

624.04
С-23

624.04
С-23

СБОРНИК ТРУДОВ

ВЫПУСК III

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ОНТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

НКТП



Профессору
Михайленко-Бородину Михаилу Митрофановичу
от дирекции
Строительного Института
Киевского
Директор КСИ.

USSR
PEOPLE'S COMMISSARIAT OF HEAVY INDUSTRY
BUILDING INSTITUTE, KIEV

PAPERS AND WORKS

PART III

THEORY OF STRUCTURES

EDITOR

prof. A. UMANSKY



STATE SCIENTIFIC TECHNICAL PUBLISHING OFFICE, UKRAINE
Kiev 1936 *Kharkov*

Депозитарий

69
К 38
НКТП — СССР

СТР КИЕВСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

СБОРНИК ТРУДОВ

ВЫПУСК III

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

проф. доктора А. А. УМАНСКОГО

1404621

0000000000

РЕСПУБЛИКА
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ВИЗВОНУКА



ОНТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ

НКТП

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

Киев

1936

Харьков

Библиографическое описание
этого издания помещено в
„Летописи Укр. печати“, „Кар-
точном реперт.“ и других указ-
ателях Укр. Книж. Палаты.

30 — 3(2) — 2

Редколлегия Киевского строительного института:

Шафран И. Л. (Ответств. редактор)
Уманский А. А. (Редактор данного выпуска)
Жудин П. Д.
Корноухов Н. В.
Хуторянский М. С.
Канторов Н. И.
Будников М. С.
Варвак П. М.
Бельтюков К. Г. (Секретарь редколлегии)

Ответственный редактор *М. Я. Латаш*
Литредактор *М. И. Берлин*

Техоформление *Я. С. Фони*
Корректор *А. И. Драгоман*

Типография Государственного научно-технического издательства Украины.
Киев, ул. Воровского, 42.

Уполномочен. Главлита № 1206.

Зак. № 385. 20 л—1000 с

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	Стр. 5

Проф. доктор технич. наук А. А. Уманский.

О методе замены связей в строительной механике	7
1. Консольная балка	7
2. Балка Дингера	8
3. Балочная система с передачей опорных реакций через подкосы или подбалки	9

Проф. доктор техн. наук Б. Н. Горбунов.

К вопросу о кинематическом расчете плоских статически определимых систем	15
1. Векторное представление скоростей точек плоской системы	15
2. Условия, налагаемые связями	16
3. Построение линий влияния	18

Доцент, кандидат технич. наук Н. В. Корноухов.

Проверка устойчивости сжато изогнутых конструкций (стержней, арок и рам за пределами упругости)	25

Глава I. Введение

1. Краткая история развития понятия потери устойчивости конструкций.	25
2. Общее определение понятия потери устойчивости конструкций.	27
3. Общие методы проверки устойчивости упругих систем.	29
4. О возможности пользования упрощенным выражением для радиуса кривизны	31

Глава II. Сжатый прямолинейный стержень

5. Проверка устойчивости стержня в случае осевого сжатия.	34
6. Идеализированная диаграмма сжатия.	36
7. Неупругое эксцентричное сжатие при среднем напряжении, меньшем предела пропорциональности.	38
8. Эксцентричное сжатие при частично неупругой работе сечения и при среднем напряжении, превышающем предел пропорциональности.	48
9. Об уменьшении "ядра сечения" при неупругом сжатии.	52
10. Об интегрировании дифференциального уравнения продольного изгиба за пределом пропорциональности	55
11. Падение отпорности сжатого стержня за пределом пропорциональности в зависимости от стрелки искривления стержня	61
12. Форма кривой неупругого продольного изгиба, угловые деформации и сближение концов сжатого стержня.	63

Глава III. Сжато-изогнутый прямолинейный стержень

13. Падение отпорности эксцентрично сжатого стержня за пределом пропорциональности в зависимости от первоначального эксцентриситета и стрелки искривления стержня.	65
14. О точном методе проверки устойчивости эксцентрично сжатых стержней	68
15. Аналитическое определение критического напряжения для эксцентрично сжатого стержня из идеального упруго-пластического материала ($m=0$)	70
16. Проверка устойчивости эксцентрично сжатых стержней из материалов, характеризующихся общим случаем идеализированной диаграммы сжатия.	72
17. Проверка напряжений в крайнем вогнутом волокне эксцентрично сжатого стержня.	82
18. Проверка эксцентрично сжатого стержня на появление в крайнем выпуклом волокне больших растягивающих напряжений.	87
19. То же в случае небольших растягивающих напряжений.	87

- § 20. Применение результатов предыдущих параграфов к сжато-изогнутому стержню при одновременном действии на него продольных и поперечных сил . . .
- § 21. Графики критического напряжения для эксцентрично сжатых стержней из материала, характеризующегося криволинейной выпуклой диаграммой сжатия. . .

Глава IV. Примеры проверки устойчивости упругих систем

- § 22. Инфлюенты для проверки устойчивости стержня от продольных, расположенных по длине его нагрузок.
- § 23. Пример проверки устойчивости простой рамы с сжато-изогнутыми элементами. Статический метод.
- § 24. Энергетический метод проверки устойчивости сжато-изогнутых одноконтурных рам.
- § 25. Проверка устойчивости двухшарнирной параболической арки. Статический метод.
- § 26. Определение деформации двухшарнирной арки и криволинейной балки на двух опорах по энергетическому методу.
- § 27. Проверка устойчивости сжато-изогнутой двухшарнирной параболической арки. Энергетический метод.
- § 28. Проверка устойчивости сжато-изогнутых арок любого очертания с любым законом изменения жесткости вдоль оси.
- § 29. Формулы и графики для двухшарнирных арок: параболической с разными законами изменения сечений и круговой постоянного сечения.
- § 30. Проверка устойчивости бесшарнирной арки любого очертания.
- § 31. Проверка устойчивости трехшарнирной арки любого очертания.

Глава V. Примеры проверки устойчивости неупругих систем

- § 32. Случай осевого сжатия.
- § 33. Случай больших эксцентриситетов.
- § 34. Случай малых эксцентриситетов.

Доцент, кандидат техн. наук П. М. Варвак.

- К расчету высоких балок**
- Гл. I. Основные уравнения
- Гл. II. Квадратная балка при равномерной нагрузке
- Гл. III. Расчет высокой квадратной балки при любой симметричной нагрузке
- Гл. IV. То же при антисимметричной нагрузке
- Гл. V. Расчет высокой квадратной балки при любой нагрузке. Инфлюентные линии
- Гл. VI. Влияние собственного веса
- Гл. VII. Некоторые частные случаи

Доцент, кандидат техн. наук П. М. Варвак.

- Приближенный расчет пластинок средней толщины**
- § 1. Основные уравнения
- § 2. Прямоугольная плита
- § 3. Прямоугольная мембрана
- § 4. Пластина средней толщины

А. И. Стрельбицкая.

- К расчету эстакад**
- § 1. Составление уравнений
- § 2. Случай равномерно распределенной нагрузки
- § 3. Влияние подвижной нагрузки. Построение инфлюентных линий

Д. В. Вайнберг.

- Арки на сплошном упругом основании**
- § 1. Основные предпосылки и уравнения равновесия
- § 2. Уравнения упругости
- § 3. Основные дифференциальные уравнения
- § 4. Определение усилий и деформаций

А. А. Белоус.

- О расчете гибкой арки с балкой жесткости**
- § 1. Вывод основных уравнений
- § 2. Определение прогиба и усилий в балке жесткости при помощи тригонометрических рядов

§ 3. Балка жесткости переменного сечения	245
§ 4. Влияние горизонтальных перемещений на величину усилий в балке жесткости	251
§ 5. Вопросы устойчивости гибкой арки с балкой жесткости	257

З. И. Соколова.

Методы расчета балок на упругом основании с учетом жесткой связи их с колоннами	265
Гл. I. Применение метода угловых деформаций	265
Гл. II. Расчет бесконечно длинной балки, лежащей на упругом основании, методом конечных разностей	279
Гл. III. Применение метода начальных условий	284

Доцент В. А. Лазарьян.

Об одном случае плоского изгиба короткой балки	289

Доцент К. Н. Ратушинский.

Подбор арматуры при косом внецентренном сжатии железобетонных стоек для случая малых эксцентриситетов	307
§ 1. Вывод основных формул	307
§ 2. Таблицы для подбора арматуры	309

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник охватывает работы сотрудников кафедры строительной механики Киевского строительного института за 1934—35 годы. Кроме того, в сборнике помещены исследования двух днепронетровских работников — В. А. Лазарян и А. А. Белоуса, весьма близкие по тематике работам кафедры.

Диапазон работ кафедры за последние два года заметно расширился. Первые по сложным вопросам строительной механики выступают молодые работники, вчерашние аспиранты. С удовлетворением можно констатировать повышение общего теоретического уровня исследовательской работы, растущий интерес к проблемам, требующим серьезного тематического аппарата.

В сборнике даны статьи, могущие представить интерес для многих категорий читателей, начиная от студентов младших курсов вузов, изучающих строительную механику, и кончая инженерами-расчетчиками научными работниками.

В статье А. А. Уманского разобран расчет ряда статически-определенных систем методом замены связей, представляющим обобщение метода Шнеберга.

Статья Б. Н. Горбунова трактует вопрос о построении инфлюент для жестких систем с точки зрения векторных представлений малых деформаций. Векторный анализ, в значительной степени благодаря трудам Н. Горбунова, завоевывает все более широкие области строительной механики, и тем большего внимания заслуживают элементарные случаи его применения.

Работа Н. В. Корнюхова посвящена весьма актуальному вопросу проверки прочности и устойчивости сжато-изогнутых стержней и конструкций (рам и арок) как в пределах, так и за пределами пропорциональности. Статья обильно иллюстрирована графиками, облегчающими сложные расчеты. Ряд вопросов, разобранных в этой статье, впервые в литературе получает столь детальное теоретическое освещение.

В работе П. М. Варвака детально разработано решение для балки-стенки в конечных разностях (прием Бая). Для одного случая получены формулы влияния напряжений, что позволяет изучить действие произвольной нагрузки на высокую балку, не прибегая к составлению и решению уравнений.

Другая статья П. М. Варвака завершает решение Фейшля для прямоугольной пластинки и дает удобные расчетные формулы для случая равномерно распределенной нагрузки.

В статье А. И. Стрельбицкой показано применение графических приемов решения уравнений при расчете свободной рамной эстакады под подвижную и неподвижную нагрузки. Статья содержит проведенный в конце числовой пример.

Работа Д. В. Вайнберга посвящена теории арки на упругом основании.

Решение, представленное им по методу начальных параметров, охватывает все случаи нагрузки. Задача эта, поставленная проф. И. Я. Шта-

ерманом, является актуальной при решении многих вопросов конструкторской практики.

В работе *А. А. Белоуса* дана точная теория гибкой арки с балкой жесткости. Благодаря применению метода начальных параметров его решение отличается большой общностью и позволяет охватить все случаи нагрузки. Кроме того, исследование *А. А. Белоуса* содержит решение задачи об устойчивости гибкой арки с балкой жесткости, доведенное до расчетной формулы для критического распора.

Работа *З. И. Соколовой* посвящена методике расчета ленточного фундамента на упругом основании с учетом жесткой связи ленты с колонной. Рассмотрено три способа расчета: метод деформаций, метод конечных разностей и метод начальных параметров.

Работа *В. А. Лазаряна* содержит решение задачи о балке-стенке при равномерно распределенной нагрузке для случая заделки в вертикальных краях. Решение получено в виде полинома в соединении с рядом. Работа представляет большой интерес в связи с расчетом стенок силосов.

В статье *К. Н. Ратушинского* дан метод проверки железобетонных прямоугольных сечений на косое внецентренное сжатие и косой изгиб.

Коллектив авторов считает своим долгом выразить благодарность ректору Киевского строительного института *Леониду Тимофеевичу Яценко*, энергичному руководству и содействию которого этот сборник во многом обязан своим появлением.

1 октября 1935 г.

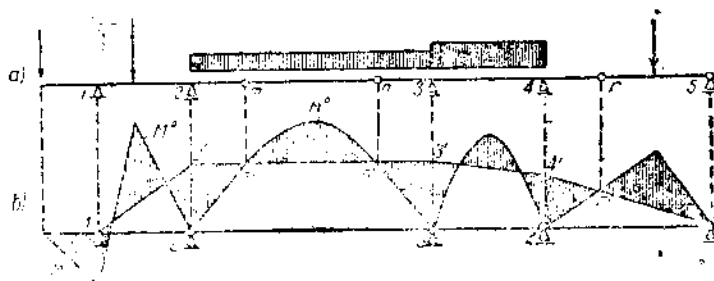
Проф. А. А. Уманский

МЕТОДЕ ЗАМЕНЫ СВЯЗЕЙ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Общеизвестны многочисленные применения метода замены стержней (Диннеберга) при расчете шарнирно-стержневых ферм. Между тем, если расширить понятие *стержень*, трактуя его, как *связь*, тот же метод называется весьма полезным при изучении систем более общего вида, в частности статически-определимых консольно-балочных и рамных систем. Получаемый расчетный прием, в котором играют роль „основная система“ и „неизвестные“, имеет много общего с методом сил в статически-неопределимых системах. С этой точки зрения метод замены связей приобретает и некоторое методическое значение в качестве элементарного введения к методу сил. Не останавливаясь на какой бы то ни было общей теории, которая по сути ничем бы не отличалась от обоснования метода Диннеберга, перейдем непосредственно к примерам, иллюстрирующим предлагаемое расширение рамок метода замены стержней.

1. Консольная балка (фиг. 1)

Выкинем шарниры в местах прикрепления подвесных пролетов к концам, но зато введем шарниры над всеми опорами. Полученная система, которую будем называть основной, представляет собой ряд разрезных



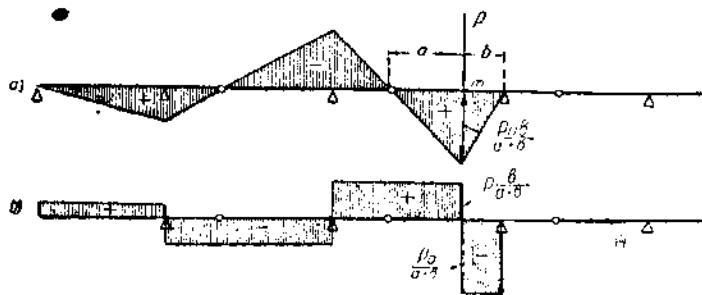
Фиг. 1.

блоч. Неизвестными будут опорные моменты (моменты в новых шарнирах). Они определяются из условия, что изгибающие моменты в местах действительных шарниров от совместного действия заданной нагрузки и неизвестных на основную систему равны нулю. Эпюра моментов M^0 для основной системы строится по обычным правилам. Неизвестные опорные моменты дают эпюру в виде ломаной с точками перелома над опорами, так как каждые два опорных момента, действующие на разрезную балку, дают трапециoidalную эпюру моментов. Спроектировав шарниры m и n на эпюру M^0 и прочертив прямую $m'n'$, определим эпюру на протяжении 3. Соединяем точку $2'$ с 1 . Прочерчиваем $5-r'$ до пересечения с опорной вертикалью 4 в точке $4'$. Соединив $3'$ и $4'$, заканчиваем построение эпюры. Имея эпюру моментов, тотчас же получим и эпюру поперечных сил. Для этого достаточно алгебраически просуммировать эпюру Q^0 , построенную для основной системы (простых балок) с прямоугольниками,

высота которых в каждом пролете равна уклону эпюры опорных моментов. Задача, как мы видим, решается во многом аналогично неразрезной балке, но эпюра опорных моментов определяется не из условий деформации, а из условий статики.

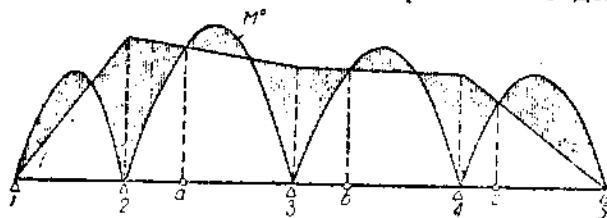
2. Балка Дингера

Груз, приложенный в каком-либо сечении m балки (фиг. 2), заставляет балку вправо до ближайшей опоры и влево на всем протяжении. Груз, приложенный в пределах консоли, вызывает внутренние силы только слева. Эпюра моментов строится прочерчиванием ломаной через шарниры.



Фиг. 2.

(фокусы), причем точки перелома лежат на опорных вертикалях. К этому построению легко прийти, если учесть, что поперечная сила слева и справа от ненагруженного шарнира имеет одно и то же значение, а, следовательно, эпюра моментов не имеет перелома. Наоборот, над опорами меняется своя величина, а эпюра M меняет уклон. Действие нагрузки, приложенной в различных пролетах, может быть найдено суммированием эпюр, обусловленных нагрузкой каждого пролета в отдельности. Пр



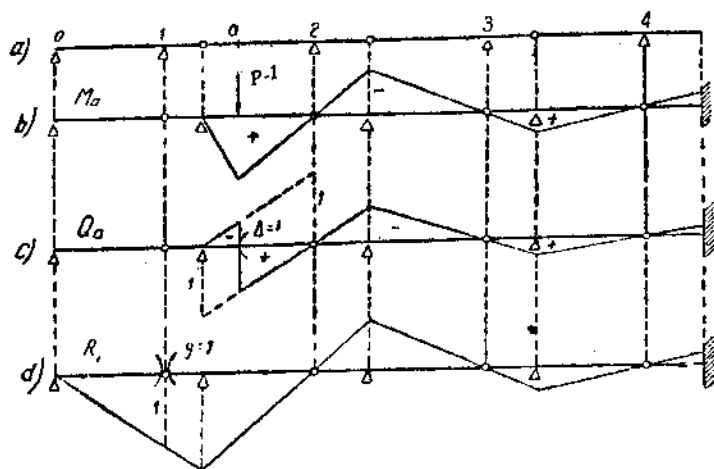
Фиг. 3.

решение той же задачи получается по методу замены связей. Строим эпюры M^0 от местной нагрузки, как для системы разрезных балок (фиг. 3). Затем прочерчиваем ломаную эпюру опорных моментов, идя от правого конца к левому.

Построение инфлюент получается весьма изящным, если воспользоваться кинематическим методом и обобщенной аналогией Мора.¹ В качестве примера построим инфлюенты M и Q в сечении a инфлюенту опорной реакции R_1 (фиг. 4,а). Взаимная балка будет иметь шарниры в местах опор заданной балки и опоры в местах шарниров. На левом конце, где имеется шарнирно-неподвижная опора, такая будет и у взаимной балки. Справа свободному концу соответствует делка у взаимной балки. Инфлюента M_a строится как эпюра прогибов заданной балки от изменения угла $\theta = 1$ и одновременно как эпюра моментов взаимной балки от $P = \theta = 1$ (фиг. 4,б). Инфлюента Q_a строится как эпюра прогибов действительной балки от сдвига $\Delta = 1$.

¹ См. А. А. Уманский, Специальный курс строительной механики, ч. I, § 5.

момент эпюра моментов балки взаимной от сосредоточенного момента $\bar{M} = \Delta = 1$ (фиг. 4, c). Инфлюента реакции R_1 строится как эпюра прогибов балки от вертикального перемещения $y = 1$ (или от укорочения опорного стержня на $\lambda = 1$, если представить опору замененной опорным стержнем). Одновременно та же инфлюента может быть построена как эпюра моментов взаимной балки от двух равных и взаимно противоположных сосредоточенных моментов (фиг. 4, d), приложенных в шарнире, численно

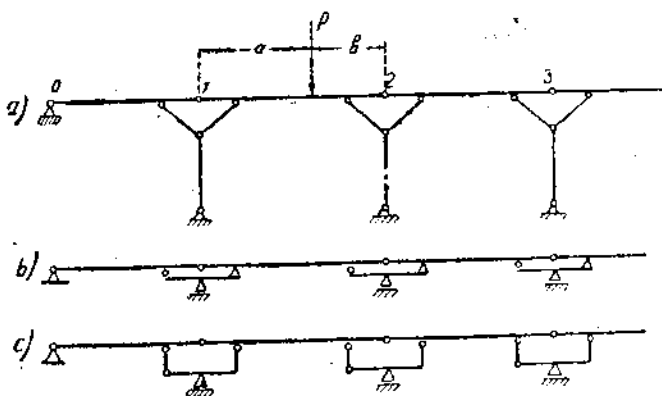


Фиг. 4.

равных единице (вспомним, что реакция равна разности поперечных сил непосредственно справа и слева от опоры; эпюра моментов от двух противоположно направленных моментов эквивалентна разности инфлюент Q справа и слева от опоры).

3. Балочная система с передачей опорных реакций через подкосы или подбалки

Различные варианты устройства опор этой системы показаны на фиг. 5, a, b, c. Расчет будем вести для третьей схемы. Введем в каждой



Фиг. 5.

подбалке над опорой шарнир и одновременно поставим возмещающий опорный стержень между шарнирами в подбалке и в балке (фиг. 6). Основной системой будет ряд разрезных балок. Неизвестными являются моменты в введенных средних шарнирах подбалок (опорные моменты). Они определяются из условий, что во всех введенных опорных стержнях усилия от совместного действия заданной нагрузки и неизвестных равны

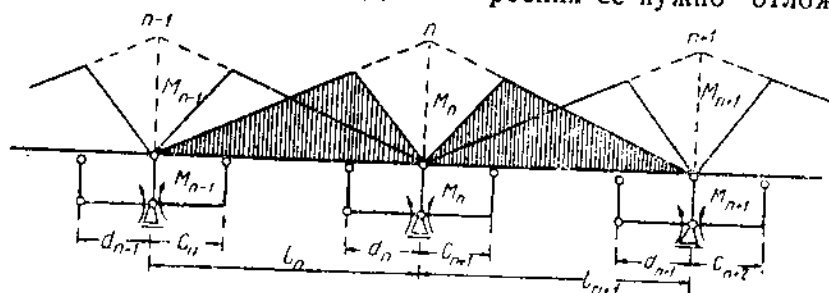
нулю. Усилия S^0 в опорных стержнях для основной системы зависимо очевидно, только от нагрузки двух смежных пролетов и равны сум опoрных давлений.

$$S_n^0 = \sum P_n \frac{a_n}{l_n} + \sum P_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

где a и b — плечи груза P соответственно от левой и правой опор данного пролета. Положительными считаем сжимающие усилия. На у лие n -го стержня влияют три последовательных опорных момента: M_{n-1} , M_n , M_{n+1} . Для n -ой опор типовые уравнения имеют вид:

$$M_{n-1} S_{n,n-1} + M_n S_{nn} + M_{n+1} S_{n,n+1} + S_n^0 = 0.$$

Здесь $S_{n,n-1}$, S_{nn} , $S_{n,n+1}$ — усилия в n -ом стержне соответственно $M_{n-1} = 1$, $M_n = 1$ и $M_{n+1} = 1$. Уравнения получаются трехчленные, прич первое и последнее уравнения содержат не три, а два неизвестных. Р асмотрим, как определяются коэффициенты S_{ik} . Эпюра моментов от л имеет вид двух треугольников. Для построения ее нужно отложить н



Фиг. 6.

опорой n ординату, равную 1, соединить ее конец с точками $n-1$ и $n+1$ а затем срезать треугольники, как показано на фиг. 6. (На фиг. 6 эпюра от сжатого волокна и заштрихована). Эпюры от $M_{n-1} = 1$ и $M_{n+1} = 1$ имеют такой же вид, но смещены на один пролет влево и вправо. Усилие в n -ом нововведенном опорном стержне равно разности поперечных сил в балке справа и слева от n . Оно легко определяется из уклонов эпюр моментов.

$$S_{nn} = \frac{1}{l_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1} - c_{n+1}}{c_{n+1}} + \frac{1}{l_n} \cdot \frac{l_n - d_n}{d_n};$$

$$S_{n,n-1} = \frac{1}{l_n}; \quad S_{n,n+1} = \frac{1}{l_{n+1}}.$$

Следовательно, типовое уравнение трех моментов будет:¹

$$M_{n-1} \frac{1}{l_n} + M_n \left(\frac{l_n - d_n}{l_n d_n} + \frac{l_{n+1} - c_{n+1}}{l_{n+1} c_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{1}{l_{n+1}} + \sum P_n \frac{a_n}{l_n} + \sum P_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} = 0.$$

Составив и решив систему уравнений, определим все неизвестные моменты, а затем построим и окончательную эпюру моментов, просуммировав эпюру M^0 с эпюрами от опорных моментов. Легко обнаружить общие черты в расчете этой системы с исследованием неразрезной балки. Обычно рассматриваемая конструкция рассчитывается графически, кинематически

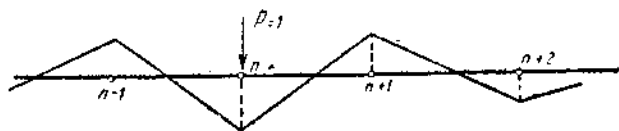
¹ Ср. А. А. Уманский, Наплавные мосты, ч. 1, Киев, 1931, § 17.

методом. Заслуживает внимания тот факт, что кинематические построения во многом совпадают в данном случае с графическими приемами расчета неразрезной балки по методу фокусов.

Построение инфлюент. Любая статическая величина может быть выражена через ту же величину для основной системы, левый и правый опорные моменты. Напр., изгибающий момент в средней части балки равен:

$$M_a = M_a^0 + M_{n-1} \frac{l_n - a}{l_n} + M_n \frac{a}{l_n}.$$

Поэтому инфлюента M_a может быть построена как сумма трех инфлюент M_a^0 , M_{n-1} , M_{n+1} (последние две предварительно умножаются на коэффициенты $\frac{l_n - a}{l_n}$ и $\frac{a}{l_n}$). Инфлюента M_n имеет вид ломаной с точками перелома над шарнирами балки. Достаточно определить ординаты в точках перелома. Для построения инфлюент всех неизвестных опорных моментов следует решить систему уравнений s раз, устанавливая груз $P=1$ над опорами 1, 2, 3... s . При этом, очевидно, каждый раз один свободный член равен 1, все остальные равны нулю. Иначе говоря, нужно определить числа влияния, причем ординаты инфлюент в точках перелома равны элементам столбца матрицы чисел влияния, т. е. значениям одной и той же неизвестной при различных свободных членах.



Фиг. 7.

На первый взгляд для построения одной инфлюенты, напр., M_n , нужно также s раз проделать решение, чтобы найти элементы n -го столбца. Однако задача значительно упрощается, если обратить внимание на то, что в данном случае уравнения получаются в канонической форме, и, следовательно, столбец чисел влияния можно заменить строкой. Таким образом, чтобы построить инфлюенту M_n , достаточно положить $S_n^0 = 1$, все остальное $S^0 = 0$, решить систему уравнений и отложить полученные величины M в виде ординат под соответствующими шарнирами (фиг. 7).¹

Совершенно аналогично ведется расчет системы, показанной на фиг. 5, а. Если принять в качестве заменяемого стержня подкос, то придем к уравнению трех усилий в подкосах. Изящное решение получается, если выбросить имеющиеся опоры, или стойки системы, а взамен ввести опоры, или подвески, непосредственно поддерживающие шарниры балки. Будем иметь уравнение трех опорных реакций. Однако уравнения трех усилий в подкосах или трех реакций не получаются в канонической форме, и с этой точки зрения выбор в качестве неизвестных опорных моментов заслуживает предпочтения.

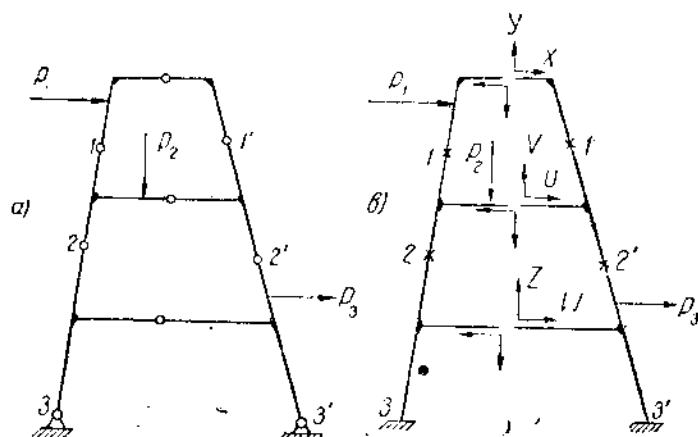
Статически-определимая многоярусная рама (фиг. 8).

Первый вариант решения. В качестве основной системы принимаем две консоли, заделанные нижним концом. Неизвестными будут горизонтальные и вертикальные (или какие-либо две другие) составляющие сил взаимодействия в сечениях ригелей, отделенных разрезом по шарниру. В данном случае число неизвестных равно шести. Для определения их имеем 6 уравнений, выражающих, что изгибающие моменты в тех

¹ Заметим, что не всегда уравнения метода замены связей получаются в канонической форме. Это зависит от выбора неизвестных и конфигурации системы. Напр., если шарнир балки и опора не находятся на одной вертикали, каноничность не имеет места.

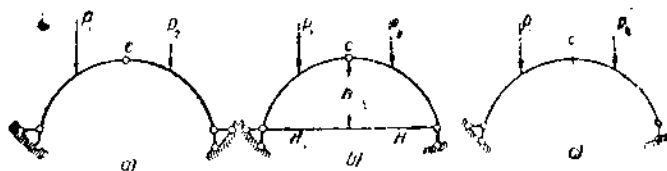
сечениях стоек основной системы, где в действительности имеются шаровые шарниры, — равны нулю:

- 1) $XM_{1X} + YM_{1Y} + M_1^0 = 0$;
- 1') $XM_{1'X} + YM_{1'Y} + M_1^0 = 0$;
- 2) $XM_{2X} + YM_{2Y} + UM_{2U} + VM_{2V} + M_2^0 = 0$;
- 2') $XM_{2'X} + YM_{2'Y} + UM_{2'U} + VM_{2'V} + M_2^0 = 0$;
- 3) $XM_{3X} + YM_{3Y} + UM_{3U} + VM_{3V} + WM_{3W} + ZM_{3Z} + M_3^0 = 0$;
- 3') $XM_{3'X} + YM_{3'Y} + UM_{3'U} + VM_{3'V} + WM_{3'W} + ZM_{3'Z} + M_3^0 = 0$.



Фиг. 8.

Решение этой системы следует проводить сразу в численном виде. Из первых двух уравнений определяем X и Y и подставляем во второе уравнение. Из него находим U и V и подставляем в третье и т. д., если уравнений большее число. Легко видеть, что та же система уравнений



Фиг. 9.

может быть получена и без представлений метода замены связей, методом сечений.

Второй вариант решения. Покажем другой путь решения, в котором возможности, заложенные в методе замены связей, выступают особенно ярко. Предварительно остановимся на примере трехшарнирной арки (фиг. 9, а). Распор арки можно определить, произведя замену стержней по фиг. 9, б. Этот распор оказывается численно равным усилию в затяжке

$$H = \frac{M_c}{h}.$$

Здесь M_c — момент в сечении C , определяемый как для криволинейной балки по фиг. 9, в; h — плечо затяжки относительно точки C .

Заменим теперь нашу раму двумя многоэтажными шпренгельными системами, как показано на фиг. 10. Незвестными для каждой системы буду

горизонтальные силы X , U , W и усилия в шпренгелях S_1 , S_2 , S_3 . Легко сообразить, что усилия в шпренгелях левой системы должны быть по величине равны, а по знаку противоположны усилиям в шпренгелях правой. Это следует из того факта, что шарниры ригелей должны быть в равновесии.

Систему уравнений для определения неизвестных X , U , W напомним, приравняв друг к другу растягивающее усилие в левом шпренгеле и сжимающее усилие в правом. В эти уравнения неизвестные S_1 , S_2 и S_3 не входят.

$$\frac{1}{r_1}(M_1^0 + XM_{1X}) = \frac{1}{r_1}(M_1^0 + XM_{1'X});$$

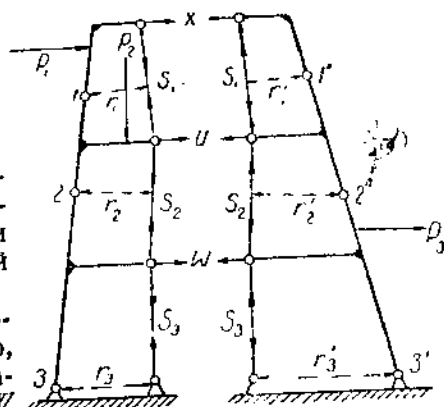
$$\frac{1}{r_2}(M_2^0 + XM_{2X} + UM_{2U}) = \frac{1}{r_2}(M_2^0 + XM_{2'X} + UM_{2'U});$$

$$\frac{1}{r_3}(M_3^0 + XM_{3X} + UM_{3U} + WM_{3W}) = \frac{1}{r_3}(M_3^0 + XM_{3'X} + UM_{3'U} + WM_{3'W}).$$

Неизвестные определяются в последовательном порядке. После того, как найдены X , U , W , определим и S_1 , S_2 , S_3 ; они равны левой (или правой) части уравнений 1), 2), 3).

Из написанных уравнений, между прочим, непосредственно усматривается, что, когда рама симметричная, а заданная нагрузка антисимметричная, то усилия X , U , W равны нулю.

Таким образом, метод замены связей позволяет определить неизвестные усилия из системы уравнений, из которых первое содержит одну неизвестную, а каждое последующее — на одну неизвестную больше. Преимущества такого решения очевидны.



Фиг. 10.

Сентябрь 1935 г.

¹ Заметим, что если шпренгеля не вертикальны, то величины X , U , W в первом и втором варианте решения будут неодинаковыми.

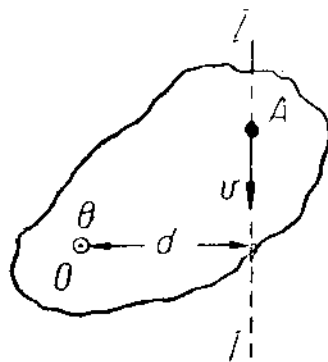
К ВОПРОСУ О КИНЕМАТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ-ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

При построении инфлюент для плоских статически-определимых систем кинематическим способом можно воспользоваться большим числом приемов.¹ Из них наиболее удобным нам представляется тот, в котором угловые скорости отдельных плоских дисков изображаются стрелками, перпендикулярными плоскости чертежа. Этот прием непосредственно вытекает из способа, предложенного О. Мором в 1910 г.,² до сих пор применялся, главным образом, для расчета плоских статически-неопределимых рам.³ Аналогии Мора для рам и балок развиты и обобщены в весьма содержательных работах А. А. Уманского, цитированных в выноске. Для стержневых статически-определимых ферм кинематический способ Мора не получил достаточно широкого распространения. Настоящая статья имеет целью популяризировать кинематический метод и на нескольких примерах показать его удобство и простоту.

Векториальное представление скоростей точек плоской системы

Движение плоского диска, как известно, всегда можно свести к вращению вокруг мгновенного центра с некоторой угловой скоростью. Скорость точки диска, совпадающей с мгновенным центром, равна нулю. Скорости различных точек фигуры пропорциональны расстояниям от мгновенного центра вращения и равны произведениям угловой скорости на это расстояние. Приложим в мгновенном центре O (фиг. 1) вектор θ , перпендикулярный плоскости чертежа и равный по величине мгновенной угловой скорости. Примем левую систему координат и вектор θ будем направлять в ту сторону, глядя с которой увидим вращение по часовой стрелке.

Перпендикулярный плоскости чертежа вектор θ будем изображать кружком с точкой в центре (острие стрелки), если вектор направлен к наблюдателю, и кружком с крестом (печо стрелки), если он идет за плоскость чертежа от наблюдателя. Проекция v линейной скорости любой точки A плоского диска на любое направление $l-l$ (или составляющая



Фиг. 1.

¹ И. М. Рабинович, Кинематический метод в строительной механике, Москва, 1928 г.
² O. Mohr, Beitrag zur Theorie d. Fachwerks, „Eisenbau“, 1910; Beitrag zur Biegelungslehre, „Eisenbau“, 1911.

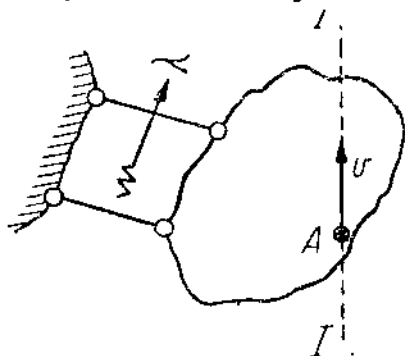
³ О. А. Уманский, Статика и кинематика рамных конструкций, ч. I, Київ, 1932.
 А. Уманський і А. М. Василенко, Про розрахунок рам. „Журн. інж., техн. циклу ВУАН“, III, в. 2, 1933. О. А. Уманський, Теорія трьох змінного перекрою. Збірник пам'яток К. К. Симинського, Київ, 1933. К. К. Симинський, Строительная механика, системы с лишними неизвестными, 1927.

v линейной скорости вдоль оси $I—I$ равна моменту вектора θ вокруг оси $I—I$ (фиг. 1):

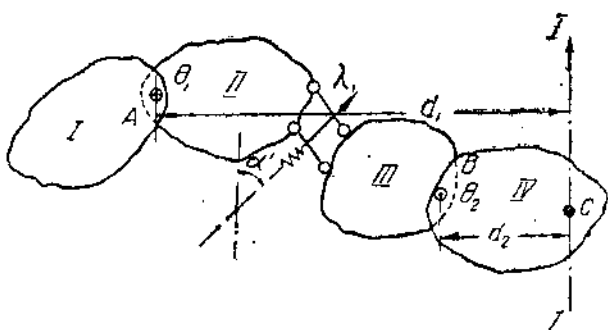
$$v = \theta \cdot d. \quad (1)$$

Принятое выше правило знаков для момента сохраняется, а именно: вектор v должен быть направлен вдоль оси $I—I$ в ту сторону, глядя с которой мы увидим, что вектор θ вращает по часовой стрелке. Угловая скорость диска в точке A , очевидно, равна θ , так как вращательная часть движения не зависит от полюса.

Из этих известных свойств плоского движения видно, что угловая скорость или вектор θ играет роль главного вектора, а линейная скорость v играет роль момента. Если мгновенный центр вращения O (точка приложения вектора θ) уходит на бесконечность, то вектор θ вырождается в пару λ (имеющую размерность линейной скорости), а движение диска превращается в поступательное.



Фиг. 2.



Фиг. 3

Поступательную пару λ мы будем изображать вектором, лежащим в плоскости чертежа, с зигзагом на конце (фиг. 2). Проекция линейной скорости любой точки A тела на некоторое направление (на ось) $I—I$ в этом случае равна проекции вектора λ :

$$v = \lambda \cdot \cos \alpha. \quad (2)$$

Мы видим, что движение твердого диска (скорости всех его точек) вполне определяется одним вектором θ (или λ). Если система состоит из нескольких связанных между собой дисков (фиг. 3), относительные перемещения которых известны и изображены в виде векторов θ и λ , то не трудно найти относительные перемещения любых точек системы. Пусть (фиг. 3) диск I будет неподвижным, диск II вращается относительно диска I вокруг точки A с угловой скоростью θ_1 , диск III перемещается относительно диска II поступательно с линейной скоростью λ_1 , а диск IV вращается относительно диска III вокруг точки B с угловой скоростью θ_2 . Тогда линейная скорость точки C диска IV по направлению оси $I—I$ относительно неподвижного диска I равна алгебраической сумме моментов векторов θ и проекции вектора λ :

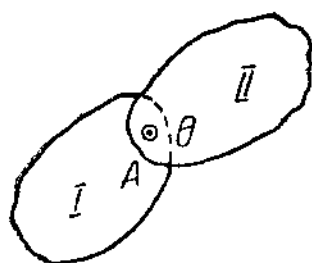
$$v = +\theta_1 \cdot d_1 + \lambda_1 \cdot \cos \alpha_1 - \theta_2 \cdot d_2. \quad (3)$$

Векторы θ можно складывать геометрически и оперировать с их равнодействующей. В простейших случаях, когда количество векторов θ и λ невелико, нет смысла производить геометрическое сложение.

2. Условия, налагаемые связями

Связи в виде нерастяжимых стержней или неподвижных точек между плоскими дисками уменьшают степень свободы шарнирного механизма, связывая векторы θ и λ определенными зависимостями. Рассмотрим

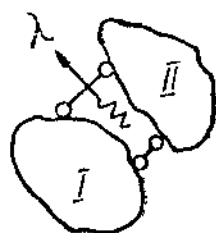
простейшие из этих зависимостей, причем будем считать, что диск I неподвижен, исследуя, таким образом, относительное движение или движение по отношению к диску I .



Фиг. 4.

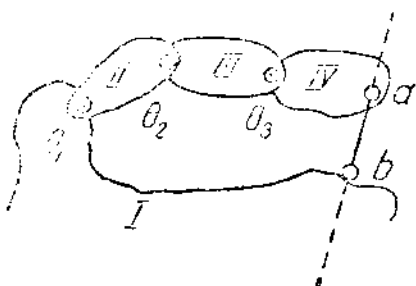


Фиг. 5.

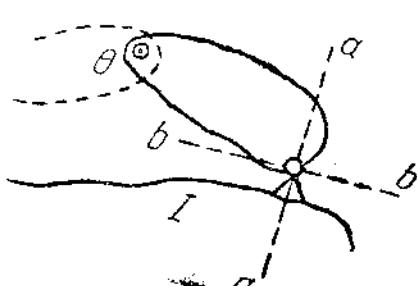


Фиг. 6.

а) Неподвижная точка A (фиг. 4) или шарнир (фиг. 5), прикрепляющий диск II к диску I , фиксирует положение вектора θ относительной угловой скорости, не фиксируя его величины.



Фиг. 7.



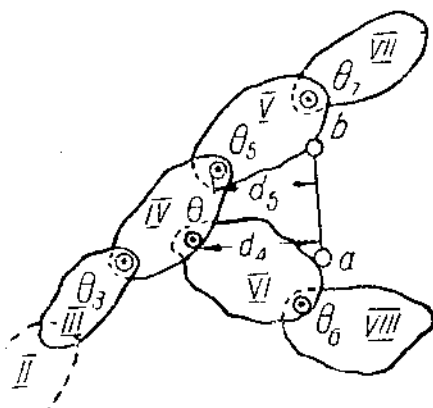
Фиг. 8.

б) Если диск II прикреплен к диску I двумя пересекающимися стержнями, то вектор θ относительной угловой скорости находится в точке пересечения стержней. Если стержни не пересекаются (фиг. 6), то, вместо вектора θ , в расчет вводится вектор-момент λ , перпендикулярный общему направлению стержней.

в) Прикрепление диска к неподвижному диску I одним нерастяжимым стержнем $a-b$ (фиг. 7) налагает условие, что перемещение точки a по направлению стержня $a-b$ равно нулю (или, что то же, сближение точек a и b невозможно). Поэтому сумма моментов всех векторов θ и проекций всех векторов λ на ось, совпадающую со стержнем $a-b$, равна нулю.

г) Если кинематическая цепь дисков прикреплена к неподвижному телу I при помощи неподвижной опоры (фиг. 8), то это дает условие, что суммы моментов θ и проекций λ относительно двух любых осей $a-a$ и $b-b$, пересекающихся в центре опоры, равны нулю.

д) Связь в виде нерастяжимого стержня $a-b$ (фиг. 9) между двумя дисками кинематической цепи налагает условие, что сближение точек a и b невозможно. Рассмотрим следующие участки кинематической цепи на фиг. 9, связанные шарнирами: $I-II-III-IV-V$ и $I-II-III-IV-VI$. Скорость вдоль $a-b$ точки b первой цепи равна моменту относительно стержня



Фиг. 9.

$a-b$ следующих векторов θ , выражающих движение звеньев цепи:

$$v_b = \theta_1 \cdot d_1 + \theta_2 \cdot d_2 + \theta_3 \cdot d_3 + \theta_5 \cdot d_5.$$

Скорость вдоль $a-b$ точки a второй цепи точно так же равна:

$$v_a = \theta_1 \cdot d_1 + \theta_2 \cdot d_2 + \theta_3 \cdot d_3 + \theta_4 \cdot d_4.$$

Приравнявая $v_a = v_b$, после сокращения получим:

$$\theta_4 \cdot d_4 = \theta_5 \cdot d_5.$$

Мы видим, что стержень $a-b$ дает зависимость только между векторами θ_4 и θ_5 , входящими в состав внутренней цепи системы из звеньев VI , IV , V и $a-b$. Все остальные θ в уравнение не входят.

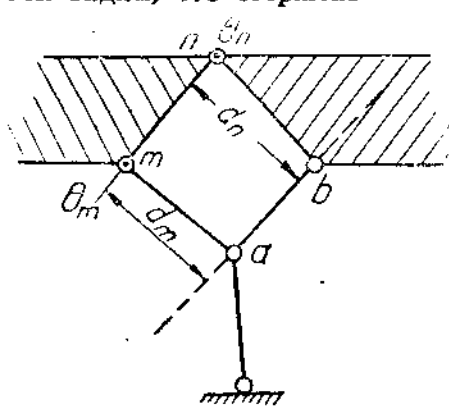
На основании сказанного между векторами θ_n и θ_m (фиг. 10 — случай шарнирного четырехугольника) существует зависимость:

$$\theta_m \cdot d_m = \theta_n \cdot d_n$$

или

$$\theta_m = \theta_n \cdot \frac{d_n}{d_m}. \quad (4)$$

Здесь d_n и d_m — расстояния шарниров n и m от стержня $a-b$.



Фиг. 10.

3. Построение линий влияния

Пусть требуется найти усилие A в некоторой связи между частями нашей системы, находящейся под действием силы P и момента M . Удалим связь A и обратим систему в подвижной механизм с одной степенью свободы, сообщив ее частям некоторые скорости. Тогда начало возможных перемещений даст следующее условие равновесия системы:

$$A \cdot V + P \cdot v + M \cdot \omega = 0.$$

Здесь V — обобщенная скорость (проекция), соответствующая сближению концов удаленной связи, v — проекция линейной скорости, а ω — угловая скорость точек приложения внешних сил. Если действует только сосредоточенная сила, то

$$A = -P \cdot \frac{v}{V}. \quad (5)$$

Если действует только момент, то

$$A = -M \cdot \frac{\omega}{V}. \quad (6)$$

Отсюда ясно, что когда $V = -1$, то линейные и угловые скорости точек системы равны ординатам инфлюент. Величины v и ω мы будем находить, как моменты или проекции векторов θ и λ . Формулируем правила для кинематического построения инфлюент.

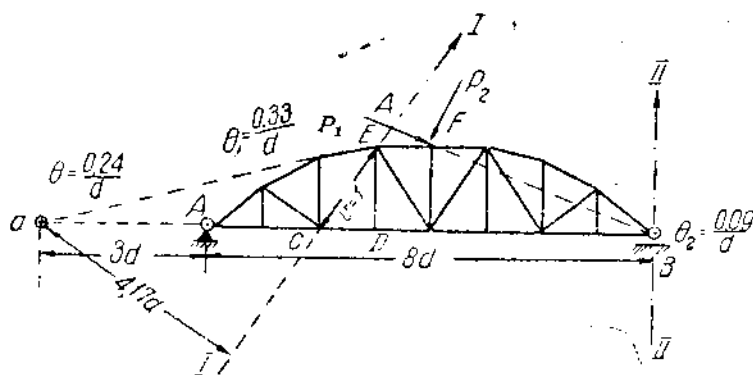
а) Удаляем рассматриваемую связь, обращая систему в подвижной механизм с одной степенью свободы. Концам удаленной связи сообщаем скорость, соответствующую отрицательному направлению действия усилия связи на систему. При этом вся система придет в движение.

б) Для всех частей системы находим векторы θ и λ мгновенных скоростей этого движения. Положение векторов определяется мгновенными центрами относительного вращения, а величина векторов определяется

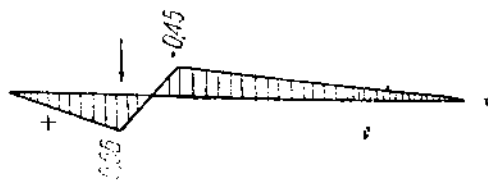
условием $V = -1$ и условиями связей звеньев между собой и с неподвижным диском (землей).

в) Величины ординат инфлюент для сосредоточенных внешних сил равны суммам моментов векторов θ и проекций векторов λ относительно прямых действий сил. Величины ординат инфлюент для внешних моментов равны суммам векторов θ .

Пример 1-й. Построим инфлюенты для усилия в раскосе третьей панели фермы, изображенной на фиг. 11. Удалим стержень. Тогда ферма обратится в подвижной механизм, состоящий из двух частей, правой и левой, связанных элементами верхнего и нижнего пояса. Эти элементы пересекаются в точке a , лежащей левее опоры A . Точка a является мгновенным центром относительного вращения правой части относительно левой. Приложим в этой точке вектор относительной угловой скорости θ



Фиг. 11.



Фиг. 12.

направленный перпендикулярно плоскости чертежа. Величину θ найдем из условия, что узлы удаленного стержня удаляются друг от друга со скоростью, равной единице (фиг. 11). Это значит, что момент вектора θ вокруг оси, проходящей через узлы удаленного стержня, должен быть равен единице, причем скорость, единица на фиг. 11 должна быть направлена вверх, так как при относительном движении левая часть фермы считается неподвижной. Предположим, что вектор θ направлен к наблюдателю, тогда для оси $I-I$, направленной вверх, можно написать уравнение:

$$-\theta \cdot 4,17d = 1.$$

Отсюда

$$\theta = -\frac{1}{4,17d} = -\frac{0,24}{d}.$$

Знак минус показывает, что вектор θ надо направить от наблюдателя.

Найдем теперь величину и положение векторов θ_1 и θ_2 вращения левой и правой частей фермы. Левая часть фермы может вращаться только вокруг неподвижной левой опоры A ; следовательно, вектор θ_1 приложен в точке A . Движение правой части состоит из вращения вокруг точки A с угловой скоростью θ , плюс вращение вокруг точки a с угловой скоростью θ .

Так как правая подвижная опора B не позволяет правому концу фермы перемещаться по вертикальному направлению, то момент векторов θ и θ_1 вокруг вертикальной оси $II-II$ должен быть равен нулю. Это условие дает уравнение для определения вектора θ_1 . Предполагая, что вектор θ_1 направлен к наблюдателю, получим:

$$\theta_1 \cdot 8d - \theta \cdot 11d = 0.$$

Откуда

$$\theta_1 = \frac{11}{8} \cdot \theta = \frac{11}{8} \cdot \frac{0,24}{d} = \frac{0,33}{d}.$$

Наконец, сложив векторы θ и θ_1 , находим равнодействующий вектор $\theta_2 = \frac{0,09}{d}$, проходящий через правый опорный узел фермы. Этим вектором определяется движение правой части фермы.

После нахождения векторов θ_1 и θ_2 легко определить ординаты инфлюент усилия в раскосе от любых сил. Предположим, что на ферму действуют вертикальные силы, направленные вниз. Ординаты инфлюенты будут равны для левой части фермы моментам вектора θ_1 , а для правой части — моментам вектора θ_2 относительно вертикальных прямых, проведенных через нагруженные узлы. При этом ординаты будут положительны, если вектор-момент направлен вниз, и отрицательны, если вектор-момент окажется направленным вверх.

Составляя выражения для моментов, получаем следующие значения ординат:

$$\eta_A = 0;$$

$$\eta_C = +\theta_1 \cdot 2d = +\frac{0,33}{d} \cdot 2d = +0,66;$$

$$\eta_D = -\theta_2 \cdot 5d = -\frac{0,09}{d} \cdot 5d = -0,45;$$

$$\eta_B = 0.$$

По этим ординатам на фиг. 12 построена инфлюента усилия рассматриваемого раскоса.

Положение векторов θ_1 и θ_2 позволяет решить задачу о том, при каком направлении сил в стержне получится наибольшее или наименьшее усилие. Предположим, что сила, равная единице, приложена в верхнем среднем узле F фермы. Усилие в раскосе CE от единичной силы равно моменту вектора θ_2 относительно направления силы. Поэтому, если направление силы P_1 (фиг. 11) пересекает вектор θ_2 , то усилие в раскосе равно нулю. Очевидно, что сила P_2 , перпендикулярная направлению первой силы P_1 , вызовет максимальное усилие в раскосе, так как момент вектора θ_2 будет наибольшим. Знак усилия в раскосе зависит от направления P_2 . Вектор-момент от вектора θ_2 вокруг направления P_2 идет вверх; поэтому, если сила P_2 направлена вниз, то в раскосе она вызовет сжатие.

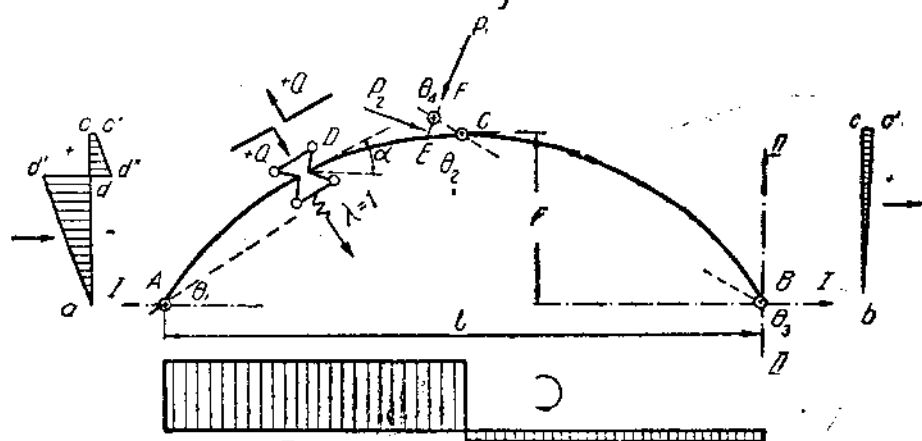
Пример 2-й. Построим инфлюенты для поперечной силы в сечении D трехшарнирной арки, изображенной на фиг. 13. Освободим правый и левый концы арки в сечении D от связи, препятствующей поперечному смещению концов арки. Тогда арка превратится в подвижной механизм с одной степенью свободы, изображенный на фиг. 13, в котором концы арки в сечении D могут смещаться в направлении радиуса кривизны, но не могут расходиться в направлении касательной к арке. Поперечную силу Q будем считать положительной, если она направлена, как показано на фиг. 13 вверх. Чтобы внутренняя сила Q совершила отрицательную работу, дадим правому концу арки в сечении D перемещение со скоростью $\lambda = 1$ вниз относительно левого конца. Арка придет в движение, причем повороты в шарнирах A , C и B будут происходить с угловыми скоростями

θ_1 , θ_2 и θ_3 . Величины векторов θ_1 и θ_2 найдем из уравнения моментов относительно осей $I-I$ и $II-II$, проходящих через неподвижный шарнир B . Предполагая сначала, что векторы θ_1 и θ_2 направлены к наблюдателю, напишем, что моменты этих векторов плюс проекция вектор-момента $\lambda = 1$ равны нулю. Для оси $I-I$:

$$+1 \cdot \sin \alpha - \theta_2 \cdot f = 0.$$

Откуда

$$\theta_2 = \frac{\sin \alpha}{f}.$$



Фиг. 13.

Вектор θ_2 направлен к наблюдателю.

Для оси $II-II$:

$$-\theta_1 \cdot l - 1 \cdot \cos \alpha - \theta_2 \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\theta_1 = -\frac{\cos \alpha}{l} - \frac{\theta_2}{2} = -\frac{l \cdot \sin \alpha + 2f \cdot \cos \alpha}{2l \cdot f}.$$

Вектор θ_1 направлен от наблюдателя.

Вектор θ_3 равен сумме векторов θ_1 и θ_2 , так как движение правой полуарки состоит из вращения вокруг A с угловой скоростью θ_1 против часовой стрелки, поступательного перемещения $\lambda = 1$ и вращения вокруг C с угловой скоростью θ_2 по часовой стрелке. Предполагая, что вектор θ_3 направлен к наблюдателю, найдем, что его величина равна:

$$\theta_3 = \frac{\sin \alpha}{f} - \frac{l \cdot \sin \alpha + 2f \cdot \cos \alpha}{2l \cdot f} = \frac{l \cdot \sin \alpha - 2f \cdot \cos \alpha}{2l \cdot f}.$$

После определения величин и направлений векторов θ легко найти ординаты инфлюент.

Предположим, что на арку действуют горизонтальные силы, направленные слева направо (фиг. 13). Ординаты инфлюенты на участке AD арки равны моментам вектора θ_1 вокруг направления сил; так как вектор-момент направлен налево, против действия сил, то ординаты будут отрицательны. Участок линии влияния будет иметь вид треугольника add' , изображенного слева на фиг. 13. На участке DC арки ординаты инфлюенты равны моменту вектора θ_1 плюс проекция вектор-момента $\lambda = 1$ (т. е. $1 \cdot \sin \alpha$). Следовательно, инфлюента в сечении D будет иметь скачок, как показано на фиг. 13 слева. Ординаты участка $dd''c'$ будут положительными или отрицательными, в зависимости от геометрических размеров. Наконец, для участка CB арки ординаты инфлюенты равны моментам вектора θ_3 относительно направления сил, и инфлюента имеет вид треугольника bcc' .

Векторы θ_1 и θ_2 направлены к наблюдателю.

Движение части 5-5-4 рамы складывается из двух вращений: θ_1 и θ_2 , движение части 4-7-8 складывается из трех вращений: θ_1 , θ_3 и θ_4 . Величину θ_4 определим из условия, что горизонтальное перемещение шарнира 8 кинематической цепи из звеньев 1-К-3, 3-5-4 и 4-7-8 равно горизонтальному перемещению шарнира 8 кинематической цепи из звеньев 1-3-К, К-2 и 2-9-8. Для этого приравняем момент векторов θ_1 и θ_4 относительно оси III-III моменту векторов θ_1 , θ и θ_2 вокруг той же оси. Вектор θ_4 будем предполагать направленным к наблюдателю, а вектор θ_3 в уравнение не войдет, так как лежит на оси III-III.

$$\theta_1 \cdot \frac{3}{2} l - \theta_4 \cdot \frac{l}{2} = \theta_1 \cdot \frac{3}{2} l - \theta \cdot \frac{l}{2} + \theta_2 \cdot \frac{l}{2}.$$

Отсюда

$$\theta_4 = \theta - \theta_2 = 0.$$

Величину вектора θ_3 определим из условия, что вертикальное перемещение шарнира 8 равно нулю. Предполагая, что θ_3 направлен к наблюдателю, приравняем нулю сумму моментов векторов θ_1 , θ_3 и θ_4 вокруг оси I-I.

$$-\theta_1 \cdot l - \theta_3 \cdot l + \theta_4 \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Откуда

$$\theta_3 = \frac{\theta_4}{2} - \theta_1 = -\frac{1}{4}.$$

Вектор θ_3 направлен от наблюдателя.

Совершенно аналогично, чтобы найти величину вектора θ_6 , приравняем момент векторов θ_1 , θ_3 и θ_6 относительно оси IV-IV моменту векторов θ_1 , θ_3 и θ_4 относительно той же оси.

$$\theta_1 \cdot \frac{5}{2} l - \theta_3 \cdot l - \theta_6 \cdot \frac{l}{2} = \theta_1 \cdot \frac{5}{2} l - \theta_3 \cdot l - \theta_4 \cdot \frac{l}{2}.$$

Отсюда

$$\theta_6 = \theta_4 = 0.$$

Приравнивая нулю сумму моментов векторов θ_1 , θ_3 , θ_5 и θ_6 вокруг оси I-I и предполагая, что вектор θ_5 идет к наблюдателю, получим уравнение для определения θ_5 .

$$-\theta_1 \cdot l + \theta_3 \cdot l - \theta_5 \cdot l - \theta_6 \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\theta_5 = -\theta_1 + \theta_3 - \frac{\theta_6}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = 0.$$

• Найдем инфлюенты момента в сечении К от горизонтальных сил, действующих справа налево на правую стойку.

На участке 9-8 инфлюента имеет вид треугольника, и ординаты ее равны моментам векторов θ_1 , θ и θ_2 . На участке 8-7 и выше инфлюента имеет вид прямоугольника, и ординаты ее равны моментам векторов θ_1 и θ_3 , так как $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$. Ординаты имеют отрицательный знак.

Изложенные три примера показывают, что кинематический способ расчета плоских систем с удобством позволяет строить инфлюенты от сил любого направления, причем знак и величины ординат определяются без труда. Мы ограничились простыми примерами; однако изложенного достаточно для решения более сложных задач, например, для расчета преобразованных систем, обычно рассчитываемых при помощи замен стержней.

Киев, май. 1935 г.

ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ КОНСТРУКЦИЙ (СТЕРЖНЕЙ, АРОК И РАМ) ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ¹

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Краткая история развития понятия потери устойчивости конструкций

Хотя со времени первых экспериментальных и теоретических работ по вопросам устойчивости сжатых стержней прошло уже около двух столетий,² но до сих пор, в виду ряда специфических трудностей, проблема устойчивости конструкций в целом не решена окончательно.

Трудности эти состояли, как в сложности вопроса с математической стороны, так и в отсутствии всеобъемлющего определения понятия потери устойчивости, охватывающего все случаи практики.

Так, например, первоначально не учитывалась работа стержней за пределом упругости. Смешивались понятия прочности и устойчивости; устойчивость хотели трактовать, как функцию от напряжений в крайних волокнах. Потеря устойчивости считалась исключительным свойством систем, у которых линия давления совпадает с геометрической осью сооружения, причем считалось, что для систем с сжато-изогнутыми элементами понятие потери устойчивости отпадает.

К настоящему времени решено большое количество задач устойчивости для упругих конструкций, например, для стержней переменного сечения с продольной нагрузкой, распределенной по длине, для составных стержней, для устойчивости колец под действием радиального давления, для устойчивости арок, ферм, простых рам, пластинок и оболочек³.

Оказалось, что потеря устойчивости сжатых стержней в некоторых случаях (например, тонкостенные открытые авиационные профили) может происходить не только в виде выпучивания, но и в виде закручивания.⁴ Потеря устойчивости может иметь место не только с сжатыми стержнями, но и с изогнутыми (например, потеря плоской формы изгиба двутавровых балок⁵) и скручиваемыми стержнями (например, продольный изгиб закручиваемого вала⁶ или винтовой рессоры⁷).

¹ Настоящая работа в более подробном виде печатается на украинском языке в изданиях института строительной механики Акад. Наук УССР.

² В 1729 г. Моссенбрук экспериментально нашел, что сопротивление сжатых стоек постоянного сечения обратно пропорционально квадратам их длины. Теоретические работы Леонарда Эйлера были опубликованы в 1744 и 1757 г.

³ Обзор достижений по этим вопросам и литературные указания можно найти у С. П. Тимошенко, *Stabilitätsprobleme der Elastizität, Handbuch der phys. u. techn. Mechanik*, 1929 (имеется в русском переводе); Rudolf Mayer, *Die Knickfestigkeit*, В. 1921; Friedrich Bleich, *Теория и расчет жел. мостов*, Москва, ОГИЗ, 1931; И. М. Рабинович, *Об устойчивости стержней в статически-неопределимых системах*, ГИЗ, 1932; С. П. Тимошенко, *Сопротивление материалов*, ч. II ГТТИ, 1932 г.; Акад. А. Н. Динник, *Об устойчивости упругих систем* ОНТИ НКТП 1935; И. Я. Штаерман, *„Устойчивость оболочек“*, Труды К. А. И. выпуск 2, Киев, 1934.

⁴ Rudolf Sonntag (in Gera), *Über eine durch Torsion hervorgerufene Kipperschlingung*, ZAMM, В. IX, Н. 5, 1929; H. Wagner und W. Pretschner, *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*, Luftfahrtforschung, В. II, № 5, 6, XII 1934; П. М. Знаменский, *Общая устойчивость длинных открытых профилей при продольном сжатии*, *„Техника воздушного флота“* 1934 г., № 12.

⁵ С. П. Тимошенко, *Изв. Петербургск. политехн. инст.*, № 4 за 1905 г.

⁶ G. Kirchhoff, *Crelles Journ. f. Math.* 56, 1859. A. G. Greenhill, *„Inst. mech. engineers“*, Proc. 1883.

⁷ R. Grammel, ZAMM 4, 384, 1924.

Первый опыт обобщения различных задач устойчивости в общую теорию сделал Г. Браян,¹ исходивший из энергетического принципа, впоследствии развитого С. П. Тимошенко:²

Если деформированное состояние системы устойчиво, то соответствующее ему значение потенциальной энергии имеет минимальное значение по сравнению со всевозможными бесконечно-близкими состояниями деформаций. Иначе говоря, при всяком возможном бесконечно-малом отклонении системы от изучаемого состояния приращение работы внутренних сил должно быть больше, чем приращение работы внешних сил.

Р. Саввелл,³ оперируя с идеально упругим телом, имеющим бесконечно-большую прочность, и отбросив ограничение о малой величине деформаций, решает задачи устойчивости не только для стержней и пластин, но и для сплошных тел.

Для определения критической системы нагрузок он составляет общие уравнения безразличного равновесия, определяющего момент потери устойчивости.

Затем Мизес и Ратцерсдорфер,⁴ исходя из энергетического принципа, показали для плоских шарнирно-стержневых ферм возможность потери устойчивости фермы в целом, при сохранении прямолинейности всех стержней и без выпучивания фермы из своей первоначальной плоскости. При этом Мизес и Ратцерсдорфер исходили из того же представления о весьма прочном идеально упругом материале стержней фермы.

Теорию устойчивости аксиально сжатых стержней за пределом упругости разработали Энгессер и Карман.⁵

Вопрос о допускаемой нагрузке для эксцентрично сжатых стержней оказался значительно сложнее. Большое распространение получил взгляд, что решающим в этом случае является величина напряжений в крайних волокнах опасного сечения. Такую точку зрения в последнее время высказывали, напр., Мелан, Шамбо, Франдсен, Юнг, Завриев и, особенно, Остенфельд.⁶ С другой точки зрения решающим фактором является предельная несущая способность стержня в момент потери устойчивости, когда нарушается равновесие между внешней нагрузкой и равнодействующей внутренних сил опасного сечения стержня.

Представителями такого толкования проблемы являются: Грюнинг, Крон, Рош, Гартман, Вестергард и Хвалла.⁷

Проф. Рош в работах Швейцарской комиссии Т. К. V. S. B. (1921—1926) подробно разработал эту проблему; для упрощения выкладок он допустил, что эпюра искривления стержня имеет вид полуволны синусоиды, как для зоны упругих, так и для остающихся деформаций. Экспериментальные исследования Т. К. V. S. B. вполне оправдали результаты теории Роша.

¹ G. H. Bryan. „Proc. Cambridge phil. soc.“ 6, 199, 1886/89.

² С. П. Тимошенко, Об устойчивости упругих систем, Киев, 1910.

³ P. V. Southwell „Phil. trans. Roy. soc.“ 213A, 187, 1913.

⁴ R. v. Mises u. J. Ratzersdorfer, Die Knicksicherheit von Fachwerken, „ZAMM“, 1925, S. 218—231.

⁵ F. Engesser. „Schweiz Bauzeitung“ B. 29, 1895. Th. v. Karman, „Forschungsarbeiten“ № 81, 1910.

⁶ F. Melan, „Bauing.“ 10, 1929; R. Chambaud, „Premier congrès international du beton et du beton armé“, Liège, 1930; P. M. Frandsen „Int. Ver. Brücken und Hochbau“, Abhdlg. 1, 1932; D. H. Joung там же; K. C. Завриев „Изв. Инж. Стр. Инст. Грузии им. Сталина“ 1932; A. „Ostenfeld“, Mitt. Labor. f. Baustatik d. T. H., Kopenhagen, H. 2 (1929), H. 3 (1930), H. 5 (1931).

⁷ M. Grüning, „Hannov. Z. Arch. Ing. Wesen“, 1917; R. Krohn, „Bautechn.“, I, 1923; M. Roß und J. Brunner (in Zürich), „Berichte vom 1921 und 1926 an die T. K. V. S. B.“, M. Roß (Zürich), Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl, 1927; M. Roß, La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées, 1932; F. Hartman, Z. d. Oe IAV 85, 1933, S. 65, H. M. Westergaard und W. R. Osgood, „Amer. Soc. Mech. Eng. Transactions“, 1928. E. Chwalla, „Sitzungsberichte, Wien Academie“ Abt. IIa, Bd. 137, 1928, E. Chwalla, „Stahlbau“ H. 7, 17, 21, 22, 23, 1934. После сдачи этой работы в печать появились еще статьи: K. Jezek „Stahlbau“ H. 12, 1935; H. 2, 3, 5, 1936 г.; I. Fritsche, „Stahlbau“ H. 18, 1935.

Гартман предполагал, в целях уточнения, что кривая искривления стержня имеет вид дуги синусоиды меньшей, чем полуволна, точнее, что форма искривления стержня при частичной его работе за пределом пропорциональности такая же, как и для идеально упругого стержня.

Хвалла не делает упрощающих предположений относительно формы кривой искривления, вследствие чего его методика сложнее.

Результаты вычислений по методу Роша и Хвалла весьма близко сходятся. Точность выводов ограничивается в виду применения графических приемов расчета.

Рош и Хвалла свою методику применяли главным образом для стержней из строительной стали; в 1935 г. в Секторе деревянных конструкций ЦНИПС (Москва) их методика была с успехом применена к стержням из соснового дерева, причем опыты весьма хорошо подтвердили результаты теории.

Таким образом, ряд вышеупомянутых трудностей уже преодолен. В порядке дня стоят задачи проверки устойчивости целых конструкций: неразрезных стержней, арок, рам и т. д. с учетом их работы за пределом упругости.

В качестве всеобъемлющего определения понятия потери устойчивости (критического состояния) можно предложить определение Циммерманна:¹

„Стержень (или система стержней) находится под влиянием критической нагрузки на пределе упругого сопротивления, когда он (она) совершенно не в состоянии сопротивляться изменению формы“.

§ 2. Общее определение понятия потери устойчивости конструкций

Выясним теперь более подробно, что такое потеря устойчивости.

I. Равновесие системы называют устойчивым, если добавление к основным силам, на нее действующим, небольших незаметных, по сравнению с основными силами, посторонних случайных влияний не вызывает заметных больших деформаций. Если система устойчива, то отклонение от основной формы ее, возникшее вследствие действия дополнительных ничтожных вообще обстоятельств, исчезает по удалении этих обстоятельств—система возвращается к исходному устойчивому положению.

II. При устойчивом равновесии потенциальная энергия системы имеет при заданной форме системы минимальное значение по сравнению со всеми другими мыслимыми смежными формами; при неустойчивом же равновесии, наоборот, она имеет максимальное значение. При возрастании нагрузок может случиться, что потенциальная энергия, соответствующая этим нагрузкам и заданной форме системы, из значения минимум превращается в значение максимум—система из состояния устойчивого равновесия переходит в состояние равновесия неустойчивого, из которого может быть легко выведена, т. е. может потерять устойчивость при наличии самых ничтожных привходящих влияний, например, дальнейшего увеличения нагрузок.

Та система нагрузок, при которой происходит этот переход, называется критической системой нагрузок. Иначе говоря, при всяком возможном бесконечно-малом отклонении системы от состояния устойчивого равновесия приращение работы внутренних сил должно быть больше, чем приращение работы внешних сил. Это понятно, так как внутренние силы являются пассивными, внешние—активными, а работа пассивных сил, согласно закону сохранения энергии, может производиться только за счет работы активных сил.

¹ H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen, Berlin, 1925 г.

III. Критическое состояние часто определяют, как состояние равновесия безразличного, при котором возможно несколько форм равновесия.¹

Конечно, при дальнейшем возрастании нагрузок это безразличное состояние теряется. Во время испытаний на устойчивость характерна весьма кратковременная стадия безразличного равновесия, когда сжатый стержень буквально перестает сопротивляться отводящей его руке; за этой стадией следует потеря устойчивости.

IV. Потере устойчивости конструкции соответствует достижение ею ее предельной несущей способности (отпорности), при которой она без увеличения нагрузки продолжает деформироваться. Если устойчивость теряется после появления остающихся деформаций, то, кроме того, потере устойчивости соответствует начальный момент уменьшения отпорности (см. выше определение Циммерманна).

Это происходит, когда при росте деформаций от нагрузки теряется равновесие между внутренними и внешними силами в опасных сечениях конструкции, т. е. когда внутренние силы начинают отставать в своем росте от внешних сил. Рост внутренних сил замедляется после перехода за предел пропорциональности в связи с общим падением жесткости опасного сечения. После потери устойчивости сжато-изогнутого элемента его внутренняя отпорность уменьшается;² это значит, что при сохранении прежней нагрузки деформации продолжают расти, пока не наступит излом. Итак, потеря устойчивости сжато-изогнутого элемента за пределом пропорциональности неизбежно влечет за собой его разрушение.

IVa. В частном случае прямолинейного стержня важнейшей³ характеристикой внешних и внутренних сил сечения являются изгибающие моменты: внешний (M_a) и внутренний ($M_i = T \cdot J \cdot \frac{1}{\rho}$).⁴

Поэтому предшествующее (IV) определение понятия потери устойчивости (в соответствии с теоретическими и экспериментальными работами проф. Роша и др.) для эксцентрично сжатого стержня может быть выражено так:

Пока эксцентрично сжатый стержень находится в состоянии равновесия, то в каждом его сечении (в том числе и в опасном) изгибающий момент внешних сил M_a равен изгибающему моменту внутренних сил M_i .

1. Если равновесие стержня устойчиво, то при всяком возможном (виртуальном) бесконечно-малом отклонении стержня от этого положения равновесия приращение момента внешних сил меньше приращения момента внутренних сил:

$$\Delta M_a < \Delta M_i \quad (\text{стержень устойчив}).$$

2. Если же

$$\Delta M_a > \Delta M_i,$$

то исходное положение не могло быть положением равновесия, деформации не могли остановиться на таком исходном положении, они должны продолжать расти. Стержень потерял устойчивость.

¹ Это определение не совсем точно, так как множественность форм равновесия, соответствующая критическому состоянию, является математической фикцией, результатом замены точного выражения радиуса кривизны приближенным его значением, в котором отброшены малые высших порядков.

² Предполагается, что на диаграмме сжатия деформации растут быстрее нагрузок.

³ Известно, что влияние поперечных сил Q на продольный изгиб сплошных стержней настолько невелико, что им можно пренебречь (см. С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, ч. II, 1932 г., § 41).

⁴ Здесь T — модуль продольного изгиба, равный модулю упругости E , пока изгиб происходит в пределах пропорциональности. За пределами пропорциональности модуль T для прямоугольного сечения в случае малых эксцентриситетов может быть определен по формуле Энгессер-Кармана:

$$T = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}.$$

3. Если в опасном сечении $\Delta M_a = \Delta M_i$, то имеем критический случай. Стержень находится на границе устойчивого равновесия; ничтожных добавочных причин достаточно для дальнейшего роста деформаций.

Резюмируем вышесказанное. Устойчивость изгибаемого продольными и поперечными силами стержня теряется в то мгновение его искривления, когда момент внешних сил опасного сечения начинает расти быстрее сопротивляющегося ему момента внутренних сил.

Iv. Исходя из этого определения, легко показать, что для всякого сжато-изогнутого стержня существует критическое значение нагрузки. В самом деле: вообразим какое-то определенное дополнительное отклонение (искривление) стержня от положения его равновесия, для которого

$$\Delta M_a = n \Delta M_i, \text{ т. е. } \Delta M_a \text{ больше } \Delta M_i \text{ в } n \text{ раз.}$$

Увеличим продольную силу в n раз и рассмотрим такое же дополнительное искривление от нового положения равновесия; тогда ΔM_a , равное произведению продольной силы на величину дополнительного прогиба, возрастет во столько же раз, а $\Delta M_i = \Delta \left(T J \frac{1}{\rho} \right)$ либо останется без из-

менений, либо уменьшится, если с увеличением нагрузки будет уменьшаться модуль продольного изгиба T . Таким образом, увеличение продольной нагрузки более чем в n раз наверное приведет стержень к потере устойчивости.

V. Следует различать потерю устойчивости конструкций, сжатых по оси, от потери устойчивости конструкций сжато-изогнутых.

В конструкциях, испытывающих осевое сжатие, происходит *потеря устойчивости формы*. В конструкциях же, работающих и на сжатие, и на изгиб, форма меняется все время по мере роста нагрузки; значение нагрузки, при котором происходит „неограниченное“ нарастание деформаций является „критической нагрузкой“. В этом случае происходит *потеря устойчивого нарастания деформаций*. Другое принципиальное различие двух различных видов потери устойчивости состоит в следующем. В случае работы конструкции исключительно на осевое сжатие самый момент потери устойчивости является вполне реальным, если критическое напряжение меньше временного сопротивления материала. Если же конструкция работает одновременно и на изгиб, и на сжатие, то „потере устойчивого нарастания деформаций“ предшествуют зачастую деформации столь большие, что реальная конструкция разрушается от больших напряжений несколько раньше такой теоретической потери устойчивости, если только такая потеря устойчивости не будет вызвана (раньше разрушения) переходом стержня в область пластических деформаций. Реальной потерей устойчивого нарастания деформаций является для так называемых „стержней средней длины“, среднее напряжение в опасном сечении которых ниже предела пропорциональности, в то время как крайнее сжатое волокно работает, благодаря эксцентриситету, за пределом пропорциональности.

§ 3. Общие методы проверки устойчивости упругих систем

Статический метод. Так как потеря устойчивости сопровождается ростом деформаций без изменения величины нагрузок, то уравнение критического состояния можно получить как условие возможности безразличного равновесия системы.

Для этого составляют дифференциальное уравнение равновесия между сохраняющимися без изменения внешними нагрузками и изменяющимися с деформациями внутренними силами сначала для данного состояния системы, устойчивость которого проверяется, а затем, предположив

бесконечно-малые приращения деформаций (например, вертикальных и горизонтальных прогибов δv и δu) Для другого, полученного таким образом, состояния, смежного с данным.

Приращения второй системы уравнений, по сравнению с первой системой, образуют систему дифференциальных уравнений критического состояния. Отбросив за малостью члены с высшими степенями приращений деформаций (δv и δu), приведем дифференциальные уравнения критического состояния к линейному виду.

Условия, при которых интеграл этих дифференциальных уравнений, удовлетворяя граничным условиям задачи, дает для вариаций прогибов δv и δu произвольные вещественные, отличные от нуля значения, определяют критическую систему нагрузок.

Энергетический метод. Рассматриваем также состояние системы, смежное с данным, устойчивость которого проверяем. Деформации смежного состояния задаем, удовлетворяя граничные условия, в виде функции от ряда независимых параметров $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ а тем, чтобы, варьируя на величине этих параметров, можно было бы получить форму, через которую пройдет система при потере устойчивости.

Затем составляем выражение для приращения ΔV потенциальной энергии системы при переходе из данного состояния в упомянутое смежное, причем

$$\Delta V = \Delta V_a - \Delta V_i,$$

где ΔV_a — приращение потенциальной энергии нагрузки, а ΔV_i — приращение потенциальной энергии внутренних сил.

Если $\Delta V < 0$, то переход из данного состояния в смежное невозможен.

Если $\Delta V = 0$, имеем критический случай.

Если $\Delta V > 0$, то данное состояние системы неустойчиво.

Критическую нагрузку получаем из условия $\Delta V = 0$, выбрав из всевозможных вариаций независимых параметров $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, определяющих смежное состояние, такие, которым соответствовал бы минимум значения критической нагрузки.

Для получения упрощенных приближенных решений нужно, с одной стороны, ограничить число независимых параметров $a_1, a_2, a_3, \dots$, а с другой — подобрать возможно ближе к действительной кривую отклонения, определяемую ими.

Если выбранная кривая отклонения будет совпадать с истинной, то получим истинное значение критической нагрузки; в противном случае всегда получим, как критическое, несколько преувеличенное значение, так как мы не нашли абсолютного минимума.

При помощи такого приближенного способа получены решения ряда весьма важных в практическом отношении задач, не поддававшихся решению другими способами.

Метод акад. Б. Г. Галеркина. Промежуточное положение между статическим и энергетическим методом занимает метод, предложенный Б. Г. Галеркиным¹. Деформации, возникающие при потере устойчивости, задаем в виде ряда $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots$ с неопределенными коэффициентами: $a_1, a_2, a_3, \dots$, причем каждый из членов ряда удовлетворяет граничным условиям.

Полученное выражение для y подставляем в дифференциальное уравнение критического состояния (при этом часто бывает выгодным дифференцированием повысить порядок дифференциального уравнения с целью упрощения его структуры). Умножая затем это дифференциальное уравнение последовательно на $y_1, y_2, y_3, \dots$ и каждый раз интегрируя его вдоль по длине конструкции, получим систему линейных уравнений для определения неопределенных параметров $a_1, a_2, a_3, \dots$. Приравняв нулю

¹ Б. Г. Галеркин, Стержни и пластинки, „Вестник Инженеров“, 1915 г., стр. 897—908; А. Н. Динник, Устойчивость упругих систем § 5.

детерминант, составленный из коэффициентов этой системы уравнений, получаем уравнение, наименьший корень которого дает критическое значение нагрузки.

В ряде случаев этот способ оказывается удобнее энергетического метода.

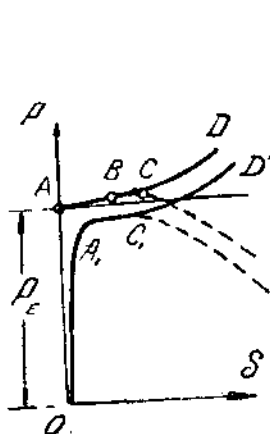
Упрощения в технике расчетов

При пользовании статическим методом можно получить упрощения, применяя для интегрирования дифференциальных уравнений критического состояния различные приближенные приемы, как например:

- а) метод численного (арифметического или графического) интегрирования,
- б) замену дифференциального уравнения системой уравнений в конечных разностях,
- в) метод итерации¹ (последовательных приближений) в двух его разновидностях: численной (арифметической² или графической) и алгебраической,
- г) метод неопределенных коэффициентов, которые подбираются так, чтобы для ряда сечений конструкции по длине было удовлетворено дифференциальное уравнение критического состояния и чтобы были удовлетворены граничные условия.

При применении энергетического метода можно получить упрощения:

- а) применяя нормальные координаты³ при выборе функции кривой отклонения для смежного состояния,
- б) применяя при нахождении интегралов по длине конструкции для выражений ΔV_a и ΔV_i методы механических квадратур (формулы Симпсона, Котеса, Уэддлса, Чебышева и других) и прочее.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 4. О возможности пользования упрощенным выражением для радиуса кривизны

Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением прямолинейного эксцентрично сжатого стержня.

Процесс предварительного изгиба такого стержня и последующей потери устойчивости схематически показан на фиг. 1. Кривая ABC соответствует стержню, ось которого совпадает с линией давления от нагрузок. Устойчивость формы такого стержня теряется внезапно, без заметных предварительных деформаций. Кривая OAC относится к сжато-изогнутому стержню — потере устойчивости нарастания его деформаций предшествуют заметные деформации, что затрудняет экспериментатору отметить самый момент потери устойчивости.

Сплошные кривые ABD и $OACD$ соответствуют абсолютно упругим стержням; в действительности же после появления остающихся деформаций кривые эти пойдут примерно так, как это показано пунктиром (см. фиг. 1).

¹ Vianello, „Der Eisenbau“, 1905; R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Berlin, 1921.

² Б. М. Горбунов, Про наближений спосіб досліджувати стійкість стрижнів, Київ, ВУАН 1932.

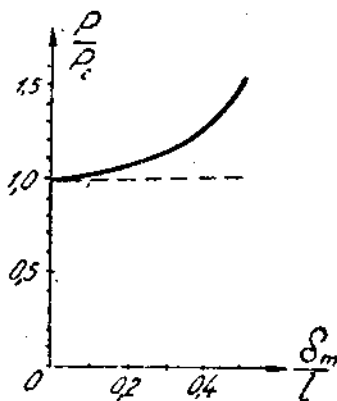
³ С. П. Тимошенко, Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок, Изв. Киевск. политехнического института, 1910 г.

Напомним вкратце основные результаты теории устойчивости прямолинейного аксиально сжатого стержня (фиг. 2).

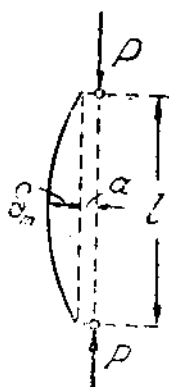
Прежде всего отметим, что пользование, как „точным“ $EJ \frac{1}{\rho} = M$, так и приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси $EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$ приводит к одному и тому же¹ значению Эйлера для критической силы: $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$. Приближенное уравнение дает возможность определить только величину критической силы, при которой становится возможным выпучивание стержня: точное же уравнение, кроме того, дает возможность определить деформации после потери устойчивости. Величину наибольшего прогиба (см. фиг. 2) при этом можно определить² по приближенной формуле Мизеса:

$$\delta_m = \frac{l \sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_E} - 1} \cdot \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{P}{P_E} - 1 \right) \right]. \quad (1)$$

Формула эта показывает, что, пока $P < P_{кр} = P_E$, прогиб δ_m — мнимое число, т. е. вообще невозможен; когда $P = P_E$, прогиб $\delta_m = 0$, и что



Фиг. 3.



Фиг. 4.

достаточно ничтожного превышения критической силы, чтобы прогибы очень сильно возросли.³

¹ Что в этом нет никакого противоречия, показал проф. Ясинский.

² См. проф. Тимошенко, Сопроотивление материалов, гл. 2-я, § 36, изд. 1932 года.

³ Если $P = 1,001 P_{кр}$, то $\delta_m = 2,85 \cdot \frac{l}{100}$.

Если $P = 1,01 P_{кр}$, то $\delta_m = 9,0 \cdot \frac{l}{100}$.

В случае стержня прямоугольного сечения с отношением длины к ширине, равным 20, этим прогибам отвечали бы такие напряжения σ_e и σ_i в крайних выпуклом и вогнутом волокнах опасного сечения:

$$\text{для } P = 1,001 P_{кр} \quad \sigma_e = +2,19 \frac{P}{F}; \quad \sigma_i = -4,19 \frac{P}{F};$$

$$\text{для } P = 1,01 P_{кр} \quad \sigma_e = +9,8 \frac{P}{F}; \quad \sigma_i = -11,8 \frac{P}{F}.$$

Очевидно, что достаточно самого небольшого превышения сжимающей силы P над ее критическим значением $P_{кр}$, чтобы стержень, рассчитанный по допускаемым напряжениям, неминуемо разрушался от появления напряжений, во много раз превышающих допускаемые.

Взяв производную по силе P от выражения (1), легко убедиться, что она при $P = P_E$ обращается в бесконечность:

$$\left(\frac{d\delta_m}{dP} \right)_{P=P_E} = \infty; \quad \text{а} \quad \left(\frac{dP}{d\delta_m} \right)_{P=P_E} = 0.$$

Это показывает, что на фиг. 1 кривая ABC должна иметь в точке A горизонтальную касательную. Более точно зависимость между прогибом и силой дана на графике фиг. 3.

В случае сжато-изогнутого стержня (см. фиг. 4) пользование приближенным дифференциальным уравнением $EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$ приводит к заключению,¹ что, как только продольная сжимающая сила P достигает эйлерова значения $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, деформация δ_m становится „бесконечно-большой“: $\frac{dP}{d\delta} = 0$.

Этот результат нельзя понимать так, что деформация достигает бесконечно-больших линейных значений (ведь сама длина стержня ограничена), а надо понимать в том смысле, что деформация становится „бесконечно-большой“ по сравнению с такими деформациями, для которых можно пренебрегать, по его малости, квадратом $(y')^2$ в выражении кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Пользуясь „точным“ уравнением $EJ \frac{1}{\rho} = M$, получим, хотя относительно большие, но все же конечные значения для деформаций.²

Принимая во внимание вышесказанное, а также то, что разрушение инженерных конструкций наступает, вообще говоря, при небольших деформациях,³ приходим к выводу, что для определения критической

¹ См. Тимошенко, Соппротивление материалов, ч. 1, § 58, изд. 1932 г.

² Прогиб δ_m посредине упругого стержня, сжатого силами $P = P_E$ с эксцентриситетом a (см. фиг. 4), можно приближенно выразить формулой:

$$\delta_m + a \approx \frac{4l}{\pi} \sqrt{\frac{a}{2l}}. \quad (2)$$

которая будет тем точнее, чем меньше по сравнению с единицей будут величины $\left(\frac{\delta_m + a}{l} \right)^2$

и $\frac{a}{a + \delta_m}$ (вывод этой формулы автор рассчитывает поместить в другой статье). Пусть, например, $a = 0,002l$, тогда $\delta_m = 0,125l$.

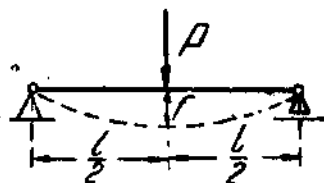
³ Например, исходя из теории идеального упруго-пластического материала Прандтля, критический прогиб f , влекущий за собой разрушение балки (см. фиг. 5) прямоугольного сечения, нагруженной силой P посредине, можно определить по формуле:

$$f = 1,482 \left(\frac{P l^3}{48 EJ} \right),$$

где P — разрушающий груз.

Если предположим, что расчетный прогиб $\left(\frac{P_0 l^3}{48 EJ} \right)$ составлял даже $\frac{1}{250} l$, и что разрушающий груз P раз в пять больше допускаемого P_0 , то и в этом случае критический прогиб

$$f \approx 1,48 \cdot 5 \cdot \frac{1}{250} l \approx 0,03l, \text{ т. е. составляет всего } 3\% \text{ от пролета.}$$



Фиг. 5.

нагрузки, при которой сжато-изогнутый стержень теряет устойчивость, можно пользоваться упрощенным выражением кривизны:

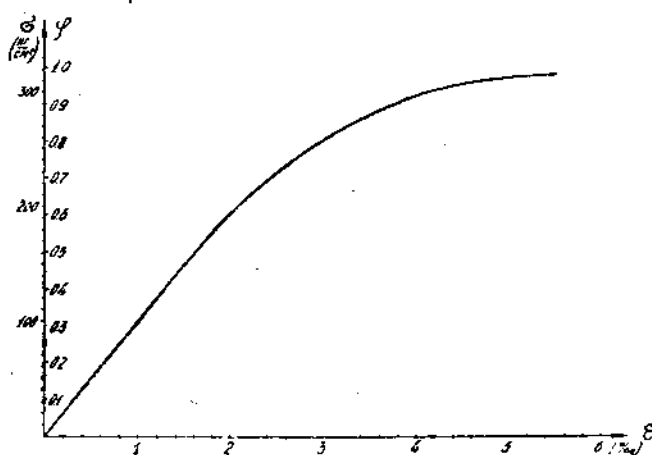
$$\frac{1}{\rho} = y''.$$

Глава II

СЖАТЫЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ СТЕРЖЕНЬ

§ 5. Проверка устойчивости стержня в случае осевого сжатия (построение графиков коэффициента φ для материалов, заданных диаграммой сжатия)

Проверку устойчивости аксиально сжатого стержня за пределом пропорциональности можно производить по формулам, полученным Энгессером и Карманом:



Фиг. 6.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 T J}{l^2}; \quad (3)$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}, \quad (4)$$

где $\lambda = \frac{l}{i}$ — гибкость стержня (а T — так называемый „модуль продольного изгиба“ (Knickmodul).

Величина модуля T при заданном диаграммой сжатия-растяжения материале стержня зависит от среднего напряжения $\sigma = \frac{P}{F}$ и от формы поперечного сечения.

Для прямоугольного поперечного сечения

$$T = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}. \quad (5)$$

Формулы (3), (4) и (5) выведены в предположениях, что:

¹ Вывод формул (3), (4) и (5) можно найти, напр., у С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, изд. 1932 г., ч. II, § 37 и ч. I, § 51.

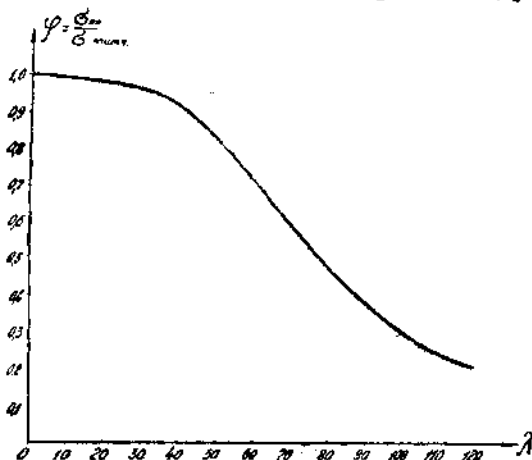
Случай произвольного поперечного сечения см., например, Фр. Блейх, Теория и расчет железных мостов, ОГИЗ, 1931, § 35.

1) гипотеза Бернулли (о плоскостном законе распределения относительных удлинений по поперечному сечению стержня) верна и за пределами пропорциональности,

2) зависимость между напряжениями и деформациями прогиба та же, как и при простом растяжении или сжатии,

3) материал стержня подчиняется закону Герстнера о равенстве модуля разгрузки модулю упругих деформаций.

В формуле (5) E — модуль упругости, а $E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ — модуль деформаций в неупругой зоне, соответствующий напряжению, равному $\sigma_{кр}$.



Фиг. 7.

Покажем ниже, как, имея диаграмму сжатия-растяжения для материала стержня, пользуясь формулами (3), (4) и (5), можно получить график $(\sigma_{кр} - \lambda)$ зависимости между критическим напряжением $\sigma_{кр}$ и гибкостью стержня $\lambda = \frac{l}{i}$.

Для примера возьмем диаграмму сжатия для воздушно-сухой сосны¹ (см. фиг. 6). (Для уничтожения разброса экспериментальных точек по длине ординат отложены не просто напряжения σ , а их отношения $\varphi = \frac{\sigma}{\sigma_B}$ к величине временного сопротивления σ_B).

Определив по диаграмме (6) для ряда значений напряжения σ , соответствующие величины $E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ (тангенсы углов наклона касательных к кривой), по формуле (5) подсчитываем соответствующие значения модуля T .

Далее задачу поставим так: для ряда известных критических напряжений $\sigma_{кр}$ (для которых уже подсчитаны соответствующие значения модуля T) найдем соответствующий ряд значений гибкости λ по формуле:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_{кр}}}, \quad (6)$$

которую легко получить из формулы (3).

¹ Эта диаграмма построена в секторе деревянных конструкций ЦНИПС.

По двум координатам ($\sigma_{кр}$ и λ) наносим ряд точек на график зависимостей $\sigma_{кр}$ от λ . Разделив масштаб ординат $\sigma_{кр}$ на величину временного сопротивления σ_B , получим график коэффициентов продольного изгиба φ для аксиально сжатых стержней (см. фиг. 7).

Все необходимые вычисления сведены в нижеследующую таблицу:

$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_B}$	1	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	Примечание
$m = \frac{E'}{E}$	0	0,24	0,37	0,52	0,705	0,88	1	
$\frac{T}{E} = \frac{4m}{(1 + \sqrt{m})^2}$	0	0,432	0,576	0,703	0,834	0,936	1	
$\frac{T}{\sigma_{кр}} = \frac{T}{\sigma_B \varphi} = \frac{312}{\varphi} \cdot \frac{T}{E}$	0	142	199	274	371	487	624	$\frac{E}{\sigma_B} = 312$
$\lambda = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_{кр}}}$	0	37,4	44,3	52,0	60,4	69,3	78,5	

Для значений $\sigma_{кр}$, меньших предела пропорциональности σ_p , кривая построена по формуле Эйлера:

$$\varphi = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_B}$$

§ 6. Идеализированная диаграмма сжатия¹

В предыдущем параграфе мы видели, что для решения вопросов устойчивости за пределом пропорциональности необходимо знать диаграмму сжатия материала. При решении вопросов устойчивости для эксцентрично сжатых

стержней задача весьма усложняется, ввиду эмпирического характера диаграммы сжатия. Аналитическое решение становится практически невыполнимым, и приходится прибегать к весьма громоздкому графическому решению. Для ряда материалов такая работа уже проделана: более полно для конструкторской стали (Рош, Хвалла), для легированных металлов (дюралюминий и пр.) (Рош²), для воздушно-сухой сосны (Сектор деревянных конструкций ЦНИПС в Москве) и менее полно для серого чугуна (Рош),² белой ели (Рош)² и пр.

В последнее время в связи с мощным развитием индустрии является необходимость в производстве расчетов для конструкций из новых строительных материалов. Желательно, до производства специальных громоздких теоретических и экспериментальных работ над каждым из них, получить некоторые общие для всех материалов выводы, хотя бы и несколько приблизительного порядка. Возникает вопрос о некоторой идеализации механических характеристик материала. Так, например, для материалов с площадкой текучести (сталь, железо) было создано Прандтлем „идеально-упруго-пластическое тело“ с диаграммой (σ ; ϵ) напряжений

¹ Материал §§ 6—9 был напечатан на украинском языке: Н. В. Корпоухов „Проверка прочности и устойчивости грунтовых стен“. Сборник памяти акад. К. К. Симинского. Изд. Акад. Наук. Киев 1933 г.

² М. Roß, La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées, Paris, 1932 г. (Труды I интер. конгресса по мостам и archit. Париж, 1932 г.).

деформаций из прямой линии в пределах пропорциональности и прямой, параллельной оси деформаций, за пределом пропорциональности.

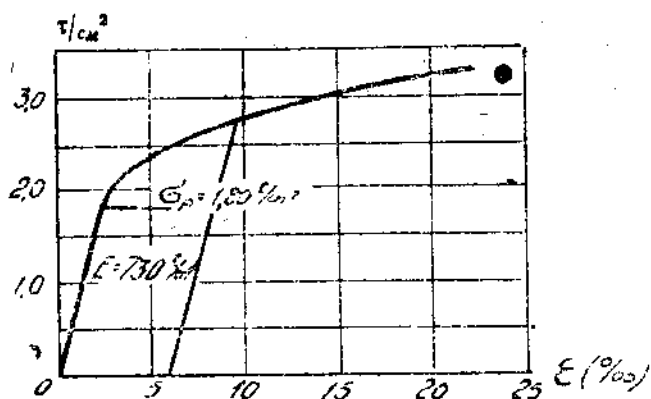
В настоящей работе подробно разбирается случай идеального материала, диаграмма напряжений-деформаций которого (см. фиг. 8) может быть представлена в виде двух прямых.

Основными характеристиками этой диаграммы являются:

- „предел пропорциональности“ σ_p ,
- „модуль упругости“ E ,

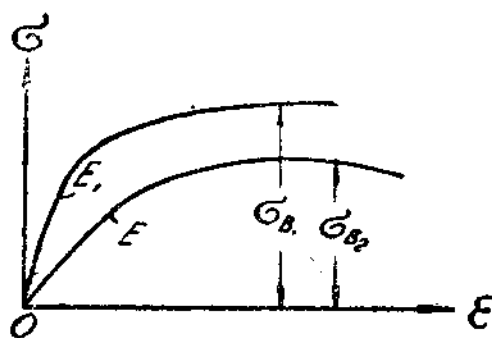
отношение модулей $m = \frac{E'}{E}$, где $E' = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$, пониженному модулю деформаций за пределом пропорциональности.

Для материалов, диаграммы ($\sigma; \epsilon$) которых за пределами пропорциональности имеют выпуклый участок (см. фиг. 6 и 9), могут быть ориентировочно использованы результаты упомянутых выше построений сектора деревянных конструкций ЦНИПС для дерева и проф. Роша для легированных металлов (диаграмма сжатия которых имеет вид фигуры 9).¹ Для идеализированных диаграмм типа фиг. 8 далее построен ряд графиков для различных численных значений отношения модулей m .

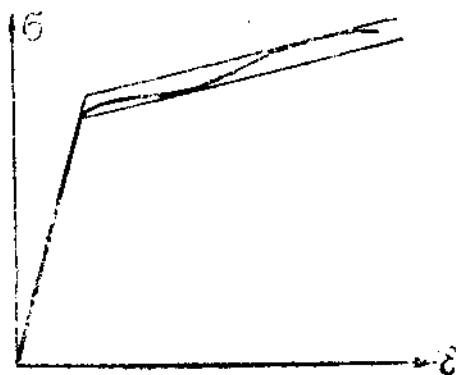


Фиг. 9.

Для более четкого пользования предлагаемыми графиками в случае различных материалов установим нижеследующий, почти очевидный принцип. Если наложить одну на другую две диаграммы сжатия для различных материалов, вычерченные в одинаковом масштабе напряжений σ и относительных деформаций ϵ (см. фиг. 10), то материал, диаграмма



Фиг. 10.



Фиг. 10а.

сжатия которого на всем ее протяжении лежит выше (ближе к оси напряжений σ), другой диаграммы сжатия будет, с одной стороны, менее деформативным, а, с другой стороны, более прочным:

$$\begin{aligned} E_1 &> E_2; \\ \sigma_{B1} &> \sigma_{B2}. \end{aligned}$$

¹ См. § 21 настоящей работы.

Если идеализированная диаграмма сжатия проходит ниже действительной, то такое допущение пойдет в запас прочности. При этом нужно следить за тем, чтобы определенное в конструкции, на основании теоретических соображений при применении идеализированной диаграммы, максимальное напряжение не превосходило временного сопротивления сжатию σ_B действительной диаграммы. Конечно, для того, чтобы выбрать расчетную идеализированную диаграмму сжатия для какого-либо материала, недостаточно исходить из результатов испытания одного образца, а необходимо испытать достаточное количество образцов, чтобы сделать окончательный вывод. Если ряд диаграмм для того же самого материала для ряда возможных расчетных условий эксплуатации нанести на один график, то проведение идеализированной диаграммы ниже нижней оберттки действительных диаграмм гарантирует запас прочности при производстве расчетов по идеализированной диаграмме.

Для определения степени погрешности при замене действительной диаграммы идеализированной можно взять (см. фиг. 10а) две идеализированные диаграммы: одну ниже действительной, а другую — выше.

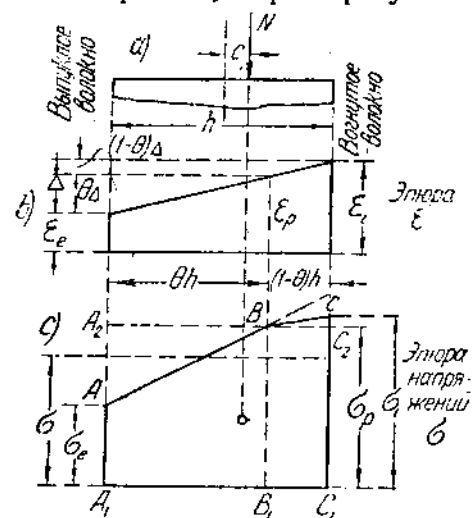
Тогда данные о прочности и устойчивости стержня из материала, соответствующего действительной диаграмме, будут лежать между соответствующими данными для стержней из идеализированных материалов, соответствующих этим двум идеализированным диаграммам.

§ 7. Неупругое эксцентричное сжатие при среднем напряжении, меньшем предела пропорциональности

Прежде чем перейти к решению задач устойчивости для стержней из материалов, характеризуемых идеализированной диаграммой сжатия (фиг. 8), нужно изучить напряженное состояние эксцентричного сжатия для поперечного сечения стержня при частичной или полной работе сечения за пределом пропорциональности.

Для упрощения выкладок ниже везде, кроме случаев, где это будет специально оговорено, рассматривается прямоугольное поперечное сечение, причем нагрузка N приложена по одной из главных осей инерции сечения.

При выводе формул настоящего параграфа будем исходить: 1) из гипотезы Бернулли о плоскостном законе распределения относительных удлинений волокон по сечению и 2) из идеализированной диаграммы сжатия. Таким образом, в указанном случае эксцентричного сжатия эпюра относительных укорочений ϵ будет иметь вид трапеции (см. фиг. 11, б), эпюра напряжений



Фиг. 11.

будет иметь более сложный вид (см. фиг. 11, в): часть сечения AB работает до предела пропорциональности σ_p при модуле упругости E , часть сечения BC работает за пределом пропорциональности при пониженном модуле $E' = tE$, где t — численный коэффициент, меньший единицы.

