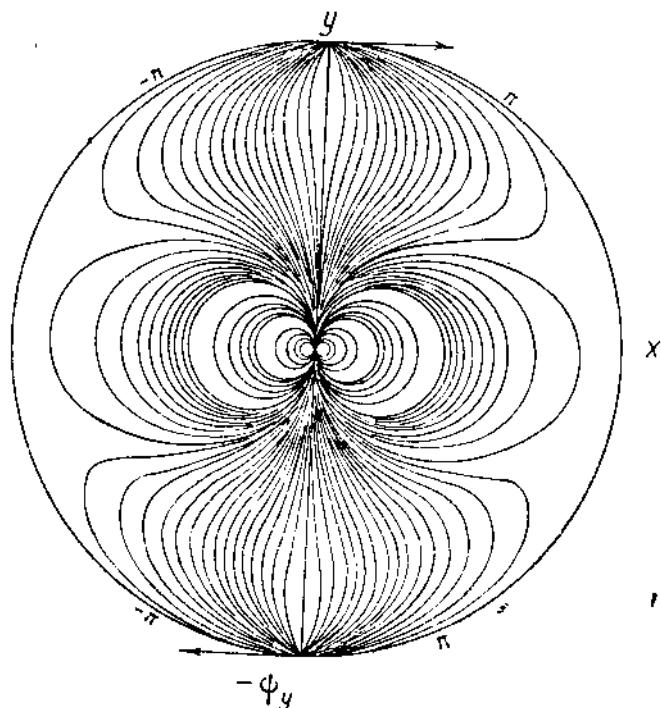


Черт. 32.

Наконец на черт. 32 а) и б) представлены напряжения, развивающиеся в скрученных дисках (две тангенциальные силы уравновешены парой в центре)

$$\psi_x = -\frac{F}{2\pi} (1 - \cos 2\theta_1) - \frac{F}{2\pi} (1 - \cos 2\theta_2) + \frac{FR}{\pi} \frac{\sin \theta_1}{\rho}$$

$$\psi_y = -\frac{F}{2\pi} (2\theta_1 + \sin 2\theta_1) + \frac{F}{2\pi} (2\theta_2 + \sin 2\theta_2) - \frac{FR}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{\rho}$$



Черт. 32-б.

§ 14. Плоская задача для криволинейного контура.

Для решения плоской задачи (внешней или внутренней) для криволинейного контура мы, во-первых, применим принцип комплексного уравнивания, как это делалось для

прямолинейного (см. § 5) и кругового контура (см. § 8). Существенным пунктом являлась при этом замена переменной $x - iy$ на контуре через $x + iy$. Эта замена особенно просто (автоматически) делается на прямолинейном контуре, потому что можно всегда прямую (контур) предполагать параллельной одной из осей координат, например оси Oy ; пусть для нее $x = a$ и мы имеем на контуре:

$$(x - iy)_{x=a} = 2a - (x + iy)_{x=a}.$$

Точно также для круга, имеющего центр в начале координат, радиуса R мы найдем на контуре соотношение:

$$(x + iy)(x - iy) = R^2,$$

т. е. $x - iy = \frac{R^2}{x + iy}$, и при его помощи мы можем на контуре круга $x - iy$ заменить через $x + iy$.

Этот же способ применим, но не всегда удобен и в случае какого угодно контура, вводя в его уравнение

$$f(x, y) = 0$$

вместо переменных x, y комплексные переменные:

$$z = x + iy \text{ и } z_1 = x - iy$$

(комплексное преобразование).

Решив полученное уравнение, связывающее z и z_1 на контуре, относительно z_1 , мы при помощи этого решения можем исключить z_1 из всякого выражения, представленного на контуре через z и z_1 , и формально достигнуть комплексного уравнивания этого выражения на контуре.

Впрочем особенно удобно его производить в случае криволинейного контура, если криволинейные координаты мы возьмем такие, что $\xi = \alpha$ будет уравнением нашего контура (α — постоянная, которую можно предположить равной нулю), пусть кроме того $z = x + iy = \omega(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда

$$(\xi - i\eta)_{\xi=\alpha} = 2\alpha - (\xi + i\eta)_{\xi=\alpha}.$$

Координаты ξ, η носят название сопряженных или изотермических (изокоординат); применение их и исследование конечности и непрерывности областей новых переменных составляет теорию так называемого конформного отобра-

жения области переменных x, y в область ξ, η (см. гл. II, § 7) ¹⁾.

Непосредственное преобразование дает (см. гл. II, § 12) уравнения плоской задачи в виде

$$\frac{2\xi_{\eta} + i(\xi_{\xi} - \eta_{\eta})}{h^2} = -\frac{i}{2} \omega_1(\zeta_1) \omega'(\zeta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta),$$

где $\Phi(\zeta)$ и $F(\zeta)$ — голоморфные функции от x и y .

Кроме того мы имеем

$$\xi_{\xi} + \eta_{\eta} = \frac{1}{2} \{\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)\}$$

$$\frac{1}{h^2} = \omega'(\zeta) \omega'_1(\zeta_1),$$

так что

$$2\xi_{\eta} + i(\xi_{\xi} - \eta_{\eta}) = -\frac{i}{2} \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)} \Phi'(\zeta) + F(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta) \omega'_1(\zeta_1)}. \quad (34)$$

Предположим, что правую часть этого равенства нам удалось на контуре комплексно уравновесить, для чего необходимо и достаточно комплексно уравновесить лишь выражения

$$\frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)}, \quad \frac{1}{\omega'(\zeta) \omega'_1(\zeta_1)},$$

из формулы (34) следует (заменой i на $-i$)

$$2\xi_{\eta} - i(\xi_{\xi} - \eta_{\eta}) = \frac{i}{2} \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'_1(\zeta_1) + F_1(\zeta_1) \frac{1}{\omega'(\zeta) \omega'_1(\zeta_1)} \quad (34a)$$

и это выражение будет комплексно уравновешено в ζ_1 .

В дальнейшем мы будем также пользоваться символом Шварца, введенным в § 4, и его основными свойствами

$$Sf(\zeta) = 2f(\zeta) + a_1 + ia_0, \quad Sf_1(\zeta_1) = -a_1 + ia_0,$$

где a_1 и a_0 — вещественные произвольные постоянные.

¹⁾ См. напр. Привалов. Введение в теорию функций комплексной переменной, 1927 г.

Если значение символа S для данного контура в принятой системе координат неизвестно, можно всегда найти

$$S A + iB,$$

отделив в нем вещественную часть от мнимой и вычислив отдельно SA и SB , решив две задачи Дирихле. Наконец, в некоторых случаях, как мы это увидим на примерах, мы можем символ вычислить и непосредственно.

Мы уже знаем, что простейшим случаем будет случай, когда контур совпадает с одной из координатных линий, напр. уравнение его $\xi = \alpha$ или (так как всегда можно предполагать $\alpha = 0$) $\xi = 0$. Другой простой случай будет, когда уравнение контура

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{const} = c^2.$$

Мы найдем формально уравновешенное (34), если заметим, что из уравнений контура следует

$$\zeta_1 = 2\alpha - \zeta \quad \text{при} \quad \xi = \alpha$$

в первом случае и

$$\zeta_1 = \frac{c^2}{\zeta} \quad \text{при} \quad \xi^2 + \eta^2 = c^2$$

(т. е. на контуре) во втором.

Если мы предположим, что правую часть (34) нам удалось таким образом комплексно уравновесить, а следовательно при $\zeta_1 = 2\alpha - \zeta$:

$$2\Xi_\eta + i(\Xi_\xi - \Upsilon_\eta) = -\frac{i}{2} \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)} \Phi'(\zeta) + F(\zeta) \frac{1}{\omega(\zeta) \omega'_1(\zeta_1)}$$

будет комплексно уравновешено в ζ , то одновременно будет комплексно уравновешено в ζ_1 (т. е. представляет голоморфную функцию от ζ , в которой вместо i поставлено $-i$) (выражение в правой части (34a))

$$\frac{i}{2} \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'_1(\zeta_1) + F_1(\zeta_1) - \frac{1}{\omega(\zeta) \omega'_1(\zeta_1)}.$$

Прибавляя к правым частям (34)

$$i(\Xi_{\xi} + i\Upsilon_{\eta}) = \frac{i}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

к (34a)

$$-i(\Xi_{\xi} - i\Upsilon_{\eta}) = -\frac{i}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

мы найдем вместо (34) и (34a) уравнения:

$$2(\Xi_{\eta} + i\Xi_{\xi}) = -\frac{i}{2} \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)} \Phi'(\zeta) + F(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta)\omega'_1(\zeta_1)} + \\ + \frac{i}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)]$$

$$2(\Xi_{\xi} - i\Xi_{\eta}) = \frac{i}{2} \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta_1) + F_1(\zeta_1) \frac{1}{\omega'(\zeta)\omega'_1(\zeta_1)} - \\ - \frac{i}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)].$$

Умножая обе части второго из этих равенств на i и взяв от обеих частей символ, мы найдем:

$$\Phi(\zeta) = 2S \Xi_{\xi} + i\Xi_{\eta}. \quad (34b)$$

Точно также, умножая на $-i$ первое из них, мы найдем:

$$2(\Xi_{\xi} - i\Xi_{\eta}) = -\frac{1}{2} \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega'_1(\zeta_1)} \Phi'(\zeta) - iF(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta)\omega'_1(\zeta_1)} + \\ + \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)].$$

Взяв S от обеих частей последнего равенства, получим

$$2iF(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta)\omega'_1(2x-\zeta)} = -\frac{\omega_1(2x-\zeta)}{\omega'_1(2x-\zeta)} \Phi'(\zeta) + \\ + \Phi(\zeta) - 2S(\Xi_{\xi} - i\Xi_{\eta}).$$

Это выражение может быть также написано в виде:

$$2F(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta)\omega'_1(2x-\zeta)} = i \frac{\omega_1(2x-\zeta)}{\omega'_1(2x-\zeta)} \Phi'(\zeta) + 4S \Xi_{\eta}$$

которым мы будем пользоваться в примерах.

Примечание I. Формула Шварца для контура $\xi = \alpha$ может быть взята в виде

$$S f(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s) ds}{\xi - \alpha - is},$$

где $f(\eta)$ значения функции под знаком S , так как вещественная часть этого интеграла будет

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s) (\xi - \alpha) ds}{(s - \eta)^2 + (\xi - \alpha)^2}$$

и если она окажется внутри или вне контура конечной и непрерывной, то приняв за новую переменную

$$t = \frac{s - \eta}{\xi - \alpha},$$

так что $dt = \frac{ds}{\xi - \alpha}$, на контуре $\xi = \alpha$ мы приведем этот интеграл к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\eta) dt}{1 + t^2} = \frac{f(\eta)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = f(\eta).$$

Мнимая часть функции $\Phi(\zeta)$ будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s) (s - \eta) ds}{(s - \eta)^2 + (\xi - \alpha)^2}.$$

Примечание II. Комплексное уравновешивание величин $\frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)}$

и $\frac{1}{\omega_1'(\zeta_1) \omega_1'(\zeta_1)}$ отчасти связано с требованием конформности отображения $z = \omega(\zeta)$, так как в этом случае $\omega'(\zeta)$ должно быть не равно нулю, но не всегда эти условия совпадают. В дальнейшем мы будем главным образом останавливаться на случае

$$\omega(\zeta) = \sum_n a_n e^{n\zeta} = \sum_m b_m e^{m\zeta},$$

где n и m целые, $a_n, b_m \dots$ постоянные. К этому виду приводится всякая рациональная функция от целых степеней e^ζ . С другой стороны, мы знаем, что отображение $z = e^\zeta$ приводит к отображению на круг кривых $\alpha = \text{const}$, т. е. этот контур отображается кругом $x^2 + y^2 = e^{2\alpha}$ на

руг при помощи рациональных функций. В этом случае, как показал И. Мусхелишвили, всегда можно решить плоскую задачу при помощи интегралов типа Коши, но задача может быть решена и другим методом. Нужно только, чтобы $\omega(\zeta)$ удовлетворяло условиям конформности и в частности условию $\omega'(\zeta) \neq 0$, и следовательно $\omega'(\zeta)$, выраженное через z , не имело полюсов в отображаемой области. Остается лишь исследовать точки $\zeta = \infty$.

Мы будем в дальнейшем пользоваться выражениями:

$$\omega(\zeta) = e^{\zeta}$$

$$\omega(\zeta) = e^{\zeta} + ke^{n\zeta}$$

$$\omega(\zeta) = e^{\zeta} + ke^{-n\zeta}$$

$$\omega(\zeta) = 1 + \frac{e^{\zeta}}{ae^{-2\zeta}}, \quad \omega(\zeta) = 1 + \frac{e^{\zeta}}{ae^{2\zeta}}$$

Метод наш относится и к более сложным случаям, когда преобразование на круг делается более сложно.

Интересен еще случай:

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\sqrt{c}}{2k} \int \frac{dz}{\sqrt{z(z-c)\left(z - \frac{c}{k^2}\right)}}$$

$$z = \omega(\zeta) = c \operatorname{sn}^2 \zeta, \quad \omega'(\zeta) = 2c \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta.$$

Кривые $\xi = \alpha$ представляют здесь систему овалов Декарта.

Систему таких же овалов представляют и кривые: $\eta = \text{const.}$

Если

$$z = \omega(\zeta) = \sum (a_n - ib_n) e^{n\zeta},$$

где a_n, b_n — вещественные постоянные. Кривые $x = \sum a_n e^{n\zeta} \cos n\eta + b_n e^{n\zeta} \sin n\eta$, $y = \sum a_n e^{n\zeta} \sin n\eta - b_n e^{n\zeta} \cos n\eta$ при $\zeta = \alpha$ представляют кривые, конформно преобразующиеся на круг при помощи целых функций.

§ 15. Примеры распределения напряжений для криволинейного контура.

Возьмем распределение напряжений, вносимых отверстиями в однородно по некоторому направлению растянутую (или сжатую) область, а также в области однородно растянутые (или сжатые) по всем направлениям или однородно сдвинутые, — т. е. задачу для криволинейного отверстия аналогичную задаче Кирша для кругового отверстия (см. § 11), но вместо 2ρ здесь возьмем p ; напряжения в ∞ считаем сначала $= 0$.

1. Пусть $\xi = \alpha$ будет уравнение отверстия. Легко непосредственно проверить, что контурные условия будут:

$$2(\Xi_{\xi} + i\Xi_{\eta}) = -p \left(1 + \frac{\omega'_1(\zeta_1)}{\omega'(\zeta)} e^{-2\alpha i} \right) \quad (35)$$

для случая напряжения p , однородно приложенного по некоторому направлению, α угол, образованный этим направлением с осью Ox ; для случая однородного растяжения по всем направлениям и для случая однородного сдвига надо вместо $pe^{-2\alpha i}$ во втором члене правой части положить $q=0$ для растяжения и $p=0$ для сдвига.

Таким образом для случая растяжения, применяя формулу (35) к случаю кругового отверстия, найдем:

$$\omega(\zeta) = e^{\zeta}, \quad \zeta = \xi + i\eta = \ln r + i\theta, \quad h = \frac{1}{r}, \quad \xi = \alpha = \ln r,$$

так что

$$e^{\alpha} = R.$$

Тогда

$$\Phi(\zeta) = S - p - pe^{-2\alpha i} + \text{const} = -2pR^2 e^{-2\zeta}.$$

Напряжения в ∞ мы считаем равными нулю и следовательно const надо считать равным нулю; мы найдем полное решение в виде:

$$\Phi(\zeta) = p - 2pR^2 e^{-2\zeta}.$$

2. Случай эллиптического отверстия. Пусть

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = c \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2},$$

т. е.

$$x = c \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} \cos \eta, \quad y = c \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \sin \eta,$$

отсюда кривые $\xi = \alpha$ будут эллипсы:

$$\frac{x^2}{c^2 \left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \right)^2} + \frac{y^2}{c^2 \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \right)^2} = 1,$$

кривые $\gamma = \beta$ гиперболы:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1.$$

Основная формула дает нам:

$$\Phi(\zeta) = S - \rho - p \frac{e^{2\alpha} - e^{2\gamma i}}{e^{2\alpha + 2\gamma i} - 1} e^{-2\gamma i},$$

заметив, что

$$S \frac{e^{2\gamma i}}{e^{2\alpha + 2\gamma i} - 1} = S \frac{e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - e^{2\alpha - 2\gamma i}} = S \frac{e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - e^{2\gamma i}} = 0,$$

мы очевидно найдем:

$$\Phi(\zeta) = 2p \frac{1 - e^{2\alpha - 2\gamma i}}{e^{2\gamma i} - 1}.$$

Чтобы найти функцию $F(\zeta)$, заметим, что

$$2F(\zeta) \frac{1}{\omega'(\zeta) \omega'(2\alpha - \zeta)} = i \frac{\omega_1(2\alpha - \zeta)}{\omega_1'(2\alpha - \zeta)} \Phi'(\zeta) - 4 S E_{\gamma},$$

а так как

$$\omega(2\alpha - \zeta) \omega'(\zeta) = -\frac{c^2}{8} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{1-2\alpha+2\gamma} - e^{2\alpha-2\gamma}),$$

мы найдем

$$F(\zeta) = ip \frac{c^2}{4} \left(\omega'(2\alpha - \zeta) e^{-2\gamma i} - \omega(\zeta) e^{2\gamma i} \right) + \\ + \frac{ic^2}{8} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha+2\gamma} - e^{2\alpha-2\gamma}) \Phi'(\zeta).$$

3. Возьмем

$$\omega(\zeta) = b (e^{\zeta} + a e^{-\zeta \eta}).$$

Мы имеем в этом случае решение задачи для контура уравнение которого в координатах x, y будет

$$x = b (e^{\xi} \cos \eta + a e^{-\xi \eta} \cos n\eta),$$

$$y = b (e^{\xi} \sin \eta - a e^{-\xi \eta} \sin n\eta).$$

Это уравнение приводит при $a=0$ к кругу, а при $n=1$ к тому же что рассмотренному случаю эллипса.

При $n=2, 3, 4$ этот случай при помощи бесконечных рядов рассмотрен П. А. Соколовым [84].

Мы будем предполагать, что n какое угодно целое число. Тогда уравнение нашей кривой в полярных координатах будет:

$$r^2 = x^2 + y^2 = b^2 (e^{2i} + a^2 e^{-2in} + 2ae^{(1-n)i} \cos(n+1)\eta)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{e^i \sin \eta - a e^{-in} \sin n\eta}{e^i \cos \eta + a e^{-in} \cos n\eta}.$$

Из этих формул легко обнаруживается основное свойство этих кривых: r периодически изменяется от наименьшего своего значения, равного

$$b(e^i - a e^{-in}),$$

до наибольшего значения, равного

$$b(e^i + a e^{-in}).$$

Наименьшее его значение достигается при

$$(1+n)\eta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots,$$

а наибольшее при

$$(1+n)\eta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots,$$

так что при переходе от наименьшего к наибольшему, или

наоборот, $(1+n)\eta$ меняется на π , а η на $\frac{\pi}{1+n}$. При изме-

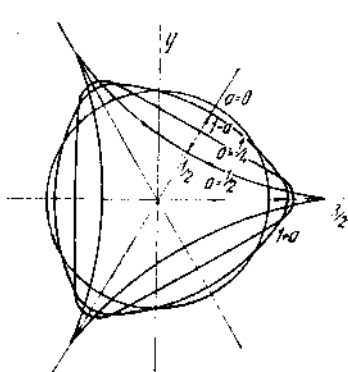
нении η на $\frac{\pi}{1+n}$, θ изменяется также на $\frac{\pi}{1+n}$, так что

кривые представляют собой замкнутые правильные криволинейные многоугольники: для $n=2$ мы имеем криволинейный треугольник (черт. 33). Для $n=3$ мы имеем правильный криволинейный четырехугольник, приближающийся к квадрату (черт. 34).

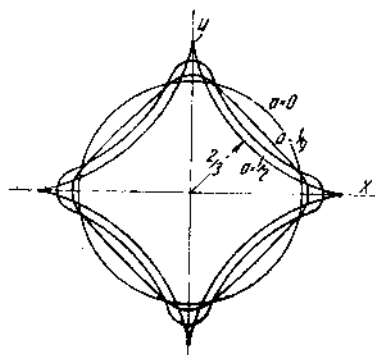
4. П. А. Соколов рассмотрел еще ряд интересных контуров при

$$\omega(\zeta) = \frac{e^i}{1 + a e^{-i\zeta}} \quad \text{и} \quad \text{при} \quad \omega(\zeta) = \frac{e^i}{1 + a e^{-i\zeta}}.$$

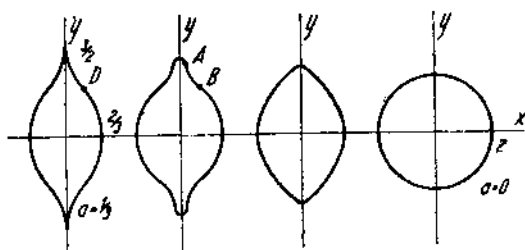
В первом из этих случаев получается губовидные или щелеобразные кривые, изображенные на черт. 35, а во вто-



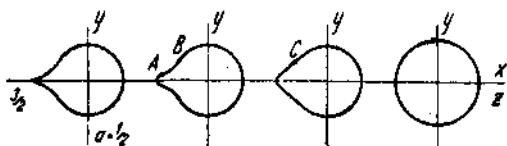
Черт. 33.



Черт. 34.



Черт. 35.



Черт. 36.

ром случае кривые, имеющие характер окружности с от-
ростком, изображенные на черт. 36.

Решение плоской задачи получается очень просто.

Для случая

$$\omega(\zeta) = b(e^{\zeta} + ae^{-n\zeta})$$

мы имеем формулу

$$\Phi(\zeta) = S - p - p \frac{e^{\zeta_1} - a n e^{-n\zeta_1}}{e^{\zeta} - a n e^{-n\zeta}} e^{-2\zeta i}.$$

Имея в виду, что

$$S \frac{e^{\zeta}}{e^{\zeta} - n e^{-n\zeta}} = S \frac{e^{-\zeta_1}}{e^{\zeta} - n e^{-2n\zeta}} = S \frac{e^{\zeta}}{e^{\zeta} - 2 a e^{-n\zeta}} = 0,$$

найдем:

$$\Phi(\zeta) + i a_0 = 2p \frac{n a e^{-n\zeta} e^{-\zeta_1 - 2\zeta i}}{e^{\zeta} - n a e^{-n\zeta}} = 2p \frac{n a - e^{(n-1)\zeta_1} e^{-2\zeta i}}{e^{(n+1)\zeta} - n a},$$

отсюда как частный случай получается

для $n=0$ $\Phi(\zeta) = 2p e^{-2\zeta_1 - 2\zeta i}$ (круг),

для $n=1$ $\Phi(\zeta) = 2p \frac{a - e^{-2\zeta i}}{e^{2\zeta} - a}$ (эллипс),

для $n=2$ $\Phi(\zeta) = 2p \frac{2a - e^{\zeta_1} e^{-2\zeta i}}{e^{3\zeta} - 2a}$ (криволинейный треугольник),

для $n=3$ $\Phi(\zeta) = 2p \frac{3a - e^{2\zeta_1} e^{-2\zeta i}}{e^{4\zeta} - 3a}$ (криволинейный четырехугольник).

Примечание. Эти результаты легко видоизменить для случаев однородного всестороннего расширения и для равномерного сдвига. Для этого нужно, как и в простейшем случае эллипса, в наших формулах вместо $p e^{-2\zeta i}$ подставить q и затем положить $p=0$ для сдвига, и $q=0$ для равномерного расширения по всем направлениям (см. также задачу Туцци [92]).

1) Кроме некоторых небольших несогласий полученных нами выражений с формулами П. А. Соколова, найденными, как мы уже заметили, рядами.

5. Возьмем еще случай, рассмотренный П. А. Соколовым, при котором

$$\omega(\zeta) = \frac{e^{\zeta}}{1 + ae^{-n\zeta}};$$

были рассмотрены частные случаи $n=1$ и $n=2$.

Мы имеем

$$\Phi(\zeta) + \text{const} = S - p - p \frac{\omega'_1(\zeta_1)}{\omega'(\zeta)} e^{-2\zeta}.$$

Отсюда, так как

$$\omega'(\zeta) = \frac{e^{\zeta} + (n+1)ae^{-n\zeta}}{(1 + ae^{-n\zeta})^2},$$

$$\Phi(\zeta) + \text{const} =$$

$$= S - p - p \frac{[e^{\zeta} + (n+1)ae^{-n\zeta}](1 + ae^{-n\zeta})^2}{(1 + ae^{-n\zeta})^2 [e^{\zeta} + (n+1)ae^{-n\zeta}]}$$

и так как на контуре $\zeta_1 = -\zeta$, то, отнеся постоянную $-p$ к постоянной в $\Phi(\zeta)$, мы найдем

$$\Phi(\zeta) = -2p \frac{[e^{\zeta} + (n+1)ae^{-n\zeta}][1 + ae^{-n\zeta}]^2}{[1 + ae^{-n\zeta}]^2 [e^{-\zeta} + (n+1)ae^{-(n-1)\zeta}]}$$

6. Отверстие в виде лемнискаты. Положим

$$z = \omega(\zeta) = c \sqrt{1 + e^{\zeta}}, \quad \zeta = \ln \frac{z^2 - c^2}{c^2}, \quad \omega'(\zeta) = \frac{ce^{\zeta}}{2 \sqrt{1 + e^{\zeta}}}$$

$$\frac{1}{h^2} = \omega'(\zeta) \omega'_1(\zeta_1) = \frac{c^2 e^{2\zeta}}{4 \sqrt{1 + 2e^{\frac{\zeta}{2}} \cos \eta + e^{\zeta}}};$$

$$\left(\frac{1}{h^2} \right)_{\zeta=\alpha} = [\omega'(\zeta) \omega'(2\alpha - \zeta)]'_{\zeta=\alpha}$$

Кривые $\xi = \alpha$ — лемнискаты. При $\xi = \ln 3$ имеем полуоси $2c$ и $c\sqrt{2}$; если $\xi = \ln 2$ — полуоси $c\sqrt{3}$, причем наибольшая

1) Здесь входит особая точка разветвления $z=0$, но она находится вне исследуемой области — в центре отверстия (и применению нашего способа не мешает).

ордината $\frac{5}{8}c$; при $\xi=0$ полуоси 0 и $c\sqrt{2}$; при $\xi < 0$ кривая состоит из двух ветвей. Мы будем предполагать $\xi > 0$. Тогда имеем формулу

$$\Phi(\zeta) + ia_0 = S - p - p \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)} e^{-2\alpha i},$$

откуда получим

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) + ia_0 &= -2p - p S \frac{\sqrt{1+e^{\xi}}}{\sqrt{1+e^{\zeta}}} e^{-2\alpha i} = \\ &= -2p - p e^{-2\alpha i} S \frac{\sqrt{(1+e^{\xi})(1-e^{-\zeta+2\alpha})}}{1+e^{\zeta}} = \\ &= 2p - 2p e^{-2\alpha i} \frac{\sqrt{(1+e^{\xi})(1-e^{-\zeta+2\alpha})}}{1+e^{\zeta}}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить решение для лемнискаты Boots'a [93] и для отверстий, подверженных постоянному тангенциальному или нормальному давлению.

§ 16. Плоская задача в изогоординатах, но не для изоконтур.

По имеющейся формуле

$$\Phi(\zeta) + \text{const} = S - p - p e^{2\theta i} e^{-2\alpha i},$$

где θ — угол, образованный не осью $O\xi$ изогоординат, а нормалью к нашему контуру N в какой-нибудь точке M . Если уравнение контура будет $\xi = \text{const}$, θ совпадет с прежним его значением.

Мы сделаем расчет для преобразования

$$Z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right),$$

примененного Н. И. Мусхелишвили, т. е.

$$x = R \left(\rho \cos \varphi + \frac{m}{\rho} \cos \varphi \right),$$

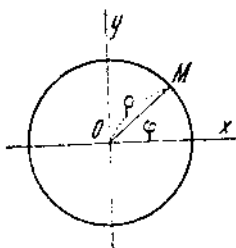
$$y = R \left(\rho \sin \varphi - \frac{m}{\rho} \sin \varphi \right),$$

и отображающего на окружности $\rho = 1$ эллипс (черт. 37а и б)

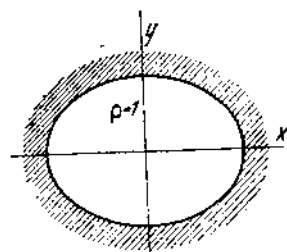
$$\frac{x^2}{R^2(1+m)^2} + \frac{y^2}{R^2(1-m)^2} = 1.$$

Мы имеем в этом случае θ , как угол, образованный нормалью к этому эллипсу с осью Ox :

$$\begin{aligned} e^{2\theta i} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \\ &= \frac{x(1-m)^2 + iy(1+m)^2}{x(1-m)^2 - iy(1+m)^2} \end{aligned}$$



Черт. 37-а.



Черт. 37-б.

и так как $z = x + iy = \omega(\zeta)$, то

$$x = \frac{\omega(\zeta) + \omega_1(\zeta_1)}{2}, \quad y = \frac{\omega(\zeta) - \omega_1(\zeta_1)}{2}.$$

Мы найдем

$$e^{2\theta i} = \frac{1 + m^2 - 2m \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)}}{(1 + m^2) \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)} - 2m}.$$

Основное уравнение будет

$$\Phi(\zeta) + \text{const} = S - p - p \frac{1 + m^2 - 2m \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)}}{(1 + m^2) \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)} - 2m} e^{-2\theta i},$$

и так как

$$\frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)} = \frac{1 - m\zeta^2}{\zeta^2 + m},$$

найдем:

$$\Phi(\zeta) = -p - p \frac{1 - m\zeta^2}{\zeta^2 - m} = \frac{mp - pe^{-2\alpha i}}{\zeta^2 - m},$$

полагая постоянную равной нулю.

§ 17. Новый способ интегрирования бигармонического уравнения в связи с введенным принципом комплексного уравнивания.

Мы имели формулу Гурса для бигармонической функции

$$V = (x + iy) \Phi_1(x - iy) + (x - iy) \Phi(x + iy) + \\ + F(x + iy) + F_1(x - iy);$$

введя по формуле $z = x + iy = \omega(\zeta)$ изокоординаты, мы найдем выражения:

$$V = \omega_1(\zeta) \Phi_1'(\zeta_1) + \omega_1(\zeta_1) \Phi(\zeta) + F(\zeta) + F_1(\zeta_1),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta)); \quad F(\zeta) = F(\omega(\zeta)),$$

так что

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} = \omega'(\zeta) \Phi_1(\zeta_1) - \omega_1(\zeta_1) \Phi'(\zeta) + F'(\zeta)$$

или

$$\frac{1}{2\omega'(\zeta)} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \Psi(\zeta, \zeta_1) + \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

где

$$\Psi(\zeta, \zeta_1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega_1(\zeta_1)}{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \Phi(\zeta) \right\}.$$

Заменяя здесь i на $-i$, мы найдем уравнения:

$$\frac{1}{2\omega'_1(\zeta_1)} \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} = \Psi_1(\zeta_1, \zeta) + \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

здесь $\Psi_1(\zeta_1, \zeta)$ получается из $\Psi(\zeta, \zeta_1)$ заменой i на $-i$.

$F'(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$, $\frac{1}{\omega'(\zeta)}$ — голоморфные функции от ζ ,

Преобразуем (уравновесим комплексно) функцию $\Psi(\zeta, \zeta_1)$ на заданном контуре (соответственно внешней или внутренней задаче), обратив значения ее на контуре в значения некоторой функции $\Psi(\zeta)$, а следовательно значения $\Psi_1(\zeta_1, \zeta)$ в значения $\Psi_1(\zeta_1)$, и возьмем соответствующий символ Шварца от обеих частей последнего равенства. Найдем:

$$S \frac{1}{2\omega'_1(\zeta_1)} \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} = \Phi(\zeta).$$

Отсюда определим $\Phi(\zeta)$, а $F(\zeta)$ найдем из уравнения, получаемого из прежнего (до перемены i на $-i$), взяв от обеих частей его символ Шварца:

$$S \frac{1}{2\omega'(\zeta)} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \Phi(\zeta) + 2\Psi(\zeta).$$

Метод комплексного уравновешивания зависит от характера изокоординат и связанного с ними конформного отображения и особенно просто достигается, когда уравнение контура преобразуется в кривую $\xi = \text{const}$ или круг:

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{const}.$$

§ 18. Решение плоской задачи теории упругости для какого угодно криволинейного контура и в частности для алгебраического.

Пусть имеем какой-нибудь замкнутый контур S и пусть P, U — нормальное и касательное напряжения, приложенные к площадке, направленной по касательной в какой-нибудь точке контура. Мы имеем

$$2(U - iP) = 2U - i(P - Q) - i(P + Q), \quad (36)$$

где Q — нормальное напряжение через площадку, идущую через нормаль к контуру; умножая (36) на i , получим:

$$2(P + iU) = P - Q + 2iU + (P + Q).$$

Предположим, что

$$2U + i(P - Q)$$

может быть на нашем контуре S преобразовано в значения голоморфной функции комплексной переменной (комплексно компенсирована) и возьмем символ Шварца от (36),

Если в (36) поставим $-i$ вместо $+i$, мы найдем

$$2(U + iP) = 2U + i(P - Q) + i(P + Q),$$

которое после подстановки вместо

$$2U + i(P - Q)$$

его значения может служить для определения второй неизвестной основной функции $F(\zeta)$, если взять от последнего выражения символ Шварца.

Таким образом мы видим, что для решения вопроса о равновесии нашего контура необходимо знание для него выражения символа Шварца. Для очень многих контуров, и в частности для контуров алгебраических, может быть весьма полезен прием академика Д. А. Граве¹⁾, основанный на комплексном преобразовании уравнения контура, т. е. на введении вместо прямоугольных координат x, y , уравнение контура в которых пусть будет:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

новых переменных z и z_1 , как мы это уже имели в § 13.

Применяя комплексное преобразование, примем за новые переменные

$$z = x + iy$$

и

$$z_1 = x - iy.$$

Введя их в ур-ния (36), мы найдем это уравнение в виде:

$$\varphi(z, z_1) = 0, \quad (37)$$

а решая его относительно одной из переменных, например z , найдем для точек контура

$$z = F(z_1) \text{ или } z_1 = F(z). \quad (38)$$

Если высшая степень ур-ния (36) m , то степень (37) $n \leq m$ и следовательно, решая его относительно z , найдем, что F многозначная функция, имеющая n значений соответственно корням ур-ния (37).

¹⁾ Д. А. Граве, Об основных задачах математической теории построения географических карт, СПб, 1896. Краткое резюме метода доложено на конгрессе в Бордо 1895 г. и напечатано в трудах конгресса, см. также Journal des Mathématiques pures et appliquées и журнал Русск. астроном. о-ва, вып. 4, 1895 г.

Таким образом каждому корню соответствует свое соотношение (38) и следовательно устанавливается и свое преобразование двух геометрических областей, которые назовем, следуя терминологии Д. А. Граве, комплексным преобразованием по заданному нам контуру.

Полученные для какой-нибудь точки M комплексным преобразованием по контуру S точки мы назовем *изображениями* точки M ; каждой точке плоскости xu соответствует n изображений.

Очевидно, что при приближении точки к контуру S по крайней мере одно из изображений идет к совпадению с этой точкой. Кроме того, легко доказать, что при приближении точки M к S по нормали, в бесконечно близком расстоянии от S , сливающееся на S изображение точки будет приближаться к S по той же нормали, как и точка M , но с другой стороны, чем M , оставаясь все время в таком же расстоянии от S как M^1). Для прямой линии мы получаем методу зеркальных изображений В. Томсона, а для круга преобразование при помощи взаимных радиусов-векторов. В этих двух частных случаях изображение есть единственная точка, а во всех других случаях их является несколько ²⁾ соответственно корням ур-ния (36), т. е. выражениям (38).

Из теории алгебраических функций следует, что если M не приближается к особой точке, другие изображения ее не приближаются к ней, а находятся от нее на конечных расстояниях.

Будем говорить, что M и сливающееся с ней на контуре изображение образуют *пару* на контуре. Легко показать, что если M и сливающееся с ней ее изображение мы будем двигать по контуру, другие изображения M будут двигаться по некоторой предельной кривой, которая содержит все особые точки контура, и для конических сечений есть коническое сечение. Пара точек на контуре образует нечто аналогичное двум сопряженным точкам в преобразовании посредством взаимных радиусов-векторов, где уравнение, связывающее точки, является линейным относительно их координат.

1) См. Д. А. Граве, loc. cit., стр. 144.

2) К аналогичным построениям приводят также построение функций Грина в теории логарифмического потенциала.

В самом общем случае уравнение (37) может быть линейно найдено относительно z и z_1 , если оно вида:

$$Azz_1 + Bz + Cz_1 + D = 0,$$

и единственные вещественные контуры, заключающиеся в этом уравнении, будут круг $zz_1 = \text{const}$ и прямая линия $z + z_1 = \text{const}$.

После первого комплексного преобразования приступаем ко второму, а именно преобразуем комплексно каждую из найденных после первого преобразования точек. Легко убедиться, что новое преобразование даст для каждой из точек точку M и $n-1$ других точек, а всего мы получим $n(n-1)$ новых точек, из которых, как легко убедиться, $n-1$ образуют пару с $n-1$ точками первой операции.