Таким образом,

$$\sigma_e = E\epsilon_e; \quad \sigma_p = E\epsilon_p;$$

ордината

$$CC_2 = \sigma_1 - \sigma_p = tE(\epsilon_1 - \epsilon_p).$$

В дальнейшем для придания общности выводимым формулам и для упрощения выводов примем нижеследующие обозначения:

1) разность относительных укорочений крайних волокон обозначим

$$\epsilon_l - \epsilon_e = \Delta; \quad (7)$$

2) отношение напряжения σ к пределу пропорциональности σ_p будем называть „относительным напряжением“, обозначим его:

$$\frac{\sigma}{\sigma_p} = n;$$

тогда

$$\sigma = \sigma_p n; \quad \sigma_l = \sigma_p n_l; \quad \sigma_e = \sigma_p n_e. \quad (8)$$

3) отношение эксцентриситета c к полуширине ядра сечения $a = \frac{1}{6} h$ будем называть „относительным эксцентриситетом“, обозначив его p :

$$\frac{c}{a} = \frac{6c}{h} = p \quad \text{или} \quad c = pa = p \frac{h}{6}; \quad (9)$$

4) ширину сечения b будем принимать равной единице:

$$b = 1.$$

Посмотрим теперь, как определить напряжение по заданным величинам продольной силы N и ее эксцентриситету:

$$c = \frac{M}{N}. \quad (10)$$

Для этого используем условия:

- 1) площадь эпюры напряжений равна продольной силе N ,
- 2) центр тяжести эпюры напряжений, соответствующий положению равнодействующей внутренних сил сечения, в случае равновесия должен лежать под силой N .

Переведем на язык формул первое из этих условий.

Погонная сила N равна среднему напряжению σ , умноженному на высоту сечения h :

$$N = h\sigma = h\sigma_p \cdot n. \quad (11)$$

Площадь эпюры A_1ABCC_1 равна площади прямоугольника $A_2C_2C_1A$ минус площадь треугольника AA_2B плюс площадь треугольника BCC_2 . Принимая во внимание при этом (см. фиг. 11), что

$$\overline{AA_2} = E \cdot \theta \Delta$$

и

$$\overline{CC_2} = mE(1 - \theta)\Delta,$$

получим:

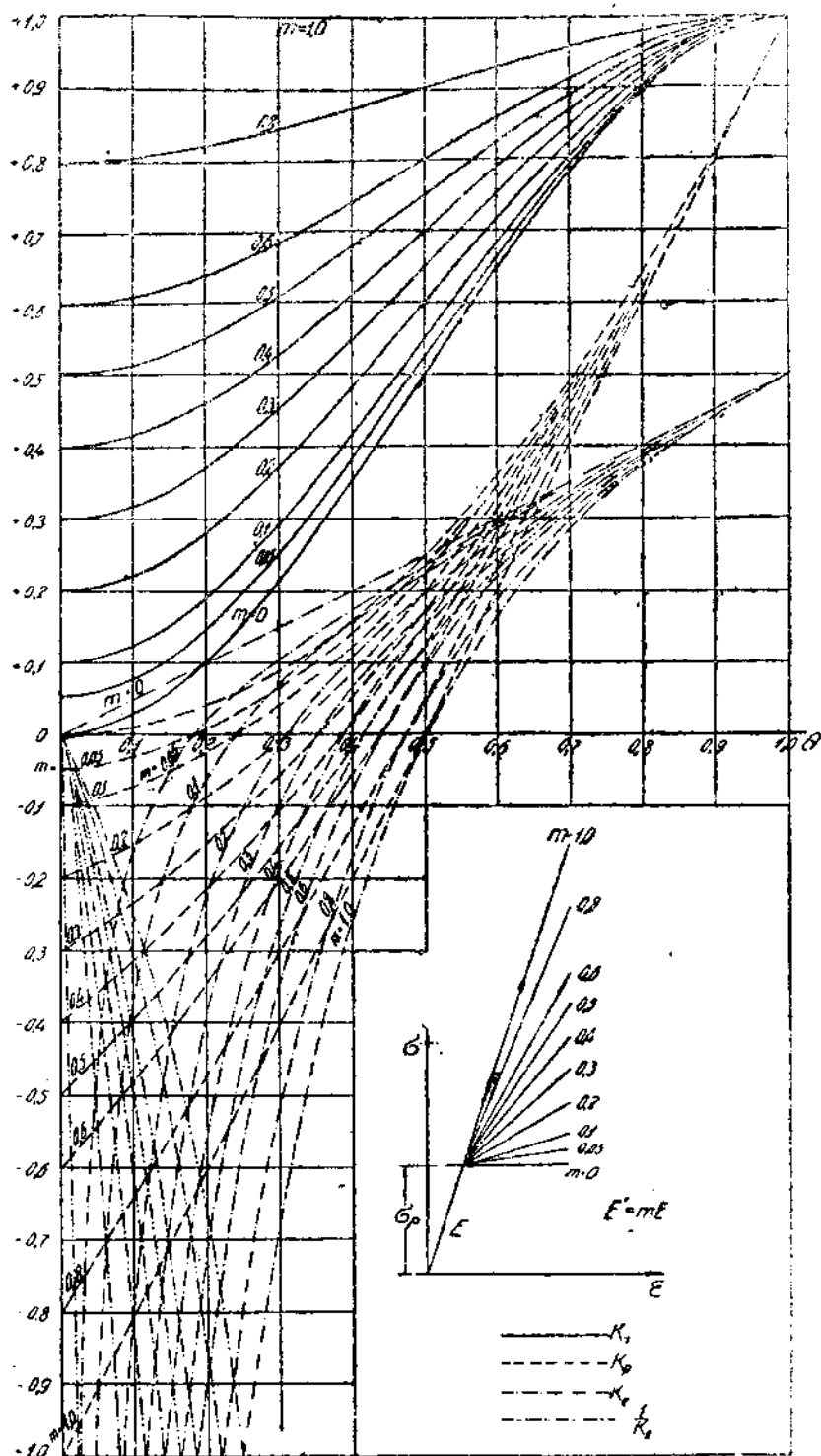
$$h\sigma_p n = h\sigma_p - \frac{1}{2} h\theta^2 E\Delta + \frac{1}{2} h(1 - \theta)^2 mE\Delta,$$

или

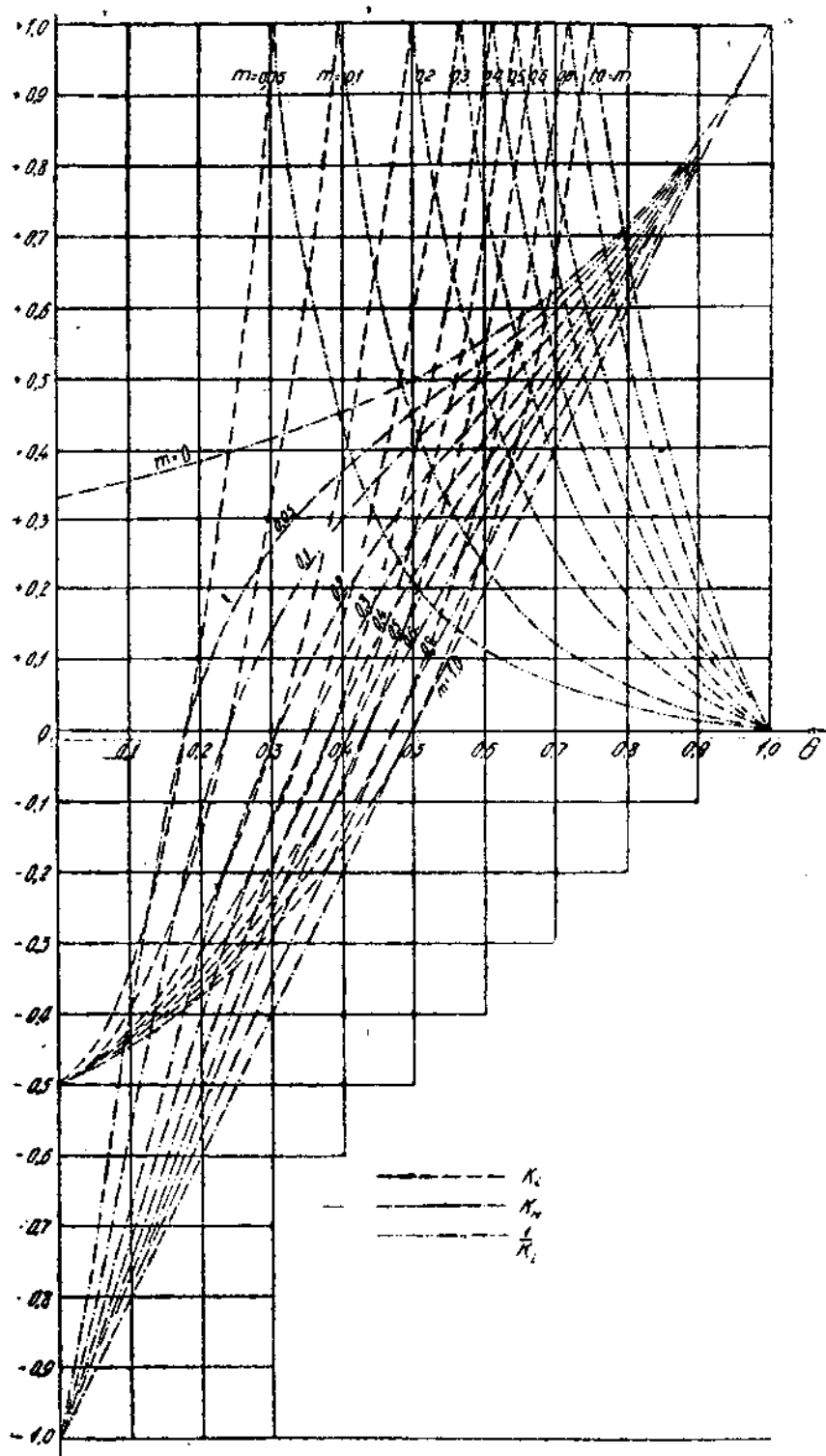
$$\Delta = \frac{2\sigma_p}{E} \cdot \frac{1 - n}{\theta^2 - m(1 - \theta)^2}. \quad (12)$$

Выразим формулой второе условие, что центр тяжести эпюры напряжений находится под силой N . Это будет тогда, если статический момент эпюры напряжений относительно геометрической оси стержня равен изгибающему моменту $M = Nc$. Статический момент эпюры напряжений равен статическому моменту прямоугольника $A_2C_2C_1A_1$ (этот статический момент равен нулю) минус статический момент треугольника AA_2B , плюс статический момент треугольника BCC_2 :

$$Pc = 0 - (\text{пл. } AA_2B) \left[-\left(\frac{h}{2} - \frac{1}{3} h\theta \right) \right] + (\text{пл. } BCC_2) \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{3} h(1 - \theta) \right],$$



Фиг. 12



Фиг. 13.

или

$$h\sigma_p n \cdot \frac{h}{6} p = \left[\frac{1}{2} h\theta^2 E\Delta \right] \cdot \frac{h}{6} (3 - 2\theta) + \left[\frac{1}{2} h(1 - \theta)^2 m E\Delta \right] \cdot \frac{h}{6} [1 + 2\theta],$$

откуда

$$n \cdot p = \frac{E\Delta}{2\sigma_p} [\theta^2 (3 - 2\theta) + m(1 - \theta)^2 (1 + 2\theta)]. \quad (13)$$

Полученные формулы (12) и (13) неудобны для практических вычислений. В виду их сложной функциональной зависимости от величины θ , показывающей, какая часть сечения работает до предела пропорциональности, в дальнейшем будет целесообразно все величины, интересующие нас, выразить в функциях от θ . Это даст возможность построить специальные графики (см. фиг. 12 и 13), пользование которыми, как будет показано ниже, весьма несложно.

Нам нужно будет построить графики так, чтобы при помощи их можно было, в зависимости от среднего напряжения и эксцентриситета $e = \frac{M}{N} = \rho a$, найти следующие величины:

- 1) напряжения в крайних волокнах: $\sigma_i = \sigma_p n_i$ и $\sigma_e = \sigma_p \cdot n_e$,
- 2) выяснить, какая часть сечения θ работает до предела пропорциональности,
- 3) определить радиус кривизны в сечении $\rho = 1 : \frac{d^2 y}{dx^2}$,
- 4) найти пониженный средний для сечения модуль упругости T для формулы деформаций: $TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$.

Последние два вопроса важны главным образом для проверки устойчивости стержней.

1. Радиус кривизны (возникающей как функция напряженного состояния сечения), можно получить следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{1}{h} \cdot (\Delta \cdot dx)}{dx} = \frac{\Delta}{h}. \quad (14)$$

Используя формулу (13), получим:

$$\rho = \frac{E}{2\sigma_p} \cdot \frac{h}{1 - n} \cdot K_p, \quad (15)$$

где коэффициент K_p имеет значение:

$$K_p = \theta^2 - m(1 - \theta)^2. \quad (16)$$

2. Величину момента внутренних сил M_i можно получить следующим образом.

Подставив в уравнение (13) вместо Δ его выражение из (12), после преобразований получим:

$$n \cdot p = (1 - n) \frac{1}{K_M},$$

где

$$K_M = 1 : \left[\frac{4\theta^2}{\theta^2 - m(1 - \theta)^2} - 1 - 2\theta \right]. \quad (17)$$

Момент же внутренних сил

$$M_i = P \cdot c = h \sigma_p \frac{h}{6} p = \frac{h^2}{6} \sigma_p n p = \frac{h^2 \sigma_p}{6} \cdot \frac{1-n}{K_M}. \quad (18)$$

Здесь $\frac{h^2}{6} = \frac{1 \cdot h^2}{6}$ — момент сопротивления сечения W , применяемый в формулах для изгиба в пределах пропорциональности.

3. Разыщем пониженный средний для данного сечения модуль упругости T из формулы деформаций $TJ \frac{1}{\rho} = M$.

Получаем

$$T = \frac{M \rho}{J} = \frac{12}{h^3} \cdot \frac{h^2 \sigma_p}{6} \cdot \frac{1-n}{K_M} \cdot \frac{E}{2 \sigma_p} \cdot \frac{h}{1-n} \cdot K_p = \frac{EK_p}{K_M} = EK_T,$$

или
$$T = EK_T, \quad K_p = K_T \cdot K_M, \quad (19)$$

где
$$K_T = 1 - (1-m)(1-\theta)^2(1+2\theta). \quad (20)$$

4. Наконец, определим напряжения в крайних волокнах сечения.

Во внешнем выпуклом волокне напряжение $\sigma_e = \sigma_p n_e$;

$$\sigma_p - \sigma_e = E \theta \Delta = \sigma_p (1-n) \cdot \frac{2\theta}{\theta^2 - m(1-\theta)^2} = \sigma_p (1-n) \frac{1}{K_e}$$

или
$$\sigma_e = \sigma_p \left[1 - \frac{1-n}{K_e} \right], \quad (21)$$

где
$$K_e = \frac{\theta^2 - m(1-\theta)^2}{2\theta}. \quad (22)$$

Во внутреннем вогнутом волокне напряжение $\sigma_i = \sigma_p \cdot n_i$;

$$\sigma_i - \sigma_p = m E (1-\theta) \Delta = m \sigma_p (1-n) \cdot \frac{2(1-\theta)}{\theta^2 - m(1-\theta)^2} = \sigma_p (1-n) \cdot \frac{1}{K_i},$$

или
$$\sigma_i = \sigma_p \left[1 + \frac{1-n}{K_i} \right], \quad (23)$$

где
$$K_i = \frac{\theta^2 - m(1-\theta)^2}{2m(1-\theta)}. \quad (24)$$

5. *Графики.* Анализ формул (16), (17), (20), (22) и (24) для коэффициентов K_p , K_M , K_T , K_e и K_i показывает, что эти коэффициенты зависят от двух величин: от коэффициента θ , показывающего, какая часть сечения работает при упругом модуле E , и от коэффициента $m = \frac{E'}{E}$, характеризующего свойства материала.

Для различных значений m : 0; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8 и 1 составлены были таблицы значений коэффициентов K в зависимости от значений θ , изменяющихся в пределах от нуля до единицы.

Таблицы эти показывают, что коэффициенты K_p , K_M и K_T изменяются в конечных пределах, чего нельзя сказать про коэффициенты K_e и K_i : поэтому для тех значений θ , для которых K_e и K_i имеют значения больше единицы (и до ∞), посчитаны также их обратные величины

$$\frac{1}{K_e} \text{ и } \frac{1}{K_i}.$$

По данным таблиц для упрощения интерполяции построены графики (см. фиг. 12 и 13).

По оси абсцисс отложена величина θ , изменяющаяся в пределах от 0 до 1. По оси ординат на графике фиг. 12 в пределах от -1 до $+1$ отложены для различных значений $m = \frac{E'}{E}$ коэффициенты K_T , K_p и K_e или $\frac{1}{K_e}$ (последние для малых значений θ , для которых K_e находится в пределах от $-\infty$ до -1), а на графике фиг. 13 коэффициенты K_M и K_i или $\frac{1}{K_i}$ (последние для больших значений θ , для которых K_i находится в пределах от $+1$ до $+\infty$).

Графики фиг. 12 и 13 обслуживают формулы:

для радиуса кривизны $\rho = \frac{h}{\Delta} = \frac{T}{y''}$	$\rho = \frac{E}{2\sigma_p} \cdot \frac{h}{1-n} \cdot K_p$	(15)	} (A)
момента внутренних сил M_i	$M_i = \frac{h^2 \sigma_p}{6} \cdot \frac{1-n}{K_M}$	(18)	
пониженного модуля T формулы деформаций $TJ \frac{1}{\rho} = M_i$	$T = EK_T$	(19)	
напряжения σ_e внешнего выпуклого волокна	$\sigma_e = \sigma_p \left[1 - \frac{1-n}{K_e} \right]$	(21)	
напряжения σ_i внутреннего вогнутого волокна	$\sigma_i = \sigma_p \left[1 + \frac{1-n}{K_i} \right]$	(23)	
относительного эксцентриситета $p = \frac{c}{a} = \frac{M}{aN}$	$p = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{1}{K_M}$	(25)	

В этих формулах:

E — модуль упругих деформаций,

σ_p — предел пропорциональности,

h — высота сечения,

n — относительное среднее напряжение,

$$n = \frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{N}{h\sigma_p}.$$

Пользование графиками весьма элементарно. Нужно, исходя из данных задачи при заданном материале, (коэффициенте m , определяющем, какой кривой нужно пользоваться), вычислить один из коэффициентов K .

Для этого пользуемся формулами:

$$K_p = \frac{2\sigma_p}{E} \cdot \frac{1-n}{h} \rho = \frac{2(\sigma_p - \sigma)}{hE \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)}; \quad (26)$$

$$K_M = \frac{1-n}{np} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h\sigma_p - N}{M}; \quad (27)$$

$$K_T = \frac{T}{E}; \quad (28) \quad (B)$$

$$K_e = \frac{1-n}{1-n_e} = \frac{\sigma_p - \sigma}{\sigma_p - \sigma_e}; \quad (29)$$

$$K_i = \frac{1-n}{n_i - 1} = \frac{\sigma_p - \sigma}{\sigma_i - \sigma_p}. \quad (30)$$

Определив из условий задачи численное значение одного из коэффициентов K , на графике фиг. 12 или 13, соответственно заданному m , на кривой этого K разыскиваем точку, ордината которой отвечает вычисленному значению. Абсцисса этой точки дает численное значение θ части сечения, работающей при упругом модуле E . Вертикаль же, соответствующая этому значению θ , пересечет на графиках фиг. 12 и 13 кривые остальных K для данного m в точках, ординаты которых дадут численные значения этих коэффициентов.

Пример 1. Пусть задано: $m = 0,2$; $n = \frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{N}{\sigma_p h} = 0,70$;

$$p = \frac{c}{a} = \frac{M}{aN} = 0,72.$$

Можем вычислить K_M :

$$K_M = \frac{1-n}{pn} = \frac{1-0,70}{0,70 \cdot 0,72} = 0,595.$$

По графику находим:

$$\theta = 0,715; \quad K_p = 0,495; \quad K_T = 0,832; \quad K_e = 0,348; \quad K_t = \frac{1}{0,235},$$

тогда по формулам (А) найдем:

$$\rho = \frac{h \cdot E}{\sigma_p} = \frac{0,495}{0,6} = 0,826 \frac{E}{\sigma_p} \cdot h; \quad T = 0,832 E;$$

$$\sigma_e = \sigma_p \left[1 - \frac{0,3}{0,348} \right] = 0,138 \sigma_p;$$

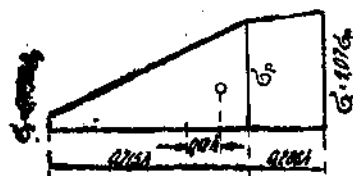
$$\sigma_t = \sigma_p [1 + 0,3 \cdot 0,235] = 1,07 \sigma_p.$$

Эпюра напряжений изображена на фиг. 14.

Пример 2. Пусть задано:

$$m = 0,2; \quad n = \frac{\sigma}{\sigma_p} = 0,35;$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{M}{aN} = 0,3.$$



Фиг. 14.

Можем вычислить:

$$K_M = \frac{1-n}{pn} = \frac{1-0,35}{0,35 \cdot 0,30} = 6,19 > 1.$$

K_M получилось больше единицы; значит, все сечение работает в пределах пропорциональности, и можно пользоваться обыкновенными формулами сопротивления материалов для упругих тел.

Пример 3. Пусть задано: $m = 0,2$; $n_e = 0$; $n = 0,75$.

Можно вычислить по формулам (В):

$$K_e = \frac{1-n}{1-n_e} = \frac{1-0,75}{1-0} = 0,25.$$

Тогда из графика получаем:

$$\theta = 0,570; \quad K_p = 0,285; \quad K_M = 0,420; \quad K_T = 0,680;$$

$$K_t = \frac{1}{0,59}.$$

Далее, пользуясь формулами (А), получим:

$$\rho = 0,57 \frac{E}{\sigma_p} \cdot h;$$

$$M_t = 0,0992 \cdot h^3 \sigma_p;$$

$$T = 0,680 \cdot E;$$

$$\sigma_e = 0;$$

$$\sigma_i = 1,15 \cdot \sigma_p;$$

$$c = 0,132 \cdot h.$$

Эпюра напряжений показана на фиг. 15.

Пример 4. Материал стержня задан следующими характеристиками.

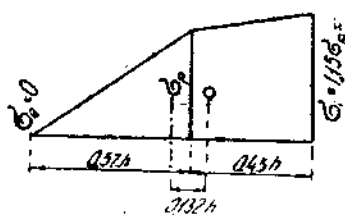
$$E = 1,10^5 \text{ кг/см}^2; \quad m = 0,42$$

$$\text{врем. сопр.: } \sigma_B = 320 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_p = 214 \text{ кг/см}^2$$

(материал с такими характеристиками весьма близок к воздушно-сухой сосне).

Размеры поперечного сечения стержня: $b = 10 \text{ см}$, $h = 6 \text{ см}$.

Определить напряженное состояние сечения, если $M = 15000 \text{ кгсм}$, а $N = 7120 \text{ кг}$.



Фиг. 15.

Прежде всего определим напряжения в крайних фибрах в предположении упругой работы стержня:

$$\sigma_i = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = 119 + 250 = 369 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_e = 119 - 250 = -131 \text{ кг/см}^2.$$

Стержень работает за пределом пропорциональности. Последовательно находим:

$$n = \frac{119}{214} = 0,555;$$

$$c = \frac{M}{N} = 2,11 \text{ см}; \quad p = \frac{6c}{h} = 2,11.$$

Тогда по формуле (27): $K_M = \frac{1-n}{pn} = 0,381.$

Пользуясь графиком фиг. 13, интерполируя для $m = 0,42$ между кривыми для $m = 0,4$ и $m = 0,5$, по значению K_M находим $\theta = 0,607$.

Затем получаем:

$$K_i = 0,92; \quad K_T = 0,802; \quad K_p = 0,305; \quad K_e = 0,250.$$

По формулам (А) находим:

$$\rho = \frac{100000}{2 \cdot 214} \cdot \frac{6}{0,445} \cdot 0,305 = 961 \text{ см};$$

$$T = 80200 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_e = 214 \cdot \left(1 - \frac{0,445}{0,250}\right) = -167 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_i = 214 \cdot \left(1 + \frac{0,445}{0,920}\right) = +317 \text{ кг/см}^2.$$

Результаты вычислений проверяем подстановкой в формулу

$$TJ \frac{1}{\rho} = M_i.$$

Эпюра напряжений показана на фиг. 16; пунктиром вычерчена эпюра напряжений по закону Навье.

Примечание 1. Если бы при подсчете по формулам (В) из условий задачи получилось бы, что

$$K_p \geq 1; K_M \geq 1; K_T = 1; \frac{1}{K_i} \leq 0; K_e \geq 0,5,$$

то это показывало бы, что все сечение работает в пределах пропорциональности, т. е., что в этом случае можно пользоваться обыкновенными формулами сопротивления материалов.

Примечание 2. Случай, при котором коэффициенты K_M , K_T , K_i и K_e получаются отрицательными,

имеющий место, если среднее напряжение $\sigma = \frac{N}{bh}$

будет больше предела пропорциональности ($n > 1$), будет рассмотрен подробно в § 8.

В случае, если среднее напряжение σ равно пределу пропорциональности: $\sigma = \sigma_p$, т. е. если $n = 1$, то пользование графиками затрудняется, так как в этом случае формулы (В) дают:

$$K_p = K_M = K_e = K_i = 0$$

и при вычислении по формулам (А) получаются для величин ρ , M , n_e , n_i неопределенные значения $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Исследуем этот случай подробней.

Из условия, что $K_p = 0$, и формулы (16) получаем для этого случая:

$$\theta^2 - m(1 - \theta)^2 = 0, \text{ или } \theta = \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}. \quad (31)$$

Истинное же значение неопределенного выражения $\frac{1 - n}{\theta^2 - m(1 - \theta)^2}$ определяется формулой:

$$\frac{1 - n_e}{2\theta} = \frac{n_i - 1}{2m(1 - \theta)} = \frac{h}{2\rho} \cdot \frac{E}{\sigma_p} = \frac{p}{4\theta^2}, \quad (32)$$

дающей взаимную зависимость между интересующими нас величинами.

Кроме того, подставив (31) в формулу (20), получим:

$$K_T = \frac{4m}{(1 + \sqrt{m})^2}. \quad (33)$$

Пример 5. Пусть известно: $m = 0,2$; $n = 1$; $p = 0,30$.

По формуле (31) определяем:

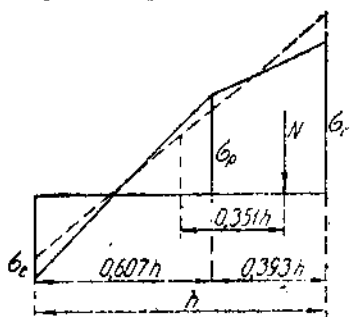
$$\theta = \frac{\sqrt{0,2}}{1 + \sqrt{0,2}} = 0,309.$$

По формуле (32) находим:

$$n_e = 1 - \frac{p}{2\theta} = 1 - \frac{0,30}{2 \cdot 0,309} = 0,514;$$

$$n_i = 1 + \frac{p}{2\theta} \cdot \frac{m(1 - \theta)}{\theta} = 1,217;$$

$$\rho = \frac{2h}{p} \cdot \frac{E}{\sigma_p} \theta^2 = 0,636 \frac{hE}{\sigma_p}; \quad K_T = 0,382.$$



Фиг. 16.

§ 8. Эксцентричное сжатие при частично неупругой работе сечения и при среднем напряжении, превышающем предел пропорциональности

В этом случае для определения напряженного состояния сечения недостаточно знать окончательную нагрузку; кроме этого, нужно иметь сведения и о том, каким образом достигнуто окончательное нагружение. Тут могут быть два основных случая.

1-й случай. Нагрузка возрастала таким образом, что во всех точках сечения напряжения все время возрастали. Такой случай может быть, например, если нагрузка приложена с определенным эксцентриситетом и величина нагрузки постепенно возрастает от нуля до ее окончательного значения.

2-й случай. Во время процесса нагружения напряжения, превосходившие предел пропорциональности, в дальнейшем в некоторых точках уменьшались. Ясно, что в этом случае деформация, существовавшая в этих точках, при понижении напряжений не вполне исчезала; поэтому и распределение напряжений во втором случае будет иным, чем в первом.

Такое явление могло бы иметь место, например, в случае постоянной нагрузки, вызывавшей напряжения за пределом пропорциональности, при постепенном увеличении ее эксцентриситета. Так будет, например, при эксцентричном продольном сжатии стержня: стержень будет изгибаться, а деформации его расти. Этот случай как раз соответствует формуле Энгессер-Кармана для критической силы при продольном изгибе, о чем речь была в § 5. (В этом же параграфе придется повторить вывод этой формулы, ввиду необходимости в дальнейшем ссылаться на промежуточные формулы).

Рассмотрим оба эти случая в отдельности.

1-й случай. *Эксцентричное сжатие при среднем напряжении выше предела пропорциональности, если в конечном состоянии нагружения напряжения во всех точках сечения возросли по сравнению с исходным состоянием.* Случай этот предусмотрен примечанием 2 к § 7.

В этом случае вполне применимы формулы § 7.

Пример 1. Пусть задано: $m = 0,2$; $n = 1,10$; $p = 0,30$.

По формулам (B) находим:

$$K_M = \frac{1-n}{pn} = -0,303.$$

Затем по графикам фиг. 12 и 13 находим: $\theta = 0,200$; $K_\theta = 0,09$; $K_T = 0,280$; $K_\epsilon = -0,225$; $K_i = -0,275$.

По формулам (A) получаем:

$$\rho = \frac{E}{2\sigma_p} \cdot \frac{h}{1-1,10} \cdot (-0,09) = 0,45 \frac{E}{\sigma_p} h; \quad \frac{M_i}{b} = \frac{h^2 \epsilon_p}{6} = \frac{1-1,10}{-0,303} = 0,0549 h^2 \epsilon_p;$$

$$T = 0,280 E; \quad n_c = 1 - \frac{1-1,10}{-0,225} = 0,556;$$

$$n_i = 1 + \frac{1-1,10}{-0,275} = 1,364.$$

2-й случай. *Эксцентричное сжатие постоянной нагрузкой, при среднем напряжении выше предела пропорциональности. Случай возрастания эксцентриситета при переходе от исходного в конечное положение.* Предполагается, что в исходном положении все сечение работало равно-

мерно за пределом упругости; в конечном же положении напряжение со стороны выпуклого волокна ниже предела упругости.

Согласно закону Герстнера, процесс разгрузки со стороны выпуклых волокон происходит при упругом модуле E .

Согласно допущениям об идеализированной диаграмме сжатия (см. § 6) считаем, что процесс дальнейшего роста напряжений происходит при пониженном модуле $E' = mE$.

В соответствии с этим эпюра напряжений (см. фиг. 17) будет представлять из себя линию с переломом, причем перелом, в отличие от эпюры напряжений § 7, имеет место не против точки с напряжением σ_p , а против точки, напряжение которой равно $\sigma = \frac{N}{1 \cdot h}$, т. е. сохранилось

без изменений такое же, как и было в исходном положении.

Итак, в точке A имеем уменьшение относительной деформации по сравнению с исходным положением (равномерной эпюрой сжатия):

$$\frac{\sigma - \sigma_e}{E}$$

В точке C имеем увеличение относительной деформации:

$$\frac{\sigma_t - \sigma}{E'} = \frac{\sigma_t - \sigma}{mE}$$

Согласно гипотезе Бернулли о плоскостном законе распределения относительных удлинений волокон, можем сказать, что отношение этих изменений деформаций будет равно отношению расстояний $\overline{AA_2B}$ к $\overline{BC_2}$, т. е.

$$\frac{\sigma - \sigma_e}{E} : \frac{\sigma_t - \sigma}{mE} = \theta h : [(1 - \theta)h],$$

откуда получаем:

$$\sigma_t - \sigma = (\sigma - \sigma_e) m \frac{1 - \theta}{\theta}. \quad (34)$$

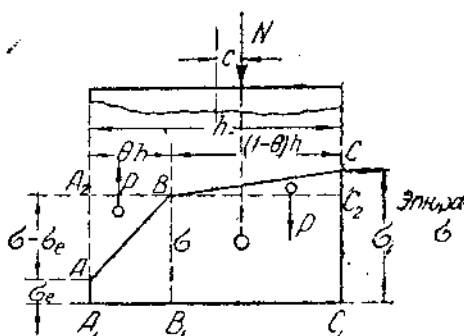
В виду сохранения величины нагрузки N (при переходе ее из исходного положения в центре сечения в данное положение), площадь треугольника разгрузки AA_2B должна равняться площади треугольника догрузки BCC_2 , откуда:

$$(\sigma - \sigma_e) \theta = (\sigma_t - \sigma) (1 - \theta). \quad (34')$$

Сравнив этот результат с формулой (34), получаем:

$$m = \frac{\theta^2}{1 - \theta^2}, \text{ или } \theta = \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}. \quad (35)$$

Изгибающий момент сечения M_t равен моменту пары сил P (см. фиг. 17), силы разгрузки со стороны выпуклых волокон и силы догрузки со стороны сжатых. Плечо этой пары равно расстоянию между центрами тяжести треугольника разгрузки AA_2B и треугольника догрузки BCC_2 , т. е. равно $\frac{2}{3}h$.



Фиг. 17.

Таким образом,

$$M = Nc = \left[\frac{1}{2} (\sigma - \sigma_e) \theta h \right] \cdot \frac{2}{3} h,$$

или

$$M = Nc = \frac{1}{3} h^2 (\sigma - \sigma_e) \theta. \quad (36)$$

Из формулы (36) и (34') получаем:

$$\sigma - \sigma_e = \frac{3M}{h^2 \theta}; \quad \sigma_t - \sigma = \frac{3M}{h^2 (1 - \theta)}. \quad (37)$$

Разность Δ относительных укорочений крайних волокон выражается так:

$$\Delta = \frac{\sigma - \sigma_e}{E} + \frac{\sigma_t - \sigma}{Em} = \frac{3M}{h^2 E} \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{m(1 - \theta)} \right].$$

Используя формулу (35), получим:

$$\Delta = \frac{3M}{E(\theta h)^2} = \frac{3M}{Eh^2} \left(\frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \right)^2.$$

Отсюда легко получить величину кривизны [формула (14)], возникающей вследствие напряженного состояния сечения:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta}{h} = \frac{3M}{Eh^3} \left(\frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \right)^2. \quad (a)$$

Сравнив эту формулу с

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{TJ} = \frac{12M}{h^3 T}, \quad (b)$$

получаем выражение для модуля T :

$$T = \frac{4m}{(1 + \sqrt{m})^2} E = 4\theta^2 E. \quad (38)$$

Это — известная формула Энгессер-Кармана. Действительно, заменив $m = \frac{E'}{E}$, получим формулу (5)

$$T = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2} \quad (5)$$

Напряжение в крайних волокнах получим из формул (37):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \sigma - \frac{3M}{h^2 \theta} = \frac{N}{h} - \frac{3 \cdot Nc}{h^2 \theta} = \frac{N}{h} \left(1 - \frac{3c}{h\theta} \right); \\ \sigma_t &= \sigma + \frac{3M}{h^2 (1 - \theta)} = \frac{N}{h} + \frac{3Nc}{h^2 (1 - \theta)} = \frac{N}{h} \left[1 + \frac{3c}{h(1 - \theta)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Этим формулам можно придать весьма интересный вид, если заметить в них $\frac{1}{\theta}$ и $\frac{1}{1-\theta}$ значениями:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{\frac{E}{T}};$$

$$\frac{1}{1-\theta} = \frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2\sqrt{\frac{E'}{T}};$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \frac{N}{h} \left(1 - \frac{6c}{h} \sqrt{\frac{E}{T}} \right), \\ \sigma_t &= \frac{N}{h} \left(1 + \frac{6c}{h} \sqrt{\frac{E'}{T}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Нетрудно видеть, что растягивающие напряжения в сечении начинают появляться при $\sigma_e = 0$, т. е. когда эксцентриситет

$$p_z = \frac{c_z}{a} = \sqrt{\frac{T}{E}} = 2 \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} = 2\theta. \quad (41)$$

Между прочим, сгруппировав формулы (37), (а), (b) и (38), получим:

$$\frac{3M}{h^3 \theta^3} = \frac{n - n_e}{\theta} = \frac{n_t - n}{m(1-\theta)} = \frac{hE}{\rho \sigma} = \frac{p}{2\theta^3}. \quad (42)$$

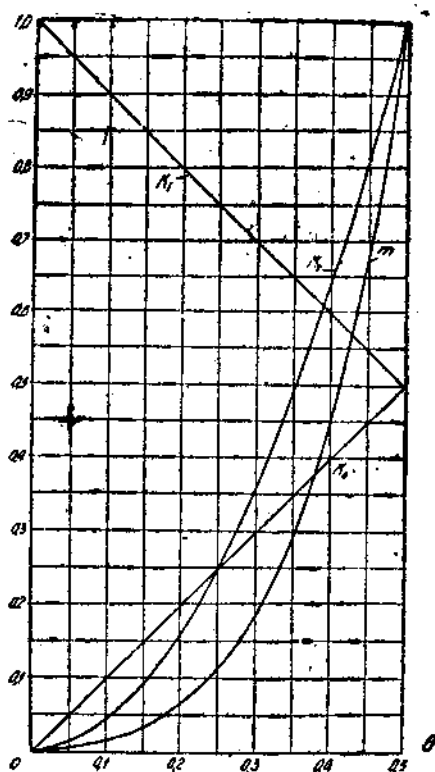
В граничном случае, когда $n = 1$, формулы (42), (35) и (38) совпадают с формулами (32), (31) и (33)

Для облегчения вычислений построен специальный график (см. фиг. 18); график этот приспособлен к формулам:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2}; & \theta &= \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}; \\ T &= K_T \cdot E; & N &= h \cdot \sigma; \\ \sigma_e &= \sigma \left(1 - \frac{p}{2K_e} \right); & M &= \frac{h^3}{6} \sigma p; \\ \sigma_t &= \sigma \left(1 + \frac{p}{2K_t} \right); & \rho &= \frac{TJ}{M} = \frac{Th}{2\sigma p}. \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Опасный эксцентриситет p_z , при котором в выпуклом волокне появляется нулевое напряжение (начинается растяжение):

$$p_z = 2K_e.$$



Фиг. 18.

Пример 2. Возьмем те же значения, что и в примере 1 для первого случая, т. е. пусть

$$m = 0,2; \quad n = 1,10; \quad p = 0,30.$$

Тогда из графика (фиг. 18) находим:

$$\theta = 0,309; \quad K_T = 49^2 = 0,3825; \quad K_e = 0,31; \quad K_i = 1 - \theta = 0,69.$$

По формулам (С) находим

$$\theta = 0,309$$

$$T = 0,3825 E$$

$$n_e = n \left(1 - \frac{p}{2K_e} \right) = 1,10 \left(1 - \frac{0,30}{2 \cdot 0,31} \right) = 0,567$$

$$n_i = n \left(1 + \frac{p}{2K_i} \right) = 1,10 \left(1 + \frac{0,30}{2 \cdot 0,69} \right) = 1,340$$

$$M_i = \frac{h^2}{6} n \sigma_p \cdot p = 0,055 h^2 \sigma_p$$

$$\rho = \frac{Th}{2\pi \sigma_p p} = \frac{0,3825}{2 \cdot 1,1 \cdot 0,30} \cdot \frac{hE}{\sigma_p} = 0,580 \frac{hE}{\sigma_p}$$

Те же коэф-
фициенты
для 1-го при-
мера

$$0,200$$

$$0,280$$

$$0,556$$

$$1,364$$

$$0,0549$$

$$0,45$$

За вертикальной чертой приведены для сравнения численные значения коэффициентов для той же задачи (из примера 1) для 1-го случая

загружения. Кроме того, на фиг. 19 сплошной линией показана эпюра напряжений в первом случае, а пунктирной — во втором случае.

Как видно из произведенного сравнения, способ нагружения как в первом, так и во втором случае сравнительно мало сказывается на величинах напряжений, но весьма заметно на деформациях (до 30% в нашем случае). При этом во втором случае нагружения стержень оказывается более жестким, что вполне понятно, так как во втором случае будет больше часть сечения, работающая при упругом мо-

дуле E , и меньше часть сечения, работающая при пониженном модуле E' .

§ 9. Об уменьшении „ядра сечения“ при неупругом сжатии

Условимся называть „ядром сечения“ для неупругого сжатия контур, приложение равнодействующей нагрузки внутри которого вызывает в сечении напряжения только одного знака, а вне — разных знаков.

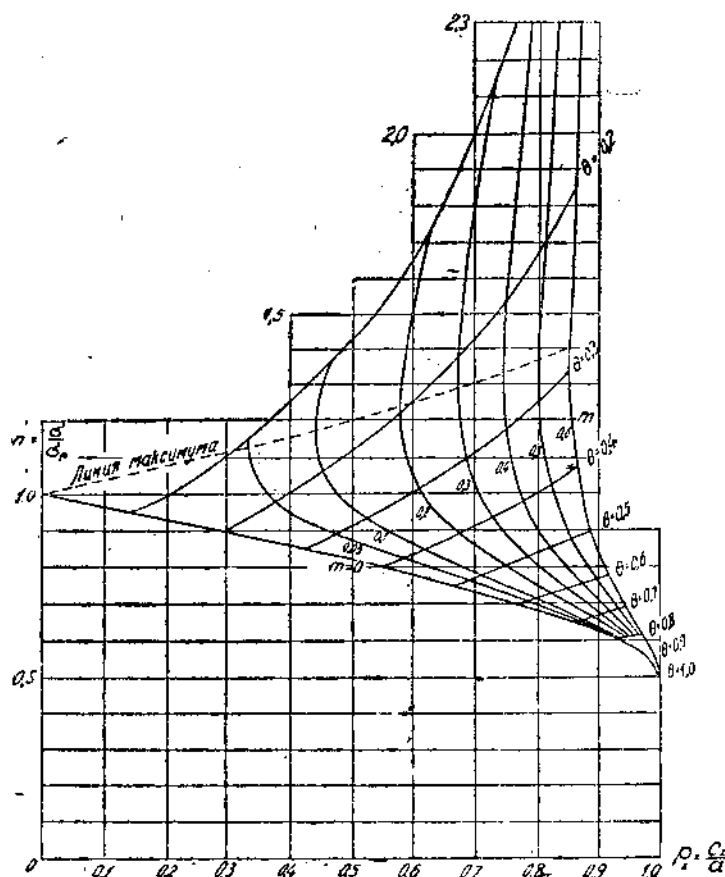
Для второго случая нагружения мы уже имеем готовый ответ: „опасный эксцентриситет, при котором в выпуклом волокне появляются нулевые напряжения (предел, за которым могут появиться и растягивающие напряжения) равен:

$$p_e = 2 \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}. \quad (41)$$

Для первого случая задача будет несколько сложнее. Нулевые напряжения σ_e появляются (см. фиг. 21) при условии, что

$$K_e = 1 - n.$$

Чтобы найти при заданных значениях $m = \frac{E'}{E}$ и $n = \frac{\sigma}{\sigma_p}$ соответствующее



Фиг. 20.

щее им „опасное“ значение эксцентриситета p_z , мы, пользуясь графиками (фиг. 12 и 13), по значению $K_e = 1 - n$ находим соответствующее численное значение для K_M .

Тогда¹

$$p_z = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{1}{K_M}.$$

Пример. Пусть задано: $m = 0,2$; $n = 0,8$.

На графике (фиг. 12) находим для $K_e = 1 - 0,8 = 0,2$ значение $K_M = 0,333$.

Тогда $p_z = \frac{1-0,8}{0,8} \cdot \frac{1}{0,333} = 0,75$. Для облегчения расчетов подобным образом составлена таблица и построен график (фиг. 20) „опасных“ p_z .

¹ Вычисление p_z можно произвести также по формуле

$$p_z = 1 + 20 - \frac{20}{1 - (1-m)(1-n)^2},$$

а соответствующее

$$n = \frac{1}{20} [1 - (1-m)(1-p_z)^2].$$

(43)

При $\sigma = \sigma_p$ (т. е. при $n = 1$) для первого случая получаются те же значения p_z , как и для второго, т. е.

$$p_z = 2 \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}.$$

Из рассмотрения графика (фиг. 20) мы заключаем, что если среднее напряжение $\sigma = \frac{N}{bh} \leq 0,5\sigma_p$, то ширина ядра сечения сохраняется в пределах средней трети сечения.

При повышении напряжения σ выше $0,5\sigma_p$ ширина ядра начинает „уменьшаться“ — величина относительного эксцентриситета p_z все уменьшается, достигая при некотором значении σ наименьшего значения, после которого при дальнейшем увеличении σ допустимый эксцентриситет снова начинает возрастать. Эти минимальные значения p_z будем называть „безопасными эксцентриситетами“ для данных значений

$$m = \frac{E'}{E}.$$

Как видно из того же графика (фиг. 20), чем меньше m , тем меньше будет и „безопасный“ эксцентриситет; для значения же $m = 0$ „безопасный“ эксцентриситет тоже равен нулю.

Во втором случае загрузки среднее напряжение больше предела упругости ($\sigma > \sigma_p$), эксцентриситет p_z определяется по формуле (41) и не зависит от величины напряжения σ ; он имеет такое же значение, как при первом случае загрузки при значении $\sigma = \sigma_p$.

На графике (фиг. 21) нанесены „безопасные“ значения эксцентриситетов p_z^1 при которых ни при каких значениях

средних напряжений не возникают растягивающие напряжения в крайнем волокне. По оси абсцисс отложены значения m от нуля до 1, по оси ординат — „безопасные“ p_z . Сплошной линией проведена кривая для первого случая загрузки, пунктирной линией — то же для второго случая загрузки. График (фиг. 21) показывает, что для второго случая загрузки безопасные эксцентриситеты несколько больше, чем для первого.

Пример. Определить коэффициент запаса на появление растягивающих напряжений, если эксцентриситет зафиксирован конструкцией. Известно, что

$$m = \frac{E'}{E} = 0,10; \quad p = \frac{e}{a} = 0,60; \quad n = \frac{\sigma}{\sigma_p} = 0,7.$$

¹ Вычислить их можно по формуле:

$$\text{безопасное } p_z = (p_z)_{\min} = 3 - \frac{6}{\sqrt{1-m}} \cos \frac{\pi + \varphi}{3},$$

где $\varphi = \arcsin \sqrt{1-m}$.

Соответствующее значение $n = \frac{\sigma}{\sigma_p}$ можно найти по формуле

$$n = \frac{3}{2p_z} \cdot \sin^2 \frac{\pi + \varphi}{3}.$$

При заданном эксцентриситете $p = 0,6$ опасное напряжение n находим из графика (фиг. 20): $n_{\text{опасн}} = 0,86$.

Коэффициент запаса:

$$K = \frac{n_{\text{опасн}}}{n} = \frac{0,86}{0,7} = 1,23.$$

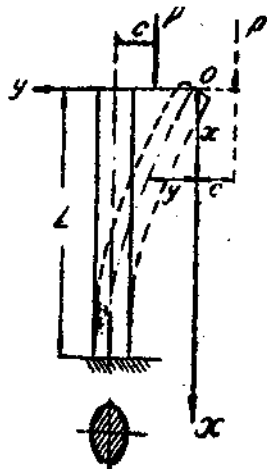
§ 10. Об интегрировании дифференциального уравнения продольного изгиба за пределом пропорциональности

Выясним сначала общую идею. Пусть механические свойства материала заданы некоторой (хотя бы и криволинейной) диаграммой сжатия. Стержень определенного поперечного сечения изгибается (см. фиг. 22) продольной силой P с эксцентриситетом c . Дифференциальное уравнение изгиба будет

$$TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(y+c). \quad (44)$$

Сила P для любого сечения стержня по его длине — величина постоянная, эксцентриситет же ее приложения, равный $(y+c)$, — величина переменная. Зная величину силы P , характер сечения и величину эксцентриситета, вообще говоря, более или менее сложным путем можно найти величину модуля T , изменяющегося по длине стержня в зависимости от изменения величины эксцентриситета $(y+c)$. Таким образом, задача нахождения прогибов сводится к интегрированию дифференциального уравнения типа

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y+c; P). \quad (45)$$



Фиг. 22.

В виду сложности вида функции $f(y+c; P)$, зачастую носящей экспериментальный характер, интегрирование приходится производить графически или численно в частном виде, для чего должны быть известны начальные параметры: значения y_0, y'_0, y''_0 .

В нашей задаче известны граничные условия:

$$y_0 = 0; \quad y'_L = 0;$$

y''_0 известно (в упругом случае $y''_0 = -\frac{Pc}{EJ}$). Таким образом, y'_0 неизвестно; численное значение его нужно угадать рядом последовательных проб или попыток. Если y'_0 угадано верно, то y'_L должно получиться равным нулю.

При несколько другой постановке задачи можно было бы использовать все такие последовательные попытки. Для этого нужно поставить вопрос так: задано значение y'_0 ; найти, какой длины L должен быть стержень, чтобы $y'_L = 0$.

Тогда каждая попытка даст решение отдельной задачи на изгиб стержня продольной силой при данной величине силы P и эксцентриситета c , при все том же поперечном сечении, но каждый раз при новой длине.

Если выполнять интегрирование уравнения (45) графически, то попутно можно получить формы кривых искривления, которые будут соответствовать определенной величине (силе P) отпорности такой формы искривления данного стержня.

Каждая такая форма искривления может быть использована много раз; стоит укоротить длину стержня (взять L_1 вместо L), — и мы получим

новую величину эксцентриситета c_1 (вместо c при длине L), соответствующую той же величине отпорности стержня P .

Имея в виду это обстоятельство, можно первоначальные построения производить при отсутствии эксцентриситета (считая $c = 0$, что дает $y_0'' = 0$), и потом использовать полученные формы искривления путем отсечения концов для оценки влияния эксцентриситетов.

Наметив общий ход и общую идею метода, перейдем к частному случаю стержня прямоугольного сечения из материала, характеризуемого идеализированной диаграммой сжатия. В этом случае возможны значительные обобщения при построениях, освобождающие нас от частных размеров стержня.

Рассмотрим стержень, изображенный на фиг. 24.

Дифференциальное уравнение деформаций можно записать:

$$TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py. \quad (44')$$

Вместо y введем новую переменную, ей пропорциональную:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1-n} \cdot \frac{1}{a} \cdot y, \quad (46)$$

где n и $a = \frac{h}{6}$ имеют значения, как в § 7.

Из чертежа (фиг. 24) видим, что для данного сечения y является эксцентриситетом приложения нагрузки P , который можно выразить через относительный эксцентриситет r :

$$y = ar.$$

Сравнив (46) с формулой (27), видим, что

$$\eta = \frac{1}{2K_M}. \quad (47)$$

Заменяя $T = K_T E$ и вводя обозначение

$$\frac{P}{EJ} = \alpha^2, \quad (48)$$

получим из уравнения (44'):

$$K_T \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\alpha^2 \frac{1}{2K_M}. \quad (49)$$

Согласно (19) $K_M \cdot K_T = K_p$.

Вводя, кроме того, новый аргумент

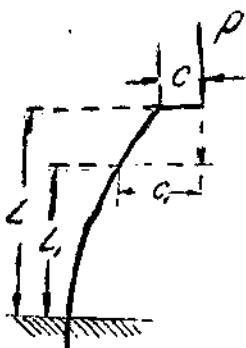
$$\alpha x = u, \quad (50)$$

получим вместо (49)

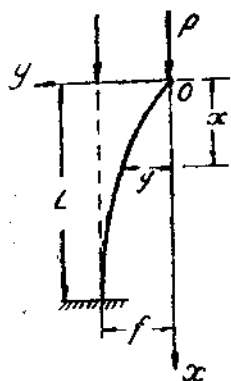
$$\frac{d^2 \eta}{du^2} = -\frac{1}{2K_p}. \quad (51)$$

Так как $\eta = \frac{1}{2K_M}$, а K_M и K_p — функции одной и той же величины θ [см. формулы (16) и (17)], и их взаимная зависимость определяется графиками фиг. 12 и 13, то можно сказать, что

$$\frac{1}{2K_p} = F(\eta). \quad (52)$$



Фиг. 23.



Фиг. 24.

Таким образом, дифференциальное уравнение изгиба (44') приводится к форме

$$\frac{d^2 \eta}{du^2} = -F(\eta),^1 \quad (53)$$

удобной для численного интегрирования через начальные условия.

Предполагая, что диаграмма сжатия (фиг. 25) характеризуется коэффициентом $m = 0,2$, пользуясь формулами (47), (52) и графиками фиг. 12 и фиг. 13, мы построили график (фиг. 26) зависимости $\eta'' = -F(u)$ от величины η .

Интеграл уравнения (53) $\eta' = -F(\eta)$ должен удовлетворять нижеследующим граничным условиям.

На свободном конце стержня $x = 0$, т. е. согласно (50) $u = 0$;

$$y_0 = 0 \text{ и } y''_0 = 0 \text{ (так как } M_0 = 0\text{)}.$$

Согласно же (46), η пропорционально y ; отсюда:

$$1) \eta_0 = 0, \quad 2) \eta''_0 = 0.$$

В заделке для u_L

$$y'_L = 0, \text{ следовательно}$$

$$3) \eta'_L = 0.$$

Отметим, что η и u — абстрактные величины, как это видно из формул (47), (50) и (48).

Интегрирование уравнения (53) производилось параллельно и графически, и арифметически² по одной и той же общей схеме.

Опишем арифметический прием. При приближенном численном интегрировании приходится дифференциалы заменять конечными разностями.

Приращение аргумента Δu было принято $\Delta u = 0,1$.

В дальнейшем примем обозначения:

$$\eta_1, \eta'_1, \eta''_1 \text{ для } u_1 = \Delta u = 0,1$$

$$\eta_2, \eta'_2, \eta''_2 \text{ для } u_2 = 2\Delta u = 0,2$$

$$\eta_t, \eta'_t, \eta''_t \text{ для } u_t = t\Delta u = t \cdot 0,1.$$

Средние значения функций для отрезков аргумента Δu между двумя смежными значениями его, напр., u_1 и u_2 будем обозначать:

$$\eta_{1,2}, \eta'_{1,2}, \eta''_{1,2}$$

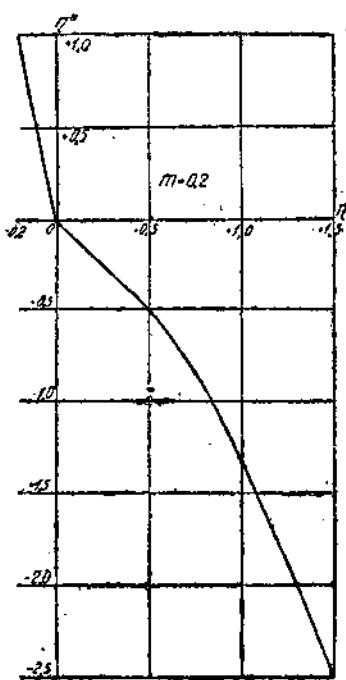
между u_t и u_{t+1}

$$\eta_{t,t+1}, \eta'_{t,t+1}, \eta''_{t,t+1}$$

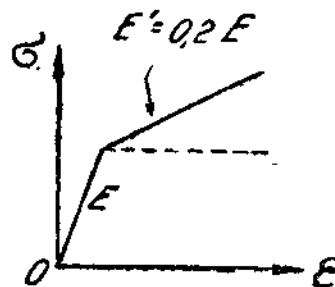
¹ В упругой зоне уравнение (53) обращается в

$$\frac{d^2 \eta}{du^2} = -\eta.$$

² Для различных значений $m = 0; 0,1; 0,2; 0,4$ и $0,6$ интегрирование выполняли под моим руководством летом 1932 г. сотрудники Киевского отделения Укр. научно-исслед. ин-та сооружений Л. С. Ямпольский и инж. А. Н. Малиutin.



Фиг. 26.



Фиг. 25.

Известно: $\eta_0 = \eta''_0 = 0$. Задаем некоторое численное значение для η'_0 (например: 0,3, или 0,4, или 0,5...). Тогда можно найти

$$\eta_1 = \eta_0 + \eta'_{0,1} \cdot \Delta u \cong \eta_0 + \eta'_0 \Delta u.$$

Получив η_1 , по графику (фиг. 26) находим η''_1 ; тогда

$$\eta'_{0,1} = \frac{\eta''_0 + \eta''_1}{2}.$$

Теперь по графику фиг. 26 по $\eta'_{0,1}$ разыскиваем $\eta_{0,1}$. Таким образом, в результате имеем:

$$\eta_{0,1}, \eta'_0 \text{ и } \eta'_{0,1}.$$

Далее последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= \eta'_0 + \eta'_{0,1} \cdot \Delta u, \\ \eta_{1,2} &= \eta_{0,1} + \eta'_{1,2} \cdot \Delta u. \end{aligned}$$

По графику фиг. 26 находим $\eta'_{1,2}$, затем продолжаем;

$$\eta'_2 = \eta'_1 + \eta'_{1,2} \cdot \Delta u;$$

$$\eta_{2,3} = \eta_{1,2} + \eta'_{2,3} \cdot \Delta u.$$

По графику фиг. 26 находим $\eta'_{2,3}$ и т. д.
Вообще пользуемся формулами:

$$\left. \begin{aligned} \eta'_i &= \eta'_{i-1} + \eta'_{i-1,i} \cdot \Delta u, \\ \eta_{i,i+1} &= \eta_{i-1,i} + \eta'_{i,i+1} \cdot \Delta u. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Этот¹ вычислительный процесс продолжаем до тех пор, пока не получим для некоторого η'_s значение нуль или первое отрицательное значение. В последнем случае разыскиваем путем интерполяции, с одной стороны, между η'_{s-1} и η'_s , а, с другой стороны, между u_{s-1} и u_s такое значение для u , которому соответствовало бы значение $\eta'_L = 0$. Тогда это значение для u будет равно

$$u_L = aL = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot L. \quad (55)$$

Стрелку прогиба f (см. фиг. 24) найдем по формуле (46):

$$f = y_L = 2a \cdot \frac{1-n}{n} \cdot \eta_L, \quad (56)$$

где

$$n = \frac{P}{F \cdot \sigma_p}.$$

Таким образом, мы получили зависимость между величиной прогиба f , длиной стержня L и величиной отпорности P такой искривленной формы стержня.

Значения $\eta_0, \eta_{0,1}, \eta_{1,2}, \eta_{2,3}, \dots, \eta_L$ дают возможность вычертить кривую искривления стержня.

Приведем численный пример вычислений по такой схеме.

Для сокращения записи примем: $\Delta u = 0,2$ (в действительности принималось 0,1, так как множить на 0,1 легче) и величину $\eta'_0 = 2,1$; тогда:

¹ См. примечание к этому параграфу под таблицей на следующей странице.

	u	η_1	η'_1	η''
0	0	0	2,1	0
1	0,2	0,42		-0,42
0	0	0	2,1	0
		0,21	-0,42	-0,21
1	0,2	4116	2,058	
		0,6216	-1290	-0,645
2	0,4	3858	1,929	
		1,0074	-2652	-1,326
3	0,6	3328	1,664	
		1,3402	-420	-2,100
4	0,8	2488	1,244	
		1,5890	-545	-2,725
5	1,0	1398	0,699	
		1,7288	-616	-3,08
6	1,2	0,166	0,083	
		1,7454	-625	-3,125
7	1,4		-0,542	

$$u_L = 1,2 + \frac{83}{625} \cdot 0,2 = 1,226;$$

$$\frac{1}{2} (1,226 + 1,3) = 1,263;$$

$$\begin{aligned} \eta'_{1,263} &= \eta'_{1,226} + \frac{\eta'_{1,226} - \eta'_{1,20}}{1,226 - 1,20} (1,263 - 1,226) = \\ &= 0 + \frac{0 - 0,083}{0,026} 0,037 = -0,118, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_L &= \eta_{1,226} = \eta_{1,30} - \eta'_{1,263} (1,30 - 1,226) = \\ &= 1,7454 + 0,118 \cdot 0,074 = 1,754. \end{aligned}$$

Графическое интегрирование производилось по этой же схеме по способу Massau, несколько видоизмененному автором (был введен подвижной полюс, что освобождает от проведения ряда лишних линий)¹.

Примечание. Применение упрощенной схемы вычислений по форме:

$$\eta_1 = \eta_0 + \eta'_0 \cdot \Delta u,$$

затем определение по графику фиг. 26

$$\eta''_1 = -F(\eta_1)$$

¹ См. К. К. Симянский, Стр. мех., Системы с лишними неизвестными, Киев, 1927, стр. 36, на фигурах 21 и 22 показан подвижной полюс.

и далее:

$$\eta'_1 = \eta'_0 + \eta''_1 \cdot \Delta u;$$

$$\eta_2 = \eta_1 + \eta'_1 \cdot \Delta u;$$

$$\eta''_2 = -F(\eta_2)$$

и т. д.

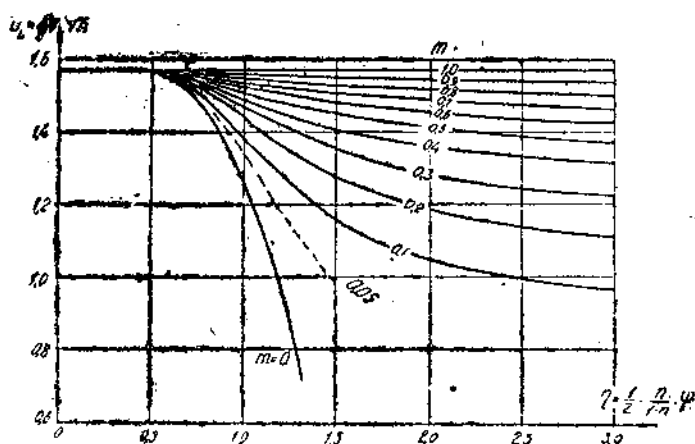
приводит к погрешностям во много раз большим. Так, например, численное интегрирование уравнения $\eta'' = -\eta$ при начальных условиях $\eta_0 = \eta'_0 = 0$, $\eta'_0 = 1,0$ и приращении аргумента $\Delta u = 0,1$ дает по примененному способу значение $u_L = 1,5701$, по

упрощенной схеме $u_L = 1,6202$, а точное значение $u_L = \frac{\pi}{2} = 1,5708$.

Результаты выполненных для частных задач интегрирований могут быть обобщены, если в формулах (55) и (56) произвести замену именованных величин относительными.

Введем понятие „относительной гибкости стержня ν “:

$$\nu = \sqrt{\frac{\sigma_p}{E}} \cdot \lambda = \sqrt{\frac{\sigma_p}{E}} \cdot \frac{l}{i} = \sqrt{\frac{\sigma_p}{E}} \cdot \frac{2L}{i}, \quad (57)$$



Фиг. 27.

или после некоторых преобразований:

$$\nu = 2 \sqrt{\frac{\sigma_p F}{EJ}} L = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{2L}{\sqrt{n}}, \quad (57')$$

где n — „относительное напряжение“ (см. § 7).

Тогда формула (55) примет вид:

$$\nu = \frac{2u_L}{\sqrt{n}}. \quad (58)$$

Формулу (56) запишем так:

$$\psi = p_L = \frac{f}{a} = 2 \frac{1-n}{n} \eta_L. \quad (59)$$

Условимся в дальнейшем различать относительную стрелку искривления ψ и относительный эксцентриситет в месте наибольшего выгиба p_L ; обе эти величины одной размерности.

Таким образом, решение отдельной задачи дает то значение относительной гибкости ν [см. (58)] стержня прямоугольного сечения, которому отвечают заданные значения относительной стрелки искривления ψ (59) и относительное напряжение отпорности стержня n .¹ Выполняя

¹ Кратко будем называть n „относительной отпорностью“.

численное интегрирование дифференциального уравнения (44) [или (53)] по несколько раз, избирая каждый раз последовательные различные значения η_0' , можно построить кривую зависимости u_L от η_L . На графике (фиг. 27) построен ряд таких кривых для стержней из материалов, характеризующихся идеализированными диаграммами сжатия из двух прямых с различными численными отношениями модулей $m = \frac{E'}{E}$ от 0 до 1. Кривые для $m = 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6$ и $1,0$ получены в результате интегрирования, остальные же — путем криволинейной интерполяции.

§ 11. Падение отпорности сжатого стержня за пределом пропорциональности в зависимости от стрелки искривления стержня

График фиг. 27 дает зависимость между относительными величинами прогиба ϕ , напряжения отпорности n и гибкости ν , но в неявном виде.

Нетрудно построить графики, которые для стержней определенной гибкости дадут зависимость между относительным прогибом и относительным напряжением отпорности.

Пусть, например, нужно построить кривую зависимости между относительным напряжением отпорности n и относительной стрелкой искривления $\phi = \frac{f}{a}$ для стержня с относительной гибкостью $\nu = 3,2$, изготовленного из материала с характеристикой

$$m = \frac{E'}{E} = 0,4.$$

Пользуясь формулами

$$u_L = \frac{1}{2} \nu \sqrt{n} \quad \text{и} \quad \phi = p_L = 2 \frac{1-n}{n} \eta_L,$$

будем определять значения стрелки ϕ последовательно для значений $n = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$ и т. д.

Для $n = 0,9$;

$$u_L = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot \sqrt{0,9} = 1,516.$$

На графике фиг. 27 на кривой $m = 0,4$ ищем точку с такой ординатой $u_L = 1,516$ и находим, что абсцисса этой точки $\eta_L = 0,88$.

Тогда получаем:

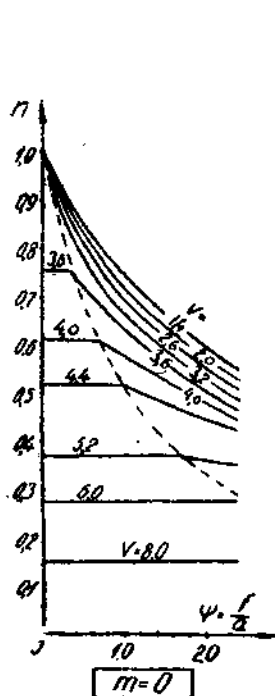
$$\phi = 2 \cdot \frac{1-0,9}{0,9} \cdot 0,88 = 0,1955.$$

Вычисления располагаем в таблицу:

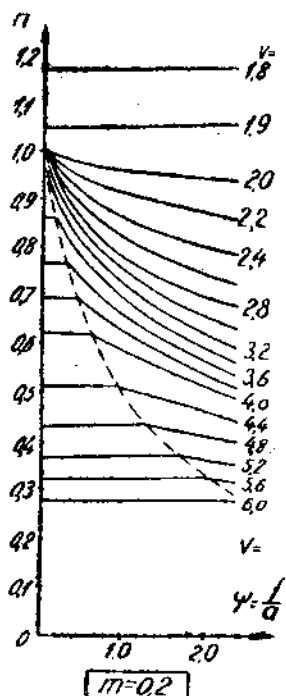
n	u_L	η_L	ϕ
0,9	1,516	0,88	0,196
0,8	1,43	1,35	0,675
0,75	1,385	1,71	1,14
0,7	1,34	2,36	2,02

По значениям n и ϕ строим кривую $\nu = 3,2$ (см. фиг. 30). На фиг. 28, 29, 30, 31 приведены построенные таким образом графики зависимости между относительной стрелкой искривления ϕ , относительным напряжением

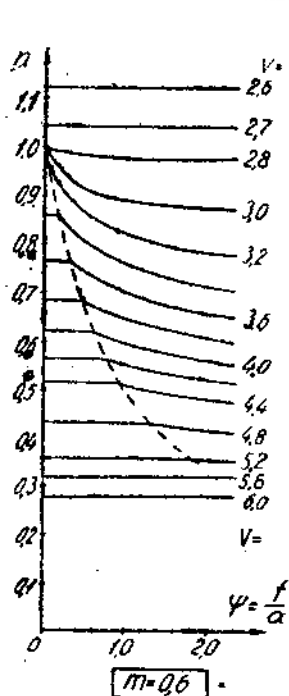
отпорности n и гибкостью ψ стержней из материалов со значениями



Фиг. 28.



Фиг. 29.



Фиг. 30.

$m = \frac{E'}{E} = 0; 0,2; 0,4$ и $0,6$. Для промежуточных значений m результаты можно получить путем интерполяции.

При значениях n , больших единицы ($n = 1,1; 1,2; 1,3$ и т. д.), напряженное состояние стержня соответствует второму случаю § 8.

Идеализированные диаграммы из двух прямых имеют ту особенность, что для напряжений σ , больших предела пропорциональности σ_p ($n > 1$), модуль продольного изгиба $T = K_T E$ является величиной постоянной, определяемой по формуле (38) как функция одного только m . Искривление стержня не понижает этого модуля, поэтому для относительных напряжений $n > 1$ на графиках фиг. 29, 30 и 31 получаем горизонтальные прямые, уравнение которых может быть выражено формулой:

$$n_{кр} = \pi^2 K_T \cdot \frac{1}{\psi^2} = \frac{\pi^2 \cdot 4m}{(1 + \sqrt{m})^2} \cdot \frac{1}{\psi^2}. \quad (60)$$

Из рассмотрения фиг. 28—31 заключаем, что отпорность (несущая способность) стержня при его выпучивании остается постоянной (на графиках имеем горизонтальные площадки), пока не появятся остающиеся деформации, после чего отпорность начинает падать.

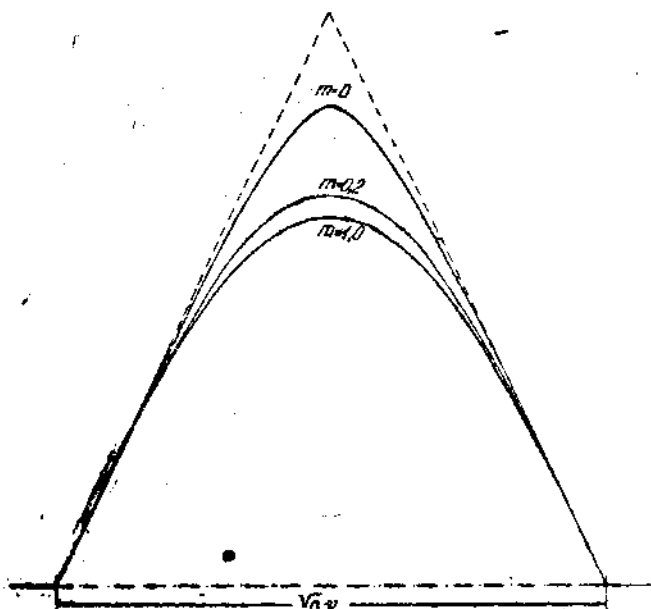
Пунктиром на фиг. 28—31 показана кривая зависимости между упругой стрелкой искривления и средним напряжением стержня, при которых в

вогнутом волокне опасного сечения напряжение равно пределу пропорциональности σ_p .

§ 12. Форма кривой неупругого продольного изгиба, угловые деформации и сближение концов сжатого стержня

Как показал еще Л. Эйлер, кривая искривления стержня при упругом продольном изгибе имеет форму полуволны синусоиды, и в случае наличия эксцентриситета сжимающей нагрузки — форму части полуволны синусоиды.

На фиг. 32 показаны три формы искривления при продольном изгибе аксиально сжатого стержня для материалов со значениями $m = \frac{E'}{E} = 1,0$; $m = 0,2$ и $m = 0$.



Фиг. 32.

Кривые эти построены по методике § 10 для значения $\eta_0' = 2,1$, причем, для сравнения формы искривления при сохранении численных соотношений между ординатами η и абсциссами u этих кривых, все три кривые (благодаря изменению масштаба), совмещены своими концами.

Первая кривая $m = 1,0$ (полуволна синусоиды) соответствует упругому продольному изгибу.

Для второй кривой $m = \frac{E'}{E} = 0,2$ * неупругие деформации распространяются на 77%, а для третьей кривой $m = 0$ (идеально упруго-пластический материал Прандтля) на 68,6% длины стержня.

В показанном на фиг. 32 случае ($\eta_0' = 2,1$) стрелка искривления кривой $m = 0,2$ составляет 106% и кривой $m = 0$ составляет 132% от стрелки искривления по полуволне синусоиды.

Для значений η_0' , больших 2,1, вторая и третья кривая должны еще заостриться, причем третья кривая ($m = 0$) приближается в пределе к изломанному углу из двух прямых (см. пунктир на фиг. 32).

Составим формулы зависимости между деформациями для двух предельных случаев: 1) полуволны синусоиды и 2) двух прямых.

Обозначим угол поворота конца стержня φ_0 , стрелку искривления f , сближение концов стержня, вызванное искривлением, δ_0 , длину свободного опертого концами стержня — l .

* Табличка вычисления координат u и η этой кривой приведена в § 10.

Тогда для случая искривления стержня по полуволне синусоиды

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = \pi \frac{f}{l}; \quad (61)$$

$$\delta_b = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{f^2}{l} = 2,47 \frac{f^2}{l}. \quad (62)$$

Для случая формы искривления в виде изломанного угла из двух прямых:

$$(\varphi_0)_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = 2 \frac{f}{l}; \quad (63)$$

$$(\delta_b)_1 = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = 2 \frac{f^2}{l}. \quad (64)$$

При одинаковых для обоих случаев значениях стрелки и пролета f и l :

$$(\varphi_0)_1 = 0,637 \varphi_0; \quad (\delta_b)_1 = 0,81 \delta_b. \quad (65)$$

Из рассмотрения фиг. 32 приходим к заключению, что для материалов с характеристикой $m \geq 0$ можно в большинстве случаев форму кривой искривления считать упрощенно по полуволне синусоиды. Ниже в конце § 15 мы покажем, что погрешность от такого допущения в суждении о степени устойчивости центрально и эксцентрично сжатых стержней даже для $m = 0$ не превышает 2%.¹

При более точном определении величины сближения концов стержня нужно учесть не только влияние искривления стержня, но также укорочение оси его от сжатия δ_d :

$$\delta_d = \frac{1}{2} \int_0^l (\varepsilon_e + \varepsilon_i) dx. \quad (66)$$

Для случая, когда среднее напряжение меньше предела пропорциональности $\left(\frac{N}{F} < \sigma_p \right)$, а крайнее напряжение вогнутого волокна больше этого предела (случай § 7), пользуясь формулами (7), (7'), (21)–(24) и (16), а также графиками фиг. 12 и 13, получим:

$$\delta_d = \frac{\sigma_p}{E} \int_0^l \left[1 - (1 - n) \cdot \frac{2\theta - 1}{K_p} \right] dx. \quad (67)$$

Для случая применимости теории Энгессер-Кармана (§ 8) (когда $\frac{N}{F} > \sigma_p$ и эксцентриситет в процессе деформации растет) укорочение оси δ_d найдем по формуле:

$$\delta_d = \frac{1}{2} \int_0^l (\varepsilon_e + \varepsilon_i) dx = \frac{\sigma_p}{E} \int_0^l \left[1 + \frac{n-1}{m} - \frac{m-1}{4m} \cdot n p \right] dx, \quad (68)$$

которую можно получить из формул § 8 после ряда преобразований.

При практическом определении интегралов (67) и (68) интегрирование следует заменить суммированием; еще лучше применить формулы механических квадратур, например, формулу Симпсона.

¹ См. Тимошенко, Соппротивление материалов, ч. 2 (изд. 1932 г.), § 5, формула (27).

Применяя формулы данного параграфа к графикам фиг. 28—31, нетрудно построить графики изменения отпорности стержня в зависимости от сближения его концов, имеющие существенное значение при решении задачи определения предельной несущей способности шарнирно-стержневой статически-неопределимой системы, загружаемой в узлах.

Глава III

СЖАТО-ИЗОГНУТЫЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ СТЕРЖЕНЬ

§ 13. Падение отпорности эксцентрично сжатого стержня за пределом пропорциональности в зависимости от первоначального эксцентриситета и стрелки искривления стержня

В начале § 10 было указано (см. фиг. 23), что, имея ряд искривленных форм продольного изгиба аксиально сжатого стержня, соответствующих определенным значениям его отпорности, можно их использовать для суждения о величине отпорности эксцентрично сжатых стержней и что для получения формы искривления стержня, сжатого с эксцентриситетом e , достаточно (см. фиг. 33) от полной формы отсечь верхнюю часть $(L - L_1)$.

На фиг. 34 в виде сплошных кривых нанесен ряд форм искривления при продольном изгибе консольного стержня из материала с характеристикой $m = \frac{E'}{E} = 0,2$.

Кривые эти получены путем интегрирования дифференциального уравнения (53) по способу, описанному в § 10, и нанесены на фиг. 34 в координатной системе $[(\eta_L - \eta); u]$. Вверху каждой кривой надписано численное значение η_0 , принятое при интегрировании. Верхние концы кривых соединены пунктирной кривой, дающей связь между η_L и u_L (эта кривая уже была использована на графике фиг. 27 как кривая $m = 0,2$).

Координаты точек искривленных форм $[(\eta_L - \eta); u]$ (в согласии с обозначениями § 10) определяются формулами:

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{n} \cdot v \cdot \frac{x}{L}; \quad (69)$$

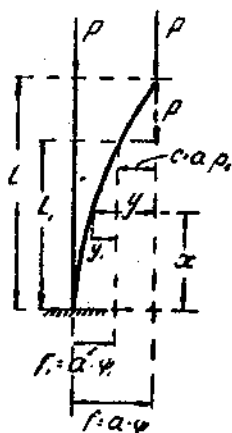
$$\eta_L - \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1-n} \cdot \phi_x, \quad (70)$$

где $v = \sqrt{\frac{\sigma_p}{E}} \cdot \lambda$ — „относительная гибкость“ стержня,

$n = \frac{P}{\sigma_p F}$ — относительное напряжение его отпорности или просто, „относительная отпорность“, а

$\phi_x = \frac{f-y}{a}$ — „относительное смещение искривления“ сечения x стержня (см. фиг. 33), a — полуширина ядра сечения.

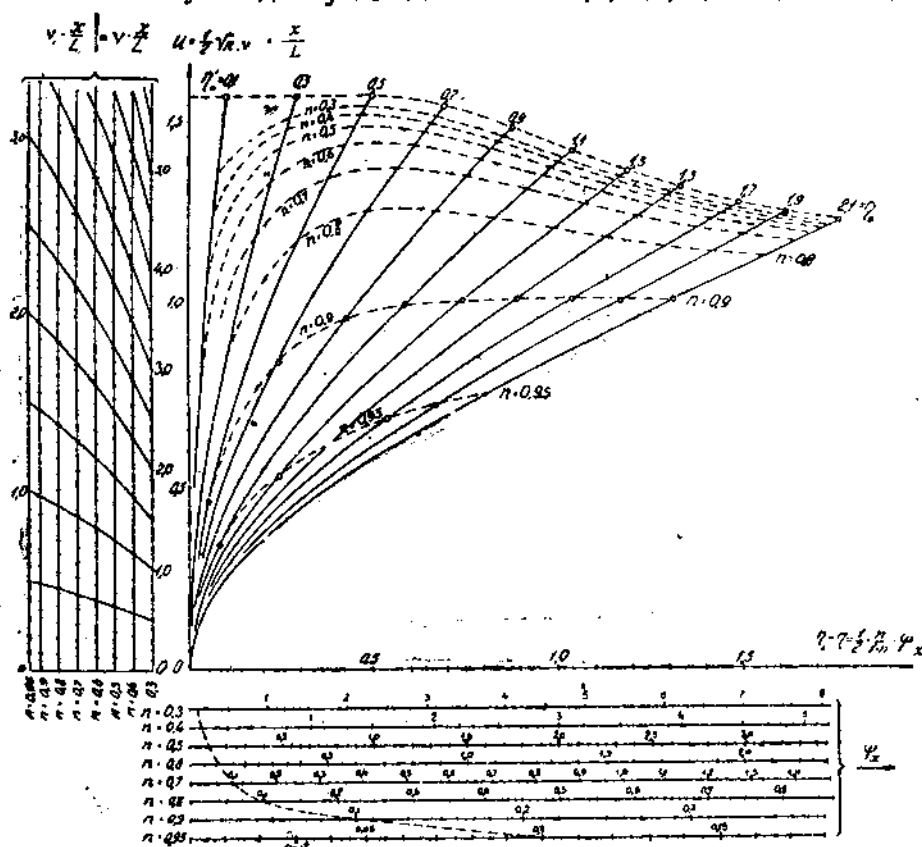
Как видим, для перехода от величин u и $(\eta_L - \eta)$ к величинам $v \cdot \frac{x}{L}$ и ϕ_x нужно исключить „относительную отпорность“ n .



Фиг. 33.

¹ См. Ernst Chwalla, Drei Beiträge zur Frage des Tragvermögens stat. unbest. Stahltragwerke (Int. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen B. II, 1933—1934, Zürich).

Для облегчения такого перехода вдоль осей абсцисс и ординат нанесено по ряду шкал масштабов для величин ψ_x и $\nu \frac{x}{L}$, причем каждая из шкал соответствует одному из значений $n=0,3; 0,4; 0,5; \dots; 0,9$ и $0,95$.¹



Фиг. 34.

Для получения искривленных форм эксцентрично сжатых стержней, соответствующих определенным значениям относительной отпорности n и относительного эксцентриситета $p_c = \frac{c}{a} = \frac{6c}{h}$, нужно от каждой полной кривой искривления (см. Фиг. 34) отсечь верхний кусок, горизонтальная проекция которого будет равна

$$\eta_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1-n} \cdot \frac{c}{a} \quad (71)$$

Читая на вертикальной шкале для данного значения n отсчеты, соответствующие ординатам верхних точек укороченных кривых, последовательно получим для каждой такой кривой величину гибкости $\nu_1 = \nu_1 \cdot \frac{L_1}{L}$,

¹ В качестве примера пользования этими масштабами найдем, какой гибкости ν аксиально сжатого стержня при относительной стрелке искривления его $\psi = p_L = \frac{f}{a} = 0,8$ соответствует относительная отпорность искривленной формы $n = 0,7$. На горизонтальной шкале для $n = 0,7$ находим деление 0,8 и затем поднимаемся по вертикали вверх до пересечения с верхней пунктирной кривой. Соответственно ординате этой точки пересечения находим на вертикальной шкале для $n = 0,7$ искомое значение $\nu = \nu \cdot \frac{L}{L_1} = 3,47$.

соответствующую укороченной длине стержня L_1 . Отметим, что при укорочении стержня с длины L при гибкости ν до длины L_1 и гибкости ν_1 , отношение $\frac{\nu}{L}$ сохраняется:

$$\frac{\nu}{L} = \frac{\nu_1}{L_1}, \quad (72)$$

так как и числитель, и знаменатель отношения изменяются в одинаковое число раз.

На фиг. 34, для примера пунктирными кривыми ограничены сверху искривленные формы, соответствующие начальному относительному эксцентриситету $p_c = \frac{c}{a} = 0,1$ и ряду значений относительной отпорности $n = 0,3; 0,4; 0,5; \dots; 0,9$ и $0,95$, причем возле каждой из таких кривых написано соответствующее численное значение относительной отпорности n . Пунктирные кривые эти получены путем отбрасывания от полных кривых искривления верхних концов, горизонтальные проекции которых (71) равны $\eta_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{1-n} \cdot 0,1$, или просто отрезку с соответствующей данному значению n горизонтальной шкалы ϕ_x по длине равному $0,1$ единицы масштаба этой шкалы.¹ Рассматривая теперь отдельную пунктирную кривую данной относительной отпорности n (например, для $n = 0,8$) вместе со шкалами вертикальных и горизонтальных масштабов для ν_1 и ϕ_1 ,² соответствующих тому же значению n (например, $n = 0,8$), получим зависимость при данных $n = 0,8$ и $p_c = 0,1$ между относительной гибкостью ν_1 и относительной стрелкой искривления $\phi_1 = \frac{f_1}{a}$.

На основании таких зависимостей на фиг. 36 для $p_c = 0,1$, построен ряд кривых для разных значений относительной гибкости ν , причем по оси ординат отложена относительная отпорность n , а по оси абсцисс — относительная стрелка искривления $\phi_1 = \frac{f_1}{a}$.

Совершенно аналогично, после проведения на фиг. 34 другой системы пунктирных кривых, получен график (фиг. 37) для относительного начального эксцентриситета:

$$p_c = \frac{c}{a} = 0,2.$$

Для сравнения на фиг. 35 приведен график из § 11 для $p_c = 0$, т. е. для аксиально сжатых стержней.

Из рассмотрения графиков фиг. 35, 36 и 37 заключаем:

1) что по мере увеличения эксцентриситета p_c отпорность стержня падает;

2) что отпорность стержня — величина переменная, зависящая от стрелки искривления $\frac{f_1}{a}$. Сначала (при малых стрелках) она возрастает, затем достигает максимума и затем, в виду появления остающихся деформаций, начинает уменьшаться. Если при этом сохранить старую нагрузку, то, в виду падения отпорности, стержень неминуемо должен будет разрушиться.

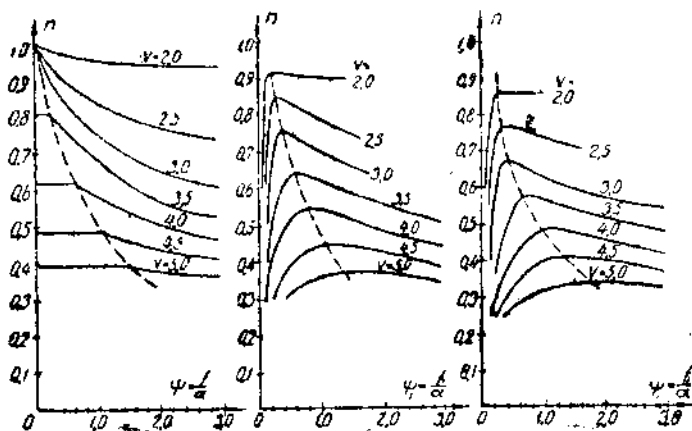
Несущая способность данного стержня в исходном его положении исчерпывается его максимальной отпорностью.

¹ Такие отрезки на шкалах горизонтальных масштабов фиг. 34 отделены от начала шкал пунктирной кривой.

² Действительно, для пунктирных кривых вертикальные масштабы будут давать ν_1 вместо $\nu_1 \frac{x}{L_1}$, а горизонтальные ϕ_1 вместо ϕ_x , так как для данного случая (см. фиг. 33) $x_1 = L_1$.

§ 14. О точном методе проверки устойчивости эксцентрично сжатых стержней

Согласно определению § 2, потеря устойчивости сжато-изогнутого стержня эквивалентна достижению им искривленной формы с предельной несущей способностью (отпорностью).



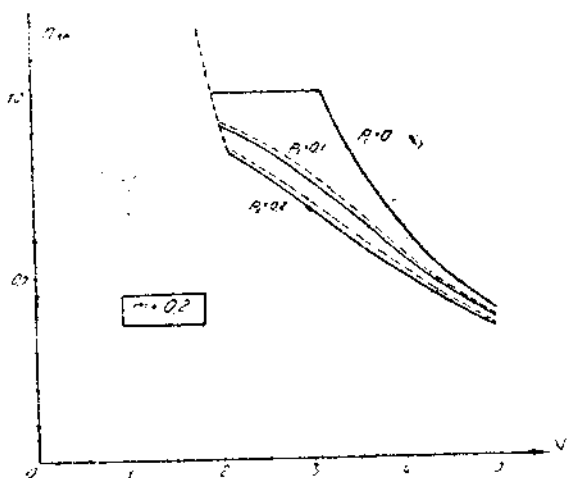
Фиг. 35.

Фиг. 36.

Фиг. 37.

Имея ряд графиков типа фиг. 35, 36 и 37 для разных значений $p_c = 0; 0,1; 0,2; 0,3$ и т. д., соединим наивысшие точки отпорности на них пунктирными кривыми и для каждого значения относительной гибкости γ определим соответствующую предельную отпорность $n_{кр}$ при заданном эксцентриситете $p_c = \frac{c}{a}$.

Таким образом, на основании данных фиг. 35, 36, 37, относящихся к материалу с характеристикой $m = 0,2$, построена фиг. 38. По оси абсцисс отложена относительная гибкость γ , по оси ординат — предельная относительная отпорность (критическое относительное напряжение) $n_{кр}$; каждому из значений относительного эксцентриситета $p_c = 0; 0,1; 0,2$ соответствует отдельная



Фиг. 38.

кривая.¹ Указанный точный метод построения кривых критического напряжения $n_{кр}$ по идее довольно прост, но требует довольно обширных предварительных вычислений.

Ниже рассмотрены более простые приближенные приемы.

¹ Пунктиром для сравнения показаны кривые, полученные по приближенному способу § 16. Как видно из графика фиг. 38, приближенный способ дает несколько преувеличенные значения $n_{кр}$ (до $2 - 3\%$).

§ 15. Аналитическое определение критического напряжения для эксцентрично сжатого стержня из идеального упруго-пластического материала ($m=0$)

Приводимое ниже решение дает точные результаты для случая больших начальных эксцентриситетов, когда можно считать, что остающиеся деформации распространяются по всей длине стержня, т. е. когда

$$\frac{N}{F} + \frac{Nc}{W} \geq \sigma_p. \quad (73)$$

Это условие может еще быть выражено формулой¹

$$n \geq \frac{1}{1 + p_c}. \quad (73')$$

Если формула (73) не будет удовлетворена, то решение становится приближенным, причем ошибка в самом невыгодном случае, как это будет показано ниже, не превышает 2,3%.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$EJ \cdot K_T \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(y + c). \quad (44)$$

Для нашего частного случая ($m=0$), выражения коэффициентов K из § 7 значительно упрощаются:

$$K_p = \theta^2; \quad (16)$$

$$K_M = \frac{1}{3 - 2\theta}; \quad (17)$$

$$K_T = \frac{K_p}{K_M} = \theta^2(3 - 2\theta). \quad (20)$$

Помня, кроме того, формулу (25),

$$p = \frac{y + c}{a} = \frac{1 - n}{n} \cdot \frac{1}{K_M} = \frac{1 - n}{n} (3 - 2\theta) \quad (74)$$

и принимая во внимание, что $n = \frac{P}{\sigma_p F}$ — величина постоянная по длине стержня, получим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \frac{d^2 p}{dx^2} = -2a \cdot \frac{1 - n}{n} \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2}. \quad (75)$$

Дифференциальное уравнение (44) после подстановки в него, вместо K_T , $\frac{d^2 y}{dx^2}$ и $(y + c)$, их выражений через θ получит вид

$$\theta^2 \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{P}{2EJ}, \quad (76)$$

где согласно (74)

$$\theta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n}{1 - n} \cdot \frac{y + c}{a}. \quad (77)$$

¹ Формула (73') получается из предшествующей путем замены:

$$P = 1 \cdot h \cdot n \cdot \sigma_p, \quad W = \frac{1 \cdot h^3}{6}; \quad \frac{6c}{h} = \frac{c}{a} = p_c.$$

Принтегрируем уравнение (76). Умножив обе стороны на

$$\frac{2}{\theta^3} \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot dx = \frac{2}{\theta^3} dx,$$

получим

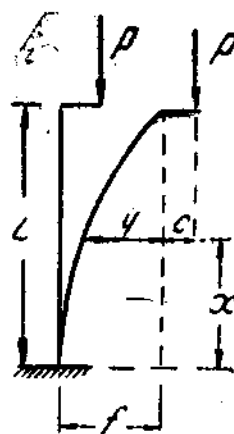
$$2 \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} dx = \frac{P}{EJ} \frac{d\theta}{\theta^3},$$

или

$$d \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \frac{P}{EJ} \cdot d \left(-\frac{1}{\theta} \right).$$

Используя начальные условия (см. фиг. 39), что при $x = 0$:

$$1) \theta = \theta_0, \quad 2) \frac{dy}{dx} = -2a \frac{1-n}{n} \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\theta}{dx} = 0,$$



Фиг. 39.

получаем:

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \frac{P}{EJ} \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta} \right).$$

Продолжаем далее;

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta}}} = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \int_0^x dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\theta_0 \cdot \theta} \cdot \sqrt{\theta - \theta_0} + \sqrt{\theta_0^3} \cdot \ln \frac{\sqrt{\theta} + \sqrt{\theta - \theta_0}}{\sqrt{\theta_0}} = \\ = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot x. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо θ его выражение (77), помня, что $y_0 = f$ и вводя обозначение

$$3a \frac{1-n}{n} = d, \quad (78)$$

получаем уравнение изогнутой оси:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{2d}{3} \right)^3 \cdot \frac{P}{EJ}} \cdot x = \sqrt{(d-c-f)(d-c-y)(f-y)} + \\ + \sqrt{(d-c-f)^3} \ln \frac{\sqrt{d-c-y} + \sqrt{f-y}}{\sqrt{d-c-f}}. \end{aligned} \quad (79)$$

Если будет выполнено условие (73) относительно распространения остающихся деформаций по всей длине стержня, то это уравнение будет точным для всей длины стержня; в противном случае оно будет точным только на участке распространения остающихся деформаций и приближенным для остального участка.

Применим это уравнение к верхнему концу стержня ($x = L$; $y = 0$):

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{2d}{3} \right)^3 \cdot \frac{P}{EJ}} \cdot L = \sqrt{(d-c-f)(d-c) \cdot f} + \\ + \sqrt{(d-c-f)^3} \ln \frac{\sqrt{d-c} + \sqrt{f}}{\sqrt{d-c-f}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Это уравнение дает зависимость между стрелкой искривления f и несущей способностью стержня, характеризуемой величинами P и d [см. (78)]. В момент потери устойчивости достигается максимальное значение силы P ; поэтому для этого момента

$$\frac{dP}{df} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d(d)}{df} = 0. \quad (81)$$

Взяв производные по f от обеих частей уравнения (80) и учитывая (81), получим нижеследующее условие потери устойчивости:

$$0 = \sqrt{d-c} \left[\frac{\sqrt{d-c-f}}{\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{d-c-f}} \right] - \frac{3}{2} \sqrt{d-c-f} \ln \frac{\sqrt{d-c} + \sqrt{f}}{\sqrt{d-c-f}}. \quad (82)$$

Из этого условия нетрудно видеть, что отношение величин $\frac{f}{d-c}$, которое для краткости обозначаем:

$$\frac{f}{d-c} = \xi,$$

должно иметь постоянное значение, определяемое трансцендентным уравнением:

$$\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} = \frac{3}{2} \sqrt{1-\xi} \ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi}}.$$

После ряда преобразований решаем это уравнение и находим корень, соответствующий нашей задаче: $\xi = 0,388$. Таким образом, условие (81) и (82) сводится к

$$f = 0,388(d-c). \quad (83)$$

Подставляя соотношение (83) в уравнение (80), а также сделав замену согласно (57')

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\sqrt{n}}{2L} \nu, \quad (84)$$

получаем окончательную формулу:

$$\nu = 3,07 \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{1-n} p_c \right)^3}, \quad (85)$$

дающую зависимость между критическим относительным напряжением n , относительным начальным эксцентриситетом $p_c = \frac{6e}{h}$ и относительной гибкостью стержня ν .

Как сказано выше, эта формула дает точные результаты, пока будет соблюдено условие (73); в противном случае только приближенные.

Наибольшая ошибка должна получиться при $p_c = 0$; для этого случая формула (85) дает

$$\nu = \frac{3,07}{\sqrt{n}}, \quad (86)$$

в то время как точное решение для этого случая (формула Эйлера) будет:

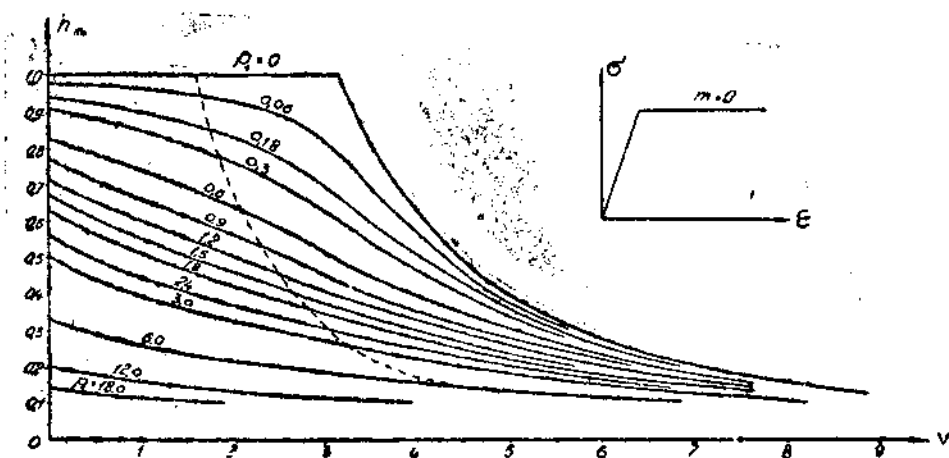
$$\nu = \frac{\pi}{\sqrt{n}} = \frac{3,14}{\sqrt{n}}. \quad (86')$$

Сравнив (86) и (86'), получаем разницу в 2,3%.

По формуле (85) построен график (фиг. 40) для критического относительного напряжения $n_{кр}$ в зависимости от относительной гибкости ν и относительного начального эксцентриситета.

$$p_c = \frac{c}{a} = \frac{6c}{h}.$$

Пунктиром нанесена кривая, ограничивающая область, для которой формула (85) дает точные решения. Для уточнения результатов кривая для $p_c = 0$ построена по формуле (86'), а область графика между этой кривой и пунктирной кривой построена по формуле (85) с заменой в ней коэффициента 3,07 на 3,09 для точек, лежащих в четверти промежутка (по горизонтали) между вышеупомянутыми двумя кривыми, ближе к пунктирной кривой, на 3,11 для точек, лежащих в середине промежутка, и на 3,13 для точек, лежащих в четверти промежутка, ближе к кривой $p_c = 0$.



Фиг. 40.

Таким образом, исправлена погрешность допущения о распространении остающихся деформаций на всю длину стержня к моменту потери устойчивости и достигнута практически „абсолютная“ точность графика (фиг. 40)¹.

§ 16. Проверка устойчивости эксцентрично сжатых стержней из материалов, характеризуемых общим случаем идеализированной диаграммы сжатия.

1-й случай. Среднее напряжение больше предела пропорциональности:

$$\frac{P}{F} > \sigma_p.$$

Если среднее напряжение больше предела пропорциональности и эксцентриситеты давления в сечениях стержня растут, как это бывает при продольном изгибе, то для стержней из материала, характеризуемого идеализированной диаграммой сжатия из двух прямых с постоянной величиной модуля E' , независимо от роста напряжения, модуль продольного изгиба T (см. § 8) имеет постоянное значение

$$T = \frac{4m}{(1 + \sqrt{m})^2} E' \quad (38)$$

¹ Проф. I. Fritsche (Stahlbau, H. 18, 1935) делает упрощающее предположение о форме кривой выпучивания по полуволне синусоиды, поэтому формула (12) у I. Fritsche совпадает с упрощенной формулой (104) нашей работы. (С работой I. Fritsche автор ознакомился после сдачи этой работы в печать).

Дифференциальное уравнение для кривой искривления эксцентрично сжатого стержня (см. фиг. 41):

$$TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot (y + c) \quad (44)$$

интегрируется в этом случае совершенно так же, как и в случае упругой задачи,¹ причем кривая искривления имеет вид дуги синусоиды. В результате интегрирования приходим к выводу, что при отсутствии эксцентриситета критическое значение нагрузки

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 TJ}{l^2}, \quad (3)$$

т. е. что значение критического относительного напряжения (см. § 11)

$$n_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 4m}{(1 + \sqrt{m})^2} \cdot \frac{1}{\nu^2}. \quad (60)$$

Если же эксцентриситет c не равен нулю, то получаем, что в тот момент, когда нагрузка P достигает критического значения $P_{кр}$ [а n — значения $n_{кр}$ по формуле (60)], деформации получают „бесконечно-большие“ значения ($f = \infty$), т. е. стержень становится непригодным для конструкции, в виду недопустимо больших деформаций; такой случай мы условились называть (см. § 2) „потерей устойчивого нарастания деформаций“. С формальной стороны получается для этого случая, что наличие эксцентриситета на величину $n_{кр}$ не влияет.

О проблеме напряжений при таком возрастании деформаций будем говорить дальше в § 17, 18 и 19.

2-й случай. Среднее напряжение $\frac{P}{F}$ меньше предела пропорциональности.

В данном случае точное интегрирование в аналитических функциях дифференциального уравнения кривой искривления эксцентрично сжатого стержня:

$$EJK_T \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(y + c) \quad (44)$$

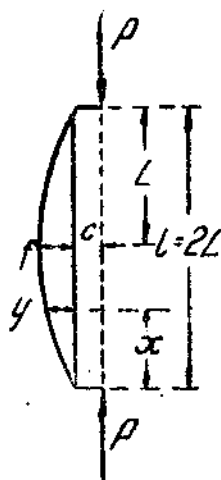
весьма затруднительно, в виду сложности выражений коэффициентов K_T и K_M (см. § 7) при $m \neq 0$. Сделаем допущение, предложенное проф. Рошем (см. § 1), что кривую искривления эксцентрично сжатого стержня можно рассматривать, как полуволну синусоиды:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (87)$$

Ниже мы оценим величину возможной погрешности, соответствующей такому допущению. Допущение это равносильно приближенному интегрированию уравнения (44). Зная форму искривления, легко составить условие равновесия между внутренними и внешними силами в опасном сечении, нарушение которого влечет потерю устойчивости стержня.

Внешний момент (M_a) в опасном сечении (посредине стержня) равен:

$$M_a = P(f + c) = F\sigma_p n a (\psi + p_c). \quad (88)$$



Фиг. 41.

¹ См. Тимошенко, Сопротивление материалов, изд. 1932 г., ч. 1, § 58.

Момент внутренних сил M_i этого же сечения:

$$M_i = -TJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=L} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot f \cdot K_T. \quad (89)$$

Рассмотрим условия возможности роста стрелки искривления f при сохранении величины нагрузки P (см. § 2).

1) Если

$$\frac{d(M_a - M_i)}{df} < 0,$$

то дальнейшее искривление невозможно.

2) Если

$$\frac{d(M_a - M_i)}{df} > 0,$$

то дальнейшее искривление происходит с ускорением, стержень уже потерял устойчивость.

3) Если

$$\frac{d(M_a - M_i)}{df} = 0, \quad (90)$$

то стержень находится в критическом состоянии, состоянии неустойчивого равновесия; достаточно ничтожных добавочных обстоятельств, чтобы стержень потерял устойчивость. Коэффициент K_T формулы (89) равен:

$$K_T = 1 - (1 - m)(1 - \theta)^2(1 + 2\theta). \quad (20)$$

Для определения его надо знать величину θ , которую, в свою очередь, можно найти, зная коэффициент K_ρ . С одной стороны,

$$K_\rho = \theta^2 - m(1 - \theta)^2, \quad (16)$$

а с другой,

$$K_\rho = \frac{\sigma_p}{E} \cdot \frac{1 - n}{3a} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_L}. \quad (25)$$

Решая относительно θ квадратное уравнение (16) и помня, что $\theta > 0$, получаем:

$$\theta = \frac{-m + \sqrt{1 - (1 - m)(1 - K_\rho)}}{1 - m}.$$

Подставляя это значение θ в уравнение (20), имеем:

$$K_T = \frac{1}{(1 - m)^2} \{ 4m(1 + m) + 3(1 - m^2)K_\rho - 2[4m + (1 - m)\ddot{K}_\rho] \sqrt{m + (1 - m)K_\rho} \}. \quad (91)$$

Найдем теперь величину K_ρ ; для этого заменим в (26) величину

$$\left(-\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_L = f \frac{\pi^2}{l^2} = \pi^2 f \left(\frac{l}{l} \right)^2 \cdot \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2 f}{3a^2 \lambda^2}.$$

Помня формулы

$$\lambda^2 \frac{\sigma_p}{E} = \nu^2 \quad \text{и} \quad f = a\psi,$$

¹ Так как согласно (87)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

то при $x = L = \frac{l}{2}$ получим $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=L} = -f \frac{\pi^2}{l^2}.$

получим

$$K_p = \frac{A}{\phi}, \quad (92)$$

где для краткости обозначено:

$$A = \frac{1}{\pi^2} (1 - n) \nu^2. \quad (93)$$

Подставляя в (89) значения K_T и K_p из формул (91) и (92), получим:

$$M_i = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot \frac{a}{(1 - m)^2} \left\{ 4m(1 + m)\phi + 3(1 - m^2)A - \right. \\ \left. - 2[4m\phi + (1 - m)A] \sqrt{m + (1 - m) \frac{A}{\phi}} \right\}. \quad (94)$$

Аналогично для M_a получаем из (88):

$$M_a = \frac{\nu^2 EJ}{l^2} \cdot an(\phi + p_c). \quad (95)$$

Подставив (94) и (95) в формулу (90):

$$\frac{d(M_a - M_i)}{d\phi} = 0,$$

после ряда преобразований получаем уравнение критического состояния в таком виде:

$$\frac{12 - (\zeta^2 - 3)^2}{\zeta} = 4 \frac{1 + m}{\sqrt{m}} - \frac{(1 - m)^2}{\pi^2 \sqrt{m^3}} \cdot \nu^2 \cdot n, \quad (96)$$

где для краткости обозначено:

$$\zeta = \sqrt{1 + \frac{1 - m}{m} \frac{A}{\phi}}. \quad (97)$$

С другой стороны, критическое состояние является состоянием неустойчивого равновесия; поэтому и для него:

$$M_i = M_a. \quad (98)$$

Приравнявая выражение (94) и (95), после ряда преобразований и использования формулы (96) получаем:

$$\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta} = \frac{1 + m}{\sqrt{m}} - \frac{1 - m}{3\sqrt{m}} \frac{n}{1 - n} p_c, \quad (99)$$

где величина ζ имеет значение (97).