Переходим теперь к третьей операции, преобразуя комплексно вновь найденные точки, а затем к четвертой и т. д. Простейший случай представляют контуры, у которых операция некоторого порядка не вводит свободных точек. Мы получаем в этом случае конечную группу точек. В обратном случае мы получаем бесконечную группу.

Если точки бесконечной группы расположены на конечном расстоянии от контура — назовем группу ограниченной. Наконец бесконечная неограниченная группа правильная, если точки беспрестанно удаляются по мере увеличения операций.

Мы будем называть контур с конечными группами контуром рода λ , если он дает место λ последовательным операциям комплексного преобразования.

Д. А. Граве доказывает, что символ Шварца для данного контура представляется в виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(s) dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \sum_s \int \frac{f(s) dz'}{z' - z^{(1)}} + \dots +$$

$$+ (-1)^\lambda \frac{1}{2\pi i} \sum_s \int \frac{f(s) dz'}{z' - z^{(\lambda)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_s f(s) D_s \lg \Omega dz',$$

где

$$\Omega = (z' - z) \Phi_1^{-1} \Phi_2 \dots \Phi_k^{(-1)^k}$$

при двух условиях: во-первых, ни одна из точек группы не должна попадать на контур, и во-вторых, при приближении к контуру она дает единственную пару на контуре.

Для доказательства этой теоремы сначала доказывается, что сумма двух интегралов

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(s) dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(s) dz'}{z' - z^{(1)}},$$

соответствующих двум точкам z и $z^{(1)}$, дающих единственную пару k на контуре S , приближается к $f(s)$.

Очевидно, что сумма всех остальных интегралов стремится к нулю, так как точки сближаются попарно и отстоят на конечном расстоянии от контура и соответственные интегралы сокращаются.

Как частный случай этой формулы, получаются примененные нами формулы для прямой линии и круга.

Для прямой линии, принятой за ось Ox , уравнение контура: $y=0$ и формула примет вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s) ds}{s - z}.$$

В случае круга, для внутренней его части и для внешней, мы получаем формулу Шварца

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(s)(z - z_1) dz'}{(z' - z)(z' - z_1)},$$

которая для внутренней части обращается в интеграл Пуассона:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi)(r^2 - \rho^2) d\psi}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2},$$

а для внешней части направление контура меняется, и мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi)(\rho^2 - r^2) d\psi}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}.$$

Примеры. Мы приведем здесь ряд дальнейших результатов, полученных Д. А. Граве при помощи этого метода.

1. Равносторонняя гипербола. В этом случае получается:

$$\Omega = \frac{z'^2 - z^2}{z'^2 + z_1^2 - 2a^2}$$

и символ Шварца (для части плоскости, содержащей один из фокусов, ограниченной ветвью гиперболы и бесконечно далеким кругом) представится формулой:

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \frac{f(s) (z^2 + z_1^2 - 2a^2) z' dz'}{(z'^2 - z^2) (z^2 + z_1^2 - 2a^2)}.$$

2. Лемниската Бернулли.

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

В этом случае:

$$\Omega = \frac{z'^2 - z^2}{2z'^2 z_1^2 - a^2 (z'^2 + z_1^2)}$$

и символ Шварца

$$\frac{1}{\pi i} \int_S \frac{f(s) [2z^2 z_1^2 - a^2 (z^2 + z_1^2)] z' dz'}{(z'^2 - z^2) (2z'^2 z_1^2 - a^2 z'^2 - a^2 z_1^2)}.$$

Формула для лемнискаты получается из формулы для гиперболы при помощи преобразования по способу взаимных радиусов-векторов, так как при помощи формул преобразования:

$$z't = a^2, \quad z\tau = a^2, \quad z_1\tau = a^2,$$

формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f(s) R(z', z) dz' + 2\pi i \int_S f(s) Q(z', z_1) dz'$$

преобразуется в формулу:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(s) R\left(\frac{a}{t}, \frac{a^2}{\tau}\right) \frac{a^2 dt}{t^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(s) Q\left(\frac{a^2}{t}, \frac{a^2}{\tau}\right) \frac{a^2 dt}{t^2},$$

где γ преобразование контура S .

3. Квадрант круга (контур третьего рода).
Уравнение его мы возьмем в виде:

$$xy(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Операций здесь понадобится три.

$$\Omega = \frac{(z'^2 - z^2)(z'^2 \cdot z^2 - a^4)}{(z'^2 - z_1^2)(z'^2 z_1^2 - a^4)}.$$

Из контуров, дающих бесконечные группы, Д. А. Граве останавливается исключительно на контурах, имеющих правильные группы и удовлетворяющих тем же двум основным условиям, которые были поставлены для конечных групп.

Символ Шварца представится тогда в виде бесконечного ряда:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(s) dz'}{z' - z} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \sum_S \int \frac{f(s) dz'}{z' - z_1^{(n)}},$$

причем предполагается, что этот ряд абсолютно сходящийся. Доказательство совершенно такое же, как для групп конечных. Необходимо кроме того убедиться, что производные первых двух порядков остаются конечными.

Если ряд, определяющий символ Шварца, не абсолютно сходящийся, тогда для каждого частного случая нужно вести особое исследование. Из конических сечений правильные группы дают эллипс, параболу и систему двух параллельных прямых.

Для случая эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a > b$$

мы найдем символ Шварца в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(s) dz'}{z' - z} + \\ & + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \int_S \frac{f(z) \left[z' - \frac{a_{2n}}{c} z_0 \right] dz'}{z'^2 - z_0^2 - 2 \frac{a_{2n}}{c} z' z_0 + b_{2n}^2} \end{aligned}$$

где $z_0 = z$ для n четного и $z_0 = z_1$ для n нечетного, или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} f(s) D_s \ln \Omega dz',$$

где

$$\Omega = C (z' - z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(z + z_0^2 - \frac{2a_{2n}^2}{c} z z_0 + b_{2n}^2 \right)^{(-1)^n},$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad a_k = \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2c^{k-1}}, \quad b_k = \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2c^{k-1}}$$

а C не зависит от z' .

Получающийся здесь ряд абсолютно сходящийся для всех значений внутри эллипса. Точно также можно убедиться в конечности частных производных. Ряд можно просуммировать при помощи эллиптических функций и получить формулу Шварца¹⁾.

Случай двух параллельных прямых может быть рассмотрен как предельный случай эллипса, увеличивая бесконечно его большую полуось и оставляя другую полуось без изменения.

Мы найдем

$$\lim \frac{a_k}{c} = 1, \quad \lim b_k = kb.$$

Давая в формуле для эллипса величине C соответствующее значение, мы найдем:

$$\Omega = \frac{\frac{\pi}{4bi} (z' - z) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\left[\frac{\pi}{4bi} (z' - z) \right]^2}{m^2 \pi^2} \right)}{\prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - 4 \frac{\left[\frac{\pi}{4bi} (z' - z_1) \right]^2}{(2m+1)^2 \pi^2} \right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4bi} (z' - z)}{\cos \frac{\pi}{4bi} (z' - z_1)}$$

¹⁾ Schwarz, Rappresentazione di un'ellisse sopra un circolo Annali di Marhematica pure applicata. Serie II. Tomo III.

Наконец Д. А. Граве рассматривает случай прямоугольника, заданного четырьмя прямыми

$$\begin{aligned}x &= 0, & x &= \omega \\y &= 0, & y &= \omega'.\end{aligned}$$

Уравнение их совокупности будет

$$xy(x - \omega)(x - \omega') = 0.$$

Введя эллиптические функции ¹⁾

$$\theta(x) = 1 - 2q \cos \frac{\pi x}{\omega} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{\omega} - 2q^9 \cos \frac{3\pi x}{\omega} + \dots$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q} \sin \frac{\pi x}{2\omega} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin \frac{3\pi x}{\omega} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin \frac{5\pi x}{2\omega}$$

$$\theta_1(x) = \theta(x + \omega),$$

$$H_1(x) = H(x + \omega),$$

где

$$q = e^{-\pi \frac{\omega'}{\omega}}.$$

и обозначив

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q} - 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots}$$

$$\sqrt{k_1} = \frac{\theta(0)}{\theta_1(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots}$$

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\theta(x)}$$

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k_1}{k}} \frac{H_1(x)}{\theta(x)}$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{k_1} \frac{\theta_1(x)}{\theta(x)},$$

найдем

$$\Omega = \frac{H(z' - z)H(z' + z)}{H(z' - z^{(1)})H(z' + z^{(1)})}.$$

¹⁾ См. Келли (Cayley), Memoire sur les fonctions doublement périodiques, t. X, Journal de Liouville, exp. 385.

Если начало координат поместим в центр прямоугольника, то

$$z' = z_0 + \frac{\omega + i\omega'}{2}, \quad z = z_0 + \frac{\omega - i\omega'}{2}, \quad z_1 = z_1 + \frac{\omega - i\omega'}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} z' - z &= z_0 - z_1, \\ z' + z &= z_0 + z_1 + \omega + i\omega', \\ z' - z_1 &= z_0 - z_1 + i\omega, \\ z' + z_1 &= z_0 + z_1 + \omega, \end{aligned}$$

причем очевидно функцией

$$\frac{H(z_0 - z_1) H(z_0 + z_1 + \omega + i\omega')}{H(z_0 - z_1 - i\omega) H(z_0 + z_1 + \omega)}$$

можно заменить функцией

$$\frac{H(z' - z) \Theta_1(z' + z)}{\Theta(z' - z_1) H_1(z' + z_1)}.$$

Переходя к применению найденных формул в плоской задаче, найдем из (38)

$$\Phi(z) = 2S(P + iU),$$

откуда $\Phi(z)$ определяется до комплексной постоянной.

Мы допускаем здесь возможность применения к выражению

$$2U - i(P - U)$$

введенного нами комплексного компенсирования на данном контуре, которое во всех рассмотренных нами примерах имело место. Пределы и возможность применения этого принципа требует, конечно, дальнейших и может быть сложных исследований. Получив основную функцию, мы найдем и другую основную функцию. Взяв символ $\bar{z}$ в $\bar{z}$ а $\bar{z}$ а от выражения, получающегося из (36) или (37) заменю i на $-i$ и во всяком случае применяя этот метод, найдем какое-то решение.

Однако необходимо убедиться, что это решение действительно соответствует поставленной задаче.

Вот почему в высшей степени желательно возможно широкое применение указанного метода к различного рода задачам, с этой целью мы и привели довольно полный список результатов, полученных при его помощи.

ГЛАВА IV.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, КАК ПРИЕМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

§ 1. Общая задача теории упругости.

Весьма удобным способом получения решений общей задачи, в особенности связанных с направлением некоторой оси, например Oz , является чисто комплексное преобразование уравнений теории упругости, представляющее развитие комплексного преобразования в § 7 и 8 гл. I и в § 5 и 13 гл. II. Введем вместо x, y новые переменные независимые

$$\zeta = x + iy \text{ и } \bar{\zeta}_1 = x - iy$$

и кроме того обозначим

$$\varphi = X_x + iY_y, \quad \psi = X + iY, \quad f = u + iv$$

$$\chi = X_x - Y_y + 2iX_y, \quad \Omega = X_x + Y_y.$$

Уравнения элементарного параллелепипеда (см. гл. II, § 8) будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \psi &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\zeta}_1} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial z} - \rho Z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

а уравнения, связывающие напряжения и перемещения (формула 30, гл. I), дадут:

$$\chi = 4\mu \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_1} \quad (2a)$$

$$\Omega = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) + 2\lambda z \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2b)$$

$$\varphi = \mu \frac{\partial f}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}_1} \quad (2c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} (1 - \sigma) = Z_x \frac{(1 - 2\sigma)}{2\mu} - \sigma \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{\zeta}_1} \right). \quad (2d)$$

Из ур-ний (2d) и (2b) следует:

$$\Omega = 2\mu \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) + 2Z_s \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (2e)$$

Напомним, что здесь σ — коэффициент Пуассона, равный $\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$.

Применим ур-ния (1) и (2) к выводу общих решений, но предварительно заметим некоторые, вытекающие из них следствия.

Подставим в первое ур-ние (1) вместо χ его выражение (2a) и полученное выражение проинтегрируем по ζ_1 . Получим уравнение

$$4\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Omega + \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\zeta_1 + \int \rho \psi d\zeta_1 = F(\zeta, z), \quad (2f)$$

или

$$4\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Omega = \xi,$$

где

$$\xi = F(\zeta, z) - \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\zeta_1 - \int \rho \psi d\zeta_1, \quad (2g)$$

$F(\zeta)$ (произвольная функция от ζ_1) имеет большое значение во всех методах подхода к общей задаче при помощи переменных $\zeta = x + iy$, $\zeta_1 = x - iy$. Подставив вместо Ω его выражение из (2e) в (2f), найдем

$$4\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} + 2\mu \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) + 2Z_s \frac{\sigma}{1-\sigma} + \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\zeta_1 + \int \rho \psi d\zeta_1 = F(\zeta, z),$$

или

$$4\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} + 2\mu \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) + 2Z_s \frac{\sigma}{1-\sigma} = \xi.$$

Подставляя в него $-i$ вместо i и складывая оба уравнения, найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} + \frac{\sigma Z_s}{2\mu} = \frac{1-\sigma}{8\mu} (\xi + \xi_1), \quad (2k)$$

откуда получается уравнение для определения f по заданным Z_z и φ (при помощи квадратуры):

$$2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\sigma}{2\mu} Z_z = \frac{3-\sigma}{8\mu} \zeta - \frac{1+\sigma}{8\mu} \zeta_1.$$

Переходя теперь к различным примерам, мы будем при разыскании решений руководиться так называемым „полуобратным“ методом Сен-Венана, при котором заранее делается известное предположение относительно распределения напряжений и затем выводятся условия, при которых оно справедливо.

Предположим, во-первых, что все перемещения, а следовательно и напряжения от z не зависят. Мы найдем для этого случая решение общей задачи теории упругости несколько более общее, чем решение, данное в гл. II.

В этом случае из (1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_1} + \rho \psi &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_1} &= -\rho Z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а из (2)

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= 4\mu \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \varphi = 2\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta_1}, \\ X_x + Y_y &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right), \\ Z_z &= 2\mu \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из первого ур-ния (3), подставляя вместо γ его значение из первого ур-ния (4) и интегрируя по ζ_1 , найдем:

$$4\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Omega + \int \rho \psi d\zeta_1 = F(\zeta), \quad (5)$$

где $F(\zeta)$ произвольная функция от ζ .

Это уравнение вместе с ур-нием (2b):

$$\Omega = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) \quad (6)$$

представляет уравнение плоской задачи

$$\varphi = 2\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta_1}, \quad Z_s = \frac{2\mu}{1 - 2\varepsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right),$$

а w удовлетворяет уравнению

$$4\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \zeta_1} = -\rho Z,$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\rho Z;$$

при $\varphi = 0$ получается найденное раньше решение.

Этим приемом ¹⁾ можно очень удобно получить и полное решение плоской задачи. В самом деле, из основных ур-ний (5) и (6) следует в этом случае

$$2\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} + 2\mu\varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} = F(\zeta) - \int \rho \psi d\zeta_1, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\lambda + \mu}{\mu}.$$

Заменяя здесь i на $-i$, мы найдем:

$$2\mu \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} + 4(\lambda + \mu) \cdot \mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} = F(\zeta_1) - \int \rho \psi_1 d\zeta.$$

Сложив эти два уравнения, получим уравнение

$$4\mu(1 + \varepsilon) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) = F(\zeta) + F_1(\zeta_1) - \int \rho \psi d\zeta_1 - \int \rho \psi_1 d\zeta,$$

в котором легко узнать ур-ние (15) гл. II. Из ур-ния (7) имеем

$$\begin{aligned} 4\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} = F(\zeta) - \int \rho \psi d\zeta_1 - \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} [F(\zeta) + F_1(\zeta_1)] - \\ - \int \rho \psi d\zeta_1 - \int \rho \psi_1 d\zeta, \end{aligned}$$

¹⁾ Он дан нами в Comptes Rendus, 1929 г. [82].

или

$$4u \frac{\partial f}{\partial \zeta} = - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} F_1(\zeta_1) + \frac{\varepsilon+2}{2(1+\varepsilon)} F(\zeta) - \frac{\varepsilon+2}{2(1+\varepsilon)} \int \rho \psi d\zeta_1 + \\ + \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \int \rho \psi_1 d\zeta$$

и отсюда

$$(u+iv) = f \frac{1}{4u} \left[- \frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon)} \zeta F_1(\zeta_1) + \frac{\varepsilon+2}{4(1+\varepsilon)} \int F(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \int \int \rho \psi_1 d\zeta^2 - \frac{\varepsilon+2}{2(1+\varepsilon)} \int \int \rho \psi d\zeta d\zeta_1 + F(\zeta) \right] \quad (8)$$

где $F(\zeta)$ произвольная функция от ζ .

Отсюда найдем

$$X_x - Y_y + 2iX_y = 4u \frac{\partial f}{\partial \zeta_1}. \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) совпадают с данным в § 8 гл. II. Это решение, основанное на комплексном преобразовании, дает сразу и напряжения и перемещения.

§ 2. Простейшие примеры отыскания решений „полуобратным“ методом.

1. Возьмем решение плоской задачи в полярных координатах и, положив в формуле (22) (стр. 93).

$$\left. \begin{aligned} \Omega = R_r + \Theta_\theta &= Ae^{-\xi} \sin \theta + Be^{-\xi} \cos \theta + Ce^{-2\xi} \sin 2\theta + \\ &+ De^{-2\xi} \cos 2\theta = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + \\ &+ \frac{1}{r^2} (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta), \\ \varphi &= \frac{1}{2} (Ae^{\xi} \cos \theta - Be^{\xi} \sin \theta) = \frac{r}{2} (A \cos \theta - B \sin \theta) \\ \psi &= \frac{1}{2} (Ae^{\xi} \sin \theta + Be^{\xi} \cos \theta) = \frac{r}{2} (A \sin \theta + B \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

найдем

$$2R_0 r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi = D \sin 2\theta - C \cos 2\theta,$$

следовательно

$$R_0 = \frac{1}{2r^2} (D \sin 2\theta - C \cos 2\theta).$$

Точно также

$$\begin{aligned} (R_r - \Theta_0) r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi = \\ &= \frac{1}{2} A e^{\xi} \sin \theta + \frac{1}{2} B e^{\xi} \cos \theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta + \psi = \\ &= A r \sin \theta + B r \cos \theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta, \end{aligned}$$

т. е.

$$R_r - \Theta_0 = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{1}{r^2} (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta),$$

или в силу (10)

$$R_r - \Theta_0 = R_r + \Theta_0,$$

а следовательно $\Theta_0 = 0$ и $\Omega = R_r$.

$$R_r = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{1}{r^2} (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta),$$

а в силу уравнений (4) и (6)

$$Z_z = \frac{\mu \sigma R_r}{\lambda + \mu} = \frac{E - 2\mu}{2\mu} R_r.$$

2. Положив в (10) $\varphi = \psi = 0$, мы найдем решение:

$$R_r = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{1}{r^2} (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta),$$

$$\Theta_0 = 0,$$

$$R_0 = \frac{1}{2r^2} (D \sin 2\theta - C \cos 2\theta),$$

$$\begin{aligned} Z_z &= \frac{E - 2G}{2G} R_r = \frac{\mu \sigma}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{r} A \sin \theta + B \cos \theta \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2} (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta), \end{aligned}$$

$$Z_x = Z_y = 0.$$

3. Возьмем теперь:

$$\Omega = R_r + \Theta_\theta = Ae^{-\xi} \sin \theta + Be^{-\xi} \cos \theta + Ce^{2\xi} \sin 2\theta + De^{2\xi} \cos 2\theta = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + r^2 (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta).$$

$$\varphi = -\frac{3r}{2} (A \cos \theta - B \sin \theta),$$

$$\psi = -\frac{3r}{2} (A \sin \theta + B \cos \theta).$$

Найдем:

$$\begin{aligned} 2r^2 R_{rr} &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi = \\ &= -r^4 (C \cos 2\theta - D \sin 2\theta) - 2r (A \cos \theta - B \sin \theta) \end{aligned}$$

и следовательно

$$R_{rr} = -\frac{r^2}{2} (C \cos 2\theta - D \sin 2\theta) - \frac{1}{r} (A \cos \theta - B \sin \theta).$$

Точно так же

$$\begin{aligned} (R_r - \Theta_\theta) r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi = \\ &= \frac{1}{2} (Ae^\xi \sin \theta + Be^\xi \cos \theta) - r^2 (Ce^{2\xi} \sin 2\theta + De^{2\xi} \cos 2\theta) + \\ &+ \psi = -r^2 (Cr^2 \sin 2\theta + Dr^2 \cos 2\theta) - (Ar \sin \theta + Br \cos \theta) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} R_r - \Theta_\theta &= -\frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) - r^2 (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta) = \\ &= -(R_r + \Theta_\theta), \end{aligned}$$

т. е. $R_r = 0$, а следовательно

$$\Theta_\theta = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + r^2 (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta).$$

$$Z_z = \frac{E - 2G}{2G} \Theta_\theta =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{E - 2G}{2G} \left[\frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + r^2 (C \sin 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + D \cos 2\theta) \right]. \end{aligned}$$

Это — решение проф. Н. Н. Митинского ¹⁾ [30*]

$$\Theta_\theta = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + r^2 (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta),$$

$$R_\theta = -\frac{r^2}{2} (C \cos 2\theta - D \sin 2\theta) - \frac{1}{r} (A \cos \theta - B \sin \theta),$$

$$Z_z = \frac{E - 2G}{2G} \Theta_\theta.$$

4. Положим теперь:

$$\begin{aligned} \Omega &= R_r + \Theta_\theta = A e^{-\xi} \sin \theta + B e^{-\xi} \cos \theta + \\ &\quad + C e^{\alpha \xi} \sin \alpha \theta + D e^{\alpha \xi} \cos \alpha \theta = \\ &= \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + r^2 (C \sin \alpha \theta + D \cos \alpha \theta) \end{aligned}$$

и возьмем:

$$\varphi = -\frac{\alpha + 1}{2} r (A \cos \theta - B \sin \theta),$$

$$\psi = -\frac{\alpha + 1}{2} r (A \sin \theta + B \cos \theta).$$

Найдем:

$$\begin{aligned} 2R_\theta r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi = \\ &= \frac{\alpha}{2} r^{\alpha+2} (C \cos \alpha \theta - D \sin \alpha \theta) - \frac{\alpha + 1}{2} r (A \cos \theta - B \sin \theta) \\ (R_r - \Theta_\theta) r^2 &= -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi = \\ &= \frac{1}{2} (A r \sin \theta + B r \cos \theta) - \frac{\alpha}{2} r^{\alpha+2} (C \sin \alpha \theta + D \cos \alpha \theta) - \\ &\quad - \frac{\alpha + 1}{2} r (A \sin \theta + B \cos \theta) = -\frac{\alpha}{2} r^2 \Omega = -\frac{\alpha}{2} r^2 (R_r + \Theta_\theta). \end{aligned}$$

¹⁾ Первый из рассмотренных случаев, совершенно аналогичный второму, ускользнул от внимания автора.

Отсюда

$$2(\Theta_0 - R_r) = \alpha(R_r + \Theta_0),$$

т. е.

$$R_r(\alpha + 2) = \Theta_0(2 - \alpha).$$

Предыдущие случаи получаются отсюда при $\alpha = -2$ и $\alpha = 2$.

§ 3. Задача Клебша и ее обобщения.

В § 1 мы привели задачу о нахождении решений общей задачи теории упругости к уравнению для определения f и w :

$$2 \frac{\partial f}{\partial r^2} + \frac{Z_z}{2\mu} = \frac{3-\sigma}{8\mu} \xi - \frac{1+\sigma}{8\mu} \xi_1 \quad (11)$$

и к уравнениям:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{Z_z}{2\mu} \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} - \frac{\sigma}{1-\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial r^2} + \frac{\partial f_1}{\partial r_1^2} \right) \quad (12a)$$

$$2\mu \frac{\partial w}{\partial r_1^2} = \varphi - \mu \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{или} \quad 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial r_1^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial r^2} - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r^2} \quad (12b)$$

для определения w .

Предположим, что нам заданы φ как функция одного ζ_1 и Z_z как функция одних x, y (или ζ, ζ_1), так что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \psi = 0 \quad (\text{нет внешних сил}).$$

Мы получаем целый класс решений, частным случаем которых является случай Клебша

$$\varphi = Z_z = 0 \quad \text{или} \quad X_z = Y_z = Z_z = 0.$$

При определении w из (12 а и б) мы должны обратить внимание не только на то, чтобы эти уравнения были удовлетворены, но и на то, чтобы w было вещественным. Дифференцируя уравнение (12 а) по ζ , найдем (12 б)

$$4 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial r_1^2} = \nabla_2 w.$$

Уравнения (12 а и б) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{Z_z}{2\mu} (1-\sigma) - \frac{\sigma}{8\mu} (\xi + \xi_1) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial r_1^2} &= \frac{\sigma-1}{2\mu} \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{aligned}$$

Поэтому $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial \bar{z}^2}$ должна быть вещественной, и тогда из уравнения (11) находим, что

$$\frac{\xi}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial z}$$

также вещественны и равны друг другу.

Из условий интегрируемости уравнений (12с)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1},$$

следовательно z входит в ξ не старше второго порядка, поэтому мы можем положить

$$\xi = z^2 [F_2(\zeta) + F_{21}(\zeta_1)] + z [F_1(\zeta) + F_{11}(\zeta_1)] + F_0(\zeta) + F_{01}(\zeta_1)$$

и отсюда, обозначая

$$F(z, \zeta) = z^2 F_2(\zeta) + z F_1(\zeta) + F_0(\zeta),$$

найдем

$$\int F(z, \zeta) d\zeta = \frac{z^3}{3} F_2(\zeta) + \frac{z^2}{2} F_1(\zeta) + z F_0(\zeta) + \Phi_0(\zeta),$$

где $\Phi_0(\zeta)$ произвольная функция ζ ; w определяется из уравнений (12с)

$$w = \frac{1-\sigma}{2\mu} z Z_2 - \frac{\sigma}{2\mu} \left[2 \frac{z^3}{3} (F_2(\zeta) + F_{21}(\zeta_1)) + \right. \\ \left. + z^2 [F_1(\zeta) + F_{11}(\zeta_1)] + 2z [F_0(\zeta) + F_{01}(\zeta_1)] + w_0 \right]$$

где w_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0,$$

а

$$Z_2 = - \left(\zeta_1 \int F_2(\zeta) d\zeta + \zeta \int F_{21}(\zeta_1) d\zeta_1 + F(\zeta) + F_1(\zeta_1) \right).$$

Частным случаем этого решения является случай Моисея Леви¹⁾

$$Z_z = 0, \quad F_2(\zeta) = F(\zeta) = 0$$

еще более частным случаем является случай Клебша, где

$$\varphi = 0.$$

Переходя теперь к самому общему случаю, мы должны удовлетворить ур-ниям (11) и (12) при помощи вещественных Z_z и w .

Предположим для простоты, что внешних объемных сил нет, т. е.

$$\psi = 0.$$

Введем вместо φ новую функцию Φ , положив

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_1}.$$

Из ур-ний (12) тогда следует:

$$2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1+\sigma}{16} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^2} + \frac{\sigma \partial Z_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{Z_z}{2\mu} (1-\sigma) + \frac{\sigma}{8\mu} \frac{\partial (\Phi + \Phi_1)}{\partial z}$$

и условие вещественности $\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1}$ приводит к вещественности

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{4} \nabla_2^2 \Phi_1,$$

т. е. к условию

$$\nabla_2^2 \Phi = \nabla^2 \Phi_1$$

или

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^2}.$$

¹⁾ Journal des mathematiques, 1877. Общее решение указано нами в Comptes rendus 1927 г., т. 184.

Имея в виду, что

$$\frac{\partial Z_z}{\partial z} = - \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z \partial \bar{z}_1}, \quad (13)$$

мы приходим к уравнениям:

$$2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} = \frac{2-\varepsilon}{4} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} + \frac{1-\varepsilon}{16} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^2},$$

условия интегрируемости которых требует:

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} = \frac{1}{16} \frac{\partial^3 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z \partial \bar{z} \partial \bar{z}_1}. \quad (14)$$

Ур-ния (13) и (14) служат для определения Z_z и условие их интегрируемости требует:

$$\frac{\partial^4 (\Phi + \Phi_1)}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{z}_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^2 \partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} + \frac{1}{16} \frac{\partial^4 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^4} = 0$$

или

$$\nabla_2 \nabla_2 (\Phi + \Phi_1) = 0,$$

т. е.

$$\nabla_2 \nabla_2 \Phi = \nabla_2 \nabla_2 \Phi_1 = 0.$$

Мы найдем тогда для Z_z выражение:

$$Z_z = - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} \int (\Phi + \Phi_1) dz + \chi(z, \bar{z}_1),$$

где χ определяется уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} &= \frac{\partial^4}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{z}_1^2} \int (\Phi + \Phi_1) dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z \partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} + \\ &+ \frac{1}{16} \frac{\partial^3 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^3}. \end{aligned}$$

Для определения w мы найдем уравнения:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} &= \frac{2-\varepsilon}{4} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}_1} + \frac{1-\varepsilon}{16} \frac{\partial^2 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^2}, \\ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{2-\varepsilon}{4} \frac{\partial (\Phi + \Phi_1)}{\partial z} + \\ &+ \frac{1-\varepsilon}{16} \iint \frac{\partial^3 (\Phi + \Phi_1)}{\partial z^3} d\bar{z} d\bar{z}_1 + (1-\varepsilon) \chi_0, \end{aligned}$$

откуда очевидно:

$$2\mu w = \frac{2-\sigma}{4}(\Phi + \Phi_1) + \frac{1-\sigma}{16} \int \int \frac{\partial^2(\Phi + \Phi_1)}{\partial z^2} d\zeta d\zeta_1 + (1-\sigma)\gamma_0 z + w_0,$$

где w_0 — произвольная функция от ζ, ζ_1 , удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0.$$

Как частные случаи этих формул, получаются все найденные до сих пор общие решения уравнений теории упругости (решения Сен-Венана, Клебша, Мориса Леви, Стеклова и т. п., а также решение Б. Г. Галеркина (гл. I, § 12) и зависимость его от трех гармоник.

§ 4. Задача Сен-Венана.

Задача состоит в изучении равновесия цилиндрического тела, производящие которого параллельны какой-нибудь оси, например Oz , и волокна, ей параллельные, не оказывают друг на друга никакого давления, так что

$$X_x = Y_y = X_y = 0. \quad (15)$$

Кроме того, предполагается отсутствие внешних (объемных) сил, а к боковой поверхности тела не приложено никаких внешних напряжений. На боковой поверхности мы следовательно имеем:

$$\begin{aligned} X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz &= 0 \\ Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz &= 0 \\ Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz &= 0, \end{aligned}$$

где n — нормаль в какой-нибудь точке этой поверхности, откуда, в виду (15), и так как $\cos nz = 0$, найдем на боковой поверхности единственное условие:

$$Z_x \cos nx + Z_y \cos ny = 0. \quad (15a)$$

Кроме того, мы предполагаем, что наше тело в одной из его точек, например в начале координат, закреплено как

твердое тело и при $x=0$, $y=0$, $z=0$ предполагаем выполненными условия:

$$u=0, v=0, w=0, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (16)$$

Взяв уравнения теории упругости в комплексной форме (§ 1), найдем в этом случае $\psi = Z = 0$ и из (1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} = - \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \quad (17)$$

а из (2):

$$Z_z = - \frac{(1+i\epsilon)}{\epsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + 2\epsilon \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{2\epsilon} \varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z_1}. \quad (20)$$

Условие интегрируемости этих уравнений, определяющих w , будет

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} = \epsilon \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

откуда

$$(u+iv) = f(z, z_1) = \epsilon^2 (\alpha + \beta z) + \epsilon (\gamma + \delta z) + \frac{2}{\epsilon} \int \int (\alpha_1 + \beta_1 z) dz^2. \quad (21)$$

В это выражение войдет при интегрировании произвольная линейная функция от z ; она равна нулю в силу (16); здесь α , β , γ , δ какие-нибудь постоянные вещественные или мнимые, α_1 , β_1 сопряженные с α , β .

Каждому из этих постоянных отвечает соответствующая деформация. Заметим, что, несколько не ограничивая найденный результат, можно эти постоянные считать вещественными или чисто мнимыми (с вещественной частью равной нулю). В самом деле пусть какой-нибудь из коэффициентов чисто мнимый равен ai , где a вещественно. Умножая обе части (2) на $-i$, мы обратим его в a , а де-

формация, ей соответствующая, будет по существу та же, что и раньше, так как $u + iv$ обратится в $v + iu$ и совпадет с прежним, если мы переменим оси координат Ox и Oy и одну направим в обратную сторону.

В дальнейшем мы будем считать α, β, γ вещественными, а δ положим равным εi , где ε вещественно и следовательно в этом случае $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$; уравнение (21) примет вид:

$$(u + iv) = f(z, \zeta) = \zeta^2(\alpha + \beta z) + \zeta(\gamma + \varepsilon iz) + \frac{2}{\sigma} \int \int (\alpha + \beta z) dz^2. \quad (22)$$

Из (22) мы найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} = 2(\zeta + \zeta_1)(\alpha + \beta z) + \gamma$$

а, подставляя это выражение в (18), (19), получим:

$$Z_\varepsilon = -\frac{2\mu}{\sigma} (1 + \sigma) \{(\zeta + \zeta_1)(\alpha + \beta z) + \gamma\} \quad (23)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\sigma} \{(\zeta + \zeta_1)(\alpha + \beta z) + \gamma\}$$

и следовательно:

$$w = -\frac{1}{\sigma} \left\{ (\zeta + \zeta_1) \left(\alpha z + \frac{\beta z^2}{2} \right) + \gamma z \right\} + w_0, \quad (24)$$

где w_0 не зависит от z , а только от x, y .

Дифференцируя (20) по ζ и складывая дифференцированное выражение с получающимся из него при замене i на $-i$, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_1} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \zeta_1} = \\ &= \beta (\zeta + \zeta_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (17) и (23):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{2}{\sigma} \beta (\zeta + \zeta_1).$$

Подставляя сюда вместо w его выражение (24):

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{2}{\sigma} \beta (\zeta + \zeta_1),$$

и введя вместо w_0 величину W_0 уравнением:

$$w_0 = W_0 + \frac{\sigma \beta (\zeta + \zeta_1)}{2} = W_0 + \frac{\beta (\zeta + \zeta_1) \zeta \zeta_1}{4\tau},$$

найдем

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = 0.$$

Теперь:

$$w = -\frac{1}{\sigma} \left\{ (\zeta + \zeta_1) \left(\alpha z + \frac{\beta z^2}{2} \right) + \gamma z \right\} + \frac{\beta (\zeta + \zeta_1) \zeta \zeta_1}{4\tau} + W_0,$$

и мы можем насчет W_0 удовлетворить контурному условию (15a):

$$Z_x \cos nx + Z_y \cos ny = 0,$$

так как из (20)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2u} (X_z + iY_z) &= \frac{1}{2} \left\{ \beta \zeta^2 + \zeta \epsilon i + \frac{2}{\sigma} \int (\alpha + \beta z) dz \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \beta (x^2 - y^2) + 2xyi\beta + \right. \\ &+ \zeta \epsilon i - \frac{1}{\sigma} (\alpha z + \beta z^2) \left. \right\} + \frac{\beta (\zeta^2 + 2\zeta \zeta_1)}{4\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

и условие (15a) представится в виде:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\beta}{2} (x^2 - y^2) + \frac{\sigma \beta (3x^2 + y^2)}{2} \right\} \cos nx + \{ xy\beta + \sigma \beta xy \} \cos ny + \\ + x^2 \cos ny - y^2 \cos nx + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cos ny = 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем этим условием пользоваться в несколько иной форме, введя вместо W_0 функцию V_0 уравнением:

$$V_0 = W_0 + (x^2 + y^2) \varepsilon. \quad (25)$$

Функция V_0 удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} = 0,$$

условие на контуре примет вид:

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = \left\{ \frac{\sigma}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) y^2 \right\} \cos nx + (2 + \sigma) xy \cos ny. \quad (26)$$

§ 5. Растяжение и кручение.

1) Растяжение. Пусть из всех коэффициентов только $\neq 0$. Из ур-ния (21)

$$u = x\gamma, \quad v = y\gamma, \quad w = -z\gamma \frac{1}{\sigma}.$$

Это очевидно простое растяжение или сжатие по оси z , рассмотренное в § 10, гл. I.

2) Кручение. Предположим, что из всех коэффициентов не равно нулю только $\delta = \varepsilon i$, где ε вещественное число. Тогда

$$f(z, \zeta) = \zeta z \varepsilon i, \quad f_1(z, \zeta_1) = -\zeta_1 \varepsilon i z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} = 0$$

и следовательно из (18)

$$Z_\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

из ур-ния (17)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_1} = 0$$

и из уравнения (14)

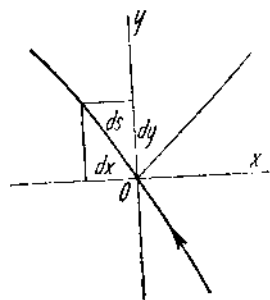
$$4 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \zeta_1} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Так как $\varphi = X_\varepsilon + iY_\varepsilon$, то из (20)

$$\frac{1}{\mu} X_\varepsilon = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{\mu} Y_\varepsilon = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}$$

и так как на контуре сечения должно быть выполнено условие (15), то на нем (черт. 38)

$$\left(-y^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cos nx + \left(x^2 + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos ny = 0;$$



Черт. 38.