Совокупность уравнений (96) и (99) решает задачу, поставленную в заголовке параграфа; при помощи этих уравнений можно построить график критического напряжения $n_{кр}$ по типу графика фиг. 40.

При вычислении координат точек такого графика для заданных относительных значений критического напряжения $n_{кр} = n$ и начального эксцентриситета p_c находим значения соответственных относительных гибкостей ν .

Разберемся на примере. Пусть $m = 0,4$. Найти ν , соответствующее значениям $n_{кр} = 0,6$ и $p_c = 0,3$.

Для $m=0,4$ формулы (96) и (99) приобретают вид:

$$\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta} = 2,212 - 0,317 \frac{n}{1-n} p_c; \quad (99')$$

$$\frac{12 - (\zeta^2 - 3)^2}{\zeta} = 8,87 - 0,144 n \nu^2. \quad (96')$$

Для краткости записи примем обозначения:

$$\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta} = H \text{ и } \frac{12 - (\zeta^2 - 3)^2}{\zeta} = D. \quad (100)$$

Для величины H и D были построены очень точные графики зависимости их от величины ζ (этих графиков тут не приводим).

По формуле (99') и значениям $n=0,6$; $p_c=0,3$ находим:

$$H = 2,212 - 0,317 \cdot \frac{0,6}{1-0,6} \cdot 0,3 = 2,070.$$

По графику для H находим $\zeta=1,300$, по ζ находим $D=7,91$. Затем из формулы (96') получаем

$$\nu = \sqrt{\frac{8,87 - D}{0,144 \cdot n}} = \sqrt{\frac{8,87 - 7,91}{0,144 \cdot 0,6}} = 3,33.$$

Давая n последовательно значения (0,1, 0,2, 0,3, 0,4), сохраняя все те же значения $p_c=0,3$, аналогично находим соответствующие значения ν . Это дает нам возможность построить кривую зависимости $n_{кр}$ от ν при $p_c=0,3$ (см. фиг. 44).

Вышеизложенный прием использован при построении графиков (фиг. 42, 43, 44 и 45) зависимости критического напряжения $n_{кр}$ от гибкости ν и эксцентриситетов p_c для стержней из материалов с характеристиками:

$$m=0,1; 0,2; 0,4; \text{ и } 0,6.$$

Нетрудно видеть из формул (100), что функция H имеет минимум: $H_{min}=2,000$, а функция D — максимум: $D_{max}=8,000$ при одном и том же значении $\zeta=1$. При больших значениях p_c может получиться, что формула (99) [или (99')] даст для функции H значение, меньшее двух или равное двум.

В первом случае величина ζ получится комплексной, и формула (96) не даст для гибкости ν вещественного значения.

Во втором случае величина $\zeta=1$, что может быть [см. (97)] только тогда, когда $\psi = \frac{f}{a} = \infty$; этому случаю будут соответствовать бесконечнобольшие напряжения, в опасном сечении.

Вообще предельное значение для относительного эксцентриситета p_c при данном значении $n_{кр}$, при котором формулы (96) и (99) имеют смысл, получим из (99), приравняв $\zeta=1$; тогда

$$\lim(p_c) = 3 \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} \cdot \frac{1 - n}{n}. \quad (101)$$

Значение гибкости ν , соответствующей этому предельному значению p_c и относительному напряжению n , получим из (96), приравняв $\zeta=1$:

$$\nu^2 = \frac{\pi^2 \cdot 4m}{(1 + \sqrt{m})^2} \cdot \frac{1}{n}. \quad (60')$$

Эта формула в точности совпадает с формулой (60),¹ дающей критическое напряжение для сжатого стержня при $n > 1$. В данном случае $n < 1$, так что предельные точки кривых, полученных на графиках фиг. 42—45 по формулам (96) и (99), ложатся на аналитическое продолжение вниз кривой $n_{кр}$ для $n > 1$.

Приходим к заключению, что для значений p_c больших, чем по формуле (101), величина p_c не влияет на степень устойчивости стержня и что все кривые для разных p_c , начиная со значений n из формулы (101)

$$n \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{1 + \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}} p_c} \quad (102)$$

сливаются в одну кривую, определяемую формулой (60').

В этом заключается интересная особенность свойств идеализированного материала стержней, диаграмма сжатия которого состоит из двух прямых при неизменной величине модуля E' , независимо от величины напряжения.

Если диаграмма сжатия имеет закругленный вид, т. е. если величина E' переменна, то в этом случае (см. § 21) линии для разных p_c не будут сливаться в одну.

Для стержней из материала с постоянным E' получается, что при малых и больших гибкостях эксцентриситет приложения нагрузки имеет меньшие значения, чем для стержней "средней гибкости", для которых влияние на устойчивость эксцентриситетов весьма велико.

Известно, что при составлении норм для коэффициента ϕ продольного изгиба стальных стержней средней длины² вводится обычно специальный коэффициент безопасности,³ учитывающий повышенное влияние возможных эксцентриситетов на устойчивость таких стержней.

Относительная стрелка искривления стержня

$$\phi = \frac{f}{a}$$

в момент потери устойчивости может быть определена по формулам (97) и (93), из которых находим:

$$\phi = \frac{f}{a} = \frac{1-m}{m} \frac{\nu^2}{\pi^2} (1-n) \frac{1}{\zeta^2 - 1} \quad (103)$$

Нетрудно показать на примерах, что, хотя предельным точкам кривых (на графиках фиг. 42—45) для различных p_c при переходе их на общую кривую соответствуют "бесконечно-большие" деформации, точкам, лежащим по соседству, ниже предельных, соответствуют вполне конечные деформации.

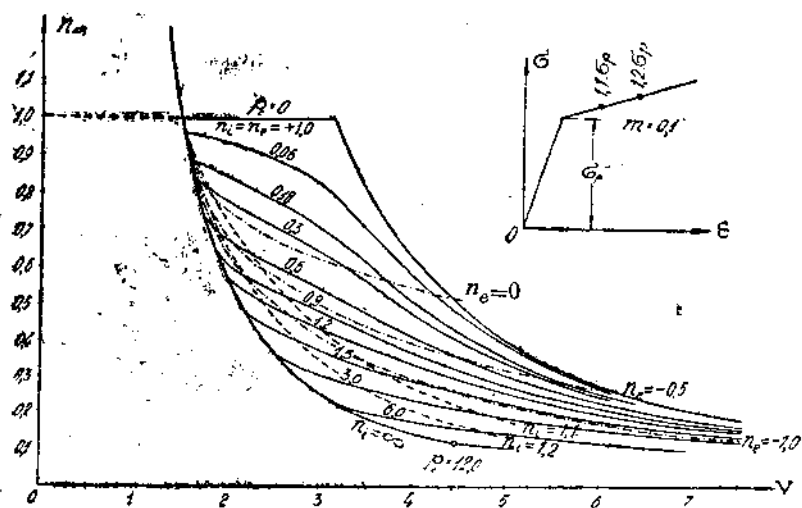
Пример. Пусть $m=0,2$; $p_c=0,6$. Значению $n_{кр}$, лежащему на предельной общей (см. фиг. 43) кривой и равному 0,657, соответствует значение $\phi = \infty$.

Уменьшим $n_{кр}$ на 1% до значения $n_{кр}=0,65$; разыщем значение ϕ при том же $p_c=0,6$. По графику (фиг. 43) находим для этого случая $\nu=2,42$, вычисляем функцию H по формуле (99):

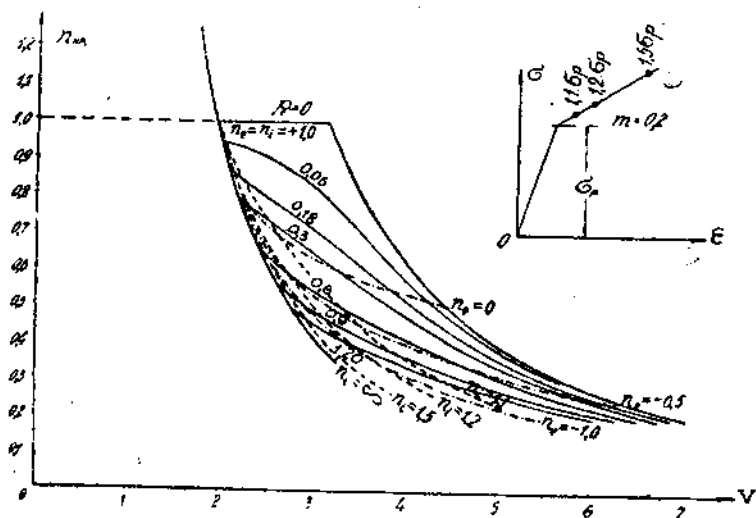
$$H = \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta} = \frac{1,2}{\sqrt{0,2}} - \frac{0,8}{3\sqrt{0,2}} \cdot \frac{0,65}{0,35} \cdot 0,6 = 2,015,$$

¹ См. § 11 и начало § 16.

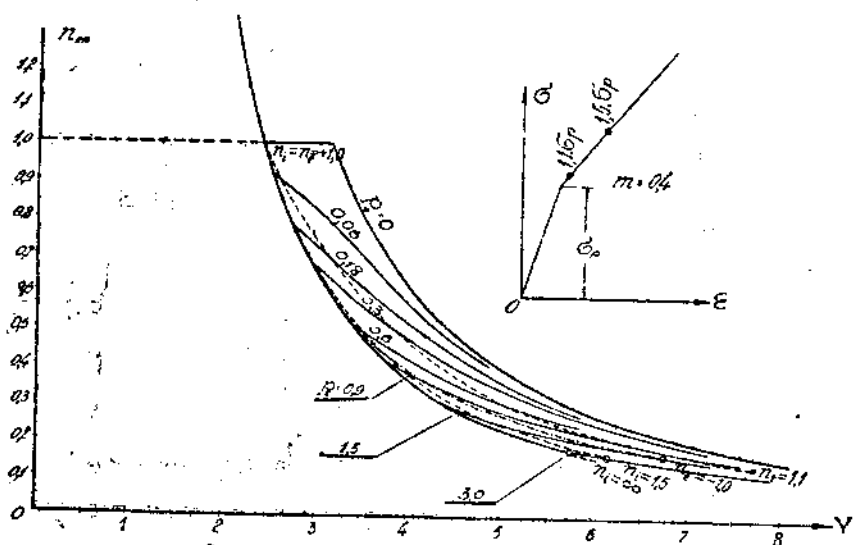
² Нормы НКПС, немецкие нормы. См., например, проф. Н. С. Стрелецкий, Курс мостов Металлич. мосты, изд. 1931 г., ч. I, стр. 250 (фиг. 216, нормы НКПС 1930 г.).



Фиг. 42.



Фиг. 43.



Фиг. 44.

откуда получаем значение $\zeta=1,15$. Затем по формуле (103) находим

$$\psi = \frac{f}{a} = \frac{0,8}{0,2} \cdot \frac{2,42^2}{3,14^2} \cdot 0,35 \frac{1}{1,15^2 - 1} = 2,58.$$

Итак, стрелка искривления в этом случае

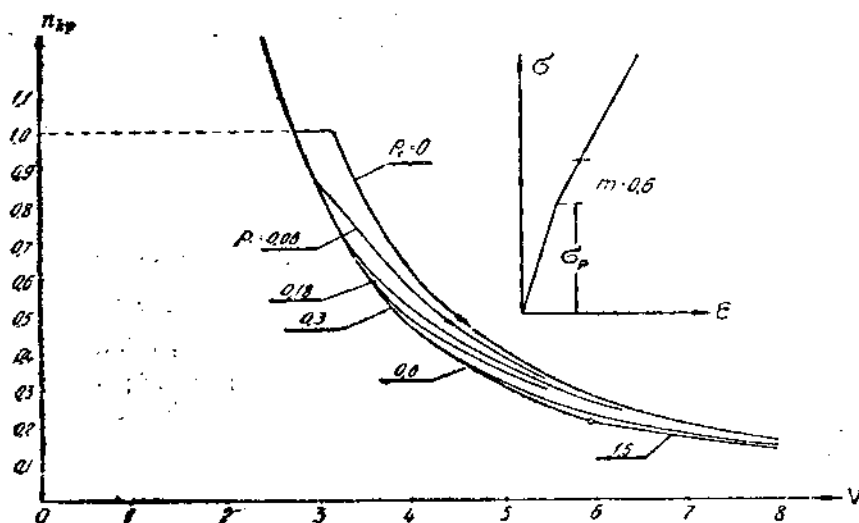
$$f = 2,58a = 2,58 \frac{h}{6} = 0,43h,$$

т. е. меньше полувысоты сечения.

Еще уменьшив $n_{кр}$ до $n_{кр}=0,6$, при том же $p_c=0,6$, аналогично предыдущему получаем:

$$f = 0,166h,$$

т. е. меньше $a = \frac{h}{6}$, полуширины ядра сечения.



Фиг. 45.

Напряжение в крайних волокнах опасного сечения в момент потери устойчивости можно определить следующим образом. Формула (92) дает

$$K_p = \frac{A}{\psi}; \quad (92)$$

подставив в нее вместо A и ψ их значения из формул (93), и (103), после упрощений получим:

$$K_p = \frac{m}{1-m} \cdot (\zeta^2 - 1). \quad (103a)$$

Определив численное значение K_p , по графикам § 7 (фиг. 12 и 13), находим соответствующие значения K_t и K_e , после чего напряжение в крайних волокнах опасного сечения легко определить, пользуясь формулами:

$$n_e = 1 - \frac{1-n}{K_e} \quad (21)$$

$$n_t = 1 + \frac{1-n}{K_t}. \quad (23)$$

Пример. Продолжим численный пример, помещенный после формулы (103). Дано $m=0,2$; $p_c=0,6$.

1. Если $n_{кр}=0,657$, то: $\nu=2,40$; $\psi=\infty$; $\zeta=1$ и тогда

$$K_p = 0.$$

После чего из графиков фиг. 12 и 13 получаем:

$$K_e = 0; \quad K_i = 0.$$

Т. е.

$$n_e = -\infty \text{ (растяжение)}$$

$$n_i = +\infty \text{ (сжатие)}.$$

2. Если $n_{кр}=0,65$, то $\nu=2,42$; $\psi=2,58$; $\zeta=1,15$ и тогда по формуле (103а) получаем:

$$K_p = \frac{0,2}{0,8} (1,15^2 - 1) = 0,0806.$$

После чего по графикам фиг. 12 и 13 находим:

$$\theta = 0,391; \quad K_i = 0,325; \quad K_e = 0,100;$$

откуда:

$$n_e = 1 - \frac{0,35}{0,100} = -2,50$$

$$n_i = 1 + \frac{0,35}{0,325} = 2,07.$$

3. Если $n_{кр}=0,6$, то $\nu=2,64$, и тогда аналогично предыдущему находим:

$$n_e = -0,60; \quad n_i = 1,24.$$

На графиках (фиг. 42, 43 и 44) пунктирными линиями нанесены кривые¹ для $n_i=1,1$; 1,2 и 1,5, а штрих-пунктирными — для $n_e=0$; $-0,5$ и $-1,0$. Пользуясь этими кривыми, легко определить величину напряжений n_e и n_i в крайних волокнах опасного сечения, возникающих в момент потери устойчивости.

Рассматривая эти графики (особенно фиг. 43), мы видим, что кривые для $n_e = +1,0$ и $n_e = +1,0$ совпадают с горизонталью $n_{кр} = +1,0$, кривые же для $n_e = +\infty$ и $n_e = -\infty$ совпадают с нижней оберткой диаграммы [построенной по формуле (60)].

Кривые для промежуточных значений $n_i=1,1$; 1,2 и 1,5 располагаются внизу вблизи от нижней обертки, причем кривая для $n_i=1,5$ почти совпадает с кривой $n_i=\infty$.

Кривая для $n_e=0$ начинается на кривой Эйлера в точке, ордината которой $n_{кр}=0,5$, и сливается с нижней оберткой при $n_{кр}=1,0$.

Кривые для отрицательных $n_e=-0,5$ и $-1,0$ проходят еще ниже, каждая из них начинается на кривой Эйлера в точке с ординатой: $n_{кр}=0,5(1+n_e)$ и заканчивается на обертке в точке, ордината которой $n_{кр}=1,0$.

¹ Покажем для примера, как на фиг. 44 ($m=0,4$) была построена кривая $n_i=1,1$. Для ряда численных значений вспомогательной величины $\zeta=1; 1,1; 1,2; 1,3$ и т. д. были вычислены по формуле (100) величины D и по формуле (103а) величины K_p . По графикам фиг. 12 и 13 были найдены соответствующие этим K_p величины K_e . Затем по формуле (см. (23)):

$$n_{кр} = 1 - (n_i - 1) K_i = 1 - 0,1 \cdot K_i$$

были определены ординаты точек кривой $n_i=1,1$; абсциссы же были подсчитаны по формуле [см. пример после формулы (100)]

$$\nu = \sqrt{\frac{8,87 - D}{0,144 \cdot n_{кр}}}$$

Кривые эти для n_i и n_e имеют важное практическое значение. Может случиться, что действительная диаграмма сжатия — растяжения данного материала может быть идеализирована лишь в определенных пределах, например, для напряжений от $\sigma = -1\sigma_p$ до $\sigma = +1,2\sigma_p$.

Тогда на графиках (фиг. 42—44) можно пользоваться лишь частью, лежащей выше кривых $n_e = -1,0$ и $n_i = 1,2$.

Аналогичные случаи могут иметь место и для хрупких материалов, разрушение которых наступает внезапно, как только появляются напряжения определенной величины. Таким образом, графиками (фиг. 42—44) можно пользоваться для проверки устойчивости стержней не только для материалов, идеализированные диаграммы которых простираются до бесконечности по прямым линиям, но и в том случае, когда они имеют ограниченную длину, обрываясь внезапно.

Выясним теперь степень точности результатов данного параграфа. В § 14 приведен график (фиг. 38) для $m=0,2$, дающий зависимость $n_{кр}$ от ν и p_c , причем по точному методу построены две кривых для значения p_c , равных 0,1 и 0,2. Пунктиром на этом графике нанесены такие же кривые, полученные по приближенному методу данного параграфа. Эти кривые проходят выше точных, т. е. приближенный метод дает для $n_{кр}$ несколько преувеличенные значения, причем погрешность в величине $n_{кр}$ достигает 2—3%.

Другую проверку сможем произвести, используя результат точного интегрирования § 15 для $m=0$ и сравнив его с результатом, который можно получить по приближенной методике данного параграфа.

При $m=0$ знаменатели правых частей формул (96) и (99) обращаются в нули, и формулы теряют смысл. Для устранения этой неясности введем новую переменную t :

$$t = \sqrt{m} \cdot \zeta = \sqrt{m + (1-m) \frac{A}{\phi}}$$

При $m=0$ получим

$$t = \sqrt{\frac{A}{\phi}}$$

Умножив обе стороны формулы (96) на $\sqrt{m}$ и затем приравняв $m=0$ получим:

$$t^2 = \frac{1}{\pi^2} \nu^2 n.$$

Умножив обе стороны формулы (99) на $\sqrt{m}$ и затем приравняв $m=0$, получим:

$$t = 1 - \frac{1}{3} \frac{n}{1-n} p_c.$$

Включая величину t из этих двух формул, имеем:

$$\nu = \pi \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{1-n} p_c \right)^3}. \quad (104)$$

Сравнивая формулу (104), полученную приближенным методом, с точной формулой (для больших эксцентриситетов) из § 15:

$$\nu = 3,07 \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{1-n} p_c \right)^3}, \quad (85)$$

видим, что эти формулы совпадают во всем, кроме коэффициента перед корнем, который разнится всего на 2,3%. В случае малых эксцентриситетов

тетов p_c , как это уже указывалось в § 15, точные результаты еще больше приближаются к приближенному (104).

Для $m=1$ согласно методике данного параграфа, как нетрудно убедиться, нижняя обертка кривых грифика ($n_{кр}-\nu$) сливается с кривой Эйлера, такой же результат дает и точное решение. Итак, при применении методики данного параграфа, ошибка составляет для $m=0$ не свыше 2,3%, для $m=0,2$ — около 2—3%, для $m=1,0$ — 0%. Следует ожидать, что и для других значений m в интервале между нулем и единицей методика этого параграфа дает достаточно точные для целей практика результаты.

§ 17. Проверка напряжений в крайнем вогнутом волокне эксцентрично сжатого стержня

Для хрупких материалов, разрушение которых при сжатии наступает внезапно, без предварительного падения отпорности, весьма важное значение имеет вопрос о величине напряжений в наиболее опасных точках. Для стержней из таких материалов проблема устойчивости отступает на задний план.

В настоящем параграфе разберем вопрос: при каком относительном среднем напряжении

$$n = \frac{P}{\sigma_p F}$$

для стержня относительной гибкости ν , сжатого с начальным относительным эксцентриситетом p_c , получается в крайнем вогнутом волокне относительное напряжение n_i заданной величины.

Рассмотрим отдельно два случая: случай, когда $n > 1$, т. е. когда среднее напряжение выше предела пропорциональности, и случай, когда $n < 1$.

1-й случай. Среднее напряжение выше предела пропорциональности:

$$\left(\frac{P}{F} \geq \sigma_p \right).$$

Этому случаю соответствуют формулы § 8.

Относительное напряжение n_i в крайнем вогнутом волокне может быть найдено (см. фиг. 41) по формуле:

$$n_i = n \left(1 + \frac{3}{1-\theta} \cdot \frac{c+f}{h} \right). \quad (39')$$

Величина θ зависит только от m :

$$\theta = \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}. \quad (35)$$

Модуль продольного изгиба T имеет постоянное значение:

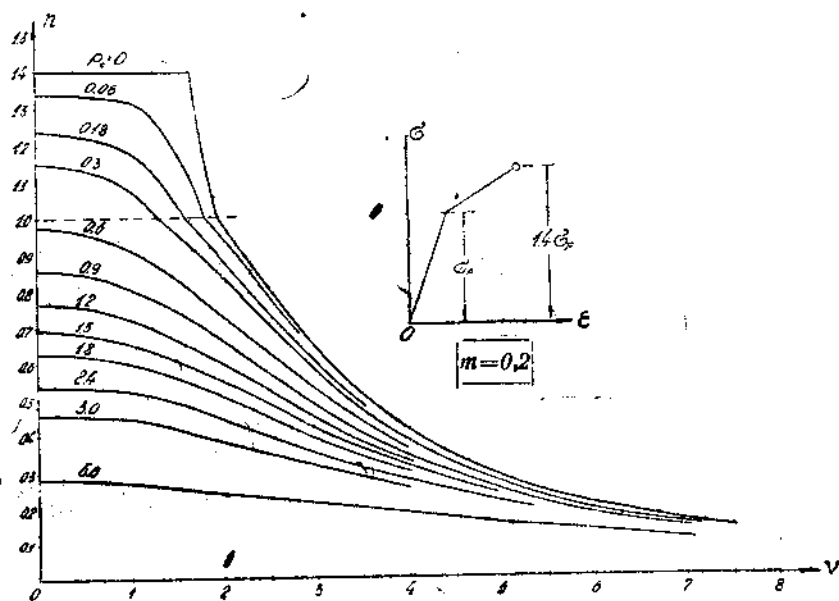
$$T = 4\theta^2 E. \quad (38)$$

Последнее обстоятельство дает возможность решить задачу точно, интегрируя дифференциальное уравнение искривленной оси (44), но так как при $n < 1$, в виду сложности задачи, нам придется применять приближенное решение, мы и тут ограничимся таковым же.¹ Итак, допустим, как

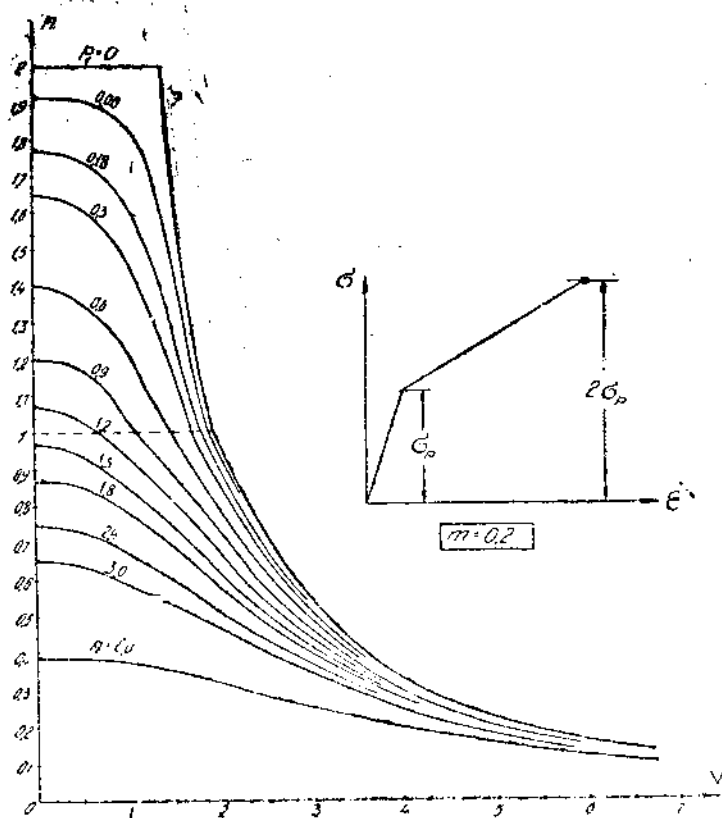
¹ Точное решение даст [сравни с (106)]:

$$\nu = \frac{4\theta}{\sqrt{n}} \cdot \arccos \left(\frac{n}{n_i - n} \cdot \frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{p_c}{2} \right)$$

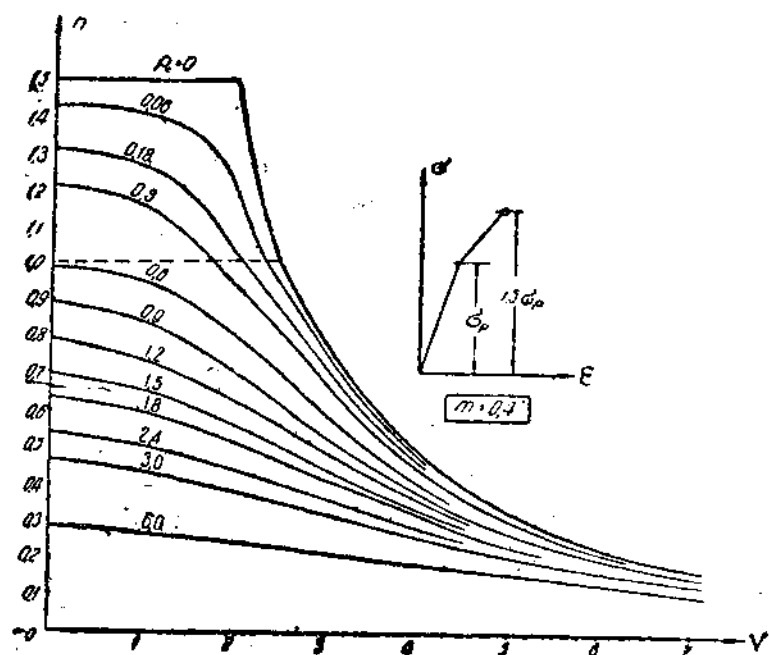
При $p_c=0$ оба решения совпадают.



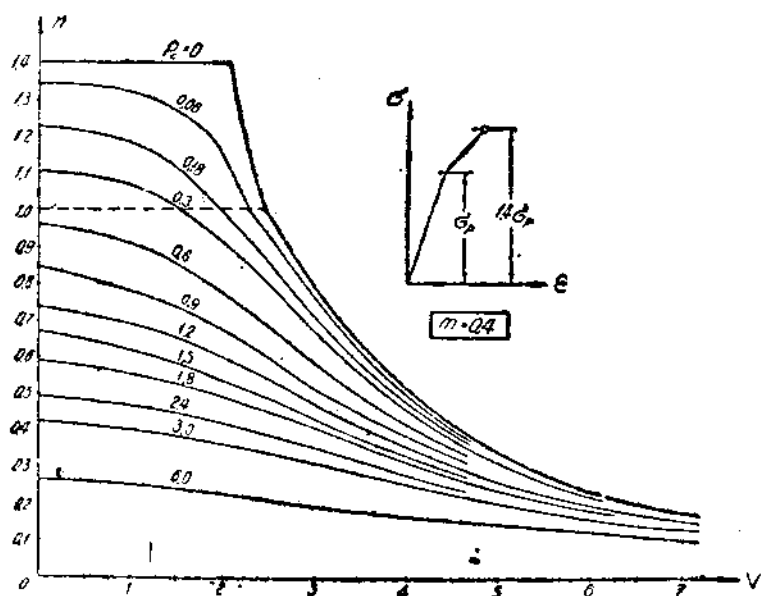
Фиг. 46.



Фиг. 47.



Фиг. 48.



Фиг. 49.

я в § 16, что эксцентрично сжатый стержень изгибается по полувогнутым синусоидам; тогда:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_L = -\frac{\pi^2 f}{l^2} = -\frac{\pi^2 a \psi}{l^2}.$$

Подставим последнее выражение в формулу

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{TJ},$$

а правую часть преобразуем следующим образом:

$$\frac{M}{TJ} = \frac{P(c+f)}{TJ} = \frac{F \sigma_p n a (p_c + \psi)}{4\theta^2 E \cdot F l^2} = \frac{1}{4\theta^2} \cdot \frac{\nu^2}{l^2} \cdot n a (p_c + \psi).$$

В результате после сокращений получим:

$$(p_c + \psi) n \cdot \nu^2 = \psi \cdot 4\pi^2 \theta^2. \quad (105)$$

Заменяя здесь величину ψ ее величиной из (39')

$$\psi = \frac{6f}{h} = 2(1-\theta) \frac{n_1 - n}{n} = p_c,$$

после преобразований получим окончательную формулу для построения графиков:

$$\nu = 2\pi\theta \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1 - n} \cdot \frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{p_c}{2}}. \quad (106)$$

Для стержня из заданного материала известно, что $m = \frac{E'}{E}$, а значит, известно (35) также θ ; зная, кроме того, предельное значение величины n_1 , по формуле (106), легко построить верхние части графиков ($n > 1$) для опасного относительного среднего напряжения n , при котором в стержне с относительной гибкостью ν при наличии начального относительного эксцентриситета p_c в крайней фибре опасного сечения с вогнутой стороны появляются напряжения $\sigma_1 = \sigma_p n_1$ (см. графики фиг. 46—50).

2-й случай. Среднее напряжение ниже предела пропорциональности:

$$\left(\frac{P}{F} \leq \sigma_p \right).$$

Этому случаю соответствуют формулы § 7.

Исходя из этого же допущения о форме кривой искривления эксцентрично сжатого стержня, что и в § 16, получаем (см. фиг. 41):

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$K_p = \frac{1}{\pi^2} (1-n) \nu^2 \frac{1}{\psi}. \quad (92) + (93)$$

Кроме того, по формуле (25) имеем:

$$p_c + \psi = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{1}{K_M}.$$

Исключив из последних двух формул относительную стрелку искривления ϕ , получаем после ряда преобразований, пользуясь формулой (19) $K_p = K_M \cdot K_T$, такой результат:

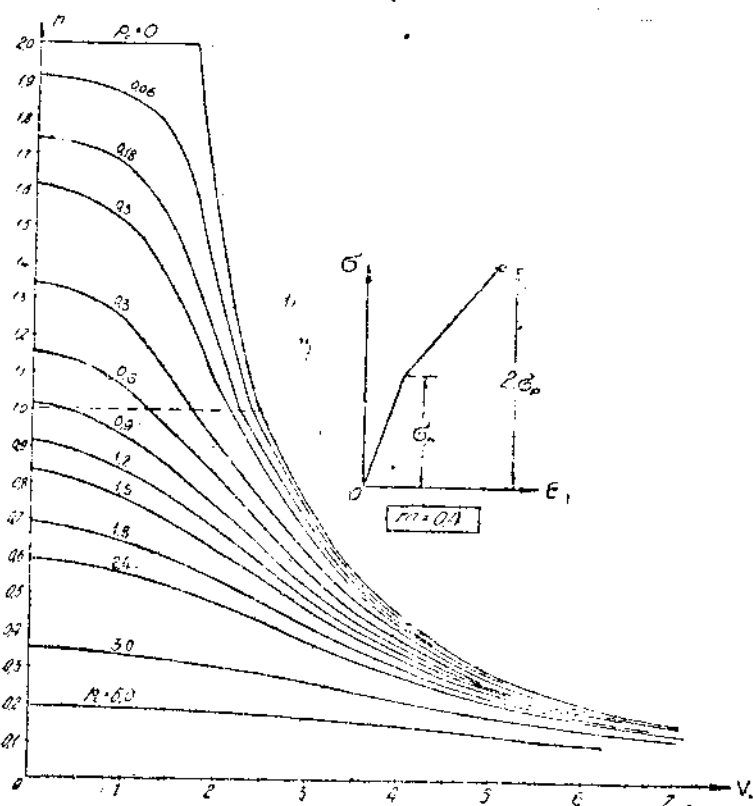
$$\gamma = \pi \sqrt{\frac{K_T}{n} - \frac{p_c}{1-n} K_2}. \quad (107)$$

Эта формула дает зависимость (при $n < 1$) между относительной гибкостью, средним напряжением и начальным эксцентриситетом, если будут известны коэффициенты K_T и K_2 .

Для нахождения этих коэффициентов используем то, что нам в данной задаче задана величина напряжения n_i в опасном сечении (посредине стержня), в крайней вогнутой его фибре.

По формуле (30) имеем:

$$K_i = \frac{1-n}{n_i-1}. \quad (30)$$



Фиг. 50.

Отсюда, зная n_i и задаваясь последовательно для n значениями $n = 0,1, 0,2, 0,3 \dots 0,9, 1$, можем найти соответствующий ряд значений коэффициента K_i . Затем, пользуясь графиками (фиг. 12 и 13), по значению K_i или по значению $\left(\frac{1}{K_i}\right)$, легко находим соответствующие ряды значений коэффициентов K_T и K_2 . После этого по формуле (107) определяем соответствующий ряд значений относительной гибкости γ .

По этому способу построены нижние части ($n \leq 1$) кривых упомянутых выше графиков фиг. 46—50.

Перелом в кривых на высоте $n = 1$ вполне закономерен, так как при $n > 1$ вступает в силу новый фактор: разгрузка выпуклых волокон, происходящая при повышенном модуле (E , а не E'); стержень становится как бы более жестким.

§ 18. Проверка эксцентрично сжатого стержня на появление в крайнем выпуклом волокне больших растягивающих напряжений

Ниже предполагается, что растягивающее напряжение крайнего выпуклого волокна не превышает предела пропорциональности на растяжение.

Задачу настоящего параграфа ставим так: при каком относительном напряжении $n = \frac{P}{\sigma_p F}$, гибкости γ и начальном эксцентриситете p_c в крайнем выпуклом волокне появляется относительное напряжение со значением n_e .

1-й случай. Среднее напряжение выше предела пропорциональности:

$$\frac{P}{F} > \sigma_p.$$

Применяя формулы § 8, имеем:

$$n_e = n \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{p_c + \psi}{\theta} \right). \quad (39'')$$

Отсюда находим ψ — относительную стрелку искривления:

$$\psi = 2\theta \frac{n - n_e}{n} - p_c. \quad (108)$$

Рассуждая затем согласно методике § 17 (первый случай) и подставив это значение ψ в формулу (105), получаем:

$$\gamma = 2\pi\theta \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{2\theta} \cdot \frac{p_c}{n - n_e}}. \quad (109)$$

Величина θ определяется по формуле (35); величина n_e тоже задается, значит, формула (109) дает зависимость между относительной гибкостью γ , начальным эксцентриситетом p_c и опасным напряжением n_e .

2-й случай: Среднее напряжение ниже предела пропорциональности:

$$\frac{P}{F} \leq \sigma_p.$$

В этом случае пользуемся формулой (107) § 17, определяя (по графикам фиг. 12 и 13) коэффициенты K_T и K_γ при помощи коэффициента K_e , который находим по формуле:

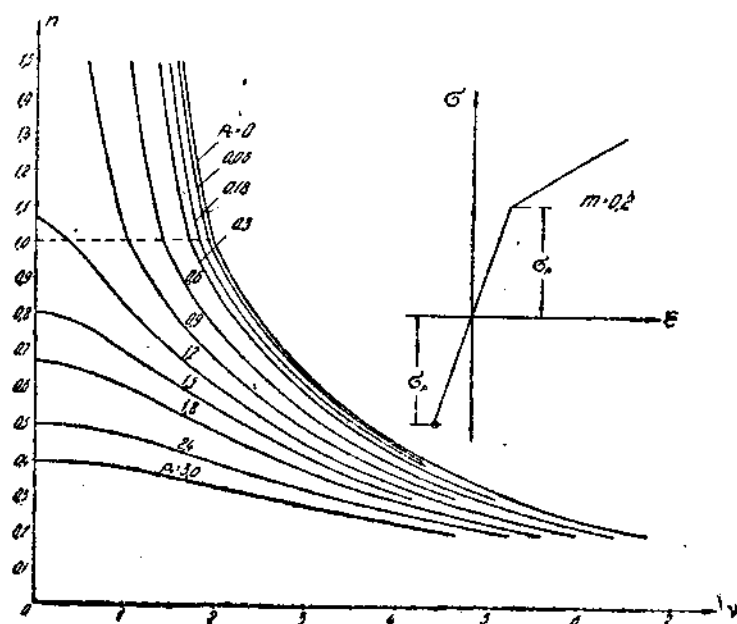
$$K_e = \frac{1 - n}{1 - n_e}. \quad (29)$$

По методу данного параграфа построен график (фиг. 51) для $m = 0,2$ и $n_e = -1$.

§ 19. Проверка эксцентрично сжатого стержня на появление в крайнем выпуклом волокне небольших растягивающих напряжений

Для стержней из материалов, плохо работающих на растяжение (например, каменная кладка на слабом растворе, трамбованная грунтовая стенка и пр.), решающее значение может приобрести появление в крайнем выпуклом волокне растягивающих напряжений даже небольшой величины.

Применение методики предыдущего параграфа, рассчитанной на то, что стержень работает за пределом пропорциональности, в этом случае может дать значительные погрешности. Действительно, пользуясь формулой (29),



Фиг. 51.

при малых отрицательных значениях n_e для K_e обычно получаем значения, большие 0,5,¹ что соответствует работе всего стержня в пределах пропорциональности.

В случае эксцентрично сжатого упругого стержня изгиб происходит, как известно, по дуге синусоиды (см. фиг. 52), имеющей свои узловые точки A и B (концы полуволны) на прямой действия сил P . В настоящем параграфе будем исходить из такой формы кривой искривления (см. фиг. 52), причем допустим, что и за пределом пропорциональности будет иметь место та же форма.

Такое допущение ближе подходит к условиям задачи настоящего параграфа, чем допущение о форме кривой искривления по полуволне синусоиды, принятое в § 16, 17 и 18, где оно оправдывалось заострением кривой искривления, возникавшим, в виду наличия остающихся деформаций, в центральной части стержня и приближавшим форму искривления к полуволне синусоиды.

В случае формы искривления по дуге синусоиды, согласно фиг. 52, имеем:²

$$y = f_0 \sin \frac{\pi x}{l_0}. \quad (87')$$

Соотношение между длиной l действительного стержня и длиной l_0 дополненного найдем, подставив в (87') значения:

$$x = \frac{1}{2} (l_0 - l) \quad \text{и} \quad y = c:$$

¹ Наибольшее значение коэффициента K_e (см. фиг. 12) равно 0,5.

² См. Н. В. Корноухов, Перевірка міцності й стійкості ексцентрично обтяжених ґрунтових стій*, стор. 232 („Збірник пам'яті акад. К. К. Симинського", ВУАН, Київ, 1933).

$$l = \frac{2l_0}{\pi} \arccos \frac{c}{f_0}. \quad (110)$$

Для исключения отсюда величины l_0 используем дифференциальное уравнение кривой искривления: $TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y$, применив его для значения $x = \frac{1}{2} l_0$.

Затем получим:

$$K_T EJ \frac{\pi^2}{l_0^2} = P,$$

что после замены

$$P = F \sigma_p n; \quad J = F i^2; \quad \frac{\sigma_p}{E} \cdot \frac{l^2}{i^2} = \nu^2$$

можно записать так:

$$K_T \frac{\pi^2}{\nu^2} \cdot \frac{l^2}{l_0^2} = n.$$

Найдя величину l_0 и подставив ее в (110), получим:

$$\nu = 2 \sqrt{\frac{K_T}{n}} \arccos \frac{p_c}{p_0}, \quad (111)$$

где

$$p_c = \frac{c}{a}; \quad p_0 = \frac{f_0}{a},$$

а

$$a = \frac{h}{6} \text{ — полуширина ядра сечения.}$$

Если нужно выяснить зависимость между величинами ν , n и p_c , которой соответствует появление в крайнем выпуклом волокне относительного напряжения величиной n_c , то:

1) При $n > 1$ находим по формулам (35) и (38):

$$\theta = \frac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}; \quad K_T = 4\theta^2,$$

а по формуле (108) находим опасную величину p_0 :

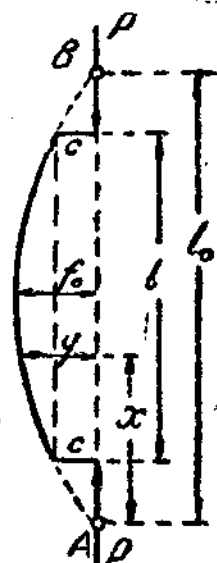
$$p_0 = \phi + p_c = 2\theta \frac{n - n_c}{n},$$

после чего формула (111) приобретает вид:

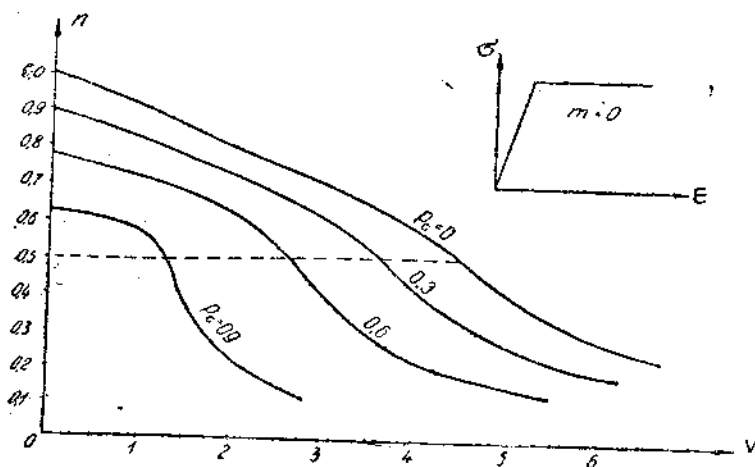
$$\nu = \frac{4\theta}{\sqrt{n}} \arccos \left(\frac{p_c}{2\theta} \cdot \frac{n}{n - n_c} \right). \quad (112)$$

2) При $n < 1$ находим по формуле (29) величину K_e , а затем по графикам фиг. 12 и 13 величины K_T и K_M , после чего определяем по формуле (25):

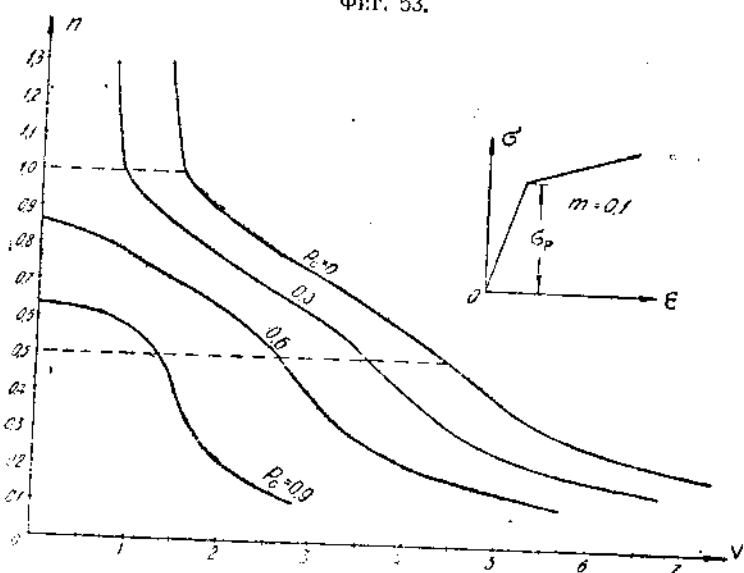
$$p_0 = \frac{1 - n}{n} \cdot \frac{1}{K_M}. \quad (25)$$



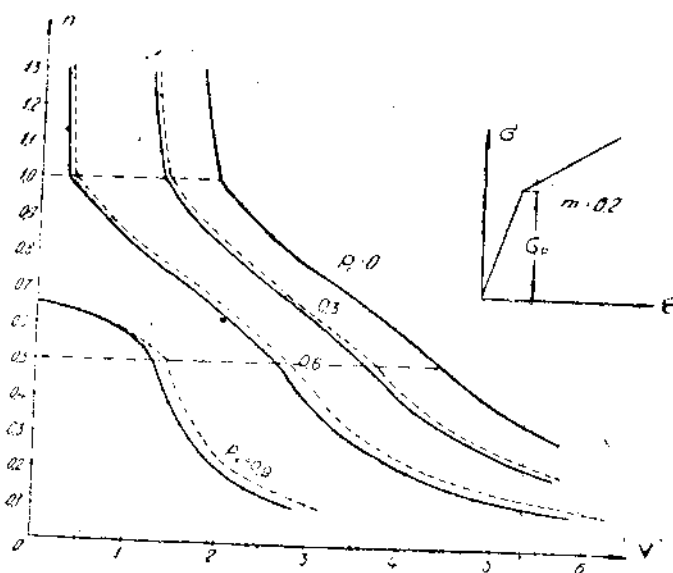
Фиг. 52.



Фиг. 53.



Фиг. 54.



Фиг. 55.

Подставляя эти величины K_T и p_0 в (111), последовательно для разных значений n и p_0 найдем значение γ .

3) Если при $n < 1$ для K_e получится значение, большее 0,5, то весь стержень работает в пределах пропорциональности.

Тогда

$$\sigma_e = \frac{N}{F} \left(1 - \frac{6f_0}{h} \right),$$

или

$$n_e = n(1 - p_0),$$

откуда

$$p_0 = \frac{n - n_e}{n}.$$

Кроме того, $K_T = 1$. Таким образом, формула (111) получит вид:

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{n}} \arccos \left(\frac{p_0 \cdot n}{n - n_e} \right). \quad (113)$$

По методу этого параграфа для $n_e = 0$, т. е. для случая, когда в крайнем выпуклом волокне опасного сечения начинает появляться растяжение, построены графики (фиг. 53, 54, 55, 56 и 57). На фиг. 55 пунктиром нанесены кривые, полученные по методу § 18. Как видим, в данном случае допущение о форме искривления по полуволне синусоиды дает заметную погрешность. Для значений $n < 0,5$ нижние части графиков (фиг. 53—57) совершенно тождественны, так как стержень при этом работает в пределах пропорциональности.

§ 20. Применение результатов предыдущих параграфов к сжато-изогнутому стержню при одновременном действии на него продольных и поперечных сил¹

Покажем, что результаты § 16, 17 и 18 можно практически применять к сжато-изогнутым стержням, если заменить действие поперечной нагрузки таким изменением начального эксцентриситета, при котором в сечении посередине стержня (см. фиг. 41) получалась бы та же величина момента внешних сил, как при наличии поперечной нагрузки.

В самом деле, выводы § 16, 17 и 18 основаны на применении к сечению посередине стержня дифференциального уравнения изогнутой оси:

$$TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(y + c), \quad (a)$$

причем вместо интегрирования сразу применялась форма искривления стержня по полуволне синусоиды:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (b)$$

что для сечения посередине стержня приводило к

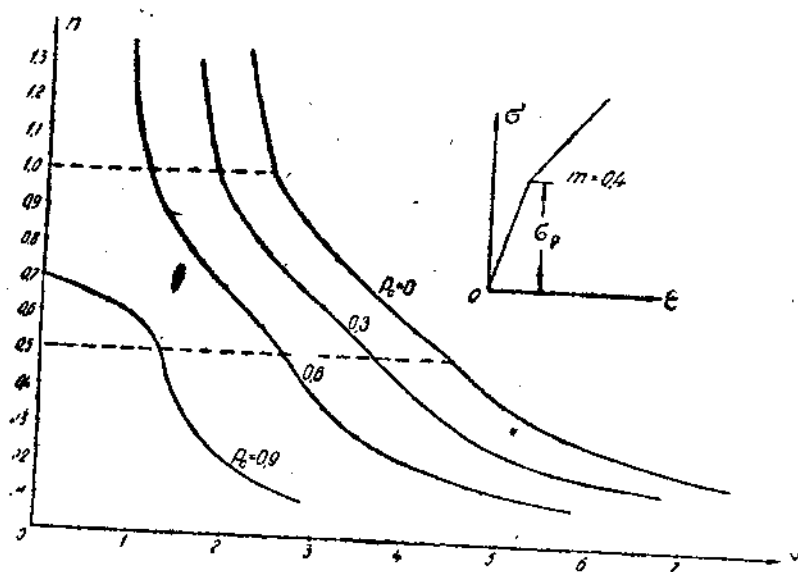
$$TJ \frac{\pi^2}{l^2} f = P(f + c). \quad (c)$$

В случае одновременного действия продольной и поперечной нагрузок имеем дифференциальное уравнение изогнутой оси:

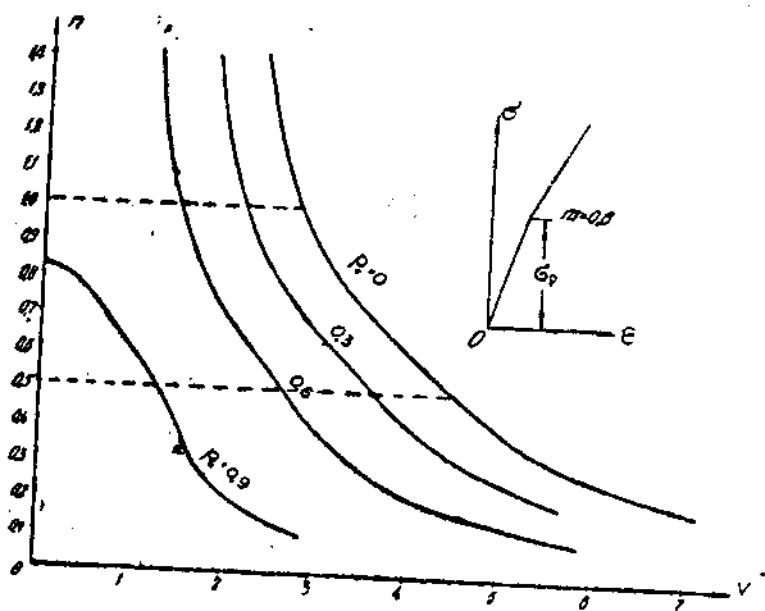
$$TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \left(y + \frac{M^0}{P} \right), \quad (a')$$

где M^0 — момент от поперечной нагрузки, а P — продольная сила.

¹ После сдачи этой работы в печать появилась работа К. Ježek. Die Tragfähigkeit axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe. „Stahlbau“ Н. 2, 8, 5; 1936.



Фиг. 56.



Фиг. 57.

Если допущение (b) о форме кривой искривления применимо для поперечной нагрузки (ниже покажем, что для большинства нагрузок оно не менее допустимо, чем для эксцентрично сжатого стержня, как в § 16, 17 и 18), то из (a') при (b) получаем для середины стержня:

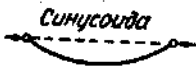
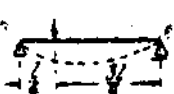
$$TJ \frac{\pi^2}{l^2} f = P \left(f + \frac{M_L^0}{P} \right). \quad (c')$$

Приходим к выводу, что действие поперечной нагрузки может быть практически заменено эквивалентным эксцентриситетом

$$e = \frac{M_L^0}{P}. \quad (114)$$

Эксцентричное сжатие стержня силами P по фиг. 41 может быть заменено действием одновременно 1) центрированного сжатия силами P и 2) чистого изгиба стержня парами $P \cdot e$, приложенными по его концам, дающими по всей длине стержня эпюру моментов в виде прямоугольника.

В нижеследующей таблице (для упругого случая) сравнены формы искривления стержня для разных случаев нагрузок, причем в качестве характеристик сравнения взяты отношения стрелок прогиба в четвертях пролета стержня к прогибу по его середине $\left(\frac{y_{0,25}}{f} \text{ и } \frac{y_{0,75}}{f} \right)$ и кривизна искривления $\frac{d^2 y}{dx^2}$ посередине стержня.

Случай нагрузки	$\frac{1}{f} y_{0,25}$	$\frac{1}{f} y_{0,75}$	Отклонения в % от отношения 0,707 для синусоиды		$-\frac{l^2}{f} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$	Отклонение в % от π^2 для синусоиды
			$\frac{x}{l} = 0,25$	$\frac{x}{l} = 0,75$		
1 	0,707	0,707	—	—	$\pi^2 = 9,87$	—
2 	0,712	0,712	+ 0,6%	+ 0,6%	9,60	— 2,7%
3 	0,687	0,687	— 2,8%	— 2,8%	12,00	+ 21,6%
4 	0,818	0,637	+ 15,7%	— 10%	8,73	— 10,2%
			среднее + 2,85%			
5 	0,875	0,625	+ 23,8%	— 11,6%	8,00	— 18,9%
			среднее + 6,1 %			
6 	0,750	0,750	+ 6,1%	+ 6,1%	8,00	— 18,9%

Из рассмотрения этой таблицы мы видим, что замена форм искривления для случаев 2, 3, 4 и 5 формой случая 1 (полувошной синусоиды) при оперировании с уравнением (а') может быть сделана с неменьшим основанием, чем замена формы 6 (чистого изгиба) формой 1 при оперировании с уравнением (а).

Кроме того, совершенно очевидно, что замена по формуле (114) эпюры моментов для случаев 2 и 3 таблицы (параболы и треугольника с вершинами посредине пролета) прямоугольником с такой же наибольшей ординатой (эпюрой моментов чистого изгиба) является переходом от менее опасного случая к несколько более опасному. Таким образом, если в результате проверки более опасного случая (стержня с эквивалентным эксцентричным нагружением) получаем некоторый коэффициент запаса на прочность и на устойчивость, то для действительного случая нагружения (2 и 3 случая таблицы) этот коэффициент запаса будет несколько выше.

Отметим еще, что при применении приближенного энергетического приема Ритца-Тимошенко для определения прогибов f изогнутой балки замена действительной кривой искривления полувошной синусоиды дает такие относительные ошибки для прогиба f посредине пролета:

Случай таблицы	2	3	5 и 6
Относительная ошибка	+ 0,5%	— 1,5%	— 3%

Таким образом, предложение (114) можно считать практически обоснованным.

Но на графике § 16 (фиг. 42—46) приведены кривые только для малых эксцентриситетов, не превышающих двух-трех высот сечения стержня (p_c не больше $2 \cdot 6 = 12$, или $3 \cdot 6 = 18$). Нижним пределом кривых больших эксцентриситетов является кривая, на которую вливаются кривые для всех значений эксцентриситетов. Эта кривая построена по формуле Эйлера,¹ в которой модуль упругости заменен модулем Энгессер-Кармана [см. (5) или (38)]. Если формула (114) дает большое значение эксцентриситета c , рекомендуется пользоваться этой нижней кривой.

§ 21. Графики критического напряжения для эксцентрично сжатых стержней из материала, характеризуемого криволинейной выпуклой диаграммой сжатия

В § 6 было установлено понятие идеализированной диаграммы сжатия из двух прямых. Для стержней из материала, характеризуемого подобной диаграммой сжатия, в последующих § 7—20 приведены теоретические исследования о прочности и устойчивости для случаев центрированного и эксцентричного сжатия.

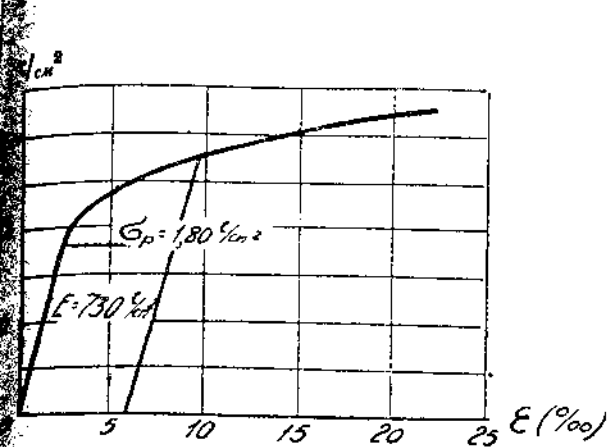
В настоящем параграфе приводятся без вывода графики критического напряжения эксцентрично сжатых стержней из материалов с выпуклой диаграммой сжатия. Графики эти получены на основании допущения проф. Роша о форме кривой изгиба в виде полувошной синусоиды.

На фиг. 58 приведена диаграмма сжатия для легированных металлов, а на фиг. 59 — соответствующий график критического напряжения, заимствованные из работ проф. Роша.² На фиг. 60 приведена диаграмма сжатия

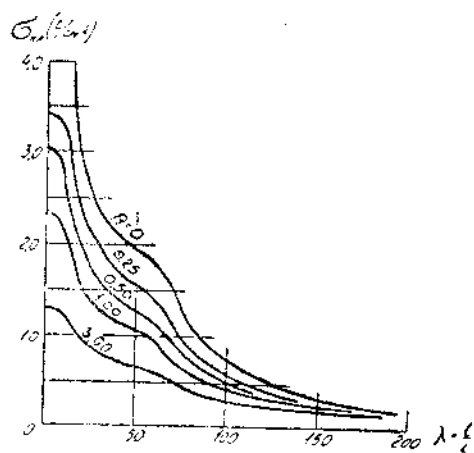
¹ С. П. Тимошенко, Курс сопротивления материалов, изд. 1928 г., § 126.

² $n_{kp} v^2 = \frac{4 \pi^2}{(1 + \sqrt{m})^2}$.

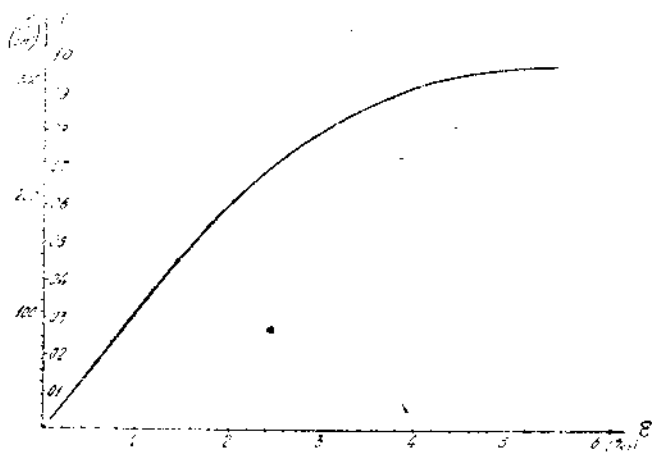
³ H. Roß, La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées, 1932 г., fig. 17 et 19.



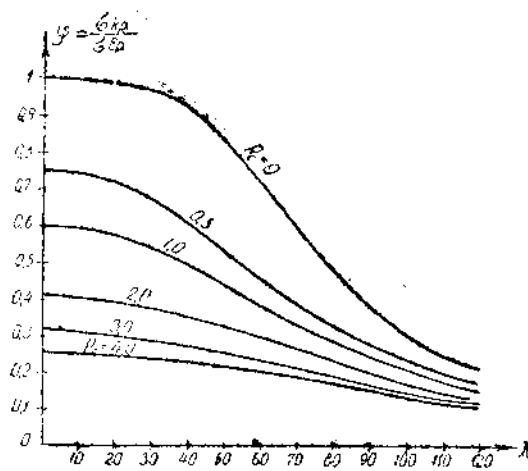
Фиг. 58.



Фиг. 59.



Фиг. 60.



Фиг. 61.

для воздушно-сухой сосны, (см. § 5) а на фиг. 61 — соответствующий график критического напряжения, заимствованные из работ 1935 г. сектора деревянных конструкций ЦНИПС.¹

Различие характеров графиков фиг. 61 и 59 объясняется наличием на диаграмме сжатия фиг. 60 горизонтального участка на высоте временного сопротивления, отсутствующего на диаграмме сжатия фиг. 58. Различие характера графика фиг. 59 и графиков § 16 (фиг. 42—45) объясняется постоянством величины модуля E' для графиков § 16 (вызывающим совпадение кривых разных эксцентриситетов p , при малых гибкостях стержней ν), и непрерывным изменением модуля E' на диаграмме сжатия фиг. 58.

Графики настоящего параграфа могут быть использованы и для других материалов с подобными диаграммами сжатия, для чего необходимо заметить, что при изменении вертикального масштаба (напряжений) на диаграмме сжатия достаточно во столько же раз изменить вертикальный масштаб графика критических напряжений.

Приближенно графики коэффициентов φ для стержней из материалов, имеющих криволинейную диаграмму сжатия можно построить, пользуясь графиками для стержней из идеализированных материалов, как это описано в конце § 6 (см. фиг. 10а).

Глава IV

ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ²

§ 22. Инфлюенты для проверки устойчивости стержня от продольных, расположенных по длине его нагрузок³

Как известно, при продольном изгибе принцип независимости (принцип сложения) действия сил неприменим; в этом случае отсутствует пропорциональность между нагрузкой и деформацией системы. Ниже обойдем эту трудность путем применения двух приближенных, методов, из которых один дает принципиально преувеличенное, а другой принципиально преуменьшенное значение критической системы нагрузок. Истинное же значение должно лежать между этими, довольно близкими, пределами. Применим сначала *энергетический метод* (метод Ритца-Тимошенко, см. § 3). При искривлении стержня в нем накапливается энергия деформации:

$$V_s = \int \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int \frac{EJ}{2} (y'')^2 dx. \quad (115)$$

С искривлением стержня связано опускание отдельных его точек:

$$\delta_x = \int_0^x (ds - dx) = \int_0^x [\sqrt{1 + (y')^2} - 1] dx \cong \frac{1}{2} \int_0^x (y')^2 dx. \quad (116)$$

Потеря потенциальной энергии нагрузки при искривлении стержня

$$V_p = \sum P_i \delta_{x_i}. \quad (117)$$

¹ График фиг. 61 построен в СДК бригадой под руководством инж. Г. В. Свенцицкого и проверен на ряде экспериментов.

² В настоящей работе мы ограничиваемся только примерами проверки устойчивости простейших систем, о проверке устойчивости сложных систем см.:

Н. В. Корноухов, Проверка устойчивости сжато-изогнутых конструкций до и за пределами упругости, ч. II, Арки и рамы. Изд. Ак. Наук УССР. (печатается на укр. языке).

³ См. Н. В. Корноухов, Проверка прочности и устойчивости эксцентрично нагруженных грунтовых стен, „Збірник пам'яті акад. К. К. Симинського“, ВУАН Київ 1933, стр. 225.

Если $V_p < V_s$, то искривление невозможно (см. § 3), если $V_p > V_s$ — искривление происходит с ускорением; если $V_p = V_s$ — имеем критический случай (момент потери устойчивости).

Коэффициент запаса K стержня на устойчивость может быть определен, как отношение:

$$K = \frac{V_s}{V_p}. \quad (118)$$

Неизвестная кривая искривления прямолинейного стержня в момент потери устойчивости может быть определена следующим образом. Зададим ее как некую подходящую кривую, удовлетворяющую граничным условиям, в виде ряда с неопределенными коэффициентами: $A_1, A_2, A_3 \dots$

$$y = f(x, A_1, A_2, A_3 \dots).$$

Чем удачнее будут выбраны эти коэффициенты, тем меньше по формуле (118) получится величина коэффициента запаса, так как ясно, что движение будет происходить по таким искривленным формам, которые представляют наименьшее сопротивление движению.

Коэффициенты $A_1, A_2, A_3 \dots$ могут быть таким образом найдены из условий:

$$\frac{dK}{dA_1} = 0, \quad \frac{dK}{dA_2} = 0, \quad \frac{dK}{dA_3} = 0, \dots$$

Итак, коэффициент запаса на устойчивость определяется по формуле:

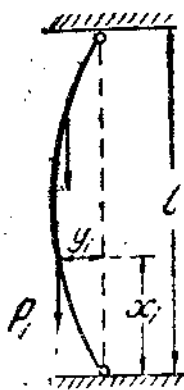
$$K = \frac{\int EJ(y'')^2 dx}{\sum P_x \int_0^x (y')^2 dx}.$$

В случае наличия распределенных по длине стержня нагрузок интенсивностью q_x

$$K = \frac{\int EJ(y'')^2 dx}{\sum P_x \int_0^x (y')^2 dx + \int_0^x q_x \int_0^x (y')^2 dx \cdot dx}.$$

Для случая силы P^0 , сосредоточенной в верхнем конце стержня,

$$K = \frac{1}{P^0} \cdot \frac{\int EJ(y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}. \quad (119)$$



Фиг. 62.

Выходит, что практически можно все нагрузки, имеющиеся на стержне, привести к одной силе P^0 , сосредоточенной в его верхнем конце.

$$P^0 = \sum x_x P_x + \int_0^l x_x q_x dx, \quad (120)$$

где

$$x_x = \frac{\int_0^x (y')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}. \quad (121)$$

Если удачно подобрать возможную кривую искривления с одним только неопределенным параметром

$$y = A\varphi(x), \quad (122)$$

то этот A , попадая и в числитель, и в знаменатель формул (119) и (121), сократится, и тогда можно сказать, что коэффициенты x_x являются постоянными „числами влияния“, на которые нужно множить груз P_x , находящийся в сечении x .

При этом надо отметить, что коэффициент запаса, определенный по формуле (119), дает несколько преувеличенное значение коэффициента K , так как ясно, что в общем случае нагрузок выбранная кривая (122) не является наименее сопротивляющейся движению.

1. Весьма удачным для *стержня шарнирно-закрепленного* двумя концами (см. фиг. 62) видом функции (122) будет уравнение синусоиды:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (122')$$

которое удовлетворяет конечным условиям (при $x = 0$ и при $x = l$ ордината y обращается в нуль) и, кроме того, в точности соответствует случаю нагрузки, сосредоточенной в верхнем конце стержня. Чем ближе к верхнему концу сосредоточены нагрузки, тем точнее будет результат, и наоборот.

В этом случае, как нетрудно видеть,

$$x_x = \frac{\int_0^x \left(\cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(\cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx} = \xi + \frac{\sin 2\pi \xi}{2\pi}, \quad (123)$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

Составим табличку коэффициентов:

ξ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x_x	0	0,1936	0,3513	0,4513	0,4936	0,5000	0,5064	0,5487	0,6487	0,8064	1,000

Данные этой таблицы нанесены на график (фиг. 63) в виде кривой, отмеченной знаком $+$, так как этот график дает преувеличенные значения коэффициента запаса.

$$\int_0^l x dx = 0,5l.$$

Для стержня постоянного сечения по всей длине, вычислив интегралы формулы (119), получим:

$$K = \frac{1}{P^0} \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{P_E}{P^0} = \frac{P_E}{\sum x P + 0,5ql}, \quad (124)$$

где ql — собственный вес стержня.

2. Для консоли, закрепленной нижним концом, можно принять:

$$y = A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Такая кривая изгиба будет иметь место при нагрузке, расположенной в вершине консоли.

Аналогично получаем

$$x_x = \frac{1}{\pi} - \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

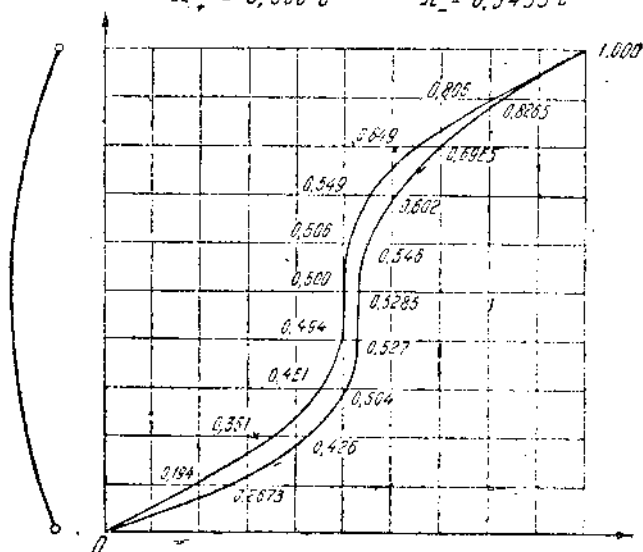
Табличка коэффициентов x :

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
x	0	0,0128	0,097	0,297	0,6128	1,000

$$\int_0^1 x dx = l \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right] = 0,297l \approx 0,3l.$$

$$\Omega_+ = 0,500 l$$

$$\Omega_- = 0,5435 l$$



Фиг. 63.

Коэффициент запаса определяем по формуле:

$$K = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2 (\sum x P + 0,3ql)}. \quad (125)$$

Данные этой таблички нанесены на график (фиг. 65) в виде верхней кривой.

При проверке на устойчивость стержней переменного сечения непосредственно применяем формулу (119).

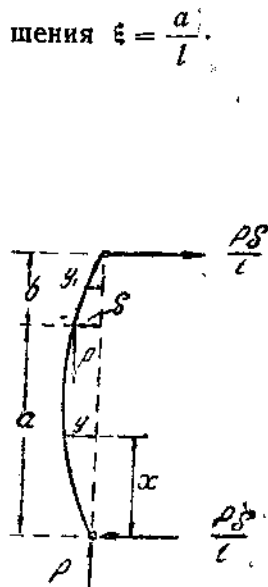
Рассмотренный метод дает несколько преувеличенное значение критической нагрузки. Рассмотрим другой метод, который мы назовем „методом одного груза“. Этот метод дает, наоборот, преуменьшенное значение критической нагрузки. Перейдем к изложению этого метода. Пусть в некоторой точке на расстоянии a по высоте стержня от его основания приложен только один груз P_a . Найдем точное значение коэффициента x_a приведения его к вершине стержня, для чего нужно найти критическое значение силы P_a , умножить на x_a и результат приравнять критическому значению эйлеровой силы

$$(P_a)_{кр} \cdot x_a = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_E.$$

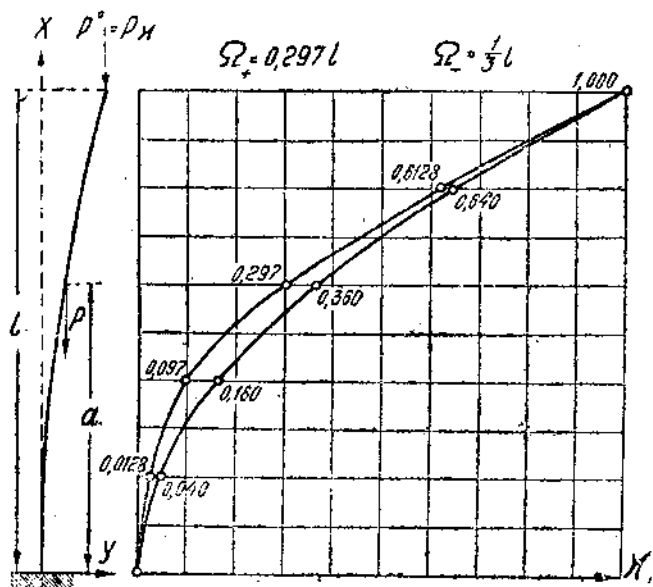
Отсюда

$$x_a = \frac{P_E}{P_a}$$

Потеря устойчивости стержня будет проходить при этом по кривой определенного типа, который вполне характеризуется величиной отношения $\xi = \frac{a}{l}$.



Фиг. 64.



Фиг. 65.

1. **Стержень шарнирно-закрепленный по концам.** Рассмотрим (см. фиг. 64) два участка упругой кривой:

ниже груза:

$$-M_x = \frac{P\delta}{l} - Py;$$

$$EJy'' + Py = \frac{P\delta}{l} x;$$

выше груза:

$$-M_x = \frac{P\delta}{l} x - P\delta;$$

$$EJy'' = \frac{P\delta}{l} x - P\delta.$$

Введя обозначение $\frac{P}{EJ} = \alpha^2$, получаем:

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{\delta}{l} x \quad \left| \quad y'' = \alpha^2 \frac{\delta}{l} x - \alpha^2 \delta.$$

Интегралы этих уравнений будут:

$$y = \frac{\delta}{l} x + C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x;$$

$$y' = \frac{\delta}{l} + C_1 \alpha \cos \alpha x - C_2 \alpha \sin \alpha x;$$

$$y'' = -C_1 \alpha^2 \sin \alpha x - C_2 \alpha^2 \cos \alpha x;$$

$$y = \alpha^2 \frac{\delta}{l} \frac{x^3}{6} - \alpha^2 \delta \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4;$$

$$y' = \alpha^2 \frac{\delta}{l} \frac{x^2}{2} - \alpha^2 \delta x + C_5.$$

Условиями для определения независимых интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 являются: 1) равенство в точке приложения груза (при $x = a$):

$$y_a = y_a = \delta; \quad y'_a = y'_a$$

(последние определены для верхнего и нижнего участков стержня) и 2) равенство нулю прогибов y по концам стержня (для $x = 0$ и для $x = l$):

$$y_0 = 0; \quad y_l = 0.$$

Реализуя эти условия, находим пять несложных соотношений между C_1, C_2, C_3, C_4 и δ .

Исключая затем эти величины из указанных соотношений, приходим к условию, что они не равны нулю только в случае, если¹

$$\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{b}\right) + \frac{b}{l} \alpha \operatorname{ctg} \alpha a = \frac{\alpha^2}{3l} b^2. \quad (a)$$

Значит, для того, чтобы искривление стало возможным, между величинами $a, b = l - a$ и α должна существовать зависимость (a). Введя дополнительные обозначения:

$$\alpha a = v \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = m,$$

приводим уравнение (a) к такому виду:

$$\operatorname{ctg} v = \frac{mv}{3} - \frac{2m+1}{m} \cdot \frac{1}{mv}. \quad (a')$$

Решая это трансцендентное уравнение и ограничиваясь первой формой кривой искривления, в результате получаем такую табличку:

$\frac{a}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{b}{l}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$v^2 = \alpha^2 a^2 = \frac{P_a}{EJ} a^2$		0,359	0,928	1,760	2,995	4,667	6,598	8,035	9,075	9,671	
$\chi_a = \frac{P_a}{P_E} = \frac{\pi^2 a^2}{v^2 l^2}$	0	0,267	0,426	0,504	0,527	0,5285	0,516	0,602	0,6965	0,8265	1,00

Значения коэффициентов χ нанесены на графике фиг. 63 в виде кривой, отмеченной знаком —.

Эта таблица и график дают совершенно точные значения коэффициента приведения χ_a , если на стержень действует только одна сила P_a .

Если же на стержень будут действовать, например, две силы P_1 и P_2 , то сумма:

$$P_1 \cdot \chi_1 + P_2 \cdot \chi_2 > P^0$$

будет всегда принципиально больше P^0 , силы приложенной в вершине и дающей такую же степень запаса, как и две силы P_1 и P_2 .

Действительно, кривая отклонения стержня при наличии двух сил будет иной, чем при наличии только одной силы P_1 или только силы P_2 . Кривая при наличии двух сил не была бы самой невыгодной, самой опасной для случая наличия одной силы; при расчете по такой кривой мы получили бы в таком случае преувеличенный коэффициент запаса и преуменьшенное значение коэффициента χ .

Наоборот, предполагая при одновременном наличии двух сил, что коэффициенты χ для каждой из них имеют то же значение, как и в том случае, когда на стержень действовала бы только одна эта сила, мы для каждой силы допускаем самый большой возможный для нее коэффициент χ .

Таким образом, всегда

$$P_1 \chi_1 + P_2 \chi_2 > P^0.$$

¹ Детерминант системы равен нулю.

Аналогично рассуждая для случая нескольких сил, приходим к выводу, что, пользуясь теперь формулой

$$P^0 = \sum P \cdot x + \int_0^l qx \, dx, \quad (120)$$

мы по ней находим несколько преувеличенное значение силы P^0 , чему соответствует преуменьшенное значение коэффициента запаса устойчивости.

$$K = \frac{P_E}{P^0} = \frac{P_E}{\sum P x + \int_0^l qx \, dx}. \quad (126)$$

Если мы при подборе сечения стержня будем исходить из этой формулы, беря коэффициенты x по этому способу, то мы подберем сечение с запасом, в противоположность расчету по методу энергии, когда сечение вышло бы подобранным с запасом, ниже допускаемого.

Для нашего случая стержня постоянного сечения с двумя шарнирно закрепленными концами

$$\int_0^l x \, dx = 0,54347l \approx 0,54 \, l.$$

Формула (126) может быть переписанной в виде:

$$K = \frac{\pi^2 EJ}{P(\sum P x + 0,54ql)}. \quad (127)$$

2. Для консоли, закрепленной одним концом, с другим свободным

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}; \quad (P_a)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4a^2};$$

значит,

$$x_a = \frac{P_E}{P_a} = \left(\frac{a}{l}\right)^2, \quad (128)$$

а интеграл

$$\int_0^l x \, dx = \frac{1}{3} l.$$

Формула для коэффициента запаса:

$$K = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2 \left[\sum P_a \left(\frac{a}{l}\right)^2 + \frac{1}{3} ql \right]}. \quad (129)$$

Практические выводы из § 22

1. Вся нагрузка стержня приводится при помощи коэффициентов x к одному эквивалентному грузу P^0 , прилагаемому к верхнему концу стержня. Графики фиг. 63 и 64 являются как бы инфлюентами продольного изгиба. Истинное значение коэффициентов приведения x лежит в „щелочке“ между двумя кривыми на этих графиках.

2. Вывод коэффициентов x сделан для случая идеально упругого призматического стержня. Для стержней переменного сечения кривые максимальных значений коэффициентов x графика фиг. 63 и 64 становятся приближительными, кривые минимальных значений не меняются, поскольку остается возможным допущение о синусоидальной форме искривления стержня.

Числители формул (124), (126) и (127) для стержня с шарнирно закрепленными концами следует заменить, подставив вместо выражения

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

выражение

$$\frac{\int_0^l EJ(y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} = \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l EJ \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 d \left(\frac{\pi x}{l} \right). \quad (130)$$

Аналогичную замену следует сделать и в случае консоли.¹

3. Если при осевом приложении нагрузки по всей длине стержня или на части длины среднее напряжение превышает предел пропорциональности $\left(\frac{N}{F} > \sigma_p \right)$, то на этом протяжении следует заменить в формуле (130) модуль E модулем T , определяемым по формуле (5).

§ 23. Пример проверки устойчивости простой рамы с сжато-изогнутыми элементами. Статический метод

Для примера проверим на устойчивость раму, изображенную на фиг. 66. Применим статический метод (см. § 3). Составим дифференциальные уравнения искривленной оси рамы, учитывая изменение реакций и плеч внешних сил, вызванное деформацией. В момент потери устойчивости возможно без изменения внешних нагрузок состояние деформации, смежное с данным, бесконечно-мало от него отличающееся. Составим разности соответствующих уравнений деформации для этих двух смежных состояний. Пренебрегая произведениями малых величин, получим следующие уравнения:

1) для стойки AC:

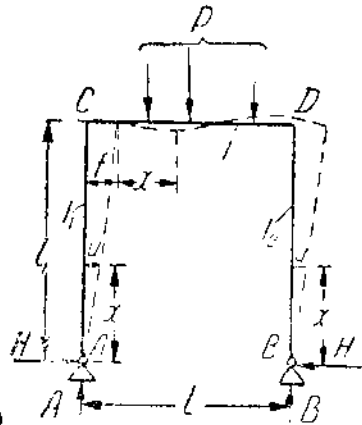
$$EI_1 \frac{d^2 \delta u}{dx^2} = -A \cdot \delta u + \delta H \cdot x; \quad (a)$$

2) для ригеля CD:

$$EI_2 \frac{d^2 \delta u}{dx^2} = -A \cdot \delta f - \delta A \cdot x + \delta H \cdot l_1 - H \cdot \delta u; \quad (b)$$

3) для стойки BD:

$$EI_2 \frac{d^2 \delta u}{dx^2} = -B \cdot \delta u - \delta H \cdot x. \quad (c)$$



Фиг. 66.

В этих уравнениях: δu , δf , δA , δH — соответственно приращения для смежного состояния величин прогиба и горизонтального смещения f точки C, вертикальной реакции A и распора рамы H.

При интегрировании уравнений (a), (b) и (c) получим 6 независимых интегрирования $C_1, C_2, C_3, \dots, C_6$. Кроме того, неизвестны величины δf и δH . Величина δA может быть определена из статических соображений как функция от δf :

$$\delta A = -\frac{P}{l} \delta f. \quad (d)$$

¹ См. Проф. И. Я. Штаерман и Л. С. Ямпольский, „Збірник пам'яті акад. К. К. Симинського“ Київ, ВУАН 1933. В этой работе приведены специальные графики, весьма упрощающие вычисления по формуле (130).

Таким образом имеем 8 неизвестных: $C_1, C_2, C_3, \dots, C_6, \delta f, \delta H$. Для их определения можно составить 8 граничных условий:

- для стержня AC: 1) при $x = 0$; $\delta u = 0$;
 2) при $x = l_1$; $\delta u = \delta f$;
 для стержня CD: 3) при $x = 0$; $\delta u = 0$;
 4) при $x = l$; $\delta u = 0$;
 для стержня BD: 5) при $x = 0$; $\delta u = 0$;
 6) при $x = l_1$; $\delta u = \delta f$.

Кроме того, угол поворота конца C стержня CA равен углу поворота конца C ригеля CD, т. е.:

$$7) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)_{CA} = \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)_{CD}.$$

Аналогично для узла D:

$$8) \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)_{DC} = \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)_{DB}.$$

Условие,¹ при котором возможно удовлетворить эти 8 уравнений при значениях неизвестных

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_6, \delta f \text{ и } \delta H,$$

как правило, отличных от нуля, определит собой критическое значение нагрузки P .

Осуществим намеченную программу. Проинтегрируем уравнения (а), (b) и (с).

$$(a) \quad \delta u = \frac{\delta H}{A} x + C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x,$$

где принято

$$\alpha = \sqrt{\frac{A}{EI_1}}; \quad (131)$$

$$(b) \quad \delta u = \frac{l_1 \delta H - A \delta f}{H} + \frac{P \delta f}{Hl} \cdot x + C_3 \cos \gamma x + C_4 \sin \gamma x,$$

где принято:

$$\gamma = \sqrt{\frac{H}{EI}}; \quad (131')$$

$$(c) \quad \delta u = -\frac{\delta H}{B} x + C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x,$$

где принято:

$$\beta = \sqrt{\frac{B}{EJ_2}}. \quad (131'')$$

Применив эти результаты интегрирования к 6 первым из приведенных выше граничным условиям, выразим независимые интегрирования $C_1, C_2, C_3, \dots, C_6$ как функции от δf и δH :

$$1) C_1 = 0;$$

$$5) C_5 = 0;$$

$$2) C_2 = \frac{1}{\sin \alpha l_1} \left(\delta f - \frac{l_1}{A} \delta H \right); \quad 6) C_6 = \frac{1}{\sin \beta l_1} \left(\delta f - \frac{l_1}{B} \delta H \right).$$

$$3) C_3 = \frac{A \delta f - l_1 \delta H}{H}$$

$$4) C_4 = \frac{B \cdot \delta f + l_1 \delta H}{H \cdot \sin \gamma l} - \frac{A \delta f - l_1 \delta H}{H \cdot \gamma l};$$

¹ Для этого детерминант знаменателя системы уравнений надо приравнять нулю.

После этого из седьмого и восьмого граничных условий получаем два линейных уравнения для δf и δH со свободными членами, равными нулю:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta f}{l} \left[\frac{\alpha l}{\operatorname{tg} \alpha l_1} + \frac{\gamma l}{\sin \gamma l} \cdot \frac{B + A \cos \gamma l}{H} - \frac{P}{H} \right] + \\ & + \frac{\delta H}{H} \left[\frac{H}{A} \left(1 - \frac{\alpha l_1}{\operatorname{tg} \alpha l_1} \right) + \gamma l_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma l}{2} \right] = 0; \\ & \frac{\delta f}{l} \left[\frac{\beta l}{\operatorname{tg} \beta l_1} + \frac{\gamma l}{\sin \gamma l} \cdot \frac{A + B \cos \gamma l}{H} - \frac{P}{H} \right] - \\ & - \frac{\delta H}{H} \left[\frac{H}{B} \left(1 - \frac{\beta l_1}{\operatorname{tg} \beta l_1} \right) + \gamma l_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma l}{2} \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Если положить, что $\delta f = \delta H = 0$, то уравнения (132) удовлетворятся; но тогда: $C_2 = C_3 = C_4 = C_6 = 0$, и рост искривления рамы по формулам (131), (131') и (131'') невозможен, т. е. рама устойчива.

Условия относительно величины коэффициентов при δf и δH в уравнениях (132), при которых или только δf , или только δH , или обе эти величины могут отличаться от нуля, определяют собой критические системы нагрузок, при которых возможен рост деформаций по формулам (131), (131') и (131'') без изменения величины внешних нагрузок.

Такое условие легко получить, приравняв нулю детерминант, составленный из коэффициентов уравнений (132) при величинах δf и δH .

Структура уравнений (132) показывает, что для определения степени устойчивости упругой рамы достаточно знать, кроме ее геометрических размеров, величины реакций A , B и H . Изменение характера распределения нагрузки ригеля влияет на устойчивость рамы, поскольку при этом изменяются величины реакций A и B и распора H .

Применим вышеизложенную теорию к ряду частных случаев.

1. *Симметричный случай.* Пусть известно, что рама (фиг. 66) симметрична и что нагрузка ригеля $\sum P$ (которая может быть и распределенной и состоять из одного или нескольких сосредоточенных грузов) тоже симметрична (см. фиг. 67).

Тогда $A = B = \frac{1}{2} \sum P$.

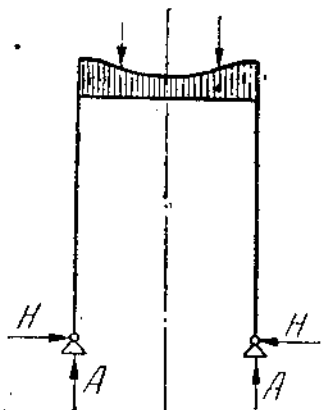
Уравнения (132) дадут: 1) либо $\delta H = 0$, и тогда:

$$\frac{\alpha l_1}{\operatorname{tg} \alpha l_1} = \left(1 - \frac{\frac{\gamma l}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma l}{2}} \right) \cdot \frac{2A}{H} \cdot \frac{l_1}{l}, \quad (133)$$

2) либо $\delta f = 0$, и тогда:

$$-\gamma l \operatorname{tg} \frac{\gamma l}{2} = \left(1 - \frac{\alpha l_1}{\operatorname{tg} \alpha l_1} \right) \cdot \frac{H}{A} \cdot \frac{l}{l_1}. \quad (134)$$

Первому случаю (133) соответствует потеря устойчивости стоек рамы, сопровождающаяся ее перекосом, как показано на фиг. 66; второму случаю (134) соответствует потеря устойчивости ригеля рамы при симметричной деформации потери устойчивости.



Фиг. 67.

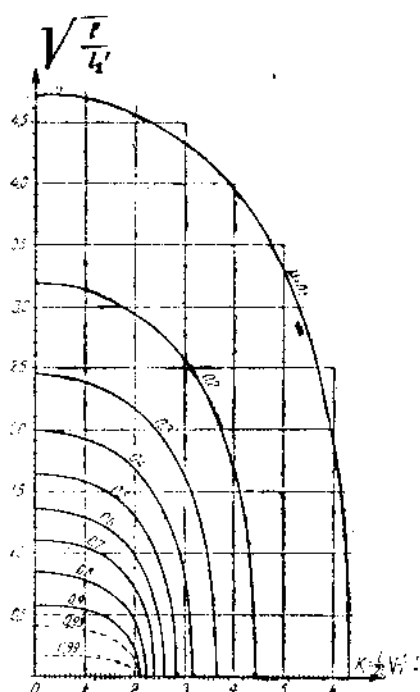
Введем обозначение:

$$K_1 = \left(\frac{\gamma l}{2} \right) : \alpha l_1 = \frac{l}{2l_1} \sqrt{\frac{H}{J} \cdot \frac{J_1}{A}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{A} \cdot \frac{l l'}{l_1 l_1'}}, \quad (135)$$

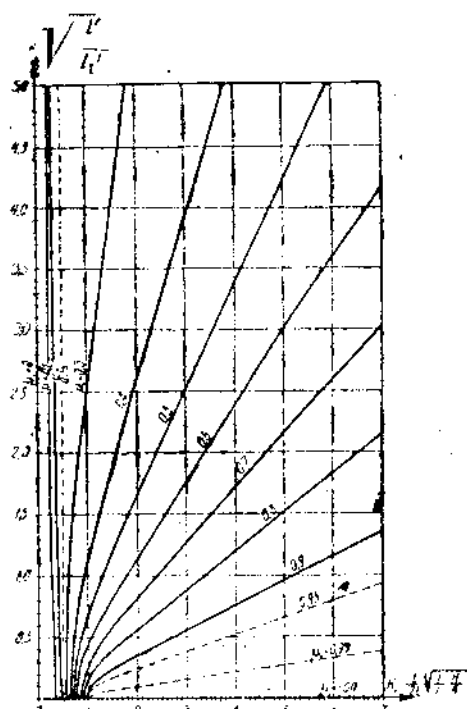
где $l' = \frac{l}{J} \cdot J_0$ и $l_1' = \frac{l_1}{J_1} \cdot J_0$ — „приведенные“ длины ригеля и стойки.

Разберем первый случай антисимметричной потери устойчивости ($\delta H = 0$). Уравнение (133) приобретает вид:

$$\frac{l'}{l_1} = \frac{2K_1^2 \frac{(\alpha l_1)}{\operatorname{tg}(\alpha l_1)}}{1 - \frac{K_1 \alpha l_1}{\operatorname{tg}(K_1 \alpha l_1)}}; \quad (e)$$



Фиг. 68.



Фиг. 69.

с другой стороны, согласно обозначению (131):

$$A_{кр} = \sigma^2 E J_1$$

или

$$A_{кр} = \frac{\pi^2 E J_1}{4 l_1^2} \cdot \mu, \quad (136)$$

где принято обозначение:

$$\mu = \frac{4}{\pi} (\alpha l_1)^2. \quad (f)$$

В случае, если ригель абсолютно жесткий ($J = \infty$, т. е. $K_1 = 0$), величина μ достигает своего наивысшего предела: $\mu = 1$. Критическая нагрузка $A_{кр}$, приходящаяся на одну стойку, в этом случае имеет эйлерово значение для консольного стержня:

$$A_{кр} = \frac{\pi^2 E J_1}{4 l_1^2}.$$

На фиг. 68 приведен график построенный по формуле (е), служащий для определения $A_{кр}$ — критического значения нагрузки стойки (136), при которой симметричная рама по фиг. 67 теряет устойчивость, выпучиваясь в бок, как на фиг. 66. На оси ординат отложена величина $\sqrt{\frac{l}{l_1}}$ характеризующая соотношения длин и жесткостей ригеля и стойки; на оси абсцисс — величина K_1 , зависящая (135) от отношения распора H к нагрузке стойки A ; для различных значений коэффициента μ (0,1; 0,2; 0,3 ... 0,9; 0,95; 0,99 и 1 формулы (136) построены кривые.

Разберем теперь второй случай симметричной потери устойчивости ($\delta f = 0$). Уравнение (134), пользуясь обозначением (135), приведем к виду:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{-\operatorname{tg} \frac{\gamma l}{2}}{\frac{\gamma l}{2}} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{K_1 \left(\frac{\gamma l}{2} \right)} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{K_1 \left(\frac{\gamma l}{2} \right)} \right]}$$

Согласно обозначению (131)

$$H_{кр} = \gamma^2 \cdot EJ$$

или

$$H_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \mu_1$$

где принято обозначение:

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\gamma l}{2} \right)^2 \quad (h)$$

Пользуясь формулами (137) и (135), получаем для критического значения вертикальной реакции $A_{кр}$:

$$A_{кр} = \frac{\pi^2 \mu_1}{K_1^2} \cdot \frac{EJ_1}{l_1^3} \quad (138)$$

По формуле (g) построен график (фиг. 69), служащий для определения [см. (137) и (138)] критических $H_{кр}$ или $A_{кр}$, при которых имеет место случай симметричной потери устойчивости рамы. По оси ординат отложена величина $\sqrt{\frac{l_1}{l}}$, характеризующая соотношения между жесткостями и длинами стойки и ригеля; на оси абсцисс — величина K_1 , по формуле (135) дающая зависимость между распором H и нагрузкой стойки A ; для различных значений коэффициента μ_1 формулы (137) построены кривые.

Если $K_1 = 0,5$, то по графику фиг. 69 находим:

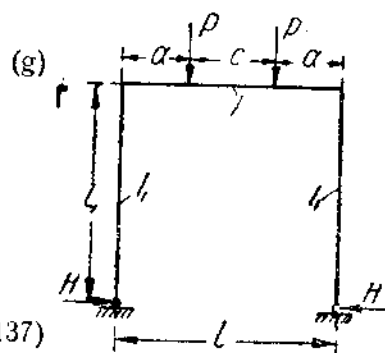
$$\mu_1 = 0,25 \quad \text{и} \quad \frac{\mu_1}{K_1^2} = 1.$$

Если при расчете рамы получается $K_1 > 0,5$, то выходит, что $A_{кр}$ меньше эйлерова значения для стойки. Это показывает, что при $K_1 > 0,5$ теряет устойчивость ригель, а при $K_1 \leq 0,5$ теряет устойчивость стойка.

Пример 1. Найти (см. фиг. 70) критическое значение нагрузок P , если известно: $l = l_1$; $J = 3J_1$; $a = 0,3l$.

Прежде всего находим¹ реакции рамы:

$$A = P; \quad H = \frac{3Pa(a+c)}{l_1 \cdot (2K+3)},$$



Фиг. 70.

¹ См. Клейнгольц, Формулы для расчета рамных конструкций.

где

$$K = \frac{J}{J_1} \cdot \frac{l_1}{l} = 3.$$

Таким образом,

$$\frac{H}{A} = \frac{3 \cdot 0,3 \cdot 0,7}{9} = 0,07.$$

По формуле (135) находим:

$$K_1 = \frac{l}{2l} \sqrt{0,07 \cdot \frac{1}{3}} = 0,0763; \sqrt{\frac{l'}{l_1}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,578 = \frac{1}{1,73}.$$

На графике (фиг. 68) находим точку с координатами (0,076; 0,578); для этой точки путем интерполяции между кривыми для $\mu=0,8$ и $\mu=0,9$ получаем

$$\mu = 0,895.$$

Таким образом, критическое значение нагрузки при антисимметричной форме потери устойчивости:

$$P_{кр} = A_{кр} = 0,895 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ_1}{l_1^2} = 2,208 \frac{EJ_1}{l_1^2}.$$

По графику (фиг. 69) находим точку с координатами (0,076; 1,73); для этой точки $\mu_1=0,015$, и формула (138) дает критическую силу при симметричной форме потери устойчивости:

$$P_{кр} = A_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 0,015}{0,076^2} \cdot \frac{EJ_1}{l_1^2} = 25,6 \cdot \frac{EJ_1}{l_1^2}.$$

Таким образом для этого случая значительно более опасна антисимметричная потеря устойчивости.

Сравнительные расчеты показывают, что для рамы заданных в данном примере размеров величина критической реакции $A_{кр}$ практически сохраняется и для иных симметричных расположений нагрузок на ригеле, так как в этом случае величина K_1 получается очень малой и кривые для μ на графике фиг. 68 для таких значений K_1 идут почти горизонтально.

Пример 2. Найти критическое значение нагрузки для рамы, показанной на фиг. 71, если $l = 2l_1$; $J = J_1$. Прежде всего находим:¹

$$A = \frac{1}{2} P; H = \frac{3Pl}{8l_1(3+2K)},$$

где

$$K = \frac{J}{J_1} \cdot \frac{l_1}{l} = 0,5.$$

Итак:

Фиг. 71.

$$\frac{H}{A} = \frac{2H}{P} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 1 \cdot 4} = 0,375; K_1 = 1 \cdot \sqrt{0,375} = 0,612;$$

$$\sqrt{\frac{l'}{l_1}} = 0,707; \mu_1 = 0,32.$$

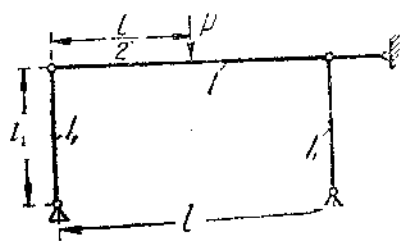
Коэффициент K_1 получился больше 0,5; значит теряет устойчивость ригель, а не стойки.

¹ См. Клейнгольц, Формулы для расчета рамных конструкций.

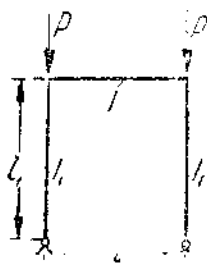
Критическое значение нагрузки находим по формуле (138). Критическая нагрузка в этом случае составляет всего 85% от критической нагрузки для шарнирно-стержневой системы, изображенной на фиг. 72.

Пример 3. Нагрузки P расположены непосредственно над стойками рамы (см. фиг. 73). В этом случае распор $H = 0$, и таким образом

$$\gamma = 0; K_1 = 0.$$



Фиг. 72.



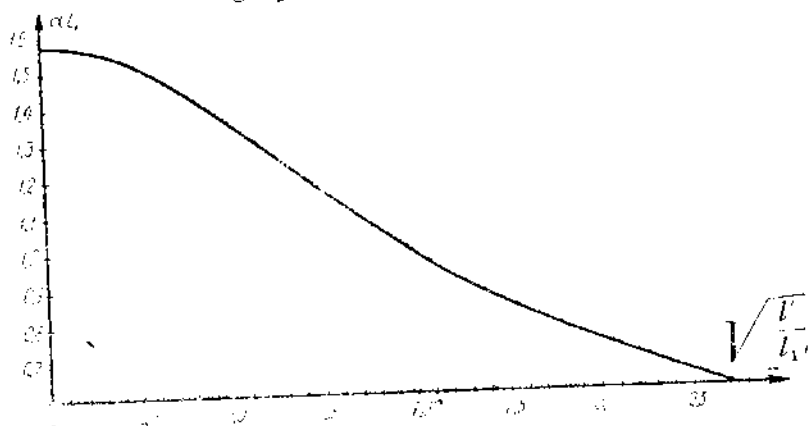
Фиг. 73.

Формула (133) после замены $H = \gamma^2 EJ$ и раскрытия неопределенности по правилу Лопиталя получает вид:

$$\alpha l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha l_1 = 6 \cdot \frac{l_1'}{l}. \quad (139)$$

Аналогично, вместо формулы (134), получаем:

$$\frac{\alpha l_1}{\operatorname{tg} \alpha l_1} = 1 + \frac{(\alpha l_1)^2}{2} \frac{l_1'}{l_1}. \quad (139a)$$



Фиг. 74.

На фиг. 74 приведены графики зависимости величины αl_1 от отношения $\sqrt{l_1'/l_1}$ для антисимметричного, а на фиг. 75 — зависимости αl_1 от $\sqrt{l_1'/l_1}$ для симметричных случаев потери устойчивости.

Пример 4. Вся нагрузка ригеля сосредоточена под левой стойкой (см. фиг. 76). В этом случае:

$$A = P; B = 0; H = 0; \beta = 0; \gamma = 0.$$

Раскрывая¹ получившиеся неопределенности в детерминанте уравнений (132), находим следующее трансцендентное уравнение относительно величины (al_1)

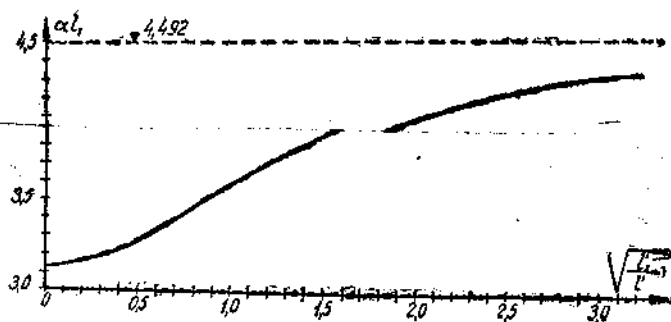
$$\frac{l' + l_2}{l'} \cdot \frac{al_1}{\operatorname{tg} al_1} - \frac{4l_2' + 3l'}{12l_1'} \cdot (al_1)^2 + \frac{3l_1'}{l'} \cdot \frac{1}{(al_1)^2} \left(1 - \frac{al_1}{\operatorname{tg} al_1}\right) + 2 = 0. \quad (140)$$

В частном случае, когда

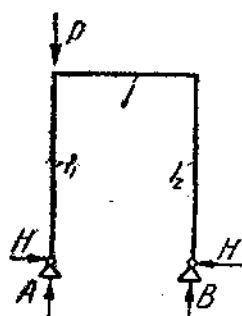
$$l = l_1; \quad J = J_1 = J_2,$$

уравнение (140) получает вид:

$$2 \frac{al_1}{\operatorname{tg} al_1} - \frac{7}{12} (al_1)^2 + 3 \frac{1}{(al_1)^2} \left(1 - \frac{al_1}{\operatorname{tg} al_1}\right) + 2 = 0.$$



Фиг. 75.



Фиг. 76.

Решая это трансцендентное уравнение, получаем:

$$al_1 = 1,905;$$

отсюда находим:

$$P_{кр} = a^2 EJ_1 = 3,63 \frac{EJ_1}{l_1} = \frac{\pi^2 EJ_1}{(1,65 l_1)^2}.$$

§ 24. Энергетический метод проверки устойчивости сжатых изогнутых одноконтурных рам

Согласно закону сохранения энергии, потенциальная энергия уравновешенной системы рамы и грузов (см. Фиг. 77) является величиной постоянной. Иначе говоря (пренебрегая работой обжатия и сдвигов):

$$\sum \int \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum P \delta_P - H \delta_H = C. \quad (a)$$

Здесь δ_P и δ_H — координаты точек приложения внешних сил P и распора H на прямых линиях, совпадающих с их направлением, так что при увеличении этих координат силы P и H производят положительную работу. Величина константы C зависит от выбора начальных точек координат δ_P и δ_H .