мы можем положить (при надлежащем отсчете углов nx, ny, sx, sy)

$$\cos nx = \frac{dy}{ds}, \quad \cos ny = -\frac{dx}{ds}.$$

Введем теперь функцию ψ , сопряженную с w , т. е. такую, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

и следовательно $\psi + iw = F(\zeta)$ — функция от комплексной переменной $\zeta = x + iy$.

Условие на контуре дает

$$\psi + iw = \text{const} = C,$$

следовательно

$$F(\zeta) = SC - \frac{1}{2} \varepsilon r^2.$$

Примеры. Пусть

$$\psi + iw = A(x + iy)^2, \quad w = 2Axy;$$

уравнение на контуре будет:

$$A(x^2 - y^2) + \frac{1}{2} \varepsilon r^2 = \text{const} = C,$$

и мы имеем уравнение контура

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. эллипс.

Если возьмем

$$A + \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{C}{a^2}, \quad -A + \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{C}{b^2},$$

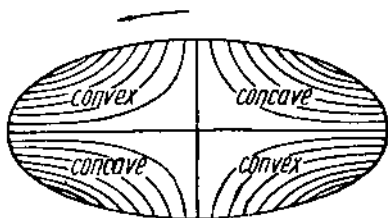
ткуда

$$C = \frac{\varepsilon a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad A = \frac{\varepsilon}{2} \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

Таким образом мы получим окончательно уравнения

$$u = \varepsilon yz, \quad v = -\varepsilon xz, \quad w = \frac{\varepsilon (a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} xy,$$

очевидно, что линии одинакового выпучивания и одинакового углубления, так называемые топографические линии представляют ряд равнобоковых гипербол (черт. 39а), причем квадранты эллипса попеременно делаются выпученными и вогнутыми, напряжения X_z и Y_z представляются формулами



Черт. 39-а.

$$X_z = -\frac{2\varepsilon a^2}{a^2 + b^2} y, \quad Y_z = -\frac{2\varepsilon b^2}{a^2 + b^2} x.$$

Скручивающий момент представится в виде:

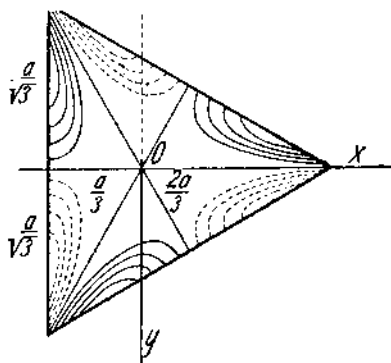
$$\begin{aligned} & \int \int (xY_z - yX_z) dx dy = \\ & = -\frac{2\varepsilon}{a^2 + b^2} \int \int (a^2 y^2 + b^2 x^2) dx dy = -\pi \varepsilon \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично решается вопрос со скручиванием призмы с основанием в виде равностороннего треугольника. Если a радиус вписанного в треугольник круга, уравнение контура может быть написано в виде

$$(x-a)(x-y\sqrt{3}+2a)(x+y\sqrt{3}+2a)=0$$

или

$$x^3 - 3xy^2 + 3a(x^2 + y^2) - 4a^3 = 0,$$



Черт. 39-6.

и мы очевидно получим решение о кручении такой призмы, положив

$$\psi = \frac{1}{6a} (x^3 - 3xy^2),$$

$$w = \frac{\epsilon}{6a} (y^3 - 3x^2y).$$

Топографические линии представлены на черт. 39, и площадь треугольника разбивается после деформации на ряд попеременно выпуклых и вогнутых треугольников.

§ 6. Решение задачи о кручении для призмы с основанием в виде прямоугольника.

Для решения задачи о кручении призмы с основанием в виде прямоугольника, контур которого задан прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$, мы введем вместо функции ψ функцию

$$\psi_0 = \psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - b^2,$$

которая на контуре удовлетворяет условиям: во-первых, внутри прямоугольника она гармоническая, и во-вторых, на сторонах $y = \pm b$ равна нулю, а на сторонах $x = \pm a$ равна $y^2 - b^2$; очевидно, что за функцию ψ_0 можно принять:

$$4b^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b},$$

так как в силу известного разложения

$$y^2 - b^2 = 4b^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

при $b > y > -b$,

Соответственно ψ и w представляются в виде:

$$\begin{aligned}\psi &= b^2 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \\ &- 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \\ &= -xy + 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}.\end{aligned}$$

Из этих формул можно вывести формулу для кручения призмы с основанием в виде прямоугольного треугольника. Заметим для этого, что выражение для ψ может быть написано в двух эквивалентных видах:

$$\begin{aligned}\psi &= a^2 - \frac{1}{2}(y^2 - x^2) - \\ &- 4a^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \\ \psi &= b^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \\ &- 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}.\end{aligned}$$

Видоизменим эти выражения, прибавив к ним члены, которые обращаются в нуль на сторонах прямоугольника

$$BD \ (x=a), \quad AB \ (y=b)$$

и видоизменяя ch в sh , мы составим таким образом две функции

$$\begin{aligned}\psi_1 &= a^2 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) - \frac{a}{b}(x - a)(y - b) - \\ &- 4a^3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \\ \psi_2 &= b^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{b}{a}(x - a)(y - b) - \\ &- 4b^3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b},\end{aligned}$$

которые очевидно удовлетворяют основному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

а на сторонах BD и AB принимают значения

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

На диагонали AD ($ay + bx = 0$) мы имеем:

$$\frac{a^2\lambda + b^2\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} (y^2 - x^2) - \frac{a^2\lambda + b^2\mu}{ab(\lambda + \mu)} (x - a)(y - b) = 0$$

и взяв две произвольные постоянные λ и μ , положим:

$$\begin{aligned}\psi_{\lambda\mu} &= \frac{\lambda\psi_1 + \mu\psi_2}{\lambda + \mu} = \frac{a^2\lambda + b^2\mu}{\lambda + \mu} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} (y^2 - x^2) - \frac{a^2\lambda + b^2\mu}{ab(\lambda + \mu)} (x - a)(y - b) - \frac{T}{\lambda + \mu},\end{aligned}$$

где

$$T = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ \lambda a^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} + \right. \\ \left. + \mu b^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \right\}.$$

Выбрав λ и μ так, чтобы $T=0$ или по крайней мере было близко к нулю для всех точек диагонали AD . Очевидно, что ψ нам даст функцию для призмы в виде треугольника ABD и условие $T=0$ для $a=b$ выполнено при $\lambda=\mu$, так как очевидно

$$(T)_{\substack{\lambda=\mu \\ a=b}} = 0 \text{ для } x = -y$$

и

$$\psi = -xy + a(x+y) -$$

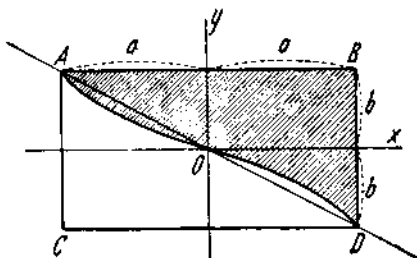
Черт. 40.

$$- 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} + \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \right\}$$

даст решение задачи о кручении для прямоугольного равнобедренного треугольника, предложенное Б. Г. Галеркиным.

Чтобы удовлетворить $T=0$ при $a > b$, заметим, что можно всегда подобрать так λ и μ , чтобы удовлетворить ему достаточно точно. Если предположить в выражении для ψ , λ , μ какими угодно, мы получаем задачу о кручении с призмой, имеющей сечение контур Q , ограниченный двумя взаимно перпендикулярными прямыми Ox , Oy и волнообразной линией (черт. 40).

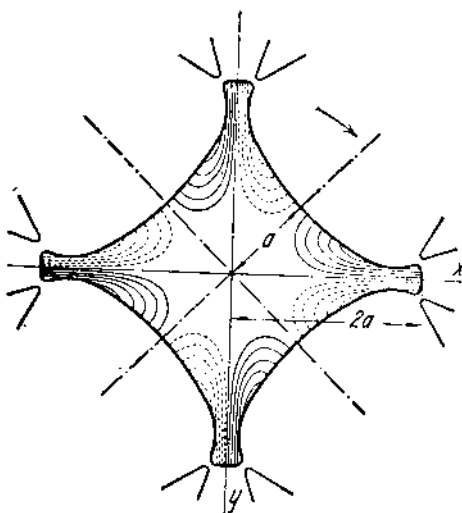


§ 7. Более сложные случаи вопроса о кручении.

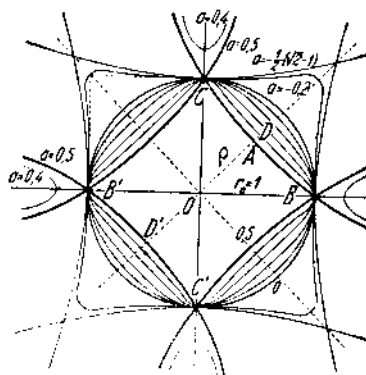
Кроме вышеуказанных случаев есть еще целый ряд контуров, для которых решена задача о кручении. Сен-Венан решил задачу для контура, уравнение которого в полярных координатах

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^4 \cos 4\psi + \frac{12}{49} \cdot \frac{16}{17} \left(\frac{r}{b}\right)^8 \cos 8\psi = 1 - \frac{36}{40} \cdot \frac{16}{17}$$

Контур изображен на черт. 41 и представляет четырехугольник с лопастями. Наибольшие радиусы-векторы при $\psi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$



Черт. 41.



Черт. 42.

равны b , наименьшие при $\psi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ равны $\frac{1}{2}b$, на черт. 41 показаны топографические линии искривленного кручением сечения. Интересный контур указал Сен-Венан уравнением

$$x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = 1 - a$$

или в полярных координатах

$$r^2 - ar^4 \cos 4\psi = 1 - a,$$

Это уравнение представляет ряд контуров (черт. 42) и при $\alpha=0$ и $\alpha=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ представляет собой квадраты с заостренными концами, а при промежуточных значениях получаются квадраты с закругленными концами.

Мы¹⁾ решили при помощи комплексной переменной задачу о кручении сектора, ограниченного двумя прямыми, пересекающимися под малым углом, и кривой линией. Из контуров, ограниченных многоугольниками с прямолинейными сторонами, отметим еще решение Кеттера [40*] для сечения углового железа. Этот прием применим также к практически важным случаям таврового и двутаврового сечения.

§ 8. Изгиб.

Предположим, что все коэффициенты кроме α равны нулю. В этом случае мы получаем для проекции перемещений выражение

$$u + iv = f(z, \bar{z}) = \alpha \left(\bar{z}^2 + \frac{1}{3} z^2 \right),$$

откуда следует

$$u = \frac{\alpha}{3} z^2 + \alpha (x^2 - y^2), \quad v = 2xy\alpha, \quad w = -\frac{\alpha}{3} xz,$$

$$Z_x = E \frac{\partial w}{\partial z}, \quad X_z = Y_z = 0.$$

Контурные условия в этом случае выполняются сами собой, и, предполагая центр тяжести сечения призмы в начале координат, найдем, что главный вектор напряжения Z_x равен нулю в каждом из сечений, так как

$$\iint Z_x dx dy = E \frac{\alpha}{3} \iint x dx dy = 0.$$

Главный момент напряжений вокруг осей Ox , Oy равен нулю, а около оси z равен

$$M = \iint (zX_z - xZ_z) dx dy = E\alpha J$$

¹⁾ См. Колосов и Гавра [85].

(здесь J_y момент инерции сечений вокруг оси y). Ось призмы $x=y=0$ после деформации обращается в параболу $x_1 = -\frac{\alpha z^2}{2}$, которая вследствие малости перемещений может считаться окружностью радиуса $\frac{1}{\alpha}$. Это есть тот случай изгиба, который в курсах сопротивления материалов рассматривается под названием чистого изгиба. Он получается при действии пар сил, приложенных к концам призмы, момент которых равен

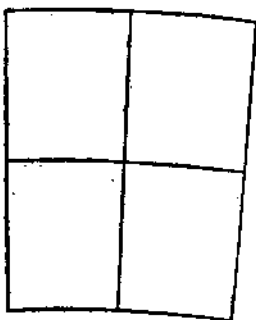
$$M = EJ_y \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

и следовательно пропорционален радиусу кривизны изогнутой оси.

Если призма имеет длину l , то полное отклонение (стрела изгиба) будет

$$u = -\frac{1}{z} \alpha l^2 = \frac{l^2 M}{2EJ_y},$$

Черт. 43.



так как $w = -\frac{dxZ}{\alpha}$, то этим проверяется делаемое в сопротивлении материалов предположение, что плоское сечение остается плоским и только поворачивается на угол $\frac{w}{x} = \alpha z$.

Стороны, параллельные оси y , обращаются в одинаково наклоненные к ней прямые, и если сечение имеет прямоугольную форму, оно обращается в изогнутую (черт. 43). Корню проверил это опытом, наблюдая полосы Ньютона, образующиеся при наложении на изогнутую поверхность стеклянной пластинки. Кривые будут $u = \text{constg}$ или

$$z - \alpha y^2 = \text{const}$$

и представляют семейство гипербол, асимптоты которых образуют угол α с осью z , так что $\text{ctg } \alpha = \alpha$.

Фотографируя их и измеряя угол α , он получил для коэффициента Пуассона величину близкую к $\frac{1}{4}$.

Предположим, что все коэффициенты кроме β равны нулю, мы найдем в этом случае для перемещений выражение

$$f = u + iv = \beta z^2 + \frac{2}{3} \beta \frac{z^3}{c}$$

$$Z_s = -\mu (1 + \sigma) \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2 \frac{1}{\mu} \varphi = \frac{1}{\mu} (X_s + iY_s) = \frac{1}{2} \left(\beta z^2 + \frac{\beta z^3}{c} \right) + \frac{\partial w}{\partial z_1},$$

где V_0 определяется ур-нием (25) и условием (26) на контуре

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = \left\{ \frac{\sigma}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) y^2 \right\} \cos nx + (2 + \sigma) xy \cos ny.$$

Функцию W_0 легко получить для эллиптического (в частности кругового) контура, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и следовательно

$$\cos nx : \cos ny = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2}.$$

Ур-ние (26) будет

$$b^2 x \frac{\partial W_0}{\partial x} + a^2 y \frac{\partial W_0}{\partial y} = \frac{\sigma}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) y^2 bx + (2 + \sigma) a^2 xy^2.$$

Чтобы ему удовлетворить, положим:

$$W_0 = \left[\frac{\sigma}{2} a^2 - \frac{\left(\frac{\sigma}{2} - 1 \right) b^2 - \left(2 + \frac{\sigma}{2} \right) a^2}{9a^2 + 3b^2} \right] x + \\ + \frac{\left(\frac{\sigma}{2} - 1 \right) b^2 - \left(2 + \frac{\sigma}{2} \right) a^2}{9a^2 + 3b^2} (x^3 - 3xy^2).$$

Выпучивание определяется уравнением

$$w = \frac{x}{2J} \left(\frac{xz^2}{2} - xy^2 \right) + D(x^3 - 3xy^2).$$

В случае кругового сечения мы имеем $a = b$ и уравнение имеет вид (черт. 44):

$$x \left(\frac{z^2}{2} - \frac{x}{y} \right) (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Рассмотрим случай прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

Основное уравнение на контуре

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = - \left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) y^2 \right\} \cos nx - (2 + \sigma) xy \cos ny$$

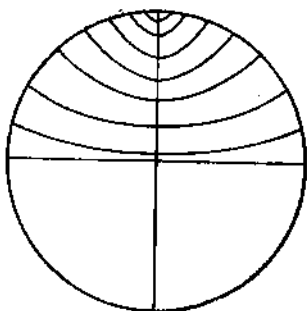
примет вид:

для $x = \pm a$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \left\{ \frac{1}{2} \sigma a^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) y^2 \right\} \quad \text{при } b > y > -b,$$

а для $y = \pm b$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - (2 + \sigma) bx \quad \text{при } a > x > -a.$$



Черт. 44.

Введя новую переменную

$$\chi_1 = \chi - \frac{1}{\sigma} (2 + \sigma) (x^2 - 3xy^2)$$

найдем, что на границе $x = \pm a$ должно быть

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} = - (1 + \sigma) a^2 + \sigma y^2$$

а на границе $y = \pm b$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y} = 0.$$

Имея в виду известное разложение:

$$y^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{4b^2}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

и положив:

$$\chi_1 = \left\{ -(1 + \sigma) a^2 + \frac{1}{3} \sigma b^2 \right\} + \\ + \frac{4b^3}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\cosh \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

мы очевидно удовлетворим всем условиям на контуре.

Как частный случай для $a = b$ мы получаем решение для квадрата. Из этого решения приемом, аналогичным примененному нами в теории кручения, мы можем решить задачу для равнобедренного треугольника и получить формулы аналогичные формулам Б. Г. Галеркина ¹⁾, а также рассмотреть случай контура в виде носка, решенный в кручении (стр. 185).

§ 9. Задача Сен-Венана для кривого бруса.

Неоднократно делалась попытка распространить задачу Сен-Венана на случай кривого бруса, и наиболее важные результаты получены в этом отношении Митчелем, указавшим целый ряд интересных решений, но в самом общем случае задача не была еще затронута ни одним исследователем.

Введение комплексной переменной в случае задачи Сен-Венана для бруса с прямолинейной осью, значительно упрощающее расчеты, привело нас к мысли применить этот метод и в случае бруса с криволинейной осью, и применяя этот метод в целом ряде случаев, мы получаем решение задачи и устанавливаем ее невозможность в рассматриваемом случае. Кроме введения комплексной переменной или вернее введения комплексного преобразования уравнений теории упругости важное значение имеет выбор надлежащей системы координат.

Рассмотрим, во-первых, тело вращения, образованное вращением какой-нибудь плоской кривой, вокруг оси Oz . Положение точки будем определять цилиндрическими координатами r, θ, z .

¹⁾ Comptes Rendus, т. 180, 1925 г.