¹ Для этого сначала заменяем:

$$B = P - A; \quad H = \gamma^2 EJ; \quad B = \beta^2 EJ_2;$$

$$\sin \gamma l = \gamma l - \frac{(\gamma l)^3}{6} + \dots; \quad \cos \gamma l = 1 - \frac{(\gamma l)^2}{2} + \dots; \quad \operatorname{tg} \gamma l = \gamma l + \frac{\gamma l^3}{3} + \dots \text{ и т. д.};$$

производим сокращения и потом приравниваем:

$$P = A; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0 \text{ и т. д.}$$

Если рама находится в критическом состоянии, на границе устойчивости, то, кроме данного положения, возможно смежное, бесконечно близкое к данному, другое положение равновесия:

$$\sum \int \frac{(M + \Delta M)^2 ds}{2EJ} - \sum P(\delta_P + \Delta\delta_P) - (H + \Delta H)(\delta_H + \Delta\delta_H) = C. \quad (b)$$

Вычитая (а) из (b), пренебрегая малым членом $\Delta H \cdot \Delta\delta_H$ и принимая во внимание, что при закреплении опор A и B координата $\delta_H = 0$, получаем

$$\sum P(\Delta\delta_P) + H(\Delta\delta_H) = \sum \int \frac{M\Delta M}{EJ} ds + \sum \int \frac{(\Delta M)^2 ds}{2EJ}. \quad (c)$$

Величины $\Delta\delta_P$ и $\Delta\delta_H$ можно вычислить по формулам Максвелла-Мора, сопоставляя по два состояния рамы:

1) „дополнительное Δ “, которому соответствуют моменты ΔM , углы поворота сечений $\Delta\delta\varphi$, прогибы $\Delta\delta_P$ и $\Delta\delta_H$ и

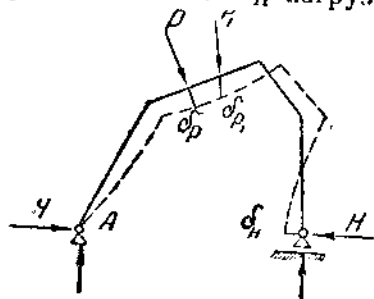
2) единичное фиктивное состояние. При вычислении $\Delta\delta_P$ такое состояние характеризуется нагрузкой $P = 1$; $H = 0$; при вычислении $\Delta\delta_H$ нагрузкой $P = 0$; $H = 1$. Итак:

$$\Delta\delta_P = \delta_{P,\Delta} = \sum \int M_P \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds + \sum N_P \delta_{N,\Delta};$$

$$\Delta\delta_H = \delta_{H,\Delta} = \sum \int M_H \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds + \sum N_H \delta_{N,\Delta}.$$

Здесь коротко обозначено M_P , N_P , M_H , N_H , вместо подробных:

$$M_{P=1}, N_{P=1}, M_{H=1}, N_{H=1}.$$



Фиг. 77.

При расчете будем учитывать только работу искривления; поэтому продольное элементарное перемещение $\delta_{N,\Delta}$, согласно (115) (см. § 22) будем брать по формуле:

$$\delta_{N,\Delta} = + \frac{1}{2} \left(\Delta\delta\varphi \right)^2 ds,$$

считая, что продольная сила N положительна при работе стержня на сжатие. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\delta_P &= \sum \int M_P \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds + \frac{1}{2} \sum \int N_P (\Delta\delta\varphi)^2 ds; \\ \Delta\delta_H &= \sum \int M_H \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds + \frac{1}{2} \sum \int N_H (\Delta\delta\varphi)^2 ds. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Подставляя эти выражения в (c) и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \sum P \cdot \left[\sum \int M_P \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds \right] + H \sum \int M_H \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds &\equiv \\ &\equiv \sum \int \left[\sum P M_P + H M_H \right] \frac{\Delta M}{EJ} ds \equiv \sum \int M \cdot \frac{\Delta M}{EJ} ds; \end{aligned}$$

и

$$\sum P \cdot N_{P=1} + H N_{H=1} = N,$$

получим уравнение:

$$\sum \int N \cdot (\Delta\delta\varphi)^2 ds = \sum \int \frac{(\Delta M)^2 ds}{EJ}, \quad (142)$$

определяющее собой критическую систему нагрузок.¹

Формулу (142) можно еще записать в виде:

$$\sum \int N (\Delta \delta \varphi)^2 ds = \sum \int EJ \left(\frac{d \Delta \delta \varphi}{ds} \right)^2 ds. \quad (142')$$

Применим вышеизложенную теорию к прямоугольной двухшарнирной раме фиг. 66. Определим критическую систему нагрузок, соответствующую антисимметричной форме потери устойчивости.

Для простоты приближенно допустим, что эпюра дополнительных деформаций рамы при потере ее устойчивости имеет такой же вид, как в случае действия (см. фиг. 78) в узле С горизонтальной силы 2Q.

В таком случае нетрудно получить для стоек AC и BD:

$$\Delta \delta \varphi = \frac{Q l_1 l}{6 EJ} + \frac{Q (l^2 - x^2)}{2 EJ_1} \quad (d)$$

и для ригеля CD:

$$\Delta \delta \varphi = \frac{Q l_1 l}{6 EJ} \cdot \left(1 - \frac{6x}{l} + \frac{6x^2}{l^2} \right). \quad (e)$$

Поскольку видно, что для

1) ригеля CD	$N = H;$
2) стойки AC	$N = A;$
3) стойки BD	$N = B.$

Фиг. 78.²

Тогда формула (142) получает вид:

$$(A+B) \int_0^{l_1} (\Delta \delta \varphi)^2 dx + H \int_0^l (\Delta \delta \varphi)^2 dx = \sum \int EJ \left(\frac{d \Delta \delta \varphi}{ds} \right)^2 dx. \quad (143)$$

Выполнив интегрирование и заменив $A+B = \sum P$, получаем после сокращения числителя и знаменателя на величину Q^2 формулу для критической нагрузки ригеля

$$\sum P_{кр} = \frac{2 + \frac{l'}{l_1}}{24 + 20 \frac{l'}{l_1} + \left(\frac{l'}{l_1} \right)^2 \left[5 + \frac{l}{l_1} \cdot \frac{H}{\sum P} \right]} \cdot \frac{60 EJ_1}{l_1^3}. \quad (144)$$

Здесь l' и l_1' — приведенные длины ригеля и стоек. Отношение $\frac{H}{\sum P}$ можно получить, например, из таблиц Клейнлогеля.

Выясним теперь степень погрешности формулы (144), возникающей благодаря допущению о форме дополнительной деформации по фиг. 78.

Для этого сравним на ряде численных примеров результаты вычислений по приближенной формуле (144) и точному графику (фиг. 68) предыдущего § 23.

Для примера фиг. 70 § 23 по формуле (144) имеем:

$$\sum P_{кр} = 4,48 \frac{EJ_1}{l_1^2};$$

при точном значении $\sum P_{кр} = 2A_{кр} = 4,416 \frac{EJ_1}{l_1^2}$. Погрешность 1,5%.

¹ Если не пренебрегать работой обжатия и сдвигов, то вместо (142) получим:

$$\sum \int N (\Delta \delta \varphi)^2 ds = \sum \int \frac{(\Delta M)^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{(\Delta N)^2 ds}{EF} + \sum \int \frac{(\Delta Q)^2 ds}{GF'}$$

Это основное уравнение, служащее для проверки устойчивости энергетическим методом плоских сжато-изогнутых стержневых систем (рам, арок, ферм и т. д.)

² На фиг. 78 показана эпюра моментов M .

Для рамы по схеме фиг. 70 при ином соотношении размеров:

$$l = 5l_1; \quad J = J_1; \quad a = 0,3l$$

получаем: $\frac{H}{\sum P} = 0,4635$; по формуле (144) имеем

$$\sum P_{кр} = 1,367 \frac{EJ_1}{l_1};$$

при точном значении $\sum P_{кр} = 1,33 \frac{EJ_1}{l_1}$. Погрешность 2,7%.

Для примера фиг. 76 § 23 (при $l' = l_1'$) $H = 0$ формула (144) дает:

$$P_{кр} = \frac{3}{24 + 20 + 5} \cdot \frac{60 EJ_1}{l_1} = 3,67 \frac{EJ_1}{l_1} = \frac{\pi^2 EJ_1}{(1,64l_1)^2},$$

вместо точных значений 3,63 и 1,65. Погрешность 1,1%.

Вообще говоря энергетический прием дает несколько преувеличенные значения для критической нагрузки.

В § 23 рассмотрены подробно случай симметричного нагружения и случай несимметричного (фиг. 76) при грузе над одной из стоек.

Как показало вышеприведенное численное сравнение, формула (144) в обоих этих случаях обеспечивает достаточную для практических приложений степень точности. Поэтому ее можно рекомендовать и для других случаев несимметричной вертикальной нагрузки на ригеле.

Общая формула (142) может быть применена¹ для любых типов простых и сложных плоских рам с прямыми, ломаными и криволинейными ригелями.

§ 25. Проверка устойчивости двухшарнирной параболической арки.² Статический метод

Как известно,³ дифференциальное уравнение эюры вертикальных прогибов плоского криволинейного стержня (см. фиг. 79) имеет такую форму:

$$EJ \cos \varphi \frac{d^2 v}{dx^2} = -M. \quad (145)$$

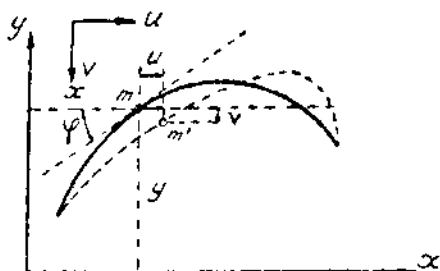
В согласии с фиг. 79 в дальнейшем примем обозначения: v — вертикальное перемещение точки оси криволинейного стержня, считая величину v положительной при движении вниз, и — то же — горизонтальное, считая его положительным при движении вправо, φ — угол между касательной к оси арки и осью абсцисс ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$).

Также для простоты записи введем обозначение для «вертикальной проекции жесткости» сечения:

$$EJ \cos \varphi = EJ_0. \quad (146)$$

Будем допускать, что при деформировании арки ось ее не сжимается, точнее, не изменяется в длине. Это значит, что

$$dx^2 + dy^2 = \left(dx + \frac{du}{dx} dx \right)^2 + \left(dy - \frac{dv}{dx} dx \right)^2.$$



Фиг. 79.

¹ См. Н. В. Корноухов, Проверка устойчивости сжато-изогнутых конструкций до и за пределами упругости, ч. II, Арки и рамы, Изд. Ак. Наук УССР (печатается на украинском языке).

² Более подробно см. статью: Н. В. Корноухов, Проверка устойчивости арок от произвольно расположенных вертикальных нагрузок. Сборник «Стоймость арок», Ак. Наук УССР, Киев 1936 г.

³ См. например, Курт Бейер, Статика железобетонных сооружений, § 15 изд. Макиз, 1929. Мюллер Бреслау, Графическая статика сооружений, том 2, ч. 2, § 29, перевод Кривошеина, 1913 г.

Отсюда, после пренебрежения бесконечно-малыми высших порядков, получаем дифференциальную зависимость между вертикальными и горизонтальными перемещениями v и u :

$$du = \frac{dv}{dx} dy. \quad (147)$$

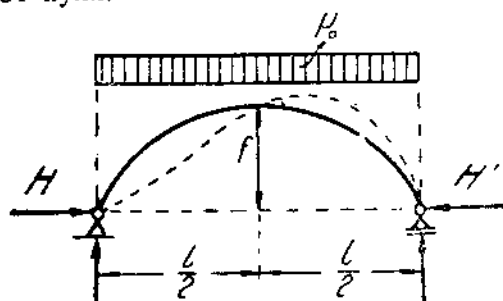
В момент потери устойчивости происходит рост деформаций без изменения величины внешних нагрузок; в связи с деформациями меняются только плечи нагрузок:

$$EJ \cos \varphi \cdot \frac{d^2(v + \delta v)}{dx^2} = -(M + \delta M).$$

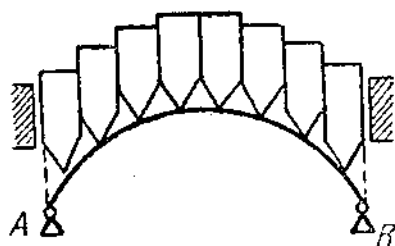
Таким образом критическое состояние арки определяется возможностью удовлетворить уравнению:

$$EJ \cos \varphi \frac{d^2 \delta v}{dx^2} = -\delta M. \quad (148)$$

и граничным условиям при значениях для деформаций δv и δu , отличных от нуля.



Фиг. 80.



Фиг. 81.

Применим ниже вышеизложенную теорию к проверке устойчивости статическим методом двухшарнирной симметричной арки (см. фиг. 80) с очертанием оси по квадратной параболе:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (a)$$

и с законом изменения сечения по длине:

$$EJ \cos \varphi = EJ_0 = \text{const.} \quad (b)$$

Для простоты будем считать, что на арке расположена (см. фиг. 80) по всей ее длине равномерно-распределенная в плане нагрузка p_0 , „сконструированная“ таким образом, что при прогибании арки точки приложения будут иметь только вертикальные перемещения² (см. фиг. 81). В этом случае линия давления нагрузки будет сохранять все время свое начальное очертание по квадратной параболе, и

$$\delta M = H \cdot \delta v + V \cdot \delta u, \quad (c)$$

где H — распор арки, а V — вертикальная составляющая равнодействующей давления в данном сечении.

Принимая во внимание, что в нашем случае

$$p_0 = \frac{8f}{l^2} \cdot H, \quad (d)$$

уравнение (148) приведем к виду:

$$-EJ_0 \frac{d^2 \delta v}{dx^2} = H \delta v + \left[\frac{8f}{l^2} H \right] \left(\frac{l}{2} - x \right) \delta u. \quad (e)$$

¹ Учитывая (147), из (145) можно получить дифференциальное уравнение эпюры горизонтальных прогибов:

$$EJ \sin \varphi \frac{d^2 u}{dy^2} = -M.$$

² Ниже рассмотрим более общий случай.

Введем обозначение

$$x = l\xi. \quad (f)$$

Для интегрирования дифференциального уравнения (е) используем приближенный метод „неопределенных коэффициентов“, упомянутый выше в § 3. Решая уравнение (е) относительно H , получаем:

$$H_{кр} = \frac{-EJ_0 \frac{d^2 \partial v}{dx^2}}{\partial v + \frac{4f}{l^2} (1 - 2\xi) \partial u}. \quad (g)$$

Если удалось бы подобрать для ∂v такую функцию от ξ , чтобы для всех значений ξ от нуля и до единицы, формула (g) давала бы для $H_{кр}$ одно и то же численное значение, то уравнение (е) было бы решено точно.

Приближенное решение можно получить, задав ∂v как функцию от ξ и ряда неопределенных параметров: $a_2, a_4, a_6, \dots$, удовлетворяющую граничным условиям, а именно: на концах арки (для $\xi = 0$ и для $\xi = 1$) величины ∂v , ∂u и $\frac{d^2 \partial v}{d\xi^2}$ должны обращаться в нуль. Соотношения

между этими параметрами $a_2, a_4, a_6, \dots$ можно получить из условия, что для ряда значений ξ (их можно взять с равными интервалами друг от друга) формула (g) должна давать равные численные значения для $H_{кр}$.

Зададим ∂v в виде тригонометрического ряда:

$$\partial v = \sum a_n \sin n\pi\xi, \quad (149)$$

где n — четные числа.

Тогда, согласно (147), имеем:

$$\partial u = \frac{d \partial v}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Откуда после интегрирования, принимая во внимание граничные условия, получаем:

$$\partial u = \frac{4f}{l} (1 - 2\xi) \partial v + \frac{16f}{\pi l} \sum \frac{a_n}{n} \sin^2 \left(\frac{n\pi\xi}{2} \right). \quad (150)$$

Подставив выражения (149) и (150) в формулу (g), получим для $H_{кр}$:

$$H_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ_0}{l^2} \times \sum a_n \left(\frac{n}{2} \right)^2 \sin(n\pi\xi) \times \left[1 + \left(\frac{4f}{l} \right)^2 (1 - 2\xi)^2 \right] \sum a_n \sin(n\pi\xi) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{4f}{l} \right)^2 (1 - 2\xi) \sum \frac{a_n}{n} \sin^2 \left(\frac{n\pi\xi}{2} \right). \quad (151)$$

Ограничимся тремя членами разложения (149) для величины

$$\partial v = a_2 \sin 2\pi\xi + a_4 \sin 4\pi\xi + a_6 \sin 6\pi\xi.$$

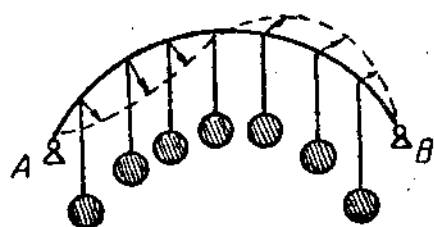
Соотношения между коэффициентами a_2, a_4, a_6 найдем из условия, чтобы формула (151) давала при $\xi = \frac{1}{8}, \frac{2}{8}$ и $\frac{3}{8}$ равные значения для $H_{кр}$. Обозначив для сокращения записи

$$C = \frac{4\pi^2}{H_{кр}} \cdot \frac{EJ_0}{f^2},$$

* Вторая производная равна нулю, так как на концах арки и шарнирах моменты равны нулю.

последовательно подставляя в (151), вместо $\xi = \frac{1}{8}, \frac{2}{8}$ и $\frac{3}{8}$, после пределок получим следующие три линейных уравнения для определения a_2, a_4 и a_6 :

$$\begin{aligned} \left(6,935 + \frac{l^2}{f^2} - C\right) a_2 + 5,00 a_4 + 0,882 a_6 &= 0; \\ 2,30 a_2 + \left(5,635 + \frac{l^2}{f^2} - 4C\right) a_4 + 3,85 a_6 &= 0; \\ 0,385 a_2 + 2,455 a_4 + \left(5,735 + \frac{l^2}{f^2} - 9C\right) a_6 &= 0. \end{aligned}$$



Фиг. 82.

Свободные члены этих уравнений равны нулю.

Потеря устойчивости становится возможной, когда коэффициенты a_2, a_4, a_6 станут отличаться от нуля. Для этого необходимо, чтобы детерминант этих трех уравнений обратился в нуль.

Последнее условие дает кубическое уравнение относительно коэффициента C .

Определив наибольший корень этого уравнения C_1 , получим затем критический распор по формуле:

$$H_{кр} = \frac{4\pi^2}{C_1 \cdot f^2} EJ_0.$$

Ниже приводится определенная по этому способу табличка для $H_{кр}$.¹

$\frac{f}{l}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	Множитель
$H_{кр} =$	39,5	36,9	30,8	22,0	13,95	4,72	$\frac{EJ_0}{f^2}$

Если не делать упрощающего предположения о характере приложения нагрузки, как это было сделано выше (см. фиг. 81), а считать, что деформирование арки вызывает (см. фиг. 82) также и перемещение точек приложения нагрузки в горизонтальном направлении, то задача несколько усложняется и дифференциальное уравнение (148) получит вид:²

$$-EJ_0 \frac{d^2 \delta v}{dx^2} = [H \delta v + V \cdot \delta u] + \left[x \delta A - y \delta H + \int_0^x q \delta u \cdot dx \right]. \quad (151)$$

Приращение вертикальной реакции³ может быть определено по формуле:

$$\delta A = - \int_0^l \frac{\delta u}{l} q dx. \text{ Приращение распора } \delta H \text{ определяется, как статически-}$$

неопределимая величина из условия сохранения расстояния между опорами А и В арки.

¹ С погрешностью менее 1% данные этой таблички могут быть уложены в формулу

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 7,3 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{f^2}.$$

² Подробнее смотри статью автора о проверке устойчивости арок в сборнике „Стойкость арок“, Ак. Наук УССР Киев 1936

Для арки (см. фиг. 80) с очертанием оси по квадратной параболе и с законом изменения сечения по длине $EJ \cos \varphi = EJ_0 = \text{const}$ дифференциальное уравнение (151) было проинтегрировано по способу алгебраической итерации (см. § 3), причем во втором приближении получилась формула:

$$H_{кр} = 39,5 \frac{1 + 7,05 \left(\frac{f}{l}\right)^2}{1 + 13,2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + 49,1 \left(\frac{f}{l}\right)^4} \cdot \frac{EJ_0}{l^2}. \quad (152)$$

В нижеследующей табличке приводятся определенные по этой формуле численные значения распора $H_{кр}$ для ряда отношений $\frac{f}{l}$ подъема арки к ее пролету:

$\frac{f}{l}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	Множитель
$H_{кр} =$	39,5	37,2	31,5	22,9	14,85	5,02	$\frac{EJ_0}{l^2}$

§ 26. Определение деформации двухшарнирной арки и криволинейной балки на двух опорах по энергетическому методу

При расчете будем пренебрегать продольными деформациями оси арки от ее обжатия, учитывая в то же время работу продольных сил на деформациях от искривления оси арки. С последней целью для энергетического метода приходится уточнить, не отбрасывая сразу бесконечно-малых высших порядков, формулу (147) дифференциальной зависимости между (см. фиг. 79) прогибами u и v .

Итак, считая, что при деформации арки длина бесконечно-малого элемента ds сохраняется без изменений, имеем:

$$dx^2 + dy^2 = (dx + du)^2 + (dy - dv)^2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{du}{dx}\right) - \left[2\frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx} - \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{1 + \left[2\frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx} - \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]};$$

здесь перед корнем выбран знак $+$, так как $\frac{du}{dx}$ должно быть весьма малой величиной.

Заменим корень разложением в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

и отбросим в разложении члены, содержащие $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ в степенях третьей и выше; тогда получим:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{dv}{dx}\right)^2. \quad (153)$$

Применяя формулу (153) к двухшарнирной арке (см. фиг. 83) и считая, что $u_A = 0$, получаем для u_B :

$$u_B = \int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \right)^2 dx.$$

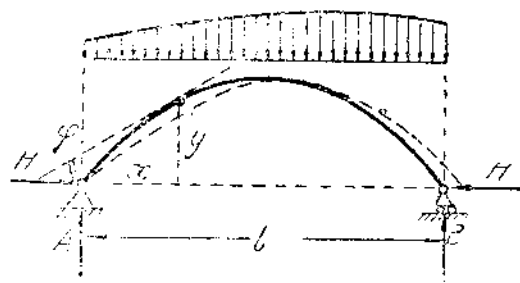
Интегрируя по частям и помня, что $v_A = v_B = 0$, последнее выражение приведем к виду:

$$u_B = - \int_0^l v \frac{d^2 y}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (154)$$

Потенциальную энергию изгиба арки, учитывая (146) и (145), можно представить следующим образом:

$$V_a = \int \frac{M^2 ds}{2EJ} = \int \frac{M^2 dx}{2EJ_0} = \int \frac{EJ_0}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (155)$$

Работа внешних сил (нагрузки и распора H), произведенная при прогибании арки, равна:



Фиг. 83.

$$T = \int_0^l qv dx - Hu_B$$

или учитывая (154)

$$T = \int_0^l v \left(q + H \frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx + \frac{H}{2} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (156)$$

Эпюру вертикальных прогибов арки зададим при помощи ряда с неопределенными коэффициентами $a_1, a_2, a_3 \dots$, из функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$V = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + a_3 v_3(x) + \dots \quad (157)$$

Величины коэффициентов $a_1, a_2, a_3 \dots$, можно определить, зная, что при деформировании арки приращение ее потенциальной энергии равно приращению работы внешних сил:

$$\delta V = \delta T,$$

или

$$\delta(V - T) = \frac{\partial(V - T)}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial(V - T)}{\partial a_2} \delta a_2 + \frac{\partial(V - T)}{\partial a_3} \delta a_3 + \dots = 0.$$

В виду независимости приращений $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \dots$ это уравнение может быть удовлетворено только в том случае, когда:

$$\frac{\partial(V - T)}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial(V - T)}{\partial a_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial(V - T)}{\partial a_n} = 0. \quad (158)$$

Таким образом, получается система линейных относительно коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ уравнений по типу:

$$\begin{aligned} \int_0^l EJ_0 \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial v}{\partial a_n} \right) dx - H \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial v}{\partial a_n} \right) dx = \\ = \int_0^l \frac{\partial v}{\partial a_n} \left(q + H \frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx, \end{aligned} \quad (159)$$

где правая часть является свободным членом.

Для двухшарнирной арки (фиг. 83) с очертанием оси по квадратной параболе:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

и с законом изменения сечения:

$$EJ \cos \varphi = EJ_0 = \text{const}$$

выразим уравнение эпюры вертикальных прогибов в виде ряда:

$$v = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (157')$$

Это уравнение удовлетворяет граничным условиям:

$$v_A = v_B = 0; \quad \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_A = \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_B = 0.$$

Уравнение (159) при этом получит вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{2} \cdot \frac{EJ_0}{l^3} n^4 a_n - H \left\{ a_n \left[\frac{\pi^2 n^2}{2l} + \frac{1}{l} \left(\frac{4f}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{6} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{8}{l} \left(\frac{4f}{l} \right)^2 \sum_{\substack{m=n-2p \\ m \neq n}} \frac{mn(m^2+n^2)}{(m^2-n^2)^2} a_m \right\} = \\ & = \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx + H \cdot \frac{8}{\pi} \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{\cos(n\pi) - 1}{n}, \end{aligned} \quad (159')$$

где за знаком $\sum$ величины m и n — числа натурального ряда 1, 2, 3, 4... неравные друг другу, в сумме составляющие четное число.

Таким образом, система уравнений (158) подразделяется на две независимые друг от друга системы уравнений: 1) только с четными коэффициентами: $a_2, a_4, a_6 \dots$ и 2) только с нечетными: $a_1, a_3, a_5 \dots$

Система уравнений с четными коэффициентами, определяющая антисимметричные составляющие деформаций арки, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} a_2 \left\{ \frac{\pi^4 EJ_0}{16Hf^2} - \frac{\pi^2}{64} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) - \frac{1}{8} \right\} - \left[\frac{10}{9} a_4 + \frac{15}{32} a_6 + \frac{68}{225} a_8 + \dots \right] &= c_2, \\ a_4 \left\{ \frac{\pi^4 EJ_0}{Hf^2} - \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) - \frac{1}{8} \right\} - \left[\frac{10}{9} a_2 + \frac{78}{25} a_6 + \frac{10}{9} a_8 + \dots \right] &= c_4, \\ a_6 \left\{ \frac{81\pi^4 EJ_0}{16Hf^2} - \frac{9\pi^2}{64} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) - \frac{1}{8} \right\} - \left[\frac{15}{32} a_2 + \frac{78}{25} a_4 + \frac{300}{49} a_8 + \dots \right] &= c_6, \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (158a)$$

Здесь:

$$c_n = \frac{1}{128} \frac{l^3}{Hf^2} \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (160)$$

¹ Последнее условие показывает, что изгибающие моменты M_A и M_B в концевых шарнирах равны нулю. Удовлетворение условия $u_B - u_A = 0$ пока оставим в стороне.

Система уравнений с нечетными коэффициентами, определяющая симметричные составляющие деформации арки, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left\{ \frac{\pi^4 E J_0}{16 H f^2} - \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) - 2 \right\} - \left[\frac{15}{2} a_3 + \frac{65}{18} a_5 + \frac{175}{72} a_7 + \dots \right] &= c_1', \\ a_3 \left\{ \frac{81 \pi^4 E J_0}{16 H f^2} - \frac{9 \pi^2}{16} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) - 2 \right\} - \\ &- \left[\frac{15}{2} a_1 + \frac{255}{8} a_5 + \frac{609}{50} a_7 + \dots \right] = c_3', \\ a_5 \left\{ \frac{625 \pi^4 E J_0}{16 H f^2} - \frac{25 \pi^2}{16} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) - 2 \right\} - \\ &- \left[\frac{65}{18} a_1 + \frac{255}{8} a_3 + \frac{1295}{18} a_7 + \dots \right] = c_5'. \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (158b)$$

Здесь

$$c_n' = \frac{1}{8} \frac{l^3}{H f^2} \int_0^l q \sin \frac{n \pi x}{l} dx - \frac{2}{n \pi} \frac{l^2}{f}. \quad (161)$$

Хотя системы уравнений (158a) и (158b) содержат бесконечное количество неизвестных коэффициентов a_n , но сравнительные подсчеты показывают, что коэффициенты с меньшими индексами, как правило, значительно превышают коэффициенты с большими индексами, т. е.:

$$a_2 > a_4 > a_6 > a_8 > \dots$$

$$a_1 > a_3 > a_5 > a_7 > \dots$$

К тому же заключению легко прийти из данных опыта, так как прогиб криволинейного стержня на двух опорах, из которых одна подвижная, будет происходить в основном по одной полуволне, а прогиб двухшарнирной арки — в основном по двум полуволнам, т. е. в первом случае будет доминировать коэффициент a_1 , а во втором a_2 .

Для первого приближения при определении деформаций двухшарнирной арки можно допустить, что все a_n , кроме a_2 , равны нулю, иначе говоря, что

$$v = a_2 \sin \frac{2 \pi x}{l}. \quad (157')$$

Тогда, пользуясь первой строчкой уравнений (158a), сможем получить величину коэффициента a_2 . Из рассмотрения множителя в фигурных скобках при a_2 видим, что при некотором значении распора H , назовем его „критическим распором $H_{кр}$ “, этот множитель обращается в нуль, обращая таким образом a_2 , при $c_2 \neq 0$, в бесконечность. Величина этого $H_{кр}$ будет:

$$H_{кр} = \frac{\pi^4 E J_0}{16 f^2 \left[\frac{\pi^2}{64} \left(\frac{l^2}{f^2} + \frac{16}{3} \right) + \frac{1}{8} \right]},$$

¹ В случае, если на арке (см. фиг. 80) расположена равномерно-распределенная нагрузка $q = p_0$ и $H = \frac{q l^2}{8 f}$, то тогда, согласно формуле (161), все $c_n' = 0$ и все $a_1, a_3, a_5, \dots$ равны нулю. В этом случае двухшарнирная арка имеет исключительно антисимметричные деформации по формулам (158a). Нетрудно показать, что этот вывод относится также и к случаю загрузки по фиг. 84, если $H = \frac{l^2}{8 f} \cdot \frac{q_1 + q_2}{2}$.

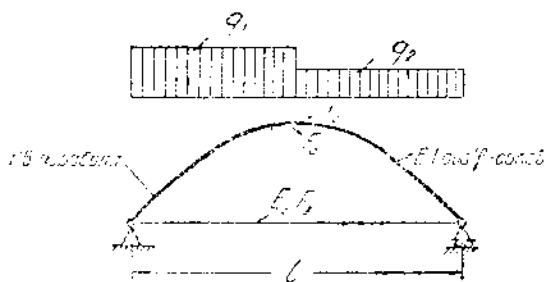
или после преобразований:

$$H_{кр} = \frac{4\pi^2}{1 + 6,14 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{l^2} \quad (162)$$

Уравнение элюры вертикальных прогибов при этом получает вид:

$$v = \frac{l^3}{4\pi^2 EJ_0} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{1 - \frac{H}{H_{кр}}} \int_0^l q \sin \left(\frac{2\pi x}{l} \right) dx. \quad (163)$$

Для второго приближения надо положить, что a_2 и a_4 не равны нулю, а остальные $a_n = 0$; учитывая a_2 , a_4 и a_6 , получим третье приближение и т. д.



Фиг. 84.

Для случая арки с затяжкой, загруженной, как показано на фигуре 84, при учете обжатия оси свода и удлинения затяжки, распор H равен:

$$H = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{l^2}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \nu}, \quad (164)$$

где

$$\nu = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{f^2} \left(\frac{J_c}{F_c} + \frac{EJ_c}{E_2 F_2} \right). \quad (165)$$

В качестве первого приближения предположим:

$$v = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Выражение для первого члена (с коэффициентом a_2) будет такое же, как по формуле (163). Вычисления по формуле (161) дадут:

$$c_1' = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \nu.$$

Введем обозначение $H'_{кр}$ для распора, обращающего в нуль коэффициент при a_2 в первой строчке системы уравнений (158b). После приведений получим:

$$H'_{кр} = \frac{\pi^2}{1 + 8,57 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \frac{EJ_c}{l^2}, \quad (166)$$

а коэффициент a_2 :

$$a_2 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{2\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{(q_1 + q_2) l^4}{EJ_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{H}{H'_{кр}}}.$$

Таким образом, уравнение вертикальных прогибов получит вид:

$$v = \frac{l^4}{\pi^5 E J_0} \left\{ \frac{1}{8} \cdot \frac{q_1 - q_2}{1 - \frac{H}{H_{кр}}} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{2\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{q_1 + q_2}{1 - \frac{H}{H_{кр}}} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \right\}. \quad (167)$$

Сравнение формул (166) и (162) показывает, что $H'_{кр}$ раза в три-четыре (примерно) меньше $H_{кр}$. Тем не менее нагрузка q , вызывающая распор H , равный $H_{кр}$, не является для арки критической в смысле потери устойчивости. Действительно, рост прогибов v в этом случае должен сопровождаться сближением опор, а последнее немислимо, так как распор H является пассивной силой, возбуждаемой внешними активными нагрузками. Арка теряет устойчивость при нагрузке, равной [см. (164)]:

$$\frac{q_1 + q_2}{2} \cdot l = \frac{8f}{l} \cdot (1 + \nu) H_{кр}, \quad (167a)$$

где $H_{кр}$ можно вычислить приближенно по формуле (162).

Последняя формула вообще нуждается в некотором уточнении, что будет сделано в следующем параграфе.¹

§ 27. Проверка устойчивости сжато-изогнутой двухшарнирной параболической арки. Энергетический метод

Формула (162) была получена из системы уравнений (158a), как первое приближение в предположении, что коэффициенты $a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 0$.

Второе приближение получим, положив, что a_2 и a_4 не равны нулю, а все остальные $a_n = 0$. $H_{кр}$ при этом найдем из условия, чтобы детерминант знаменателя двух уравнений равнялся нулю. Если арка очерчена по линии давления от нагрузки, то $C_2 = C_4 = 0$. Равенство нулю детерминанта уравнений в этом случае определит возможность появления деформаций изгиба, т. е. потери аркою ее формы. Если арка сжато-изогнута, то c_2 и c_4 не равны нулю, в таком случае равенство нулю детерминанта уравнений определит величину критической нагрузки, при которой деформации неограниченно растут, а арка теряет устойчивость в нарастании деформаций. Раскрывая этот детерминант, получим квадратное уравнение относительно $H_{кр}$.

Наименьший корень² этого уравнения будет:

$$H_{кр} = \frac{63,2}{1 + 6,04 \frac{f^2}{l^2} + 0,6 \sqrt{1 + 12,7 \frac{f^2}{l^2} + 64,2 \frac{f^4}{l^4}}} \cdot \frac{E J_0}{l^2}. \quad (168)$$

Можно получить более простую структуру выражения для $H_{кр}$, если решить квадратное уравнение по приближенной формуле Ньютона:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

где x_0 — приближенное, а x_1 — уточненное значение корня уравнения $f(x) = 0$.

¹ В упомянутой выше работе: Н. В. Корноухов, Проверка устойчивости арок от произвольно расположенных вертикальных нагрузок, в сборнике „Сти́йкість арок“, Ак. Наук. УССР Киев, 1936 в § 4 дана проверка напряжений упругой двухшарнирной арки с учетом ее деформаций.

² Большой корень уравнения H_2 , соответствующий потере устойчивости по четырем полу волнам, можно получить, заменив в знаменателе (168) знак перед радикалом на обратный.

Зная, что наименьший корень квадратного уравнения мало отличается от приближенного значения по формуле (162), получаем по этому способу:

$$H_{кр} = 39,5 \cdot \frac{1 + 6,35 \left(\frac{f}{l}\right)^2}{1 + 12,5 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + 43,4 \left(\frac{f}{l}\right)^4} \cdot \frac{EJ_0}{l^2} \quad (168a)$$

Аналогично получим третье приближение, считая, что a_2 , a_1 и a_0 не равны нулю. В этом случае для определения $H_{кр}$ придется разыскивать наименьший корень кубического уравнения.

Сравним результаты этих трех приближений энергетического метода со вторым приближением статического метода [формула (152)].

Таблица критического распора $H_{кр}$

Метод	Приближение	f/l Формулы	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	Множитель
Энергетический . . .	1	(162)	39,5	37,2	31,7	23,5	15,56	5,53	} $\frac{EJ_0}{l^2}$
	2	(168)	39,5	37,2	31,6	23,06	14,97	5,13	
	—	(168a)	—	—	—	—	(14,96)	(5,10)	
	3	—	39,5	37,2	31,6	23,0	14,94	5,12	
Статический	2	(152)	39,5	37,2	31,5	22,9	14,85	5,02	

Как видно из этой таблицы, результаты 2-го и 3-го приближения настолько совпадают, что надобность в 4-м приближении отпадает. Результаты первого приближения для пологих арок $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{3}$ можно признать вполне пригодными для практического употребления. Пользуясь численными результатами 3-го приближения, путем интерполяции можно составить уточненную формулу:

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{l^2} \quad (169)$$

Эта формула, с одной стороны, не сложнее формулы первого приближения, а с другой стороны, дает примерно точность третьего приближения (результаты численных подсчетов по этой формуле соответственно столбцам таблицы: 39,5; 37,25; 31,4; 22,9; 14,91; 5,21).

§ 28. Проверка устойчивости сжато-изогнутых арок любого очертания с любым законом изменения жесткости вдоль оси

Если арка очерчена по линии давления, а загрузка вертикальна, то, как известно:

$$q + H \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

В соответствии с этим формула (156) потеряет первый член. В данном случае (ось арки по линии давления) прогибы арки, пока устойчивость не будет потеряна, равны нулю. Так как в момент потери устойчивости грузы уже

приложены, то вся работа опустившихся грузов превращается в энергию изгиба арки: $V_A = T$.

Отсюда, согласно формулам (155) и (156), получим формулу для критического значения распора:

$$H_{кр} = \frac{\int_0^l EJ_0 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} \right)^2 dx} \quad (170)$$

Эта формула пригодна и для сжато-изогнутых арок, так как в § 27 мы видели, что величина $H_{кр}$ определяется детерминантом знаменателя систем уравнений (158) и от нагрузок не зависит.

Формулу эту можно также рассматривать как частный случай для вертикальной нагрузки более общей формулы (142) для произвольной нагрузки (не только сжимающей, но и изгибающей), выведенной нами в § 24. Применительно к аркам (см. § 24) можно из соображений о подобии треугольников писать $\frac{dv}{dx}$ вместо $\Delta\delta\varphi$; тогда, принимая во внимание формулу (155) для энергии изгиба арки, формулу (142) перепишем для арок в таком виде:

$$\int_0^s N \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 ds = \int_0^l EJ_0 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (171)$$

Эта формула определяет критическое значение нагрузки через величину продольной силы N .

Если нагрузки арки вертикальны и арка очерчена по линии давления, то $N = \frac{H}{\cos \varphi} = H \frac{ds}{dx}$; формула (171) приводится к виду (170).

Если на арку действует такая наклонная нагрузка,¹ что величина продольной силы постоянна, то

$$N_{кр} = \frac{\int_0^l EJ_0 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{ds}{dx} dx} \quad (172)$$

Формулы (171), (170) и (172) пригодны не только для расчета двухшарнирных арок, но и для бесшарнирных, одношарнирных и трехшарнирных.

Вычисления по этим формулам производятся в следующем порядке.

В виде функций неопределенных параметров $a_1, a_2, a_3, \dots$ задается уравнение эпюры вертикальных прогибов v арки, удовлетворяющее условиям ее закрепления. Так, например, нужно, чтобы шарниру соответствовало значение $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$, жесткой заделке: $\frac{dv}{dx} = 0$, концам арки:

$$v_A = v_B = 0, \quad u_A = u_B = 0.$$

Соотношение между неопределенными параметрами $a_1, a_2, a_3, \dots$ определяются из условия обращения в минимум критической нагрузки (или критического распора $H_{кр}$):

$$\frac{\partial H_{кр}}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial H_{кр}}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial H_{кр}}{\partial a_3} = 0 \dots$$

¹ Например, равномерная радиальная нагрузка на круговую арку.

или для формулы (172):

$$\frac{\partial N_{кр}}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial N_{кр}}{\partial a_3} = 0; \quad \frac{\partial N_{кр}}{\partial a_4} = 0 \dots$$

Чем ближе к опаснейшей действительной подобрана форма кривой искривления, тем точнее получатся результаты, причем, если будет угадана действительная кривая искривления, то получится точный результат, в противном случае получится всегда преувеличенный результат для критических нагрузки, распора, продольной силы и т. д.

Для облегчения интегрирования выражений числителя и знаменателя формул (170)—(172) могут быть применены приближенные формулы механических квадратур Симпсона, Котеса, Уэддла, Чебышева и других.

Например, формула Симпсона:

$$\int_0^l \psi(x) dx = \frac{l}{24} \left[\psi(0) + \psi(l) + 4 \left[\psi\left(\frac{l}{8}\right) + \psi\left(\frac{3l}{8}\right) + \psi\left(\frac{5l}{8}\right) + \psi\left(\frac{7l}{8}\right) \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[\psi\left(\frac{2l}{8}\right) + \psi\left(\frac{4l}{8}\right) + \psi\left(\frac{6l}{8}\right) \right] \right]. \quad (173)$$

Рассмотрим на примере применение формулы (170).

Подразделим (см. фиг. 84а) пролет арки на 8 равных кусков и перенумеруем пограничные точки этих кусков: А, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, В. Для краткости записи введем далее следующие обозначения: для вертикальной проекции жесткости сечения — букву D:

$$D = EJ \cos \varphi = EJ_0, \quad (174)$$

для величины $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ введем обозначение τ или $(1+t)$

$$\tau = 1 + t = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \quad (175)$$

Кроме того, обозначим:

$$\frac{dv}{dx} = v'; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = v''.$$

При этом будем различать эти величины: $D_A, D_1, D_2, \dots, D_B$ или $\tau_A, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_B$, а также v' и v'' для перенумерованных нами сечений А, 1, 2, ... В.

Тогда, пользуясь обозначениями (174) и (175), а также формулой (173), считая эпюру прогибов v либо антисимметричной, либо симметричной, а арку симметричной, формулу (170) можно представить так:

$$H_{кр} = \frac{D_A(v_A'')^2 + 4D_1(v_1'')^2 + 2D_2(v_2'')^2 + 4D_3(v_3'')^2 + D_4(v_4'')^2}{\tau_A(v_A')^2 + 4\tau_1(v_1')^2 + 2\tau_2(v_2')^2 + 4\tau_3(v_3')^2 + \tau_4(v_4')^2}. \quad (170')$$

Двухшарнирная арка. Если арка двухшарнирна и эпюру дополнительных прогибов можно задать в первом приближении

$$v = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad (157'')$$

то

$$(v')^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{l}; \quad (v'')^2 = \frac{16\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{2\pi x}{l}.$$

Для различных сечений эти величины будут иметь значения:

Сечения:	A	1	2	3	4	5	6	7	B	Множитель
$\frac{x}{l}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	—
$(v')^2 =$	1	0,5	0	0,5	1	0,5	0	0,5	1	$\frac{4\pi^2}{l^2}$
$(v'')^2 =$	0	0,5	1	0,5	0	0,5	1	0,5	0	$\frac{16\pi^4}{l^4}$

Таким образом, если сделать для двухшарнирной арки допущение (157') о форме эпюры v дополнительных прогибов при потере устойчивости, то формула (170') примет вид:

$$H_{кр} = \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}(D_1 + D_2 + D_3)}{1 + \frac{1}{6}(t_A + 2t_1 + 2t_3)} \quad (176)$$

Можно ожидать, что степень погрешности этой приближенной формулы примерно такая же, как и формулы (162), так как в основу этих формул положено то же допущение (157').

Действительно, применяя формулы (176) к параболической двухшарнирной арке с постоянным EJ_0 (случай детально разобранный в § 27), получим:

$$D_1 = D_2 = D_3 = EJ_0; \quad t = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 16 \frac{f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2;$$

или

$$t_A = 16 \frac{f^2}{l^2}; \quad t_1 = 9 \frac{f^2}{l^2}; \quad t_3 = \frac{f^2}{l^2};$$

откуда

$$H_{кр} = \frac{4\pi^2}{1 + 6 \frac{f^2}{l^2}} \cdot \frac{EJ_0}{l^2}.$$

Соответственно столбцам таблицы § 27 это даст коэффициенты 39,5; 37,3; 31,9; 23,7; 15,8; 5,65, т. е. величины, почти совпадающие с данными первого приближения по энергетическому методу [(формула (162))] и, при сравнении с точным значением (третье приближение), дающие ошибку для пологих арок ($\frac{f}{l} \leq \frac{1}{3}$) меньше 5% и для высоких арок с $f = l$ ошибку в 10% в сторону преувеличения критических нагрузок.

§ 29. Формулы и графики для двухшарнирных арок: параболической с разными законами изменения сечения и круговой постоянного сечения

1. Параболическая арка с $EJ \cos \varphi = \text{const}$

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{l^2} \quad (169)$$

2. Параболическая арка с $EJ = \text{const.}$
В этом случае

$$D = EJ \cos \varphi = \frac{EJ}{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2}}.$$

Откуда

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + 9 \left(\frac{f}{l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{f}{l}\right)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}} \right\} \frac{EJ}{3l^3}. \quad (177)$$

3. Параболическая арка с законом изменения сечения по Шрасснеру

$$D = EJ \cos \varphi = \frac{EJ_c}{1 - (1 - n) \left(1 - \frac{2x}{l}\right)},$$

где

$$n = \frac{J_c}{J_A \cos \varphi_A},$$

а J_c и J_A — моменты инерции сечения арки в ключе и в пяте.
В этом случае

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \left\{ \frac{1}{1 + 3n} + \frac{1}{2 + 2n} + \frac{1}{3 + n} \right\} \cdot \frac{4EJ_c}{3l^3}. \quad (178)$$

4. Арка по дуге круга с постоянным сечением $EJ = \text{const.}$
Введем обозначение:

$$c = \sin \varphi_A = \frac{l}{2R} = \frac{1}{\frac{f}{l} + \frac{l}{4f}}. \quad (179)$$

Тогда формула (176) дает:

$$H_{кр} = \frac{\sqrt{1 - (0,75c)^2} + \sqrt{1 - (0,50c)^2} + \sqrt{1 - (0,25c)^2}}{\frac{1}{1 - c^2} + \frac{2}{1 - (0,75c)^2} + \frac{2}{1 - (0,25c)^2} + 1} \cdot \frac{8\pi^2 EJ^*}{l^3}. \quad (180)$$

5. Арка по дуге параболы m -ой степени с постоянным значением для $EI_0 = EJ \cos \varphi$.

Ось арки очерчена по кривой:

* Формула (180) годна для пологих арок. Для проверки устойчивости полуциркульной арки и близких к ней предлагается пользоваться общей формулой (171).

$$y = f \left[1 - \left(1 - \frac{2x}{l} \right)^m \right]. \quad (181)$$

Если m нечетное, то по этой формуле вычисляем ординаты для левой половины арки, а правую строим симметрично левой.

Формула (176) в этом случае дает:

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + \gamma \left(\frac{f}{l} \right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{l^2}, \quad (182)$$

где коэффициент γ определяется по формуле:

$$\gamma = \frac{2}{3} m^2 \left[1 + 2 \cdot \frac{1 + 3^{2m-2}}{4^{2m-2}} \right]. \quad (183)$$

Для $m=2$ эта приближенная формула дает значение: $\gamma=6,0$, вместо определенного более точно (§ 27) значения: $\gamma=6,6$ [см. формулу (169)]. Поэтому с целью уточнения предлагается коэффициенты γ , определенные по формуле (183), увеличить на 10%. Тогда получим следующую табличку значений коэффициентов γ для разных m :

$m =$	1,5	2,0	2,5	3,0
$\gamma =$	5,0	6,6	8,7	10,8
$\frac{1}{f} \gamma_{кр}$	0,647	0,75	0,823	0,875

В последней строке этой таблички дано отношение $\left(\frac{\gamma_{кр}}{f} \right)$ ординаты в четверти пролета к подъему арки f .

По данным § 27, по формулам (169), (177), (178) и (180) построены графики фиг. 85, 86, 87 и 88.

На графике фиг. 85 даны кривые коэффициента β формулы

$$H_{кр} = \beta \frac{EJ_c}{l^2} \quad (184)$$

для арок постоянного сечения по дуге квадратной параболы и по дуге круга, а также для параболической арки с постоянным значением

$$EJ \cos \varphi = EJ_0.$$

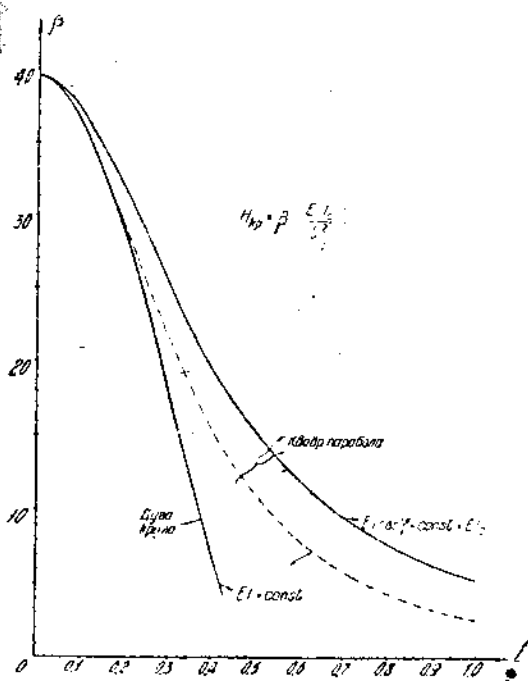
На графике фиг. 86 даны кривые коэффициента μ приведения длины арки:

$$H_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_c}{(\mu l)^2} \quad (185)$$

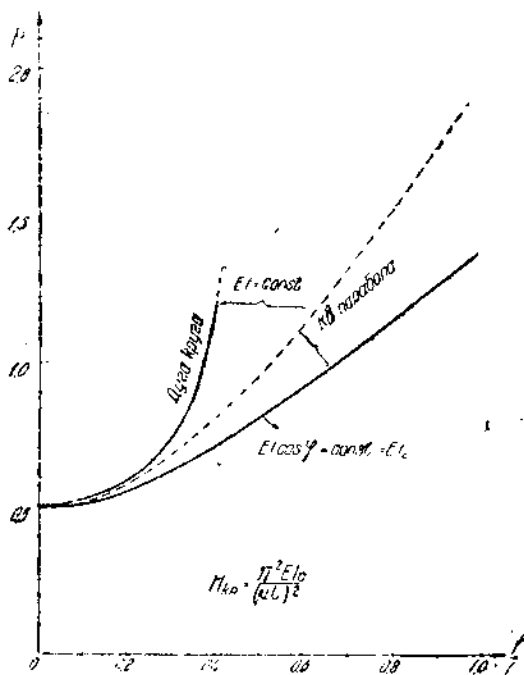
для тех же трех типов арок.

На графике фиг. 87 даны кривые коэффициента α формулы

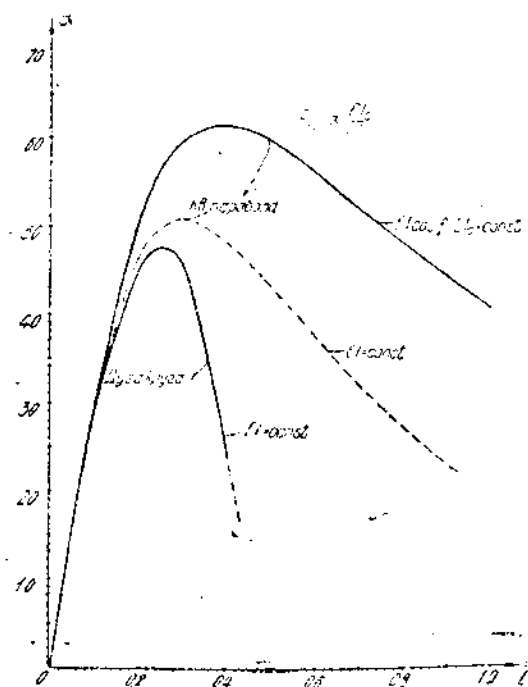
$$P_{кр} = \alpha \frac{EJ_c}{l^2} \quad (186)$$



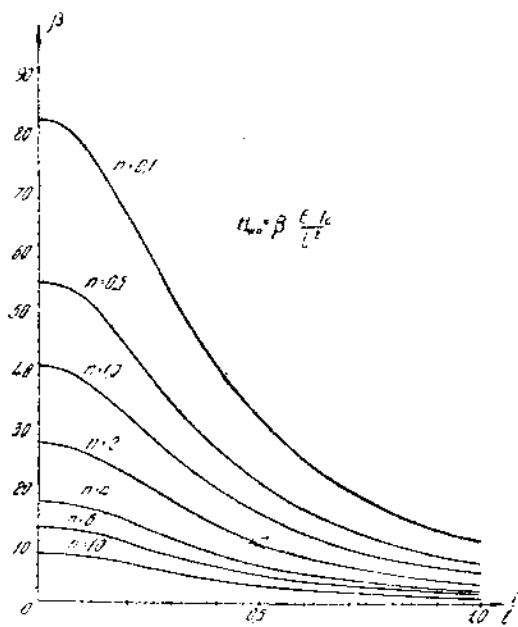
Фиг. 85.



Фиг. 86.

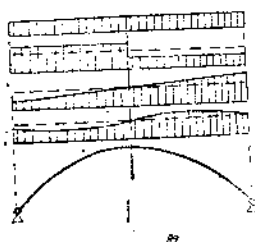


Фиг. 87.



Фиг. 88.

для тех же трех типов арок. Формула (186) определяет критическую вертикальную нагрузку арки, и верна в тех случаях, если нагрузка $P_{кр}$ может быть образована, как сумма двух нагрузок: равномерно-распределенной по всему пролету и нагрузки антисимметричной.



Фиг. 89.

На графике фиг. 88 даны кривые коэффициента β формулы (184) для параболических арок с законом изменения сечения по Штрасснеру.

Из рассмотрения фиг. 87 замечаем, что для каждого типа арки существует некоторое оптимальное соотношение пролета l к подъему f , которому соответствует наибольшая несущая способность арки $P_{кр}$.

§ 30. Проверка устойчивости бесшарнирной арки любого очертания

Для проверки бесшарнирной арки на устойчивость при действии вертикальных нагрузок может быть применена формула (170). Эпюра дополнительных прогибов v должна быть при этом задана в соответствии с концевыми условиями:

$$1) \quad v_A = v_B = 0,$$

$$2) \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_A = \left(\frac{dv}{dx}\right)_B = 0,$$

$$3) \quad u_B - u_A = \int_0^l \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = 0.$$



Фиг. 90.

Сравнительные подсчеты и опыты показывают, что для бесшарнирной арки более опасна антисимметричная форма (см. фиг. 90) потери устойчивости. Зададим поэтому v в виде ряда:

$$v = a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + a_5 \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots, \quad (a)$$

$$\text{где} \quad a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 0. \quad (b)$$

Все три граничные условия при этом будут удовлетворены.¹

Для первого приближения можно ограничиться уравнением:

$$v = a \left(\cos \frac{\pi x}{l} - \cos \frac{3\pi x}{l} \right). \quad (187)$$

Для случая арки, очерченной по квадратной параболе, с постоянным значением $EJ_0 = EJ \cos \varphi$, подстановка выражения (187) в (170) дает:

$$H_{кр} = \frac{\frac{41 \cdot \pi^4}{l^3} \cdot EJ_0}{5 \frac{\pi^2}{l} + \frac{16f^2}{l^3} \left(\frac{5}{3} \pi^2 - 6,5 \right)},$$

¹ Первое условие удовлетворяется зависимостью (b), второе — самим уравнением (a), а третье для симметричной арки удовлетворяется автоматически, так как подинтегральная

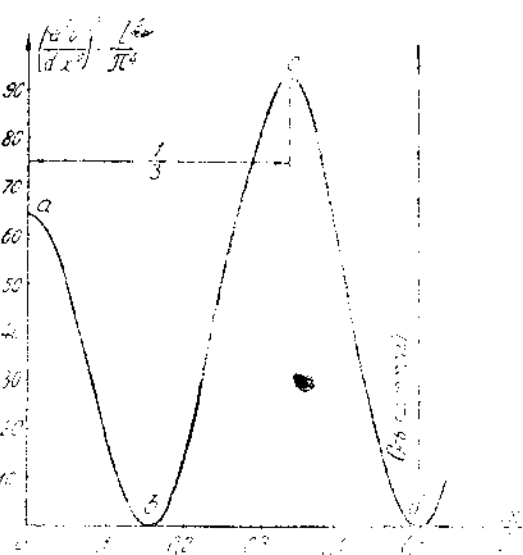
функция $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$ при v , заданном уравнением (a), антисимметрична и поэтому интеграл равен нулю.

или после преобразований:

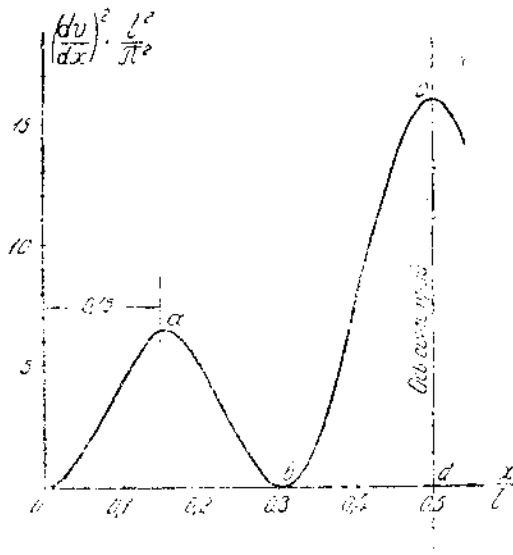
$$H_{кр} = \frac{80,8}{1 + 3,23 \left(\frac{f}{l} \right)} \cdot \frac{EJ_0}{2 l^2}. \quad (188)$$

Чтобы получить формулу для бесшарнирной симметричной арки в общем случае любого очертания и любого изменения сечения, рассмотрим (см. фиг. 91 и 92) графики функций $\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2$ и $\left(\frac{dv}{dx} \right)^2$, входящих в подинтегральные выражения числителя и знаменателя формулы (170).

Имея в виду, с одной стороны, волнистый характер графиков фиг. 91 и 92, а с другой — плавное (без волн) изменение от пят к ключу величин EJ_0



Фиг. 91.



Фиг. 92.

и $\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$, приходим к выводу, что интеграл числителя (170) можно довольно точно выразить (см. фиг. 91):

$$\int_0^l EJ_0 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = 2 \frac{\pi^4}{l^3} \cdot l \{ (\text{пл. } Oab) \cdot D_A + (\text{пл. } bcd) \cdot D_T \},$$

где D_A и D_T — соответственно значения величины $EJ_0 = EJ \cos \varphi$ для сечений арки в пяте и в трети пролета. Вычислив по графику фиг. 91 площади Oab и bcd , получим для интеграла числителя выражение:

$$\frac{\pi^4}{6 l^3} [64 D_A + 182 D_T].$$

Аналогично (см. фиг. 92) получаем для интеграла знаменателя (170):

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \cdot \frac{ds}{dx} \right)^2 dx &= \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) dx = 2 \frac{\pi^2}{l^2} \cdot l [(\text{пл. } Oab) (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{0,15}) + \\ &+ (\text{пл. } bcd) (1 + \operatorname{tg}^2 0)] = 5 \frac{\pi^2}{l} (1 + 0,4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_{0,15}), \end{aligned}$$

где $\varphi_{0,15}$ — угол наклона касательной к оси арки в сечении $x=0,15l$.

Таким образом, для бесшарнирной арки любого симметричного очертания с любым законом изменения сечения по длине можно предложить приближенную формулу:

$$H_{кр} = \frac{21 \cdot D_A + 60 \cdot D_T}{1 + 0,4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_{0,15}} \cdot \frac{1}{R} \quad (189)$$

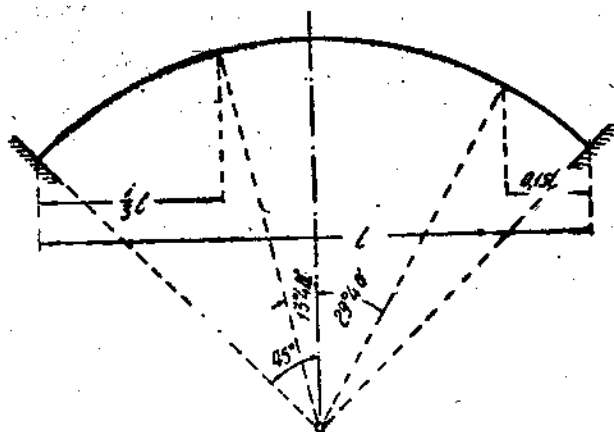
Пример. Применим формулу (189) для определения критического распора бесшарнирной арки постоянного сечения по дуге круга с центральным углом 90° (см. фиг. 93). В этом случае:

$$\cos \varphi_A = 0,707; \quad \cos \varphi_T = 0,972; \quad \operatorname{tg} \varphi_{0,15} = 0,570.$$

Отсюда получаем по формуле (189):

$$H_{кр} = \frac{21 \cdot 0,707 + 60 \cdot 0,972}{1 + 0,4 \cdot 0,57^2} \cdot \frac{EJ}{R} = 64,75 \frac{EJ}{R}.$$

Отношение подъема к пролету в этом случае $\frac{f}{l} = 0,207$.



Фиг. 93.

Для параболической арки с таким же отношением $\frac{f}{l}$ при постоянном EJ_0 по формуле (188) получим:

$$H_{кр} = 71,0 \frac{EJ_0}{R},$$

а при постоянном EJ по формуле (189):

$$H_{кр} = 64,8 \frac{EJ}{R}.$$

* Для рассмотренного выше случая параболической арки с постоянным значением EJ_0 формула (189) дает:

$$H_{кр} = \frac{81}{1 + 3,23 \left(\frac{f}{l} \right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{R},$$

что весьма хорошо совпадает с результатами формулы (188).

§ 31. Проверка устойчивости трехшарнирной арки любого очертания

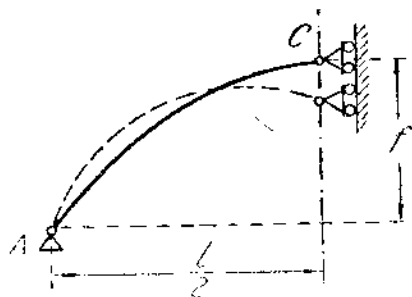
Опыт показывает, что при потере устойчивости трехшарнирной арки происходит дополнительная симметричная деформация: ключевой шарнир либо оседает (см. фиг. 94), либо подымается, причем создается перелом в ключе. Теоретические подсчеты подтверждают это положение; критическая нагрузка для трехшарнирной арки при такой симметричной форме выпучивания (см. фиг. 94) получается меньше, чем при антисимметричной форме, которая подобна форме выпучивания двухшарнирной арки. Отсюда заключаем, что проверку устойчивости трехшарнирной арки можно заменить проверкой устойчивости ее половины, если устроить в ключевом шарнире вертикально подвижную опору (см. фиг. 95). Концевые условия для возможной кривой выпучивания при этом будут:

$$v_A = u_A = 0.$$

$$u_C = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = 0. \quad (a)$$



Фиг. 94.



Фиг. 95.

Кроме того, принимая во внимание, что в точках A и C шарниры и изгибающие моменты в них равны нулю, получим еще два условия:

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_A = \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_C = 0. \quad (b)$$

Если задать возможную кривую отклонения в виде ряда:

$$v = a \frac{x}{l} + \sum a_{2n} \sin \frac{2n\pi x}{l}, \quad (c)$$

то все эти условия, кроме $u_C = 0$, автоматически удовлетворяются.

Чтобы удовлетворить этому последнему условию, нужно связать формулой коэффициенты $a, a_2, a_4, a_6, \dots$

Подставив в формулу (a) вместо $\frac{dv}{dx}$ его выражение из (c), получим после некоторых преобразований:

$$a = \frac{l}{f} \sum a_{2n} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \sin \frac{2n\pi x}{l} dx. \quad (d)$$

Если арка очерчена по квадратной параболе, то

$$a = -\frac{8}{\pi} \left[\frac{a_2}{1} + \frac{a_6}{3} + \frac{a_{10}}{5} + \dots \right].$$

Ограничимся первым приближением, положив, что

$$a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 0.$$

Тогда:

$$v = a \left(\frac{x}{l} - \frac{\pi}{8} \sin \frac{2\pi x}{l} \right). \quad (190)$$

Подставив это значение для v в формулу (170), получим для параболической трехшарнирной арки с постоянным значением

$$EJ_0 = EJ \cos \varphi = \text{const:}$$

$$H_{кр} = \frac{\frac{4\pi^4}{l^3} EJ_0}{\frac{1}{l} \left[\frac{32}{\pi^2} + \pi^2 \right] + \left(\frac{4f}{l} \right)^2 \cdot l \cdot \left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{64}{3\pi^2} \right]},$$

или после численных преобразований:

$$H_{кр} = \frac{29,7}{1 + 1,99 \left(\frac{f}{l} \right)^2} \cdot \frac{EJ_0}{l^2}. \quad (191)$$

Пользуясь формулой Симпсона, получаем следующую формулу для параболической арки с произвольным симметричным законом изменения жесткости EJ :

$$H_{кр} = \frac{29,7}{1 + 1,99 \left(\frac{f}{l} \right)^2} \cdot \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3l^2}. \quad (192)$$

Наконец, для произвольной симметричной трехшарнирной арки можно получить, аналогично формуле (176) для двухшарнирной арки (см. § 28 и 29), такую приближенную формулу:

$$H_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{D_1 + D_2 + D_3}{1 + [0,047t_1 + 0,047t_2 + 0,043t_3 + 0,64t_4]}. \quad (193)$$

В формулах (192) и (193) приняты обозначения § 28 и 29.

Глава V

ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГИХ СИСТЕМ

§ 32. Случай осевого сжатия

Дифференциальное уравнение эпюры прогибов, возникающих при потере устойчивости, имеет в этом случае вид:

$$TJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M,$$

где модуль продольного изгиба T может быть определен согласно методике Энгессер-Кармана. Для прямоугольного поперечного сечения (см. § 5):

$$T = \frac{4E \cdot E'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2} \quad (5)$$

В общем случае материала конструкции, характеризуемого криволинейной диаграммой сжатия, модуль T — величина, меняющаяся с изменением среднего продольного напряжения. Если же материал может быть охарактеризован идеализированной диаграммой сжатия из двух прямых (см. § 6),

то модуль T имеет всего два численных значения: для напряжений $\sigma = \frac{N}{F} \leq \sigma_p$ модуль равен модулю упругости E , а для напряжений $\sigma = \frac{N}{F} > \sigma_p$ модуль T определяется по формуле:

$$T = \frac{4m}{(1 + \sqrt{m})^2} \cdot E. \quad (38)$$

При проверке устойчивости конструкций, испытывающих только осевое сжатие без изгиба, достаточно в формулах для проверки устойчивости упругих конструкций произвести повсеместную замену жесткости EJ на уменьшенную жесткость TJ , или моментов инерции J на уменьшенные J' , где:

$$J' = \frac{T}{E} \cdot J. \quad (194)$$

Приведенные длины стержней $l' = \frac{l}{J} \cdot J_0$, входящие в формулы для упругих конструкций, следует при переходе к неупругим конструкциям соответственно заменить на

$$l'' = \frac{l}{J'} \cdot J_0 = \frac{l'}{J'} \cdot J = l' \cdot \frac{E}{T}. \quad (195)$$

Рассмотрим ниже ряд примеров.

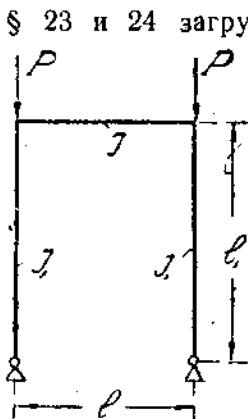
Пример 1. Двухшарнирная прямоугольная рама § 23 и 24 загружена двумя равными вертикальными грузами P , расположенными над стойками (см. фиг. 96). В этом случае распор H равен нулю.

Формула (144) приобретает вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{2P_{кр}}{2F_1} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{l'}{l_1''}}{24 + 20 \frac{l'}{l_1''} + 5 \left(\frac{l_1'}{l_1''} \right)^2} \cdot \frac{60T}{\lambda_1^2}, \quad (196)$$

где F — площадь поперечного сечения стойки, а

$$\lambda_1 = l_1 \sqrt{\frac{F_1}{J_1}}.$$



Фиг. 96.

Если материал рамы характеризуется криволинейной диаграммой сжатия, то пользование формулой (196) становится затруднительным, так как величины T и l_1' зависят от $\sigma_{кр}$. В этом случае для рамы с заданным соотношением геометрических размеров и жесткостей удобнее построить график зависимости между гибкостью стойки λ_1 и критическим напряжением $\sigma_{кр}$, применив нижеследующую формулу:

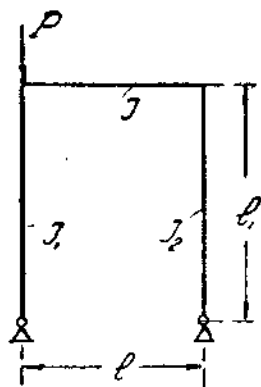
$$\lambda_1^2 = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{l'}{l_1} \cdot \frac{T}{E}}{24 + 20 \frac{l'}{l_1} \cdot \frac{T}{E} + 5 \left(\frac{l'}{l_1} \cdot \frac{T}{E} \right)^2} \cdot \frac{60 \cdot T}{\sigma_{кр}}. \quad (196')$$

Задавая ряд значений $\sigma_{кр}$ (например, 700, 800, 900, 1000 кг/см²) и зная соответствующие им значения модуля T (см. § 5), вычисляем соответствующий ряд значений гибкости λ_1 и строим график зависимости $\sigma_{кр}$ от λ_1 .

Пример 2. На раму предыдущего примера действует только одна сила (см. фиг. 97) над одной из стоек. В этом случае получается, что

приведенные моменты инерции J_1 и J_2 левой и правой стоек могут быть и не равны.

Если для упрощения предположить, что для такой рамы с неодинаковыми сечениями стоек эшюра ΔM (см. § 24) имеет вид, как на фиг. 78, то для упругой рамы вместо формулы (144) получим:



Фиг. 97.

$$\sum P_{кр} = \frac{1 + \frac{J_1}{J_2} + \frac{l}{l_1}}{24 + 20 \frac{l_1}{l} + \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 \left[5 + \frac{l}{l_1} \cdot \frac{H}{\sum P} \right]} \cdot \frac{60 EJ_1}{l^3} \quad (144')$$

Таким образом, для нашей задачи, аналогично предыдущему примеру, получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F_1} = \frac{1 + \left(\frac{J_1}{J_2} + \frac{l}{l_1}\right) \frac{T}{E}}{24 + 20 \frac{l}{l_1} \cdot \frac{T}{E} + 5 \left(\frac{l}{l_1} \cdot \frac{T}{E}\right)^2} \cdot \frac{60 T}{\lambda_1^3} \quad (197)$$

Пример 3. Для проверки устойчивости арок, очерченных по линии давления, достаточно в формулах (176), (189) и (193), вместо модуля E , подставить модуль T , т. е. принять: $D = TJ \cos \varphi$.

Кроме того, следует помнить, что появление модуля $T = 0$, в каком-либо сечении аналогично появлению пластического шарнира в этом сечении и что при наличии четырех шарниров арка обращается в изменяемую систему и теряет устойчивость.

Если ось арки очерчена по квадратной параболе, то нагрузкой, вызывающей осевое сжатие, является равномерно-распределенная в плане нагрузка (см. фиг. 98). Поясним вышесказанное на примере проверки устойчивости двухшарнирной параболической арки постоянного сечения, нагруженной равномерно-распределенной в плане нагрузкой (фиг. 98, а).

Будем считать, что для материала арки применима ЦНИПС'овская диаграмма сжатия для дерева (см. § 5, фиг. 6).

В этом случае можно пользоваться формулой (176'):

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l}\right)^2} \cdot \frac{T_1 J \cos \varphi_1 + T_2 J \cos \varphi_2 + T_3 J \cos \varphi_3}{3 l^3}$$

В дальнейшем будем строить график зависимости

$$\bar{\varphi}_{кр} = \frac{(\sigma_c)_{кр}}{\sigma_{ср}} \quad \text{от} \quad \left(\frac{l}{i}\right).$$

Здесь $(\sigma_c)_{кр}$ — критическое напряжение ключевого¹ сечения, $\sigma_{ср} = \frac{E}{312}$ (см. § 6) — временное сопротивление дерева, а i — радиус инерции сечения: $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$. После преобразований получим из нашей формулы $H_{кр}$:

$$\frac{l}{i} = \frac{64,1}{\sqrt{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{E} \cos \varphi_1 + \frac{T_2}{E} \cos \varphi_2 + \frac{T_3}{E} \cos \varphi_3} \quad (b)$$

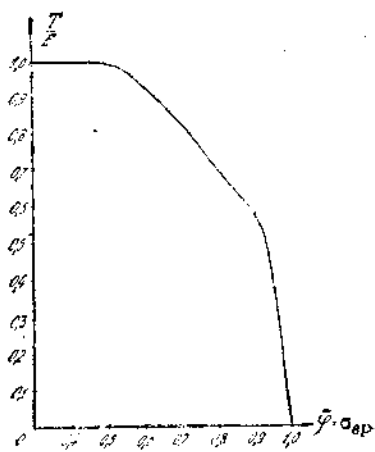
¹ Наибольшее напряжение имеет место в пите.

Здесь

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+9\left(\frac{f}{l}\right)^2}}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{f}{l}\right)^2}}; \quad \cos \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{l}\right)^2}}.$$

Кроме того,

$$\cos \varphi_A = \frac{1}{\sqrt{1+16\left(\frac{f}{l}\right)^2}}.$$



Фиг. 99.

Величины отношений $\frac{T_1}{E}$, $\frac{T_2}{E}$ и $\frac{T_3}{E}$ определяются по графику фиг. 99 (построенному на основании данных таблицы § 5), в зависимости от значений:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\bar{\varphi}_{кр}}{\cos \varphi_1}; \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{\bar{\varphi}_{кр}}{\cos \varphi_2}; \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{\bar{\varphi}_{кр}}{\cos \varphi_3}.$$

Пусть, например, $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$; тогда формула (b) приобретает вид:

$$\frac{l}{i} = \frac{53,9}{\sqrt{\bar{\varphi}_{кр}}} \cdot \sqrt{0,800 \frac{T_1}{E} + 0,894 \frac{T_2}{E} + 0,970 \frac{T_3}{E}}. \quad (c)$$

а величины: $\bar{\varphi}_1 = 1,25 \bar{\varphi}_{кр}$; $\bar{\varphi}_2 = 1,12 \bar{\varphi}_{кр}$; $\bar{\varphi}_3 = 1,03 \bar{\varphi}_{кр}$; $\bar{\varphi}_A = 1,414 \bar{\varphi}_{кр}$.

Задавая последовательно значения $\varphi_{кр} = 0,7; 0,6; 0,5$ и $0,4$, получим:

$\bar{\varphi}_{кр}$	0,7	0,6	0,5	0,4
$\frac{T_1}{E}$	0,606	0,770	0,915	1,00
$\frac{T_2}{E}$	0,730	0,866	0,975	1,00
$\frac{T_3}{E}$	0,805	0,923	0,996	1,00
$\frac{l}{i}$	88,3	105,5	122,3	139,4

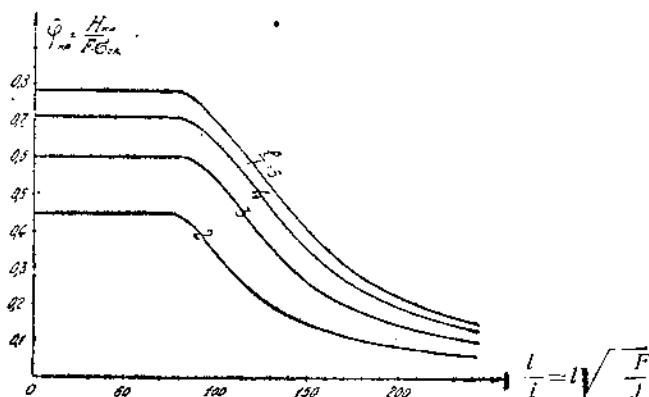
Наибольшее возможное значение $\bar{\varphi}_{кр}$ определяется следующим образом. Когда напряжения материала в сечении достигают временного сопротивления $\bar{\varphi} = 1$, то согласно фиг. 99 $T = 0$, и в сечении образуется пластический шарнир. Наибольшие напряжения имеют место в пятах. Считая, что появление в пятах рядом с действительными пластическими шарниров равносильно потере устойчивости, приравняем

$$(\bar{\varphi}_A)_{max} = \frac{\sigma_A}{\sigma_{cr}} = 1$$

и получаем:

$$(\varphi_{кр})_{max} = \frac{(\varphi_A)_{max}}{1,414} = 0,707.$$

На фиг. 100 приводятся графики зависимости $\bar{\varphi}_{кр} = \frac{H_{кр}}{F \cdot \sigma_{кр}}$ от гибкости $\frac{l}{i}$ для деревянных двухшарнирных параболических арок постоянного сечения с отношением $\frac{l}{f}$ пролета к стрелке подъема, равным 5, 4, 3 и 2.



фиг. 100.

Горизонтальные прямые, ограничивающие наибольшие ординаты этих кривых, построены, как сказано выше, из соображений о достижении в пятах напряжения, равного временному сопротивлению.

§ 33. Проверка устойчивости неупругих сжато-изогнутых конструкций. Случай больших эксцентриситетов

В случае больших начальных эксцентриситетов, измеряемых в метрах, как это имеет, например, место в рамах, можно считать, что в начальный момент потери устойчивости эксцентриситеты практически не меняются. Иначе говоря, можно считать, что величина модуля продольного изгиба T определяется начальным эксцентриситетом $e = \frac{M}{N}$ и продольной силой N . Такое допущение весьма облегчает расчет. В § 7 и 8 для материалов, характеризуемых идеализированной диаграммой сжатия из двух прямых (см. § 6), приведены графики фиг. 12, 13 и 18, пользуясь которыми легко получить модуль T по заданным значениям относительного эксцентриситета $p_e = \frac{e}{a}$ и относительного напряжения $n = \frac{N}{F \cdot \sigma_p}$ [см. формулы (27) и (38)].

Таким образом, проверка устойчивости за пределом пропорциональности в случае больших эксцентриситетов может быть сведена к проверке устойчивости упругой системы с уменьшенными моментами инерции J' , вместо J , где:

$$J' = J \cdot \frac{T}{E}. \quad (194)$$

Поэтому при проверке устойчивости сжато-изогнутых конструкций с большими эксцентриситетами вполне допустимо применение формулы (142),

выведенной из энергетических соображений (см. § 24):

$$\sum \int N(\Delta\delta\varphi)^2 ds = \sum \int T J \left(\frac{d\Delta\delta\varphi}{ds} \right)^2 ds. \quad (142')$$

В затруднительных случаях интегрирование может быть произведено приближенно либо при помощи механических квадратур, либо при помощи вычерчивания графика подинтегральной функции с последующим определением его площади.

Рассмотрим применение этой методики на примерах:

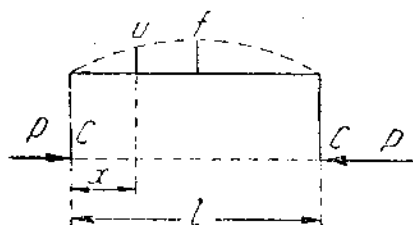
Пример 1. Эксцентрично-сжатый стержень (см. фиг. 101).

Для случая больших эксцентриситетов можно принять, что модуль T постоянен по длине стержня; тогда

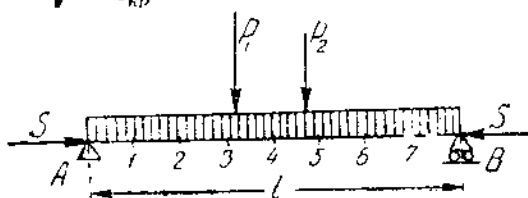
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 T J}{l^2},$$

или

$$\frac{l}{i} = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_{кр}}}.$$



Фиг. 101.



Фиг. 102.

Пример 2. Сжато-изогнутый стержень (см. фиг. 102). Примем дополнительную эпюру прогибов по формуле:

$$\Delta y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Помня, что $\Delta\delta\varphi = \frac{d\Delta y}{dx}$, применим формулу (142'), взяв интеграл правой части по формуле Симпсона:

$$\int_0^l \varphi(x) dx = \frac{l}{12} \left[\varphi(0) + 4 \cdot \varphi\left(\frac{l}{4}\right) + 2 \cdot \varphi\left(\frac{l}{2}\right) + 4 \varphi\left(\frac{3l}{4}\right) + \varphi(l) \right].$$

После преобразования получаем:

$$S_{кр} = \frac{\pi^2 J}{l^2} \cdot \frac{T_2 + T_4 + T_6}{3}. \quad (198)$$

* Для уточнения результата интегрирования можно вместо формулы Симпсона применить формулу Котеса:

$$\int_0^l \varphi(x) dx = \frac{l}{180} \left[7 \cdot \varphi(0) + 32\varphi\left(\frac{l}{8}\right) + 12\varphi\left(\frac{l}{4}\right) + 32\varphi\left(\frac{3l}{8}\right) + 14\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + 32\varphi\left(\frac{5l}{8}\right) + 12\varphi\left(\frac{3l}{4}\right) + 32\varphi\left(\frac{7l}{8}\right) + 7\varphi(l) \right].$$

В результате получим, вместо (198):

$$S_{кр} = \frac{\pi^2 J}{600 \cdot l^2} \cdot \{31(T_1 + T_7) + 40(T_2 + T_6) + 182(T_3 + T_5) + 94 \cdot T_4\}. \quad (198a)$$

Значения модуля продольного изгиба T_2 , T_4 и T_6 для сечений балки в четвертях пролета получаем по графикам (фиг. 12, 13 и 18) в зависимости от величины продольной силы $S_{кр}$ и относительных эксцентриситетов $p_c = \frac{M}{N \cdot a}$ для этих сечений. При построении графика удобнее формуле (198) придать вид:

$$\frac{l}{i} = \pi \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{3\sigma_{кр}}} \quad (198)$$

Пример 3. Проверить устойчивость рамы (см. фиг. 103) за пределом пропорциональности. Зададим форму дополнительных прогибов, так же, как и в § 24 на фиг. 78. Но так как в данном случае модуль T_1 для ригеля и модули T_2 , T_3 , T_4 для различных сечений стоек — величины различные, то вместо величины $\frac{l}{J} \cdot \frac{J_1}{l_1}$ введем некоторый, пока неопределенный коэф-

фициент Z .

Таким образом из выражений (d) и (e) § 24 получим:

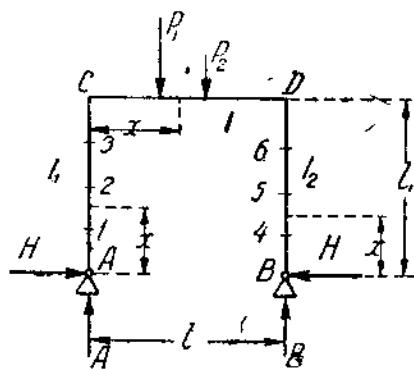
1) для стоек AC и BD :

$$\Delta \delta \varphi = C \cdot \left[3 \left(1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right) + Z \right], \quad (a)$$

где C — некоторый постоянный множитель;

2) для ригеля CD :

$$\Delta \delta \varphi = C \cdot \frac{l}{l_1} \left[1 - \frac{6x}{l} + \frac{6x^2}{l^2} \right]. \quad (b)$$



Фиг. 103.

Применяя эти выражения (a) и (b) к формуле (142') и производя интегрирование правой части приближенно по Симпсону, получим:

$$\sum P_{кр} = \frac{J_1(T_2 + T_C) + J_2(T_6 + T_D) + 2T_1 J \cdot \frac{l_1}{l} \cdot Z^2}{24 + 20Z + Z^2 \left(5 + \frac{l}{l_1} \cdot \frac{H}{\sum P} \right)} \cdot \frac{30^*}{l_1^2}. \quad (199)$$

Величины модулей продольного изгиба определяются в зависимости от эксцентриситетов и продольной силы для данного сечения. Последняя равна для T_2 и T_C опорной реакции A , для T_6 и T_D — опорной реакции B , для T_1 — распуру рамы H .

Величина коэффициента Z , определяющего форму дополнительного искривления рамы, должна быть выбрана так, чтобы $\sum P_{кр}$ получило минимальное значение. Последнее требование приводит к квадратному уравнению:

$$Z^2 + Z \left[2,4 - 0,1\Phi \cdot \left(5 + \frac{l}{l_1} \cdot \frac{H}{\sum P} \right) \right] - \Phi = 0, \quad (200)$$

где для сокращения обозначено:

$$\Phi = \frac{1}{2T_1 J} \cdot \frac{l}{l_1} [J_1(T_2 + T_C) + J_2(T_6 + T_D)].$$

* При интегрировании по Котесу получаем:

$$\sum P_{кр} = \frac{J_1[2T_1 + 3T_2 + 18T_3 + 7T_C] + J_2[2T_6 + 3T_7 + 18T_8 + 7T_D] + 30 \cdot J T_1 \cdot \frac{l_1}{l} Z^2}{24 + 20Z + Z^2 \left(5 + \frac{l}{l_1} \cdot \frac{H}{\sum P} \right)} \cdot \frac{2}{l_1^2}$$

Корни Z_1 и Z_2 уравнения (200) вещественны и имеют разные знаки; иско-
мый корень должен быть положительным.

По формуле (199) может быть произведена проверка устойчивости
рамы заданных частных размеров при заданной нагрузке. Желая обеспе-
чить раме коэффициент запаса на устойчивость равный K , увеличиваем
в K раз расчетную нагрузку, определяем распор H , как для упругой рамы,
затем определяем эксцентриситеты в сечениях стоек 2, C , 6 и D и модули
 T_2 , T_C , T_6 и T_D . Модуль ригеля T_1 для употребительных размеров рам,
в виду сравнительной малости продольного усилия ригеля с усилиями
стоек, в большинстве случаев равен модулю упругости E .¹ Получив мо-
дуль T , уточняем величину распора H , вводя для стоек уменьшенные
моменты инерции. Распор H в результате несколько уменьшится. Затем
уточняем эксцентриситеты и величины модулей T .

Если правая часть формулы (199) получится больше заданной левой
(увеличенной в K раз нагрузке), то коэффициент запаса K на устойчивость
обеспечен.

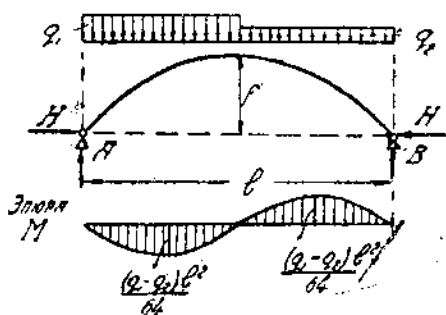
Пример 4. Проверить устойчивость двухшарнирной параболической
арки постоянного сечения, несимметри-
чно загруженной вертикальной нагруз-
кой (см. фиг. 104).

Распор H в этом случае можно
приблизительно принять равным:

$$H = \frac{(q_1 + q_2) l^2}{16f} \quad (c)$$

Опорные реакции:

$$A = \frac{3q_1 + q_2}{8} \cdot l, \quad B = \frac{3q_2 + q_1}{8} \cdot l.$$



Фиг. 104.

Таким образом, в этом случае линия давления параболической арки
не зависит от закона изменения сечений по ее длине. Продольная сила
в сечении равна:

$$N = H \cos \varphi + V \sin \varphi,$$

а изгибающий момент (для левой половины):

$$M = \frac{q_1 - q_2}{4} x \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

Таким образом, эксцентриситеты $c = \frac{M}{N}$ легко определить для всех
сечений.

Желая обеспечить арке коэффициент запаса на устойчивость не
меньше K , увеличиваем в K раз нагрузки и по значениям N и $|c|$ опреде-
ляем модули T_1 , T_2 , T_3 , T_6 , T_6 , T_7 .

Проверку устойчивости арки производим по формуле:

$$H_{кр} = \frac{39,5}{1 + 6,6 \left(\frac{f}{l} \right)^2} \cdot \frac{J}{6l^2} \cdot [(T_1 + T_2) \cos \varphi_1 + \\ + (T_2 + T_6) \cos \varphi_2 + (T_3 + T_6) \cos \varphi_3]. \quad (201)$$

Если правая часть этой формулы даст значение больше, чем заданное
значение распора от увеличенной в K раз нагрузки, то коэффициент за-
паса K на устойчивость арки обеспечен.

В разобранных выше примерах 2, 3 и 4 применен энергетический
метод, причем за исходные расчетные значения модулей T приняты зна-
чения, соответствующие состоянию рамы накануне потери устойчивости.
Вследствие указанных причин получаются несколько преувеличенные
коэффициенты запаса на устойчивость.

¹ Поэтому он принят при выводе формулы (199), как величина постоянная по всей длине
ригеля.

Рассмотрение графиков зависимости критического напряжения эскизно сжатых стержней от их гибкости (см. фиг. 42, 43, 44 и 45), показывает, как об этом сказано в конце § 20, что для материалов, характеризующихся идеализированной диаграммой сжатия из двух прямых, стержни, сжатые с большим эксцентриситетом, теряют устойчивость по формуле Энгессер-Кармана при модуле:

$$T = \frac{4m}{(1 + \sqrt{m})^2} \cdot E. \quad (38)$$

Модуль T , определенный по этой формуле, является наименьшим возможным для материала с заданной идеализированной диаграммой сжатия.

Поэтому можно, пользуясь формулами, полученными по статическому методу для упругих конструкций (см. гл. IV), заменив в них модуль E на модуль T по формуле (38), определить критическую величину нагрузки. При таком расчете получим несколько преуменьшенное значение коэффициента запаса на устойчивость. Пользуясь этими двумя методами, можем судить о действительной величине коэффициента запаса, заключающейся между преувеличенным и преуменьшенным значениями.

§ 34. О проверке устойчивости неупругих сжато-изогнутых конструкций в случае малых эксцентриситетов

Для стержней такая проверка устойчивости подробно рассмотрена в главе III, где приведено большое количество графиков. Для конструкций эта задача решается сложнее, чем в случае больших эксцентриситетов, так как тут нельзя пренебрегать деформациями конструкции по сравнению с начальными эксцентриситетами. Задачу приходится решать в несколько приемов по методу последовательных приближений, усложнив методику предыдущего параграфа. Найдя ориентировочно модули T , соответствующие начальным эксцентриситетам, вычисляем затем деформации конструкции, как упругой, с уменьшенными моментами инерции

$$J' = \frac{T}{E} J.$$

Вычислив деформации, уточняем сначала величины эксцентриситетов, а затем модулей T . Этот процесс повторяем несколько раз. Если случится, что величина деформаций стремится к некоторому конечному пределу, конструкция устойчива; если же деформации все время возрастают — конструкция потеряла устойчивость. Прием этот подробно разработан в численном виде в работе проф. Б. Н. Горбунова, посвященной проверке устойчивости деревянных арок.¹

Подробнее вопросы о проверке устойчивости за пределами пропорциональности с большим количеством примеров рассматриваются в работе автора, которая заканчивается сейчас оформлением и в ближайшее время будет передана для печати² в сборниках Института строительной механики АН УССР.

25 августа 1935 г.
Киев

¹ См. работу: Б. Н. Горбунов и В. Г. Чудновский, Проверка устойчивости деревянных арок по методу последовательных приближений. Сборник: „Стойкість арок“ АН УССР Киев, 1935.

² См. Н. В. Корноухов, Проверка устойчивости сжато-изогнутых конструкций до и за пределами упругости, ч II. Арки и рамы. Изд. АН УССР. (печатается на укр. яз.). Часть I (Сжато-изогнутый стержень) уже вышла из печати.

К РАСЧЕТУ ВЫСОКИХ БАЛОК

Высокие балки, или балки-стены, часто встречаются в строительной практике.

Учет работы таких балок в монолитных конструкциях не только дает значительную экономию в материале, но и соответствует действительной работе сооружения.

На фиг. 1 схематически показана конструкция шахт-силосов, предназначенных для зерна, цемента и других сыпучих материалов. Несущая балка силоса (фиг. 1, а или 1, б) имеет свдвиг назначением передать на опоры нагрузку от массы материала. Расчет указанных прогонов производится без учета совместной работы со стеной (эпюра напряжений показана на фиг. 1, в).

При совместной работе эпюра напряжений показана на фиг. 1, д.

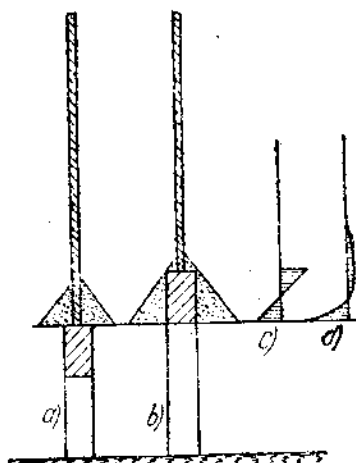
Таким образом, здесь происходит выравнивание напряжений, благодаря несущей способности стены в ее плоскости.

При соответствующем армировании стены можно обойтись совсем без несущей балки, что даже не потребует увеличения толщины стены.¹

Методика расчета высоких балок разработана, главным образом, Крамером² и Dischinger,³ применявшими решение в тригонометрических рядах к определению напряженного состояния неразрезной балки под периодической нагрузкой.

Иной способ решения, основанный на замене бигармонического уравнения конечными разностями, разработал Бай,⁴ рассматривавший, главным образом, балки свободно-опертые. Метод Бая, обладая сравнительно меньшей точностью, имеет еще и тот недостаток, что приводит для каждого случая нагрузки к утомительным вычислениям, заключающимся в решении системы совместных линейных уравнений со многими неизвестными.

В настоящей статье, в развитие метода Бая, предлагаем пользоваться числами влияния (Einflusszahlen) ординат поверхности напряжений.



Фиг. 1.

¹ Крамер, Wirtschaftlicher Effect durch Ausnützung der Scheibenwirkung, Zement, 24, VII. 1930.

² Крамер, Spannungen in hohen wandartigen Trägern unter besonderer Berücksichtigung des Eisenbetonbunkerbaues. Bericht über die II Intern. Tagung für Brücken und Hochbau, Wien 1929; Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente des Eisenbetonbaues, B. u. E. H. 13. 14. 18. 1929. Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung, ZAMM, H. 3 1930. Spannungen in der drehenden Scheibe bei Vollbelastung sämtlicher Felder, B. u. E. H. 15, 1933.

³ Dischinger, Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens, Abhandlungen der Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Band 1, Zürich 1932. Die Ermittlung der Eiseneinlagen in wandartigen Trägern, B. u. E. H. 15 1933.

⁴ H. Bay, Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden, Wittwer, Stuttgart, 1931.

Этот способ освобождает от решения системы совместных линейных уравнений для частных случаев нагрузки благодаря тому, что структура уравнений зависит, как то будет видно дальше, только от выбора сетки, а свободные члены зависят только от нагрузки.

Считаю своим долгом принести глубокую благодарность профессору А. А. Уманскому, предложившему тему настоящей работы и руководившему ее выполнением, а также проф. И. Я. Штаерману за ценные указания.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Контурные условия и бигармоническое уравнение

Рассмотрим равновесие бесконечно малого параллелепипеда со сторонами $dx dy$ и 1 (фиг. 2).

Усилия, действующие по граням, в виду малости размеров, получаем умножением соответственных напряжений на площадь грани.

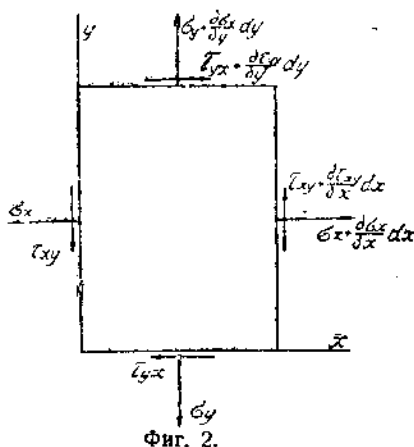
Если не учитывать объемных сил, то уравнения равновесия запишутся так:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx dy = 0.$$

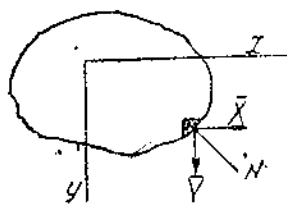
Сократив на $dx dy$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Уравнение (1) есть дифференциальное уравнение равновесия для плоской задачи.

Если $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ суть компоненты поверхностных сил, отнесенных к единице площади (фиг. 3), то условия на контуре запишутся так:¹



$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy}; \\ \bar{Y} &= m\sigma_y + l\tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где l и m — направляющие косинусы нормали N к контуру.

Для определения трех компонентов напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} нужно к уравнениям (1) и (2) (уравнениям статики) добавить уравнения совместности (уравнения деформации):

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3)$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (3)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа по двум переменным.*

Как известно, можно избежать интегрирования уравнения (1), введя функцию Airy.

¹ С. П. Тимошенко, Теория упругости, ГТИИ, 1934 г.

Тогда напряжения выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где F — функция от координат x и y (функция Айгу или функция напряжений).

Выражения для напряжений из (4) тождественно удовлетворяют уравнениям (1), после чего остается рассмотреть только уравнения (2) и (3).

Контурные условия (2), выраженные через функцию Айгу, запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \bar{Y} &= m \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подставив значения σ_x и σ_y в (3) из (4) и раскрыв символ Лапласова оператора, получим бигармоническое уравнение плоской задачи:

$$\nabla^4 F = 0 \quad (6)$$

или

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) должно удовлетворять контурным условиям (5).

§ 2. Аналогия с изгибом пластинки

Уравнение упругой поверхности пластинки записывается так:

$$\nabla^4 z = \frac{p}{D}; \quad (7)$$

или

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (7)$$

где z — прогиб пластинки,

p — интенсивность поперечной нагрузки и

D — цилиндрическая жесткость.

При $p = 0$ дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки (7) целиком совпадает с дифференциальным уравнением поверхности напряжений (6).

Таким образом, функцию Айгу можно интерпретировать, как прогиб пластинки, соответствующей закрепленной и нагруженной только контурными силами. На этом основано¹ экспериментальное исследование плоской задачи.

¹ А. и Л. Феппл, Сила и деформация, ГТТИ, 1933.

§ 3. Переход к конечным разностям

Пользуясь центрированными разностями Sheppard, можно значение первой и второй производной в точке k (фиг. 4) выразить приближенно так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_i - z_l}{2\Delta x};$$

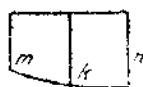
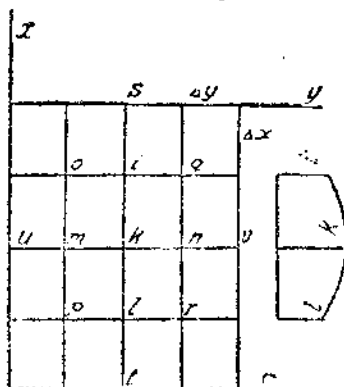
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z_i - 2z_k + z_l}{\Delta x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_m - z_n}{2\Delta y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z_m - 2z_k + z_n}{\Delta y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z_o + z_q) - (z_v + z_r)}{4\Delta x \cdot \Delta y}.$$

(8)



Фиг. 4.

Значения четвертых производных также легко получить, пользуясь общим выражением для n -ой разности функции:¹

$$\Delta^n f(z) = f(z + nh) - nf(z + (n-1)h) +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(z + (n-2)h) + \dots + (-1)^{n-1} nf(z + h) + (-1)^n f(z). \quad (9)$$

Откуда:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{(\Delta^4 z_k)_x}{\Delta x^4} = \frac{6z_k - 4z_i - 4z_l + z_o + z_s}{\Delta x^4};$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{(\Delta^4 z_k)_y}{\Delta y^4} = \frac{6z_k - 4z_m - 4z_n + z_v + z_r}{\Delta y^4}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} &= \frac{\Delta^2 [(\Delta^2 z_k)_{xy}]}{\Delta y^2} = \\ &= \frac{4z_k - 2z_m - 2z_n - 2z_i - 2z_l + z_o + z_q + z_r + z_s}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2}. \end{aligned}$$

Подставив значения производных из (10) в (6), получим бигармоническое уравнение в центрированных конечных разностях:

$$\begin{aligned} z_k \left[6 \left(x + \frac{1}{\alpha} \right) + 8 \right] - 4 \left[(1+x)(z_i + z_l) + \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (z_m + z_n) \right] + \\ + 2(z_o + z_q + z_r + z_s) + x(z_i + z_l) + \frac{1}{\alpha}(z_m + z_n) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$x = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2,$$

а

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2.$$

¹ Ю. Д. Соколов, Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами, Стеклогр. изд. Киев. стр. и-та, 1934. Также изд. Акад. Наук 1935 г.

Тринадцатичленное линейное уравнение (11) можно составить для каждой промежуточной узловой точки сетки, а число неизвестных ординат также равно числу промежуточных узловых точек, так как контурные ординаты находятся из граничных условий. Таким образом, мы получаем n линейных уравнений с n неизвестными, и интегрирование уравнения (6) заменяется решением этой системы.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{z_m - 2z_k + z_n}{\Delta y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{z_l - 2z_k + z_i}{\Delta x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{(z_p + z_q) - (z_o + z_r)}{4\Delta x \cdot \Delta y}.\end{aligned}\quad (12)$$

Для квадратной сетки $\alpha = \frac{1}{\alpha} = 1$, и уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$20z_k - 8(z_l + z_t + z_m + z_n) + 2(z_p + z_q + z_r + z_o) + \\ + z_i + z_s + z_v + z_u = 0. \quad (13)$$

При составлении уравнения (11) или (13) для предконтурных узлов (напр. m , o , i и т. д.) придется ввести ординаты поверхности, находящиеся за пределами нашей сетки; эти ординаты мы будем находить, пользуясь экстраполяционными формулами.

§ 4. Решение уравнений

Система уравнений типа (11) или (13) в канонической форме запишется так:

[illegible]

Так как уравнения (14) выведены из рассмотрения упругих свойств материала, то они должны удовлетворять принципу взаимности.

Решение системы (14) может быть проведено или по схеме Гаусса, или по методу последовательных приближений, или комбинированным способом — сначала по Гауссу (на линейке) с дальнейшим уточнением неизвестных путем итерации.

Легко усмотреть, что коэффициенты при неизвестных зависят только от структуры сетки и совершенно не зависят от нагрузки, тогда как грузовые члены (a_{1m} , a_{2m} и т. д.) зависят только от нагрузки и совершенно не зависят от выбора сетки.

Для возможности быстрого нахождения неизвестных для данной сетки при разных нагрузках нужно найти числа влияния неизвестных (ординат поверхности напряжений), после чего самые неизвестные определяются как линейная функция от них.

КВАДРАТНАЯ БАЛКА ПРИ РАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКЕ

Размеры, нагрузка и величина сетки изображены на фиг. 5. При действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью p по верхней кромке, интенсивность реакций по нижней кромке при ширине опорных площадок в $0,1L$ будет:

$$p_1 = 4p.$$

В виду симметрии балки и нагрузки число неизвестных узловых ординат прогибов тут будет пятнадцать.

Как сказано выше, эти ординаты прогибов (z) при соблюдении контурных условий есть одновременно значения функции $\text{Airy } (F)$, и поэтому в дальнейшем z и F будут представлять собой идентичные понятия.

§ 1. Контурные условия

Участок 1* (нижний ненагруженный край).

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_1;$$

$$F = C_1 x + C_2;$$

$$\tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_3.$$

Значения первых трех постоянных могут быть выбраны произвольно,¹ и поэтому мы примем:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0,$$

что эквивалентно заделке нижнего края, так как в этом случае прогибы ($z = F$) и углы наклона будут равны нулю.