Пусть

$$R_r, \Theta, Z_z, Z_\theta, R_\theta, R_z$$

будет тензор напряжений относительно осей Oz, r, θ , а

$$u_z, u_r, u_\theta = u$$

перемещения по осям. Введем обозначения

$$f = u_r + iu_z, \quad \zeta = r + iz, \quad \omega = R_r + Z_z, \quad \Omega = R_z - Z_z + 2iR_\theta.$$

Применяя комплексное преобразование, мы найдем уравнения равновесия в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta_1} + \frac{1}{2r} \omega + \frac{1}{2r} \Omega - \frac{\Theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi + \varphi_1}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

а выражения напряжения через перемещения в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 4\mu \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}, \\ w &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) + 2\lambda \left(\frac{f + f_1}{2r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{\mu} \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2r \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{u}{r} \right), \\ \Theta &= (2\mu + \lambda) \left(\frac{f + f_1}{2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где λ и μ коэффициенты упругости Ляме.

Задача, аналогичная задаче Сан-Венана, получается в предположении

$$R_r = Z_z = R_z = 0, \quad (29)$$

на боковой поверхности должно быть выполнено условие:

$$R_\theta \cos rN + \Theta_z \cos zN = 0, \quad (30)$$

где N нормаль к контуру (σ) — пересечению тела какой-нибудь плоскостью, перпендикулярной к оси цилиндра. На-

правильным надлежащим образом касательную s и z , мы можем положить:

$$\cos(r, N) = \frac{dz}{ds}; \quad \cos(z, N) = -\frac{dr}{ds}$$

и условие (29) примет вид:

$$R_g dz - b_z dr = 0.$$

Ур-ния (28) в предположении (29) дадут:

$$\Theta_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\varphi + \varphi_1}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} = 0 \quad (31)$$

$$f = f(\zeta, \theta),$$

$$\Theta_0 = -\frac{\mu}{\lambda} (2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) =$$

$$= \frac{\mu (2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu} \left(\frac{f + f_1}{2r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

$$2r \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{1}{\mu} \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

из последних двух уравнений следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{r} \right) &= -\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) - \frac{f + f_1}{2r} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{u}{r} \right) &= \frac{1}{2\mu r} \varphi - \frac{\partial_1}{2r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

условие интегрируемости которых будет:

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda + \mu}{\lambda} (\zeta + \zeta_1)^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \zeta_1^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} (\zeta + \zeta_1) + f + f_1 = \\ & = \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda} (\zeta + \zeta_1) \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} \right) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \end{aligned}$$

откуда легко вывести:

$$f(\zeta, \theta) = a\zeta^2 + b\zeta + C$$

$$C = i(k\theta + k_0) + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta,$$

где

$$a = 0, \quad b = (A \cos \theta + B \sin \theta) i,$$

и мы получим:

$$f = (A \cos \theta + B \sin \theta) i \zeta + ik\theta + ik_0 + \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta.$$

Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} = 0,$$

из (31) следует:

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\varphi + \varphi_1}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_1} = 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{f + f_1}{2} = \frac{(\zeta_1 - \zeta) i}{2} (A \cos \theta + B \sin \theta) - \\ - \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta = z (A \cos \theta + \beta \sin \theta - \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{1}{2\mu r} \varphi - \frac{1}{2r^2} [\zeta (B \cos \theta - A \sin \theta) i + \\ + ik + \beta \cos \theta - \alpha \sin \theta]. \end{aligned} \quad (35)$$

Из уравнения (34) мы найдем:

$$\begin{aligned} u = \frac{(\zeta_1 - \zeta)}{2} i (A \sin \theta - B \cos \theta) - \alpha \sin \theta + \\ + \beta \cos \theta + \chi(z, r) \end{aligned} \quad (36)$$

а, принимая во внимание, что

$$r = \frac{\zeta + \zeta_1}{2}, \quad \int \frac{d\zeta_1}{2r^2} = -\frac{2}{\zeta + \zeta_1} = -\frac{1}{r} \quad (37)$$

найдем из уравнения (35):

$$\begin{aligned} u = \frac{r}{2\mu} \int \frac{\varphi}{r} d\zeta_1 + \frac{(\zeta_1 - \zeta) i}{2} (A \sin \theta - B \cos \theta) - \alpha \sin \theta + \\ + B \cos \theta + ik + r\tau(\zeta), \end{aligned}$$

где $\tau(\zeta)$ произвольная функция от ζ .

(37) совпадает с (36), если

$$\frac{1}{2\mu} \int \frac{\varphi}{r} d\zeta_1 + \frac{ik}{r} + \tau(\zeta) = \frac{1}{r} \chi(r).$$

В виду вещественности $\chi(r)$ и u [определяемой из (36)], необходимо, чтобы мнимая часть величины

$$\frac{1}{2\mu} \int \frac{\varphi}{r} d\zeta_1 + \frac{ik}{r} + \tau(\zeta)$$

равнялась нулю.

Митчелль удовлетворяет как контурному условию (4), так и уравнению (33), положив

$$\varphi = \frac{i}{r^2} \frac{\partial \psi(z, r)}{\partial \zeta_1},$$

где ψ — вещественная функция z и r .

Требование вещественности u приводит к уравнению (17), вставляя в которое это значение φ , взяв от обеих частей оператор $\nabla_2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_1}$ и замечая, что

$$R \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

мы найдем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + 2\mu k = 0.$$

Уравнение (4) требует на контуре $\psi = \text{const}$, т. е. в этой форме оно должно представляться уравнением контура.

Митчелль например полагает

$$\psi = pr^4 + 2qr^2 + 4qz^2 - \mu kz^2,$$

где p, q, k независимые друг от друга постоянные.

Полагая

$$\frac{q}{p} = -b^2, \quad 4q - \mu k = pc^2,$$

найдем

$$\psi = p \{ (r^2 - b^2)^2 + c^2 z^2 \},$$

и уравнение контура принимает вид

$$(r^2 - b^2)^2 + c^2 z^2 = \text{const} = a^4.$$

Если $b^2 > a^2$, мы получаем уравнение овала, не пересекающего ось и вписанного в прямоугольник; линии $r = b$ и $z = 0$ назовем осями овала, длины осей будут $\frac{2a^2}{c}$ и $\sqrt{b^2 + a^2} - \sqrt{b^2 - a^2}$, которое мы обозначим через 2α , 2β ; так как $b^2 + a^2 - (b^2 - a^2) = 2a^2$, то $\sqrt{b^2 + a^2} + \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{a^2}{\beta}$.

Поэтому

$$2\sqrt{b^2 + a^2} = \frac{a^2}{\beta} + 2\beta$$

$$2\sqrt{b^2 - a^2} = \frac{a^2}{\beta} - 2\beta$$

$$a^4 = 4\beta^2(b^2 - \beta^2), \quad b^4 - a^4 = (b^2 - 2\beta^2)^2,$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4}} = \frac{2\beta^2}{b^2}.$$

Площадь овала ($b^2 > 2\beta^2$)

$$A = 2 \int z dr = 2 \frac{a^4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{\sqrt{(b^2 - a^2) \sin^2 \theta + (b^2 + a^2) \cos^2 \theta}}.$$

Полагая

$$r^2 = (b^2 - a^2) \sin^2 \theta + (b^2 + a^2) \cos^2 \theta,$$

мы найдем

$$A = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{c}} [b^2 E_1(x) - (b^2 - a^2) F_1(x)],$$

где $x = \sqrt{\frac{2a^2}{b^2 + a^2}}$, F_1 и E_1 — эллиптические интегралы в их обыкновенном обозначении. Расстояние центра тяжести

$$r_c = \frac{2 \int z r dr}{A} = 2 \frac{a^4}{cA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi a^4}{2cA}.$$

В случае прямоугольного сечения, ограниченного прямыми:

$$r=a, r=b \text{ и } z=0, z=h,$$

положим

$$\psi = \mu k z (h - z) + \psi_0.$$

Если $\psi = 0$, уравнение контура $\psi_0 = 0$ при $z = 0$ и $z = h$, возьмем

$$\psi_0 = r^2 \left\{ \sum C_n I_2 \left(\frac{n\pi r}{h} \right) + D_n K_2 \left(\frac{n\pi r}{h} \right) \right\} \frac{n\pi z}{h},$$

где n — целое, I_2 и K_2 — Бесселевы функции в обозначении Gray и Mathews:

$$I_2(x) = -J(ix), \quad K_2(x) = \frac{3}{x^2} \int_0^\infty \frac{\cos(x \sinh \Phi)}{\cosh \Phi} d\Phi.$$

Мы имеем $\psi_0 = \mu k z (h - z)$ при $r = a$ и $r = b$, и поэтому

$$C_n I_2 \left(\frac{n\pi a}{h} \right) + D_n K_2 \left(\frac{n\pi a}{h} \right) = - \frac{2\mu k}{a^2 h} \int_0^h z(h-z) \sin \frac{n\pi z}{h} dz$$

$$C_n I_2 \left(\frac{n\pi b}{h} \right) + D_n K_2 \left(\frac{n\pi b}{h} \right) = - \frac{2\mu k}{b^2 h} \int_0^h z(h-z) \sin \frac{n\pi z}{h} dz,$$

так что $C_{2n} = D_{2n} = 0$

$$\begin{aligned} C_{2n+1} I_2 \left\{ \frac{(2n+1)\pi a}{h} \right\} + D_{2n+1} K_2 \left\{ \frac{(2n+1)\pi a}{h} \right\} &= \\ &= - \frac{8\mu k h^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2} \end{aligned}$$

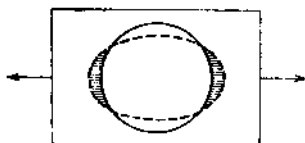
и

$$\begin{aligned} C_{2n+1} I_2 \left\{ \frac{(2n+1)\pi b}{h} \right\} + D_{2n+1} K_2 \left\{ \frac{(2n+1)\pi b}{h} \right\} &= \\ &= - \frac{8\mu k h^2}{(2n+1)^3 \pi^3 b^2}, \end{aligned}$$

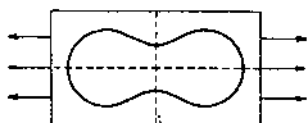
откуда постоянные и определяются.

§ 10. Об экспериментальном распределении напряжений по краям кругового эллиптического и других отверстий.

Формулы распределения напряжений в полосах, ослабленных круговыми эллиптическими и другими отверстиями, обнаруживают любопытное влияние кривизны контура отверстия на распределение напряжений по этому контуру. В случае кругового и эллиптического отверстий в точках, лежащих на оси Ox , по направлению которой происходит растяжение, наблюдается сжатие элементов полосы, так что если она состоит из материала, плохо сопротивляющегося сжатию, в этих точках происходит выпучивание ее. На черт. 45 изображена пленка эластичной резины с отвер-



Черт. 45.



Черт. 46.

ствием в виде круга, растягиваемая по горизонтальному направлению. На чертеже ясно видно выпучивание пленки в точках, прилегающих к горизонтальной оси Ox . Наоборот, при растяжении полос отверстием в виде лемнискаты, как следует из наших формул, эти элементы явятся растянутыми и выпучивания не появятся. На черт. 46 изображена пленка эластической резины с отверстием в виде лемнискаты, растягиваемая по горизонтальному направлению. Таким образом кривизна контура отверстия несомненно имеет большое влияние на распределение вдоль по этому контуру напряжений, и с этим влиянием приходится считаться в строительной механике и технике, например при проектировании каменных труб и арок ¹⁾.

¹⁾ С. И. Белзевский, пользуясь плоской задачей, выработал ряд типов каменных арок и труб при постройке Петровско-Бакинской и др. ветвей Владикавказской ж. д. В одном из этих типов небольшая выкружка в средней части арки видоизменяет распределение в ней напряжений и дает в пятах арки вместо нежелательного в них растяжения — сжатие.

ДОБАВЛЕНИЕ

1. Формула Шварца для круга и некоторые следствия из нее.

Пусть имеем круг, центр которого в точке $z=0$ и радиус R . Мы желаем построить функцию $f(z)$ голоморфную внутри этого круга, зная значения вещественной части этой функции во всех точках обвода круга, где $f=\varphi(\theta)$ (θ — центральный угол, отсчитываемый от какого-нибудь диаметра). Так как функция f голоморфна, ее можно представить рядом:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n z^n \quad (1)$$

где c_n — коэффициенты, неизвестные значения которых мы должны определить.

В точке z , находящейся на контуре, мы имеем

$$z = Re^{i\theta}$$

и

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

таким образом разложение (1) принимает вид

$$f(Re^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n R^n e^{in\theta}.$$

Для разложения вещественной части $f(Re^{i\theta})$ мы имеем:

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} R^n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta), \quad (2)$$

где мы отделяем в коэффициентах с вещественную часть от мнимой, положив

$$c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_n = a_n + ib_n.$$

Выражение (2) предполагает, что $\varphi(\theta)$ может быть разложено в ряд Фурье по косинусам и синусам дуг, кратных θ . Сделав это предположение, сравним (2) с известными фор-

мулами, определяющими коэффициенты разложения некоторой функции в ряд Фурье. Мы будем тогда иметь

$$a_0 = \int_0^{2\pi} \varphi d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi \cos n\theta d\theta,$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi \sin n\theta d\theta,$$

отсюда

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\theta + ib_0, \quad c_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi e^{-in\theta} d\theta.$$

Внеся эти выражения в формулу (1), найдем

$$f(z) = ib_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n e^{-in\theta}}{R^n} d\theta,$$

так как

$$\left| \frac{z}{R} \right| < 1.$$

Изменяя бесконечную прогрессию под знаком второго интеграла через ее сумму:

$$\frac{z}{Re^{i\theta} - z},$$

мы найдем искомую формулу, известную под названием формулы Шварца в виде ¹⁾:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + ib_0 = S \varphi(\theta),$$

где S символ Шварца.

Как и следовало ожидать, в нее входит чисто мнимая постоянная произвольная ib_0 .

¹⁾ Ges. Abh. В. II, стр. 152. Другой, более непосредственный, вывод см. Bo'g gio, Atti R. Acc. di Torino, vol. XLVII, 1911, стр. 22—37.

Простейшие случаи применения формулы Шварца. Предположим, что на контуре круга $\varphi(\theta) = \varphi(2\pi - \theta)$. Формула Шварца примет тогда вид:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\theta) \left\{ \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} + \frac{Re^{-i\theta} + z}{Re^{-i\theta} - z} \right\} d\theta$$

или

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\theta) \frac{R^2 - z^2}{R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2} d\theta$$

Предположим, что окружность разделена на n , вообще говоря, не равных частей, на каждой из которых вещественная часть φ сохраняет постоянное значение, так что

$$\varphi = \varphi_1 \text{ при } 0 < \theta < \theta_1,$$

$$\varphi = \varphi_2 \text{ при } \theta_1 < \theta < \theta_2$$

.....

$$\varphi = \varphi_n \text{ при } \theta_{n-1} < \theta < \theta_n = 2\pi$$

Применяя основную формулу к каждому из этих промежутков, мы найдем¹⁾:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^{h=n} \varphi_h \int_{\theta_{h-1}}^{\theta_h} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta = \varphi_1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^n \varphi_h (\varphi_{h+1} - \varphi_h) \theta_h + \\ + \frac{i}{\pi} \sum_{h=1}^{h=n} (\varphi_{h+1} - \varphi_h) \lg(z_h - z)$$

(при условии $\varphi_{n+1} = \varphi_1$).

3. Формула Шварца для эллипса.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \geq b.$$

¹⁾ Подробности и следствия см. Cizotti [62].

Она может быть представлена рядом, расположенным по полиномам

$$P_n(z) = (z + \sqrt{z^2 - c^2})^n + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^n,$$

где

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

так что

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n(z)^1).$$

Имея в виду тождество:

$$(z + \sqrt{z^2 - c^2})(z - \sqrt{z^2 - c^2}) = c^2 = a^2 - b^2$$

положим

$$Z = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b} = \frac{a - b}{z - \sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Тогда:

$$|Z| = \frac{|z + \sqrt{z^2 - c^2}|}{a + b} = \frac{a - b}{|z - \sqrt{z^2 - c^2}|}.$$

Имея в виду, что

$$z \pm \sqrt{z^2 - c^2} \leq |z| + |\sqrt{z^2 - c^2}| \leq a + b$$

и положив

$$q = \frac{a - b}{a + b},$$

мы найдем:

$$q \leq |Z| \leq 1,$$

потому

$$P_n = (a + b)^n (Z^n + q^n Z^{-n}),$$

откуда

$$z = \frac{1}{2} \left\{ (a + b)Z + (a - b)Z^{-1} \right\} = \frac{a + b}{2} \left\{ Z + qZ^{-1} \right\},$$

и мы имеем:

$$\begin{aligned} f(z) &= f \left\{ \frac{a + b}{2} (Z + qZ^{-1}) \right\} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (a + b)^n (Z^n + q^n Z^{-n}). \end{aligned} \quad (3)$$

¹⁾ См. Picard, Traité d'Analyse, II, стр. 317, 1905.

Полагая

$$Z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

найдем

$$z = \frac{1}{2} \left\{ (a+b)e^{i\theta} + (a-b)e^{-i\theta} \right\} = a \cos \theta + ib \sin \theta.$$

При изменении θ от 0 до 2π точка z опишет эллипс. Соответствующие значения $f(z)$ мы получим, полагая $Z = e^{i\theta}$ из ур-ния (3):

$$f(a \cos \theta + ib \sin \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (a+b)^n (e^{in\theta} + q^n e^{-in\theta}).$$

Полагая

$$c_0 = \alpha_0 + i\beta_0, \quad c_n = \alpha_n + i\beta_n$$

получим

$$\varphi(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^n \left\{ \alpha_n (1+q^n) \cos n\theta - \beta_n (1-q^n) \right\} \sin n\theta.$$

Приняв, что $\varphi(\theta)$ раскладывается в ряд Фурье, найдем:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\theta, \quad (a+b)^n \alpha_n = \frac{1}{\pi(1+q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi \cos n\theta d\theta$$

$$(a+b)^n \beta_n = -\frac{1}{\pi(1-q^n)} \int_0^{2\pi} \varphi \sin n\theta d\theta.$$

Таким образом определяются коэффициенты c_n разложения, а что касается коэффициента c_0 , то он определяется до чисто мнимой постоянной.

Совершенно также как для круга мы имеем

$$q \leq |Z| \leq 1$$

и получаем следующую формулу:

$$f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \frac{e^{i\theta} + Z}{e^{i\theta} - Z} d\theta + \frac{1}{\pi} \varphi Q d\theta,$$

где

$$Q = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h}(Ze^{-i\theta} - Z^{-1}e^{i\theta})}{1 - q^{2h}(Ze^{-i\theta} + Z^{-1}e^{i\theta} + q^{4h})} + \\ + \frac{q^{2h-1}(Z^{-1}e^{-i\theta} - Ze^{i\theta})}{1 - q^{2h-1}(Z^{-1}e^{-i\theta} + Ze^{i\theta}) + q^{4h-2}}.$$

Эта формула определяет до чисто мнимой постоянной функцию $f(z)$, голоморфную на площади эллипса, вещественная часть которой имеет на контуре эллипса наперед заданное значение φ , и следовательно представляет символ Шварца для эллипса. Если мы положим $a=b=R$, мы найдем $q=0$, и формула совпадет с формулой Шварца для круга.

Выражение Q можно выразить в эллиптических функциях, введя эллиптические функции вещественного периода 2ω и мнимого $2\omega'$. Полагая ω и $\frac{\omega'}{b}$ положительными, положим

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}$$

и введем функции ζ и ζ_3 Вейерштрасса

$$\zeta u = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h} \sin \frac{\pi u}{\omega}}{1 - 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{\omega} + q^{4h}}$$

$$\zeta_3 v = \frac{\eta v}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h-1} \sin \frac{\pi v}{\omega}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi v}{\omega} + q^{4h-2}},$$

где $\eta = \zeta\omega$.

Полагая

$$u = \frac{\omega}{i\pi} \lg Z - \frac{\omega\theta}{\pi}, \quad v = \frac{\omega}{i\pi} \lg Z + \frac{\omega\theta}{\pi},$$

мы легко получим:

$$Q = -\frac{i}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2i} \lg Z - \frac{\theta}{2} \right) + \\ + \frac{i\omega}{\pi} \left\{ \zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg Z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) - \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg Z + \frac{\omega\theta}{\pi} \right) + \frac{2\eta\theta}{\pi} \right\}.$$

3. Формула Дини.

При выводе теоремы Шварца мы составляли выражение на окружности круга вещественной части $\varphi(\theta)$ функции $f(z)$. Точно также получается и мнимая часть:

$$\varphi(\theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} R^n (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta).$$

Коэффициенты a_n и b_n , значения которых были приведены также при помощи формул интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1 = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta_1) \sin n\theta_1 d\theta_1$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta_1) \sin n\theta_1 d\theta_1 = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1$$

примут вид:

$$a_n = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi R^n n} \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1, \quad b_n = -\frac{1}{\pi R^n n} \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1$$

$$\varphi(\theta) = b_0 - \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos n(\theta_1 - \theta)}{n} d\theta_1$$

Но

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos n(\theta_1 - \theta)}{n} = \frac{1}{2} \lg \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta}{2}}$$

и мы найдем:

$$\psi(\theta) = b_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'(\theta_1) \lg \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta}{2}} d\theta_1$$

4. Формула Вилла (символ Шварца) для кругового кольца.

Возьмем круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями, причем радиус внешней окружности положим равным единице, а радиус внутренний

$q < 1$. Общий центр пусть соответствует точке $z = 0$. Пусть функция $f(z)$ голоморфна на площади этого кольца и следовательно раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n z^n + b_n z^{-n}), \quad (4)$$

где коэффициенты пока какие угодно.

Для точек, лежащих на внешней окружности, мы имеем

$$z = e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

и разложение (4) принимает на этой окружности вид

$$f(e^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n e^{in\theta} + b_n e^{-in\theta}).$$

Положим:

$$a_0 = \alpha_0 + i\alpha'_0, \quad a_n = \alpha_n + i\alpha'_n, \quad b_n = \beta_n + i\beta'_n,$$

где $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \dots$ вещественные постоянные.

Пусть φ_1 и φ_2 значение вещественной части функции $f(z)$ на внешней и на внутренней окружности. Мы имеем:

$$\varphi_1 = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_n + \beta_n) \cos n\theta - (\alpha'_n - \beta'_n) \sin n\theta. \quad (5)$$

Предположим, что $\varphi_1(\theta)$ раскладывается в ряд Фурье по синусам и косинусам кратных дуг. Сравнивая с этим разложением выражение (5), найдем:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 d\theta, \quad \alpha_n + \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 \cos n\theta d\theta;$$

$$-\alpha'_n + \beta'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 \sin n\theta d\theta.$$

Аналогично для внутренней окружности будем иметь:

$$z = qe^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

и мы найдем для разложения φ_2 на внутренней окружности выражение

$$f(qe^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (q^n a_n e^{in\theta} + q^{-n} b_n e^{-in\theta}).$$

Подставляя в эту формулу вместо a_n и b_n их выражения и, отделяя вещественную часть от мнимой, найдем

$$\varphi_q = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{ (\alpha_n q^n + \beta_n q^{-n}) \cos n\theta - (\alpha'_n q^n - \beta'_n q^{-n}) \sin n\theta \}.$$

Предполагая, как и на внешней окружности, что $\varphi_q(\theta)$ раскладывается в ряд Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q d\theta & \alpha_n q^n + \beta_n q^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q \cos n\theta d\theta; \\ & & -\alpha'_n q^n + \beta'_n q^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

Сравнивая эти значения с полученными для внешней окружности, найдем:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q d\theta, \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi(1-q^{2n})} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi_1 \cos n\theta d\theta - q^n \int_0^{2\pi} \varphi_q \cos n\theta d\theta \right\} \\ \beta_n &= \frac{q^n}{\pi(1-q^{2n})} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi_q \cos n\theta d\theta - q^n \int_0^{2\pi} \varphi_1 \cos n\theta d\theta \right\} \\ \alpha'_n &= \frac{1}{\pi(1-q^{2n})} \left\{ q^n \int_0^{2\pi} \varphi_q \sin n\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \varphi_1 \sin n\theta d\theta \right\} \\ \beta'_n &= \frac{q^n}{\pi(1-q^{2n})} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi_q \sin n\theta d\theta - q^n \int_0^{2\pi} \varphi_1 \sin n\theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

Отсюда видим, во-первых, что значение φ на обеих окружностях не могут быть произвольны, а средние значения их должны быть одинаковы.

Найденные значения для α и β дадут нам

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 d\theta + i\alpha'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q d\theta + i\alpha'_0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi(1-q^{2n})} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi_1 e^{-in\theta} d\theta - q^n \int_0^{2\pi} \varphi_q e^{-in\theta} d\theta \right\}$$

$$b_n = \frac{q}{\pi(1-q^{2n})} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi_q e^{in\theta} d\theta - q^n \int_0^{2\pi} \varphi_1 e^{in\theta} d\theta \right\}$$

и поэтому найдем следующее разложение функции $f(z)$:

$$f(z) = i\alpha'_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1 H d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_q K d\theta,$$

где

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta}}{1 - q^{2n}}$$

и

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n (z^n e^{-in\theta} - z^{-n} e^{in\theta})}{1 - q^{2n}}.$$

Найденное выражение дает символ Шварца (с мнимой произвольной постоянной $i\alpha'_0$) для кругового кольца, т. е. при условии

$$q \leq |z| \leq 1,$$

причем значение вещественной части функции $f(z)$ на внешней окружности φ_1 , а на внутренней φ_q .

Найденное выражение символа Шварца при $q=0$ дает символ Шварца для окружности, полученный нами раньше.

Заметим, что H и K можно выразить в эллиптических функциях. Заметим для этого, что $q < 1$ и следовательно

$$\frac{1}{1-q^{2n}} = 1 + \sum_{h=1}^{n} q^{2nh}.$$

Подставляя это разложение в предыдущие выражения для H и K , найдем следующие соотношения:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n (z^n e^{-in\theta} - q^{2n} z^{-n} e^{in\theta}) q^{2nh}$$

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} (q^n |z^n e^{-in\theta} - z^{-n} e^{in\theta}|) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n (z^n e^{-in\theta} - z^{-n} e^{in\theta}) q^{n(1+2h)}.$$

Откуда весьма просто получается

$$\begin{aligned} H &= \frac{ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} - \frac{q^2 z^{-1} e^{i\theta}}{1 - q^2 z^{-1} e^{i\theta}} + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \frac{q^{2h} ze^{-i\theta}}{1 - q^{2h} ze^{-i\theta}} - \frac{q^{2h+2} z^{-1} e^{i\theta}}{1 - q^{2h+2} z^{-1} e^{i\theta}} \right\} = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h-1} \left(\frac{z}{q} e^{-i\theta} - \frac{q}{z} e^{i\theta} \right)}{1 - q^{2h-1} \left(\frac{z}{q} e^{-i\theta} + \frac{q}{z} e^{i\theta} \right) + q^{4h-2}} \\ K &= \frac{qze^{-i\theta}}{1 - qze^{-i\theta}} - \frac{qz^{-1} e^{i\theta}}{1 - qz^{-1} e^{i\theta}} + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \frac{q^{2h+1} ze^{-i\theta}}{1 - q^{2h+1} ze^{-i\theta}} - \frac{q^{2h+1} z^{-1} e^{i\theta}}{1 - q^{2h+1} z^{-1} e^{i\theta}} \right\} = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h-1} (ze^{-i\theta} - z^{-1} e^{i\theta})}{1 - q^{2h-1} (ze^{-i\theta} + z^{-1} e^{i\theta}) + q^{4h-2}}. \end{aligned}$$

Вводим эллиптические функции с вещественным периодом 2ω и с мнимым $2\omega'$ и, предполагая, что ω и $\frac{\omega'}{i}$ положительны, положим $q = e^{-\frac{4\omega'}{\pi\omega}}$.

Введем теперь функцию ζ_3 Вейерштрасса, которую мы уже вводили на стр. 205

$$\zeta_3 u = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h-1} \sin \frac{\pi u}{\omega}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{\omega} + q^{4h-2}},$$

где $\eta = \zeta\omega$.

Полагая

$$u = \frac{\omega}{i\pi} \lg \frac{z}{q} - \frac{\omega\theta}{\pi},$$

найдем

$$\begin{aligned} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg \frac{z}{q} - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) &= \frac{\eta}{i\pi} \lg \frac{z}{q} - \frac{\eta\theta}{\pi} + \\ &+ \frac{\pi}{i\omega} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{q^{2h-1} \left(\frac{z}{q} e^{-i\theta} - \frac{q}{z} e^{i\theta} \right)}{1 - q^{2h-1} \left(\frac{z}{q} e^{-i\theta} + \frac{q}{z} e^{i\theta} \right) + q^{4h-2}} = \\ &= \frac{\eta}{i\pi} \lg \frac{z}{q} - \frac{\eta\theta}{\pi} + \frac{\pi}{i\omega} H, \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$H = \frac{i\omega}{\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg \frac{z}{q} - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) - \frac{\eta\omega}{\pi^2} \lg \frac{z}{q} + i \frac{\eta\omega\theta}{\pi^2}.$$

Вставляя вместо q его выражение, найдем

$$H = \frac{i\omega}{\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} - \omega' \right) - \frac{\eta\omega}{\pi^2} \lg z + i \frac{\eta\omega'}{\pi} + i \frac{\eta\omega\theta}{\pi^2}.$$

Имея в виду, что ¹⁾

$$\zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} - \omega' \right) = \zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) - \eta', \quad \eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}$$

¹⁾ Tannery e Molk, l. c. т. II, 1896, стр. 238, формула XII, и стр. 237, формула X(6).

окончательно найдем

$$H = \frac{i\omega}{\pi} \zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) - \frac{\eta\omega}{\pi^2} \lg z + i \frac{\eta\omega\theta}{\pi^2} - \frac{1}{2}.$$

Полагая в разложении $\zeta_3(u)$:

$$u = \frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi},$$

найдем таким же образом, как и раньше

$$K = \frac{i\omega}{\pi} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) - \frac{\eta\omega}{\pi^2} \lg z + i \frac{\eta\omega\theta}{\pi^2}.$$

В частном случае, если величина φ принимает одинаковые значения в точках контура, симметричных по отношению к вещественной оси, т. е.

$$\varphi_1(\theta) = \varphi_1(2\pi - \theta),$$

$$\varphi_q(\theta) = \varphi_q(2\pi - \theta)$$

найдем, имея в виду, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1 d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi_q d\theta$$

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \varphi_1(\theta) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) + \zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z + \frac{\omega\theta}{\pi} \right) \right] d\theta - \\ & - \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \varphi_q(\theta) \left[\zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) + \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z + \frac{\omega\theta}{\pi} \right) \right] d\theta, \end{aligned}$$

а так как¹⁾

$$\begin{aligned} \zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) + \zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z + \frac{\omega\theta}{\pi} \right) = & 2\zeta \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z \right) + \\ & + \frac{p' \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z \right)}{p \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z \right) - p \left(\frac{\omega\theta}{\pi} \right)} \end{aligned}$$

¹⁾ Tannery e Molik, т. II, формула VII (3), стр. 236.

и

$$\begin{aligned} \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \frac{\omega\theta}{\pi} \right) + \zeta_3 \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z + \frac{\omega\theta}{\pi} \right) = 2\zeta \left(\frac{\omega}{i\omega} \lg z \right) + \\ + \frac{p' \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \omega' \right)}{p \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \omega' \right) - p \left(\frac{\omega\theta}{\pi} \right)}, \end{aligned}$$

то мы окончательно найдем:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{i\omega}{\pi^2} p' \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z \right) \int_0^\pi \frac{\varphi_1(\theta) d\theta}{p \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z \right) - p \left(\frac{\omega\theta}{\pi} \right)} - \\ - \frac{i\omega}{\pi^2} p' \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \omega' \right) \int_0^\pi \frac{\varphi_2(\theta) d\theta}{p \left(\frac{\omega}{i\pi} \lg z - \omega' \right) - p \left(\frac{\omega\theta}{\pi} \right)}. \end{aligned}$$

Это выражение представляет функцию голоморфную на полукольце, ограниченном двумя полуокружностями радиусов 1 и q , так что: $q \leq |z| \leq 1$, $y \geq 0$, имеющую вещественное значение на вещественной оси и значения φ_1 и φ_2 на полуокружностях радиусов 1 и q .

5. Формула, аналогичная формуле Дини для круга.

Для кругового кольца можно вывести соотношение совершенно аналогичное формуле Дини для круга.

Обозначим через ψ_1 и ψ_q значения ψ на внешней и внутренней окружности. Найдем совершенно также как для круга:

$$\psi_1(\theta) = \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\alpha'_n + \beta'_n) \cos n\theta + (\alpha_n - \beta_n) \sin n\theta \}$$

$$\psi_q(\theta) = \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\alpha'_n q^n + \beta'_n q^{-n}) \cos n\theta + (\alpha_n q^n - \beta_n q^{-n}) \sin n\theta, \}$$

а интегрированием по частям совершенно так же получим:

$$\alpha_n = \frac{1}{n\pi(1-q^{2n})} \left\{ q^n \int_0^{2\pi} \varphi'_q(\theta_1) \sin n\theta_1 d\theta_1 - \int_0^{2\pi} \varphi'_1(\theta_1) \sin n\theta_1 d\theta_1 \right\}$$

$$\beta_n = \frac{q^n}{n\pi(1-q^{2n})} \left\{ q^n \int_0^{2\pi} \varphi'_1(\theta_1) \sin n\theta_1 d\theta_1 - \int_0^{2\pi} \varphi'_q(\theta_1) \sin n\theta_1 d\theta_1 \right\}$$

$$\alpha'_n = \frac{1}{n\pi(1-q^{2n})} \left\{ q^n \int_0^{2\pi} \varphi'_q(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1 - \int_0^{2\pi} \varphi'_1(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1 \right\}$$

$$\beta'_n = \frac{q^n}{n\pi(1-q^{2n})} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi'_q(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1 - q^n \int_0^{2\pi} \varphi'_1(\theta_1) \cos n\theta_1 d\theta_1 \right\}$$

и легко найдем:

$$\psi_1(\theta) = \alpha'_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'_q(\theta_1) \lambda(\theta_1 - \theta) d\theta_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'_1(\theta_1) \mu(\theta_1 - \theta) d\theta_1$$

$$\psi_q(\theta) = \alpha'_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'_q(\theta_1) \mu(\theta_1 - \theta) d\theta_1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'_1(\theta_1) \lambda(\theta_1 - \theta) d\theta_1$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \lambda(\theta_1 - \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \frac{\cos n(\theta_1 - \theta)}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \left(2 \sin^2 \frac{n(\theta_1 - \theta)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\theta_1 - \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{\cos n(\theta_1 - \theta)}{n} + \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \left(2 \sin^2 \frac{n(\theta_1 - \theta)}{2} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} \lg \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta}{2}} + \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \left(2 \sin^2 \frac{n(\theta_1 - \theta)}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

ψ можно выразить в эллиптических функциях. Мы не приводим этих выражений в виду их сложности и отсылаем ¹⁾ к курсу гидродинамики Чизотти.

¹⁾ U. Cisotti, *Idromeccanica piana*, т. I, стр. 29.

ЛИТЕРАТУРА ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И СМЕЖНЫХ С НЕЮ ДИСЦИПЛИН

(в хронологическом порядке)

1. Lamé. Leçons sur la Théorie mathématique de l'Elasticité des corps solides. Paris, 1852.
2. B. de Saint-Venant. a) Mémoire sur la flexion des prismes, etc. Journ. des Mathémat. (Liouville), 2-me série, t. I, pp. 89—189, 1856. b) Mémoire sur la torsion des prismes, etc. Mémoires des savants étrangers, t. XIV, pp. 233—560, Paris, 1855.
3. Clebsch. Theorie d. Elastizität fester körper, 1862.
4. Airy. On the stress in the beams interior of Philos. Trans., t. 153, 1863.
5. U. Dini. Annali di Matematica, s. II, t. 5, 1871—73.
6. Maurice Lévy. Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. Journ. d. Mathem. pures et appliquées, s. III, T. III, 1877.
7. X. C. Головин. Одна из задач статики упругого тела, 1880, 1—2, СПб.
8. A. Clebsch. Théorie de l'élasticité des corps solides. Перевод предыдущей книги [3] Сен-Венана и А. Фламана с обширными примечаниями С. Венана, Париж, 1883.
9. W. I. Ibbetson. An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids, London, 1887.
10. F. Klein u. K. Wieghardt. Ueber Spannungsflächen und reziproke Diagramme mit besonderer Berücksichtigung d. Maxwell'schen Arbeiten. Arch. d. Mathem. und Physik, 3 Reihe, Bd. VIII, 1887.
11. Ribière. Sur l'équilibre de l'élasticité des voûtes en arc de cercle. C. R. CXIII, 11, pp. 561—563, 1889.
12. H. Poincaré. Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris, 1892.
13. Todhunter and Pearson. History of the Theory of Elasticity, v. 1. Cambridge, 1896, p. 139, 221, 277. Cambridge, 1893.
14. D. Gravé. Sur le problème de Dirichlet, Association Française, 1895.
15. Д. А. Граве. Об основных задачах математической теории построения географических карт. СПб, 1896.
16. G. Kirchhoff. a) Vorlesungen über Mechanik, 1897. b) Vorlesungen über mathem. Physik, Bd. 1. Mechanik 4. Aufl. Leipzig, 1897.
17. Maurice Lévy. Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire. C. R. CXXVII, № 1, 1898, p. 10—15.
18. Goursat. Sur l'équation $\nabla \nabla u = 0$ (Bull. de la Sect. Math. de France, v. 26, 1898).
19. Kirsch. Zeitschrift d. V. D. L., p. 797—809.
20. Ribière. Sur la flexion des pièces épaissées. C. R. CXXVI № 5, 1898, p. 402—404.
- 20*. K. Marcalango. Teoria Matematica dello equilibrio dei corpi elastici. Milano, 1904.