Участок 2 (нижний нагруженный край).

$$\sigma_y = -4p = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

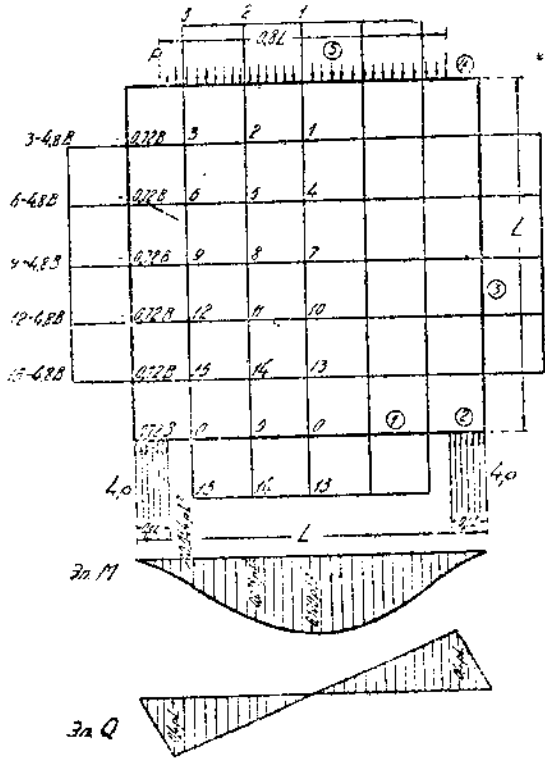
Откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4px + C_4;$$

$$\tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_6.$$



Фиг. 5.

* Участки обозначены на фиг. 5 цифрами в кружочках.

¹ K. Wiegardt. Über die Nebenspannungen gewisser hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Z. f. Math. u. Phys., B. 53, 1906.

На границе участков 1 и 2 значения F и его производных должны быть согласованы и плавно изменяться.

На основании этого можно сказать, что

$$\begin{aligned}(-4px + C_4)_{x=0,5L} &= 0; \\ (-2px^2 + C_4x + C_5)_{x=0,5L} &= 0; \\ C_6 &= 0.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}C_4 &= 1,6pL; \\ C_5 &= 0,32pL^2.\end{aligned}$$

Тогда окончательно для второго участка будем иметь:

$$F = -2px^2 + 1,6pLx - 0,32pL^2 \quad (\text{квадрат. парабола});$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4px + 1,6pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

при

$$x = \frac{L}{2}; \quad F = 0,72B,$$

где

$$B = \frac{pL^3}{36}.$$

Участок 3. Боковой контур.
Здесь

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_7;$$

$$F = C_7y + C_8; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_9.$$

Из равенства граничных значений F второго и третьего участков получается:

$$C_7 = 0; \quad C_8 = (-2px^2 + 1,6pLx - 0,32pL^2)_{x=0,5L};$$

Откуда

$$C_8 = (-4px + 1,6pL)_{x=0,5L}.$$

$$C_9 = -0,4pL;$$

$$C_8 = -0,02pL^2.$$

Тогда

$$F = -0,02pL^2 = -0,72B;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,4pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 4. Верхний ненагруженный край.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = C_{10}; \quad F = C_{10}x + C_{11};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_{12}.$$

Сравнение границ третьего и четвертого участков дает:

$$C_{12}=0; \quad C_{10}=-0,4pL; \quad (C_{10}x+C_{11})_{x=0,4L}=-0,02pL^2.$$

Откуда

$$C_{11}=0,18pL^2.$$

Тогда

$$F=-0,4pLx+0,18pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-0,4pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Участок 5. Верхний нагруженный край

$$\sigma_y=-p=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial x}=-px+C_{13};$$

$$F=-\frac{px^2}{2}+C_{13}x+C_{14}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=C_{15}.$$

Сравнение границ участков четвертого и пятого дает:

$$|-px+C_{13}|_{x=0,4L}=-0,4pL;$$

$$\left| -\frac{px^2}{2}+C_{13}x+C_{14} \right|_{x=0,4L} = |-0,4pLx+0,18pL^2|_{x=0,4L}.$$

Откуда

$$C_{13}=0; \quad C_{14}=0,10pL^2; \quad C_{15}=0.$$

Тогда

$$F=-\frac{px^2}{2}+0,10pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-px; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$\text{при } x=\frac{2}{6}L; \quad F=1,6B;$$

$$, \quad x=\frac{1}{6}L; \quad F=3,1B;$$

$$, \quad x=0 \quad F=3,6B.$$

§ 2. Законтурные ординаты

Как было выяснено выше (глава 1, § 3), при составлении бигармонического уравнения в предконтурных узлах (напр. 1, 2, 9, 13 и т. д.) нужно включить ординаты, находящиеся за пределами сетки.

Пусть F_1 — одна из предконтурных ординат (фиг. 6), точное значение которой F_1^0 , а F_x (точное значение F_x^0) — значение функции при аргументе $-2\Delta x$; тогда, очевидно,

$$F_x = F_1 + 2 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (15)$$

где

$\frac{\partial F}{\partial x}$ — значение производной в точке

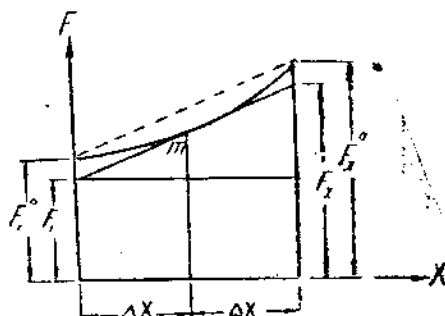
m (в нашем случае m — контурная точка).

Пользуясь экстраполяционной формулой (15), вычислим значения за-контурных ординат в нашем примере.

По нижнему краю:

$$F_y = F_1 + 2 \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = F_1 \quad \left(\text{так как } \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \right),$$

где F_1 — любая нижняя предконтурная ордината.



Фиг. 6.

Вдоль боковой кромки $F_x = F_{II} + 2 \cdot \frac{L}{6} - 0,4 pL = F_{II} - 4,8 B$, где F_{II} — любая боковая предконтурная ордината.

Аналогично рассуждая, получим вдоль верхнего края:

$$F_y = F_{III} + 2 \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = F_{III}.$$

Значения контурных и законтурных ординат выписаны на фиг. 5.

§ 3. Составление уравнений

Пользуясь формулой (13), составим уравнение для узла I:

$$20z_1 - 8(3,6B + z_4 + z_3 + z_2) + 2(z_5 + 3,1B + 3,1B + z_6) + z_7 + z_1 + z_8 + z_9 = 0.$$

Для узла 2:

$$20z_2 - 8(3,1B + z_5 + z_3 + z_1) + 2(z_6 + 3,6B + 1,6B + z_4) + z_8 - 0,72B + z_2 + z_2 = 0 \text{ и т. д.}$$

После некоторых преобразований получим следующую систему уравнений.

Система бигармонических уравнений в конечных разностях и в канонической форме для квадратной балки при симметричной нагрузке¹

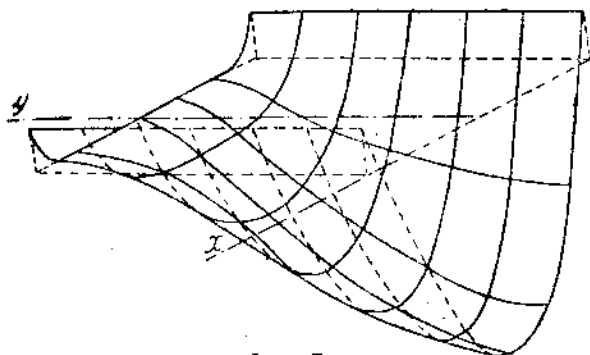
Матрица A

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	a_{km}
1	21	-16	2	-8	4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	16,40 B
2	-16	44	-16	4	-16	4	—	2	—	—	—	—	—	—	—	30,24 B
3	2	-16	44	—	4	-16	—	—	2	—	—	—	—	—	—	17,04 B
4	-8	4	—	20	-16	2	-8	4	—	1	—	—	—	—	—	- 3,6 B
5	4	-16	4	-16	42	-16	4	-16	4	—	2	—	—	—	—	- 4,76 B
6	—	4	-16	2	-16	42	—	4	-16	—	—	2	—	—	—	0,64 B
7	1	—	—	-8	4	—	20	-16	2	-8	4	—	1	—	—	0
8	—	2	—	4	-16	4	-16	42	-16	4	-16	4	—	2	—	1,44 B
9	—	—	2	—	4	-16	2	-16	42	—	4	-16	—	—	2	3,84 B
10	—	—	—	1	—	—	-8	4	—	20	-16	2	-8	4	—	0
11	—	—	—	—	2	—	4	-16	4	-16	42	-16	4	-16	4	1,44 B
12	—	—	—	—	—	2	—	4	-16	2	-16	42	—	4	-16	3,84 B
13	—	—	—	—	—	—	1	—	—	-8	4	—	21	-16	2	0
14	—	—	—	—	—	—	—	2	—	4	-16	4	-16	44	-16	1,44 B
15	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	4	-16	2	-16	44	3,84 B

¹ Приняв за неизвестные $z_1 - z_{15}$; $z_5 - z_{10}$; $z_1 + z_{13}$, $z_2 + z_{14}$ и т. д., можно матрицу A расщепить на две системы, из которых одна будет содержать 9 неизвестных, другая — 6. Такое расщепление особенно выгодно при однократном нахождении неизвестных.

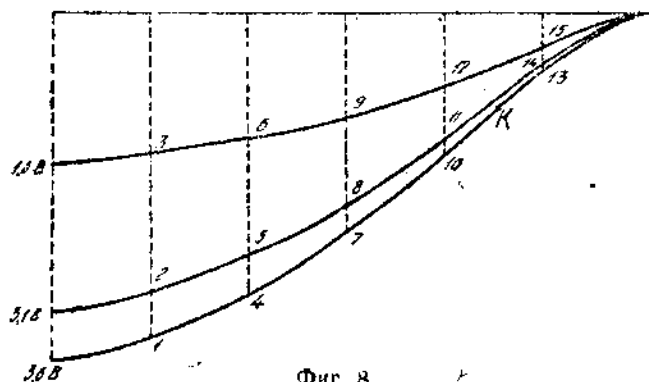
Решив эту систему, получим:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3,356445 B; & z_2 &= 2,885347 B; & z_3 &= 1,482313 B; \\ z_4 &= 2,905526 B; & z_5 &= 2,512290 B; & z_6 &= 1,310784 B; \\ z_7 &= 2,305664 B; & z_8 &= 2,024444 B; & z_9 &= 1,096774 B; \\ z_{10} &= 1,531089 B; & z_{11} &= 1,381014 B; & z_{12} &= 0,800245 B; \\ z_{13} &= 0,634187 B; & z_{14} &= 0,607698 B; & z_{15} &= 0,395771 B. \end{aligned}$$

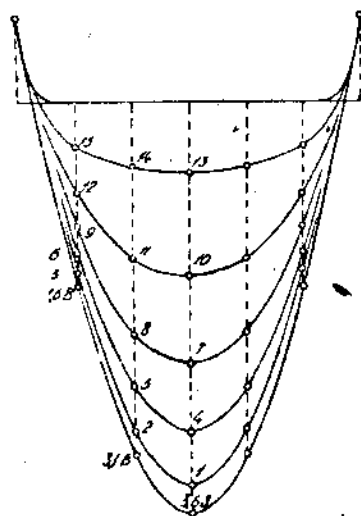


Фиг. 7.

Поверхность напряжений (она же поверхность прогибов) изображена в аксонометрии на фиг. 7, в разрезах по оси Y на фиг. 8 и по оси X на фиг. 9.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

§ 4. Определение напряженного состояния

С помощью формул (12) можно легко найти горизонтальные и вертикальные нормальные напряжения, касательные и главные напряжения в любой точке балки.

а) Горизонтальные нормальные напряжения (σ_x). По сечению $I—XIII$ (фиг. 10). Максимальное сжимающее напряжение в точке I :

$$\sigma_1^x = \frac{(3,356 - 2 \cdot 3,600 + 3,356) B}{\frac{L^3}{36}} = -0,50 p.$$

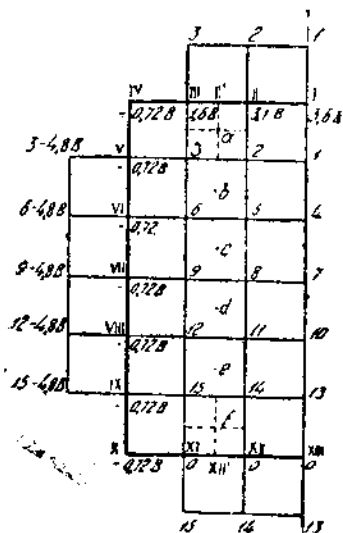
$$\text{В точке } I: \sigma_1^x = \frac{(3,600 - 2 \cdot 3,356 + 2,890) B}{\frac{L^3}{36}} = -0,207 p.$$

Положение нулевой точки соответствует перемене кривизны¹ кривой $I—13$ (фиг. 8) в точке K , находящейся на $1/4 L$ от основания.

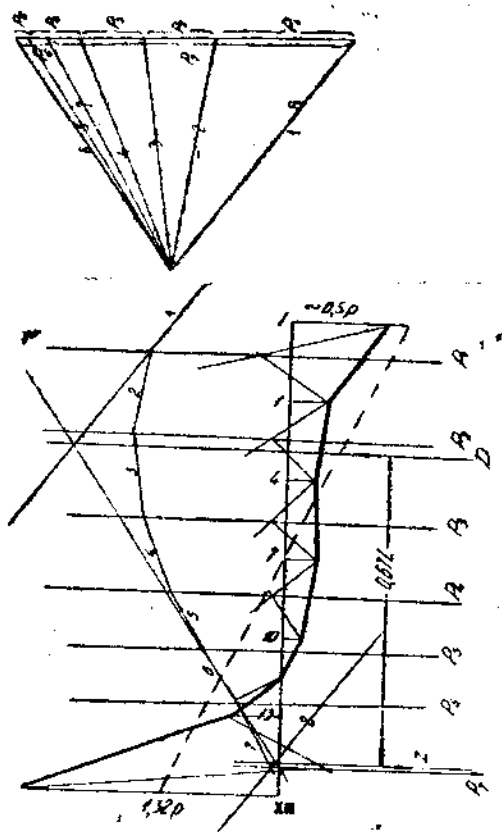
¹ Это следует из того, что знак кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{d^2 z}{dy^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{3/2}},$$

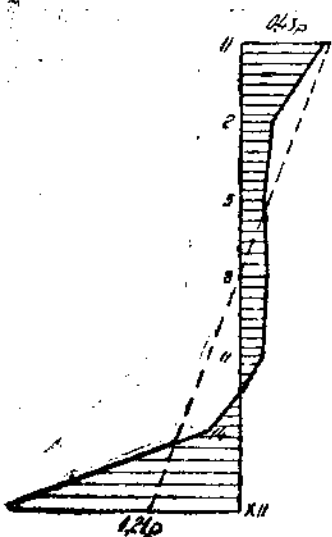
и $\sigma_x = \pm \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ зависят от знака второй производной.



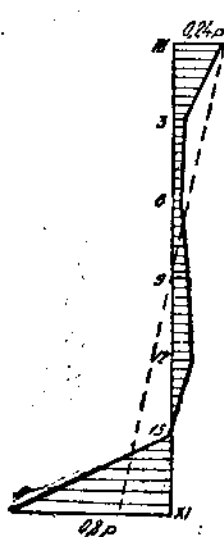
Фиг. 10.



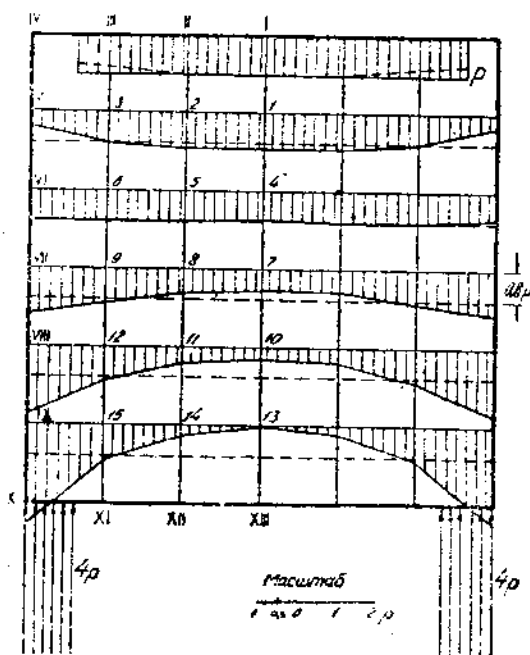
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Максимальное растягивающее напряжение в точке XIII:

$$\sigma_{XIII}^x = \frac{(0,634 - 2 \cdot 0 + 0,634) B}{\frac{L^2}{36}} = +1,27p.$$

Эту последнюю величину можно уточнить, исходя из следующих соображений.

Величина сжимающего усилия D (отрицательная зона эпюры σ_x) должна равняться растягивающему усилию Z (положительная зона эпюры σ_x).

Приравняв эти площади, например, графически (фиг. 11), получим наибольшее растягивающее напряжение:

$\sigma_{XIII}^x = 1,32p$, что разнится на 3,93% от предыдущего значения.

Правильность этой эпюры можно еще проверить равенством момента внешних и внутренних сил.

Величина усилия $Z = D = 0,143pL$.

Плечо внутренней пары $0,67L$.

Момент $M_{вн} = 0,143pL \cdot 0,67L = 0,096pL^2$.

Момент внешних сил (изгибающий момент в сечении I—XIII, см. эпюру M на фиг. 5).

$$M_{внеш} = 4p \cdot 0,1L \cdot 0,45L - p \cdot 0,4L \cdot 0,2L = 0,100pL^2.$$

Совпадение моментов довольно близкое.

Окончательная эпюра (спрямленная между участками) изображена на фиг. 11.

Сравним эти результаты с элементарной теорией:

$$\sigma_I^x = \sigma_{XIII}^x = \frac{M}{W} = \frac{0,100pL^2}{\frac{1 \cdot L^2}{6}} = 0,60p.$$

Эпюра по Navier изображена на фиг. 11 пунктиром. Аналогично выше сказанному, определяем напряжения в сечениях II—XII (фиг. 12) и III—XI (фиг. 13).

b) Вертикальные нормальные напряжения (σ_y).

По верхнему краю (фиг. 14):

$$\sigma_I^y = \frac{(3,1 - 2 \cdot 3,6 + 3,1) B}{\frac{L^2}{36}} = -p;$$

$$\sigma_{II}^y = \frac{(1,6 - 2 \cdot 3,1 + 3,6) B}{\frac{L^2}{36}} = -p;$$

$$\sigma_{III}^y = \frac{(-0,72 - 2 \cdot 1,6 + 3,1) B}{\frac{L^2}{36}} = -0,82p;$$

$$\sigma_{IV}^y = \frac{(1,6 - 4,8 + 2 \cdot 0,72 + 1,6) B}{\frac{L^2}{36}} = -0,16p.$$

Действительные напряжения по верхнему краю соответственно равны: $\sigma_I^y = -p$; $\sigma_{II}^y = -p$; $\sigma_{III}^y = -p$; $\sigma_{IV}^y = 0$, что весьма близко к вышенписанному.

Эпюры напряжений σ_y по горизонтальным сечениям изображены на фиг. 14. В каждом горизонтальном сечении площадь эпюры должна

равняться внешней нагрузке ($0,8pL$), иначе говоря, должна равняться площади пунктирного прямоугольника, высота которого равна $0,8p$.

Распределение напряжений σ_y по вертикальным сечениям изображено на фиг. 15.

с) Касательные напряжения.

По сечению I—XIII касательные напряжения равны нулю.

По сечению II—XII:

$$\tau_{II} = - \frac{(z_3 + z_1) - (z_3 + z_7)}{4 \cdot \frac{L}{6} \cdot \frac{L}{6}} = 0;$$

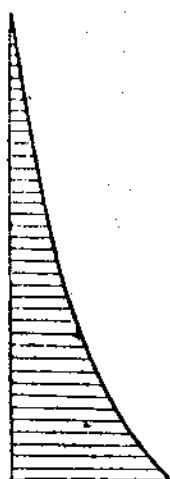
$$\tau_3 = - \frac{(z_3 + z_1) - (z_3 + z_7)}{4 \cdot \frac{L}{6} \cdot \frac{L}{6}} = - \frac{[(1,096 + 3,356) - (1,482 + 2,305)] B}{4 \cdot \frac{L}{6} \cdot \frac{L}{6}} =$$

по формуле

$$= -0,166 p$$

и т. д.

по IV-X по I-XIII по III-XI



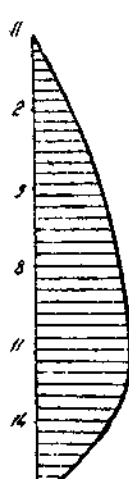
a)



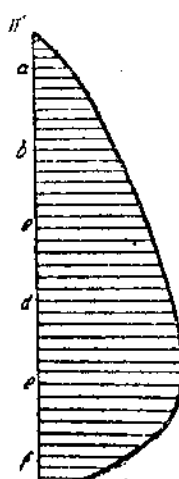
б)



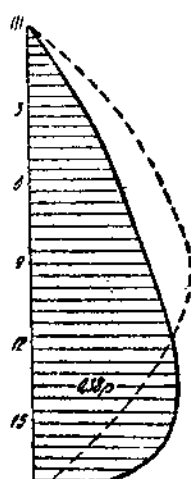
в)



a)



б)



в)

Фиг. 15.

Фиг. 16.

По промежуточному сечению II'—XII':

$$\tau_a = - \frac{(z_3 + 3,1B) - (z_3 + 1,6B)}{4 \cdot \frac{L}{12} \cdot \frac{L}{12}} = -0,097 p$$

и т. д.

Эпюры касательных напряжений изображены на фиг. 16.

Значение τ_{max} соответствует нулевому значению σ_x (см. фиг. 11, 12 и 13). Например, по сечению II—XII (фиг. 16a):

$$\tau_{max} = 0,245 p,$$

по обычной формуле

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,17pL}{1 \cdot L} = 0,251 p.$$

д) Главные напряжения.

Главные нормальные напряжения определяем по формулам:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \quad (16)$$

а направление главных площадок по формуле:

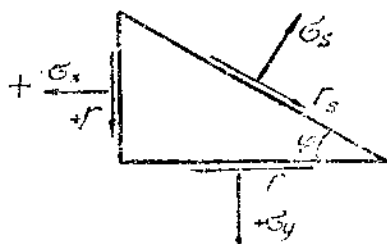
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (\text{см. фиг. 17}). \quad (17)$$

Например:

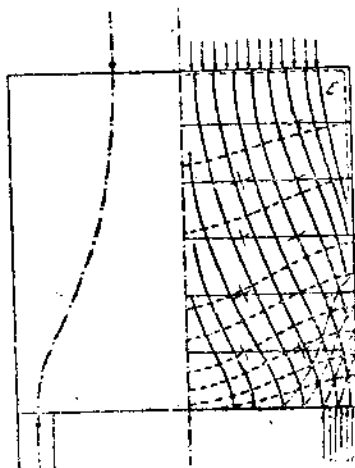
$$\sigma_{\max/\min}^{15} = \left[\frac{1}{2} (0,010 - 0,903) \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,913^2 + 4 \cdot 0,345^2} \right] p =$$

$$= \left[-\frac{0,893}{2} \pm \frac{1,145}{2} \right] p;$$

$$\sigma_{\max}^{15} = 0,126p; \quad \sigma_{\min}^{15} = -1,019p.$$



Фиг. 17.



Фиг. 18.

Направление главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(13)} = \frac{2 \cdot 0,345}{-0,913} = -0,756.$$

Откуда

$$\varphi_1 = 71^\circ 26'$$

или

$$\varphi_1 = 161^\circ 26'.$$

В крайнем нижнем углу

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot 0}{4p - 0} = 0.$$

Откуда

$$\varphi = 90^\circ$$

или

$$\varphi = 180^\circ.$$

Вычислив направления касательных к траекториям главных нормальных напряжений, можно затем показать и самые траектории напряжений (см. фиг. 18).

Главные касательные напряжения определяем по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \quad (18)$$

а направления площадок, соответствующих $\tau_{\max}$, образуют с главными площадками угол в 45° .

Траектории главных касательных напряжений изображены на фиг. 18 штрих-пунктирными линиями.

РАСЧЕТ ВЫСОКОЙ КВАДРАТНОЙ БАЛКИ ПРИ ЛЮБОЙ СИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

§ 1. Числа влияния ординат поверхности напряжений

Как это видно из матрицы A (глава II, § 3) коэффициенты при неизвестных зависят только от структуры сетки, тогда как грузовые члены (a_{km}) зависят только от нагрузки.

Если при любой симметричной нагрузке структуру сетки оставлять согласно фиг. 5, то в матрице A будут меняться только правые части.

Найдя числа влияния (b_{ik}) неизвестных ординат, мы легко выразим неизвестные, как линейную функцию от чисел влияния (b_{ik}) и грузовых членов (a_{km}) , по формуле:¹

$$z_i = \sum_{k=1}^{k=s} a_{km} b_{ik} \quad (19)$$

причем для любой симметричной нагрузки коэффициенты b_{ik} остаются без изменения, а члены a_{km} легко находятся из краевых условий.

Такой прием значительно облегчает вычисления, так как, вместо системы пятнадцати совместных уравнений (матрица A), мы получаем пятнадцать независимых уравнений (19). Мы можем ограничиться нахождением ординат только определенной зоны, напряженное состояние которой желательно определить.

При нахождении чисел влияния очень удобно пользоваться схемой Дулитля.

Количество чисел влияния определяется по следующей формуле:

$$n = \frac{s(s+1)}{2}, \quad (20)$$

где s — число неизвестных.

В нашем случае

$$n = \frac{15(15+1)}{2} = 120.^2$$

Найденные таким образом числа влияния для матрицы выписаны в таблице на стр. 160—161.

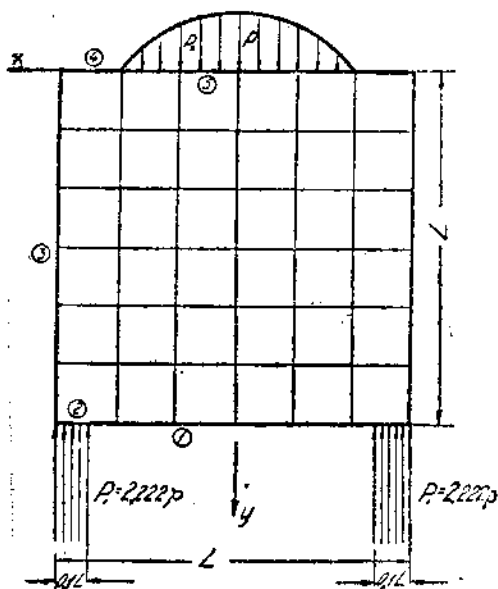
§ 2. Нагрузка по параболическому закону (фиг. 19)

Уравнение грузовой линии:

$$p_x = -\frac{9px^2}{L^2} + p.$$

Интенсивность опорной реакции

$$p_1 = 2,222p.$$



Фиг. 19.

¹ О. А. Уманский. Про розв'язування лінійних рівнянь, УАН, Київ 1933.

² Вследствие симметрии балки относительно горизонтальной оси, числа влияния, симметричные относительно той же оси, будут равны. Например: $b_{1,1} = b_{15,15}$; $b_{2,2} = b_{14,14}$ и т. д. Количество различных чисел влияния в этом случае может быть определено по формуле $n = \frac{s(s+2)+m^2}{4}$, где s — общее число неизвестных, а m — число неизвестных, лежащих на оси симметрии (z_9, z_8, z_7).

В нашем случае $n = \frac{15(15+2)+3^2}{4} = 66$.

Участок 1.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_1; \quad F = C_1 x + C_2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_3.$$

Принимаем, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0$;
тогда

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 2.

$$\sigma_y = -2,222p = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2,222px + C_4; \quad F = -\frac{2,222px^2}{2} + C_4 x + C_5$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_6.$$

Сравнение границ первого и второго участков дает:

$$(-2,222px + C_4)_{x=0,4L} = 0;$$

$$(-1,111px^2 + C_4 x + C_5)_{x=0,4L} = 0,$$

откуда

$$C_4 = 0,888pL;$$

$$C_5 = 0,178pL^2.$$

Тогда

$$F = -1,111px^2 + 0,888pLx - 0,178pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2,222px + 0,888pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 3.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_7; \quad F = C_7 y + C_8; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = C_9.$$

Сравнение границ второго и третьего участков дает:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

$$F = C_8 = (-1,111px^2 + 0,888pLx - 0,178pL^2)_{x=0,5L} = -0,011pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_9 = (-2,222px + 0,888pL)_{x=0,5L} = -0,223pL.$$

Участок 4.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

Откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_{10}; \quad F = C_{10}x + C_{11}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_{12}.$$

	1	2	3	4	5	6	7
b_1	-0,109240	-0,055577	-0,016795	-0,092455	-0,060588	-0,021404	-0,058860
b_2	—	-0,062037	-0,022621	-0,060314	-0,055124	-0,022756	-0,042245
b_3	—	—	-0,035339	-0,020688	-0,022256	-0,020921	-0,015044
b_4	—	—	—	-0,213440	-0,131915	-0,046437	-0,162090
b_5	—	—	—	—	-0,125705	-0,050505	-0,113615
b_6	—	—	—	—	—	-0,053988	-0,042244
b_7	—	—	—	—	—	—	-0,252123
b_8	—	—	—	—	—	—	—
b_9	—	—	—	—	—	—	—
b_{10}	—	—	—	—	—	—	—
b_{11}	—	—	—	—	—	—	—
b_{12}	—	—	—	—	—	—	—
b_{13}	—	—	—	—	—	—	—
b_{14}	—	—	—	—	—	—	—
b_{15}	—	—	—	—	—	—	—

Сравнение границ третьего и четвертого участков дает:

$$C_{10} = -0,223 pL;$$

$$(-0,223 pLx + C_{11})_{x=0,5L} = -0,011 pL^2.$$

Откуда

$$C_{11} = 0,100 pL^2.$$

Тогда

$$F = -0,223 pLx + 0,100 pL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_{12} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -0,223 pL.$$

Участок 5.

$$\sigma_y = \frac{9px^2}{L^2} - p = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3px^2}{L^2} - px + C_{13};$$

$$F = \frac{3}{4} \frac{p}{L^2} x^4 - \frac{px^2}{2} + C_{13}x + C_{14}.$$

Фиг. 20.

Сравнение границ четвертого и пятого участков дает:

$$\left(\frac{3p}{L^2} x^2 - px + C_{13} \right)_{x=\frac{1}{3}L} = -0,223 pL;$$

$$\left(\frac{3}{4} \frac{p}{L^2} x^4 - \frac{px^2}{2} + C_{13}x + C_{14} \right)_{x=\frac{1}{3}L} = (-0,223 pLx + 0,100 pL^2)_{x=\frac{1}{3}L}.$$

8	9	10	11	12	13	14	15	
-0,042604	-0,015939	-0,029705	-0,022207	-0,068292	-0,009354	-0,006970	-0,002396	b_1
-0,035653	-0,014848	-0,022024	-0,017848	-0,007174	-0,006970	-0,005523	-0,002037	b_2
-0,014237	-0,009584	-0,007836	-0,006832	-0,003684	-0,002396	-0,002037	-0,000897	b_3
-0,113769	-0,042602	-0,089016	-0,035767	-0,024869	-0,029705	-0,022024	-0,007836	b_4
-0,098838	-0,041404	-0,065767	-0,054519	-0,022495	-0,022207	-0,017848	-0,006832	b_5
-0,041167	-0,031266	-0,024869	-0,022495	-0,013525	-0,008292	-0,007174	-0,003684	b_6
-0,162087	-0,038851	-0,162090	-0,113615	-0,042244	-0,058860	-0,042245	-0,015044	b_7
-0,151220	-0,061070	-0,113769	-0,098838	-0,041167	-0,042604	-0,035653	-0,14237	b_8
—	-0,039295	-0,042602	-0,041404	-0,031266	-0,015939	-0,014848	-0,009584	b_9
—	—	-0,213440	-0,131915	-0,046437	-0,092455	-0,060314	-0,020688	b_{10}
—	—	—	-0,126705	-0,050505	-0,060588	-0,055124	-0,022256	b_{11}
—	—	—	—	-0,053988	-0,021404	-0,022756	-0,020921	b_{12}
—	—	—	—	—	-0,109240	-0,055577	-0,016795	b_{13}
—	—	—	—	—	—	-0,062037	-0,022621	b_{14}
—	—	—	—	—	—	—	-0,035339	b_{15}

Откуда

$$C_{13} = 0; \quad C_{11} = 0,072pL^2.$$

Тогда

$$F = \frac{3}{4} \frac{p}{L^2} x^4 - \frac{px^2}{2} + 0,0722pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3px^3}{L^2} - px; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Введя обозначение $B = \frac{pL^2}{360}$, находим значения законтурных ординат, пользуясь экстраполяционной формулой (15).

Значения контурных и законтурных ординат показаны на фиг. 20.

Составление уравнений аналогично предыдущему примеру (глава II, § 3).

Правые части матрицы A после некоторых преобразований запишутся так:

Правые части матрицы A для параболической нагрузки

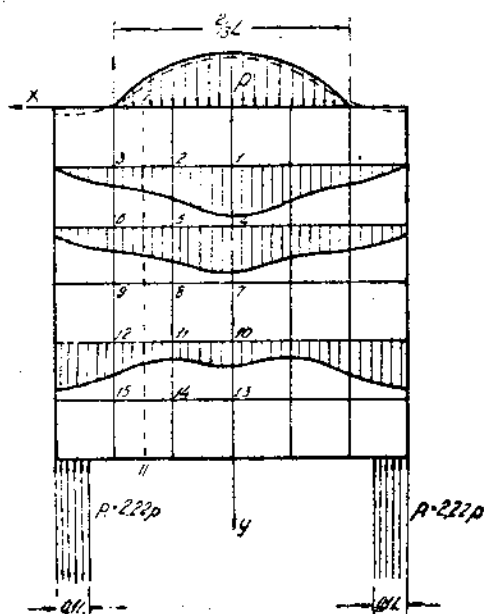
	1	2	3	4	5	6	7	
a_{km}	123,12B	205,92 B	86,208B	-25,488B	-34,488B	3,192B	0	7,92B
	9	10	11	12	13	14	15	
a_{km}	21,84B	0	7,92B	21,84B	0	7,92 B	21,84B	

Пользуясь уравнением (19), сразу находим ординаты z поверхности функции напряжений.

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{1,m} b_{11} + a_{2,m} b_{12} + a_{3,m} b_{13} + \dots a_{14,m} b_{1,14} + a_{15,m} b_{1,15} = \\ &= (123,12 \cdot 0,109240 + 205,92 \cdot 0,055577 + 86,208 \cdot 0,016795 - \\ &\quad - 25,992 \cdot 0,092455 - 34,488 \cdot 0,060588 + 3,192 \cdot 0,021404 + \\ &\quad + 0 \cdot 0,058860 + 7,92 \cdot 0,042604 + 21,84 \cdot 0,015939 + 0 \cdot 0,029705 + \\ &\quad + 7,92 \cdot 0,022207 + 21,84 \cdot 0,008292 + 0 \cdot 0,009354 + 7,92 \cdot 0,006970 + \\ &\quad + 21,84 \cdot 0,002396) B = 23,067674 B. \end{aligned}$$

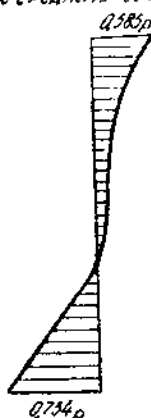
Аналогично находим все остальные ординаты:

$$\begin{aligned} z_1 &= 23,067674 B; & z_2 &= 19,164178 B; & z_3 &= 9,026302 B; & z_4 &= 18,878571 B; \\ z_5 &= 15,992711 B; & z_6 &= 7,967897 B; & z_7 &= 14,300950 B; & z_8 &= 12,386609 B; \\ z_9 &= 6,526992 B; & z_{10} &= 9,185447 B; & z_{11} &= 8,196733 B; & z_{12} &= 4,661857 B; \\ z_{13} &= 3,721809 B; & z_{14} &= 3,531557 B; & z_{15} &= 2,270459 B. \end{aligned}$$



Фиг. 21.

Эпюра σ_x
по среднему сечению



Фиг. 22.

Эпюра τ
по срезу I-II



Фиг. 23.

По этим ординатам построены эпюры σ_y (фиг. 21), σ_x (фиг. 22) и τ_{xy} (фиг. 23).

§ 3. Участковая нагрузка по нижнему краю (фиг. 24)

Участок I (верхний контур).

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= C_1; & F &= C_1 x + C_2; & \frac{\partial F}{\partial y} &= C_3. \end{aligned}$$

¹ Пунктиром по верхней грани показана нагрузка, соответствующая контурным условиям.

Тогда

$$F = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 2.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_4; \quad F = C_4 y + C_5; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = C_6;$$

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Тогда

$$F = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 3.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_9;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -px + C_7;$$

$$F = -\frac{px^2}{2} + C_7 x + C_8.$$

Сравнив второй и третий участки, получим:

$$C_7 = 0,5 pL; \quad C_8 = -0,125 pL^2.$$

Тогда

$$F = -\frac{px^2}{2} + 0,5 pLx - 0,125 pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -px + 0,5 pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 4.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_{10}; \quad F = C_{10} x + C_{11}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_{12}.$$

Сравнение границ четвертого и третьего участков дает:

$$C_{10} = 0,10 pL; \quad C_{11} = -0,045 pL^2.$$

Тогда

$$F = 0,10 pLx - 0,045 pL^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,10 pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

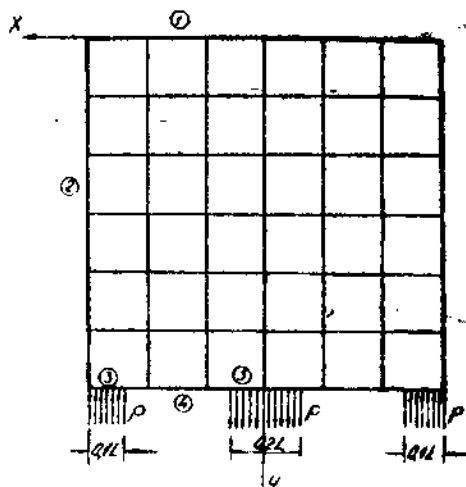
Участок 5.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = +p; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = px + C_{13}; \quad F = \frac{px^2}{2} + C_{13} x + C_{14}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_{15}.$$

Сравнив четвертый и пятый участки, получим:

$$C_{13} = 0; \quad C_{14} = -0,040 pL^2.$$



Фиг. 24.

Откуда

$$F = \frac{px^2}{2} - 0,040pL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = px; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Значение контурных и законтурных ординат показано на фиг. 25, причем

$$B = \frac{pL^2}{360}.$$

Правые части матрицы A после некоторых преобразований запишутся так:

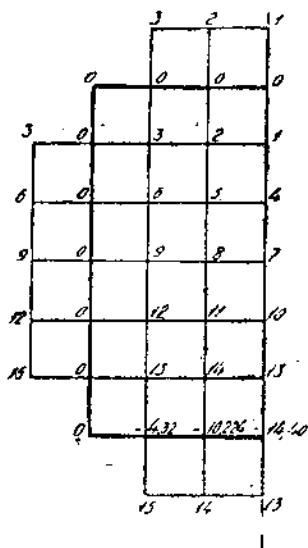
Правые части матрицы A для участковой нагрузки по нижнему краю

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_{km}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

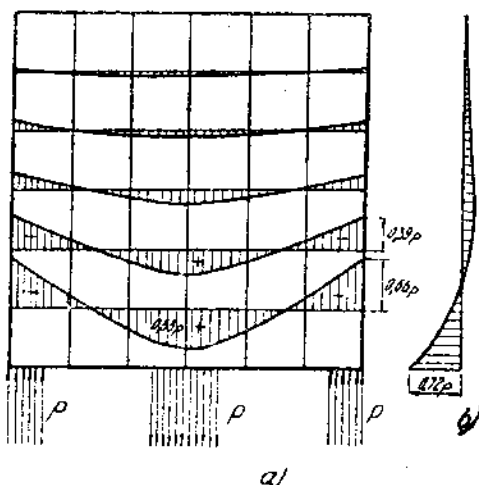
	10	11	12	13	14	15
a_{km}	14,400 B	20,448 B	8,640 B	-74,334 B	-88,704 B	-28,224 B

Величины неизвестных определяем по формуле (19).

$$\begin{aligned} z_1 &= -0,427728 B; & z_2 &= -0,321427 B; & z_3 &= -0,099742 B; \\ z_4 &= -1,541369 B; & z_5 &= -1,170544 B; & z_6 &= -0,421769 B; \\ z_7 &= -3,524918 B; & z_8 &= -2,716318 B; & z_9 &= -1,042149 B; \\ z_{10} &= -6,634391 B; & z_{11} &= -5,094818 B; & z_{12} &= -2,032192 B; \\ z_{13} &= -10,768984 B; & z_{14} &= -8,080337 B; & z_{15} &= -3,318665 B. \end{aligned}$$



Фиг. 25.



Фиг. 26.

Эпюры σ_y показаны на фиг. 26, а, а эпюра σ_x по среднему сечению показана на фиг. 26, б.

§ 4. Растяжение или сжатие

Распределение усилий — согласно фиг. 27.

В виду двойной симметрии:

$$z_1 = z_{13}; \quad z_2 = z_{14}; \quad z_3 = z_{15}; \quad z_4 = z_{10}; \quad z_5 = z_{11}; \quad z_6 = z_{12};$$

поэтому достаточно рассмотреть один квадрант.

Участок 1.

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 2.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = p; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = px + C_4; \quad F = \frac{px^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

Сравнение первого и второго участков дает:

$$C_4 = -0,4pL; \quad C_5 = 0,08pL^2.$$

Откуда

$$F = \frac{px^2}{2} - 0,4pLx + 0,08pL^2;$$

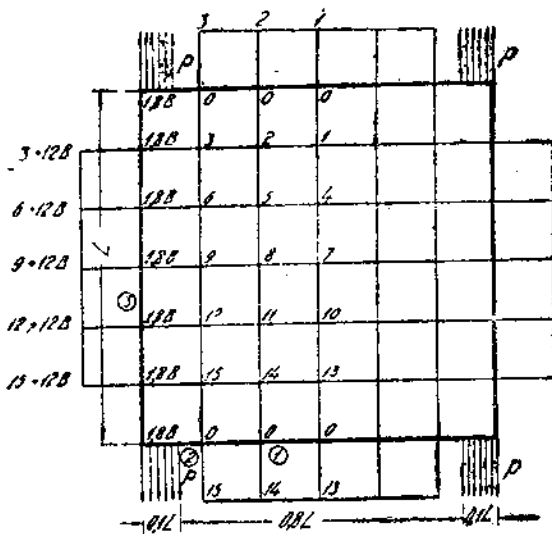
$$\frac{\partial F}{\partial x} = px - 0,4pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 3.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_7, \quad F = C_7 y + C_8;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_9.$$



Фиг. 27.

Сравнив второй и третий участки, получим:

$$C_7 = 0; \quad C_8 = 0,005 p L^2.$$

Откуда

$$F = 0,005 p L^2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,1 p L; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Значения контурных и законтурных ординат даны на фиг. 27.

Правые части матрицы A после некоторых преобразований запишутся так:¹

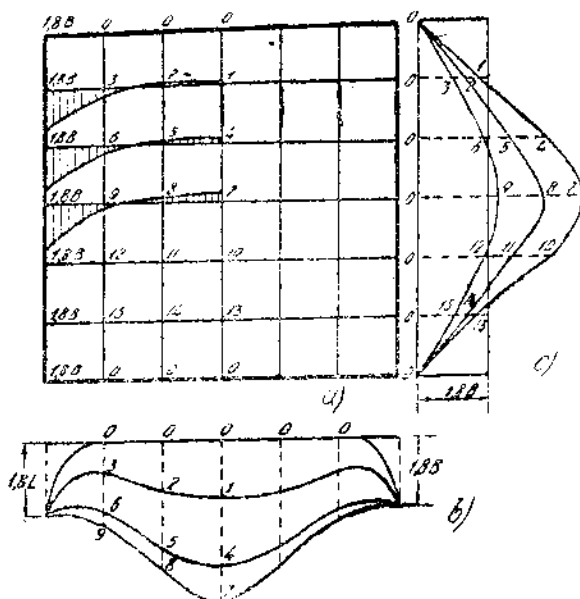
	1	2	3	4	5	6	7	8
a_{km}	0	$-3,6B$	$-9,6B$	0	$-3,6B$	$-9,6B$	0	$-3,6B$

	9	10	11	12	13	14	15
a_{km}	$-9,6B$	0	$-3,6B$	$-9,6B$	0	$-3,6B$	$-9,6B$

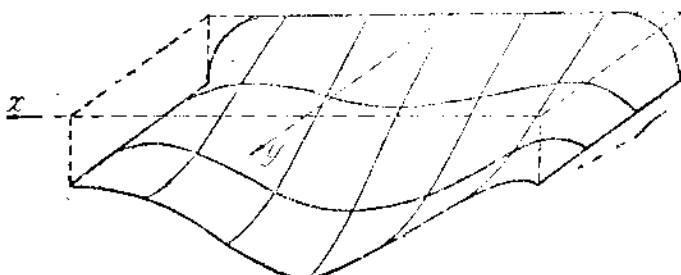
$$B = \frac{pL^2}{360}$$

Неизвестные определяем по формуле (19):

$$\begin{aligned} z_1 &= 1,298935B; & z_2 &= 1,300851B; & z_3 &= 0,920819B; \\ z_4 &= 2,784987B; & z_5 &= 2,648445B; & z_6 &= 1,703235B; \\ z_7 &= 3,370964B; & z_8 &= 3,162756B; & z_9 &= 1,978418B. \end{aligned}$$



Фиг. 28.



Фиг. 29.

Следы поверхности функции напряжений даны на фиг. 28, b и c, а сама поверхность изображена в аксонометрии на фиг. 29.

Эпюры нормальных напряжений (σ_y) показаны на фиг. 28, a.

Глава IV

РАСЧЕТ ВЫСОКОЙ КВАДРАТНОЙ БАЛКИ ПРИ ЛЮБОЙ АНТИСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ¹

§ 1. Бигармонические уравнения в канонической форме

При любой антисимметричной нагрузке (фиг. 30) ось антисимметрии нагрузки (ось Y) является нулевой линией поверхности напряжения, т. е. осью антисимметрии поверхности напряжений.

¹ Аналогично вышеуказанному, можно матрицу B расщепить на две системы, из которых одна будет содержать 6 неизвестных, другая 4 неизвестных.

Для этого необходимо принять за неизвестные $z_1 - z_6$; $z_2 - z_{10}$ и т. д. и соответственно $z_1 + z_6$; $z_2 + z_{10}$ и т. д.

Таким образом, все ординаты z , лежащие на оси Y , равны нулю и остается десять неизвестных ординат, для нахождения которых нужно составить десять уравнений.

Структура этих уравнений зависит только от выбора сетки, а грузовые члены — только от нагрузки.

Записав уравнение (13) для узлов сетки 2, 3, 5 и т. д., получим следующую матрицу уравнений.

Система бигармонических уравнений в конечных разностях и в канонической форме для квадратной балки при любой антисимметричной нагрузке:¹

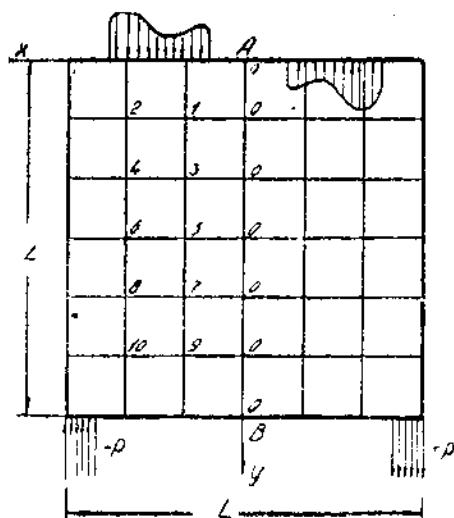
Матрица B

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	a_{1m}
1	20	-8	-8	2	1	—	—	—	—	—	a_{1m}
2	-8	22	2	-8	—	1	—	—	—	—	a_{2m}
3	-8	2	19	-8	-8	2	1	—	—	—	a_{3m}
4	2	-8	-8	21	2	-8	—	1	—	—	a_{4m}
5	1	—	-8	2	19	-8	-8	2	1	—	a_{5m}
6	—	1	2	-8	-8	21	2	-8	—	1	a_{6m}
7	—	—	1	—	-8	2	19	-8	-8	2	a_{7m}
8	—	—	—	1	2	-8	-8	21	2	-8	a_{8m}
9	—	—	—	—	1	—	-8	2	20	-8	a_{9m}
10	—	—	—	—	—	1	2	-8	-8	22	a_{10m}

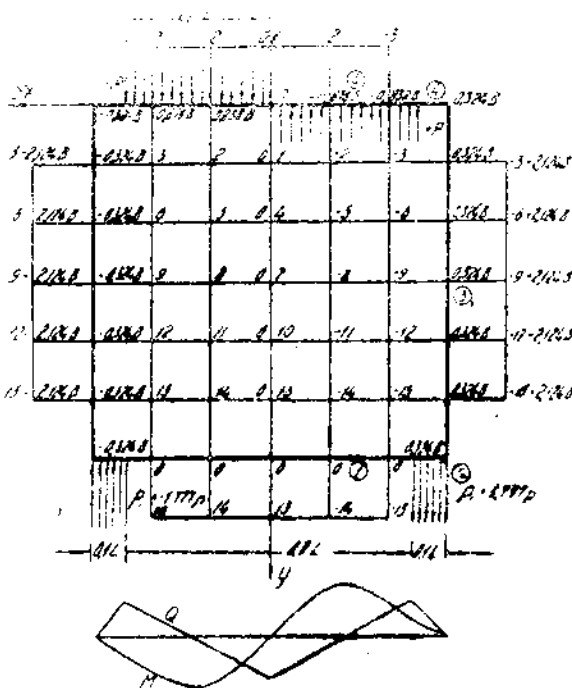
§ 2. Числа влияния ординат z матрицы B

По формуле (20)

$$n = \frac{s(s+1)}{2} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.$$



Фиг. 30.



Фиг. 31.

¹ Количество разных чисел влияния здесь будет равняться: 7

$$n = \frac{10(10+2)+2^2}{4} = 31 \quad (\text{см. стр. 156}).$$

Числа влияния, вычисленные так же, как было это указано выше (глава III, § 1), сведены в таблице 2.

Числа влияния ордин

	1	2	3	4	5
b_1	-0,078732	-0,033165	-0,047872	-0,026059	-0,021466
b_2	—	-0,067804	-0,025859	-0,036568	-0,012857
b_3	—	—	-0,116357	-0,057075	-0,065919
b_4	—	—	—	-0,094794	-0,038140
b_5	—	—	—	—	-0,124087
b_6	—	—	—	—	—
b_7	—	—	—	—	—
b_8	—	—	—	—	—
b_9	—	—	—	—	—
b_{10}	—	—	—	—	—

§ 3. Равномерно распределенная антисимметричная нагрузка (фиг. 31)

Участок 1.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 2.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1,777p; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1,777px + C_4; \quad F = \frac{1,777px^2}{2} + C_4x + C_5;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_6.$$

Сравнив участки первый и второй, получим:

$$C_4 = -0,711pL; \quad C_5 = 0,142pL^2.$$

Откуда

$$F = \frac{1,777px^2}{2} - 0,711pLx + 0,142pL^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1,777px - 0,711pL;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

6	7	8	9	10	
-0,013062	-0,008048	-0,005044	-0,002157	-0,001295	b_1
-0,014395	-0,004944	-0,004691	-0,001295	-0,001074	b_2
-0,038217	-0,027729	-0,017250	-0,008048	-0,004944	b_3
-0,048529	-0,017250	-0,018224	-0,005044	-0,004691	b_4
-0,062487	-0,065919	-0,038140	-0,021466	-0,012857	b_5
-0,099723	-0,038217	-0,048529	-0,013062	-0,014395	b_6
—	-0,116357	-0,057075	-0,047872	-0,025859	b_7
—	—	-0,094794	-0,026059	-0,036568	b_8
—	—	—	-0,078732	-0,033165	b_9
—	—	—	—	-0,067804	b_{10}

Участок 3.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \tau = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_7; \quad F = C_7 y + C_8; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = C_9.$$

Сравнив границы второго и третьего участков, получим:

$$C_7 = 0; \quad C_8 = 0,009pL^2; \quad C_9 = 0,177pL.$$

Откуда

$$F = 0,009pL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,177pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

В такой же последовательности находим, что на четвертом участке:

$$F = 0,177pLx - 0,079pL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,177pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

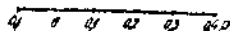
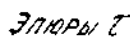
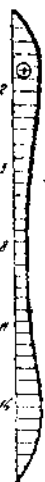
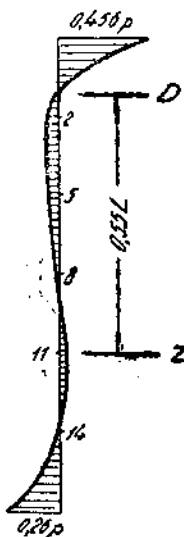
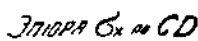
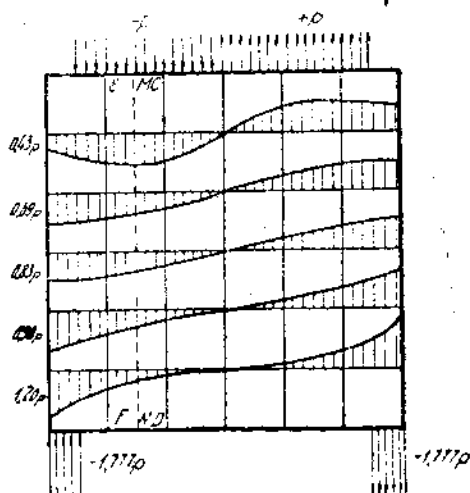
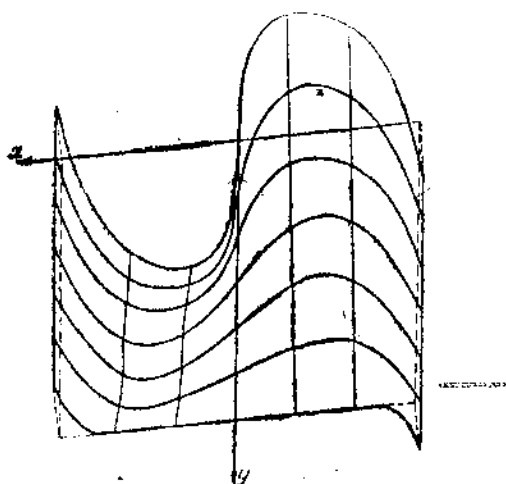
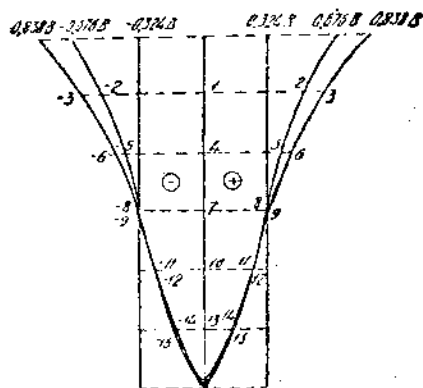
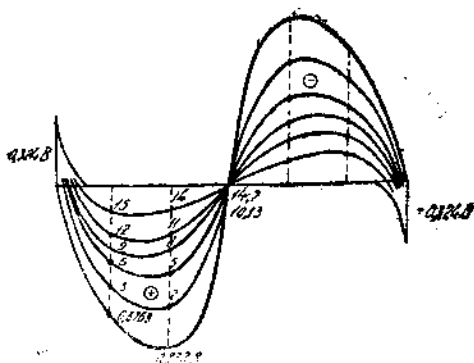
На пятом участке:

$$F = \frac{px^2}{2} - 0,223pLx; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = px - 0,223pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Значения контурных и законтурных ординат выписаны на фиг. 31, причем нумерация ординат и значение B такие же, как при симметричной нагрузке.

Правые части матрицы B запишутся так:

	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
a_{km}	5,676B	4,560B	-0,514B	0,252B	0,324B	0,928B	0,324B	0,928B	0,324B	0,928B



Пользуясь числами влияния таблицы 2 и формулой (19), находим значения ординат z :

$$\begin{aligned} z_2 &= 0,608341B; & z_3 &= 0,518249B; & z_5 &= 0,433224B; \\ z_6 &= 0,395093B; & z_8 &= 0,330028B; & z_9 &= 0,320163B; \\ z_{11} &= 0,245315B; & z_{12} &= 0,251978B; & z_{14} &= 0,130338B; \\ z_{16} &= 0,144394B. \end{aligned}$$

Кроме того, $z_1 = z_4 = z_7 = z_{10} = z_{13} = 0$.

Следы поверхности напряжений изображены на фиг. 32 и фиг. 33, а сама поверхность функции напряжений показана в аксонометрии на фиг. 34.

Эпюры напряжений σ_y показаны на фиг. 35.

Эпюры напряжений σ_x показаны на фиг. 36 и фиг. 37, а эпюры τ на фиг. 38.

Глава V

РАСЧЕТ ВЫСОКОЙ КВАДРАТНОЙ БАЛКИ ПРИ ЛЮБОЙ НАГРУЗКЕ. ИНФЛЮЕНТНЫЕ ЛИНИИ

§ 1. Метод расчета

Выше был показан прием расчета квадратной балки при действии любой симметричной и любой антисимметричной нагрузки.

Если на балку действует нагрузка, распределенная по какому угодно закону, то, пользуясь приемом Andrée, можно ее (нагрузку) привести всегда к прямо и обратно симметричной.

Для отдельных случаев можно воспользоваться результатами глав III и IV, а окончательный результат получить как сумму двух напряженных состояний.

§ 2. Несимметричная равномерно распределенная нагрузка (фиг. 39)

Раскладывая нагрузку по Andrée, получаем прямо симметричную нагрузку (глава III § 4) и обратно симметричную (глава IV, § 3). Складывая вышеполученные результаты, получим эпюры σ_x (фиг. 40), σ_y (фиг. 39) и τ_{xy} (фиг. 41).

§ 3. Инфлюэнтные линии ординат поверхности напряжений

Инфлюэнтные линии для ординат z будем находить по способу многократной установки при движении груза Q по верхнему краю, причем сам груз $Q = qa$ равномерно распределен на площадке $a = 0,1L$ при интенсивности q . Для возможности пользования таблицами чисел влияния мы каждое положение нагрузки будем расщеплять на прямо и обратно симметричную нагрузку (фиг. 42).

Значение контурных ординат определяем, как было сказано выше.

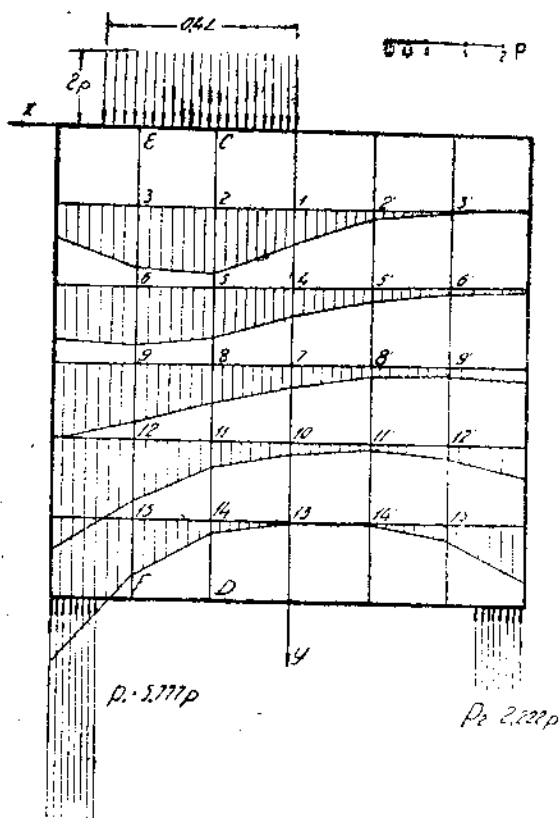
Участок 1.

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

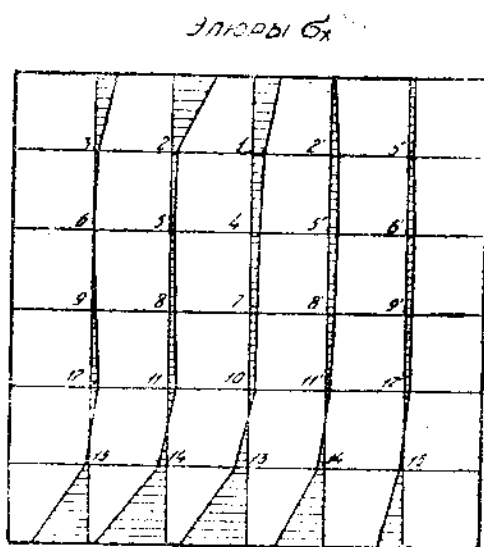
Участок 2.

$$F = -\frac{px^2}{2} + 0,4pLx - 0,08pL^2;$$

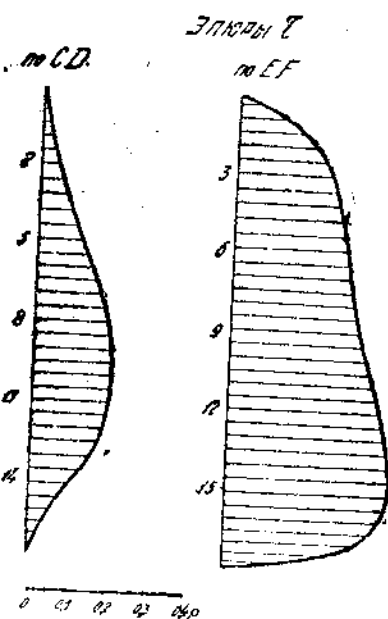
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -px + 0,4pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$



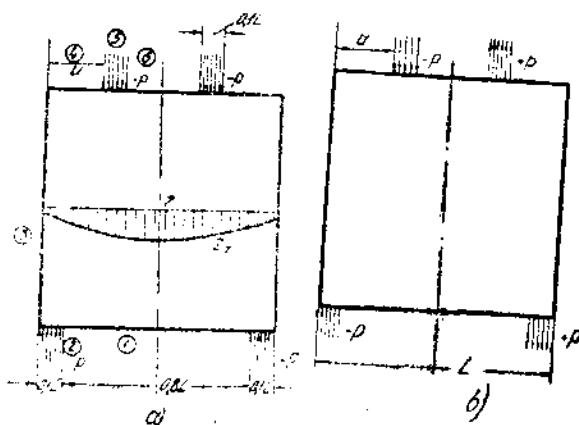
Фиг. 39.



Фиг. 40.



Фиг. 41.



Фиг. 42.

Участок 3.

$$F = -0,005pL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -0,1pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 4.

$$F = -0,1pLx + 0,045pL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -0,1pL; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Участок 5.

$$F = -\frac{px^2}{2} + (pu - 0,1pL)x - \frac{pu^2}{2} + 0,045pL^2,$$

где

u — величина переменная.

Участок 6.

$$F = -0,2pLx + 0,05pL^2 + 0,1pLu.$$

Пример. Инфлюентная линия ординаты z_1 . При обратно симметричной нагрузке $z_2 = 0$; поэтому достаточно найти ординаты для прямо симметричной нагрузки, причем для каждого положения нагрузки будем пользоваться числами влияния таблицы 1. Построенная таким образом линия z_1 показана на фиг. 42, а.

Глава VI

ВЛИЯНИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

§ 1. Основные уравнения

В § 1 гл. I были выписаны дифференциальные уравнения плоской задачи (I) без учета массовых сил.

С учетом массовых сил эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + g &= 0, \end{aligned} \quad (1')$$

где

g — плотность тела, считаемая постоянной величиной во всех точках балки.¹

Компоненты напряжения запишутся так:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - gx.$$

§ 2. Контурные условия для квадратной балки (фиг. 43)

При ширине опорных площадок в $0,1L$ интенсивность реакций будет:

$$p = \frac{L \cdot L \cdot g}{0,2 \cdot L} = 5Lg.$$

Участок I.

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 0; \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - gx = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= C_1; \quad F = C_1x + C_2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gx^2}{2} + C_3. \end{aligned}$$

¹ В случае переменных объемных сил, задача значительно усложняется, так как в основные уравнения будут входить упругие константы.

Пусть

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Тогда

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gx^2}{2}.$$

Участок 2.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -gx;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = C_4; \quad F = C_4 y + C_5; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -gxy + C_6.$$

Сравнение границ первого и второго участков дает:

$$C_1 = \left| -\frac{gx^2}{2} \right|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{gL^2}{8};$$

$$| C_4 y + C_5 |_{y=0} = 0;$$

$$| -gxy + C_6 |_{x=\frac{L}{2}} = 0.$$

Откуда

$$C_5 = C_6 = 0.$$

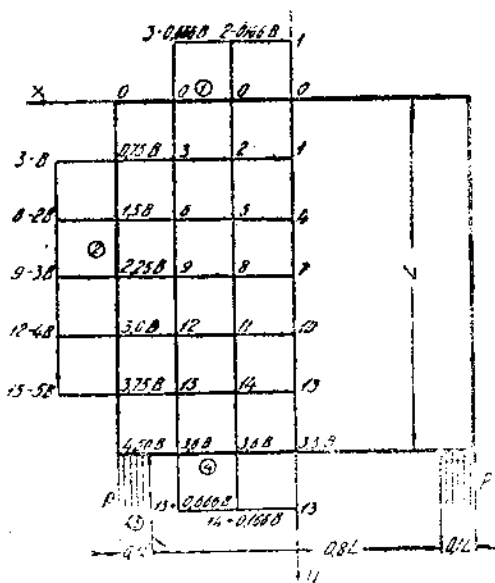
Тогда

$$F = -\frac{gL^2}{8} y; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -gxy;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gL^2}{8}.$$

Участок 3.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -gx;$$



Фиг. 43.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -px + C_7; \quad F = -\frac{px^2}{2} + C_7 x + C_8; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gx^2}{2} + C_9.$$

Сравнение границ третьего и второго участков дает:

$$| -gxy |_{x=\frac{L}{2}} = | -px + C_7 |_{x=\frac{L}{2}};$$

$$\left| -\frac{px^2}{2} + C_7 x + C_8 \right|_{x=\frac{L}{2}} = \left| -\frac{gL^2}{8} y \right|_{y=L};$$

$$\left| -\frac{gx^2}{2} + C_9 \right|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{gL^2}{8}.$$

Откуда

$$C_7 = 2gL^2; \quad C_8 = -\frac{gL^3}{2}; \quad C_9 = 0.$$

Тогда

$$F = -\frac{5}{2} gLx^2 + 2gL^2 x - \frac{gL^3}{2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -px + 2gL^2 = -5gLx + 2gL^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gx^2}{2}.$$

Участок 4.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -gx;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_{10}; \quad F = C_{10}x + C_{11}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gx^2}{2} + C_{12};$$

$$C_{10} = | -px + 2gL^2 |_{x=0,4L} = 0;$$

$$C_{11} = \left| -\frac{5}{2}gLx^2 + 2gL^2x - \frac{gL^3}{2} \right|_{x=0,4L} = -0,1gL^3;$$

$$\left| -\frac{gx^2}{2} + C_{12} \right|_{x=0,4L} = \left| -\frac{gx^2}{2} \right|_{x=0,4L}; \quad \text{откуда } C_{12} = 0.$$

Тогда

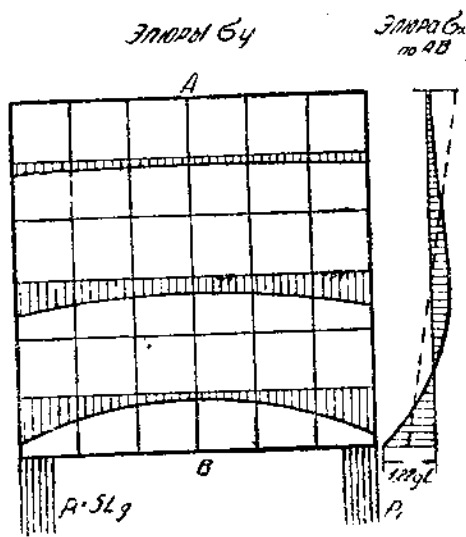
$$F = -0,1gL^3; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{gx^2}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Значения контурных и законтурных ординат выписаны на Фиг. 43, причем $B = \frac{gL^3}{36}$.

§ 3. Составление уравнений, их решение и построение эпюр

Так как собственный вес при постоянной плотности относится к классу однажды симметричных нагрузок (относительно оси Y), то структура бигармонических уравнений будет идентична матрице A , и, следовательно, для нахождения неизвестных можно воспользоваться числами влияния таблицы 1.

Правые части уравнений после некоторых преобразований запишутся так:



Фиг. 44.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a_{km}	0	$-1,168B$	$9,322B$	0	$-3,000B$	$16,000B$	0	$-4,500B$
	9	10	11	12	13	14	15	
a_{lm}	$24,000B$	$3,600B$	$-13,200B$	$24,800B$	$14,400B$	$49,768B$	$81,868B$	

Неизвестные найдутся независимо по формуле (19) с помощью чисел влияния таблицы 1.

Эпюры σ_y и σ_x показаны на фиг. 44.

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВЫСОКИХ БАЛОК

§ 1. Балка с отношением сторон 1:2

(фиг. 45)

При заданном выборе сетки и любой симметричной нагрузке число неизвестных ординат равно шести.

Для каждой узловой точки можно составить уравнение (11), причем:

$$\alpha = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{\alpha} = 4.$$

Тогда, после некоторых преобразований, мы получим нижеуказанную матрицу.

Система бигармонических уравнений в конечных разностях и в канонической форме для балки с отношением сторон

1:2 при любой симметричной нагрузке:

Матрица C

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	a_{km}
1	37,5	— 10	— 20	4	4	—	a_{1m}
2	— 10	76	4	— 40	—	8	a_{2m}
3	— 20	4	33,5	— 10	— 20	4	a_{3m}
4	4	— 40	— 10	68	4	— 40	a_{4m}
5	4	—	— 20	4	37,5	— 10	a_{5m}
6	—	8	4	— 40	— 10	76	a_{6m}

Найдем числа влияния ординат z , пользуясь схемой Дулитля.

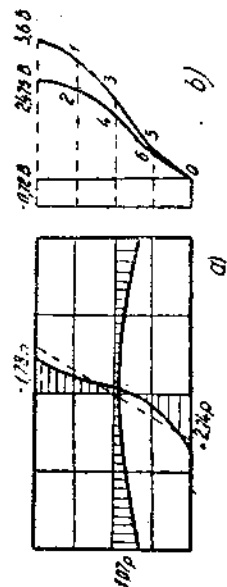
Числа влияния ординат z матрицы G^1

Таблица 3

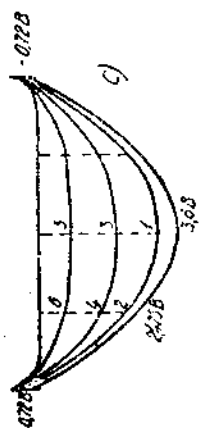
	1	2	3	4	5	6
b_1	— 0,047101	— 0,008819	— 0,038993	— 0,009703	— 0,015899	— 0,004228
b_2	—	— 0,022685	— 0,009680	— 0,018294	— 0,004228	— 0,007299
b_3	—	—	— 0,079664	— 0,018514	— 0,038993	— 0,009680
b_4	—	—	—	— 0,37799	— 0,009703	— 0,018294
b_5	—	—	—	—	— 0,047101	— 0,008819
b_6	—	—	—	—	—	— 0,022685

¹ Количество разных чисел влияния здесь будет равно

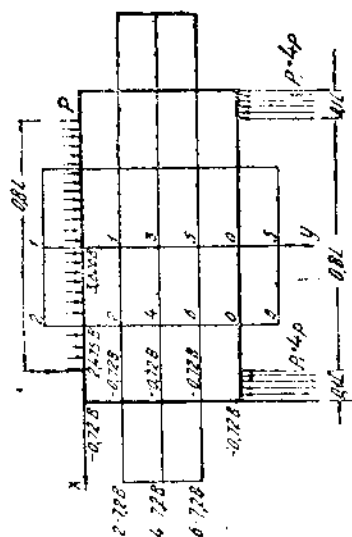
$$n = \frac{6(6 + 2) + 2^2}{4} = 13.$$



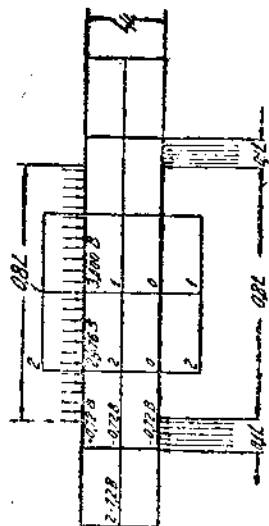
Фиг. 47.



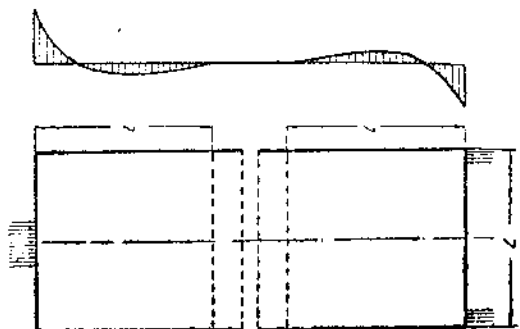
Фиг. 48.



Фиг. 49.



Фиг. 50.



Фиг. 51.



Фиг. 52.

Пример. Равномерно-распределенная нагрузка по верхнему краю. (фиг. 46).

Значения контурных и законтурных ординат, вычисленные, как это было показано выше, выписаны на фиг. 46, причем $B = \frac{pL^2}{36}$.

Правые части матрицы C , после некоторых преобразований, запишутся так:

	1	2	3	4	5	6
a_{km}	62,460B	86,696B	-14,040B	-7,740B	0,360B	2,120B

Неизвестные найдем по формуле (19), пользуясь числами влияния таблицы 3.

$$z_1 = 3,098624B; \quad z_2 = 2,257026B; \quad z_3 = 2,047498B;$$

$$z_4 = 1,681841B; \quad z_5 = 0,772691B; \quad z_6 = 0,670639B.$$

Следы поверхности напряжений показаны на фиг. 47, *b* и *c*, а эпюры напряжений на фиг. 47, *a*. Мы видим, что распределение напряжений σ_x приближается к закону Навье (пунктирная линия).

При любой антисимметричной нагрузке число неизвестных ординат будет равно трем.

§ 3. Балка с отношением сторон 1:4 (фиг. 48)

Значения контурных и законтурных ординат выписаны на фиг. 48.

Для случая равномерно распределенной нагрузки бигармонические уравнения, после некоторых преобразований, запишутся так:

$$41,5 z_1 - 10 z_2 = 62,46B;$$

$$10 z_1 + 67 z_2 = 83,16B,$$

где

$$B = \frac{pL^2}{36}.$$

Откуда

$$z_1 = 1,86B; \quad z_2 = 1,52B.$$

Эпюры σ_x и σ_y по средним сечениям показаны на фиг. 49.

Закон распределения σ_x почти прямолинейный, и поэтому практически такие балки можно рассчитывать по Navier, пренебрегая нормальными напряжениями σ_y .

При любой антисимметричной нагрузке будет одна неизвестная (z_2).

§ 3. Балки, у которых высота больше пролета

Для балки, изображенной на фиг. 50, при $H = 2L$, а также для более высоких балок нагрузка, действующая по нижнему краю, заставляет работать на изгиб только часть балки высотой $H = L$, т. е. на этой высоте нормальные напряжения практически затухают (см. также фиг. 1, *d* и фиг. 37).

Для высокой балки при нагрузке по верхнему краю эпюра нормальных напряжений показана на фиг. 51.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Под термином *пластинка средней толщины* подразумевается такая пластинка, у которой прогиб ξ_0 соизмерим с толщиной h .¹ К пластинкам такого рода относится, например, обшивка речных судов, резервуаров и т. п. Такие пластинки работают не только на изгиб, как плита, но и на растяжение, как мембрана.

Поэтому напряженное состояние таких пластинок можно рассматривать как сумму напряжений изгиба и растяжения.

Напряжения изгиба достигают своей наибольшей величины на поверхности пластинки, а мембранные напряжения распределены равномерно по сечению. Для получения максимальных напряжений следует алгебраически сложить напряжения первого и второго состояний.

Точное решение задачи о пластинке средней толщины сводится к

двум дифференциальным уравнениям, которые, вместе с граничными условиями, определяют напряженное состояние в каждой точке пластинки.

Одно из этих уравнений — уравнение Кármán'a — в координатной системе, представленной на фиг. 1, запишется так:²

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = \left(\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}, \quad (1)$$

где φ — функция Airy, ξ_0 — прогиб точки срединной поверхности с координатами y и z , а ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности в той же точке.

Второе уравнение Germain:

$$\frac{\partial^4 \xi_0}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \xi_0}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \xi_0}{\partial z^4} = \frac{q}{D}; \quad (2)$$

здесь q — интенсивность внешней нагрузки, а D — цилиндрическая жесткость.

Уравнение (1) позволяет найти напряжения в срединной плоскости пластинки, если известна поверхность, по которой она изогнулась; уравнение (2) позволяет найти при данных срединных напряжениях поверхность, по которой пластинка изогнулась.

¹ См. Б. Г. Галеркин, Упругие тонкие плиты, Госстройиздат, 1933. Фепплъ, Сила и деформация, ГТТИ, 1933.

² См. Фепплъ, *ibidem*, стр. 250.

Уравнение (1) упрощается лишь в некоторых частных случаях, например: а) когда прогиб мал по сравнению с толщиной пластинки, б) когда граничные условия таковы, что срединная плоскость искривляется по поверхности, развертывающейся на плоскость.

В этих случаях уравнение (1) переходит в бигармоническое уравнение плоской задачи:

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (2)$$

Точное решение вышенаписанных уравнений удастся получить лишь в некоторых частных случаях.

Обыкновенно, приходится обращаться к бесконечным рядам, решая задачу приближенно, например, по Ritz.¹

Задавая упругую поверхность в виде некоторого тригонометрического или алгебраического ряда, составим для определения параметров выражение для силовой функции.²

Взяв затем производные от силовой функции по каждому из параметров и приравняв их нулю, получим число уравнений, необходимое для определения всех параметров.

Примерно в таком виде задача эта решена Förpl,³ у которого приведен результат для случая квадратной пластинки, свободно опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В настоящей статье это решение распространено на случай прямоугольной пластинки при тех же контурных условиях⁴.

§ 2. Прямоугольная плита

Формулы для напряжений запишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{2G}{m-1} x \left(m \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} \right); \\ \sigma_z &= -\frac{2G}{m-1} x \left(m \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} \right); \\ \tau_{yz} &= -2Gx \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y \partial z}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ξ_0 — прогиб плиты, m — коэффициент Пуассона, а G — модуль поперечной упругости.

Изогнутую поверхность плиты представим приближенно функцией вида:

$$\xi_0 = f \cos \frac{\pi y}{2a} \cdot \cos \frac{\pi z}{2b}, \quad (5)$$

где неизвестным параметром является максимальный прогиб. Легко видеть, что уравнение (5) удовлетворяет граничным условиям свободно опертой по контуру плиты.

Подставив значение ξ_0 в центре плиты из (5) в (4), получим значения для максимальных напряжений в центре плиты при $x = \pm \frac{h}{2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{G}{m-1} hf \frac{\pi^2}{4} \left(m \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right); \\ \sigma_z &= \frac{G}{m-1} hf \frac{\pi^2}{4} \left(m \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right); \\ \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

¹ См. Фелпс, *Идемет.* Также С. В. Серенсен, *Основы технической теории упругости* ОНТИ 1934 г., § 38.

² См. Папкович, *Строительная механика корабля.*

³ См. А. и Л. Фюрпл, *„Drang und Zwang“*, 1920.

⁴ Настоящая статья представляет собой часть работы, проделанной автором применительно к расчету обшивки реяного судна в Институте строительной механики Украинской академии наук. См. *Попытки уточнения методов расчета корпуса речных судов*. Сборник № 10 И-та стр. мех. Акад. наук под руководством и редакцией проф. А. А. Уманского.

Силовая функция при равномерной нагрузке равна:

$$\sum P\xi_0 = \int p dF \cdot \xi_0 = 4 \int_0^b \int_0^a f \cdot \cos \frac{\pi y}{2a} \cdot \cos \frac{\pi z}{2b} dy dz = pf_0 \frac{16ab}{\pi^2}. \quad (7)$$

Потенциальная энергия плиты:

$$A = \frac{Gh^3}{12} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\pi^4 ab}{16} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cdot f^2. \quad (8)$$

Суммарная силовая функция:

$$U = pf \cdot \frac{16ab}{\pi^2} - \frac{Gh^3}{12} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{\pi^4 ab}{16} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cdot f^2. \quad (9)$$

Для нахождения неизвестного параметра f составляем выражение производной от силовой функции по f :

$$\frac{\partial U}{\partial f} = 0. \quad (10)$$

Отсюда после преобразований при $m = 4$ и $G = \frac{2}{5} E$ получим:

$$f = \frac{3a^4 b^4}{Eh^3(a^2 + b^2)^2} p. \quad (11)$$

§ 3. Прямоугольная мембрана

Напряженное состояние прямоугольной мембраны может быть охарактеризовано как обобщенное плоское напряженное состояние (двухосное).¹

Формулы для упругих перемещений запишутся так:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \end{aligned} \quad (12)$$

где ξ , η и ζ суть перемещения параллельно осям X , Y и Z .
Формулы для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2G}{m-1} (m\epsilon_y + \epsilon_x); \\ \sigma_x &= \frac{2G}{m-1} (m\epsilon_x + \epsilon_y). \end{aligned} \quad (13)$$

Потенциальная энергия мембраны:

$$A = \frac{Gh}{m-1} \int \left\{ m(\epsilon_y^2 + \epsilon_x^2) + 2\epsilon_y \epsilon_x + \frac{m-1}{2} \gamma_{yz}^2 \right\} dF. \quad (14)$$

¹ См. С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, ч. I, стр. 80, 1916.

Упругую поверхность мембраны представим функцией того же вида, что и для плиты:

$$\xi = f \cos \frac{\pi y}{2a} \cdot \cos \frac{\pi z}{2b}, \quad (15)$$

где f — прогиб в центре.

Перемещения η и ζ можно представить следующими формулами:

$$\begin{aligned} \eta &= C_1 \sin \frac{2\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2b}; \\ \zeta &= C_2 \sin \frac{2\pi z}{2b} \cos \frac{\pi y}{2a}, \end{aligned} \quad (16)$$

где C_1 и C_2 — перемещения в четверти мембраны (при $z=0$, и $y=\frac{a}{2}$).

Подставив в формулы (12) значения ξ , η и ζ из (15) и (16), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{f^2 \pi^2}{8a^2} \sin^2 \frac{\pi y}{2a} \cos^2 \frac{\pi z}{2b} + C_1 \frac{2\pi}{2a} \cos \frac{2\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2b}; \\ \varepsilon_z &= \frac{f^2 \pi^2}{8b^2} \cos^2 \frac{\pi y}{2a} \sin^2 \frac{\pi z}{2b} + C_2 \frac{2\pi}{2b} \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{2\pi z}{2b}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{f^2 \pi^2}{16ab} \sin \frac{2\pi y}{2a} \sin \frac{2\pi z}{2b} - C_1 \frac{\pi}{2b} \sin \frac{2\pi y}{2a} \sin \frac{\pi z}{2b} - \\ &\quad - C_2 \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{2\pi z}{2b}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив значения деформаций из (17) в (14) и выполняя квадратуры, получим формулу для потенциальной энергии прямоугольной мембраны:¹

$$\begin{aligned} A &= \frac{Gh}{m-1} \left\{ \frac{f^4 \pi^4}{1024ab} m \left(9 \frac{a^2}{b^2} + 9 \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - \right. \\ &\quad - \frac{C_1 f^2 \pi^2}{6} \left(2m \frac{b}{a^2} + \frac{m-3}{2b} \right) - \frac{C_2 f^2 \pi^2}{6} \left(2m \frac{a}{b^2} + \frac{m-3}{2a} \right) + \\ &\quad + C_1^2 \pi^2 \left(m \frac{b}{a} + \frac{m-1}{8} \frac{a}{b} \right) + C_2^2 \pi^2 \left(m \frac{a}{b} + \frac{m-1}{8} \frac{b}{a} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{16(m+1)}{9} C_1 C_2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Суммарная силовая функция для прямоугольной мембраны равна:

$$U = pf \cdot \frac{16ab}{\pi^2} - A, \quad (19)$$

где значение A берем из (18).

Для нахождения параметров C_1 и C_2 составим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C_1} &= 0; \\ \frac{\partial U}{\partial C_2} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

¹ См. Фенпль, Ibidem.

Решив систему двух совместных линейных уравнений, получим при $n = 4$ следующие выражения для C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{\frac{f^2 \pi^2}{6} \left(8 \frac{a}{b^2} + \frac{1}{2a} \right) - \frac{9f^2 \pi^4}{240} \left(4 \frac{a}{b} + \frac{3}{8} \frac{b}{a} \right) \left(8 \frac{b}{a^2} + \frac{1}{2b} \right)}{-\frac{9\pi^4}{20} \left(4 \frac{a}{b} + \frac{3}{8} \frac{b}{a} \right) \left(4 \frac{b}{a} + \frac{3}{8} \frac{a}{b} \right) + \frac{80}{9}}; \quad (21)$$

$$C_2 = \frac{\frac{f^2 \pi^2}{6} \left(8 \frac{b}{a^2} + \frac{1}{2b} \right) - \frac{9f^2 \pi^4}{240} \left(4 \frac{b}{a} + \frac{3}{8} \frac{a}{b} \right) \left(8 \frac{a}{b^2} + \frac{1}{2a} \right)}{-\frac{9\pi^4}{20} \left(4 \frac{b}{a} + \frac{3}{8} \frac{a}{b} \right) \left(4 \frac{a}{b} + \frac{3}{8} \frac{b}{a} \right) + \frac{80}{9}}. \quad (22)$$

Для определения параметра f составляем выражение:

$$\frac{\partial U}{\partial f} = 0. \quad (23)$$

Подставив в (23) значение U из (19), получим при

$$m = 4 \text{ и } G = \frac{2}{5} E$$

$$\begin{aligned} \frac{f^2 \pi^4}{64ab} \left(9 \frac{a^2}{b^2} + 9 \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - f \left\{ \frac{C_1 \pi^2}{3} \left(8 \frac{b}{a^2} + \frac{1}{2b} \right) + \frac{C_2 \pi^2}{3} \left(8 \frac{a}{b^2} + \frac{1}{2a} \right) \right\} = \\ = \frac{120 pab}{\pi^2 E h}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из кубического уравнения (24) может быть определен параметр f . Для определения мембранных напряжений воспользуемся формулой (13). Для этого найдем из (17) значение ε_y и ε_z в центре мембраны (при $y = z = 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\pi}{a} C_1; \\ \varepsilon_z &= \frac{\pi}{b} C_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив эти значения в формулу (13), получим следующие выражения для мембранных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2G}{m-1} \left(m \frac{\pi}{a} C_1 + \frac{\pi}{b} C_2 \right); \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-1} \left(m \frac{\pi}{b} C_2 + \frac{\pi}{a} C_1 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

При $m = 4$ и $G = \frac{2}{5} E$ получим:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{4E}{15} \left(4 \frac{\pi}{a} C_1 + \frac{\pi}{b} C_2 \right); \\ \sigma_z &= \frac{4E}{15} \left(4 \frac{\pi}{b} C_2 + \frac{\pi}{a} C_1 \right). \end{aligned} \quad (26a)$$

§ 4. Пластика средней толщины

При заданном соотношении сторон пластинки определяем из формулы (11) интенсивность нагрузки p_1 в функции f :

$$p_1 = \frac{Eh^3(a^2 + b^2)^2}{3a^4b^4} f. \quad (27)$$

Затем из формулы (21) и (22) определяем C_1 и C_2 в функции f , после чего из (24) определяем p_2 также в функции f .

Здесь p_1 — часть внешней нагрузки, от которой пластинка работает, как плита; p_2 — часть нагрузки, от которой пластинка работает, как мембрана. Найдя p_1 и p_2 , составляем уравнение:

$$p_1 + p_2 = p, \quad (28)$$

где p — заданная интенсивность внешней нагрузки, действующей на пластинку.

Из кубического (относительно f) уравнения (28) определяем максимальный прогиб f в центре пластинки.

Подставив это значение f в формулу (6), получим балочные напряжения в центре пластинки, а, подставив то же значение в (21) и (22), определим параметр C_1 и C_2 , после чего из формул (26) находим мембранные напряжения.

Складывая соответственные величины балочных и мембранных напряжений, получим суммарные напряжения.

Пример: Пусть $a = b$.

Из (27):

$$p_1 = \frac{1,33Eh^3f}{b^4}.$$

Из (21) или (22) имеем:

$$C_1 = C_2 = 0,147 \frac{f^2}{b}.$$

Из (24)

$$p_2 = 1,94 \frac{Ehf^2}{b^4}.$$

Основное уравнение (28) примет вид:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{Ehf}{b^4} (1,33h^2 + 1,94f^2);$$

из последнего уравнения определяем f .

Балочные напряжения по формуле (6):

$$\sigma_0 = \sigma_y = \sigma_z = \frac{1,64Ehf}{b^2}.$$

Мембранные напряжения по формуле (26а):

$$\sigma_m = 0,62 \frac{f^2 E}{b^2}.$$

Суммарные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \sigma_m = \frac{Ef}{b^2} (1,64h + 0,62f)^2.$$

¹ Этот результат совпадает с приведенным у Фепля, Сила и деформация, стр. 260.

Нахождение напряжений может быть упрощено следующим образом. Основное уравнение (28) после некоторых преобразований запишется так:

$$f^3 + cf + d = 0. \quad (29)$$

Складывая балочные и мембранные напряжения в направлении оси Y , получим формулу для полного напряжения в этом направлении:

$$\sigma_y = \frac{Ef}{b^2} (ah + \beta f). \quad (30)$$

Аналогично:

$$\sigma_z = \frac{Ef}{b^2} (\alpha_1 h + \beta_1 f). \quad (31)$$

Коэффициенты уравнения (29) и напряжений (30 и 31) для разных соотношений сторон пластинки приведены в таблице 1.

Таблица 1

a/b	Коэффициенты основного уравнения		$\sigma_y = \frac{Ef}{b^2} (ah + \beta f)$		$\sigma_z = \frac{Ef}{b^2} (\alpha_1 h + \beta_1 f)$	
	c	d	α	β	α_1	β_1
1	2	3	4	5	6	7
1,0	0,7295 h^2	$-0,5473 \frac{pb^4}{Eh}$	1,645	0,615	1,645	0,615
1,1	0,7258 „	$-0,6527$ „	1,416	0,518	1,587	0,600
1,2	0,7136 „	$-0,7457$ „	1,242	0,448	1,544	0,592
1,3	0,6986 „	$-0,8278$ „	1,107	0,392	1,510	0,584
1,4	0,6815 „	$-0,8968$ „	1,000	0,351	1,484	0,581
1,5	0,6609 „	$-0,9523$ „	0,913	0,315	1,462	0,574
1,6	0,6465 „	$-1,0040$ „	0,843	0,288	1,444	0,571
1,7	0,6311 „	$-1,0449$ „	0,784	0,263	1,429	0,568
1,8	0,6152 „	$-1,0775$ „	0,735	0,246	1,417	0,567
1,9	0,6017 „	$-1,1061$ „	0,693	0,230	1,407	0,566
2,0	0,5856 „	$-1,1299$ „	0,658	0,217	1,398	0,566
2,5	0,5416 „	$-1,2091$ „	0,540	0,176	1,371	0,562
3,0	0,5006 „	$-1,2180$ „	0,465	0,155	1,352	0,556

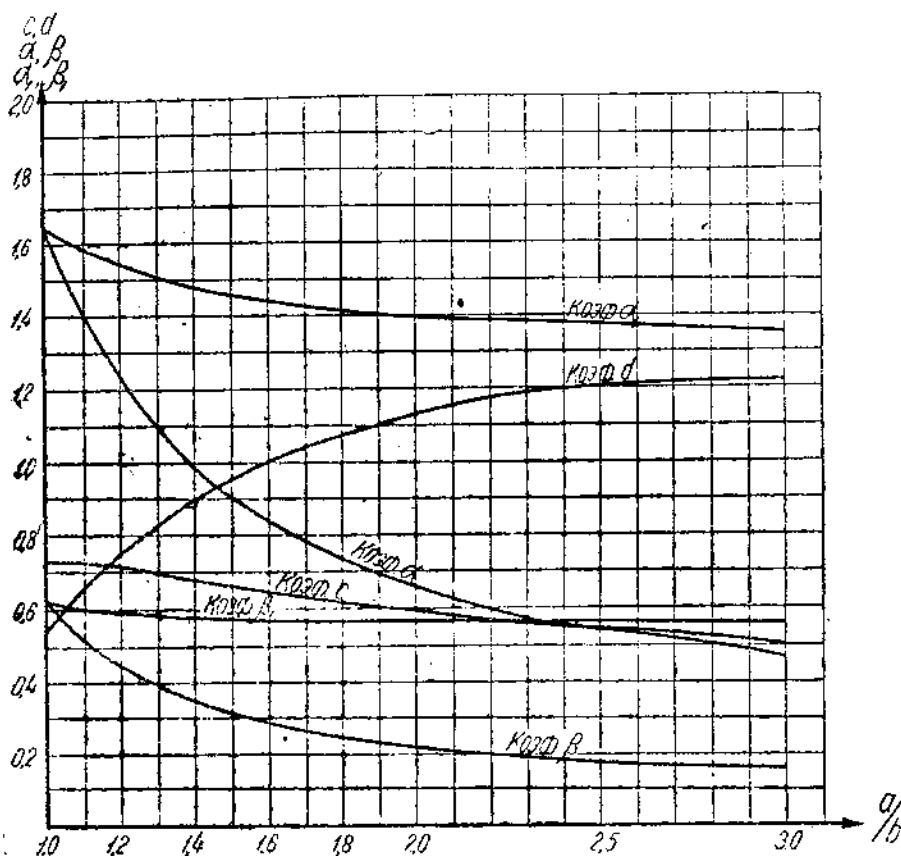
Таким образом, напряжения в пластинках определяются следующим образом.

Из (29) определяем f , после чего из (30) и (31) определяем полные напряжения.

Если соотношение сторон пластинки таково, что не совпадает с приведенным в таблице 1, то коэффициенты уравнения и напряжений могут быть найдены путем табличной или графической интерполяции.

Графики для интерполяции приведены на фиг. 2.

Уравнение (29) может быть решено или аналитически, или путем проб, причем за первое хорошее приближение может быть взято значение f из номограммы, приведенной на фиг. 3.¹ Прямая, соединяющая соответственные значения коэффициентов c и d , отсекает на средней кривой действительный корень уравнения (29). Так же легко может быть решено уравнение (29) на логарифмической линейке.²



Фиг. 2.

Если пластинка обладает большой жесткостью, т. е. h значительно больше f , то в формулах (30) и (32) можно пренебречь мембранными коэффициентами β и β_1 и тогда мы получим формулы для прямоугольной плиты:

$$\sigma_y = \frac{Efh}{b^3} \alpha; \quad (32)$$

$$\sigma_z = \frac{Efh}{b^3} \alpha_1. \quad (33)$$

Для случая пластинки с очень большими прогибами, когда f значительно больше h , можно отбросить коэффициенты плиты α и α_1 , и тогда мы получим формулы для прямоугольной мембраны:

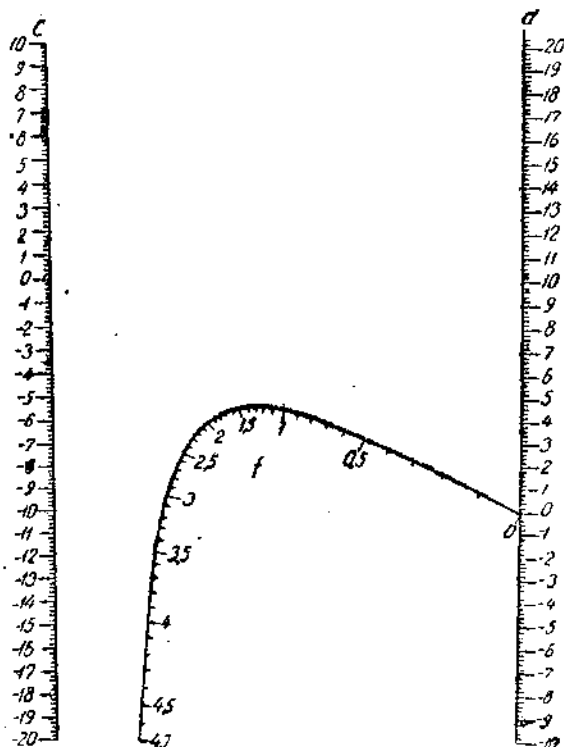
$$\sigma_y = \frac{Ef^3}{b^3} \beta; \quad (34)$$

$$\sigma_z = \frac{Ef^3}{b^3} \beta_1. \quad (35)$$

¹ См. Франк, Номографический справочник, ГИИ, 1933, стр. 43.

² См. Фихтенгольц, Математика для инженеров, ч. I, стр. 42, 1932 г.

Для иллюстрации вышеприведенных формул сделаем численный пример.
 Численный пример. Пусть $a = 75 \text{ см}$, $b = 50 \text{ см}$, $h = 0,3 \text{ см}$, $p = 0,25 \text{ кг/см}^2$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.



Фиг. 3.

При данном соотношении $\frac{a}{b} = 1,5$ находим из таблицы 1 коэффициенты c и d основного уравнения.
 Уравнение (29) запишется так:

$$f^3 + 0,6609 h^2 f - 0,9523 \frac{pb^4}{Eh} = 0.$$

Подставив соответствующие значения, получим:

$$f^3 + 0,0595 f - 2,48 = 0.$$

По номограмме $f = 1,35 \text{ см}$.

Точное значение $f = 1,34 \text{ см}$.

Пользуясь таблицей 1, находим по формулам (30) и (31) напряжения:

$$\sigma_z = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,34}{50^3} (1,462 \cdot 0,3 + 0,574 \cdot 1,34) = 1294 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_y = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,34}{50^3} (0,913 \cdot 0,3 + 0,315 \cdot 1,34) = 746 \text{ кг/см}^2.$$

К РАСЧЕТУ ЭСТАКАД

Цель настоящей статьи — на числовом примере показать применение графического метода решения уравнений и дать рациональную схему расчета эстакады при неподвижной и подвижной нагрузке.

§ 1. Составление уравнений

Трехпролетную эстакаду с консолями (фиг. 1) рассчитаем на действие постоянной и подвижной нагрузки.

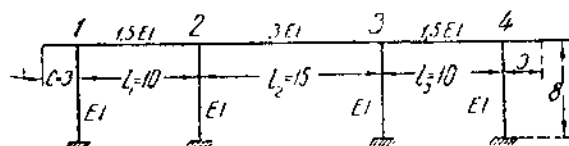
Отдельные элементы эстакады имеют постоянное сечение.

Относительные жесткости ригелей, если считать за единицу жесткость стоек, приняты:

для крайних пролетов — $1,5 EJ$,

для среднего пролета — $3,0 EJ$.

Решая систему методом деформаций, будем иметь 5 неизвестных.



Фиг. 1.

Расчетные формулы для опорных моментов M_A и M_B при постоянной жесткости балки с заделанными концами таковы:¹

$$M_B = M_{n,n-1} = -\frac{Q_n}{l_n} \left(1 + \frac{6e}{l_n} \right) - \frac{4EJ}{l_n} \varphi_n - \frac{2EJ}{l_n} \varphi_{n-1} + \frac{6EJ}{l_n^2} (\Delta_n - \Delta_{n-1}); \quad (1)$$

$$M_A = M_{n,n+1} = -\frac{Q_{n+1}}{l_{n+1}} \left(1 - \frac{6e}{l_{n+1}} \right) + \frac{4EJ}{l_{n+1}} \varphi_n + \frac{2EJ}{l_{n+1}} \varphi_{n+1} - \frac{6EJ}{l_{n+1}^2} (\Delta_{n+1} - \Delta_n). \quad (2)$$

Отсюда получим общее уравнение равновесия узла n ($\sum M = 0$). [Левые моменты входят в уравнение со знаком (+), правые со знаком (—)].

$$2K_n \varphi_{n-1} + 4(K_n + K_{n+1} + K_{n'}) \varphi_n + 2K_{n+1} \varphi_{n+1} - \frac{(6\Delta_n - \Delta_{n-1})}{l_n} K_n - \frac{6\delta_n K_{n'}}{l_{n'}} - \frac{6(\Delta_{n+1} - \Delta_n)}{l_{n+1}} K_{n'} + \frac{Q_n}{l_n} \left(1 + \frac{6e}{l_n} \right) + \frac{Q_{n'}}{l_{n'}} \left(1 + \frac{6e}{l_{n'}} \right) - \frac{Q_{n+1}}{l_{n+1}} \left(1 - \frac{6e}{l_{n+1}} \right) = 0. \quad (3)$$

¹ См. проф. О. А. Уманский, Статика і кінематика рамних конструкцій, Київ, 1933.

Здесь $K_n = \frac{EJ_n}{l_n}$ — величина, называемая иногда „погонной жесткостью“.

φ_n — угол поворота конца стержня.

Δ_n — осадка опорных точек ригеля, перпендикулярная к его оси.

l_n — длина стержня.

δ_n — горизонтальное перемещение верхних концов стоек (вправо знак +).

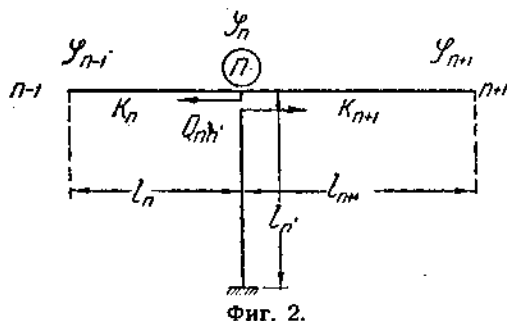
Ω — площадь эпюры моментов от внешней нагрузки (как для простой балки).

e — эксцентриситет площади эпюры моментов относительно середины балки.

(Схему узла n см. на фиг. 2).

Для рассчитываемой эстакады составим четыре уравнения равновесия узлов и пятое уравнение, выражающее условие равновесия ригеля ($\sum Q_{nn'} = 0$).

При отсутствии горизонтальных нагрузок получим:



Фиг. 2.

$$\sum \left[Q^0 - \frac{12\Omega_n e}{l_n^3} - \frac{6K_{n'}}{l_n} \varphi_n + \frac{12K_{n'}}{l_n^3} \delta_n \right] = 0. \quad (4)$$

Здесь $Q_{nn'}$ — перерезывающая сила в верхней части стоек, Q^0 — перерезывающая сила стоек от внешней нагрузки (равна реакции B простой балки с противоположным знаком).

Система пяти уравнений в общем виде будет:

$$\begin{aligned} 1) & \varphi_1 a_{11} + \varphi_2 a_{12} + \delta a_{15} + a_{1m} = 0; \\ 2) & \varphi_1 a_{21} + \varphi_2 a_{22} + \varphi_3 a_{23} + \dots + \delta a_{25} + a_{2m} = 0; \\ 3) & \varphi_2 a_{32} + \varphi_3 a_{33} + \varphi_4 a_{34} + \delta a_{35} + a_{3m} = 0; \\ 4) & \varphi_3 a_{43} + \varphi_4 a_{44} + \delta a_{45} + a_{4m} = 0; \\ 5) & \varphi_1 a_{51} + \varphi_2 a_{52} + \varphi_3 a_{53} + \varphi_4 a_{54} + \delta a_{55} + a_{5m} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем числовые величины коэффициентов при неизвестных, оставляя свободные члены a_{nm} пока в буквенном виде.