21. Maurice Lévy. Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie. C. R. CXXVI, № 18, 1898, p. 1235—40.
22. T. Levi-Civita. Sopra una trasformazione in della stessa delle equazione $\Delta^2 \Delta^2 = 0$, Venezia, 1898.
23. E. Almanzi. Sulle ricerche delle funzioni poli armoniche in un arco plana etc. Circolo Mat. di, Palermo, p. 225—262.
24. N. Michell. On the direct determination of stress in on elastic solid with application to the theory of plates. London, Math. Soc., v. XXXI, 1900, p. 100—124.
25. T. Boggio. a) Sull equilibrio delle membrane elast. plane. Atti d. R. Accademia della Scienze d. Torino, v. XXXV, 1900.
b) Atti del R. Ist. Veneto, t. LXI₂, 1901/2, p. 619—36.
c) Integrazione dell'equazione $\Delta^2 \Delta^2 = 0$ in an area ellittica. Atti del, R. Ist. Veneto, t. LX₂, 1900/1, pp. 591—609.
d) Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare. Atti Acad. di Torino, vol. 47, 1911/12, pp. 22—37.
26. A. Mesnager. Sur l'application de la théorie d'élasticité au calcul des pièces rectangulaires fléchies. C. R. CXXXII, № 24, 1901, p. 1475—78.
27. I. Hadamard. Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres on appuyées et celui de la sphère isotrope. Ann. de l'Ecole normale, 3 série, t. XVIII, 1901, p. 313—314.
28. Mesnager. Annales des Ponts et des Chaussées, 1901, 1913.
29. I. N. Michell. The inversion of plane stress. London M. S. Proceeding, XXXIV, 1902, стр. 134—142.
30. Б. М. Коялович. Об одном уравнении 4-го порядка, 1902 г.
- 30*. Митинский. Об изгибе круговых брусев. СПб., 1902.
31. L. N. S. Filon. On an approximative solution for the bending of a beam of rectangular cross-section etc. Philos. Trans. of the Rol. Soc. of London, ser. A., v. 201, 1903, p. 63—155.
32. A. Timpe. Problem d. Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyshen Funkt. f. Math. u. Physik, Bd 52, 1905, S. 342, 533.
33. С. Белзедкий. Изгиб прямого бруса, свободно лежащего на двух опорах. Изв. инж. пут. сообщения, СПб., 1905.
34. Tedone. Sui problemi di equilibrio elastico a due dimensioni. Torino Atti, 41, 1905, p. 86—106.
35. Belzecki. Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle, C. R., 1905, CXL, № 15.
36. K. Wieghardt. Ueber die Nebenspannungen gewisser poehgradig statisch unbestimmter Tachwerke. Zeitsch. f. Math. u. Phys., 1906, st.
37. С. Белзедкий. Одна из задач теории упругости, решение которой получается легко в эллиптических координатах. Изв. собр. инж. пут. сообщения 1906—1908 г.
38. A. Korn. Sur les équations de l'élasticité. Ann de l'Ecole Norm. sup. 9 st. 24, 1907, p. 9—75.
39. V. Volterra. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes. Ann. de l'Ecole Norm., sup. 3 ser., t. 24, 1907, p. 401—517.
40. Н. М. Абрамов. Функция Эри и ее приложение к решению задач теории упругости и строительной механики в работах Клейна, Вигкардта и Тимпе, 1908 г.

- 40*. F. Kötter. Ueber Forslon des Wenzelsens. Bul. Ber., Bd. 2, S. 935, 1908.
41. A. Korn. Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse, 2 s., t. X, 1908, pp. 165—269.
42. Hadamard. a) Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrée. Ann. de l'Ecole Normale, 3 série, t. 25, 1908, p. 529—583. b) Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mem. des savants Etrangers, Paris, 1908, v. 33, № 4.
43. G. Kolossoff. Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions, C. R., 1908, CXLVI, M., 10, 1909, CXLVIII № 17.
44. Веляхов П. А. Влияние отверстий на распределение напряжений в растянутой полосе. Известия Московского инженерного училища, сентябрь, 1907.
45. V. Volterra. Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der Math. Phys., September 1909, Leipzig-Berlin, 1914.
46. G. Lauricella. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Math., t. 32, 1909, p. 201—256.
47. Г. Колосов. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, 1909 г.
48. G. Kolossoff. Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie (Zeitschr. für Mathematik und Phys., Bd 62, 1914).
49. Coker. Proceedings Royal Society A., t. 85, стр. 291, Engineering, 1911, 1912.
50. Filon. Phil Mag. 1912.
51. Г. Колосов. О распределении напряжений в растянутых полосах, ослабленных отверстиями в связи с некоторыми свойствами плоской задачи теории упругости. Матем. сборник, 1912.
52. Vialat. Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire Rendiconti del Circolo Mathem. di Palermo, t. 33 (1912), p. 147.
53. В. Кирпичев. Оптическое изучение упругих деформаций, Вестн. о-ва технологов, 1913.
54. Г. Колосов и Н. Мусхелишвили. О равновесии упругих круглых дисков, Известия электротехнического ин-та 7/12. СПб, 1915, стр. 39—55.
55. V. Volterra. a) Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles, Paris, 1912. b) Ueber die Lösung d. Grundproblems d. Elastizitätstheorie. Math. Ann., Bd. 75, 1914, S. 497—544.
56. Г. Колосов. О сопряженных дифференциальных уравнениях с частными производными с приложением к вопросам математической физики. Изв. Электротехнического ин-та 1934.
57. С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, 1934.
58. Мусхелишвили. Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Изв. Акад. Наук, 1919, стр. 663—686.
59. В. Галеркин. Кручение трехгранной призмы. Изв. Акад. Наук СССР, 1919.
60. Filon. On stresses in multiply-connected plates. Brit. Association for the advancement of science, London, 1921, 22 p. 305—315.
61. G. B. Jeffery. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London, ser. A, v. 221, 1921, p. 265—293

62. U. Cisotti. Idromecanica piana, parte prima, 1921, Milano Libreria editrice politech. di C. Tamburini Camillo.
63. Pöschl. Über eine partiikuläre Lösung d. biharmonischen Problem. Math. Zeits., 1921, p. 389—396.
64. Moushelishvili. a) Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Math., Tiflis Université, 1922, p. 157. b) Sur l'équilibre des corps élastiques soumis à l'action de la chaleur, Изв. Тифлисского университета, 1923, № 3.
65. Галеркин. Torsion of parabolic prisms Mess of Math., v. 54, 1924, pp. 97—110.
66. Kolossoff. Über einige Anwendungen d. Complexen Vector-diagramme in d. Festigkeitslehre und Elasticitätstheorie. Изв. Укр. Акад. Наук, 1926.
67. Miura. Spannungen in rechteckigen und keilförmigen Trägern, 1926.
68. В. А. Фок. Приведение плоской задачи теории упругости к интегральному уравнению Фредгольма. Журн. РФХО, часть физ., т. вып. 1, 1926.
69. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, 1927.
70. A. E. H. Love. A Treatise on the mathematical theory of Elasticity A. E. H. Love, II Ed., Cambridge, 1906, 1927.
71. Г. Колосов. О некоторых обобщениях задач Сен-Венана и Клебша в теории упругости. Журн. Ленин. о-ва физиков и математиков. I вып., т. 2, 1927.
72. Г. Колосов. О некоторых приложениях комплексного преобразования уравнений теории упругости к решению задач о равновесии цилиндрических тел и задачи В. А. Стеклова. Журн. Матем. о-ва Пермского университета, т. 4, 1927.
73. M. Sadowsky. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 8, 1928, S. 107—121, u. Bd. 10, S. 11—81.
74. Г. Колосов. О некотором применении комплексного преобразования уравнений математической теории упругости к отысканию общих типов решений этих уравнений. ЛЭТИ, 1928.
75. Galerkin. Solution of S.-Venant problem of flexure for certain boundaries in the case of the prism. Ibid, vol. 57, 1928, p. 155—168.
76. G. Kolossoff. Sur l'application d. diagramme complexes d. la théorie de la résistance d. matériaux. Bologna, 1928. Atti del congresso Intern. de Matemat.
77. Lecomte. La théorie mathématique d'élasticité Memorial de sciences mathemat., 1929.
78. G. Kolossoff. Sur l'extension d'un théorème de Maurice Lévy. Comptes Rendus, t. 188, p. 1593.
79. Белзский. Równowaga sil sprężystości w belce przyrmatycznej, Warszawa, 1929.
80. Н. Мухелишвили. Zum problem d. Torsion d. homogenen isotropen Prismen. Изв. Тифл. Политехн. ин-та, I, 1929, стр. 1—20.
81. Мухелишвили. Sur les problème de torsion des cylindres élastiques isotropes Rendic. d. R. Acad. dei Lincei, 6 ser., vol. IX, 1929, p. 295—300.
82. Mechanik der elastischer Körper von Geckeler, 1923.
83. Г. Колосов. Sur le problème de S.-Venant p. une pièce courbe, Ленинград, 1929.

- 83*. В. Г. Galerkinе. Comptes rendus 1930, p. 1047.
- 83**. С. А. Савин. Изв. и труды Харбинского политех. ин-та 1926--1928, 1930, 1931, стр. 139--162.
84. П. А. Соколов. Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном какими-либо отверстиями. Бюллетень Научно-Технического Комитета У. В. М., Ноябрь, 1930.
85. G. Kolossoff und D. Gawra. Ueber eine Anwendung der Theorie der complexen Veränderlichen zur Torsion. Изв. Украинской Акад. Наук, 1925.
86. L. N. G. Filon. On the relation between corresponding problems in plane stress and in generalized plane stress Quaterly, Journ. I, 1930, p. 289 - 299 L.
87. Mouskellischwill. Théoremes d'existence relatifs au problème biharmonique fondamental à une équation de Fredholm. C. R., t. 192, Paris, 1931, p. 77; Nouvelle méthode de reduction du problème biharmonique fondamental à une équation de Fredholm, C. R., t. 196, Paris, 1931, p. 77.
88. Föppl. Konforme Abbildung ebener Spannungszustände. Ztsch. f. Angew. Math. und Mechanik, Bd. II, 1931, S. 81--92.
89. E. S. Cocker and L. N. Filon. A treatise on photoelasticity, Cambridge, 1931.
90. G. Kolossoff. Sur une application d. formules de M. Schwarz, Willat, M. Dini, C. R., 1931, 31 Août.
91. Kalmann E. On two dimensional elast. system, Phil. Magazine. August, 1931.
92. Мусхелишвили. Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à 2 dimensions, Math. Ann., Bd. 107, 1932, 282--312.
- Sur le problème de torsion des poutres elastiques composées, C. R., t. 194, Paris, 1932, p. 1435.
- К задаче кручения и изгиба упругих брусков, составленных из различных материалов. Изв. Акад. Наук СССР, вып. 7, 1932, стр. 907 - 945.
93. E. Weinel. Das Torsionsproblem f. d. exzentrischen Kreisung, Ingenieur Archiv, Bd. 3, 1932, Heft I, S. 17--75.
94. Папкович, П. Ф. Solution générale d. équations différentielles fondamentales d'élasticité, C. R., 1932, t. 195, № 10, p. 513.
95. И. Векда и А. Рухадзе. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. Акад. Наук СССР, 1933, № 3, стр. 373--386.
96. Н. И. Мусхелишвили. Praktische Lösung d. fundamentalen Randwertaufgaben d. Elastizitätstheorie in d. Ebene f. einige Berandungsformen, Ztsch. f. angew. Math. u. Mechan.
97. Д. Воляков и А. Наваров. Об одной предельной задаче и ее применении к плоской теории упругости. Матем. сборник, т. 40, № 2, 1933 г.
98. A. G. Webster. The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies, Leipzig, 1904, русск. перев., ГТТИ, 1933.
99. Мусхелишвили. Некоторые задачи теории упругости, 1933.
100. А. Рухадзе. Изгиб поперечной силой кругового цилиндра, ориентированного круговым стержнем, Изв. Акад. Наук СССР, в печати.
101. Д. Гавра. Изв. Электротехнического ин-та, 1933.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Ампер 9
- Белзевский С. И. 3, 93, 198
Бельтрами Е. 42, 43, 44
Бернулли Я. 158
Бессель 197
- Вертегейм 57
Вейерштрасс 205, 210
Вилла 205, 206
Вильсон 57
Волков 98
- Гавра 94, 187
Галеркин 45, 83, 185, 191
Головин 4, 93, 94
Граве 6, 154, 155, 156, 157, 159, 161
Грей 197
Грин 197
Гродский 48, 49
Гурса 94, 152
- Декарт 143
Дини 125, 126, 201, 212
Дирхле 5, 124, 126, 140
- Иббетсон 5, 56
- Каротерс 75
Келз 161
Кеттер 187
Кирпичев 57
Кириш 126, 132, 143
Клебш 3, 4, 44, 53, 171, 173, 175, 177
Кокер 57
Колосов 26, 97, 187
Коши 4, 18, 98, 107, 143
Кульман 57
- Леви Морис 4, 56, 62, 173, 175
Леви Чивита 74
Лове 4, 75, 104
Лоран 122, 124, 205
- Ляме 18, 82, 192
- Максвелл 57
Маттис 197
Менаже 87
Митинский 170
Митчелль 16, 42, 44, 74, 104, 191, 195
Миура 63
Михлин 98
Мор 16
Мольх 210, 211
Муслишвили 72, 73, 98, 107, 143, 150
- Назаров 98
Нейман 57
Ньютон 49, 188
- Образцов 19
- Палатини 109
Папкович 45, 48, 49
Паукуль 26
Пякар 202
Привалов 7, 72, 139
Пуассон 35, 40, 112, 157, 165, 188
Пуркинъ 26
- Раубер 26
Рибьер 5, 93
- С-н-Венан 3, 4, 6, 44, 165, 175, 186, 191
Смирнов 7
Соколов С. Я. 5, 146, 148, 149
Стеклов 3, 175
- Таннери 210, 211
Тимпе 93
Тимошенко 4

Томсон 155
Треффтц 16

Файлон 57
Фламан 87
Фурье 62, 122, 199, 200, 206, 207

Черутти 48
Чизотти 214

Шварц 6, 98, 107, 108, 109, 110,
111, 112, 120, 121, 124, 125, 142,
153, 154, 157, 158, 159, 160, 162,
199, 200, 201, 202, 204, 208

Шифф 4
Штейнмец 7

Эри 4, 5, 6, 56, 58, 94, 95, 97, 104

Юнг 35



ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3

Глава I

Введение

1. Комплексные диаграммы при решении технических и математических вопросов	7
2. Графические построения, основанные на комплексном преобразовании	9
3. Обобщение предыдущих формул на целый класс случаев	11
4. Примеры применения комплексных диаграмм	15
5. Геометрическая интерпретация напряжений в сплошном теле и их нормальных и тангенциальных составляющих	17
6. Растяжения, сжатия и сдвиги в бесконечно мало деформируемом теле	23
7. Преобразование элементов деформации в криволинейные координаты	26
8. Применение комплексного преобразования к выводу основных уравнений равновесия сплошного тела в криволинейных координатах	33
9. Элементарный вывод основных уравнений теории упругости изотропного тела	35
10. О коэффициентах упругости и соотношениях между ними	39
11. Уравнения Бельтрами-Митчелла и определение перемещений	42
12. О приемах нахождения общих решений теории упругости	44

Глава II

Плоская задача теории упругости

1. Понятие о плоской задаче теории упругости	52
2. Интегрирование уравнений плоской задачи	54
3. Функция Эри	56
4. Примеры изучения напряжений при помощи функций Эри	58
5. Способ функций комплексной переменной для получения решений плоской задачи (без внешних сил)	60
6. Об определении перемещений по напряжениям и об определении уравнений кривых, связанных с напряжениями; закон взаимности	69
7. О применении конформных отображений к плоской задаче теории упругости	72

8. Распространение решения на случай приложенных внешних сил	75
9. Примеры распределения напряжений при действии отдельных сил или групп сил, приложенных внутри тела в его плоскости	78
10. Плоская задача по способу аналогичному методу Галеркина для задачи трех измерений	81
11. Четвертый способ интегрирования уравнений плоской задачи	
12. Применение теории функций комплексной переменной к получению решений плоской задачи в прямолинейных прямоугольных координатах	86
13. Плоская задача в криволинейных координатах	89
14. Полярные координаты на плоскости	92
15. О функциях аналогичных функции Эри	94

Глава III

О способах решения плоской задачи теории упругости при заданных напряжениях на контуре (границе тела)

1. Общие замечания	98
2. Решение плоской задачи теории упругости для прямолинейного контура в определенных интегралах	99
3. Примеры	102
4. Об интегралах аналогичных интегралу Коши и интегралу Шварца	107
5. Решение плоской задачи теории упругости для безграничной прямой при помощи интегралов Шварца	110
6. Решение плоской задачи теории упругости для круга по методу комплексного уравнивания	111
7. Примеры решения плоской задачи для круга в определенных интегралах	116
8. Решение плоской задачи для окружности при помощи интеграла Шварца	120
9. Решение плоской задачи для кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями	122
10. Формула аналогичная формуле Дили в плоской задаче теории упругости для круга	125
11. Простейшие задачи об определении напряжения при круговом контуре. Определение напряжений в однородной плоской растянутой среде, ослабленной круговым отверстием. Формулы Кирша	126
12. Решение предыдущей задачи при условии существования предельного круга концентрического отверстия, за пределами которого влияние отверстия незаметно	130
13. Примеры	137
14. Решение плоской задачи для криволинейного контура	
15. Примеры распределения напряжений для криволинейного контура	143
16. Плоская задача в изокоординатах, но не для изоконтур	150

17. Новый способ интегрирования бигармонического уравнения в связи с введением принципа комплексного уравновешивания	152
18. Решение плоской задачи теории упругости для какого угодно криволинейного контура и в частности для алгебраического	153
19. Примеры	157

Глава IV

Комплексное преобразование как прием нахождения решений общей задачи теории упругости

1. Общая задача теории упругости	163
2. Простейшие примеры отыскания решения „полуобратным методом“	167
3. Задача Клебша и ее обобщения	171
4. Задача Сен-Венана	175
5. Растяжение и кручение	179
6. Решение задачи о кручении для призмы с основанием в виде прямоугольника	182
7. Более сложные случаи вопроса о кручении	186
8. Иагиб	187
9. Задача Сен-Венана для кривого бруса	191
10. Об экспериментальном определении напряжения по краям кругового эллиптического и других отверстий	198
11. Добавление	199