Из равновесия 1-го узла эстакады:

$$a_{11} = 4(K_n + K_{n+1} + K_{n'}) = 4\left(0 + \frac{1,5}{10} + \frac{1}{8}\right) = 1,10,$$

$$a_{12} = 2K_{n+1} = 2 \frac{1,5}{10} = 0,30,$$

$$a_{15} = -\frac{6K_{n'}}{l_n} = -\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{8} = -0,094.$$

Отсюда первое уравнение:

$$1) 1,10\varphi_1 - 0,30\varphi_2 - 0,094\delta + a_{1m} = 0.$$

Аналогично находим коэффициенты:

$$a_{21} = 2K_n = 2 \frac{1,5}{10} = 0,30;$$

$$a_{22} = 4(K_n + K_{n+1} + K_{n'}) = 4\left(\frac{1,5}{10} + \frac{3}{15} + \frac{1}{8}\right) = 1,90;$$

$$a_{28} = 2K_{n+1} = 2 \frac{3}{15} = 0,40;$$

$$a_{25} = -\frac{6K_{n'}}{l_{n'}} = -\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{8} = -0,094.$$

Второе уравнение примет вид:

$$2) \quad 0,30\varphi_1 + 1,90\varphi_2 + 0,40\varphi_3 - 0,094\delta + a_{2m} = 0.$$

Так как эстакада и нагрузки симметричны, уравнения равновесия 3-го и 4-го узлов соответственно совпадают со 2-м и 1-м уравнениями.

$$3) \quad 0,40\varphi_2 + 1,90\varphi_3 + 0,30\varphi_4 - 0,094\delta + a_{3m} = 0;$$

$$4) \quad 0,30\varphi_3 + 1,10\varphi_4 - 0,094\delta + a_{4m} = 0.$$

Чтобы получить пятое уравнение системы (5), подставляем числовые величины в уравнение (4):

$$a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = -\frac{6K_{n'}}{l_{n'}} = -\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{8} = -0,094;$$

$$a_{55} = \sum \frac{12K_{n'}}{l_{n'}^3} = 4 \frac{12 \cdot 1}{8^3 \cdot 8} = 0,094.$$

После подстановки имеем:

$$5) \quad -0,094\varphi_1 - 0,094\varphi_2 - 0,094\varphi_3 - 0,094\varphi_4 + 0,094\delta + a_{5m} = 0.$$

Найденные коэффициенты сведем в матрицу:

	1	2	3	4	5	a_{nm}
1	1,10	0,30	—	—	—0,094	a_{1m}
2	0,30	1,90	0,40	—	—0,094	a_{2m}
3	—	0,40	1,90	0,30	—0,094	a_{3m}
4	—	—	0,30	1,10	—0,094	a_{4m}
5	—0,094	—0,094	—0,094	—0,094	0,094	a_{5m}

§ 2. Случай равномерно распределенной нагрузки

($q = 3 \text{ т/пол. ж ригеля}$)

Свободный член, зависящий от нагрузки, по формуле (3) имеет следующее значение:

$$a_{nm} = \frac{Q_n}{l_n} \left(1 + \frac{6e}{l_n} \right) + \frac{Q_{n'}}{l_{n'}} \left(1 + \frac{6e}{l_{n'}} \right) - \frac{Q_{n+1}}{l_{n+1}} \left(1 - \frac{6e}{l_{n+1}} \right). \quad (6)$$

При незагруженных стойках и равномерно распределенной нагрузке на ригелях будем иметь:

$$a_{nm} = \frac{Q_n}{l_n} - \frac{Q_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Для 1-го узла, учитывая, что слева находится консоль:

$$a_{1m} = \frac{qc^2}{2} - \frac{Q_1}{l_1} = \frac{qc^2}{2} - \frac{ql_1^2}{12l_1} = \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{3 \cdot 10^2}{12} = -11,50.$$

Соответственно найдем:

$$a_{2m} = \frac{Q_1}{l_1} - \frac{Q_2}{l_2} = \frac{ql_1^2}{12l_1} - \frac{ql_2^2}{12l_2} = \frac{3 \cdot 10^2}{12} - \frac{3 \cdot 15^2}{12} = -31,25;$$

$$a_{3m} = 31,25; \quad a_{4m} = 11,50.$$

Общее выражение для a_{5m} берется из уравнения равновесия ригеля (4):

$$a_{5m} = \sum_1 \left(Q_0 - \frac{12 Q_n e}{l_n} \right).$$

В нашем случае $a_{5m} = 0$, так как на стойках внешней нагрузки нет. Обратимся к решению уравнений.

Рассматривая полученную систему (5), видим, что если принять $\delta = 0$, то первые четыре уравнения становятся трехчленными. Пятое уравнение и члены с δ как бы окаймляют их и определенным образом влияют на результат.

Решение можно разделить на следующие этапы:

1) Найти неизвестные для системы четырех трехчленных уравнений, полагая $\delta = 0$. Обозначим их φ_n .

2) Определить неизвестные для той же системы, принимая $\delta = 1$, а свободные члены $a_{nm} = 0$.

Пусть это будут значения $\varphi_{1(5)}$, $\varphi_{2(5)}$, $\varphi_{3(5)}$, $\varphi_{4(5)}$.

3) Фактически величина δ не равна единице, поэтому полученные значения $\varphi_{n(5)}$ нужно умножить еще на ее действительную величину и прибавить к φ , т. е.

$$\varphi_1 = \bar{\varphi}_1 + \varphi_{1(5)} \delta;$$

$$\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \varphi_{2(5)} \delta;$$

$$\varphi_3 = \bar{\varphi}_3 + \varphi_{3(5)} \delta;$$

$$\varphi_4 = \bar{\varphi}_4 + \varphi_{4(5)} \delta.$$

(7)

Подставляя эти величины в пятое уравнение, получим уравнение с одной неизвестной δ .

Откуда:

$$\delta = - \frac{\varphi_1 a_{51} + \varphi_2 a_{52} + \varphi_3 a_{53} + \varphi_4 a_{54} + a_{5m}}{\varphi_{1(5)} a_{51} + \varphi_{2(5)} a_{52} + \varphi_{3(5)} a_{53} + \varphi_{4(5)} a_{54} + 1 \cdot a_{55}}. \quad (8)$$

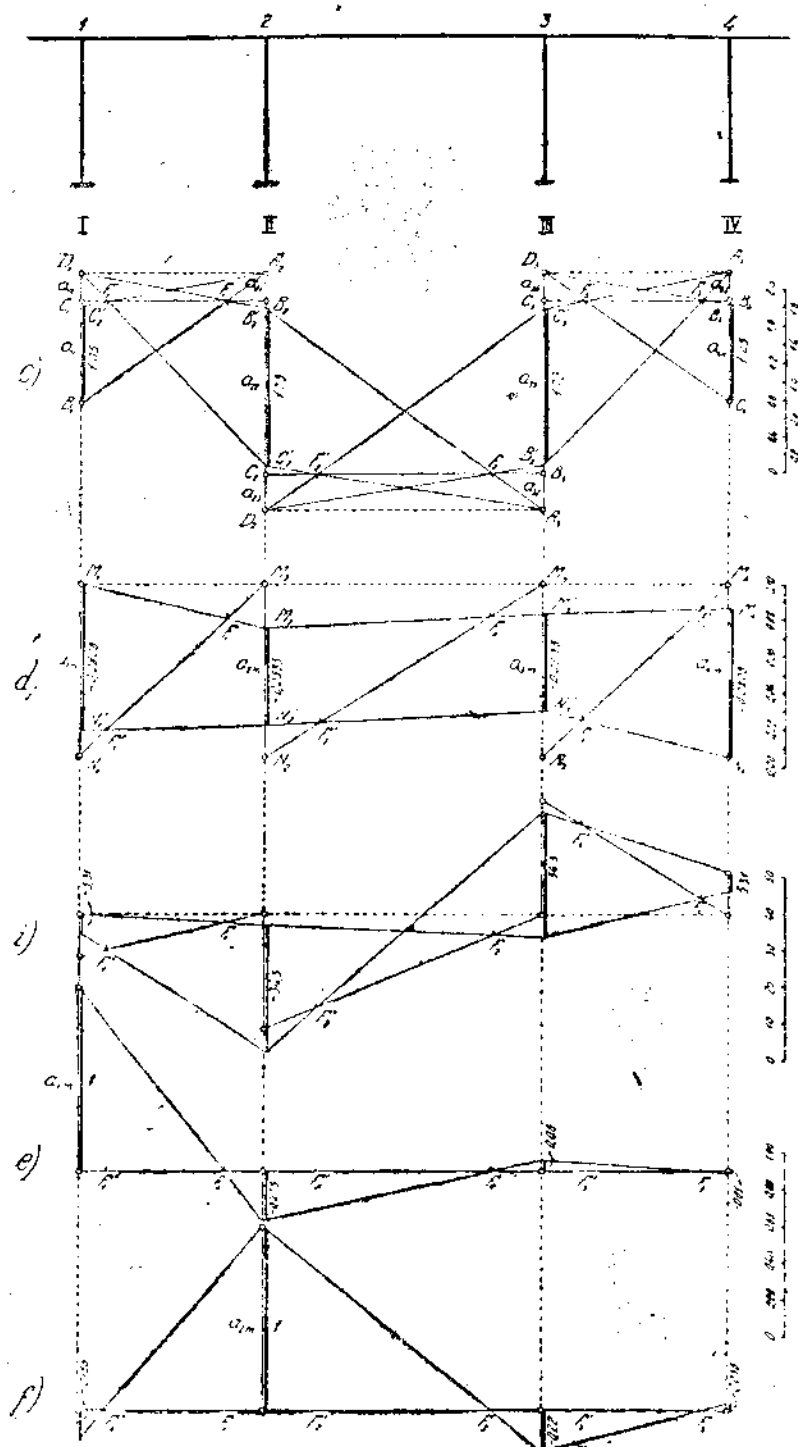
Таким образом, придется решать только трехчленные уравнения и одно уравнение с одной неизвестной.

Для решения трехчленных уравнений воспользуемся графическим методом.¹

Строим эпюру общих коэффициентов c и эпюры свободных членов d и i (см. фиг. 3).

Эпюра c . По числу трехчленных уравнений проводим четыре вертикали I, II, III, IV на любом расстоянии. (В нашем случае принято расстояние между стойками). На каждой вертикали в определенном масштабе откладываем коэффициенты соответствующего уравнения, причем на вертикали I коэффициенты первого уравнения откладываются снизу вверх. Переходя по горизонтальной линии на вертикаль II, отложение производим сверху

¹ См. проф. А. А. Уманский, "О решении трехчленных уравнений", Сборник "Рамы и фермы" под ред. проф. И. М. Рабиновича, Москва, 1933.



Фиг. 3.

вниз и т. д. Проводим горизонтальные прямые — базы: C_1B_2 , C_2B_3 и C_3B_4 . Далее проводим прямую B_1A_2 , которая пересекается с крайней базой в точке F_1 . Проведем D_1F_1 , получаем точку B_2' .

Аналогично, проведя линии $B_2'A_3$ и D_2F_2 , находим точку B_3' , а затем точку B_4' .

Таким же построением, но идя слева направо, получим перекрестные фокусы F_2' , F_3' , F_4' и точки C_3' , C_2' и C_1' .

Искомые отрезки B_1C_1' , $B_2'C_2'$, $B_3'C_3'$ и $B_4'C_4'$ обозначены жирно. Назовем их буквами c .

Эпюра свободных членов d). На тех же вертикалях от какой-нибудь горизонтали откладываем соответствующие величины свободных членов (в любом масштабе).

Проводим диагонали N_1M_2 , N_2M_3 , N_3M_4 , на которые переносим фокусные точки, найденные в эпюре c). Искомые отрезки M_1N_1' , $M_2'N_2'$, $M_3'N_3'$ и $M_4'N_4'$ заключаются между ломаными, проходящими через правые и левые фокусы. Обозначим их буквами d . Аналогично построена эпюра i свободных членов от нагрузки q .

Таким образом, графически получены значения:

$$c_1 = c_4 = 1,05; \quad d_1 = d_4 = -0,0808;$$

$$c_2 = c_3 = 1,73; \quad d_2 = d_3 = -0,0533;$$

$$i_1 = -5,31; \quad i_3 = 34,3;$$

$$i_2 = -34,3; \quad i_4 = 5,31.$$

Вычисляем $\bar{\varphi}_n$:

$$\bar{\varphi}_1 = -\frac{i_1}{c_1} = -\frac{(-5,31)}{1,05} = 5,05;$$

$$\bar{\varphi}_2 = -\frac{i_2}{c_2} = -\frac{(-34,3)}{1,73} = 19,84;$$

$$\bar{\varphi}_3 = -\frac{i_3}{c_3} = -\frac{34,3}{1,73} = -19,84;$$

$$\bar{\varphi}_4 = -\frac{i_4}{c_4} = -\frac{5,31}{1,05} = -5,05.$$

Вычисляем φ с индексом (δ) :

$$\varphi_{1(\delta)} = -\frac{d_1}{c_1} = -\frac{(-0,0808)}{1,05} = 0,077; \quad \varphi_{3(\delta)} = 0,0308;$$

$$\varphi_{2(\delta)} = -\frac{d_2}{c_2} = -\frac{(-0,0533)}{1,73} = 0,0308; \quad \varphi_{4(\delta)} = 0,077.$$

Находим δ :

$$\delta = -\frac{5,05(-0,094) + 19,84(-0,094) - 19,84(-0,094) - 5,05(-0,094) + 0}{0,077(-0,094) + 0,0308(-0,094) + 0,077(-0,094) + 0,0308(-0,094) + 0,094} = 0.$$

Как и следовало ожидать, вследствие симметрии эстакады и нагрузки, $\delta = 0$. Поэтому:

$$\varphi_1 = \bar{\varphi}_1 = 5,05; \quad \varphi_3 = \bar{\varphi}_3 = -19,84;$$

$$\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 = 19,84; \quad \varphi_4 = \bar{\varphi}_4 = -5,05.$$

Понятно, что решение можно было бы упростить, учтя заранее, что $\delta = 0$, $\varphi_1 = -\varphi_4$ и $\varphi_2 = -\varphi_3$.

Мы проделали решение полностью, чтобы показать общий ход, пригодный и в других случаях.

Определение изгибающих моментов от равномерно распределенной нагрузки q

По формулам (1) и (2) находим опорные моменты в отдельных частях эстакады (фиг. 4).

Узел 1.

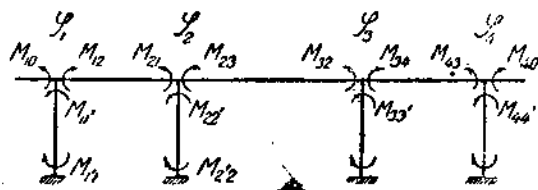
$$M_{12} = -\frac{Q_1}{l_1} \left(1 - \frac{6e}{l_1} \right) + \frac{4EJ}{l_1} \varphi_1 + \frac{2EJ}{l_1} \varphi_2 = -\frac{3 \cdot 10^3}{12} +$$

$$+ \frac{4 \cdot 1,5}{10} 5,05 + \frac{2 \cdot 1,5}{10} 19,84 = -16,02;$$

$$M_{11}' = -\frac{4EJ}{l_1'} \varphi_1 +$$

$$+ \frac{6EJ}{l_1'^2} \delta = -\frac{4 \cdot 1}{8} 5,05 + 0 = -2,53;$$

$$M_{10} = -\frac{qc^2}{2} = -\frac{3 \cdot 3^2}{2} = -13,5.$$



Фиг. 4.

Узел 2.

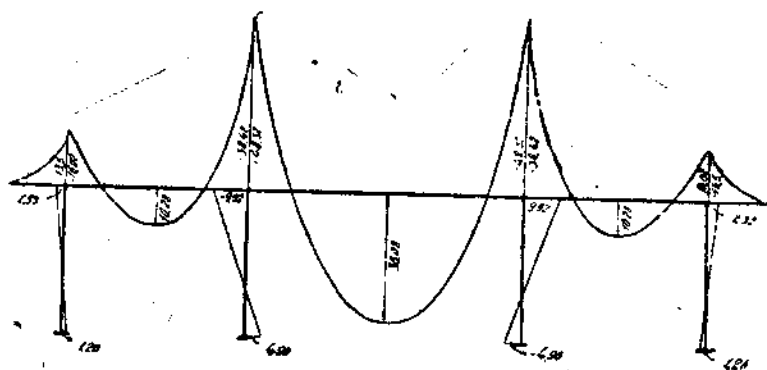
$$M_{21} = -\frac{Q_1}{l_1} \left(1 + \frac{6e}{l_1} \right) - \frac{4EJ}{l_1} \varphi_2 - \frac{2EJ}{l_1} \varphi_1 = -\frac{3 \cdot 10^3}{12} -$$

$$- \frac{4 \cdot 1,5}{10} 19,84 - \frac{2 \cdot 1,5}{10} 5,05 = -38,42;$$

$$M_{23} = -\frac{Q_2}{l_2} \left(1 - \frac{6e}{l_2} \right) + \frac{4EJ}{l_2} \varphi_2 + \frac{2EJ}{l_2} \varphi_3 = -\frac{3 \cdot 15^3}{12} +$$

$$+ \frac{4 \cdot 3}{15} 19,84 + \frac{2 \cdot 3}{15} (-19,84) = -48,32;$$

$$M_{22} = -\frac{4EJ}{l_2^2} \varphi_2 + \frac{6EJ}{l_2^3} \delta = -\frac{4 \cdot 1}{8} 19,84 + 0 = -9,92.$$



Фиг. 5.

Аналогично для узлов 3 и 4.

$$M_{32} = -48,32;$$

$$M_{43} = -16,02;$$

$$M_{34} = -38,42;$$

$$M_{44} = -2,53;$$

$$M_{33}' = -9,92;$$

$$M_{40} = -13,50.$$

Моменты внизу стоек по формуле (2):

$$M_{1'1} = \frac{2EJ}{l_1} \varphi_1 = \frac{2 \cdot 1}{8} 5,05 = 1,26;$$

$$M_{2'2} = \frac{2EJ}{l_2} \varphi_2 = \frac{2 \cdot 1}{8} 19,84 = 4,96;$$

$$M_{3'3} = -4,96; \quad M_{4'4} = -1,26.$$

Полученная эпюра моментов дана на фиг. 5.

§ 3. Влияние подвижной нагрузки. Построение инфлюентных линий

Пользуясь числами влияния, неизвестные можно получить из такой зависимости:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_{1m} X_{11} + a_{2m} X_{12} + a_{3m} X_{13} + a_{4m} X_{14} + a_{5m} X_{15}; \\ \varphi_2 &= a_{1m} X_{21} + a_{2m} X_{22} + a_{3m} X_{23} + a_{4m} X_{24} + a_{5m} X_{25}; \\ \varphi_3 &= a_{1m} X_{31} + a_{2m} X_{32} + a_{3m} X_{33} + a_{4m} X_{34} + a_{5m} X_{35}; \\ \varphi_4 &= a_{1m} X_{41} + a_{2m} X_{42} + a_{3m} X_{43} + a_{4m} X_{44} + a_{5m} X_{45}; \\ \delta &= a_{1m} X_{51} + a_{2m} X_{52} + a_{3m} X_{53} + a_{4m} X_{54} + a_{5m} X_{55}, \end{aligned} \quad (9)$$

где X_{ik} — числа влияния,

a_{km} — свободные члены.

В окаймленной системе трехчленных уравнений каждое число влияния может быть выражено следующим образом:

$$X_{ik} = \bar{X}_{ik} + X_{5k} \cdot X_{i(5)}.$$

Здесь:

X_{ik} — значение X_i в системе трехчленных уравнений ($\delta = 0$);

$X_{i(5)}$ — значение X_i , когда все свободные члены равны нулю, а $X_5 = \delta = 1$;

X_{5k} — значение неизвестной $X_5 = \delta$, когда $a_{km} = 1$, а остальные свободные члены равны 0.

Таким образом, для получения всех чисел влияния, принимая во внимание, что $X_{ik} = X_{ki}$, придется вычислить следующую таблицу:

	1	2	3	4	5
1	$X_{11} = \bar{X}_{11} + X_{15} X_{1(5)}$	$X_{12} = \bar{X}_{12} + X_{25} X_{1(5)}$	$X_{13} = \bar{X}_{13} + X_{35} X_{1(5)}$	$X_{14} = \bar{X}_{14} + X_{45} X_{1(5)}$	$X_{15} = X_{55} X_{1(5)}$
2	—	$X_{22} = \bar{X}_{22} + X_{25} X_{2(5)}$	$X_{23} = \bar{X}_{23} + X_{35} X_{2(5)}$	$X_{24} = \bar{X}_{24} + X_{45} X_{2(5)}$	$X_{25} = X_{55} X_{2(5)}$ (10)
3	—	—	$X_{33} = \bar{X}_{33} + X_{35} X_{3(5)}$	$X_{34} = \bar{X}_{34} + X_{45} X_{3(5)}$	$X_{35} = X_{55} X_{3(5)}$
4	—	—	—	$X_{44} = \bar{X}_{44} + X_{45} X_{4(5)}$	$X_{45} = X_{55} X_{4(5)}$
5	—	—	—	—	$X_{55} = \frac{1}{\sum_{i=1}^5 X_{i(5)} a_{i5}}$

Решение уравнений снова производим графически.

Имея из предыдущих эпюр значения c и d :

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 = 1,05; & & d_1 = d_4 = -0,0808; \\ c_2 = c_3 = 1,73; & & d_2 = d_3 = -0,0533, \end{aligned}$$

построим эпюры свободных членов для следующих четырех случаев:

е) $a_{1m} = 1; \quad a_{2m} = a_{3m} = a_{4m} = 0;$

ф) $a_{2m} = 1; \quad a_{1m} = a_{3m} = a_{4m} = 0;$

г) $a_{3m} = 1; \quad a_{1m} = a_{2m} = a_{4m} = 0;$

h) $a_{4m} = 1; \quad a_{1m} = a_{2m} = a_{3m} = 0.$

В виду симметрии можно ограничиться первыми двумя эпюрами (фиг. 3).

Построение ведем в таком порядке: на соответствующей вертикали откладываем величину $a_{nm} = 1$. От нее вправо, через проекции правых перекрестных фокусов, и влево, через проекции левых фокусов, проводим ломаную кривую, которая отсекает искомые отрезки на остальных вертикалях.

[Отрезки над осью принимаем со знаком (+), ниже оси—со знаком (—)].

Полученные значения:

При $a_{1m} = 1:$	При $a_{2m} = 1:$	При $a_{3m} = 1:$	При $a_{4m} = 1:$
$e_1 = 1;$	$f_1 = -0,166;$	$g_1 = 0,0364;$	$h_1 = -0,01;$
$e_2 = -0,273;$	$f_2 = 1;$	$g_2 = -0,22;$	$h_2 = 0,06;$
$e_3 = 0,06;$	$f_3 = -0,22;$	$g_3 = 1;$	$h_3 = -0,273;$
$e_4 = -0,01;$	$f_4 = 0,0364;$	$g_4 = -0,166;$	$h_4 = 1.$

Вычисляем $\bar{X}_{ik}$:

$\bar{X}_{11} = -\frac{e_1}{c_1} = -\frac{1}{1,05} = -0,953;$	$\bar{X}_{21} = -\frac{f_1}{c_1} = -\frac{(-0,166)}{1,05} = 0,158;$
$\bar{X}_{12} = -\frac{e_2}{c_2} = -\frac{(-0,273)}{1,73} = 0,158;$	$\bar{X}_{22} = -\frac{f_2}{c_2} = -\frac{1}{1,73} = -0,578;$
$\bar{X}_{13} = -\frac{e_3}{c_3} = -\frac{0,06}{1,73} = -0,0347;$	$\bar{X}_{23} = -\frac{f_3}{c_3} = -\frac{(-0,22)}{1,73} = 0,127;$
$\bar{X}_{14} = -\frac{e_4}{c_4} = -\frac{(-0,01)}{1,05} = 0,0095;$	$\bar{X}_{24} = -\frac{f_4}{c_4} = -\frac{0,0364}{1,05} = -0,0347;$
$\bar{X}_{33} = -\frac{g_3}{c_3} = -\frac{1}{1,73} = -0,578;$	
$\bar{X}_{34} = -\frac{g_4}{c_4} = -\frac{(-0,166)}{1,05} = 0,158;$	$\bar{X}_{44} = -\frac{h_4}{c_4} = -\frac{1}{1,05} = -0,953.$

Вычисляем:

$$X_{1(5)} = -\frac{d_1}{c_1} = -\frac{(-0,0808)}{1,05} = 0,077 = X_{4(5)};$$

$$X_{2(5)} = -\frac{d_2}{c_2} = -\frac{(-0,0533)}{1,73} = 0,0308 = X_{3(5)}.$$

Чтобы найти числа влияния в последнем вертикальном столбце таблицы (10), определяем величину

$$X_{55} = -\frac{1}{\sum_{i=1}^5 X_{i(5)} a_{i5}}.$$

Это выражение получается из пятого уравнения, если мы найденные $X_{(5)}$ помножим на неизвестную пока величину X_{55} и вставим в это уравнение. Решая 5-ое уравнение относительно X_{55} , определяем его величину. Свободный член a_{5m} принимается равным единице.

$$X_{55} = - \frac{1}{X_{1(5)} a_{51} + X_{2(5)} a_{52} + X_{3(5)} a_{53} + X_{4(5)} a_{54} + 1 \cdot a_{55}} =$$

$$= - \frac{1}{0,077(-0,094) + 0,0308(-0,094) + 0,0308(-0,094) + 0,077(-0,094) + 0,094} =$$

$$= -13,56.$$

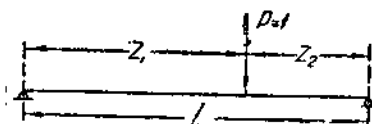
Вычисление полной величины чисел влияния по формулам (10) произведено в следующей таблице:

	1	2
1	$-0,952 + (1,044) 0,077 = -1,032$	$0,158 + (-0,418) 0,077 = 0,126$
2	—	$-0,578 + (-0,418) 0,0308 = -0,591$
3	—	—
4	—	—
5	—	—

	3	4	5
1	$-0,0347 + (-0,418) 0,077 = -0,0669$	$0,0095 + (-1,044) 0,077 = -0,0709$	$-13,56 \cdot 0,077 = -1,044$
2	$0,127 + (-0,418) 0,0308 = 0,114$	$-0,0347 + (-1,044) 0,0308 = -0,0669$	$-13,56 \cdot 0,0308 = -0,418$
3	$-0,578 + (-0,418) 0,0308 = -0,591$	$0,158 + (-1,044) 0,0308 = 0,126$	$-13,56 \cdot 0,0308 = -0,418$
4	—	$-0,952 + (-1,044) 0,077 = -1,032$	$-13,56 \cdot 0,077 = -1,044$
5	—	—	$-13,56$

Определение свободных членов

При передвижении силы $P=1$ по ригелю формула свободного члена имеет следующий вид:



$$a_{nm} = \frac{\Omega_n}{l_n} \left(1 + \frac{6e}{l_n} \right) - \frac{\Omega_{n+1}}{l_{n+1}} \left(1 - \frac{6e}{l_{n+1}} \right) \quad (11)$$

Здесь Ω — площадь эпюры моментов от силы $P=1$,

e — эксцентриситет ее относительно середины пролета.

Величины, входящие в формулу (11), принимая

$$e = \left(z_1 - \frac{l}{2} \right) \frac{1}{3}$$



Фиг. 6.

$$e = \left(\frac{l}{2} - z_2 \right) \frac{1}{3}, \quad \text{а} \quad \Omega = \frac{P z_1 z_2}{l} \cdot \frac{l}{2}$$

(см. фиг. 6), можно представить в виде таких выражений:

$$\frac{\Omega}{l} \left(1 + \frac{6e}{l} \right) = \frac{P z_1^2 z_2}{l^2} = \mu_B l; \quad \frac{\Omega}{l} \left(1 - \frac{6e}{l} \right) = \frac{P z_1 z_2^2}{l^2} = \mu_A l,$$

где

$$\mu_B = \frac{1 \cdot z_1^2}{l^2} \cdot \frac{z_2}{l}; \quad \mu_A = \frac{1 \cdot z_2^2}{l^2} \cdot \frac{z_1}{l}.$$

В данном случае (фиг. 1):

$$a_{1m} = Pc - \frac{\Omega_1}{l_1} \left(1 - \frac{6e}{l_1} \right) = Pc - \mu_A l_1;$$

$$a_{2m} = \frac{\Omega_1}{l_1} \left(1 + \frac{6e}{l_1} \right) - \frac{\Omega_2}{l_2} \left(1 - \frac{6e}{l_2} \right) = \mu_B l_1 - \mu_A l_2;$$

$$a_{3m} = \mu_B l_2 - \mu_A l_3; \quad a_{4m} = \mu_B l_3 - Pc;$$

$$a_{5m} = 0 \text{ (внешней нагрузки на стойках не имеется).}$$

Для значений μ_A и μ_B составлена таблица через 0,1 l пролета

z_1/l	μ_A	μ_B	z_1/l
0	0	0	1,0
0,1	0,081	0,009	0,9
0,2	0,128	0,032	0,8
0,3	0,147	0,063	0,7
0,4	0,144	0,096	0,6
0,5	0,125	0,125	0,5
0,6	0,096	0,144	0,4
0,7	0,063	0,147	0,3
0,8	0,032	0,128	0,2
0,9	0,009	0,081	0,1
1,0	0	0	0

Линия влияния φ_1

Общее выражение угла поворота φ_1 через числа влияния:

$$\varphi_1 = a_{1m} X_{11} + a_{2m} X_{12} + a_{3m} X_{13} + a_{4m} X_{14} + a_{5m} X_{15}.$$

Вычисляем ординаты линии влияния для каждого пролета отдельно. [Принимаем во внимание, что груз $P = 1$ в пролете l_n дает только те, отличные от нуля свободные члены a_{nm} , куда входит Ω_n (площадь эпюры моментов) этого пролета. Остальные свободные члены при этом положении груза равны нулю].

1. Груз $P = 1$ на левой консоли:

Свободные члены $a_{1m} \neq 0$; $a_{2m} = a_{3m} = a_{4m} = a_{5m} = 0$;

$$\varphi_1 = a_{1m}X_{11} = PcX_{11} = 1 \cdot 3(-1,032) = -3,096.$$

2. Груз $P = 1$ в пролете l_1 ($a_{3m} = a_{4m} = a_{5m} = 0$):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_{1m}X_{11} + a_{2m}X_{12} = -\mu_A l_1 X_{11} + \mu_B l_1 X_{12} = \\ &= -\mu_A \cdot 10(-1,032) + \mu_B \cdot 10 \cdot 0,126 = 10,32 \mu_A + 1,26 \mu_B.\end{aligned}$$

3. Груз $P = 1$ в пролете l_2 ($a_{1m} = a_{4m} = a_{5m} = 0$):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_{2m}X_{12} + a_{3m}X_{13} = -\mu_A l_2 X_{12} + \mu_B l_2 X_{13} = \\ &= -\mu_A \cdot 15 \cdot 0,126 + \mu_B 15(-0,0669) = -1,89 \mu_A - 1,004 \mu_B.\end{aligned}$$

4. Груз $P = 1$ в пролете l_3 ($a_{1m} = a_{2m} = a_{5m} = 0$):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_{3m}X_{13} + a_{4m}X_{14} = -\mu_A l_3 X_{13} + \mu_B l_3 X_{14} = \\ &= -\mu_A \cdot 10(-0,0669) + \mu_B \cdot 10(-0,0709) = 0,669 \mu_A - 0,709 \mu_B.\end{aligned}$$

5. Груз $P = 1$ на правой консоли ($a_{1m} = a_{2m} = a_{3m} = a_{5m} = 0$):

$$\varphi_1 = a_{4m}X_{14} = -PcX_{14} = -1 \cdot 3(-0,0709) = 0,213.$$

Вычисление ординат φ_1 в пролетах l_1 , l_2 и l_3 через 0,1l дано в следующей таблице:

№ сечения	Груз в пролете l_1			Груз в пролете l_2			Груз в пролете l_3		
	$10,30 \mu_A$	$+1,26 \mu_B$	φ_1	$-1,89 \mu_A$	$-1,004 \mu_B$	φ_1	$0,669 \mu_A$	$-0,709 \mu_B$	φ_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,836	0,0113	0,847	-0,153	-0,009	-0,162	0,0542	-0,0064	0,048
2	1,322	0,0403	1,362	-0,242	-0,032	-0,274	0,0856	-0,0227	0,063
3	1,52	0,0794	1,599	-0,278	-0,063	-0,341	0,0984	-0,0447	0,054
4	1,49	0,121	1,611	-0,272	-0,096	-0,368	0,0964	-0,0680	0,028
5	1,29	0,158	1,448	-0,236	-0,126	-0,362	0,0836	-0,0886	-0,005
6	0,991	0,182	1,173	-0,181	-0,145	-0,326	0,0642	-0,102	-0,038
7	0,651	0,185	0,736	-0,119	-0,148	-0,267	0,0422	-0,104	-0,062
8	0,330	0,161	0,491	-0,060	-0,129	-0,189	0,0214	-0,0908	-0,069
9	0,093	0,102	0,195	-0,017	-0,081	-0,098	0,006	-0,0547	-0,051
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Линия влияния φ_1 показана на фиг. 7 м).

Линия влияния φ_2 , в виду симметрии эстакады будет обратно симметрична линии φ_1 .

Аналогично вычислена и построена линия влияния φ_3 [(фиг. 7 n)].

Линия влияния δ

Имея общее выражение для δ через числа влияния (см. формулы 9) и произведя необходимые вычисления, получим:

1. Груз $P = 1$ на левой консоли: $\delta = -3,132$,

2. Груз $P = 1$ в пролете l_1 : $\delta = 10,44 \mu_A - 4,18 \mu_B$,

3. Груз $P = 1$ в пролете l_2 : $\delta = 6,27 \mu_A - 6,27 \mu_B$,
 4. Груз $P = 1$ в пролете l_3 : $\delta = 4,18 \mu_A - 10,44 \mu_B$,
 5. Груз $P = 1$ на правой консоли: $\delta = 3,132$.

Дальнейшие вычисления сделаны в таблице.

№ сечения	Груз в пролете l_1			Груз в пролете l_2			Груз в пролете l_3		
	$10,44 \mu_A$	$-4,18 \mu_B$	δ	$6,27 \mu_A$	$-6,27 \mu_B$	δ	$4,18 \mu_A$	$-10,44 \mu_B$	δ
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,8456	-0,0376	0,808	0,508	-0,0565	0,451	0,339	-0,094	0,245
3	1,338	-0,134	1,204	0,803	-0,201	0,602	0,535	-0,334	0,201
4	1,535	-0,264	1,271	0,922	-0,396	0,526	0,614	-0,658	-0,044
5	1,505	-0,401	1,104	0,904	-0,602	0,302	0,602	-1,002	-0,400
6	1,305	-0,522	0,783	0,784	-0,784	0	0,522	-1,305	-0,783
7	1,002	-0,602	0,400	0,602	-0,904	-0,302	0,401	-1,505	-1,104
8	0,658	-0,614	0,044	0,396	-0,922	-0,526	0,264	-1,535	-1,271
9	0,334	-0,535	-0,201	0,201	-0,803	-0,602	0,134	-1,338	-1,204
10	0,094	-0,339	-0,245	0,0565	-0,508	-0,451	0,0376	-0,8456	-0,808
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Линия влияния δ приведена на фиг. 7 о).

Линия влияния момента M_{21}

Общее выражение момента:

$$M_{21} = -\frac{Q_n}{l_n} \left(1 + \frac{6e}{l_n} \right) - 0,30 \varphi_1 - 0,60 \varphi_2.$$

Рассматриваем положение груза в каждом пролете отдельно.

Величина $-\frac{Q_n}{l_n} \left(1 + \frac{6e}{l_n} \right) = -\mu_B l_n$ не равна нулю только в первом пролете.

Значение φ берем из таблиц.

1. Груз $P = 1$ на левой консоли:

$$M_{21} = 0 - 0,30 \varphi_1 - 0,60 \varphi_2 = -0,30 (-3,096) - 0,60 \cdot 0,378 = 0,702.$$

2. Груз $P = 1$ на правой консоли:

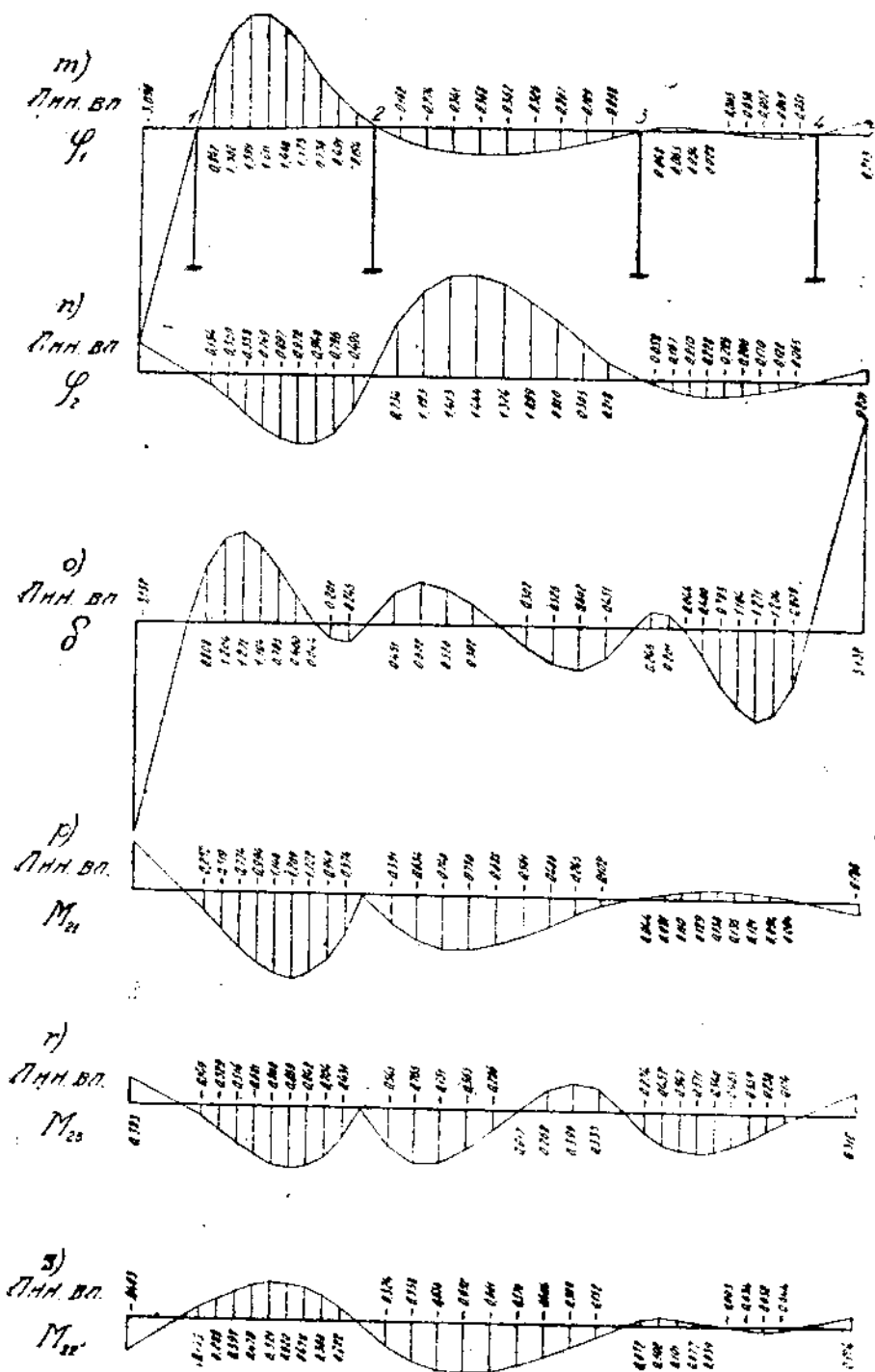
$$M_{21} = 0 - 0,30 \varphi_1 - 0,60 \varphi_2 = 0,30 \cdot 0,213 - 0,60 \cdot 0,201 = -0,185.$$

Дальнейшее вычисление приведено в таблице.

№ сечения	Груз в пролете l_1				Груз в пролете l_2			Груз в пролете l_3		
	$-\mu_B l_1$	$-0,30 \varphi_1$	$-0,60 \varphi_2$	M_{21}	$-0,30 \varphi_1$	$-0,60 \varphi_2$	M_{21}	$-0,30 \varphi_1$	$-0,60 \varphi_2$	M_{21}^*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0,09	-0,254	0,0924	-0,252	0,0486	-0,440	-0,391	-0,0144	0,0588	0,044
2	-0,32	-0,409	0,210	-0,519	0,0822	-0,716	-0,634	-0,0189	0,1002	0,081
3	-0,63	-0,479	0,335	-0,774	0,102	-0,848	-0,746	-0,0162	0,126	0,110
4	-0,96	-0,483	0,449	-0,994	0,110	-0,866	-0,756	-0,0084	0,137	0,129
5	-1,25	-0,434	0,538	-1,146	0,109	-0,794	-0,685	-0,0015	0,136	0,138
6	-1,44	-0,352	0,583	-1,209	0,0978	-0,659	-0,561	0,0114	0,124	0,135
7	-1,47	-0,221	0,569	-1,122	0,0801	-0,486	-0,406	0,0186	0,102	0,121
8	-1,28	-0,147	0,478	-0,949	0,0567	-0,302	-0,245	0,0207	0,0732	0,094
9	-0,81	-0,0581	0,294	-0,574	0,0294	-0,131	-0,102	0,0153	0,039	0,054
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Линия влияния M_{21} дана на фиг. 7 р).

Таким же образом вычислены линии влияния моментов M_{22} и M_{22}^* , представленные на фиг. 7 r) и 7 s).



Фиг. 7

Имея числа влияния, можно, не решая уравнений, найти неизвестные от любой нагрузки по формулам (9).

Проверим величины неизвестных от нагрузки q , полученные графически.

$$\varphi_1 = -11,5(-1,032) - 31,25 \cdot 0,126 + 31,25(-0,0669) + 11,5(-0,0709) + 0 = \\ = 11,88 - 6,84 = 5,04 \cong 5,05;$$

$$\varphi_2 = -11,5(-0,0669) - 31,25 \cdot 0,114 + 31,25(-0,591) + 11,5 \cdot 0,126 + 0 = \\ = -22,06 + 2,21 = 19,85 \cong 19,84.$$

Таким образом, мы видим, что графическое построение дает весьма точные результаты, и его можно с успехом применять для решения трех-членных уравнений (с точностью до третьего знака), что значительно ускоряет решение задачи.

АРКИ НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ¹

(Основы расчета)

В настоящее время существует обширная литература по расчету прямолинейной балки на упругом основании. Между тем во многих инженерных сооружениях приходится встречаться с конструкциями, которые можно охарактеризовать, как кривой брус или арку на упругом основании. Сюда относятся, например, трубы, уложенные на грунт, одежда тоннелей, обратные своды фундаментов. Кроме того, кривой брус на упругом основании является элементом более сложных конструкций: так расчет куполов (оболочек вращения) при симметричной нагрузке по методу, предложенному проф. И. Я. Штаерманом,² приводится к расчету арки переменного сечения на упругом основании переменной жесткости.

Если не считать весьма краткого изложения вопроса в книге Хаяси,³ расчет арки на упругом основании в литературе не освещался. В настоящей статье, посвященной круговой арке постоянного сечения на упругом основании, реакция которого имеет радиальное направление, дан вывод основного дифференциального уравнения задачи и его общее решение в замкнутой форме в виде формул для внутренних сил и перемещений. Решение дано, как в обычной форме, так и по методу начальных параметров. Применение теории иллюстрируется числовым примером.

Тема работы предложена проф. И. Я. Штаерманом. Рядом замечаний я обязан проф. А. А. Уманскому. Этим лицам я считаю своим долгом принести свою искреннюю благодарность.

1. Основные предпосылки и уравнения равновесия

Рассмотрим кривой брус, покоящийся на упругом основании (фиг. 1). Будем исходить из следующих допущений:

1. Реакция основания перпендикулярна в каждой точке к срединной поверхности бруса и пропорциональна нормальной составляющей упругого перемещения.

2. Линейные элементы, перпендикулярные к срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и располагаются нормально к деформированной срединной поверхности.

Будем также предполагать, что продольные волокна при изгибе не оказывают друг на друга давления; следовательно, можно пренебречь напряжениями, нормальными к срединной поверхности.

¹ Настоящая статья является первой главой работы, посвященной теории арок на упругом основании и применению результатов к расчету инженерных сооружений.

² Проф. И. Я. Штаерман. Расчет купола, как арки на упругом основании. См. журнал "Проект и стандарт", 1933 г., № 9.

См. также Р. Pasternak. За ММ, 1926, № 1.

³ Кенни Хаяси. Теория расчета балок на упругом основании.

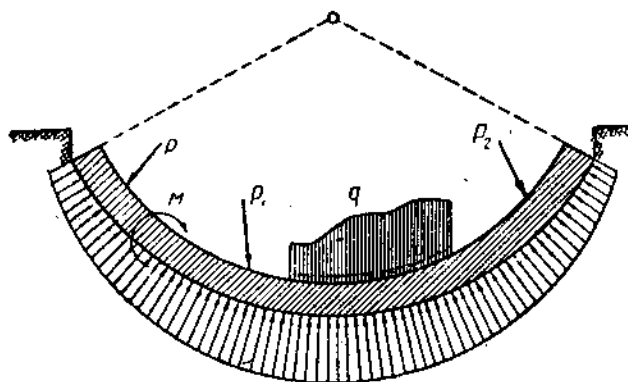
Перейдем к составлению уравнений равновесия. На фиг. 2 представлен выделенный двумя нормальными сечениями элемент арки. Обозначим через R радиус кривизны срединной поверхности, через φ — угол между нормалью к оси элемента и начальным направлением OO .

Ориентация естественных координатных осей показана на фиг. 2.

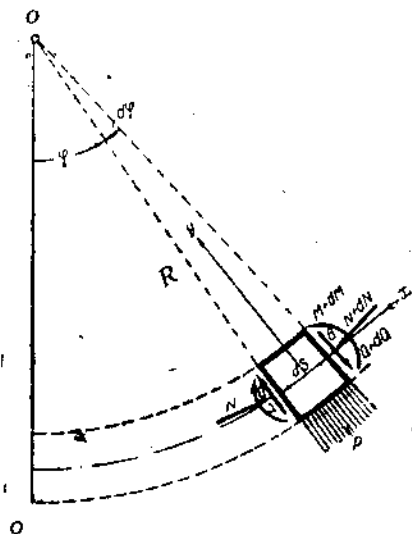
К грани A выделенного элемента приложены усилия M , N и Q . При переходе к грани B момент, перерезывающая и нормальная силы получают приращение и будут соответственно равны.

$$M + dM, N + dN, Q + dQ.$$

На элемент действует, кроме того, упругая реакция основания p кг/см. Будем считать, что на данном отрезке внешние воздействия отсутствуют.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Напишем уравнения равновесия выделенного элемента:

- 1) $\sum x = 0; \quad Q \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\varphi}{2} - dN = 0;$
- 2) $\sum y = 0; \quad p \cdot ds - N \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} - dQ = 0;$
- 3) $\sum M_B = 0; \quad dM - Qds - p \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} - Nd\varphi \frac{ds}{2} = 0.$

Пренебрегая бесконечно-малыми высшего порядка, получим дифференциальные уравнения равновесия в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} &= Q; \\ \frac{dQ}{d\varphi} &= pR - N; \\ \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} &= Q. \end{aligned} \quad (1)$$

II. Уравнения упругости

Перейдем к составлению уравнений упругости. Для этого рассмотрим деформацию арки и величины, связанные с ней.

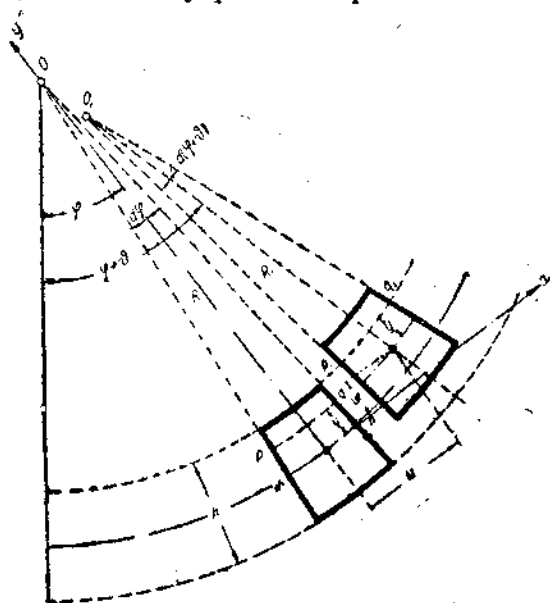
Примем следующие обозначения:

ε — относительное удлинение слоя, совпадающего с срединной поверхностью;

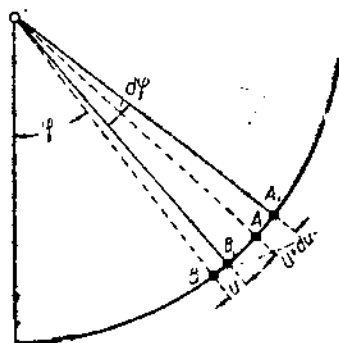
ϑ — величина, характеризующая приращение угла вследствие деформации или, что то же, угол поворота элемента.

u — составляющая упругого перемещения точек срединной поверхности в направлении касательной (оси X), считая его положительным в сторону возрастания угла.

w — то же в направлении оси Y , считая перемещение положительным в направлении внутренней нормали.



Фиг. 3.

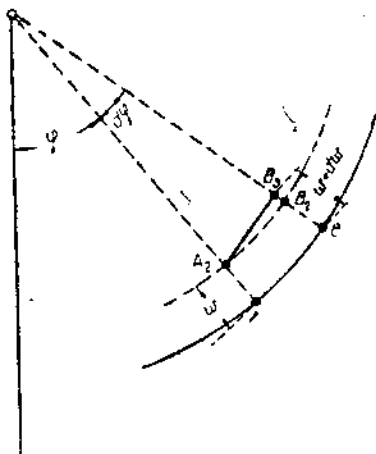


Фиг. 4а.

Пользуясь новыми величинами, составим добавочные уравнения. На фиг. 3 изображен элемент арки до и после деформации.

Начнем с определения ϵ . Относительное удлинение оси элемента AB арки складывается из двух величин: из удлинения, происходящего вследствие перемещения элемента по касательной, и из удлинения, зависящего от перемещения по направлению внутренней нормали. Элемент AB арки, вследствие перемещения вдоль оси X , займет положение A_1B_1 , причем перемещение точки B равно $BB_1 = u$, а точки A : $AA_1 = u + du$ (фиг. 4а). Следовательно, абсолютное удлинение элемента составляет du , а так как его первоначальная длина была $AB = R d\varphi$, то относительное удлинение, вследствие перемещения вдоль оси X будет

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{d\varphi}.$$



Фиг. 4б.

Перемещаясь вдоль внутренней нормали, элемент AB займет положение A_2B_2 (фиг. 4б), причем перемещение точки A равно w , а точки B : $BB_2 = w + dw$.

Пренебрегая поворотом элемента на бесконечно малый угол $B_2A_2B_1$ (совершаемая при этом ошибка является бесконечно-малой высшего

порядка), мы можем положить:

$$A_2 B_2 = A_1 B_1 = OA_1 \cdot d\varphi = (R - w) d\varphi.$$

Тогда:

$$\epsilon_2 = \frac{A_2 B_2 - AB}{AB} = \frac{(R - w) d\varphi - R \cdot d\varphi}{R \cdot d\varphi} = -\frac{w}{R}.$$

Складывая величины ϵ_1 и ϵ_2 , найдем полное относительное удлинение

$$\epsilon = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varphi} - w \right). \quad (2)$$

Полученное выражение относительного удлинения относится к точкам срединной поверхности и соответствует действию нормальных сил.

Следуя закону Гука и пользуясь (2), можно выразить нормальную силу через компоненты перемещения, а именно:

$$\frac{N}{EF} = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varphi} - w \right). \quad (3)$$

Рассмотрим еще следующий случай деформации. Пусть отрезок арки деформируется так, что первоначальная длина соответствующего элемента срединной поверхности остается неизменной и равной $ds = R \cdot d\varphi$. Деформация определяется только тем, что сечения, оставаясь плоскими, лишь поворачиваются относительно линий пересечения их со срединной поверхностью.

Выделим из нашего элемента (фиг. 5) бесконечно тонкий слой pq , параллельный срединной поверхности и отстоящий от нее на расстоянии y . Первоначальная длина его равна

$$(R - y) d\varphi.$$

При повороте это волокно получит приращение

$$qq_1 = y \cdot d\vartheta,$$

и относительное удлинение представится формулой

$$\epsilon_y = \frac{y \cdot d\vartheta}{(R - y) d\varphi} = \frac{y}{R \left(1 - \frac{y}{R} \right)} \cdot \frac{d\vartheta}{d\varphi}. \quad (4)$$

Если поперечные размеры бруска малы по сравнению с радиусом кривизны, то величиной $\frac{y}{R}$ можно пренебречь по сравнению с единицей.²

Тогда

$$\epsilon_y = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\vartheta}{d\varphi}. \quad (4a)$$

Заметим, что относительному удлинению, выраженному формулой (4), соответствует гиперболический закон распределения напряжений по сечению (фиг. 6).

Заменяя выражение (4) формулой (4a), мы принимаем линейное распределение напряжений (показано пунктиром на фиг. 5).

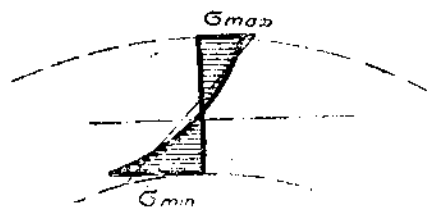
¹ В соответствии с принятым правилом знаков.

² Это в особенности относится к оболочке, где $\frac{y}{R}$ весьма малая величина по сравнению с единицей.

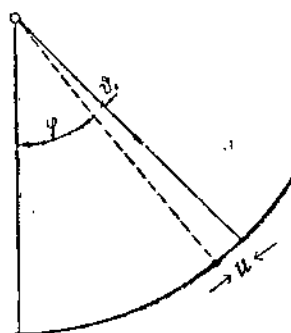
Совершаемая при этом ошибка весьма незначительна. Как показывают подробные исследования,¹ с возрастанием $\frac{R}{h}$ разность между наибольшими напряжениями для кривого и призматического бруска падает: при $\frac{R}{h} = 4$ отклонения не превосходят 9%, при $\frac{R}{h} = 10$ это отклонение составляет лишь 3%.

Остается еще вывести формулу, связывающую величину ϑ с перемещениями u и w . Перемещение вдоль оси X точки срединной поверхности на величину u вызовет изменение угла φ на величину (фиг. 7а):

$$\vartheta_1 = \frac{u}{R}.$$



Фиг. 6.



Фиг. 7а.

Вследствие перемещения вдоль нормали элемент AB арки займет положение A_2B_2 (фиг. 7б); перемещение точки A равно $AA_2 = w$, точки B равно $BB_2 = w + dw$. При этом элемент повернется на некоторый угол $B_2A_2B_1$, который и будет равен углу поворота нормали к срединной поверхности арки в точке A , то-есть приращение угла будет

$$\vartheta_2 = \frac{B_2B_1}{A_2B_1} = \frac{dw}{(R-w)d\varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dw}{d\varphi}.$$

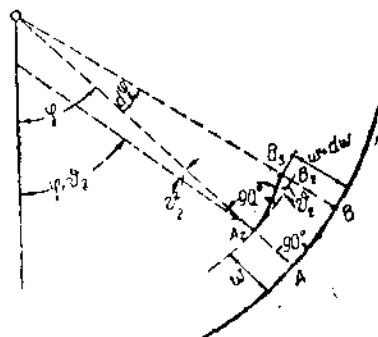
Следовательно, полное изменение угла вследствие деформации будет равно

$$\vartheta = \frac{1}{R} \left(u + \frac{dw}{d\varphi} \right). \quad (5)$$

Это так называемое уравнение совместности.

Обращаясь к основным уравнениям упругости и пользуясь формулами (4а) и (5), не трудно выразить изгибающий момент через составляющие перемещения:

$$\frac{M}{EI} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d \left(u + \frac{dw}{d\varphi} \right)}{d\varphi}. \quad (6)$$



Фиг. 7б.

Таким образом, в результате учета упругих деформаций мы располагаем шестью уравнениями:

- 3 уравнениями равновесия (1)
- 2 " упругости (3) и (6)
- 1 уравнением совместности (5),

достаточными для определения шести неизвестных u , w , ϑ , M , N и Q , характеризующих напряжения и деформации.

¹ С. П. Тимошенко, Курс сопротивления материалов, стр. 389, изд. 1932 г.

III. Основные дифференциальные уравнения

(Круговая арка постоянного сечения)

Пусть

$$R = \text{const}; \quad EJ = \text{const}.$$

Будем также предполагать, что жесткость основания $k = k_0 b$ — постоянная величина, причем b — ширина подошвы арки, $k_0 \text{ кг/см}^2$ коэффициент жесткости основания при осадке.

Перейдем к решению уравнений. Для этого преобразуем их следующим образом: продифференцируем уравнение (1a) и подставим значение $\frac{dQ}{d\varphi}$ в уравнение (1b).

Получим

$$pR - N = \frac{d^2 N}{d\varphi^2}. \quad (7)$$

Заменив в последнем уравнении N и его вторую производную значениями из (3), а также имея в виду, что $p = kw$, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - aw = 0, \quad (8)$$

где для сокращения принято:

$$\frac{kR^2 + EF}{EF} = a. \quad (8a)$$

Затем из (1a) и (1c) будем иметь:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dM}{d\varphi} = \frac{dN}{d\varphi}.$$

Выразив, на основании формул (3) и (6), N и M через перемещение, получим второе уравнение

$$\frac{d^3 w}{d\varphi^3} - b \frac{dw}{d\varphi} + c \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0. \quad (9)$$

При этом принято:

$$\frac{FR^2}{J} = b; \quad b + 1 = c. \quad (9a)$$

Из найденной системы уравнений:

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - a \cdot w = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d^3 w}{d\varphi^3} - b \frac{dw}{d\varphi} + c \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0 \quad (9)$$

не трудно получить дифференциальное уравнение шестого порядка относительно одной переменной.

Продифференцировав уравнение (8) и вычтя из него (9), найдем:

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \frac{1+c}{a+b} \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \quad (10)$$

Если теперь заменить в уравнении (9) w и его производные значениями из формулы (10) и произвести необходимые преобразования, то придем

к следующему основному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно u :

$$\left[\frac{d^6 u}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \mu^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0, \right] \quad (11)$$

где принято:

$$\mu^2 = ac - b. \quad (11a)$$

IV. Определение усилий и деформаций

Найдем интеграл уравнения (11). Ему соответствует характеристическое уравнение

$$r^6 + 2r^4 + \mu^2 r^2 = 0$$

с шестью решениями

$$r_1 = r_2 = 0;$$

$$r_{3,4,5,6} = \pm [\alpha \mp \beta i],$$

если положить

$$\sqrt{\frac{\mu-1}{2}} = \alpha; \quad \sqrt{\frac{\mu+1}{2}} = \beta.$$

Принимая во внимание, что $\mu > 1$, можно общее решение уравнения (11) записать в следующем виде:

$$u = B_1 + B_2 \varphi + [B_3 \operatorname{ch} \alpha \varphi + B_4 \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi] \cos \beta \varphi + [B_5 \operatorname{ch} \alpha \varphi + B_6 \operatorname{sh} \alpha \varphi] \sin \beta \varphi, \quad (12)$$

где $B_1, B_2 \dots B_6$ представляют постоянные интегрирования.

Таким же путем мы могли бы, исключив из системы уравнений (8) и (9) u и его производные, получить дифференциальное уравнение шестого порядка относительно w .

В интеграл последнего войдут шесть новых постоянных, и нам пришлось бы показать, исходя из основной системы (8) и (9), что новые постоянные интегрирования выражаются через $B_1, B_2 \dots B_6$ (вернее их линейные комбинации).

Однако для определения функции w мы изберем более легкий путь. Будем исходить из уравнения (10)

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \frac{1+c}{a+b} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \quad (10a)$$

Проинтегрировав его, мы выразим w через производные найденной функции u .

$$\begin{aligned} {}^1 \text{ Следует вспомнить, что } \sqrt{-1 \pm \sqrt{1 - \mu^2}} &= \pm \left[\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + (1 - \mu^2)}}{2}} \pm \right. \\ &\pm \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 - (1 - \mu^2)}}{2}} \Big] = \pm \left[\sqrt{\frac{-1 + \mu}{2}} \pm \sqrt{\frac{-1 - \mu}{2}} \right] - \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{\mu - 1}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\mu + 1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Обратимся к (12) и найдем

$$\frac{du}{d\varphi}, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} \text{ и } \frac{d^3u}{d\varphi^3}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} = & B_2 + B_3 [\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \beta \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi] + \\ & + B_4 [\alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \beta \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi] + \\ & + B_5 [\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \beta \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi] + \\ & + B_6 [\alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \beta \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi]. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцируя это уравнение и подставляя

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1;$$

$$2\alpha\beta = \sqrt{\mu^2 - 1},$$

получим выражение для второй производной:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = & B_1 + B_2\varphi - u - \sqrt{\mu^2 - 1} [(B_3 \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi + B_4 \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi) \sin \beta\varphi - \\ & (B_5 \operatorname{sh} \alpha\varphi + B_6 \operatorname{ch} \alpha\varphi) \cos \beta\varphi]. \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d^3u}{d\varphi^3} = & B_2 - \frac{du}{d\varphi} - \sqrt{\mu^2 - 1} [B_3 (\alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \beta \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi) + \\ & + B_4 (\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \beta \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi) - \\ & - B_5 (\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \beta \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi) - \\ & - B_6 (\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \beta \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив полученные значения производных из (13), (14) и (15) в (10) и проделав надлежащие преобразования, получим выражение для w :

$$\begin{aligned} w = & \frac{B_2}{a} + (m \cdot B_4 + n \cdot B_5) \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi + \\ & + (m \cdot B_3 + n \cdot B_6) \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi + \\ & + (m \cdot B_6 - n \cdot B_3) \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \\ & + (m \cdot B_5 - n \cdot B_4) \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha c - \beta \cdot \sqrt{\mu^2 - 1}}{a + b} &= m; \\ \frac{\beta \cdot c + \alpha \sqrt{\mu^2 - 1}}{a + b} &= n. \end{aligned} \quad (16a)$$

Итак, функция w содержит те же постоянные интегрирования, что и u .

Для дальнейшего нам понадобятся производные от w .

Из (16) получим:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} = & (m \cdot B_4 + n \cdot B_5) [\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \beta \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi] + \\ & + (m \cdot B_3 + n \cdot B_6) [\alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \beta \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi] + \\ & + (m \cdot B_6 - n \cdot B_3) [\alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \beta \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi] + \\ & + (m \cdot B_5 - n \cdot B_4) [\alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi + \beta \cdot \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi]. \end{aligned} \quad (17)$$

Вторая производная представится после некоторых преобразований в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} = & [\sqrt{\mu^2 - 1} (m \cdot B_5 - n \cdot B_4) - (m \cdot B_4 + n \cdot B_5)] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [\sqrt{\mu^2 - 1} (m \cdot B_6 - n \cdot B_2) - (m \cdot B_3 + n \cdot B_6)] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - \\ & - [\sqrt{\mu^2 - 1} (m \cdot B_3 + n \cdot B_6) + (m \cdot B_6 - n \cdot B_3)] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi - \\ & - [\sqrt{\mu^2 - 1} (m \cdot B_4 + n \cdot B_5) + (m \cdot B_5 - n \cdot B_4)] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi. \quad (18) \end{aligned}$$

Имея величины

$$u, \quad \frac{du}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2}, \quad w, \quad \frac{dw}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 w}{d\varphi^2},$$

не трудно найти из формул (6) и (3) значения M и N .

Напишем окончательно результаты.

Выражение для изгибающего момента в любом сечении арки будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{EJ} M = & -B_2 + [(n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_4 - (m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_6] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_3 - (m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_5] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_3 + (n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_6] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi + \\ & + [(m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_4 + (n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_5] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi. \quad (19) \end{aligned}$$

Нормальная сила будет равна:

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} N = & \frac{\alpha - 1}{\alpha} B_2 + [(\alpha - m) B_4 + (\beta - n) B_6] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(\alpha - m) B_3 + (\beta - n) B_5] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - \\ & - [(\beta - n) B_3 - (\alpha - m) B_6] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi - \\ & - [(\beta - n) B_4 - (\alpha - m) B_5] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi. \quad (20) \end{aligned}$$

Перерезывающую силу найдем из условия $Q = \frac{dN}{d\varphi}$.

Ее выражение может быть представлено в окончательном виде так:

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} Q = & [(\mu - \alpha m - \beta n) B_3 + (\beta \cdot m - \alpha \cdot n) \cdot B_6] \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(\mu - \alpha m - \beta n) B_4 + (\beta \cdot m - \alpha \cdot n) B_5] \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(\beta \cdot m - \alpha \cdot n) B_4 - (\mu - \alpha m - \beta n) B_5] \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi + \\ & + [(\beta \cdot m - \alpha \cdot n) B_3 - (\mu - \alpha m - \beta n) B_6] \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi. \quad (21) \end{aligned}$$

Наконец, из уравнения

$$\vartheta = \frac{1}{R} \left(u + \frac{dw}{d\varphi} \right)$$

получим выражение для угла поворота:

$$\begin{aligned} R \cdot \vartheta = & B_1 + B_2 \varphi + [(1 + \alpha m - \beta n) B_3 + (\alpha n + \beta m) B_6] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(1 + \alpha m - \beta n) B_4 + (\alpha n + \beta m) B_5] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \\ & + [(1 + \alpha m - \beta n) B_6 - (\alpha n + \beta m) B_4] \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi + \\ & + [(1 + \alpha m - \beta n) B_5 - (\alpha n + \beta m) B_3] \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi. \quad (22) \end{aligned}$$

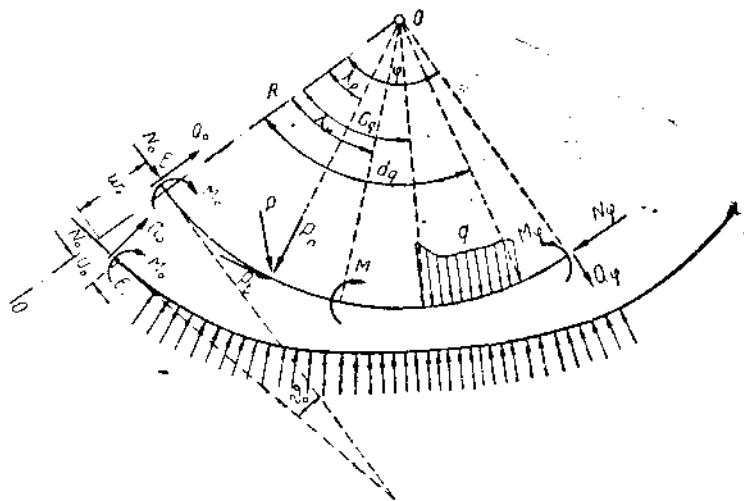
Напомним, что приведенное решение является *общим интегралом* однородного дифференциального уравнения, составленного в предположении отсутствия внешних воздействий на рассматриваемом участке.

Преобразуем полученные нами результаты, пользуясь методом начальных параметров.¹

Для этого поместим начало отсчета углов φ на левом конце арки (фиг. 8).

Пусть:

$$\begin{aligned} M_{\varphi=0} &= M_0; \\ N_{\varphi=0} &= N_0; \\ Q_{\varphi=0} &= Q_0; \\ \vartheta_{\varphi=0} &= \vartheta_0; \\ u_{\varphi=0} &= u_0; \\ w_{\varphi=0} &= w_0. \end{aligned} \quad (23)$$



Фиг. 8.

Подставив эти значения соответственно в уравнения (12), (16), (19), (20), (21) и (22) и положив $\varphi = 0$, получим следующую систему уравнений относительно постоянных интегрирования:

- 1) $u_0 = B_1 + B_5;$
- 2) $w_0 = \frac{1}{a} B_2 + m \cdot B_4 + n \cdot B_5;$
- 3) $\frac{R^2}{EJ} M_0 = -B_2 + (n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_4 - (m \cdot \sqrt{\mu^2 - 1} - n - \beta) B_5;$
- 4) $\frac{R}{EF} N_0 = \frac{a-1}{a} B_2 + (\alpha - m) B_4 + (\beta - n) B_5;$
- 5) $\frac{R}{EF} Q_0 = (\mu - am - \beta n) \cdot B_3 + (\beta \cdot m - an) B_6;$
- 6) $R \cdot \vartheta_0 = B_1 + (1 + am - \beta n) B_3 + (an + \beta m) B_6.$

(24)

Из этой системы постоянные интегрирования $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ определяются через линейные комбинации начальных параметров $u_0, w_0, \vartheta_0, M_0, N_0, Q_0$.

¹ А. А. Уманский, Специальный курс строительной механики, ч. I, изд. 1935 г.

Наконец, заменим в уравнениях (12), (16), (20), (21) и (22) величинами $B_1, B_2 \dots B_6$ их выражениями через начальные параметры.

После упрощений получим значения усилий и перемещений в зависимости от начальных факторов:

$$\begin{aligned}
 u_{\varphi} = & \left\{ \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} u_0 + \\
 & + \left\{ A_1 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_4 \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \omega_0 + \\
 & + \left\{ 1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} R \cdot \vartheta_0 + \\
 & + \left\{ -\frac{a}{\mu^2} \varphi + A_2 \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_5 \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left\{ \frac{ab}{\mu^2} \varphi - A_3 \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_6 \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} N_0 + \\
 & + \left\{ \frac{b}{\mu} - \frac{b}{\mu} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - \frac{ac}{\mu \sqrt{\mu^2-1}} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} Q_0. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Нормальное упругое перемещение:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi} = & \left\{ A_7 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_8 \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} u_0 + \\
 & + \left\{ \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi \right\} \omega_0 - \\
 & - \left\{ A_7 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_8 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right\} R \cdot \vartheta_0 + \\
 & + \left\{ -\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \frac{\sqrt{\mu^2-1}}{\mu^2} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right\} \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left\{ \frac{b}{\mu^2} - \frac{b}{\mu^2} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - \frac{ac}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} N_0 - \\
 & - \left\{ A_9 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_{10} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} Q_0. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Изгибающий момент:

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2}{EJ} M_{\varphi} = & \left\{ A_{11} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_{12} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} u_0 + \\
 & + \left\{ \frac{b(a-1)}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \omega_0 - \\
 & - \left\{ A_{11} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + A_{12} \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right\} R \cdot \vartheta_0 + \\
 & + \left\{ \frac{a}{\mu^2} - \left(1 - \frac{a}{\mu^2}\right) \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left\{ -\frac{a}{\mu^2} b + \frac{a}{\mu^2} b \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} N_0 + \\
 & + \left\{ A_{13} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_{14} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} Q_0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Нормальная сила:

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} N_{\varphi} = & \left\{ A_{15} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_{16} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} u_0 + \\ & + \left\{ \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} w_0 - \\ & - \left\{ A_{18} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_{19} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} R \cdot \vartheta_0 + \\ & + \left\{ -\frac{a-1}{\mu^2} + \frac{a-1}{\mu^2} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \frac{a-1}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R^2}{EJ} M_0 - \\ & - \left\{ b \left[-\frac{a-1}{\mu^2} + \left(\frac{a-1}{\mu^2} - \frac{1}{b} \right) \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \frac{a-1}{\mu^2 \sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right] \right\} \frac{R}{EF} N_0 + \\ & + \left\{ -A_{17} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_{18} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} Q_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Перерезывающая сила:

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} Q_{\varphi} = & \left\{ A_{19} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} u_0 - \\ & + \left\{ A_{20} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_{21} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} w_0 - \\ & - \left\{ A_{19} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} R \cdot \vartheta_0 + \\ & + \left\{ A_{22} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_{23} \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R^2}{EJ} M_0 - \\ & - \left\{ A_{24} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_{25} \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R}{EF} N_0 + \\ & + \left\{ \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{R^2}{EF} Q_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Угол поворота:

$$\begin{aligned} R \cdot \vartheta_{\varphi} = & \left\{ \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} u_0 - \\ & - \left\{ A_{20} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + A_{21} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} \frac{b}{\mu} w_0 - \\ & + \left\{ 1 + \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi \right\} R \cdot \vartheta_0 - \\ & - \left\{ \frac{a}{\mu^2} \varphi + [A_{22} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_{23} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi] \cdot \frac{b}{\mu} \right\} \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\ & + \left\{ \frac{ah}{\mu^2} \varphi + [A_{24} \cdot \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi - A_{25} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi] \cdot \frac{b}{\mu} \right\} \frac{R}{EF} N_0 + \\ & + \left\{ \frac{b}{\mu} - [\operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi] \cdot \frac{b}{\mu} \right\} \frac{R}{EF} Q_0. \end{aligned} \quad (30)$$

где приняты следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2-1}} [(a-1)m \sqrt{\mu^2-1} + n - \beta]; \\
 A_2 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2-1}} (an - \beta); \\
 A_3 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2-1}} [m \cdot \sqrt{\mu^2-1} + \beta - (a+1)n]; \\
 A_4 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2-1}} [m - a - n(a-1) \sqrt{\mu^2-1}]; \\
 A_5 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2-1}} (x - am); \\
 A_6 &= \frac{a+b}{\mu^3 \sqrt{\mu^2-1}} [x - n \sqrt{\mu^2-1} - (a+1)m]; \\
 A_7 &= m + n \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}}; \\
 A_8 &= n - m \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}}; \\
 A_9 &= \frac{1}{\mu} \left(bm + \frac{acn}{\sqrt{\mu^2-1}} \right); \\
 A_{10} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{acm}{\sqrt{\mu^2-1}} - bn \right); \\
 A_{11} &= (n \cdot \sqrt{\mu^2-1} + m - x) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} (m \sqrt{\mu^2-1} - n + \beta); \\
 A_{12} &= (m \cdot \sqrt{\mu^2-1} - n + \beta) + \frac{a+1}{\sqrt{\mu^2-1}} (n \sqrt{\mu^2-1} + m - x); \\
 A_{13} &= \left[\frac{ac}{\mu \sqrt{\mu^2-1}} (m \sqrt{\mu^2-1} - n + \beta) - b (n \sqrt{\mu^2-1} + m - x) \right] \frac{1}{\mu}; \\
 A_{14} &= \left[\frac{a \cdot c}{\mu \sqrt{\mu^2-1}} (n \sqrt{\mu^2-1} + m - x) + b (m \sqrt{\mu^2-1} - n + \beta) \right] \frac{1}{\mu}; \\
 A_{15} &= (x - m) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} (\beta - n); \\
 A_{16} &= (\beta - n) - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} (x - m); \\
 A_{17} &= \frac{1}{\mu} [b(x - m) + \frac{a \cdot c}{\sqrt{\mu^2-1}} (\beta - n)]; \\
 A_{18} &= \frac{1}{\mu} [b(\beta - n) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} (x - m)]; \\
 A_{19} &= -\frac{\mu}{a+b} \cdot \frac{(\mu^2-1)(a-1)^2}{\sqrt{\mu^2-1}}; \\
 A_{20} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_1 + \sqrt{\mu^2-1} \cdot A_2];
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_{21} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_4 - \sqrt{\mu^2-1}A_1]; \\
 A_{22} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_2 - \sqrt{\mu^2-1}A_5]; \\
 A_{23} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_5 + \sqrt{\mu^2-1}A_2]; \\
 A_{24} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_3 + \sqrt{\mu^2-1}A_6]; \\
 A_{25} &= \frac{\mu}{a+b} [(a-1)A_6 - \sqrt{\mu^2-1}A_3].
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_{25}$, как видно из предыдущего, выражаются через величины: J, F, k, E, R .

В случае прямоугольного сечения арки можно вести расчет на единицу ширины; если обозначить $\frac{R^1}{h} = s$; * $\frac{k}{E} = t$, то коэффициенты A всегда могут быть выражены через s, t и R .

Не трудно составить таблицы с величинами коэффициентов A для встречающихся на практике значений s и t . Это значительно облегчит пользование выведенными формулами при расчете.

Полученные формулы дают возможность определять усилия и перемещения в любом сечении арки в зависимости от факторов, соответствующих другому (начальному) сечению. Как видно из формул, влияние этих отдельных причин следует принципу независимости действия сил и малых деформаций.

При постоянных значениях, характеризующих упругие свойства основания и арки, а также геометрической конфигурации последней, это влияние определяется коэффициентами $\text{sh } \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi$, $\text{sh } \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi$, $\text{ch } \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi$ и $\text{ch } \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi$ при соответствующем значении φ , т. е. угла, образованного нормалью через сечение, в котором приложен данный фактор, и через рассматриваемое сечение. Учтем теперь действие местной нагрузки.

Допустим, что на арку действуют (фиг. 8):

а) сосредоточенные силы P угловыми координатами λ_p (будем называть нормальную составляющую сил P ; P_n , касательную составляющую P_t),

б) сосредоточенные моменты M в сечениях λ_m ,

с) распределенная нагрузка интенсивностью $q = f(\lambda)$ кг/см на участке от $\lambda = c_q$ до $\lambda = d_q$.

Назовем нормальную составляющую нагрузки q_n кг/см, касательную составляющую q_t кг/см.

Очевидно, эти последние могут быть приняты за новые начальные параметры, но при этом за начало отсчета углов следует принимать не OO , а соответственно положению каждого фактора, сечения с угловыми координатами λ_p, λ_m и т. д.

Для учета действия сосредоточенной местной нагрузки можно воспользоваться готовыми формулами (25), (26), (27), (28), (29) и (30), но при этом нужно иметь в виду, что аргументами функций

$$\begin{aligned}
 &\text{ch } \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi; \\
 &\text{ch } \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi; \\
 &\text{sh } \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi; \\
 &\text{sh } \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi
 \end{aligned}$$

* h — Высота сечения арки.

будут углы исследуемого сечения от новых начал, т. е.

$$\varphi - \lambda_p, \quad \psi - \lambda_m \quad \text{и т. д.}$$

Действие распределенной нагрузки может быть выражено интегралами от элементарных факторов

$$q_n d\lambda; \quad q_t d\lambda.$$

При нескольких сосредоточенных силовых факторах или нескольких участках распределенных воздействий будем иметь суммы интегралов.

Напишем для u_φ , w_φ , ϑ_φ , M_φ , N_φ и Q_φ развернутые формулы, учитывая совместное действие всех факторов.

Для сокращения записи обозначим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi &= \bar{\bar{C}}_\varphi; \\ \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi &= \bar{\bar{S}}_\varphi; \\ \operatorname{ch} \alpha \varphi \cdot \sin \beta \varphi &= \bar{C}_\varphi; \\ \operatorname{sh} \alpha \varphi \cdot \cos \beta \varphi &= \bar{S}_\varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Проекция упругого перемещения на касательную

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \left(\bar{C}_\varphi + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right) u_0 + (A_1 \bar{S}_\varphi - A_4 \bar{C}_\varphi) w_0 + \\ &+ \left(1 - \bar{C}_\varphi - \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right) R \vartheta_0 + \left(-\frac{a}{\mu^2} \varphi + A_2 \bar{S}_\varphi + A_5 \cdot \bar{C}_\varphi \right) \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\ &+ \left(\frac{ab}{\mu^2} \varphi - A_3 \cdot \bar{S}_\varphi + A_6 \bar{C}_\varphi \right) \frac{R}{EF} N_0 + \\ &+ \left[b(1 - \bar{C}_\varphi) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_\varphi \right] \frac{R}{EF\mu} Q_0 + \\ &+ \frac{R^2}{EI} \sum_0^z \left[-\frac{a}{\mu^2} (\varphi - \lambda_m) + A_2 \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda_m} + A_5 \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda_m} \right] \dot{M} + \\ &+ \frac{R}{EF} \sum_0^q \left[\frac{ab}{\mu^2} (\varphi - \lambda_p) - A_3 \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda_p} + A_6 \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda_p} \right] P_n + \\ &+ \frac{R}{EF\mu} \sum_0^q \left[b(1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda_p}) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda_p} \right] P_t + \\ &+ \frac{R}{EF} \sum_0^q \int_c^d \left[\frac{ab}{\mu^2} (\varphi - \lambda_q) - A_3 \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda_q} + A_6 \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda_q} \right] q_n d\lambda + \\ &+ \frac{R}{EF\mu} \sum_0^q \int_c^d \left[b(1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda_q}) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda_q} \right] q_t \cdot d\lambda. \end{aligned} \quad (33)$$

Проекция упругого перемещения на нормаль¹

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi} = & (A_7 \cdot \bar{S}_{\varphi} - A_8 \cdot \bar{C}_{\varphi}) u_0 + \bar{C}_{\varphi} w_0 - \\
 & - (A_7 \cdot \bar{S}_{\varphi} - A_8 \cdot \bar{C}_{\varphi}) R \vartheta_0 + (-1 + \bar{C}_{\varphi} - \sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \bar{S}_{\varphi}) \frac{R^2}{\mu^2 EJ} M_0 + \\
 & + \left[\frac{b}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi}) - \frac{ac}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi} \right] \frac{R}{EF} N_0 - \\
 & - (A_9 \cdot \bar{S}_{\varphi} + A_{10} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^{\varphi} \left[+ \frac{1}{\mu^2} (-1 + \bar{C}_{\varphi-\lambda} - \sqrt{\mu^2 - 1} \bar{S}_{\varphi-\lambda}) \right] \dot{M} + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \left[\frac{b}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{ac}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] P_n - \\
 & - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [A_9 S_{\varphi-\lambda} + A_{10} C_{\varphi-\lambda}] P_t + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[\frac{b}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{ac}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda - \\
 & - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [A_9 \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{10} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Изгибающий момент

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2}{EJ} M_{\varphi} = & (A_{11} \cdot S_{\varphi} + A_{12} \cdot \bar{C}_{\varphi}) u_0 + \frac{(a-1)b}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi} w_0 - \\
 & - (A_{11} S_{\varphi} + A_{12} \cdot \bar{C}_{\varphi}) R \vartheta_0 + \\
 & + \left[\frac{a}{\mu^2} + \left(1 - \frac{a}{\mu^2} \right) \bar{C}_{\varphi} + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi} \right] \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left[- \frac{ab}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi}) - \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi} \right] \frac{R}{EF} N_0 + \\
 & + (A_{13} \cdot S_{\varphi} - A_{14} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^{\varphi} \frac{a}{\mu^2} + \left(1 - \frac{a}{\mu^2} \right) \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} \Big] \dot{M} + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \left[- \frac{ab}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) - \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] P_n + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [A_{13} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{14} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_t + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[- \frac{ab}{\mu^2} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda}) + \frac{b(a-1)}{\mu^2 \sqrt{\mu^2 - 1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [A_{13} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{14} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda.
 \end{aligned} \tag{35}$$

¹ В дальнейшем индексы при λ опущены.

Нормальная сила

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EF} N_{\varphi} = & (A_{15} \cdot \bar{S}_{\varphi} - A_{16} \cdot \bar{C}_{\varphi}) u_0 + \frac{a-1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi} w_0 - \\
 & - (A_{15} \bar{S}_{\varphi} - A_{16} \cdot \bar{C}_{\varphi}) R \vartheta_0 + \frac{a-1}{\mu^2} \left(-1 + \bar{C}_{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi} \right) \frac{R^2}{EJ} M_0 - \\
 & - \frac{b(a-1)}{\mu^2} \left(-1 + \left(1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \cdot \bar{S}_{\varphi} \right) \frac{R}{EF} N_0 + \\
 & + (-A_{17} \cdot \bar{S}_{\varphi} + A_{18} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^{\varphi} \left[\left(-1 + \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right) \frac{a-1}{\mu^2} \right] \dot{M} + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \left[-\frac{b(a-1)}{\mu^2} \left(-1 + \left(1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right) \right] P_n + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [-A_{17} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{18} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_t + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d \left[-\frac{b(a-1)}{\mu^2} \left(-1 + \left(1 - \frac{\mu^2}{b(a-1)} \right) \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} \right) \right] q_n d\lambda + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [-A_{17} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{18} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Перерезывающая сила

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EF} Q_{\varphi} = & A_{19} \cdot \bar{S}_{\varphi} u_0 + (A_{20} \cdot S_{\varphi} + A_{21} \cdot \bar{C}_{\varphi}) w_0 - \\
 & - A_{19} \cdot \bar{S}_{\varphi} R \cdot \vartheta_0 + (A_{22} \cdot S_{\varphi} - A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \frac{R^2}{EJ} M_0 - \\
 & - (A_{24} \cdot S_{\varphi} + A_{25} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \frac{R}{EF} N_0 + (\bar{C}_{\varphi} + \sqrt{\mu^2-1} \cdot S_{\varphi}) \frac{R}{EF} Q_0 + \\
 & + \frac{R^2}{EJ} \sum_0^{\varphi} [A_{22} \cdot S_{\varphi-\lambda} - A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] \dot{M} - \\
 & - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [A_{24} \cdot S_{\varphi-\lambda} + A_{25} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] P_n + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} [\bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2-1} \cdot S_{\varphi-\lambda}] P_t - \\
 & - \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [A_{24} \cdot S_{\varphi-\lambda} + A_{25} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_0^{\varphi} \int_c^d [\bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2-1} \cdot S_{\varphi-\lambda}] q_t d\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Угол поворота

$$\begin{aligned}
 R \cdot \vartheta_{\varphi} = & \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2-1}} \cdot \bar{S}_{\varphi} \cdot u_0 + (-A_{20} \cdot \bar{S}_{\varphi} + A_{21} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \frac{b}{\mu} \varpi_0 + \\
 & + \left(1 + \frac{b(1-a)}{\sqrt{\mu^2-1}} \cdot \bar{S}_{\varphi}\right) R \cdot \vartheta_0 - \\
 & - \left[\frac{a}{\mu^2} \varphi + \frac{b}{\mu} (A_{22} \cdot \bar{S}_{\varphi} + A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \right] \frac{R^2}{EJ} M_0 + \\
 & + \left[\frac{ab}{\mu^2} \varphi + \frac{b}{\mu} (A_{21} \cdot \bar{S}_{\varphi} - A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi}) \right] \frac{R}{EF} N_0 + \\
 & + \left[\frac{b}{\mu} (1 - \bar{C}_{\varphi} + \sqrt{\mu^2-1} \cdot \bar{S}_{\varphi}) \right] \frac{R}{EF} Q_0 - \\
 & - \frac{R^2}{EJ} \sum_{\lambda} \left[\frac{a}{\mu^2} (\varphi - \lambda) + \frac{b}{\mu} (A_{22} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} + A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}) \right] \dot{M} + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_{\lambda} \left[\frac{ab}{\mu^2} (\varphi - \lambda) + \frac{b}{\mu} (A_{21} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}) \right] P_n + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_{\lambda} \left[\frac{b}{\mu} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2-1} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda}) \right] P_t + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_{\lambda} \int_c^d \left[\frac{ab}{\mu^2} (\varphi - \lambda) + \frac{b}{\mu} (A_{21} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda} - A_{23} \cdot \bar{C}_{\varphi-\lambda}) \right] q_n d\lambda + \\
 & + \frac{R}{EF} \sum_{\lambda} \int_c^d \left[\frac{b}{\mu} (1 - \bar{C}_{\varphi-\lambda} + \sqrt{\mu^2-1} \cdot \bar{S}_{\varphi-\lambda}) \right] q_t d\lambda.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Правило знаков соответствует условиям, принятым при выводе уравнений равновесия, и обозначениям упругих перемещений.

Исключительное достоинство метода начальных параметров заключается в том, что полученные формулы позволяют при расчете арки на упругом основании с любой нагрузкой ограничиться решением системы не более *трех* уравнений.

Численный пример

Рассчитаем, пользуясь полученными результатами, арку, лежащую на упругом основании и нагруженную по свободным концам одинаковыми моментами M .

Будем исходить из следующих данных:

$$F = 24 \times 40 \text{ см}^2;$$

$$J = \frac{24 \cdot 40^3}{12} \text{ см}^4;$$

$$E = 14 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2;$$

$$K_0 = 14 \text{ кг/см}^2;$$

$$R = 5 \text{ м};$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ (центральный угол).}$$

Концы арки свободны.

За начало отсчета углов φ примем ось симметрии 00 .

Учитывая характер нагрузки и условия на концах, можно пользоваться расчетными формулами (12), (16), (19), (20), (21) и (22).

Для определения постоянных интегрирования $B_1, B_2, \dots, B_6$ имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi = 0 \quad & \left\{ \begin{array}{l} 1) u = 0; \\ 2) \vartheta = 0; \\ 3) Q = 0; \end{array} \right. \\ \text{при } \varphi = 30^\circ \quad & \left\{ \begin{array}{l} 4) N = 0; \\ 5) Q = 0; \\ 6) M = \dot{M}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставив эти значения последовательно в формулы (12), (22), (21), (20), (21) и (19), получим систему уравнений относительно постоянных B . Из первых трех уравнений:

$$1) B_1 + B_3 = u_{\varphi=0} = 0;$$

$$2) B_1 + (1 + \alpha m - \beta n) B_3 + (\alpha n + \beta m) B_5 = \vartheta_{\varphi=0} = 0;$$

$$3) (\mu - \alpha m - \beta n) B_3 + (\beta m - \alpha n) B_5 = Q_{\varphi=0} = 0$$

найдем, что

$$B_1 = B_3 = B_5 = 0.$$

Остальные три уравнения запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} 4) \frac{\alpha - 1}{\alpha} B_2 + [(\alpha - m) B_4 + (\beta - n) B_6] \operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6} + \\ + [(m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_4 + (n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_6] \operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \sin \beta \frac{\pi}{6} = \\ = N_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) [(\mu - \alpha m - \beta n) B_4 + (\beta m - \alpha n) B_6] \operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \cos \beta \frac{\pi}{6} + \\ + [\beta m - \alpha n) B_4 - (\mu - \alpha m - \beta n) B_6] \operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \sin \beta \frac{\pi}{6} = Q_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) -B_2 + [(n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_4 - (m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_6] \times \\ \times \operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cos \beta \frac{\pi}{6} + [(m \sqrt{\mu^2 - 1} - n + \beta) B_4 + (n \sqrt{\mu^2 - 1} + m - \alpha) B_6] \times \\ \times \operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \sin \beta \frac{\pi}{6} = \frac{R^2}{EJ} M. \end{aligned}$$

Подсчитаем сперва величины коэффициентов, стоящих при B и зависящих от упругих свойств арки и основания, а также от геометрических размеров. Ниже в таблице рядом с точными значениями помещены также

приближенные, вычисленные в предположении, что

$$c = b + 1 \approx b$$

и

$$\sqrt{\mu^2 - 1} \approx \mu.$$

Такое допущение весьма мало отражается на результатах, но позволяет значительно упростить все формулы.

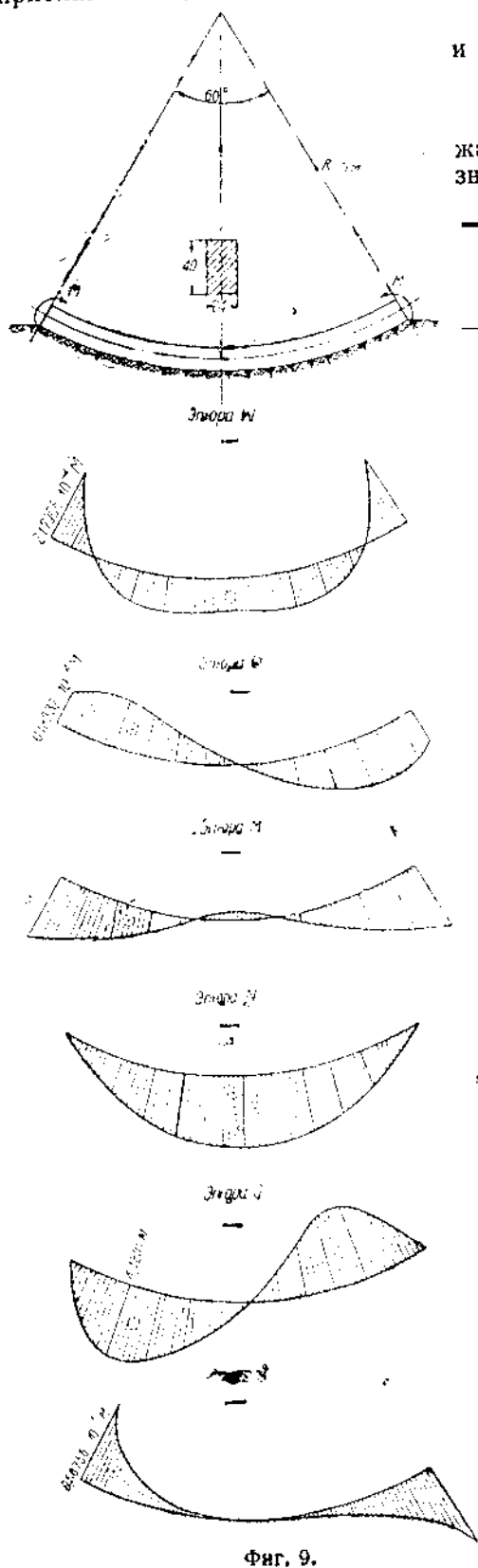
Таблица I

Коэффициенты	Точная величина	Приближенное значение
a	1,625	—
b	1875	—
c	1876	1875
μ	34,2532	34,2326
$\sqrt{\mu^2 - 1}$	34,242	34,233
α	4,077	4,076
β	4,198	4,197
m	3,99905	3,99589
n	4,27098	4,26772
$\alpha - m$	0,7795	0,08011
$\beta - n$	-0,07298	-0,6972
$\mu - \alpha m - \beta n$	0,0192	0,03413
$\beta m - \alpha n$	-0,62477	-0,62448
$1 + \alpha m - \beta n$	-0,62545	-0,62437
$\alpha n + \beta m$	34,2008	34,16598
$n \sqrt{\mu^2 - 1}$	146,2469	146,19386
$m \sqrt{\mu^2 - 1}$	136,93547	136,79130
$n \sqrt{\mu^2 - 1} - (\alpha - m)$	146,17165	146,01675
$m \sqrt{\mu^2 - 1} + (\beta - n)$	136,86249	136,72158
$\operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \cos \beta \frac{\pi}{6}$	0,73784	—
$\operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \sin \beta \frac{\pi}{6}$	1,14337	—
$\operatorname{ch} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \sin \beta \frac{\pi}{6}$	0,58194	—
$\operatorname{sh} \alpha \frac{\pi}{6} \cdot \cos \beta \frac{\pi}{6}$	1,14967	—

Решив последние три уравнения системы, найдем:

$$B_2 = -0,19923 \cdot 10^{-4} \cdot M;$$

См. (9a) и (11a).



Фиг. 9.

$$B_4 = 0,10213 \cdot 10^{-4} \dot{M};$$

$$B_5 = 0,15489 \cdot 10^{-4} \dot{M}.*$$

Имея значения постоянных интегрирования, можно, на основании формул (12), (16), (19), (20), (21) и (22), составить выражения для M , N , Q и т. д. в любом сечении.

Приводим окончательные результаты:

$$u_\varphi = \dot{M} \cdot 10^{-4} \{ -0,19923\varphi + 0,10213 \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi + \\ + 0,15489 \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi \};$$

$$w_\varphi = \dot{M} \cdot 10^{-4} \{ -0,12260 + 1,06996 \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi + \\ + 0,18322 \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi \};$$

$$M_\varphi = \dot{M} \cdot 10^{-4} \{ 14,280 - 448,44 \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi + \\ + 2624,799 \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi \};$$

$$N_\varphi = \dot{M} \cdot 10^{-2} \{ -205,955 - 8,978 \operatorname{ch} \alpha\varphi \cos \beta\varphi + \\ + 52,497 \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi \};$$

$$Q_\varphi = -\dot{M} \cdot 10^{-2} \{ 254,769 \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi + \\ + 179,639 \operatorname{ch} \alpha\varphi \sin \beta\varphi \};$$

$$\vartheta_\varphi = \dot{M} \cdot 10^{-7} \{ 0,398\varphi + 10,4679 \operatorname{sh} \alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi - \\ - 7,180 \operatorname{ch} \alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi \}.$$

По этим выражениям построены эпюры, изображенные на фиг. 9.

Значения ординат эпюр

Таблица 2

φ	u_φ	w_φ	M_φ	N_φ	Q_φ	ϑ_φ
0	0	$0,94736 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$-0,04352 \dot{M}$	$-2,14932 \dot{M}$	0	0
10°	$0,15436 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$0,97848 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$0,09412 \dot{M}$	$-1,85609 \dot{M}$	$-2,97523 \dot{M}$	$-0,00101 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{M}$
15°	$0,23228 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$0,87812 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$0,26909 \dot{M}$	$-1,52395 \dot{M}$	$-4,09093 \dot{M}$	$-0,04423 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{M}$
20°	$0,28454 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$0,42217 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$0,50315 \dot{M}$	$-1,05553 \dot{M}$	$-4,32072 \dot{M}$	$-0,14162 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{M}$
30°	$0,18332 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$-2,17908 \cdot 10^{-4} \dot{M}$	$1,00000 \dot{M}$	0	0	$-0,50756 \cdot 10^{-5} \cdot \dot{M}$

* Размерность везде в кг и см.

О РАСЧЕТЕ ГИБКОЙ АРКИ С БАЛКОЙ ЖЕСТКОСТИ

Гибкая арка с балкой жесткости в практике мостостроения известна уже давно, но общее количество мостов с фермами этой системы весьма невелико. Объясняется это, с одной стороны, недостаточной разработкой теории этих арок, элементарный расчет которых (не учитывающий изменения схемы благодаря деформации) дает результаты, сильно отступающие от действительности; с другой стороны, — существующим мнением о малой жесткости этой системы, в особенности для тяжелых сосредоточенных нагрузок.

В последнее время ЦИС НКПС запроектирована железобетонная гибкая арка с балкой жесткости пролетом 30 м, строящаяся в виде опытного. Кроме того, в настоящее время находится в постройке мост им. Володарского через реку Певу в Ленинграде, представляющий собой гибкую арку с балкой жесткости с ездой понизу. Очевидно, в результате удачного опыта строительства гибких арок с балкой жесткости будут предъявлены более высокие требования к теории расчета мостов этой системы, а поэтому своевременно поставить задачу о расчете гибкой арки с балкой жесткости.

При разработке теории расчета гибкой арки с балкой жесткости автор пошел исключительно по пути точного расчета, поэтому известный приближенный расчет остался в стороне.

Литература по вопросам расчета гибкой арки с балкой жесткости, как известно, очень бедна; поэтому приходилось в некоторых случаях пользоваться литературой по расчету висячих мостов, в частности проф. И. Я. Штаерман, О точном расчете висячих мостов с балкой жесткости. Изд. КПИ, 1929 г. и Мюллер-Бреслау, Графическая статика, том II, ч. 2.

§ 1. Вывод основных уравнений

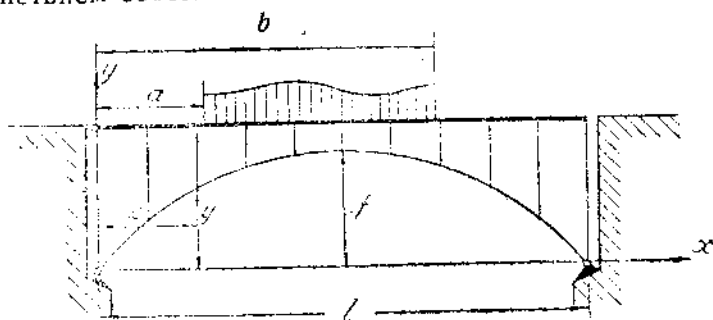
Точный расчет гибкой арки с балкой жесткости основан на следующих допущениях:

- 1) собственный вес воспринимается полностью лишь гибкой аркой, очертание которой совпадает с кривой давления от собственного веса моста; при таком очертании гибкой арки балка жесткости работает только вследствие действия временной нагрузки или температурных изменений;
- 2) изгибающие моменты целиком воспринимает на себя балка жесткости, а арка работает только на нормальные усилия. Вполне точно это допущение выполняется только в том случае, когда арка представляет собой шарнирный многоугольник с шарнирами в местах соединения арки со стойками.

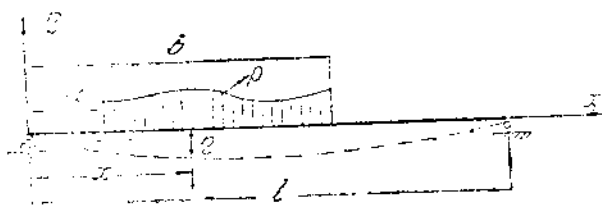
В случае, если арка осуществлена не как шарнирный многоугольник а в виде стержневого многоугольника с жестким соединением между собой отдельных стержней арки или арка сделана из железобетона, то возможно появление изгибающих моментов в сечениях арки, которыми можно пренебречь, если жесткость арки будет достаточно мала по сравнению с жесткостью балки; эти моменты можно учесть при расчете арки, однако, влияние их невелико по сравнению с действием нормальных сил.

Введем следующие обозначения (1а, 1б):

- g — собственный вес на один пог. метр моста (состоится из постоянной нагрузки на гибкую арку и собственного веса последней).
 p — временная нагрузка на единицу длины моста (расположена по всему пролету или части его).
 q — добавочная вертикальная нагрузка на гибкую арку, вследствие действия временной нагрузки.
 H_0 — горизонтальная составляющая усилия в гибкой арке, вызванного действием собственного веса.



Фиг. 1а.



Фиг. 1б.

H — горизонтальная составляющая добавочного усилия в элементах гибкой арки, возникающего, вследствие действия временной нагрузки или температурных изменений.

$\beta = \frac{H}{H_0}$ — вспомогательный коэффициент, вводимый для сокращения записи.

η — прогиб произвольного элемента балки жесткости, а также и вертикальное перемещение элементов гибкой арки (деформацией стоек, соединяющих арку с балкой жесткости, пренебрегаем), вызванное действием временной нагрузки и добавочного усилия H .

f — стрела подъема гибкой арки.

l — расчетный пролет балки жесткости.

J — момент инерции балки жесткости.

F_a — площадь нормального сечения элементов гибкой арки.

E — модуль упругости материала гибкой арки и балки жесткости.

Дифференциальное уравнение кривой давления, по которой принимаем очертание гибкой арки, от нагрузки собственного веса имеет вид:

$$H_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = -g. \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1) и определяя произвольные постоянные, получим уравнение кривой давления, по которому принимаем очертание гибкой арки; это будет, как известно, парабола:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x). \quad (2)$$

При действии временной нагрузки гибкая арка будет отклоняться от своего начального очертания. Вследствие деформации все ординаты гибкой арки получают некоторые положительные приращения η , т. е. новые значения ординат будут

$$y + \eta.$$

Дифференциальное уравнение очертания гибкой арки после деформации, вследствие действия временной нагрузки, примет вид:

$$(H_0 + H) \frac{d^2(y + \eta)}{dx^2} = -(g + q). \quad (3)$$

Решая уравнение (3) относительно q , будем иметь:

$$-q = g + H_0(1 + \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + H_0(1 + \beta) \frac{d^2 \eta}{dx^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{H_0},$$

окончательно получим:

$$q = \beta g - H_0(1 + \beta) \frac{d^2 \eta}{dx^2}. \quad (4)$$

Уравнение (4) дает нам ту часть временной нагрузки, которую воспринимает на себя гибкая арка.

Нагрузка, приходящаяся на балку жесткости, выразится следующей разностью:

$$p - q = p - \beta g + H_0(1 + \beta) \frac{d^2 \eta}{dx^2}. \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии балки жесткости напомним, воспользовавшись известной зависимостью между прогибом и нагрузкой:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right] = -(p - q),$$

т. е. будем иметь:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right] = -p + \beta g - H_0(1 + \beta) \frac{d^2 \eta}{dx^2}$$

или, перенеся третий член из правой части уравнения в левую, получим дифференциальное уравнение упругой линии балки жесткости:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right] + H_0(1 + \beta) \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -p + \beta g. \quad (6)$$

В случае постоянной жесткости балки, когда $EJ = \text{const}$, уравнение (6) переписывается так:

$$EJ \frac{d^4 \eta}{dx^4} + H_0(1 + \beta) \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -p + \beta g \quad (7)$$

или, введя новый аргумент $z = \frac{x}{l}$ и обозначив

$$k^2 = (1 + \beta) \frac{H_0 J^2}{EJ},$$

будем иметь:

$$\frac{d^4 \eta}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 \eta}{dz^2} = -(p - \beta g) \frac{l^4}{EJ}. \quad (8)$$

В случае отсутствия нагрузки на мосту в правой части уравнения (8) нужно положить $p = 0$; второй член правой части βg , представляющий влияние нормальных сил в гибкой арке на деформацию и усилия в балке жесткости, может обратиться в нуль только в случае отсутствия всех внешних факторов, действующих на мост, как то: сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, температура и т. д.

Рассмотрим сначала случай, когда мост не несет нагрузки, но β не равна нулю; тогда уравнение (8) следует переписать так:

$$\frac{d^4 \eta}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 \eta}{dz^2} = \beta g \frac{l^4}{EJ}. \quad (9)$$

Решив уравнения (9), получим выражения прогиба балки жесткости. Общий интеграл этого уравнения, как известно, будет:

$$\eta = c_1 + c_2 z + c_3 \sin kz + c_4 \cos kz + \frac{\beta g l^4 z^2}{2EJk^2}. \quad (10)$$

Дифференцируя уравнение (10) последовательно, получим выражения угла поворота φ_z , изгибающего момента M_z и перерывающей силы Q_z :

$$\varphi_z = \frac{c_2}{l} + \frac{c_3}{l} k \cos kz - \frac{c_4}{l} k \sin kz + \frac{\beta g l^3 z}{EJk^2}; \quad (11)$$

$$M_z = -\frac{EJk^2}{l^2} (c_3 \sin kz + c_4 \cos kz) + \frac{\beta g l^2}{k^2}; \quad (12)$$

$$Q_z = -\frac{EJk^3}{l^3} (c_3 \cos kz - c_4 \sin kz). \quad (13)$$

Выразим произвольные постоянные через начальные параметры. Пусть в начале координат при $z = 0^*$ будем иметь прогиб η_0 , угол поворота φ_0 , изгибающий момент M_0 и перерывающую силу Q_0 .

Подставляя в выражения (10), (11), (12) и (13) указанные начальные условия, получим уравнения, из которых определим произвольные постоянные c_1 , c_2 , c_3 и c_4 .

Эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= c_1 + c_4; \\ \varphi_0 &= \frac{c_2}{l} + \frac{c_3}{l} k; \end{aligned} \quad (14)$$

$$M_0 = -\frac{EJk^2}{l^2} c_4 + \frac{\beta g l^2}{k^2};$$

$$Q_0 = -\frac{EJk^3}{l^3} c_3.$$

* См. проф. А. А. Уманский, О расчете балок на упругом основании, Ленинград, 1933.

Решая систему (14), будем иметь значения постоянных:

$$\begin{aligned} c_1 &= \eta_0 + \frac{M_0 l^2}{EJk^3} - \frac{\beta g l^4}{EJk^4}; \\ c_2 &= \varphi_0 l + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3}; \\ c_3 &= -\frac{Q_0 l^3}{EJk^3}; \\ c_4 &= -\frac{M_0 l^2}{EJk^2} + \frac{\beta g l^4}{EJk^4}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в выражения (10), (11), (12) и (13) значения постоянных интегрирования, получим значения прогиба, угла поворота, изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$\begin{aligned} \eta_z &= \eta_0 + \varphi_0 l z + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) + \frac{M_0 l^2}{EJk^2} (1 - \cos kz) + \\ &+ \frac{\beta g l^4}{EJk^4} \left(\frac{k^2 z^2}{2} - 1 + \cos kz \right). \end{aligned} \quad (16)$$

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{EJk^2} (1 - \cos kz) + \frac{M_0 l}{EJk} \sin kz + \frac{\beta g l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz). \quad (17)$$

$$M_z = \frac{Q_0 l}{k} \sin kz + M_0 \cos kz + \frac{\beta g l^3}{k^2} (1 - \cos kz). \quad (18)$$

$$Q_z = Q_0 \cos kz - \frac{k}{l} M_0 \sin kz + \frac{\beta g l}{k} \sin kz. \quad (19)$$

Если совместить начало координат с левой опорой балки жесткости, тогда η_0 будет осадка опоры, φ_0 — угол поворота балки на опоре, M_0 — момент заделки на опоре и Q_0 — перерезывающая сила на опоре.

В случае балки с шарнирным закреплением концов и при жестких опорах будем иметь при $z = 0$ и $z = 1$: прогиб (осадка) $\eta_0 = 0$ и изгибающий момент $M_0 = 0$; значения Q_0 и φ_0 определяются из уравнения (16) и (18).

В случае балки с жестким закреплением концов, будем иметь тоже два неизвестных: M_0 и Q_0 , так как η_0 и φ_0 обращаются в нуль при $z = 0$ и $z = 1$.

До сих пор мы рассматривали случаи отсутствия временных нагрузок на мосту. Обобщим предыдущие выкладки, рассмотрев одновременное действие нескольких видов нагрузок на балку жесткости. Пусть на балку жесткости в пределах отрезка OX действует сосредоточенная сила P с абсциссой $\lambda_p l$, сосредоточенный момент M с абсциссой $\lambda_\mu l$ и распределенная нагрузка p на участке от $\lambda_1 l$ до $\lambda_2 l$.

Чтобы учесть влияние указанных факторов на прогиб η_z , угол поворота φ_z , изгибающий момент M_z и перерезывающую силу Q_z , будем исходить из принципа сложения действия сил (применяя его к внешним нагрузкам), при этом нужно к формулам (16), (17), (18) и (19) прибавить влияние каждого в отдельности фактора.

Действие величин P , $\int_0^l p dx$ и M ничем не отличается от действия Q_0 и M_0 ; поэтому, если мы в формулах (16), (17), (18) и (19) вместо Q_0 подставим $-P$ и $-\int_0^l p dx$ с их соответствующими абсциссами, а вместо M_0 подставим

момент M с абсциссой λ_{pi} , то получим формулы (20), (21), (22) и (23), учитывающие влияние вышеуказанных факторов; эти формулы запишутся так:

$$\eta_z = \eta_0 + \varphi_0 l z + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) + \frac{M_0 l^3}{EJk^2} (1 - \cos kz) +$$

$$+ \frac{\beta g l^4}{EJk^4} \left(\frac{k^2 z^2}{2} - 1 + \cos kz \right) - \frac{l^3}{EJk^3} \sum_1^n P_i [k(z - \lambda_{pi}) - \sin k(z - \lambda_{pi})] +$$

$$+ \frac{l^3}{EJk^2} \sum_1^n M_i [1 - \cos k(z - \lambda_{pi})] - \frac{l^4}{EJk^3} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p [k(z - \lambda) - \sin k(z - \lambda)] d\lambda. \quad (20)$$

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{EJk^2} (1 - \cos kz) + \frac{M_0 l}{EJk} \sin kz +$$

$$+ \frac{\beta g l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) - \frac{l^3}{EJk^2} \sum_1^n P_i [1 - \cos k(z - \lambda_{pi})] +$$

$$+ \frac{l}{EJk} \sum_1^n M_i \sin k(z - \lambda_{pi}) -$$

$$- \frac{l^3}{EJk^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p [1 - \cos k(z - \lambda)] d\lambda. \quad (21)$$

$$M_z = \frac{Q_0 l}{k} \sin kz + M_0 \cos kz + \frac{\beta g l^2}{k^2} (1 - \cos kz) -$$

$$- \frac{l}{k} \sum_1^n P_i \sin k(z - \lambda_{pi}) + \sum_1^n M_i \cos k(z - \lambda_{pi}) -$$

$$- \frac{l^2}{k} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p \sin k(z - \lambda) d\lambda. \quad (22)$$

$$Q_z = Q_0 \cos kz - \frac{k}{l} M_0 \sin kz + \frac{\beta g l}{k} \sin kz -$$

$$- \sum_1^n P_i \cos k(z - \lambda_{pi}) - \frac{k}{l} \sum_1^n M_i \sin k(z - \lambda_{pi}) -$$

$$- l \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p \cos k(z - \lambda) d\lambda. \quad (23)$$

Знак $\sum$ поставлен потому, что факторов P и M может быть несколько.

Формулы (20), (21), (22) и (23) дают полные значения прогиба η_z балки, угла поворота φ_z , изгибающего момента M_z и перерезывающей силы Q_z в общем случае действия сил на балку жесткости.

В эти формулы входит пока неизвестная величина k , зависящая от горизонтальной составляющей усилия в элементах гибкой арки, определением которой мы займемся.

Определение распора арки H

До сих пор мы рассмотрели только прогиб и усилия в балке жесткости, которые, в свою очередь, зависят от дополнительного усилия H , появляющегося в элементах гибкой арки вследствие действия внешних сил.

Для определения величины H нужно составить еще одно дополнительное уравнение, при выводе которого будем исходить из зависимости между потенциальной энергией гибкой арки и работой, производимой внешней нагрузкой.

Если на мост действует внешняя нагрузка, то в элементах гибкой арки возникает дополнительное усилие, а вместе с тем происходит изменение потенциальной энергии ее.

Это изменение потенциальной энергии равно работе внешней нагрузки, приходящейся на гибкую арку при перемещении ее элементов в новое положение равновесия.

Начальное усилие в каком-либо сечении гибкой арки равно

$$H_0 \cdot \frac{ds}{dx},$$

а соответственная ему потенциальная энергия элемента гибкой арки ds равна

$$\frac{\left(H_0 \frac{ds}{dx}\right)^2 ds}{2EF_a}.$$

Потенциальная энергия, вследствие появления дополнительного усилия в сечениях гибкой арки, горизонтальная проекция которого есть H , выразится формулой

$$\frac{(H_0 + H)^2 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{2EF_a} ds.$$

Приращение потенциальной энергии будет равно

$$\frac{(H_0 + H)^2 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{2EF_a} ds - \frac{\left(H_0 \frac{ds}{dx}\right)^2}{2EF_a} ds = \frac{H \left(H_0 + \frac{1}{2} H\right)}{EF_a} \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 ds.$$

Изменение энергии по всей длине гибкой арки равно

$$\frac{H \left(H_0 + \frac{1}{2} H\right)}{EF_a} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx = \frac{H \left(H_0 + \frac{1}{2} H\right)}{EF_a} L, \quad (24)$$

где

$$L = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx$$

и представляет собой величину, пропорциональную длине гибкой арки, которую можно выразить точно, если известно уравнение очертания арки. В нашем случае (арка, очерченная по параболе) величина эта выразится так:

$$L = \int_0^l (1 + y'^2)^{3/2} dx = l_0,$$

где

$$\mu = 0,25 \left(2,5 + \frac{16f^2}{l^2} \right) \left(1 + 16 \frac{f^2}{l^2} \right)^{1/2} + \frac{3l}{32f} \ln \left[4 \frac{f}{l} + \left(1 + 16 \frac{f^2}{l^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (25)$$

При определении работы нагрузки, приходящейся на гибкую арку, предполагаем, что при малых деформациях гибкой арки соблюдается прямая пропорциональность между перемещениями и нагрузкой; поэтому при определении работы нужно принять среднее значение нагрузки (т. е. полусумму начальной и конечной нагрузки).

На основании этого предположения работа нагрузки, приходящейся на гибкую арку при перемещении ее в новое положение равновесия, будет иметь значение:

$$T = - \int_0^l \left(g + \frac{1}{2} q \right) \cdot \eta dx = - \int_0^l \left[g + \frac{1}{2} \beta g - \frac{1}{2} H_0 (1 + \beta) \eta^* \right] \eta dx, \quad (26)$$

где $g + \frac{1}{2} q$ — полусумма нагрузок: начальной g и конечной

$$g + q = g + \beta g - H_0 (1 + \beta) \eta^*.$$

Приравнивая величину работы (26) приращению потенциальной энергии (24), получим уравнение для определения распора H гибкой арки:

$$\frac{H \left(H_0 + \frac{1}{2} H \right)}{EF_a} L = - \int_0^l \left[g + \frac{1}{2} \beta g - \frac{1}{2} H_0 (1 + \beta) \eta^* \right] \eta dx. \quad (27)$$

Пренебрегая в уравнении (27) влиянием члена $\frac{1}{2} H_0 \eta^* (1 + \beta) \eta^*$, как малой величиной второго порядка по сравнению с остальными членами, получим более простое уравнение

$$\frac{H \left(H_0 + \frac{1}{2} H \right) L}{EF_a} = - \int_0^l \left(g + \frac{1}{2} \beta g \right) \eta dx. \quad (28)$$

Принимая во внимание, что в нашем случае

$$g = \frac{H_0 \cdot 8f}{l^2} \text{ и } H_0 + \frac{1}{2} H = H_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right),$$

получим приближенное уравнение, которое Мюллер-Бреслау получил совершенно иным путем

$$- \frac{HL}{EF_a} = \frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta dx. \quad (29)$$

Покажем, как пользоваться полученными формулами в каждом отдельном случае нагрузки.

1-й случай. Нагрузка сосредоточенными силами. Рассмотрим сначала действие на мост произвольного числа сосредоточенных сил, приложенных на расстоянии $\lambda_1 l, \lambda_2 l, \lambda_3 l, \dots$ от опоры (фиг 2). Так как балка жесткости свободно опирается на жесткие опоры, то в формулах (20), (21), (22) и (23) члены, содержащие η_0 и M_0 , обращаются в нуль.

* Если считать прогиб арки малой величиной по сравнению с основными размерами арки, то $\eta^* \eta$ будет малой величиной второго порядка по сравнению с основными величинами

Перепишем формулы (20), (21), (22) и (23) для одного из участков балки жесткости, применяя их к данному случаю нагрузки

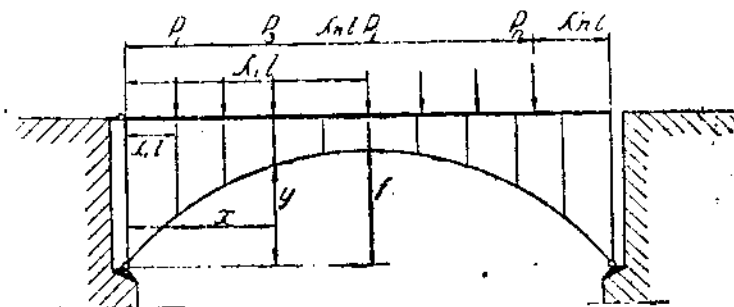
При $z \geq \lambda_i$

$$\eta_z = \varphi_0 l z + \frac{Q_0 l^3}{E J k^3} (kz - \sin kz) - \frac{l^3}{E J k^3} \sum_1^i P_i [k(z - \lambda_i) - \sin k(z - \lambda_i)] + \frac{\beta g l^4}{E J k^4} \left(\frac{k^2 z^2}{2} - 1 + \cos kz \right). \quad (30)$$

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{E J k^2} (1 - \cos kz) - \frac{l^2}{E J k^2} \sum_1^i P_i [1 - \cos k(z - \lambda_i)] + \frac{\beta g l^3}{E J k^3} (kz - \sin kz). \quad (31)$$

$$M_z = \frac{Q_0 l}{k} \sin kz - \frac{l}{k} \sum_1^i P_i \sin k(z - \lambda_i) + \frac{\beta g l^2}{k^2} (1 - \cos kz). \quad (32)$$

$$Q_z = Q_0 \cos kz - \sum_1^i P_i \cos k(z - \lambda_i) + \frac{\beta g l}{k} \sin kz. \quad (33)$$



Фиг. 2.

Во всех остальных участках балки жесткости выражение прогиба η_z , угла поворота φ_z , изгибающего момента M_z и перерезывающей силы Q_z по внешнему виду ничем не отличается от формул (30), (31), (32) и (33); разница только в количестве слагаемых $\sum$, т. е. при переходе от предыдущего к последующему участку балки жесткости изменяется только индекс i , означающий число сосредоточенных сил слева от рассматриваемого сечения.

Для определения Q_0 и φ_0 имеем уравнения: при $z = 1$; $\eta_z = 0$ и $M_z = 0$:

$$\varphi_0 l + \frac{Q_0 l^3}{E J k^3} (k - \sin k) - \frac{l^3}{E J k^3} \sum_1^n P_i [k(1 - \lambda_i) - \sin k(1 - \lambda_i)] + \frac{\beta g l^4}{E J k^4} \left(\frac{1}{2} k^2 - 1 + \cos k \right) = 0; \quad (34)$$

$$Q_0 \frac{l}{k} \sin k - \frac{l}{k} \sum_1^n P_i \sin k(1 - \lambda_i) + \frac{\beta g l^2}{k^2} (1 - \cos k) = 0.$$

Решив уравнение (34), получим:

$$Q_0 = \sum_1^n P_i \frac{\sin k \lambda_i'}{\sin k} - \frac{\beta g l}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2};$$

$$\varphi_0 = \frac{l^2}{E J k^2} \sum_1^n P_i \lambda_i' - \frac{\beta g l^3}{2 E J k^2} - \frac{Q_0 l^2}{E J k^2}.$$
(35)

Подставляя в формулу (30) вместо φ_0 его значение из выражения (35), будем иметь:

$$\eta_z = \frac{l^2}{E J k^2} \left[l z \sum_1^n P_i \lambda_i' - l \sum_1^i P_i (z - \lambda_i) - \frac{\beta g l^3}{2} (z - z^2) + \right. \\ \left. + \frac{Q_0 l}{k} \sin k z + \frac{l}{k} \sum_1^i P_i \sin k (z - \lambda_i) - \frac{\beta g l^2}{k^2} (1 - \cos k z) \right].$$

Приравнявая выражения в квадратных скобках:

$$M^0 = l z \sum_1^n P_i \lambda_i' - l \sum_1^i P_i (z - \lambda_i);$$

$$H y = \frac{\beta g l^3}{2} (z - z^2) \text{ и } \beta g = \frac{8 f}{l^2} H, \text{ и}$$

вынося H за скобки, получим:

$$\eta_z = \frac{H}{H_0 + H} \left[\frac{M_0}{H} - y + \frac{Q_0 l}{k H} \sin k z + \right. \\ \left. + \frac{l}{k H} \sum_1^i P_i \sin k (z - \lambda_i) - \frac{8 f}{k^2} (1 - \cos k z) \right].$$
(36)

Для вычисления распора H гибкой арки имеем формулу (29), преобразовывая которую запишем так:

$$-\frac{(H_0 + H) L l^2}{8 f E F_a} = \frac{(H_0 + H) l}{H} \int_0^1 \eta dz.$$
(37)

Подставляя в правую часть равенства (37) значение из формулы (36) и интегрируя почленно, получим:

$$-\frac{(H_0 + H) L l^2}{8 f E F_a} = \frac{l}{H} \int_0^1 M^0 dz - l \int_0^1 y dz + \frac{Q_0 l^2}{H k^2} (\cos k - 1) - \\ - \frac{l^2}{H k^2} \sum_1^n P_i (\cos k \lambda_i' - 1) - \frac{8 f l}{k^3} (k - \sin k).$$

Замечая, что

$$l \int_0^1 y dz = \frac{2}{3} f l;$$

$l \int_0^1 M^0 dz = Q$ — площадь эпюры моментов свободно опертой балки, и введя для краткости обозначение

$$\omega = \frac{Q_0}{H} (\cos k - 1) - \frac{1}{H} \sum_1^n P_i (\cos k \lambda_i' - 1) + \frac{8f}{kl} \sin k, \quad (38)$$

будем иметь уравнение, из которого определим величину распора:

$$-\frac{(H_g + H) l^3}{8fEF_a} = \frac{Q}{H} - \frac{2}{3} fl - \frac{l^3}{k} \left(\frac{8f}{l} - \omega \right), \quad (39)$$

откуда

$$H = \frac{3Q}{2fl} v', \quad (40)$$

где

$$v' = \frac{1}{1 - \frac{3(H_g + H)ll}{16f^2EF_a} + \frac{3l}{2k^2f} \left(\frac{8f}{l} - \omega \right)}. \quad (41)$$

Преобразовывая формулу (38) для данного случая нагрузки, получим:

$$\omega = \frac{1}{H} \left[\sum_1^n P_i - \sum_1^n P_i \left(\frac{\sin k \lambda_i'}{\sin k} - \frac{\cos k \sin k \lambda_i'}{\sin k} + \frac{\sin k \cos k \lambda_i'}{\sin k} \right) \right] - \frac{8f}{lk} \left[\sin k + \operatorname{tg} \frac{k}{2} (\cos k - 1) \right],$$

или окончательно переписывая, будем иметь:

$$\omega = \frac{\sum_1^n P_i}{H} - \frac{\sum_1^n P_i (\sin k \lambda_i + \sin k \lambda_i')}{H \sin k} + \frac{16f}{kl} \operatorname{tg} \frac{k}{2}; \quad (42)$$

здесь $\lambda_i' = 1 - \lambda_i$.

В случае одной силы посредине балки получим из формул (42) (33) и (35):

$$\omega = \frac{P}{H} - \frac{P}{H \cos \frac{k}{2}} + \frac{16f}{kl} \operatorname{tg} \frac{k}{2};$$

$$Q_0 = \frac{P}{2 \cos \frac{k}{2}} - \frac{\beta g l}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2}; \quad (43)$$

$$\gamma_0 = \frac{Pl^2}{2EJk^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{k}{2}} \right) - \frac{\beta g l^3}{2EJk^3} \left(k - 2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} \right).$$

Прогиб и изгибающий момент балки под силой определится по формуле

$$\eta = \frac{H}{H_g + H} \left\{ -\frac{Pl}{4kH} \left(k + 2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} \right) - f \left[1 + \frac{8}{k^2} \left(\operatorname{tg} \frac{k}{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{k}{2} + 1 \right) \right] \right\}, \quad (44)$$

$$M = \frac{Pl}{2k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} - 8Hf \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{k}{2}} - 1 \right). \quad (45)$$

2-й случай. Равномерно-распределенная нагрузка. На участке балки от 0 до λ_1 находится нагрузка интенсивностью p и на участке от λ_1 до l — нагрузка интенсивностью p' .

Интеграл в уравнении (20), учитывающий влияние равномерно распределенной нагрузки, будет:

$$\begin{aligned} \int_0^z p' [k(z-\lambda) - \sin k(z-\lambda)] d\lambda + (p-p') \int_{\lambda_1}^z [k(z-\lambda) - \sin k(z-\lambda)] d\lambda = \\ = \frac{p'}{k} \left(\frac{k^2 z^2}{2} + \cos kz - 1 \right) + \\ + \frac{p-p'}{k} \left[k^2 \left(z\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} \right) - \cos k(z-\lambda_1) + \cos kz \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (20), вместо интеграла, его значение, получим:

$$\begin{aligned} \eta_z = \varphi_0 lz + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) - \frac{(p' - \beta g) l^4}{EJk^4} \left(\frac{k^2 z^2}{2} + \cos kz - 1 \right) - \\ - \frac{(p-p') l^4}{EJk^4} \left[k^2 \left(z\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} \right) - \cos k(z-\lambda_1) + \cos kz \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Дифференцируя по z уравнение (46), будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_z = \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{EJk^3} (1 - \cos kz) - \frac{(p' - \beta g) l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) - \\ - \frac{(p-p') l^3}{EJk^3} [k\lambda_1 + \sin k(z-\lambda_1) - \sin kz]; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} M_z = \frac{Q_0 l}{k} \sin kz - \frac{(p' - \beta g) l^2}{k^2} (1 - \cos kz) - \\ - \frac{(p-p') l^2}{k^2} [\cos k(z-\lambda_1) - \cos kz]; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} Q_z = Q_0 \cos kz - \frac{(p' - \beta g) l}{k} \sin kz - \\ - \frac{(p-p') l}{k} [\sin kz - \sin k(z-\lambda_1)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Для того чтобы получить значение η_z , φ_z , M_z и Q_z при $z < \lambda_1$, нужно в формулы (46), (47), (48) и (49) подставить p вместо p' .

Q_0 и φ_0 — определим из уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_0 l + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3} (k - \sin k) - \frac{(p' - \beta g) l^4}{EJk^4} \left(\frac{k^2}{2} + \cos k - 1 \right) - \\ - \frac{(p-p') l^4}{EJk^4} \left[k^2 \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} \right) + \cos k - \cos k(1-\lambda_1) \right] = 0; \\ \frac{Q_0 l}{k} \sin k - \frac{(p' - \beta g) l^2}{k^2} (1 - \cos k) - \\ - \frac{(p-p') l^2}{k^2} [\cos k(1-\lambda_1) - \cos k] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$Q_0 = \frac{(p' - 3g)l}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} + \frac{(p - p')l}{k \sin k} (\cos k\lambda_1 - \cos k); \quad (50)$$

$$\varphi_0 = \frac{(p' - 3g)l^3}{2EJk^2} + \frac{(p - p')l^3}{EJk^2} \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2} \right) - \frac{Q_0 l^2}{EJk^2}. \quad (51)$$

Для вычисления распора H используем формулу (40), для чего нужно предварительно преобразовать выражение (42) применительно к данной нагрузке.

Значение ω в этом случае будет:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{l}{H} \int_0^{\lambda_1} p d\lambda + \frac{l}{H} \int_0^{\lambda_1'} p' d\lambda' - \frac{pl}{H \sin k} \int_0^{\lambda_1} [\sin k\lambda + \sin k(1 - \lambda)] d\lambda - \\ & - \frac{p'l}{H \sin k} \int_0^{\lambda_1'} [\sin k\lambda' + \sin k(1 - \lambda_1')] d\lambda'. \end{aligned} \quad (52)$$

Интегрируя выражение (52) в указанных пределах, получим значение ω .

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{(p\lambda_1 + p'\lambda_1')l}{H} - \frac{(p + p')l}{kH} \operatorname{tg} \frac{k}{2} - \\ & - \frac{(p - p')l}{Hk \sin k} (\cos k\lambda_1 - \cos k\lambda_1') + \frac{16f}{kl} \operatorname{tg} \frac{k}{2}. \end{aligned} \quad (53)$$

3-й случай нагрузки. Нагрузка p равномерно распределена по всему пролету. В этом случае нагрузки все полученные для 2-го случая формулы пригодны и для 3-го случая нагрузки, если мы в них положим

$$p = p'.$$

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \eta_z = & \varphi_0 lz + \frac{Q_0 l^3}{k^2 EJ} (kz - \sin kz) - \\ & - \frac{(p - 3g)l^3}{EJk^2} \left(\frac{k^2 z^2}{2} + \cos kz - 1 \right); \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \varphi_z = & \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{k^2 EJ} (1 - \cos kz) - \\ & - \frac{(p - 3g)l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz); \end{aligned} \quad (55)$$

$$M_z = -\frac{Q_0 l}{k} \sin kz - \frac{(p - 3g)l^2}{EIk^2} (1 - \cos kz); \quad (56)$$

$$Q_z = Q_0 \cos kz - \frac{(p - 3g)l}{k} \sin kz. \quad (57)$$

Значения Q_0 и φ_0 получим из формул (50), (51):

$$\left. \begin{aligned} Q_0 = & \frac{(p - 3g)l}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2}; \\ \varphi_0 = & \frac{(p - 3g)l^3}{2EJk^2} \left(k - 2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\omega = \frac{pl}{kH} \left(k - 2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} \right) + \frac{16f}{kl} \operatorname{tg} \frac{k}{2}. \quad (59)$$

По приближенному расчету имеем:

$$H = \frac{pl^2}{8f} v^*$$

или

$$\frac{p}{H} = \frac{8f}{l^2} \cdot \frac{1}{v}.$$

Тогда

$$\omega = \frac{8f}{l} \left[\frac{1}{v} - \frac{2}{k} \left(\frac{1-v}{v} \right) \operatorname{tg} \frac{k}{2} \right];$$

$$\frac{8f}{l} - \omega = \frac{8f}{l} \left(\frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1-v}{v}.$$

Распор определим из формулы (40):

$$H = \frac{3\Omega}{2fl} v' = \frac{pl^2}{8f} v',$$

где v' в этом случае будет выражено так:

$$v' = \frac{1}{1 + \left[\frac{12}{k^2} \left(\frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} - 1 \right) - 0,1k^2 \right] \frac{1-v}{v}}. \quad (60)$$

4-й случай нагрузки. Загружена первая половина пролета равномерно распределенной нагрузкой p т/м.

В этом случае нагрузки расчетные формулы можно получить непосредственно из формул 2-го случая загрузки; полагая при этом $p'=0$, будем иметь следующие формулы:

а) При $z < \frac{1}{2}$:

$$\eta_z = \varphi_0 lz + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) - \frac{(p - \beta g) l^4}{EJk^4} \left(\frac{k^2 z^2}{2} + \cos kz - 1 \right). \quad (61)$$

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{EJk^2} (1 - \cos kz) - \frac{(p - \beta g) l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz); \quad (62)$$

$$M_z = \frac{Q_0 l}{k} \sin kz - \frac{(p - \beta g) l^2}{k^2} (1 - \cos kz); \quad (63)$$

$$Q_z = Q_0 \cos kz - \frac{(p - \beta g) l}{k} \sin kz; \quad (64)$$

б) при $z > \frac{1}{2}$:

$$\eta_z = \varphi_0 lz + \frac{Q_0 l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) + \frac{\beta g l^4}{EJk^4} \left(\frac{k^2 z^2}{2} + \cos kz - 1 \right) -$$

$$- \frac{pl^4}{EJk^4} \left[k^2 \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{8} \right) - \cos k \left(z - \frac{1}{2} \right) + \cos kz \right]; \quad (65)$$

$$\varphi_z = \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{EJk^2} (1 - \cos kz) + \frac{\beta g l^3}{EJk^3} (kz - \sin kz) -$$

$$- \frac{pl^3}{k^2 EJ} \left[\frac{k^2}{2} + \sin k \left(z - \frac{1}{2} \right) - \sin kz \right]; \quad (66)$$

* Здесь:

$$v = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J}{F_{\omega} f^2}}$$

$$M_z = \frac{Q_0 l}{k} \sin kz + \frac{\beta g l^2}{k^2} (1 - \cos kz) - \frac{pl^2}{k^2} \left[\cos k \left(z - \frac{1}{2} \right) - \cos kz \right]; \quad (67)$$

$$Q_z = Q_0 \cos kz + \frac{\beta g l}{k} \sin kz - \frac{pl}{k} \left[\sin kz - \sin k \left(z - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (68)$$

Значения Q_0 , φ_0 и ω непосредственно получим из формул (50), (51) и (53); полагая в них $p' = 0$, будем иметь:

$$Q_0 = -\frac{\beta g l}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} + \frac{pl}{k \sin k} \left(\cos \frac{k}{2} - \cos k \right); \quad (69)$$

$$\varphi_0 = -\frac{\beta g l^2}{2EJk^2} + \frac{3pl^2}{8EJk^2} - \frac{Q_0 l^2}{k^2 EJ}; \quad (69')$$

$$\omega = \frac{pl}{2kH} \left(k - 2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} \right) + \frac{16f}{kl} g. \quad (69'')$$

Величина распора в этом случае будет иметь значение

$$H = \frac{pl^2}{16f} v',$$

где

$$v = \frac{1}{1 + \left[\frac{12}{k^2} \left(\frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} - 1 \right) - 0,1k^2 \right] \frac{1 - v}{v}}.$$

§ 2. Определение прогиба и усилий в балке жесткости при помощи тригонометрических рядов

Довольно просто можно определить прогиб и усилие в балке жесткости при помощи тригонометрических рядов. Для этого выразим прогиб балки жесткости следующим рядом, удовлетворяющим условиям на концах балки жесткости:

$$\eta = \sum_1^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1)$$

Действительно, в случае балки жесткости, свободно опертой на концах, имеем условия: при $x=0$ и $x=l$ — прогиб η и его вторая производная η'' равны нулю.

Этим условиям удовлетворяет ряд (1), что не трудно доказать простой подстановкой в ряд (1) и его вторую производную, вместо x , его граничных значений.

Отдельные слагаемые ряда (1) представляют собой некоторые синусоиды, наибольшие ординаты которых суть коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 и т. д.

Таким образом, прогиб балки жесткости выражается суммой нескольких синусоид.

Для нахождения прогиба балки жесткости нужно определить коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 , ... вычисление которых связано с определением: потенциальной энергии балки жесткости от изгиба.

Потенциальная энергия изгиба, как известно, выражается формулой:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x \eta''^2 dx, \quad (2)$$

где J_x — момент инерции балки жесткости — в общем случае является функцией от x .

Вторая производная ряда (1) будет иметь значение:

$$\eta'' = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_1^{\infty} n^2 a_n^2 \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3)$$

Подставляя в выражение (2) потенциальной энергии, вместо второй производной, ее значение из выражения (3), получим: при $J_x = \text{const}$

$$U = \frac{EJ\pi^4}{2l^4} \int_0^l \left(\sum_1^{\infty} n^2 a_n^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \right)^2 dx. \quad (4)$$

Возведя в квадрат подынтегральное выражение, получим под интегралом сумму, слагаемые которой будут иметь вид:

$$n^4 a_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx$$

и

$$2k^2 n^2 a_k a_n \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Переписывая выражение (4) потенциальной энергии, получим:

$$U = \frac{1}{2l^4} \left[\sum_1^{\infty} n^4 a_n^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \right. \\ \left. + 2 \sum_1^{\infty} k^2 n^2 a_k a_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right]; \quad (5)$$

замечая, что

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l;$$

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

окончательно получим выражение потенциальной энергии в случае постоянного сечения балки жесткости:

$$U = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_1^{\infty} n^4 a_n^2. \quad (6)$$

Уравнение, из которого определим коэффициенты, напишется из следующего условия.

Если упругая система испытывает бесконечно-малые перемещения из положения равновесия, то приращение потенциальной энергии системы равно работе внешних сил на этом перемещении. Это условие математически может быть записано следующим равенством:

$$dU = \delta T. \quad (7)$$

В выражении (7) левая часть представляет собой приращение потенциальной энергии системы, а правая часть работу внешних сил, которая определится следующим образом.

Если коэффициент a_n получит дополнительное приращение da_n вследствие действия на систему внешней нагрузки, то мы, вместо члена $a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, в уравнении (1) получим новое его значение: $(a_n + da_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$; следовательно, дополнительный прогиб балки жесткости будет иметь величину

$$d\eta = da_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Работа внешних сил на этом перемещении в случае равномерно распределенной нагрузки будет иметь выражение

$$\delta T = da_n \int_0^l q_x \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (8)$$

Этому дополнительному приращению коэффициента a_n будет соответствовать приращение потенциальной энергии, которое выразится дифференциалом выражения (6) по переменному коэффициенту a_n , т. е.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial a_n} da_n = \frac{EJ\pi^4 n^4}{2l^3} a_n da_n. \quad (9)$$

Подставляя в выражение (8), вместо q_x , его значение по уравнению (5), получим значение работы внешней нагрузки:

$$\delta T = -da_n \int_0^l [p - \beta g + H_0(1 + \beta)\eta^*] \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Знак минус перед интегралом объясняется тем, что нагрузка действует в направлении, противоположном принятому положительному перемещению.

Заменяя вторую производную в подынтегральном выражении ее значением, окончательно получим значение работы в случае внешней равномерно распределенной нагрузки:

$$\delta T = -da_n \left[\int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} H_0(1 + \beta) a_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx \right]. \quad (10)$$

На основании выражений (7), (9) и (10) напомним уравнение, из которого определим a_n :

$$\frac{EJ\pi^4 n^4}{2l^3} a_n - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} a_n H_0(1 + \beta) \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = - \int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

и введя обозначения

$$\alpha = \frac{H_0 l^3}{\pi^2 EJ}, \quad (11)$$

будем иметь:

$$a_n = - \frac{2l^3 \int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{EJ\pi^4 n^2 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}. \quad (12)$$

Раскрывая интеграл числителя выражения (12), окончательно получим значение коэффициента a_n для случая нагрузки p , равномерно распределенной по всему пролету балки жесткости:

$$a_n = - \frac{2l^4 (p - \beta g) (1 - \cos n\pi)}{EJ\pi^5 n^3 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}. \quad (13)$$

При n четном: $a_n = 0$.

При n нечетном:

$$a_n = - \frac{4l^4 (p - \beta g)}{EJ\pi^5 n^3 (n^2 - \alpha(1 + \beta))}. \quad (13')$$

Если нагрузка p распределена не по всему пролету, а только по части его, то нужно выражение (12) заменить следующим выражением:

$$a_n = - \frac{2l^3 \left| \int_a^b p \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_0^l \beta g \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right|}{EJ\pi^4 n^2 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}. \quad (14)$$

или, раскрывая интегралы в числителе, получим:

$$a_n = - \frac{2l^4 \left[p \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) - \beta g (1 - \cos n\pi) \right]}{EJ\pi^5 n^3 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}. \quad (15)$$

Напишем значения коэффициента a , в зависимости от четности n . При n четном:

$$a_n = - \frac{2l^4 p \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right)}{EJ\pi^5 n^3 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}; \quad (16)$$

при n нечетном:

$$a_n = - \frac{2l^4 \left[p \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) - 2\beta g \right]}{EJ\pi^5 n^3 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}. \quad (17)$$

Имея в виду формулу (14), не трудно перейти от равномерно распределенной нагрузки к случаю сосредоточенной силы, для чего нужно в выражении (14) заменить

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \text{ на } \sin \frac{n\pi c}{l} \text{ и } \int_a^b p dx \text{ на } P;$$

тогда получим выражение коэффициента a_n для случая нагрузки сосредоточенной силой P , приложенной на расстояние c от левой опоры

$$a_n = - \frac{2l^3 P \sin \frac{n\pi c}{l} - 2l^3 \int_0^l \beta g \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{EJ\pi^4 n^2 [n^2 - \alpha(1+\beta)]}; \quad (18)$$

раскрывая интеграл числителя, получим при n четном:

$$a_n = - \frac{2l^3 P \sin \frac{n\pi c}{l}}{EJ\pi^4 n^2 [n^2 - \alpha(1+\beta)]}; \quad (19)$$

при нечетном n :

$$a_n = - \frac{2l^3 P \sin \frac{n\pi c}{l} - \frac{4l^4}{n\pi} \beta g}{EJ\pi^4 n^2 [n^2 - \alpha(1+\beta)]}. \quad (20)$$

На основании вышеизложенного можно заметить, что продольные силы в гибкой арке увеличивают прогиб балки жесткости, и при определенном значении величины продольных сил в гибкой арке прогиб балки жесткости может обратиться в бесконечность; это будет, когда знаменатель в формуле (20) обратится в нуль:

$$n^2 - \alpha(1+\beta) = 0,$$

или когда величина горизонтальной составляющей усилия в гибкой арке будет иметь „критическое“ значение, определяемое формулой:

$$H_g(1+\beta) = \frac{n^2 EJ}{l^2}. \quad (21)$$

§ 3. Балка жесткости переменного сечения

В случае балки жесткости переменного сечения дифференциальное уравнение (6) в конечном виде можно проинтегрировать в весьма ограниченном числе случаев, не имеющих практического значения; поэтому уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ_x \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right] + H_g(1+\beta) \frac{d \eta}{dx^2} = -p + \beta g$$

нужно интегрировать каким-нибудь из приближенных способов, при выборе которого должен быть принят во внимание характер закона изменения момента инерции $J_x = \sigma(x) \cdot J_0$.

Если функция $J_x = J_0 \sigma(x)$ задана графически, то представляется удобным вышеприведенное уравнение решить в конечных разностях, для чего нужно предварительно проинтегрировать данное уравнение почленно два раза; тогда получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$EJ_0 \sigma(x) \frac{d^2 \eta}{dx^2} + H_g(1+\beta) \eta = M^0 - Hy. \quad (1)$$

Заменяя дифференциальное уравнение (1) уравнением в конечных разностях, будем иметь:

$$\frac{\Delta^2 \eta_m}{\Delta x^2} + \frac{H_g(1+\beta)}{EJ_0 \sigma(x)_m} \eta_m = \frac{M_m^0 - Hy_m}{EJ_0 \sigma(x)_m}; \quad (2)$$

замечая, что

$$\Delta^2 \eta_m = \eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1},$$

Выражение потенциальной энергии балки жесткости переменного сечения от изгиба напишем по общеизвестной формуле

$$U = \frac{EJ_0}{2} \int_0^l \sigma(x) \eta'^2 dx; \quad (10)$$

подставляя под интеграл (10), вместо второй производной, ее значение из уравнения (9) и возведя в квадрат под интегралом, получим:

$$U = \frac{EJ_0 \pi^4}{2l^4} \sum_1^{\infty} n^4 a_n^2 \int_0^l \sigma(x) \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \\ + \frac{EJ_0 \pi^4}{2l^4} \cdot 2 \sum_1^{\infty} k^2 n^2 a_k a_n \int_0^l \sigma(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (11)$$

Введя для краткости обозначения:

$$\mu_{nn} = \frac{2}{l} \int_0^l \sigma(x) \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx, \\ \mu_{nk} = \frac{2}{l} \int_0^l \sigma(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (12)$$

будем иметь выражение потенциальной энергии

$$U = \frac{EJ_0 \pi^4}{4l^4} \sum_1^{\infty} n^4 a_n^2 \mu_{nn} + \frac{EJ_0 \pi^4}{2l^4} \sum_1^{\infty} k^2 n^2 a_k a_n \mu_{nk}. \quad (13)$$

Для определения коэффициентов ряда (8) поступим так же, как и в случае балки постоянного сечения, т. е. будем исходить из того же уравнения (7) предыдущего параграфа; только в случае балки жесткости переменного сечения выражение приращения потенциальной энергии будет представлено более сложной формулой, которая имеет следующий вид:

$$dU = \frac{EJ_0 \pi^4}{2l^4} a_n \mu_{nn} da_n + \frac{EJ_0 \pi^4}{2l^4} \sum_1^{\infty} k^2 a_k \mu_{nk} da_n. \quad (14)$$

Этому приращению потенциальной энергии будет соответствовать работа, производимая нагрузкой, приходящейся на балку жесткости при перемещении ее в новое положение равновесия.

Нагрузка, приходящаяся на балку жесткости, согласно ранее полученной формуле, равна

$$p - q = p - \beta g + H_0 (1 + \beta) \eta'';$$

приращение прогиба, соответствующего изменению коэффициента, будет

$$d\eta = da_n \sin \frac{n\pi x}{l};$$

тогда работа нагрузки будет иметь значение

$$\delta T = \int_0^l (p - q) d\eta dx = \\ = -da_n \int_0^l [p - \beta g + H_0 (1 + \beta) \eta''] \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (15)$$

Подставляя значение η'' из выражения (9), получим

$$\delta T = -da_n \int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \\ + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} H_g (1 + \beta) a_n da_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (15')$$

Замечая, что

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l,$$

окончательно будем иметь следующее выражение работы нагрузки:

$$\delta T = -da_n \int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{n^2 \pi^2}{2l} H_g (1 + \beta) a_n da_n. \quad (16)$$

Знак минус в выражении (15) перед интегралом взят потому, что нагрузка действует противоположно направлению, принятому для положительного перемещения.

Приравнявая выражения (14) и (16), получим уравнение, откуда определим неизвестные коэффициенты:

$$\left[\frac{EJ_0 n^4 \pi^4}{2l^3} \mu_{nn} - \frac{n^2 \pi^2}{2l} H_g (1 + \beta) \right] a_n + \frac{EJ_0 n^2 \pi^2}{2l^3} \sum_1^{\infty} k^2 a_k \mu_{nk} = \\ = \int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Разделив левую и правую часть полученного равенства на выражение стоящее перед $\sum$, и обозначив:

$$\alpha = \frac{H_g l^2}{EJ_0 \pi^2};$$

$$N_n = n^2 \mu_{nn} - \alpha (1 + \beta); \quad (17)$$

$$a'_n = - \frac{2l^3}{n^2 \pi^4 EJ_0} \int_0^l (p - \beta g) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

получим систему уравнений, которую запишем так:

$$N_n a_n + \sum k^2 \mu_{nk} a_k = a'_n. \quad (18)$$

Ограничиваясь тремя членами ряда (8), будем иметь систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} N_1 a_1 + 2^2 \mu_{12} a_2 + 3^2 \mu_{13} a_3 &= a'_1; \\ \mu_{21} a_1 + N_2 a_2 + 3^2 \mu_{23} a_3 &= a'_2; \\ \mu_{31} a_1 + 2^2 \mu_{32} a_2 + N_3 a_3 &= a'_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Решая систему (19), получим значения коэффициентов ряда (8). В виду того, что некоторые из коэффициентов при определенных значениях n и k обращаются в нуль, система (19) может быть значительно упрощена.

Правая часть уравнений (19), зависящая от нагрузки, определится в каждом отдельном случае по уравнению (17). Чтобы иметь a'_n для некоторых видов нагрузки, рассмотрим несколько случаев загрузения балки жесткости.

1. Нагрузка равномерно распределена по всему пролету интенсивностью p ; тогда значение a'_n будет:

$$a'_n = - \frac{2l^4 (p - \beta g) (1 - \cos n\pi)}{n^3 \pi^5 EJ_0}; \quad (20)$$

при n четном

$$a'_n = 0;$$

при n нечетном:

$$a'_n = - \frac{4l^4 (p - \beta g)}{n^3 \pi^5 EJ_0}. \quad (21)$$

2. Нагрузка равномерно распределена на части пролета от a до b . В этом случае a_n будет равно:

$$a'_n = - \frac{2l^4}{n^3 \pi^5 EJ_0} \left[p \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) - \beta g (1 - \cos n\pi) \right]; \quad (22)$$

при n четном:

$$a'_n = - \frac{2l^4 p}{n^3 \pi^5 EJ} \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right); \quad (23)$$

при n нечетном:

$$a'_n = - \frac{2l^4}{n^3 \pi^5 EJ_0} \left[p \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) - 2\beta g \right]. \quad (24)$$

3. Нагрузка сосредоточенной силой на расстоянии c от левой опоры. В этом случае нагрузки a'_n нужно определять по нижеуказанным формулам.

При n четном:

$$a'_n = - \frac{2l^3 P \sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 \pi^4 EJ_0}; \quad (25)$$

при n нечетном:

$$a'_n = - \frac{2l^3 P \sin \frac{n\pi c}{l} - \frac{4l^4}{n\pi} \beta g}{n^2 \pi^4 EJ_0}. \quad (26)$$

В заключение покажем, как вычислить значения μ_{nn} и μ_{nk} в каждом отдельном случае функции $\sigma(x)$.

Так как функция $\sigma(x)$, представляющая закон изменения момента инерции балки жесткости, может быть для каждого участка балки жесткости разной, то следует выражения (12) заменить следующими:

$$\mu_{nn} = \frac{2}{l} \sum_a^b \int_a^b \sigma(x) \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx; \quad (27)$$

$$\mu_{nk} = \frac{2}{l} \sum_a^b \int_a^b \sigma(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Для краткости рассмотрим важный случай, который может встретиться на практике: параболический закон изменения момента инерции балки жесткости. Желательно функцию подобрать так, чтобы она следовала закону изменения максимальных моментов от временной нагрузки; этому условию будет приблизительно соответствовать функция $\sigma(x)$, состоящая

из двух ветвей, которая будет иметь следующее выражение в каждой половине пролета балки:

$$\sigma_1(x) = 1 + m \frac{2x}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \text{ — в первой половине,} \quad (28)$$

$$\sigma_2(x) = 1 + 2m \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{2x}{l} - 1\right) \text{ — во второй половине пролета.}$$

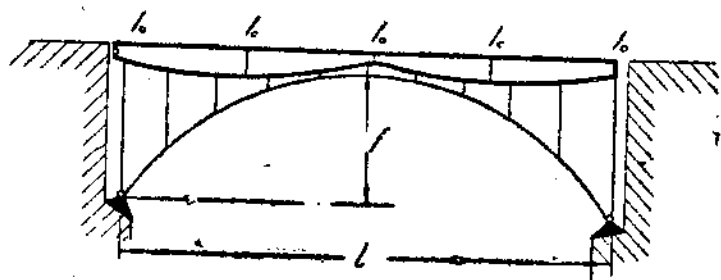
Очертание балки жесткости в этом случае будет иметь вид, показанный на фиг. 3.

Здесь приняты обозначения:

J_0 — момент инерции сечения балки жесткости посередине и на концах пролета,

J_c — момент инерции сечения балки жесткости в $1/4$ и $3/4$ пролета,

$$m = \frac{4(J_c - J_0)}{J_0}. \quad (29)$$



Фиг. 3.

Подставляя в выражения (27) вместо функции их значения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mu_{nn} = & \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + m \frac{2x}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \right] \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \\ & + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l \left[1 + 2m \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{2x}{l} - 1\right) \right] \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mu_{nk} = & \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + m \frac{2x}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \\ & + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l \left[1 + 2m \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{2x}{l} - 1\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (30')$$

После интегрирования по частям в указанных пределах получим:

$$\begin{aligned} \mu_{nn} = & 1 + \frac{m}{6} + \frac{m}{n^2\pi^2} (1 + \cos n\pi); \\ \mu_{nk} = & \frac{m}{\pi^2} \left[\frac{\cos(k+n)\frac{\pi}{2} + 1}{(k+n)^2} - \frac{\cos(k-n)\frac{\pi}{2} + 1}{(k-n)^2} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Формулы для определения распора гибкой арки

В виду того, что маленькая, почти незаметная ошибка при определении распора H чувствительно отражается на величине изгибающих моментов в сечениях балки жесткости, необходимо распор определить по более точным формулам.

В § 1 мы получили весьма точную формулу, которую необходимо принять в данном случае для определения величины H .

Переписывая формулу (27) § 1, имеем:

$$\frac{H \left(H_g + \frac{1}{2} H \right) L}{EF_a} = - \int_0^l \left[g + \frac{1}{2} \beta g - \frac{1}{2} H_g (1 + \beta) \eta'' \right] \eta dx;$$

преобразовывая правую часть, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^l g \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \eta dx - \frac{1}{2} H_g (1 + \beta) \int_0^l \eta'' \eta dx = \\ & = g \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \sum_1^{\infty} a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{2} H_g (1 + \beta) \frac{\pi^2}{l^2} \sum_1^{\infty} n^2 a_n^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \\ & + \frac{1}{2} H_g (1 + \beta) \frac{\pi^2}{l^2} \sum_1^{\infty} n^2 a_n a_k \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ & = g \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \frac{2l}{\pi} \left(a_1 + \frac{1}{3} a_3 + \frac{1}{5} a_5 \dots \right) + \\ & + \frac{\pi^2}{4l} H_g (1 + \beta) (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a_3^2 + \dots). \end{aligned} \quad (32)$$

Приравняв полученную правую часть левой и разделив на $H_g + \frac{1}{2} H$, будем иметь:

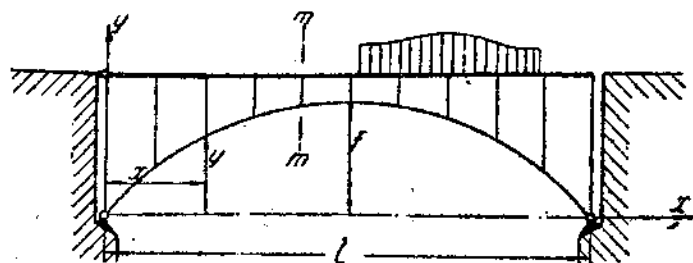
$$\begin{aligned} - \frac{HL}{EF_a} &= \frac{16f}{\pi l} \left(a_1 + \frac{1}{3} a_3 + \frac{1}{5} a_5 \dots \right) + \\ &+ \frac{\pi^2 (1 + \beta)}{4l \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right)} (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a_3^2 + \dots). \end{aligned} \quad (33)$$

§ 4. Влияние горизонтальных перемещений на величину усилий в балке жесткости

До сих пор мы рассматривали только влияние вертикальных перемещений на величину усилий в гибкой арке с балкой жесткости, а горизонтальных перемещений не принимали во внимание. Это будет справедливо для пологих арок, где горизонтальные перемещения элементов арки сравнительно с вертикальными настолько малы, что первыми можно пренебречь.

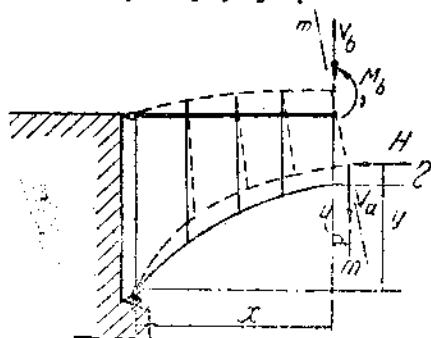
Во многих случаях подъемистых арок горизонтальные перемещения элементов арки могут вызвать в сечениях балки добавочные изгибающие моменты, величина которых может в той или иной степени изменить величину расчетных моментов, полученных по приближенным расчетам.

Чтобы оценить влияние горизонтальных перемещений на расчетные усилия, полученные приближенным расчетом, рассмотрим нижеследующее.



Фиг. 4а.

Гибкая арка с балкой жесткости вследствие действия нагрузки примет новую форму равновесия, и деформируемая система будет иметь совершенно другие усилия в элементах системы, нежели мы получаем по приближенным расчетам, не учитывающим деформаций. Это происходит вследствие того, что при деформации изменяется местоположение нагрузки; благодаря этому изменяется величина опорных реакций и плечо сил, а следовательно, будет изменяться и изгибающий момент.



Фиг. 4б.

В случае, если балка жесткости устроена так, что она не имеет соприкосновения с аркой и одной неподвижной опорой, тогда можно считать, что горизонтальные перемещения центров тя-

жести сечений балки равны нулю, а вертикальные перемещения (прогибы) равны вертикальным перемещениям арки (пренебрегая при этом укорочениями стоек).

Обозначим составляющие деформации на оси координат через:

η — вертикальные перемещения (прогиб) балки и арки;

u — горизонтальные перемещения центров тяжести элементов арки; положительное направление обоих перемещений совпадает с положительным направлением координатных осей;

M_b — изгибающий момент в сечениях балки жесткости;

V_a и V_b — вертикальные усилия, действующие в сечениях арки и балки жесткости;

M^0 — изгибающий момент простой балки.

Выражая изгибающий момент в сечениях балки жесткости в функции действующих сил на отсеченную часть (см. фиг. 4а и 4б), будем иметь:

$$M_b = M^0 - H(y + \eta) + V_a u. \quad (1)$$

В нашем случае (гибкая арка) вертикальная составляющая усилия в элементах арки будет

$$V_a = H \frac{d(y + \eta)}{dx}. \quad (2)$$

Подставляя вместо V_a ее значение из выражения (2), получим:

$$M_b = M^0 - Hy - H\eta + Hy'u + H\eta'u. \quad (3)$$

Пренебрегая последним членом выражения (3), как малой величиной второго порядка по сравнению с остальными членами, будем иметь:

$$M_b = M^0 - Hy - H\eta + Hy'u. \quad (4)$$

Дифференцируя выражение (4) два раза, получим:

$$M_b' = M'' - Hy'' - H\eta'' + Hy'''u + 2H\eta'y'' + Hy'u'' \quad (5)$$

Принимая во внимание общеизвестные соотношения, а в нашем случае также очертания гибкой арки по параболе, имеем:

$$\begin{aligned} M_b' &= EJ\eta^{IV}; \\ M'' &= -p; \\ y'' &= -\frac{8f}{l^2}; \\ y''' &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя в уравнение (5) значения из выражений (6), получим дифференциальное уравнение упругой линии балки жесткости:

$$EJ''\eta^{IV} + H\eta'' + \frac{16f}{l^2}Hu' - Hy'u'' = -p + H\frac{8f}{l^2} \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение (7) включает в себе два неизвестных перемещения, для определения которых необходимо составить еще одно уравнение.

Это уравнение найдем из рассмотрения следующей зависимости:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (8)$$

Варьируя выражение (8), получим:

$$ds \cdot \delta ds = dx \delta dx + dy \delta dy,$$

откуда:

$$\delta dx = \delta ds \frac{ds}{dx} - \delta dy \frac{dy}{dx};$$

замечая, что

$$\begin{aligned} \delta dx &= d\delta x = du, \\ \delta dy &= d\delta y = d\eta \end{aligned}$$

означают дифференциалы перемещений и что

$$\delta ds = - \left| \frac{Hds}{EF_a} + \frac{1}{2} \eta'^2 ds \right|$$

представляет разницу между длиной дуги элемента арки до и после деформации, будем иметь:

$$du = - \left| \frac{Hds}{EF_a} + \frac{1}{2} \eta'^2 ds \right| \frac{ds}{dx} - d\eta y'. \quad (9)$$

Окончательная зависимость между перемещениями будет:

$$u' = - \frac{H}{EF_a} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \eta'^2 \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 - \eta' y'; \quad (10)$$

пренебрегая средним членом правой части выражения (10), как малой величиной второго порядка, получим:

$$u' = - \frac{H}{EF_a} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 - \eta' y'; \quad (11)$$

заменяя в выражении (11) $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ на $(1+y'^2)$, будем иметь:

$$u' = -\frac{H}{EF_a}(1+y'^2) - \eta'y'. \quad (11')$$

Вторая производная равенства (11') будет:

$$u'' = +\frac{16fH}{l^2 EF_a} y' + \frac{8f}{l^2} \eta' - y'\eta''; \quad (12)$$

здесь вместо y'' подставлено ее значение из выражения (6).

Подставляя в уравнение (7), вместо производных u' и u'' , их значения из (11') и (12), получим дифференциальное уравнение упругой линии балки жесткости:

$$EJ\eta^{IV} + (1+y'^2)\eta'' - \frac{24f}{l^2} Hy'\eta' = \frac{H^2 \cdot 16f}{EF_a l^2} (1+2y'^2) - p + H \frac{8f}{l^2}. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) будем искать в виде тригонометрического ряда (1) § 2, удовлетворяющего условиям на концах балки жесткости.

$$\eta = \sum_1^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1) \text{ § 2}$$

Дифференцируя ряд (1) § 2, получим значение производных, входящих в дифференциальное уравнение (13):

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{\pi}{l} \sum_1^{\infty} n a_n \cos \frac{n\pi x}{l}; \\ \eta'' &= -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_1^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \\ \eta^{IV} &= \frac{\pi^4}{l^4} \sum_1^{\infty} n^4 a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя значение производных из (14) в уравнение (13), получим:

$$\begin{aligned} \frac{EJ\pi^4}{l^4} \sum_1^{\infty} n^4 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} - H \frac{\pi^2}{l^2} (1+y'^2) \sum_1^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} - \\ - \frac{24f}{l^2} H \pi y' \sum_1^{\infty} n a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{H^2 \cdot 16f}{EF_a l^2} (1+2y'^2) - p + H \frac{8f}{l^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножая уравнение (15) на $\sin \frac{k\pi x}{l} dx$ и интегрируя в пределах от 0 до l , будем иметь:

$$\frac{EJ\pi^4}{l^4} \sum_1^{\infty} n^4 a_n \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx - H \frac{\pi^2}{l^2} \sum_1^{\infty} n^2 a_n \int_0^l (1+y'^2) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{24fH\pi}{l^3} \sum_1^{\infty} n a_n \int_0^l y' \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{EJk^4\pi^4}{l^4} a_k \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx - \\
& -\frac{H\pi^2 k^2}{l^2} a_k \int_0^l (1+y'^2) \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx - \frac{24f}{l^3} k\pi H a_k \int_0^l y' \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\
& = \frac{H^2 \cdot 16f}{EF_a l^2} \int_0^l (1+2y'^2) \sin \frac{k\pi x}{l} dx - \int_0^l \left(p - H \frac{8f}{l^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (16)
\end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, получим следующие значения интегралов выражения (16):

$$\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l;$$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0;$$

$$\int_0^l (1+y'^2) \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l \left[1 + \frac{f^2}{l^2} \left(\frac{16}{3} - \frac{32}{k^2 \pi^2} \right) \right];$$

$$\int_0^l y' \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2f}{k\pi};$$

$$\mu_{kn} = \int_0^l (1+y'^2) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx =$$

$$\frac{32f^2}{\pi^2 l} \left[\frac{\cos(k+n)\pi + 1}{(k+n)^2} - \frac{\cos(k-n)\pi + 1}{(k-n)^2} \right];$$

$$\mu'_{kn} = \int_0^l y' \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2f}{\pi} \left[\frac{\cos(k+n)\pi + 1}{k+n} + \frac{\cos(k-n)\pi + 1}{k-n} \right];$$

$$a'_k = \frac{16fH^2}{EF_a l^2} \int_0^l (1+2y'^2) \sin \frac{k\pi x}{l} dx - \int_0^l \left(p - \frac{H \cdot 8f}{l^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{16H^2 f}{EF_a l} (1 - \cos n\pi) \left(1 + \frac{32f^2}{l^2} - \frac{256f^2}{k^2 \pi^2 l^2} \right) - \int_0^l \left(p - H \frac{8f}{l^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Подставляя в уравнение (16) вместо интегралов введенные обозначения μ_{kk} , μ_{kn} и разделив на $\frac{EJk^4\pi^4}{2l^3}$, будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\left[1 - \frac{Hl^2}{k^2 \pi^2 EJ} \left(1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2} \right) \right] a_k - \frac{2Hl}{E/\pi^2 k^4} \sum_1^{\infty} a_n \left(n^2 \mu_{kn} + \frac{24f}{l} \frac{n}{\pi} \mu'_{kn} \right) = \\
= \frac{2l^3 a'_k}{k^4 \pi^4 EJ}, \quad (18)
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_k = \frac{16}{3} + \frac{64}{k^2 \pi^2}. \quad (19)$$

Уравнение (18) представляет собой систему уравнений, из которых можно определить коэффициенты a_n ; число неизвестных коэффициентов, требующих определения, зависит от того, сколько членов ряда нужно взять для достижения необходимой точности расчета.

Так как ряд 1-й § 2 является быстро сходящимся, то практически достаточно ограничиться тремя-четырьмя членами ряда, а следовательно, нужно решить систему из трех-четырех уравнений.

Введя для краткости обозначения;

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{Hl^2}{\pi^2 EJ}; \\ A_k &= 1 - \frac{f^2}{k^2} \left(1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2} \right); \\ A_{kn} &= -\frac{2x}{k^4 l} \left(n^3 \mu_{kn} + \frac{24fn}{l\pi} \mu'_{kn} \right); \\ N_k &= \frac{2l^3 a'_k}{k^4 \pi^4 EJ} \end{aligned} \quad (20)$$

и, подставляя введенные обозначения в (18), получим:

$$A_k a_k + \sum_1^\infty A_{kn} a_n = N_k. \quad (21)$$

Если ограничиться тремя членами ряда, то будем иметь уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} A_1 a_1 + A_{12} a_2 + A_{13} a_3 &= N_1; \\ A_{21} a_1 + A_2 a_2 + A_{23} a_3 &= N_2; \\ A_{31} a_1 + A_{32} a_2 + A_3 a_3 &= N_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение системы уравнений (21) упрощается тем, что коэффициент A_{kn} обратится в нуль при k и n разной четности.

Напишем выражения μ_{kn} и μ'_{kn} в зависимости от четности k и n . При k и n разной четности:

$$\begin{aligned} \mu_{kn} &= \frac{32f^2}{\pi^2 l} \left[\frac{\cos(k+n)\pi + 1}{(k+n)^2} - \frac{\cos(k-n)\pi + 1}{(k-n)^2} \right] = 0; \\ \mu'_{kn} &= \frac{2f}{\pi} \left[\frac{\cos(k+n)\pi + 1}{k+n} + \frac{\cos(k-n)\pi + 1}{k-n} \right] = 0; \end{aligned}$$

при k и n одинаковой четности:

$$\begin{aligned} \mu_{kn} &= -\frac{256f^2 kn}{\pi^2 l (k^2 - n^2)^2}; \\ \mu'_{kn} &= \frac{8fk}{\pi (k^2 - n^2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя полученные значения μ_{kn} и μ'_{kn} в выражение для A_{kn} из уравнения (20), получим при n и k разной четности:

$$A_{kn} = 0;$$

при n и k одинаковой четности:

$$A_{kn} = \frac{128 \alpha n f^2}{k^2 \pi^2 (k^2 - n^2)^2 l^2} (7n^2 - 3k^2). \quad (24)$$

Определение величины распора и в этом случае можно произвести по формуле:

$$-\frac{HL}{EF_u} = \frac{16f}{\pi l} \left(a_1 + \frac{1}{3} a_3 + \frac{1}{5} a_5 + \dots \right) + \frac{\pi^2}{2l} (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots). \quad (25)$$

§ 5. Вопросы устойчивости гибкой арки с балкой жесткости

Выше мы подчеркнули, что при некоторой величине распора гибкая арка может потерять устойчивую форму равновесия; при этом нами дана весьма приближенная формула, выражающая величину критического распора.

Более точное решение устойчивости гибкой арки можно получить из уравнения (13), если в нем приравняем правую часть нулю; тогда получим:

$$EJ \eta^{IV} + H(1 + y'^2) \eta'' - \frac{24f}{l^2} H y' \eta' = 0; \quad (26)$$

уравнение (26) представляет собой дифференциальное уравнение кривой неустойчивого равновесия гибкой арки.

Так как уравнение (26) отличается от уравнения (13) только правой частью, то представляется возможным использовать предыдущее решение уравнения (13), которое свелось к определению коэффициентов ряда из системы (21).

Если приравнять нулю правую часть системы (21), то получим систему однородных уравнений:

$$A_k a_k + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} a_n = 0, \quad (27)$$

которая будет решением дифференциального уравнения (26). Коэффициенты A_k и A_{kn} имеют прежние значения по формулам (20):

$$A_k = 1 - \frac{\alpha}{k^2} \left(1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2} \right);$$

$$A_{kn} = \frac{128 \alpha n f^2 (7n^2 - 3k^2)}{k^2 \pi^2 (k^2 - n^2)^2 l^2}.$$

В виду того, что коэффициент $A_{kn} = 0$ при n и k разной четности, то форма неустойчивого равновесия гибкой арки возможна по одному из следующих тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots; \\ \eta_2 &= a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{l} + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнение для определения критического распора получим, если детерминант, составленный из коэффициентов A_{kn} и A_k системы (27), приравняем нулю.

Для определения критического распора достаточно ограничиться двумя членами ряда (28), который в интересах обобщения задачи, запишем так:

$$\eta_i = a_k \sin \frac{k\pi x}{l} + a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \quad (29)$$

Здесь k и n — числа одинаковой четности; тогда условие для определения критического распора гибкой арки выражается так:

$$A_k A_n - A_{kn} A_{nk} = 0. \quad (30)$$

Подставляя, вместо A_k , A_n , A_{kn} и A_{nk} их значения из равенства (20) и (24), получим:

$$\left[1 - \frac{\alpha}{k^2} \left(1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2} \right) \right] \left[1 - \frac{\alpha}{n^2} \left(1 + \gamma_n \frac{f^2}{l^2} \right) \right] - \frac{128^2 \alpha^2 (7n^2 - 3k^2)(7k^2 - 3n^2)}{k^2 n^2 \pi^4 (k^2 - n^2)^4} \frac{f^4}{l^4} = 0. \quad (31)$$

После некоторых преобразований выражения (31) получим квадратное уравнение относительно α , которое запишем так:

$$\left[\left(1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2} \right) \left(1 + \gamma_n \frac{f^2}{l^2} \right) - \frac{128^2 (7n^2 - 3k^2)(7k^2 - 3n^2) f^4}{\pi^4 (k^2 - n^2)^4 l^4} \right] \alpha^2 - \left[k^2 \left(1 + \gamma_n \frac{f^2}{l^2} \right) + n^2 \left(1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2} \right) \right] \alpha + k^2 n^2 = 0. \quad (32)$$

Решив уравнение (32), получим значения корней

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots$$

Наименьший из полученных корней будет соответствовать наименьшему значению критической силы.

Наименьший корень будет соответствовать значениям $k = 1$ и $n = 3$; при этом кривая неустойчивого равновесия будет состоять из одной полуволны, а это невозможно, в виду неизменяемости расстояния между опорными точками арки и сравнительно незначительного укорочения оси.

Второй наименьший корень уравнения (32) получим, если предположить, что кривая неустойчивого равновесия будет задана уравнением

$$\eta = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_4 \sin \frac{4\pi x}{l}, \quad (33)$$

т. е. нужно положить в уравнение (32) $k = 2$ и $n = 4$; тогда получим:

$$\left(1 + 12,695 \frac{f^2}{l^2} + 56,27 \frac{f^4}{l^4} \right) \alpha^2 - \left(20 + 134,2 \frac{f^2}{l^2} \right) \alpha + 64 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{10 + 67,1 \frac{f^2}{l^2} \pm \sqrt{36 + 529,87 \frac{f^2}{l^2} + 910 \frac{f^4}{l^4}}}{1 + 12,695 \frac{f^2}{l^2} + 56,27 \frac{f^4}{l^4}}. \quad (34)$$

Из полученных двух корней уравнения (34) нужно взять наименьший; тогда

$$H_k = \alpha \frac{EJ\pi^2}{l^2}. \quad (35)$$

Ограничиваясь одним членом выражения (33), получим следующее значение критического распора:

$$H_k = \frac{k^2}{1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2}} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \Bigg|_{k=2} = \frac{39,48}{1 + 7 \frac{f^2}{l^2}} \frac{EJ}{l^2}. \quad (36)$$

Формулу (36) можно преобразовать следующим образом:

$$H_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\beta l)^2}, \quad (37)$$

где

$$\beta l = \frac{1}{k} l \sqrt{1 + \gamma_k \frac{f^2}{l^2}}$$

так называемая приведенная длина.

При $k = 2$

$$\beta l = 0,5l \sqrt{1 + 7 \frac{f^2}{l^2}}. \quad (38)$$

На основании изложенного можно заключить следующее: устойчивость гибкой арки равна устойчивости прямого стержня с шарнирным закреплением концов, имеющего момент инерции, равный моменту инерции балки жесткости, и расчетную длину, определяемую по формуле (38).

При определении коэффициента, приведенной длины β в каждом отдельном случае следует пользоваться графиком, изображенным на фиг. 5.

При подборе сечений гибкой арки нужно вводить коэффициент φ уменьшения допускаемых напряжений.

Коэффициент φ должен быть определен в зависимости от гибкости арки, определяемой по формуле

$$\lambda = \frac{\beta l}{\rho},$$

где ρ — условный радиус инерции, определяемый из формулы

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{F_a}}.$$

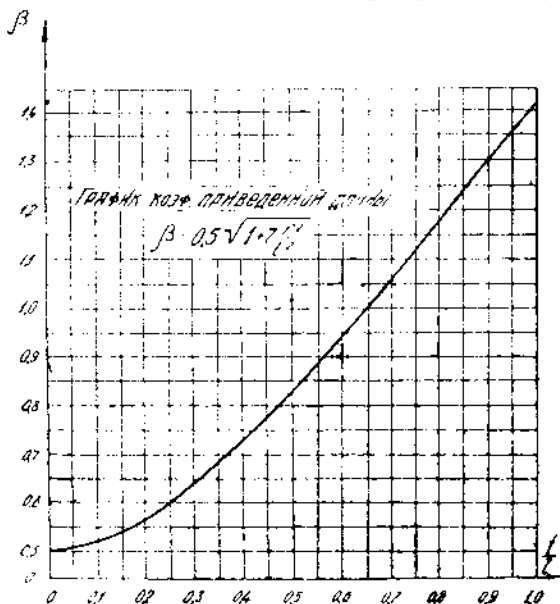
Здесь F_a — площадь сечения арки:

$$J = J_b + J_a \cos \varphi_{cp} \text{ или } J = J_b$$

представляет собой момент инерции балки жесткости или же сумму моментов инерции балки и арки, в зависимости от соотношения момента инерции арки к моменту инерции балки; если это соотношение малая величина, то величиной момента инерции арки при определении ρ можно пренебречь, и тогда $J = J_b$.

Численные примеры

Пример I. В качестве численного примера определим величину изгибающего момента в четверти пролета, при следующих данных: нагрузка $p = 5 \text{ т/м}$ и равномерно распределена на половине пролета; $l = 100 \text{ м}$; $f = 10 \text{ м}$; $J = 0,156 \text{ м}^4$; $F_a = 0,1 \text{ м}^2$; $E = 2,10^7 \text{ т/м}^2$; распор от постоянной нагрузки



$$H_g = \frac{3 \cdot 100^2}{8 \cdot 10} = 375 \text{ м};$$

$$L = l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) = 105,33 \text{ м};$$

$$v = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{0,156}{100 \cdot 0,1}} = 0,97075.$$

По приближенным расчетам найдем:

$$H = \frac{pl^2}{16f} v = \frac{5 \cdot 100^2}{16 \cdot 10} \cdot 0,97075 = 303,62 \text{ м}.$$

Изгибающий момент в четверти пролета

$$M = \frac{pl^2}{15} - H \cdot 0,75 f = 847,85 \text{ тм}.$$

Расчет при помощи точных формул. Значения величин, входящих в вышеполученные формулы:

$$k^2 = \frac{(H_g + H) l^2}{EI} = \frac{678,62 \cdot 100^2}{2 \cdot 10^7 \cdot 0,156} = 2,175;$$

$$k = 1,471; \quad \operatorname{tg} \frac{k}{2} = 0,90396; \quad \cos \frac{k}{2} = 0,74182;$$

$$\sin \frac{k}{4} = 0,37092; \quad \cos \frac{k}{4} = 0,92866; \quad \sin k = 0,99492;$$

$$\cos k = 0,10063; \quad \frac{1-v}{v} = \frac{1-0,97075}{0,97075} = 0,02856;$$

$$v' = \frac{1}{1 + \left[\frac{12}{k^2} \left(\frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} - 1 \right) - 0,1 k^2 \right] \frac{1-v}{v}};$$

$$v' = \frac{1}{1 + \left[\frac{12}{2,175} \left(\frac{2}{1,471} \cdot 0,90396 - 1 \right) (-0,1 \cdot 2,175) \right] 0,02866} = 0,97031.$$

Величину распора определим по формуле

$$H = \frac{pl^2}{16f} v' = \frac{5 \cdot 100^2}{16 \cdot 10} \cdot 0,97031 = 303,22 \text{ м}.$$

Так как величина распора мало отличается от величины распора, принятой при вычислении k , то повторного вычисления распора не требуется.

Изгибающий момент в четверти пролета определим по формуле (63) § 1;

при $z = \frac{1}{4}$ и $\lambda_1 = \frac{1}{2}$:

$$M = \frac{Q_0 l}{k} \sin \frac{k}{2} - \frac{(p - 3g) l^2}{k^2} \left(1 - \cos \frac{k}{2} \right).$$

Заменяя βg на $H \frac{8f}{l^2}$ и умножая выражение для Q_0 на $\frac{l}{Hk}$, получим:

$$Q_0 \frac{l}{Hk} = -\frac{8f}{k^2} \operatorname{tg} \frac{k}{2} + \frac{pl^2}{Hk^3} \frac{(\cos \frac{k}{2} - \cos k)}{\sin k} =$$

$$= \frac{80}{2,175} 0,90396 + \frac{164,84 \cdot 0,64119}{2,175 \cdot 0,99492} = +15,606.$$

Величина момента изгиба в четверти пролета

$$M = 303,22 \left(15,605 \cdot 0,37092 - \frac{100^2 (0,016484 - 0,008) 0,07134}{2,175} \right) =$$

$$= 909,69 \text{ тм.}$$

Разница сравнительно с приближенным расчетом:

$$\frac{909,69 - 847,85}{909,69} = 6,8\%.$$

Пример. II. Посмотрим на конкретном численном примере как пользоваться полученными формулами при помощи тригонометрических рядов.

1. Балка жесткости постоянного сечения. В этом случае повторим вычисления предыдущего численного примера; данные те же: $l = 100 \text{ м}$; $f = 10 \text{ м}$; $L = 105,33 \text{ м}$. Нагрузка равномерно распределена на половине пролета интенсивностью 5 т/м ; $H_g = 375 \text{ т}$; $E = 2,10^5 \text{ т/м}^2$; $F_a = 0,1 \text{ м}^2$; $J = 0,156 \text{ м}^4$.

Вычисления произведем в следующем порядке:

Распор по приближенной формуле $H = 303,62 \text{ т}$;

$$\beta = \frac{H}{H_g} = \frac{303,62}{375} = 0,8096;$$

$$\alpha = \frac{H_g l^2}{\pi^2 EJ} = \frac{375 \cdot 100^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,156 \pi^2} = 0,11349;$$

$$\alpha(1 + \beta) = 0,11349 \cdot 1,8096 = 0,20537.$$

Коэффициенты ряда (1) определим по формуле (15) § 2:

$$a_n = -\frac{2l^4 \left[p \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) \right] - \beta g (1 - \cos n\pi)}{EJ\pi^3 n^3 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]}.$$

В нашем случае $a = 0$ и $b = \frac{1}{2}l$, и формула перепишется так:

$$a_n = -\frac{2l^4 \left[p \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) - \beta g (1 - \cos n\pi) \right]}{EJ\pi^3 n^3 [n^2 - \alpha(1 + \beta)]};$$

$$a_1 = -\frac{2l^4 (p - 2\beta g)}{EJ \cdot \pi^3 0,79463} = -1,2584 (p - 2\beta g) \frac{2l^4}{EJ\pi^3};$$

$$a_2 = - \frac{2l^4}{EJ\pi^5} \cdot \frac{2p}{2^3(2^3 - 0,20537)} = - \frac{pl^4}{2EJ\pi^5 \cdot 3,79463} =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^8}{2 \cdot 2,10^7 \pi^5 \cdot 0,156 \cdot 3,79463} = -0,06900;$$

$$a_3 = - \frac{2l^4}{EJ\pi^5} \cdot \frac{(p - 2\beta g)}{3^3(3^3 - 0,20537)} =$$

$$= -0,00421 \frac{2l^4}{EJ\pi^5} (p - 2\beta g).$$

Больше коэффициентов не вычисляем, так как они уже выходят за пределы точности расчета.

Величину распора определим по формуле (33) § 3

$$-\frac{HL}{EF_a} = \frac{16f}{\pi l} \left(a_1 + \frac{1}{3} a_3 \right) + \frac{\pi^2(1+\beta)}{4l \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right)} (a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2);$$

$$\frac{HL}{EF_a} = \frac{303,62 \cdot 105,33}{2,10^7 \cdot 0,1} = 0,01594;$$

$$\frac{16f}{\pi l} \left(a_1 + \frac{1}{3} a_3 \right) = - \frac{16 \cdot 10}{\pi \cdot 100} (1,2584 + 0,0014) \cdot (p - 2\beta g) \cdot \frac{2l^4}{EJ\pi^5} =$$

$$= -0,64161 (p - 2\beta g) \frac{2l^4}{\pi^5 EJ};$$

$$\frac{\pi^2(1+\beta)}{4l \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right)} (a_1^2 + 4a_2^2) =$$

$$= \frac{\pi^2 \cdot 1,8096}{4 \cdot 100 \cdot 1,4048} \cdot 1,2584^2 \left[(p - 2\beta g) \frac{2l^4}{\pi^5 EJ} \right]^2 +$$

$$+ 4 \cdot 0,069^2 = 0,05040 \left[(p - 2\beta g) \frac{2l^4}{\pi^5 EJ} \right]^2 + 0,000604.$$

Подставляя вычисленные значения в уравнение, получим квадратное уравнение, из которого определим величину распора:

$$\left[\frac{2l^4}{\pi^5 EJ} (p - 2\beta g) \right]^2 504 - 6416,1 \left[\frac{2l^4}{EJ\pi^5} (p - 2\beta g) \right] + 165,44 = 0;$$

$$\frac{2l^4}{EJ\pi^5} (p - 2\beta g) = \frac{3208,05 - 3208,05^2 - 504 \cdot 165,44}{504} = 0,025853;$$

$$p - 2\beta g = 0,025853 \cdot \frac{EJ\pi^5}{2l^4} = 0,12342;$$

отсюда

$$H = \frac{pl^3}{16f} - \frac{1234,2}{16} = 304,77 \text{ м.}$$

Распор мало отличается от той же величины, полученной приближенным расчетом; поэтому перерасчет производить не нужно.

Величину изгибающего момента определим по формуле:

$$M = \frac{2l^3(p - 2\beta g)}{\pi^3 [1 - \alpha(1 + \beta)]} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{4pl^3 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi^3 \cdot 2 [(2^2 - \alpha(1 + \beta))]} +$$

$$+ \frac{2l^3(p - 2\beta g)}{3 \cdot \pi^3 [3^2 - \alpha(1 + \beta)]} \sin \frac{3\pi}{4} + \frac{4pl^3 \sin \frac{6\pi}{4}}{\pi^3 \cdot 6 \cdot [6^2 - \alpha(1 + \beta)]}.$$

$$M = \frac{1,2584 \cdot 0,707 \cdot 1234,2 \cdot 2^3}{\pi^3} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 100^3}{\pi^3 \cdot 3,79463} +$$

$$\frac{2 \cdot 1234,2 \cdot 0,707}{3 \cdot \pi^3 \cdot 8,79463} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 100^3}{6\pi^3 \cdot 35,79463} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 100^3}{10\pi^3 \cdot 99,7963} = 900 \text{ т.м.}$$

Разница сравнительно с приближенным расчетом:

$$100 \cdot \frac{900 - 847,85}{900} = \frac{52,15 \cdot 100}{900} = 5,8\%.$$

Днепропетровск.
Май 1935 г.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОЙ СВЯЗИ ИХ С КОЛОННАМИ

Глава I

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УГЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ К БАЛКАМ, ЛЕЖАЩИМ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В данной главе рассматривается применение метода угловых деформаций к расчету балок, лежащих на упругом основании, и к расчету рам, часть элементов которых опирается на упругое основание.

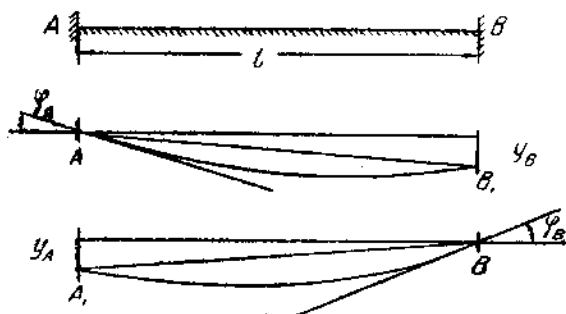
§ 1. Формулы метода деформаций для короткой балки на упругом основании

Рассматриваемый стержень (фиг. 1) лежит на упругом основании. Известно, что дифференциальное уравнение упругой линии пишется так:

$$EI \frac{d^4 \varphi}{dx^4} = p - ky, \quad (a)$$

где p — внешняя нагрузка,
 k — жесткость основания,
 ky — реакция упругого основания.

Решив уравнение (a), получим общий интеграл дифференциального уравнения четвертого порядка:



Фиг. 1.

$$y_x = C_1 e^{\varepsilon} \cos \varepsilon + C_2 e^{\varepsilon} \sin \varepsilon + C_3 e^{-\varepsilon} \cos \varepsilon + C_4 e^{-\varepsilon} \sin \varepsilon. \quad (b)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{x}{L},$$

L — характеристика, зависящая от жесткости балки и ее основания, причем

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}} \text{ см.}$$

Найдя постоянные интегрирования из условий на концах и подставив их в уравнение (b), определим выражение для прогиба в любом сечении балки:

$$y_x = y_0 A_x + L \varphi_0 B_x - \frac{L^2}{EI} M_0 C_x - \frac{L^3}{EI} Q_0 D_x. \quad (c)$$

Делая последовательное дифференцирование уравнения (c) по x , найдем выражение для угла поворота, момента и перерезывающей силы в любом сечении. Если на балку действуют внешние силы (в виде сосредоточенных грузов, равномерно-распределенной нагрузки, моментов), которые вызывают и соответствующие деформации, то в результате совместного действия усилий, — в том числе и начальных условий, — формулы,

выражающие величину прогиба, угла поворота, момента и перерезывающей силы в любом сечении, представляются как:

$$\text{I. } y_x = y_0 A_x + L \varphi_0 B_x - \frac{L^2}{EJ} M_0 C_x - \frac{L^3}{EJ} Q_0 D_x + \\ + \sum_0^x \Delta A_{x-u} - L \sum_0^x \vartheta B_{x-u} - \frac{L^2}{EJ} \sum_0^x M C_{x-u} + \frac{L^3}{EJ} \sum_0^x p D_{x-u} + \\ + \int_c^d \delta A_{x-u} du - L \int_c^d \vartheta B_{x-u} du - \frac{L^2}{EJ} \int_c^d m C_{x-u} du + \frac{L^3}{EJ} \int_c^d p D_{x-u} du.$$

$$\text{II. } \varphi_x = \varphi_0 A_x - \frac{L}{EJ} M_0 B_x - \frac{L^2}{EJ} Q_0 C_x - \frac{4}{L} y_0 D_x - \\ - \sum_0^x \vartheta A_{x-u} - \frac{L}{EJ} \sum_0^x M B_{x-u} + \frac{L^2}{EJ} \sum_0^x p C_{x-u} - \frac{4}{L} \sum_0^x \Delta D_{x-u} - \\ - \int_c^d \vartheta A_{x-u} du - \frac{L}{EJ} \int_c^d m B_{x-u} du + \frac{L^2}{EJ} \int_c^d p C_{x-u} du - \frac{4}{L} \int_c^d \delta D_{x-u} du.$$

$$\text{III. } M_x = M_0 A_x + L Q_0 B_x + k L^2 y_0 C_x + k L^2 \varphi_0 D_x + \\ + \sum_0^x M A_{x-u} - L \sum_0^x p B_{x-u} + k L^2 \sum_0^x \Delta C_{x-u} - k L^2 \sum_0^x \vartheta D_{x-u} + \\ + \int_c^d m A_{x-u} du - L \int_c^d p B_{x-u} du + k L^2 \int_c^d \delta C_{x-u} du - k L^2 \int_c^d \vartheta D_{x-u} du.$$

$$\text{IV. } Q_x = Q_0 A_x + k L y_0 B_x + k L^2 \varphi_0 C_x - \frac{4}{L} M_0 D_x - \\ - \sum_0^x p A_{x-u} + k L \sum_0^x \Delta B_{x-u} - k L^2 \sum_0^x \vartheta C_{x-u} - \frac{4}{L} \sum_0^x M D_{x-u} - \\ - \int_c^d p A_{x-u} du + k L \int_c^d \delta B_{x-u} du - k L^2 \int_c^d \vartheta C_{x-u} du - \frac{4}{L} \int_c^d m D_{x-u} du.$$

В этих формулах первый ряд дает влияние начальных параметров, второй ряд — влияние сосредоточенных сил и третий — равномерно-распределенной нагрузки.¹ Начальные условия, которые входят в (I, II, III, IV), как известно, определяются из условий закрепления концов балки.

Пусть под влиянием внешних сил стержень AB (фиг. 1) продеформировался и после деформации занял положение $A_1 B_1$, отличное от первоначального. Это положение, в свою очередь, вполне определяется вынужденными поворотами узлов A и B на угол φ_A и φ_B и смещением концов на y_A и y_B в предположении, что концы балки жестко заделаны. Найдем моменты и перерезывающие силы на опорах A и B от:

- 1) $\varphi_A = 1$; 3) $y_A = 1$;
- 2) $\varphi_B = 1$; 4) $y_B = 1$.

¹ Проф. А. А. Уманский. Специальный курс строительной механики, часть I, изд. ОНТИ, 1935 г., глава II, стр. 54.

Рассмотрим первый случай, когда $\varphi_A = 1$. Начало координат поместим в точке А; здесь прогиб равняется нулю, а угол поворота единице. Неизвестными являются M_A и θ_A .

Найдем их из условий, что $\varphi_B = 0$ и $y_B = 0$.

Решив совместно уравнения (I, II), получим:

$$M_A = -\frac{\varphi_A EJ}{L} \left[\frac{A_1 D_1 - B_1 C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (1)$$

$$Q_A = \frac{\varphi_A EJ}{L^2} \left[\frac{C_1 A_1 - B_1^2}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (2)$$

Подставим значения M_A и Q_A в (III, IV), найдем:

$$M_B = -\frac{\varphi_A EJ}{L} \left[\frac{D_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (3)$$

$$Q_B = -\frac{\varphi_A EJ}{L^2} \left[\frac{C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (4)$$

Второй случай: $\varphi_B = 1$.

Решив уравнения (I, II), выражающие, что $y_1 = 0$, а $\varphi_1 = \varphi_B = 1$, будем иметь:

$$M_A = \frac{EJ}{L} \varphi_B \left[\frac{D_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (5)$$

$$Q_A = -\frac{EJ}{L^2} \varphi_B \left[\frac{C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (6)$$

Тогда момент и перерезывающая сила на правом конце по (III и IV):

$$M_B = \frac{\varphi_B EJ}{L} \left[\frac{A_1 D_1 - B_1 C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (7)$$

$$Q_B = \frac{\varphi_B EJ}{L^2} \left[\frac{A_1 C_1 - B_1^2}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (8)$$

Третий случай: $y_A = 1$.

Неизвестные M_A и Q_A находим из формул (I, II), приравняв прогиб и угол поворота на правом конце балки нулю.

$$M_A = \frac{EJ}{L^2} y_A \left[\frac{A_1 C_1 + 4D_1^2}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (9)$$

$$Q_A = -\frac{EJ}{L^3} y_A \left[\frac{A_1 B_1 + 4D_1 C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (10)$$

Зная значение M_A и Q_A (по III, IV), определим

$$M_B = -\frac{EJ}{L^2} y_A \left[\frac{C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (11)$$

$$Q_B = -\frac{EJ}{L^3} y_A \left[\frac{B_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (12)$$

Четвертый случай $y_B = 1$; $\varphi_B = 0$.

Решая уравнения (I, II) при заданных величинах, получим:

$$M_A = \frac{-EJ}{L^2} y_B \left[\frac{C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (13)$$

$$Q_A = \frac{EJ}{L^3} y_B \left[\frac{B_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (14)$$

Момент и перерезывающая сила на правом конце:

$$M_B = \frac{EJ}{L^2} y_B \left[\frac{A_1 C_1 + 4D_1^2}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (15)$$

$$Q_B = \frac{EJ}{L^3} y_B \left[\frac{B_1 A_1 + 4D_1 C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]. \quad (16)$$

Окончательная величина моментов и перерезывающих сил на опорах А и В при заданных воздействиях выразится как сумма значений M и Q из формул (1)–(16). Сделав некоторые простейшие преобразования, получим:

$$M_A = 2i \left[2\chi_1 \varphi_A + \chi_2 \varphi_B + \frac{3y_A \gamma_3}{l} - \frac{3y_B \gamma_4}{l} \right] + M'_A; \quad (17)$$

$$M_B = -2i \left[2\chi_1 \varphi_B + \chi_2 \varphi_A + \frac{3y_A \gamma_4}{l} - \frac{3y_B \gamma_3}{l} \right] + M'_B; \quad (18)$$

$$Q_A = \frac{-6i}{l} \left[\chi_3 \varphi_A + \chi_4 \varphi_B + \frac{2y_A \gamma_1}{l} - \frac{2y_B \gamma_2}{l} \right] + Q'_A; \quad (19)$$

$$Q_B = \frac{-6i}{l} \left[\chi_3 \varphi_B + \chi_4 \varphi_A + \frac{2y_A \gamma_2}{l} - \frac{2y_B \gamma_1}{l} \right] + Q'_B, \quad (20)$$

где:

$$\chi_1 = -\frac{l}{4L} \left[\frac{A_1 D_1 - B_1 C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (21)$$

$$\chi_2 = \frac{l}{2L} \left[\frac{D_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (22)$$

$$\chi_3 = \frac{l^2}{6L^2} \left[\frac{A_1 C_1 + 4D_1^2}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (23)$$

$$\chi_4 = \frac{l^2}{6L^2} \left[\frac{C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (24)$$

$$\gamma_1 = \frac{l^3}{12L^3} \left[\frac{A_1 B_1 + 4D_1 C_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (25)$$

$$\gamma_2 = \frac{l^3}{12L^3} \left[\frac{B_1}{C_1^2 - B_1 D_1} \right]; \quad (26)$$

i — погонная жесткость;

M'_A и M'_B — опорные моменты от нагрузки в пролете для стержня с заделанными концами;

Q'_A и Q'_B — перерезывающая сила на опорах от нагрузки в пролете.

Определим величину момента и перерезывающей силы, когда в пролете есть нагрузка.

В виду аналогичных рассуждений при выводе формул, не приводя выкладок, дадим окончательные результаты.

1. Сосредоточенные силы (фиг. 2)

Выражения для неизвестных M'_A и Q'_A :

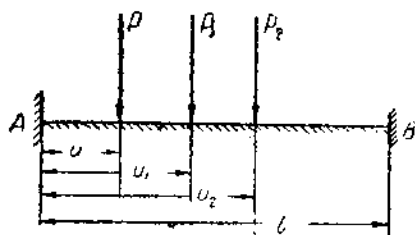
$$M'_A = L \sum P \left[\frac{D_{l-u} C_l - D_l C_{l-u}}{C_l^2 - B_l D_l} \right]; \quad (27)$$

$$Q'_A = - \sum P \left[\frac{D_{l-u} B_l - C_{l-u} C_l}{C_l^2 - B_l D_l} \right]. \quad (28)$$

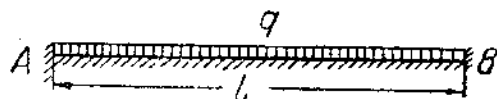
M и Q на правой опоре:

$$M'_B = L \sum P \left[\frac{D_{l-u} (C_l A_l - B_l^2) + C_{l-u} (C_l B_l - D_l A_l) - B_{l-u} (C_l^2 - B_l D_l)}{C_l^2 - B_l D_l} \right]; \quad (29)$$

$$Q'_B = - \sum P \left[\frac{D_{l-u} (4D_l C_l + A_l B_l) - C_{l-u} (C_l A_l + D_l^2) - A_{l-u} (C_l^2 - B_l D_l)}{C_l^2 - B_l D_l} \right]. \quad (30)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

2. Равномерно распределенная нагрузка (фиг. 3)

Величина момента и перерезывающей силы на левой опоре:

$$M'_A = - \frac{qL^2}{4} \left[\frac{A_l C_l - C_l + 4D_l^2}{C_l^2 - B_l D_l} \right]; \quad (31)$$

$$Q'_A = \frac{qL}{4} \left[\frac{A_l B_l - B_l + 4D_l C_l}{C_l^2 - B_l D_l} \right]. \quad (32)$$

M и Q для правой опоры:

$$M'_B = \frac{-qL^2}{4} \left[\frac{A_l^2 C_l - C_l A_l + 4D_l^2 A_l - A_l B_l^2 + B_l^2 - 8D_l C_l B_l + 4C_l^3}{C_l^2 - B_l D_l} \right]; \quad (33)$$

$$Q'_B = \frac{qL}{4} \left[\frac{A_l^2 B_l - B_l A_l + 8D_l C_l A_l - 4C_l D_l + 16D_l^3 - 4B_l C_l^2 + 4B_l^2 D_l}{C_l^2 - B_l D_l} \right]. \quad (34)$$

§ 2. Формулы метода деформаций для короткой балки с одним зашпеленным концом

Рассмотрим случай, когда левый конец балки свободный, а правый зашпелен, т. е. после деформации положение этого конца определяется вынужденным поворотом узла B на угол φ_B и смещением на y_B .

Найдем моменты и перерезывающую силу на правой опоре (фиг. 4). Не приводя выкладок, дадим окончательное выражение для момента и перерезывающей силы при наличии:

$$1) \varphi_B = 1;$$

$$2) y_B = 1.$$

$$M_B = -2i \left[2\alpha_1 \varphi_B - \frac{3y_B \alpha_2}{l} \right] + M'_B; \quad (35)$$

$$Q_B = \frac{-6i}{l} \left[\beta_1 \varphi_B - \frac{2y_B \beta_2}{l} \right] + Q'_B, \quad (36)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{l}{L} \left[\frac{B_l C_l - A_l D_l}{A_l^2 + 4B_l D_l} \right]; \quad (37)$$

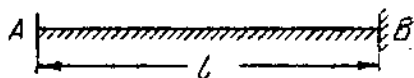
$$\alpha_2 = \frac{2P}{3L^2} \left[\frac{A_l C_l + 4D_l^2}{A_l^2 + 4B_l D_l} \right]; \quad (38)$$

$$\beta_1 = \frac{2P}{3L^2} \left[\frac{B_l^2 - C_l A_l}{A_l^2 + 4B_l D_l} \right]; \quad (39)$$

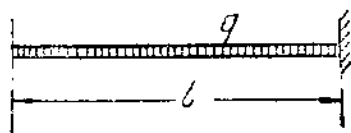
$$\beta_2 = \frac{1P}{3L^3} \left[\frac{B_l A_l + 4C_l D_l}{A_l^2 + 4B_l D_l} \right]. \quad (40)$$

Определим величину опорных моментов и перерезывающих сил, когда в пролете есть нагрузка.

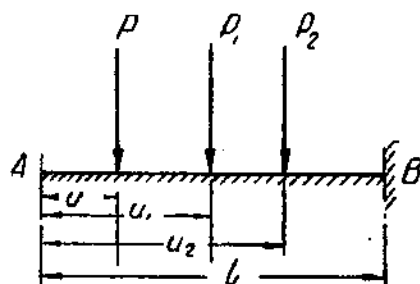
1. Сосредоточенные силы (фиг. 5).



Фиг. 4.



Фиг. 6.



Фиг. 5.

Выражения для неизвестных начальных параметров:

$$y_A = -\frac{L^3}{EJ} \sum P \left[\frac{D_{l-u} A_l - C_{l-u} B_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right]; \quad (41)$$

$$\varphi_A = -\frac{L^2}{EJ} \sum P \left[\frac{4D_{l-u} D_l + C_{l-u} A_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right]. \quad (42)$$

Опорные моменты и перерезывающая сила на правом конце:

$$M'_B = -4L \sum P \left\{ C_l \left[\frac{D_{l-u} A_l - C_{l-u} B_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] + D_l \left[\frac{4D_{l-u} D_l + C_{l-u} A_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] + \frac{B_{l-u}}{4} \right\}; \quad (43)$$

$$Q'_B = -4 \sum P \left\{ B_l \left[\frac{D_{l-u} A_l - C_{l-u} B_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] + C_l \left[\frac{4D_{l-u} D_l + C_{l-u} A_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] + \frac{A_{l-u}}{4} \right\}. \quad (44)$$

2. Равномерно распределенная нагрузка (фиг. 6), начальный прогиб и угол поворота:

$$y_A = \frac{qL^4}{4EJ} \left[\frac{A_l^2 - A_l + 4B_l D_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right]; \quad (45)$$

$$\varphi_A = -\frac{qL^3}{4EJ} \left[\frac{D_l + 3A_l D_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right]. \quad (46)$$

Момент и перерезывающая сила на опоре B:

$$M'_B = qL^2 \left\{ C_l \left[\frac{A_l^2 - A_l + 4B_l D_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] - D_l \left[\frac{D_l + 3A_l D_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] - C_l \right\}; \quad (47)$$

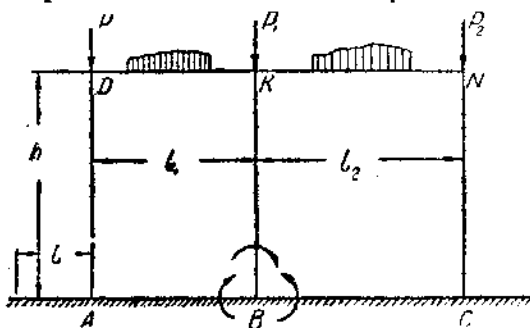
$$Q'_B = qL \left\{ B_l \left[\frac{A_l^2 - A_l + 4B_l D_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] - C_l \left[\frac{D_l + 3A_l D_l}{A_l^2 + 4D_l B_l} \right] - B_l \right\}. \quad (48)$$

§ 3. Основные уравнения угловых деформаций для стержней, лежащих на упругом основании

Зная выражение момента и перерезывающей силы в опорных точках для балки на упругом основании, перейдем к исследованию равновесия узла рамы. Пусть в узле B сходятся три стержня, жестко соединенные со смежными узлами (A , C), причем два из них лежат на упругом основании (фиг. 7). Так как после деформации узел должен находиться в равновесии, то уравнение равновесия для узла B напомним так:

$$-M_{BC} + M_{BA} + M_{BK} = 0.$$

Подставив сюда значения M_{BC} , M_{BA} и M_{BK} по формулам (17) и (18), получим:

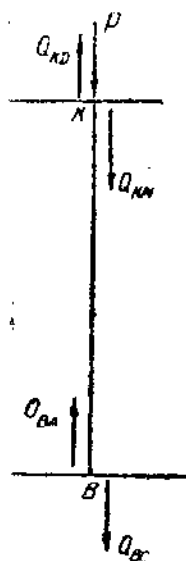


Фиг. 7.

$$2\varphi_B(i_1\chi_1 + i_1\bar{\chi}_1 + i_h) + \varphi_c\chi_2i_1 + \varphi_A\bar{\chi}_2i_1 + \varphi_Ki_h = \frac{3y_c\chi_4i_1}{l_2} - \frac{3y_A\bar{\chi}_4i_1}{l_1} + 3y_B\left(\frac{\chi_3i_1}{l_1} - \frac{\bar{\chi}_3i_1}{l_2}\right) + \frac{3\delta i_h}{h} + \frac{M'_{BA}}{2} - \frac{M'_{BC}}{2} + \frac{M'_{BK}}{2}. \quad (49)$$

Если к узлу приходит стержень, противоположный конец которого свободно опирается, то уравнение (49) изменится так:

$$2\varphi_B(i_1\chi_1 + i_1\alpha_1 + i_h) + \varphi_c\chi_2i_1 + \varphi_Ki_h = 3y_B\left(\frac{i_1\alpha_2}{l_1} - \frac{i_1\chi_3}{l_2}\right) + \frac{3y_c\epsilon_2\chi_4}{l_2} + \frac{3\delta i_h}{h} + \frac{M_{BA} - M'_{BC} + M'_{BK}}{2}. \quad (49')$$



Фиг. 8.

§ 4. Дополнительные уравнения

Задача еще не является разрешенной, когда составлены основные уравнения угловых деформаций, так как, кроме неизвестных φ , входят еще перемещения y ; следовательно, нужно ввести еще какие-то дополнительные условия. В данном случае для осадки опор составим уравнение вертикальных проекций. Возьмем, например, стойку BK (фиг. 8) и спроектируем перерезывающие силы на вертикальную ось.

Напишем уравнение равновесия:

$$Q_{BA} + Q_{KD} - P - Q_{KN} - Q_{BC} = 0.$$

Подставив значение Q из формул (19) и (20), найдем:

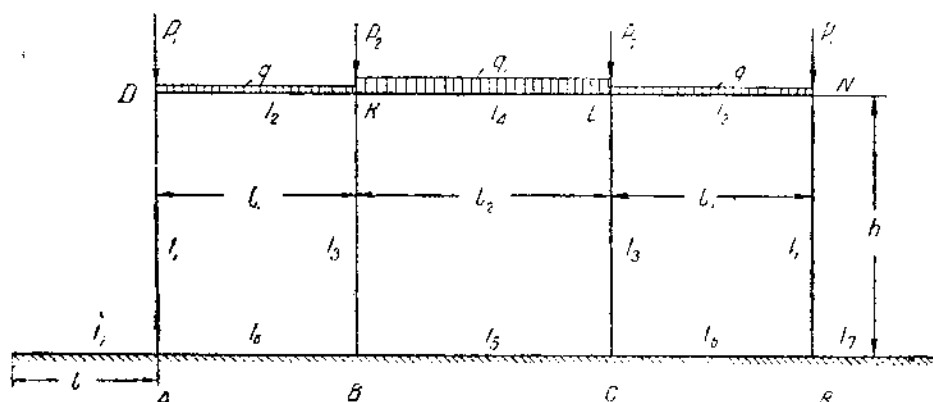
$$\begin{aligned} \varphi_B\left(\frac{i_1\chi_3}{l_2} - \frac{i_1\bar{\chi}_3}{l_1}\right) + \frac{\varphi_c i_1 \chi_4}{l_2} - \frac{\varphi_A \bar{\chi}_4 i_1}{l_1} + \frac{i_{KN}}{l_2}(\varphi_K + \varphi_N) - \frac{i_{KD}}{l_1}(\varphi_K + \varphi_D) = \\ = \frac{2y_A i_1 \bar{\gamma}_2}{l_1} + \frac{2y_c i_1 \gamma_2}{l_2} - 2y_B\left(\frac{\gamma_1 i_1}{l_2} + \frac{\gamma_1 i_1}{l_1}\right) + \frac{2\delta i_{KN}}{l_2} + \frac{2\delta i_{KD}}{l_1} + \\ + \frac{Q'_{BC} - Q'_{BA}}{6} + \frac{P}{6} + \frac{Q'_{KN} - Q'_{KD}}{6}; \end{aligned} \quad (50)$$

Если к узлу приходит перерезывающая сила от стержня со свободно опертым смежным концом, то уравнение (50) будет иметь такой вид:

$$\varphi_B \left(\frac{i_2 \chi_3}{l_2} - \frac{i_1 \beta_1}{l_1} \right) + \frac{i_{KN}}{l_2} (\varphi_K + \varphi_N) + \frac{\varphi_C i_4 \chi_4}{l_2} = \\ = \frac{2y_C \gamma_2 i_2}{l_2^2} - 2y_B \left(\frac{i_2 \gamma_1}{l_2^2} + \frac{i_1 \beta_2}{l_1^2} \right) + \frac{P}{6} + \frac{Q'_{BC} - Q'_{BA}}{6} + \frac{Q'_{KN}}{6}. \quad (50')$$

Пример к главе I (фиг. 9).

Рассчитать многопролетную порталную раму, жестко связанную с фундаментом и опирающуюся на упругое основание.



Фиг. 9.

Данные:

$$\begin{aligned} l &= 4 \text{ м}; & P_1 &= 2 \text{ т}; & E &= 2\,100\,000 \text{ т/м}^2; \\ l_1 &= 8 \text{ м}; & P_2 &= 4 \text{ т}; & k_0 &= 5000 \text{ т/м}^3; \\ l_2 &= 10 \text{ м}; & q_1 &= 1 \text{ т/м}; & b &= 1,5 \text{ м}. \\ h &= 6 \text{ м}; & q &= 0,5 \text{ т/м}; \end{aligned}$$

Моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_1 &= 0,0021 \text{ м}^4; & J_4 &= 0,0092 \text{ м}^4; \\ J_2 &= 0,0023 \text{ м}^4; & J_5 &= J_6 = J_7 = 0,0156 \text{ м}^4. \\ J_3 &= 0,0034 \text{ м}^4; \end{aligned}$$

Погонные жесткости:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{21}{6} = 3,5 \text{ м}^{-1}; & i_4 &= \frac{92}{10} = 9,2 \text{ м}^{-1}; & i_7 &= \frac{156}{4} = 39 \text{ м}^{-1}; \\ i_2 &= \frac{23}{8} = 2,87 \text{ м}^{-1}; & i_5 &= \frac{156}{10} = 15,6 \text{ м}^{-1}; \\ i_3 &= \frac{34}{6} = 5,7 \text{ м}^{-1}; & i_6 &= \frac{156}{8} = 19,5 \text{ м}^{-1}; \end{aligned}$$

$$EJ_{\text{фунд}} = 2\,100\,000 \cdot 0,0156 = 32\,760 \text{ тм}^2;$$

$$k = k_0 b = 7500 \text{ т/м}^2;$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}} = 2 \text{ м}.$$

Определим величину коэффициентов, характеризующих балку, которая опирается на упругое основание, для чего воспользуемся формулами (21) — (26) и (45) — (48):

при $\frac{x}{L} = \frac{8}{2} = 4$; при $\frac{x}{L} = \frac{10}{2} = 5$;

$$\begin{array}{ll} \chi_1 = 2,01 & \bar{\chi}_1 = 2,48; \\ \chi_2 = -0,015 & \bar{\chi}_2 = -0,08 \\ \chi_3 = 5,4 & \bar{\chi}_3 = 8,25; \\ \chi_4 = -0,3 & \bar{\chi}_4 = -0,21; \\ \gamma_1 = 21,2 & \bar{\gamma}_1 = 41,25; \\ \gamma_2 = -1,1, & \bar{\gamma}_2 = -0,375. \end{array}$$

при $\frac{x}{L} = \frac{4}{2} = 2$;

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 0,98; \\ \alpha_2 = 1,29; \\ \beta_1 = 1,32; \\ \beta_2 = 2,5. \end{array}$$

Уравнения:

В виду симметричности рамы и нагрузок:

$$\begin{array}{lll} \varphi_B = -\varphi_C; & \varphi_K = -\varphi_L; & y_B = y_C; \\ \varphi_A = -\varphi_R; & \varphi_D = -\varphi_N; & y_A = y_R. \end{array}$$

Следовательно, достаточно составить 6 уравнений для узлов A, B, K, D, по формулам (49), (49'), (50), (50').

Окончательный вид уравнений после преобразования будет таков:

1. $161,8\varphi_A - 0,29\varphi_B + 3,5\varphi_D = -1,65y_A - 2,2y_B$;
2. $166\varphi_B - 0,29\varphi_A + 5,7\varphi_K = -0,08y_B + 2,2y_A$;
3. $12,74\varphi_D + 2,87\varphi_K + 3,5\varphi_A = 1,33$;
4. $26,34\varphi_K + 2,87\varphi_D + 5,7\varphi_B = 2,87$;
5. $0,3\varphi_A - 0,73\varphi_B + 0,36(\varphi_D + \varphi_K) = -0,67y_B - 25,12y_A + 0,66$;
6. $0,03\varphi_B + 0,73\varphi_A - 0,36(\varphi_D + \varphi_K) = -0,67y_A - 25,9y_B + 1,83$.

Решив эти уравнения способом последовательных приближений, найдем:

$$\begin{array}{lll} \varphi_A = -0,0029 \text{ мм}^2; & \varphi_D = 0,083 \text{ мм}^2; & y_A = 0,021 \text{ мм}^3; \\ \varphi_B = -0,0032 \text{ мм}^2; & \varphi_K = 0,099 \text{ мм}^2; & y_B = 0,072 \text{ мм}^3. \end{array}$$

Моменты:

Моменты в узлах определяем по формулам (17), (18).

Узел A:

$$\begin{array}{ll} M_{AO} = 2,03 \text{ тм}; \\ M_{AB} = 1,5 \text{ тм}; \\ M_{AO} = -0,53 \text{ тм}. \end{array}$$

Узел В:

$$M_{BC} = 5,2 \text{ т.м.};$$

$$M_{BA} = 6,26 \text{ т.м.};$$

$$M_{BK} = -1,06 \text{ т.м.};$$

$$M_{DK} = 1,14 \text{ т.м.}$$

Узел К:

$$M_{KD} = -4,28 \text{ т.м.};$$

$$M_{KL} = 6,51 \text{ т.м.};$$

$$M_{KB} = -2,23 \text{ т.м.}$$

Пролетные моменты определяем, рассчитывая каждый пролет отдельно, по методу начальных условий, принимая каждое опорное сечение за нулевое.

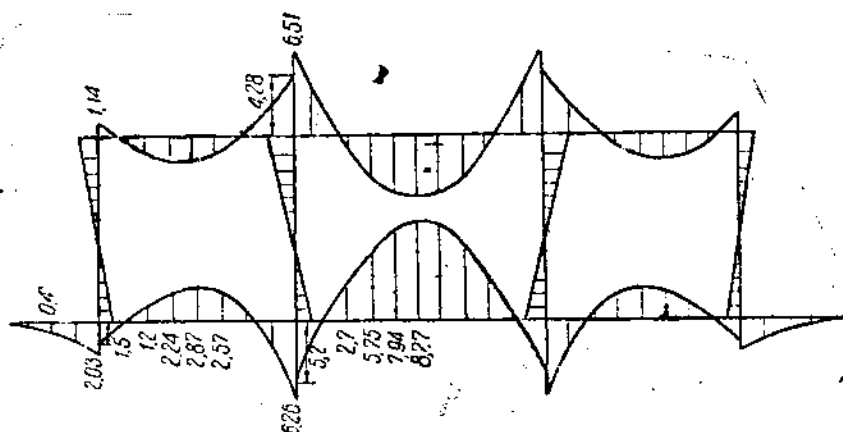
Перерезывающие силы

По формулам (19) и (20) найдем:

$$Q_{AB} = -1,71 \text{ т.}; \quad Q_{BC} = -5,24 \text{ т.};$$

$$Q_{LO} = 1,75 \text{ т.}; \quad Q_{BA} = 5,86 \text{ т.}$$

Эпюра моментов



Фиг. 10.

Глава II

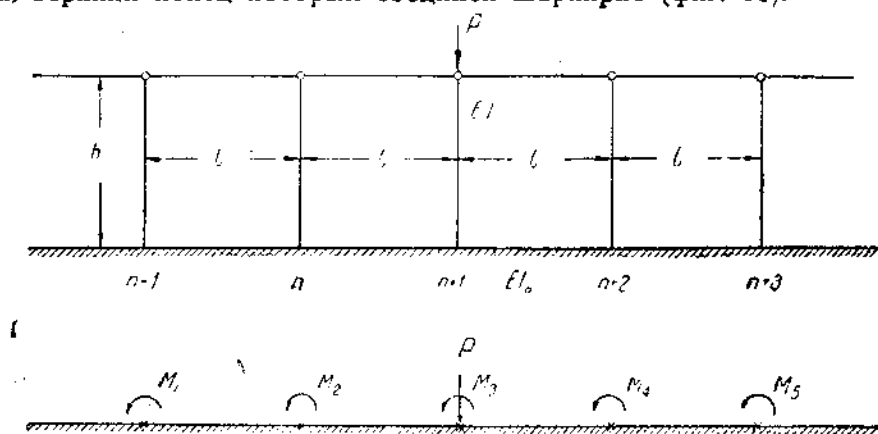
РАСЧЕТ БЕСКОНЕЧНО-ДЛИННОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В данной главе рассматривается применение теории конечных разностей к расчету бесконечно-длинной балки, лежащей на упругом основании. Этот способ избавляет от необходимости решать большое количество уравнений, в противовес тому, как это делается при расчете методом угловых деформаций, и дается возможность найти неизвестные в узловых точках при любой нагрузке из общих формул.

Целью является дать практическую возможность рассчитывать балки на упругом основании с большим числом пролетов и с учетом жесткой связи с колоннами.

§ 4. Основные формулы для расчета бесконечно длинной балки методом конечных разностей

Рассмотрим бесконечно длинную балку, жестко связанную с колоннами, верхний конец которых соединен шарнирно (фиг. 11).



Фиг. 11

Воспользуемся формулами (17) и (18) и напомним уравнение равновесия узла, например, n :

$$M_n^{np} - M_n^{aes} - K_1 \varphi_n = 0, \quad (a)$$

где $K_1 \varphi_n$ — есть момент, развивающийся на нижнем конце колонны при закручивании его на угол $\varphi = 1$;

$$K_1 \text{ — при шарнирном верхнем конце} = \frac{3EJ}{h};$$

$$\text{при заделанном} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad = \frac{4EJ}{h}.$$

Подставив в (a) все значения, получим:

$$2\varphi_n \left(2\chi_1 i + \frac{3}{4} i_1 \right) + i\chi_2 (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) = \frac{3\chi_3 i}{l} (y_{n+1} - y_{n-1}) + \frac{M_n^{np} - M_n^{aes}}{2}. \quad (51)$$

В виду того, что в каждом узле два неизвестных, а именно: угол поворота и вертикальное перемещение опор, то необходимо составить дополнительное уравнение, для чего спроектируем перерезывающие силы узла n на вертикальную ось. Уравнение равновесия:

$$Q_n^{np} - Q_n^{aes} = 0.$$

Подставив значения Q из (20) и (19), найдем:

$$\frac{i\chi_4}{l} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) = \frac{2\gamma_2 i}{l^2} (y_{n+1} + y_{n-1}) - \frac{4y_n \gamma_1 i}{l^2} + \frac{Q_n^{aes} - Q_n^{np}}{6} + \frac{p}{6},$$

где $\frac{p}{6}$ берем в случае груза в этом узле.

Теперь составим систему уравнений для бесконечно длинной балки. Для каждого узла получим группу, состоящую из двух уравнений.

Узел n :

$$\begin{aligned} 1. \quad 2\varphi_n \left(2\chi_1 i + \frac{3}{4} i_1 \right) + i\chi_2 (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) &= \\ &= \frac{3i\chi_3}{l} (y_{n+1} - y_{n-1}) + \frac{M_n^{np} - M_n^{aes}}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{II.} \quad \frac{iZ_1}{l} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) = \frac{2iZ_2}{l^2} (y_{n+1} + y_{n-1}) - \frac{4y_n}{l^2} i + \frac{Q_n^{loc}}{6} - \frac{Q_n^{np}}{6}.$$

Узел $(n+1)$

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 2\varphi_{n+1} \left(2Z_1 i + \frac{3}{4} i \right) + iZ_2 (\varphi_{n+2} + \varphi_n) = \\ & = \frac{3iZ_1}{l} (y_{n+2} - y_n) + \frac{M_{n+1}^{np} - M_{n+1}^{loc}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \frac{iZ_1}{l} (\varphi_{n+2} - \varphi_n) = \\ & = \frac{2iZ_2}{l^2} (y_{n+2} + y_n) - \frac{4y_{n+1}}{l^2} i + \frac{Q_{n+1}^{loc}}{6} - \frac{Q_{n+1}^{np}}{6} + \frac{p}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, переходя от узла к узлу, мы получим систему бесконечного числа линейных уравнений в конечных разностях одинакового типа.

Для решения возьмем систему из двух уравнений и с помощью определенного процесса исключения неизвестных φ придем до одного уравнения с одной неизвестной функцией y .

Для удобства при решении введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= 2 \left(2Z_1 i + \frac{3}{4} i \right); & c_1 &= \frac{iZ_1}{l}; \\ b &= iZ_2; & d &= \frac{2iZ_2}{l^2}; \\ c &= \frac{3iZ_1}{l}; & e &= \frac{4iZ_1}{l^2}; \\ k_2 &= \frac{M_{n+1}^{np} - M_{n+1}^{loc}}{2}; & k_1 &= \frac{Q_{n+1}^{loc} - Q_{n+1}^{np}}{6} + \frac{p}{6}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения для узла $n+1$ напишутся так:

$$a\varphi_{n+1} + b\varphi_{n+2} + b\varphi_n - cy_{n+2} + cy_n - k_2 = 0; \quad (53)$$

$$c_1\varphi_{n+2} - c_1\varphi_n - dy_{n+2} - dy_n + ey_{n+1} - k_1 = 0. \quad (54)$$

Решив эти уравнения относительно старших членов φ_{n+2} и y_{n+2} получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2} &= -\frac{ad}{bd - cc_1} \varphi_{n+1} - \frac{bd + cc_1}{bd - cc_1} \varphi_n - \frac{2cdy_n}{bd - cc_1} + \\ &+ \frac{ce}{bd - cc_1} y_{n+1} + \frac{k_2d - k_1c}{bd - cc_1}; \\ y_{n+2} &= -\frac{ac_1}{bd - cc_1} \varphi_{n+1} - \frac{2bc_1}{db - cc_1} \varphi_n - \frac{db + cc_1}{bd - cc_1} y_n + \\ &+ \frac{be}{db - cc_1} y_{n+1} + \frac{k_2c_1 - k_1b}{bd - cc_1}. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\alpha_0 = \frac{ad}{bd - cc_1}; \quad \alpha_2 = \frac{ac_1}{bd - cc_1}; \quad \beta_0 = \frac{2cd}{bd - cc_1}; \quad \beta_2 = \frac{be}{bd - cc_1};$$

$$\alpha_1 = \frac{bd + cc_1}{bd - cc_1}; \quad \alpha_3 = \frac{2bc_1}{bd - cc_1}; \quad \beta_1 = \frac{ce}{bd - cc_1}; \quad A = \frac{k_2d - k_3c}{bd - cc_1};$$

$$B = \frac{k_2c_1 - k_3b}{bd - cc_1}.$$

Подставим эти обозначения в уравнения для φ_{n+2} и y_{n+2} :

$$\varphi_{n+2} = -\alpha_0\varphi_{n+1} - \alpha_1\varphi_n - \beta_0y_n + \beta_1y_{n+1} + A; \quad (55)$$

$$y_{n+2} = -\alpha_2\varphi_{n+1} - \alpha_3\varphi_n - \alpha_1y_n + \beta_2y_{n+1} + B. \quad (56)$$

Дадим в уравнении (56) аргументу n приращение $= 1$.

где:
$$y_{n+2} = -\alpha_2\varphi_{n+2} - \alpha_3\varphi_{n+1} - \alpha_1y_{n+1} + \beta_2y_{n+2} + B_1, \quad (57)$$

$$B_1 = \frac{k_2c_1 - k_3b}{bd - cc_1};$$

значение φ_{n+2} из (55) подставим в (57):

$$y_{n+2} = (\alpha_2\alpha_0 - \alpha_3)\varphi_{n+1} + \alpha_1\alpha_2\varphi_n + \alpha_2\beta_0y_n +$$

$$+ \beta_2y_{n+1} - (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1)y_{n+1} - \alpha_2A + B_1. \quad (58)$$

Далее определяем φ_n из (56) и подставляем в (58); тогда:

где:
$$y_{n+2} = \gamma'\varphi_{n+1} + \gamma_1'\varphi_n + \gamma_2'y_n + \gamma_3'y_{n+1} + N_1, \quad (59)$$

$$\gamma' = \alpha_2\alpha_0 - \alpha_3 - \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\alpha_3};$$

$$\gamma_1 = \beta_2 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3};$$

$$\gamma_2' = \alpha_2\beta_0 - \frac{\alpha_1^3\alpha_2}{\alpha_3};$$

$$\gamma_3' = \frac{\alpha_1\alpha_2\beta_2}{\alpha_3} - \beta_1\alpha_2 - \alpha_1;$$

$$N_1 = B_1 + \frac{\alpha_1\alpha_2B}{\alpha_3} - A\alpha_2.$$

Дадим аргументу n приращение $= 1$.

$$y_{n+2} = \gamma'\varphi_{n+2} + \gamma_1'\varphi_{n+1} + \gamma_2'y_{n+1} + \gamma_3'y_n + N_2. \quad (60)$$

В уравнении (60) осталось только φ_{n+2} ; исключим и его, для чего решим систему уравнений (57), (59), (60). После решения найдем:

где:
$$y_{n+1} + L_1y_{n+2} + L_2y_{n+1} + L_3y_n = T, \quad (61)$$

$$L_1 = \frac{\gamma' - \alpha_3}{\alpha_2} - \gamma_1';$$

$$L_2 = - \left[\frac{\beta_2 \alpha_1' - \gamma_1' \alpha_2}{\alpha_2} + \gamma_3' \right];$$

$$L_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_1' - \gamma_2' \alpha_2}{\alpha_2} - \gamma_2';$$

$$L_4 = - \frac{\gamma_2' \alpha_3}{\alpha_2};$$

$$T = N_2 + \frac{N_1 \alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1' B_1}{\alpha_2}.$$

Таким образом, мы получим неоднородное разностное уравнение четвертого порядка. Для решения этого уравнения приравняем правую часть нулю и найдем общий интеграл однородного уравнения, а затем определим частный интеграл неоднородного уравнения. Сумма этих двух интегралов и даст окончательное выражение общего интеграла неоднородного уравнения:

$$y = y_1 + y'.$$

Итак, однородное уравнение четвертого порядка будет таким:

$$y_{n+4} + L_1 y_{n+3} + L_2 y_{n+2} + L_3 y_{n+1} + L_4 y_n = 0. \quad (a)$$

Найдем частное решение этого уравнения в форме показательной функции. Пусть

$$y_n = R^n, \quad (b)$$

где R — постоянное неизвестное число. Последовательное значение функций (b) таково:

$$y_{n+1} = R^{n+1}; \quad y_{n+2} = R^{n+2}; \quad y_{n+3} = R^{n+3}; \quad y_{n+4} = R^{n+4}.$$

Подставим их значение в уравнения (a) и R^n возьмем за скобки.

$$R^n (R^4 + L_1 R^3 + L_2 R^2 + L_3 R + L_4) = 0. \quad (c)$$

Для того, чтобы функция (b) была решением, надо, чтобы выражение (c) тождественно равнялось нулю. Нулю может равняться многочлен, стоящий в скобках. Это и даст нам характеристическое уравнение:

$$R^4 + L_1 R^3 + L_2 R^2 + L_3 R + L_4 = 0. \quad (d)$$

Получив уравнение четвертой степени, всегда его можно решить.

Отыскав величины 4 корней R_1, R_2, R_3, R_4 , напомним выражение общего интеграла:

$$y_n = C_1 R_1^n + C_2 R_2^n + C_3 R_3^n + C_4 R_4^n, \quad (62)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, которые определяем, исходя из начальных условий:

$$n = \frac{x}{l}.$$

Найдем выражение для интеграла неоднородного уравнения. Пусть частное решение уравнения (61) будет:

$$\bar{y} = \bar{k}.$$

Так как правая часть есть величина постоянная, то

$$\bar{y} = k = \text{const},$$

т. е.

$$y_{n+1} = y_{n-2} + y_{n-3} + y_{n-4} + \dots + k.$$

Тогда, подставив в уравнение (61) эти величины, получим:

$$y = k = \frac{T}{1 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4}.$$

Путем преобразований доказано, что

$$L_1 = L_3 = \frac{1}{2\gamma_2 Z_2 - 3Z_1^2} \left[\frac{\gamma_2}{i} (8Z_1 i + 3i_1) - 4\gamma_1 \gamma_2 \right]; \quad (63)$$

$$L_2 = \frac{2}{2\gamma_2 Z_2 - 3Z_1^2} \left[2\gamma_2 Z_2 + 3Z_1^2 - \frac{\gamma_1}{i} (8Z_1 i + 3i_1) \right]; \quad (64)$$

$$L_4 = 1; \quad T = -\frac{PP}{6i} \left[\frac{k_2}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3Z_1^2} \right]. \quad (65)$$

Таким образом, уравнение (4) всегда будет возвратным.

Итак, полное решение (61) следующее:

$$y = C_1 R_1^n + C_2 R_2^n + C_3 R_3^n + C_4 R_4^n + \frac{T}{2 + 2L_1 + L_2}. \quad (66)$$

§ 5. Случай комплексных корней характеристического уравнения

Найдем выражение y для случая, когда корни характеристического уравнения представляют комплексные числа. Пусть решение характеристического уравнения, как возвратного, дает две пары сопряженных корней, которые представляют комплексные числа.

$$R_{1,2} = a + bi, \quad R_{3,4} = c + di,$$

где a, b , и c, d , в прямоугольной системе координат дают на площади какую-то точку с координатами (ab) и (cd) .

Выразим комплексное число в тригонометрической форме:

$$a + bi = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha);$$

$$c + di = \rho_1(\cos \beta + i \sin \beta),$$

где ρ — есть модуль комплексного числа, а α и β — аргументы.

Подставим в выражение общего интеграла [формулы (66)], значение наших корней:

$$y = C_1 \rho^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + C_2 \rho^n (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n + C_3 \rho_1^n (\cos \beta + i \sin \beta) + C_4 \rho_1^n (\cos \beta - i \sin \beta).$$

По формуле Муавра

$$(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n = \cos \alpha n \pm i \sin \alpha n;$$

тогда

$$y = C_1 \rho^n (\cos \alpha n + i \sin \alpha n) + C_2 \rho^n (\cos \alpha n - i \sin \alpha n) + C_3 \rho_1^n (\cos \beta n + i \sin \beta n) + C_4 \rho_1^n (\cos \beta n - i \sin \beta n) + \frac{T}{2 + 2L_1 + L_2}.$$

Вместо R_1^n, R_2^n, R_3^n и R_4^n , возьмем 4 других решения, которые являются линейными комбинациями.

$$\frac{R_1^n + R_2^n}{2} = \rho^n \cos \alpha n; \quad \frac{R_3^n + R_4^n}{2} = \rho_1^n \cos \beta n;$$

$$\frac{R_1^n - R_2^n}{2i} = \rho^n \sin \alpha n; \quad \frac{R_3^n - R_4^n}{2i} = \rho_1^n \sin \beta n.$$

Следовательно, окончательный вид уравнения, выражающий прогиб в узле, где приложен груз, будет таков:

$$y = \rho^n (C_1 \cos \alpha n + C_2 \sin \alpha n) + \rho_1^n [C_3 \cos \beta n + C_4 \sin \beta n] + \frac{T}{2 + 2L_1 + L_2}. \quad (67)$$

Найдем теперь произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 . Балка бесконечно длинная в обе стороны. Начало координат возьмем под грузом P . При одном грузе на балке влияние его в бесконечности равно 0, так что при определении произвольных постоянных величину $\frac{T}{2 + 2L_1 + L_2}$ можем не учитывать. При $n = \frac{x}{l}$ уравнение прогиба напишется так:

$$y = \rho^{\frac{x}{l}} \left[C_1 \cos \frac{\alpha x}{l} + C_2 \sin \frac{\alpha x}{l} \right] + \rho_1^{\frac{x}{l}} \left[C_3 \cos \frac{\beta x}{l} + C_4 \sin \frac{\beta x}{l} \right]. \quad (67')$$

Если одно из $\rho < 1$, то при x , равном бесконечности, оно стремится к 0. Прогиб также в длинных стержнях на конце убывает до нуля.

Пусть $\rho < 1$; тогда, чтобы сохранить условие, что $y = 0$ при $x = \infty$, нужно, чтобы два члена отсутствовали, т. е. чтобы $C_3 = 0$ и $C_4 = 0$. Так что

$$y = \rho^{\frac{x}{l}} \left(C_1 \cos \frac{\alpha x}{l} + C_2 \sin \frac{\alpha x}{l} \right). \quad (68)$$

Определим теперь величину C_1 и C_2 из двух таких условий: 1) при $x=0$ касательная к упругой линии горизонтальна, вследствие симметрии изгиба, следовательно, $\varphi_0 = 0$; 2) поперечная сила также известна при $x=0$, так как сумма реактивных сил основания на протяжении половины балки равняется $\frac{P}{2}$, т. е. $Q = -\frac{P}{2}$.

С другой стороны, из формулы (19) известно, что

$$Q = -\frac{6i}{l} \left[\varphi_n \gamma_3 + \varphi_{n+2} \gamma_1 + 2 \frac{y_n}{l} \gamma_1 - 2 \frac{y_{n+2}}{l} \gamma_2 \right] + Q'.$$

Найдем выражение φ для применения первого условия.

Из (59):

$$\varphi_{n+1} = \frac{y_n}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} y_{n+2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1'} y_n - \frac{\gamma_3}{\gamma_1'} y_{n+1} - \frac{N_1}{\gamma_1'}. \quad (69)$$

Определив y , входящие в это уравнение, мы можем из (68); так, при $x = 2l$:

$$y_{n+2} = \rho^2 (C_1 \cos 2\alpha + C_2 \sin 2\alpha);$$

при $x = l$:

$$y_{n+1} = \rho (C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha) = y_n;$$

при $x = 0$:

$$y_{n+1} = C_1.$$

Поставив эти выражения в (69) и учтя, что $\varphi_{n+1} = 0$, получим:

$$C_1 \left[\rho^2 \cos 2\alpha - \rho (\gamma_1' + \gamma_2') \cos \alpha - \gamma_3' \right] + C_2 \left[\rho^2 \sin 2\alpha - \rho (\gamma_1' + \gamma_2') \sin \alpha \right] = N_1. \quad (70)$$

В таком же виде представим (19), имея в виду, что из (57):

$$\varphi_{n+2} = -\frac{y_{n+3}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_{n+1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} y_{n+2};$$

$$C_1 \left[-\frac{\rho^3 \gamma_4}{\alpha_2} \cos 2\alpha + \rho \left(\frac{\beta_2 \gamma_4}{\alpha_2} - \frac{2\gamma_2}{l} \right) \cos \alpha - \frac{\alpha_1 \gamma_4}{\alpha_2} + \frac{2\gamma_1}{l} \right] +$$

$$+ C_2 \left[-\frac{\rho^3 \gamma_4}{\alpha_2} \sin 2\alpha + \rho \left(\frac{\beta_2 \gamma_4}{\alpha_2} - \frac{2\gamma_2}{l} \right) \sin \alpha \right] = \frac{Pl}{12i}. \quad (71)$$

Таким образом, мы получим два уравнения с неизвестными C_1 и C_2 , которые легко решить, предварительно вычислив все коэффициенты, входящие в эти уравнения, по формулам:

$$N_1 = -\frac{Pl^2}{24i} \left[\frac{8\gamma_1 l + 3i_1}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2} \right]; \quad (72)$$

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_2}{l} \left[\frac{8\gamma_1 l + 3i_1}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2} \right]; \quad (73)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\gamma_2 \gamma_2 + 3\gamma_1^2}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2}; \quad (74)$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma_1 l}{2i} \left[\frac{8\gamma_1 l + 3i_1}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2} \right]; \quad (75)$$

$$\alpha_3 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2 l}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2}; \quad (76)$$

$$\beta_0 = \frac{12\gamma_1 \gamma_2}{l(2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2)}; \quad (77)$$

$$\beta_1 = \frac{1 - \gamma_1 \gamma_1}{l(2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2)}; \quad (78)$$

$$\beta_2 = \frac{4\gamma_1 \gamma_2}{2\gamma_2 \gamma_2 - 3\gamma_1^2}; \quad (79)$$

$$\gamma' = \alpha_2 \alpha_0 = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}; \quad (80)$$

$$\gamma'_1 = \beta_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}; \quad (81)$$

$$\gamma'_2 = \alpha_2 \beta_0 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{\alpha_3}; \quad (82)$$

$$\gamma'_3 = \frac{\alpha_1 \beta_2 \alpha_2}{\alpha_3} - \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1. \quad (83)$$

где γ и γ' — коэффициенты, характеризующие балку на упругом основании и определяющиеся по формулам (21) — (26). Зная C_1 и C_2 , мы можем всегда найти все неизвестные величины в местах соединения колонн с фундаментом по следующим формулам:

$$y_{n+1} = \rho \frac{x}{l} \left(C_1 \cos \frac{\alpha x}{l} + C_2 \sin \frac{\alpha x}{l} \right) + \frac{T}{2 + 2L_1 + L_2}. \quad (84)$$

Величину $\frac{T}{2 + 2L_1 + L_2}$ берем в случае груза в этой точке.

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{\gamma_1} (\gamma'_{n+2} - \gamma'_1 y_{n+2} - \gamma'_2 y_n - \gamma'_3 y_{n+1} - N_1); \quad (85)$$

$$M_{n+1} = 2i \left[2\varphi_{n+1} \gamma_1 + \varphi_{n+2} \gamma_2 + \frac{3y_{n+1} \gamma_3}{l} - \frac{3y_{n+2} \gamma_4}{l} \right] + M'_{n+1}; \quad (86)$$

$$Q_{n+1} = -\frac{6i}{l} \left[\varphi_{n+1} \gamma_3 + \varphi_{n+2} \gamma_4 + \frac{2y_{n+1} \gamma_1}{l} - \frac{2y_{n+2} \gamma_2}{l} \right] + Q'_{n+1}. \quad (87)$$

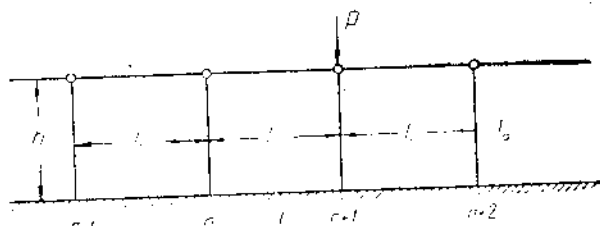
§ 6. Пример к главе II

Рассчитать бесконечно длинную балку, опирающуюся на упругое основание и жестко связанную со стойками, верхний конец которых закреплен шарнирно. Стойки расположены на равном расстоянии (фиг. 12).
Данные:

$$l = 8 \text{ м};$$

$$h = 6 \text{ м};$$

$$p = 5 \text{ т}.$$



Фиг. 12.

Ширина фундаментной балки $b = 1 \text{ м}$;

$$E = 2\,100\,000 \text{ т м}^2.$$

Коэффициент жесткости основания $k_0 = 5000 \text{ т м}^3$.

Моменты инерции:

$$J_0 = 0,00213 \text{ м}^4;$$

$$J_1 = 0,0354 \text{ м}^4.$$

Погонные жесткости:

$$i_1 = 3,55 \text{ м}^{-1};$$

$$i_2 = 11,9 \text{ м}^{-1}.$$

Определим все коэффициенты, входящие в формулы для нахождения деформаций. По формулам (21) — (26) найдем χ и γ ; по (72) — (83) α , β , γ' , N_1 .

Жесткость основания $k = k_0 \cdot b = 5000 \cdot 1 = 5000 \text{ т/м}^2$.

Характеристика $L = 2 \text{ м}$.

Тогда:

$$\chi_1 = 2,01;$$

$$\chi_2 = -0,015;$$

$$\chi_3 = 5,34;$$

$$\chi_4 = -0,3;$$

$$\gamma_1 = 21,378;$$

$$\gamma_2 = -1,1;$$

$$\alpha_0 = 78,9;$$

$$\alpha_1 = -1,278;$$

$$\alpha_2 = 86;$$

$$\alpha_3 = -0,304;$$

$$\beta_0 = -2,09;$$

$$\beta_1 = 40,6;$$

$$\beta_2 = 5,42;$$

$$\gamma' = 24320;$$

$$\gamma'_1 = -356,58;$$

$$\gamma'_2 = 282,26;$$

$$\gamma'_3 = -1530,474;$$

$$N_1 = 80,25$$

По формулам (63), (64), (65) найдем:

$$L_1 = L_3 = 73,48;$$

$$L_2 = 3063;$$

$$L_4 = 1;$$

$$T = -0,284.$$

Тогда уравнение (41) напишется так:

$$y_{n+1} + 73,48 y_{n+2} + 3063 y_{n+2} + 73,48 y_{n+1} + y_n = -0,284.$$

Характеристическое уравнение

$$R^4 + 73,48 R^3 + 3063 R^2 + 73,48 R + 1 = 0.$$

Корни этого возвратного уравнения выражаются комплексным числом

$$R_{1,2} = -0,012 \pm 0,0135 i; \quad R_{3,4} = -36,728 \pm 41,378 i.$$

Найдем модуль комплексного числа:

$$\rho = \sqrt{0,012^2 + 0,0135^2} = 0,018;$$

$$\cos \alpha = -\frac{0,012}{0,018} = -0,666;$$

$$\sin \alpha = \frac{0,0135}{0,018} = 0,75.$$

Подставив все эти величины в уравнения (70), (71), после преобразования получим:

$$5,337 C_1 + 0,003456 C_2 = 0,28;$$

$$1529,583 C_1 + C_2 = 80,25.$$

Решив эти два уравнения, найдем:

$$C_1 = 0,0525;$$

$$C_2 = -0,0533.$$

Прогобы в узловых точках:

$$y_{n+1} = 0,0525 \text{ мм}^3;$$

$$y_{n+2} = -0,00135 \text{ мм}^3;$$

$$y_{n+3} = +0,0000153 \text{ мм}^3 \text{ и т. д.}$$

Углы поворота

$$\varphi_{n+1} = 0; \quad \varphi_{n+2} = 0,000695 \text{ мм}^2$$

$$\varphi_{n+3} = 0,0000165 \text{ мм}^2 \text{ и т. д.}$$

Действительная величина y и φ получится, если разделим на 210 т/м^2 .

Моменты в узловых точках

$$\text{Узел } n+1: \quad M_{n+1}^{ac} = M_{n+1}^{np} = 2,498 \text{ мм.}$$

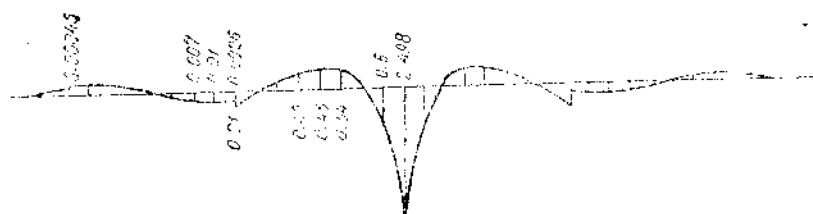
$$\text{Узел } n+2: \quad M_{n+2}^{np} = 0,01 \text{ мм.}$$

$$M_{n+2}^{ac} = 0,0026 \text{ мм.}$$

$$\text{Узел } n+3: \quad M_{n+3}^{np} = -0,00045 \text{ мм.}$$

$$Q_{1-2} = -0,0312 \text{ т и т. д.}$$

Эпюры моментов



Фиг. 13.

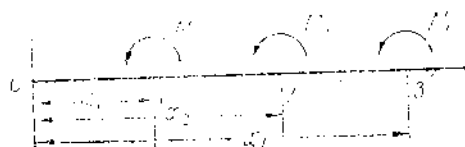
Глава III

РАСЧЕТ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОЙ СВЯЗИ С КОЛОННАМИ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В этой главе решена следующая задача: фундаментная балка на упругом основании имеет в определенных точках опоры, которые оказывают упругое сопротивление повороту. Учтя связь колонн с данной балкой, даем решения, аналогичные основным формулам для расчета балок на упругом основании.¹

§ 7. Формулы для расчета балки с учетом связи колонн методом начальных условий

Пусть дана балка, имеющая в точках 1, 2, 3, 4... (фиг. 14) опоры, оказывающие упругое сопротивление повороту. Моменты, развивающиеся на внешних концах колонн при закручивании этого конца на угол $\varphi = 1$, будут: $M_1 = \frac{3EI}{h} \varphi$ (если верхний



Фиг. 14.

будут: $M_1 = \frac{3EI}{h} \varphi$ (если верхний
конец шарнирный) и $M_1 = \frac{4EI}{h} \varphi$.

(если верхний конец заделанный).

Требуется дать решение для величины M_0 , аналогичное формулам (I, II, III, IV).

Итак, будем искать решение в виде:

$$y_n = y_0 D_n^0 + \varphi_0 E_n + M_0 F_n + Q_0 G_n + H_n; \quad (88)$$

$$\varphi_n = \varphi_0 D_n' - M_0 E_n' - Q_0 F_n' - y_0 G_n' + H_n'; \quad (89)$$

$$M_n = M_0 D_n'' + Q_0 E_n'' + \Psi_0 G_n'' + y_0 F_n'' + H_n''; \quad (90)$$

$$Q_n = Q_0 D_n''' + \frac{1}{2} E_n''' + \frac{1}{2} F_n''' - M_0 G_n''' + H_n'''. \quad (91)$$

Возьмем в качестве основной системы балку на упругом основании и нагрузим ее, кроме заданных нагрузок, еще моментами

$$M_i = -\frac{3EI}{h} \psi_i = -149.0$$

¹ Проф. А. А. Уманский, Сводный курс строительной механики, ч. I.

ищем величины φ выразим по формуле (89). Пользуясь формулами II, III, IV), напомним:

$$(a) \quad y_n = y_0 A_n + L \varphi_0 B_n - \frac{L^2}{EJ} M_0 C_n - \frac{L^3}{EJ} Q_0 D_n + [y_n] + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} p_i (\varphi_0 D'_n - M_0 E'_n - Q_0 F'_n - y_0 G'_n + H'_n) \frac{L^2}{EJ} C_{n-i};$$

$$(b) \quad \varphi_n = \varphi_0 A_n - \frac{L}{EJ} M_0 B_n - \frac{L^2}{EJ} Q_0 C_n - \frac{4}{L} y_0 D_n + [\varphi_n] + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} p_i (\varphi_0 D'_n - M_0 E'_n - Q_0 F'_n - y_0 G'_n + H'_n) \frac{L}{EJ} B_{n-i};$$

$$(c) \quad M_n = M_0 A_n + L Q_0 B_n + k L^2 y_0 C_n + k L^2 \varphi_0 D_n + [M_n] - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} p_i (\varphi_0 D'_n - M_0 E'_n - Q_0 F'_n - y_0 G'_n + H'_n) A_{n-i};$$

$$(d) \quad Q_n = Q_0 A_n + k L \varphi_0 B_n + k L^2 y_0 C_n - \frac{4}{L} M_0 D_n + [\dot{Q}_n] + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} p_i (\varphi_0 D'_n - M_0 E'_n - Q_0 F'_n - y_0 G'_n + H'_n) \frac{4}{L} D_{n-i};$$

где $[y_n]$, $[\varphi_n]$, $[M_n]$ и $[Q_n]$ — члены, зависящие от местной нагрузки.

Если теперь в выражениях (a—d) вынесем знаки сумм членов, содержащих постоянные начальные параметры, то придем к той формуле, которую нам и требовалось определить, т. е. к формулам (88) и (91). Одновременно получим выражения, определяющие функции влияния $D_n E_n F_n G_n$ свободных членов H_n .

$$\begin{aligned} D_n^0 &= A_n - \frac{L^2}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} p_i G_i C_{n-i}; \\ E_n &= L B_n + \frac{L^2}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} p_i D_i C_{n-i}; \\ G_n &= \frac{L^3}{EJ} D_n + \frac{L^2}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} p_i F_i C_{n-i}; \\ F_n &= \frac{L^2}{EJ} C_n + \frac{L^2}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} p_i E_i C_{n-i}; \\ H_n &= [y_n] + \frac{L^2}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} p_i H_i C_{n-i}; \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned}
 D'_n &= A_n + \frac{L}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i D'_i B_{n-i}; \\
 E'_n &= \frac{L}{EJ} B_n + \frac{L}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i E'_i B_{n-i}; \\
 F'_n &= \frac{L^2}{EJ} C_n + \frac{L}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i F'_i B_{n-i}; \\
 G'_n &= \frac{4}{L} D_n + \frac{L}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i G'_i B_{n-i}; \\
 H'_n &= [C_n] + \frac{L}{EJ} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i H'_i B_{n-i};
 \end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
 D''_n &= A_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i E'_i A_{n-i}; \\
 E''_n &= LB_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i F'_i A_{n-i}; \\
 F''_n &= kL^2 C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i G'_i A_{n-i}; \\
 G''_n &= kL^2 D_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i D'_i A_{n-i}; \\
 H''_n &= [M_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i H'_i A_{n-i};
 \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
 D'''_n &= A_n - \frac{4}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i F'_i D_{n-i}; \\
 E'''_n &= kLB_n - \frac{4}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i G'_i D_{n-i}; \\
 F'''_n &= kL^2 C_n + \frac{4}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i D'_i D_{n-i}; \\
 G'''_n &= \frac{4}{L} D_n + \frac{4}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i E'_i D_{n-i}; \\
 H'''_n &= [C_n] + \frac{4}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i H'_i D_{n-i}.
 \end{aligned} \tag{95}$$

Эти формулы замечательны тем, что, например, в формуле (93) мы можем выразить D'_n , когда известны $D'_1, D'_2, D'_3, \dots, D'_{n-1}$; следовательно, мы можем вычислить одно значение за другим, а именно:

$$\begin{aligned}
 D'_1 &= A_1; \\
 D'_2 &= A_2 + \frac{L}{EJ} \psi_1 D'_1 B_{n-1}; \\
 D'_3 &= A_3 + \frac{L}{EJ} \psi_1 D'_1 B_{n-2} + \frac{L}{EJ} \psi_2 D'_2 B_{n-2} \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

Также вычисляются и величины F'_n, E'_n и G'_n .

Далее найдем начальные параметры.

1. Оба конца жестко заделаны.

Заданными величинами являются осадка опор и угол поворота, неизвестные моменты и перерезывающие силы на концах. Взяв начало координат на левом конце балки, напишем два уравнения по формулам (88) и (89), выражающие, что при $x = l$; $\psi_n = 0$ и $y_n = 0$;

$$-M_0 F_n - Q_n G_n + H_n = 0;$$

$$-M_0 E'_n - Q_0 F'_n + H'_n = 0.$$

Отсюда

$$M_0 = \frac{H'_n G_n - H_n F'_n}{E'_n G_n - F'_n F'_n}; \quad (96)$$

$$Q_0 = \frac{H_n E'_n - H'_n F_n}{E'_n G_n - F'_n F'_n}. \quad (97)$$

Аналогичными рассуждениями получим величины неизвестных начальных параметров для балки со свободно опертыми концами, а именно:

$$y_0 = \frac{G_n H''_n - F''_n H'_n}{F''_n F'_n - E''_n G'_n}; \quad (98)$$

$$\psi_0 = \frac{E''_n H''_n - F''_n H'_n}{F''_n F'_n - E''_n G'_n}. \quad (99)$$

Таким образом, для любого случая закрепления концов балки при помощи формул (88)—(91) мы можем определить начальные условия. Проведем все вычисления для входящих в формулы (96)—(99) величин на численном примере.

§ 8. Пример к главе III

Рассчитаем балку, лежащую на упругом основании и имеющую в точках 1, 2 жесткую связь с колоннами, верхний конец которых соединен шарнирно (фиг. 15).

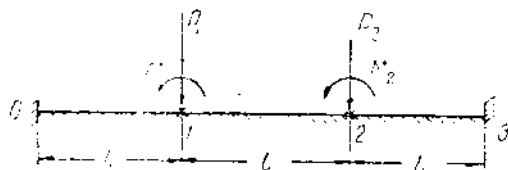
Значения сил:

$$p_1 = 5 \text{ т};$$

$$p_2 = 8 \text{ т};$$

Длина пролета $l = 3 \text{ м};$

Высота колонны $h = 6 \text{ м}.$



Фиг. 15.

Моменты инерции:

$$J_{столб} = 0,00213 \text{ м}^4;$$

$$J_{балка} = 0,018 \text{ м}^4.$$

$$b = 1 \text{ м}; E = 2100000 \text{ т/м}^2;$$

$$k = k_b = 4000 \text{ т/м}^2;$$

$$L = 2,48 \text{ м};$$

$$M_0 = p_1 p_2, \text{ где } p = \frac{3EI}{h} = 3240.$$

Начало координат возьмем в точке O . Концы балки жестко заделаны: следовательно, неизвестные M_0 и Q_0 определим по (96) и (97):

$$M_0 = \frac{H_3' G_3 - H_3 F_3'}{E_3' G_3 - F_3 F_3'};$$

$$Q_0 = \frac{H_3 E_3' - H_3' F_3}{E_3' G_3 - F_3 F_3'}.$$

Величины H_3' , G_3 , F_3' , E_3' , F_3 , найдем из (92) и (93):

$$F_3 = -0,00069; F_3' = -0,00069;$$

$$G_3 = 0,00092; E_3' = -0,00084;$$

$$H_3 = 0,005; H_3' = 0,0025.$$

Подставив эти значения в выражения для M_0 и Q_0 , получим:

$$M_0 = -4,6 \text{ тм};$$

$$Q_0 = 2,00 \text{ тм}.$$

Определим в точках 1, 2 углы поворота по формуле (89):

$$\varphi_1 = 0,00011;$$

$$\varphi_2 = -0,00007.$$

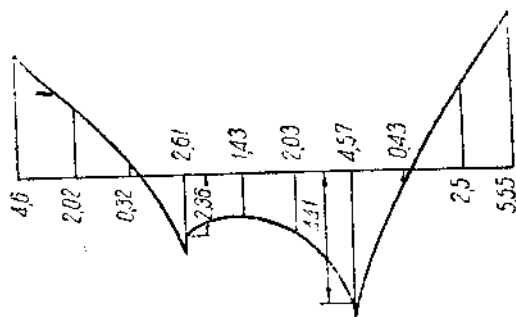
Моменты, развивающиеся на конце колонн:

$$M_1 = -\mu \varphi_1 = -0,246 \text{ тм};$$

$$M_2 = -\mu \varphi_2 = 0,157 \text{ тм}.$$

Нагрузив балку, кроме известных нагрузок, еще моментами M_1 , делаем расчет, как обычно, по формулам (I, II, III, IV).

Эпюра моментов



Фиг. 16.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПЛОСКОГО ИЗГИБА КОРОТКОЙ БАЛКИ

Рассмотрим вопрос о распределении напряжений в короткой и высокой балке в том случае, когда концы ее закреплены так, что перемещения точек конечных сечений вдоль оси балки равны нулю.

Допустим, что на балку, вдоль ее верхней грани, действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q (фиг. 1).

Обозначим высоту балки через $2c$, пролет через $2l$. Допустим, что высота и пролет балки величины одного и того же порядка.

Расположим оси координат по осям симметрии балки (фиг. 1). Ось x направим горизонтально вправо. Ось y вертикально вниз.

Будем рассматривать эту задачу, как плоскую задачу теории упругости.

Как известно, функция напряжений должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям, которые в нашем случае будут:

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm c; \quad \tau_{xy} &= 0; \quad \sigma_y = 0; \\ \text{при } y = -c; \quad \tau_{xy} &= 0; \quad \sigma_y = -q; \\ \text{при } x = \pm l; \quad \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} dy &= \mp ql; \quad u_c = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где u — перемещение по направлению оси x -ов.

Возьмем сначала функцию напряжений в виде полинома:

$$\varphi^{(0)} = d \left(\frac{x^2 y^3}{6} - \frac{y^5}{30} \right) + \frac{b x^2 y}{2} + \frac{a x^3}{2} + \frac{f y^3}{6} + \frac{g y^2}{2} + 2. \quad (3)$$

Соответствующие напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial y^2} = d \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + f y + g; \\ \sigma_y^{(0)} &= \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x^2} = \frac{1}{3} d y^3 + b y + a; \\ \tau_{xy}^{(0)} &= - \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial x \partial y} = - (d y^2 + b) x; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Воспользовавшись условиями по граням: $y = \pm c$, получим¹

$$a = -\frac{q}{2}; \quad b = \frac{3q}{4c}; \quad d = -\frac{3q}{4c^3}. \quad (5)$$

Заметив, что величина $\frac{2}{3}c^3 = J$ равна моменту инерции сечения шириной, равной единице, имеем:

$$a = -\frac{qc^3}{3J}; \quad b = +\frac{qc^2}{2J}; \quad d = -\frac{q}{2J}. \quad (5a)$$

Напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= -\frac{3q}{4c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + fy + g = -\frac{q}{2J} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + fy + g; \\ \sigma_y^{(0)} &= -\frac{3q}{4c^3} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) = -\frac{q}{2J} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right); \\ \tau_{xy}^{(0)} &= -\frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2)x = -\frac{q}{2J} (c^2 - y^2)x. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Нетрудно убедиться, что при полученных значениях напряжений $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$ и $\tau_{xy}^{(0)}$ удовлетворяется первое из условий (2) по граням $x = \pm l$ при $x = \pm l$:

$$\int_{-c}^c \tau_{xy}^{(0)} dy = \mp ql.$$

Напряжения $\sigma_x^{(0)}$ дадут по граням $x = \pm l$ равнодействующие усилия P , нормальные к соответствующим граням

$$\text{при } x = \pm l: \quad \int_{-c}^c \sigma_x^{(0)} dy = P; \quad (6)$$

и равнодействующие моменты

$$\text{при } x = \pm l: \quad \int_{-c}^c \sigma_x^{(0)} y dy = M_0. \quad (7)$$

Величины P и M_0 должны быть таковы, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = \pm l \text{ и } y = 0: & \quad u_l = 0; \\ \text{и при } x = \pm l \text{ и } y = \pm c: & \quad u_l = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Воспользовавшись равенствами (6) и (7), получим:

$$\text{откуда} \quad \int_{-c}^c \sigma_x^{(0)} dy = \int_{-c}^c \left\{ d \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + fy + g \right\} dy = 2cg = P, \quad (9)$$

$$g = \frac{P}{2c};$$

$$\int_{-c}^c \sigma_x^{(0)} y dy = \int_{-c}^c \left\{ d \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + fy + g \right\} y dy;$$

при $x = \pm l$, подставив значение d , получим:

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x^{(0)} y dy = -\frac{ql^2}{2} + \frac{qc^2}{5} + \frac{2c^3}{3} \cdot f = M_0;$$

откуда

$$f = \frac{3M_0}{2c^3} + \frac{3ql^2}{4c^3} - \frac{3q}{10c} \quad (10)$$

или

$$f = \frac{1}{J} \left\{ M_0 + \frac{ql^2}{2} - \frac{qc^3}{5} \right\}. \quad (10a)$$

Определим перемещения. Как известно:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_x - \mu \sigma_y; & E \frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma_y - \mu \sigma_x; \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где v — перемещение по направлению оси y .

В нашем случае:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} &= d \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + fy + g - \mu \left(\frac{1}{3} dy^3 + by + a \right); \\ Eu^{(0)} &= d \left(\frac{x^3 y}{3} - \frac{2}{3} xy^3 \right) + fxy + gx - \mu \left(\frac{1}{3} dy^4 + byx + a \right) \cdot x + f_1(y); \end{aligned} \quad (12)$$

$$E \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = \frac{1}{3} dy^3 + by + a - \mu d \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) - \mu fy - \mu g,$$

$$Ev^{(0)} = \frac{1}{12} dy^4 + \frac{by^2}{2} + ay - \mu d \left(\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{6} \right) - \frac{\mu fy^2}{2} - \mu gy + f_2(x). \quad (13)$$

Воспользовавшись уравнением

$$\text{получим} \quad E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2(1+\mu) \tau_{xy},$$

$$\begin{aligned} d \left(\frac{x^3}{3} - 2xy^2 \right) + fx - \mu (dy^3 + b)x + \frac{df_1}{dy} - \mu dxy^2 + \frac{df_2}{dx} = \\ = 2(1+\mu)(-dxy^2 - bx) \end{aligned}$$

или

$$\frac{dx^3}{8} + fx + 2bx + \mu bx + \frac{df_2}{dx} + \frac{df_1}{dy} = 0;$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_2}{dx} + d \frac{x^3}{3} + fx + 2bx + \mu bx &= m; \\ \frac{df_1}{dy} &= n; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

причем:

$$m + n = 0 \quad \text{или} \quad m = -n.$$

Интегрируя уравнения (14), получим:

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) &= ny + \gamma; \\ f_2(x) &= -\frac{dx^4}{12} - \frac{fx^2}{2} - bx^2 - \frac{\mu bx^2}{2} + mx + \delta. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Полученные постоянные интегрирования m , n , γ и δ определим из следующих условий:

1. Так как нагрузка симметрична относительно оси y , то среднее сечение балки-стенки не перемещается по направлению оси x и остается плоским, т. е. при $x = 0$

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

откуда

$$n = 0; \quad \gamma = 0. \quad (17)$$

Следовательно

$$m = -n = 0. \quad (17a)$$

2. Величину δ можно определить, приняв во внимание, что перемещение центра тяжести опорного сечения по направлению оси y должно равняться нулю, т. е.

$$y = 0;$$

$$\text{при } x = \pm l \text{ и } v^{(0)} = 0. \quad (18)$$

Воспользовавшись условием (18), получим:

$$\delta = \frac{dl^4}{12} + \frac{fl^2}{2} + bl^2 + \frac{\mu bl^2}{2}. \quad (19)$$

Таким образом

$$Eu^{(0)} = \frac{d}{3}(x^2y - 2xy^3) + fxy + gx - \mu \left(\frac{dy^3}{3} + by + a \right) \cdot x. \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Ev^{(0)} &= \frac{dy^4}{12} + \frac{by^3}{2} - ay - \mu d \left(\frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{6} \right) - \frac{\mu fy^2}{2} - \mu gy - \\ &\quad - \frac{dx^4}{12} - \frac{fx^2}{2} - \frac{\mu bx^2}{2} - bx^2 + \frac{dl^4}{12} + \frac{fl^2}{2} + bl^2 + \frac{\mu bl^2}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Перемещения точек опорного сечения по направлению оси x будут при $x = l$

$$Eu_l^{(0)} = \frac{dl}{3}(l^2 - 2y^2) \cdot y + fly + gl - \mu \left(\frac{dy^3}{3} + by + a \right) l. \quad (22)$$

Воспользовавшись приведенными выше условиями (8), получим

1. При $x = \pm l$ и $y = 0$:

$$u_l = 0,$$

имеем

$$gl - \mu al = 0,$$

откуда

$$g = a\mu = -\frac{q^3}{2}. \quad (23)$$

Подставив в выражение (20), вместо a , b , d и f , их значения, согласно формулам (5a) и (10a), получим:

$$\begin{aligned} Eu^{(0)} &= -\frac{q}{6J}(x^2 - 2y^2)xy + \frac{1}{J} \left(M_0 + \frac{ql^2}{2} - \frac{qc^2}{5} \right) xy + \\ &\quad + \frac{q^3}{6J}(y^3 - 3cy^2 + 2c^2x) - \frac{\mu q}{2} \cdot x; \end{aligned} \quad (20a)$$

2. При $x = l$ и $y = \pm c$: $u_l = 0$

имеем

$$\pm Eu_l^{(0)} = -\frac{q}{6J}(l^2 - 2c^2)lc + \frac{1}{J}\left(M_0 + \frac{ql^2}{2} - \frac{qc^2}{5}\right)lc - \frac{q\mu l}{2} = 0;$$

откуда

$$M_0 = -\frac{ql^2}{3}\left\{1 + \frac{1}{5}\frac{c^2}{l^2}(2 - 5\mu)\right\}. \quad (24)$$

Подставив это значение M_0 в формулу (10а), получим:

$$f = \frac{q}{6J}\{l^2 - 2c^2(1 - \mu)\}. \quad (25)$$

Приняв во внимание последнее равенство (25), получим для перемещений точек опорного сечения следующее выражение:

$$Eu_l^{(0)} = \frac{ql}{6J}(2 + \mu)(y^2 - c^2) \cdot y. \quad (26)$$

Как видно из последнего выражения, при полученных напряжениях опорное сечение будет искривляться, не поворачиваясь (так как при $y = \pm c$ $u_l = 0$) и не перемещаясь поступательно.

Приложим к опорным сечениям усилия, распределенные по закону:

$$\sigma_x^{(0)} = \sum_1^{\infty} A_n \sin py \quad (27)$$

и подберем коэффициенты A_n так, чтобы опорное сечение выравнивалось. Соответствующую функцию напряжений возьмем в виде:

$$\varphi_1 = \sum_1^{\infty} X_n \sin py, \quad (28)$$

где $p = \frac{n\pi}{c}$; а X_n представляет собой функцию только x .

Частное решение дифференциального уравнения (1) будет:

$$\varphi_n^{(1)} = X_n \sin py.$$

Подставив это значение φ в уравнение (1), получим:

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - 2p^2 \frac{d^2 X_n}{dx^2} + p^4 X_n = 0;$$

откуда

$$X_n = C_n \operatorname{sh} px + D_n \operatorname{ch} px + E_n x \operatorname{sh} px + F_n x \operatorname{ch} px;$$

следовательно:

$$\varphi^{(1)} = \sum_1^{\infty} \sin py (C_n \operatorname{sh} px + D_n \operatorname{ch} px + E_n x \operatorname{sh} px + F_n x \operatorname{ch} px). \quad (28a)$$

Граничные условия будут:

$$\text{при } x = \pm l; \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0; \quad \sigma_x^{(1)} = A_n \sin py. \quad (29)$$

Напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial y^2} = \sum_1^\infty -p^2 \sin py (C_n \operatorname{sh} px + D_n \operatorname{ch} px + \\ &\quad + E_n x \operatorname{sh} px + F_n x \operatorname{ch} px); \\ \sigma_y^{(1)} &= \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} = \sum_1^\infty \sin py (C_n p^2 \operatorname{sh} px + D_n p^2 \operatorname{ch} px + \\ &\quad + E_n p^2 x \operatorname{sh} px + F_n p^2 x \operatorname{ch} px + 2E_n p \operatorname{ch} px + 2F_n p \operatorname{sh} px); \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_1^\infty p \cos py (C_n p \operatorname{ch} px + D_n p \operatorname{sh} px + \\ &\quad + F_n p x \operatorname{ch} px + E_n \operatorname{sh} px + F_n p x \operatorname{sh} px + F_n \operatorname{ch} px). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Воспользовавшись граничными условиями, получим:

$$C_n p \operatorname{ch} pl + D_n p \operatorname{sh} pl + E_n pl \operatorname{ch} pl + E_n \operatorname{sh} pl + F_n pl \operatorname{sh} pl + F_n \operatorname{ch} pl = 0;$$

$$C_n p \operatorname{ch} pl - D_n p \operatorname{sh} pl - E_n pl \operatorname{ch} pl - E_n \operatorname{sh} pl + F_n pl \operatorname{sh} pl + F_n \operatorname{ch} pl = 0;$$

$$C_n \operatorname{sh} pl + D_n \operatorname{ch} pl + E_n l \operatorname{sh} pl + F_n l \operatorname{ch} pl = -\frac{A_n}{p^2};$$

$$-C_n \operatorname{sh} pl + D_n \operatorname{ch} pl + E_n l \operatorname{sh} pl - F_n l \operatorname{ch} pl = -\frac{A_n}{p^2}.$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} C_n &= 0; \\ D_n &= -\frac{A_n}{p^2} \cdot \frac{pl \operatorname{ch} pl + \operatorname{sh} pl}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl}; \\ E_n &= +\frac{A_n}{p^2} \cdot \frac{p \operatorname{sh} pl}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl}; \\ F_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sum_1^\infty A_n \frac{(pl \operatorname{ch} pl + \operatorname{sh} pl) \operatorname{ch} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \cdot \sin py; \\ \sigma_y^{(1)} &= \sum_1^\infty A_n \frac{px \cdot \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px + (\operatorname{sh} pl - pl \operatorname{ch} pl) \operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \cdot \sin py; \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \sum_1^\infty A_n \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \cdot \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \cos py. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

При $y = \pm c$

$$\tau_{xy}^{(1)*} = \sum_1^\infty A_n \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} (-1)^n; \quad (33)$$

т. е. по граням $y = \pm c$ возникают касательные напряжения. Как нетрудно убедиться, равнодействующая соответствующих касательных усилий

$$\int_{-l}^{+l} \tau_{xy}^{(1)*} dx \text{ будет равна нулю.}$$

Приложим по граням $y = \pm c$ касательные напряжения

$$\tau_{xy}^{**} = \sum_1^{\infty} A_m \sin kx. \quad (34)$$

Коэффициенты A_m подберем так, чтобы приложенные напряжения τ_{xy}^{**} уничтожили по граням $y = \pm c$ касательные напряжения $\tau_{xy}^{(1)*}$.

Соответствующую функцию напряжений возьмем в виде

$$\varphi^{(2)} = \sum_1^{\infty} \cos kx \cdot Y, \quad (35)$$

где $k = \frac{m\pi}{l}$; а Y — функция одного только y . Подставив $\varphi^{(2)}$ в дифференциальное уравнение (1), получим, как выше, обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, из которого:

$$Y = C_m \operatorname{sh} ky + D_m \operatorname{ch} ky + E_m y \operatorname{sh} ky + F_m y \operatorname{ch} ky;$$

следовательно:

$$\varphi^{(2)} = \sum_1^{\infty} \cos kx (C_m \operatorname{sh} ky + D_m \operatorname{ch} ky + E_m y \operatorname{sh} ky + F_m y \operatorname{ch} ky). \quad (35a)$$

Граничные условия будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = \pm c: \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{**} = \sum_1^{\infty} A_m \sin kx; \quad \sigma_y = 0; \\ \text{Напряжения} \\ \text{при } x = \pm l: \quad \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} dy = 0. \end{array} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x^{(2)} = \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial y^2} = \sum_1^{\infty} \cos kx (C_m k^2 \operatorname{sh} ky + D_m k^2 \operatorname{ch} ky + E_m k^2 y \operatorname{sh} ky + \\ \quad + F_m k^2 y \operatorname{ch} ky + 2E_m k \operatorname{ch} ky + 2F_m k \operatorname{ch} ky); \\ \sigma_y^{(2)} = \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x^2} = \sum_1^{\infty} -k^2 \cos kx (C_m \operatorname{sh} ky + D_m \operatorname{ch} ky + E_m y \operatorname{sh} ky + F_m y \operatorname{ch} ky); \\ \tau_{xy}^{(2)} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_1^{\infty} k \sin kx (C_m k \operatorname{ch} ky + D_m k \operatorname{sh} ky + E_m ky \operatorname{ch} ky + \\ \quad + E_m \operatorname{sh} ky + F_m ky \operatorname{sh} ky + F_m \operatorname{ch} ky). \end{array} \right\} \quad (37)$$

Воспользовавшись граничными условиями, получим:

$$C_m k \operatorname{sh} kc + D_m k \operatorname{sh} kc + E_m kc \operatorname{ch} kc + E_m \operatorname{sh} kc + F_m kc \operatorname{sh} kc + F_m \operatorname{ch} kc = \frac{A_m}{k};$$

$$C_m k \operatorname{ch} kc - D_m k \operatorname{sh} kc - E_m kc \operatorname{ch} kc - F_m \operatorname{sh} kc + F_m kc \operatorname{sh} kc + F_m \operatorname{ch} kc = \frac{A_m}{k};$$

$$C_m \operatorname{sh} kc + D_m \operatorname{ch} kc + E_m c \operatorname{sh} kc + F_m c \operatorname{ch} kc = 0;$$

$$-C_m \operatorname{sh} kc + D_m \operatorname{ch} kc + E_m c \operatorname{sh} kc - F_m c \operatorname{ch} kc = 0;$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} C_m &= -\frac{A_m}{k} \cdot \frac{c \operatorname{ch} kc}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc}; \\ D_m &= 0; \\ E_m &= 0; \\ F_m &= +\frac{A_m}{k} \cdot \frac{\operatorname{sh} kc}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Напряжения будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= \sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky + 2 \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \cos kx; \\ \sigma_y^{(2)} &= -\sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \cos kx; \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{ch} ky + \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \sin kx. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Полные напряжения, получающиеся вследствие действия приложенных нами дополнительно нагрузок, будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (40)$$

Определим соответствующие перемещения:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_1^{\infty} A_n \frac{(pl \operatorname{ch} pl + \operatorname{sh} pl) \operatorname{ch} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \sin py + \\ &+ \sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky + 2 \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \cdot \cos kx - \\ &- \mu \sum_1^{\infty} A_n \frac{px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px + (\operatorname{sh} pl - pl \operatorname{ch} pl) \operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \sin py + \\ &+ \mu \sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \cos kx, \end{aligned}$$

откуда

$$Eu = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{p (\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl)} \cdot \{ (1 + \mu) pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - (1 + \mu) px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px + \\ + 2 \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px \} \sin py +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{k (\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc)} \cdot \{ ky \operatorname{sh} kc (1 + \nu) \operatorname{ch} ky - (1 + \nu) kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky + \\ + 2 \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky \} \sin kx + f_3(y); \quad (41)$$

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_1^{\infty} A_n \frac{px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px + (\operatorname{sh} pl - pl \operatorname{ch} pl) \operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \sin py + \\ + \sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \cos kx - \\ - \mu \sum_1^{\infty} A_n \frac{(pl \operatorname{ch} pl + \operatorname{sh} pl) \operatorname{ch} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \sin py - \\ - \nu \sum_1^{\infty} A_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky + 2 \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \cos kx;$$

откуда

$$Ev = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{p (\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl)} \{ (1 + \nu) pl \operatorname{ch} pl \operatorname{ch} px - \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px + \mu \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px - \\ - px \operatorname{sh} pl (1 + \nu) \operatorname{sh} px \} \cdot \cos py - \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{k (\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc)} \{ ky \operatorname{sh} kc (1 + \nu) \operatorname{sh} ky - \\ - (1 + \nu) \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - (1 + \nu) kc \operatorname{ch} kc \operatorname{ch} ky + 2 \nu \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky \} \cos kx + f_4(x). \quad (42)$$

Воспользовавшись равенством:

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{xy}$$

получим

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_n}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \{ (1 + \nu) pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - (1 + \nu) px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px + \\ + 2 \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px \} \cos py + \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \{ ky \operatorname{sh} kc (1 + \nu) \operatorname{sh} ky + \\ + (1 + \nu) \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - (1 + \nu) kc \operatorname{ch} kc \operatorname{ch} ky + 2 \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky \} \sin kx + \frac{df_3}{dy} + \\ + \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \{ pl \operatorname{ch} pl (1 + \nu) \operatorname{sh} px - \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px + \nu \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px - \\ - px \operatorname{sh} pl (1 + \nu) \operatorname{ch} px - (1 + \nu) \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px \} \cos py +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \{ ky \operatorname{sh} kc (1 + \mu) \operatorname{sh} ky - (1 + \mu) \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - \\
& - (1 + \mu) kc \operatorname{ch} kc \operatorname{ch} ky + 2\mu \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky \} \sin kx + \frac{df_4}{dx} = \\
& = 2(1 + \mu) \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \{ pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px \} \cos py + \\
& + 2(1 + \mu) \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} \{ ky \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{ch} ky + \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky \} \times \\
& \times \sin kx;
\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{df_3}{dy} + \frac{df_4}{dx} = 0 \quad (43)$$

или

$$\frac{df_3}{dy} = n_1; \quad \frac{df_4}{dx} = m_1; \quad m_1 + n_1 = 0; \quad (44)$$

$$f_3 = n_1 y + \gamma_1; \quad f_4 = m_1 x + \delta_1. \quad (45)$$

Величины n_1 и γ_1 определим так же, как выше определяли величины n и γ .

Вследствие симметрии при $x = 0$

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

откуда

$$n_1 = 0 \text{ и } \gamma_1 = 0.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
Eu = & \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{p(\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl)} \{ pl \operatorname{ch} pl (1 + \mu) \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl (1 + \mu) \operatorname{ch} px + \\
& + 2 \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px \} \sin py + \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{k(\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc)} \{ ky \operatorname{sh} kc (1 + \mu) \operatorname{ch} ky - \\
& - kc \operatorname{ch} kc (1 + \mu) \operatorname{sh} ky + 2 \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky \} \sin kx.
\end{aligned} \quad (41a)$$

При $x = \pm l$

$$Eu_l = -Eu_{-l} = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{p(\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl)} 2 \operatorname{sh}^2 pl \sin py. \quad (46)$$

Чтобы определить коэффициенты A_n , разложим полученное выше выражение (26) для перемещений точек опорного сечения в тригонометрический ряд по синусам.

Коэффициенты ряда будут:

$$A_0 = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} f(y) dy = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{ql}{6J} (2 + \mu) (y^2 - c^2) y dy = 0;$$

$$A_n' = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(y) \sin py dy = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} \frac{ql}{6J} (2 + \mu) (y^2 - c^2) y \sin py dy;$$

$$A_n' = -\frac{2ql}{p^3 J} (2 + \mu) (-1)^{n+1}. \quad (47)$$

Следовательно

$$Eu_i^{(0)} = \sum_1^{\infty} A_n' \sin py = \sum_1^{\infty} -\frac{2ql}{p^3 J} (2 + \mu) (-1)^{n+1} \sin py. \quad (48)$$

Подберем теперь коэффициенты A_n так, чтобы перемещения u_i точек опорного сечения равнялись нулю, т. е.

$$\sum_1^{\infty} -\frac{2ql}{p^3 J} (2 + \mu) (-1)^{n+1} \sin py + \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{p} \cdot \frac{2 \operatorname{sh}^2 pl}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} \cdot \sin py = 0;$$

откуда

$$-\frac{2ql}{p^3 J} (2 + \mu) (-1)^{n+1} + \frac{A_n}{p} \cdot \frac{2 \operatorname{sh}^2 pl}{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl} = 0;$$

и

$$A_n = \frac{ql(2 + \mu) (\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl)}{p^3 J \operatorname{sh}^2 pl} (-1)^{n+1}. \quad (49)$$

Приняв во внимание, что $J = \frac{2}{3} c^2$; $p^2 = \frac{n^2 \pi^2}{c^2}$, и обозначив величину $\frac{l}{c}$ через α , получим:

$$A_n = \frac{3(2 + \mu)}{2\pi^2} \cdot \alpha \frac{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} (-1)^{n+1} \cdot q. \quad (49a)$$

Величину $\frac{3(2 + \mu)}{2\pi^2} \cdot \alpha$ обозначим через N ; тогда

$$A_n = N \cdot q \frac{\operatorname{sh} pl \operatorname{ch} pl + pl}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} (-1)^{n+1}. \quad (49b)$$

Касательные напряжения $\tau_{xy}^{(1)*}$ по граням $y = \pm c$ будут:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)*} &= qN \sum_1^{\infty} \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^3 pl} (-1)^{2n+1} = \\ &= -qN \sum_1^{\infty} \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^3 pl}. \end{aligned} \quad (50)$$

Как было указано выше, напряжения τ_{xy}^{**} должны быть равны напряжениям $\tau_{xy}^{(1)*}$ с обратным знаком, т. е.

$$\sum_1^{\infty} A_m \sin kx = qN \sum_1^{\infty} \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl}.$$

Чтобы определить коэффициенты A_m , разложим выражение (50) с обратным знаком в тригонометрический ряд по синусам kx .¹

Коэффициенты ряда будут:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} qN \sum_1^{\infty} \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} dx = 0; \\ A_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} qN \sum_1^{\infty} \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} \sin kx dx = \\ &= \frac{qN}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p^2 k}{n^2(p^2 + k^2)^2} (-1)^{m+1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Подставив вместо p и k их значения, получим:

$$A_m = \frac{4Nq}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{\left(n^2 + \frac{m^2}{a^2}\right)^2} (-1)^{m+1}. \quad (51a)$$

Обозначив величину $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{\left(n^2 + \frac{m^2}{a^2}\right)^2}$ через B_m , получим:

$$A_m = \frac{4Nq}{\pi a^2} B_m (-1)^{m+1}. \quad (51b)$$

Подставив найденные значения A_n и A_m в выражения (32) и (39) для напряжений, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= qN \sum_1^{\infty} \frac{(pl \operatorname{ch} pl + \operatorname{sh} pl) \operatorname{ch} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} (-1)^{n+1} \sin py; \\ \sigma_y^{(1)} &= qN \sum_1^{\infty} \frac{px \operatorname{sh} pl \operatorname{sh} px + (\operatorname{sh} pl - pl \operatorname{ch} pl) \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} (-1)^{n+1} \sin py; \\ \tau_{xy}^{(1)} &= qN \sum_1^{\infty} \frac{pl \operatorname{ch} pl \operatorname{sh} px - px \operatorname{sh} pl \operatorname{ch} px}{n^2 \operatorname{sh}^2 pl} (-1)^{n+1} \cos py; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

¹ Как нетрудно убедиться, ряд (50) — равномерно сходящийся и удовлетворяет условиям Дирихле.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= q \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^\infty B_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky + (2 \operatorname{sh} kc - kc \operatorname{ch} kc) \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} (-1)^{m+1} \cos kx \\ \sigma_y^{(1)} &= q \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^\infty -B_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} (-1)^{m+1} \cos kx \\ \tau_{xy}^{(2)} &= q \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^\infty B_m \frac{ky \operatorname{sh} kc \operatorname{sh} ky - kc \operatorname{ch} kc \operatorname{ch} ky + \operatorname{sh} kc \operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kc \operatorname{ch} kc - kc} (-1)^{m+1} \sin kx \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Полные напряжения будут:

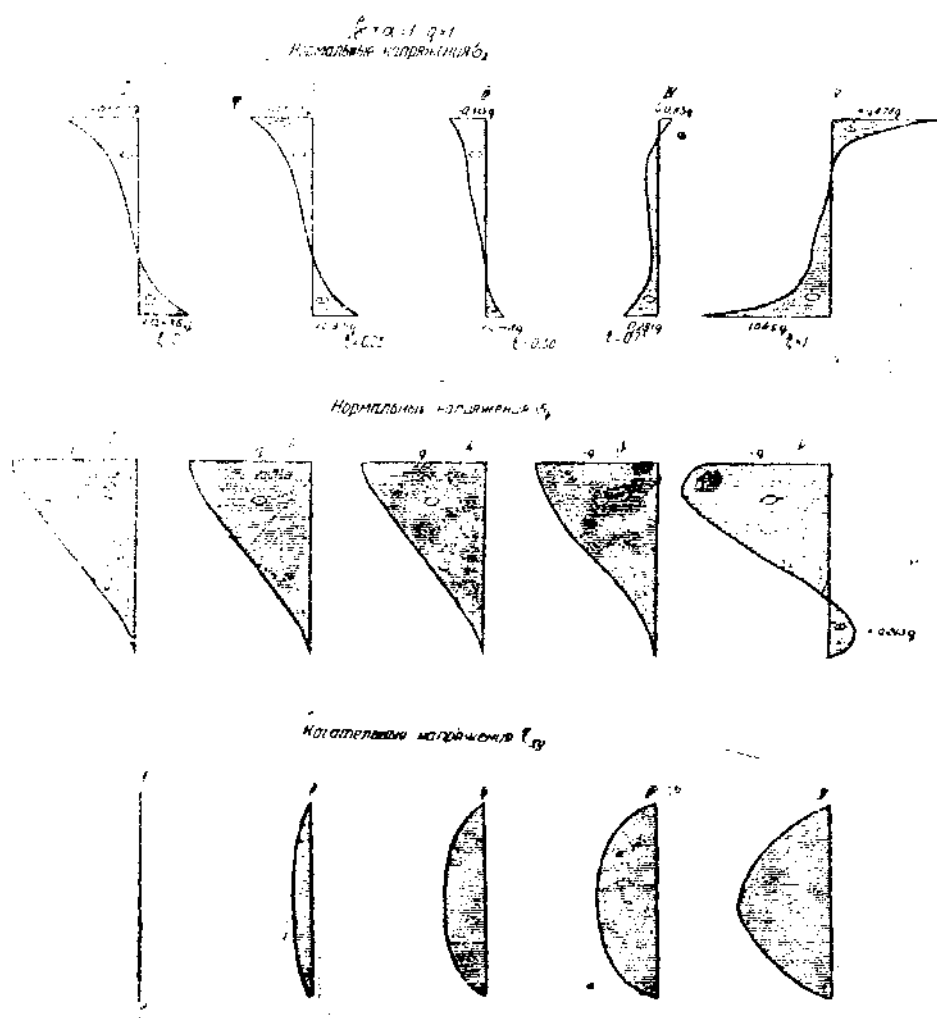
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}; \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Введя новые переменные $\xi = \frac{x}{l}$ и $\eta = \frac{y}{c}$, подставив значение $p = \frac{n\pi}{c}$, $k = \frac{m\pi}{l}$ и обозначив величины $pl = n\pi\alpha$ через φ и $kc = \frac{m\pi}{\alpha}$ через ψ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{2} \left\{ \eta^3 + \frac{\alpha^2}{2} (1 - 3\xi^2) \eta - (1 - \mu) \cdot \eta - \mu \right\} + \\ &+ qN \sum_1^\infty \frac{(\varphi \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{ch} \varphi \xi - \varphi \xi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \varphi \xi}{n^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} (-1)^{n+1} \sin \frac{\varphi}{\alpha} \eta + \\ &+ q \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^\infty B_m \frac{\phi \eta \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \phi \eta + (2 \operatorname{sh} \psi - \psi \operatorname{ch} \psi) \operatorname{sh} \phi \eta}{\operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi - \psi} (-1)^{m+1} \cos \psi \alpha \xi; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(\frac{1}{2} \eta^3 - \frac{3}{2} \eta + 1 \right) - \\ &- qN \sum_1^\infty \frac{(\varphi \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{ch} \varphi \xi - \varphi \xi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \varphi \xi}{n^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} (-1)^{n+1} \sin \frac{\varphi}{\alpha} \eta - \\ &- q \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^\infty B_m \frac{\phi \eta \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \phi \eta - \psi \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} \phi \eta}{\operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi - \psi} (-1)^{m+1} \cos \psi \alpha \xi; \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4} \cdot \alpha (1 - \eta^2) \xi + \\ &+ qN \sum_1^\infty \frac{\varphi \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi \xi - \varphi \xi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi \xi}{n^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} (-1)^{n+1} \cos \frac{\varphi}{\alpha} \eta + \\ &+ q \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^\infty B_m \frac{\phi \eta \operatorname{sh} \psi \operatorname{sh} \phi \eta + (\operatorname{sh} \psi - \psi \operatorname{ch} \psi) \operatorname{ch} \phi \eta}{\operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi - \psi} (-1)^{m+1} \sin \psi \alpha \xi. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

По формулам (55) были вычислены напряжения по сечениям

$\xi = 0$; $\xi = 0,25$; $\xi = 0,50$; $\xi = 0,75$ и $\xi = 1$ в случае $\alpha = \frac{l}{c} = 1$.



Фиг. 2.

Распределение напряжений по указанным сечениям изображено на фиг. 2

Взяв за скобки величину q , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x = q \left\{ \frac{1}{2} \left[\eta^3 - \frac{\alpha^2}{2} (1 - 3\xi^2) \eta - (1 - \mu) \eta - \mu \right] + \right. \\ \left. + N \sum_1^{\infty} \frac{(\psi \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{ch} \varphi \xi - \psi \xi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \varphi \xi}{n^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} (-1)^{n-1} \sin \frac{\varphi}{\alpha} \eta + \right. \\ \left. + \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^{\infty} B_m \frac{\psi \eta \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi \eta + (2 \operatorname{sh} \psi - \psi \operatorname{sh} \psi) \operatorname{sh} \psi \eta}{\operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi - \psi} (-1)^{m+1} \cos \psi \alpha \xi \right\}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y = q \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{3}{2} \eta + 1 \right) - \right. \\
 - N \sum_1^{\infty} \frac{(\psi \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{ch} \varphi \xi - \varphi \xi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \varphi \xi}{n^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} (-1)^{n-1} \sin \frac{\varphi}{\alpha} \eta - \\
 - \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^{\infty} B_m \frac{\psi \eta \operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi \eta - \psi \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} \psi \eta}{\operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi - \psi} (-1)^{m+1} \cos \psi \alpha \xi \left. \right\}; \\
 \tau_{xy} = q \left\{ -\frac{3\alpha}{4} (1 - \eta^2) \xi + \right. \\
 + N \sum_1^{\infty} \frac{\psi \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi \xi - \varphi \xi \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi \xi}{n^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} (-1)^{n-1} \cos \frac{\varphi}{\alpha} \eta + \\
 + \frac{4N}{\pi \alpha^2} \sum_1^{\infty} B_m \frac{\psi \eta \operatorname{sh} \psi \operatorname{sh} \psi \eta + (\operatorname{sh} \psi - \psi \operatorname{ch} \psi) \operatorname{ch} \psi \eta}{\operatorname{sh} \psi \operatorname{ch} \psi - \psi} (-1)^{m+1} \sin \psi \alpha \xi \left. \right\}. \quad (56)
 \end{aligned}$$

В таблицах 1, 2 и 3 приведены значения нормальных и касательных напряжений, вычисленных при $q = 1$ для значений $\frac{l}{c} = \alpha; 0,5, 1$ и 2 .^{*} Коэффициент Пуассона μ при вычислениях принят равным $\frac{1}{6}$.

Для вычисления напряжений при любых значениях q нужно, согласно формулам (56), приведенные в таблицах значения σ_x , σ_y и τ_{xy} умножить на q .

На чертеже (2) представлены графики нормальных и касательных напряжений при $\alpha = \frac{l}{c} = 1$.

Днепропетровск. Июль — август 1935 г.

* Эти вычисления привела Н. Топа.

Таблица 1

$$\alpha = \frac{l}{c} = 0,5$$

$$q = 1; \quad \mu = \frac{1}{6}$$

	1	10	19	28	37
	2	11	20	29	38
	3	12	21	30	39
	4	13	22	31	40
	5	14	23	32	41
	6	15	24	33	42
	7	16	25	34	43
	8	17	26	35	44
	9	18	27	36	45
	I	II	III	IV	V
2l					

№ точек	I сечение			№ точек	II сечение			№ точек	III сечение			№ точек	IV сечение			№ точек	V сечение		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	-0,306	-1	0	10	-0,206	-1	0	19	-0,216	-1	0	28	-0,045	-1	0	37	+0,104	-1	0
2	-0,188	-0,928	0	11	-0,182	-0,930	-0,056	20	-0,167	-0,935	-0,107	29	-0,142	-0,971	-0,141	38	-0,092	-1,091	-0,164
3	-0,158	-0,801	0	12	-0,157	-0,807	-0,068	21	-0,148	-0,827	-0,135	30	-0,129	-0,872	-0,203	39	-0,092	-0,944	-0,281
4	-0,125	-0,656	0	13	-0,123	-0,661	-0,076	22	-0,117	-0,675	-0,157	31	-0,106	-0,702	-0,247	40	-0,087	-0,759	-0,351
5	-0,083	-0,500	0	14	-0,083	-0,500	-0,080	23	-0,083	-0,590	-0,165	32	-0,083	-0,500	-0,260	41	-0,083	-0,500	-0,375
6	-0,041	-0,343	0	15	-0,043	-0,339	-0,076	24	-0,049	-0,325	-0,157	33	-0,060	-0,298	-0,247	42	-0,079	-0,241	-0,351
7	-0,008	-0,199	0	16	-0,010	-0,193	-0,068	25	-0,018	-0,173	-0,135	34	-0,037	-0,128	-0,203	43	-0,074	-0,056	-0,281
8	+0,021	-0,072	0	17	+0,016	-0,070	-0,056	26	+0,001	-0,061	-0,107	35	-0,025	-0,028	-0,141	44	-0,074	+0,091	-0,164
9	+0,140	0	0	18	+0,129	0*	0	27	+0,050	0	0	36	-0,122	0	0	45	-0,271	0	0

Таблица 2

$$\alpha = \frac{l}{c} = 1$$

$$q = 1; \quad \mu = \frac{1}{6}$$

№ точек	I сечение			II сечение			№ точек	сечение			№ точек	IV сечение			V сечение		
	σ_z	σ_y	τ_{xy}	σ_z	σ_y	τ_{xy}		σ_z	σ_y	τ_{xy}		σ_z	σ_y	τ_{xy}	σ_z	σ_y	τ_{xy}
1	-0,602	-1	0	-0,537	-1	0	19	-0,315	-1	0	28	+0,115	-1	0	+0,878	-1	0
2	-0,323	-0,943	0	-0,289	-0,939	-0,105	20	-0,187	-0,928	-0,216	29	-0,047	-0,937	-0,318	+0,132	-1,213	-0,328
3	-0,197	-0,813	0	-0,187	-0,802	-0,147	21	-0,158	-0,801	-0,290	30	-0,111	-0,846	-0,418	-0,013	-1,093	-0,502
4	-0,132	-0,659	0	-0,131	-0,656	-0,157	22	-0,125	-0,656	-0,310	31	-0,105	-0,694	-0,471	-0,023	-0,829	-0,703
5	-0,083	-0,500	0	-0,083	-0,500	-0,158	23	-0,083	-0,500	-0,315	32	-0,083	-0,500	-0,480	-0,083	-0,500	-0,750
6	-0,034	-0,341	0	-0,036	-0,343	-0,157	24	-0,041	-2,343	-0,310	33	-0,061	-0,305	-0,471	-0,144	-0,170	-0,703
7	+0,031	-0,186	0	+0,020	-0,192	-0,147	25	-0,008	-0,199	-0,290	34	-0,055	-0,153	-0,418	-0,180	-0,093	-0,562
8	+0,157	-0,057	0	+0,122	-0,061	-0,105	26	+0,020	-0,072	-0,216	35	-0,120	-0,062	-0,318	-0,298	+0,213	-0,328
9	+0,435	0	0	+0,371	0	0	27	+0,148	0	0	36	-0,281	0	0	-1,045	0	0

Таблица 3

$$\alpha = \frac{l}{c} = 2$$

$$q = 1; \quad \mu = \frac{1}{6}$$

№ точек	I сечение			№ точек	II сечение			№ точек	III сечение			№ точек	IV сечение			V сечение		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}		σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	-1,376	-1	0	10	-1,201	-1	0	10	-0,598	-1	0	28	+0,557	-1	0	+3,051	-1	0
2	-0,885	-0,963	0	11	-0,733	-0,907	-0,153	20	-0,259	-0,976	-0,304	29	+3,500	-0,957	-0,488	+6,665	-0,960	-0,656
3	-0,532	-0,952	0	12	-0,427	-0,856	-0,286	21	-0,109	-0,860	-0,578	30	+0,398	-0,821	-0,882	+1,012	-0,904	-1,125
4	-0,282	-0,693	0	13	-0,220	-0,604	-0,363	22	-0,071	-0,690	-0,730	31	+0,158	-0,663	-1,081	+0,476	-0,704	-1,406
5	-0,083	-0,500	0	14	-0,083	-0,500	-0,389	23	-0,083	-0,500	-0,781	32	-0,083	-0,500	-1,146	-0,083	-0,500	-1,500
6	+0,115	-0,307	0	15	+0,062	-0,306	-0,363	24	-0,093	-0,309	-0,736	33	-0,325	-0,337	-1,081	-0,643	-0,296	-1,406
7	+0,365	-0,148	0	16	+0,261	-0,144	-0,286	25	-0,058	-0,140	-0,578	34	-0,505	-0,179	-0,882	-1,176	-0,096	-1,125
8	+0,718	-0,037	0	17	+0,566	-0,033	-0,153	26	+0,092	-0,023	-0,304	35	-0,763	-0,043	-0,488	-1,832	-0,037	-0,656
9	+1,210	0	0	18	+1,034	0	0	27	+0,431	0	0	36	-0,723	0	0	-3,218	0	0

ПОДБОР АРМАТУРЫ ПРИ КОСОМ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТОЕК ДЛЯ СЛУЧАЯ МАЛЫХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ

§ 1. Вывод основных формул

Рассмотрим стойку прямоугольного сечения $b \times d$, которая сжимается продольной силой N и одновременно изгибается произвольным косым моментом; последний при разложении на направления главных осей, дает составляющие M_x и M_y ; другими словами, сила N приложена в произвольной точке сечения с координатами:

$$e_x = \frac{M_y}{N} \quad \text{и} \quad e_y = \frac{M_x}{N}. \quad (1)$$

Требуется подобрать наиболее выгодным образом арматуру стойки в обоих направлениях при заданных размерах сечения и при известных значениях усилий.

Предложенная задача решается сравнительно несложно при малых эксцентриситетах, когда сила N не выходит из пределов ядра сечения, и притом для случая попарно симметричной арматуры.

Введем следующие обозначения: $f_x = f'_x = \rho_x bd$ — площадь арматуры в направлении оси x ; $f_y = f'_y = \rho_y bd$ — площадь арматуры в направлении оси y ; $a_x = a'_x$ — расстояние центра сечения арматуры f_x и f'_x до ближайшей грани бетона; $a_y = a'_y$ — аналогичное расстояние для арматуры f_y и f'_y .

Тогда наибольшее напряжение бетона при работе всего сечения (случай малого эксцентриситета):

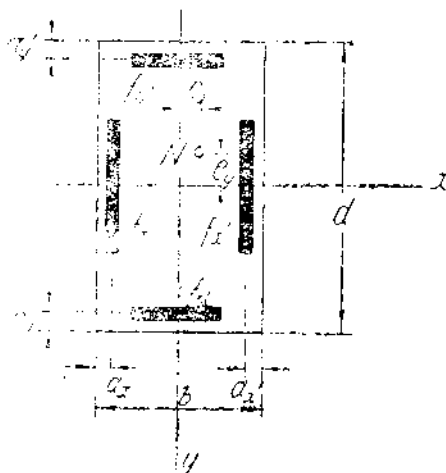
$$\sigma_{b, \max} = \frac{N}{F_l} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_x}{W_x}, \quad (2)$$

где приведенная площадь сечения:

$$F_l = bd + 2nf_x + 2nf_y = bd \left[1 + 2n(\rho_x + \rho_y) \right]; \quad (3)$$

приведенный момент сопротивления относительно оси y :

$$\begin{aligned} W_y &= \frac{db^3}{6} + 2nf_x \frac{\left(\frac{b}{2} - a_x \right)^2 \cdot 2}{b} = \\ &= db^2 \left[\frac{1}{6} + 4n\rho_x \left(\frac{1}{2} - \frac{a_x}{b} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (4)$$



Фиг. 1.

аналогично, приведенный момент сопротивления относительно оси x :

$$W_x = bd^2 \left[\frac{1}{6} + 4n_{vy} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_y}{d} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Обозначим выражение $4 \left(\frac{1}{2} - \frac{a_x}{b} \right)^2 = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{a_y}{d} \right)^2$ через γ ; кроме того, обозначим отношение $\frac{e_x}{b}$ и $\frac{e_y}{d}$ соответственно через α и β . Тогда основное выражение (2) перепишется следующим образом:

$$\sigma_{b \max} = \frac{N}{bd} \left[\frac{1}{1 + 2n(\mu_x + \mu_y)} + \frac{6\alpha}{1 + 6\gamma n\mu_x} + \frac{6\beta}{1 + 6\gamma n\mu_y} \right]. \quad (6)$$

Приняв во внимание, что выражение $\frac{\sigma_b bd}{N}$ является модулем, использованным Залигером при составлении его известных таблиц, и обозначив для простоты этот модуль буквой c , получим выражение:

$$\frac{1}{1 + 2n(\mu_x + \mu_y)} + \frac{6\alpha}{1 + 6\gamma n\mu_x} + \frac{6\beta}{1 + 6\gamma n\mu_y} - c = 0. \quad (7)$$

Интересующая нас задача сводится, очевидно, к определению минимума функции:

$$v = \mu_x + \mu_y$$

при ограничении ее условием (7).

Для разрешения задачи воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, служащим для определения так называемых относительных max и min функций.

По Лагранжу, введя некоторый неопределенный множитель λ , составим функцию U :

$$U = \mu_x + \mu_y + \lambda \left[\frac{1}{1 + 2n(\mu_x + \mu_y)} + \frac{6\alpha}{1 + 6\gamma n\mu_x} + \frac{6\beta}{1 + 6\gamma n\mu_y} - c \right], \quad (8)$$

причем:

$$\frac{\partial U}{\partial \mu_x} = 1 - \lambda \left[\frac{2n}{K[1 + 2n(\mu_x + \mu_y)]^2} + \frac{36\alpha\gamma n}{(1 + 6\gamma n\mu_x)^2} \right] = 0. \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mu_y} = 1 - \lambda \left[\frac{2n}{[1 + 2n(\mu_x + \mu_y)]^2} + \frac{36\beta\gamma n}{(1 + 6\gamma n\mu_y)^2} \right] = 0. \quad (10)$$

Решая совместно уравнения (9) и (10), получаем:

$$\frac{\alpha}{(1 + 6\gamma n\mu_x)^2} = \frac{\beta}{(1 + 6\gamma n\mu_y)^2}$$

или

$$\frac{1 + 6\gamma n\mu_x}{1 + 6\gamma n\mu_y} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (11)$$

Избавившись от неопределенного множителя, мы решаем последнее выражение совместно с основным уравнением (7); в результате этого получаем следующие выражения для определения искомой наивыгоднейшей площади арматуры, как в одном, так и в другом направлении:

$$12 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + 1 \right) \gamma c n^2 \mu_x^2 + \left[6\gamma(1 - c) + 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + 1 \right) \left(c - 6 \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha\beta}} - 6\alpha \right) + \right.$$

$$+ \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) 2c \left[n\mu_x + c - 6 \left(\sqrt{\alpha\beta} + \alpha \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1}{3\gamma} \left(c - \frac{2}{\gamma} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) \left(\sqrt{\alpha\beta} + \alpha \right) - 1 \right) \right] = 0; \quad (12)$$

$$12 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + 1 \right) \gamma c n^2 \mu_y^2 + \left[6\gamma (1 - c) + 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + 1 \right) \left(c - 6 \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha\beta}} - 6\beta \right) + \right. \\ \left. + \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) 2c \right] n\mu_y + c - 6 \left(\sqrt{\alpha\beta} + \beta \right) + \\ + \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1}{3\gamma} \left(c - \frac{2}{\gamma} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right) \left(\sqrt{\alpha\beta} + \beta \right) - 1 \right) = 0. \quad (13)$$

§ 2. Таблицы для подбора арматуры

Выражения (12) и (13) служат для отыскания наиболее выгодного процента содержания арматуры μ_x и μ_y как и в одном, так и в другом направлении при условии, что противоположная арматура попарно симметрична, и что в сечении стойки еще не возникают растягивающие напряжения (случай малых эксцентриситетов). Указанный случай соответствует примерно критерию:

$$\alpha + \beta \leq 0,20. \quad (14)$$

Область применения метода можно было бы распространить и на те случаи косога внецентренного сжатия, когда растягивающие напряжения еще невелики и когда, следовательно, согласно Т. У., допускается считать сечение работающим полностью, включая и растянутую зону. Однако из-за недостатка места, мы приведем здесь таблицу лишь для случая, ограниченного критерием (14).

При составлении таблицы, аналогично таблицам Залигера, принято, что

$$\frac{a_x}{b} = \frac{a_y}{d} = 0,08.$$

Величина модуля c принята в пределах от $c = 1,00$ до $c = 2,00$, соответственно практически допустимым значениям получающегося количества арматуры.

При малых значениях эксцентриситета может оказаться, что количество соответствующей арматуры по формулам (12) и (13) получается отрицательным.

В действительности, очевидно, этой арматуры не приходится ставить вовсе, и поэтому этот случай исключен из таблиц. Количество же арматуры перпендикулярного направления в этом случае определяется следующим образом.

Допустим, что один из относительных эксцентриситетов, например, $\frac{e_x}{b}$, настолько мал, что при данном значении модуля c количество арматуры μ_x по формуле (12) получается отрицательным (случай не укладывается в таблицу). Тогда, положив в уравнении (7) $\mu_x = 0$, получаем:

$$\frac{1}{1 + 2n\mu_y} + 6\alpha + \frac{6\beta}{1 + 6\gamma n\mu_y} - c = 0.$$

$$\frac{1}{1 + 2n\mu_y} + \frac{6\beta}{1 + 6\gamma n\mu_y} = c - 6 \frac{e_x}{b}. \quad (15)$$

Последнее выражение соответствует случаю простого (не косою) внецентренного сжатия с той разницей, что, вместо обычного модуля $c = \frac{\sigma_b b d}{N}$, в правой части формулы (15) стоит выражение:

$$c' = c - 6 \frac{e_x}{b}. \quad (16)$$

Таким образом, к рассматриваемому случаю целиком применима теория простого внецентренного сжатия при малом эксцентриситете, но с поправкой к модулю (16). Очевидно, для подбора арматуры μ_y в этом случае могут быть использованы известные таблицы Залигера, при том, однако, условии, что вместо обычного модуля

$$c = \frac{\sigma_b b d}{N},$$

будет принят при подборе арматуры

$$c' = \frac{\sigma_b b d}{N} - 6 \frac{e_x}{b}.$$

Таблица для подбора арматуры стоек при косом внецентренном сжатии, при малых эксцентриситетах: $\frac{e_x}{b} + \frac{e_y}{a} \leq 0,20$ и двойной попарно симметричной арматуре $n = 15$

$\frac{e_x}{b}$ и $\frac{e_y}{a}$	$c = \frac{\sigma_b b d}{N}$										
	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
	арматура $f_x = f_x'$ и $f_y = f_y'$ в процентах										
0,03	0,35	0,20	0,03	0,00	—	—	—	—	—	—	—
0,04	0,65	0,45	0,27	0,13	0,00	—	—	—	—	—	—
0,05	0,91	0,68	0,49	0,32	0,19	0,06	—	—	—	—	—
0,06	1,15	0,90	0,69	0,50	0,36	0,22	0,10	—	—	—	—
0,07	1,36	1,10	0,87	0,67	0,52	0,36	0,23	0,13	—	—	—
0,08	1,56	1,29	1,04	0,83	0,67	0,59	0,36	0,25	0,15	—	—
0,09	1,76	1,46	1,20	0,98	0,80	0,62	0,48	0,36	0,25	0,16	—
0,10	1,94	1,62	1,36	1,12	0,92	0,74	0,59	0,46	0,35	0,25	0,16
0,11	2,12	1,78	1,50	1,25	1,06	0,96	0,69	0,56	0,45	0,34	—
0,12	2,28	1,92	1,64	1,39	1,17	0,98	0,83	0,68	0,56	—	—
0,13	2,43	2,06	1,75	1,51	1,28	1,07	0,91	0,76	—	—	—
0,14	2,58	2,20	1,88	1,62	1,33	1,17	0,99	—	—	—	—
0,15	2,73	2,34	2,00	1,73	1,48	1,26	—	—	—	—	—
0,16	2,88	2,48	2,12	1,84	1,58	—	—	—	—	—	—
0,17	3,03	2,62	2,24	1,95	—	—	—	—	—	—	—

Примечание. Количество потребной арматуры в обоих направлениях $f_x = f_x'$ и $f_y = f_y'$ определяется по одной и той же таблице, которая дает сразу наилучшее сочетание обеих арматур

$$f_x + f_y = \min.$$

Если данный числовой пример не укладывается в таблицу, то это означает, что арматуры в одном из направлений не требуется вовсе. В этом случае подбор ведется по таблицам Залигера, как для случая простого внецентренного сжатия, при

$$c' = c - 6 \frac{e_x}{b}.$$

Пример 1-й. $b=40$ см, $d=60$ см, $N=80$ т, $M_x=2$ тм, $M_y=5$ тм. Требуется подобрать арматуру при допускаемом напряжении $\sigma_b=50$ кг/см².

$$c = \frac{40 \cdot 60 \cdot 50}{80000} = 1,50;$$

$$\frac{e_x}{b} = \frac{2,0}{30,0 \cdot 0,40} = 0,0625;$$

по интерполяции

$$f_x = f_x' = 0,255 \cdot \frac{40 \cdot 60}{100} = 6,12 \text{ см}^2;$$

$$\frac{e_y}{d} = \frac{5,0}{80,0 \cdot 0,60} = 0,104;$$

по интерполяции

$$f_y = f_y' = 0,828 \cdot \frac{40 \cdot 60}{100} = 19,86 \text{ см}^2.$$

Проверка:

$$F_i = 40 \cdot 60 + 2 \cdot 15 (6,12 + 19,86) = 2400 + 780 = 3180 \text{ см}^2;$$

$$J_x = \frac{40 \cdot 60^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 19,86 \left(\frac{60}{2} - 5 \right)^2 = 720000 + 372000 = 1092000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{60 \cdot 40^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 6,12 \left(\frac{40}{2} - 5 \right)^2 = 320000 + 41300 = 361300 \text{ см}^4;$$

$$\sigma_{b \max} = \frac{80000}{3180} + \frac{500000 \cdot 30}{1092000} + \frac{200000 \cdot 20}{361300} =$$

$$= 25,2 + 13,7 + 11,1 = 50 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{b \min} = 25,2 - 13,7 - 11,1 = 0,4 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 2-й

$$b=30 \text{ см}, \quad d=50 \text{ см}, \quad N=50 \text{ т},$$

$$M_x=0,5 \text{ тм}, \quad M_y=4 \text{ тм}.$$

Требуется подобрать арматуру при допускаемом напряжении $\sigma_b=60$ кг/см²

$$c = \frac{30 \cdot 50 \cdot 60}{50000} = 1,80;$$

$$\frac{e_y}{d} = \frac{4,0}{50,0 \cdot 0,5} = 0,16;$$

$$\frac{e_x}{b} = \frac{0,5}{50,0 \cdot 0,3} = 0,033.$$

Так как соответствующие числовые данные в таблице отсутствуют, то подбираем, согласно примечанию, только арматуру по табл. Залигера, при $\frac{e_y}{d} = 0,16$ см:

$$c' = c - 6 \frac{e_x}{b} = 1,80 - 6 \cdot 0,033 = 1,50;$$

Проверка: $f_y = f_y' = 0,005 \cdot 30 \cdot 50 = 7,50 \text{ см}^2.$

$$F_l = 30 \cdot 50 + 2 \cdot 15 \cdot 7,50 = 1500 + 225 = 1725 \text{ см}^2;$$

$$J_x = \frac{30 \cdot 50^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 7,5 \left(\frac{50}{2} - 4 \right)^2 = 412\,100 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{50 \cdot 30^3}{12} = 112\,500 \text{ см}^4;$$

$$\sigma_{b_{max}} = \frac{50\,000}{1725} + \frac{400\,000 \cdot 25}{412\,100} + \frac{50\,000 \cdot 15}{112\,500} =$$

$$= 29,0 + 24,3 + 6,7 = 60,0 \text{ кг/см}^2.$$

Так как $\frac{e_y}{d} + \frac{e_x}{b} = 0,16 + 0,033 = 0,193 < 0,20$, то растягивающие напряжения незначительны. Действительно,

$$\sigma_{b_{min}} = 29,0 - 24,3 - 6,7 = -2,0 \text{ кг/см}^2.$$

-404621-

Цена 5 руб.

Оглавление
и предметный

Р.С.



0000000561276

